



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de La Laguna

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

# "Planificación de Movimientos Óptimos de la Mano Izquierda de un Robot Violinista"

POR

**Ing. Amaury Jamir Meza Pérez**

## TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. José Alfonso Pámanes García**

**COMITÉ DE TESIS**

**Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila**

**Dr. Alejandro Enrique Dzul López**

**Dr. Francisco Jurado Zamarripa**

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (12)-TMCIE-2019

Torreón, Coahuila. México,

Junio 2019



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de La Laguna

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., 18/ Junio/2019  
Oficio: DEPI/CPCIE/107/2019  
Asunto: Autorización de  
impresión de tesis.

**C. Amaury Jamir Meza Pérez**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Planificación de Movimientos Óptimos de la Mano izquierda de un Robot Violinista"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (12)-TMCIE-2019**, para que proceda a la impresión del mismo.



**ATENTAMENTE**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA  
INSTITUTO TECNOLÓGICO

**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación  
del Instituto Tecnológico de la Laguna



Revolución y Av. Instituto Tecnológico de La Laguna, Col. Centro, C.P. 27000, Torreón, Coah.

Tel. 01 (871) 7051313 e-mail: [webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx](mailto:webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx)

[www.tecnm.mx](http://www.tecnm.mx) | <http://itlalaguna.tecnm.mx>





"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Torreón, Coah., 14/Junio/2019

**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**"Planificación de Movimientos Óptimos de la Mano Izquierda de un Robot Violinista"**

Desarrollado por el **C. Amaury Jamir Meza Pérez** con número de control **M1713014** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

**Dr. José Alfonso Pámanes García**  
**Asesor/Director de Tesis**

**Dr. Francisco Jurado Zamarripa**  
**Comité Tutorial**

**Dr. Víctor Adrián Santibañez Dávila**  
**Comité Tutorial**

**Dr. Alejandro Enrique Dzul López**  
**Comité Tutorial**



A mi mamá y mi hermana que siempre han estado conmigo.

Ojalá y estemos más tiempo juntos.

Este trabajo es el resultado de 2 años y medio de aprendizaje. No queda de lado agradecerlo.

Primero que nada, a la vida por el regalo del tiempo y las oportunidades para poder realizarlo, a mi asesor Dr. José Alfonso Pámanes García, que, sin él y el trabajo conjunto, su dedicación al desarrollo del tema, paciencia para explicar las cosas que eran difíciles de comunicar. Y todo el entusiasmo mostrado a lo largo de este tiempo no habría sido posible, y además de transmitir conocimientos que, aunque valiosos, no tienen comparación, con las opiniones sobre la vida que me compartió en este tiempo, y que nunca dejó de lado la importancia del trabajo en equipo, por citar un ejemplo, cuando me canalizaba con el M.C. Jesús Eduardo Proa Fierro quién siempre fue solidario.

Al Dr. Jesús A. Torres quién despertó mucha inquietud en mí por la investigación.

A mi generación M.C. Oscar Adrián González Medina, Quién me apoyo y orientó mucho académicamente cuando más difícil era para mí entender los temas con mucha disciplina y lanzándome a hacer las cosas con fuerza, determinación y brindándome incluso un espacio en su casa para trabajar, organizadamente y con más concentración. Junto a M.C. José Roberto Franco Jaramillo, quién siempre se tomó el tiempo para aclarar cualquier duda que no supiera resolver. M.C. Jorge Villalobos Chin, uno de los que más se preocupó por ayudarnos a la generación completa a salir adelante en los momentos estresantes. Al Ing. Rubén Hernández, quién siempre ha enseñado a todos a su alrededor a tener paciencia y calma frente a la tempestad.

A Omar Rodolfo Martínez de la Cruz, que, aunque no lo era, todo el tiempo fue muy cercano a nuestra generación y además siempre ha dedicado su tiempo para tratar de ayudar a las personas en lo que él cree que está bien.

A los amigos que conforman el posgrado y que nos buscamos mutuamente en nuestros cubículos para platicar de cualquier tontería, o en la comida nos dirigimos a acompañarnos a realizar dicha actividad con mucha naturalidad y soltura, para disfrutar del tiempo juntos y platicar nuestras experiencias e inquietudes, también se aprende mucho cuando no se está buscando explícitamente hacerlo.

Así como agradecer a las experiencias profesionales, de amistad y de vida que han hecho posible que sienta, como ha existido un cambio en mis conocimientos, y un aprendizaje basado en la acumulación y síntesis de experiencias.

A un nivel más familiar, a mi familia Mi mamá, mi hermana, mi abuelita, incluso a mi prima quién sigue cuidando a mi abuelita. Muchas de las veces no nos hacemos cuenta de lo valiosas que son las personas que siempre hemos pensado que van a estar ahí. Y es bueno tenerlas en cuenta mientras están en vida, por que todos solemos vivir la vida como si fuera eterna; y una palabra, un plato de comida caliente, un regaño, una mirada, un abrazo, un beso, nimiedades de esas que no tomamos en cuenta. Pueden sentirse como perder el mundo, a la ausencia.

De igual manera hay que agradecer a los instantes que se están sumando, en este momento y en el próximo inmediato, sin olvidar que el simple hecho de vivir deja secuelas. Y se debe de aprender de las sorpresas que tiene la vida preparadas a la vuelta de la esquina, por que al final de cuentas nos podremos llamar de mil formas, con muchos títulos, con muchos prefijos de posesión, y aunque lo que ya sucedió, quedó ya impreso para siempre en el telar tridimensional de la realidad, eso no quita de lado, que todos estamos aprendiendo día a día, a vivir la vida como seres humanos.

Hay que aspirar, solamente a la perfección tal, que nos permita dormir tranquilos en la noche, y despertar con ganas de realizar la tarea que hayamos elegido al día siguiente.

# Planificación de Movimientos Óptimos de la Mano Izquierda de un Robot Violinista

## Resumen

En este trabajo de tesis se presenta un método para la optimización del desempeño cinemático de los dedos de la mano izquierda de un robot al ejecutar notas en un violín. El enfoque propuesto permite determinar el emplazamiento de la palma de la mano a lo largo del diapasón del violín, y resolver la redundancia cinemática de los dedos activos para determinar sus posturas óptimas de tal manera que se maximice la *manipulabilidad* de los dedos. Se incluye la formulación matemática, y la descripción del software desarrollado en Matlab© para la puesta en marcha del método. El programa efectúa la simulación gráfica de los dedos, así como la emulación de las notas musicales que emite el violín virtual al ejecutar la melodía deseada. Se presentan varios casos de estudio de planificación de los movimientos óptimos de los dedos de la mano robótica que ilustran la efectividad del método.

## Optimal Motion Planning of a Violin-Player Robotic Left Hand

### Abstract

In this thesis an approach is presented to optimize the kinematic performance of the fingers of a violin-player robotic left-hand. The proposed method computes the placement of the hand on the violin's diapasón, and solves the kinematic redundancy of the fingers, in such a way that the *manipulability* of the fingers is maximized. The mathematical formulation of the method is included and a description is presented of the developed software in Matlab©. This one allows to accomplish the simulation of the fingers and emulates the sound of the achieved musical notes. Thus, the user can observe the animation of the hand and fingers and hearing the gotten sounds of the violin. The programming of motions is achieved by using a friendly graphic user interface based on the violin's diapasón. Several study cases are presented that illustrate the efficacy of the method.



# Planificación de Movimientos Óptimos de la Mano Izquierda de un Robot Violinista

## Índice del contenido

1. Introducción.....	1
2. Conceptos básicos de musicología del violín .....	11
2.1 Concepto del sonido .....	11
2.2 Cualidades del Sonido.....	13
2.3 Frecuencias de vibración de las notas del violín. ....	16
2.4 Reconocimiento de melodías por el cerebro humano .....	20
2.5 Proceso de interpretación de melodías mediante un violín .....	21
3. Desempeño cinetostático de robots manipuladores .....	24
3.1 Determinante de la matriz jacobiana .....	25
3.2 Número de condicionamiento de la matriz jacobiana .....	26
3.3 Manipulabilidad.....	27
3.4 Manipulabilidad traslacional y manipulabilidad rotacional .....	28
3.5 Relaciones de transmisión de velocidad y de fuerza.....	30
4. Generación de notas musicales en Matlab © .....	31
4.1 Concepto de software a desarrollar .....	31
4.2 Programación de notas.....	34
4.3 Programación de una melodía .....	40
5. Modelado y simulación de los movimientos de la mano izquierda de un robot violinista .....	42
5.1 Definición de la arquitectura de la mano violinista.....	42
5.2 Modelado de posición de la mano violinista.....	47
5.2.1 Definiciones preliminares .....	47
5.2.2 Modelo directo de posición del $j$ -ésimo dedo.....	49
5.2.3 Cálculo de la matriz SNAP para la resolución del modelo inverso de posición del $j$ -ésimo dedo .....	49
5.2.4 Matrices homogéneas para el cálculo de ${}^j_0T^*$ .....	51
5.2.5 Modelo inverso de posición del $j$ -ésimo dedo .....	55
5.3 Matriz Jacobiana del $j$ -ésimo dedo de la mano.....	59
5.4. Simulación de los movimientos de los dedos en Matlab© .....	61



6. Optimización del desempeño de la mano izquierda de un robot violinista.....	64
6.1 Criterio de optimización y función objetivo .....	64
6.2 Resolución de la redundancia cinemática del $j$ -ésimo dedo.....	66
6.3 Cálculo del emplazamiento óptimo de la mano al ejecutar el violín. ....	71
6.4 Casos de estudio .....	73
6.5 Resultados .....	84
7. Conclusión.....	86
Referencias bibliográficas .....	89
Apéndice A.....	92
Apéndice B .....	104

# Índice de figuras

	Página
Figura 1.1. Piano automático de Trimpin.....	2
Figura 1.2. Artificio desarrollado para tocar las teclas del piano.....	2
Figura 1.3. Instrumento robótico de Trimpin que incluye 8 tornamesas. ....	3
Figura 1.4. Robot <i>Cog</i> , humanoide desarrollado en el MIT, capaz de tocar la batería. ....	3
Figura 1.5. Robot violinista de la compañía Toyota.....	5
Figura 1.6. Detalle de la mano izquierda del robot violinista de Toyota. ....	6
Figura 1.7. Detalle de la mano derecha del robot violinista de Toyota. ....	6
Figura 1.8. Aspecto de la estación experimental para estudiar los movimientos de la mano derecha de un robot violinista.....	7
Figura 1.9. Aspectos de la mano estudiada en [7] .....	8
Figura 2.1. Sistema físico vibratorio de múltiples grados de libertad. ....	11
Figura 2.2. Ilustración del fenómeno de propagación de las ondas sonoras emitidas por un cuerpo vibrando.....	12
Figura 2.3. Partes de un violín y clasificación, mediante un código de colores, de las octavas en las posiciones de sus cuerdas sobre el diapasón.....	17
Figura 2.4. Detalle del código de colores de las octavas de las cuerdas de un violín, distribuidas sobre el diapasón. ....	19
Figura 2.5. Marco de referencia ortonormal $\Sigma_V$ asignado al diapasón del violín. ....	20
Figura 2.6. Esquema del proceso de ejecución de una nota musical por un ser humano en un violín. Proceso de lazo cerrado.....	22
Figura 2.7. Esquema del proceso de ejecución de una nota musical por un robot virtual en un violín virtual en una PC. Proceso de lazo abierto.....	23
Figura 3.1. Elipsoide de manipulabilidad para un postura arbitraria de un manipulador $2R$ .....	27
Figura 4.1. Diagrama de bloques del proceso de cómputo para la planificación de movimientos de una mano violinista .....	32
Figura 4.2. Interfaz gráfica de usuario que permite seleccionar notas musicales para la especificación de una melodía en el programa de simulación.....	33
Figura 4.3. Símbolos de las duraciones de las notas musicales.....	34

Figura 4.4.	Secuencia de tareas para la generación de notas musicales en Matlab©.....	34
Figura 4.5.	Señales de sonido continuas para las notas A4 y C5. ....	37
Figura 4.6.	Señales de sonido discretas correspondientes a una nota musical. ....	39
Figura 4.7.	Partitura de un fragmento del Bourrée de J.S. Bach. ....	41
Figura 5.1.	Huesos de una mano humana. ....	43
Figura 5.2.	Arquitectura propuesta para la mano violinista estudiada en esta tesis. ....	45
Figura 5.3.	Vista superior del modelo geométrico en Matlab© de la mano en estudio.....	47
Figura 5.4.	Vista lateral de la postura del dedo $j$ para alcanzar una posición en el diapasón, coordenadas $e_{OVo_j0y}$ , $e_{OVo_j0z}$ de la base del dedo $j$ con respecto al violín, y ángulo $\beta^*_{jf}$ de la falange distal.....	50
Figura 5.5.	Vistas superior y lateral de la postura del $j$ -ésimo dedo al alcanzar una posición deseada sobre el diapasón con el punto $O_{jf}$ de la falange distal.....	56
Figura 5.6.	Simulación de posturas de los dedos en el caso 1. ....	62
Figura 5.7.	Muestra de posturas de los dedos durante la ejecución de un fragmento del <i>Bourrée</i> de J.S. Bach.....	63
Figura 6.1.	Elipsoide de manipulabilidad del extremo de la falange del $j$ -ésimo dedo.....	66
Figura 6.2.	Posturas factibles del dedo índice obtenidas para $x = 60\text{ mm}$ , cada una con distintos valores de la orientación $\beta_{2f}$ de la falange distal y comportamiento de la manipulabilidad $w_2$ en función de $\beta_{2f}$ .....	67
Figura 6.3.	Posturas óptimas del dedo índice para diferentes posiciones de $O_{j2}$ sobre el eje $x_{2,0}$ y comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas.....	68
Figura 6.4.	Posturas óptimas del dedo medio para diferentes posiciones de $O_{j3}$ sobre el eje $x_{3,0}$ y comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas.....	68
Figura 6.5.	Posturas óptimas del dedo anular para diferentes posiciones de $O_{j4}$ sobre el eje $x_{4,0}$ y comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas.....	69
Figura 6.6.	Posturas óptimas del dedo meñique para diferentes posiciones de $O_{j5}$ sobre el eje $x_{5,0}$ y comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas.....	69
Figura 6.7.	Diagrama de flujo del proceso de optimización de la manipulabilidad de un dedo basado en la función $fmincon$ de Matlab©. ....	72
Figura 6.8.	Caso 1. Ejecución de <b>si 4</b> con el dedo índice. Emplazamiento arbitrario.....	74
Figura 6.9.	Caso 1. Ejecución de <b>si 4</b> con el dedo índice. Emplazamiento óptimo.....	74
Figura 6.10.	Caso 2. Ejecución de <b>do 5</b> con el dedo medio. Emplazamiento arbitrario.....	75
Figura 6.11.	Caso 2. Ejecución de <b>do 5</b> con el dedo medio. Emplazamiento óptimo.....	75
Figura 6.12.	Caso 3. Ejecución de <b>re 5</b> con el dedo anular. Emplazamiento arbitrario.....	76
Figura 6.13.	Caso 3. Ejecución de <b>re 5</b> con el dedo anular. Emplazamiento óptimo.....	76
Figura 6.14.	Caso 4. Ejecución de <b>sol 4</b> con el dedo anular. Emplazamiento arbitrario.....	77

Figura 6.15. Caso 4. Ejecución de <b>Sol 4</b> con el dedo anular. Emplazamiento óptimo.....	77
Figura 6.16. Caso 5. Ejecución de <b>Sol 5</b> con el dedo medio. Emplazamiento arbitrario.....	78
Figura 6.17. Caso 5. Ejecución de <b>Sol 5</b> con el dedo medio. Emplazamiento óptimo.....	78
Figura 6.18. Caso 6. Ejecución de <b>Fa #4</b> con el dedo medio. Emplazamiento arbitrario.....	79
Figura 6.19. Caso 6. Ejecución de <b>Fa #4</b> con el dedo medio. Emplazamiento óptimo.....	79
Figura 6.20. Caso 7. Ejecución de <b>La 4</b> con el dedo meñique. Emplazamiento arbitrario.....	80
Figura 6.21. Caso 7. Ejecución de <b>La 4</b> con el dedo meñique. Emplazamiento óptimo.....	80
Figura 6.22. Caso 8. Ejecución de <b>Mi 5</b> con el dedo meñique. Emplazamiento arbitrario.....	81
Figura 6.23. Caso 8. Ejecución de <b>Mi 5</b> con el dedo meñique. Emplazamiento óptimo.....	81
Figura 6.24. Caso 9. Ejecución de <b>Fa #5</b> con el dedo índice. Emplazamiento arbitrario.....	82
Figura 6.25. Caso 9. Ejecución de <b>Fa #5</b> con el dedo índice. Emplazamiento óptimo.....	82
Figura 6.26. Caso 10. Ejecución de <b>Mi 4</b> con el dedo índice. Emplazamiento arbitrario.....	83
Figura 6.27. Caso 10. Ejecución de <b>Mi 4</b> con el dedo índice. Emplazamiento óptimo.....	83
Figura 6.28. Comportamiento de las manipulabilidades normalizadas correspondientes a los emplazamientos arbitrarios y óptimos de los casos de estudio.....	85

## Índice de tablas

	Página
Tabla 2.1 Código de colores y frecuencia de las notas musicales para diferentes octavas [20]...	18
Tabla 4.1. Octavas de las notas musicales que puede generar el violín, y sus correspondientes valores de frecuencias en Hertz.....	35
Tabla 4.2. Notas musicales programadas para un fragmento del <i>Bourrée</i> de J.S. Bach....	41
Tabla 5.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg modificados del $j$ -ésimo dedo.....	46
Tabla 5.2. Longitudes de los parámetros de los eslabones.....	46
Tabla 6.1. Coordenadas con respecto a $\Sigma_V$ de los puntos sobre el diapasón correspondientes a las notas musicales deseadas de los casos de estudio.....	73
Tabla 6.2. Resumen de resultados de la optimización del emplazamiento de la mano en los casos de estudio. Coordenadas de la palma de la mano y manipulabilidad normalizada.....	84



# 1. Introducción

El campo de investigación de los robots capaces de tocar un instrumento musical ha sido cultivado por múltiples investigadores de diferentes disciplinas y se ha trabajado por más de 50 años desarrollando una variedad importante de robots musicales. Hoy en día existe una amplia gama de publicaciones científicas en diferentes ramas de la ingeniería que se relacionan con el diseño, la manufactura y la aplicación de robots humanoides ejecutantes de instrumentos musicales. Los trabajos publicados sobre el tema muestran el interés suscitado por el desarrollo de robots musicales en las comunidades científicas de diversas ramas de la ingeniería.

Los robots musicales se pueden clasificar en instrumentos musicales robóticos y robots humanoides músicos (violinistas, pianistas, etc.). Un instrumento musical robótico es un instrumento musical clásico al cual se le incorporan diversos dispositivos que le permiten ser programado y tocado automáticamente de manera autónoma con mecanismos especialmente diseñados para el instrumento. Por otra parte un robot humanoide músico es un robot antropomorfo que puede tocar uno o varios instrumentos musicales clásicos emulando los movimientos de un músico humano.

Los científicos y tecnólogos innovadores especialistas en temas de entretenimiento y arte, han ideado durante las últimas décadas tanto instrumentos musicales robóticos como

robots musicales usando algoritmos y esquemas de diseño que son útiles para la comunidad dedicada a la música informática [1].

La distinción entre las arquitecturas de robots humanoides músicos y los instrumentos musicales robóticos también se ha venido acentuando con el paso del tiempo. En las figuras 1.1 a 1.5 se aprecian algunos instrumentos musicales robóticos que se han desarrollado a lo largo de las últimas décadas [2].



Figura 1.1 Piano automático de Trimpin [2].



Figura 1.2 Artilugio desarrollado para tocar las teclas del piano [2].





Figura 1.3. Instrumento robótico de Trimpin que incluye 8 tornamesas [2].

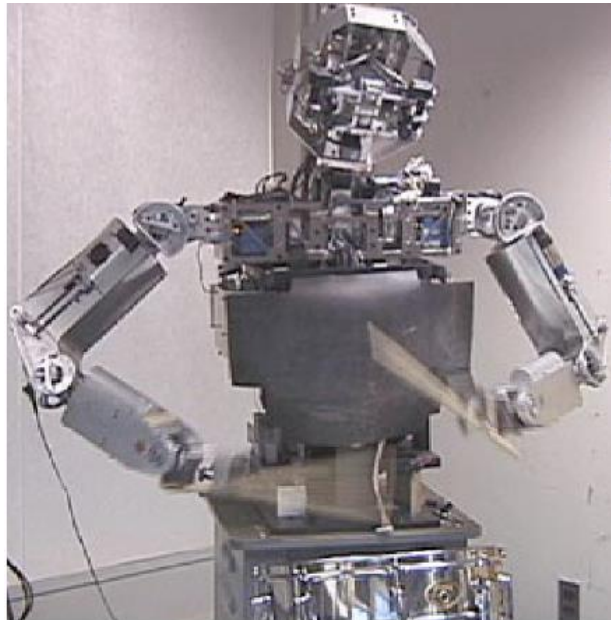


Figura 1.4. Robot *Cog*, humanoide desarrollado en el MIT, capaz de tocar la batería [2].

El análisis desde una perspectiva científica de la producción de música permitió la creación del MIDI (acrónimo de *Musical Instrument Digital Interface*), que es un estándar tecnológico que establece un protocolo de comunicación, una interfaz digital y conectores que permiten que se enlacen y comuniquen entre sí diversos instrumentos musicales, computadoras y otros dispositivos relacionados.

La investigación científica se ha venido alejando gradualmente del modelo de los instrumentos musicales robóticos para incorporarse al desarrollo de las capacidades musicales de los robots humanoides. Por citar un ejemplo, gracias a sus investigaciones los científicos del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) han hecho evolucionar su enfoque acerca del mecanismo para controlar la muñeca o el codo de su robot (llamado *Cog*) para tocar un tambor con baquetas (figura 1.4).

Para diseñar y construir un robot musical, es necesario disponer de diversas habilidades cruciales, incluyendo el conocimiento de múltiples disciplinas tales como la acústica, la ingeniería eléctrica, la informática, la ingeniería mecánica, y la tecnología de mecanizado (en particular el fresado, el torneado y la soldadura). En relación a los conocimientos requeridos para el desarrollo de ese tipo de robots, las matemáticas de la música son fundamentales. Éstas incluyen el estudio de ecuaciones relacionadas con las escalas de sonido, con la propagación de ondas y con el comportamiento de éstas en diferentes medios. Por otra parte, se requiere del conocimiento de programación de microcontroladores y la programación de sistemas en tiempo real, para el uso de motores, engranajes y solenoides en conjunción con la tecnología de sensores. Es importante destacar que la acústica y la habilidad para la toma de sonido son temas de gran relevancia en la creación de música expresiva.

La diferencia entre un instrumento robótico y un robot con habilidades musicales resulta evidente a simple vista. Asimismo, puede resultar obvia, más no por eso dejar de ser digna de mención, la existencia de categorías en los diversos instrumentos musicales, siendo una de ellas la de los robots y/o instrumentos que dependen de cuerdas para realizar

su función. Dentro de esta categoría, existen robots para ejecutar instrumentos de cuerda punteada e instrumentos de cuerda frotada, los cuáles son reconocidos por sus nombres en inglés *plucked bots* y *bowed bots*, respectivamente [2]. Los robots que son de interés para los propósitos de esta tesis son los ejecutantes de cuerda frotada.

Por otra parte, el crecimiento masivo que ha tenido el uso de microcontroladores, originado a su vez por la gradual reducción de su costo, y la expansión que va teniendo día con día la tecnología asociada, permiten que el campo de investigación de los robots musicales crezca año con año. Además, gracias al desarrollo de computadoras y software más potentes, la simulación se ha convertido en un formidable instrumento de apoyo para la realización de investigaciones con costos reducidos, particularmente en lo concerniente al campo de la tecnología musical.

Desde el año 2007 la corporación Toyota, en su área de motores, anunció que la compañía comercializaría un robot compañero capaz de asistir a humanos en sus necesidades básicas, al margen de actividades en el hogar, así como en el cuidado médico, desarrollando un trabajo similar al de una enfermera. La Toyota ya ha efectuado demostraciones de sus prototipos de robots compañeros. Uno de ellos posee habilidades musicales, y es capaz de tocar el violín [3]. Éste se aprecia en la figura 1.5.



Figura 1.5. Robot violinista de la compañía Toyota [3].

Para ejecutar el violín éste se fija en el cuerpo del robot. La posición de la mano izquierda es controlada por un brazo manipulador que cuenta con seis grados de libertad (GDL). La presión sobre las cuerdas es efectuada por los dedos de esa mano, que posee cuatro GDL cada uno. La punta de un dedo es capaz de alcanzar la cuerda y cambiar la longitud vibrante de la misma para variar el tono. Gracias a un mecanismo de resorte que al ser empujado cambia la posición ligeramente en dirección transversal, el dedo produce un vibrato exitoso. En la figura 1.6 se aprecian detalles del accionamiento de la mano izquierda. La mano derecha está equipada con una muñeca con un mecanismo tipo rotula que controla la presión del arco y produce los movimientos necesarios para la ejecución de las notas que requiere una melodía determinada.



Figura 1.6. Detalle de la mano izquierda del robot violinista de Toyota [3].



Figura 1.7. Detalle de la mano derecha del robot violinista de Toyota [3].

El sistema de control de la muñeca de la mano derecha regula la presión del arco sobre las cuerdas gracias a un sistema de realimentación que incluye un sensor de fuerza montado en el arco. En la figura 1.7 se aprecia el accionamiento de esta mano.

Por otra parte, se han realizado estudios que analizan el comportamiento de violinistas al momento de aprender a tocar el violín. En ellos se examinó el funcionamiento de las articulaciones de los brazos hasta el hombro, y se destacó la necesidad de ejecutar movimientos de precisión [4].

En relación al estudio de los movimientos de una mano derecha para tocar el violín existen trabajos enfocados a la producción de todas las cualidades tímbricas a través de la interacción del arco con las cuerdas. En el trabajo reportado en [5] se aplicó un brazo antropomorfo de 7 GDL para lograr los movimientos necesarios de la mano. Este manipulador permite realizar los movimientos de flexión-extensión, abducción-aducción, rotación interna y rotación externa del hombro. Además, es posible efectuar los movimientos de flexión-extensión y pronación-supinación del codo. Por último, la muñeca realiza los movimientos de flexión-extensión y abducción-aducción. En la figura 1.8 se muestra este brazo manipulador ejecutando los movimientos de la mano derecha para desplazar el arco en contacto con el violín.

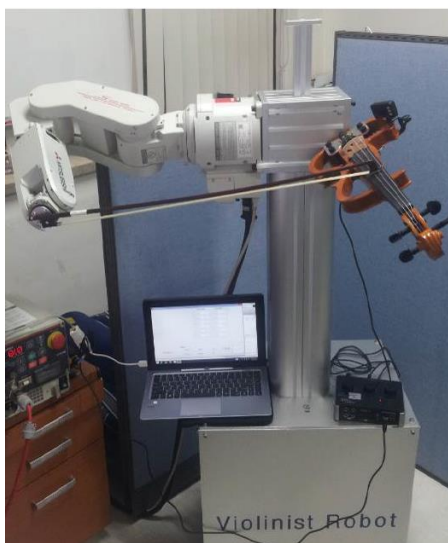


Figura 1.8. Aspecto de la estación experimental para estudiar los movimientos de la mano derecha de un robot violinista [5].

En [6] se detallan los estudios efectuados acerca de mano derecha de un robot violinista, en los que se incluyen los diferentes tipos de arcos que pueden utilizar, así como el análisis de las ondas generadas por los movimientos del arco, a través de la recepción de la información acústica recopilada en los experimentos.

En otro trabajo [7], se analiza el diseño de una mano izquierda robótica violinista. El diseño se basa en análisis de carácter antropomorfo, pero no se desarrolla ningún proceso de síntesis cinemática a partir de criterios de desempeño cinetostático. Tampoco se incluyen estudios relacionados con la planificación de sus movimientos.

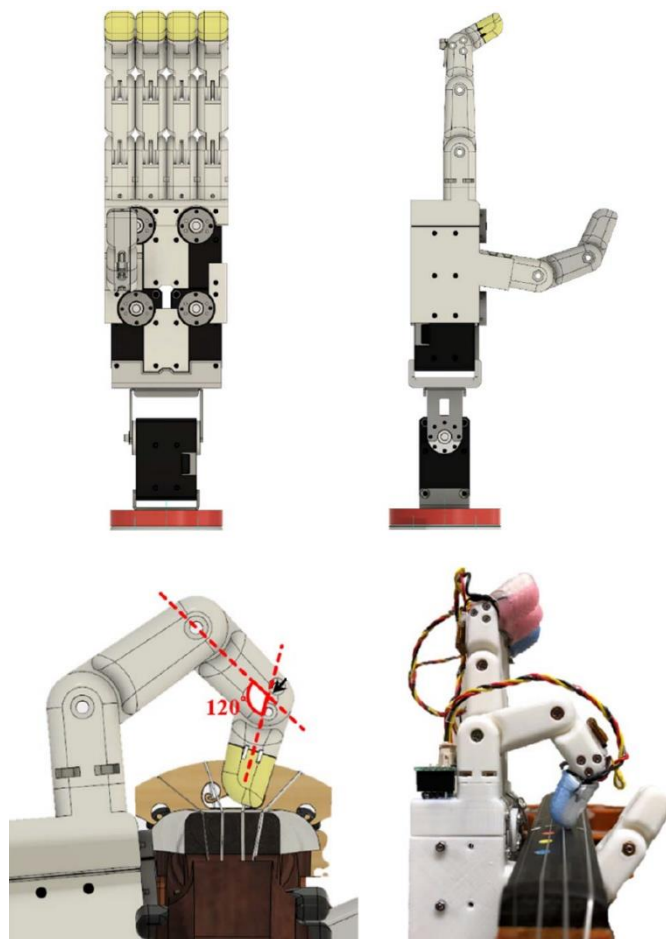


Figura 1.9. Aspectos de la mano estudiada en [7].

Los trabajos que se mencionan en los párrafos precedentes aportan sin duda interesantes conocimientos que han contribuido al desarrollo de robots musicales. Sin embargo, en lo que se ha podido investigar en el marco de esta tesis, no existen estudios relacionados específicamente con la planificación y optimización de los movimientos de la mano izquierda de robots violinistas. Tales movimientos podrían ser determinantes en un mecanismo robótico violinista para alcanzar una alta calidad en sus interpretaciones toda vez que permitirían lograr elevados niveles de eficiencia y precisión en su funcionamiento.

