



**SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA**

---

---

**TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE VERACRUZ**

**CONTROL GEOMÉTRICO PARAMÉTRICO EN INTERCAMBIADORES DE  
CALOR**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MAestrÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA BIOQUÍMICA**

**PRESENTA:  
IBQ. ROCÍO GONZALEZ GONZÁLEZ**

**ASESOR:  
DR. MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ALVARADO**

**H. VERACRUZ, VERACRUZ**

**2017**

**A mis padres:**

Por ser las personas más importantes en mi vida, alentarme a cumplir con mis objetivos y por darme siempre su amor incondicional.

**A mi hermana:**

Por confiar siempre en mí y por ser mi modelo de perseverancia y disciplina.

**A Héctor:**

Por apoyarme y motivarme a ser mejor persona.

**A mis amigos:**

En especial y con mucho cariño para Aracely y Escarleth.

## **RECONOCIMIENTOS**

A CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por el financiamiento otorgado para la realización de este proyecto.

A mi Asesor, el Dr. Miguel Ángel García Alvarado, por los conocimientos y experiencia que hicieron posible este proyecto.

Al comité revisor.

## RESUMEN

González González, Rocío. M.C Unidad de Investigación y Desarrollo en Alimentos. Instituto Tecnológico de Veracruz. Marzo de 2017. Control geométrico paramétrico de intercambiadores de calor. Asesor: Dr. Miguel Ángel García Alvarado.

La teoría de control ha tenido un desarrollo importante en la ingeniería química. Uno de los conceptos desarrollados en la teoría de control, que se ha desarrollado dentro de la ingeniería química, es el control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  y el cual ha sido aplicado en columnas de destilación, reactores químicos, intercambiadores de calor con agitación continua y en sistemas aeronáuticos.

El control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  proporcional integral (PI) fue aplicado a un intercambiador de calor como ejemplo de un sistema de parámetros distribuidos, para estructura SISO (una entrada, una salida) y MIMO (múltiples entradas, múltiples salidas). El modelo dinámico del intercambiador de calor fue expresado en espacio de estado.

Los resultados mostraron que el control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  es una clase de control geométrico paramétrico, fue definido matemáticamente y demostró que pertenece a los controladores geométricos. El procedimiento de sintonización se basó en encontrar los dos parámetros para el control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  PI con estructura SISO aplicado a un intercambiador de calor de tubos concéntricos (CCTHE) con desempeño y robustez similar a un controlador geométrico previo de la literatura con tres y cuatro parámetros. El control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  PI fue fácilmente aplicado a un CCTHE con estructura MIMO el cual incluyó acciones de desacoplamiento.

## ABSTRACT

González González, Rocío. M.C Unidad de Investigación y Desarrollo en Alimentos. Instituto Tecnológico de Veracruz. Marzo de 2017. Control geométrico paramétrico de intercambiadores de calor. Asesor: Dr. Miguel Ángel García Alvarado.

Control theory has had an important development in the field of Chemical Engineering. One of the control theory concepts that have been developed within the chemical engineering field is the  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  control which has been successfully applied in distillation columns, chemical reactors, continuous stirred tank heat exchangers and even aeronautical systems.

$\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  proportional integral (PI) control was applied to continuous current concentric tubes heat exchangers as example of space distributed parameter systems, both in SISO (Single Input, Single Output) and MIMO (Multi Input, Multi Output) structures. The heat exchangers dynamic model was expressed in continuous space state.

Results showed that  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  controls is a class of parametric geometric control, were mathematically defined and demonstrated that they are a class of geometric controls. The tuning procedure based on this definition found  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  PI SISO two parameters controls for continuous concentric tubes heat exchanger (CCTHE) with similar performance and robustness than other geometric controls with three and four parameters, in heat exchanger controllers than previous geometric controls reported in literature in SISO structures. The  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  PI was easily extended to a CCTHE MIMO control including decoupling actions.

## CONTENIDO

<b>RESUMEN</b>	iii
<b>ABSTRACT</b>	iv
<b>LISTA DE TABLAS</b>	vii
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	viii
<b>LISTA DE SIMBOLOS</b>	x
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	1
<b>2. ANTECEDENTES</b>	3
2.1 Intercambiadores de calor	3
2.2 Intercambiadores de calor de tubos concéntricos	5
2.3 Control lazo cerrado	7
2.4 Algoritmo de control Proporcional-Integral (PI)	9
2.5 Criterios de desempeño de un control óptimo-robusto	11
2.5.1 Controlador óptimo-robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	11
2.5.2 Controladores óptimo-robustos desarrollados en el laboratorio de bioestadística	13
2.5.3 Variedad matemática (Manifold)	22
2.6 Control geométrico-paramétrico	22
2.7 Control de intercambiadores térmicos de tubos concéntricos	23
2.7.1 Control geométrico en controladores SISO-PI aplicado a un intercambiador de calor.	24
<b>3. SINTESIS DE ANTECEDENTES</b>	26
<b>4. OBJETIVOS</b>	27
4.1 Objetivo general	27
4.2 Objetivos específicos	27
<b>5. JUSTIFICACIÓN</b>	28

<b>6. METODOLOGÍA</b>	29
6.1 Controlador MIMO-PI en sistemas multivariados.	29
6.1.1 Desarrollo experimental del intercambiador de calor concéntrico a contracorriente.	29
6.1.2 Modelo no lineal del intercambiador de energía térmica de tubos concéntricos.	30
6.1.3 Linealización por serie de Taylor	31
6.1.4 Espacio de estado del proceso	32
6.1.5 Algoritmo de control MIMO-PI multivariado	35
6.2 Controlador SISO-PI de un intercambiador de calor	36
6.2.1 Controlador geométrico SISO-PI reportado en la literatura	36
6.2.2 Controlador SISO-PI manipulando la temperatura de entrada del fluido caliente	38
6.2.3 Controlador SISO-PI manipulando la velocidad del fluido caliente.	39
6.3 Sintonización de los controladores $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$	41
<b>4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	44
4.1 Control geométrico paramétrico $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$	44
4.2 Controlador MIMO-PI utilizando el criterio $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$	44
4.2.1 Dinámica del proceso del intercambiador de calor de tubos concéntricos.	44
4.2.2 Sintonización del controlador MIMO-PI	47
4.3 Controlador SISO-PI utilizando el criterio $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$	52
4.3.1 Controlador SISO-PI manipulando la temperatura de entrada del fluido caliente	52
4.3.2 Control SISO-PI manipulando la velocidad de flujo del fluido caliente.	58
4.3.3 Comparación del controlador SISO-PI utilizando el criterio $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$	62
<b>5. CONCLUSIÓN</b>	66
<b>6. REFERENCIAS</b>	67

## LISTA DE TABLAS

TABLA 6.1. Valores nominales de los parámetros del modelo del intercambiador de calor. ...	30
TABLA 6.2. Valores nominales de los parámetros del modelo del intercambiador de calor. ...	36
TABLA 7.1 Características del CCTH del control MIMO-PI en $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ .....	48
TABLA 7.2 Características del control SISO CTHE manipulando la variable $T_{h41}$ .....	53
TABLA 7.3 Características del control SISO del CCTHE con $T_{h101}$ como variable manipulada. ....	56
TABLA 7.4 Características del control SISO en un CCTHE manipulando la variable $v_h$ . ....	58
TABLA 7.5 Características del control SISO en un CCTHE manipulando la variable $v_h$ . ....	60

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA. 2.1 Mecanismo de transferencia de energía.....	4
FIGURA. 2.2 Intercambiador de calor de tubos concéntricos a contracorriente. ....	5
FIGURA. 2.3 Geometría del intercambiador de tubos concéntricos.....	6
FIGURA. 2.4 Configuración básica de un sistema de control. ....	8
FIGURA. 2.5 Sistemas de control de lazo cerrado en procesos químicos. a) control en un intercambiador de calor b) control de nivel de líquido de un tanque c) control en columna de destilación d) control en un reactor químico .....	9
FIGURA. 2.6 Estructura del algoritmo de control PI.....	10
FIGURA. 2.7 Configuración de control $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .....	11
FIGURA. 2.8 Simulación dinámica de la salida para el controlador de un reactor CSTR en respuesta a una perturbación.....	17
FIGURA. 2.9 Sintonización $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ .....	18
FIGURA. 2.10 Frente de Pareto para el CSTR obtenido con las funciones globales $I_y$ y $I_u$ .....	19
FIGURA. 2.11 Frente de Pareto para el sistema aeronáutico obtenido con las funciones globales $I_y$ y $I_u$ .....	19
FIGURA. 2.12 Relación entre los parámetros de control vs. dupla $K, \tau$ .....	20
FIGURA. 2.13 Desempeño del fluido caliente a diferentes parámetros de sintonización. ....	21
FIGURA. 2.14 Desempeño del fluido frío a diferentes parámetros de sintonización.....	21
FIGURA. 2.15 Variedad matemática (Manifold).....	22
FIGURA. 2.16 Estrategia de control de un intercambiador de calor a contracorriente. ....	24
FIGURA. 2.17 Controlador SISO de un intercambiador térmico manipulando la temperatura de entrada del fluido exterior.....	25
FIGURA. 2.18 Controlador SISO de un intercambiador térmico manipulando la velocidad de flujo del fluido exterior.....	25
FIGURA. 6.1 Intercambiador de calor de tubos concéntricos a contracorriente. ....	31
FIGURA. 7.1 Comparación del fluido externo del CCTHE. ....	45
FIGURA. 7.2 Comparación del fluido interno del CCTHE. ....	46

FIGURA. 7.3 Desempeño de la salida de la temperatura fría del CCTH utilizando un controlador MIMO-PI $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ .....	49
FIGURA. 7.4 Desempeño de la salida de la temperatura caliente del CCTH utilizando un controlador MIMO-PI $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ .....	50
FIGURA. 7.5 Esfuerzo de la acción de control $T_{h21}$ del CCTH.....	51
FIGURA. 7.6 Esfuerzo de la acción de control $q_h$ del CCTH.....	51
FIGURA. 7.7 Respuesta de salida de la temperatura del fluido frio.....	54
FIGURA. 7.8 Esfuerzo de control para un cambio de referencia de tipo escalón.....	54
FIGURA. 7.9 Comparación del desempeño en la salida del CCTHE.....	56
FIGURA. 7.10 Comparación del esfuerzo de acción de control del CCTHE.....	57
FIGURA. 7.11 Respuesta de salida de la temperatura del fluido frio.....	59
FIGURA. 7.12 Esfuerzo de control para un cambio de referencia de tipo escalón.....	59
FIGURA. 7.13 Desempeño de la salida del control SISO del CCTHE.....	61
FIGURA. 7.14 Esfuerzo de la acción de control SISO en un CCTHE.....	61
FIGURA. 7.15 Desempeño de la salida en un modelo robusto.....	62
FIGURA. 7.16 Desempeño del esfuerzo de control en un modelo robusto.....	63
FIGURA. 7.17 Desempeño de la salida en un modelo robusto.....	63
FIGURA. 7.18 Desempeño del esfuerzo de control en un modelo robusto.....	64
FIGURA. 7.19 Comparación del desempeño de control aplicado al CCTHE.....	65
FIGURA. 7.20 Comparación del esfuerzo de la acción de control en CCTHE.....	65

## LISTA DE SIMBOLOS

$A$	Matriz dinámica del vector de estado de la planta
$A$	Matriz dinámica del vector aumentado de estado de la planta en lazo cerrado
$\mathcal{A}$	Matriz dinámica del vector del algoritmo de control
$\mathbb{B}_1$	Matriz dinámica del vector de entrada exógena de la planta en lazo cerrado
$\mathcal{B}_1$	Matriz dinámica del vector de entrada exógena del algoritmo de control.
$\mathbb{B}_2$	Matriz dinámica del vector de entrada de control de la planta en lazo cerrado
$\mathcal{B}_2$	Matriz dinámica del vector de entrada del algoritmo de control.
$C_1$	Matriz dinámica de estado del vector de salida medida disponible para el controlador
$C_2$	Matriz dinámica de estado del vector de salida relacionada al desempeño del controlador
$\mathbb{C}_1$	Matriz dinámica de estado del vector de salida medida disponible para el controlador de la planta en lazo cerrado
$\mathbb{C}_2$	Matriz dinámica de estado del vector de salida relacionada al desempeño del controlador de la planta en lazo cerrado
$D_{11}$	Matriz dinámica de entradas exógenas del vector de salida medida disponible para el controlador
$D_{12}$	Matriz dinámica de señales de control del vector de salida medida disponible para el controlador
$\mathbb{D}_{11}$	Matriz dinámica de entradas exógenas del vector de salida medida disponible para el controlador de la planta en lazo cerrado
$\mathbb{D}_{12}$	Matriz dinámica de señales de control del vector de salida medida disponible para el controlador de la planta en lazo cerrado
$\mathbb{D}_{21}$	Matriz dinámica del vector de entradas exógenas del vector de salida relacionada al desempeño del controlador de la planta en lazo cerrado
$\mathbb{D}_{22}$	Matriz dinámica del vector de entradas de control de vector de salida de referencia del controlador de la planta en lazo cerrado
$\mathcal{D}$	Espacio definido del semiplano izquierdo
$\mathcal{H}_2$	Espacio de Hardy, funciones cuadráticas integrables sobre el eje imaginario con continuación analítica en la mitad derecha o izquierda del plano complejo
$\mathcal{H}_\infty$	Espacio de Hardy, funciones límite con continuación analítica en la mitad derecha del plano complejo
$I$	Índice cuadrático de desempeño
$I_e$	Índice cuadrático de desempeño del error
$I_u$	Índice cuadrático de desempeño del control
$Im/Re$	Relación imaginaria sobre real
$j$	Elemento finito que se supone idealmente mezclado para cada fluido.
$K$	Matriz de ganancias del controlador
$k_i$	Ganancia integral

$k_p$	Ganancia proporcional
$\mathcal{L}_2$	Espacio normado de Lebesgue
P	Matriz simétrica definida positiva, es la solución de la ecuación de Lyapunov
PI	Regulador proporcional e integral
PID	Regulador proporcional, integral y derivativo
Q	Matriz de ponderación simétrica y definida positiva
R	Matriz de ponderación simétrica y definida positiva
X	Vector de estado aumentado de la planta

### Letras griegas

$\alpha$	Matriz del vector del estado del controlador
$\beta$	Matriz del vector de entrada (error) del controlador
$\delta$	Matriz de vector de entradas salidas del controlador
$\phi_{max}$	Máximo radio complejo/real de los valores propios de la matriz característica <b>A</b>
$\gamma$	Condición de desempeño
$\Gamma$	Matriz de estado de salida del control
$\lambda$	Valor propio de la matriz característica
$\Sigma$	Valor singular
$\tau$	Constante de tiempo

## 1. INTRODUCCIÓN

El control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  ha demostrado un desempeño y robustez superior a los controles en  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  aplicados en columnas de destilación binaria, reactores químicos e intercambiadores de calor. Principalmente se ha desarrollado controladores  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en columnas de destilación utilizando modelos dinámicos con funciones de transferencia con tiempo de retardo. Se ha decidido desarrollar el control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en procesos con parámetros distribuidos, un ejemplo de este sistema es el intercambiador de calor de tubos concéntricos (CCTHE, por sus siglas en inglés: Tubular Counter-Current Heat Exchanger).

En los intercambiadores de calor se han utilizado técnicas de control geométrico, ya que Maidi *et al.* (2009) desarrollo la sintonización de dos controladores SISO (Single input, single output) utilizando un algoritmo PI. El objetivo de este trabajo fue desarrollar un controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  con un algoritmo PI aplicado a una estructura SISO y se generalizo el control MIMO aplicado a un CCTHE.

Para alcanzar los objetivos, primero se establecieron las condiciones matemáticas para demostrar la naturaleza geométrica del controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ . Posteriormente, el espacio de estado se organizó para describir intercambiadores de calor con algoritmos de control PI tanto MIMO (Multi input, multi output) como SISO. La sintonización fue por minimización de la suma de las integrales del cuadrado del error  $I_e = \int_0^\infty \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} dt = \mathcal{L}_2(\mathbf{e})$  y del cuadrado del control  $I_u = \int_0^\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty)^T \mathbf{R} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty) dt = \mathcal{L}_2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty)$  manteniendo los valores propios en  $\mathcal{D}$ , utilizando el algoritmo Box-Ruiz-Rodríguez-García. Posteriormente se validó el control por simulación ante un cambio escalonado en el set point. El proceso se aplicó a un intercambiador con control MIMO PI y a un intercambiador SISO PI reportado previamente en literatura.

El modelo dinámico del intercambiador de calor de fue linearizado por serie de Taylor alrededor del estado estable resultando en un modelo lineal de orden 40. El espacio de las soluciones forma una variedad matemática, por lo tanto, el controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  pertenece a la

familia de los controles geométricos con la función  $u$  definida y dependiente de los parámetros del PI. El control geométrico paramétrico en  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  se aplicó con éxito a los modelos no-lineales con control MIMO-PI. Además el control geométrico paramétrico en  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  superó el desempeño y robustez de los controladores geométricos SISO-PI reportados en la literatura.

## 2. ANTECEDENTES

La teoría de control se ha desarrollado principalmente en intercambiadores de calor, columnas de destilación y reactores químicos, en el siguiente apartado se describen de forma general los intercambiadores de calor y el estado del arte de la teoría de control

### 2.1 Intercambiadores de calor

La transferencia de energía en forma de calor es muy común en procesos químicos, tales como: evaporación, destilación, ebullición, condensación, secado e intercambiadores de calor. Estos últimos casi siempre están conectados a otros equipos térmicos, por lo que es muy importante en procesos de la industria química.

