



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de La Laguna

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

# **“Identificación de modelos de oscilaciones inter- áreas de sistemas de potencia mediante algoritmos generalizados de Prony”**

POR

**Ing. Rafal Fernando Uribe Carvajal**

## **TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**M.C. Lamia Hamdán Medina**

**CODIRECTOR DE TESIS**

**M.C. Ricardo Vargas Salas**

**ISSN: 0188-9060**



**RIITEC: (06)-TMCIE-2019**

Torreón, Coahuila. México,  
Junio 2019

**Identificación de modelos de oscilaciones  
inter-áreas de sistemas de potencia  
mediante algoritmos generalizados de  
Prony**

**Rafael Fernando Uribe Carvajal**

# DEDICATORIA

A mi padre, quien ha sido un ejemplo de vida y del hombre que quiero ser y me ha apoyado en todo momento de mi vida, por darme ese empuje como profesionista y como buen hombre ante todo y todos.

A mi madre, quien siempre me ha dado su amor incondicional y me dio educación y amor y cuidó de mí, aunque este fuera de casa, siempre preocupándose y apoyándome.

A mis hermanos, por estar siempre en los eventos más importantes de mi persona, de mi niñez y por ser compañeros de aventuras y de travesuras.

# AGRADECIMIENTOS

Primeramente, gracias a mi familia por siempre apoyarme en mis metas, por estar siempre conmigo sin importar la distancia, por cuidar de mí y motivarme en cada momento a ser mejor persona. Agradezco a mi padre, Rafael Uribe, por cuidar que nada hiciera falta y educarme como un buen hombre. A mi madre, Natividad Carvajal, por ser el amor que me impulsa en la vida, por los consejos útiles, por los valores y la educación desde pequeño. A mis hermanos que siempre han estado ahí para motivarme y apoyarme en todo momento. A mis abuelos, tíos y primos por siempre velar por mí, agradezco a todo por la increíble familia que tengo.

A mi asesor de tesis, la M.C. Lamia Hamdan Medina, quien ha sido un gran pilar par el desarrollo de esta tesis, por su gran paciencia, compromiso, enseñanzas y dedicación hacia un servidor, para poder lograr este compromiso que forma parte de mi educación profesional y satisfacción personal.

A los catedráticos de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica del Instituto Tecnológico de la Laguna, M.C. Ricardo Vargas, Dr. Marco Antonio Arjona López, Dra. Concepción Hernández Flores, Dr. Francisco Sergio Sellschopp Sánchez, Dr. Carlos Álvarez, M.C. Carlos Alberto Morales Bazán, M.C. Teodoro Corona Pérez, que transmitieron grandes enseñanzas claves para mi desarrollo profesional en esta etapa de mi vida, gracias por su conocimiento, apoyo, paciencia y dedicación.

A mis compañeros de maestría, por brindarme consejos, apoyo, enseñanzas, amistad y experiencias, Samuel, Guillermo, Alan, Nazle, Camilo, Diana, Diego, Octavio, Irving, Osvaldo, pero en especial a Juan Pablo y Cesar, quienes vivieron conmigo en esta aventura, me apoyaron, me aconsejaron con sus conocimientos; y a Iulianova, quien me apoyó en esta etapa y me ayudó a seguir concentrándome en los estudios.

Finalmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y tecnología (CONACYT) y a la Secretaría de Energía (SENER), por el apoyo financiero brindado a través de la beca de estudios con registro CVU 817292, así como al Instituto Tecnológico de la Laguna, donde me he logrado profesionalmente

# RESUMEN

En la actualidad, la inclusión de las unidades de medición fasorial en los sistemas de potencia ha incrementado la confiabilidad de los sistemas de potencia; así como su monitoreo, sin embargo, el sistema de potencia no está exento de disturbios que causen problemas de inestabilidad que pueden ser detectados, pero, tal vez, no puedan ser amortiguados a tiempo. Por lo anterior, existen maneras de estimar modos de oscilación presentes en sistemas de potencia para detectar modos poco amortiguados y aumentar la seguridad del sistema.

Para ello, se desarrolla una rutina en MATLAB compatible con los datos proporcionados por las unidades de medición fasorial para la estimación de los modos de oscilación, utilizando el método de aproximación exponencial Prony, usando el sistema de dos áreas propuesto por Prabha Kundur [1].

Adicionalmente, los resultados del análisis modal se comparan con el programa de simulación de sistemas de potencia utilizado en la industria por ingenieros eléctricos PSS/E (Power System Simulator for Engineers).

# ABSTRACT

Nowadays, the inclusion of phasor measurement units into the power systems has increased the power systems reliability, as well as their monitoring, however, the power system is not exempt from disturbances that cause instability problems that can be detected, but, perhaps, cannot be damped timely. Because of that, there are approaches to estimate oscillation modes present in power systems to detect poorly damped modes and increase the system security.

Thus, a MATLAB routine has been developed, compatible with the data provided by phasor measurement units for oscillation modes estimation, using the Prony's exponential approximation method using the two-area system proposed by Prabha Kundur [1].

Additionally, the modal analysis results are compared with the simulation program of power systems used in used in the industry by electrical engineers PSS/E (Power System Simulator for Engineers).

# Índice General

|  |    |
|--|----|
| Capítulo 1.....  | 1  |
| Antecedentes .....   | 1  |
| 1.1. Estado del Arte.....  | 1  |
| 1.2. Objetivo.....   | 4  |
| 1.3. Justificación del trabajo de investigación. ....  | 4  |
| 1.4. Contenido de la Tesis.....  | 5  |
| Capítulo 2.....  | 7  |
| Aplicaciones de PMU's en sistemas de potencia .....  | 7  |
| 2.1. Introducción.....   | 7  |
| 2.2. Conceptos básicos.....  | 8  |
| 2.2.1. Fasores y sincrofasores.....  | 8  |
| 2.2.2. Descripción básica del funcionamiento del PMU. ....   | 10 |
| 2.2.3. Series de Fourier.....  | 11 |
| 2.2.4. Transformada Discreta de Fourier.....   | 12 |
| 2.2.5. Estimación de fasores para datos de entrada de frecuencia no nominales.<br>.....                            | 13 |
| 2.2.6. Componentes simétricas.....   | 14 |
| 2.3. Aplicaciones de los PMU.....  | 15 |
| 2.3.1. Medidores de frecuencia.....  | 15 |
| 2.3.2. Estimador de Estados Estático.....  | 18 |
| 2.3.3. Protecciones.....   | 20 |
| 2.3.4. Control con retroalimentación de PMU's.....   | 21 |
| Capítulo 3.....  | 23 |
| Comportamiento oscilatorio en sistemas de potencia, fuentes, características y análisis<br>.....                   | 23 |
| 3.1. Introducción.....   | 23 |
| 3.2. La naturaleza de las oscilaciones en los sistemas de potencia.....  | 23 |
| 3.2.1. Características de un corto circuito trifásico en las terminales de una<br>Máquina Síncrona.....            | 25 |
| 3.3. Relación potencia-ángulo.....   | 26 |
| 3.4. Dinámica del rotor y la ecuación de oscilación.....   | 29 |
| 3.5. Estabilidad de un sistema eléctrico de potencia en pequeña señal.....   | 31 |
| Capítulo 4.....  | 34 |
| Representación en espacio de estados de sistemas de potencia para estudios de<br>estabilidad de pequeña señal..... | 34 |
| 4.1. Introducción.....   | 34 |
| 4.2. El fenómeno de inestabilidad.....   | 34 |
| 4.3. Representación matemática de la Máquina Síncrona.....   | 38 |
| 4.4. Representación de Espacio de Estados y Linealización.....   | 40 |
| 4.4.1. Espacio de estados.....   | 40 |
| 4.4.2. Linealización.....  | 42 |
| 4.5. Modelo detallado de un generador síncrono para estudios de estabilidad. ..                                    | 43 |
| 4.5.1. Ecuaciones del estator.....   | 43 |

|   |    |
|---|----|
| 4.5.2. Ecuaciones del rotor .....   | 44 |
| 4.5.3. Ecuaciones de velocidad y aceleración del rotor .....  | 45 |
| 4.5.4. Ecuación del par eléctrico.....  | 45 |
| 4.6. Representación del generador síncrono en la forma canónica de un sistema de referencia nodal.....  | 46 |
| 4.7. Linealización de modelo detallado del generador síncrono .....   | 48 |
| 4.7.1. Linealización de las ecuaciones del rotor .....  | 51 |
| 4.7.2. Linealización de la ecuación de oscilación.....  | 53 |
| 4.7.3. Linealización de la ecuación del ángulo de rotor .....   | 53 |
| 4.7.4. Representación matricial de la ecuación de estado de generador síncrono .....  | 54 |
| 4.8. Representación de los sistemas de excitación para estudios de estabilidad. 54  |    |
| 4.8.1. Elementos de un Sistema de Excitación. ....  | 55 |
| 4.8.2. Modelo del excitador AC4A.....   | 56 |
| 4.9. Modelo ZIP de la carga. ....   | 58 |
| 4.10. Representación de un sistema multi-máquina para estudios de estabilidad. 60   |    |
| Capítulo 5.....   | 63 |
| Procedimientos para análisis modal ajustados a datos medidos .....  | 63 |
| 5.1. Introducción. ....   | 63 |
| 5.2. Análisis modal.....  | 63 |
| 5.3. Eigenvalores y Eigenvectores. ....   | 65 |
| 5.4. Matrices modales y ecuación de movimiento libre. ....  | 67 |
| 5.5. Forma del modo y eigenvalores. ....  | 70 |
| 5.6. Factores de participación. ....  | 71 |
| 5.7. Algoritmo de Prony y Multi-Prony. ....   | 72 |
| Capítulo 6.....   | 76 |
| Uso de la herramienta Power System Simulator for Engineering (PSS/E) para analizar información basada en mediciones fasoriales en particular el análisis de Prony ..... | 76 |
| 6.1. Introducción. ....   | 76 |
| 6.2. Simuladores de sistemas de potencia. ....  | 76 |
| 6.3. Caso de estudio. ....  | 78 |
| 6.3.1. Descripción del sistema de dos áreas. ....   | 78 |
| 6.3.2. Descripción del modelo del generador. ....   | 80 |
| 6.3.3. Descripción del modelo del excitador. ....   | 81 |
| 6.4. Resultados de la corrida de flujos del sistema de dos áreas.....   | 82 |
| Capítulo 7.....   | 83 |
| Resultados de la aplicación PSS/E usando el sistema de prueba clásico de dos áreas de Kundur .....  | 83 |
| 7.1. Introducción. ....   | 83 |
| 7.2. Sistema de Estudio y Señales Obtenidas. ....   | 83 |
| 7.2.1. Falla trifásica en BUS 7. ....   | 83 |
| 7.2.2. Falla trifásica en BUS 8. ....   | 84 |
| 7.2.3. Falla trifásica en BUS 9. ....   | 85 |
| 7.2.4. Cambio de voltaje de referencia de los AVR de generadores. ....  | 86 |
| 7.3. Resultados de Modos de Oscilación utilizando el PSS/E. ....  | 86 |
| 7.4. Uso del algoritmo de Prony para el cálculo de Modos de Oscilación. ....  | 88 |
| 7.5. Pruebas del algoritmo de Prony con el caso de estudio. ....  | 89 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.5.1. Modos estimados en la falla en BUS 7.....                   | 90  |
| 7.5.2. Modos estimados en la falla en BUS 8.....                   | 92  |
| 7.5.3. Modos estimados en la falla en BUS 9.....                   | 94  |
| 7.5.4. Modos estimados en el cambio de voltaje de referencia. .... | 96  |
| Capítulo 8.....  | 98  |
| Conclusiones.....  | 98  |
| 8.1. Conclusiones Generales. ....                                  | 98  |
| 8.2. Aportaciones y recomendaciones para trabajos futuros.....     | 99  |
| 8.2.1. Recomendaciones para trabajos futuros. ....                 | 99  |
| Capítulo 9.....  | 101 |
| Bibliografía .....   | 101 |



# Índice de figuras

---

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 Representación una señal senoidal (a) y un fasor (b) .....   | 9  |
| Figura 2.2 Esquema básico de conexión de un PMU .....   | 11 |
| Figura 2.3 Diagrama de estructura de un control de área amplia .....  | 21 |
| Figura 3.1 Componente de frecuencia fundamental de la corriente de armadura. ....   | 26 |
| Figura 3.2 Diagrama Unifilar .....  | 27 |
| Figura 3.3 Modelo Lineal .....  | 27 |
| Figura 3.4 Diagrama Fasorial .....  | 28 |
| Figura 3.5 Curva Potencia Ángulo .....  | 28 |
| Figura 4.1 Respuesta a disturbio de pequeña señal con voltaje de campo constante ...  | 36 |
| Figura 4.2 Respuesta a disturbio de pequeña señal con control de excitación .....   | 37 |
| Figura 4.3 Diagrama esquemático de una máquina síncrona trifásica .....   | 39 |
| Figura 4.4 Circuitos de rotor y estator de una máquina síncrona .....   | 40 |
| Figura 4.5 Diagrama vectorial de voltajes que muestra la relación entre el marco de referencia de la red y el de la máquina síncrona..... | 47 |
| Figura 4.6 Diagrama de Bloques de un Sistema de Excitación.....   | 55 |
| Figura 4.7 Diagrama de bloques del excitador AC4A.....  | 56 |
| Figura 4.8 Diagrama de bloques del excitador AC4A con $TA = 0$ .....  | 57 |
| Figura 6.1 Diagrama unifilar del sistema de dos áreas .....   | 79 |
| Figura 6.2 Modelo del excitador IEEE AC4A proporcionado por PSS/E.....  | 82 |
| Figura 7.1 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante falla en el nodo 7 .....                                       | 84 |
| Figura 7.2 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante falla en el nodo 8 .....                                       | 85 |
| Figura 7.3 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante falla en el nodo 9 .....                                       | 85 |
| Figura 7.4 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante el cambio de referencia en los excitadores.....                | 86 |
| Figura 7.5 Algoritmo de Prony para la estimación de modos de oscilación .....   | 89 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 7.6 Valores de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el primer caso de estudio .....               | 90 |
| Figura 7.7 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el primer caso de estudio .....   | 91 |
| Figura 7.8 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el primer caso de estudio .....        | 91 |
| Figura 7.9 Valores totales de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el segundo caso de estudio .....      | 92 |
| Figura 7.10 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el segundo caso de estudio ..... | 93 |
| Figura 7.11 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el segundo caso de estudio.....       | 93 |
| Figura 7.12 Valores totales de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el tercer caso de estudio .....      | 94 |
| Figura 7.13 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el tercer caso de estudio .....  | 95 |
| Figura 7.14 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el tercer caso de estudio .....       | 95 |
| Figura 7.15 Valores totales de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el último caso de estudio .....      | 96 |
| Figura 7.16 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el último caso de estudio .....  | 97 |
| Figura 7.17 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el último caso de estudio.....        | 97 |

# Índice de tablas

---

|   |    |
|---|----|
| Tabla 6.1 Parámetros de las máquinas síncronas del sistema. ....            | 79 |
| Tabla 6.2 Parámetros de la red de transmisión.....                          | 80 |
| Tabla 6.3 Datos dinámicos del generador CGEN1 .....                         | 81 |
| Tabla 6.4 Parámetros de los sistemas de excitación AC4A .....               | 82 |
| Tabla 6.5 Resultado de la solución de flujos del sistema de dos áreas ..... | 82 |
| Tabla 7.1 Modos de Oscilación obtenidos por el PSS/E.....                   | 88 |

# 1. Antecedentes

---

## 1.1. Estado del Arte.

La energía eléctrica con uso comercial inició a principios de 1880 en Estados Unidos para poder proveer energía a centros industriales con el fin de encender las bombillas inventadas por Thomas Alba Edison, él logró crear un sistema de corriente continua para instalar su primera central eléctrica en Nueva York. Sin embargo, más tarde, su sistema de corriente continua fue desplazado por un sistema de corriente alterna desarrollado por el empresario George Westinghouse junto con el inventor Nikola Tesla, el cual suponía una ventaja al de corriente continua al ser más económico, usar máquinas más simples y tener menores pérdidas en transmisión, de esta manera, el sistema podía proveer energía a una mayor cantidad de usuarios y ser más rentable, económicamente.

En México, la energía eléctrica comercial se remonta a finales del siglo XIX cuando se instalan las pantas generadoras para ser utilizadas en el sector industrial, poco a poco la energía eléctrica empezó a cubrir las necesidades más allá de las fábricas para atender al alumbrado público y a las residencias de las familias más acomodadas.

Tiempo después, la interconexión de distintos sistemas de potencia empezó a popularizarse a finales de los años 50's y principios de los 60's en Estados Unidos (en México esta interconexión se realizó en los 70's) ya que se observó que esto conlleva a mejorar la seguridad y la economía del sistema de potencia. La mejora en la seguridad del sistema de eléctrico de potencia (SEP) resulta de la asistencia de emergencia mutua que pueden proporcionar los sistemas interconectados y la mejora en economía se debe a la necesidad de generar menos capacidad de reserva en cada sistema ya que la interconexión con otros sistemas provee dicha generación adicional. Además, las interconexiones permiten a las empresas realizar transferencias de energía y así aprovechar las fuentes de energía más económicas de cada sistema. Debido a estos beneficios, la interconexión de sistemas eléctricos es algo que ha estado creciendo, lo que resulta en un sistema de potencia de gran escala y del mismo tamaño de complejidad [1].

La interconexión de los sistemas eléctricos condujo a grandes beneficios a la red eléctrica, pero de igual manera hizo que se presentaran varios problemas; uno de estos son los casos de desconexión de áreas debido a las crecientes oscilaciones de baja frecuencia que impedían que la interconexión se mantuviera, lo que podía dejar desconectada un área por varias horas. En algunos casos, se optaba por variar la ganancia de los reguladores automáticos de voltaje de los generadores, con esto se mantenía la interconexión; pero en otros casos no era suficiente. Las pequeñas diferencias entre los generadores, ya sea por su diseño y la carga que manejaban, creaban variaciones en la red que producían oscilaciones. Las oscilaciones son aceptables en el sistema, siempre y cuando éstas decaigan, pero cuando el estado de un SEP carece de amortiguamiento, las pequeñas perturbaciones son un grave riesgo para el sistema, ya que pueden incrementarse y generar problemas mayúsculos de gran impacto en toda la red eléctrica [2].

Debido a este tipo de oscilaciones se han propuesto métodos para el análisis en pequeña señal [3], [4] con la finalidad de desarrollar herramientas para obtener información importante que ayude a la seguridad y confiabilidad del sistema de potencia. La naturaleza de la respuesta del sistema ante pequeñas perturbaciones depende de numerosos factores incluyendo las condiciones iniciales, la robustez del sistema de transmisión y el tipo de controles de los sistemas de excitación usado en los generadores.

Los métodos de identificación modal consisten en métodos matemáticos que identifican y extraen los modos de oscilación presentes en los sistemas a partir de simulaciones en dominio del tiempo o mediciones reales del SEP de interés.

Una de las primeras metodologías propuestas para el análisis en pequeña señal es el análisis por medio del algoritmo de Prony expuesto en [3], en el cual se realiza una revisión de las principales características del análisis de Prony utilizando mediciones de flujo de potencia y expone consideraciones que deben ser tomadas en cuenta para una identificación modal exitosa. En [5] se hace una comparación entre el análisis modal y el análisis de Prony para la estimación del amortiguamiento de las oscilaciones presentes en un SEP enfatizándose el carácter experimental del análisis de Prony, el cual debe ser utilizado eligiendo los parámetros cuidadosamente para la aplicación correcta del método.

Sin embargo, se observó que el método de Prony tiene sensibilidad ante la presencia de ruido en las mediciones [6], por ello, posteriormente se propuso un análisis más completo

para la señal de potencia medida. En [7] se analiza la forma en que el ruido presente en la señal afecta el proceso de identificación modal haciendo difícil comparar los resultados obtenidos a partir de diferentes señales de un mismo sistema, para superar esto se propone un análisis más extenso del método analizando varias señales en forma simultánea, obteniendo de esta manera una mejor precisión de la estimación modal.

Para asegurar una interpretación más correcta de los resultados del método de Prony, se ha propuesto realizar una revisión cruzada con otros métodos de análisis modal como son los mínimos cuadrados de Hankel o el método de la matriz "Pencil" [4], [8] para obtener una mejor comprensión de los problemas oscilatorios de la señal; aunque dichos análisis no son expuestos en esta tesis, es importante mencionarlo como una mejora al método de identificación modal para obtener resultados más acertados.

Para obtener un mejor análisis de los sistemas de potencia, se necesitaban instrumentos de medición más precisos que obtuvieran información de la red de manera rápida y confiable. Al principio se utilizaban las señales de flujos de potencia proporcionados por los equipos de medición ya instalados en la red y mediante estimadores de estado se hacían análisis del sistema de potencia, pero dichas estimaciones no eran lo suficientemente precisas para realizar un análisis de pequeña señal, debido a la ligera inexactitud de los equipos con los que se contaba. Gracias a la implementación de nuevas y mejores tecnologías para la medición de la señal se pudo obtener una información más precisa de la señal del sistema de potencia. Una de estas unidades de medición a la vanguardia de la tecnología son las unidades de medición fasorial (Phasor Measurement Units, "PMU"), las que otorgan información más precisa de la red que los instrumentos comunes, ya que con estos instrumentos es posible obtener información de fasores de voltaje y corriente en diversos puntos de la red eléctrica con una estampa de tiempo que nos ayuda a obtener información en tiempo real y más precisa del comportamiento del SEP.

El creciente uso de los PMU incrementó la fiabilidad de los análisis modales, en [9], se presenta el método de Prony utilizando mediciones proporcionadas por los PMU, haciendo un análisis más robusto de la señal y, por consiguiente, una mejor identificación modal.

## 1.2. Objetivo.

El objetivo de esta tesis es desarrollar una rutina en MATLAB para la estimación de los modos de oscilación inter-área, utilizando el algoritmo de Prony con señales obtenidas de los flujos de potencia y compatibles con las mediciones de las unidades de medición fasorial.

## 1.3. Justificación del trabajo de investigación.

Los sistemas eléctricos interconectados se componen de múltiples sistemas interconectados mediante líneas de transmisión de enlace para satisfacer la demanda de energía y para hacer un sistema más robusto. Debido a que la operación de los SEP es cada vez mayor, han surgido problemas por oscilaciones de baja frecuencia no amortiguadas como una limitante en la operación y planeación diaria de los SEP. Es importante mantener la confiabilidad del sistema, pues ante una perturbación que comprometa la interconexión de los sistemas, es importante que no exista una desconexión de un área de la red eléctrica o, en casos extremos, un apagón completo de una gran parte del sistema.

Cabe mencionar que ningún SEP es perfecto, esto a raíz de la naturaleza de la red eléctrica, ya que está compuesta de varios tipos de generadores, sistemas de control de respuesta rápida y líneas de transmisión, las cuales, aunque crean un sistema más robusto, tienen límites de operación físicos; es por ello por lo que no existe un SEP que no presente problemas o tenga problemas de sincronismo en los instantes posteriores de una falla o a un cambio de carga. Lo anterior hace indispensable prestar atención a la estabilidad del sistema con énfasis en los enlaces entre áreas y llevar a cabo estudios que determinen si el SEP de interés tiende a tener este tipo de problemas, con la idea de encontrar las causas y, de esta manera, encontrar la mejor solución.

A lo largo de los años, se han reportado diferentes problemas de oscilaciones de baja frecuencia inestables o mal amortiguadas que limitan la operación de los sistemas de potencia y evitan la interconexión con otros sistemas de potencia. Debido a esto se han creado una gran cantidad de alarmas y sistemas de control para advertir a los operadores del SEP cuando se viole un límite de estabilidad.

Debido al existente problema de amortiguamiento de oscilaciones de baja frecuencia, es necesario tener un conocimiento más profundo de las técnicas de análisis para dichas

oscilaciones y desarrollar una rutina que permita realizar el análisis e identificación de oscilaciones electromecánicas de los SEP compatible con los instrumento de medición fasorial, de esta manera es posible generar una alarma hacia los operadores de la red nacional con la finalidad de mantener la confiabilidad, calidad y continuidad del servicio ante una perturbación que afecte la estabilidad del sistema.

## 1.4. Contenido de la Tesis.

La presente tesis consta de 8 capítulos que se describirán a continuación, cada uno contiene documentación importante para el correcto entendimiento del tema.

Capítulo 1. “ANTECEDENTES”: En este capítulo se presentan el estado del arte de los temas a tratar, el objetivo de esta tesis y se expone la justificación de la investigación.

Capítulo 2. “APLICACIONES DE PMU’S EN SISTEMAS DE POTENCIA”: En este capítulo se presenta la información breve de los medidores sincronizados de fase, se presenta la teoría básica de su funcionamiento y, por último, se da una breve información de las aplicaciones de dichos instrumentos en el sistema eléctrico de potencia.

Capítulo 3. “COMPORTAMIENTO OSCILATORIO EN SISTEMAS DE POTENCIA, FUENTES, CARACTERÍSTICAS Y ANÁLISIS”: En este capítulo se aborda la teoría del comportamiento de la red eléctrica, las oscilaciones presenten en los sistemas de potencia, se habla sobre la relación potencia-ángulo y se da una pequeña introducción a la estabilidad de los sistemas de potencia.

Capítulo 4. “REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADOS DE SISTEMAS DE POTENCIA PARA ESTUDIOS DE ESTABILIDAD DE PEQUEÑA SEÑAL”: En este capítulo se introduce el fenómeno de inestabilidad, se habla sobre el espacio de estados y la linealización, la representación de la máquina síncrona, así como sus ecuaciones, de los sistemas de excitación y el modelo ZIP de la carga. Por último, se presenta la manera en la que las ecuaciones se modelan para los estudios en pequeña señal.



Capítulo 5. “PROCEDIMIENTOS PARA ANÁLISIS MODAL AJUSTADOS A DATOS MEDIDOS”: En este capítulo se expone la teoría del análisis modal, la forma del modo, los eigenvalores y los factores de participación, para finalizar presentando el método de Prony que será de utilidad para el desarrollo de la tesis.

Capítulo 6. “USO DE LA HERRAMIENTA POWER SYSTEM SIMULATOR FOR ENGINEERING (PSS-E) PARA ANALIZAR INFORMACIÓN BASADA EN MEDICIONES FASORIALES EN PARTICULAR EL ANÁLISIS DE PRONY”: En este capítulo se habla sobre los simuladores de sistemas de potencia y el usado en la tesis, así como la descripción del sistema de dos áreas de Kundur para su estudio y los resultados de su simulación, el modelo de los excitadores y de los generadores.

Capítulo 7. “RESULTADOS DE LA APLICACIÓN PSS/E USANDO EL SISTEMA DE PRUEBA CLÁSICO DE DOS ÁREAS DE KUNDUR”: En este capítulo se presenta el sistema de dos áreas de Kundur, las fallas que se aplicaron con sus respectivas señales de potencia obtenidas de cada caso de estudio; se presenta el diagrama de flujo para el uso del algoritmo de Prony. Finalmente se muestran los resultados obtenidos con el algoritmo de Prony y las señales del caso de estudio y se hace una comparación con los modos obtenidos del programa PSS/E.

Capítulo 8. “CONCLUSIONES”: En este capítulo se muestran las conclusiones generales a las que se llegó con el trabajo realizado, también se puntualizan las aportaciones de este trabajo de tesis y se describen las recomendaciones para trabajos futuros acerca del tema.

## 2. Aplicaciones de PMU's en sistemas de potencia

---

### 2.1. Introducción.

El Sistema Eléctrico Nacional (SEN) de nuestro país es una red eléctrica que interconecta todo el territorio mexicano, la transmisión de energía eléctrica desde las plantas generadoras hasta los consumidores finales es uno de los procesos que involucra líneas de varios kilómetros de distancia y, debido a que la demanda de energía eléctrica varía dependiendo de la necesidad de los usuarios finales, se necesita tener siempre un monitoreo preciso de la red con equipos cada vez más confiables y una red inteligente mediante la cual se pueda acceder a la información proporcionada por los equipos de medición de manera rápida y segura.

Los instrumentos de medición son equipos muy importantes para monitorear la red eléctrica y posteriormente hacer un análisis correcto sobre futuras demandas de carga y/o posibles fallas en la red eléctrica; de esta manera se puede diseñar un sistema de potencia que pueda operar de manera eficiente ante cualquier contingencia y evitar la propagación de un disturbio.

Es bien sabido que los intercambios de carga repentinos en las líneas de transmisión causan un efecto de inestabilidad de los sistemas eléctricos de potencia, es por ello por lo que los centros de control de energía deben garantizar la calidad de la energía para mantener el menor número de interrupciones del sistema; por ello se instalan equipos que monitoreen la señal de energía eléctrica y sirvan de protección, análisis y control de la red eléctrica.

En la transmisión de energía de alta tensión, se requiere conocer los parámetros de las líneas de transmisión, con estos parámetros se pueden realizar estudios de cortocircuitos y flujos de potencia para poder dimensionar la capacidad de los equipos eléctricos primarios; hacer ajustes en los relevadores de protección y realizar mantenimientos preventivos en las líneas. La introducción de las Unidades de Medición Fasorial (Phasor Measurement Units, "PMU") permiten la medición de dichos parámetros en las líneas de transmisión en tiempo

real, estos dispositivos no sólo miden la amplitud de la señal, sino también la fase de una señal sinusoidal.

Los análisis de los sistemas eléctricos se basan en los flujos de potencia a través de las líneas de transmisión, los PMU's proveen mediciones sincronizadas en tiempo real de los sistemas de potencia permitiendo realizar estudios que ayudan a estimar el comportamiento dinámico del Sistema Eléctrico de Potencia, la medición de la fase se estima con una referencia global mediante el Sistema de Posicionamiento Global (Global Positioning System, "GPS") y manteniendo un tiempo de referencia en todos los instrumentos de medición colocados en la red [10].

La diferencia principal de los PMU's con respecto a otros aparatos de medición es la muestra de salida que se mide, las cuales tienen una estampa de tiempo dada por el GPS, con esta estampa de tiempo se tiene una imagen de la red en un mismo instante de tiempo y en tiempo real, lo que facilita su interpretación y ayuda en los análisis posteriores.

Como se ha notado, la tecnología relacionada a los PMU's se ha venido trabajando desde finales del siglo XX y fue regulada por primera vez a través de estándar IEEE 1344 en 1995; posteriormente los conceptos relacionados con los procesos de medición fueron ajustados, establecidos en un nuevo estándar IEEE C37.118, el cual se ha estado actualizando y es usado mundialmente como referencia para los datos medidos de las unidades de medición fasorial, incluso en México.

## 2.2. Conceptos básicos.

### 2.2.1. Fasores y sincrofasores.

Es muy común usar en corriente eléctrica la notación de fasor el cual es una representación gráfica de la señal senoidal de corriente alterna, con el fasor se puede representar la magnitud y el ángulo de la corriente alterna en forma de un número complejo hecho por su valor RMS y su ángulo de fase de la señal. Un fasor es una representación compleja estática de una onda sinusoidal expresada de forma rectangular  $a + bi$  o polar  $r \angle \phi$ . La importancia del uso de la notación fasorial se da al hecho de que un sistema lineal puede ser descrito y analizado independientemente para cada frecuencia.

La notación matemática de una señal de corriente alterna en fasores, es una señal cosenoidal con una frecuencia y una magnitud como sigue [11]:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) representa la función senoidal donde  $X_m$  es el valor pico de la señal,  $\omega = 2\pi f$  es la velocidad angular del sistema y  $\phi$  es el ángulo de fase en radianes.

De igual manera, la ecuación (2.1) puede ser escrita como una forma exponencial de la fórmula de Euler y la señal será la parte real del fasor a una frecuencia angular.

$$x(t) = \text{Re}\{X_m e^{j(\omega t + \phi)}\} = \text{Re}\{e^{j(\omega t)}\} X_m e^{j(\phi)} \quad (2.2)$$

Es muy común suprimir el término  $e^{j(\omega t)}$  de la expresión anterior entendiendo que la frecuencia es  $\omega$ . La ecuación sinusoidal (2.1) se representará como un número complejo  $X$  en forma polar conocido como la representación de un fasor:

$$x(t) \leftrightarrow X = \left(\frac{X_m}{\sqrt{2}}\right) e^{j\phi} = \left(\frac{X_m}{\sqrt{2}}\right) [\cos \phi + j \text{sen } \phi] \quad (2.3)$$

Gráficamente el fasor puede representarse como un vector que representa una señal sinusoidal de amplitud RMS con un ángulo igual al ángulo de fase de la señal como se ilustra en la Figura 2.1.