En efecto, múltiples estudios acerca del desempeño mecánico de las cadenas cinemáticas que se utilizan en los robots manipuladores, tanto de tipo serial como paralelo, han demostrado que la eficiencia y precisión de sus movimientos dependen de la arquitectura y de las posturas utilizadas [8-12]. En consecuencia, tanto el diseño de un robot como como la planificación de los movimientos que realizarán en la ejecución de sus tareas deben ser cuidadosamente establecidos para lograr un funcionamiento óptimo del robot.

Algunos de los enfoques publicados en la literatura concernientes al desempeño cinetostático de robots proponen índices que miden la eficiencia de transformación de los movimientos articulares en desplazamientos del órgano terminal (tanto traslacionales como rotacionales) en todas direcciones [13, 14, 15]. Otros índices miden la eficiencia de transformación de movimientos articulares en desplazamientos del órgano terminal en alguna dirección específica [16], o la transformación de fuerzas generalizadas en fuerzas o pares en el órgano terminal en direcciones precisas [16]. Asimismo se han propuesto métodos que se refieren a la planificación de movimientos de manipuladores basada en la optimización de múltiples índices de desempeño [17].

Teniendo en cuenta los interesantes resultados que se han obtenido previamente en la planificación de movimientos de robots industriales y, por otro lado, la relevancia que podría lograr la ejecución de movimientos óptimos de la mano izquierda de un robot violinista en la calidad de sus interpretaciones, en el presente trabajo de tesis se desarrolla un método para la planificación de movimientos óptimos de la mano robótica. La ausencia

de trabajos sobre estos temas en la literatura científica constituye la principal motivación para la realización de esta tesis. Diferentes estudios a profundidad de los movimientos de la mano izquierda deberían ser abordados para contribuir al logro de la calidad requerida que se destaca en [4]. Este trabajo de tesis es una contribución en ese sentido.

En el siguiente capítulo se describen algunos conceptos básicos de musicología del violín que se requieren para el desarrollo del presente trabajo. En el Capítulo 3 se presentan diferentes enfoques que se han propuesto en la literatura científica para medir el desempeño cinetostático de robots manipuladores. En el cuarto capítulo se presenta el procedimiento que se desarrolló en el marco de esta tesis para la programación de notas musicales, así como para la generación de los datos básicos que requiere la mano izquierda de un robot violinista para producir notas musicales. En el quinto capítulo se describe la arquitectura de la mano robótica que se utiliza en este trabajo, y se efectúa la formulación matemática en la que se basa el software para la simulación de los movimientos los dedos de dicha mano. Asimismo, se describe la aplicación del software a la simulación de los movimientos de los dedos de la mano del robot durante la ejecución de un fragmento del *Bourrée* de J.S. Bach. En el sexto capítulo se presenta el proceso de optimización que se propone para la planificación de los movimientos de los dedos de la mano robótica, así como su aplicación en diversos casos de estudio. Los resultados obtenidos destacan la importancia del método propuesto. En el Capítulo 7 se establece finalmente la conclusión del trabajo.



## 2. Conceptos básicos de musicología del violín

### 2.1 Concepto del sonido

Desde un punto de vista físico, el sonido es una vibración que se propaga en un medio elástico (sólido, líquido o gaseoso), siendo éste generalmente el aire. Otra definición para el sonido establece que es la sensación producida en el oído por la vibración de las partículas que se desplazan (en forma de onda sonora) a través de un medio elástico que las propaga.

Para que se produzca un sonido se requiere la existencia de un cuerpo vibrante llamado *foco* (una cuerda tensa, una varilla, una lengüeta., etc.) y del medio elástico transmisor de esas vibraciones, las cuales se propagan constituyendo la onda sonora. Para imaginar cómo se produce una onda de este tipo se puede utilizar el símil mecánico del conjunto de sistemas masas-resortes que se aprecia en la figura 2.1. Si se hace vibrar horizontalmente la primera masa, las restantes se mueven a su vez, oscilando hacia adelante y hacia atrás, una tras otra, pudiendo ver así una onda que se desplaza lo largo de la cadena de masas y resortes [18].



Figura 2.1. Sistema físico vibratorio de múltiples grados de libertad [18].

Este símil es una imagen rudimentaria de cómo se transmiten las ondas sonoras, pero permiten comprender que cuando un foco vibra en el aire, obliga a que las partículas de ese medio entren a su vez en vibración, siempre con cierto retraso con respecto a las anteriores. Su avance se traduce en una serie de compresiones (regiones donde las partículas del medio se aproximan entre sí en un momento dado) y dilataciones o rarefacciones (regiones donde las partículas estarán más separadas entre sí). Debido a que estas compresiones y dilataciones avanzan con la onda, se puede afirmar que una onda sonora es una onda de presión. En la figura 2.2 se ilustra este fenómeno.

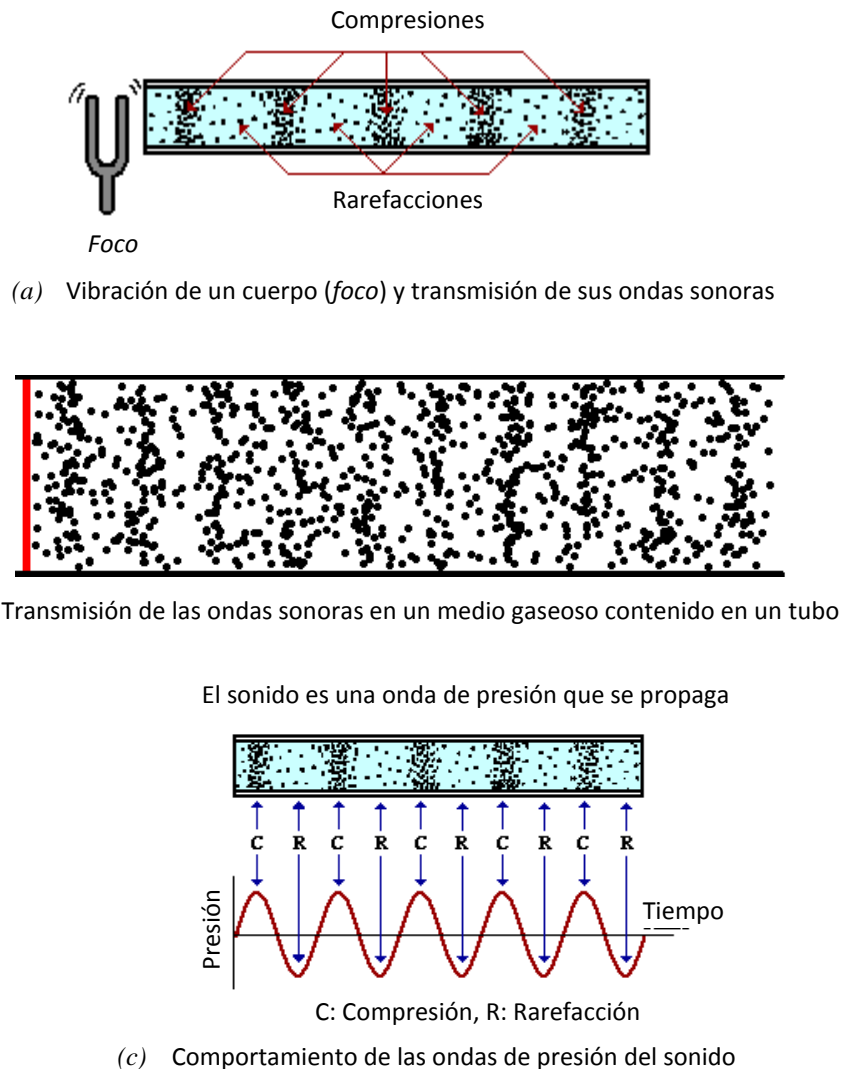


Figura 2.2. Ilustración del fenómeno de propagación de las ondas sonoras emitidas por un cuerpo vibrando [18].

### **Características básicas [19]**

Como fenómeno ondulatorio, el sonido responde a las siguientes características:

a) Es una **onda mecánica**

Las ondas mecánicas no pueden desplazarse en el vacío, necesitan hacerlo a través de un medio material (aire, agua, cuerpo sólido). Además de que exista un medio material, se requiere que éste sea elástico. Un medio rígido no permite la transmisión del sonido porque no permite las vibraciones. La propagación de la perturbación se produce por la compresión y expansión del medio por el que se propagan. La elasticidad del medio permite que cada partícula transmita la perturbación a la partícula adyacente, dando origen a un movimiento en cadena.

b) Es una **onda longitudinal**

El movimiento de las partículas que transporta la onda se desplaza en la misma dirección de propagación de la onda.

c) Es una **onda esférica**

Las ondas sonoras son ondas tridimensionales, es decir, se desplazan en tres direcciones y sus frentes de ondas son esferas radiales que salen de la fuente de perturbación en todas las direcciones. El principio de Huygens afirma que cada uno de los puntos de un frente de ondas esféricas puede ser considerado como un nuevo foco emisor de ondas secundarias también esféricas, que como la originaria, avanzarán en el sentido de la perturbación con la misma velocidad y frecuencia que la onda primaria.

## **2.2 Cualidades del Sonido**

Cualquier sonido sencillo, como una nota musical, puede describirse en su totalidad especificando tres cualidades de su percepción: el tono, la intensidad y el timbre. Estas cualidades corresponden exactamente a tres parámetros de una onda de sonido: la frecuencia, la amplitud y la composición armónica o forma de onda.

Existe una distinción entre un sonido agradable y el ruido. Un sonido agradable está producido por vibraciones regulares y periódicas. En cambio, el ruido es un sonido complejo, una mezcla de diferentes frecuencias o notas sin relación armónica que dan una sensación confusa, sin entonación determinada.

### ***La altura o tono***

Los sonidos musicales son producidos por algunos procesos físicos como por ejemplo, una cuerda vibrando, el aire en el interior de un instrumento de viento, etc. Una característica básica de esos sonidos es su ***elevación o altura***, o cantidad de veces que vibra por segundo, es decir, su frecuencia. La frecuencia se mide en **Hertz (Hz)** o número de oscilaciones o ciclos por segundo. Cuanto mayor sea su frecuencia, más aguda o alta será la nota musical. La altura es una propiedad subjetiva de un sonido, por la que puede compararse con otro en términos de *más alto* o *más bajo*. Los sonidos de mayor o menor frecuencia se clasifican, respectivamente, como agudos o graves. Se trata de términos relativos, ya que entre los tonos diferentes uno de ellos será siempre más agudo que el otro y a la inversa.

Mientras que la frecuencia de un sonido es una definición física cuantitativa, que se puede medir con aparatos sin una referencia auditiva, la elevación es nuestra evaluación subjetiva de la frecuencia del sonido. La percepción puede ser diferente en distintas situaciones, así para una frecuencia específica no siempre tendremos la misma elevación. La frecuencia de las vibraciones de instrumentos de un mismo tipo es proporcional a sus dimensiones.

### ***La intensidad***

La distancia a la que se puede oír un sonido depende de su intensidad, que es el flujo medio de energía por unidad de área perpendicular a la dirección de propagación. En el caso de ondas esféricas que se propagan desde una fuente puntual, la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, suponiendo que no se produzca ninguna pérdida de energía debido a la viscosidad, la conducción térmica u otros efectos de absorción. Por ejemplo, en un medio perfectamente homogéneo, un sonido será nueve veces más intenso a una distancia de 100 metros que a una distancia de 300 metros. En la propagación real del sonido en la atmósfera, los cambios de propiedades físicas del aire como la temperatura, presión o humedad producen la amortiguación y dispersión de las

ondas sonoras, por lo que generalmente la ley del inverso del cuadrado no se puede aplicar a las medidas directas de la intensidad del sonido.

### **El timbre**

Si el tono permite diferenciar unos sonidos de otros por su frecuencia, y la intensidad los sonidos fuertes de los débiles, el timbre completa las posibilidades de variedades del arte musical desde el punto de vista acústico, porque es la cualidad que permite distinguir los sonidos producidos por los diferentes instrumentos. Más concretamente, el timbre o forma de onda es la característica que permitirá distinguir una nota de la misma frecuencia e intensidad producida por instrumentos diferentes. La forma de onda viene determinada por los armónicos, que son una serie de vibraciones subsidiarias que acompañan a una vibración primaria o fundamental del movimiento ondulatorio (especialmente en los instrumentos musicales).

Normalmente al hacer vibrar un cuerpo no se obtiene un sonido puro, sino un sonido compuesto de sonidos de diferentes frecuencias. La frecuencia de los armónicos, siempre es un múltiplo de la frecuencia más baja llamada *frecuencia fundamental o primer armónico*. A medida que las frecuencias son más altas, los segmentos en vibración son más cortos y los tonos musicales están más próximos los unos de los otros.

Si se toca el tono de *La* situado sobre el *Do* central en un violín, un piano y un diapasón, con la misma intensidad en los tres casos, los sonidos son idénticos en frecuencia y amplitud, pero muy diferentes en timbre. De las tres fuentes, el diapasón es el que produce el tono más sencillo, que en este caso está formado casi exclusivamente por vibraciones con frecuencias de 440 Hz. Debido a las propiedades acústicas del oído y las propiedades de resonancia de su membrana vibrante, es difícil que un tono puro llegue al mecanismo interno del oído sin sufrir cambios. La componente principal de la nota producida por el piano o el violín también tiene una frecuencia de 440 Hz. Sin embargo, esas notas también contienen componentes con frecuencias que son múltiplos exactos de 440 Hz, los llamados tonos secundarios, como 880, 1320 o 1760 Hz. Las intensidades concretas de esas otras componentes determinan el timbre de la nota. Los armónicos contribuyen a la percepción auditiva de la calidad de sonido o timbre.

Para entender mejor cómo se descompone un sonido en diferentes armónicos, resulta fundamental el análisis de Fourier o análisis armónico. Gracias al teorema de Fourier, desarrollado por el matemático francés Joseph Fourier y completado por el matemático alemán J.P. Lejeune Dirichlet, es posible demostrar que toda función periódica continua, con un número finito de máximos y mínimos en cualquier período, puede desarrollarse como una combinación de funciones senoidales y cosenoidales (armónicos). Desde el punto de vista de la física, lo anterior significa que una oscilación que no es armónica se puede representar como una combinación de oscilaciones armónicas, cada una con su propia amplitud, frecuencia y fase.

### 2.3 Frecuencias de vibración de las notas del violín.

Las partes principales que constituyen un violín se muestran en la figura 2.3. Entre estas partes destaca el *diapasón*, que permite a un ejecutante presionar las cuerdas en las posiciones apropiadas para producir las notas deseadas. Las notas musicales generadas en un violín están en un rango de frecuencia de vibración que oscila entre 261.626 Hz y 4434.922 Hz [20], sin embargo, no todas las frecuencias son fácilmente ejecutadas. El rango de frecuencias utilizadas en el desarrollo de este trabajo se considera de 261.626 Hz a 1975.533205 Hz. En este rango se encuentran las frecuencias correspondientes a las notas utilizadas por la mayoría de los violinistas profesionales. Las frecuencias superiores a los 1975.533205 Hz son ejecutadas casi exclusivamente por violinistas virtuosos.

En cualquier instrumento musical se pueden ejecutar doce notas, las cuales tienen un nombre común y una designación según normas internacionales. Estas notas se listan en tabla 2.1, en la cual se indican además el nombre común de la nota, la designación de ésta teniendo en cuenta su *octava* (rango de frecuencia de vibración) según la norma internacional, un código de color, y el valor de la frecuencia correspondiente medida en Hertzios.

Un violín utiliza 4 cuerdas numeradas en orden ascendente como primera, segunda, tercera y cuarta, como se indica en la figura 2.4, cuyos sonidos, al pulsarlas libres, corresponden a las notas musicales de mí, do, la y sol, respectivamente. Los sonidos de las

notas correspondientes a diferentes octavas del violín se obtienen presionando con los dedos de la mano izquierda las cuerdas en distintas posiciones a lo largo del diapasón, y haciendo vibrar simultáneamente, mediante las fibras de un *arco* pulsado con el movimiento de la mano derecha, las cuerdas correspondientes. Las notas ejecutables en un violín están divididas en cinco *octavas* de las cuales tres se pueden ejecutar completas, y dos únicamente de manera parcial. En el esquema de la figura 2.3 se indican, mediante el código de color definido en la tabla 2.1, los segmentos de las cuerdas a lo largo del diapasón, que se deben presionar para obtener las distintas notas bajo diferentes octavas. En la figura 2.4 se aprecia una vista ampliada del código mostrado en la figura 2.3.

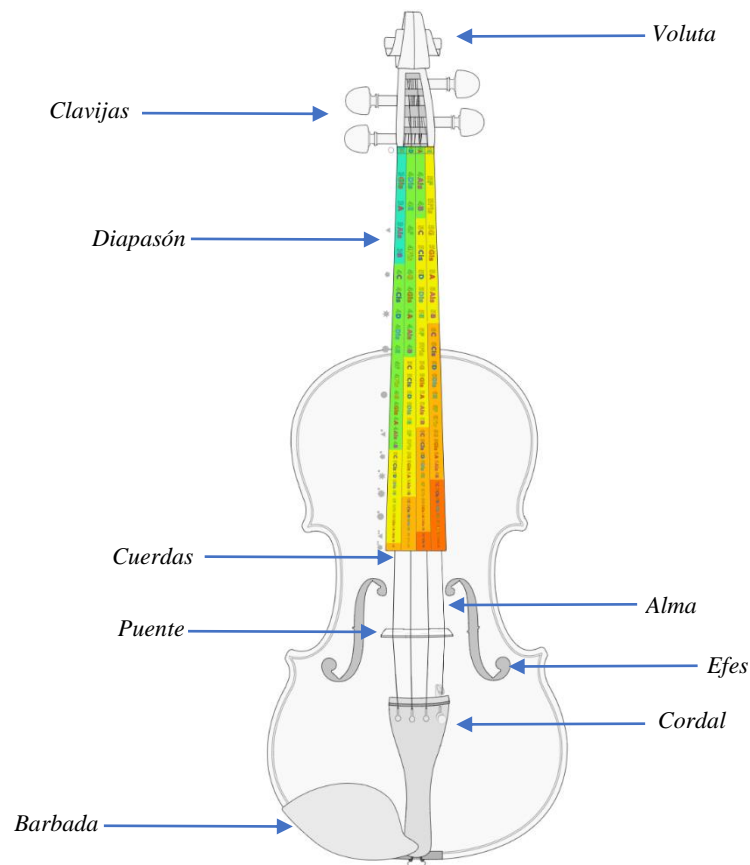


Figura 2.3 Partes de un violín y clasificación, mediante un código de colores, de las octavas en las posiciones de sus cuerdas sobre el diapasón.

Tabla 2.1 Código de colores y frecuencia de las notas musicales para diferentes octavas [20].

	<b>Nombre común de la nota</b>	<b>Notación</b>	<b>Color</b>	<b>Frecuencia (Hz)</b>
1	Sol	G3		196
2	Sol sostenido o la bemol	G#3 / A3		207.66
3	La	A3		220
4	La sostenido o Si bemol	A#3 / Bb3		233.09
5	Si	B3		246.95
6	Do	C4		261.63
7	Do sostenido o Re Bemol	C#4 / Db4		277.19
8	Re	D4		293.67
9	Re sostenido o Mi bemol	D#4 / Eb4		311.13
10	Mi	E4		329.64
11	Fa	F4		349.24
12	Fa sostenido o Sol bemol	F#4/Gb4		370
13	Sol	G4		392.01
14	Sol sostenido La bemol	G#4/Ab4		415.31
15	La	A4		440
16	La sostenido Si bemol	A#4/Bb4		466.18
17	Si	B4		493.90
18	Do	C5		523.26
19	Do sostenido o Re Bemol	C#5/Db5		554.38
20	Re	D5		587.34
21	Re sostenido o Mi bemol	D#5/Eb5		622.27
22	Mi	E5		659.27
23	Fa	F5		698.47
24	Fa sostenido o Sol bemol	F#5/Gb5		740.01
25	Sol	G5		784.01
26	Sol sostenido La bemol	G#5 /Ab5		830.63
27	La	A5		880
28	La sostenido Si bemol	A#5/Bb5		932.35
29	Si	B5		987.79
30	Do	C6		1046.53
31	Do sostenido o Re Bemol	C#6 / Db6		1108.76
32	Re	D6		1174.69
33	Re sostenido o Mi bemol	D#6 / Eb6		1244.54
34	Mi	E6		1318.54
35	Fa	F6		1396.95
36	Fa sostenido o Sol bemol	F#6 / Gb6		1480.01
37	Sol	G6		1568.02
38	Sol sostenido La bemol	G#6 / Ab6		1661.23
39	La	A6		1760
40	La sostenido Si bemol	A#6/Bb6		1864.70
41	Si	B6		1975.58
42	Do	C7		2093.06
43	Do sostenido o Re Bemol	C#7 / Db7		2217.52



Cuerdas:



Figura 2.4 Detalle del código de colores de las octavas de las cuerdas de un violín, distribuidas sobre el diapasón.

Las posiciones de cada color mostrado en la figura 2.4 se alcanzan mediante un dedo diferente de la mano izquierda. En la tabla 2.1 se presentan las frecuencias asociadas a las diferentes notas en cada octava. La ejecución de las notas correspondientes al color rojo en la tabla 2.1 requiere del uso de una técnica especial llamada generación de armónicos, la cual genera notas al dividir la longitud de una cuerda en fracciones enteras de la longitud correspondiente a la anterior nota. Por ejemplo, si el segmento de vibración de una cuerda tiene 10 cm de longitud para una nota en particular, ésta tendrá su primer armónico natural con una longitud de vibración de la mitad exacta de 10, es decir 5 cm, y los siguientes armónicos se obtendrán con longitudes de vibración de 2.5 cm, 1.25 cm y así sucesivamente.

Para la localización precisa de la posición ideal de cada octava del diapasón del violín, en el presente trabajo se definirán sus coordenadas cartesianas con respecto a un marco ortonormal unido rígidamente al diapasón. Este marco conceptual será designado como  $\Sigma_V$ , y su ubicación se muestra en la figura 2.5. Como se aprecia en esa figura, el origen de dicho marco se encuentra en la base del diapasón. La posición del eje  $x_V$  es simétrica con respecto a las 4 cuerdas. La primera y la segunda se ubican en la parte negativa del eje  $y_V$  mientras que las cuerdas tercera y cuarta se ubican en la parte positiva de  $y_V$ . Las cuerdas no son paralelas al eje  $x_V$ . La primera y la cuarta forman ángulos de  $1.2077^\circ$  y  $-1.2077^\circ$  con respecto a  $x_V$ , respectivamente, mientras que las cuerdas segunda y tercera forman ángulos de  $0.42^\circ$  y  $-0.42^\circ$ , respectivamente, con respecto a  $x_V$ .

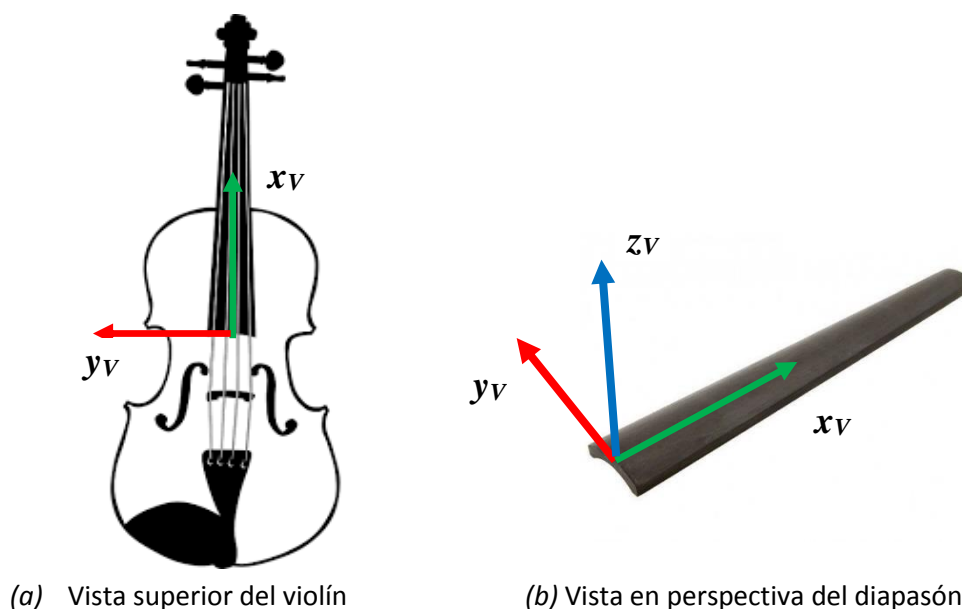


Figura 2.5. Marco de referencia ortonormal  $\Sigma_V$  asignado al diapasón del violín.

El marco de referencia del violín  $\Sigma_V$  permite establecer con precisión la posición que deben alcanzar los dedos sobre el diapasón para lograr las diferentes notas que se requieren al ejecutar una melodía.

## 2.4 Reconocimiento de melodías por el cerebro humano

Los intervalos musicales son rangos de frecuencias de ondas de sonido que pueden ser reconocidas por cualquier oído humano. Estas frecuencias las interpreta el cerebro y puede diferenciarlas. El proceso que realiza este órgano para ordenar las diferentes frecuencias de ondas presentes en el aire es el que permite reconocer una *melodía*. Ésta, a su vez, consiste en una sucesión de notas con diferentes frecuencias que dan paso a temas que pueden ser tan reconocidos como la novena sinfonía de Ludwig Van Beethoven.

Un tema transcendental en teoría musical se refiere al número infinito de frecuencias que están entre una nota y otra, las cuáles el oído no puede diferenciar en forma natural. Si bien una persona tendrá una mayor sensibilidad si ha llevado a cabo un

entrenamiento profesional para desarrollar una habilidad para la diferenciación de notas, y podrá identificar un mayor número de frecuencias entre una nota y otra. No obstante, su capacidad siempre será limitada. Estas frecuencias que existen en cantidad infinita, que no son tomadas en cuenta para la creación de una melodía, son conocidas en música contemporánea como *micro tonalidades*.

A las convenciones existentes para la asignación de nombres a determinadas notas correspondientes a frecuencias fácilmente reconocibles se les conoce con el nombre de temperamentos. Existen tres temperamentos relevantes: el *justo*, el *pitagórico* y el *werkmeister* [21].

## 2.5 Proceso de interpretación de melodías mediante un violín

Una forma de explicar la ejecución de notas musicales por un ser humano mediante un violín se basa en la realización de las tres etapas siguientes:

- ❖ **Generación conceptual de la nota.** La generación conceptual de una nota a producir ocurre en el cerebro del violinista de diferentes formas, las cuáles pueden ser memoria, lectura, o interpretación auditiva. La información correspondiente a esta nota es procesada por el cerebro del ejecutante.
- ❖ **Generación de movimientos de las manos.** El cerebro del violinista debe transformar la información generada en el paso precedente para generar señales que le permitan producir en ambas manos los movimientos pertinentes para producir la nota en el violín. De esta forma el violín, que es el sistema a excitar, emitirá una nota que debe estar próxima a la nota deseada. El nivel de claridad de la nota que emita el violín y la clase de emoción que ésta provoque en la audiencia dependerá de la precisión de los movimientos de las manos del violinista, así como de su destreza y experiencia.
- ❖ **Corrección de movimientos de las manos.** La nota real emitida por el violín, al ser escuchada por el propio violinista, provocará que éste aplique una corrección a sus movimientos si juzga que esto es necesario. Este proceso es iterativo hasta lograr la

ejecución óptima de la melodía a juicio del músico. En violinistas expertos la ejecución será muy fiel desde el principio por lo que la medida correctiva será mínima.

Aplicando un recurso pedagógico de gran utilidad en ingeniería, el proceso descrito en los párrafos precedentes se ilustra mediante el diagrama de bloques de la figura 2.6. En contraste con el proceso de esa figura, para los propósitos del presente trabajo de tesis, en el que se asume que el intérprete de una melodía deseada será un robot, se considerará un proceso de lazo abierto para la ejecución de una nota. En efecto, la nota deseada será especificada y programada por el usuario, indicándole de manera explícita al programa del robot la nota que se desea ejecutar. Así, con base en el código de colores de la figura 2.4, y de las posturas indicadas en las figuras A.1 a A.42 del Apéndice A, el programa podrá determinar la posición que deberá alcanzar sobre el diapasón el correspondiente dedo activo de la mano izquierda. Posteriormente, mediante la resolución del modelo cinemático inverso de posición del dedo, se calculará la postura requerida para conseguir la nota deseada y, mediante un proceso de simulación en una mano virtual, se efectuarán los movimientos de ésta. Al llegar el dedo virtual a la posición deseada, el programa de simulación emitirá la nota musical programada, con el nivel de precisión capaz de suministrar el software y el hardware utilizados.

El esquema de la figura 2.7 se considera para los propósitos de esta tesis, en la cual se abordan solamente aspectos de la cinemática de la mano izquierda del robot violinista.

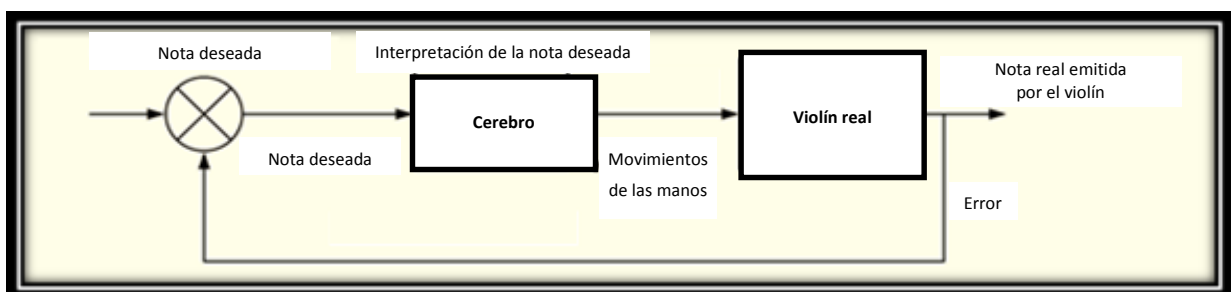


Figura 2.6. Esquema del proceso de ejecución de una nota musical por un ser humano en un violín. Proceso de lazo cerrado.