De acuerdo a (Heldman, Dennis R; Lund, 2006) un intercambiador de calor es un equipo diseñado en la transferencia de energía entre dos fluidos, el mecanismo puede ser representado de acuerdo a la Fig.2.1 y se efectúa por convección desde el seno del fluido caliente a la pared a la pared interna del tubo y luego por conducción a la pared externa exterior del tubo para de ahí trasladarse por convección al seno del fluido frío, esta transferencia de energía es descrita por las Ec. (2.1) que combina la conducción y la convección en función de un coeficiente global de transferencia de calor  $\left( U = \frac{W}{m^2 K} \right)$ .

$$Q = UA\Delta T_{global} \quad (2.1)$$



**FIGURA. 2.1** Mecanismo de transferencia de energía

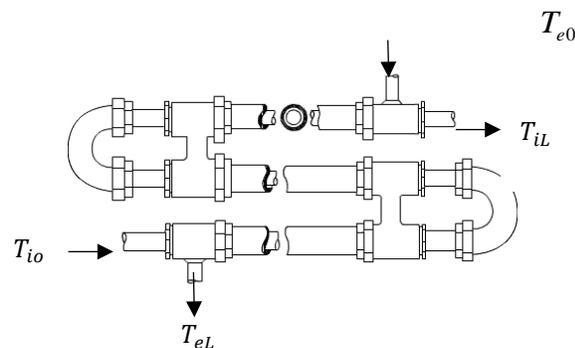
De acuerdo con Agarwal *et al.* (2014) la aplicación de los intercambiadores de calor radica principalmente en la industria de los alimentos, en procesos de pasteurización y enfriamiento en productos del sector lácteo y bebidas en general, así como equipo auxiliar en el enfriamiento y calentamiento de jarabes en el sector azucarero. Además es utilizado en sistemas de esterilización, desactivación enzimática y como equipo auxiliar en diversas operaciones unitarias.

Dependiendo de la naturaleza de los intercambiadores, se pueden dividir por contacto directo e indirecto. Además pueden ser caracterizados dependiendo la disposición del flujo (paralelo, contracorriente y flujo cruzado), por el material de construcción (metálico, no metálico y grafito) y del número de pasos (sencillo o multi-paso). En este proyecto debido a la disponibilidad e instrumentación del equipo se utilizó el intercambiador de calor de tubos concéntricos, por esta razón es preciso mencionar las características del intercambiador.

## 2.2 Intercambiadores de calor de tubos concéntricos

En este trabajo se usó intercambiadores de calor de tubos concéntricos, las partes principales son dos juegos de tubos concéntricos, un cabezal de retorno, dos conectores T y un codo en U. La tubería interior se soporta en la exterior mediante estoperos y el fluido entra al tubo interior a través de una conexión roscada localizada en la parte externa del intercambiador. La T tiene boquillas o conexiones roscadas que permiten la entrada y salida del fluido del anulo que cruza de una sección a otra a través del cabezal de retorno. La tubería interior se conecta mediante una conexión en U que esta generalmente expuesta y que no proporciona superficie de transferencia de energía térmica. Cuando se arreglan dos pasos, a unidad se llama horquilla.

El intercambiador de calor de tubos concéntricos se caracteriza por el contacto indirecto de los dos fluidos ya que se encuentran separados por la pared del tubo interno y la disposición de los flujos a contracorriente de acuerdo a la Fig. 2.2 en donde se observa que fluyen en dirección opuesta el uno al otro, por lo tanto la distribución de temperaturas del fluido frio ( $T_i$ ) y fluido externo ( $T_e$ ).

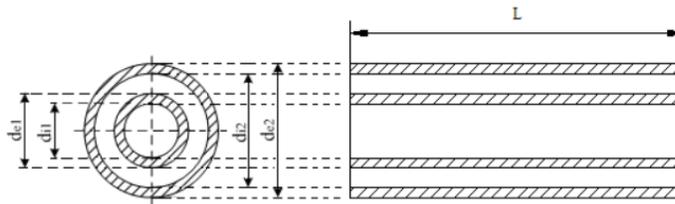


**FIGURA. 2.2** Intercambiador de calor de tubos concéntricos a contracorriente.

De acuerdo a Sadik *et al.* (2002) los intercambiadores de tubo concéntrico son utilizados en procesos de calor sensible para áreas de transferencia de calor ( $<10 \text{ m}^2$ ). Existe una gran diversidad de intercambiadores de calor de tubos concéntricos ya que depende de las condiciones específicas del proceso, pero generalmente se recomienda en el tratamiento de fluidos con sólidos en suspensión y productos con partículas. Para este tipo de aplicación, las

condiciones estándar de diseño se encuentran en un rango de temperatura (-40°C a 180°C) y presión (Vacío a 10 bar), con respecto a las dimensiones de longitud (3-6 m) y el diámetros del tubo exterior van desde (38 mm a 354 mm).

Las características de la geometría del intercambiador de calor concéntrico se ejemplifican en la Fig.2.3 y se define como diámetro interior del tubo interno ( $d_{i1}$ ), diámetro exterior del tubo interno ( $d_{e1}$ ), diámetro interior del tubo externo ( $d_{i2}$ ), diámetro exterior del tubo externo ( $d_{e2}$ ), y longitud del tubo ( $L$ ).



**FIGURA. 2.3** Geometría del intercambiador de tubos concéntricos.

Es así como la ingeniería de detalle nos permite calcular el área específica de transferencia de calor a partir de los diámetros, la Ec. 2.2 define el área específica de transferencia de calor en el fluido frío ( $m^{-1}$ ).

$$a = 4/((d_{i1} + d_{i2})/2) \quad (2.2)$$

Además el volumen en cada nodo para el fluido frío ( $m^3$ ) y fluido caliente ( $m^3$ ), según la Ec. (2.3) y (2.4) respectivamente.

$$V_{cj} = (\pi d_0^2 / 4) L_j \quad (2.3)$$

$$V_{hj} = \pi (d_1^2 / 4 - d_{01}^2 / 4) L_j \quad (2.4)$$

Donde  $L$  corresponde al largo total del intercambiador de calor

$$L_j = L/N \dots\dots\dots(2.5)$$

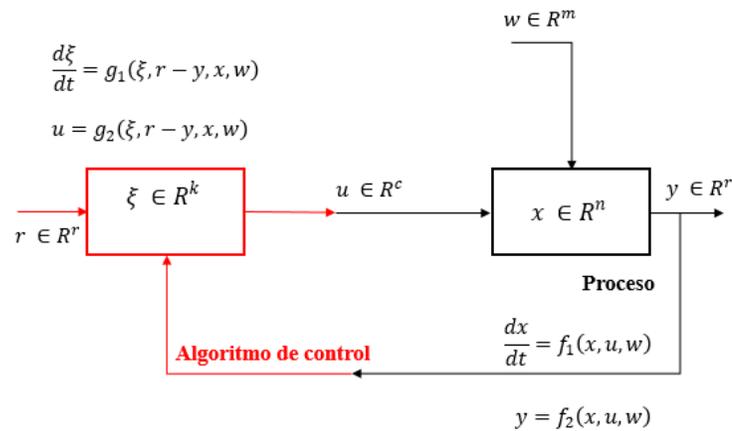
Debido a la importancia que tiene el manejo óptimo de los intercambiadores de calor, se propone adaptar este sistema en bucle cerrado, con el fin de satisfacer los requerimientos

impuestos en el diseño de los intercambiadores de calor, así como condiciones técnicas, económicas y sociales ante la presencia de influencias externas o perturbaciones. En el siguiente apartado se introduce conceptos necesarios para el desarrollo del proyecto y se presenta el estado del arte de la sintonización de los controladores.

### 2.3 Control lazo cerrado

El control de lazo cerrado consiste que la variable de proceso ( $y$ ) siga el set point ( $r$ ) ante la presencia de perturbaciones y ruido. La mayoría de los procesos que requieren de un controlador, no cuenta con un modelo mecanístico y esto origina que el sistema se aleje de su estado deseado. Por otra parte el ruido de medición puede considerarse como señales de error y es proporcionada por los sensores que comunican el sistema y el controlador. En la Fig.2.4 se ilustra el sistema de realimentación. La finalidad de este tipo de sistemas es reducir la señal de error de los actuadores en el proceso, garantizar la estabilidad, robustez y desempeño del mismo. Es tan relevante, que la gran mayoría de los sistemas de control desarrollados actualmente depende de un sistema en lazo cerrado. (Ogata, 2003; Rodríguez Rubio & López Sánchez, 1996).

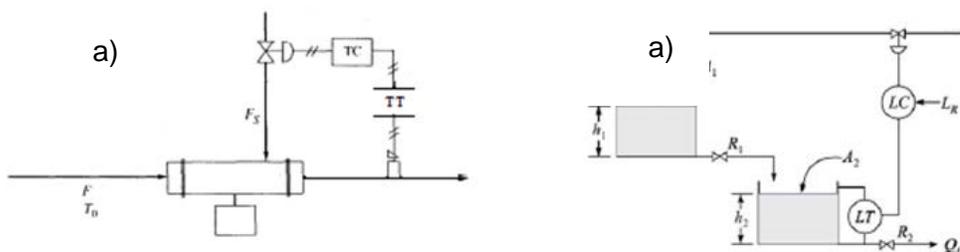
La configuración básica de un sistema de control en función de las variables involucradas se describe en la Figura 2.4 y se define como:  $x \in R^n$  estado o conjunto de variables que definen el proceso;  $\xi \in R^k$  conjunto de variables que definen el estado del algoritmo de control;  $y \in R^r$  conjunto de variables que definen la salida medida del proceso;  $w \in R^m$  conjunto de variables que definen la entrada del proceso;  $u \in R^c$  conjunto de variables que definen la acción de control sobre el proceso;  $r \in R^r$  set point o conjunto de variables que definen el valor deseado en la salida medida del proceso. Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  se conocen como espacio de estado del proceso o sea el conjunto de ecuaciones que definen la dinámica del proceso; y las funciones  $g_1$  y  $g_2$  son el algoritmo de control. Las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  de cualquier proceso lineal o linearizado controlado con un algoritmo de control lineal se puede representar por el espacio de estado lineal.

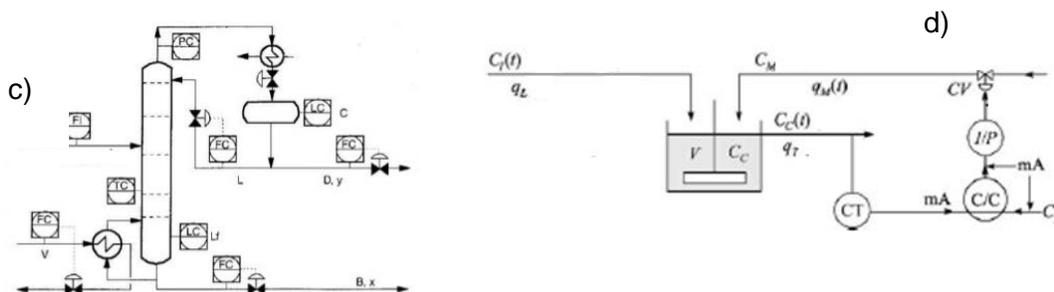


**FIGURA. 2.4** Configuración básica de un sistema de control.

En la industria nos encontramos frecuentemente con procesos multivariados (MIMO, por sus siglas en inglés Multi-Input Multi-Output), usualmente existen interacciones entre los lazos de control, lo que dificulta su control en comparación con los procesos univariados (SISO, por sus siglas en inglés Single-Input Single-Output). Los controladores multivariados son capaces de compensar las interacciones, aunque sus diseños son más complejos y su implementación inevitablemente más costosa. (Alvarez-Ramirez & Monroy-Loperena, 2001; Garcia-Alvarado & Ruiz-López, 2010)

En la literatura se ha reportado controladores MIMO aplicado a columnas de destilación con el objeto de controlar la salida de la concentración del domo y la salida de la concentración del fondo, con respecto a los reactores continuos de tanque agitado la finalidad es controlar la concentración del reactor y la temperatura de salida. Por su parte los intercambiadores de calor y los sistemas de tanques en serie utilizan sistemas SISO. Tal como lo ilustra la Fig. 2.5





**FIGURA. 2.5** Sistemas de control de lazo cerrado en procesos químicos. a) control en un intercambiador de calor b) control de nivel de líquido de un tanque c) control en columna de destilación d) control en un reactor químico

La sintonización de un sistema se basa en la selección de los parámetros del controlador basado en un criterio de desempeño, con el objetivo de cumplir las especificaciones de diseño definidas sobre alguna función del proceso. Uno de los algoritmos más utilizados en la actualidad es el controlador PI (Proporcional-Integral) debido a la estructura fácil de implementar en sistemas multivariados, en cuanto a las características de este controlador se describen en el siguiente apartado.

## 2.4 Algoritmo de control Proporcional-Integral (PI)

El algoritmo de control Proporcional-Integral (PI) es uno de los controladores más utilizados en la industria química, eléctrica y mecánica. Se ha propuesto para sistemas SISO donde se ha desarrollado la sintonización basado en la teoría clásica de control de Ziegler-Nichols. Asimismo es utilizado en sistemas MIMO, siendo cada vez más popular y reportado en la literatura. (Alvarez-Ramirez & Monroy-Loperena, 2001)

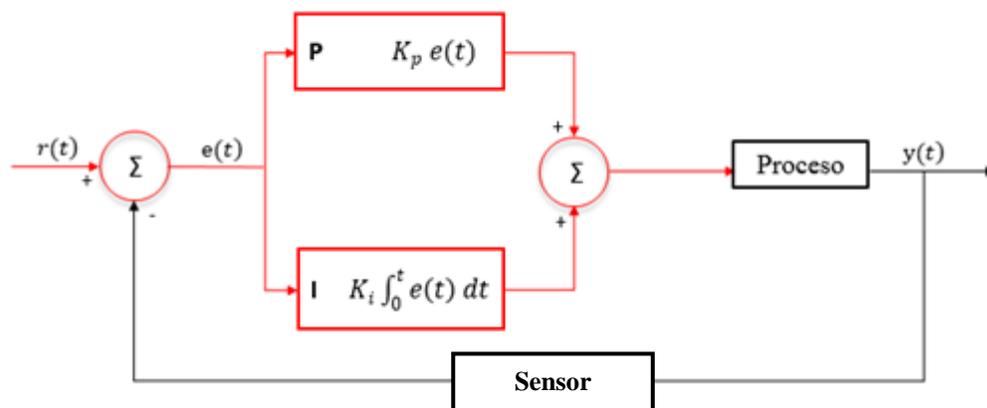
Este controlador tiene estructura simplicidad matemática, fácil de entender e implementar la sintonización para un personal entrenado. El número de parámetros a sintonizar es  $2n$ , donde  $n$  es el número de salidas y la matriz del algoritmo del controlador está

representado por  $2n^2$  parámetros. Las Ecs. (2.6) y (2.7) definen el controlador Proporcional-Integral (PI), en donde  $k_p$  es la ganancia proporcional y se usa para estabilizar o acelerar la convergencia de la planta, mientras más grande sea la ganancia proporcional, más brusco será el cambio que sufra la señal de control. Y lo que respecta a la acción integral considera el historial de proceso de la planta y reduce el error en estado estacionario. En la Fig. 2.7 se resume la estructura del controlador PI.

$$\frac{d\xi}{dt} = r - y \quad (2.6)$$

$$u = k_p(r - y) + k_i\xi \quad (2.7)$$

Si el controlador PI es usado en un sistema MIMO, el número de respuestas es igual al número de variables de control, y las matrices  $k_p$  y  $k_i$  tienen una estructura en diagonal, entonces se habla de un control multilazo o descentralizado. Bajo esta estructura cada variable de control depende de la señal proveniente de una sola respuesta, este tipo de estructura es el más aplicado en el algoritmo Proporcional-Integral. En cambio si las matrices de ganancias  $k_p$  y  $k_i$  son rectangulares se habla de un control multivariado. En esta estructura cada señal de control depende de la señal de error proveniente de todas las respuestas o de alguna combinación de ellas, este tipo de controladores es complejo en comparación a una estructura multilazo y asegura la robustez de la planta. Ruiz-López *et al.* (2006)



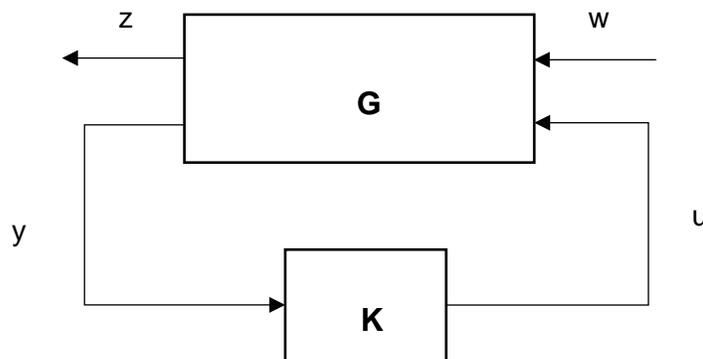
**FIGURA. 2.6** Estructura del algoritmo de control PI

## 2.5 Criterios de desempeño de un control óptimo-robusto

Existen dos tendencias para establecer un criterio de desempeño óptimo-robusto: el balance entre las normas  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  de la salida del sistema (Doyle et al., 1989; Chen et al., 2002; Goncalves et al., 2008), y el criterio de sintonización  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  que produce sistemas de control con desempeño y características de robustez comparables a otros métodos reportados en la literatura.

### 2.5.1 Controlador óptimo-robusto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Dos medidas de desempeño clásicas en la teoría de control óptimo son las normas definidas sobre  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  donde  $\mathcal{H}_n$  es un espacio de Hardy tal que  $G(s) \in \mathcal{H}_n$  si  $\|G_s\|_n \in \mathfrak{R}$ . Las normas definidas  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  son utilizadas en la teoría de control óptimo y se encuentran representadas por una matriz de transferencia  $G(s)$  y está asociada con el desempeño, la respuesta, el rechazo de disturbio y la estabilidad robusta en lazo cerrado. El diagrama de bloques propuesto por Doyle *et al.* (1989) se presenta en la Fig. 2.7, también se conoce como transformación lineal fraccional, donde K y G son matrices de transferencia. La función de transferencia en lazo cerrado desde w a z es  $\|T_{zW}(s)\|$  (Matriz de transferencia de lazo cerrado) en dominio de Laplace.