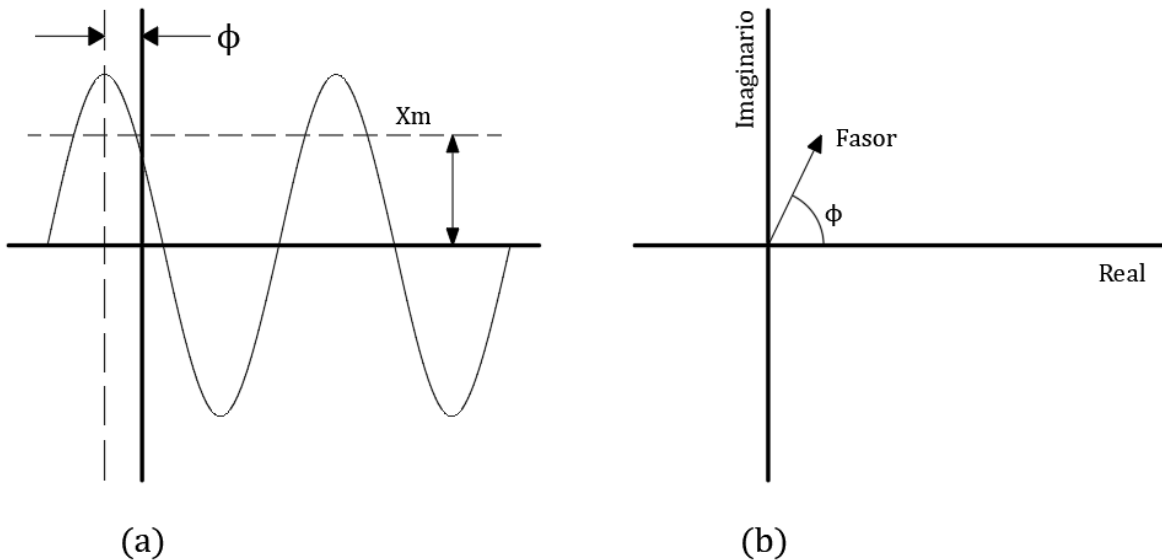


Figura 2.1 Representación una señal senoidal (a) y un fasor (b)

El concepto de sincrofasor está ligado a la idea que el tiempo que se usa para medir está referenciado a una estampa de tiempo que es igual en todos los puntos medidos, es por ello por lo que se puede determinar la relación entre las fases de distintas regiones de un sistema eléctrico. Dicha estampa de tiempo debe ser sincronizada y proporcionada por el Tiempo Coordinado Universal (Universal Time Coordinated, “UTC”) con una precisión

suficiente para cumplir los estándares requeridos por la IEEE en [11]. Un error de fase de 0.01 radianes (o 0.57 grados) en las mediciones sincronizadas, causan un error de vector total (Total Vector Error, "TVE") del 1%, el cual es el máximo permitido. Un error de fase de 0.01 corresponde a un error de tiempo de  $\pm 26 \mu\text{s}$  para un sistema de 60 Hz, y de  $\pm 31 \mu\text{s}$  para un sistema de 50 Hz.

### 2.2.2. Descripción básica del funcionamiento del PMU.

El PMU es una unidad de medición muy precisa, considerando la arquitectura básica del equipo, éste se compone de un módulo GPS, un módulo para el proceso de transformada rápida de Fourier, un módulo para el proceso de componentes simétricas y un módulo de comunicación. Las mediciones tomadas por el PMU se adquieren por medio de Transformadores de Corriente (TC's) y Transformadores de Potencial (TP's) instalados en el bus que tendrá el PMU y a cada medición se le asigna una estampa de tiempo de Tiempo Universal Coordinado (UTC) la cual es su peculiaridad más importante ya que de esta manera todas las mediciones son sincronizadas y se les da una etiqueta de tiempo proporcionada por el módulo GPS; las señales recibidas por los transformadores son procesadas por medio de la transformada rápida de Fourier para descomponer la señal y después obtener sus componentes simétricas. La Figura 2.2 muestra un diagrama de conexión del PMU en la red eléctrica [12].

Posteriormente, la señal se envía mediante un módulo de comunicación para ser utilizada en los análisis correspondientes. Los procesos internos del PMU son altamente complejos y debido a éstos mismos dotan a los PMU de una alta precisión y confiabilidad. Se puede obtener una descripción más detalladas de los procesos internos dentro de un PMU en el trabajo de Phadke y Thorp [10] y en el trabajo de Antonello Monti [13].

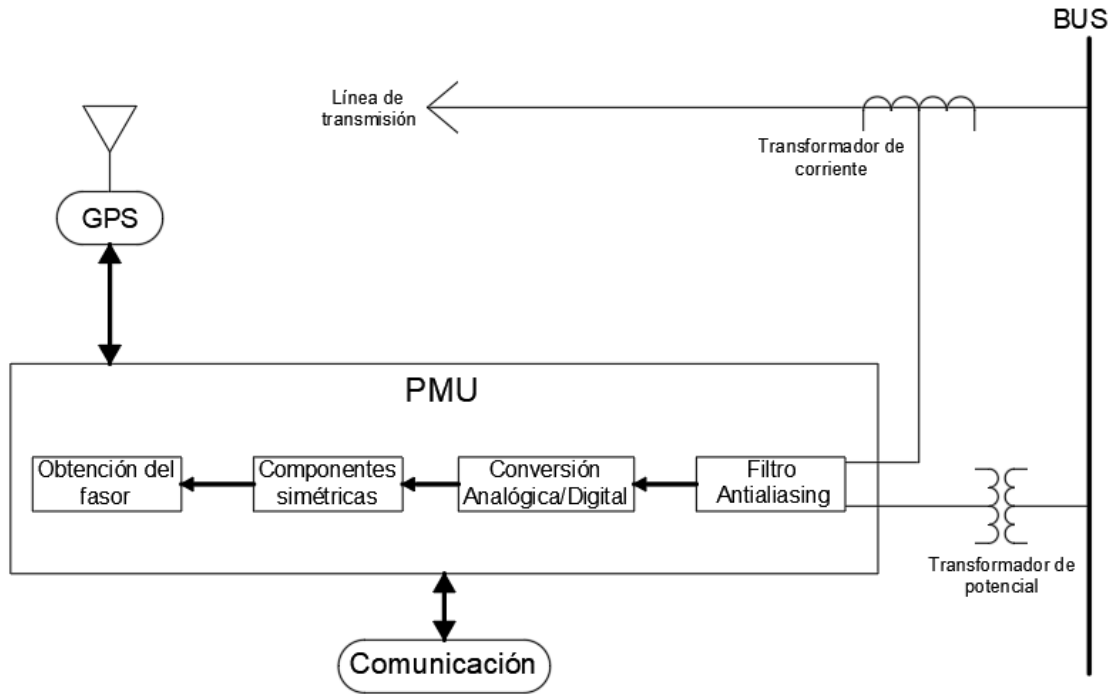


Figura 2.2 Esquema básico de conexión de un PMU

### 2.2.3. Series de Fourier.

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

Si  $x(t)$  es una función periódica de  $t$ , con un periodo igual a  $T$ . Entonces  $x(t + kT) = x(t)$  para todos los valores de los integradores de  $k$ . Una función periódica puede expresarse como una serie de Fourier de la siguiente forma [10]:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (2.4)$$

donde las constantes  $a_k$  y  $b_k$  son dadas por

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

Las series de Fourier igual se pueden expresar de forma exponencial:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \quad (2.7)$$

donde,

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{\frac{j2\pi kt}{T}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.8)$$

Sin olvidar que la sumatoria de la ecuación (2.7) tiene un intervalo que va desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , mientras que la sumatoria de la ecuación (2.4) va de 1 hasta  $+\infty$ . El cambio de los rangos de la sumatoria se logra observando que las funciones de seno y coseno son funciones impares de  $k$ , y por lo tanto expanden los límites de las sumas de  $-\infty$  a  $+\infty$  y removiendo el factor 2 de las integrales  $a_k$  y  $b_k$  lo que nos conduce a la forma exponencial de la serie de Fourier.

#### 2.2.4. Transformada Discreta de Fourier.

El primer proceso al que es sometida la señal registrada por el PMU es la Transformada discreta de Fourier (TDF). La TDF es un método para calcular los coeficientes transformada de Fourier de un número pequeño de muestras tomadas de una señal de entrada  $x(t)$ .

Usualmente lo que conocemos de una señal es una muestra, esto es, una señal podemos verla como un vector cuyas componentes son valores de la señal en determinados instantes. Los coeficientes de la serie de Fourier de una señal periódica pueden obtenerse de la TDF de sus datos muestreados dividiendo la TDF entre  $N$ , el número de muestras de la ventana de datos. Así, la serie de Fourier para una función  $x(t)$  se puede expresar por la ecuación:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(k\Delta T) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \right] e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \quad (2.9)$$

Como sólo hay  $N$  número de componentes de la TDF, la suma de  $k$  de la ecuación (2.9) es desde  $\{k = 0, \dots, N - 1\}$ .

De igual manera, usando la relación de los coeficientes de las series de Fourier con el TDF, para el  $k$ -ésimo armónico de una señal sinusoidal  $x(t)$  con una ventana de  $N$  datos medidos en intervalos fijos de tiempo las ecuaciones para la representación del armónico serán las siguientes [10]:

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (2.10)$$

$$X_k = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T) \left\{ \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\} \quad (2.11)$$

Usando la notación de  $x(n\Delta T) = x_n$  y  $\frac{2\pi}{N} = \theta$ , (donde  $\theta$  es el ángulo de muestreo medido en términos del periodo de la frecuencia fundamental del componente)

$$X_k = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n(n\Delta T) \{ \cos(kn\theta) - j \sin(kn\theta) \} \quad (2.12)$$

Si definimos el seno y el coseno por una suma como la siguiente,

$$X_{kc} = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos(kn\theta) \quad (2.13)$$

$$X_{ks} = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin(kn\theta) \quad (2.14)$$

El fasor  $X_k$  estará dado por:

$$X_k = X_{kc} - jX_{ks} \quad (2.15)$$

### 2.2.5. Estimación de fasores para datos de entrada de frecuencia no nominales.

Un fasor es un concepto en estado estable, pero en la realidad, un sistema de potencia nunca estará en estado estable. Las señales de voltajes y corrientes cambian constantemente a frecuencia fundamental debido a los cambios de carga y generación de la red y debido a las interacciones entre potencia real, inercias de grandes generadores y la operación de controles automáticos de velocidad que muchos generadores en la actualidad usan, entre otros fenómenos como las fallas o eventos que generan transitorios en la red.

La gran mayoría de los sistemas de potencia operan con unos estándares de frecuencia, los cuales sólo pueden diferir 0.5 Hz de su valor nominal, existen casos muy específicos y en circunstancias muy particulares donde la frecuencia puede tener una variación de  $\pm 10$  Hz [10]. Sin embargo, dichas circunstancias particulares son controladas para regresarlas a los valores nominales mediante acciones de control.



Si asumimos que la frecuencia de muestreo es un múltiplo de la frecuencia nominal del sistema de potencia, entonces se tiene que desarrollar ciertas fórmulas para la estimación del fasor cuando la frecuencia del sistema difiere de la nominal.

$$\begin{aligned}\hat{X}^{N+r} &= e^{-jr\theta} X^{N+r-1} + \frac{\sqrt{2}}{N} (x_{N+r} - x_r) e^{-jr\theta} \\ &= \hat{X}^{N+r-1} + \frac{\sqrt{2}}{N} (x_{N+r} - x_r) e^{-jr\theta}\end{aligned}\quad (2.16)$$

Ahora asumamos que la señal de entrada está dada a una frecuencia  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ , y que  $\omega_0$  es la frecuencia nominal del sistema de potencia, entonces la señal de entrada será la ecuación (2.1). De hecho, la definición de la representación de un fasor de una señal sinusoidal es independiente de la frecuencia de la señal. Sin embargo, el cálculo para estimar fasores si la señal de frecuencia difiere de la nominal introducirá un error en la estimación, dicho error dependerá de la diferencia de la frecuencia actual y a nominal.

Para calcular una estimación más acertada del fasor, es mejor usar la siguiente ecuación:

$$X'_r = PX e^{jr(\omega - \omega_0)\Delta t} + QX^* e^{-jr(\omega + \omega_0)\Delta t} \quad (2.17)$$

donde, P y Q son coeficientes de la ecuación (2.17)

$$P = \left\{ \frac{\text{sen} \left[ \frac{N(\omega - \omega_0)\Delta t}{2} \right]}{N \text{sen} \left[ \frac{(\omega - \omega_0)\Delta t}{2} \right]} \right\} e^{j(N-1)\frac{(\omega - \omega_0)\Delta t}{2}} \quad (2.18)$$

$$Q = \left\{ \frac{\text{sen} \left[ \frac{N(\omega + \omega_0)\Delta t}{2} \right]}{N \text{sen} \left[ \frac{(\omega + \omega_0)\Delta t}{2} \right]} \right\} e^{-j(N-1)\frac{(\omega + \omega_0)\Delta t}{2}} \quad (2.19)$$

### 2.2.6. Componentes simétricas.

Un proceso importante de los PMU es la descomposición de la señal medida en componentes simétricas para la obtención del fasor.

Las componentes simétricas de corriente y voltaje en un sistema trifásico están definidas por la fórmula:

$$\begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

donde  $\alpha = 1\angle 120^\circ$  y la cantidad de fase del fasor son usadas para el cálculo de las componentes simétricas. Por tanto, para obtener las componentes simétricas de los fasores estimados usando la ecuación (2.17), se sustituye  $X$  de la ecuación (2.20) obteniendo la siguiente fórmula:

$$\begin{bmatrix} X'_{r0} \\ X'_{r1} \\ X'_{r2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PX_a e^{jr(\omega-\omega_0)\Delta t} + QX_a^* e^{-jr(\omega+\omega_0)\Delta t} \\ PX_b e^{jr(\omega-\omega_0)\Delta t} + QX_b^* e^{-jr(\omega+\omega_0)\Delta t} \\ PX_c e^{jr(\omega-\omega_0)\Delta t} + QX_c^* e^{-jr(\omega+\omega_0)\Delta t} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La mayoría de las aplicaciones de las mediciones fasoriales exigen mediciones en condiciones reales del sistema, esto quiere decir que es muy común tener un cierto grado de desbalance en el sistema de potencia debido a desbalanceo de cargas y líneas de transmisión sin transposición.

El efecto de las señales de entrada desbalanceadas puede ser estudiado considerando la estimación de componentes de secuencia en presencia de desbalances, por lo tanto, si se tiene un conjunto de señales de entrada desbalanceadas es fácil probar mediante la ecuación (2.21) que las componentes simétricas estimadas se pueden obtener al resolver la ecuación:

$$\begin{bmatrix} X'_{r0} \\ X'_{r1} \\ X'_{r2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} P e^{jr(\omega-\omega_0)\Delta t} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + Q e^{-jr(\omega+\omega_0)\Delta t} \begin{bmatrix} X_0^* \\ X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

## 2.3. Aplicaciones de los PMU.

### 2.3.1. Medidores de frecuencia.

El nivel de seguridad de un sistema de potencia está ligado a variables de voltaje y frecuencia, una desconexión o inserción de carga, modifica estas variables y ocasionaría un disturbio en la red eléctrica. Por ello es de suma importancia mantener un control sobre la frecuencia del sistema y mantener en límites de operación normalizados de la red eléctrica, en este caso se tolera una variación de la frecuencia de la red eléctrica en estado operativo normal entre 59.70 y 60.30 Hz [14].

La frecuencia del sistema de igual manera está ligada a la velocidad del rotor de generación en las plantas generadoras, la velocidad de rotación de un generador está ligada a la carga que se conecta, así como a la frecuencia de los voltajes que genera. Uno de los primeros instrumentos usados para medir la frecuencia fueron los gobernadores de velocidad

tipo Watt de las turbinas de vapor, los cuales consisten en una regulación de la velocidad del rotor por medio de una válvula, la cual mantiene una regulación de entrada de vapor o de combustible y mantiene la velocidad del rotor en un rango límite dependiendo del valor nominal [15]. Eventualmente, estos sistemas fueron cambiando y se usaron controles más precisos, los cuales por medio de controladores electrónicos operaban la apertura de las válvulas y por ende la velocidad del rotor. Aunque estos sistemas mejoraron mucho, tenían la desventaja de controlar la frecuencia únicamente en las plantas generadoras y, por lo tanto, no se tiene una medición ni control de la frecuencia de la red eléctrica en general.

Uno de los primeros métodos usados para medir la frecuencia en un sistema de potencia fue hecho por instrumentos mecánicos, los cuales empleaban resonadores mecánicos ajustados a un rango de frecuencia cercano a la frecuencia de potencia nominal. Otros dispositivos utilizaron circuitos electrónicos sintonizados a diferentes frecuencias, los cuales son energizados a una tensión secundaria obtenida por un transformador de voltaje y de esta manera el circuito que está en resonancia provee la medición de frecuencia.

El siguiente avance en la medición de la frecuencia vino con la introducción de mediciones más precisas con técnicas mejor desarrolladas, las cuales consistían en medir el intervalo de tiempo entre los cruces por cero de la forma de onda del voltaje, de esta manera la frecuencia de voltaje puede determinarse de una manera más precisa. La exactitud de estos métodos depende de la precisión que se tiene del tiempo de medición, así como de cuál cruce por cero de la forma de onda es tomado, un inconveniente de este tipo de mediciones es que es afectado por el ruido de la señal de la onda.

Una unidad de medición fasorial puede usarse para medir la frecuencia de un sistema de potencia, ya que tiene la ventaja de eliminar la mayoría de los errores de los medidores de frecuencia porque cuenta con una estampa de tiempo, un filtro de armónicos y usa la componente positiva de voltaje para tener mediciones de frecuencia. Debido a todo lo anterior, el uso de los PMU como medidores fundamentales en los sistemas eléctricos de potencia se ha vuelto cada vez más atractivo para los centros de control de electricidad.

Para un sistema trifásico balanceado y considerando la secuencia negativa de la señal de entrada el fasor de frecuencia positiva estimado está dado por la ecuación:

$$X'_{r1} = P X_1 e^{jr(\omega - \omega_0)\Delta t} \quad (2.23)$$

El ángulo de la ecuación anterior se desplaza en cada muestra  $(\omega - \omega_0)\Delta t$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de la señal,  $\omega_0$  es la frecuencia nominal y  $\Delta t$  es el intervalo de muestreo.

Si creamos un vector  $[\phi_k]$  de  $N$  muestras del ángulo del fasor de secuencia positiva estimado que va desde  $k = 0$  hasta  $k = N - 1$  y que varía con la ventana de muestras, se puede determinar el ángulo de fase, el incremento de la frecuencia y su tasa de cambio en orden con las ecuaciones:

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (2.24)$$

$$\Delta f_0 = \frac{a_1}{2\pi} \quad (2.25)$$

$$f' = \frac{a_2}{\pi} \quad (2.26)$$

donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  se obtienen de resolver la ecuación

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \Delta t & \Delta t^2 \\ 1 & 2\Delta t & 2^2 \Delta t^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (N-1)\Delta t & (N-1)^2 \Delta t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

que puede expresarse de forma matricial como

$$[\Phi] = [B][A] \quad (2.28)$$

donde  $[B]$  es la matriz coeficiente. Esta ecuación puede solucionarse para  $[A]$  con mínimos cuadrados ponderados de la forma:

$$[A] = [B^T B]^{-1} B^T [\Phi] = [G][\Phi] \quad (2.29)$$

donde a su vez  $[G]$  se define como:

$$[G] = [B^T B]^{-1} B^T \quad (2.30)$$

Como vimos anteriormente, si la medición se realiza a un sistema desbalanceado la componente de secuencia positiva estimada contendrá el efecto de  $Q$  y de la componente de secuencia negativa causando una oscilación en la estimación de la componente de secuencia positiva representada por:

$$X'_{r1} = P X_1 e^{jr(\omega - \omega_0)\Delta t} + P X_2^* e^{-jr(\omega + \omega_0)\Delta t} \quad (2.31)$$

Dicha oscilación debe filtrarse antes de aplicar el método presentado arriba para estimar la frecuencia.

### 2.3.2. Estimador de Estados Estático.

La estimación en línea significa la estimación del estado presente utilizando todas las medidas que están disponibles y la predicción significa estimar estados futuros. Los estimadores de estados ejecutan un análisis estadístico empleando un conjunto de datos redundantes e imperfectos que son medidos del sistema de potencia para determinar el estado del sistema.

Antes de la llegada de los estimadores de estado, el operador de los sistemas de potencia tenía la responsabilidad de muchas funciones del centro de control en tiempo real, lo que incluía como, por ejemplo, la programación de generación e intercambio de carga, programación de correcciones y la restauración de emergencia del sistema. Estas acciones se tomaban siguiendo guías que proporcionaban analistas del sistema eléctrico después de realizar varias corridas de flujos de carga.

El control, la operación y los análisis del sistema se hacía tomando como mediciones la posición de los interruptores de las subestaciones, la generación de potencia, la frecuencia del sistema y una base de datos del sistema. Entonces se tomaba en cuenta asumiendo que el sistema de potencia era estático y no cambiaba durante un tiempo.

Dado que al tomar en cuenta que el sistema de potencia era estático, se obtenía un error en la estimación de estado porque esta era diferente al estado real. Por ello se necesitó conseguir una información más actual del sistema eléctrico, los esfuerzos se centraron en conseguir un escaneo del sistema para comprobar la seguridad del sistema continuamente, es decir, analizar las condiciones de operación del sistema eléctrico para detectar situaciones inusuales o alarmantes que puedan afectar un funcionamiento óptimo del sistema eléctrico en poco tiempo. Esto llevó a la creación de un sistema de supervisión de control y adquisición de datos (Supervisory Control And Data Acquisition, "SCADA"). Gracias al SCADA, se pudieron tomar muestras del sistema de manera rápida, pero las mediciones obtenidas tenían un ligero cambio si se toma en cuenta el inicio de la medición, dependiendo del tiempo que se toma en tomar las mediciones, el sistema puede haber cambiado por cambios de carga y generación y el sistema puede ya no ser el mismo al sistema real, tal cambio no se tomaba en cuenta y se asumía que el sistema no cambiaba durante las mediciones, lo que suponía que el sistema se mantenía estático.

Fred Schweppe definió la estimación de estado como “Un algoritmo de procesamiento de datos que convierte las medidas redundantes y otra información disponible en un estimado del estado del sistema eléctrico” [16].

El uso de los medidores de fasores sincronizados tiene un valor agregado, ya que obtienen la magnitud y el ángulo de fase de los voltajes, de igual manera obtienen mediciones de los estados de sistema y las mediciones de flujos de potencia real y reactiva y las inyecciones de carga. De esta manera, obtener una estimación de estado se puede realizar de una manera más rápida si se toman en cuenta los ángulos de las mediciones de voltaje como una variable para el cálculo matemático.

El estado del sistema es el conjunto de voltajes de los buses del sistema y están representados como número complejos. Convencionalmente, algoritmos de estimaciones de estado estático usan la magnitud y el ángulo de dichos voltajes como estados y mediciones de flujos de potencia real y reactiva. En coordenadas polares los ángulos  $\theta_p$  y las magnitudes  $V_p$  son estados donde,

$$E_p = V_p e^{j\theta_p} \quad (2.32)$$

Los flujos de potencia complejos e inyecciones de carga no son lineales. Por ejemplo, el flujo potencia activa del bus  $p$  al bus  $q$  a través de una impedancia serie  $Z_{pq}$  con una admitancia shunt  $y_p$  en el bus  $p$  es:

$$P_{pq} = V_p^2 [ |Y_{pq}| \cos(\beta_{pq}) + |y_p| \cos \alpha_p - V_p V_q \cos(\theta_p - \theta_q - \beta_{pq}) ] \quad (2.33)$$

donde  $\beta_{pq}$  y  $\alpha_p$  son respectivamente los ángulos de:

$$\frac{1}{Z_{pq}} = |Y_{pq}| e^{-j\beta_{pq}} \quad (2.34)$$

$$y_p = |y_p| e^{j\alpha_p} \quad (2.35)$$

En general:

$$z = h(V, \theta) + \varepsilon \quad (2.36)$$

Asumiendo que los errores medidos son, en promedio, cero e independientes, la estimación se calcula minimizando

$$J(V, \theta) = [z - h(V, \theta)]^T W^{-1} [z - h(V, \theta)] = \sum_{i=1}^m \frac{(z_i - h_i(V, \theta))^2}{\sigma_i^2} \quad (2.37)$$

### 2.3.3. Protecciones.

Hoy en día, controlar los sistemas de potencia se ha vuelto un reto cada vez más grande, puesto que están compuestos de varios instrumentos de medición, de conexión y desconexión, de control y de monitoreo; dichos componentes crean una red eléctrica más robusta, pero de igual manera crean una red compleja la cual se vuelve un reto al momento de controlar los cambios de carga. Como el sistema ha evolucionado para volverse más grande, también las falsas alarmas y los falsos disparos de la red que agravan los problemas en la red se han incrementado.

Los medidores de fasores sincronizados presentan múltiples soluciones a los problemas de protecciones, en muchas situaciones una medición de confianza de un voltaje y corriente lejano a la misma referencia que dichas variables locales, logran una mejora sustancial en calidad de protecciones.

El Monitoreo, Protección y Control de Área Amplia (Wide-Area Monitoring, Protection, and Control, “WAMPAC”) es una técnica moderna que involucra el uso de sistemas de información y de comunicación de una información local a una localización de información remota para contrarrestar la propagación de perturbaciones que puedan afectar la calidad del sistema eléctrico [17].

Las protecciones diferenciales es uno de los métodos más comunes para la protección de un bus, existen diferentes métodos usando conceptos diferentes para proteger los buses. El principal problema de la protección diferencial del bus ha sido la saturación desigual de los transformadores de corriente utilizados para las mediciones actuales alrededor del bus, esto se debe a las grandes diferencias en la magnitud de la corriente de falla medida en los diferentes puntos de conexión del bus y al magnetismo residual en los transformadores de corriente [18].

Una comunicación más precisa de las protecciones diferenciales llegó con los medidores sincronizados de fase. Existen varias maneras de corrientes diferenciales para una línea de transmisión. En la primera, las corrientes se combinan usando un canal de comunicación y se hace una comparación de corrientes, en la segunda forma las corrientes se muestrean y las muestras se comunican por medio de un canal de banda ancha, y en la tercera forma los fasores se calculan a partir de las muestras y los valores de fase que se comunicaron.

### 2.3.4. Control con retroalimentación de PMU's.

Durante años, antes de la introducción de los sistemas de medición fasoriales, los sistemas de potencia usaban mediciones locales y modelos matemáticos de un sistema más grande; dichos controles no eran completamente óptimos y podían producir problemas de respuesta inaceptable debido a que el modelo que se usaba para el control era inadecuado. La llegada de los medidores fasoriales permitió la creación de sistemas de control que considera la medición de valores de cantidades remotas, los datos de los fasores tendrán una estampa de tiempo, de manera que los sistemas de control se basarán en un estado real del sistema.

Las mediciones fasoriales proporcionadas por los PMU son muy rápidas y ofrecen una alternativa atractiva para resolver los problemas de control de los grandes sistemas de potencia. Las mediciones lejanas pueden ser leídas en los centros de control rápidamente y se puede mantener un control retroalimentado en el sistema.

La Figura 2.3 muestra un control de área amplia, en estos, cada uno de los PMU instalados en el sistema obtiene un sincrofasor y el Concentrador de Datos Fasoriales (Phasor Data Concentrator, "PDC") reúne los datos por medio de una arquitectura centralizada que puede ser visualizada por medio de una interfaz gráfica. Al tener registro de los datos de tiempo preciso de varias subestaciones, se pueden realizar aplicaciones de monitoreo y control con toda la información del estado de la red.

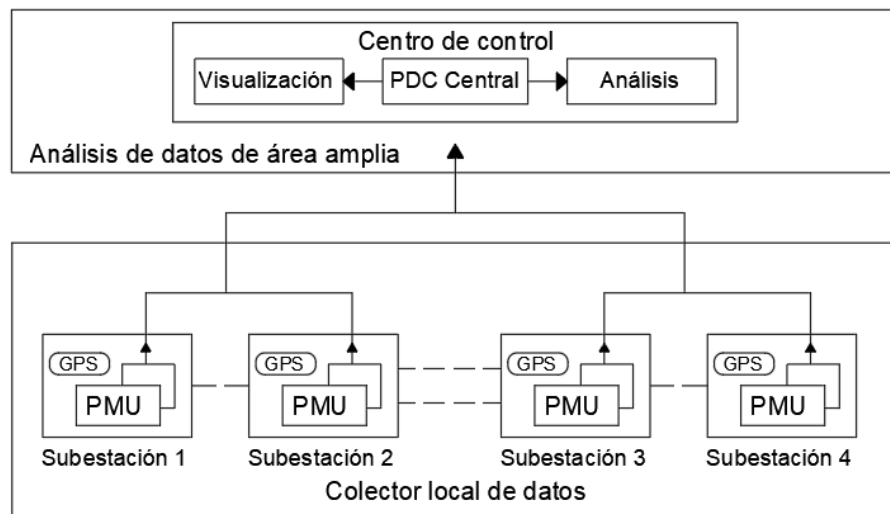


Figura 2.3 Diagrama de estructura de un control de área amplia

De igual manera, se implementaron sistema de control a base de PMU con un sistema de posicionamiento óptimo para sistemas de corriente directa de alto voltaje (High Voltage



Direct Current, “HVDC”) para obtener un monitoreo de las líneas y tomar acciones preventivas y correctivas. Se pueden instalar medidores de fase a ambos lados de los enlaces de los convertidores de corriente directa a corriente alterna para la medición de los fasores de voltaje y corriente [19].

Para el control de los dispositivos que se encuentran en los Sistemas Flexibles de Transmisión de Corriente Alterna (Flexible Alternating Current Transmission System “FACTS”) se requiere un monitoreo del sistema, por lo tanto es necesario contar con unidades de medición fasorial, estimadores de estado y el sistema SCADA, para monitorear y estimar el voltaje, la corriente y los flujos de carga en los buses del sistema [20]. La utilización de los PMU reduce el tiempo requerido para encontrar anomalías del sistema y poder responder de una manera rápida a una contingencia del sistema.

Dado las mediciones de fasores de un sistema, es posible conocer la diferencia entre un estado de un sistema y el sistema real que se está midiendo y controlando, los sistemas de control usando mediciones reales de frecuencia y modos de oscilación ayudan a idear una estrategia para amortiguar los modos. Con los medidores de fase se pueden crear sistemas de monitoreo, protección y control de área amplia y ofrece la posibilidad de operar más cerca de los límites de estabilidad, además de esta manera, se pueden identificar los márgenes de estabilidad del sistema de potencia para mantener una mayor confianza y detectar las oscilaciones entre áreas en tiempo real para su posterior estudio.

## 3. Comportamiento oscilatorio en sistemas de potencia, fuentes, características y análisis

---

### 3.1. Introducción.

Las oscilaciones electromecánicas en un Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) son fenómenos naturales y muy comunes, es por ello que los Sistemas de Potencia se diseñan de tal manera que dichos fenómenos no afecten y no sean una amenaza para la operación continua de los mismos.

La operación normal de los SEP involucra pequeñas variaciones de velocidad que son ocasionadas generalmente por cambios de carga. Éstos pequeños cambios de carga generan pequeñas oscilaciones que decrecen con el tiempo, aunque en algunos casos, las oscilaciones pueden persistir e incluso incrementar de magnitud lo que ocasiona el disparo de protecciones y, por lo tanto, de líneas de transmisión que pueden dejar al sistema más vulnerable.

En este capítulo se presenta una descripción de los sistemas de potencia para poder comprender el fenómeno de estabilidad del sistema y la relación entre las oscilaciones del sistema de potencia y sus análisis para un operador de la red eléctrica.

### 3.2. La naturaleza de las oscilaciones en los sistemas de potencia.

Las oscilaciones que se observan en los sistemas de potencia se han detectado desde que se interconectaron varios generadores síncronos para poder proporcionar más capacidad de energía y confiabilidad a la red eléctrica. Las oscilaciones son comunes en los sistemas de potencia y son aceptables desde un punto de vista operativo, si éstas tienden a decaer, pero un disturbio, un incremento de carga o cualquier imprevisto puede ocasionar que las oscilaciones tiendan a aumentar y tengan el potencial de causar que el sistema colapse.

Estas oscilaciones pueden ser causadas por tener varios generadores en una planta o por la interacción de varios generadores y tener efectos extensos en el sistema. El fenómeno de oscilación de los sistemas de potencia se hizo más evidente cuando las conexiones se hacían por medio de líneas de transmisión cada vez más largas [2]. Los devanados de amortiguamiento de los rotores de los generadores funcionan para prevenir que las oscilaciones se incrementen, estos actúan como devanados de jaulas de ardilla de un motor de inducción y producen un torque proporcional a la desviación de la velocidad de rotor con respecto a la velocidad síncrona. De esta manera ellos absorben la energía asociada con las oscilaciones del sistema y producen una disminución de las oscilaciones.