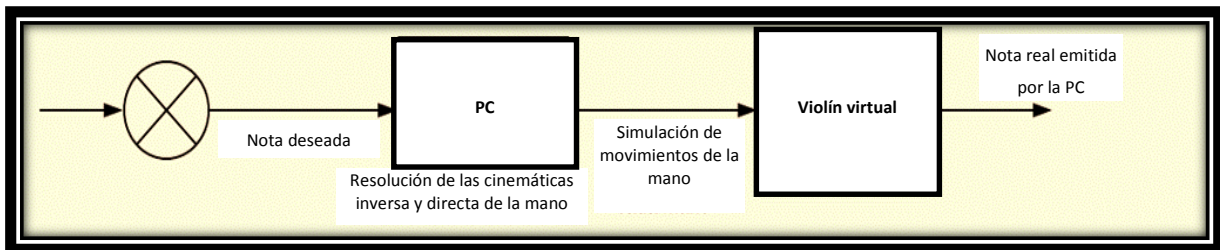


Figura 2.7. Esquema del proceso de ejecución de una nota musical por un robot virtual en un violín virtual en una PC. Proceso de lazo abierto.

Por supuesto, en un sitio experimental que incluya un violín real ejecutado por prototipos de los brazos izquierdo y derecho, con sus respectivas manos, sería indispensable prever un esquema de ejecución de lazo cerrado para la emisión de notas musicales toda vez que las posibles fuentes de error se multiplican en un robot real y, en consecuencia, debería considerarse la inclusión de un lazo para la corrección de errores.

Por último, conviene señalar que en la fase de planificación de movimientos de los dedos de la mano izquierda se debe considerar el cálculo del emplazamiento de la mano, así como la resolución de la redundancia cinemática de cada dedo activo, teniendo como objetivo la optimización del desempeño cinemático de los dedos.

### 3. Desempeño cinetostático de robots manipuladores

La caracterización del desempeño de robots ha sido el objeto de numerosas investigaciones por muchos años. Estos trabajos han conducido al establecimiento de diversos índices de desempeño que pueden ser aplicados para el diseño y el control de robots o para la planificación de movimientos. Un índice de desempeño cinetostático de un sistema robótico mecánico, es una cantidad escalar que mide qué tan bien se comporta el sistema en los aspectos de la transmisión de velocidad y la transmisión de fuerza [22].

A partir de la naturaleza de las cantidades que miden los índices de desempeño, éstos se clasifican en tres categorías:

- ❖ Estáticos
- ❖ Cinemáticos
- ❖ Dinámicos

Los índices estáticos caracterizan las relaciones entre las fuerzas ejercidas por el órgano terminal y las fuerzas generalizadas (pares torsores o fuerzas lineales) aplicadas a las articulaciones del robot.

Los índices de desempeño cinemático califican las relaciones de velocidad entre el órgano terminal y las articulaciones del robot.

Los índices dinámicos conciernen a las relaciones entre los parámetros de movimiento del órgano terminal y las fuerzas generalizadas que aplican los motores en cada articulación.

En este capítulo se realiza una revisión, basada en [8], de los principales índices de desempeño cinemático propuestos en la literatura.

### 3.1 Determinante de la matriz jacobiana

Como se sabe de los fundamentos de la cinemática de manipuladores, para una postura singular de un robot no es posible obtener la inversa de su matriz jacobiana, lo cual conduce a una indeterminación del modelo cinemático inverso de velocidad. Tal postura singular incapacita localmente al manipulador para desplazar el órgano terminal en una cierta dirección del espacio cartesiano. Paul y Stevenson [23] caracterizaron las condiciones que determinan una postura singular en la cual un robot pierde su capacidad de reorientar el órgano terminal. Clasificaron como *degeneradas* a las posturas que se acercaban a las posturas singulares, y utilizaron el determinante de la matriz jacobiana como índice para identificar la degeneración. Así, definen el índice  $\psi$  de desempeño cinemático de una muñeca como:

$$\psi = \det \{J\} \quad (3.1)$$

En consecuencia, una postura es *degenerada* si define un valor relativamente pequeño de  $\psi$ . En la vecindad de tal postura es necesario asignar grandes desplazamientos articulares al robot para producir un pequeño desplazamiento del órgano terminal en una cierta dirección. Evidentemente, esta situación no es aceptable desde el punto de vista de la eficiencia de un robot en la ejecución de una tarea. En contraste, un manipulador que utilice solamente posturas definiendo valores relativamente altos de  $\psi$  trabajará de manera eficiente.

### 3.2 Número de condicionamiento de la matriz jacobiana

La noción de condicionamiento de una matriz, utilizada por Salisbury y Craig [13] para minimizar la propagación de errores entre las fuerzas generalizadas y las fuerzas (y pares) a nivel del órgano terminal, puede también ser utilizada para minimizar la propagación de errores en términos de la velocidad. En efecto, del sistema lineal expresado mediante la siguiente ecuación de la cinemática directa de velocidad de un manipulador serial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}}$  es el estado de velocidad (o *twist*, por la expresión usada en inglés) del órgano terminal del manipulador (que incluye un vector de velocidad lineal y uno de velocidad angular),  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  es su matriz jacobiana básica, y  $\dot{\mathbf{q}}$  es su vector de velocidades articulares. A partir de la noción de propagación de errores en sistemas lineales, se sabe [24] que el error relativo de velocidades articulares de (3.2) está acotado mediante:

$$\frac{\|\delta\dot{\mathbf{q}}\|}{\|\dot{\mathbf{q}}\|} \leq C(\mathbf{J}(\mathbf{q})) \frac{\|\delta\dot{\mathbf{x}}\|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} \quad (3.3)$$

donde:

- $\dot{\mathbf{x}}$  es el vector del estado de velocidad del órgano terminal, de dimensión  $m$
- $\delta\dot{\mathbf{x}}$  es el vector de error de  $\dot{\mathbf{x}}$
- $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidades articulares del manipulador, de dimensión  $n$
- $\delta\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de error de velocidades articulares
- $C(\mathbf{J}(\mathbf{q}))$  es el número de condicionamiento de la matriz jacobiana del manipulador

El símbolo  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidiana del vector argumento. La desigualdad (3.3) expresa que si  $C(\mathbf{J}(\mathbf{q}))$  es grande, entonces un error  $\delta\dot{\mathbf{x}}$  de pequeña magnitud puede producir variaciones importantes de  $\dot{\mathbf{q}}$ , lo que se puede interpretar como una dificultad para controlar el estado de velocidad del órgano terminal. Ahora bien, teniendo en consideración esta observación, debido a que  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  depende de la postura del manipulador conviene hacer trabajar a éste con posturas que definan valores bajos de  $C(\mathbf{J}(\mathbf{q}))$  a fin de tener mayor



precisión en el control de la velocidad del órgano terminal. Por esta razón se puede considerar a  $C(\mathbf{J}(\mathbf{q}))$  como un índice de desempeño del manipulador, cuya minimización permite hacer trabajar al manipulador en condiciones ideales desde el punto de vista de la precisión del órgano terminal.

### 3.3 Manipulabilidad

Para un robot cuyas velocidades articulares se acotan mediante  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$ , el dominio de velocidades realizables del órgano terminal está definido por:

$$\dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{x}} \leq 1 \quad (3.4)$$

Esta expresión representa un hiper-elipsoide en el espacio Euclidiano  $\mathbf{R}^m$  (siendo  $m$  la dimensión del vector  $\dot{\mathbf{x}}$  de (3.2)), que es llamado elipsoide de manipulabilidad [14], y cuyo volumen es una medida de la eficacia de la transformación de las velocidades articulares en velocidad del órgano terminal.

En la Figura 3.1, mediante un mapeo del espacio de velocidades articulares al espacio al de velocidades operacionales, se ilustra la transformación de las velocidades articulares en velocidad del órgano terminal para un robot plano de dos articulaciones de revolución. En el espacio articular se ha considerado la restricción  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq 1$ . En el espacio de velocidades operacionales se muestra el elipsoide de manipulabilidad, que en este caso ( $m=2$ ) se reduce a una elipse.

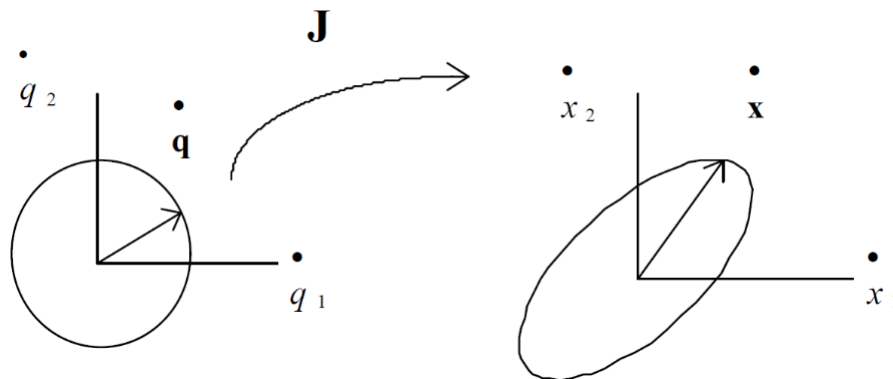


Figura 3.1 Elipsoide de manipulabilidad para un postura arbitraria de un manipulador 2R.

En la figura 3.1 es fácil apreciar que si el área de la elipse es grande, entonces los vectores  $\dot{x}$  en el espacio de velocidades operacionales serán relativamente grandes en todas direcciones, y será fácil desplazar arbitrariamente al órgano terminal en cualquier dirección. En consecuencia, en el caso general, se tiene que la transformación de las velocidades articulares en velocidad del órgano terminal puede ser optimizada maximizando el volumen del elipsoide. Este volumen está definido por:

$$vol = k w \quad (3.5)$$

donde  $k$  es una constante que depende de  $m$ . En el caso particular del mapeo de la figura 3.1 ( $m=2$ ), se tiene que  $k = \pi$ . La variable  $w$  en (3.5), llamada por Yoshikawa índice de manipulabilidad, en general se puede calcular mediante:

$$w = \sqrt{\det(JJ^T)} \quad (3.6)$$

Puesto que  $k$  es una constante, la maximización de  $w$  implica la maximización del volumen del elipsoide, por lo que  $w$  se puede usar directamente como un índice de desempeño. La magnitud del determinante de la matriz jacobiana utilizado por Paul es equivalente al índice de manipulabilidad en el caso de robots no redundantes ( $m = n$ ).

### 3.4 Manipulabilidad traslacional y manipulabilidad rotacional

El índice de la ecuación (3.6) evalúa globalmente la eficacia con que se producen tanto los desplazamientos de traslación como los de rotación del órgano terminal. Sin embargo, debido a la diferencia de dimensiones de las variables usadas en la matriz jacobiana para calcular ambos tipos de desplazamiento, ese índice resulta inapropiado si se desea evaluar de manera efectiva cada tipo de desplazamiento. Considerando lo anterior, Yoshikawa en [15] propuso dos índices suplementarios: uno para cuantificar la manipulabilidad traslacional, y otro para evaluar la manipulabilidad rotacional. Con el propósito de recordar aquí estos índices, se asume, de acuerdo con la referencia citada, que el manipulador al que se aplican satisface las siguientes condiciones, las cuales verifican la mayoría de los robots industriales actuales de 6 grados de libertad:

- El manipulador es considerado como integrado por dos porciones: brazo y muñeca. El brazo consiste en  $n_A$  articulaciones (con  $n_A \geq 3$ ) y la muñeca contiene  $n_w$  articulaciones (con  $n_w \geq 3$ )
- Todas las articulaciones de la muñeca son de revolución, y sus ejes son concurrentes.

Adicionalmente, se considera que a cada eslabón del manipulador se le asigna un marco de referencia ortonormal y se numeran en orden ascendente, desde la base del manipulador hasta el órgano terminal. Se tiene que el número total de articulaciones es

$$n = n_A + n_w \geq 6$$

Para manipuladores que satisfacen las condiciones anteriores, la manipulabilidad traslacional del brazo y la manipulabilidad rotacional de la muñeca del manipulador se definen respectivamente, como

$$w_A = \sqrt{\{\det J_{TA} J_{TA}^T\}} \quad (3.7)$$

$$w_w = \sqrt{\{\det J_{RW} J_{RW}^T\}} \quad (3.8)$$

donde:

$$J_{TA} = [J_{TA1} \ J_{TA2} \ \cdots \ J_{TA n_A}] \quad (3.9 \text{ a})$$

$$J_{RW} = [z_{n_A+1} \ z_{n_A+2} \ \cdots \ z_n] \quad (3.9 \text{ b})$$

con

$$J_{TAi} = \begin{cases} z_i \times p_{iw} & \text{si la articulación } i \text{ es del tipo } R \\ z_i & \text{si la articulación } i \text{ es del tipo } P \end{cases} \quad (3.10)$$

$$(i=1, 2, \dots, n_A)$$

Los vectores  $z_i$  ( $i=1, 2, \dots, n_A$ ) en las expresiones (3.9 b) y (3.10) son vectores unitarios en la dirección de los ejes de las articulaciones del manipulador. En la expresión (3.10)  $p_{iw}$  es el vector que va del punto  $O_i$  (el origen del marco  $i$ ) al punto de  $O_w$  (el punto de concurrencia de los ejes de las articulaciones de la muñeca).

### 3.5 Relaciones de transmisión de velocidad y de fuerza

El índice de compatibilidad introducido por S.L. Chiu [16] permite optimizar la magnitud y la precisión de las fuerzas y las velocidades que pueden alcanzarse en el órgano terminal a lo largo de direcciones preferenciales. Este índice se basa en las relaciones de transmisión de fuerza ( $\alpha$ ) y de velocidad ( $\beta$ ) en la dirección considerada, las cuales están dadas por:

$$\alpha = [\mathbf{u}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \mathbf{u}]^{-1/2}$$

$$\beta = [\mathbf{u}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{u}]^{-1/2}$$

donde  $\mathbf{u}$  es un vector unitario en la dirección de interés. Si la magnitud de fuerza o de velocidad es considerada,  $\alpha$  o  $\beta$  deben ser maximizadas. Si la precisión de fuerza o de velocidad son consideradas, entonces  $\alpha^{-1}$  o  $\beta^{-1}$  serán maximizadas.

## 4. Generación de notas musicales en Matlab©

### 4.1 Concepto del software a desarrollar

Para la puesta en marcha del proceso de planificación de los movimientos de la mano izquierda de un robot violinista, es necesario desarrollar previamente un programa de cómputo que efectúe la simulación de los movimientos de dicha mano. Este programa debe tener la capacidad de validar los movimientos planificados, evaluar numéricamente el desempeño de la mano, y verificar que dichos movimientos produzcan el resultado deseado: interpretar notas musicales en el violín. Por ello, la primera etapa del desarrollo del programa consiste en montar una rutina de cómputo que permita programar y emular los sonidos correspondientes a todas las notas musicales que puede emitir un violín.

El concepto básico del proceso de simulación que se propone se muestra esquemáticamente en la figura 4.1. El proceso lo inicia el usuario en una interfaz gráfica o *GUI* (acrónimo del término en inglés *Graphical User Interface*), en la cual el usuario debe especificar la sucesión de notas que integran la melodía deseada. Como resultado en este bloque se produce la información que permite, por un lado, generar en la PC las notas de la melodía deseada y, por otro lado, establecer las posiciones que deben alcanzar los dedos de la mano izquierda sobre el diapasón para ejecutar la melodía. Esta última información

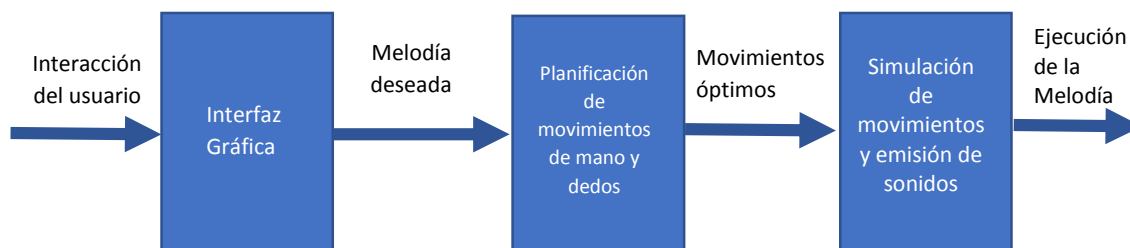


Figura 4.1. Diagrama de bloques del proceso de cómputo para la planificación de movimientos de una mano violinista.

se aplica en el proceso de planificación en el siguiente bloque para determinar las posiciones requeridas de la mano izquierda, así como las posturas óptimas de los dedos que se requieren para ejecutar la melodía deseada. Finalmente, los datos que proporcionan este segundo bloque junto, con los del primero, se procesan en el tercer bloque para visualizar los movimientos de la mano sobre el violín y escuchar la melodía deseada.

En este capítulo se presenta la formulación para el desarrollo del primer bloque del proceso de la figura 4.1 y la parte del tercer bloque correspondiente a la generación en la PC de las melodías que ejecuta el violinista robótico. Los fundamentos para el desarrollo del segundo bloque y para la simulación de movimientos de la mano considerada en el tercer bloque se presentarán en el siguiente capítulo.

Para la realización de la interfaz gráfica que le facilite al usuario la programación y reproducción de una melodía, se propuso dividir la ventana principal de la interfaz en dos partes, como se aprecia en la figura 4.2. En el lado izquierdo se representa el diapasón de un violín, y en el lado derecho se despliega una caja de botones para diferentes propósitos. Ambas partes son, por supuesto, interactivas. En la gráfica del diapasón se muestra el código de colores descrito en la figura 2.2 y se indican las notas musicales asociadas a las diferentes posiciones. La caja de botones le facilita al usuario la especificación de la duración de cada nota, y le permite dar de alta (*Grabar*) las notas seleccionadas y reproducir una secuencia de notas, o dar de baja (*Borrar*) notas previamente seleccionadas que finalmente no serán requeridas.



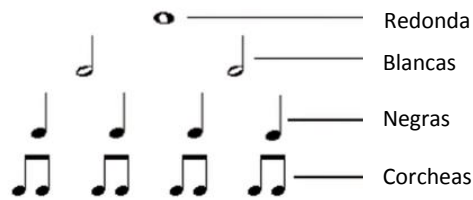


Figura 4.3. Símbolos de las duraciones de las notas musicales.

En la caja de botones de la interfaz se define la duración de cada nota mediante sus nombres técnicos: *redonda*, *blanca*, *negra* y *corchea*. Cada una de las cuáles vale la mitad del tiempo de la anterior sucesivamente. Así, la redonda vale 4 tiempos mientras que la blanca es la mitad de la redonda, la negra es la mitad de la blanca, y la corchea es la mitad de la negra. En la figura 4.3 se muestra la representación simbólica de las diferentes duraciones disponibles para el usuario.

En el supuesto de que una melodía sea programada por un usuario inexperto o ajeno a la terminología musical, se le podría pedir a la interfaz gráfica que toque una secuencia de notas sin sentido musical, o de sonidos seleccionados aleatoriamente por el usuario. En tal caso, el resultado final sería una mezcla entre azar e intuición.

## 4.2 Programación de notas

En el diagrama de bloques de la figura 4.4 se aprecia la secuencia de las tareas a realizar específicamente en el proceso de programación de las notas que conforman una melodía. Los vectores generados en el primer bloque son procesados dentro de una segunda etapa para producir las señales discretas requeridas. Estas señales son leídas por la función *Sound* de Matlab© para finalmente emitir el sonido.

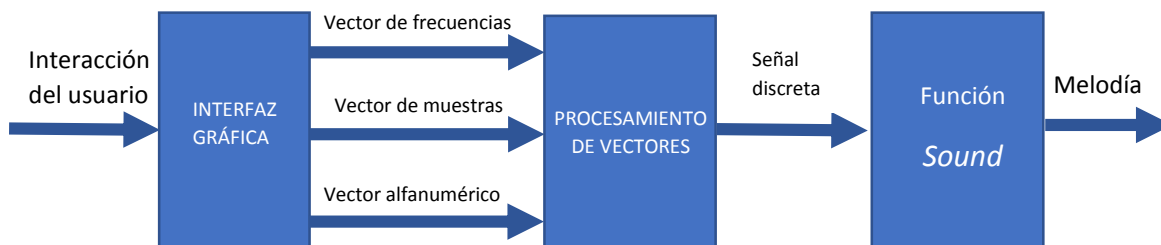


Figura 4.4. Secuencia de tareas para la generación de notas musicales en Matlab©.



Al seleccionar una nota en el diapason de la interfaz gráfica, el usuario define implícitamente el valor de la frecuencia de sonido correspondiente. Los valores de estas frecuencias oscilan entre 1 y 8192 Hz. Una vez que el usuario completa todas las notas de la melodía, se habrá definido un vector de  $nt$  valores de las frecuencias necesarias, como se muestra en (4.1), siendo  $nt$  el número total de notas de la melodía, fragmento o idea musical deseada.

$$\text{vector frecuencia} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Los valores de las frecuencias correspondientes a diferentes octavas de las notas musicales del violín se muestran en la matriz de la Tabla 4.1. Estos son los valores que se incorporan en el vector de frecuencia al ir seleccionando las notas para generar una melodía.

Tabla 4.1. Octavas de las notas musicales que puede generar el violín, y sus correspondientes valores de frecuencias en Hertz.

Nota	Frec. (Hz)	Nota	Frec. (Hz)	Nota	Frec. (Hz)	Nota	Frec. (Hz)
C3	0	C4	261.62	C5	523.25	C6	1046.50
C#3	0	C#4	277.18	C#5	554.36	C#6	1108.73
D3	0	D4	293.66	D5	587.32	D6	1174.65
D#3	0	D#4	311.12	D#5	622.25	D#6	1244.50
E3	0	E4	329.62	E5	659.25	E6	1318.53
F3	0	F4	349.22	F5	698.45	F6	1318.51
F#3	0	F#4	369.99	F#5	739.98	F#6	1479.97
G3	195.99	G4	391.99	G5	783.99	G6	1479.97
G#3	207.65	G#4	415.30	G#5	830.60	G#6	1661.21
A3	220	A4	440	A5	880	A6	1760
A#3	233.08	A#4	466.16	A#5	932.32	A#6	1864.65
B3	246.94	B4	493.88	B5	987.76	B6	1975.53

En forma paralela al vector de frecuencias se genera una matriz que asocia una duración a cada nota, de tal manera que esta matriz contiene la información completa relativa a la melodía deseada. Sin embargo, esta información en el formato actual no es suficiente para ser emitida por la PC utilizando la función *Sound* de Matlab®. En efecto, por cada nota generada con la correspondiente duración es necesario crear una señal discreta para que pueda ser ejecutada por *Sound*. En los siguientes párrafos se explica en qué consiste este proceso.

### ***Discretización de las notas musicales***

El modelo matemático que describe el sonido de la  $i$ -ésima nota musical de una melodía, con su correspondiente duración, está dado por (4.2):

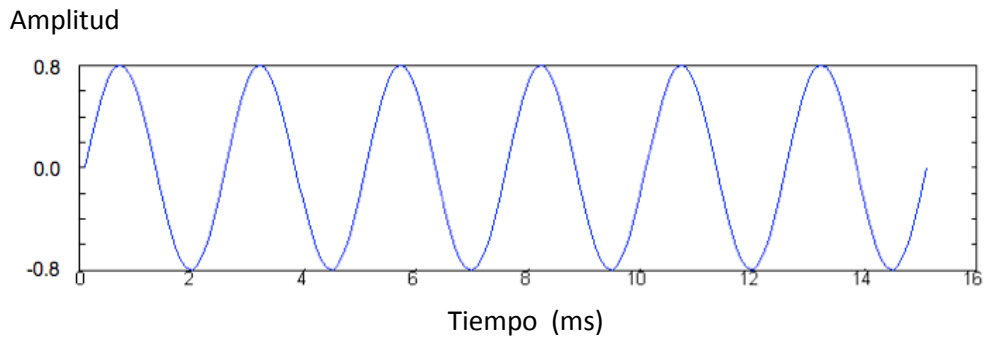
$$nota_i = 2 * \sin(\omega_0 t + fase) \quad , \quad (i = 1, 2 \dots, nt) \quad (4.2)$$

donde  $t$  depende de la duración de la nota y  $\omega_0$  está dado por:

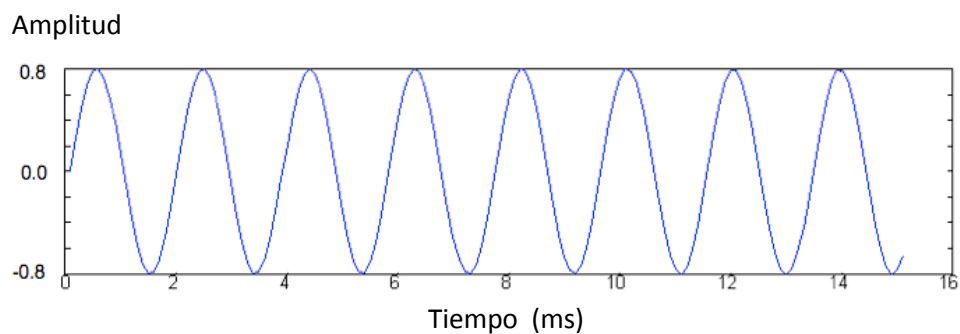
$$\omega_0 = 2 * \pi * frecuencia$$

La ecuación (4.2) genera una señal sinusoidal que se traduce en un movimiento periódico continuo correspondiente a la frecuencia. El parámetro *fase* corresponde al corrimiento que deseamos dar a la señal, el cuál es irrelevante para la generación del sonido. Sin embargo es importante advertir que puede presentarse dicho corrimiento. Al darle un valor determinado no implica ningún cambio en la nota a reproducir.

Como se mencionó en párrafos precedentes, en Matlab® no es posible utilizar directamente la ecuación (4.2) para generar un sonido mediante la función *Sound*. Es necesario discretizar las señales para ser utilizadas por *Sound*. Por ejemplo, para generar el sonido correspondiente a la nota A4 (*La*, de la cuarta octava del violín) se tiene que la frecuencia es de 440 Hz, mientras que para la nota C5 (Do de la quinta octava) la frecuencia es de 523.25 Hz. Las señales generadas mediante (4.2) para estas notas son las mostradas en la figura 4.5.



(a) Nota A4. Frecuencia : 440 Hz



(b) Nota C5. Frecuencia : 523.25 Hz

Figura 4.5. Señales de sonido continuas para las notas A4 y C5.

Las ondas de la figura 4.5 no pueden ser interpretadas directamente por la función *Sound*. Para que sea posible interpretarlas debe efectuarse un muestreo. Para ello se debe asignar internamente un parámetro  $\rho$  que determina el número de muestras discretas de la señal. Este parámetro lo puede definir el usuario dependiendo de la capacidad de velocidad del procesador de la PC utilizada en la simulación. Para el presente trabajo de tesis se utilizó una PC con un procesador *Intel CORE i7 HQ7700* que permitió definir  $\rho = 12000$ , de manera arbitraria. Este valor fue obtenido mediante prueba y error. En caso de que el valor no sea adecuado, la nota simplemente no se reproduce o se reproduce con mucho *ruido blanco* de fondo.

En el proceso de discretización de una señal se genera una muestra finita de valores de amplitud de la nota deseada. La señal analógica está definida en el dominio del tiempo ( $t$ ), mientras que la señal discreta está definida en el dominio de la frecuencia (o del número  $n$  de muestras). En la figura 4.6 se representa un ejemplo de una muestra de amplitudes  $x$  de una señal de sonido tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

Para efectuar la discretización, al seleccionar una de las opciones de duración (*redonda*, *blanca*, *negra*, *corchea*) el usuario define implícitamente el número de muestras en que será dividido el dominio de la señal. Los valores correspondientes a las duraciones disponibles son los siguientes:

redonda: 24000 muestras

blanca: 12000 muestras

negra: 6000 muestras

corchea: 3000 muestras

El vector llamado *de muestreo* que sale del primer bloque del esquema de la figura 4.4 conserva los valores muestreados de la amplitud de la señal para cada nota, por lo que es un *vector de vectores*. El vector de muestras tiene la siguiente estructura:

$$\text{vector de muestras} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{nt} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Cada uno de los elementos  $n_1, n_2 \dots n_{nt}$  son vectores que pueden guardar muestras de la amplitud de la nota, de diferentes tamaños (24k, 12k, 6k y 3k) dependiendo de la duración seleccionada para la nota correspondiente.

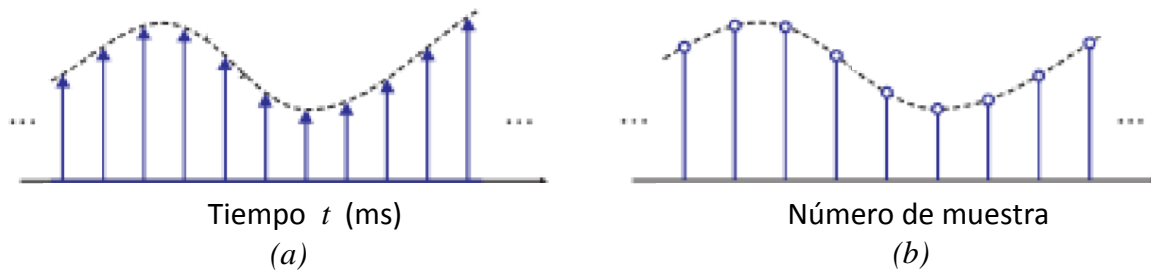


Figura 4.6. Ejemplo de señales de sonido discretas correspondientes a una nota musical (a) en el dominio del tiempo y (b) en el dominio de la frecuencia [25].

El arreglo de números correspondiente al vector de muestras no puede ser considerado una matriz puesto que cada vector  $n_i$  de este arreglo es de dimensión diferente dependiendo de la duración seleccionada. Tampoco pueden ser vectores de una sola dimensión con ceros en los elementos no definidos de la amplitud para una nota, pues se asignaría una duración diferente al sonido en el momento de la reproducción.

Una vez que se ha establecido el vector de muestras, éste se suministra como parámetro junto con  $\rho$  a la función *Sound* de Matlab® con la siguiente sintaxis: *sound(vector de muestras,  $\rho$ )*. Esta función interpreta el número de muestras y lo comparara con  $\rho$  para reproducir así las notas de acuerdo a su duración. Nótese que las variaciones en altura y duración generan las cualidades tonales y rítmicas de la estructura melódica que hacen diferenciable a una melodía de otra para cualquier oído.