**FIGURA. 2.7** Configuración de control  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

La norma  $\mathcal{H}_2$  de la matriz de transferencia de un sistema en lazo cerrado es equivalente a la integral del cuadrado de la salida del sistema ante una entrada impulso y por lo tanto es una medida de desempeño, como se muestra en la ecuación 2.8.

$$\|G(s)\|_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{traza}[G^*(j\omega)G(j\omega)]d\omega \quad (2.8)$$

La norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la matriz de transferencia de un sistema en lazo cerrado es una medida de sensibilidad en la salida ante una entrada de cualquier tipo y por lo tanto se utiliza como índice de robustez.

$$\|G(s)\|_\infty = \sup \sigma_{\max}[G(j)] \quad (2.9)$$

Los procedimientos desarrollados por Doyle *et al.* (1989) describen la solución analítica a los problemas de control estándar  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , permiten obtener los controles de orden superior que hacen que  $\|\mathbb{T}_{ZW}(s)\|_2 \rightarrow \min$  y  $\|\mathbb{T}_{ZW}(s)\|_\infty < \gamma$  (*índice de funcionamiento*) para la matriz de transferencia  $\|\mathbb{T}_{ZW}(s)\|$  de la planta definida por las ecuaciones sujeta a la ley de control dinámica de orden k de realimentación expresada por la ecuación (2.13)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}(s) \quad (2.13)$$

En la representación del sistema dada por las ecuaciones (2.10)-(2.13) se considera que existe una salida (z) que relaciona con el desempeño de la planta pero no se encuentra disponible en el controlador. Además las señales de referencia están incluidas en el vector de salidas medibles (y). Esta representación se conoce como transformación fraccional lineal de la planta.

La solución a los problemas de control estándar  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  es formulada en términos de la ley dinámica de control y se encuentra definido por la Ecuación 2.14. Es importante notar que el control obtenido es completamente multivariado y del mismo orden que la planta ( $k=n$ ). Así que no existe control sobre la estructura sintetizada de los lazos individuales de control.

$$K(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = C [I_k s - \mathcal{A}]^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D} \quad (2.14)$$

Para probar la respuesta transitoria de los sistemas de control, una elección común es usar una función escalón para las señales de referencia o para las perturbaciones. Sin embargo, es importante señalar que el controlador obtenido no contiene integrador. Por lo tanto si la planta es sujeta a una perturbación escalón en las señales de referencia ( $r$ ) o en las señales exógenas ( $w$ ), el sistema no sería capaz de seguir o rechazar las referencias o perturbaciones con cero error en estado estacionario las entradas consideradas deben pertenecer al espacio de Lebesgue, es decir, la integral cuadrática de las funciones debe ser finita en  $[0, \infty)$ .

### 2.5.2 Controladores óptimo-robustos desarrollados en el laboratorio de bioestadística

La teoría de control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  desarrollada desde hace 15 años por el cuerpo académico de ingeniería de alimentos del ITV ha demostrado superar al criterio  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  en sistemas de lazo cerrado aplicados a procesos de ingeniería química y sistemas aeronáuticos. Con el objeto de asegurar controladores robustos, es decir, que la respuesta dinámica del sistema sea afectada de forma mínima por las incertidumbres en los parámetros del modelo.

García-Alvarado *et al.* (2005) diseñó un criterio de sintonización para cualquier planta lineal con control PID multivariado, basado en las características de los eigenvalores ( $\lambda_i$ , también conocido como valores propios de la matriz característica) y del índice de desempeño de Lyapunov. Los parámetros del controlador se definen como  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ ,

Encontrar  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  tal que

$$\text{Var } I_L \rightarrow \text{Min} \quad (2.15)$$

Sujeto a

$$I_L < \varepsilon_1 \quad (2.16)$$

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall_i = 1, 2, \dots, (n+s) \quad (2.17)$$

Donde

$$\text{Var}(I_L) = \sum_j \sum_i \left( \frac{\partial I_L}{\partial a_{ij}} \right)^2 \quad (2.18)$$

El desempeño del controlador fue evaluado con el índice de funcionamiento cuadrático del error.  $\mathbf{Q}$  es una matriz de ponderación y al igual que  $\mathbf{R}$  es simétrica y positiva definida.

$$I_e = \int_0^{t_f} \left[ (y_d - y)^T \mathbf{Q} (y_d - y) + u^T \mathbf{R} u \right] dt \quad (2.19)$$

El criterio de sintonización fue aplicado en el diseño del control en un modelo linealizado en una columna de destilación, en la Ec. (2.20) se representa el modelo aproximado de la dinámica del proceso.

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-33.89}{(98.02s+1)(0.42s+1)} & \frac{32.63}{(99.6s+1)(0.35s+1)} \\ \frac{-18.85}{(75.435+1)(0.30s+1)} & \frac{34.84}{(110.5s+1)(0.03s+1)} \end{bmatrix} x e^{-0.01s} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Por otra parte Ruiz-López *et al.* (2006) propuso un criterio de robustez basándose en  $\phi_{max} = \lambda_i / \text{Re}(\lambda_i)$ , este concepto es equivalente a la norma  $\mathcal{H}_\infty$  y utilizan valores de  $\phi_{max} < 1$  para asegurar la robustez, sin embargo no garantiza el buen desempeño de control y debido a esto se propone el índice cuadrático de Lyapunov (si el índice de Lyapunov es pequeño asegura el desempeño asintótico del estado de control). La evaluación del criterio de robustez  $\phi_{max}$  es computacionalmente menos intensiva en comparación al criterio de robustez

basándose en la varianza del índice  $Var(I_L)$  y debido a esto el criterio de robustez fue remplazado.

Por lo tanto, el problema de optimización quedo expresado en la Ec. (2.21) y está sujeto a las restricciones del índice de Lyapunov, abscisa espectral y  $\phi_{max}$ .

$$\text{Hallar } k_p, k_i, k_d \text{ tal que } w_1 I_L + w_2 \phi_{max} + w_3 \alpha \rightarrow \text{Min sujeto } \alpha < 0 \quad (2.21)$$

Es un método alternativo empleado en controladores PID multivariados y esta basados en el índice de funcionamiento obtenidos a partir de los valores propios de la matriz característica del sistema de control en lazo cerrado y del segundo método de estabilidad de Lyapunov, con esto se elimina la necesidad de resolver las ecuaciones de estado. Estos índices dependen únicamente de las condiciones iniciales del sistema y de la dinámica de la planta contenida en la matriz de estado en lazo cerrado, de acuerdo a la Ec.(2.22).

$$I_L = \mathbf{X}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{X}(0) \quad (2.22)$$

García-Alvarado *et al.* (2010) estableció un método de sintonización para controladores optimo-robusto para sistema lineal MIMO con acción de control multivariada y puede representarse por medio de las ecuaciones (2.28-2.31).

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (2.23)$$

$$y = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (2.24)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}_1 r + \mathcal{B}_2 y \quad (2.25)$$

$$u = \mathcal{C}\xi + \mathcal{D}_1 r + \mathcal{D}_2 y \quad (2.26)$$

Ahora bien, el espacio aumentado con las variables de control se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dX}{dt} = A_1 X + B_1 w + B_2 r \quad (2.27)$$

$$y = C_1 X + D_{11} w + D_{12} r \quad (2.28)$$

$$u = C_2 X + D_{21} w + D_{22} r \quad (2.29)$$

$$X' = [x' \quad \xi']$$

Donde;

$$A = \begin{bmatrix} A + B_2 D_2 \Delta_1 C_1 & B_2 \Delta_2 C \\ B_2 \Delta_1 C_1 & A + B_2 \Delta_1 D_{12} C \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_2 \Delta_1 D_{11} \\ B_2 \Delta_1 D_{11} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_2 \Delta_2 D_1 \\ B_1 + B_2 \Delta_1 D_{12} D_1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [\Delta_1 C_1 \quad \Delta_1 D_{12} C] \quad C_2 = [D_{12} \Delta_1 C_1 \quad \Delta_2 C]$$

$$D_{11} = [\Delta_1 D_{11}] \quad D_{12} = [\Delta_1 D_{12} D_1] \quad D_{21} = [D_2 \Delta_1 D_{11}] \quad D_{22} = [\Delta_2 D_1]$$

$$\Delta_1 = (I_r - D_{12} D_2)^{-1} \quad \Delta_2 = (I_c + D_2 \Delta_1 D_{12})$$

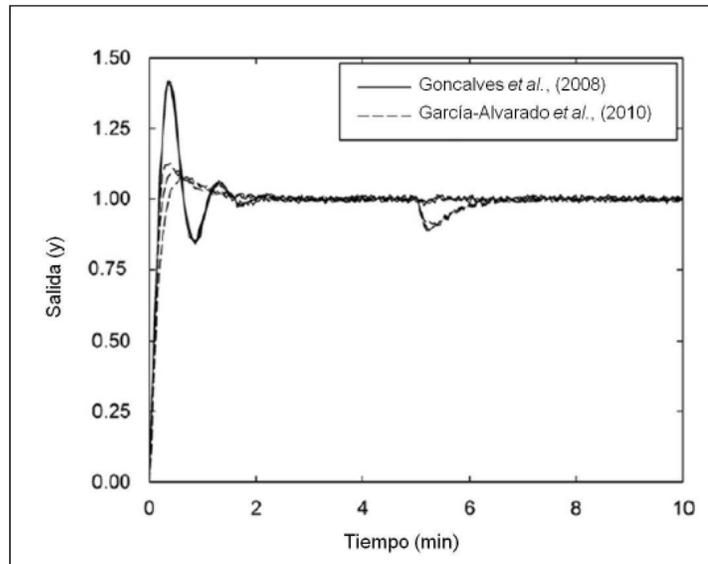
Es necesario resolver el problema de control óptimo, es decir, encontrar los elementos  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  para obtener la sintonización del controlador de acuerdo a la Ec. 2.31 y Ec.2.32 utilizando la restricción conforme a la Ec. 2.36. Donde  $w_y \in R^{r \times \Psi}$ ,  $w_u \in R^{c \times \Psi}$ ,  $I_y \in R^{r \times \Psi}$ ,  $I_u \in R^{c \times \Psi}$

$$J = (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2) = w_y I_y + w_u I_u \rightarrow \min \quad (2.30)$$

$$\phi_{\max} = \max \left( \frac{\text{im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right) < \forall_i = 1, 2, \dots, (n+k) \quad (2.31)$$

$$|I_{n+k} \lambda_i - A| = 0 \quad (2.32)$$

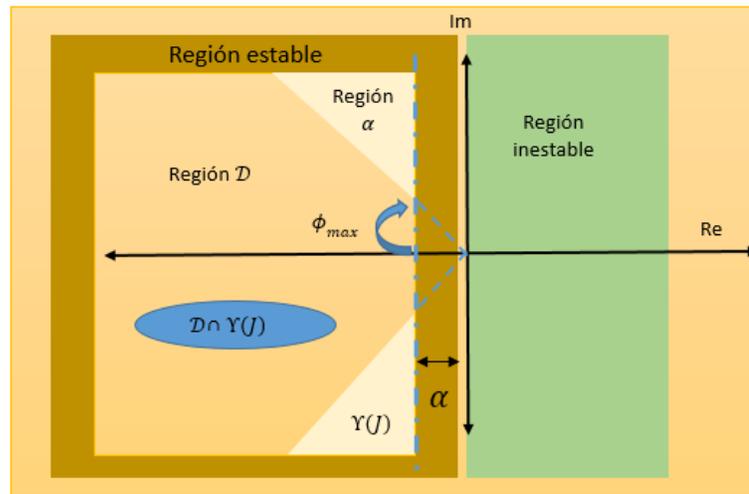
El equilibrio entre el desempeño de la salida ya acción de control fue proporcionada por  $w_y$  y  $w_u$ . Los autores utilizaron este criterio para sintonizar controladores lineales en reactores químicos, CSTR y columnas de destilación. A continuación se muestra en la Fig. 2.8 la dinámica de salida de un controlador MIMO-PID aplicado al CSTR.



**FIGURA. 2.8** Simulación dinámica de la salida para el controlador de un reactor CSTR en respuesta a una perturbación

De acuerdo a la teoría desarrollada por (García-Alvarado et al., 2005; Ruiz-López et al., 2006) se propone el criterio de sintonización  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  y la interpretación grafica se observa en la Fig.2.8, este criterio es descrito por la restricción  $\alpha < 0$  donde cada valor propio  $\lambda_i$  de la matriz  $\phi_{max}$  se encuentra en la región  $\alpha$ -estable del plano complejo, asegurando la estabilidad asintótica. Además  $\alpha$  y  $\phi_{max}$  definen una región  $\mathcal{D}$  de números complejos para una velocidad mínima de decaimiento asintótico y una robustez máxima. Adicionalmente, el índice de desempeño  $J$  define una subregión  $Y(J)$  en el plano complejo izquierdo que confina a los polos en lazo cerrado para una rápida estabilización de las variables de salida, un mínimo

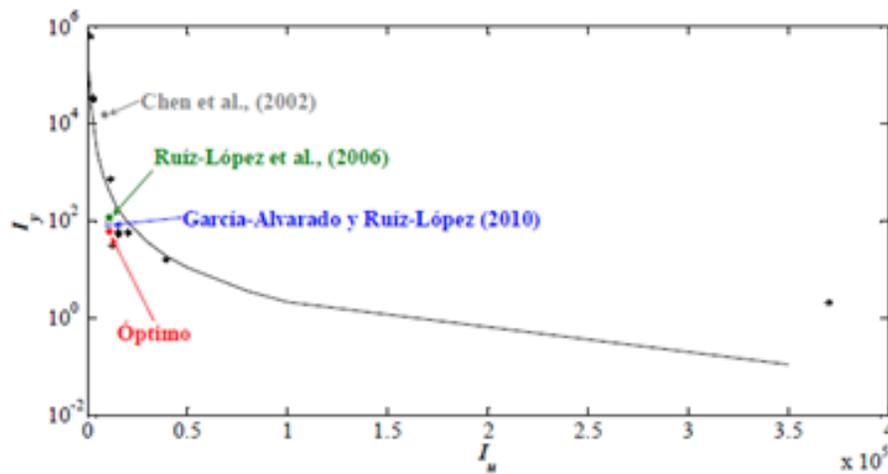
esfuerzo de control o una combinación de ambas. La región  $\mathcal{D} \cap Y(J)$  corresponde a una región polinomial  $\mathcal{D}$ -estable.



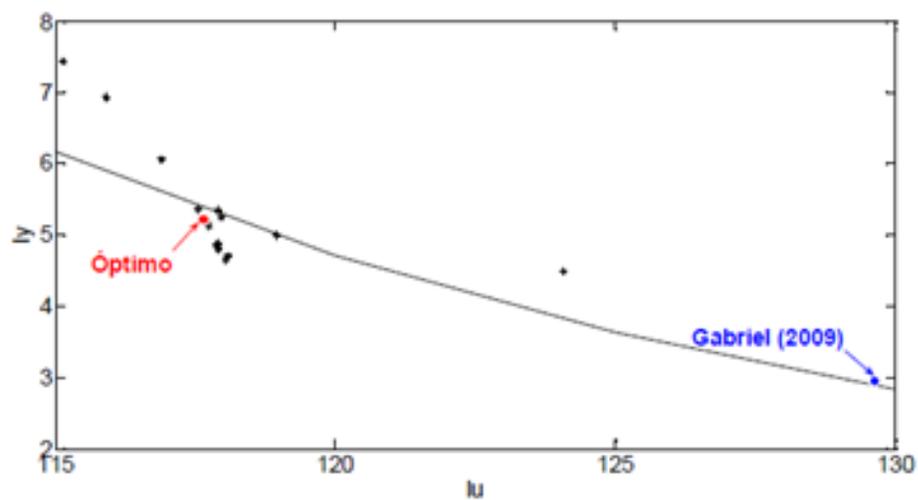
**FIGURA. 2.9** Sintonización  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

El criterio  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  consiste en sintonizar un algoritmo de control minimizando las integrales del cuadrado del error y del cuadrado de la acción de control, asegurando que el error y la acción de control sean elementos de espacios normados de Lebesgue ( $\mathcal{L}_2$ ), y los valores propios de la matriz característica del sistema de control estén en una región establecida del semi-plano complejo izquierdo ( $\mathcal{D}$ ).

Carrillo-Ahumada *et al.* (2011) aplicaron el criterio de sintonización  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en el diseño de controladores lineales para sistemas de: biorreactor de Cholette, CSTR con reacción enzimática y aeronáutica. Obtuvieron índices de desempeño para cada salida medida y señal de control, los cuales graficaron la localización de los controladores en el frente de Pareto 2D (dos funciones globales  $I_e$  y  $I_u$ ).