Cada vez la confiabilidad del sistema de potencia se hizo más importante, por lo que se añadieron requerimientos para que el sistema sea capaz de recuperarse después de la liberación de una falla, para ello se diseñaron e implementaron controladores automáticos de voltaje que actúan de manera rápida para evitar que los generadores pierdan el sincronismo después de la falla. Sin embargo, los sistemas de excitación tienden a reducir el amortiguamiento de las oscilaciones del sistema de potencia.

En la década de 1950 y 1960, las compañías de energía eléctrica encontraron que se podía mejorar la confiabilidad y la economía del sistema si se interconectaban los sistemas eléctricos usualmente por medio de grandes sistemas de transmisión; aunque en algunos casos cuando se interconectaban los sistemas, las oscilaciones crecientes de baja frecuencia impedían que se mantuviera la conexión entre los sistemas [21].

Originalmente las oscilaciones que tenían mayor afectación al sistema eran las que se encontraban entre generadores acoplados eléctricamente entre sistemas, debido a esto se diseñaron controles especializados de estabilización de sistemas de potencia (Power System Stabilizers, PSS) para amortiguar dichas oscilaciones.

Sin embargo, cabe recordar que las oscilaciones en un sistema de potencia son una característica natural del sistema de potencia existirán siempre cambios normales de carga en la red eléctrica. Un incremento en el flujo de carga en una línea de conexión puede hacer la diferencia entre oscilaciones amortiguadas descendentes, las cuales son aceptables, y oscilaciones crecientes, las cuales tienen el potencial de ocasionar que el sistema colapse. Un ejemplo de dicho caso fue el colapso del sistema interconectado del oeste de Estados Unidos y Canadá en Agosto de 1996, documentado en [22], en la cual la amplitud de las oscilaciones

eventualmente causaron que el sistema de potencia se dividiera en varias regiones desconectadas, causando pérdida de potencia a un gran número de clientes. Dichas oscilaciones, son llamadas oscilaciones entre-áreas y utilizar diversos métodos para detectarlas y amortiguarlas es el objetivo de los análisis de pequeña señal.

### 3.2.1. Características de un corto circuito trifásico en las terminales de una Máquina Síncrona.

Cuando se presenta un cortocircuito en las terminales de una máquina síncrona, las corrientes de fase que resultan en la máquina, presentan componentes de cd que causan una desviación o asimetría cuando se grafican como función del tiempo [23].

En general, la corriente de falla en cada fase tiene dos componentes distintos, una componente de frecuencia fundamental, la cual decae al inicio rápidamente (en pocos ciclos) y después relativamente despacio (en varios segundos) hasta llegar a un valor en estado estable; y una componente unidireccional (o de CD desplazada), la cual decae exponencialmente en varios ciclos.

La amplitud de la componente de CA en una máquina síncrona cuando ocurre un corto circuito no es constante debido a que el voltaje interno, el cual es una función de los enlaces de flujo del rotor, no es constante. Por lo tanto, la rápida disminución inicial de la componente de CA de la corriente de corto circuito se debe a la rápida caída de los enlaces de flujo de los circuitos subtransitorios, y la parte que disminuye lentamente de la componente de CA se debe a la caída relativamente lenta de los enlaces de flujo del circuito transitorio.

En varios casos de problemas de sistemas de potencia, el problema puede simplificarse si los efectos de CD en la corriente de fase no se toman en cuenta o se tratan por separado. Esto hace que sea más fácil distinguir entre los factores importantes y no importantes que influyen en el desempeño dinámico de los sistemas de potencia.

Los efectos de la corriente de CD desplazada en las corrientes de fase del estator pueden ser eliminadas si no tomamos en cuenta los términos de voltaje del transformador ( $p\psi_d, p\psi_q$ ) en las ecuaciones de voltaje del estator:

$$e_d = p\psi_d - \omega_r\psi_q - R_a i_d \quad (3.1)$$

$$e_q = p\psi_q - \omega_r\psi_d - R_a i_q \quad (3.2)$$

La omisión de los términos  $p\psi_a, p\psi_q$  eliminará el desplazamiento de CD y sus efectos en el desempeño dinámico de la máquina. Si no tomamos en cuenta los transitorios del estator, la corriente de corto circuito resultante de la armadura se muestra en Figura 3.1.

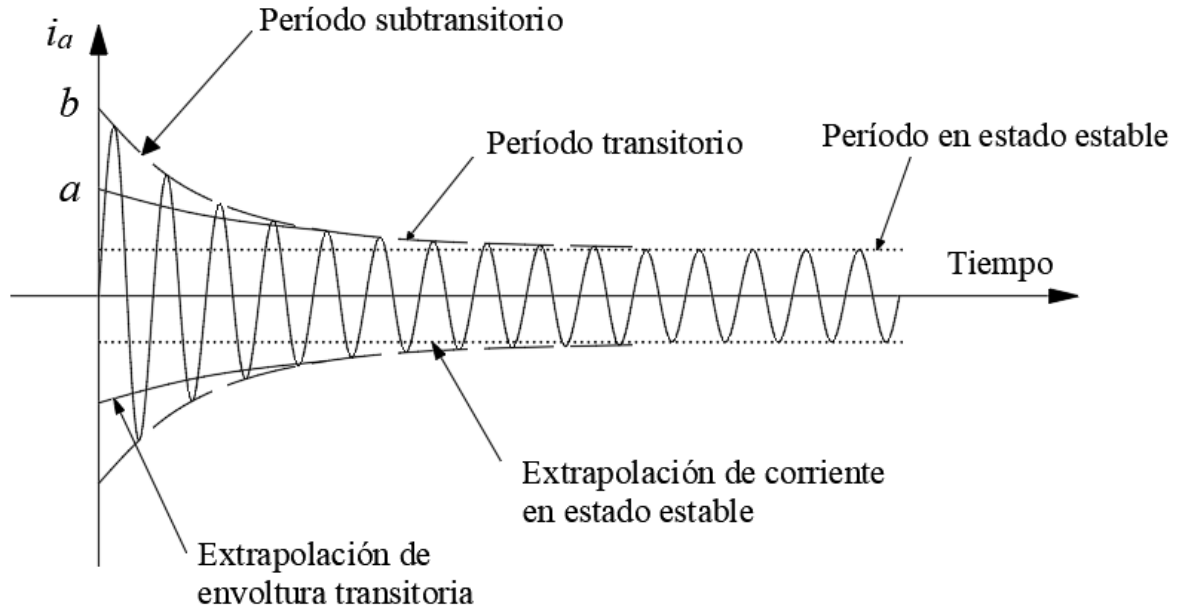


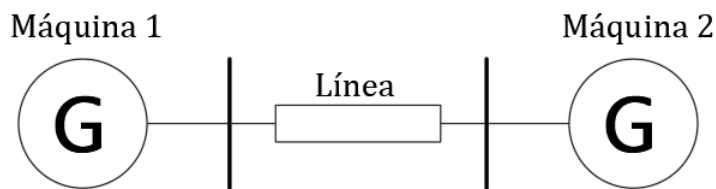
Figura 3.1 Componente de frecuencia fundamental de la corriente de armadura.

Vemos que la corriente resultante consiste solo de la componente de frecuencia fundamental. La forma de onda de la corriente puede dividirse en tres periodos de tiempo distintos: el *periodo subtransitorio*, durando solo los primeros ciclos, durante el cual la amplitud desciende rápidamente; el *periodo transitorio*, que abarca un tiempo mayor, durante el cual la amplitud decae considerablemente más despacio; y finalmente el *periodo de estado estable*, en el cual, la amplitud de la corriente se mantiene constante.

### 3.3. Relación potencia-ángulo.

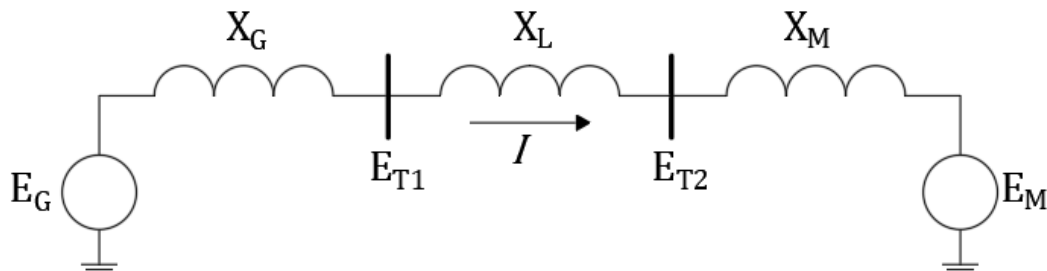
Debido a su naturaleza dinámica, los SEP sufren oscilaciones de carga, magnitudes, ángulos, frecuencia. La estabilidad de ángulo de rotor es la habilidad de las máquinas síncronas interconectadas de mantener en sincronismo. Una característica importante que tiene una relación muy importante con la estabilidad de los sistemas de potencia es la relación entre el intercambio de potencia y la posición angular de los rotores de las máquinas síncronas, la cual es altamente no lineal [1].

Usemos la Figura 3.2 para ilustrar un sistema simple. Este sistema consiste en dos máquinas síncronas conectadas por una línea de transmisión, la cual tiene una inductancia reactiva  $X_L$  pero con una resistencia y reactancia despreciable. La máquina 1 representa un generador el cual alimenta a un motor síncrono representado por la máquina 2. La potencia que se transfiere de un generador al motor es una función la separación angular ( $\delta$ ) entre el rotor de las dos máquinas. Esta separación angular ocurre debido a tres componentes: el ángulo interior del generador ( $\delta_G$ ); la diferencia angular entre los voltajes de terminal del generador y motor; y el ángulo interno del motor.



*Figura 3.2 Diagrama Unifilar*

La Figura 3.3 muestra un modelo idealizado del sistema representando cada máquina como un voltaje interno detrás de una reactancia, este modelo puede usarse para determinar la relación Potencia-Ángulo. El valor de la reactancia varía dependiendo del punto de estudio, para un análisis en estado estable se puede igualar la reactancia síncrona con el voltaje interno a el voltaje de excitación.



*Figura 3.3 Modelo Lineal*

La Figura 3.4 muestra un diagrama fasorial en el cual se logra identificar la relación de voltajes entre el generador y la máquina síncrona. La potencia que se transfiere del generador al motor se da por la siguiente ecuación:

$$P = \frac{E_g E_M}{X_T} \text{sen } \delta \quad (3.3)$$

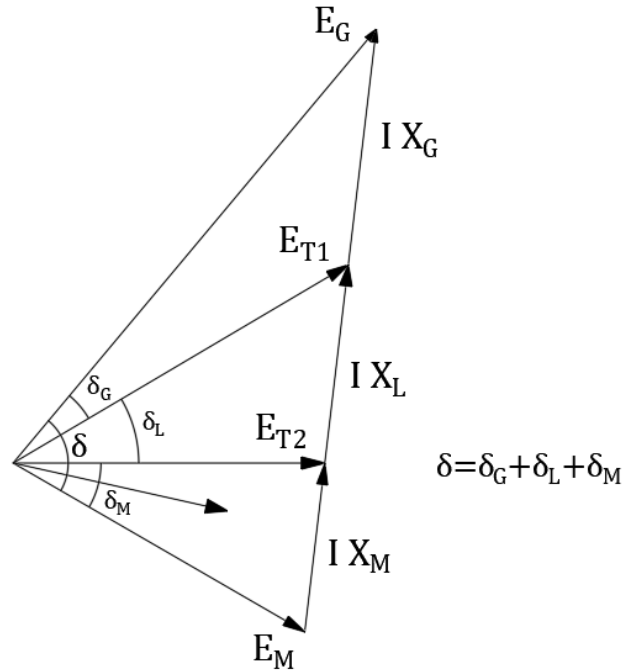


Figura 3.4 Diagrama Fasorial

La relación potencia-ángulo se traza en la Figura 3.5. Considerando algunos modelos idealizados para representar las máquinas síncronas, se muestra que la potencia varía dependiendo del seno de un ángulo, esto nos demuestra que se tiene una relación altamente no lineal. Cuando el ángulo es cero, no se transfiere potencia alguna, pero mientras el ángulo aumenta, la potencia transferida aumenta hasta un punto máximo. Después de cierto ángulo, nominalmente  $90^\circ$ , si se tiene un aumento adicional en el ángulo se tiene una disminución de potencia transferida.

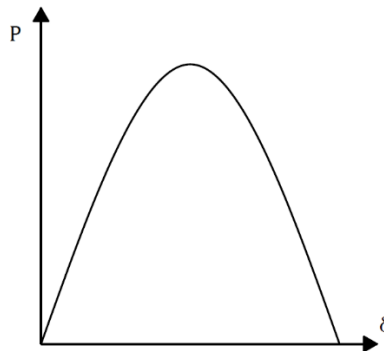


Figura 3.5 Curva Potencia Ángulo

Existirá, entonces, una potencia máxima en estado estable que pueda ser transferida entre máquinas, la magnitud de máxima potencia será directamente proporcional al voltaje

interno de la máquina e inversamente proporcional a la reactancia entre los voltajes, la cual incluye la reactancia de la línea de transmisión conectada a las máquinas y la reactancia de las máquinas.

### 3.4. Dinámica del rotor y la ecuación de oscilación.

Unas de las ecuaciones de vital importancia para el análisis de estabilidad en sistemas de potencia son las ecuaciones de inercia rotacional que describen el efecto de desbalance entre el torque electromagnético y el torque mecánico de las máquinas.

La ecuación que gobierna el movimiento del rotor de una máquina síncrona se basa en un principio dinámico, el cual establece que el par de aceleración es el producto del momento de inercia del rotor por su aceleración angular.

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_a = T_m - T_e \quad (3.4)$$

donde,

- $J$  momento total de inercia del generador y de la turbina,  $kg \cdot m^2$
- $\omega_m$  desplazamiento angular del rotor con respecto al eje estacionario,  $rad/s$
- $t$  tiempo,  $s$
- $T_a$  par de aceleración total,  $N \cdot m$
- $T_m$  par mecánico,  $N \cdot m$
- $T_e$  par electromagnético,  $N \cdot m$

La ecuación (3.4) puede ser normalizada en términos en por unidad de *inercia constante*  $H$ , definido como la energía cinética en *watts/s* a la velocidad nominal dividida por los VA de la base. Usando  $\omega_{0m}$  para denotar la velocidad angular nominal en radianes mecánicos por segundo, la inercia constante es,

$$H = \frac{1}{2} \frac{J \omega_{0m}^2}{VA_{base}} \quad (3.5)$$

Podemos despejar el momento de inercia en términos de  $H$  y sustituirlo en la ecuación (3.4), lo que nos daría.

$$\frac{2H}{\omega_{0m}^2} VA_{base} \frac{d\omega_m}{dt} = T_m - T_e \quad (3.6)$$

Reordenando,



$$2H \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_m}{\omega_{0m}} \right) = \frac{T_m - T_e}{VA_{base}/\omega_{0m}} \quad (3.7)$$

Si consideramos que,

$$\bar{\omega}_r = \frac{\omega_m}{\omega_{0m}} = \frac{\omega_r/p_f}{\omega_0/p_f} = \frac{\omega_r}{\omega_0}$$

donde  $\omega_r$  es la velocidad angular del rotor en  $rad/s$  eléctricos,  $\omega_0$  es el valor nominal y  $p_f$  es el número de polos del campo.

Y dado que  $T_{base} = VA_{base}/\omega_{0m}$ , la ecuación de movimiento en por unidad quedara de la siguiente forma:

$$2H \frac{d\bar{\omega}_r}{dt} = \bar{T}_m - \bar{T}_e \quad (3.8)$$

Si  $\delta$  es la posición angular del rotor en radiales eléctricos con respecto a la referencia de rotación síncrona y  $\delta_0$  es el valor cuando  $t = 0$ ,

$$\delta = \omega_r t - \omega_0 t + \delta_0 \quad (3.9)$$

Derivando la ecuación (3.9) respecto al tiempo, obtendremos,

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_r - \omega_0 = \Delta\omega_r \quad (3.10)$$

Haciendo una segunda derivada,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} &= \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{d(\Delta\omega_r)}{dt} \\ &= \omega_0 \frac{d\bar{\omega}_r}{dt} = \omega_0 \frac{d(\Delta\bar{\omega}_r)}{dt} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.8) la relación calculada anteriormente,

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \bar{T}_m - \bar{T}_e \quad (3.12)$$

Es deseable incluir la componente de amortiguamiento de torque, no representado en el cálculo de  $T_e$  por separado. Esto se logra añadiendo un término de proporcionalidad de la velocidad de desviación ( $K_D$ ) en la ecuación (3.12) como sigue:

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \bar{T}_m - \bar{T}_e - K_D \Delta\bar{\omega}_r \quad (3.13)$$

Donde, de la ecuación (3.10)

$$\Delta\bar{\omega}_r = \frac{\Delta\omega_r}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\delta}{dt}$$

A la ecuación (3.13) se conoce como la ecuación de oscilación de una máquina síncrona y representa la oscilación del ángulo  $\delta$  de un rotor durante un disturbio, es una ecuación fundamental que gobierna la dinámica rotacional de la máquina síncrona en los estudios de estabilidad.

Si existe un disturbio, la oscilación de  $\delta$  se sobrepone a la velocidad síncrona de  $\omega_0$  pero la velocidad de desviación ( $\Delta\omega_0 = d\delta/dt$ ) es más pequeña que  $\omega_0$ . Por lo tanto, la velocidad de un generador es prácticamente igual a  $\omega_0$ , y, en por unidad, el torque del entrehierro puede ser considerado igual la potencia del entrehierro.

La ecuación de oscilación puede, entonces, ser escrita de la siguiente manera,

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_{max} \text{sen } \delta \quad (3.14)$$

donde,

$P_m$  potencia mecánica de entrada, en pu

$P_{max}$  máxima potencia eléctrica de salida, en pu

### 3.5. Estabilidad de un sistema eléctrico de potencia en pequeña señal.

La inestabilidad de un sistema de potencia es esencialmente un único problema que puede tomar diferentes formas y puede ser influenciada por un amplio rango de factores. Analizar el problema de la pérdida de estabilidad, identificar los factores esenciales que contribuyen a ésta y conformar métodos para el mejoramiento de la operación estable se facilita ampliamente si se clasifica apropiadamente el fenómeno a estudiar. Algunas de las consideraciones en que se basa dicha clasificación se listan a continuación:

- Naturaleza física de la inestabilidad resultante.
- Tamaño de la perturbación considerada.
- Los dispositivos, procesos y tiempos que deben ser tomados en consideración en orden de determinar la inestabilidad.

Para un estudio de estabilidad, las señales de flujos de potencia, desviaciones de velocidad o desviaciones del ángulo del rotor, pueden expresarse como una sumatoria de señales exponenciales de la forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta) = \sum_{i=1}^n B_n e^{(\sigma \pm j\omega)t} = \sum_{i=1}^n B_n e^{\lambda_n t} \quad (3.15)$$

donde  $B_n$  es una constante de amplitud compleja y  $\lambda_n = \sigma \pm j\omega$  es un número complejo conocido como modo de oscilación. En la expresión anterior, cada elemento exponencial  $e^{\lambda_n t}$  de la sumatoria, describe a una señal sinusoidal de frecuencia  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  que se atenúa (o incrementa) con la función  $e^{\sigma t}$  y la relación de amortiguamiento se calcula con:

$$\zeta = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad (3.16)$$

La relación de amortiguamiento  $\zeta$  determina la tasa de decaimiento de la amplitud de la oscilación. Existe una constante de decaimiento de amplitud, la cual es  $1/|\sigma|$ , en otras palabras, la amplitud decae a  $1/e$  o un 37% de la amplitud inicial en  $1/|\sigma|$  segundos o  $1/(2\pi\zeta)$  ciclos desde que empieza la oscilación.

Las oscilaciones poco amortiguadas son en gran medida el problema de la estabilidad de pequeña señal en los sistemas actuales y su análisis se basa en el hecho de que el sistema eléctrico puede modelarse con un conjunto de ecuaciones algebraicas-diferenciales en el espacio de estados la forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.17)$$

$$y = g(x, u) \quad (3.18)$$

donde la ecuación (3.17) conocida como ecuación de estado y es conformada por las ecuaciones diferenciales en forma de vectores que describen la dinámica del sistema en función de las variables de estado ( $x$ ), las variables de entrada o perturbaciones ( $u$ ). La ecuación (3.18) es conocida como ecuación de salida, las cuales de igual manera describen el sistema en función de variables de salidas ( $y$ ) y un vector de funciones no lineales que relacionan el estado y las variables de entrada con las variables de salida ( $g$ ).

Para realizar el análisis en pequeña señal, las ecuaciones anteriores deben linealizarse considerando que el sistema fue perturbado tiempo atrás y ahora se encuentra en un punto de equilibrio en el cual se analizará la pequeña señal. Esto se hace con la ecuación de movimiento libre (con entradas igual a cero):

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x \quad (3.19)$$

donde  $A$  es conocida como matriz de estado del sistema.

La solución de la ecuación (3.19) está dada por:

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i c_i e^{\lambda_i t} \quad (3.20)$$

donde  $\phi_i$  es el  $i$ -ésimo eigenvector derecho de la matriz  $A$ ,  $\lambda_i$  es el  $i$ -ésimo eigenvalor de la matriz  $A$  y la constante  $c_i$  se describe como:

$$c_i = \psi_i \Delta x(0) \quad (3.21)$$

donde  $\psi_i$  es el  $i$ -ésimo eigenvector izquierdo de la matriz  $A$ . Es fácil observar que la solución dada por la ecuación (3.21) coincide con el comportamiento de las señales expresadas con la ecuación (3.15), por tanto, los eigenvalores de la matriz  $A$  son los modos de oscilación que se observarán en las señales del sistema.

En un sistema de potencia a gran escala, el fenómeno de estabilidad de pequeña señal puede tener una naturaleza local o global. Los efectos locales involucran una pequeña parte del sistema, dichos problemas están asociados con el ángulo de oscilación de un rotor de un solo generador o una sola planta contra el resto del sistema de potencia y son llamados *modos de oscilación locales*. En cambio, la estabilidad de pequeña señal globales es causada por grandes grupos de generadores y tienen efectos generalizados, en dichos problemas se involucran oscilaciones de un grupo de generadores en un área que oscilan frente a otro grupo de generadores en otra área y cuyas oscilaciones son llamadas *modos de oscilación inter-áreas*.

Para representar al sistema con la ecuación (3.19) se debe acoplar los modelos lineales representados en el espacio de estados de las máquinas síncronas y las cargas con el fin de plantear un conjunto de ecuaciones con variables de estado y salidas que permitan realizar un análisis modal del sistema, el cual, consiste en calcular los modos de oscilación inherentes al sistema y determinar sus factores de participación para clasificarlos como modos locales o inter-área.

# 4. Representación en espacio de estados de sistemas de potencia para estudios de estabilidad de pequeña señal

---

## 4.1. Introducción.

La estabilidad en pequeña señal es la habilidad que tiene un Sistema de Potencia para mantener el sincronismo cuando ocurren pequeños disturbios. En este contexto, un disturbio puede considerarse pequeño si las ecuaciones que describen la respuesta del sistema después del disturbio pueden ser linealizadas para su posterior análisis. Por ello es necesario conocer los modelos lineales de los elementos que conforman el Sistema Eléctrico de Potencia (SEP), en este capítulo se mostrarán aspectos fundamentales de estabilidad de los Sistemas de Potencia como la representación de una máquina síncrona, la representación de los sistemas de excitación y la linealización de un SEP.

## 4.2. El fenómeno de inestabilidad.

La estabilidad es una condición de equilibrio entre fuerzas opositoras. El mecanismo por el cual las máquinas síncronas mantienen el sincronismo con otras máquinas es a través de fuerzas de restauración, las cuales actúan cada vez que existen fuerzas que tiendan a acelerar o desacelerar una o más máquinas del sistema eléctrico. Bajo condiciones de estado estable, existe un equilibrio entre la entrada del torque mecánico y la salida del torque eléctrico de cada máquina, y por lo tanto la velocidad permanece constante, pero si el sistema es perturbado, este equilibrio se pierde, resultando en una aceleración o desaceleración de los rotores de las máquinas.

Si un generador se mueve temporalmente más rápido que otro, la posición angular de su rotor con relación a la máquina más lenta avanzará, resultando en una diferencia angular que transfiere parte de la carga de la máquina más lenta a la máquina más rápida, dependiendo

de la relación potencia-ángulo. Esto tiende a reducir la diferencia de velocidad y, por lo tanto, la separación angular. Después de cierto límite, al aumentar la separación angular provocará un decremento de potencia lo que ocasionará un aumento extra de separación angular que conllevará a un problema de inestabilidad.

Para que una máquina síncrona pierda el sincronismo con el resto del sistema es necesario que su rotor se mueva a una velocidad mayor o menor de la que se requiere para generar voltajes a la frecuencia del sistema. La “desviación” entre el campo del estator rotatorio (la cual corresponde de la frecuencia del sistema) y el campo del rotor conlleva a grandes oscilaciones en la potencia, corriente y voltajes de salida de la máquina; esto ocasiona que las protecciones del sistema aíslen la máquina inestable y la separen del sistema de potencia.

En un sistema eléctrico de potencia, el cambio en el torque eléctrico  $\Delta T_e$  de una máquina síncrona después de una perturbación se puede resolver en dos componentes:

$$\Delta T_e = T_S \Delta \delta + T_D \Delta \omega \quad (4.1)$$

- $T_S \Delta \delta$  es el componente del cambio de torque en fase con la perturbación del ángulo de rotor  $\Delta \delta$  y se le denomina componente de torque sincronizado;  $T_S$  es el coeficiente de torque sincronizado.
- $T_D \Delta \omega$  es el componente de torque en fase con la velocidad de desviación  $\Delta \omega$  y se le conoce como componente de amortiguamiento de torque;  $T_D$  es el coeficiente de amortiguamiento de torque.

La estabilidad del sistema de potencia depende de la existencia de ambos componentes de torque para cada una de las máquinas síncronas. Cuando existe una falta de torque sincronizado conlleva a una inestabilidad a través de una desviación aperiódica en el ángulo del rotor, por otro lado, si existe una falta de torque de amortiguamiento, esto nos resultará en una inestabilidad oscilatoria.

Es conveniente que se caracterice los fenómenos de estabilidad del ángulo del rotor en dos categorías, la estabilidad en pequeña señal y la estabilidad transitoria.

#### **A. Estabilidad en Pequeña Señal.**

Ésta se conoce como la habilidad de un sistema de potencia para mantener el sincronismo bajo un disturbio pequeño. Éstos pequeños disturbios ocurren continuamente en la red debido a pequeñas variaciones de carga y generación. Ya que los disturbios se

consideran lo suficientemente pequeños el sistema puede ser representado en ecuaciones lineales que describan la respuesta del sistema para los fines de los análisis de pequeña señal. Dicha inestabilidad puede resultar de dos maneras: la primera es el incremento del ángulo del rotor debido a la falta de torque sincronizado; la segunda es el incremento de amplitud de las oscilaciones en el rotor debido a la falta de torque de amortiguamiento.

La respuesta natural de un sistema a un disturbio de pequeña señal dependerá de varios factores los cuales incluyen la operación inicial, la robustez del sistema de transmisión y el tipo de control de excitación que se usa en los generadores. Para un generador conectado de manera radial a un largo sistema de potencia, cuando no se usan reguladores automáticos de voltaje, la inestabilidad del sistema será debido a la falta del suficiente torque de sincronizado. Esto resultará en una inestabilidad dada por los modos no-oscilatorios como se muestra en la Figura 4.1. Con reguladores de voltaje actuando de manera continua, el problema de estabilidad en pequeña señal consistirá en asegurar un amortiguamiento suficiente para las oscilaciones del sistema Figura 4.2.

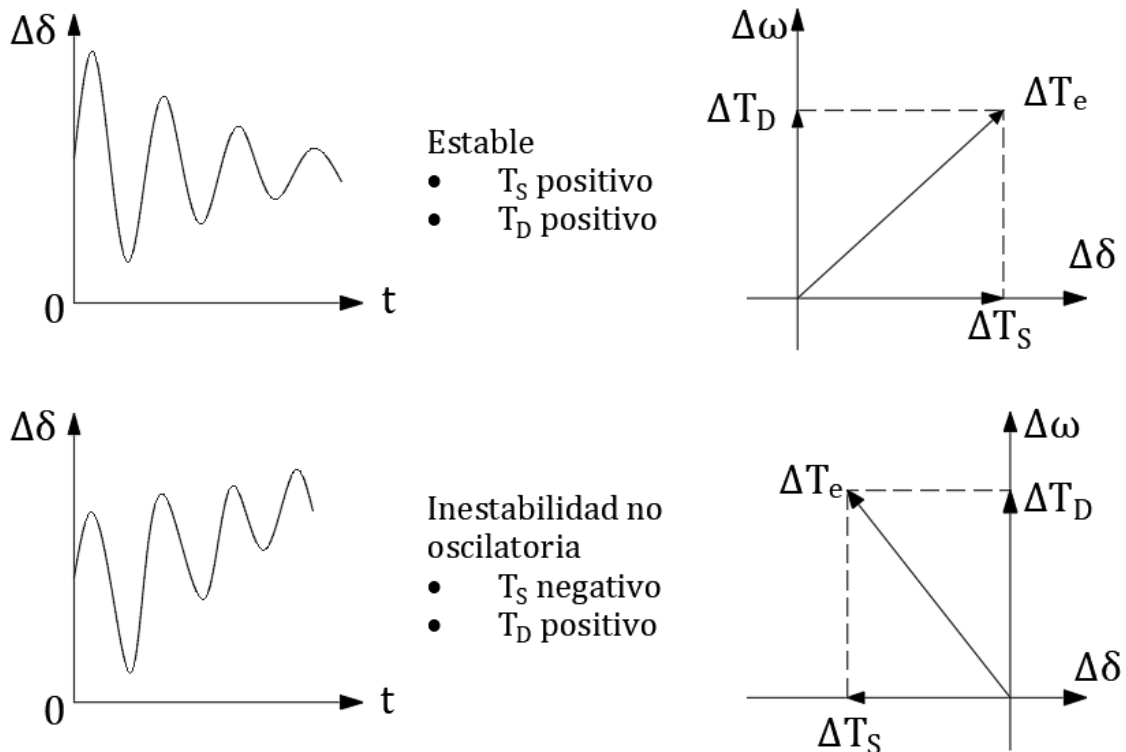


Figura 4.1 Respuesta a disturbio de pequeña señal con voltaje de campo constante

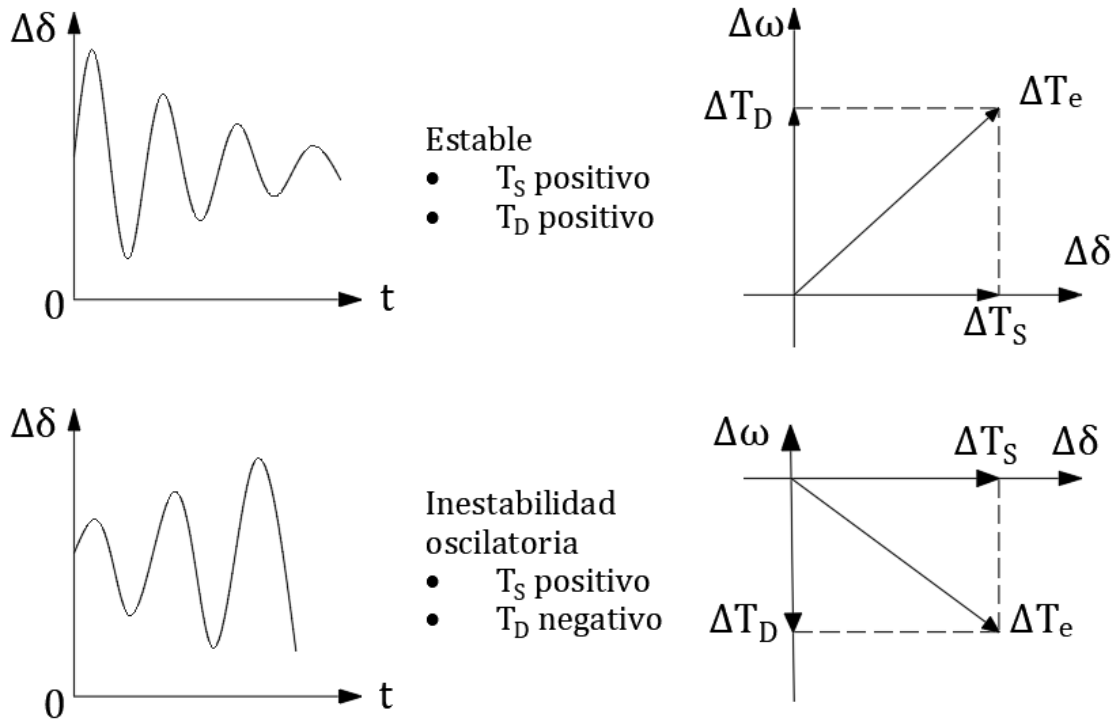


Figura 4.2 Respuesta a disturbio de pequeña señal con control de excitación

Dado que no existe un amortiguamiento suficiente de las oscilaciones, la estabilidad en pequeña señal de los siguientes tipos de oscilaciones es muy preocupante:

- Los modos locales o modos de máquina-sistema* son aquellos modos que se localizan en un área generadora del sistema de potencia y se asocian con las oscilaciones en una estación generadora con respecto al resto del sistema de potencia.
- Los modos interárea* son aquellos asociados con las oscilaciones de varias máquinas entre dos áreas del sistema de potencia y son causados por dos o más grupos de máquinas acopladas e interconectadas por enlaces débiles.
- Los modos de control* se asocian con estaciones generadoras y módulos de control, una causa de estos modos de oscilación son los excitadores mal sintonizados, gobernadores de velocidad, controles alto voltaje de corriente directa y compensadores estáticos de VARs.
- Los modos torsionales* los cuales se asocian a los componentes rotacionales del sistema de eje de las turbinas de los generadores.