Los elementos del vector de muestras que permite generar una nota deseada con la duración requerida contienen una gran cantidad de números correspondientes a la amplitud de las notas programadas y a sus respectivas duraciones. En consecuencia, sería sumamente complicado para cualquier usuario efectuar una interpretación de la secuencia de las notas programadas para verificar su validez a partir del archivo del vector de muestras. Por lo tanto, se consideró de utilidad para el usuario generar un archivo suplementario que contenga las designaciones nominales de las notas en un archivo alfanumérico, de tal manera que se le facilite la interpretación de las notas programadas. Este archivo alfanumérico no tiene ningún interés computacional. En (4.4) se muestra una

matriz cuyos elementos son las designaciones nominales de las notas, escritas en caracteres alfanuméricos. Estos elementos son los que contiene el *vector alfanumérico* que está a la salida del primer bloque del proceso de la figura 4.4, y son los mismos que se aprecian en la matriz (4.4) se despliegan en el archivo alfanumérico correspondiente.

$$matriz = \begin{bmatrix} C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ C_{\#3} & C_{\#4} & C_{\#5} & C_{\#6} \\ D_3 & D_4 & D_5 & D_6 \\ D_{\#3} & D_{\#4} & D_{\#5} & D_{\#6} \\ E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \\ F_{\#3} & F_{\#4} & F_{\#5} & F_{\#6} \\ G_3 & G_4 & G_5 & G_6 \\ G_{\#3} & G_{\#4} & G_{\#5} & G_{\#6} \\ A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ A_{\#3} & A_{\#4} & A_{\#5} & A_{\#6} \\ B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

### 4.3 Programación de una melodía

El proceso descrito en los párrafos precedentes se aplicó para la programación de un fragmento de la melodía denominada *Bourrée*, de Johann Sebastian Bach. La partitura de este segmento se muestra en la figura 4.7. Las notas y sus duraciones programadas en la GUI del software aquí desarrollado se muestran en la tabla 4.2. Esta melodía fue interpretada exitosamente al ejecutar el programa. En [26] se puede escuchar esta melodía, y se puede observar la animación de los dedos de la mano izquierda del robot ejecutando los movimientos requeridos para tocar esa melodía. Ambas tareas se realizan a partir del software desarrollado en esta tesis.

# *Bourrée*

## Johann Sebastian Bach



Figura 4.7. Partitura de un fragmento del Bourrée de J.S. Bach.

Tabla 4.2. Notas musicales programadas para un fragmento del *Bourrée* de J.S. Bach

Posición	Nota	Posición	Nota	Posición	Nota
P1	B4 q	P9	E5 q	P17	F#4 b
P2	C5 q	P10	F#5 q	P18	D5 b
P3	D5 b	P11	D5 b	P19	C5 q
P4	G4 q	P12	A4 q	P20	B4 q
P5	F#4 q	P13	B4 q	P21	A4 q
P6	G4 b	P14	C5 b	P22	B4 q
P7	G5 b	P15	F#4 q	P23	G4 b
P8	F#5 b	P16	E4 q		

q = corchea, b = negra, w = blanca

## 5. Modelado y simulación de los movimientos de la mano izquierda de un robot violinista

### 5.1. Definición de la arquitectura de la mano violinista.

Para poder precisar adecuadamente los requerimientos de movilidad de la mano izquierda de un robot violinista, en el marco de esta tesis se consideró conveniente estudiar el funcionamiento de una mano humana izquierda durante la ejecución de una melodía en un violín. Así, se examinaron los movimientos de las manos de varios violinistas, violistas y violonchelistas (Apéndice A). Los movimientos de la mano izquierda realizados por los instrumentistas proporcionaron información interesante. En el proceso de análisis de esta información se observó que el metacarpo cumple una función de gran importancia en la ejecución de los instrumentos. Por esta razón se consideró importante que la mano robótica que se estudiaría en esta tesis debería poseer un metacarpo. Esta parte de la mano no es común en las manos robóticas existentes en la literatura.

#### ***Cadena cinemática de la mano humana***

La cadena cinemática de una mano humana está compuesta por los siguientes grupos de huesos que se aprecian en la figura 5.1:

- ❖ **Carpó.** Está constituido por un conjunto de 8 huesos que conectan la mano con los huesos del antebrazo (cúbito y radio).



- ❖ **Metacarpo.** Integrado por cinco huesos metacarpianos conectados al carpo. El metacarpo, a su vez está dividido en dos subgrupos: el primero que contiene a los metacarpianos de los dedos índice, medio, anular y meñique. Y el segundo que consta solamente del metacarpiano del dedo pulgar.
- ❖ **Falanges.** Se trata de 5 grupos de huesos (cada grupo forma un dedo), llamados falanges. Cada dedo consta de 3 falanges (proximal, medial y distal), a excepción del dedo pulgar que solo tiene una falange proximal y una falange distal (14 huesos).

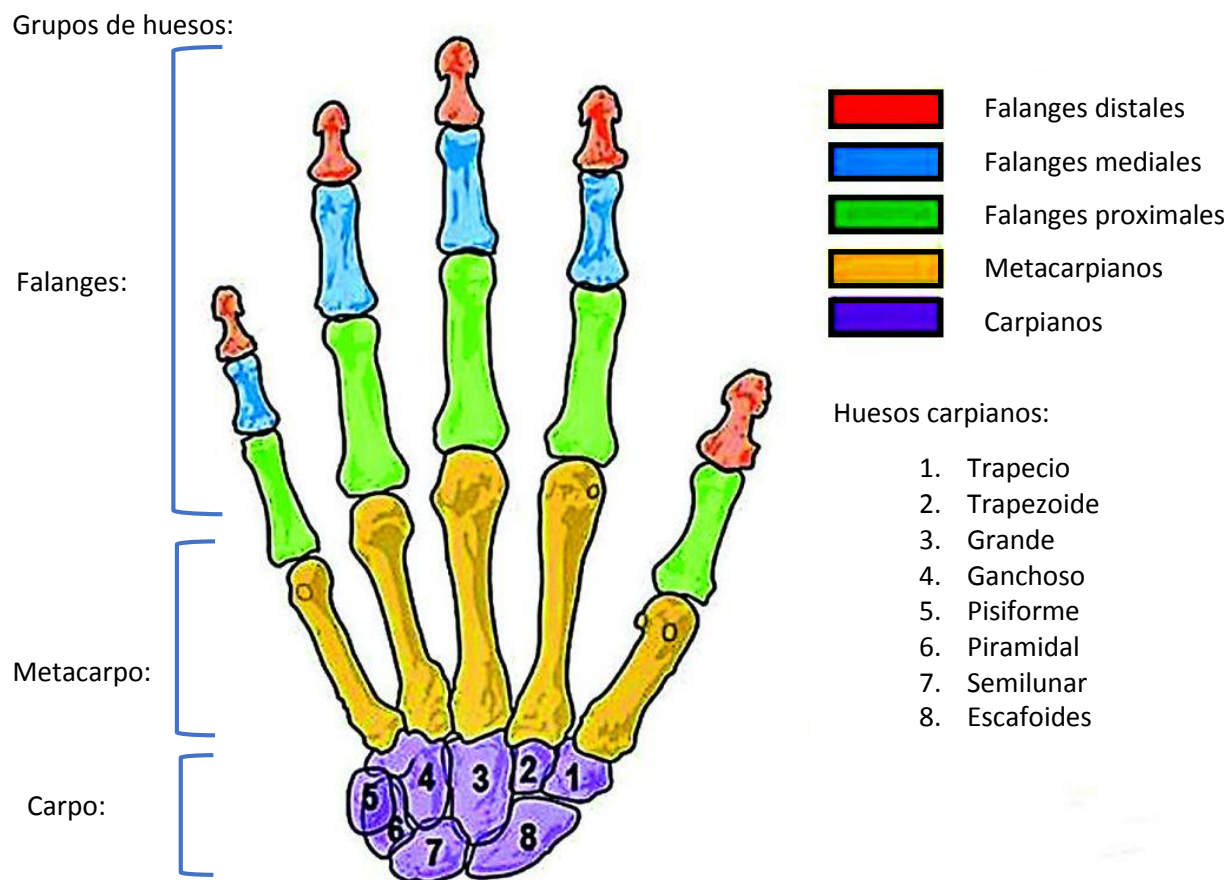


Figura 5.1. Huesos de una mano humana. El dedo del extremo derecho es el pulgar.

En analogía con la cadena cinemática de una mano robótica, el carpo o palma de la mano sería equivalente a la base de un robot arborescente, movida por un brazo y conectada a éste mediante una articulación universal (la muñeca de la mano). De la palma parten cinco cadenas cinemáticas seriales (siendo cada una un dedo de la mano). Cada una de las cadenas de un dedo se inicia con un hueso metacarpiano. La movilidad de los huesos del primer subgrupo metacarpiano, sin embargo, está restringida por los músculos y la piel que envuelven a este subgrupo, de tal manera que éste se puede considerar como un solo eslabón conectado al carpo mediante una articulación rotacional. En contraste, la movilidad del metacarpiano del dedo pulgar es independiente de los otros cuatro metacarpianos, y se puede asumir como conectado al carpo mediante dos articulaciones rotacionales de ejes perpendiculares concurrentes. Así, el primer hueso de la cadena cinemática serial que compone a cada dedo, después del metacarpo, es la falange proximal, la cual se conecta a una falange medial y ésta, a su vez, se conecta a la falange distal. Cada hueso metacarpiano se acopla a su falange proximal mediante dos articulaciones rotacionales de ejes perpendiculares concurrentes; esta falange se vincula a la medial mediante una articulación rotacional y, finalmente, la falange medial se conecta a la distal mediante una última articulación rotacional. Con excepción del dedo pulgar que no posee falange medial, todos los dedos poseen la misma arquitectura. Desde la conexión de cada hueso metacarpiano con la primera falange hasta la última falange la arquitectura de cada dedo es del tipo 4R. Siendo las dos primeras articulaciones de ejes concurrentes y perpendiculares, y las últimas tres articulaciones de ejes paralelos. Las dimensiones de los parámetros geométricos que describen la arquitectura de cada dedo son diferentes en cada uno de ellos. Estas consideraciones acerca de la cinemática de la mano humana nos permitirán proponer una arquitectura para la mano robótica que se analizará en esta tesis.

### ***Arquitectura de la mano robótica***

Teniendo en consideración la descripción del párrafo precedente, la mano robótica propuesta para la ejecución del violín está compuesta por la palma, un metacarpo y cinco manipuladores seriales del tipo RRRR, que son los dedos. Con esta arquitectura se asume que es posible emular los movimientos humanos de forma suficientemente aproximada.

El criterio en que se basa esta propuesta coincide con los conceptos presentados en [27]: “Aislado de cualquier tipo de contexto, el término robot puede tener significados distintos dependiendo de quien lo utilice. Varios factores contribuyen a esta divergencia en la acepción: desde la historia misma del término hasta los niveles de inteligencia que puede tener una máquina industrial. En efecto: mientras que para un lector de literatura de ciencia ficción un robot es un artefacto antropomorfo, del tipo de C3PO de la Guerra de las Estrellas, para un ingeniero será una simple máquina de transferencia de objetos, y para un científico será un manipulador asistido por sofisticados soportes de computación y de percepción que lo doten de un nivel elevado de inteligencia”. En el caso de la mano robótica propuesta, ésta es una representación de las capacidades inherentes a una mano humana.

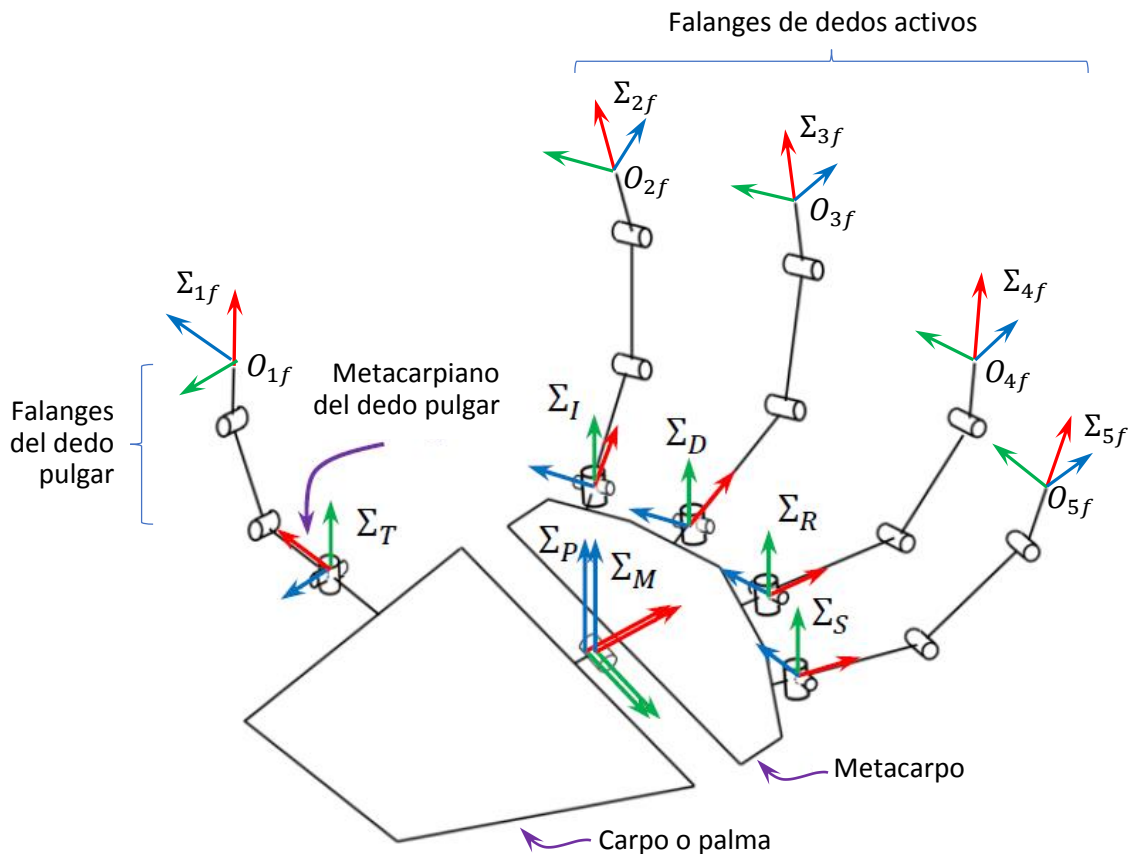


Figura 5.2. Arquitectura propuesta para la mano violinista estudiada en esta tesis.

Tabla 5.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg modificados [28] del  $j$ -ésimo dedo. ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ).

$i$	$\sigma_{ji}$	$\alpha_{ji} (^\circ)$	$d_{ji}$	$\theta_{ji} (^\circ)$	$r_{ji}$
1	0	0	0	$\theta_{j1}$	0
2	0	-90	0	$\theta_{j2}$	0
3	0	0	$d_{j3}$	$\theta_{j3}$	0
4	0	0	$d_{j4}$	$\theta_{j4}$	0
$f$	-	0	$d_{jf}$	0	0

La arquitectura de cada dedo se describe aplicando la convención modificada de *Denavit-Hartenberg* [28] mediante los parámetros que se dan en la tabla 5.1. Las longitudes que se consideran para los parámetros  $d_{ji}$  se definen a partir de un estudio antropométrico de las manos de un grupo de ejecutantes de instrumentos de cuerdas. En la tabla 5.2 se presentan los promedios de las longitudes obtenidas. Los datos completos adquiridos en el estudio antropométrico se presentan en el Apéndice B.

Tabla 5.2. Longitudes de los parámetros de los eslabones

No. de dedo ( $j$ )	Nombre del eslabón del dedo	Parámetro	Longitud (mm)
1	Metacarpiano del pulgar	$d_{13}$	50
1	Proximal del pulgar	$d_{14}$	20
1	Distal del pulgar	$d_{1f}$	25
2	Proximal del índice	$d_{23}$	43
2	Medial del índice	$d_{24}$	28
2	Distal del índice	$d_{2f}$	22
3	Proximal del medio	$d_{33}$	46
3	Medial del medio	$d_{34}$	32
3	Distal del medio	$d_{3f}$	23
4	Proximal del anular	$d_{43}$	43
4	Medial del anular	$d_{44}$	31
4	Distal del anular	$d_{4f}$	22
5	Proximal del meñique	$d_{53}$	40
5	Medial del meñique	$d_{54}$	25
5	Distal del meñique	$d_{5f}$	20

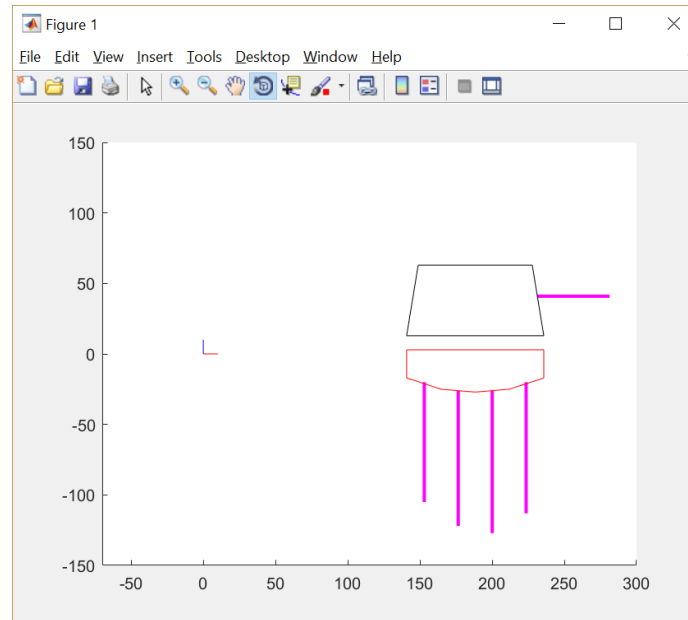


Figura 5.3. Vista superior del modelo geométrico en Matlab© de la mano en estudio.

A partir de los parámetros geométricos de los dedos, y de las dimensiones propuestas para la palma y el metacarpo, se obtiene el modelo geométrico de la mano que se aplica en el proceso de planificación y optimización de sus movimientos que se propone en este trabajo. En la figura 5.3 se observa una vista superior de la mano modelada en esquema de alambre en Matlab© que se aplicará en la simulaciones de sus movimientos.

## 5.2. Modelado cinemático de posición de la mano violinista

### 5.2.1. Definiciones preliminares

Como se observa en las figuras 5.2 y 5.3, la base del dedo pulgar está sujeta a la palma directamente, mientras que los dedos activos (índice, medio, anular y meñique) están sujetos al metacarpo de la mano. En la figura 5.2 también se aprecian los marcos de referencia ortonormales asignados a las bases de los dedos unidas a la palma (base del pulgar) y al metacarpo (bases de los dedos activos).

El marco unido a la base del pulgar se designa mediante  $\Sigma_T$ , mientras que los marcos unidos a las bases de los dedos índice, medio, anular y meñique se designan, respectivamente, mediante  $\Sigma_I$ ,  $\Sigma_D$ ,  $\Sigma_R$ , y  $\Sigma_S$ . Adicionalmente se definen los marcos  $\Sigma_P$  y  $\Sigma_M$

unidos respectivamente a la palma de la mano y al metacarpo. Para facilitar el modelado cinemático, en las falanges distales de los dedos se asignan los marcos de referencia suplementarios  $\Sigma_{jf}$  ( $j=1, 2, \dots, 5$ ), cuyo origen se define en el extremo distal de cada falange, como se aprecia en la figura 5.2. Los parámetros del renglón  $f$  de la tabla 5.1, determinan la pose del marco  $jf$  con respecto al marco  $j4$  del dedo  $j$ .

Nótese que el emplazamiento de la mano con respecto al marco del violín,  $\Sigma_V$ , unido rígidamente al violín como se estableció en el Capítulo 2, se puede definir mediante la matriz de transformación homogénea  ${}^V_P T$ . Esta matriz especifica la pose del marco de la palma de la mano  $\Sigma_P$  con respecto al marco  $\Sigma_V$ . A su vez, los emplazamientos de los marcos unidos a la base del pulgar ( $T$ ) y al metacarpo ( $M$ ), ambos con respecto a la palma ( $P$ ) de la mano, se especifican mediante las matrices homogéneas  ${}^P_T T$  y  ${}^P_M T$ , respectivamente. Y los emplazamientos de los marcos unidos a las bases de los dedos activos se especifican con respecto al marco unido al metacarpo a través de las matrices homogéneas  ${}^M_I T$ ,  ${}^M_D T$ ,  ${}^M_R T$  y  ${}^M_S T$ . Los sub-índices  $I$ ,  $D$ ,  $R$  y  $S$ , se refieren a los dedos índice, medio, anular y meñique, respectivamente. Finalmente, el emplazamiento del dedo pulgar con respecto a la palma de la mano se establece mediante la matriz homogénea  ${}^P_T T$ . Todas las matrices mencionadas en este párrafo, que definen los emplazamientos relativos de las diferentes partes de la mano, se especifican numéricamente en las ecuaciones (5.1) a (5.6).

$${}^P_M T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$${}^P_T T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$${}^M_I T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29.00 \\ 0 & 0 & 1 & 0.00 \\ 0 & -1 & 0 & -35.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$${}^M_D T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 34.00 \\ 0 & 0 & 1 & 0.00 \\ 0 & -1 & 0 & -11.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$${}^M_R T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 33.00 \\ 0 & 0 & 1 & 0.00 \\ 0 & -1 & 0 & 11.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$${}^M_S T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 28.00 \\ 0 & 0 & 1 & 0.00 \\ 0 & -1 & 0 & 35.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

### 5.2.2. Modelo directo de posición del $j$ -ésimo dedo

La matriz homogénea que determina el modelo directo de posición de cada dedo está dada por la expresión en (5.7). Evidentemente, los elementos (1,4), (2,4) y (3,4) de esta matriz definen las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente, del origen  $O_{jf}$  del marco  $\Sigma_{jf}$  ubicado en la punta del  $j$ -ésimo dedo ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) con respecto al marco  $\Sigma_{j0}$ . Este marco coincide con el marco  $\Sigma_T$  para  $j=1$ , con  $\Sigma_I$  para  $j=2$ , con  $\Sigma_D$  para  $j=3$ , con  $\Sigma_R$  para  $j=4$ , y con  $\Sigma_S$  para  $j=5$ . La orientación de la falange distal está definida por los elementos de las 3 primeras columnas y los tres primeros renglones de la matriz.

$${}^{j0}_{jf} T = \begin{bmatrix} C_{j1}C_{j2j3j4} & -C_{j1}S_{j2j3j4} & -S_{j1} & (d_{j3}C_{j2} + d_{j4}C_{j2j3} + d_{fj}C_{j2j3j4})C_{j1} \\ C_{j2j3j4}S_{j1} & -S_{j1}S_{j2j3j4} & C_{j1} & (d_{j3}C_{j2} + d_{j4}C_{j2j3} + d_{fj}C_{j2j3j4})S_{j1} \\ -S_{j2j3j4} & -C_{j2j3j4} & 0 & -d_{j3}S_{j2} - d_{j4}S_{j2j3} - d_{fj}S_{j2j3j4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

En (5.7) se considera la siguiente notación compacta:  $C_{ji} \equiv \cos(\theta_{ji})$ ,  $S_{ji} \equiv \sin(\theta_{ji})$ ,  $C_{jijk} \equiv \cos(\theta_{ji} + \theta_{jk})$ ,  $S_{jijk} \equiv \sin(\theta_{ji} + \theta_{jk})$ , ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 5$ ), etc.  $j$  indica el número de dedo e  $i$  define el número de eslabón (o falange) del dedo.

### 5.2.3. Cálculo de la matriz SNAP para la resolución del modelo inverso de posición del $j$ -ésimo dedo

Cuando el extremo del dedo  $j$  de la mano, al interpretar una melodía, oprime una cuerda del violín sobre al diapasón para lograr una cierta nota musical, entonces se conoce la posición deseada del punto  $O_{jf}$  del marco  $\Sigma_{jf}$  de la falange distal del dedo  $j$  con respecto al marco  $\Sigma_V$ . En tal caso se considerará que la matriz  ${}^V_{jf} T$  es conocida. Asumiremos que esto es cierto aún si la orientación de dicha falange no se especifica explícitamente pues, como se verá más adelante, en el método que se propone en este trabajo se incluye un criterio para la determinación de esa orientación. En consecuencia, la matriz  ${}^{j0}_{jf} T^*$  que establece la

pose deseada de la falange distal del dedo  $j$  con respecto al marco  $\Sigma_{j0}$  de la base de ese dedo se puede calcular mediante el producto de matrices indicado en la siguiente ecuación:

$${}_{jf}^{j0}T^* = {}_M^j T {}_P^M T {}_V^P T {}_{jf}^V T^* \quad (5.8)$$

La matriz  ${}_{jf}^{j0}T^*$  es equivalente a la matriz *SNAP* requerida en el método de Paul [30] para resolver el modelo inverso de posición de un manipulador. El asterisco que se utiliza en  ${}_{jf}^{j0}T^*$  indica que se trata de una matriz deseada o especificada por el usuario. Para el dedo  $j$  de la mano violinista, el modelo inverso de posición permite calcular las variables articulares requeridas por la cadena cinemática para alcanzar la pose deseada de la falange distal sobre el diapasón. Las componentes del vector de posición  $\mathbf{p}_{O_{j0}O_{jf}}$  correspondiente a la cuarta columna de  ${}_{jf}^{j0}T^*$  se representa en la figura 5.4. Este vector define la posición del origen  $O_{jf}$  del marco  $\Sigma_{jf}$  con respecto al marco  $\Sigma_{j0}$ .

Para la aplicación de la ecuación (5.8) se asume que se conocen el emplazamiento de la base del dedo  $j$  con respecto al metacarpo ( ${}^j_0T$ ), el emplazamiento de la mano (la palma) con respecto al metacarpo ( ${}^M_P T$ ), la pose del violín con respecto a la mano ( ${}^P_V T$ ) y finalmente, la pose deseada de la falange distal del dedo  $j$  con respecto al violín ( ${}^V_{jf} T$ ). De estas matrices,  ${}^j_0T$  y  ${}^M_P T$  dependen del diseño de la mano, que se asume conocido en esta tesis.

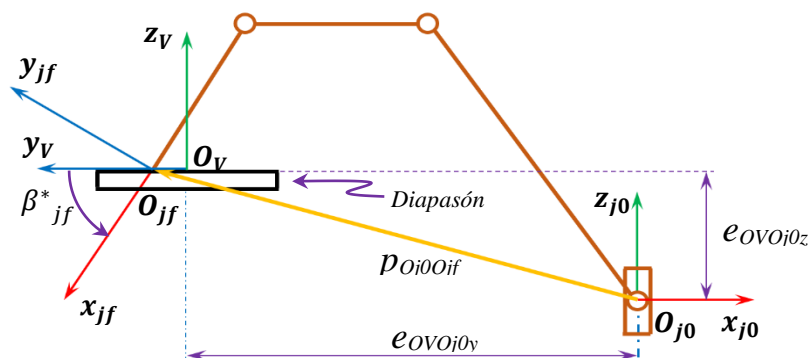


Figura 5.4. Vista lateral de la postura del dedo  $j$  para alcanzar una posición en el diapasón, coordenadas  $e_{OVO_{j0}y}$ ,  $e_{OVO_{j0}z}$  de la base del dedo  $j$  con respecto al violín, y ángulo  $\beta^*_{jf}$  de la falange distal.



Ninguna de estas matrices contiene variables cuyos valores se puedan cambiar para influir en el desempeño cinemático de la mano. Las únicas matrices que contienen términos con esas características y que sí se pueden cambiar al interpretar una nota musical son  ${}_{j_f}^V T$  y  ${}_{j_f}^P T$ . En efecto, aunque la parte de posición de  ${}_{j_f}^V T$  está determinada por la nota musical deseada y no se puede cambiar, la parte de orientación de esa matriz, que define la pose de la falange distal del dedo  $j$ , sí se puede cambiar para influir en el desempeño cinemático del dedo.

Por otra parte  ${}_{j_f}^P T$ , que es la inversa de la matriz que establece la ubicación de la mano con respecto al violín, contiene variables que determinan la postura del dedo y, en consecuencia, también influye en su desempeño cinemático. En suma, las variables independientes relevantes para la optimización del desempeño cinemático de los dedos al tocar el violín son aquellas que definen la orientación de la falange distal de cada dedo, y las que definen la posición de la mano con respecto al violín. Si bien, en principio son seis dichas variables (tres de orientación de la falange, más tres de posición de la mano), éstas se reducen a cuatro pues estando definida la posición de la mano con respecto al diapasón, la orientación del dedo  $j$  ya sólo estaría determinada por el ángulo de rotación de la falange distal con respecto a un eje que yace en el plano del diapasón. La formulación matemática del problema de optimización considera sólo estas 4 variables independientes. En la figura 5.4 se muestran tres de las variables que determinan el desempeño cinemático del dedo  $j$ : las coordenadas de posición  $e_{OVOj0y}$ ,  $e_{OVOj0z}$  y el ángulo  $\beta^*_{j_f}$  de la falange distal. Las dos primeras variables corresponden al emplazamiento de la base del dedo (e implícitamente de la mano) con respecto al violín. La coordenada  $e_{OVOj0x}$  no se aprecia en esa vista de la escena del dedo. Por otra parte, el ángulo  $\beta^*_{j_f}$  de la falange distal se explicará con más detalle en la sección 6.2.

#### 5.2.4. Matrices homogéneas para el cálculo de ${}_{j_f}^{j0} T^*$

En esta subsección se dan detalles acerca de las variables que determinan las matrices del lado derecho de la ecuación (5.8) para poder calcular la matriz *SNAP*  ${}_{j_f}^{j0} T^*$  del dedo  $j$ .

**A. Matrices  ${}^M_{j0}T$  del emplazamiento de la base de cada dedo con respecto al metacarpo**

Estas matrices dependen del diseño de la mano, el cual es conocido. Como quedó establecido previamente, el marco  $\Sigma_{j0}$  de la base del  $j$ -ésimo dedo ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) coincide con el marco  $\Sigma_T$  para  $j=1$ , con  $\Sigma_I$  para  $j=2$ , con  $\Sigma_D$  para  $j=3$ , con  $\Sigma_R$  para  $j=4$ , y con  $\Sigma_S$  para  $j=5$ . Por lo tanto, las matrices  ${}^M_{j0}T$  que describen el emplazamiento de las bases de los dedos activos ( $j = 2, \dots, 5$ ) con respecto al metacarpo quedan definidos de la siguiente manera:

- Para  $j=2$ :

$${}^M_{2,0}T \equiv {}^M_I T \quad (5.9)$$

- Para  $j=3$ :

$${}^M_{3,0}T \equiv {}^M_D T \quad (5.10)$$

- Para  $j=4$ :

$${}^M_{4,0}T \equiv {}^M_R T \quad (5.11)$$

- Para  $j=5$ :

$${}^M_{5,0}T \equiv {}^M_S T \quad (5.12)$$

Las matrices del lado derecho de las últimas 4 ecuaciones están definidas en las expresiones (5.3), (5.4), (5.5) y (5.6) para los emplazamientos de los dedos índice, medio, anular y meñique, respectivamente. Todas las matrices  ${}^M_{j0}T$  de emplazamiento de los dedos definidas previamente deberán de invertirse para aplicarlas en la ecuación (5.8).