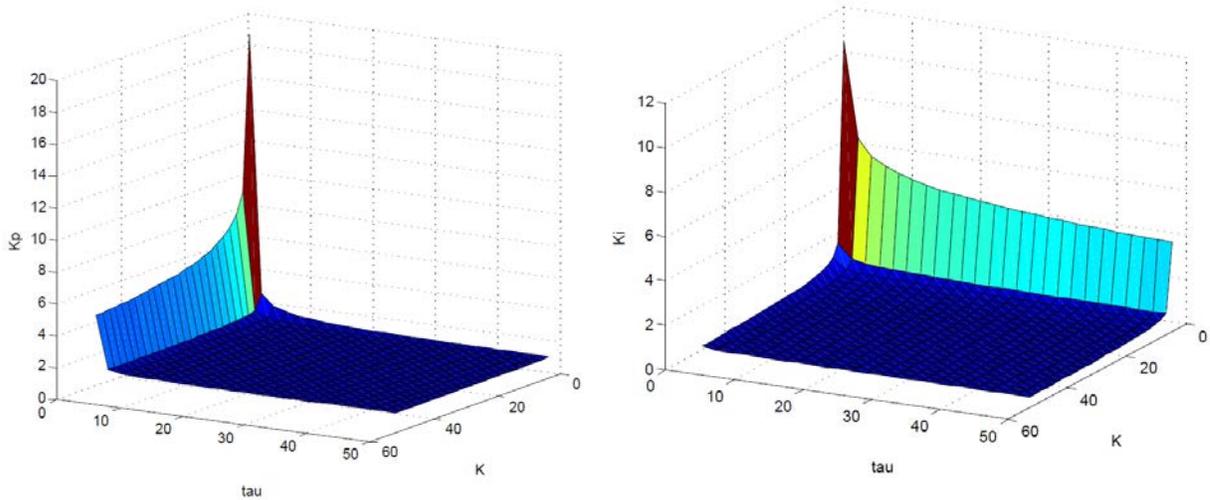
**FIGURA. 2.10** Frente de Pareto para el CSTR obtenido con las funciones globales  $I_y$  y  $I_u$



**FIGURA. 2.11** Frente de Pareto para el sistema aeronáutico obtenido con las funciones globales  $I_y$  y  $I_u$

En el trabajo de Vargas-González *et al.* (2014) desarrolló un control sintonizado con el criterio  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en equilibrio de Nash para un proceso dinámico de primer orden. Ellos

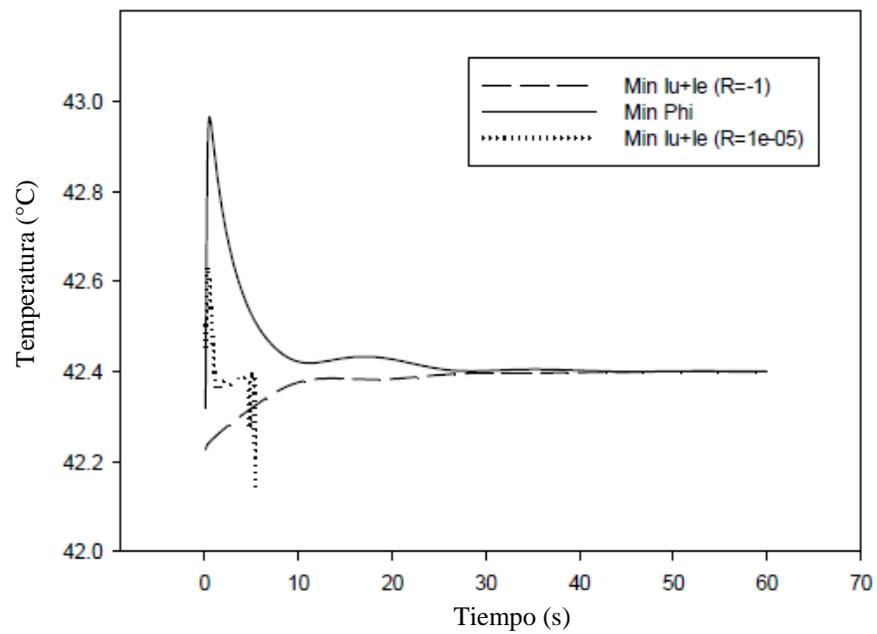
concluyeron que el espacio geométrico formado por  $(k_p, k_i)$  vs  $(K, \tau)$  del controlador sugiere la existencia de un homeomorfismo, es decir, es una relación biyectiva 1:1.



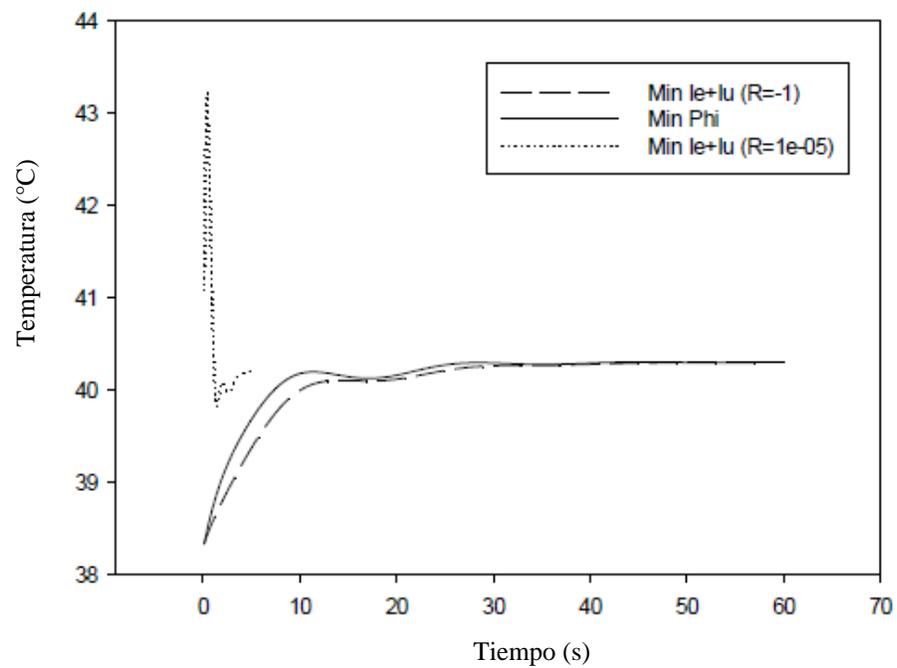
**FIGURA. 2.12** Relación entre los parámetros de control vs. dupla  $(K, \tau)$

Otra contribución realizada en el ámbito de equilibrio de Nash, fue realizada por Flores *et al.* (2015), diseñaron un modelo dinámico aplicado a un intercambiador de calor de tubos concéntricos y demostraron que un sistema de control MIMO cuyos parámetros son sintonizados en equilibrio de Nash demuestra tener capacidad para aceptar cambios en los parámetros del sistema, debido a que se probó en un modelo linealizado y no lineal del intercambiador de calor de tubos concéntricos.

En la Fig.2.10 se observa el mejor desempeño utilizando el equilibrio de Nash con una ponderación en la matriz  $\mathbf{R}$  de  $1e^{-01}$  en la salida del fluido caliente y en la Fig. 2.11 se ilustra la sintonización del desempeño en la salida del fluido frío minimizando  $\phi_{max}$  y empleando el equilibrio de Nash con ponderación en la matriz  $\mathbf{R}$  de  $1e^{-01}$ .



**FIGURA. 2.13** Desempeño del fluido caliente a diferentes parámetros de sintonización.

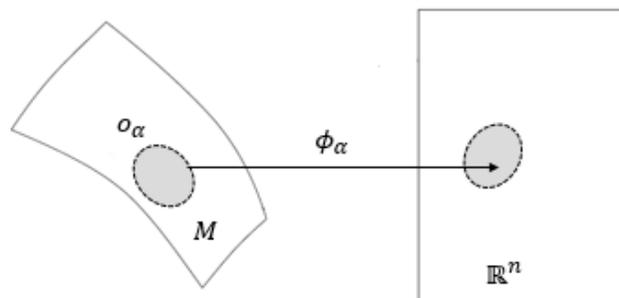


**FIGURA. 2.14** Desempeño del fluido frío a diferentes parámetros de sintonización.

De acuerdo a lo anterior, surge la necesidad desarrollar un controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en un sistema de parámetros distribuidos y demostrar su naturaleza geométrica. Para ello es necesario definir el concepto de variedad matemática (Manifold) para entender la teoría de control geométrico.

### 2.5.3 Variedad matemática (Manifold)

Una variedad topológica (Manifold) de dimensión  $n$  es un espacio topológico de Hausdorff  $M$  tal que cada punto  $p \in M$  tiene un entorno homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, es un espacio vectorial suave, si se puede describir un modelo dinámico sobre todos los números posibles que describen la superficie definida con características homeomorfas al espacio euclidiano en relación biyectiva 1:1 en las cercanías del punto.



**FIGURA. 2.15** Variedad matemática (Manifold)

El concepto de variedad matemática es importante para la definición de control geométrico, a continuación se describe el concepto de control geométrico aplicado a dos sistemas SISO-PI reportado en la literatura.

## 2.6 Control geométrico-paramétrico

Un control geométrico se define con el siguiente problema (Piccoli, 1998)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad x \in M \quad u \in U \quad (2.33)$$

$$\min \left( \int L(x, u) dt + \varphi(x_\infty) \right) \quad (2.34)$$

Donde,  $M$  es un manifold (variedad),  $U$  es un espacio métrico,  $f : M \times U \rightarrow M$ ,  $L : M \times U \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $\varphi : M \rightarrow \mathcal{R}$ .

## 2.7 Control de intercambiadores térmicos de tubos concéntricos

Típicamente los intercambiadores de calor son ampliamente utilizados en procesos industriales, tanto para las operaciones de refrigeración y calefacción. Para obtener un desempeño más eficiente se requiere de estrategias de control basados en el uso de los parámetros del modelo. Es por eso que se encuentra en la literatura diversos enfoques propuestos para el control de los intercambiadores de calor.

A continuación se mencionan algunas formulaciones previas al problema de control en los intercambiadores de calor, uno de los primeros modelos consideró problemas de difusión e hicieron uso de un controlador robusto adaptativo, la temperatura de entrada y caudal del fluido externo es utilizado para controlar la salida del fluido interno. Otros autores consideran una ecuación diferencial parcial del fluido interno, condición inicial, condición de frontera y el fluido externo se asume homogéneo. Uno de los trabajos más recientes ha sido realizado por (A. Maida, Diaf, & Corriou, 2009; Ahmed Maida, Diaf, & Corriou, 2010) consideran una ecuación diferencial de la dinámica de temperatura para el fluido del tubo interno, una ecuación diferencial de la temperatura del fluido externo, condiciones iniciales y condiciones de frontera para cada uno respectivamente que describe el espacio temporal de las temperaturas en un intercambiador de calor a contracorriente y paralelo.

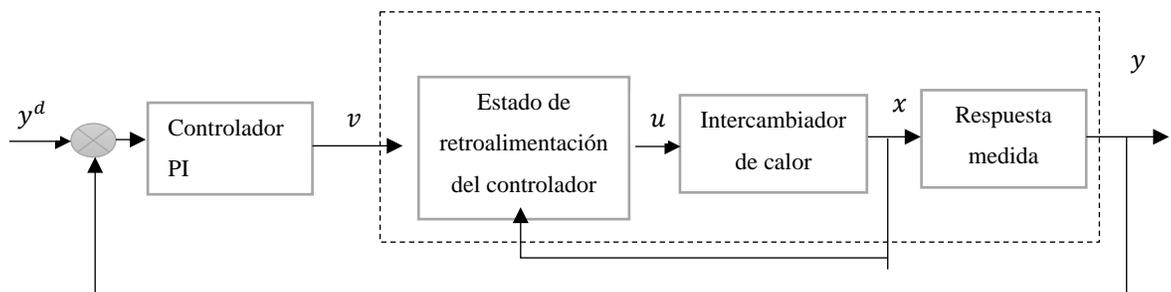
### 2.7.1 Control geométrico en controladores SISO-PI aplicado a un intercambiador de calor.

En la literatura podemos encontrar diversos métodos de sintonización de control de temperatura en intercambiadores de calor Sin embargo Maldi *et al.* (2009) es la única referencia con respecto al control geométrico aplicado a intercambiadores térmicos de tubos concéntricos, estos autores propusieron un control geométrico de frontera y un control frontera de intercambiadores de energía térmica. En la Figura 2.11 se describe el intercambiador a contracorriente y las ecuaciones 2.35-2.36 representa el modelo dinámico.

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = -v(t) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + a_e [T_e(z,t) - T(z,t)] \quad (2.35)$$

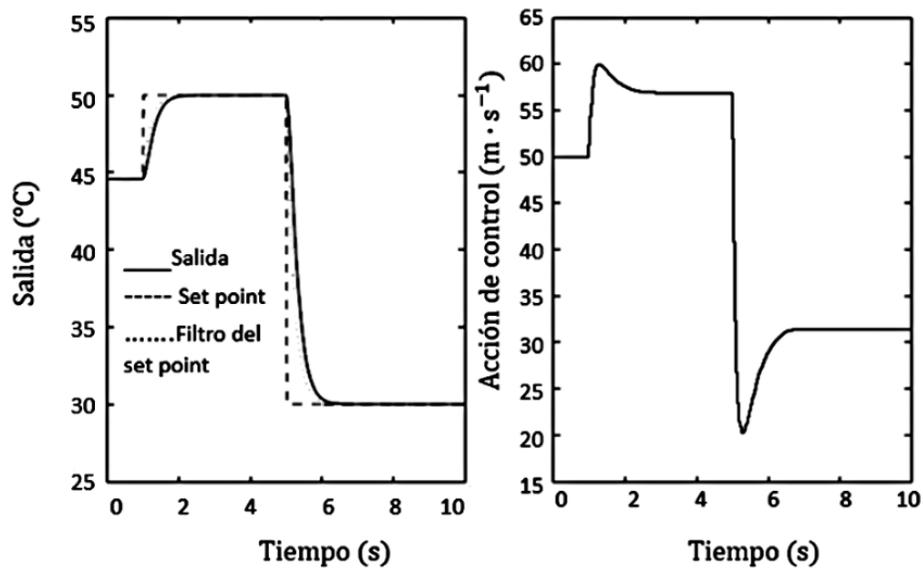
$$\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial t} = v_e(t) \frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z} + a_e [T(z,t) - T_e(z,t)] \quad (2.36)$$

El control geométrico del intercambiador térmico incluyo la siguiente estrategia de control, que consiste en utilizar la salida del controlador PI y la realimentación de estado de proceso.

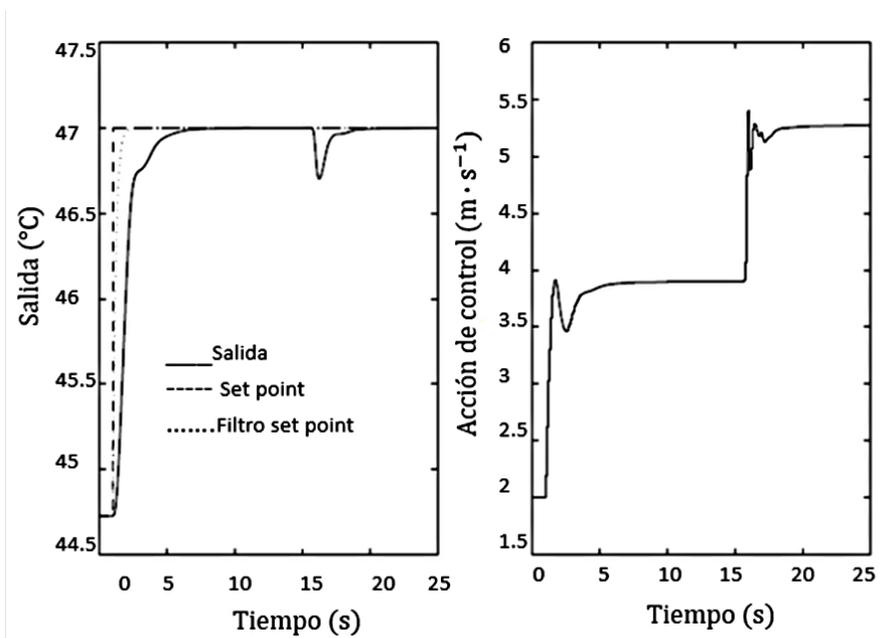


**FIGURA. 2.16** Estrategia de control de un intercambiador de calor a contracorriente.

A continuación se muestra el control manipulando la temperatura de entrada del fluido exterior con el objetivo de mantener las consignas en 50°C y 30°C de la temperatura de salida del fluido interno.



**FIGURA. 2.17** Controlador SISO de un intercambiador térmico manipulando la temperatura de entrada del fluido exterior



**FIGURA. 2.18** Controlador SISO de un intercambiador térmico manipulando la velocidad de flujo del fluido exterior.

### 3. SINTESIS DE ANTECEDENTES

El control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  ha demostrado un desempeño y robustez superior a los controladores  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  aplicados a procesos de ingeniería química, principalmente en columnas de destilación binaria cuya dinámica es expresada con funciones de transferencia y tiempo de retardo.

En la literatura se ha reportado controladores PI aplicados a los intercambiadores de calor recientemente se ha desarrollado dos controladores SISO-PI utilizando técnicas de control geométrico

Al respecto del espacio geométrico, se ha demostrado el homeomorfismo en un sistema de primer orden aplicado a un intercambiador de calor utilizando un controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en equilibrio de Nash.

Por lo anterior, el controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  no ha sido estudiado en una dinámica e procesos con parámetros distribuidos y no se ha demostrado su naturaleza geométrica.

## 4. OBJETIVOS

### 4.1 Objetivo general

Demostrar que un control PI con criterio de sintonización  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  aplicado a intercambiadores de calor pertenece a la familia de los controles geométricos.

### 4.2 Objetivos específicos

- Desarrollar un controlador MIMO-PI sintonizado con  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  aplicado a un sistema de orden superior en un intercambiador de calor de tubos concéntricos.
- Comparar los controles propuestos SISO-PI sintonizados en  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  con un controlador geométrico obtenido en la literatura.

## 5. JUSTIFICACIÓN

El control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  ha demostrado un buen desempeño y robustez en procesos de la ingeniería química, principalmente en columnas de destilación binaria, reactores químicos, intercambiadores de calor con agitación continua y en sistemas aeronáuticos. Debido a que no se ha demostrado la efectividad del controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en sistemas de orden superior con parámetros distribuidos y la relación geométrica de los parámetros de control con las propiedades del sistema. Se decidió demostrar la naturaleza geométrica del controlador aplicado a un proceso típico de parámetros distribuidos, es decir, un intercambiador de calor de orden 40 para mejorar el desempeño y robustez de los controladores SISO-PI y MIMO-PI.