### ***B. Estabilidad Transitoria***

Es la habilidad del sistema para mantener el sincronismo cuando existe un severo disturbio transitorio. La respuesta del sistema debido al disturbio involucra un análisis de los ángulos del rotor y está influenciado por la relación no lineal de potencia-ángulo. La estabilidad depende de las condiciones de operaciones iniciales y de la magnitud del disturbio. Usualmente, el sistema es alterado para que la operación de estado estable posterior al disturbio difiera de la operación anterior a la perturbación.

Disturbios de varios grados de severidad y de probabilidad pueden ocurrirle al sistema de potencia. El sistema se diseña de tal manera que pueda operar en un estado estable después de un diverso número de contingencias. Las contingencias más consideradas son las fallas de corto circuito de diferentes tipos, ya sea de fase a tierra, entre dos fases y trifásica.

### **4.3. Representación matemática de la Máquina Síncrona.**

Los generadores síncronos son la principal fuente de energía eléctrica en los sistemas de potencia y como hemos discutido anteriormente, la estabilidad de un sistema de potencia es un problema que, en gran parte, consiste en mantener interconectadas y en sincronismo las máquinas síncronas de todo el sistema.

La Figura 4.3 muestra el diagrama esquemático de una sección de una máquina síncrona trifásica con un par de polos de campo. La máquina consiste en dos elementos esenciales: el campo y la armadura. El devanado de campo transporta corriente directa y produce un campo magnético que induce voltajes alternos en los devanados de armadura.

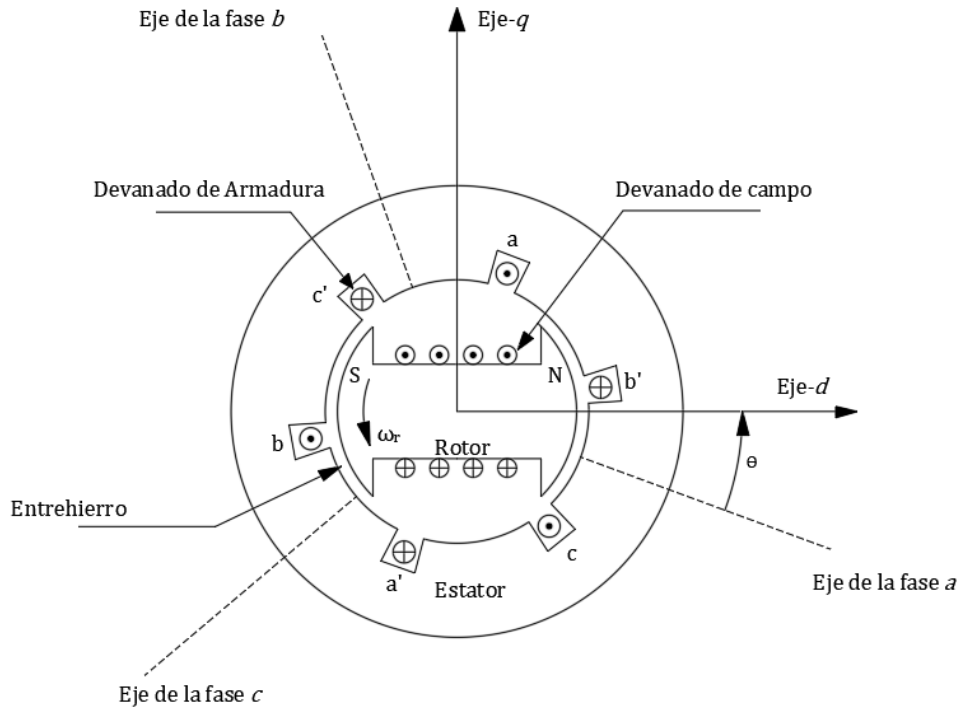


Figura 4.3 Diagrama esquemático de una máquina síncrona trifásica

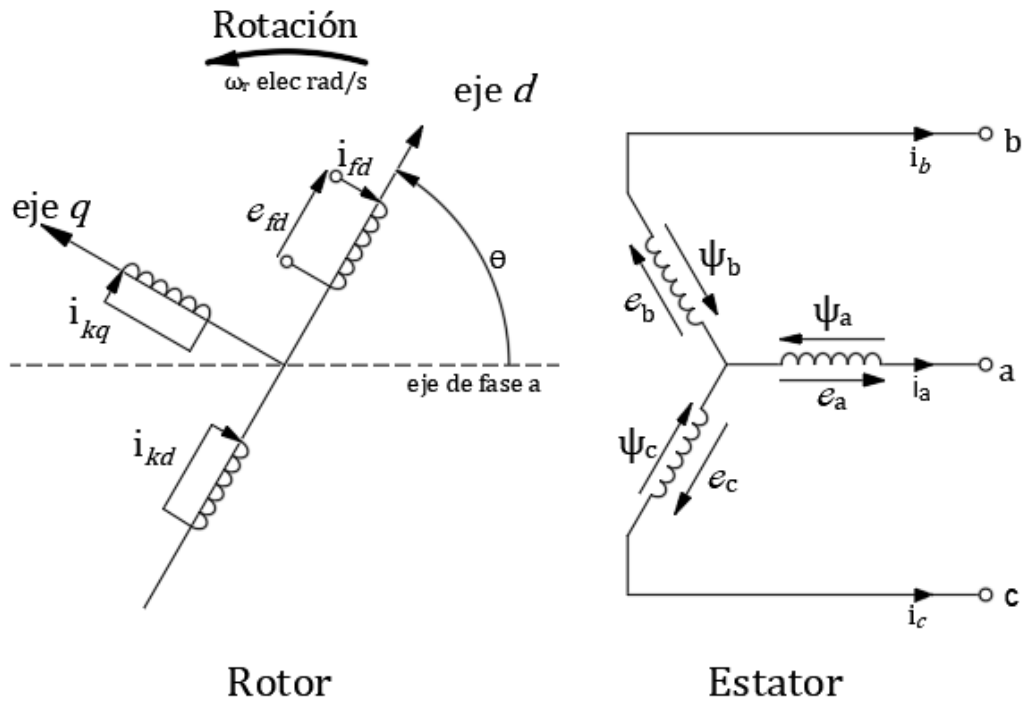
Para el desarrollo de las ecuaciones una máquina síncrona, tomamos en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los devanados del estator están distribuidos de manera senoidal a través de todo el entrehierro de tal manera que los efectos mutuos con el rotor están considerados.
- Las ranuras del estator no causan una variación significativa de las inductancias del rotor con respecto a la posición del rotor.
- La histéresis magnética es despreciable.
- Los efectos de saturación magnética son despreciables.

La Figura 4.4 muestra el circuito involucrado en el análisis de una máquina síncrona. Los circuitos del estator consisten en un devanado inducido trifásico el cual lleva corriente alterna. Los circuitos del rotor comprenden devanados de campo y de amortiguamiento.

Para el propósito del análisis, se puede asumir que las corrientes de amortiguamiento pueden fluir en dos circuitos cerrados: uno cuyo flujo está en línea con el de campo a lo largo del eje-d y otro que está en un ángulo recto al eje de campo o al eje-q. En la Figura 4.4, por cuestiones de simplicidad, solo un circuito de amortiguamiento se asume en cada eje y

describiremos las ecuaciones de la máquina basándonos en esta suposición. Sin embargo, si consideramos un número arbitrario de circuitos, lo denotaremos con el subíndice  $k$ .



- a, b, c : devanados de fase
- fd : devanados de campo
- kd : eje-d circuito amortiguador
- kq : eje-q circuito amortiguador
- k = 1, 2, ... n; n = número de circuitos amortiguadores
- $\theta$  = Ángulo por el cual el eje-d conduce el eje magnético de el devanado de fase a, en radianes
- $\omega_r$  = Velocidad angular del rotor, rad/s

Figura 4.4 Circuitos de rotor y estator de una máquina síncrona

Los circuitos del estator consisten tres devanados trifásicos de corriente alterna. Los circuitos del rotor comprenden los devanados de campo y de amortiguamiento.

## 4.4. Representación de Espacio de Estados y Linealización.

### 4.4.1. Espacio de estados.

El concepto de estado es fundamental para el correcto enfoque al espacio de estados. El estado de un sistema representa la cantidad mínima de información sobre el sistema en cualquier momento de tiempo  $t_0$  en que sea necesario para que su comportamiento futuro pueda determinarse sin hacer referencia a la entrada antes de  $t_0$ .

Las variables de estado son las variables que constituyen el menor conjunto de variables dinámicas que, junto con las entradas del sistema, proveen una completa descripción del comportamiento del sistema. Cualquier conjunto de  $n$  variables independientes pueden ser usados para determinar el comportamiento de un sistema dinámico.

El comportamiento de un sistema dinámico puede ser descrito como un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden de la forma:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

donde  $n$  es el orden del sistema y  $r$  es el número de entradas. Esto puede ser escrito utilizando notación vectorial matricial como:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (4.3)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

El vector columna  $x$  es conocido como el vector de estado, y sus elementos  $x_i$  son variables de estado. El vector columna  $u$  es el vector de entradas del sistema. El tiempo se denota por  $t$  y las derivadas de las variables de estado respecto al tiempo se encuentran en el vector  $\dot{x}$ . Si las derivadas de las variables de estado no están explícitamente en función del tiempo, se dice que el sistema es autónomo y la ecuación (5.3) se simplifica como:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.5)$$

Casi siempre se tiene interés en las variables de salida del sistema que pueden ser observadas. Estas pueden ser expresadas en términos de las variables de estado y de las variables de entrada de la forma:

$$y = g(x, u) \quad (4.6)$$

donde

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

El vector columna  $y$  es el vector de salidas, y  $g$  es un vector de funciones no lineales que relaciona variables de estado y de entrada con las variables de salida.

#### 4.4.2. Linealización.

El comportamiento del sistema puede ser representado de forma lineal cuando opera cerca del punto de equilibrio. Siendo  $x_0$  el vector de estados inicial del sistema y  $u_0$  el vector de entradas correspondiente al punto de equilibrio y considerando que  $x_0$  y  $u_0$  satisfacen la ecuación (4.5), se tiene:

$$\dot{x}_0 = f(x_0, u_0) = 0 \quad (4.8)$$

Si se perturba el sistema cerca del estado de equilibrio se tiene:

$$x = x_0 + \Delta x \quad u = u_0 + \Delta u \quad (4.9)$$

donde el prefijo  $\Delta$  denota una pequeña desviación.

El nuevo estado debe satisfacer la ecuación (4.5) y por tanto,

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta \dot{x} = f[(x_0 + \Delta x), (u_0 + \Delta u)] \quad (4.10)$$

Como se asume que las perturbaciones son pequeñas, las funciones no lineales  $f(x, u)$  pueden ser expresadas en términos de expansión de las series de Taylor. Despreciando los términos de potencias mayores al segundo orden para  $\Delta x$  y  $\Delta u$ , puede escribirse:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_{i0} + \Delta \dot{x}_i = f_i[(x_0 + \Delta x), (u_0 + \Delta u)] \\ &= f_i(x_0, u_0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n \\ &\quad + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_r} \Delta u_r \end{aligned} \quad (4.11)$$

y como  $\dot{x}_{i0} = f(x_0, u_0)$  se obtiene:

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_r} \Delta u_r \quad (4.12)$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$ . De manera similar con la ecuación (4.6), se obtiene:

$$\Delta y_i = \frac{\partial g_j}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{\partial g_j}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial u_r} \Delta u_r \quad (4.13)$$

con  $i = 1, 2, \dots, m$ . Por tanto, la linealización de las ecuaciones (4.5) y (4.6) es:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \quad (4.14)$$

$$\Delta y = C \Delta x + D \Delta u \quad (4.15)$$

con,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Las derivadas parciales son evaluadas en el punto de equilibrio sobre el cual se analiza la pequeña perturbación.

En las ecuaciones (4.14) y (4.15),

$\Delta x$  es el vector de estados con dimensión  $n$

$\Delta y$  es el vector de salidas con dimensión  $m$

$\Delta u$  es el vector de entradas con dimensión  $r$

$A$  es la matriz de estado de tamaño  $n \times n$

$B$  es la matriz de control o de entradas de tamaño  $n \times r$

$C$  es la matriz de salidas de tamaño  $m \times n$

$D$  es la matriz que define la proporción de la entrada que aparece directamente a la salida, de tamaño  $m \times r$

## 4.5. Modelo detallado de un generador síncrono para estudios de estabilidad.

En esta sección describiremos las ecuaciones del modelo completo del generador síncrono en el que todas las variables del estator son referidas al marco de referencia ( $dq$ ) fijo en el rotor y es a partir de estas que se deriva el modelo del generador síncrono para el estudio de estabilidad de pequeña señal [24].

### 4.5.1. Ecuaciones del estator

Las ecuaciones de voltaje del estator de un generador síncrono están definidas por las ecuaciones de voltaje:

$$v_{qs} = \dot{\psi}_{qs} - r_s i_{qs} - \omega_r \psi_{ds} \tag{4.17}$$

$$v_{ds} = \dot{\psi}_{ds} - r_s i_{qs} - \omega_r \psi_{qs} \quad (4.18)$$

y de los encadenamientos de flujos de los devanados del estator:

$$\psi_{qs} = -X_{ls} i_{qs} - \psi_{mq} \quad (4.19)$$

$$\psi_{ds} = -X_{ls} i_{ds} - \psi_{md} \quad (4.20)$$

Donde las variables  $\psi_{mq}$  y  $\psi_{md}$  se denotan como los encadenamientos de flujos mutuos y se definen como:

$$\psi_{mq} = X_{mq} (-i_{qs} + i_{kq1} + i_{kq2}) \quad (4.21)$$

$$\psi_{md} = X_{md} (-i_{ds} + i_{fd} + i_{kd}) \quad (4.22)$$

Sin embargo, el modelo del estator de la máquina síncrona que se adopta para efectos del desarrollo de esta tesis se basa en una simplificación de las ecuaciones (4.17) y (4.18), la cual, consiste en despreciar los términos que representan los transitorios en el estator y las variaciones de la velocidad del rotor. Esto debido a que, para análisis de sistemas de potencia prácticos, incrementa el orden de los modelos de los sistemas de potencia considerablemente y, por lo tanto, limita el tamaño del sistema que puede simularse; además, considerando los transitorios el sistema contendría altas frecuencias transitorias que son difíciles de analizar e interpretar desde el punto de vista de la estabilidad del sistema. Tomando en cuenta lo anterior, las dichas ecuaciones como pueden reescribirse como:

$$v_{qs} = -r_s i_{qs} - \dot{\psi}_{ds} \quad (4.23)$$

$$v_{ds} = -r_s i_{ds} - \dot{\psi}_{qs} \quad (4.24)$$

Las ecuaciones (4.17) y (4.18) pasan a ser ecuaciones algebraicas y es su forma algebraica a que permite el uso de la relación en estado estacionario para representar la interconexión con la red de transmisión. Los transitorios asociados con la red decaerían rápidamente y no se tomarán en cuenta estos efectos para estudios de estabilidad [1].

#### 4.5.2. Ecuaciones del rotor

El modelo del rotor está descrito por las ecuaciones de voltaje:

$$0 = \frac{1}{\omega_0} \dot{\psi}_{kq1} + r_{kq1} i_{kq1} \quad (4.25)$$

$$0 = \frac{1}{\omega_0} \dot{\psi}_{kq2} + r_{kq2} i_{kq2} \quad (4.26)$$

$$v_{fd} = \frac{1}{\omega_0} \psi_{fd0} + r_{fd} i_{fd} \quad (4.27)$$

$$0 = \frac{1}{\omega_0} \psi_{kd} + r_{kd} i_{kd} \quad (4.28)$$

Y las ecuaciones de los encadenamientos de flujos de los devanados amortiguados y de campo ( $fd$ ):

$$\psi_{kq1} = X_{lkq1} i_{lkq1} + \psi_{mq} \quad (4.29)$$

$$\psi_{kq2} = X_{lkq2} i_{lkq2} + \psi_{mq} \quad (4.30)$$

$$\psi_{fd} = X_{lfd} i_{lfd} + \psi_{md} \quad (4.31)$$

$$\psi_{kd} = X_{lkd} i_{lkd} + \psi_{md} \quad (4.32)$$

### 4.5.3. Ecuaciones de velocidad y aceleración del rotor

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del rotor de la máquina síncrona, sin importar el aspecto constructivo del mismo, se representan de la siguiente forma:

$$\dot{\delta} = \omega_r - \omega_0 \quad (4.33)$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{\omega_0}{2H} \left( T_m - T_e - \frac{K_D}{\omega_0} \Delta\omega_r \right) \quad (4.34)$$

donde,

- $\delta$  es la posición angular del rotor.
- $\omega_0$  es la velocidad nominal de la máquina (velocidad de sincronismo).
- $H$  es la constante de inercia.
- $K_D$  es el coeficiente de amortiguamiento.
- $T_m$  es el par mecánico en por unidad.
- $T_e$  es el par eléctrico en por unidad.

### 4.5.4. Ecuación del par eléctrico.

De acuerdo a la teoría [1], el par eléctrico en por unidad se define como:

$$T_e = \psi_{md} i_{qs} - \psi_{mq} i_{ds} \quad (4.35)$$



## 4.6. Representación del generador síncrono en la forma canónica de un sistema de referencia nodal.

Para modelar la interconexión del generador síncrono con el SEP a través de su sistema de transmisión se requiere reescribir las ecuaciones algebraicas (4.23) y (4.24) de manera que puedan adoptar el planteamiento de un sistema de referencia nodal, es decir, resolver  $I = YV$ . Expresándolas como ecuaciones de inyección de corriente del generador síncrono a la red eléctrica, únicamente en función de los voltajes de las terminales del generador y los encadenamientos de flujos de los devanados del rotor.

Despejando la corriente de las ecuaciones (4.29) y (4.30) y sustituyéndolas en (4.21) y (4.22), respectivamente, tenemos:

$$\psi_{mq} = X_{aq} \left( -i_{qs} + \frac{\psi_{kq1}}{X_{lkq1}} + \frac{\psi_{kq2}}{X_{lkq2}} \right) \quad (4.36)$$

$$\psi_{md} = X_{ad} \left( -i_{ds} + \frac{\psi_{fd}}{X_{lfd}} + \frac{\psi_{kd}}{X_{lkd}} \right) \quad (4.37)$$

donde,

$$X_{aq} = \frac{1}{\frac{1}{X_{mqu}} + \frac{1}{X_{lkq1}} + \frac{1}{X_{lkq2}}} \quad (4.38)$$

$$X_{ad} = \frac{1}{\frac{1}{X_{mdu}} + \frac{1}{X_{lfd}} + \frac{1}{X_{lkd}}} \quad (4.39)$$

La ecuación (4.36) se sustituye en (4.19) de tal forma que el desarrollo de esta sustitución se use en (4.23), resultando la siguiente ecuación:

$$v_{qs} = -r_s i_{qs} - (X_{ad} + X_{ls}) i_{ds} + X_{ad} \left( \frac{\psi_{fd}}{X_{lfd}} + \frac{\psi_{kd}}{X_{lkd}} \right) \quad (4.40)$$

Lo mismo se hace con las ecuaciones (4.39), (4.20) y (4.24):

$$v_{ds} = -r_s i_{ds} - (X_{aq} + X_{ls}) i_{qs} + X_{aq} \left( \frac{\psi_{kq1}}{X_{lkq1}} + \frac{\psi_{kq2}}{X_{lkq2}} \right) \quad (4.41)$$

Como producto de este proceso, las ecuaciones (4.40) y (4.41) son expresadas en forma matricial, para obtener lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_s^2 + X_d'' X_q''} \begin{bmatrix} -r_s & -X_q'' \\ X_d'' & -r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} - e_{ds}'' \\ v_{qs} - e_{qs}'' \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

La ecuación (4.42) se conoce la ecuación de inyección de corriente, donde,

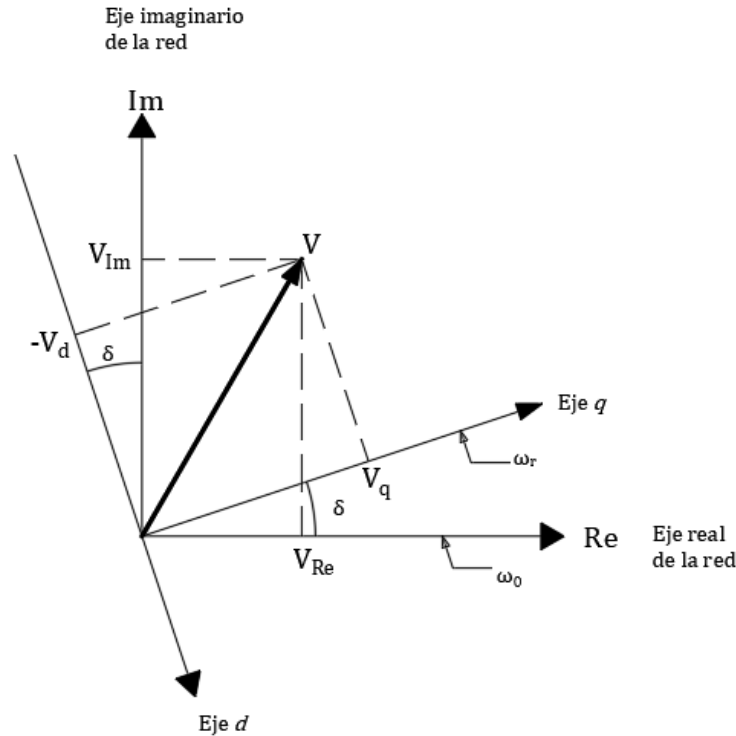
$$e''_{ds} = -X_{aq} \left( \frac{\psi_{kq1}}{X_{lkq1}} + \frac{\psi_{kq2}}{X_{lkq2}} \right) \quad (4.43)$$

$$e''_{qs} = X_{ad} \left( \frac{\psi_{fd}}{X_{lfd}} + \frac{\psi_{kd}}{X_{lkd}} \right) \quad (4.44)$$

$$X''_d = X_{ad} + X_{ls} \quad (4.45)$$

$$X''_q = X_{aq} + X_{ls} \quad (4.46)$$

Sin embargo, la ecuación matricial (4.42) está descrita en términos de los voltajes y corriente en el marco de referencia  $dq$  o del generador síncrono, mientras que las variables de voltajes y corrientes de las ecuaciones de la red eléctrica están en el marco de referencia de la red. Por tanto, para acoplar la ecuación de inyección de corriente al modelo del sistema de transmisión se debe establecer la relación que existe en la proyección de las componentes de las coordenadas en el marco de referencia de la red a las coordenadas en el marco de referencia de la máquina, tal como se muestra en siguiente figura.



*Figura 4.5 Diagrama vectorial de voltajes que muestra la relación entre el marco de referencia de la red y el de la máquina síncrona*

Con base en la Figura 4.5, puede observarse que se trata de una transformación lineal y matemáticamente involucra las siguientes operaciones matriciales:

$$V_{dq} = \begin{bmatrix} \text{sen } \delta & -\text{cos } \delta \\ \text{cos } \delta & \text{sen } \delta \end{bmatrix} V_s = M V_s \quad (4.47)$$

$$i_{dq} = \begin{bmatrix} \text{sen } \delta & -\text{cos } \delta \\ \text{cos } \delta & \text{sen } \delta \end{bmatrix} i_s = M i_s \quad (4.48)$$

La transformada inversa de las operaciones anteriores se describe como:

$$V_s = \begin{bmatrix} \text{sen } \delta & \text{cos } \delta \\ -\text{cos } \delta & \text{sen } \delta \end{bmatrix} V_{dq} = M^{-1} V_{dq} \quad (4.49)$$

$$i_s = \begin{bmatrix} \text{sen } \delta & \text{cos } \delta \\ -\text{cos } \delta & \text{sen } \delta \end{bmatrix} i_{dq} = M^{-1} i_{dq} \quad (4.50)$$

Los vectores  $V_{dq}, V_s, i_{dq}, i_s \in R^2$ , se definen como:

$$V_{dq} = [V_d \quad V_q]^T$$

$$V_s = [V_{Re} \quad V_{Im}]^T$$

$$i_{dq} = [i_d \quad i_q]^T$$

$$i_s = [i_{Re} \quad i_{Im}]^T$$

$M$  es denotada como matriz de rotación o como matriz de transformación usada para referir las cantidades escritas en el marco de referencia de la red eléctrica al marco de referencia del generador síncrono, mientras que  $M^{-1}$  es empleada para referir las cantidades escritas en el marco de referencia del generador síncrono al marco de referencia de la red eléctrica.

## 4.7. Linealización de modelo detallado del generador síncrono

El modelo completo del generador síncrono está descrito por el conjunto de ecuaciones algebraicas-diferenciales:

$$\dot{X}_g = f(X_g, U_g, V_s) \quad (4.51)$$

$$i_s = g(X_g, U_g, V_s) \quad (4.52)$$

Donde la ecuación (4.51) la cual se define como la ecuación de estado y la ecuación (4.52) se le llama ecuación de salida. Ambas ecuaciones están descritas en términos de los vectores:

$X_g$  : Es el vector de estado definido por  $[\omega_r \quad \delta \quad \psi^T]$ , donde  $\psi = [\psi_{fd} \quad \psi_{kd} \quad \psi_{kq1} \quad \psi_{kq2}]$

$U_g$  : Es el vector de entradas definido por  $U_g = [T_m \quad E_{fd}]^T$

$V_s$  e  $i_s$  : Son los vectores conformados por las componentes de los fasores de voltajes y corrientes de las terminales del estator del generador síncrono.

Para que el modelo completo del generador síncrono pueda ser usado en el estudio de estabilidad de pequeña señal, requiere expresar la forma lineal de las ecuaciones (4.51) y (4.52) alrededor de un punto en equilibrio

Si definimos,

$$D = r_s^2 + X_q'' X_d'' \quad (4.53)$$

$$Y_{dq} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -r_s & -X_q'' \\ X_d'' & -r_s \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

La ecuación (4.42) puede simplificarse y reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \end{bmatrix} = Y_{dq} \begin{bmatrix} v_{ds} - e_{ds}'' \\ v_{qs} - e_{qs}'' \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Expresando la ecuación anterior en su forma incremental:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{ds} \\ \Delta i_{qs} \end{bmatrix} = Y_{dq} \begin{bmatrix} \Delta v_{ds} - \Delta e_{ds}'' \\ \Delta v_{qs} - \Delta e_{qs}'' \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior, la forma incremental de (4.43) y (4.44), se obtienen:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{ds} \\ \Delta i_{qs} \end{bmatrix} = Y_{dq} \Delta v_{dq} + Y_{dq} X_{ppdq} \Delta \psi \quad (4.57)$$

donde,

$$X_{ppdq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{X_{aq}}{X_{lkq1}} & \frac{X_{aq}}{X_{lkq2}} \\ -\frac{X_{ad}}{X_{lf d}} & -\frac{X_{ad}}{X_{lk d}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Para expresar la ecuación (4.58) en términos de las componentes de los voltajes terminales del generador síncrono referidas al marco de referencia de la red eléctrica, se linealiza la ecuación (4.47), de manera que se obtiene:

$$\Delta v_{dq} = M_0 \Delta v_s + \begin{bmatrix} v_{qs0} \\ -v_{ds0} \end{bmatrix} \Delta \delta \quad (4.59)$$

donde la matriz  $M$  define la transformación lineal que realiza el cambio al marco de referencia  $dq$ .

El subíndice 0 denota el resultado de evaluar la linealización de la ecuación (4.47) en un punto de equilibrio encontrado por el análisis de la operación en estado estacionario de la máquina síncrona a partir de la solución de flujos del caso base.

Posteriormente se sustituye la ecuación (4.59) en (4.57), obteniendo lo siguiente:

$$\Delta i_{dq} = K_1 \Delta \delta + K_2 \Delta \psi + K_3 \Delta v_s \quad (4.60)$$

donde,

$$K_1 = Y_{dq} \begin{bmatrix} v_{qs0} \\ -v_{ds0} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$K_2 = Y_{dq} X_{ppdq} \quad (4.62)$$

$$K_3 = Y_{dq} M_0 \quad (4.63)$$

$$\mathbf{i}_{dq} = \begin{bmatrix} \Delta i_{ds} \\ \Delta i_{qs} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Por último, se requiere escribir la ecuación (4.64) en términos de corrientes referidas en el marco de referencia de la red eléctrica. Para esto se linealiza la ecuación (4.50), de tal forma que se obtiene,

$$\Delta i_s = M_0^{-1} \Delta i_{dq} + \begin{bmatrix} -i_{Im0} \\ i_{Re0} \end{bmatrix} \Delta \delta \quad (4.65)$$

donde  $M_0^{-1} = M^{-1} \Big|_{\delta=\delta_0}$ .

Y se sustituye (4.60) en (4.65) para obtener:

$$\Delta i_s = K_{12} \Delta \delta + K_{12} \Delta \psi + K_{14} \Delta v_s \quad (4.66)$$

La ecuación (4.66) es la representación lineal de la ecuación de salida (4.50), la cual es ligeramente modificada para ajustarse a la representación en el espacio de estado del modelo del generador síncrono, de manera que se tiene:

$$\Delta i_s = C_g \Delta X_g + Y_g \Delta v_s \quad (4.67)$$

Las matrices que conforman la ecuación (4.67) se definen a continuación:

$C_g$  : Se denomina matriz de salida cuya dimensión es igual a  $m \times n$ , donde  $m$  es igual a la dimensión de  $V_s$  e  $i_s$  y  $n$  es igual a la dimensión de  $x_g$

$$C_g = [0_{2,1} \quad K_{12} \quad K_{13}]$$

$Y_g$  : Es una matriz con un orden igual a  $m$

$$Y_g = K_{14}$$

donde,

$$K_{12} = M_0^{-1} K_1 + \begin{bmatrix} -i_{Im} \\ i_{Re} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$K_{13} = M_0^{-1} K_2 \quad (4.69)$$

$$K_{14} = M_0^{-1} K_3 \quad (4.70)$$

#### 4.7.1. Linealización de las ecuaciones del rotor

Las ecuaciones de voltaje del rotor descritas por las ecuaciones (4.25) - (4.28), éstas son ecuaciones lineales, por lo tanto, únicamente se representan en su forma incremental alrededor de un punto base. En forma matricial este se define de la manera siguiente:

$$\Delta\psi = -\omega_0 R_r \Delta i_r + N \Delta u \quad (4.71)$$

en donde,

$$\Delta i_r = [\Delta i_{fd} \quad \Delta i_{kd} \quad \Delta i_{kq1} \quad \Delta i_{kq2}] \quad (4.72)$$

$$R_r = \begin{bmatrix} r_{fd} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{kd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{kq1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{kq2} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \omega_b \frac{r_{fd}}{X_{mdu}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Pero las desviaciones de las corrientes pueden expresarse mediante la forma incremental de las ecuaciones (4.29) - (4.32) en términos de los encadenamientos de flujos, de manera que se obtiene lo siguiente:

$$\Delta i_{fd} = \frac{\Delta\psi_{fd} - \Delta\psi_{md}}{X_{lfd}} \quad (4.75)$$

$$\Delta i_{kd} = \frac{\Delta\psi_{kd} - \Delta\psi_{md}}{X_{lkd}} \quad (4.76)$$

$$\Delta i_{kq1} = \frac{\Delta\psi_{kq1} - \Delta\psi_{mq}}{X_{lkq2}} \quad (4.77)$$

$$\Delta i_{kq2} = \frac{\Delta\psi_{kq2} - \Delta\psi_{mq}}{X_{lkq2}} \quad (4.78)$$

La forma incremental de los encadenamientos de flujos de magnetización se define de la manera siguiente:

$$\Delta\psi_{md} = X_{ad} \left( -\Delta i_{ds} + \frac{\Delta\psi_{fd}}{X_{lfd}} + \frac{\Delta\psi_{kd}}{X_{lkd}} \right) \quad (4.79)$$

$$\Delta\psi_{mq} = X_{aq} \left( -\Delta i_{qs} + \frac{\Delta\psi_{kq1}}{X_{lkq1}} + \frac{\Delta\psi_{kq2}}{X_{lkq2}} \right) \quad (4.80)$$

Sustituyendo  $\Delta i_{ds}$  y  $\Delta i_{qs}$  en (4.79) y (4.80) respectivamente, se define las siguientes ecuaciones:

$$\Delta\psi_{md} = -X_{ad}K_4\Delta\delta + K_{21}\Delta\psi - X_{ad}K_6\Delta V_s \quad (4.81)$$

$$\Delta\psi_{mq} = -X_{aq}K_7\Delta\delta + K_{22}\Delta\psi - X_{ad}K_9\Delta V_s \quad (4.82)$$

donde,

$$K_4 = K_1[1] \quad (4.83)$$

$$K_5 = (K_2^T)^{(1)} \quad (4.84)$$

$$K_6 = (K_3^T)^{(1)} \quad (4.85)$$

$$K_7 = K_1[2] \quad (4.86)$$

$$K_8 = (K_2^T)^{(2)} \quad (4.87)$$

$$K_9 = (K_3^T)^{(2)} \quad (4.88)$$

$$K_{21} = -X_{ad}K_5 + \begin{bmatrix} \frac{X_{ad}}{X_{lfd}} & \frac{X_{ad}}{X_{lkd}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$K_{22} = -X_{aq}K_8 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{X_{aq}}{X_{lkq1}} & \frac{X_{aq}}{X_{lkq2}} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

La operación  $(x^T)^{(i)}$  indica la extracción de la fila  $i$ .