**B. Matriz  ${}^P_M T$  de la pose del metacarpo con respecto a la palma de la mano**

El marco  $\Sigma_M$  unido al metacarpo puede tener una orientación distinta a la de la palma debido a la rotación que es factible entre la palma y el metacarpo. Así, la matriz homogénea  ${}^P_M T$  define la pose del marco  $\Sigma_M$  con respecto al marco  $\Sigma_P$ . Esta matriz está dada por:

$${}^P_M T = \begin{bmatrix} c\mu cv & -c\mu sv & s\mu & 0 \\ s\lambda s\mu cv + c\lambda sv & -s\lambda s\mu sv + c\lambda cv & -s\lambda c\mu & 0 \\ -c\lambda s\mu cv + s\lambda sv & c\lambda s\mu sv + s\lambda cv & c\lambda c\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Nótese que los tres primeros elementos de la cuarta columna de esta matriz son ceros pues los marcos  $\Sigma_M$  y  $\Sigma_P$  tienen un origen común, como se observa en la figura 5.2. Por otro lado, observamos que la parte de orientación de la matriz (5.13) se especifica a partir de los ángulos de *Bryant*  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  (tres rotaciones sucesivas en el orden  $x$ - $y$ - $z$  del marco  $\Sigma_P$  de la palma para alinearse con el marco  $\Sigma_M$  del metacarpo). Ahora bien, considerando que la articulación de la palma con el metacarpo sólo admite rotaciones en  $z$ , entonces sólo  $\nu$  de la matriz (5.11) podría tomar valores diferentes de cero, siendo nulas las rotaciones  $\lambda$  y  $\mu$ .

Así, para cualquier valor de  $\nu$  esta matriz toma la siguiente forma:

$${}^P_M T = \begin{bmatrix} c\nu & -s\nu & 0 & 0 \\ s\nu & c\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

No obstante, con el propósito de reducir el número de variables independientes en el proceso de optimización del desempeño cinemático de la mano, en esta tesis se asumirá que la orientación de la palma y del metacarpo es la misma durante la ejecución de melodías en el violín; es decir que  $\nu = 0$ . Esto implica que la matriz  ${}^P_M T$  será igual a una matriz identidad de dimensión 4. En el programa computacional para la simulación de la mano, sin embargo, se deja la matriz (5.14) en función de  $\nu$  a fin de tener la posibilidad de estudiar la influencia del metacarpo en el desempeño del robot en futuros trabajos.

### **C. Matriz ${}^V_P T$ de la pose del metacarpo con respecto a la palma de la mano**

La pose de la palma de la mano con respecto al violín se calcula mediante la matriz (5.15), en la cual sólo los elementos de la cuarta columna se consideran variables para los objetivos de la presente tesis. Se trata de  $pvpx$ ,  $pvpz$ , y  $pvpz$  que corresponden a las coordenadas cartesianas en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, del punto  $O_P$  del origen del marco  $\Sigma_P$  con respecto al marco  $\Sigma_V$ . La parte de orientación de la mano se supone constante y se especifica mediante los ángulos de Euler  $\alpha, \beta, \gamma$  correspondientes a tres rotaciones sucesivas en el orden  $z$ - $y$ - $x$  del marco  $\Sigma_V$  del violín para alinearse con el marco  $\Sigma_P$  de la palma. Los valores que se asignan a estos ángulos son:  $\alpha = -90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ .

$${}^v_pT = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & pvp_x \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & pvp_y \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma & pvp_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Sustituyendo en (5.15) los valores dados de  $\alpha, \beta, \gamma$  se obtiene la siguiente matriz:

$${}^v_pT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & pvp_x \\ -1 & 0 & 0 & pvp_y \\ 0 & 1 & 0 & pvp_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

#### D. Matriz ${}^{j_0}p_{Oj_0,ofj}$ de la pose deseada de la falange distal del dedo $j$ con respecto al violín

La falange distal del dedo  $j$  es la que entra en contacto con una cuerda del violín para conseguir una nota deseada al presionarla en la posición requerida sobre el diapasón. Se sabe que al seleccionar la nota mediante la GUI descrita en el capítulo precedente, el usuario especifica implícitamente la posición a alcanzar en el diapasón con el dedo que corresponda. El vector de posición de  $O_{jf}$  con respecto al marco  $\Sigma_{j_0}$  se expresa mediante:

$${}^{j_0}p_{Oj_0,ofj} = [p_{Oj_0,ofjx} \ p_{Oj_0,ofjy} \ p_{Oj_0,ofjz}]^T \quad (5.17)$$

Las componentes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  de este vector corresponden a los elementos (1, 4), (2, 4) y (3, 4), respectivamente, de la matriz SNAP  ${}^{j_0}T^*$  calculada mediante (5.8).

Por otra parte, la orientación de la falange distal se calcula a partir de los ángulos de Euler  $\alpha^*_{jf}, \beta^*_{jf}, \gamma^*_{jf}$  mediante la siguiente matriz de rotación:

$${}^v_{jf}R = \begin{bmatrix} C\alpha^*_{jf}C\beta^*_{jf} & C\alpha^*_{jf}S\beta^*_{jf}S\gamma^*_{jf} - S\alpha^*_{jf}C\gamma^*_{jf} & C\alpha^*_{jf}S\beta^*_{jf}C\gamma^*_{jf} + S\alpha^*_{jf}S\gamma^*_{jf} \\ S\alpha^*_{jf}C\beta^*_{jf} & S\alpha^*_{jf}S\beta^*_{jf}S\gamma^*_{jf} + C\alpha^*_{jf}C\gamma^*_{jf} & S\alpha^*_{jf}S\beta^*_{jf}C\gamma^*_{jf} - C\alpha^*_{jf}S\gamma^*_{jf} \\ -S\beta^*_{jf} & C\beta^*_{jf}S\gamma^*_{jf} & C\beta^*_{jf}C\gamma^*_{jf} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Los ángulos de Euler, corresponden a tres rotaciones sucesivas en el orden  $z$ - $y$ - $x$  del marco  $\Sigma_v$  del violín para alinearse con el marco  $\Sigma_{jf}$  de la falange distal del dedo  $j$ . De estos tres ángulos, sólo el primero y el último se pueden especificar con valores constantes que son:  $\alpha^*_{jf} = 90^\circ$  y  $\gamma^*_{jf} = 90^\circ$ . La magnitud de  $\beta^*_{jf}$  define el ángulo de presión con el que la falange llega a tocar la cuerda. Este ángulo es determinante para la postura del dedo y,

en consecuencia, para el desempeño cinemático de éste. Por esta razón, a  $\beta_{jf}^*$  no se le asignará un valor constante y se establecerá a partir de un proceso numérico que se incluye en el ciclo de cálculo del emplazamiento óptimo de la mano. Este ciclo se presentará en el capítulo 6. El significado de  $\beta_{jf}^*$  se muestra en la figura 5.5.

### 5.2.5. Modelo inverso de posición del $j$ -ésimo dedo

En la figura 5.5 se muestran dos vistas de una postura del  $j$ -ésimo dedo de la mano violinista. En la vista superior de la postura se observa que la primera variable articular se puede determinar a partir de las coordenadas del punto  $O_{jf}$  mediante:

$$\theta_{j1} = \text{atan2}({}^{j0}p_{Oj0,Ojfy}, {}^{j0}p_{Oj0,Ojfx}) \quad (5.19)$$

Los argumentos de la función  $\text{atan2}$  son las componentes cartesianas en  $x$  e  $y$  del vector de posición conocido  ${}^{j0}p_{Oj0O_{jf}}$  del punto  $O_{jf}$  con respecto al marco  $\Sigma_{j0}$ , como se estableció en la Sección 5.2.4.D. En la representación de la postura en vista lateral (figura 5.5b), se aprecia el vector  ${}^{j0}p_{Oj0O_{jf}}$ , y se observa que:

$${}^{j0}p_{Oj0O_{j4}} = {}^{j0}p_{Oj0O_{jf}} + {}^{j0}p_{O_{jf}O_{j4}} \quad (5.20)$$

Donde los vectores  ${}^{j0}p_{Oj0O_{jf}}$  y  ${}^{j0}p_{O_{jf}O_{j4}}$  son conocidos. El primero está definido en (5.17), mientras que las componentes cartesianas de  ${}^{j0}p_{O_{jf}O_{j4}}$  se obtienen mediante

$${}^{j0}p_{O_{jf}O_{j4}} = -d_{j4} {}^{j0}x_{jf} \quad (5.21)$$

donde  ${}^{j0}x_{jf}$  es un vector unitario orientado en dirección del eje longitudinal de la falange distal, como se muestra en la figura 5.5. Sus componentes con respecto al marco  $\Sigma_{j0}$  corresponden a los elementos (1, 1), (2, 1), y (3,1) de la matriz  ${}^{j0}T_{jf}^*$ , y por lo tanto son conocidas. Una vez calculadas las componentes de  ${}^{j0}p_{Oj0O_{j4}}$ , a partir del polígono  $O_{j0} O_{j3} O_{j4}$  de la figura 5.5-b, se plantea la siguiente ecuación vectorial:

$${}^{j0}p_{Oj0O_{j4}} = {}^{j0}p_{Oj0O_{j3}} + {}^{j0}p_{O_{j3}O_{j4}} \quad (5.22)$$

Se observa que  ${}^{j0}p_{Oj0O_{j4}}$  es conocido, mientras que de  ${}^{j0}p_{Oj0O_{j3}}$  y de  ${}^{j0}p_{O_{j3}O_{j4}}$  se conocen solamente sus normas. Así, (5.22) es una ecuación vectorial plana que se puede resolver aplicando las fórmulas de Chace [29] para ese caso.



En consecuencia, la transformación de las componentes de  ${}^{j_0}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4}$  del marco  $\Sigma_{j_0}$  al marco  $\Sigma_{jch}$  está dada por:

$${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4} = {}_{ch}R^T {}^{j_0}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4} \quad (5.24)$$

Ahora se puede escribir la ecuación (5.22) en términos de las componentes de los vectores en el marco  $\Sigma_{jch}$ :

$${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4} = {}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_3} + {}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_3 Oj_4} \quad (5.25)$$

En la fórmula de Chace para el caso de la ecuación (5.22),  ${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4}$  es el vector conocido (vector  $C$  en la fórmula de Chace), mientras que  ${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_3}$  y  ${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_3 Oj_4}$  (vectores  $A$  y  $B$  en la fórmula de Chace) son de normas euclidianas conocidas ( $d_{j_3}$  y  $d_{j_4}$ , respectivamente, de la tabla 5.1). Expresando a  ${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4}$  en términos de sus componentes en el marco  $\Sigma_{jch}$  se tiene que:

$${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4} = \begin{bmatrix} p_{Oj_0 Oj_4x} \\ p_{Oj_0 Oj_4y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

y la norma euclidiana de  ${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4}$ , por su parte, está dada por:

$$p_{j_0j_4} = \|{}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_4}\| = \sqrt{(p_{Oj_0 Oj_4x})^2 + (p_{Oj_0 Oj_4y})^2} \quad (5.27)$$

Así, se tienen las siguientes expresiones para las componentes de  ${}^{ch}\mathbf{p}_{Oj_0 Oj_3}$  a partir de la correspondiente fórmula de Chace:

$$p_{Oj_0 Oj_3x} = \frac{\varepsilon p_{Oj_0 Oj_4y}}{p_{j_0j_4}} \sqrt{d_{j_3}^2 - \left(\frac{d_{j_3}^2 - d_{j_4}^2 + p_{j_0j_4}^2}{2 p_{j_0j_4}}\right)^2} + \left(\frac{d_{j_3}^2 - d_{j_3}^2 + p_{j_0j_4}^2}{2 p_{j_0j_4}^2}\right) p_{Oj_0 Oj_4x} \quad (5.28)$$

$$p_{Oj_0 Oj_3y} = -\frac{\varepsilon p_{Oj_0 Oj_4x}}{p_{j_0j_4}} \sqrt{d_{j_3}^2 - \left(\frac{d_{j_3}^2 - d_{j_4}^2 + p_{j_0j_4}^2}{2 p_{j_0j_4}}\right)^2} + \left(\frac{d_{j_3}^2 - d_{j_3}^2 + p_{j_0j_4}^2}{2 p_{j_0j_4}}\right) p_{Oj_0 Oj_4y} \quad (5.29)$$

Por lo tanto el ángulo  $\psi_{j_2}$  mostrado en la figura 5.5 (b) es:

$$\psi_{j_2} = \text{atan2}(p_{0j_0\ 0j_3y}, p_{0j_0\ 0j_3x}) \quad (5.30)$$

En consecuencia:

$$\theta_{j_2} = \psi_{j_2} - \pi \quad (5.31)$$

Por otra parte, de la ecuación (5.22) se tiene que

$${}^{ch}\mathbf{p}_{0j_3\ 0j_4} = {}^{ch}\mathbf{p}_{0j_0\ 0j_4} - {}^{ch}\mathbf{p}_{0j_0\ 0j_3} \quad (5.32)$$

Expresando los vectores de esta ecuación en términos de sus componentes cartesianas se tiene que:

$$p_{0j_3\ 0j_4x} = p_{0j_0\ 0j_4x} - p_{0j_0\ 0j_3x} \quad (5.33)$$

$$p_{0j_3\ 0j_4y} = p_{0j_0\ 0j_4y} - p_{0j_0\ 0j_3y} \quad (5.34)$$

Donde los términos del lado derecho son conocidos. En efecto,  $p_{0j_0\ 0j_4x}$  y  $p_{0j_0\ 0j_4y}$  son las componentes obtenidas en la ecuación (5.24), mientras que  $p_{0j_0\ 0j_3x}$  y  $p_{0j_0\ 0j_3y}$  son las componentes obtenidas en (5.28) y (5.29). Entonces, el ángulo  $\psi_{j_3}$  mostrado en la figura 5.5 (b) es:

$$\psi_{j_3} = \text{atan2}(p_{0j_3\ 0j_4y}, p_{0j_3\ 0j_4x}) \quad (5.35)$$

Por otra parte, en la figura 5.5 b se observa que

$$\psi_{j_3} = \psi_{j_2} + \theta_{j_3} \quad (5.36)$$

Entonces, se tiene que:

$$\theta_{j_3} = \psi_{j_3} - \psi_{j_2} \quad (5.37)$$

Para calcular  $\theta_{j_4}$  se transforman las componentes del vector  ${}^{j_0}\mathbf{x}_{fj}$  del marco  $\Sigma_{j_0}$  al marco  $\Sigma_{jch}$  mediante

$${}^{ch}\mathbf{x}_{fj} = {}^{ch}R^T\ {}^{j_0}\mathbf{x}_{fj} \quad (5.38)$$



Expresando  ${}^{ch}\mathbf{x}_{fj}$  en términos de sus componentes en el marco auxiliar  $\Sigma_{jch}$  se tiene:

$${}^{ch}\mathbf{x}_{fj} = \begin{bmatrix} x_{fjx} \\ x_{fjy} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Por lo tanto:

$$\psi_{j4} = \text{atan2}(x_{fjy}, x_{fjx}) \quad (5.40)$$

Por otra parte se observa que:

$$\psi_{j4} = \psi_{j2} + \theta_{j3} + \theta_{j4} \quad (5.41)$$

Y finalmente:

$$\theta_{j4} = \psi_{j4} - \psi_{j2} - \theta_{j3} \quad (5.42)$$

Las ecuaciones (5.19) a (5.42) son las que permiten calcular las 4 variables articulares de cada dedo de la mano  $\theta_{j1}$ ,  $\theta_{j2}$ ,  $\theta_{j3}$  y  $\theta_{j4}$  a partir de los elementos de la matriz SNAP  ${}_{jf}^{j0}T^*$ .

### 5.3. Matriz Jacobiana del $j$ -ésimo dedo de la mano

La matriz jacobiana básica de la cadena cinemática de un manipulador serial determina la relación que existe entre el vector de velocidades articulares,  $\mathbf{q}(\dot{t})$ , del manipulador y el estado de velocidad (o *twist* del término en inglés)  $\mathbf{t}(t)$  de su órgano terminal el cual, a su vez, está compuesto por el vector de velocidad lineal de un punto del órgano terminal y el vector de componentes cartesianas de velocidad angular de dicho cuerpo:

$$\mathbf{t}(t) = J(\mathbf{q}(t))\mathbf{q}(\dot{t}) \quad (5.43)$$

Como quedó establecido en el Capítulo 3, los elementos de la matriz jacobiana de un manipulador definen la eficiencia de la transformación de las velocidades articulares en estado de velocidad (lineal y angular) del órgano terminal. Asimismo, dicha matriz determina la eficiencia de la transformación de fuerzas generalizadas articulares en estado de fuerza (o *wrench* del término en inglés) del órgano terminal. Los índices de desempeño

que se presentaron en el Capítulo 3 son algunos de los que se han propuesto en la literatura científica para medir, a partir de diferentes enfoques, ambas eficiencias.

En esta Sección se presentan las matrices jacobianas de los dedos activos de la mano. Dichas matrices se obtuvieron mediante la aplicación del paquete *SYMORO* [30] (*SYMORO* es un acrónimo de **S**Ymbolic **M**Odelling of **R**Obots). Si bien, la falange distal del  $j$ -ésimo dedo posee tanto velocidad lineal como velocidad angular, y la matriz jacobiana posee 6 renglones (3 para las componentes de velocidad lineal y tres para las componentes de velocidad angular de la falange distal) y 4 columnas (una por cada velocidad articular) la velocidad angular es irrelevante para las tareas que efectúa el dedo. Teniendo en cuenta las características de estas tareas, es claro que solamente la facilidad para desplazar el extremo de la falange distal en cualquier dirección sería uno de los criterios cuya optimización es interesante abordar. Por esta razón, solamente se considera la partición de  $3 \times 4$  de la matriz jacobiana que determina la velocidad lineal de velocidad angular para propósitos de la evaluación del desempeño cinemático de los dedos. Esta partición de la matriz jacobiana contiene los siguientes elementos:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Utilizando los parámetros de Denavit-Hartenberg modificados del  $j$ -ésimo dedo que se presentaron en la tabla 5.1 en el paquete *SYMORO*, se obtienen las siguientes expresiones simbólicas para los elementos de la matriz (5.44):

$$\begin{aligned} j_{11} &= -d_3*S1*C2 - d_4*S1*C23 - d_5*S1*C234 \\ j_{21} &= d_3*C1*C2 + d_4*C1*C23 + d_5*C1*C234 \\ j_{31} &= 0 \\ j_{12} &= -d_3*C1*S2 - d_4*C1*S23 - d_5*C1*S234 \\ j_{22} &= -d_3*S1*S2 - d_4*S1*S23 - d_5*S1*S234 \\ j_{32} &= -d_3*C2 - d_4*C23 - d_5*C234 \\ j_{13} &= -d_4*C1*S23 - d_5*C1*S234 \\ j_{23} &= -d_4*S1*S23 - d_5*S1*S234 \\ j_{33} &= -d_4*C23 - d_5*C234 \\ j_{14} &= -d_5*C1*S234 \\ j_{24} &= -d_5*S1*S234 \\ j_{34} &= -d_5*C234 \end{aligned}$$

En las ecuaciones precedentes de los elementos de la matriz jacobiana se aplica la notación compacta para las funciones seno y coseno que se utilizó en (5.7).

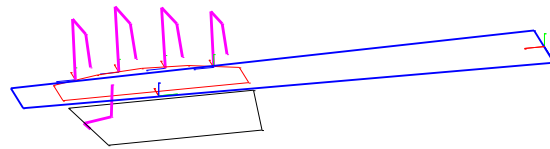
#### 5.4. Simulación de los movimientos de los dedos en Matlab©

Una vez que se obtuvieron las ecuaciones de la cinemática de posición de los dedos de la mano violinista se procedió a desarrollar un programa de cómputo en el paquete Matlab© a fin de efectuar la simulación de los movimientos de la mano que se requieren en el proceso de optimización considerado en el siguiente capítulo. Se efectuaron dos pruebas preliminares: en la primera se visualizan las posturas de cada dedo activo correspondientes a algunas notas musicales seleccionadas apropiadamente; en la segunda prueba se programó la ejecución del fragmento del *Bourrée* de J.S. Bach cuya partitura se muestra en la figura 4.7 y cuyas posiciones en el diapasón se programaron en el Capítulo 4 (tabla 4.2). Para la información generada en ambos casos mediante la GUI desarrollada se aplicaron los modelos cinemáticos desarrollados en este capítulo. En las figuras 5.6 y 5.7 se presentan gráficamente los resultados. En [26] se puede ver un vídeo de la simulación con el audio correspondiente a la interpretación del *Bourrée*. Para las simulaciones de los dos casos se consideraron los siguientes valores arbitrarios para las variables del problema:

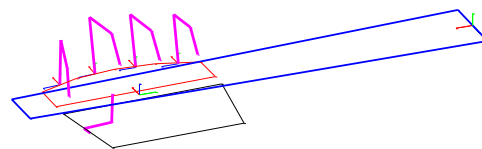
- Posición del marco  $\Sigma_P$  con respecto al marco  $\Sigma_V$  (emplazamiento de la mano con respecto al violín, matriz 5.14):

$$pvp_x = 200 \text{ mm}, pvp_y = -10 \text{ mm}, pvp_z = -15 \text{ mm}$$

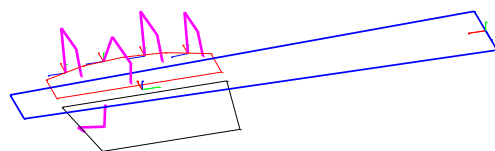
- Orientación de las falanges distales:  $\beta_{2f} = 90^\circ, \beta_{3f} = 90^\circ, \beta_{4f} = 90^\circ, \beta_{5f} = 90^\circ$



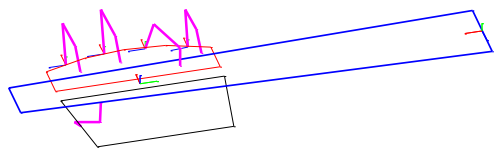
(a) *Posturas de home de los 4 dedos activos*



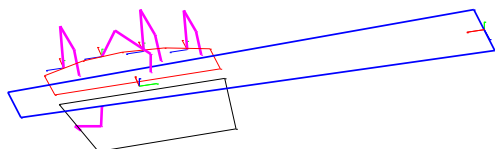
(b) *Postura del dedo índice en la nota Si 5*



(c) *Postura del dedo medio en la nota Do 5*



(d) *Postura del dedo anular en la nota Re 5*



(e) *Postura del dedo índice en la nota Do#5*

Figura 5.6 Simulación de posturas de los dedos en el caso 1.

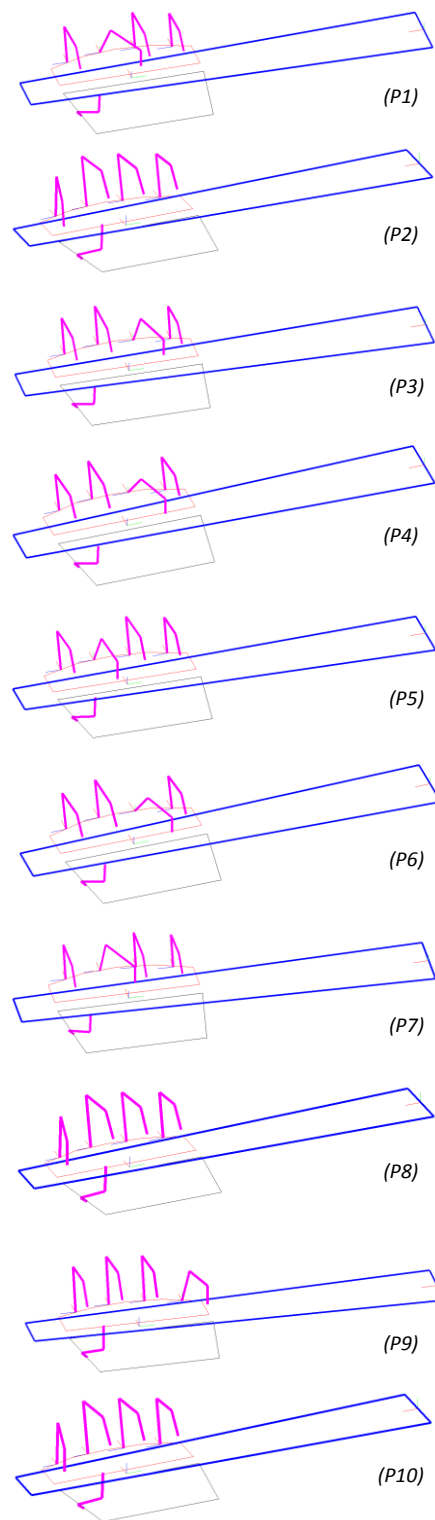


Figura 5.7. Muestra de posturas de los dedos durante la ejecución de un fragmento del *Bourrée* de J.S. Bach. Las notas de estas posturas se listan en la Tabla 4.2.

## 6. Optimización del desempeño de la mano izquierda de un robot violinista

### 6.1 Criterio de optimización y función objetivo

En la formulación que se presentó en el capítulo precedente se estableció que para ejecutar una nota musical, la mano puede emplazarse en diferentes posiciones con respecto al violín, y que la falange distal de cada dedo puede utilizar diversas orientaciones. Dependiendo de los valores que se especifiquen para el emplazamiento de la mano y para la orientación de la falange distal del dedo que corresponda a la nota, este dedo podrá utilizar distintas posturas y a cada una de ellas, en general, le corresponderá un desempeño cinemático diferente. Es evidente que, para que la mano del robot trabaje de manera eficiente y precisa, es deseable que el desempeño cinemático de los dedos sea el óptimo bajo algún criterio específico. En este capítulo se presenta una formulación para la resolución de este problema. Para los propósitos de este trabajo se asume que a cada nota a ejecutar por el violín le corresponderá un emplazamiento óptimo y una orientación óptima. No obstante, bajo otro enfoque se podría considerar que a un grupo de notas a ejecutar le corresponda sólo un emplazamiento de la mano. Éste no es el caso en la presente tesis, y se deja ese enfoque para un estudio futuro.

### ***Criterio de desempeño cinemático de un dedo***

En el Capítulo 3 se vio que en la literatura científica existen múltiples índices que miden el desempeño de la cadena cinemática de un manipulador serial. Por lo tanto, el primer tema que debe resolverse en esta formulación de la optimización del desempeño cinemático es la selección del índice que se desea utilizar. Aunque es posible resolver el problema utilizando múltiples índices de desempeño, en esta tesis se considera la optimización de un solo índice. Por otra parte, se asume que este índice debe ser de carácter cinemático, es decir que se debe hacer que la mano tenga la mayor facilidad para desplazar las puntas de sus dedos en todas direcciones cada vez que toca una nota. En este sentido, el índice de manipulabilidad de Yoshikawa [14] es el que resulta más apropiado. Si bien otros índices que podrían considerarse podrían facilitar la aplicación de fuerza sobre las cuerdas del violín, o lograr la mayor precisión posible en la posición a alcanzar sobre el diapasón, y sin duda serían interesantes, en esta primera etapa del estudio de los movimientos óptimos de la mano juzgamos que se debe buscar la facilidad de desplazamiento de las puntas de los dedos en todas direcciones. Este criterio es el más general de los que existen y consideramos que es el más conveniente. No obstante, no se descarta que en estudios futuros se consideren otros índices.

### ***Función objetivo***

Para la optimización del desempeño cinemático bajo el criterio de la manipulabilidad se debe maximizar ese índice con la postura necesaria para alcanzar la nota musical deseada con el  $j$ -ésimo dedo. Así, la función objetivo a maximizar sería la siguiente:

$$w_j = \sqrt{\det(J(\mathbf{q})J(\mathbf{q})^T)} \quad (6.1)$$

donde  $w_j$  es la manipulabilidad del  $j$ -ésimo dedo, y la matriz jacobiana  $J(\mathbf{q})$  a utilizar es la que corresponde al movimiento traslacional del extremo de la falange distal del dedo  $j$  requerido para la nota. Así, la matriz jacobiana de la ecuación (6.1) es la que se obtuvo en la Sección 5.3. En efecto, para este dedo sólo se buscará facilitar su desplazamiento lineal. El movimiento rotacional es irrelevante para el tipo de tarea que realizan los dedos, que consiste en oprimir una cuerda a la vez.

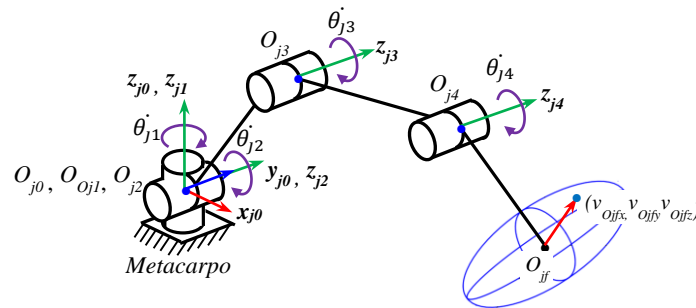


Figura 6.1. Elipsoide de manipulabilidad del extremo de la falange del  $j$ -ésimo dedo

En la figura 6.1 se ilustra una interpretación geométrica del elipsoide de manipulabilidad que se obtiene para el extremo de la falange distal del  $j$ -ésimo dedo con la postura mostrada. El volumen de este elipsoide es directamente proporcional a la manipulabilidad, que a su vez depende de la postura  $\mathbf{q}$  del dedo. Los puntos sobre la superficie del elipsoide tienen coordenadas que corresponden a las componentes cartesianas de la velocidad lineal que puede alcanzar el punto  $O_{jf}$  cuando el vector de velocidades articulares cumple la condición  $\|\dot{\mathbf{q}}\| = 1$ . Así, para una postura dada del dedo, entre más grande sea el volumen del elipsoide, con un vector determinado  $\dot{\mathbf{q}}$  de velocidades articulares se obtienen mayores vectores de velocidad lineal en  $O_{jf}$  y, por lo tanto, se tendrá una mayor facilidad para desplazar dicho punto en cualquier dirección.