## 6. METODOLOGÍA

En este apartado se expone las actividades realizadas en esta investigación, se presenta la descripción del modelo dinámico del intercambiador de calor de tubos concéntricos y la sintonización utilizando el criterio  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  para un controlador SISO-PI y MIMO-PI. Con la finalidad de determinar los parámetros asegurando que las señales de error y la acción de control sean elemento de espacios normados de Lebesgue  $\mathcal{L}_2$ .

### 6.1 Controlador MIMO-PI en sistemas multivariados.

En esta sección se describen la sintonización de un controlador MIMO-PI utilizando el criterio  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ , es por ello que se realizó las pruebas experimentales en el intercambiador de calor disponible en la unidad de investigación y desarrollo en alimentos (UNIDA), posteriormente se formalizó el modelo no lineal del intercambiador de calor a contracorriente, se efectuó la sintonización para el intercambiador de calor a contracorriente y se desarrolló las simulaciones en la plataforma de Matlab con el objetivo de validar el modelo dinámico.

#### 6.1.1 Desarrollo experimental del intercambiador de calor concéntrico a contracorriente.

El intercambiador de calor tiene 5.7 m de largo y 0.038 m de diámetro total. La instrumentación del equipo fue adaptado por Flores *et al.* (2015), el cual consta de 6 sensores de temperatura sumergibles de acero inoxidable modelo DS-18B20. Para establecer la comunicación de los datos de temperatura y comandos en la computadora se programaron en la tarjeta de adquisición de datos Arduino® Uno R3. Además se utilizó la tarjeta de adquisición Mega 2560 R3 para registrar las velocidades de flujo, por lo que se requirió de 2 flujómetros modelo YF-S201. El monitoreo de las temperaturas y caudales se representaron en el lenguaje gráfico de Labview.

**TABLA 6.1.** Valores nominales de los parámetros del modelo del intercambiador de calor.

Variable	Descripción	Valor (Unidades)
$\rho$	Densidad del agua	1000 kg · m <sup>-3</sup>
$C_p$	Capacidad calorífica	4185 kJ · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup>
$h$	Coefficiente global de transferencia de calor	1836 W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-1</sup>
$h_e$	Coefficiente global externo de transferencia de calor	739 W · m <sup>-2</sup> · K <sup>-1</sup>
$q_c$	Caudal del fluido frio	2.3 x10 <sup>-04</sup> m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup>
$q_c$	Caudal del fluido caliente	2.37 x10 <sup>-04</sup> m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup>
$T_{bh}$	Temperatura de bulbo húmedo	25°C
$T_h$	Temperatura de entrada del fluido caliente	57°C
$T_c$	Temperatura de entrada del fluido frio	27°C
$a$	Área específica del tubo interno	167.01 m <sup>-1</sup>
$a_e$	Área específica del tubo externo	108.54 m <sup>-1</sup>
$V_{cj}$	Volumen en cada nodo del fluido frio	1.19 x10 <sup>-04</sup> m <sup>3</sup>
$V_{hj}$	Volumen en cada nodo del fluido caliente	1.47 x10 <sup>-04</sup> m <sup>3</sup>

### 6.1.2 Modelo no lineal del intercambiador de energía térmica de tubos concéntricos.

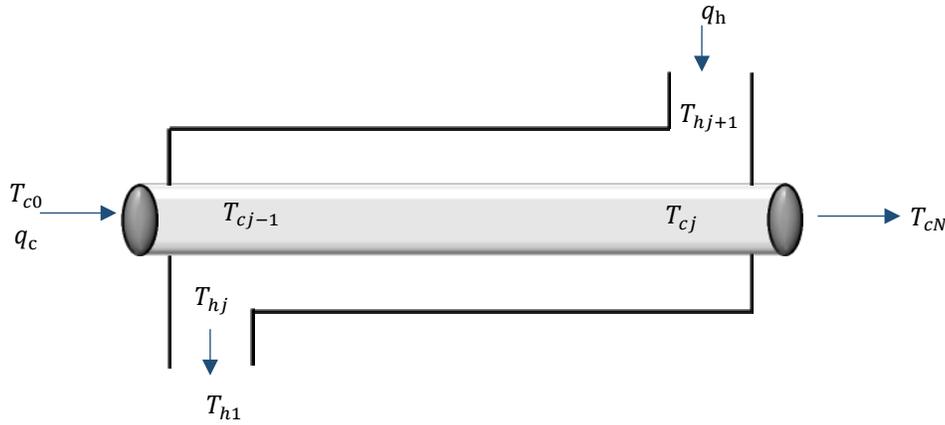
Se tomó como base el modelo dinámico del intercambiador propuesto por Flores *et al.* (2015), que consiste en el balance de energía en un elemento finito  $j$  idealmente mezclado en el lado del fluido frio ( $V_{cj}$ ) de acuerdo a la Ec. (6.1) y el balance de energía en un elemento finito  $j$  idealmente mezclado en el lado del fluido caliente ( $V_{hj}$ ). Las ecuaciones diferenciales de la dinámica del proceso se resuelven con el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

$$\rho C_p V_{cj} \frac{dT_{cj}}{dt} = q_c (T_{cj-1} - T_{cj}) + ha (T_{hj} - T_{cj}) V_{cj} \quad (6.1)$$

$$\rho C_p V_{hj} \frac{dT_{hj}}{dt} = q_h (T_{hj+1} - T_{hj}) - ha (T_{hj} - T_{cj}) V_{hj} \quad (6.2)$$

Para  $j = 1, 2, \dots, N$ , donde  $N$  es el número de elementos idealmente mezclados (Si  $N = 1$  el proceso está totalmente mezclado y si  $N \rightarrow \infty$  el proceso tiene un comportamiento flujo

pistón). Las Ecs. (6.1) y (6.2) representan un sistema no lineal de  $2N$  ecuaciones diferenciales, en este proyecto se eligieron  $N = 20$ , por lo tanto se tiene un proceso MIMO de orden 40. En la Figura 6.1 se describe el intercambiador de calor de tubos concéntricos a contracorriente.



**FIGURA. 6.1** Intercambiador de calor de tubos concéntricos a contracorriente.

### 6.1.3 Linealización por serie de Taylor

Se llama serie de Taylor de una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  infinitamente derivable a la serie que se obtiene aplicando la Ec. (6.3) para obtener el polinomio de Taylor y se representa a la función  $f$  en el intervalo en el que converge.

$$f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i) \quad (6.3)$$

El sistema dinámico MIMO fue linealizado en las cercanías del estado estable, donde  $\left(f_{1j} = \frac{dT_{cj}}{dt}\right)$  describe la variación en el lado del fluido frío y  $\left(f_{2j} = \frac{dT_{hj}}{dt}\right)$  del fluido caliente. El siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales describe el modelo linealizado en estado estable del intercambiador de calor de tubos concéntricos a contracorriente.

$$\frac{df_{1j}}{dT_{cj-1}} = \frac{q_{cs}}{V_{cj}} \quad \frac{df_{2j}}{dT_{hj}} = \frac{-haV_{hj} - q_h \rho C_p - h_e a_e V_{hj}}{V_{hj} \rho C_p}$$

O  
 btenie  
 ndo la  
 ecuaci  
 ón 6.4  
 lineari  
 zada  
 que  
 corres

$$\frac{df_{1j}}{dT_{hj}} = \frac{ha}{\rho C_p}$$

$$\frac{df_{2j}}{dq_h} = \frac{T_{hj+1} - T_{hj}}{V_{hj}}$$

$$\frac{df_{1j}}{dq_c} = \frac{T_{cj} - T_{cjs}}{V_{cj}}$$

$$\frac{df_{2j}}{dT_{cj}} = \frac{ha}{\rho C_p}$$

$$\frac{df_{1j}}{dT_{cj}} = \frac{-haV_{cj} - q_c \rho C_p}{V_{cj} \rho C_p}$$

$$\frac{df_{2j}}{dT_{hj+1}} = \frac{q_h}{V_{hj}}$$

$$\frac{df_{2j}}{dT_{ext}} = \frac{h_e a_e}{\rho C_p}$$

ponde al balance de energía en un elemento finito j idealmente mezclado en el lado del fluido frio y la ecuación 6.5 linearizada para el balance de energía en un elemento finito j idealmente mezclado en el lado del fluido caliente.

$$\frac{dT'_{cj}}{dt} = \frac{\partial f_{1j}}{\partial T_{cj}} T'_{cj} + \frac{\partial f_{1j}}{\partial T_{cj-1}} T'_{cj-1} + \frac{\partial f_{1j}}{\partial T_{hj}} T'_{hj} + \frac{\partial f_{1j}}{\partial q_c} q'_c \quad (6.4)$$

$$\frac{dT'_{hj}}{dt} = \frac{\partial f_{2j}}{\partial T_{cj}} T'_{cj} + \frac{\partial f_{2j}}{\partial T_{hj+1}} T'_{hj+1} + \frac{\partial f_{2j}}{\partial T_{hj}} T'_{hj} + \frac{\partial f_{2j}}{\partial q_h} q'_h + \frac{\partial f_{2j}}{\partial T_{ext}} T'_e \quad (6.5)$$

### 6.1.4 Espacio de estado del proceso

Una vez linealizado las ecuaciones diferenciales por serie de Taylor en las cercanías del estado estable, el sistema fue representado en espacio de estado lineal del proceso de acuerdo a las Ecs. (6.6) y (6.7), las operaciones matriciales se resuelven con rutinas en Matlab 7.8.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (6.6)$$

$$y = Cx + D_1 w + D_2 u \quad (6.7)$$

El espacio de estado de proceso se define por la matriz  $x \in R^n$

$$x' = [T_{c1} \quad T_{c2} \quad \cdot \cdot \quad T_{cN} \quad T_{h1} \quad T_{h2} \quad \cdot \cdot \quad T_{hN}]$$

El vector que contiene las variables de salida se define;  $y' = [T_{cN} \quad T_{h1}]$  y la acción de control  $u \in R^c$  corresponde a  $u' = [T_{hN+1} \quad q_h]$

Las matrices en espacio de estado se define;  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B_1 \in R^{n \times m}$ ,  $B_2 \in R^{n \times c}$ ,  $C \in R^{r \times n}$ ,  $D_1 \in R^{r \times m}$ ,  $D_2 \in R^{r \times c}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{211} & B_{212} \\ B_{221} & B_{222} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad D_2 = [0] \quad (6.8)$$

Las variables objetivos son: la temperatura fría  $T_{cN}$  (Temperatura fría de salida en el volumen N) y la temperatura caliente  $T_{h1}$  (Temperatura caliente de salida a contracorriente en el volumen 1). Las variables manipuladas de control son las entradas de la temperatura caliente  $T_{hN+1}$  y el caudal de la temperatura caliente  $q_h$ . El subíndice (s) indica el valor de la variable en estado estable.

La matriz característica (**A**) de orden 40, se subdividió con el fin de generalizar el espacio de estado del proceso MIMO, donde los elementos de la diagonal en la matriz  $A_{11}$  corresponde a  $(\partial f_{1j} / \partial T_{c_j})$ , éste término varía en función del caudal y transferencia de energía. Los elementos no diagonal corresponde a  $(\partial f_{1j} / \partial T'_{c_{j-1}})$ , donde es función del caudal del fluido frío.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{q_{cs}}{V_{c1}} - \frac{ha}{\rho Cp} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \frac{q_{cs}}{V_{c2}} & -\frac{q_{cs}}{V_{c2}} - \frac{ha}{\rho Cp} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{q_{cs}}{V_{cN}} - \frac{q_{cs}}{V_{cN}} - \frac{ha}{\rho Cp} & \cdot \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz  $A_{12}$  equivale a la expresión  $(\partial f_{1j} / \partial T'_{hj})$  y es la temperatura del fluido caliente que se encuentra en el balance de energía en el lado del fluido frio, con respecto a los elementos de la matriz  $A_{21}$  es  $(\partial f_{2j} / \partial T'_{cj})$ , el cual determina la temperatura del fluido frio que se encuentra en el balance de energía en el lado del fluido caliente,

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{ha}{\rho Cp} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{ha}{\rho Cp} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{ha}{\rho Cp} \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} \frac{ha}{\rho Cp} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{ha}{\rho Cp} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{ha}{\rho Cp} \end{bmatrix}$$

Finalmente el término  $(\partial f_{2j} / \partial T'_{hj})$  describe los elementos en la diagonal de la matriz  $A_{22}$ , donde las temperaturas del fluido caliente están en función del caudal y transferencia de energía. Los elementos no diagonal corresponden a los elementos de temperatura caliente posterior al nodo y se expresa con el término  $(\partial f_{2j} / \partial T'_{hj+1})$ .

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{q_{hs}}{V_{h1}} - \frac{ha}{\rho Cp} & \frac{q_{hs}}{V_{h1}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{q_{hs}}{V_{h2}} - \frac{ha}{\rho Cp} & \frac{q_{hs}}{V_{h2}} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{q_{hs}}{V_{hN}} - \frac{ha}{\rho Cp} \end{bmatrix}$$

Los vectores de entrada exógena son representados matricialmente por  $B_{211}$  y  $B_{212}$ . Con respecto al vector estado del control está representado por la matriz  $B_{221}$  que representa la acción de control la temperatura de entrada del fluido caliente y la matriz  $B_{222}$  describe la acción de control del caudal del fluido caliente.

$$B_{211} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{212} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{221} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{q_{hs}}{V_{hN}} \end{bmatrix} \quad B_{222} = \begin{bmatrix} \frac{T_{hN+1s}}{V_{h1}} \\ \frac{T_{hN+1s}}{V_{h1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{T_{hN+1s}}{V_{h1}} \end{bmatrix}$$

Finalmente se expresa en espacio de estado de salida del proceso corresponde a  $y' = [T_{cN} \quad T_{h1}]$ , la matriz  $C_{11}$  representa la salida del fluido frio y la matriz  $C_{21}$  describe la salida en el nodo 21 la temperatura del fluido caliente a contracorriente.

$$C_{11} = [0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad 1] \quad C_{12} = [0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad 0]$$

$$C_{21} = [0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad 0] \quad C_{22} = [1 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad 0]$$

### 6.1.5 Algoritmo de control MIMO-PI multivariado

El modelo dinámico requiere la aplicación del controlador para un proceso MIMO. Un algoritmo PI garantiza la naturaleza geométrica, y se puede expresar por las Ecs. (6.9) y (6.10)

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi + \beta_1 r + \beta_2 y \quad (6.9)$$

$$u = \gamma\xi + \delta_1 r + \delta_2 y \quad (6.10)$$

Donde las matrices del estado de control para un proceso MIMO se representan cómo;

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} & \beta_1 &= \begin{bmatrix} \beta_{111} & \beta_{112} \\ \beta_{121} & \beta_{122} \end{bmatrix} & \beta_2 &= \begin{bmatrix} \beta_{211} & \beta_{212} \\ \beta_{221} & \beta_{222} \end{bmatrix} \\
 \gamma &= \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} & \delta_1 &= \begin{bmatrix} \delta_{111} & \delta_{112} \\ \delta_{121} & \delta_{122} \end{bmatrix} & \delta_2 &= \begin{bmatrix} \delta_{211} & \delta_{212} \\ \delta_{221} & \delta_{222} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Donde  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $\beta_{1ij} = 1$ ,  $\beta_{2ij} = -1$ ,  $\gamma_{ij} = K_{pij} / \tau_{ij}$ ,  $\delta_{1ij} = K_{pij}$ ,  $\delta_{2ij} = -K_{pij}$

## 6.2 Controlador SISO-PI de un intercambiador de calor

Se realizó la sintonización de un controlador SISO-PI de un intercambiador de calor y fue comparado con un control geométrico reportado en la literatura, es por ello que se utilizó el modelo propuesto por A. Maida *et al.* (2009). Para esto se planteó la realización de dos controladores SISO-PI, el primero consistió en ejecutar la velocidad de flujo del fluido exterior y el segundo controlador radicó en manipular la temperatura del fluido exterior, ambos con el objetivo de controlar la temperatura de salida del fluido frío.

### 6.2.1 Controlador geométrico SISO-PI reportado en la literatura

El intercambiador de calor a contracorriente propuesto por A. Maida *et al.* (2009) utiliza los valores en estado estacionario de acuerdo a la Tabla.2 y las propiedades del fluido no fueron reportadas.

**TABLA 6.2.** Valores nominales de los parámetros del modelo del intercambiador de calor.

Variable	Descripción	Valor (Unidades)
$L$	Longitud del intercambiador de calor	1 m
$T$	Temperatura de entrada del fluido frío	25°C
$v$	Velocidad de fluido frío	1 m · s <sup>-1</sup>
$a$	Coficiente de transferencia de energía interna	2.92 s <sup>-1</sup>
$T_e$	Temperatura de entrada del fluido caliente	50°C
$v_e$	Velocidad del fluido caliente	2 m · s <sup>-1</sup>
$a_e$	Coficiente de transferencia de energía externa	5 s <sup>-1</sup>

El modelo mecanístico del intercambiador de calor a contracorriente se describe con las Ecs. (6.14) y (6.15),

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = -v_c \frac{\partial T_c}{\partial z} + a_c (T_h - T_c) \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} = v_h \frac{\partial T_h}{\partial z} - a_h (T_h - T_c) \quad (6.15)$$

Donde  $v_c$  es la velocidad del fluido frío,  $v_h$  es la velocidad del fluido caliente,  $a_c$  es la constante de transferencia de calor del fluido frío,  $a_h$  es la constante de transferencia de calor del fluido caliente,  $0 < z < L$  es la distribución lineal coordinada del intercambiador de calor.