En última instancia se sustituye (4.81) y (4.82) en las ecuaciones (4.75) - (4.78) para posteriormente sustituir la forma matricial de dicho desarrollo en la ecuación (4.71), el cual denota la ecuación linealizada de los encadenamientos de flujos en términos de las variables de estados, entradas y voltajes. En su forma matricial puede escribirse de la manera siguiente:

$$\Delta\psi = L\Delta\delta + F\Delta\psi + G\Delta v_s + N\Delta u \quad (4.91)$$

Las matrices de (4.91) se definen de la siguiente manera:

$$R'_r = \omega_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{X_{lfd}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{lkd}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{X_{lkq1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{X_{lkq2}} \end{bmatrix}$$

$$L = -R'_r \begin{bmatrix} X_{ad}K_4 \\ X_{ad}K_4 \\ X_{aq}K_7 \\ X_{aq}K_7 \end{bmatrix}$$

$$F = R'_r \left( \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{21} \\ K_{22} \\ K_{22} \end{bmatrix} - I \right)$$

$$G = -R'_r \begin{bmatrix} X_{ad} K_6 \\ X_{ad} K_6 \\ X_{aq} K_9 \\ X_{aq} K_9 \end{bmatrix}$$

#### 4.7.2. Linealización de la ecuación de oscilación

La linealización de la ecuación de oscilación (4.34) se muestra a continuación:

$$\Delta \dot{\omega}_r = \frac{\omega_0}{2H} \left( \Delta T_m - \Delta T_e - \frac{K_D}{\omega_0} \Delta \omega_r \right) \quad (4.92)$$

En donde la ecuación de par eléctrico (4.35) en su forma incremental está dada por:

$$\Delta T_e = \Delta \psi_{md} \Delta i_{qs0} + \psi_{md0} \Delta i_{qs} - \Delta \psi_{mq} i_{ds0} - \psi_{mq0} \Delta i_{ds} \quad (4.93)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.81) y (4.82) y las expresiones  $\Delta i_{qs}, \Delta i_{ds}$  en (4.93) se

tiene:

$$\Delta T_e = E \Delta \delta + C \Delta \psi - B \Delta v_s \quad (4.94)$$

donde,

$$E = -\frac{\omega_0}{2H} [K_7(i_{ds0} X_{aq} + \psi_{md0}) - K_4(i_{qs0} X_{ad} + \psi_{mq0})]$$

$$C = -\frac{\omega_0}{2H} [i_{qs0} K_{21} - i_{ds0} K_{22} + \psi_{md0} K_8 - \psi_{mq0} K_5]$$

$$B = -\frac{\omega_0}{2H} [K_9(i_{ds0} X_{aq} + \psi_{md0}) - K_6(i_{qs0} X_{ad} + \psi_{mq0})]$$

Usando el resultado de la ecuación (4.94) en la ecuación (4.92). La forma linealizada de la ecuación de oscilación se expresa finalmente como:

$$\Delta \dot{\omega}_r = J \Delta \omega_r + E \Delta \delta + C \Delta \psi + B \Delta v_s + M \Delta u \quad (4.95)$$

en donde,

$$J = -\frac{\omega_0}{2H} K_D$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{2H} & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.7.3. Linealización de la ecuación del ángulo de rotor

La ecuación de ángulo  $\delta$  (4.35) en su forma incremental se expresa como:

$$\Delta \dot{\delta} = \Delta \omega_r \quad (4.96)$$



#### 4.7.4. Representación matricial de la ecuación de estado de generador síncrono

EL conjunto de ecuaciones diferenciales (4.95), (4.96) y (4.91) se agregan para tener esta representación:

$$\Delta \dot{X}_g = A_g \Delta x_g + B_g \Delta u_g + E_g \Delta v_s \quad (4.97)$$

La ecuación (4.97) es la forma linealizada de la ecuación (4.51) a la cual se refiere al modelo lineal de las ecuaciones de estado del generador síncrono. Las matrices que conforman esta ecuación se definen como:

- $A_g$  : Se denomina como matriz de estado, con la característica de ser cuadrada de orden igual a la dimensión del vector  $x_g$  denotado por  $n$
- $B_g$  : Se denomina matriz de entrada cuya dimensión es  $n \times r$ , donde  $r$  es igual a la dimensión del vector  $u_g$
- $E_g$  : Es una matriz con dimensión igual a  $m \times n$ , donde  $m$  es igual a la dimensión de  $V_s$  e  $i_s$

#### 4.8. Representación de los sistemas de excitación para estudios de estabilidad.

La necesidad de suministrar energía eléctrica de una forma segura y continua a los puntos de demanda recae en la capacidad de las unidades generadoras de mantenerse en operación después de la ocurrencia de un disturbio en la red eléctrica. Por lo tanto, es común referirse a los reguladores del generador síncrono, como los sistemas de excitación de voltaje, para mantener un voltaje constante en las terminales del generador síncrono y mejorar la estabilidad del sistema. El funcionamiento básico de un sistema de excitación es proveer corriente directa al devanado de campo de una máquina síncrona. Adicionalmente, el sistema de excitación desempeña funciones como control y protección esencial para el rendimiento satisfactorio del sistema de potencia controlado el voltaje de campo y, de este modo, la corriente de campo. También puede entenderse como el conjunto necesario de elementos que fungen una tarea específica para alimentar y controlar la corriente del devanado del campo de la máquina síncrona. Sin embargo, sistemas de excitación de acción rápida tienden a reducir el amortiguamiento de las oscilaciones del sistema.

### 4.8.1. Elementos de un Sistema de Excitación.

La Figura 4.6 muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de excitación típico para un generador síncrono.

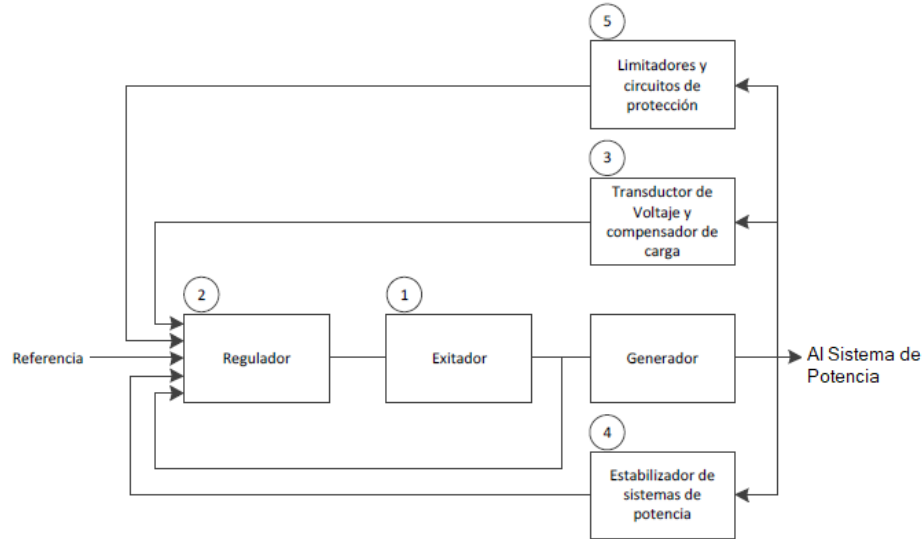


Figura 4.6 Diagrama de Bloques de un Sistema de Excitación

1. **Excitador:** Este elemento suministra corriente directa al devanado de campo del generador síncrono y constituye la etapa de potencia del sistema de excitación.
2. **Regulador automático de voltaje:** Su función es controlar la corriente de campo de la máquina síncrona de acuerdo con criterios específicos. Se considera como la inteligencia del sistema por que controla la salida del excitador, de tal manera, que el voltaje y la potencia reactiva cambien de la manera deseada.
3. **Transductor de voltaje terminal y compensador de carga:** Mide el voltaje terminal del generador, lo rectifica y lo filtra para obtener una cantidad en corriente directa para compararla con la señal de referencia. La referencia representa el voltaje en terminales deseado. La compensación de carga puede darse si se desea mantener el voltaje constante en un punto remoto de las terminales del generador.
4. **Estabilizador del sistema de potencia:** Provee una señal adicional de entrada al regulador con la finalidad de amortiguar las oscilaciones de potencia en el sistema.
5. **Limitadores y circuitos de protección:** Aseguran que la capacidad límite del excitador y el generador síncrono no sean excedidos. Algunas de las funciones comúnmente utilizadas son el limitador de corriente de campo, el limitador de máxima excitación y el limitador de voltaje en terminales.

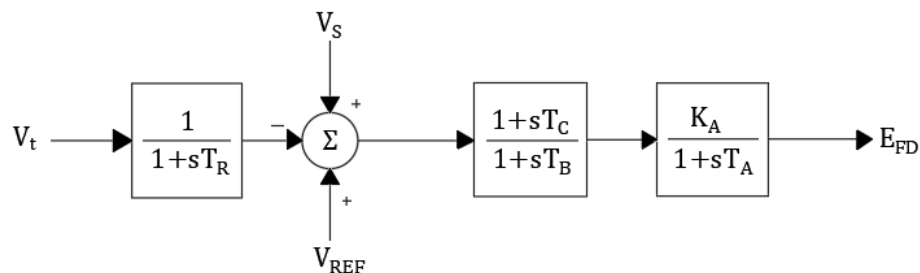
Los sistemas de excitación han variado y evolucionado a lo largo de los años, pero, sin importar la cantidad de bloques que conformen el sistema de excitación, éstos pueden clasificarse de acuerdo con el tipo de fuente de potencia usada en el excitador, identificando tres tipos de sistemas de excitación:

- **Tipo CD (de corriente directa):** Los cuales utilizan un generador de corriente directa con un conmutador como fuente de potencia del sistema de excitación.
- **Tipo CA (de corriente alterna):** Utilizan un alternador con rectificador, ya sea estacionarios o rotatorios para producir la corriente directa necesaria para el campo de la máquina síncrona.
- **Tipo ST (de excitación estática):** La potencia de excitación es suministrada a través de transformadores o devanados auxiliares del generador y rectificadores.

En esta tesis, solo se mencionará excitadores tipo CA, considerando el modelo estándar de la *IEEE AC4A*.

#### 4.8.2. Modelo del excitador AC4A.

El tipo de excitador de CA que se estudiará para su linealización es el modelo estándar AC4A de la IEEE mostrado en la Figura 4.7.



*Figura 4.7 Diagrama de bloques del excitador AC4A*

La estructura del modelo AC4A representa un sistema de excitación de CA de rectificación estacionaria y controlada, sistemas que se caracterizan por su alta respuesta inicial. El único medio de estabilización del sistema de excitación tipo AC4A es un compensador de atraso-adelanto en serie, la cual provee una reducción de la ganancia transitoria.  $K_A$  y  $T_A$  representan la ganancia total y la constante de tiempo asociada con el regulador y el disparo de los tiristores.

Para esta tesis se considera que el tiempo de respuesta de los tiristores es prácticamente despreciable, es decir  $T_A \approx 0$ . Por lo tanto, el modelo de la figura puede substituirse por el modelo simplificado en indicado en la Figura 4.8.

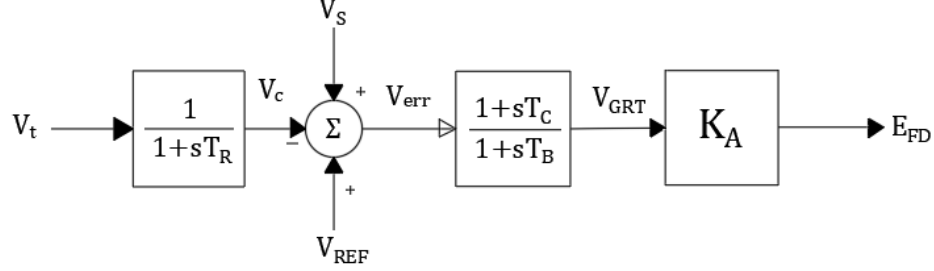


Figura 4.8 Diagrama de bloques del excitador AC4A con  $T_A = 0$

El bloque del transductor del voltaje del modelo de la figura anterior se expresa a continuación:

$$\Delta \dot{V}_C = \frac{1}{T_R} \Delta V_t - \frac{1}{T_R} \Delta V_C \quad (4.98)$$

La ecuación de voltaje de campo en su forma diferencial del modelo de la Figura 4.8 se escribe:

$$\dot{E}_{FD} = K_A \frac{T_C}{T_B} \dot{V}_{err} + K_A \frac{1}{T_B} V_{err} - \frac{1}{T_B} E_{FD} \quad (4.99)$$

donde,

$$V_{err} = V_{ref} - V_c + V_s$$

Si se establece  $T_C = 0$  y  $T_B = 0$ , el modelo del excitador está representado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Delta \dot{V}_C = \frac{1}{T_R} \Delta V_t - \frac{1}{T_R} \Delta V_C \quad (4.100)$$

$$\Delta E_{FD} = K_A (\Delta V_s - \Delta V_C + V_{ref}) \quad (4.101)$$

La ecuación de estado estará dada por la siguiente representación matricial:

$$\Delta \dot{V}_C = -\left[\frac{1}{T_R}\right] \Delta V_C + \left[\frac{v_{Re}}{T_R |V_t|} + \frac{v_{Im}}{T_R |V_t|}\right] \begin{bmatrix} \Delta V_{Re} \\ \Delta V_{Im} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Y la ecuación (4.102) es substituida en la ecuación (4.82), de tal forma que se obtiene,

$$\psi = L \Delta \delta + F \Delta G + G \Delta v_s + K_A \frac{\omega_0 r_{fd}}{X_{mdu}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0_{3,1} & 0_{3,1} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Como lo sugiere (4.101),  $E_{FD}$  es la ecuación de salida del excitador tipo AC4A.

La forma generalizada del modelo de estado del sistema de excitación también puede ser representada por la siguiente ecuación:

$$\Delta \dot{x}_{AVR} = A_{AVR} \Delta x_{AVR} + E_{AVR} \Delta v_S + B_{AVR} u_{AVR} \quad (4.104)$$

Donde cada matriz y vector de esta ecuación se describen a continuación:

$x_{AVR}$  : Es el vector de estado del sistema de excitación con una dimensión de  $n1 \times 1$ , donde  $n1$  puede tomar los valores de 4 si  $x_{AVR} = [V_C \ V_R \ V_F \ E_{FD}]^T$  o 5 si  $x_{AVR} = [V_C \ V_{GRT} \ V_R \ V_F \ E_{FD}]^T$ .

$u_{AVR}$  : Es el vector de entrada del sistema de excitación con una dimensión igual a  $n2 \times 1$ , donde  $n2$  representa el número de entradas contempladas en el modelo del sistema de excitación,  $u_{AVR} = [\Delta V_{ref}]$ .

$A_{AVR}$  : Es la matriz de estado del sistema de excitación cuyo orden es igual a  $n1$ .

$B_{AVR}$  : Es la matriz de entrada de sistema de excitación cuya dimensión es igual a  $n1 \times n2$ .

$E_{AVR}$  : Es la matriz con dimensión igual a  $n1 \times 2$ .

## 4.9. Modelo ZIP de la carga.

Consideremos la carga cuyas características dependientes del voltaje se representan como:

$$P_L = P_{L0} \left( \frac{V}{V_0} \right)^m \quad (4.105)$$

$$Q_L = Q_{L0} \left( \frac{V}{V_0} \right)^n \quad (4.106)$$

donde  $V$  es la magnitud del voltaje del bus dado por:

$$V = \sqrt{v_{Re}^2 + v_{Im}^2} \quad (4.107)$$

En función de los valores de los exponentes  $m$  y  $n$  de las ecuaciones (4.105) y (4.106) respectivamente, este modelo permite representar el comportamiento de la carga estática como uno de los siguientes:

- Impedancia constante:  $m = n = 2$ .
- Corriente constante:  $m = n = 1$ .
- Potencia constante:  $m = n = 0$ .

Los componentes  $Re$  e  $Im$  de la corriente de carga son:

$$i_{Re} = P_L \frac{v_{Re}}{V^2} + Q_L \frac{v_{Im}}{V^2} \quad (4.108)$$

$$i_{Im} = P_L \frac{v_{Im}}{V^2} + Q_L \frac{v_{Re}}{V^2} \quad (4.109)$$

Linealizando estas ecuaciones, encontramos:

$$\begin{aligned} \Delta i_{Re} = & \frac{v_{Re0}}{V_0^2} \Delta P_L + \frac{v_{Im0}}{V_0^2} \Delta Q_L + \frac{P_{L0}}{V_0^2} \Delta v_{Re} + \frac{Q_{L0}}{V_0^2} \Delta v_{Im} \\ & + (P_{L0} v_{Re0} + Q_{L0} v_{Im0}) \left( -\frac{2}{V_0^3} \right) \Delta V \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \Delta i_{Im} = & \frac{v_{Im0}}{V_0^2} \Delta P_L - \frac{v_{Re0}}{V_0^2} \Delta Q_L + \frac{P_{L0}}{V_0^2} \Delta v_{Im} - \frac{Q_{L0}}{V_0^2} \Delta v_{Re} \\ & + (P_{L0} v_{Im0} - Q_{L0} v_{Re0}) \left( -\frac{2}{V_0^3} \right) \Delta V \end{aligned} \quad (4.111)$$

donde,

$$\Delta V = \frac{v_{Re0}}{V_0} \Delta v_{Re} + \frac{v_{Im0}}{V_0} \Delta v_{Im} \quad (4.112)$$

Ahora,

$$\Delta P_L = m \frac{P_{L0}}{V_0} \Delta V \quad (4.113)$$

$$\Delta Q_L = n \frac{Q_{L0}}{V_0} \Delta V \quad (4.114)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.112) - (4.114) en las ecuaciones (4.110) y (4.111), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta i_{Re} \\ \Delta i_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{RR} & B_{RI} \\ -B_{IR} & G_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_{Re} \\ \Delta v_{Im} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

donde,

$$G_{RR} = \frac{P_{L0}}{V_0^2} \left( (m-2) \frac{v_{Re0}^2}{V_0^2} + 1 \right) + \frac{Q_{L0}}{V_0^2} \left( (n-2) \frac{v_{Re0} v_{Im0}}{V_0^2} \right)$$

$$B_{RI} = \frac{Q_{L0}}{V_0^2} \left( (n-2) \frac{v_{Im0}^2}{V_0^2} + 1 \right) + \frac{P_{L0}}{V_0^2} \left( (m-2) \frac{v_{Re0} v_{Im0}}{V_0^2} \right)$$

$$B_{IR} = \frac{Q_{L0}}{V_0^2} \left( (n-2) \frac{v_{Re0}^2}{V_0^2} + 1 \right) - \frac{P_{L0}}{V_0^2} \left( (m-2) \frac{v_{Re0} v_{Im0}}{V_0^2} \right)$$

$$G_{II} = \frac{P_{L0}}{V_0^2} \left( (m-2) \frac{v_{Im0}^2}{V_0^2} + 1 \right) - \frac{Q_{L0}}{V_0^2} \left( (n-2) \frac{v_{Re0} v_{Im0}}{V_0^2} \right)$$

La matriz equivalente de admitancia de la ecuación (4.115) representa una carga estática que puede ser directamente implementada en la matriz de admitancia de la red. Sin

embargo, la matriz de admitancia equivalente que representa cargas no lineales no es simétrica y no representa una simple admitancia en derivación a tierra como en el caso de una carga de impedancia constante [1].

#### 4.10. Representación de un sistema multi-máquina para estudios de estabilidad.

Un análisis práctico de un sistema de potencia involucra la solución simultánea de las ecuaciones que representan:

- Máquinas síncronas y sus sistemas de excitación asociados y motores primarios.
- Redes de transmisión interconectadas
- Cargas estáticas y dinámicas (motores)
- Otros dispositivos como convertidores de corriente directa de alto voltaje, compensadores estáticos de VAR.

Para los estudios de estabilidad de los sistemas de potencia es apropiado negar los efectos de los transitorios de las líneas de transmisión y del estator de las máquinas. La dinámica de los circuitos del rotor de las máquinas síncronas, sistemas de excitación, motores primarios y otros dispositivos se representan mediante ecuaciones diferenciales. El resultado es que el modelo completo del sistema consiste en un gran número de ecuaciones diferenciales y algebraicas.

Como se mencionó en la sección 4.6, cada modelo de la máquina se expresa en su propio marco de referencia.

Para representar un sistema de  $n$  generadores, estos pueden expresarse utilizando las ecuaciones (4.97) y (4.67) de la forma:

$$\Delta \dot{X}_s = A_s \Delta X_s + E_s \Delta u_s + B_s \Delta v_s \quad (4.116)$$

$$\Delta i_s = C_s \Delta X_s + Y_s \Delta v_s \quad (4.117)$$

donde las matrices  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $E_s$ , y  $Y_s$  son matrices de bloques diagonales que contienen las respectivas matrices  $A_g$ ,  $B_g$ ,  $C_g$ ,  $E_g$ , y  $Y_g$  de cada generador de la forma:

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{g1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{g2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{gn} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} B_{g1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{g2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{gn} \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} C_{g1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{g2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{gn} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

$$E_s = \begin{bmatrix} E_{g1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{g2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{gn} \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

$$Y_s = \begin{bmatrix} Y_{g1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y_{g2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{gn} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

y donde los vectores  $\Delta X_s$ ,  $\Delta v_s$ ,  $\Delta i_s$  y  $\Delta u_s$  son:

$$\Delta X_s = \begin{bmatrix} \Delta X_{g1} \\ \Delta X_{g2} \\ \vdots \\ \Delta X_{gn} \end{bmatrix}, \quad \Delta v_s = \begin{bmatrix} \Delta v_{g1} \\ \Delta v_{g2} \\ \vdots \\ \Delta v_{gn} \end{bmatrix}, \quad \Delta i_s = \begin{bmatrix} \Delta i_{g1} \\ \Delta i_{g2} \\ \vdots \\ \Delta i_{gn} \end{bmatrix}, \quad \Delta u_s = \begin{bmatrix} \Delta u_{g1} \\ \Delta u_{g2} \\ \vdots \\ \Delta u_{gn} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

La ecuación de la red se puede expresar de forma incremental como:

$$\Delta i = Y_n \Delta v \quad (4.124)$$

donde,

$$\Delta i = \begin{bmatrix} \Delta i_{re1} \\ \Delta i_{im1} \\ \vdots \\ \Delta i_{ren} \\ \Delta i_{imn} \end{bmatrix}, \quad \Delta v = \begin{bmatrix} \Delta v_{re1} \\ \Delta v_{im1} \\ \vdots \\ \Delta v_{ren} \\ \Delta v_{imn} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

donde  $\Delta \mathbf{i}$  contiene los incrementos de las inyecciones de corriente a la red,  $\Delta \mathbf{v}$  los voltajes nodales y  $\mathbf{Y}_n$  contiene las cargas ZIP de los elementos de la red.

o bien:

$$\Delta \mathbf{i}_s = \mathbf{Y}_N \Delta \mathbf{v}_s \quad (4.126)$$

Si igualamos las ecuaciones (4.126) y (4.117) se tiene:

$$C_s \Delta X_s + Y_s \Delta v_s = Y_N \Delta v_s \quad (4.127)$$

y despejando para  $\Delta v_s$ :



$$\Delta v_s = (Y_N - Y_s)^{-1} C_s \Delta X_s \quad (4.128)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (4.116) se obtiene:

$$\Delta \dot{X}_s = A_s \Delta X_s + B_s (Y_N - Y_s)^{-1} C_s \Delta X_s + E_s \Delta u_s \quad (4.129)$$

que se simplifica como:

$$\Delta \dot{X}_s = A \Delta X_s + E_s \Delta u_s \quad (4.130)$$

donde,

$$A = A_s + B_s (Y_N - Y_s)^{-1} C_s \quad (4.131)$$

Finalmente, para un sistema que ha sido perturbado hace mucho tiempo se tiene  $\Delta u_s = 0$  y bajo esta condición, el comportamiento del sistema eléctrico de potencia para análisis de pequeña señal puede describirse por medio de la transformación lineal:

$$\Delta \dot{X}_s = A \Delta X_s \quad (4.132)$$

# 5. Procedimientos para análisis modal ajustados a datos medidos

---

## 5.1. Introducción.

Para el estudio de oscilaciones en pequeña señal de un sistema de potencia, se debe tener en cuenta que, para tener un entendimiento completo de este fenómeno, se deben utilizar varias herramientas analíticas, como son el análisis de flujos de carga, simulaciones de estabilidad y técnicas de análisis modal.

Las diversas técnicas de análisis modal determinan los modos característicos de oscilación del sistema de potencia mediante un modelo lineal del sistema, con este análisis se puede determinar la naturaleza de las oscilaciones y de esta manera poder evaluar la estabilidad de este para realizar prácticas de operación y planeación que contemplen el comportamiento dinámico del sistema o diseñar controles para los elementos del sistema que pueden ocasionar un incremento en las oscilaciones.

El análisis modal utiliza técnicas de eigenvalores para determinar la estabilidad por pequeños disturbios. Un método muy utilizado para los análisis de pequeña señal es el Método de Prony y Multi-Prony que será introducido en este capítulo.

## 5.2. Análisis modal.

El sistema de potencia está compuesto por elementos que tienen una característica no lineal, como son los generadores, sistemas de excitación, controles de velocidad, cargas. Para el análisis de un sistema de potencia puede utilizarse una representación lineal del mismo, tomando como principio que el sistema es lineal si se opera en un punto de equilibrio. Es decir, si el sistema de potencia es perturbado por un disturbio de pequeña señal, el nuevo estado de operación del sistema no difiere mucho del original, en otras palabras, los parámetros de las variables de estado del sistema no tendrán gran cambio que dificulte el análisis.

Como se vio anteriormente en el capítulo 4, para poder analizar el comportamiento de un sistema y poder determinar la naturaleza de las oscilaciones, el sistema debe ser linealizado. En un sistema lineal, la dinámica puede ser descrita por un conjunto de modos, un modo está caracterizado por su frecuencia y su amortiguamiento.

El análisis modal utiliza técnicas de eigenvalores para determinar la estabilidad ante pequeñas perturbaciones, lo que conocemos como pequeña señal, y es de suma utilidad para determinar si un sistema necesita un control para amortiguar dichas oscilaciones.

El análisis modal, conocido ampliamente como análisis de valores propios o eigenvalores, es una técnica usada para el análisis del comportamiento oscilatorio de los sistemas de potencia, el cual tiene las siguientes ventajas:

- La forma sistemática como se obtiene la información muestra las características del fenómeno dinámico.
- Los modos débilmente amortiguados e inestables son seleccionados y pueden analizarse en detalle, lo que permite identificar el patrón de oscilación.
- Se proporcionan índices para ubicar medidas amortiguadoras atenuantes tales como dispositivos estabilizadores de potencia.

El análisis modal utiliza técnicas de eigenvalores para determinar la estabilidad ante pequeños disturbios. Este método forma la matriz de estado del sistema y entonces usa una subrutina para el cálculo de los eigenvalores de la matriz. Este análisis está basado en el análisis de estabilidad por el primer método de Lyapunov, el cual establece que la estabilidad ante pequeños disturbios de un sistema no lineal está determinada por los eigenvalores de la matriz de estado (las raíces de la ecuación característica del sistema lineal de primeras aproximaciones) [1], en resumen:

1. Cuando los eigenvalores tienen parte real negativa, el sistema original es asintóticamente estable.
2. Cuando al menos uno de los eigenvalores tiene una parte real positiva, el sistema original es inestable.
3. Cuando los eigenvalores tienen parte real igual a cero no es posible concluir nada en base a la primera aproximación.

El análisis modal es ideal para la investigación de problemas asociados con oscilaciones. La estabilidad de cada modo está claramente identificada y separada por los

eigenvalores correspondientes. Así también, la forma del modo y las relaciones entre diferentes modos y variables del sistema o parámetros son identificadas sin ambigüedades. Existen varios problemas donde el uso del análisis modal es acertado, el primero de ellos es el relacionado con la estabilidad de los controles asociados a los generadores y otros dispositivos dinámicos, el otro se refiere a la capacidad de distinguir entre oscilaciones cuya magnitud decae con el tiempo y aquellas cuya magnitud se mantendrá constante o incluso crecerá.

Pero de igual manera, existen desventajas del método. Una desventaja consiste en que la técnica de análisis modal convencional obtiene los eigenvalores a partir de una matriz de estado que no tiene una estructura especial que pueda ser explotada de tal forma que sea posible analizar sistemas muy grandes y complejos. Así, el análisis con eigenvalores y los análisis en el dominio del tiempo, como es el caso del método Prony, se usan complementariamente.

### 5.3. Eigenvalores y Eigenvectores.

Los eigenvalores son las  $n$  soluciones no triviales de la ecuación característica correspondiente a la ecuación de estado. Los eigenvalores de una matriz serán dados por los valores asociados al valor de un parámetro escalar  $\lambda$  de la ecuación

$$A\phi = \lambda\phi \quad (5.1)$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times n$  y  $\phi$  es un vector  $n \times 1$ .

En forma general, los eigenvalores están definidos como:

$$\lambda = \sigma \pm j\omega \quad (5.2)$$

Para encontrar los eigenvalores, la ecuación (5.1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$(A - \lambda I)\phi = 0 \quad (5.3)$$

Para escoger los eigenvalores  $\lambda$  que satisfagan la ecuación (5.3) se debe considerar que la matriz  $(A - \lambda I)$  no es invertible, es decir, que su determinante es nulo, de lo contrario la transformación lineal  $(A - \lambda I)\phi$  tendrá la solución trivial  $x = 0$ . Por tanto, se debe resolver la ecuación:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (5.4)$$

La expansión de los determinantes nos da lo que se denomina la *ecuación característica* de la matriz  $A$ . Las  $n$  soluciones de  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los eigenvalores de  $A$ .

Tomando en cuenta que la matriz  $A$  siempre será real para el tipo de análisis que se llevará a cabo, los eigenvalores de ésta pueden ser reales o complejos conjugados. Para que el sistema sea estable, las partes reales de los eigenvalores deben ser negativas. Esto implica que, después de un pequeño disturbio, los modos decaerán con el tiempo y el sistema alcanzará el estado permanente, ya sea el original o algún nuevo punto de equilibrio. Si cualquiera de estos eigenvalores tiene una parte real positiva, después de un disturbio de pequeña señal, la amplitud de modo se incrementará exponencialmente y el sistema se denominará inestable.

Las soluciones  $x_i$  diferentes de cero correspondientes son los eigenvectores derechos de  $A$  y a partir de ahora se representarán con  $\phi_i$ , por tanto, la ecuación (5.1) se escribirá como:

$$A\phi_i = \lambda_i\phi_i \quad (5.5)$$

De forma similar, el vector  $\psi_i$  que satisface:

$$\psi_i A = \psi_i \lambda_i \quad (5.6)$$

se denomina *eigenvector izquierdo*.