## 6.2 Resolución de la redundancia cinemática del $j$ -ésimo dedo

Antes de presentar un proceso de cómputo para la optimización de la manipulabilidad, conviene analizar la resolución de la redundancia cinemática de cada dedo. En efecto, cada dedo posee 4 grados de libertad mientras que la tarea requiere solamente 3 dado que cualquier posición deseada sobre el diapásón se define con 3 coordenadas operacionales, que son las de posición del punto  $O_{jf}$ .



Considerando la arquitectura de los dedos, es claro que para alcanzar una posición cualquiera en el espacio, la falange distal podrá utilizar una orientación arbitraria, definida por el ángulo de Euler  $\beta_{jf}$  mostrado en la figura 5.5 (b) que, a su vez, es determinado por la variable articular  $\theta_{j4}$  con respecto a la falange medial. Evidentemente, dicha orientación determinará la postura del dedo requerida para alcanzar la posición deseada. Así, conviene que para una posición relativa dada de la mano con respecto al violín se determine el valor de  $\beta_{jf}$  que genere la postura con la mayor manipulabilidad posible. Este valor de  $\beta_{jf}$ , por supuesto, no se conoce a priori y se obtendrá por medio de un barrido cada vez que se requiera alcanzar una nota con la mejor postura posible. De manera preliminar, sin embargo, es necesario efectuar una exploración que permita determinar el valor máximo  $W_j \max$  que puede alcanzar idealmente cada dedo. Este valor servirá de referencia en el proceso de optimización del emplazamiento de la mano y se aplicará como factor de normalización de las manipulabilidades de los dedos, lo cual facilitará la evaluación global del desempeño de la mano. Para ese propósito se realizan dos barridos de cada dedo: el primero variando  $\beta_{jf}$  para una posición arbitraria fija en  $x$  del extremo  $O_{jf}$  de la falange distal, a lo largo del eje  $x_{j0}$ . En el segundo barrido se hace variar  $x$  y se repite el primer barrido. En la figura 6.2 se muestra un barrido típico de  $\beta_{2f}$  para el dedo índice ( $j=2$ ).

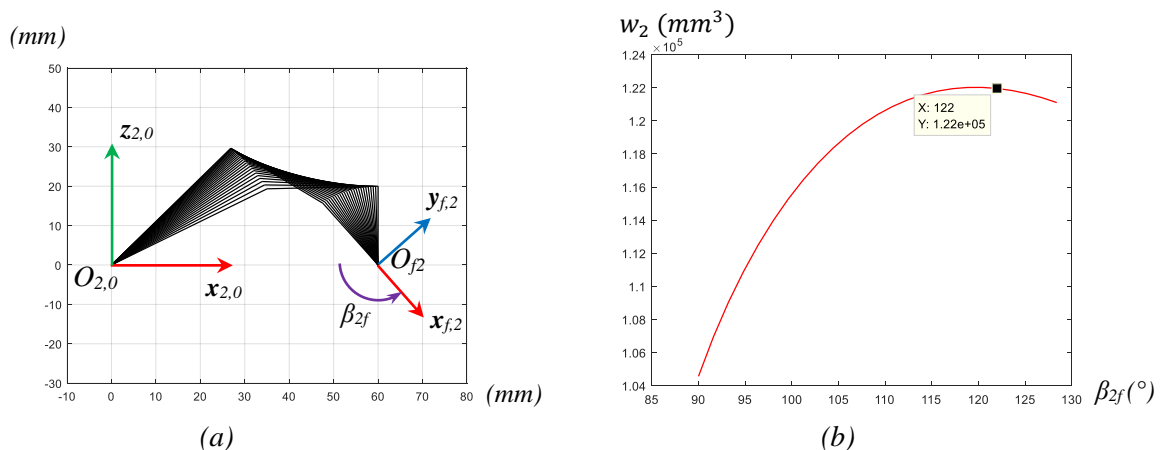


Figura 6.2. (a) Posturas factibles del dedo índice ( $j = 2$ ) obtenidas para  $x = 60$  mm, cada una con distintos valores de la orientación  $\beta_{2f}$  de la falange distal; (b) comportamiento de la manipulabilidad  $w_2$  en función de  $\beta_{2f}$ . La postura de máxima manipulabilidad se obtiene con  $\beta_{2f} = 122^\circ$ .

En las figuras 6.3 a 6.6 se aprecian las posturas óptimas obtenidas en los barridos de  $x$  y el correspondiente comportamiento de la manipulabilidad máxima para cada dedo.

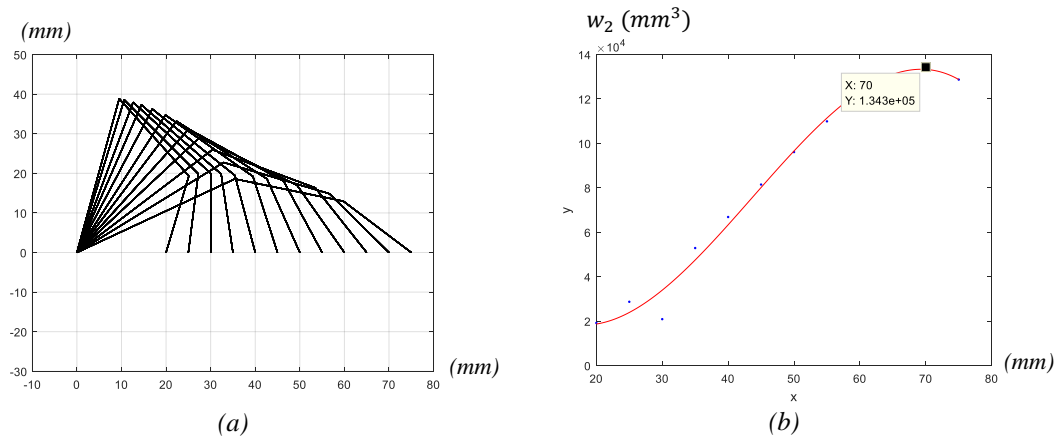


Figura 6.3. (a) Posturas óptimas del dedo índice para diferentes posiciones de  $O_{j2}$  sobre el eje  $x_{2,0}$ ; (b) comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas (curva ajustada).  $w_{2max} = 134,300 \text{ mm}^3$ .

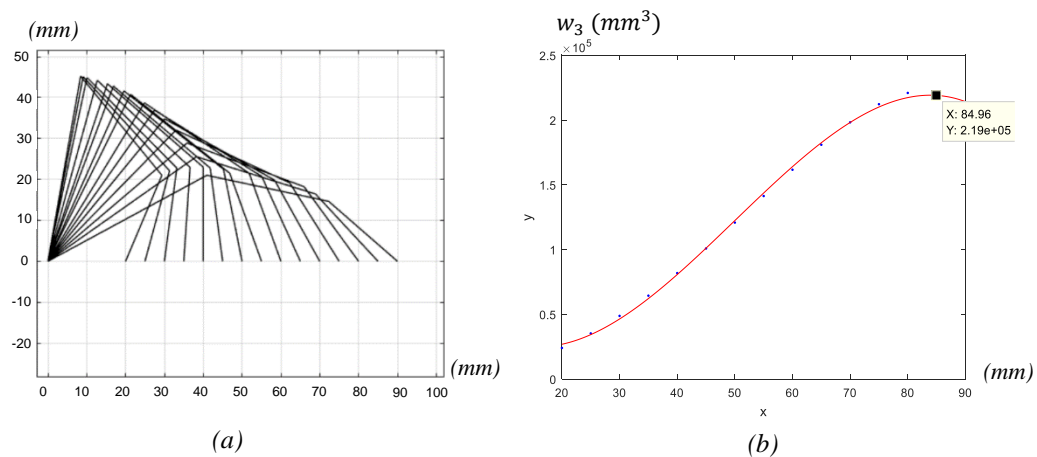


Figura 6.4. (a) Posturas óptimas del dedo medio para diferentes posiciones de  $O_{j3}$  sobre el eje  $x_{3,0}$ ; (b) comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas (curva ajustada).  $w_{3max} = 219,000 \text{ mm}^3$ .

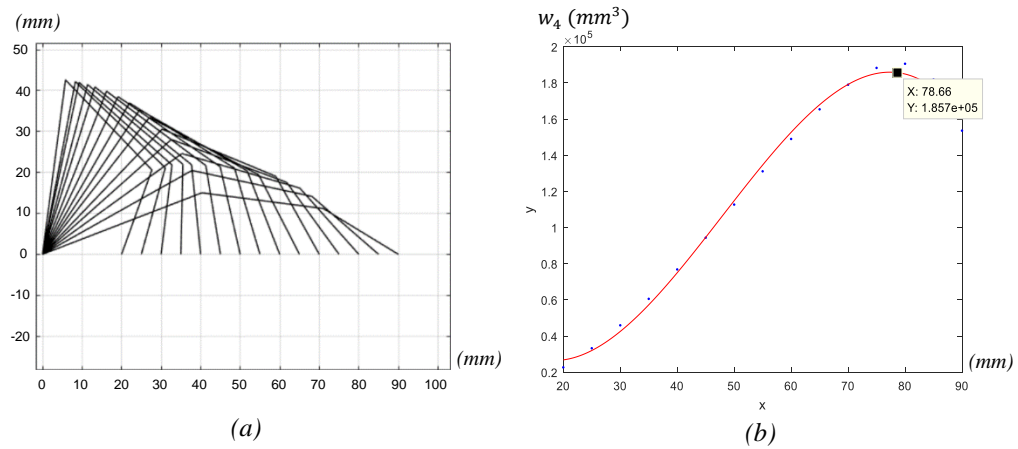


Figura 6.5. (a) Posturas óptimas del dedo anular para diferentes posiciones de  $O_{f4}$  sobre el eje  $x_{4,0}$ ; (b) comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas (curva ajustada).  $w_{4max} = 185,700 \text{ mm}^3$ .

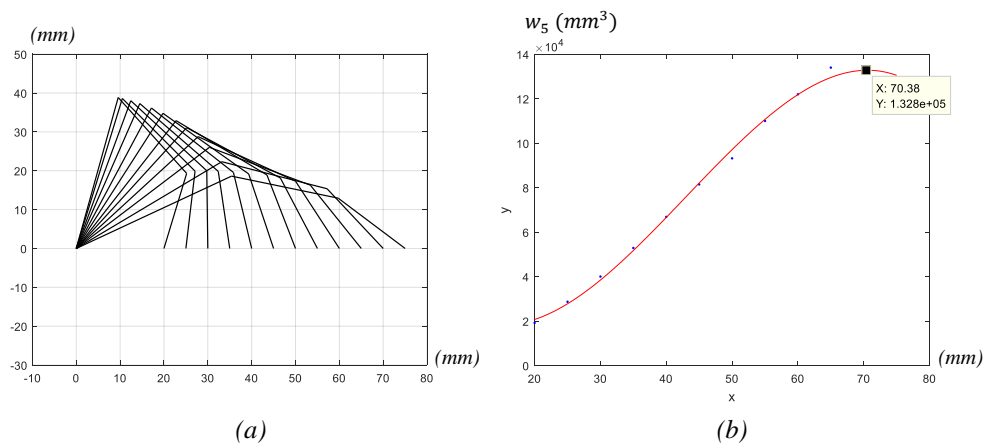


Figura 6.6. (a) Posturas óptimas del dedo meñique para diferentes posiciones de  $O_{f5}$  sobre el eje  $x_{5,0}$ ; (b) comportamiento de las máximas manipulabilidades con esas posturas (curva ajustada).  $w_{5max} = 132,800 \text{ mm}^3$ .

Evidentemente, en las exploraciones efectuadas es irrelevante la aplicación de los dedos específicamente para pulsar el violín. Se trata de conocer las posturas ideales de éstos y los correspondientes valores de las manipulabilidades sin las restricciones que implica dicha aplicación.

Como resultado de las exploraciones se tienen los siguientes valores de las manipulabilidades máximas posibles en cada dedo:  $w_{2max} = 134,300 \text{ mm}^3$ ,  $w_{3max} = 219,000 \text{ mm}^3$ ,  $w_{4max} = 185,700 \text{ mm}^3$ ,  $w_{5max} = 132,800 \text{ mm}^3$ . Como se mencionó líneas arriba, estos valores se aplicarán como factores de normalización de las manipulabilidades que se obtengan para cada dedo en el proceso de optimización. Así, las manipulabilidades normalizadas están acotadas de la siguiente manera:

$$0 \leq w^*_j \leq 1 \quad (j=2, \dots, 5) \quad (6.2)$$

donde:

$$w^*_j = \frac{w_j}{w_{jmax}} \quad (j=2, \dots, 5) \quad (6.3)$$

El valor de 0 de la manipulabilidad normalizada significa que el dedo está en una postura singular, mientras que  $w^*_j = 1$  corresponde a una postura de máxima manipulabilidad.

Nótese que mediante el primer barrido se resuelve la redundancia cinemática de cada dedo para una posición especificada del extremo de la falange distal. Mediante este procedimiento no hay necesidad de recurrir al cálculo de la solución homogénea del modelo inverso de velocidad del dedo (el cual implica el cálculo de la pseudoinversa de la matriz jacobiana), ni el gradiente de la manipulabilidad. Estos dos cálculos incrementarían el costo computacional de la resolución de la redundancia cinemática para determinar las posturas óptimas. Por esta razón, en el cálculo del emplazamiento óptimo de la mano se recurrirá al

barrido de  $\beta_{if}$  cuando se requiera resolver la redundancia cinemática bajo el criterio de la máxima manipulabilidad.

### 6.3 Cálculo del emplazamiento óptimo de la mano al ejecutar el violín.

El problema que se desea resolver consiste en calcular las coordenadas que definen la posición de la palma de la mano del robot con respecto al violín, que permite maximizar el valor de la manipulabilidad traslacional normalizada de la ecuación del dedo que ejecutará una nota musical específica.

Este problema se formula como uno de optimización de una función no lineal, para cuya resolución se aplicará una herramienta de Matlab©; se trata de la función *fmincon* que minimiza funciones no lineales basada en técnicas SQP (*Sequential Quadratic Programming*) [31], y puede estar sujeta a restricciones lineales implícitas, así como a restricciones explícitas de las variables independientes.

En el problema considerado en esta tesis, la función que se desea optimizar es la manipulabilidad normalizada, expresada por la ecuación (6.3), de un dedo especificado por el usuario. Las variables independientes de las que depende implícitamente esta función son las coordenadas cartesianas  $pvp_x$ ,  $pvp_y$ , y  $pvp_z$  que definen la posición del punto  $O_P$  del origen del marco  $\Sigma_P$  (asociado a la palma de la mano) con respecto al marco  $\Sigma_V$  asociado al violín. Además de estas variables, como se vio en la sección precedente, el ángulo  $\beta_{if}$ , que determina la orientación de la falange distal del dedo considerado, también contribuye a definir la postura del dedo. Sin embargo,  $\beta_{if}$  se determinará mediante el proceso de barrido que se analizó en la sección 6.2. Por lo tanto, sólo se consideran tres variables independientes en nuestro problema.

Ahora bien, teniendo en cuenta que *fmincon* está diseñada para resolver problemas de minimización de funciones, y que lo que se desea aquí es maximizar la manipulabilidad, entonces la función objetivo que se definirá para *fmincon* será el negativo de la manipulabilidad normalizada. En efecto, el mínimo del negativo de la manipulabilidad normalizada equivale al máximo de la misma. En consecuencia, el problema consiste en minimizar la siguiente función:

$$f = -W^*_i \quad (6.4)$$

Por otra parte, considerando las restricciones del espacio disponible para la ubicación de la mano en el diapason del violín, las variables explícitas deberán acotarse. Así, la minimización de (6.4) deberá estar sujeta a las siguientes restricciones explícitas:

$$0 \leq pvp_x \leq 250 \quad \text{mm} \quad (6.5 a)$$

$$-15 \leq pvp_y \leq 0 \quad \text{mm} \quad (6.5 b)$$

$$-50 \leq pvp_z \leq 0 \quad \text{mm} \quad (6.1 c)$$

El proceso de cálculo que se propone para resolver este problema se representa esquemáticamente en el diagrama de bloques de la figura 6.7.

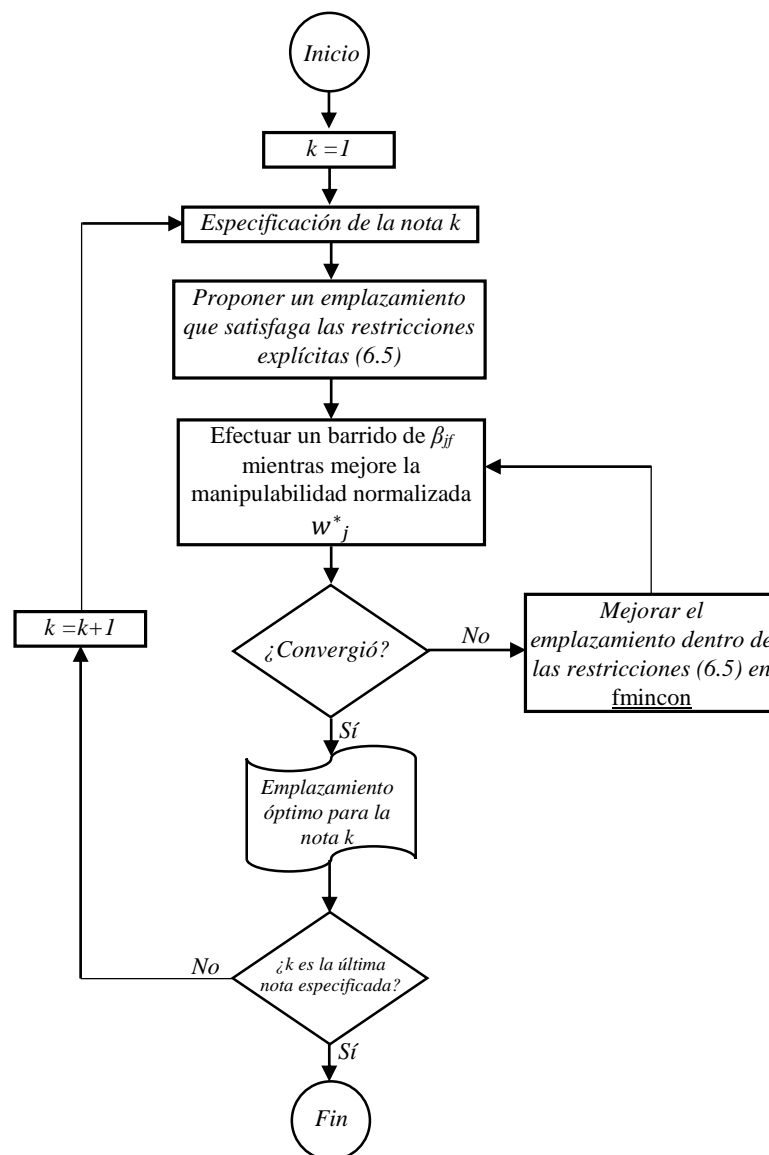


Figura 6.7. Diagrama de flujo del proceso de optimización de la manipulabilidad de un dedo basado en la función *fmincon* de Matlab©.

## 6.4 Casos de estudio

Aplicando el procedimiento propuesto en la sección precedente, se deberán determinar los emplazamientos óptimos de la mano para una secuencia de 10 notas musicales que se desea que ejecute la mano robótica. No se trata de una secuencia de notas que corresponda a una melodía en particular, sino de notas seleccionadas estratégicamente para verificar la eficacia del método. En la tabla 6.1 se especifican las notas deseadas, así como las correspondientes coordenadas del punto sobre el diapasón que deberá alcanzar el dedo designado para conseguir la ejecución.

En las figuras 6.8 a 6.27 se muestran las simulaciones de la mano correspondientes a cada una de las notas consideradas en la tabla 6.1. En estas figuras, las identificadas con números pares se aprecia la mano en emplazamientos establecidos arbitrariamente por el usuario para cada caso. En las figuras referidas con números nones se aprecia la mano en los emplazamientos óptimos calculados. En cada caso se puede apreciar las diferencias de las posturas óptimas del dedo activo, y de los correspondientes valores de las manipulabilidades normalizadas, con las posturas y manipulabilidades no óptimas. Los dedos que no intervienen para ejecutar la nota deseada se han colocado intencionalmente en posturas que permitan apreciar el dedo de interés.

Tabla 6.1. Coordenadas con respecto a  $\Sigma_V$  de los puntos sobre el diapasón correspondientes a las notas musicales deseadas de los casos de estudio.

Caso	Nota deseada	Dedo (j)	P o s i c i ó n d e $O_{fj}$		
			x (mm)	y (mm)	z (mm)
1	Si 4	Índice (2)	238.40	2.88	0.00
2	Do 5	Medio (3)	227.70	2.88	0.00
3	Re 5	Anular (4)	192.80	-3.21	0.00
4	Sol 4	Anular (4)	192.8	3.21	0.00
5	Sol 5	Medio (3)	227.70	8.859	0.00
6	Fa #4	Medio (3)	217.70	-3.03	0.00
7	La 4	Meñique (5)	167.80	-3.39	0.00
8	Mi 5	Meñique (5)	167.8	3.39	0.00
9	Fa #5	Índice (2)	238.4	-8.61	0.00
10	Mi 4	Índice (2)	238.4	-2.88	0.00

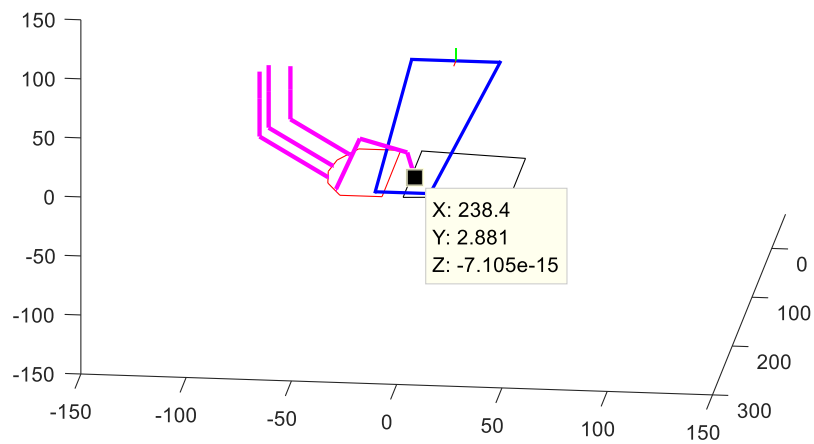


Figura 6.8. Caso 1. Ejecución de *si 4* con el dedo índice. Emplazamiento arbitrario.  
 $w_2^* = 0.6580$ . Coordenadas en mm.

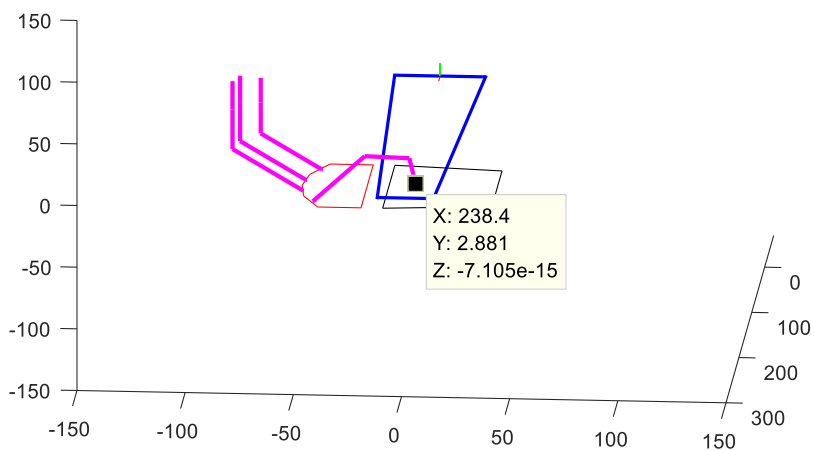


Figura 6.9. Caso 1. Ejecución de *si 4* con el dedo índice. Emplazamiento óptimo.  
 $w_2^* = 1$ . Coordenadas en mm.



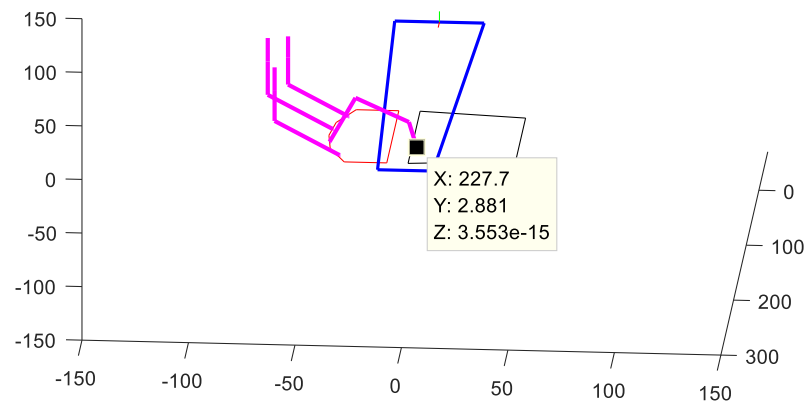


Figura 6.10. Caso 2. Ejecución de **do 5** con el dedo medio. Emplazamiento arbitrario.  
 $w_3^* = 0.3272$ . Coordenadas en mm.

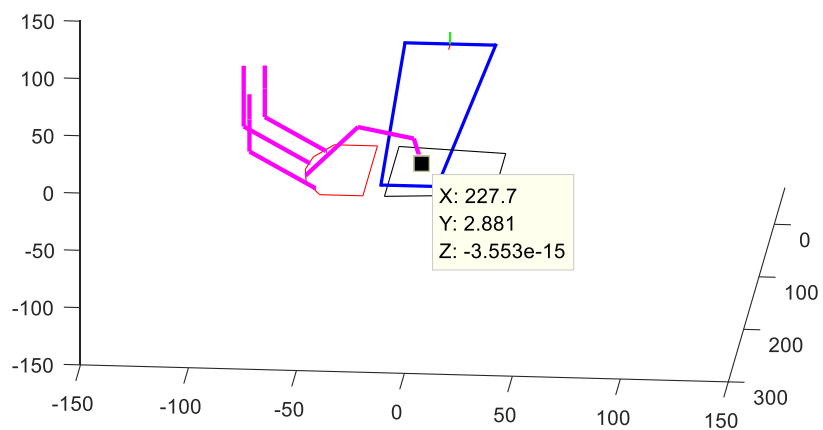


Figura 6.11. Caso 2. Ejecución de **do 5** con el dedo medio. Emplazamiento óptimo.  
 $w_3^* = 0.4547$ . Coordenadas en mm.

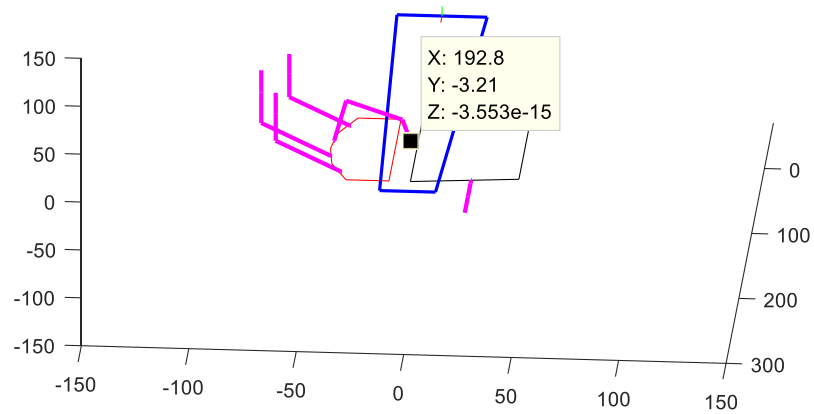


Figura 6.12. Caso 3. Ejecución de *re 5* con el dedo anular. Emplazamiento arbitrario.  $w_4^* = 0.2988$ . Coordenadas en mm.

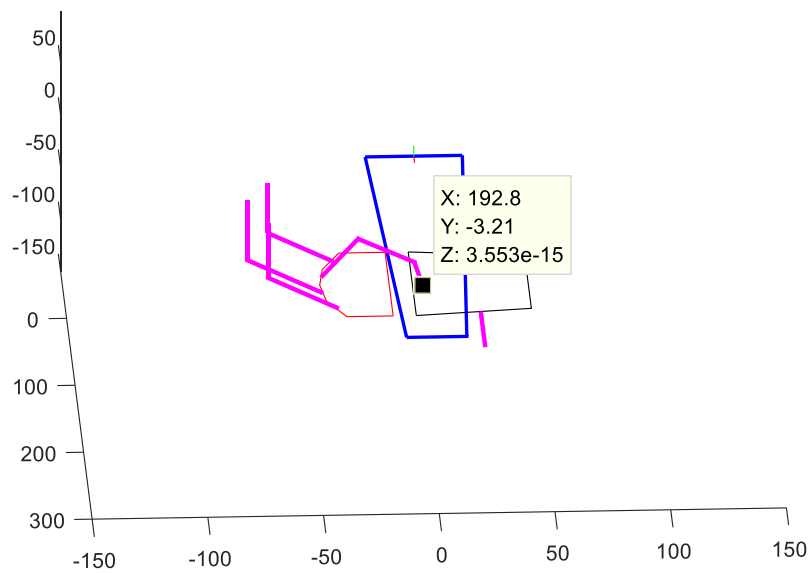


Figura 6.13. Caso 3. Ejecución de *re 5* con el dedo anular. Emplazamiento óptimo.  $w_4^* = 0.4135$ . Coordenadas en mm.

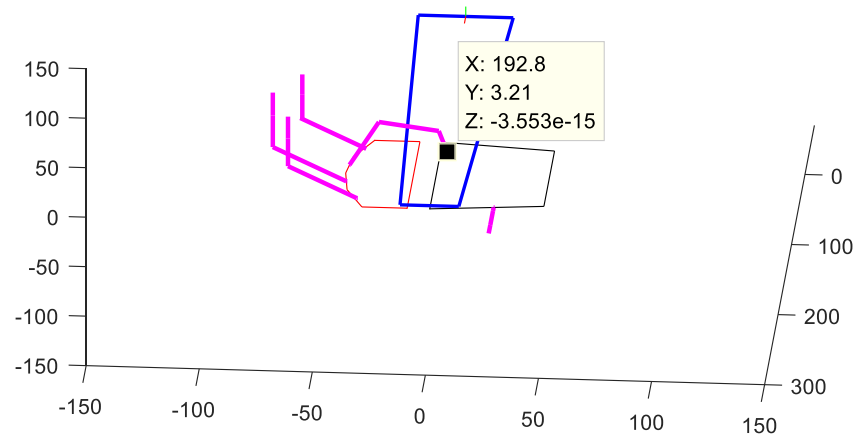


Figura 6.14. Caso 4. Ejecución de *sol 4* con el dedo anular. Emplazamiento arbitrario.  $w_4^* = 0.3485$ . Coordenadas en mm.