Las ecuaciones (6.16-6.18) forman parte de las características geométricas de sintonización. La Ec. (6.16) es la ley de control para un sistema SISO cuando se manipula la temperatura caliente y los parámetros de control reportados son los siguientes  $k_c = 7.8$ ,  $\tau = 1$  s,  $\tau_1 = 1.03$  s

$$u = T_h|_{z=L} = \frac{1}{a_c} \left[ \frac{1}{\tau} (\phi - T_c|_{z=L}) - v \frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=L} + a_c T_c|_{z=L} \right] \quad (6.16)$$

Se establece una ley de control para el controlador SISO manipulando la velocidad de entrada del fluido caliente de acuerdo a la Ec. (6.17), hay que señalar que no se reportan los parámetros de control para reproducir este controlador SISO.

$$u = v_h = \frac{1}{a_c \beta_2 \frac{\partial T_h}{\partial z} \Big|_{z=L-\varepsilon}} \left[ \phi - \beta_2 v_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2} \Big|_{z=L-\varepsilon} + \beta_2 a_c v_c \frac{\partial T_h}{\partial z} \Big|_{z=L-\varepsilon} - (2\beta_2 a v_c - \beta_1 v_c) \frac{\partial T_c}{\partial z} \Big|_{z=L-\varepsilon} + (\beta_2 a_c^2 + \beta_2 a_c a_h - \beta_1 a_c) (T_h|_{z=L-\varepsilon} - T_c|_{z=L-\varepsilon}) - T_c|_{z=L-\varepsilon} \right] \quad (6.17)$$

Para ambos casos de utilizo un algoritmo PI de acuerdo a la Ec. (6.18) con salida en la temperatura del fluido frio y los parámetros de control se obtuvieron con técnicas geométricas no detalladas.

$$\phi = K_p \left[ (r - T_c|_{z=L}) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t (r - T_c|_{z=L}) dt \right] \quad (6.18)$$

### 6.2.2 Controlador SISO-PI manipulando la temperatura de entrada del fluido caliente

A continuación se desarrollan los controladores SISO-PI con criterio de sintonización y  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  se utilizó el modelo mecanistico descrito con las Ecs. (6.14) y (6.15) discretizando en  $\partial z$  y linealizado por expansión de la serie de Taylor.

El espacio de estado de proceso es definido por la siguiente matriz  $x \in R^n$

$$x' = [T_{c1} \quad T_{c2} \quad \cdot \cdot \quad T_{cN} \quad T_{h1} \quad T_{h2} \quad \cdot \cdot \quad T_{hN}]$$

El modelo linealizado se representa en espacio de estado, de acuerdo a la Ec. (6.19)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{211} \\ B_{221} \end{bmatrix} \quad C = [C_{11} \quad C_{12}] \quad D_2 = [0] \quad (6.19)$$

Donde la matriz característica **A** del proceso SISO corresponde a la siguiente estructura;

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{cs}}{L_{j1}} - a_c & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \frac{v_{cs}}{L_{j2}} & -\frac{v_{cs}}{L_{j2}} - a_c & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{v_{cs}}{L_{jN}} & -\frac{v_{cs}}{L_{jN}} - a_c \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_c & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_c & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_c \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_h & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_h & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_h \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{hs}}{L_{j1}} - a_h & \frac{v_{hs}}{L_{j1}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_{hs}}{L_{j2}} - a_h & \frac{v_{hs}}{L_{j2}} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{v_{hs}}{L_{jN}} - a_h \end{bmatrix}$$

La variable manipulada es  $u' = [T_{hN+1}]$  con el objetivo de controlar la salida de la temperatura del fluido frio  $y' = [T_{cN}]$

$$B_{211} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{221} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{v_{hs}}{L_N} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = [0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ 1] \quad C_{12} = [0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ 0]$$

El espacio estado del algoritmo de control está definido por la Ec. (6.20)

$$\alpha = \alpha_{11} \quad \beta_1 = \beta_{111} \quad \beta_2 = \beta_{211} \quad \gamma = \gamma_{11} \quad \delta_1 = \delta_{111} \quad \delta_2 = \delta_{211} \quad (6.20)$$

Donde;  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $\beta_{1ij} = 1$ ,  $\beta_{2ij} = -1$ ,  $\gamma_{ij} = K_{pij} / \tau_{ij}$ ,  $\delta_{1ij} = K_{pij}$ ,  $\delta_{2ij} = -K_{pij}$

### 6.2.3 Controlador SISO-PI manipulando la velocidad del fluido caliente.

El espacio de estado de proceso es definido por la siguiente matriz  $x \in R^n$

$$x' = [T_{c1} \ T_{c2} \ \cdot \ \cdot \ T_{cN} \ T_{h1} \ T_{h2} \ \cdot \ \cdot \ T_{hN}]$$

El modelo linearizado se representa en espacio de estado, de acuerdo a la Ec. (6.22)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{212} \\ B_{222} \end{bmatrix} \quad C = [C_{11} \quad C_{12}] \quad D_2 = [0] \quad (6.24)$$

Donde la matriz característica **A** del proceso SISO corresponde a la siguiente estructura;

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{cs}}{L_{j1}} - a_c & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \frac{v_{cs}}{L_{j2}} & -\frac{v_{cs}}{L_{j2}} - a_c & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{v_{cs}}{L_{jN}} & -\frac{v_{cs}}{L_{jN}} - a_c \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_c & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_c & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_c \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_h & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_h & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_h \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{hs}}{L_{j1}} - a_h & \frac{v_{hs}}{L_{j1}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_{hs}}{L_{j2}} - a_h & \frac{v_{hs}}{L_{j2}} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{v_{hs}}{L_{jN}} - a_h \end{bmatrix}$$

La variable manipulada es  $u' = [v_h]$  con el objetivo de controlar la salida de la temperatura del fluido frio  $y' = [T_{cN}]$

$$B_{211} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{221} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{T_{hN+1s}}{L_N} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = [0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ 1] \quad C_{12} = [0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ 0]$$

El espacio estado del algoritmo de control está definido por la Ec. (6.25)

$$\alpha = \alpha_{22} \quad \beta_1 = \beta_{122} \quad \beta_2 = \beta_{222} \quad \gamma = \gamma_{22} \quad \delta_1 = \delta_{122} \quad \delta_2 = \delta_{222} \quad (6.25)$$

Donde;  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $\beta_{1ij} = 1$ ,  $\beta_{2ij} = -1$ ,  $\gamma_{ij} = K_{pij}/\tau_{ij}$ ,  $\delta_{1ij} = K_{pij}$ ,  $\delta_{2ij} = -K_{pij}$

### 6.3 Sintonización de los controladores $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

Se llevó a cabo la solución del controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  utilizando las siguientes restricciones; la abscisa espectral ( $\alpha$ ) y la máxima relación de la parte compleja/ parte real de los valores propios de la matriz característica ( $\phi_{max}$ ) a través de una serie de subproblemas.

Se asume que no hay una condición inicial en los valores de los parámetros que resuelva el problema de optimización definida por las Ec. (6.12) y (6.13). En todas las etapas de optimización se utilizó el algoritmo Complex Box-Ruiz-Rodríguez-García (Ruiz-López *et al.*,

2006), debido a la capacidad de encontrar la solución en una región valida no convexa y este algoritmo fue programado en Matlab 7.8.

$$\min I(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2) = \int_0^\infty e' Q e dt + \int_0^\infty u_d' R u_d dt \dots\dots\dots(6.12)$$

Sujeto a  $\lambda_i : \{\|\mathbf{I}\lambda_i - \mathbf{A}\| = 0\} \in \mathcal{D} \quad \forall i = 1, 2, \dots, (n+k) \quad \mathcal{D} \subset C_- = \{z : \text{Im}(z)/\text{Re}(z) < \phi\}$ .

(6.13)

**1. Inicialización**

Se inició resolviendo el siguiente problema

$$\min \Sigma(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2)$$

Donde  $\Sigma = \max \text{Re}(\lambda_i) \quad \lambda_i : \{\|\mathbf{I}\lambda_i - \mathbf{A}\| = 0\} \in \mathcal{D} \quad \forall i = 1, 2, \dots, (n+k)$

El objetivo es minimizar la abscisa espectral ( $\Sigma$ ), que consiste en la máxima parte real de los valores propios de la matriz A, el resultado del controlador óptimo se consideró como condición inicial para los siguientes subproblemas.

La abscisa espectral está en función de los parámetros  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2$ . Una solución negativa (es un sistema con control estable) es requerida. Debido que el control PI, únicamente se buscan los elementos  $\gamma, \delta_1, \delta_2$ , porque  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  son constantes en la Ec. (6.11). El algoritmo de optimización Box-Ruiz-Rodríguez-García requiere restricciones.

**2. Definir el espacio geométrico  $\mathcal{D}$**

La solución del problema 1 es la condición inicial para la solución del siguiente problema de optimización.

$$\min \phi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2)$$

Donde  $\phi = \max(\text{Im}(\lambda_i)/\text{Re}(\lambda_i)) \quad \lambda_i : \{\|\mathbf{I}\lambda_i - \mathbf{A}\| = 0\} \in \mathcal{D} \quad \forall i = 1, 2, \dots, (n+k)$

$$\Sigma < \Sigma_{\max}$$

En este problema el objetivo es encontrar el valor límite de  $\phi$  que delimita el espacio geométrico  $\mathcal{D}$  que conserva la abscisa espectral del sistema de control ( $\Sigma$ ) debajo de un valor negativo ( $\Sigma_{max}$ ). Los parámetros obtenidos son la solución para evaluar las integrales (6.14) y (6.15) con las matrices identidad  $Q$  y  $R$ . El resultado busca un valor adecuado para que  $Q$  y  $R$  tengan similar ponderación de las integrales.

$$I_e = \int_0^{\infty} e' Q e dt = K' \mathbf{B}'_2 P_y \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0, r = K1(t) \quad (6.14)$$

$$I_u = \int_0^{\infty} u' R u dt = K' \mathbf{B}'_2 P_u \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0, r = K1(t) \quad (6.15)$$

### 3. Resolver el problema $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

El siguiente subproblema tomó la solución del problema anterior como condición inicial y los adecuados valores de  $Q$  y  $R$  para resolver el problema definido en las ecuaciones (6.12) y (6.13) hasta conseguir un controlador óptimo. El valor de  $\phi$  es mayor que el valor obtenido en el problema 2. El control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  obtenido, se simuló en el modelo dinámico no lineal del intercambiador de calor de tubos concéntricos ante un cambio escalonado en el set point.

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1 Control geométrico paramétrico $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

Se demostró que el controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  pertenece a la familia de los controladores geométricos, debido a que cumple con la definición de control geométrico y las ecuaciones diferenciales linealizadas con coeficientes constantes describen el modelo dinámico. Estas ecuaciones generan un espacio de soluciones, es decir, una variedad matemática. El control geométrico paramétrico minimiza la integral de Lebesgue de un operador que incluye el espacio de estado del proceso, además la función  $u$  es definida y dependiente de los parámetros.

### 4.2 Controlador MIMO-PI utilizando el criterio $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

En este apartado se resume el controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  en un proceso multivariado aplicado a un sistema de parámetros distribuidos, es decir, se utilizó el modelo dinámico de un intercambiador de calor de tubos concéntricos de orden 40, se representó las ecuaciones diferenciales en el espacio estado del proceso y el algoritmo de control, finalmente el controlador obtenido fue evaluado con una señal de entrada para medir el desempeño y robustez.

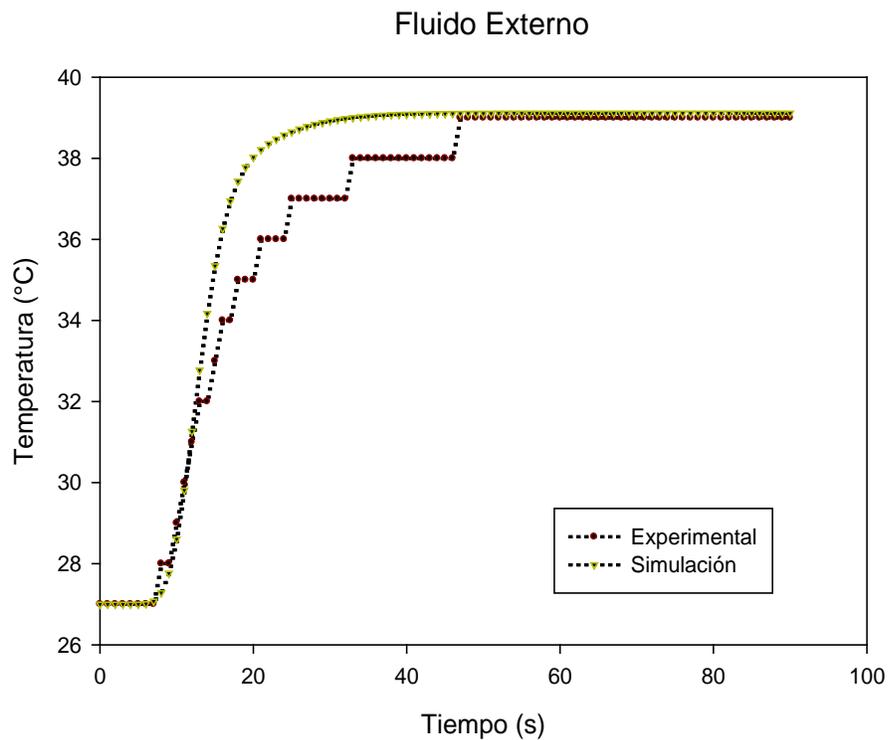
#### 4.2.1 Dinámica del proceso del intercambiador de calor de tubos concéntricos.

Los datos obtenidos experimentalmente y la dinámica simulada en la plataforma de Matlab utilizaron el modelo propuesto en las Ec. (7.1) y (7.2), tal como se ilustra en la Figura 7.1. y 7.2. Para reproducir este sistema dinámico se consideró como condición inicial la temperatura homogénea, es decir, la temperatura de bulbo húmedo del ambiente con el objetivo de estabilizar la dinámica del proceso. La dinámica simulada en la plataforma de Matlab fue próxima a los valores experimentales con un buen ajuste.

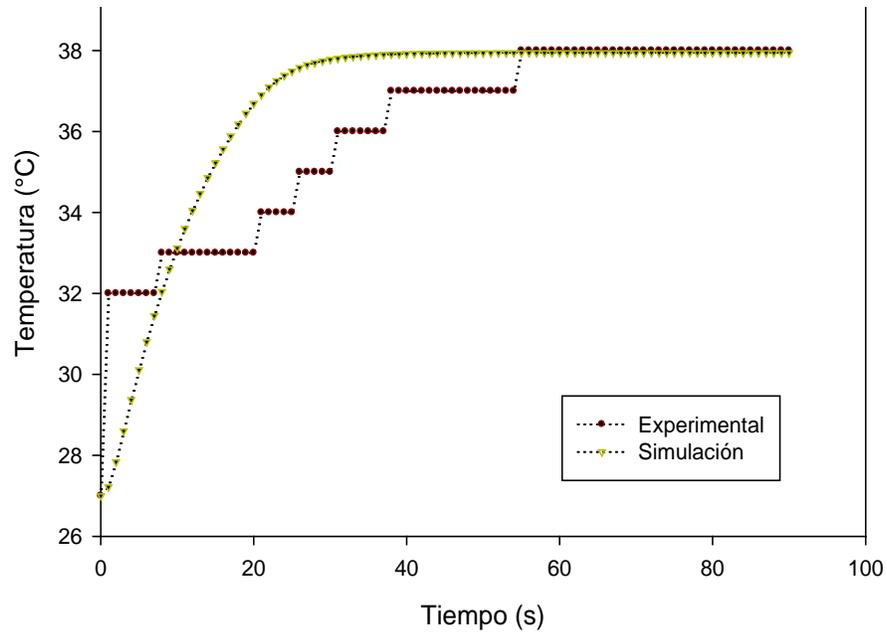
El modelo formalizado incluyó un coeficiente global de transferencia de energía en el tubo externo conforme a la Ec. 7.2, con esto se logró mejorar la respuesta de salida del fluido exterior y permitió un mejor ajuste en la dinámica experimental del intercambiador de calor en comparación al modelo propuesto por Flores *et al.* (2015). Los valores nominales de las variables de salida correspondieron a 37.94°C para el fluido interno y 39.11 °C del fluido externo, ambas dinámicas se evaluaron en un tiempo de 90 segundos.

$$\rho C_p V_{c_j} \frac{dT_{c_j}}{dt} = q_c (T_{c_{j-1}} - T_{c_j}) + ha (T_{h_j} - T_{c_j}) V_{c_j} \quad (7.1)$$

$$\rho C_p V_{h_j} \frac{dT_{h_j}}{dt} = q_h (T_{h_{j+1}} - T_{h_j}) - ha (T_{h_j} - T_{c_j}) V_{h_j} - h_e a_e (T_{h_j} - T_{c_j}) V_{h_j} \quad (7.2)$$



**FIGURA. 7.1** Comparación del fluido externo del CCTHE.



La representación del modelo dinámico experimental y el modelo simulado en la plataforma de Matlab no son correspondientes, esto puede deberse al retardo en la respuesta del termómetro debido a que el proceso de transducción no es instantáneo. Para lo cual se incluyó ecuaciones de primer orden para medir la respuesta del termómetro en la salida del fluido externo y fluido interno, esto mejoró la respuesta en el modelo dinámico no lineal, sin embargo al aplicar una acción de control las ecuaciones de primer orden no mostraron desempeño, así que finalmente el modelo solo incluye el balance de energía en un elemento finito  $j$  idealmente mezclado en el lado del fluido caliente y el balance de energía en un elemento finito  $j$  idealmente mezclado en el lado del fluido frío.