Siendo  $\phi_i$  y  $\psi_j$  un eigenvector derecho y un eigenvector izquierdo asociados con los eigenvalores diferentes  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  estos son ortogonales, es decir:

$$(\psi_j, \phi_i) = 0 \quad (5.7)$$

y para el caso de un eigenvector izquierdo y un eigenvector derecho asociado con el mismo eigenvalor se tiene:

$$(\psi_i, \phi_i) = C_i \quad (5.8)$$

donde  $C_i$  es una constante diferente de cero. Los eigenvectores derecho e izquierdo son ortogonales, y usualmente son escalados para ser ortonormales. Como estos eigenvectores se asocian con un escalar, pueden ser normalizados tal que:

$$(\psi_i, \phi_i) = 1 \quad (5.9)$$

Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  se deben considerar los siguientes teoremas:

- I. Existe al menos un eigenvector asociado con cada eigenvalor  $\lambda_i$  distinto.

- II. El conjunto de todos los eigenvectores derechos correspondientes a un mismo eigenvalor (repetido) forman un subespacio invariante si se agrega un vector 0 al conjunto.
- III. Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  es una colección de distintos eigenvalores y  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$  forma un conjunto de eigenvectores asociados a cada eigenvalor, entonces  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s\}$  es linealmente independiente.
- IV. Si  $\lambda_i$  es un eigenvalor de A y  $\|A\|$  es un operador de la norma de A, entonces  $|\lambda_i| \leq \|A\|$ .

## 5.4. Matrices modales y ecuación de movimiento libre.

A fin de entender las eigenpropiedades de A de manera sencilla y concisa, e conveniente introducir las siguientes matrices:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] \quad (5.10)$$

$$\Psi = [\psi_1^T, \psi_2^T, \dots, \psi_n^T] \quad (5.11)$$

$$\Lambda = \text{Es una matriz diagonal, con los eigenvalores } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ como elementos de la diagonal} \quad (5.12)$$

Cada una de las matrices mencionadas anteriormente tiene una dimensión  $n \times n$ . En términos de esas matrices, la ecuación (5.5) puede expresarse de la siguiente manera:

$$A\Phi = \Phi\Lambda \quad (5.13)$$

$$\Psi\Phi = I \quad \Psi = \Phi^{-1} \quad (5.14)$$

Y despejando la ecuación (5.13) para  $\Lambda$ , obtendremos:

$$\Lambda = \Phi^{-1}A\Phi \quad (5.15)$$

La ecuación de movimiento libre está dada por:

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x \quad (5.16)$$

Un conjunto de ecuaciones de la forma anterior, derivadas de las consideraciones físicas, no es la mejor forma de hacer análisis de movimiento. El problema recae en que el rango de cambio de cada variable de estado es una combinación lineal de todas las variables de estado, es por ello por lo que es difícil aislar aquellos parámetros que tienen una significativa influencia en el movimiento.

Con el fin de eliminar lo anterior, se considera un nuevo vector de estado  $z$  relacionado con el vector de estado original ( $\Delta x$ ) mediante la siguiente transformación:

$$\Delta x = \Phi z \quad (5.17)$$

donde  $\Phi$  es una matriz modal de  $A$  definida en la ecuación (5.10). Si sustituimos a expresión anterior por  $\Delta x$  en la ecuación de estado de movimiento libre, obtendremos

$$\Phi \dot{z} = A\Phi z \quad (5.18)$$

Despejando la ecuación, obtendremos la nueva ecuación de estado que puede expresarse como,

$$\dot{z} = \Phi^{-1}A\Phi z \quad (5.19)$$

Podemos sustituir la ecuación (5.15) en la ecuación anterior,

$$\dot{z} = \Lambda z \quad (5.20)$$

La ecuación (5.20) representa un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden desacopladas (escalares)

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.21)$$

El efecto de la transformación es por lo tanto desacoplar las ecuaciones de estado.

La ecuación (5.21) es una simple ecuación diferencial de primer orden cuya solución en función del tiempo  $t$  está dada por:

$$z_i(t) = z_i(0)e^{\lambda_i t} \quad (5.22)$$

donde  $z_i(0)$  es la condición inicial de  $z_i$ .

Considerando nuevamente la transformación  $\Delta x = \Phi z$ , la respuesta en términos del vector de estado original está dado por

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Phi z(t) \\ &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Lo cual, en función de la ecuación (5.22), implica que:

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i z_i(0) e^{\lambda_i t} \quad (5.24)$$

De la ecuación (5.23), se tiene:

$$\begin{aligned} z(t) &= \Phi^{-1} \Delta x(t) \\ &= \Psi \Delta x(t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Lo que implica que:

$$z_i(t) = \psi_i \Delta x(t) \quad (5.26)$$

Con  $t = 0$ , resulta:

$$z_i(0) = \psi_i \Delta x(0) \quad (5.27)$$

Usando  $c_i$  para denominar al producto escalar  $\psi_i \Delta x(0)$ , la ecuación (5.24) puede escribirse como:

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i c_i e^{\lambda_i t} \quad (5.28)$$

En otras palabras, la respuesta en el tiempo de la  $i$ -ésima variable de estado está dada por:

$$\Delta x_i(t) = \phi_{i1} c_1 e^{\lambda_1 t} + \phi_{i2} c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \phi_{in} c_n e^{\lambda_n t} \quad (5.29)$$

La ecuación anterior representa la respuesta natural en el tiempo del sistema en términos de los eigenvalores y los eigenvectores izquierdos y derechos. Así, la respuesta natural está dada por una combinación lineal de  $n$  modos dinámicos correspondientes a los  $n$  eigenvalores de la matriz de estado.

El producto escalar  $c_i = \psi_i \Delta x(0)$  representa la magnitud de la excitación del  $i$ -ésimo modo resultante de las condiciones iniciales.

Si las condiciones iniciales se encuentran en la dirección del  $j$ -ésimo eigenvector, el producto escalar  $\psi_i \Delta x(0)$  para todo  $i \neq j$  será cero. Por lo tanto, sólo el  $j$ -ésimo modo es excitado.

Si el vector que representa las condiciones iniciales no es un eigenvector, este puede ser representado por una combinación lineal de los  $n$  eigenvectores. La respuesta del sistema será la suma de las  $n$  respuestas. Si las componentes de las condiciones iniciales en la dirección de un eigenvector son cero, el correspondiente modo no será excitado.

La característica dependiente del tiempo de un modo correspondiente a un eigenvalor  $\lambda_i$  está dado por  $e^{\lambda_i t}$ . Por lo tanto, la estabilidad está determinada por el eigenvalor según:

- a) *Un eigenvalor real* corresponde a un modo no oscilatorio. Un eigenvalor real negativo representa un modo que decae exponencialmente. Cuanto mayor su magnitud, más rápido decae. Un eigenvalor real positivo representa una inestabilidad aperiódica. Los valores de  $c$  y los eigenvectores asociados a eigenvalores reales también son reales.



- b) *Los eigenvalores complejos* aparecen en pares conjugados y cada uno de estos pares corresponden a un modo oscilatorio. Los valores  $c$  y los eigenvectores asociados tendrán valores complejos tales que hagan a  $x(t)$  real para todo instante de tiempo.

Por ejemplo,

$$(a + jb)e^{(\sigma - j\omega)t} + (a - jb)e^{(\sigma + j\omega)t}$$

tiene la forma:

$$e^{\sigma t} \text{sen}(\omega t + \theta)$$

La cual representa una senoide amortiguada para valores negativos de  $\sigma$ .

La componente real del eigenvalor da el amortiguamiento, y la componente imaginaria da la frecuencia de oscilación. Un valor negativo de la parte real representa una oscilación amortiguada mientras que un valor positivo representa una oscilación de amplitud creciente. Así, para un par de eigenvalores complejos:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Esto representa la frecuencia real o amortiguada. El coeficiente de amortiguamiento está dado por

$$\zeta = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$

## 5.5. Forma del modo y eigenvalores.

Anteriormente, se habló de la respuesta del sistema en términos del vector de estados  $\Delta x$  y  $z$ , los cuales están relacionados entre sí según:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Phi z(t) \\ &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] [z(t)] \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \Psi \Delta x(t) \\ &= [\psi_1^T \quad \psi_2^T \quad \cdots \quad \psi_n^T] \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Las variables  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  son las variables de estado originales elegidas para representar el comportamiento dinámico del sistema. Las variables  $z_1, z_2, \dots, z_n$  son las variables de estado transformadas tal que cada variable está asociada con un sólo modo. En otras palabras, las variables transformadas  $z$  están directamente relacionadas a los modos.

De la ecuación (5.30) se tiene que el *eigenvector derecho* da la *forma del modo*, es decir, la actividad relativa de cada una de las variables de estado cuando un modo particular es excitado. Por ejemplo, el grado de actividad de la variable  $x_k$  debido al  $i$ -ésimo modo está dada por el  $k$ -ésimo elemento del *eigenvector derecho*  $\phi_i$ .

La magnitud de los elementos de  $\phi_i$  da el grado de actividad de las  $n$  variables de estado debido al  $i$ -ésimo modo, y el ángulo de los elementos da el desplazamiento en fase de las variables de estado con respecto al modo.

Tomando la ecuación (5.31), el *eigenvector izquierdo*  $\psi_i$  identifica que combinación de variables de estado originales permite mostrar sólo el  $i$ -ésimo modo. Así como, el  $k$ -ésimo elemento del *eigenvector derecho*  $\phi_i$  mide la actividad de la variable  $x_k$  debido al  $i$ -ésimo modo, el  $k$ -ésimo elemento del *eigenvector izquierdo*  $\psi_i$  pesa la contribución de esta actividad en el  $i$ -ésimo modo.

Un problema de utilizar individualmente los *eigenvectores derechos* e *izquierdos*, para identificar las relaciones entre los estados y los modos, es que los elementos de los *eigenvectores* son dependientes de las unidades y escalas asociadas con las variables de estado. Como solución a este problema, se utiliza una matriz llamada *matriz de participación* ( $P$ ) la cual combina el *eigenvector derecho* e *izquierdo* para formar una medida de la asociación existente entre las variables de estado y los modos.

## 5.6. Factores de participación.

Ya que la respuesta en el tiempo de un sistema dinámico puede describirse en función de sus modos de oscilación, los factores de participación miden la participación neta de las variables de estado en cada modo.

Un problema de utilizar individualmente los *eigenvectores derechos* e *izquierdos*, para identificar las relaciones entre los estados y los modos, es que los elementos de los *eigenvectores* son dependientes de las unidades y escalas asociadas con las variables de estado. Como solución a este problema, se utiliza una matriz llamada *matriz de participación* ( $P$ ) la cual combina el *eigenvector derecho* e *izquierdo* para formar una medida de la asociación existente entre las variables de estado y los modos.

Considerando un sistema lineal en el espacio de estados representado en la ecuación (3.19) y su solución en (3.20), donde existen las matrices modales  $\Phi$  y  $\Psi$  para  $A$  cuyos

eigenvalores describen los modos de oscilación del sistema. Se puede calcular una medida de la asociación entre las variables de estado y los modos de oscilación con una matriz de participación  $P$  descrita por:

$$P = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n] \quad (5.32)$$

con:

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \psi_{i1} \\ \phi_{2i} \psi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \psi_{in} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

donde  $\phi_{ki}$  es el elemento en la fila  $k$  y columna  $i$  de la matriz modal  $\Phi$  (el elemento  $k$  del eigenvector derecho  $\phi_i$ ); y  $\psi_{ik}$  es el elemento de la fila  $i$  y la columna  $k$  de la matriz modal  $\Psi$  (el elemento  $k$  del eigenvector izquierdo  $\psi_i$ ).

El elemento  $p_{ki} = \phi_{ki} \psi_{ik}$  es denominado factor de participación y es una medida de la participación relativa del modo de oscilación  $i$  en la variable de estado  $k$  y viceversa.

Dado que  $\phi_{ki}$  mide la actividad de  $x_k$  en el  $i$ -ésimo modo y  $\psi_{ik}$  mide el aporte de dicha actividad hacia el modo, el producto  $p_{ki}$  mide el factor de participación neto.

## 5.7. Algoritmo de Prony y Multi-Prony.

Existen varias aproximaciones para estimar los modos de oscilación de una señal variante en el tiempo. El método de Prony es ampliamente conocido para la estimación de información modal como frecuencia, amortiguamiento, fuerza y fase relativa [25]. El método de Prony es un análisis que extiende el análisis de Fourier y tiene la habilidad para extraer la información modal proveniente señales proporcionadas en programas de simulación de estabilidad transitoria y/o de pruebas o perturbaciones a sistemas de gran escala, por lo tanto es bien conocido y sumamente usado en aplicaciones de sistemas de potencia para estudios de estabilidad por ingenieros de sistemas eléctricos [3].

Para estimar varios parámetros de una función, el método de Prony utiliza una aproximación de una función exponencial:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (5.34)$$

a una medición observada por  $y(t)$ , donde  $y(t)$  es un  $N$  número de muestras

$$y(t_k) = y(k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

los cuales están uniformemente espaciados por un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Ahora, ya que la señal medida puede contener ruido o una señal extra de CD, ésta debe considerarse o filtrarse antes de aplicar el método.

Podemos resumir el método básico de Prony como sigue:

1. Construir un modelo de predicción lineal discreta a partir de las muestras.
2. Encontrar las raíces del polinomio característico.
3. Usando las raíces como las frecuencias modales complejas de la señal, se determina la amplitud y la fase de los modos.

Estos pasos se realizan en dominio- $z$ , y en el paso final, los eigenvalores se trasladan al dominio- $s$ .

Como hemos visto, la ecuación (5.34) puede expresarse de forma exponencial de la forma:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{\lambda_i t} \quad (5.35)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^n B_i z_i^k \quad (5.36)$$

donde,

$$z_i = e^{\lambda_i \Delta t} \quad (5.37)$$

Los eigenvalores del sistema ( $\lambda$ ) pueden encontrarse en los modos discretos, mediante,

$$\lambda_i = \frac{\ln(z_i)}{\Delta t} \quad (5.38)$$

Los  $z_i$  son las raíces del polinomio de orden  $n$ ,

$$z^n - (a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_0 z^0) \quad (5.39)$$

donde los coeficientes  $a_i$  se desconocen y deben ser calculados a partir del vector de muestra de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} y(n-1) & y(n-2) & \dots & y(0) \\ y(n-0) & y(n-1) & \dots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-2) & y(N-3) & \dots & y(N-n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \dots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Hay que notar que este es un sistema con  $N$  número de ecuaciones y  $n$  incógnitas y, por lo tanto, debe usarse un método matemático de mínimos cuadrados para encontrar el mejor ajuste.

Una vez calculado  $z_i$  por medio de las raíces de la ecuación (5.39), los eigenvalores  $\lambda_i$  pueden ser calculados por medio de la ecuación (5.38). El siguiente paso es encontrar  $B_i$  que produzca  $\hat{y}(k) = y(k)$  para cualquier  $k$ , lo que nos lleva a la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_n^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_n^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \cdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

El cual puede representarse como,

$$ZB = Y \quad (5.42)$$

Como puede notarse, la dimensión de la matriz  $B$  es  $n \times N$ ; por lo tanto, la ecuación (5.42) tendrá que resolverse, de igual manera, por el método de mínimos cuadrados. La forma de onda  $\hat{y}(k)$  se podrá obtener de la ecuación (5.36), la cual no será completamente igual y no se ajustará por completo a  $y(t)$  de manera exacta.

Como el ajuste para este método puede ser inexacto, es deseable tener control sobre el nivel de error entre la función de ajuste y la forma de onda original. En este caso, los mínimos cuadrados no lineales pueden proporcionar mejores resultados [26].

Ahora consideremos que no solo tenemos una señal medida, sino que tenemos varias señales, el método de Prony puede usarse para analizar cada señal de manera individual de manera independiente, pero hacer esto a menudo, nos causaría un conflicto al estimar la frecuencia y el amortiguamiento. Un método convencional para encontrar el vector  $a$  de un variedad de señales de manera simultánea ha sido documentado en [7]. Ahora haremos una breve descripción del método.

Supongamos que tenemos un número  $m$  de señales medidas, por ejemplo, por PMU's; ahora, cada serie de dato de la señal se toman en un mismo periodo de tiempo. Un análisis lineal, nos mostrará la ecuación (5.36) de la siguiente forma:

$$\hat{y}_m(t) = \sum_{i=1}^n B_{mi} z_i^k \quad (5.43)$$

Para cada canal del PMU es posible formular una matriz  $D$  y un vector  $Y$ . Los cuales podemos denominar como  $D_i$  y  $Y_i$  por cada  $i$ -ésimo canal de medición.

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_m \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

En este caso, por ejemplo, los  $m$  canales pueden ser de un simple PMU o de múltiples PMU, es decir, que puede tener múltiples canales para mediciones como: frecuencia, voltaje, potencia real o reactiva. Los datos no necesariamente deben ser del mismo tipo.

Un factor para considerar es el número señales, si el número de señales aumenta, a estimación de mínimos cuadrados tendrá que manejar una matriz de gran tamaño. El tamaño de la matriz será muy grande si se considera, además, un largo periodo de tiempo con señales recopiladas de varias ubicaciones. Por lo tanto, para lograr escalabilidad, se han usado análisis de Prony distribuidos [27].

# 6. Uso de la herramienta Power System Simulator for Engineering (PSS/E) para analizar información basada en mediciones fasoriales en particular el análisis de Prony

---

## 6.1. Introducción.

En el presente capítulo se muestra el programa a utilizar para obtener los flujos de potencia y la simulación dinámica de un caso propuesto en [1], el cual es un sistema de dos áreas altamente inestable y que ha sido usado por varios autores para estudios de estabilidad en pequeña señal. Los estabilizadores de sistemas de potencia (Power System Stabilizer, “PSS”) fueron y continúan siendo una solución muy exitosa para el análisis de sistemas de potencia en materia de estabilidad en pequeña señal, éstos proveen un sistema de control que actúa junto con el sistema de excitación para generar una cupla en fase con la desviación de la velocidad, de esta manera, el PSS proporciona un amortiguamiento adicional para los modos poco amortiguados, pero estos deben ser detectados por ello se usan programas que ayuden a la estimación de estos modos. Existen programas que nos apoyan con la solución de flujos de potencia para su posterior análisis modal, el programa PSS/E incluye los modelos necesarios para los análisis y se describirán en este capítulo.

## 6.2. Simuladores de sistemas de potencia.

Los simuladores de sistemas de potencia para la planeación y análisis de la energía eléctrica se han convertido en una necesidad muy importante para las comercializadoras que suministran energía eléctrica en los países de todo el mundo debido a que necesitan abordar los análisis de calidad de energía en las redes y, debido a la complejidad de los sistemas de transmisión modernos, se hace necesario un avance en materia computacional para poder

análisis rápidos y confiables en estudios de electricidad. En la actualidad existen una vasta cantidad de programas comerciales que posibilitan dichos estudios, como por ejemplo podemos mencionar PSS/E® (SIEMENS PTI), DSATools (Powertech Labs), DigSilent (Power Factory), SIMPOW (Manitoba HVDC Research Centre); o herramientas de código abierto como por ejemplo el ToolBox PSAT desarrollado para MALAB y DOME (basado en Python), entre otros.

Cada uno de esos programas cumple con su función principal, el de ser una herramienta de análisis de la red eléctrica, entre los análisis que se pueden realizar en estos programas están:

- Flujos de potencia
- Análisis avanzado de contingencias
- Estabilidad de tensión en estado estacionario
- Análisis de cortocircuito (balanceado y desbalanceado)
- Simulación de estabilidad transitoria.
- Flujos óptimos de potencia.
- Modelado de la red eléctrica.
- Análisis de límite de transferencia.
- Reducción de red.
- Estabilidad en pequeña señal.
- Simulación en dominio del tiempo.

Todos estos programas presentan la necesidad de modelar el sistema bajo estudio en una plataforma específica y utilizar los modelos de librería existentes en los mismos. Esto resulta en una gran desventaja al momento de trabajar con grandes sistemas de potencia, con miles de nodos y cientos de generadores y controles asociados que ya se encuentran modelados en una determinada plataforma, no sólo por la tarea que requiere el armado del sistema sino también por las tareas necesarias en la validación del sistema para la obtención de resultados confiables. Así mismo, aunque no se necesite un cambio de programa, muchas de estas herramientas poseen limitaciones al momento de realizar el estudio requerido, como pueden ser el número de variables de estado que pueden manejar, la cantidad de entradas independientes que admite el modelado para el cálculo de índices de controlabilidad o la



cantidad de salidas admisibles para el cálculo de las variables y dificultades para la presentación de resultados.

El programa de simulación PSS/E, es un programa ampliamente utilizado en ambiente industrial para las centrales de control de energía y funciona como una herramienta de análisis y simulación de sistemas de potencia. El PSS/E permite realizar una amplia variedad de estudios: flujo de potencias, análisis dinámicos, cortocircuito, análisis de contingencia, flujo de potencia óptimo, estabilidad transitoria, y mucho más.

Debido a su versatilidad al momento de realizar análisis de sistemas de potencia, el PSS/E se ha vuelto un programa “estándar” en ámbito industrial, SIEMENS ofrece una versión estudiantil universitaria con la cual se pueden hacer simulaciones para el análisis dinámico de sistemas de potencia que serán de gran uso para el tema relacionado con la presente tesis, presenta modelos fácilmente reconocibles en la literatura y en la industria además de una vasta documentación de ellos para su correcta simulación e interpretación.

### 6.3. Caso de estudio.

#### 6.3.1. Descripción del sistema de dos áreas.

El sistema de dos áreas mostrado en la Figura 6.1 está formado por cuatro generadores idénticos, 11 nodos, dos cargas y dos capacitores. Es un caso completamente hipotético y fue desarrollado con el objetivo de determinar cuáles son los factores que afectan la formación de un modo inter-área. Para lograr esto, el sistema fue desarrollado de tal manera que su estructura es simétrica y consiste en dos áreas idénticas e interconectadas a través de un enlace relativamente débil. Cada área cuenta con dos unidades generadoras que suministran la misma potencia de 900 MVA a 20 kV y, para asegurar un adecuado perfil de voltaje, se agregó un capacitor en cada área.

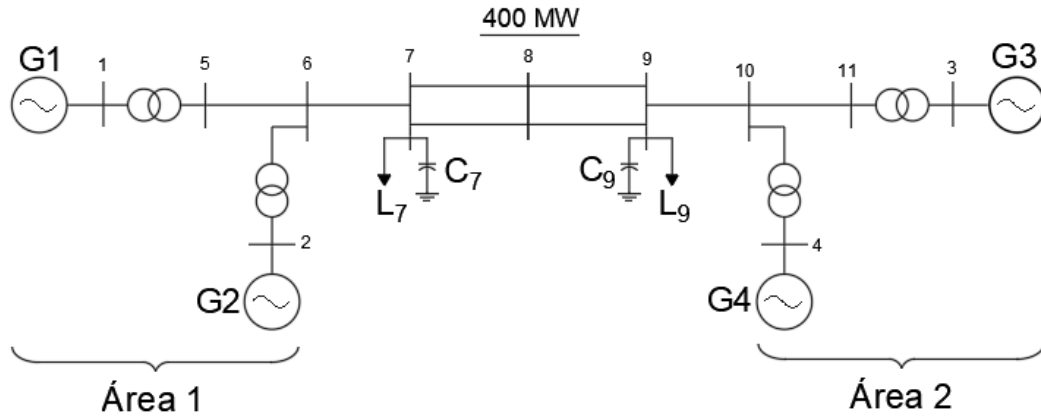


Figura 6.1 Diagrama unifilar del sistema de dos áreas

Los parámetros del sistema de dos áreas se muestran en las siguientes tablas, todos los parámetros se modelan con una base de 900 MVA.

| Parámetro   | Bus al que está conectada la M. S. |        |        |        |
|-------------|------------------------------------|--------|--------|--------|
|             | 1                                  | 2      | 3      | 4      |
| $H$         | 6.5                                | 6.5    | 6.175  | 6.175  |
| $K_D$       | 0                                  | 0      | 0      | 0      |
| $X_d$       | 1.8                                | 1.8    | 1.8    | 1.8    |
| $X_q$       | 1.7                                | 1.7    | 1.7    | 1.7    |
| $X_l$       | 0.2                                | 0.2    | 0.2    | 0.2    |
| $X'_d$      | 0.3                                | 0.3    | 0.3    | 0.3    |
| $X'_q$      | 0.55                               | 0.55   | 0.55   | 0.55   |
| $X''_d$     | 0.25                               | 0.25   | 0.25   | 0.25   |
| $X''_q$     | 0.25                               | 0.25   | 0.25   | 0.25   |
| $R_a$       | 0.0025                             | 0.0025 | 0.0025 | 0.0025 |
| $T'_{d0}$   | 8.0 s                              | 8.0 s  | 8.0 s  | 8.0 s  |
| $T'_{q0}$   | 0.4 s                              | 0.4 s  | 0.4 s  | 0.4 s  |
| $T''_{d0}$  | 0.03 s                             | 0.03 s | 0.03 s | 0.03 s |
| $T''_{q0}$  | 0.05 s                             | 0.05 s | 0.05 s | 0.05 s |
| $A_{sat}$   | 0.015                              | 0.015  | 0.015  | 0.015  |
| $B_{sat}$   | 9.6                                | 9.6    | 9.6    | 9.6    |
| $\Psi_{T1}$ | 0.9                                | 0.9    | 0.9    | 0.9    |

Tabla 6.1 Parámetros de las máquinas síncronas del sistema.

| Buses    |          |          | Elemento        | Parámetros |          |          |          |
|----------|----------|----------|-----------------|------------|----------|----------|----------|
| Nodo $i$ | Nodo $j$ | No. Cto. |                 | $R$ (pu)   | $X$ (pu) | $G$ (pu) | $B$ (pu) |
| 1        | 5        | 1        | Transformador 1 | 0.0        | 0.150    | 0.0      | 0.0      |
| 2        | 6        | 1        | Transformador 2 | 0.0        | 0.150    | 0.0      | 0.0      |
| 3        | 11       | 1        | Transformador 2 | 0.0        | 0.150    | 0.0      | 0.0      |
| 4        | 10       | 1        | Transformador 3 | 0.0        | 0.150    | 0.0      | 0.0      |
| 5        | 6        | 1        | Línea 1         | 0.0225     | 0.225    | 0.0      | 0.00486  |
| 6        | 7        | 1        | Línea 2         | 0.0090     | 0.090    | 0.0      | 0.00194  |
| 7        | 8        | 1        | Línea 3         | 0.0990     | 0.990    | 0.0      | 0.00214  |

| Buses    |          | No. Cto. | Elemento | Parámetros |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|------------|----------|----------|----------|
| Nodo $i$ | Nodo $j$ |          |          | $R$ (pu)   | $X$ (pu) | $G$ (pu) | $B$ (pu) |
| 7        | 8        | 2        | Línea 4  | 0.0990     | 0.990    | 0.0      | 0.00214  |
| 8        | 9        | 1        | Línea 5  | 0.0990     | 0.990    | 0.0      | 0.00214  |
| 8        | 9        | 2        | Línea 6  | 0.0990     | 0.990    | 0.0      | 0.00214  |
| 9        | 10       | 1        | Línea 7  | 0.0090     | 0.090    | 0.0      | 0.00194  |
| 10       | 11       | 1        | Línea 8  | 0.0225     | 0.225    | 0.0      | 0.00486  |

Tabla 6.2 Parámetros de la red de transmisión

### 6.3.2. Descripción del modelo del generador.

El modelo del generador para el sistema de dos áreas descrito está en parámetros estandarizados. El fabricante proporciona usualmente lo que se conoce como parámetros estandarizados, pero para la linealización y el modelado de las máquinas en el programa, es necesario hacer el cambio de parámetros para obtener los parámetros fundamentales de la máquina síncrona.

El programa PSS/E contiene varios modelos de generadores síncronos, para poder usar los parámetros fundamentales se usa el modelo de generador CGEN1, con el cual podemos usar el circuito equivalente de la máquina síncrona mostrado en la Figura 6.1. El cual es un modelo que incluye un amortiguador en el eje- $d$  y dos amortiguadores en el eje- $q$ .

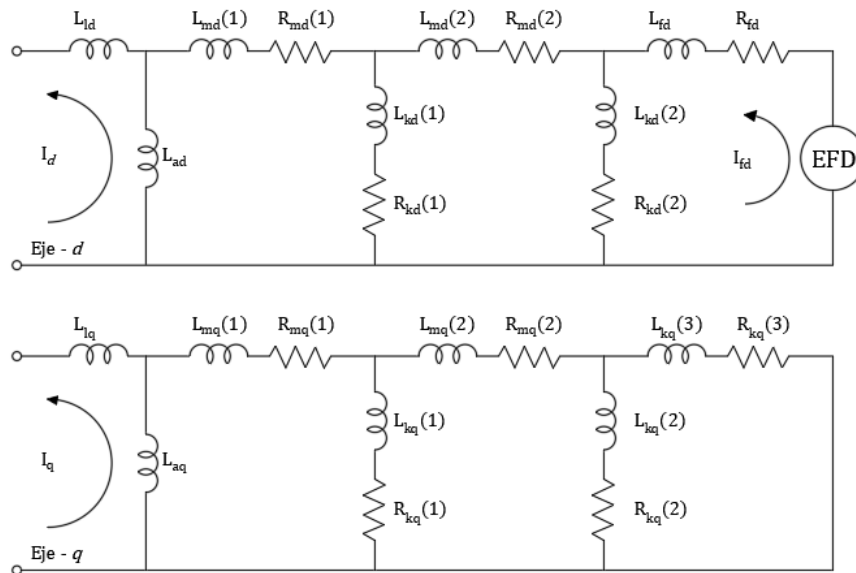


Figura 6.1 Modelo de circuito equivalente de una máquina síncrona CGEN1 en PSS/E

De esta manera, los parámetros se insertan en el PSS/E con el modelo proporcionado por el programa, la Tabla 6.3 muestra los parámetros del generador adaptado al modelo del generador CGEN1 para los estudios dinámicos.

| Parámetro   | Nodo   |        |        |        |
|-------------|--------|--------|--------|--------|
|             | 1      | 2      | 3      | 4      |
| $R_s$       | 0.0025 | 0.0025 | 0.0025 | 0.0025 |
| $L_{ld}$    | 0.2000 | 0.2000 | 0.2000 | 0.2000 |
| $L_{lq}$    | 0.2000 | 0.2000 | 0.2000 | 0.2000 |
| $L_{ad}$    | 1.6000 | 1.6000 | 1.6000 | 1.6000 |
| $L_{fd}$    | 0.1067 | 0.1067 | 0.1067 | 0.1067 |
| $L_{kd}$    | 0.1000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1000 |
| $L_{ad}$    | 1.5000 | 1.5000 | 1.5000 | 1.5000 |
| $L_{kq}(3)$ | 0.0583 | 0.0583 | 0.0583 | 0.0583 |
| $R_{fd}$    | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 |
| $R_{kd}$    | 0.0177 | 0.0177 | 0.0177 | 0.0177 |
| $R_{kq}(3)$ | 0.0217 | 0.0217 | 0.0217 | 0.0217 |
| $L_{kq}(1)$ | 0.4565 | 0.4565 | 0.4565 | 0.4565 |
| $R_{kq}(3)$ | 0.0130 | 0.0130 | 0.0130 | 0.0130 |
| H           | 6.5000 | 6.5000 | 6.1750 | 6.1750 |

*Tabla 6.3 Datos dinámicos del generador CGEN1*

### 6.3.3. Descripción del modelo del excitador.

Con el objetivo de mejorar el comportamiento dinámico del sistema relacionado con el devanado de campo, se utilizó un excitador de corriente alterna modelo AC4A.

Este sistema de excitación es considerado como de alta respuesta inicial, para lo cual utiliza un puente de tiristores de onda completa a la salida de la excitatriz. En este sistema de excitación, el regulador de voltaje es el que controla el disparo de los puentes de tiristores. A su vez, el alternador de la excitatriz usa un regulador de voltaje independiente para controlar su salida de voltaje a un valor constante [28]. Estos efectos no son modelados.

La estabilización del sistema de excitación generalmente es proporcionada en forma de una red de atraso-adelanto en serie, cuya dinámica puede simularse a través de las constantes de tiempo  $T_B$  y  $T_C$ . La ganancia  $K_A$  y la constante de tiempo  $T_A$  nos permiten representar el comportamiento general asociado con el regulador de voltaje y/o el disparo de los tiristores.