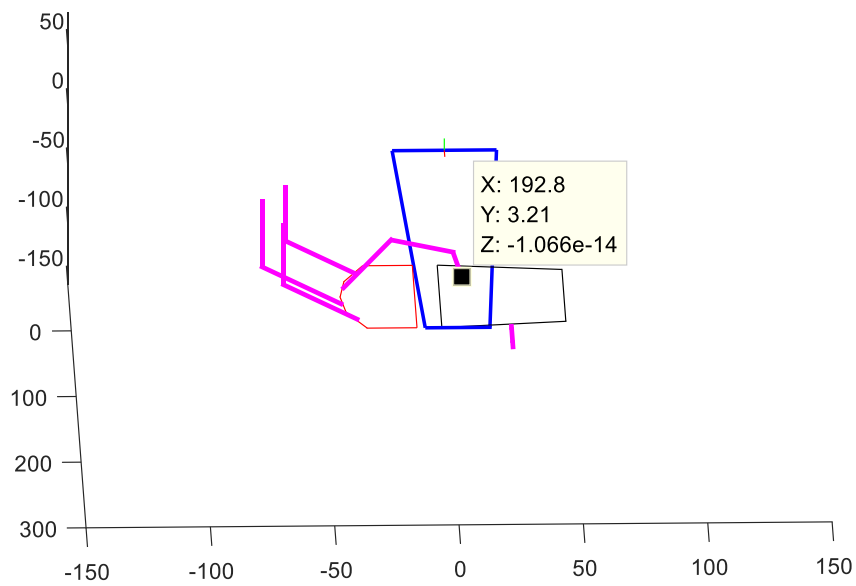


Figura 6.15 Caso 4. Ejecución de *sol 4* con el dedo anular. Emplazamiento óptimo.  $w_4^* = 0.4135$ . Coordenadas en mm.

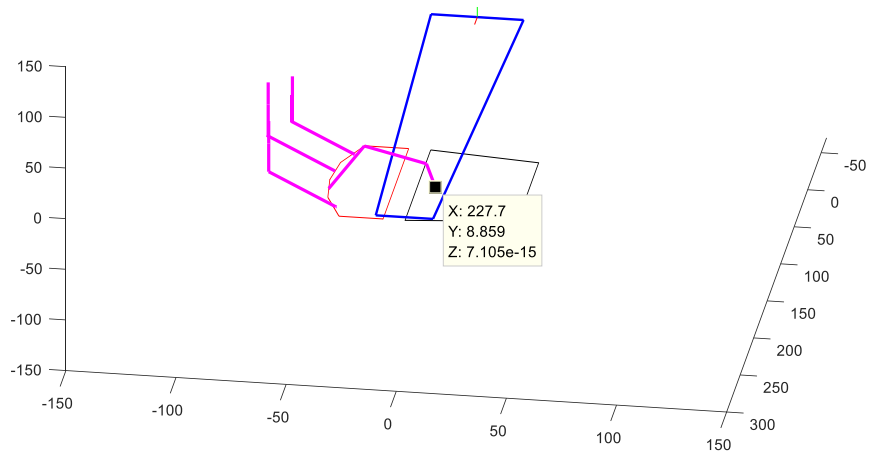


Figura 6.16. Caso 5. Ejecución de **sol 5** con el dedo medio. Emplazamiento arbitrario.  
 $w_3^* = 0.3481$ . Coordenadas en mm.

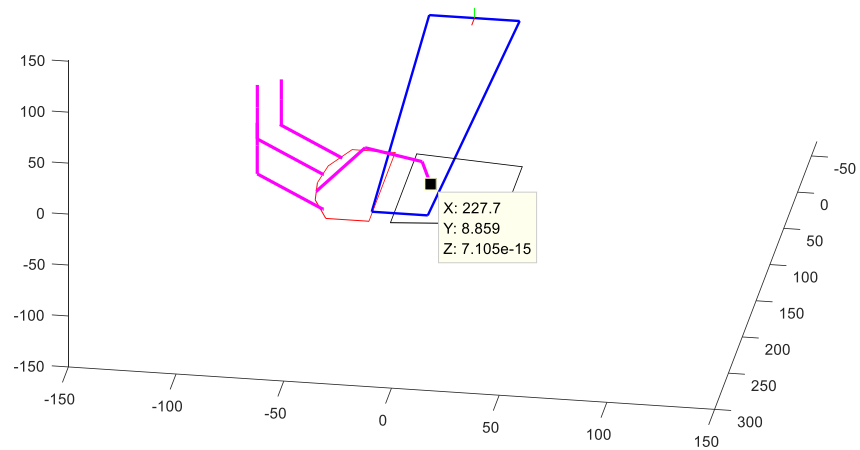


Figura 6.17. Caso 5. Ejecución de **sol 5** con el dedo medio. Emplazamiento óptimo.  
 $w_3^* = 0.4547$ . Coordenadas en mm.

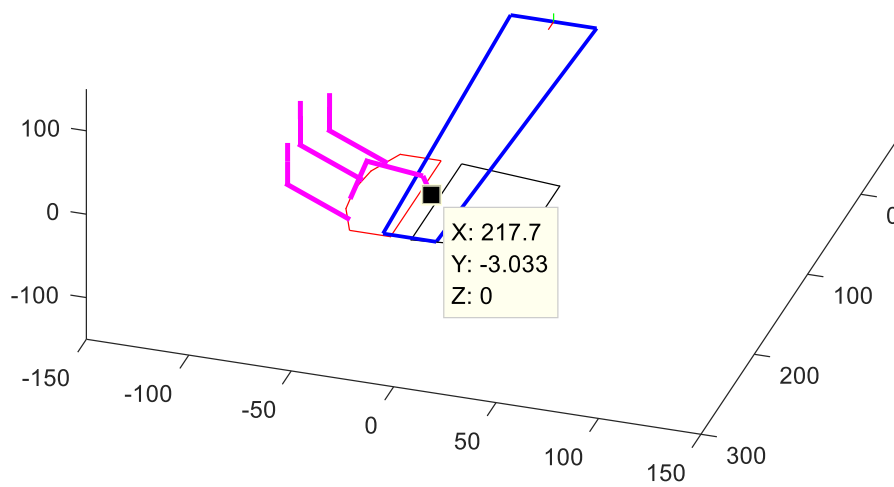


Figura 6.18. Caso 6. Ejecución de **fa#4** con el dedo medio. Emplazamiento Arbitrario  $w_3^* = 0.4467$ . Coordenadas en mm.

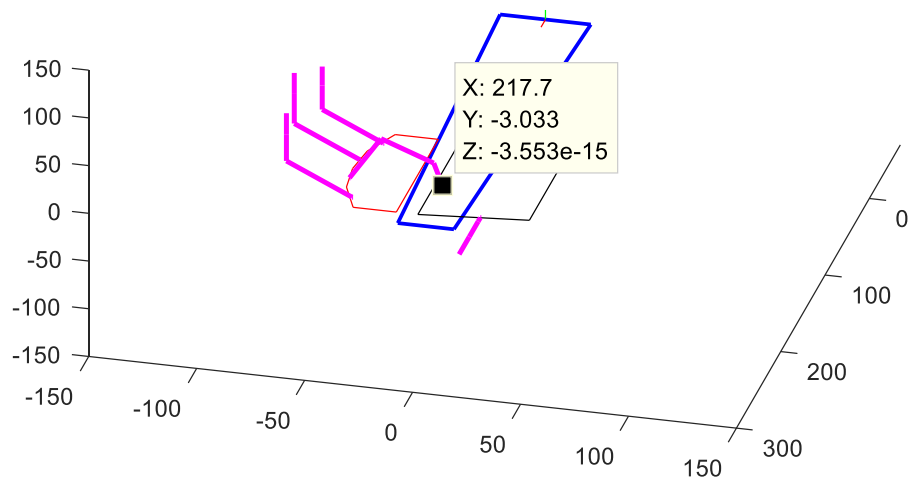


Figura 6.19. Caso 6. Ejecución de **fa#4** con el dedo medio. Emplazamiento óptimo.  $w_3^* = 0.4602$ . Coordenadas en mm.

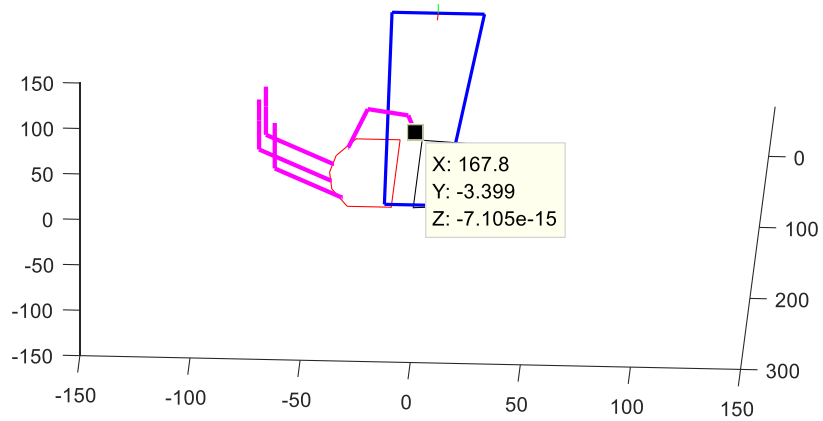


Figura 6.20. Caso 7. Ejecución de **la 4** con el dedo meñique. Emplazamiento Arbitrario.  
 $w_5^* = 0.2988$ . Coordenadas en mm.

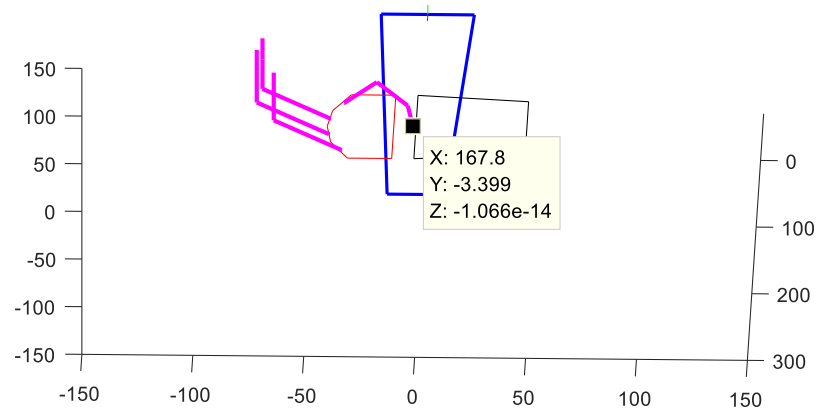


Figura 6.21. Caso 7. Ejecución de **la 4** con el dedo meñique. Emplazamiento óptimo.  
 $w_5^* = 0.4350$ . Coordenadas en mm.

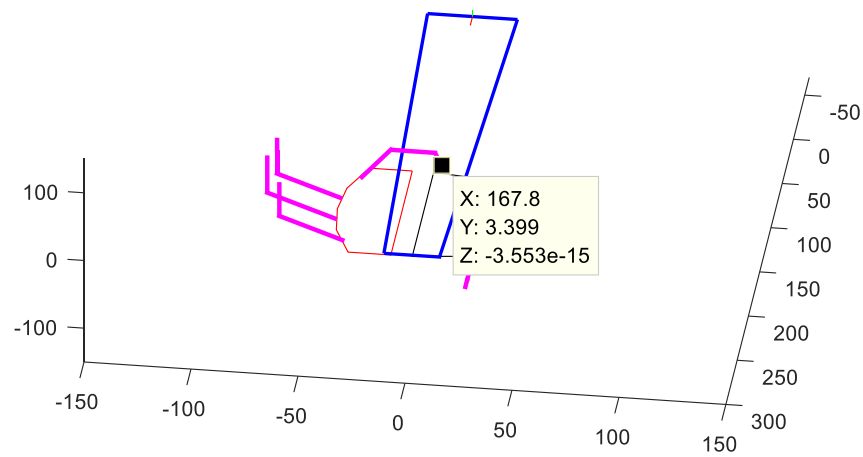


Figura 6.22. Caso 8. Ejecución de **mi 5** con el dedo meñique. Emplazamiento arbitrario.  
 $w_5^* = 0.3002$ . Coordenadas en mm.

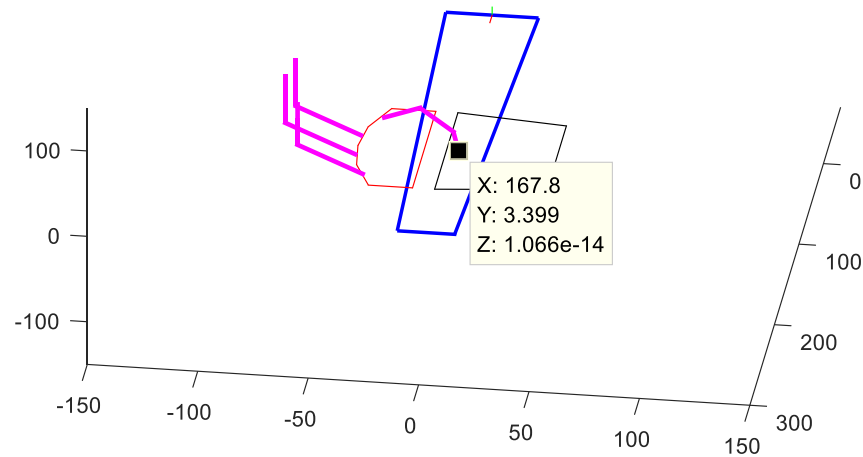


Figura 6.23. Caso 8. Ejecución de **mi 5** con el dedo meñique. Emplazamiento óptimo.  
 $w_5^* = 0.4361$ . Coordenadas en mm.

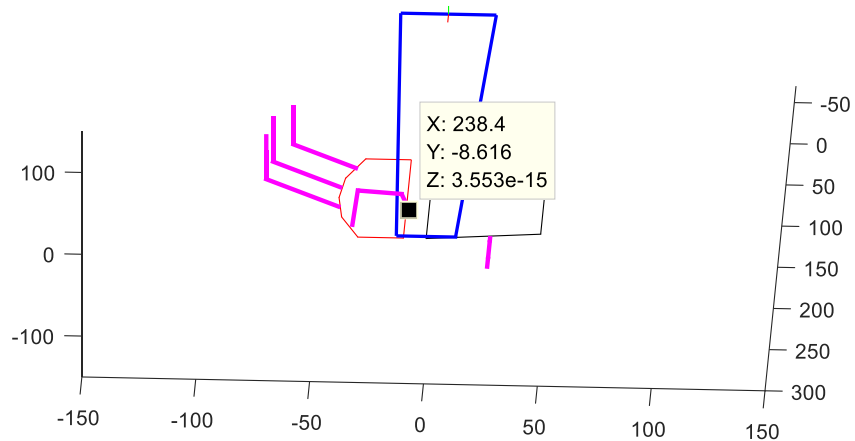


Figura 6.24. Caso 9. Ejecución de **Fa#5** con el dedo índice. Emplazamiento arbitrario.  
 $w_2^* = 0.4098$ . Coordenadas en mm.

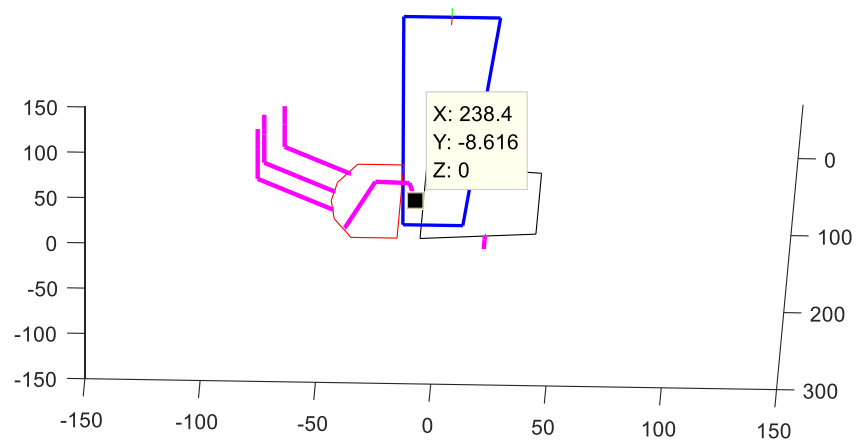


Figura 6.25. Caso 9. Ejecución de **Fa#5** con el dedo índice. Emplazamiento óptimo.  
 $w_2^* = 1$ . Coordenadas en mm.



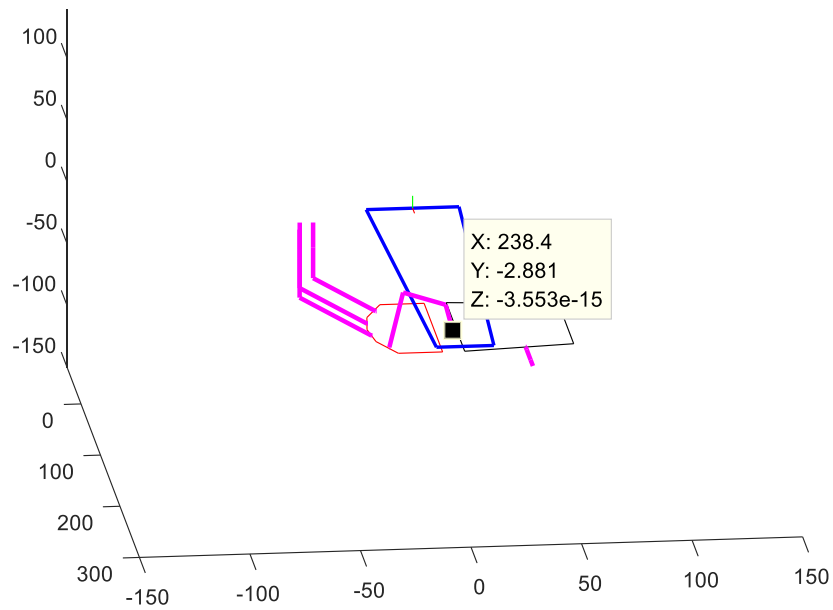


Figura 6.26. Caso 10. Ejecución de *mi 4* con el dedo índice. Emplazamiento arbitrario.  
 $w_2^* = 0.5281$ . Coordenadas en mm.

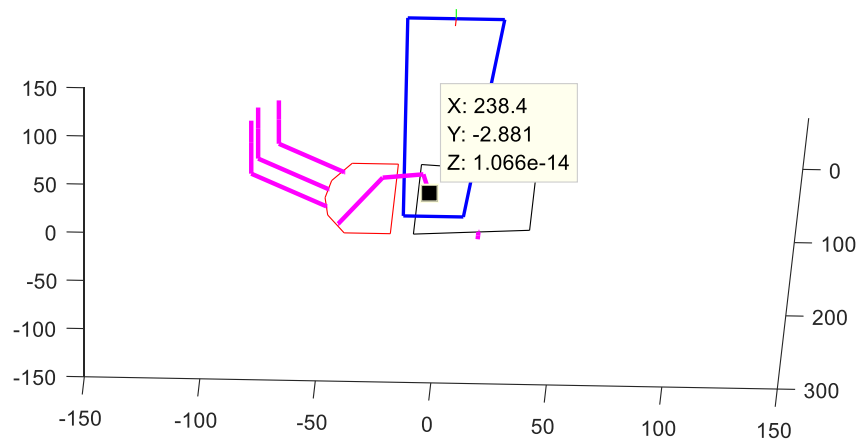


Figura 6.27. Caso 10. Ejecución de *mi 5* con el dedo índice. Emplazamiento óptimo.  
 $w_2^* = 1$ . Coordenadas en mm.

## 6.5 Resultados

En la tabla 6.2 se concentran los resultados obtenidos en los casos de estudio: las coordenadas del emplazamiento óptimo de la mano y el valor asociado de la manipulabilidad normalizada del dedo activo. Las magnitudes de estas variables se contrastan en la misma tabla con los correspondientes al emplazamiento inicial de la mano. En la figura 6.28 se muestra una gráfica que permite comparar las magnitudes de las manipulabilidades de las posturas óptimas de los dedos con las de las posturas arbitrarias.

En todos los casos se observa un progreso en el desempeño cinemático de los dedos bajo el emplazamiento óptimo con respecto al desempeño bajo el emplazamiento inicial, lo que permite verificar la eficacia del método propuesto. Los incrementos alcanzados de la manipulabilidad oscilan entre el 3.02 % en el caso 6 hasta el 144.02 % en el caso 9.

Tabla 6.2. Resumen de resultados de la optimización del emplazamiento de la mano en los casos de estudio. Coordenadas de la palma de la mano y manipulabilidad normalizada

Caso	Emplazamiento	$pvp_x$ (mm)	$pvp_y$ (mm)	$pvp_z$ (mm)	$w^*_j$
1	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.6580
1	Óptimo	241.92	-12.11	0.00	1.0000
2	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.3272
2	Óptimo	242.12	-12.85	0.00	0.4547
3	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.2988
3	Óptimo	231.91	-13.05	0.00	0.4135
4	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.3485
4	Óptimo	222.3	-11.32	0	0.4140
5	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.3481
5	Óptimo	231.26	-11.41	0.00	0.4552
6	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.4467
6	Óptimo	231.07	-13.24	0.00	0.4602
7	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.3011
7	Óptimo	169.08	-7.10	0.00	0.4350
8	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.3013
8	Óptimo	168.12	-6.89	0.00	0.4361
9	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.4098
9	Óptimo	249.95	-14.93	0.00	1.0000
10	Arbitrario	220.00	-5.00	-5.00	0.5281
10	Óptimo	247.08	-12.73	0.00	1.0000

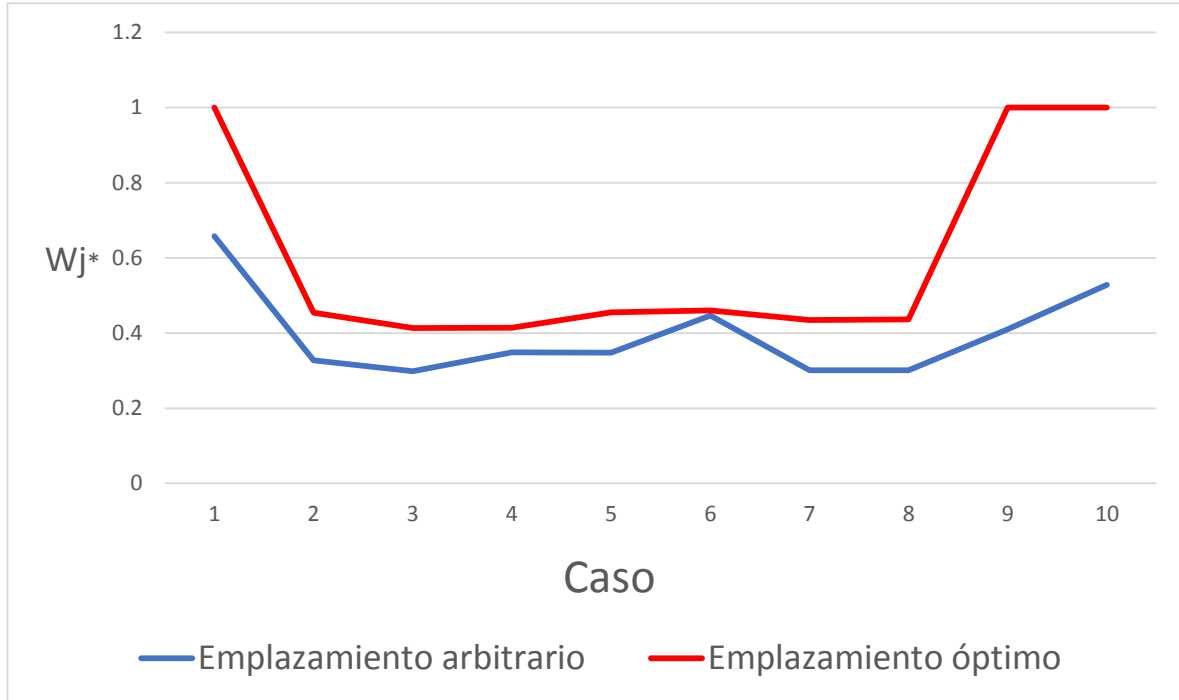


Figura 6.28. Comportamiento de las manipulabilidades normalizadas correspondientes a los emplazamientos arbitrarios y óptimos de los casos de estudio.

La figura 6.28 permite visualizar gráficamente las observaciones hechas en el párrafo precedente. Destacan el caso 6 con el menor incremento relativo de la manipulabilidad y el caso 9 con el mayor aumento. Los emplazamientos considerados como óptimos que se obtuvieron en general proporcionaron mejoras interesantes; sin embargo, en algunos casos las mejoras fueron marginales, como en el caso 6. En relación a casos como éste es pertinente señalar que en los procesos de optimización efectuados sólo se procedió considerando el mismo emplazamiento inicial en todos los casos en *fmincon*. Sin embargo, debido a que esta función se basa en un método numérico de carácter heurístico, es posible que iniciando el proceso desde otros emplazamientos iniciales, se puedan encontrar emplazamientos que proporcionen incrementos más significativos de la manipulabilidad.

## 7. Conclusión

En esta tesis se presenta un método para la planificación de movimientos óptimos de una mano robótica violinista izquierda. Se propuso un diseño de la mano a partir de datos de músicos humanos ejecutantes de instrumentos de cuerdas. Se desarrolló software para la programación de secuencias de notas musicales que deberá ejecutar la mano robótica, y para la simulación de los movimientos de ésta al tocar el violín. Asimismo, se efectuó la formulación para el cálculo del emplazamiento de la mano que permita optimizar la manipulabilidad de cada dedo al ejecutar una nota musical. En la literatura científica no se encontraron publicaciones de trabajos relacionados con este tipo de estudios.

El software desarrollado para la simulación de los movimientos de la mano izquierda violinista constituye una herramienta interesante para el diseño de nuevas manos robóticas, así como para la realización de estudios de análisis y planificación de movimientos óptimos de manos ya existentes. Si bien en este trabajo de tesis se realizó una primera aplicación para la optimización de las posturas de los dedos activos bajo el criterio de la manipulabilidad, el software tiene un gran potencial para aplicarse en diversos estudios suplementarios.

En relación al proceso de optimización propuesto, los resultados son prometedores toda vez que gracias a la aplicación de dicho proceso se verificaron mejoras en el desempeño cinemático de los dedos de la mano analizada. Si bien, en este primer estudio acerca de la planificación de movimientos de la mano se consideró la manipulabilidad de Yoshikawa [25] como criterio de desempeño cinemático de los dedos, en futuros trabajos se prevé explorar la optimización de otros criterios, tales como la transmisión de fuerza y la precisión de la aplicación de fuerza en las puntas de los dedos. En efecto, consideramos que los índices de *Chiu* [16] podrían ser de gran interés específicamente para evaluar el desempeño cinetostático de los dedos de una mano robótica violinista.

A la luz de los resultados obtenidos, entre otros trabajos futuros orientados al estudio de la mano izquierda violinista, se prevé formular el problema del diseño de una mano de dimensiones óptimas teniendo en cuenta los criterios de desempeño mencionados en el párrafo precedente. Asimismo, se considera la realización de un estudio especial acerca de la posible influencia del metacarpo tanto en el desempeño de los dedos activos como en el tema de la sujeción del diapasón del violín.

Por otra parte se deberá efectuar una formulación que permita determinar el emplazamiento de la mano para optimizar las posturas requeridas por varios dedos simultáneamente para la ejecución de secuencias de notas correspondientes a obras musicales específicas. Adicionalmente, en el marco de otros estudios se deberán considerar los desplazamientos de la mano para ir de un emplazamiento asociado a un grupo de notas, a otro correspondiente a otro grupo, sin perturbar los tiempos precisos requeridos por la melodía.

Consideramos conveniente explorar la aplicación de otros enfoques de optimización, tales como los llamados algoritmos evolutivos, en el proceso de cálculo del emplazamiento óptimo de la mano.

Algunos de los resultados obtenidos en el marco de esta tesis se han reportado en las siguientes publicaciones:

- **Meza-Pérez A, Pámanes JA**, “Motion Simulation of a Violin-Player Robotic Left Hand”; Memorias del XX Congreso Mexicano de Robótica (COMRob 2018) de la AMRob, ISBN 978-607-97128-8-4, artículo ID-1856, pp. 197-202, Ensenada, México, 12-14 de septiembre 2018.
- **Meza AJ, Pámanes JA**; Motion Simulation of a Violin-Player Robotic Hand, <https://youtu.be/5rHRHHVhnPA> June, 2019.
- **Meza-Pérez A, Pámanes JA, Fierro JE**, “Optimización de movimientos de una mano izquierda robótica violinista”; Aceptado para su publicación en el XIV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica (CIBIM 2019) a realizarse en Cartagena, Colombia, 12-15 de noviembre 2019.

## Referencias bibliográficas

- [1] C.G. Atkenson, J. Hale, F. Pollick, M. Riley, S. Kotosaka, S. Schaal, T. Shibata, G. Tevatia, S. Vijayakumar, A. Ude and M. Kawato, "Using Humanoid Robots to Study Human Behavior", *IEEE Intelligent Systems: Special Issue on Humanoid Robotics*, 15, pp 45-56, 2000
- [2] A. Kapur "A history of robotic musical instruments", *Proc. of International Computer Music Conference ICMC 2004*, Miami, Florida, USA, 2004.
- [3] Y. Kusuda, "Toyota's violin-playing robot," *Industrial Robot: An International Journal*, 35/6, 504-506, 2008.
- [4] A.P. Baader, O. Kazennikov and M. Wisendanger, "Coordination of bowing and fingering in violin playing", *Cognitive Brain Research*, 23, 436-443, 2005.
- [5] W. Jo., H. Park., B. Lee and D. Kim, "A study on Improvising Sound Quality of Violin Playing Robot" *Proc. Of 6th International Conference On Automation, Robotics and Applications*, Queenstown, New Zealand, 2015.
- [6] K. Shibuya, S. Matsuda and A. Takahara, "Toward Developing a Violin Playing Robot - Bowing by Anthropomorphic Robot Arm and Sound Analysis", *RO-MAN 2007 - The IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication*, pp. 763-768, 2007.
- [7] E. Moon, H. Park and D. Kim, "Development of Robot Hand focused on Violin Fingering" *Second IEEE International Conference on Robotic Computing*, 2018.
- [8] J.A. Pámanes, «Contribution à l'étude de l'accessibilité aux tâches et à la détermination du placement optimal de robots manipulateurs», tesis doctoral de la Universidad de Poitiers; Facultad de Ciencias Fundamentales y Aplicadas, Poitiers, Francia, 1992.
- [9] D. Reveles, J.A. Pámanes and Ph. Wenger, "Trajectory planning of kinematically redundant parallel manipulator by using multiple working modes"; *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 98, pp. 216-230, ISSN: 0094-114X, 2016.