### 4.2.2 Sintonización del controlador MIMO-PI

En la tabla 7.1 se resume los parámetros de control y los índices de funcionamiento cuadrático para el controlador geométrico paramétrico  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  aplicado a un proceso MIMO-PI es representado por las Ec. (6.9) y (6.10) y las matrices (6.11). El resultado del sistema de control para el CCTHE es descrito por las Ecs. (7.3)-(7.6).

$$\frac{d\xi_1}{dt} = r_1 - T_{c20} \quad (7.3)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = r_2 - T_{h1} \quad (7.4)$$

$$T_{h21} = T_{h21s} + K_{p11}(r_1 - T_{c20}) + K_{i11}\xi_1 + K_{p12}(r_2 - T_{h1}) + K_{i12}\xi_2 \quad (7.5)$$

$$q_h = q_{hs} + K_{p21}(r_1 - T_{c20}) + K_{i21}\xi_1 + K_{p22}(r_2 - T_{h1}) + K_{i22}\xi_2 \quad (7.6)$$

El efecto de desacoplamiento ( $K_{p12}, K_{p21}, K_{i12}, K_{i21}$ ). durante el problema de optimización, incluyó dos grupos de integrales, las cuales se calcularon de la siguiente manera:

$$I_{e1} = \int_0^{\infty} e' Q e dt = K' \mathbf{B}'_2 P_y \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0, K' = [1 \ 0] \quad (7.7)$$

$$I_{u1} = \int_0^{\infty} u'_d R u_d dt = K' \mathbf{B}'_2 P_u \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0, K' = [1 \ 0] \quad (7.8)$$

$$I_{e2} = \int_0^{\infty} e' Q e dt = K' \mathbf{B}'_2 P_y \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0, K' = [0 \ 1] \quad (7.9)$$

$$I_{u2} = \int_0^{\infty} u'_d R u_d dt = K' \mathbf{B}'_2 P_u \mathbf{B}_2 K \text{ para } w = 0, K' = [0 \ 1] \quad (7.10)$$

El problema de sintonización que minimiza los índices de desempeño es el siguiente,

$$\min I(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2) = I_{e1} + I_{u1} + I_{e2} + I_{u2} \quad (7.11)$$

Debido a que no hay reportes de controladores previos para comparar, se realizó una comparación de dos soluciones de controladores MIMO-PI en  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ .

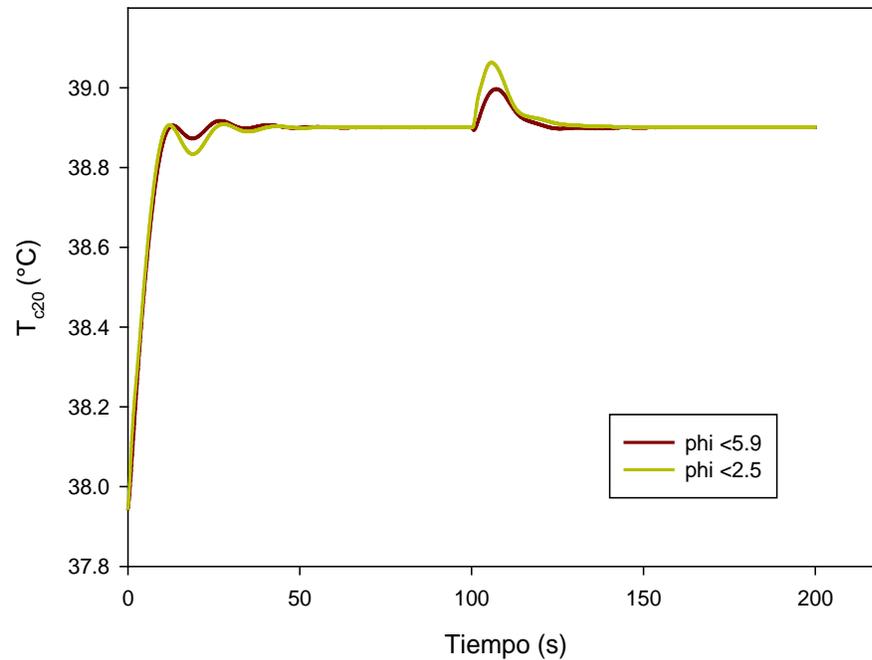
La primera solución se obtuvo con  $\phi < 2.6$ . Sin embargo, esta restricción limita la región  $\mathcal{D}$  y minimiza las variables  $I_{u1}$  y  $I_{u2}$ . Además en la segunda solución se utilizó una restricción de  $\phi < 5.9$  y decrece las integrales. Los resultados fueron resumidos en la Tabla 7.1 y ambas soluciones utilizando un cambio de referencia tipo escalón unitario no simultáneo.

$$r_1 = \begin{cases} 37.9 & t < 0 \\ 38.9 & t > 0 \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} 39.1 & t < 100 \text{ s} \\ 40.1 & t > 100 \text{ s} \end{cases} \quad (7.12)$$

**TABLA 7.1** Características del CCTH del control MIMO-PI en  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

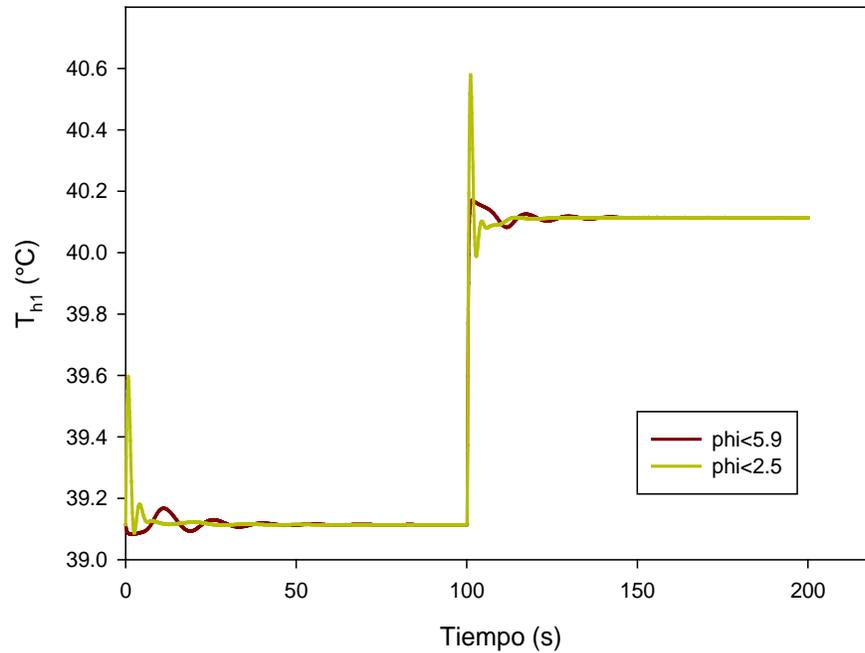
Parámetros	$\phi$	$(I_e, I_u)_{r=[1(t) \ 0]_{ss}}$	$(I_e, I_u)_{r=[1(t) \ 0]_{sim}}$
		$(I_e, I_u)_{r=[0 \ 1(t)]_{ss}}$	$(I_e, I_u)_{r=[0 \ 1(t)]_{sim}}$
$K_{p11} = 3.5$	.6	(2.96, 1.56)	(0.456, 3.87)
$K_{p22} = 0.36 \quad K_{i11} = 0.58$		(2.60, 2.17)	(0.429, 5.39)
$K_{i22} = 0.67 \quad K_{p12} = -0.94$			
$K_{p21} = 0.26 \quad K_{i12} = -2.0$			
$K_{i22} = 0.11$			
$K_{p11} = 4.3$	.9	(3.1, 0.76)	(2.7, 1.4)
$K_{p22} = 0.49 \quad K_{i11} = 0.91$		(0.33, 0.71)	(0.26, 1.8)
$K_{i22} = 0.09 \quad K_{p12} = -1.4$			
$K_{p21} = -0.01 \quad K_{i12} = -2.9$			

$$K_{i22} = -0.005$$



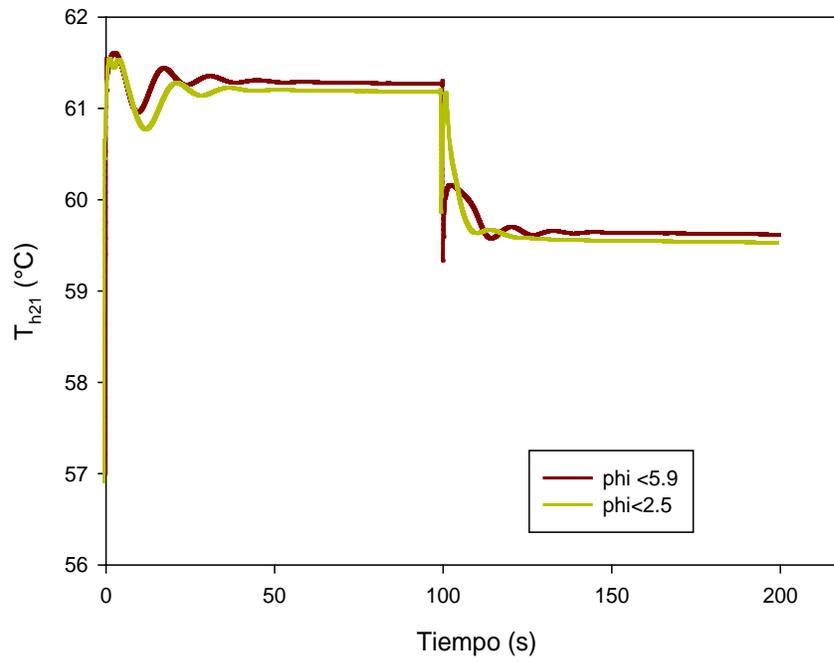
**FIGURA. 7.3** Desempeño de la salida de la temperatura fría del CCTH utilizando un controlador MIMO-PI  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

La figura 7.3 muestra el desempeño de las variables de salida del fluido frío utilizando un cambio de referencia tipo escalón unitario no simultáneo para ambas soluciones ( $\phi < 2.5, \phi < 5.9$ ), se efectuó la manipulación de la variable  $T_{c20}$  dando un cambio unitario sobre la temperatura nominal, presenta pequeñas oscilaciones antes del ajuste de 100 segundos y un cambio brusco a los 100 segundos en respuesta a la entrada de la temperatura  $T_{h1}$ .

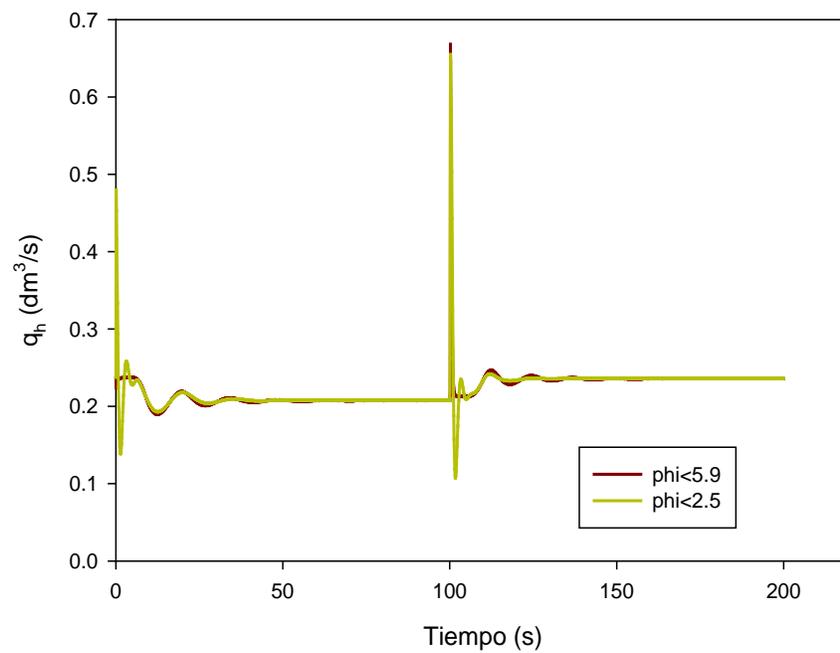


**FIGURA. 7.4** Desempeño de la salida de la temperatura caliente del CCTH utilizando un controlador MIMO-PI  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

Ahora bien, en la Fig. 7.4 se ilustra el desempeño de la salida de la temperatura caliente  $T_{h1}$ , se observa que ( $\phi < 5.9$ ) mejora el desempeño del controlador, además al reducir las integrales  $I_{u1}$  y  $I_{u2}$  garantiza el desempeño del controlador y disminuye el esfuerzo de acción de control de acuerdo a la Fig. 7.5 y 7.6. Se demostró que la ingeniería de control debe ser más cuidadosa con el balance de  $I_e/I_u$  y al delimitar la región  $\mathcal{D}$ .



**FIGURA. 7.5** Esfuerzo de la acción de control  $T_{h21}$  del CCTH.



**FIGURA. 7.6** Esfuerzo de la acción de control  $q_h$  del CCTHE.

### 4.3 Controlador SISO-PI utilizando el criterio $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

En este apartado se muestra los parámetros e índices  $I_e$  y  $I_u$  obtenidos con el controlador geométrico paramétrico  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  aplicado a un proceso SISO-PI, el desempeño de la acción de la salida de la temperatura del fluido frío ante el esfuerzo de la acción del control de la temperatura de entrada del fluido caliente y el esfuerzo de la acción de control al ejecutar la velocidad del fluido caliente. Por último se compara el controlador SISO-PI con un controlador reportado en la literatura.

Para ello la Ec. (7.13) y (7.14) fueron discretizadas por diferencias finitas, se obtuvo el siguiente sistema que describe el modelo dinámico del CCTHE.

$$\frac{dT_{cj}}{dt} = -v_c \frac{T_{cj} - T_{cj-1}}{L_j} + a_c (T_{hj} - T_{cj}) \quad (7.13)$$

$$\frac{dT_{hj}}{dt} = v_h \frac{T_{hj+1} - T_{hj}}{L_j} - a_h (T_{hj} - T_{cj}) \quad (7.14)$$

#### 4.3.1 Controlador SISO-PI manipulando la temperatura de entrada del fluido caliente

El controlador geométrico paramétrico propuesto  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  y el controlador reportado en la literatura solo puede realizarse la comparación con el controlador SISO-PI manipulando la temperatura de entrada del fluido caliente, ya que no pudo reproducirse el controlador SISO-PI manipulando la velocidad de fluido caliente para el controlador reportado en la literatura, debido a que no reporta los parámetros de control.

Los resultados de la sintonización del controlador SISO-PI aplicado al CCTHE manipulando la temperatura del fluido caliente se resumen en la Tabla 7.2,  $(I_e, I_u)_{r=1(t)_{ss}}$  representa las integrales evaluadas analíticamente con  $K=1$ .

El controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  está sujeto a restricciones, es importante mencionar que este controlador requiere únicamente 2 parámetros y no requiere la evaluación de la primera

derivada mencionada en la Ec. (6.16), se utilizó 20 nodos en la simulación de control en la plataforma de Matlab de acuerdo a la Ec (7.15) y (7.16).

$$\frac{d\xi}{dt} = r - T_{c20} \quad (7.15)$$

$$T_{h1} = T_{h1s} + K_{p11}(r - T_{c20}) + K_{i11}\xi \quad (7.16)$$

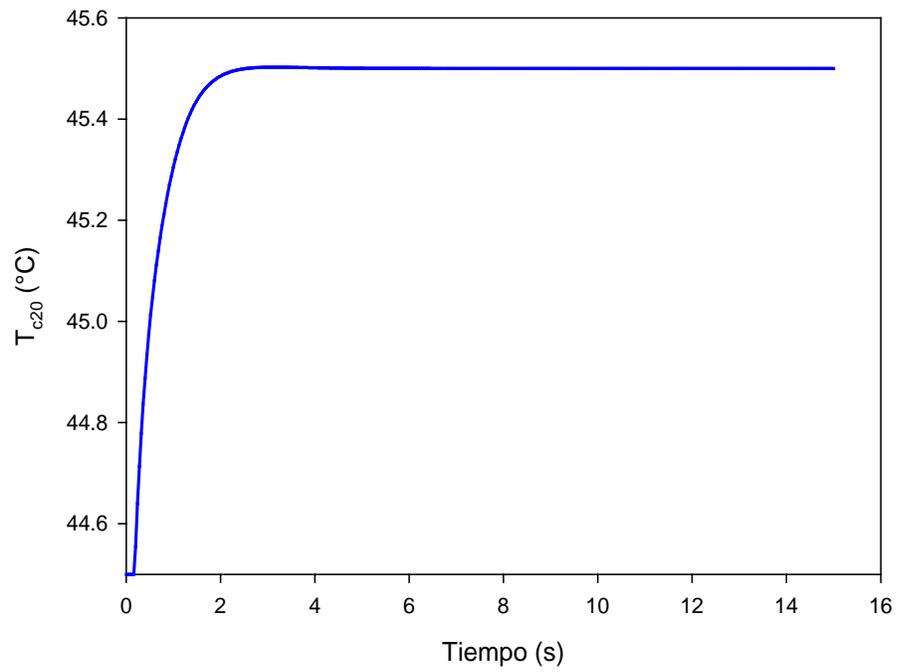
Con la siguiente entrada:

$$r = \begin{cases} 44.5 & t < 0 \\ 45.5 & t > 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

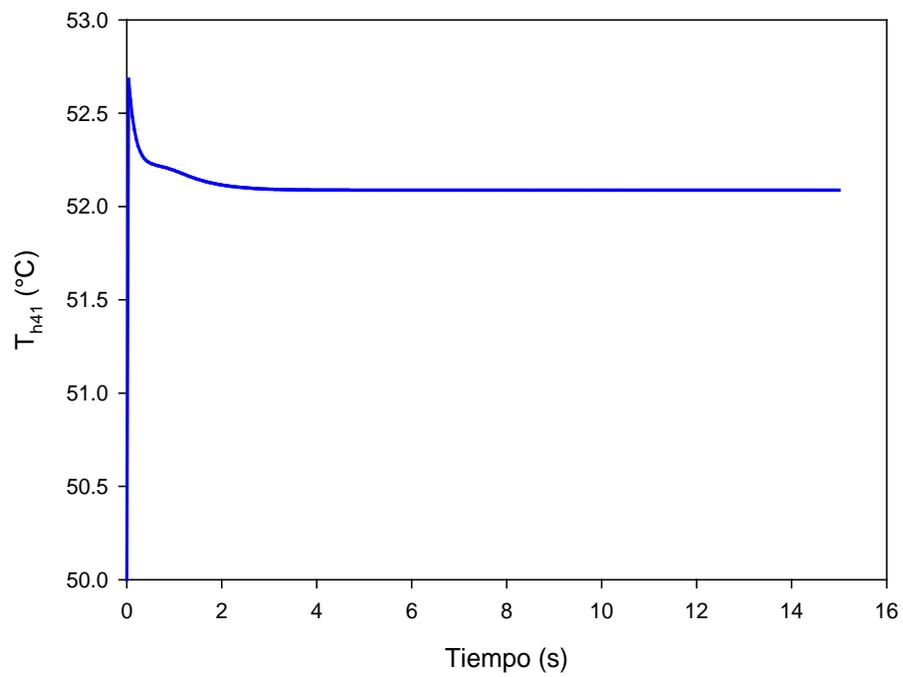
**TABLA 7.2** Características del control SISO CTHE manipulando la variable

$T_{h1}$	Parámetros	$\phi$	$(I_e, I_u)_{r=1(t)_{ss}}$
	$K_{p11} = 1.7 \quad K_{i11} = 3.0 \text{ s}^{-1}$	1.45	(0.21, 0.03)

La respuesta del desempeño en la variable de salida esta graficada en la Figura. 7.7, donde se realizó una perturbación ante un cambio de referencia tipo escalón unitario, la estabilización asintótica en la salida del fluido frio corresponde a 45.5°C en un tiempo de ajuste de 2.5 s, para lo cual se requiere un esfuerzo de acción de control correspondiente a  $T_{h41}$  52 °C en el fluido caliente de acuerdo a la Fig. 7.8



**FIGURA. 7.7** Respuesta de salida de la temperatura del fluido frío.



**FIGURA. 7.8** Esfuerzo de control para un cambio de referencia de tipo escalón.

La comparación de los controladores tomo en consideración el modelo dinámico propuesto por Maida *et al.*,2009 , los mismos parámetros de coeficiente de transferencia de calor en el interior y en el exterior, se simularon con el mismo número de nodos, el perfil de temperatura fue el mismo presentado por ellos, se propone la ley de acción de control con observador de estado y el algoritmo de control PI, sin embargo no se detalla las propiedades geométricas en las que se basó el controlador geométrico.