La Tabla 6.4 y la Figura 6.2 muestran el modelo y los parámetros utilizados en el sistema de dos áreas, cada nodo de generación incluye su sistema de excitación modelado de manera similar para los cuatro generadores.

| Parámetro | Nodo |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|
|           | 1    | 2    | 3    | 4    |
| $K_A$     | 200  | 200  | 200  | 200  |
| $T_A$     | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.04 |
| $T_R$     | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| $T_C$     | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.0  |
| $T_B$     | 0.0  | 0.0  | 0.0  | 0.0  |

Tabla 6.4 Parámetros de los sistemas de excitación AC4A

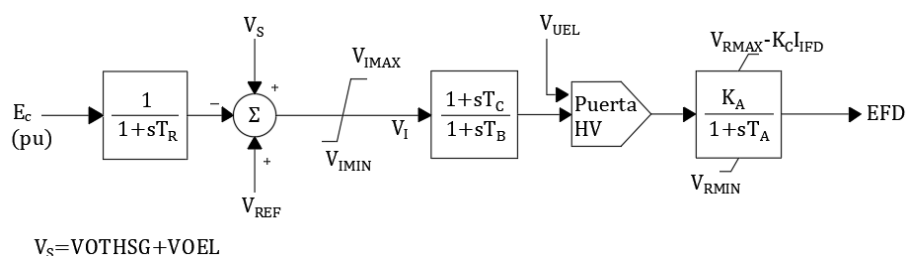


Figura 6.2 Modelo del excitador IEEE AC4A proporcionado por PSS/E

## 6.4. Resultados de la corrida de flujos del sistema de dos áreas.

El sistema de dos áreas fue simulado usando el programa PSS/e, la solución de flujos de potencia se muestra en Tabla 6.5.

| Nodo | V (p.u.) | Ángulo ( $\delta$ ) | Generación    |                 | Cargas        |                 | Capacitores        |
|------|----------|---------------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|--------------------|
|      |          |                     | $P_G$<br>(MW) | $Q_G$<br>(MVAR) | $P_C$<br>(MW) | $Q_C$<br>(MVAR) | $Q_{sh}$<br>(MVAR) |
| 1    | 1.03     | 27.0693             | 700           | 185.0026        | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 2    | 1.01     | 17.3050             | 700           | 234.5803        | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 3    | 1.03     | 0                   | 719.0996      | 175.9998        | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 4    | 1.01     | -10.1921            | 700           | 202.0493        | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 5    | 1.0065   | 20.6074             | 0.0           | 0.0             | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 6    | 0.9781   | 10.5229             | 0.0           | 0.0             | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 7    | 0.961    | 2.1138              | 0.0           | 0.0             | 967           | 100             | 200                |
| 8    | 0.9486   | -11.7556            | 0.0           | 0.0             | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 9    | 0.9714   | -25.3525            | 0.0           | 0.0             | 1767          | 100             | 350                |
| 10   | 0.9835   | -16.9372            | 0.0           | 0.0             | 0.0           | 0.0             | 0.0                |
| 11   | 1.0083   | -6.6270             | 0.0           | 0.0             | 0.0           | 0.0             | 0.0                |

Tabla 6.5 Resultado de la solución de flujos del sistema de dos áreas

# 7. Resultados de la aplicación PSS/E usando el sistema de prueba clásico de dos áreas de Kundur

---

## 7.1. Introducción.

En el presente capítulo se muestra el sistema de prueba de dos áreas proporcionado por Prabha Kundur, el cual se utilizó para hacer los análisis de flujos de potencia y los análisis dinámicos para obtener las señales del enlace que conecta las áreas 1 y 2 del modelo de dos áreas para los diferentes casos de estudio. De igual manera se presenta un pequeño diagrama de flujo para mostrar la rutina que incluye en análisis de Prony para obtener los modos de oscilación del sistema de potencia.

## 7.2. Sistema de Estudio y Señales Obtenidas.

El sistema de dos áreas propuesto por Prabha Kundur es un sistema usado en varios análisis de pequeña señal [29], [8], [13], debido a la naturaleza dinámica del sistema que lo hace inestable.

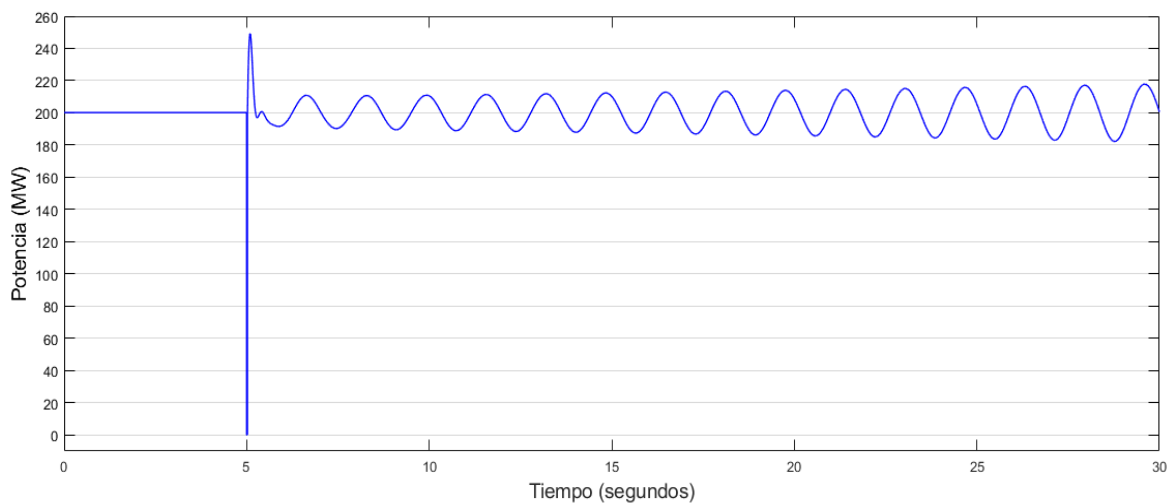
Los parámetros del sistema, el modelo de los generadores y de los excitadores, así como la solución de flujos de potencia se presentó en la sección 6.4. Para la simulación se utilizaron tolerancias de 0.001, un tiempo máximo de simulación de 30 segundos y un paso de integración de 0.01 segundos con la finalidad de tener una señal discreta de 100 muestras por segundo.

### 7.2.1. Falla trifásica en BUS 7.

El primer caso de estudio consistió en aplicar una falla trifásica en el bus 7 a partir del segundo 5 y liberarla 0.02 segundos después del inicio de la falla. La Figura 7.1 muestra

la señal de flujo de potencia activa de la línea de transmisión del bus 7 al bus 8 del circuito 1 (la cual es una de las líneas de enlace de las dos áreas).

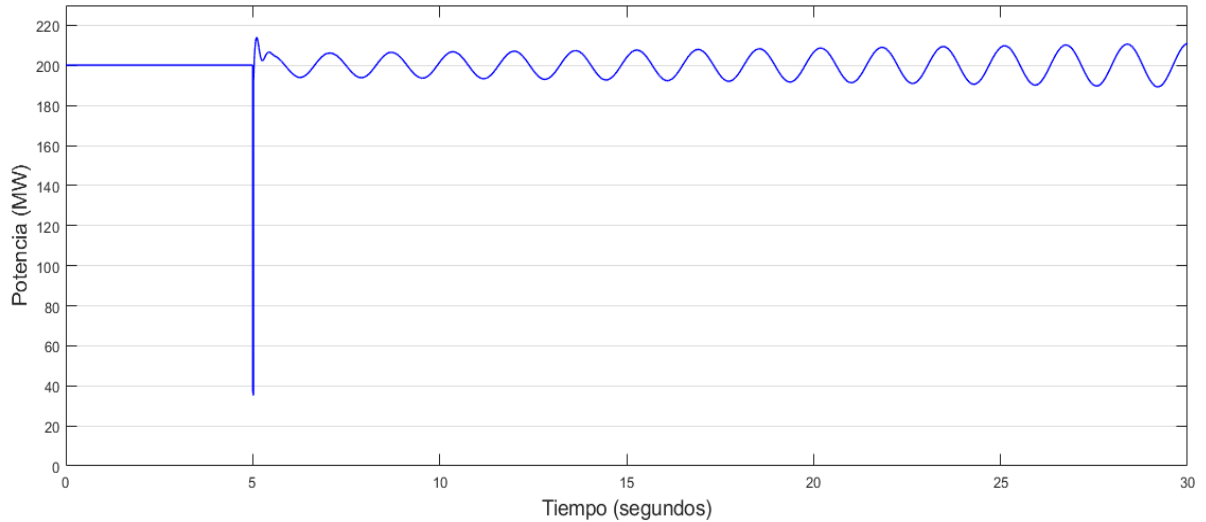
Como se observa, la señal de potencia en la línea es afectada debido a la falla trifásica, es por ello por lo que la potencia desciende abruptamente durante el tiempo que dura la perturbación. Al liberar la falla, la señal de potencia tiende a regresar a su estado inicial, pero se observa, que, al pasar un tiempo determinado, las oscilaciones de la señal de potencia comienzan a incrementarse en amplitud, lo que demuestra el comportamiento inestable del sistema.



*Figura 7.1 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante falla en el nodo 7*

### 7.2.2. Falla trifásica en BUS 8.

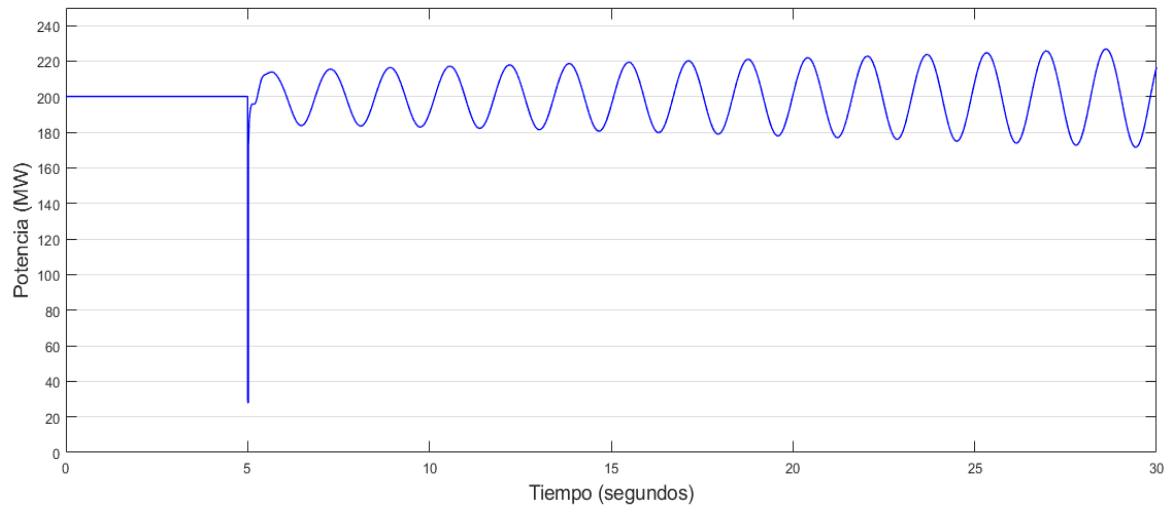
El segundo caso de estudio consistió igual en una falla trifásica, pero ahora en el bus 8 liberando la falla al mismo tiempo (0.02 segundos después). Como se observa en la Figura 7.2, la potencia real en la línea de enlace que une el bus 7 con el bus 8 decae súbitamente al segundo en que se simula la falla debido a que esta está en un nodo directamente relacionado con la medición de la potencia, posterior a la falla se observa un incremento en las oscilaciones que tienden a incrementarse respecto al tiempo.



*Figura 7.2 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante falla en el nodo 8*

### 7.2.3. Falla trifásica en BUS 9.

El tercer caso de estudio consistió en una falla trifásica en el bus 9 con un tiempo de 0.02 segundos, para obtener la señal de potencia real en la línea de enlace del nodo 7 al nodo 8. La Figura 7.3 muestra el comportamiento inestable de la señal de potencia real en la línea transmisión de enlace ya que, al igual que con las señales anteriores, la señal baja súbitamente al momento de la falla y de igual manera que las señales anteriores, conforme avanza el tiempo, el flujo de potencia muestra un comportamiento inestable en sus oscilaciones.



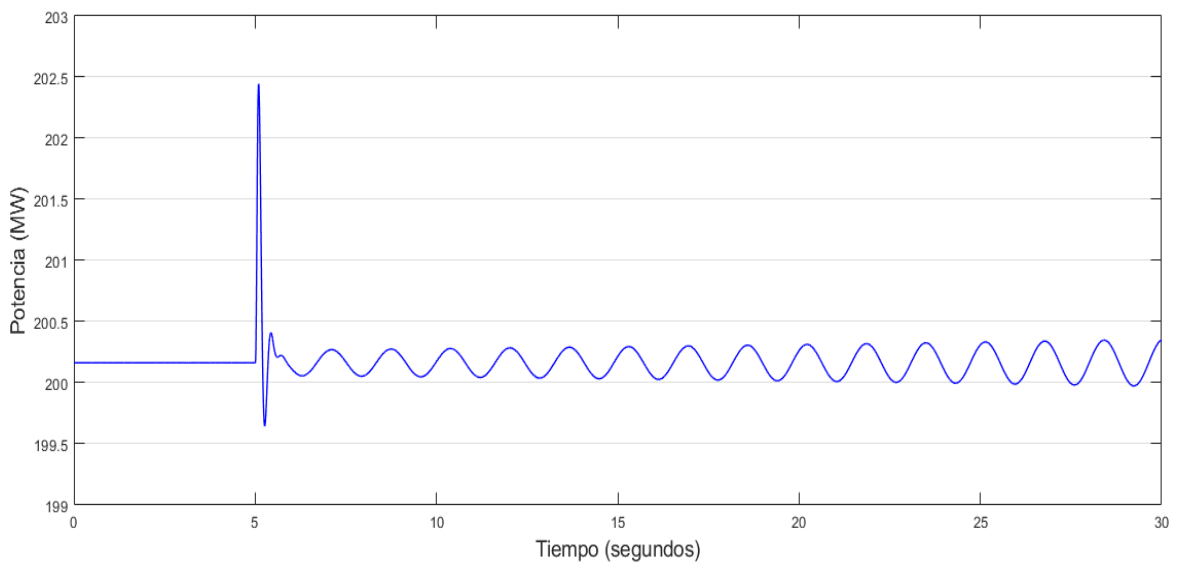
*Figura 7.3 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante falla en el nodo 9*



#### 7.2.4. Cambio de voltaje de referencia de los AVR de generadores.

El último caso de estudio consistió en un cambio de voltaje de referencia de los excitadores de corriente alterna al mismo tiempo durante 0.02 segundos. El cambio que se hizo fue un incremento de 0.01 pu en el segundo 5 y, pasando 0.02 segundos, regresa a su voltaje de referencia original.

La Figura 7.4 muestra un incremento en la potencia al inicio del cambio de referencia de los voltajes de los excitadores, de igual manera con los casos anteriores, la señal de potencia comienza a oscilar a mayor amplitud conforme avanza la simulación.



*Figura 7.4 Flujo de potencia en línea de transmisión de enlace 7-8 durante el cambio de referencia en los excitadores*

### 7.3. Resultados de Modos de Oscilación utilizando el PSS/E.

Utilizando el programa de simulación dinámica PSS/E y el caso explicado en la sección 6.3, se realizó un análisis dinámico del caso de dos áreas de Kundur el cual utiliza un archivo de flujos, un archivo de simulación dinámica con los parámetros de las máquinas y excitadores; de esta manera, el programa realiza una simulación dinámica del sistema y puede otorgarnos resultados de eigenvalores con sus respectivos valores de amortiguamiento, frecuencia y estados dominantes de las máquinas.

| Número de Eigenvalor | Real     | Imaginario | Amortiguación | Frecuencia (Hz) | Estados Dominantes   |
|----------------------|----------|------------|---------------|-----------------|--|
| 1                    | -7.6839  | 18.521     | 0.38321       | 2.9476          | $\Psi_{rd(2)-4}, \Psi_{rd(2)-2}, \Psi_{rd(2)3}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(1)4}, \Psi_{rd(1)2}, \Psi_{rd(1)3}, \Psi_{rd(1)1}, \Psi_{rd(2)4}, \Psi_{rd(2)2}$ |
| 2                    | -7.6839  | -18.521    | 0.38321       | 2.9476          | $\Psi_{rd(2)3}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(1)4}, \Psi_{rd(1)2}, \Psi_{rd(1)3}, \Psi_{rd(1)1}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(2)3}$                                 |
| 3                    | -8.6681  | 16.516     | 0.46472       | 2.6286          | $\Psi_{rd(2)2}, \Psi_{rd(2)4}, \Psi_{rd(1)1}, \Psi_{rd(1)3}, \Psi_{rd(1)2}, \Psi_{rd(1)4}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(2)3}$                                 |
| 4                    | -8.6681  | -16.516    | 0.46472       | 2.6286          | $\Psi_{rd(2)2}, \Psi_{rd(2)4}, \Psi_{rd(1)1}, \Psi_{rd(1)3}, \Psi_{rd(1)2}, \Psi_{rd(1)4}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(2)2}$                                 |
| 5                    | -10.850  | 10.273     | 0.72613       | 1.6350          | $\Psi_{rd(1)1}, \Psi_{rd(1)2}, \Psi_{rd(2)3}, \Psi_{rd(2)4}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(2)2}$   |
| 6                    | -10.850  | -10.273    | 0.72613       | 1.6350          | $\Psi_{rd(1)1}, \Psi_{rd(1)2}, \Psi_{rd(2)3}, \Psi_{rd(2)4}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(2)2}$   |
| 7                    | -10.936  | 10.015     | 0.73749       | 1.5939          | $\Psi_{rd(1)4}, \Psi_{rd(1)3}, \Psi_{rd(2)2}, \Psi_{rd(2)1}, \Psi_{rd(2)4}, \Psi_{rd(2)3}$   |
| 8                    | -10.936  | -10.015    | 0.73749       | 1.5939          | $\Psi_{rd(1)4}, \Psi_{rd(1)3}, \Psi_{rd(2)2}, \Psi_{rd(2)1}$   |
| 9                    | -0.61929 | 7.4219     | 0.083152      | 1.1812          | $\delta_4, \omega_4, \delta_3, \omega_3, \Psi_{rq(1)-4}, \Psi_{rd(2)-3}, \Psi_{rq(2)-4}$   |
| 10                   | -0.61929 | -7.4219    | 0.083152      | 1.1812          | $\delta_4, \omega_4, \delta_3, \omega_3, \Psi_{rq(1)-4}, \Psi_{rd(2)-3}, \Psi_{rq(2)-4}$   |
| 11                   | -0.62749 | 7.1995     | 0.086827      | 1.1458          | $\delta_2, \omega_2, \delta_1, \omega_1, \Psi_{rq(1)-2}, \Psi_{rd(2)-1}, \Psi_{rq(2)-2}$   |
| 12                   | -0.62749 | -7.1995    | 0.086827      | 1.1458          | $\delta_2, \omega_2, \delta_1, \omega_1, \Psi_{rq(1)-2}, \Psi_{rd(2)-1}, \Psi_{rq(2)-2}$   |
| 13                   | 0.032095 | 3.8337     | -0.083717     | 0.61014         | $\delta_3, \omega_3, \delta_4, \omega_4, \delta_1, \omega_1, \delta_2, \omega_2$   |
| 14                   | 0.032095 | -3.8337    | -0.083717     | 0.61014         | $\delta_3, \omega_3, \delta_4, \omega_4, \delta_1, \omega_1, \delta_2, \omega_2$   |
| 15                   | -3.5821  | 0.031150   | 0.99996       | 0.0049576       | $\Psi_{rq(1)-2}, \Psi_{rq(1)-4}, \Psi_{rq(2)-2}, \Psi_{rq(2)-4}$   |

| Número de Eigenvalor | Real    | Imaginario | Amortiguación | Frecuencia (Hz) | Estados Dominantes   |
|----------------------|---------|------------|---------------|-----------------|--|
| 16                   | -3.5821 | - 0.031150 | 0.99996       | 0.0049576       | $\Psi_{rq(1)-2}, \Psi_{rq(1)-4}$<br>$\Psi_{rq(2)-2}, \Psi_{rq(2)-4}$                                     |
| 17                   | -3.4253 | 0.0009223  | 1.0000        | 0.00014679      | $\Psi_{rq(1)-4}, \Psi_{rq(1)-1}$<br>$\Psi_{rq(1)-3}, \Psi_{rq(2)-4}$<br>$\Psi_{rq(2)-1}, \Psi_{rd(2)-4}$ |
| 18                   | -3.4253 | -0.0009223 | 1.0000        | 0.00014679      | $\Psi_{rq(1)-4}, \Psi_{rq(1)-1}$<br>$\Psi_{rq(1)-3}, \Psi_{rq(2)-4}$<br>$\Psi_{rq(2)-1}, \Psi_{rd(2)-4}$ |

*Tabla 7.1 Modos de Oscilación obtenidos por el PSS/E*

#### 7.4. Uso del algoritmo de Prony para el cálculo de Modos de Oscilación.

El método de Prony puede ser utilizado para obtener los modos de oscilación de una señal de potencia, éste método se ha utilizado en varios artículos y libros. Para fines de esta tesis, se realizó una rutina en Matlab compatible con la señal de potencia del programa PSS/E y con la señal que puede ser obtenida con los PMU, para calcular los modos de oscilación de la señales mostradas en la sección 5.7.

La rutina en MATLAB se muestra en un diagrama en la Figura 7.5; ésta rutina detecta la cantidad de señales que se analizan y crea una ventana de datos igual a  $N/3$  como se ha propuesto en [9], [27]; de esta manera, por medio de cada señal, se crea una matriz  $D$  que contiene los datos de las señales para posteriormente crear una matriz de coeficientes  $a$  y crear el polinomio característico de Prony. Una vez obtenido el polinomio característico de Prony, se procede a obtener sus raíces y con estas raíces obtener los eigenvalores del sistema con las señales analizadas. Al final se imprimen los resultados de la rutina de Prony.

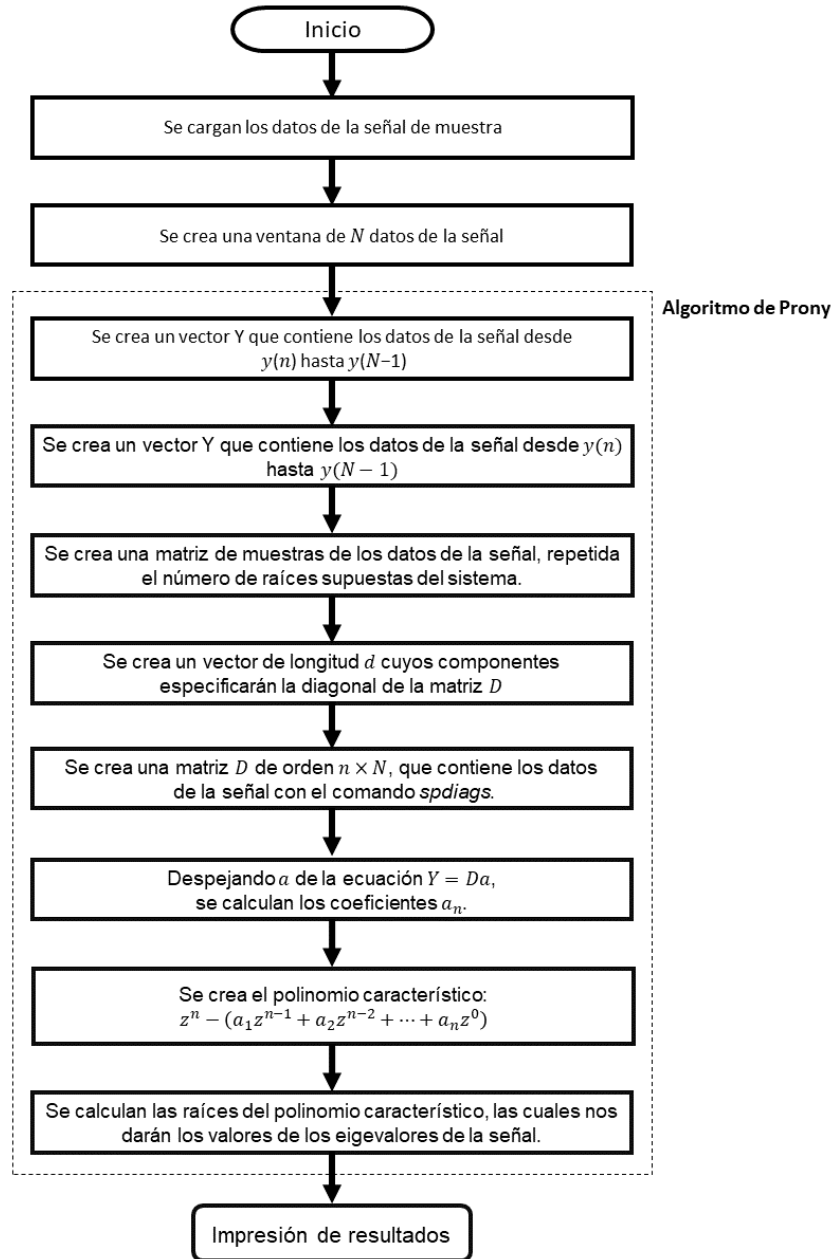


Figura 7.5 Algoritmo de Prony para la estimación de modos de oscilación

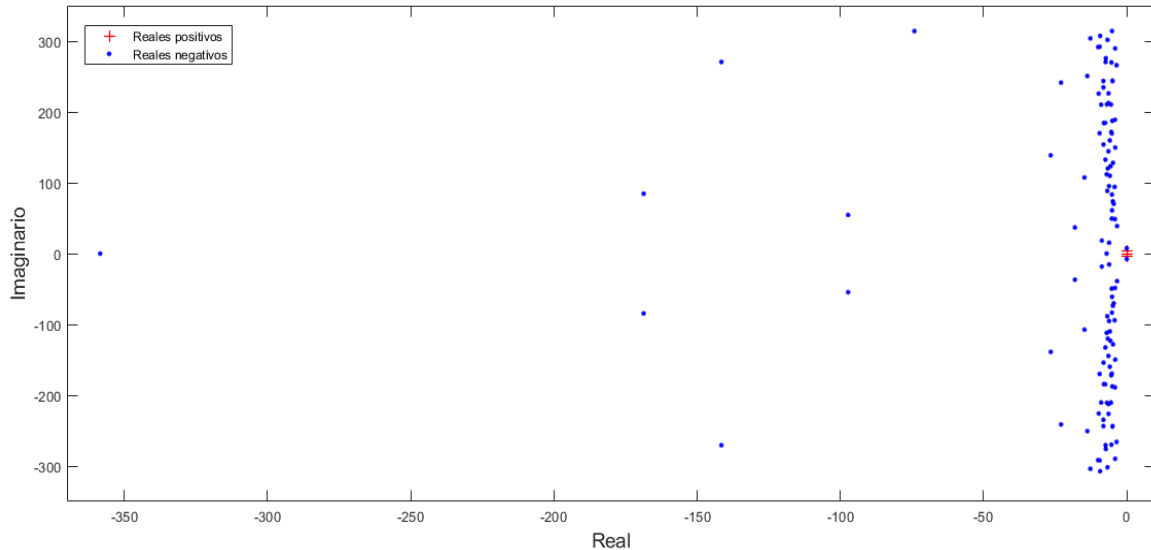
## 7.5. Pruebas del algoritmo de Prony con el caso de estudio.

Para las pruebas algoritmo de Prony con las señales de potencia se toma un número  $m$  de señales y se toman ventanas de tiempo ( $N$ ) de 5 segundos (lo que equivale a 500 muestras); la literatura de varios artículos [25],[4],[30] nos indica que el número de muestras

en el algoritmo de Prony debe ser igual a  $N/3$  por defecto, ya que se ha comprobado que es un tamaño que nos ayudará a calcular los modos de oscilación más acertados.

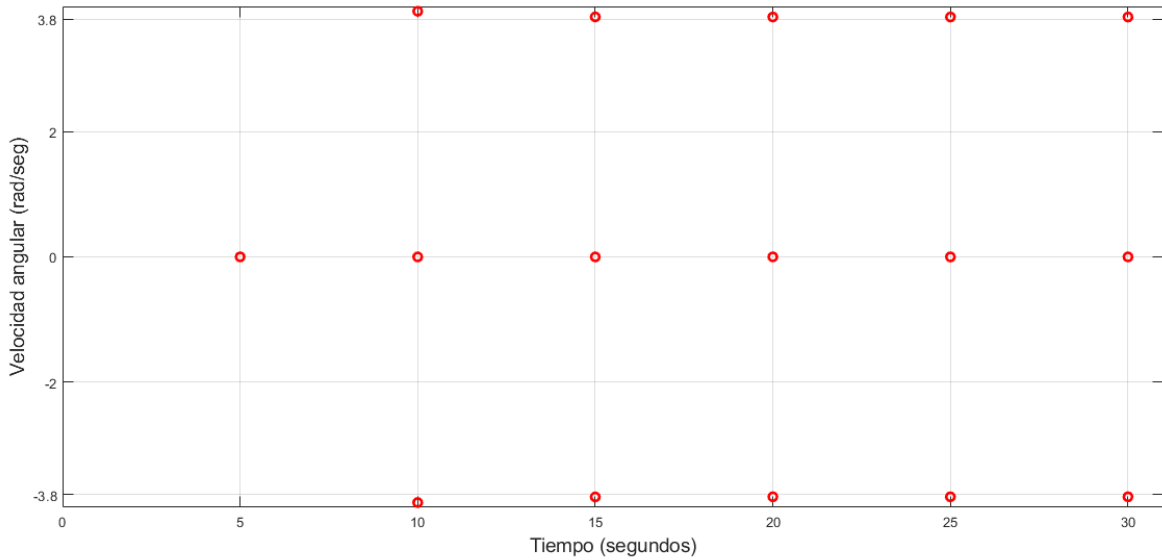
### 7.5.1. Modos estimados en la falla en BUS 7.

Para la señal de potencia en el primer caso estudiado con una falla trifásica en el BUS 7, se obtienen los siguientes resultados totales, esto es, considerando toda la señal de potencia.

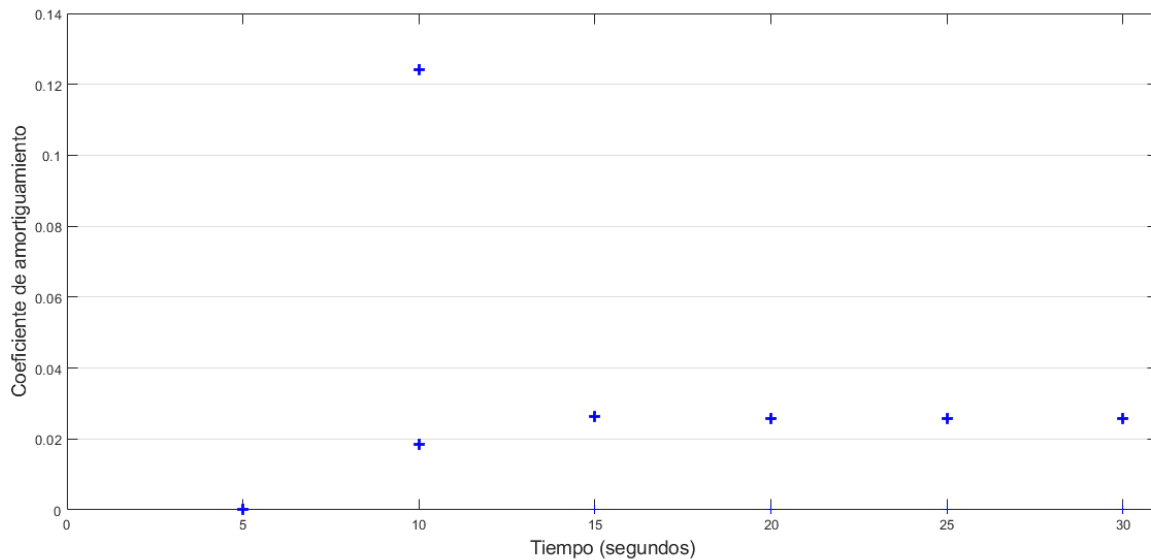


*Figura 7.6 Valores de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el primer caso de estudio*

En la figura anterior, se pueden notar todos los eigenvalores calculados con el método de Prony, remarcado en rojo se encuentran los valores positivos que indican modos de oscilación positivos que hacen que el sistema sea inestable cuando se produce una falla.