- [10] J.A. Pámanes, D. Soto, M.A. Llama y D. Reveles, “Optimización del diseño de una estación robotizada experimental de soldadura”, Memorias del XVIII Congreso Mexicano de Robótica (COMRob 2016) de la AMRob, ISBN: 978-607-97128-3-9, Artículo ID-1655, pp. 179-188, Noviembre 2016, Mazatlán México.
- [11] O.G. Alba-Gómez, J.A. Pamanes and Ph. Wenger, “Trajectory Planning of Parallel Manipulator for global Performance Optimization”; Chapter 6 of the book Advances in Robot Kinematic 2008, 11 Edition, J. Lenarcic and Ph. Wenger, editors; ISBN-13:978-1-4020-8599-4, e-ISBN-13:978-1-4020-8600-7; Springer, pp. 253-261, June 2008.
- [12] J.A. Pamanes, E. Cuan and S. Zeghloul, “Single and Multi-Objective Optimization of Path Placement for Redundant Robotic Manipulators”; Revista INGENIERIA Investigación y Tecnología, Vol. IX, No.3, ISSN 1405-7743; pp. 231-257; México, Julio-Septiembre 2008.
- [13] J.K. Salisbury and J.J. Craig, “Articulated hands: force, control and kinematic issues”, The International Journal of Robotic Research, Vol. 1, pp. 4-17, 1982.
- [14] T. Yoshikawa, “Manipulability of robotic mechanisms”; Proc. of Robotic Research: The second International Symposium, pp. 439-446, 1984.
- [15] T. Yoshikawa, “Translational and rotational manipulability of robotic manipulators; Proc. of the 1990 American Control Conference, pp. 228-233, 1990.
- [16] S.L. Chiu, “Task compatibility of manipulator postures”, The International Journal of Robotic Research, Vol 7, pp 13-21, 1988.
- [17] S. Zeghloul and J.A. Pamanes, “Multi-Criteria Optimal Placement of Robots in Constrained Environments”; ROBOTICA, Vol. 11, pp. 105-110, Cambridge, 1993.
- [18] J.M. Uriarte, <https://www.caracteristicas.co/sonido/>. Consultado en mayo de 2019.
- [19] A.M. de Diego and M. Merino, Fundamentos Físicos de la Música, ICE-Universidad de Valladolid, 1988.
- [20] <https://www.liutaiomottola.com/formulae/fregtab.htm>. Consultado en Marzo 2018.
- [21] E. Alexandre, “Matemáticas, Música: Pitágoras, Las matemáticas y la música.” <http://enriquealexandre.es/2013/02/20/pitagoras-las-matematicasy-la-musica/> Consultado el 20 de noviembre del 2014.
- [22] J. Angeles, Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms, 3rd ed., ISBN 978-0-387-29412-4, Springer, 2007.
- [23] R.P. Paul and C.N. Stevenson, “Kinematics of robot wrist”, The International Journal of Robotic Research, Vol. 2 pp 31-38, 1983



- [24] G. Strang, Linear Algebra and its Applications, Academic Press, Inc., U.S.A., 1980.
- [25] C. Osorio, J. Alexander, C. Garzon, H. Baldomiro., C. Osorio y J. Andrés, “Fundamentos y Aplicación del Muestreo en Señales Ubicadas en las Bandas Altas del Espectro. Scientia et Technical XIV (septiembre) ISSN 0122-1701, 2008.
- [26] Meza A. J., Pámanes J.A.; Motion Simulation of a Violin-Player Robotic Hand, <https://youtu.be/5rHRHHVhnPA> June, 2019.
- [27] J.A. Pamanes, Introducción al Modelado de Robots Industriales, Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón Coahuila 2017
- [28] W. Khalil y J. Kleifinger, “A new geometric notation for open and closed-loop robots”, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Vol. 46, No, 6, pp. 809-817, 2016.
- [29] J.E. Shigley and J.J. Uicker, Theory of Machines and Mechanisms, Ed. McGraw-Hill, International Book Company, U.S.A., 1980
- [30] W. Khalil and Ph. Lemoine, SYMORO+ Symbolic Modeling of Robots: User Guide, LS2N (Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes) Nantes, France (2003).
- [31] K. Schittkowski, “NLQPL: A FORTRAN-Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems”, Annals of Operation Research, Vol. 5, pp. 485-500, 1985.

## Apéndice A

### Posturas de los dedos de un violinista humano en las notas del violín

En las figuras 2.4 a 2.45 se muestran las notas en un pentagrama, asociadas a las posiciones de las cuerdas indicadas en la figura 2.1, y las correspondientes posturas de los dedos de la mano izquierda. Se indican las coordenadas de las posiciones de las yemas de los dedos al oprimir las cuerdas. Estas posiciones son las que deberá alcanzar las puntas de los dedos de la mano robótica considerada en esta tesis a fin de emitir las notas musicales deseadas. Para propósitos de este trabajo, los dedos de la mano izquierda del violinista (humano o robótico) se numeran de la siguiente manera:

- a) Pulgar: dedo 1
- b) Índice: dedo 2
- c) Medio: dedo 3
- d) Anular: dedo 4
- e) Meñique: dedo 5

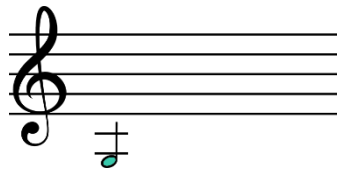


Figura A.1. *Sol* 3. La nota se emite con la cuarta cuerda libre.

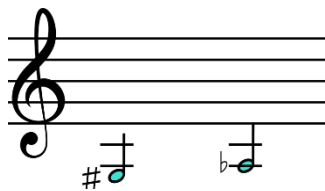


Figura A.2. *La sostenido* y su enarmonía *Sol bemol* 3. Coordenadas para el dedo índice:  $x=238.4$ ,  $y=8.221$ ,  $z=0$ .

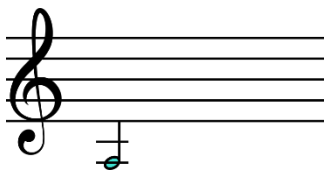


Figura A.3. *La* 3. Coordenadas para el dedo índice:  $x=257.1$ ,  $y=8.616$ ,  $z=0$ .

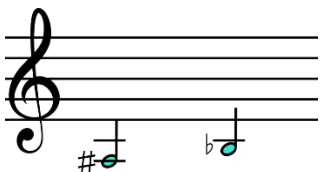


Figura A.4. *La sostenido* y su enarmonía *Si bemol* 3. Coordenadas para el dedo medio:  $x=227.7$ ,  $y=8.859$ ,  $z=0$ .



Figura A.5. *Sí* 3. Coordenadas para el dedo medio:  $x=217.7, y=9.243, z=0$



Figura A.6. *Do* 4. Coordenadas para el dedo anular:  $x=206.3, y=9.292, z=0$



Figura A.7. *Do sostenido* y su enarmonía *Re Bemol* 4. Coordenadas para el dedo anular:  $x=193.3, y=9.566, z=0$ .

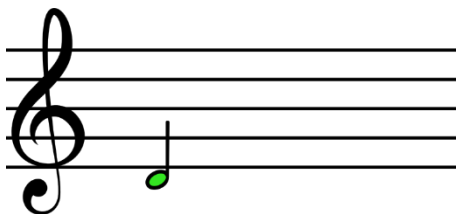


Figura A.8. *Re* 4. Coordenadas para el dedo meñique:  $x=167.8, y=-10.104, z=0$



Figura A.9. *Re sostenido* y su enarmonía *Sí bemol* 4. Coordenadas para el dedo índice:  $x=257.1$   $y=-2.744$   $z=0$

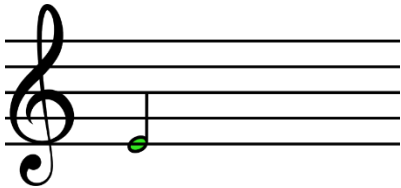


Figura A.10. *Mi* 4. Coordenadas para el dedo índice:  $x=238.4$   $y=-2.881$   $z=0$

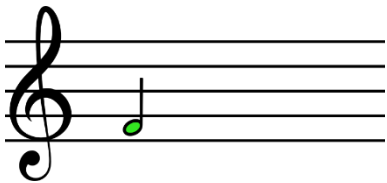


Figura 1: Coordenadas para el dedo 3  $X=227.7$   $Y=-2.881$   $Z=0$

Figura A.11. *Fa* 4. Coordenadas para el dedo medio:  $x=227.7$   $y=-2.881$   $z=0$

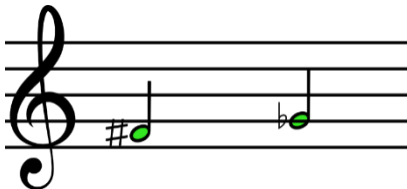


Figura A.12. *Fa sostenido* y su enarmonía *sol bemol* 4. Coordenadas para el dedo medio:  $x=217.7$   $y=-3.033$   $z=0$

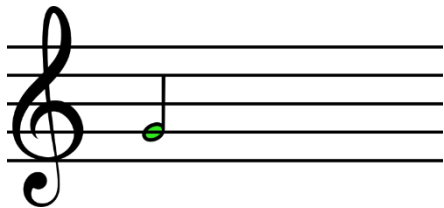


Figura A.13. *Sol* 4. Coordenadas para el dedo anular:  $x=206.3$   $y=-3.116$   $z=0$

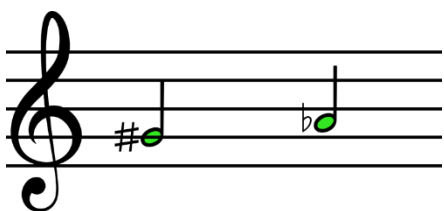


Figura A.14. *Sol sostenido* y su enarmonía *la bemol* 4. Coordenadas para el dedo anular:  $X=193.3$   $Y=-3.212$   $Z=0$

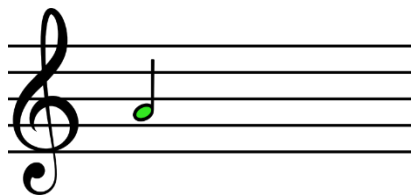


Figura A.15. *La* 4. Coordenadas para el dedo anular:  $x=167.8$   $y=-3.399$   $z=0$

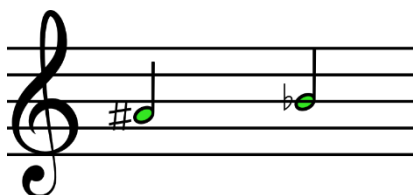


Figura A.16. *La sostenido* y su enarmonía *Sí bemol* 4. Coordenadas para el dedo índice:  $x=257.1$   $y=2.744$   $z=0$

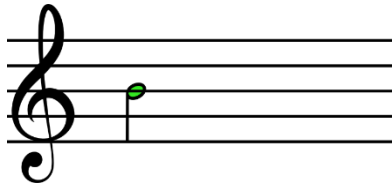


Figura A.17. *Si 4*. Coordenadas para el dedo índice:  $x=238.4$   $y=2.881$   $z=0$

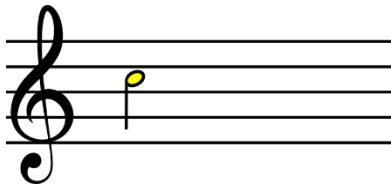


Figura A.18. *Do 5*. Coordenadas para el dedo medio:  $x=227.7$   $y=2.881$   $z=0$ .

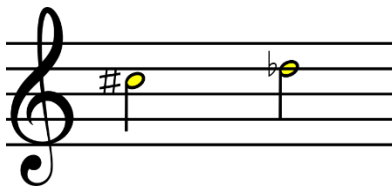


Figura A.19. *Do sostenido* y su enarmonía *Re bemo 5*. Coordenadas para el dedo medio:  $x=217.7$   $y=3.033$   $z=0$

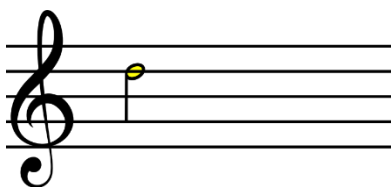


Figura A.20. *Re 5*. Coordenadas para el dedo anular:  $X=206.3$   $Y=3.116$   $Z=0$

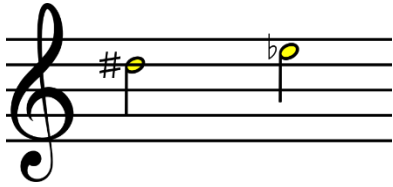


Figura A.21. *Re sostenido* y su enarmonía *mi bemol* 5. Coordenadas para el dedo anular:  $X=193.3$   $Y=3.212$   $Z=0$

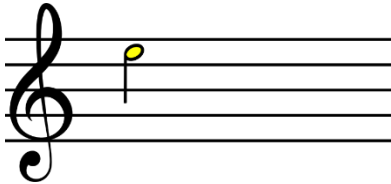


Figura A.22. *Mi* 5. Coordenadas para el dedo anular:  $x=167.8$   $y=3.399$   $z=0$

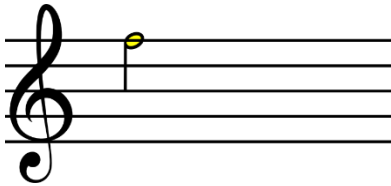


Figura A.23. *Fa* 5. Coordenadas para el dedo índice:  $x=257.1$   $y=8.616$   $z=0$

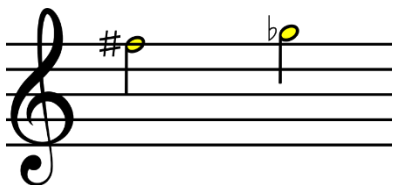


Figura A.24. *Fa#* y su enarmonía *Sol bemol* 5. Coordenadas para el dedo índice:  $x=238.4$   $y=8.221$   $z=0$



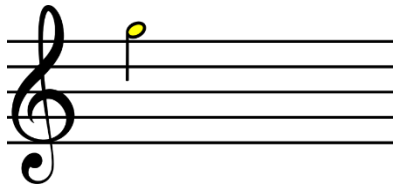


Figura A.25. *Sol* 5. Coordenadas para el dedo medio:  $x=227.7$   $y=8.859$   $z=0$ .

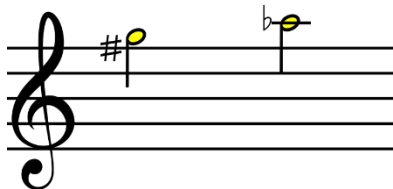


Figura A.26. *Sol sostenido* y su enarmonía *La bemol* 5. Coordenadas para el dedo medio:  $x=217.7$   $y=9.243$   $z=0$

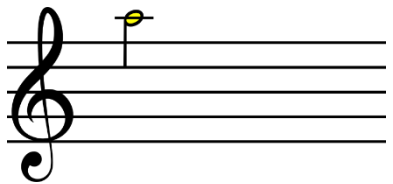


Figura A.27. *La* 5. Coordenadas para el dedo anular:  $x=206.3$   $y=9.292$   $z=0$

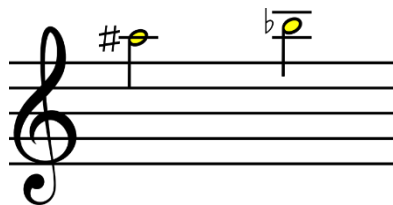


Figura A.28. *La sostenido* y su enarmonía *Sí bemol* 5. Coordenadas para el dedo anular:  $x=193.3$   $y=9.566$   $z=0$

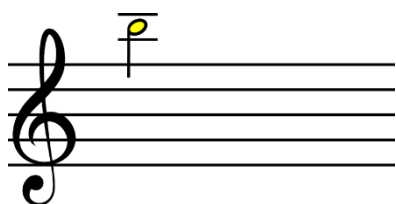


Figura A.29. *Si* 5. Coordenadas para el dedo meñique:  $x=167.8$   $y=-10.104$   $z=0$

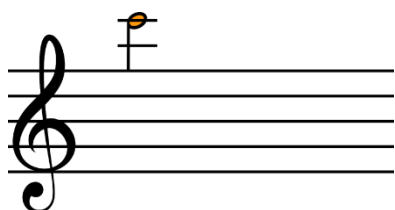


Figura A.30. *Do* 6. Coordenadas para el dedo índice:  $x=141.52$   $y=-10.65$   $z=0$

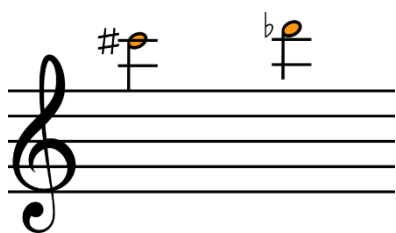


Figura A.31. *Do sostenido* y su enarmonía *re bemol* 6. Coordenadas para el dedo medio:  $x=133.50$   $y=-10.82$   $z=0$

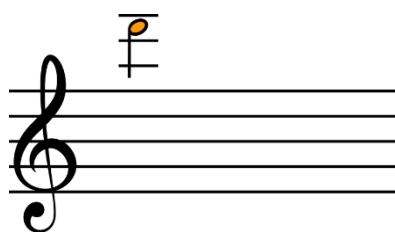


Figura A.32. *Re* 6. Coordenadas para el dedo medio:  $x=123.63$   $y=-11.03$   $z=0$

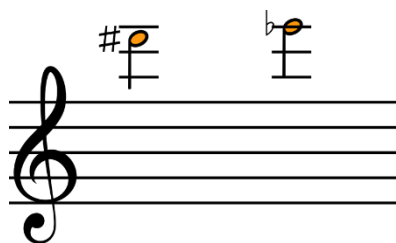


Figura A.33. *Re sostenido* y su enarmonía *mi bemol* 6. Coordenadas para el dedo medio:  $x=113.58$   $y=-11.24$   $z=0$

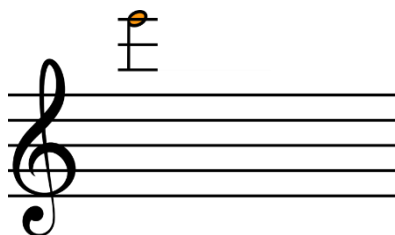


Figura A.34. *Mi* 6. Coordenadas para el dedo medio:  $x=102.50$   $y=-11.41$   $z=0$

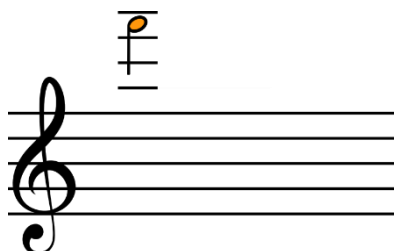


Figura A.35. *Fa* 6. Coordenadas para el dedo índice:  $x=93.91$   $y=-11.66$   $z=0$

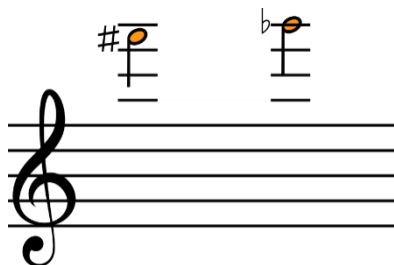


Figura A.36. *Fa sostenido* y su enarmonía *sol bemol* 6. Coordenadas para el dedo meñique:  $x=84.91$   $y=-11.85$   $z=0$

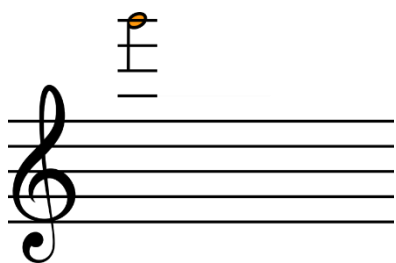


Figura A.37. *Sol* 6. Coordenadas para el dedo índice:  $x=77.59$   $y=-12.00$   $z=0$

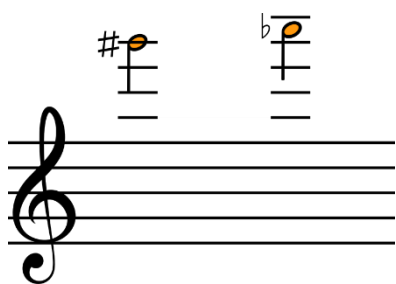


Figura A.38. *Sol sostenido* y su enarmonía *la bemol* 6. Coordenadas para el dedo índice:  $x=71.04$   $y=-12.14$   $z=0$ .

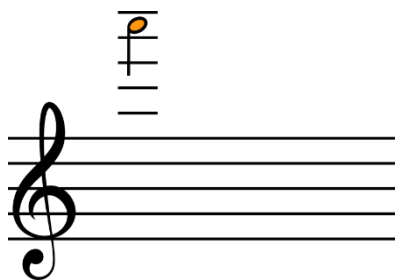


Figura A.39. *La* 6. Coordenadas para el dedo medio:  $x=64.39$   $y=-11.24$   $z=0$

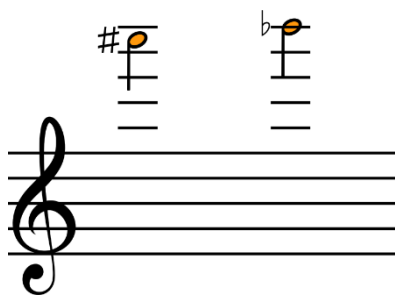


Figura A.40. *La sostenido* y su enarmonía *Si bemol* 6. Coordenadas para el dedo anular:  $x=56.92$   $y=-12.28$   $z=0$

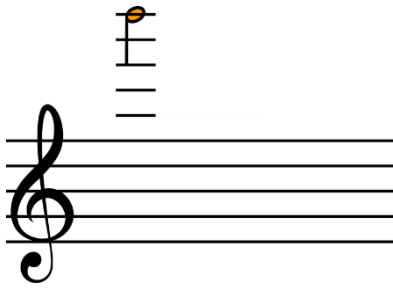


Figura A.41. *La sostenido* y su enarmonía *Sí bemol* 3. Coordenadas para el dedo anular:  $x=50.83$   $y=-12.57$   $z=0$

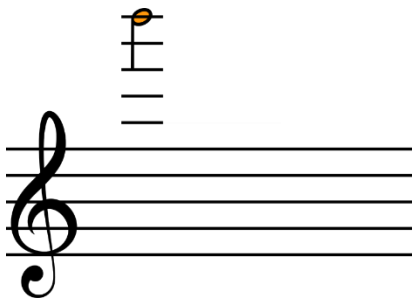


Figura A.42. *La* 6. Coordenadas para el dedo meñique:  $x=43.81$   $y=-12.71$   $z=0$

## Apéndice B

### Datos del estudio antropométrico

Para definir las longitudes de los eslabones que constituyen los dedos de la mano robótica que se considera en esta tesis se efectuó un estudio de las dimensiones de los dedos de violonchelistas, violistas y violinistas humanos con experiencia en la ejecución de sus instrumentos. En este apéndice se resumen los datos obtenidos.

En la Tabla B.1 se dan los datos básicos de los músicos que colaboraron para este estudio, y se les asigna un número consecutivo para referirse a los músicos en las tablas B.2 y B.3. En estas tablas se expresan las medidas de las falanges de cada dedo, las cuales se designan con una letra mayúscula seguida de un número. Las letras son P, I, M, A y m, que corresponden a los dedos pulgar, índice, medio, anular y meñique. Los números son 1, 2 y 3, que se refieren a las falanges proximal, medial y distal, respectivamente.

**Tabla B.1. Datos básicos de los músicos considerados en el estudio y números asignados**

<i>Número de músico</i>	<i>Nombre</i>	<i>Instrumento</i>	<i>Tamaño</i>	<i>Marca</i>	<i>Edad (años)</i>	<i>Años tocando</i>
1	Tirsa Eager Clingan	Viola	15	Leon Aubert	29	10
2	Elena Eager Clingan	Viola	16.5	Cecilio	18	5
3	Jorge Pérez Pedroza	Viola	16	Alfred Stingl	18	5
4	Catalina E. Alba Pérez	Viola	16	Pearl River	20	5
5	Ramón V. Chávez	Viola	17	China	18	2
6	Pablo J. Falcón Salinas	Violín	Entero	Wagner Lieven	13	3
7	Melanie Hamilton	Violín	Entero	Cecilio	15	7
8	Mónica Silva E.	Violín	3/4	Sevillana	14	5
9	Luana E. Clingan	Violín	Entero	Carlo Lamberti	25	8
10	Elya R. Eager Clingan	Violín	Entero	Otto Ernest	23	9
11	Antonio Frost	Violín	Entero	Luthier	15	4
12	Diana M. Morales	Violín	Entero	Pearl River	18	4
13	Valeria Muro Valdivia	Violín	Entero	Jasha	23	6
14	Jorge Alba Pérez	Violín	Entero	Cremona /Pr	18	2
15	Lupita Fernández	Violín	Entero	Skylark	14	3
16	Leticia N. Rodríguez L.	Violín	Entero	Sevillana	18	2
17	Néstor F. Fuentes	Violín	Entero	Paris	22	9
18	Osmara V. Garza García	Violín	Entero	Skylark	15	2
19	Ana Hdez. Guerrero	Violín	Entero	Sevillana	15	3
20	Ashley Montelongo N.	Violín	Entero	Copy Strad	20	5
21	Sergio A. Silveyra S.	Violín	Entero	Sharpero	25	10
22	Alan Eager Clingan	Cello	Entero	Cecilio	20	10
23	Julissa Villareal Chávez	Cello	Entero	Alemán	21	2
24	José M. Flores Ortega	Cello	3/4	Cecilio	13	4
25	Luis U. Carrera M.	Cello	Entero		18	2
26	Isaac Barrios	Violín	Entero	Sevillana	15	2

Tabla B.2. Longitudes de las falanges de los dedos pulgar, índice y medio

<b>Número de músico</b>	<b>P1 (mm)</b>	<b>P2 (mm)</b>	<b>I1 (mm)</b>	<b>I2 (mm)</b>	<b>I3 (mm)</b>	<b>M1 (mm)</b>	<b>M2 (mm)</b>	<b>M3 (mm)</b>
1	41.91	32.258	48.26	29.972	24.638	50.038	32.258	19.812
2	45.466	28.448	46.736	29.972	31.242	31.242	23.368	21.59
3	45.72	41.402	53.34	37.592	26.67	57.15	43.18	40.132
4	38.608	29.21	42.926	24.892	21.336	58.166	35.56	25.4
5	45.72	34.544	60.96	48.768	22.86	55.118	42.418	28.448
6	38.608	30.734	48.514	31.242	25.654	53.848	34.036	27.94
7	39.624	28.702	44.45	30.988	21.59	56.134	32.258	26.67
8	41.148	27.178	34.798	21.844	22.606	48.26	31.242	24.892
9	38.1	28.702	45.72	32.004	19.304	54.864	34.036	24.384
10	37.846	25.4	52.07	31.75	23.368	49.53	25.4	24.13
11	43.942	30.734	56.896	35.56	24.892	58.928	40.64	28.702
12	40.64	30.48	50.8	34.544	21.59	54.102	38.354	20.574
13	40.64	30.734	50.292	31.75	23.368	32.004	38.1	25.4
14	40.132	28.702	56.134	35.814	24.638	56.134	36.83	26.67
15	36.576	28.448	40.894	22.606	22.606	50.292	34.036	24.892
16	39.624	31.242	52.07	33.782	25.4	59.944	40.132	26.162
17	52.07	50.8	56.388	40.894	21.844	58.42	38.1	23.622
18	41.91	31.75	48.768	37.338	24.638	52.832	40.894	27.432
19	38.1	30.48	48.26	38.1	22.86	47.752	36.576	23.368
20	48.26	31.75	49.53	27.94	25.4	53.34	36.068	27.94
21	46.228	32.004	53.34	40.132	28.956	56.896	39.37	25.4
22	47.498	32.004	64.516	38.1	26.416	64.516	37.084	28.956
23	41.148	27.178	50.8	32.512	17.78	60.96	36.83	25.4
24	45.212	25.4	37.592	43.942	29.718	21.082	43.942	31.75
25	46.228	35.56	54.102	36.322	25.4	60.96	41.402	25.4
26	37.846	31.242	50.8	32.258	17.018	43.688	28.448	21.844



Tabla B.3. Longitudes de las falanges de los dedos anular y meñique

<i>Número de músico</i>	<i>A1 (mm)</i>	<i>A2 (mm)</i>	<i>A3 (mm)</i>	<i>m1 (mm)</i>	<i>m2 (mm)</i>	<i>m3 (mm)</i>
1	39.37	35.814	25.146	35.814	27.178	22.098
2	45.72	35.56	25.4	28.702	26.924	21.336
3	56.642	43.688	27.94	41.148	33.528	21.59
4	53.848	36.83	21.844	42.926	30.48	16.256
5	49.784	43.434	30.48	42.418	50.038	22.352
6	39.624	33.782	25.4	40.132	27.94	23.876
7	53.594	38.1	26.924	38.354	28.448	22.352
8	24.638	31.496	23.622	43.18	24.892	20.32
9	53.34	49.784	22.352	44.45	27.94	21.59
10	52.07	28.448	22.86	32.512	22.606	17.78
11	57.912	39.624	28.448	56.642	32.258	26.67
12	36.83	49.784	21.59	44.45	34.29	20.32
13	47.752	33.274	20.828	39.37	25.4	21.59
14	51.562	35.56	27.432	45.212	25.4	20.32
15	50.292	28.956	23.114	35.814	26.67	17.78
16	48.006	40.132	27.94	41.148	28.448	20.828
17	53.34	43.18	24.384	40.64	33.02	21.844
18	49.53	41.402	24.13	44.45	30.48	19.05
19	38.1	33.02	21.336	34.798	25.4	22.098
20	58.42	33.02	24.892	41.148	27.94	24.892
21	55.88	38.1	25.4	40.64	33.02	20.32
22	51.562	40.132	26.162	50.8	31.75	24.384
23	49.276	38.608	24.892	38.1	28.702	22.352
24	20.574	33.274	20.574	4241.8	23.368	18.034
25	50.8	36.83	25.4	50.8	25.4	23.11
26	42.418	34.798	21.844	33.02	20.828	15.748