*Figura 7.7 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el primer caso de estudio*



*Figura 7.8 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el primer caso de estudio*

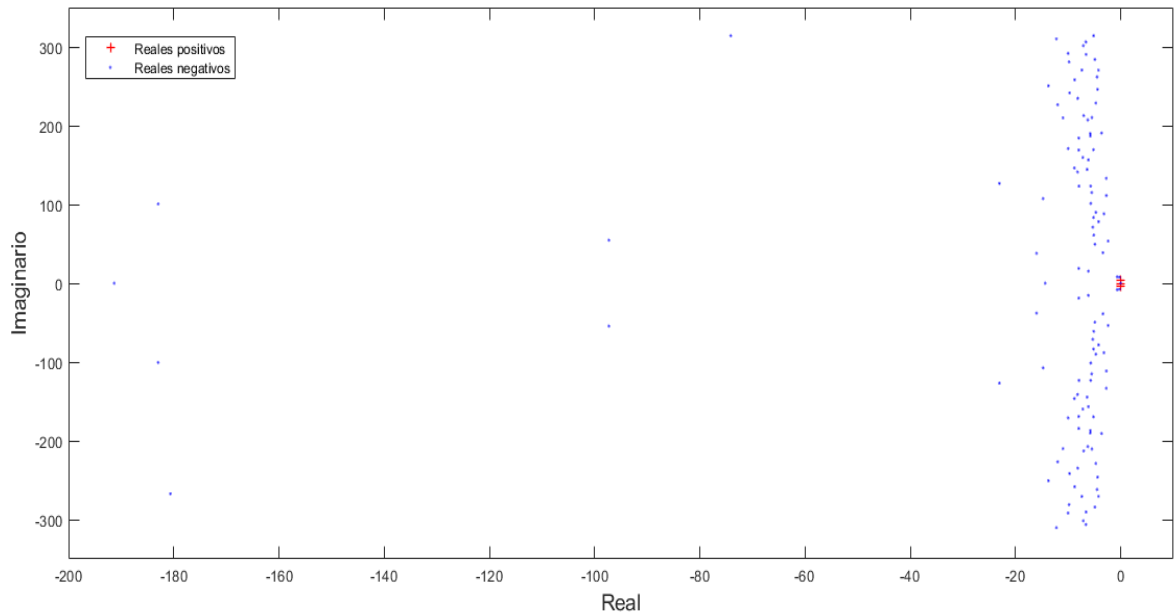
La Figura 7.7 y Figura 7.8 muestra un acercamiento a los eigenvalores calculados mediante el algoritmo de Prony, mostrando la velocidad angular y el coeficiente de amortiguamiento de los modos de oscilación, respectivamente.

Como se observa en las figuras, antes de la falla, el algoritmo de Prony no calcula valores, ya que la señal está sin perturbación; al momento de tener que aplicar una perturbación en la señal (en nuestro caso, una falla trifásica en el nodo 7), en la ventana de tiempo de 5 a

10 segundos se muestran los primeros eigenvalores reales positivos; estos eigenvalores contienen dos números imaginarios, los cuales se asocian a un modo de oscilación que corresponde aproximadamente al modo de oscilación inter-área  $0.0321 \pm 3.8337i$  observado en el análisis del PSS/E y tienen una frecuencia de oscilación cercana a 0.6 Hz.

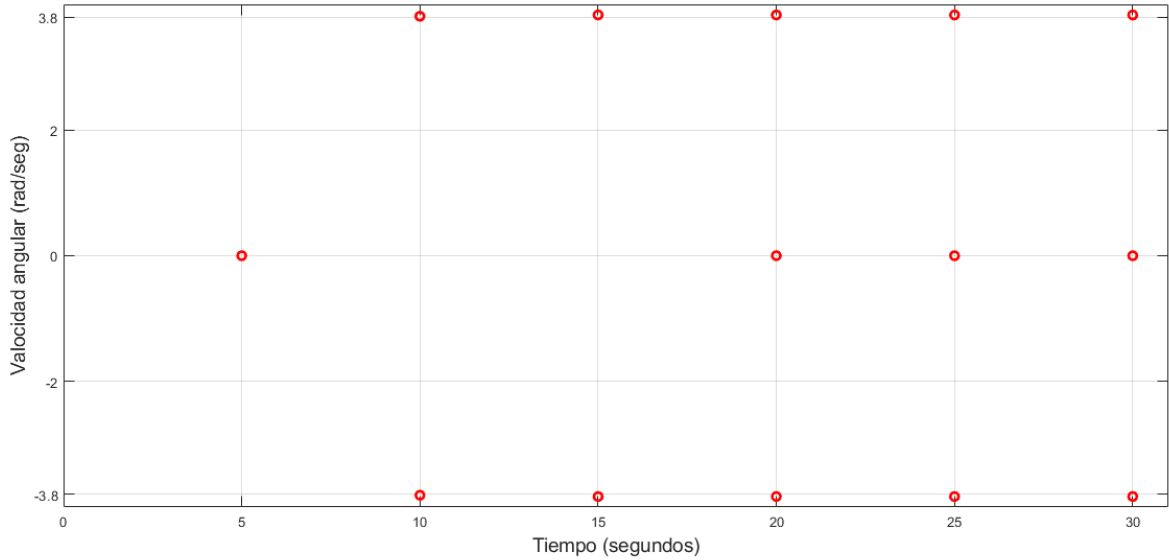
### 7.5.2. Modos estimados en la falla en BUS 8.

Para la señal de potencia en el caso estudiado con una falla trifásica en el BUS 8, se obtienen los siguientes resultados totales, esto es, considerando toda la señal de potencia.

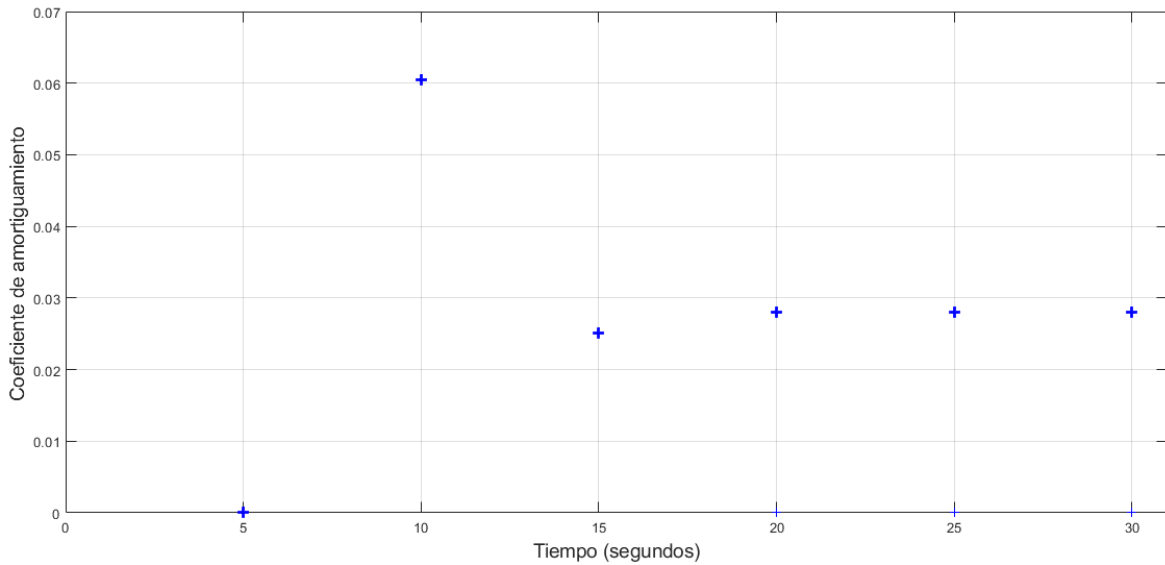


*Figura 7.9 Valores totales de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el segundo caso de estudio*

En la Figura 7.9, se pueden notar todos los eigenvalores calculados con el método de Prony; al igual que en primer caso de estudio se remarcan en rojo los valores positivos que indican modos de oscilación positivos que hacen que el sistema sea inestable cuando se produce una falla.



*Figura 7.10 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el segundo caso de estudio*



*Figura 7.11 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el segundo caso de estudio*

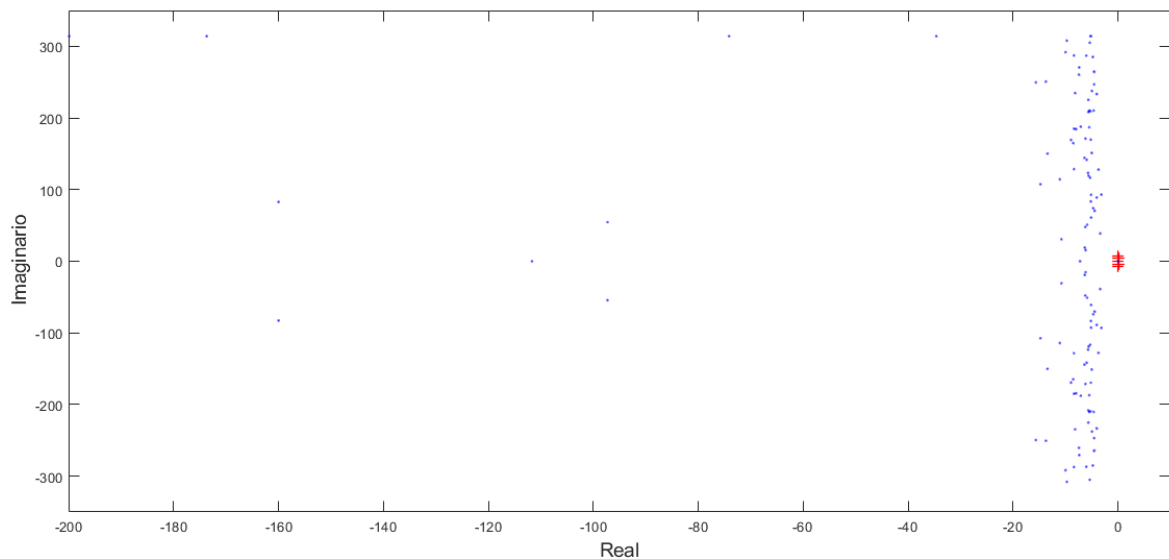
La Figura 7.10 y Figura 7.11 muestra un acercamiento a los eigenvalores calculados mediante el algoritmo de Prony, mostrando la velocidad angular aproximadamente de  $3.83 \text{ rad/seg}$  y el coeficiente de amortiguamiento de los modos de oscilación, respectivamente. Como se observa en las figuras, al momento de la falla, el algoritmo de Prony no calcula los valores, ya que la señal no muestra una perturbación; en la ventana de tiempo de 5 a 10 segundos, se muestran los primeros eigenvalores positivos, y se observan



dos números imaginarios, los cuales están asociados a un modo de oscilación que corresponde aproximadamente al modo de oscilación inter-área  $0.0321 \pm 3.8337i$  observado en el análisis del PSS/E.

### 7.5.3. Modos estimados en la falla en BUS 9.

Para la señal de potencia en el tercer caso estudiado con una falla trifásica en el BUS 9, se obtienen los siguientes resultados totales por medio del algoritmo de Prony, esto es, considerando toda la señal de potencia.



*Figura 7.12 Valores totales de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el tercer caso de estudio*

En la Figura 7.12, se pueden notar todos los eigenvalores calculados con el método de Prony, al igual que en primer caso de estudio se remarcan en rojo los valores positivos que indican modos de oscilación positivos que hacen que el sistema sea inestable cuando se produce una falla.

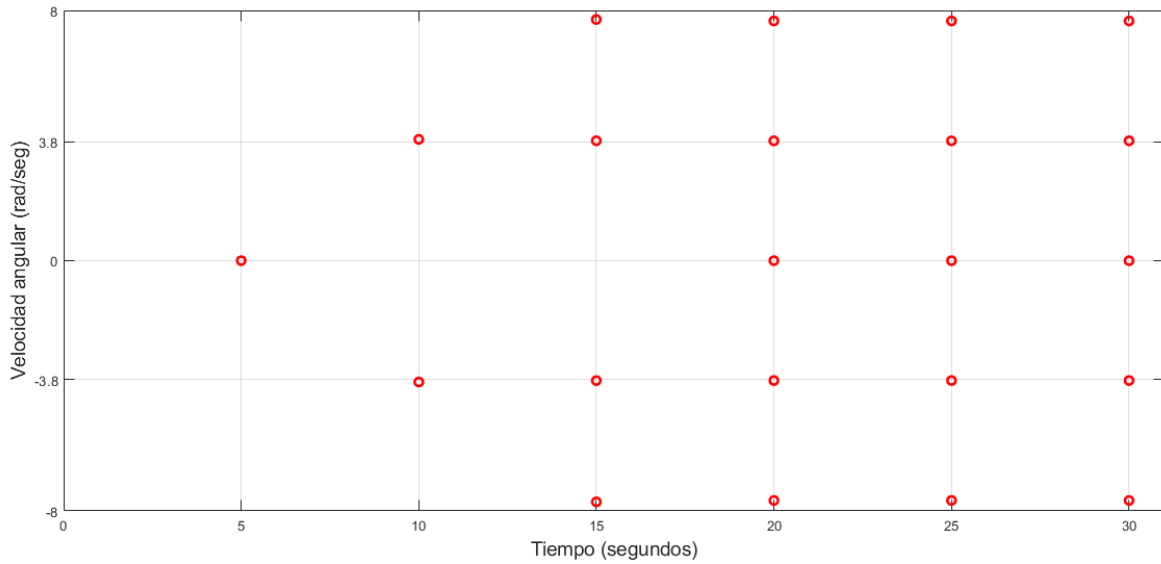


Figura 7.13 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el tercer caso de estudio

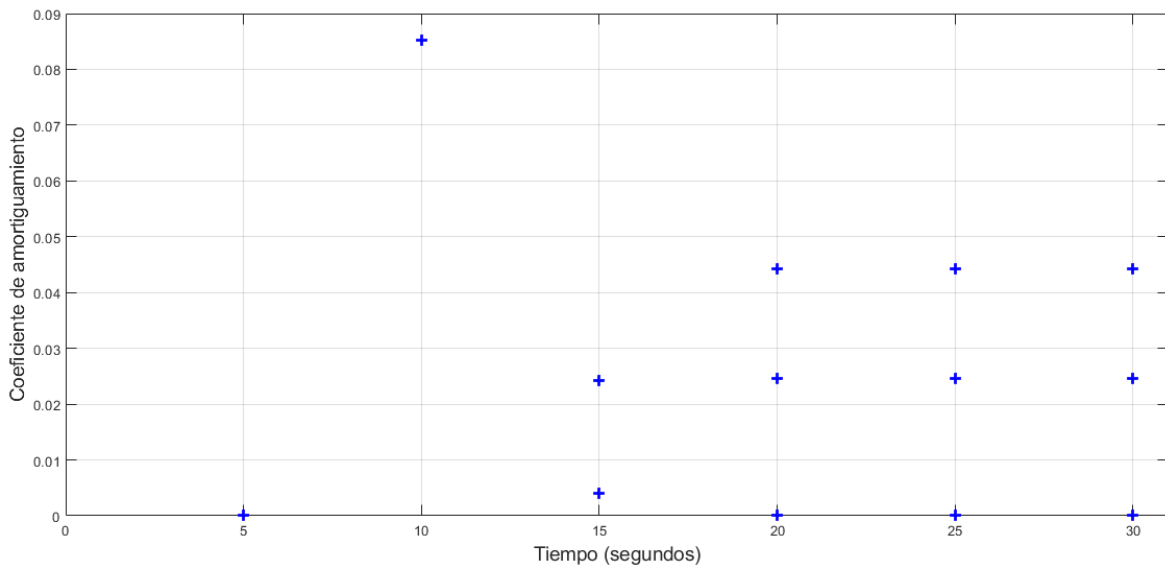


Figura 7.14 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el tercer caso de estudio

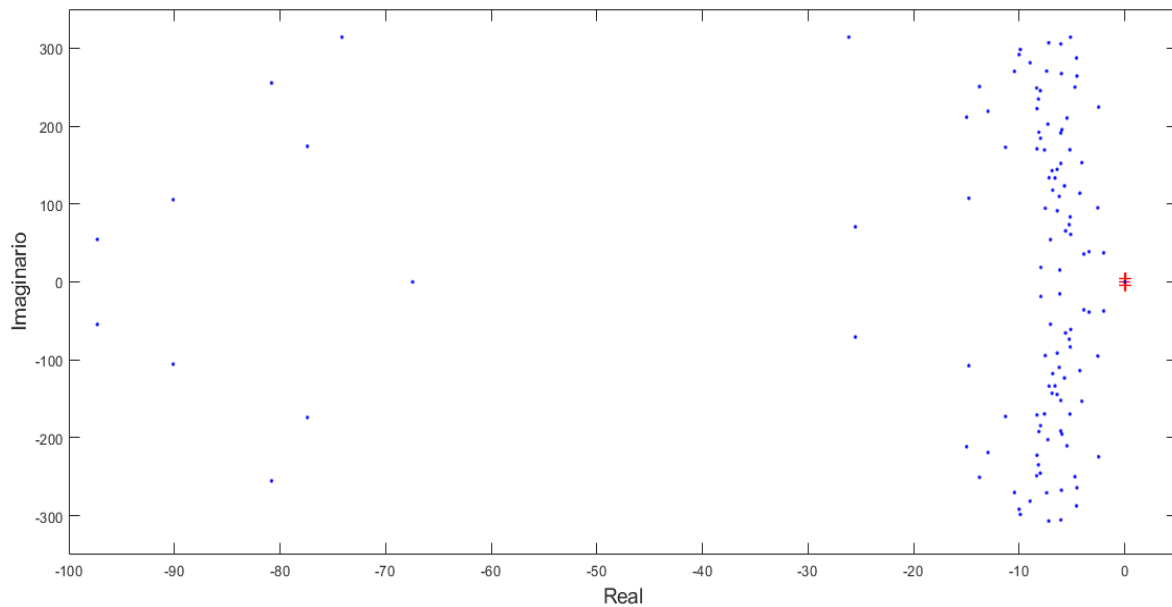
La Figura 7.13 y Figura 7.14 muestra un acercamiento a los eigenvalores calculados mediante el algoritmo de Prony, mostrando la velocidad angular aproximadamente de  $3.83 \text{ rad/seg}$  y el coeficiente de amortiguamiento de los modos de oscilación, respectivamente.

En estos casos, antes de la falla, el algoritmo de Prony se vuelve inexacto, mostrando valores completamente diferentes a los calculados después de la falla, aunque dichos valores

sólo se muestran en la parte real, al momento de hacer ocurrir la falla, los valores imaginarios calculados son dos, los cuales corresponden a los modos de oscilación calculados por el PSS/E, pero conforme avanza el tiempo, el algoritmo encuentra cuatro valores imaginarios, dos de ellos son los modos de oscilación que corresponden a los calculados por el PSS/E, mientras los otros dos son valores encontrados debido a la naturaleza del método ya que son aproximaciones aunque no son muy alejados a los valores encontrados por el PSS/E.

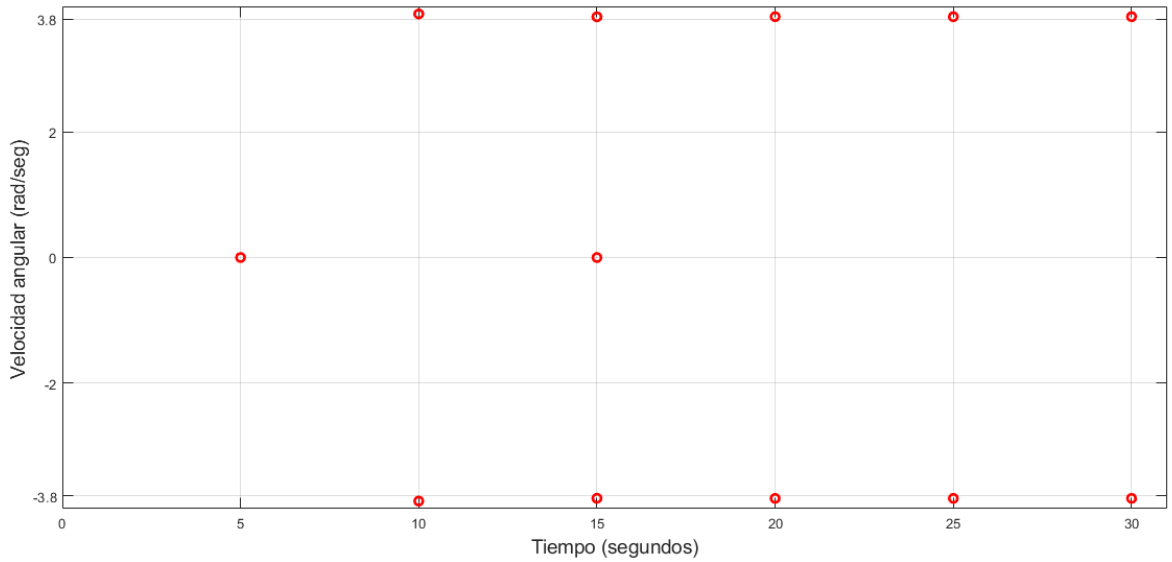
#### 7.5.4. Modos estimados en el cambio de voltaje de referencia.

Para la señal de potencia en el último caso estudiado con cambio de voltaje de referencia de los excitadores, se obtienen los siguientes resultados totales por medio del algoritmo de Prony, esto es, considerando toda la señal de potencia.

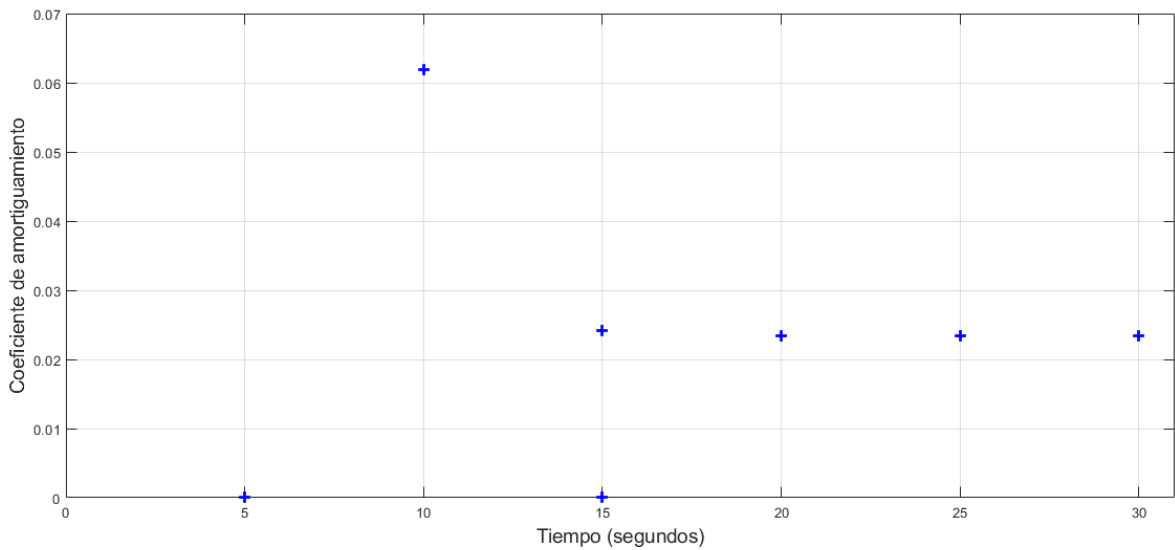


*Figura 7.15 Valores totales de los eigenvalores obtenidos mediante el método de Prony en el último caso de estudio*

En la Figura 7.15, se pueden notar todos los eigenvalores calculados con el método de Prony, al igual que en los casos anteriores se remarcan en rojo los valores positivos que indican modos de oscilación positivos que hacen que el sistema sea inestable cuando se produce una falla.



*Figura 7.16 Acercamiento a los valores imaginarios calculados por el algoritmo de Prony para el último caso de estudio*



*Figura 7.17 Acercamiento a los valores reales calculados por el algoritmo de Prony para el último caso de estudio*

En la Figura 7.16 se observa que no se calculan valores imaginarios antes de la falla y se calculan dos valores imaginarios a partir de la ventana donde ocurrió la falla. Se observa que, a partir de la ventana de 10 segundos, el método de Prony calcula dos números imaginarios correspondientes al modo de oscilación inter-área.

En la Figura 7.17 se observan los valores reales calculados por ambos métodos y se observa que al igual que los casos anteriores antes de la falla los valores tienden a cero, pero después de esta se observan 2 valores en cada ventana.

---

## 8. Conclusiones

---

### 8.1. Conclusiones Generales.

Los sistemas eléctricos de potencia (SEP) no dejarán de crecer, los usuarios cada vez demandan más cantidad de energía, es por ello que son muy importantes las interconexiones de áreas en los SEP. El flujo de potencia que llevan las líneas de transmisión debe ser monitoreado con gran precisión ya que estos cumplen un papel muy importante en la transmisión de la energía y por lo tanto, deben ser analizados periódicamente para mantener los estándares de confiabilidad del sistema. Uno de los instrumentos que se encuentra a la vanguardia de la tecnología para el monitoreo de la señal son las unidades de medición fasorial (PMU), estas unidades son muy precisas y otorgan una observabilidad del sistema con gran precisión puesto que manejan una estampa de tiempo coordinado por medio de GPS. Con estos instrumentos se pueden hacer estimaciones y mediciones de potencia de grandes áreas ante disturbios grandes o pequeños.

Es muy común que los sistemas de potencia presenten disturbios debido a la demanda, pérdida de carga o fallas en el sistema; por ello es importante monitorear los flujos de potencia ante estos disturbios y realizar análisis preventivos y/o correctivos por problemas de estabilidad. Existen disturbios pequeños en los flujos de potencia causados por pequeñas perturbaciones, en algunos casos, estas pequeñas perturbaciones presentan oscilaciones de baja frecuencia las cuales pueden amortiguarse hasta desaparecer o incrementarse con el paso del tiempo (dependiendo de los instrumentos del sistema de potencia y su naturaleza), ocasionando un estado de inestabilidad de ángulo en el sistema.

Una de las metodologías usadas actualmente para encontrar la inestabilidad de un sistema de potencia debido a oscilaciones en pequeña señal, es el algoritmo de Prony. Dicho algoritmo puede ser aplicado a una medición real o a resultados de simulaciones por medio de programas utilizados en la industria. Por medio de esta metodología, se puede hacer un análisis de eigenvalores y calcular los modos de oscilación de un sistema de potencia propuesto, de esta manera se pueden encontrar los modos de oscilación que influyen para que el sistema se vuelva inestable.

Al aplicar el análisis de Prony es difícil definir un período de tiempo de aplicación ideal que pueda ser utilizado en cualquier sistema y ante cualquier condición. Debido a la naturaleza del análisis, el cual es por aproximaciones, se debe evitar en general los períodos de tiempo cercanos o que contengan el punto de la perturbación, ya que son altamente no lineales y producen errores en el método.

En la presente tesis se logró implementar el método de Prony para analizar las señales de potencia del sistema de dos áreas de Kundur, para el cual se realizaron 4 casos de estudios con perturbaciones diferentes con un tiempo de análisis de 30 segundos y con ventanas de muestras de 5 segundos. En cada señal obtenida se observó que los modos inter-áreas tendían a oscilar a una frecuencia alrededor de  $0.6 \text{ Hz}$  y que sus amplitudes incrementaban con el tiempo, demostrando un comportamiento inestable de la señal. Por medio del análisis de Prony, se obtuvieron los modos de oscilación de las señales, los cuales fueron aproximadamente  $0.020 \pm 3.83i$ , y éstos coincidieron con los modos de oscilación proporcionados con el PSS/E.

Los resultados obtenidos fueron los esperados, ya que el método calculó de manera efectiva los modos de oscilación inter-áreas que cumplían con las características que identificaban el modo de oscilación que sugiere que el sistema se volverá inestable si llega a tener un disturbio de pequeña señal.

## 8.2. Aportaciones y recomendaciones para trabajos futuros.

La principal contribución de la presente tesis fue el desarrollo de una rutina en MATLAB para estimar modos de oscilación entre área compatible con las señales de PMU's que permitirá realizar estimaciones en tiempo real utilizando únicamente la señal de flujo de potencia medida en enlaces inter-área para que el operador pueda tomar las acciones necesarias que incrementen el amortiguamiento del sistema ante la detección de señales poco amortiguadas o con amortiguamiento negativo.

### 8.2.1. Recomendaciones para trabajos futuros.

Dados los resultados, conclusiones y aportaciones de este trabajo se pueden complementar en futuros trabajos con:

- Rutinas con el método de Prony usando señales con ruido y filtros para mejorar la estimación del modo.
- Rutinas para realizar acciones que detecten y mejoren el amortiguamiento de los modos de oscilación que desestabilizan la señal.
  - Integración de Método de Prony para realizar pruebas con señales reales de potencia del SEN.

---

## 9. Bibliografía

---

- [1] P. Kundur, *Power System Stability and Control*. New York: McGraw-Hill, 1994.
- [2] R. Graham, *Power System Oscillations*. Springer, 2000.
- [3] J. F. Hauer, C. J. Demeure, and L. L. Scharf, “Initial results in prony analysis of power system response signals,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 5, no. 1, pp. 80–89, 1990.
- [4] G. Liu, J. Quintero, and V. Venkatasubramanian, “Oscillation monitoring system based on wide area synchrophasors in power systems,” *2007 iREP Symp. Bulk Power Syst. Dyn. Control - VII, Revital. Oper. Reliab.*, 2007.
- [5] C. E. Grund, J. J. Paserba, J. F. Hauer, and S. L. Nilsson, “Comparison of Prony and eigenanalysis for power system control design,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 8, no. 3, pp. 964–971, 1993.
- [6] R. Kumaresan, D. W. Tufts, and L. L. Scharf, “A Prony method for noisy data: Choosing the signal components and selecting the order in exponential signal models,” *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 2, pp. 230–233, 1984.
- [7] D. J. Trudnowski, J. M. Johnson, and J. F. Hauer, “Making prony analysis more accurate using multiple signals,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 14, no. 1, pp. 226–231, 1999.
- [8] A. R. Messina, *Inter-area Oscillations in Power Systems*. Boston, MA: Springer US, 2009.
- [9] J. Khazaei, L. Fan, W. Jiang, and D. Manjure, “Distributed Prony analysis for real-world PMU data,” *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 133, pp. 113–120, 2016.
- [10] A. G. Phadke and J. S. Thorp, *Synchronized Phasor Measurements and Their Applications*. 2008.
- [11] P. System, R. Committee, I. Power, and E. Society, “IEEE Standard for Synchrophasor Data Transfer for Power Systems,” *Inst. Electr. Electron. Eng.*, vol. 2011, no. December, 2011.



- [12] F. Apodaca Zamora, “Desarrollo e Implementación de un WAMPS a escala laboratorio,” UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, 2016.
- [13] A. Monti, C. Muscas, and F. Ponci, *Phasor measurement units and wide area monitoring systems: from the sensors to the system*. 2016.
- [14] Centro Nacional de Control de Energía, “Código de Red,” *Dof*, p. 179, 2016.
- [15] R. T. Lythall, “The J. & P. Switchgear Book,” pp. 441–442, 1953.
- [16] F. F. Wu, “Power System State Estimation: A Survey,” *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, 1990.
- [17] A. Terzija, Vladimir; Valverde, Gustavo; Cai, Deyu; Regulski, Pawel; Madani, Vahid; Fitch, John; Skok, Srdjan; Begovic, Miroslav M.; Phadke, “Wide-Area Monitoring, Protection, and Control of Future Electric Power Networks,” *IEEE*, 2010.
- [18] P. M. Anderson, *Power System Protection*. 1999.
- [19] H. K. Dalali, Milad; Kargar, “Placement of PMUs in HVDC connected networks considering voltage stability requirements,” *IEEE*, 2014.
- [20] A. S. Khan, Mohd Tauseef; Siddiqui, “FACTS device control strategy using PMU,” *ELSEVIER*, 2016.
- [21] IEEE Power Engineering Society, “Inter-area Oscillations in Power Systems,” *IEEE*, p. 192, 1995.
- [22] J. Hauer, D. Trudnowski, G. Rogers, B. Mittelstadt, W. Litzemberger, and J. Johnson, “Keeping an eye on power system dynamics,” *IEEE Comput. Appl. Power*, vol. 10, no. 4, pp. 50–54, 1997.
- [23] J. J. Grainger and W. D. Stevenson Jr, *Análisis de Sistemas de Potencia*, McGRAW-HILL. 1996.
- [24] R. Vargas Salas, “Notas en MathCad - Desarrollo del modelo linealizado de la máquina síncrona para estudios de estabilidad.” Intituto Tecnológico de La Laguna, Torreón, Coahuila.
- [25] J. F. Hauer, “Application of prony analysis to the determination of modal content and

- equivalent models for measured power system response,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 6, no. 3, pp. 1062–1068, 1991.
- [26] M. L. Crow, *Computational Methods for Electric Power Systems*. CRC Press, 2010.
- [27] L. Fan, “Data fusion-based distributed Prony analysis,” *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 143, pp. 634–642, 2017.
- [28] IEEE Standards Board, *IEEE Recommended Practice for Excitation System Models for Power System Stability Studies*, vol. 2005, no. April. 1992.
- [29] J. K. Hwang and Y. Liu, “Identification of interarea modes from an effectual impulse response of ringdown frequency data,” *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 144, pp. 96–106, 2017.
- [30] C. A. Ordonez, H. R. Chamorro, J. Quintero, R. Leelaruji, J. C. H. Peng, and L. Nordstrom, “Prony-based on-line oscillation detection with real PMU information,” *2016 IEEE Colomb. Conf. Robot. Autom. CCRA 2016 - Conf. Proc.*, 2017.