El controlador propuesto  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  fue comparado con el controlador geométrico a partir del siguiente sistema de control.

$$\frac{d\xi}{dt} = r - T_{c100} \quad (7.18)$$

$$T_{h1} = T_{h1s} + K_{p11}(r - T_{c100}) + K_{i11}\xi \quad (7.19)$$

Con las siguientes entradas:

$$r = \begin{cases} 44.5 & t < 0 \\ 50.0 & t > 0 \end{cases} \quad T_{c0} = \begin{cases} 25.0 & t < 7 \text{ s} \\ 20.0 & t > 7 \text{ s} \end{cases} \quad (7.20)$$

Las simulaciones del control de procesos fueron graficadas en la Fig.7.9 y Fig. 7.10, en donde las integrales del error y la integral de control se obtuvieron a través de la regla trapezoidal a partir de los resultados por la simulación y fueron enlistadas en la Tabla 7.3, donde  $(I_e, I_u)_{r=1(t)ss}$  representa las integrales evaluadas analíticamente con  $K=1$  y la expresión  $(I_e, I_u)_{r=1(t)sim}$  representa las integrales evaluadas por simulación en la plataforma de matlab a través de la regla trapezoidal con  $K=1$ .

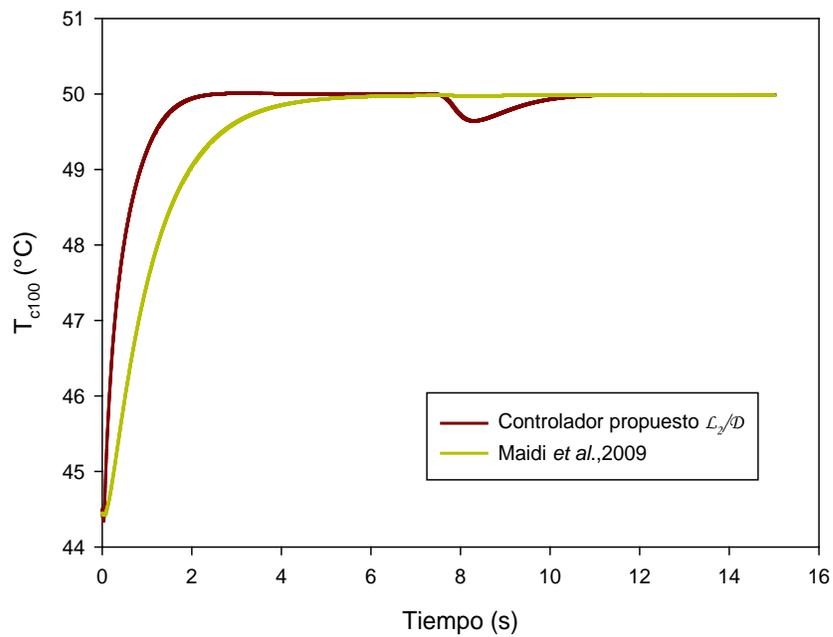
Es evidente que el seguimiento del problema de control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  tiene un mejor desempeño que el control geométrico (se puede apreciar las integrales en la tabla 7.3), de lo contrario en el problema regulatorio el control geométrico se desempeña mejor que el control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$ . El control propuesto  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  presenta un buen desempeño de control, ya que solo requiere de dos parámetros y no requiere la evaluación de la primera derivada. Las características geométricas

$\phi$  mejoran la capacidad de rechazo del ruido y es justificado por García-Alvarado & Ruiz-López (2010).

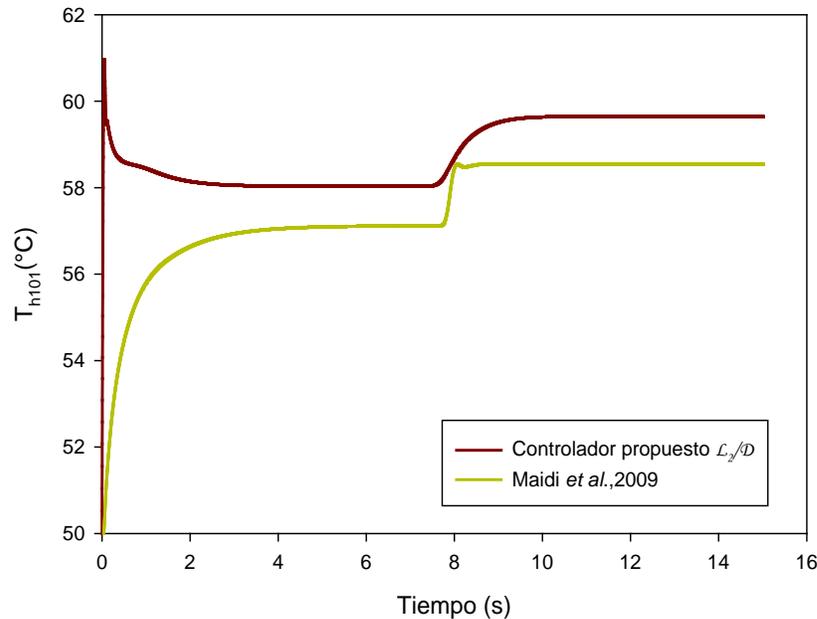
**TABLA 7.3** Características del control SISO del CCTHE con  $T_{h101}$  como variable

Control	Parámetros	$\phi$	$(I_e, I_u)_{r=1(t)ss}$	$(I_e, I_u)_{r=1(t)sim}$	$(I_e, I_u)_{r=5(t)sim}$
$\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$	$K_{p11} = 1.7$ $K_{i11} = 3.0 \text{ s}^{-1}$	1.45	(0.21, 0.03)	(0.20, 0.04)	(6.1, 1.3)
Maidi <i>et al.</i> (2009)	$K_p = 7.8$ $\tau_1 = 1 \text{ s}$ $\tau = 1.03 \text{ s}$				(21, 14)

manipulada.



**FIGURA. 7.9** Comparación del desempeño en la salida del CCTHE.



**FIGURA. 7.10** Comparación del esfuerzo de acción de control del CCTHE.

Se observó que el desempeño de la salida del controlador geométrico paramétrico propuesto en  $L_2/D$  y el control reportado en la literatura, se obtiene una mejor respuesta asintótica en la salida del controlador propuesto con dos parámetros de control en un tiempo de ajuste de 2 segundos, mientras que el controlador reportado en la literatura presenta un tiempo de retardo y utiliza 3 parámetros de control y observador de estado, esto físicamente puede ser infactible físicamente.

Al reproducir el controlador en la plataforma de Matlab se obtuvo la Fig. 7.10 que representa el esfuerzo de la acción de control en los procesos SISO, el set point de los controladores es 50°C y se puede observar que el controlador  $L_2/D$  presenta un sobreimpulso en la señal de control y requiere de mayor esfuerzo en la acción de control en comparación del controlador reportado en la literatura. El controlador propuesto por A. Maidi *et al.* (2009) se reproduce únicamente utilizando 100 nodos y el controlador puede resultar infactible físicamente debido a que utiliza un observador de estado que requiere de un sensor muy

preciso para que pueda medir la temperatura en cada nodo y esto no es sencillo de implementar .

#### 4.3.2 Control SISO-PI manipulando la velocidad de flujo del fluido caliente.

El diseño del controlador propuesto  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  manipulando la velocidad del fluido caliente, las ecuaciones de control se representan a continuación.

$$\frac{d\xi}{dt} = r - T_{c20} \quad (7.21)$$

$$T_{h1} = T_{h1s} + K_{p11}(r - T_{c20}) + K_{i11}\xi \quad (7.22)$$

Con la siguiente entrada:

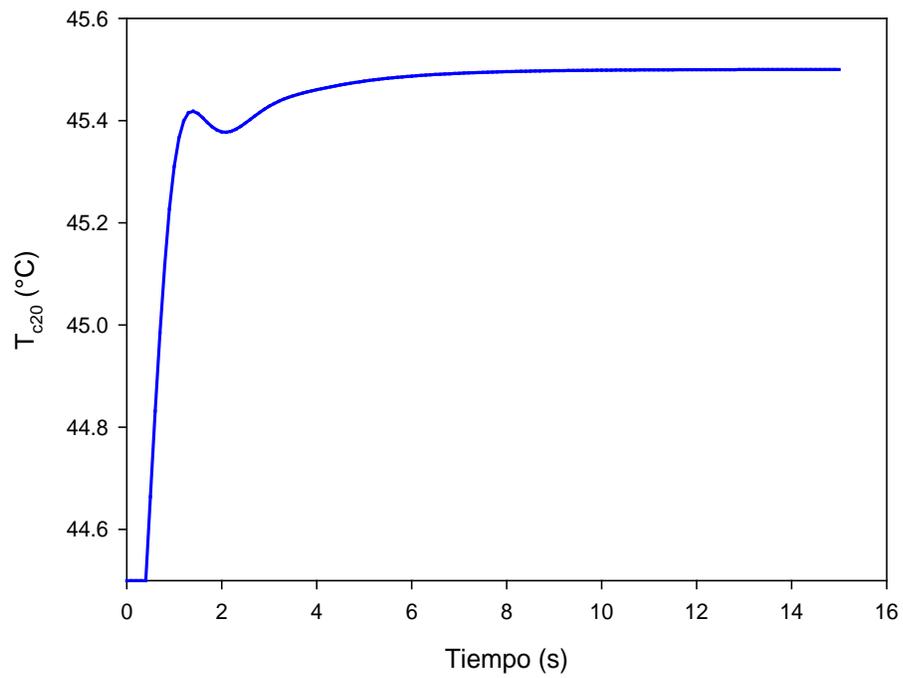
$$r = \begin{cases} 44.5 & t < 0 \\ 45.5 & t > 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

Los parámetros e índices de desempeño del controlador óptimo se resumen en la Tabla 7.4, donde  $(I_e, I_u)_{r=1(t)ss}$  representa las integrales evaluadas analíticamente con  $K=1$  y la expresión  $(I_e, I_u)_{r=1(t)sim}$  representa las integrales evaluadas por simulación en la plataforma

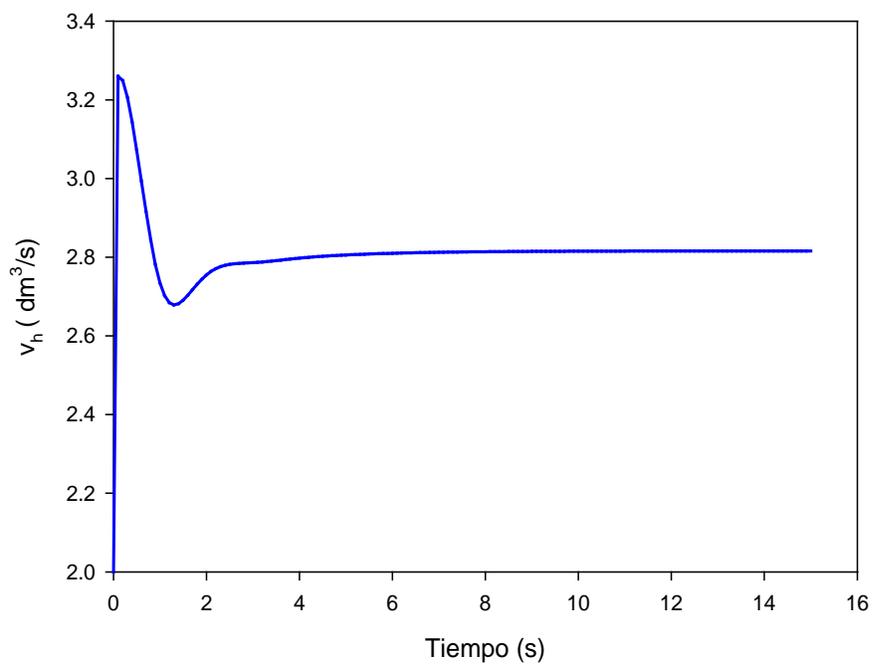
Parámetros	$\phi$	$(I_e, I_u)_{r=1(t)ss}$	$(I_e, I_u)_{r=1(t)sim}$
<b>TABLA 7.4</b> Características del control SISO en un CCTHE manipulando la variable $v_h$ .			
$K_{p11} = 0.77$	2.09	(0.31, 0.07)	(0.35, 0.06)
$K_{i11} = 0.68 \text{ s}^{-1}$			

de matlab a través de la regla trapezoidal con  $K=1$ .

La Fig. 7.11 representa la manipulación de la velocidad del fluido caliente en la variable de salida, el set point correspondiente es 43.9 °C donde se observa un sobreimpulso a los 1.2 segundos y se estabiliza la temperatura de salida del fluido frío con un tiempo de ajuste de 5 segundos, debido a esto se requiere una velocidad de flujo correspondiente a  $2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  como acción de control de acuerdo a la Fig. 7.12.



**FIGURA. 7.11** Respuesta de salida de la temperatura del fluido frío.



**FIGURA. 7.12** Esfuerzo de control para un cambio de referencia de tipo escalón.

Además se realizó el control el control manipulando la velocidad del fluido caliente utilizando 100 nodos para llevar a cabo la simulación en la plataforma de matlab y se describe el siguiente sistema y con las entradas correspondientes de acuerdo a la Ec. (7.26).

$$\frac{d\xi}{dt} = r - T_{c100} \quad (7.24)$$

$$T_{h1} = T_{h1s} + K_{p11}(r - T_{c100}) + K_{i11}\xi \quad (7.25)$$

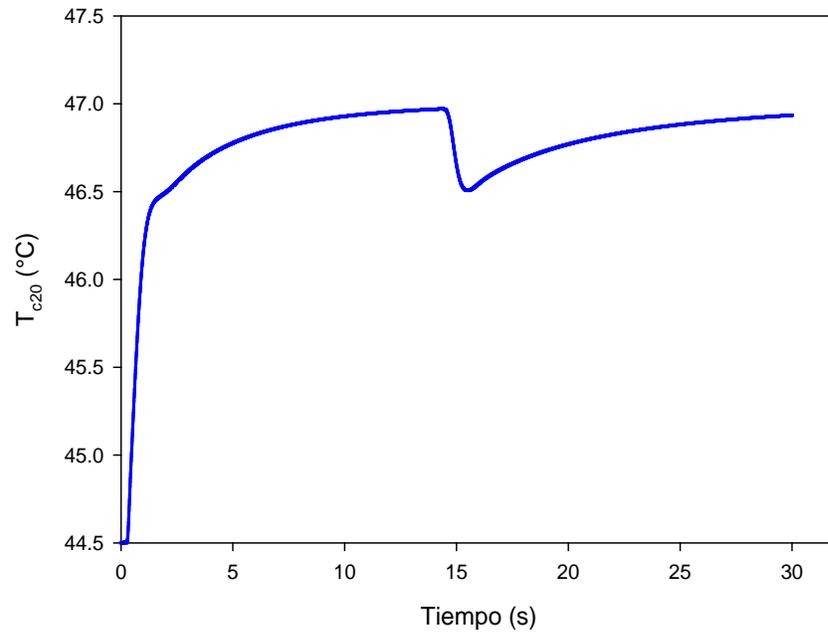
$$r = \begin{cases} 44.5 & t < 0 \\ 47.0 & t > 0 \end{cases} \quad T_{c0} = \begin{cases} 25.0 & t < 14 \text{ s} \\ 20.0 & t > 14 \text{ s} \end{cases} \quad (7.26)$$

A continuación se describe en la Tabla 7.5 los parámetros e índices de desempeño en un CCTHE manipulando la variable  $v_h$ .

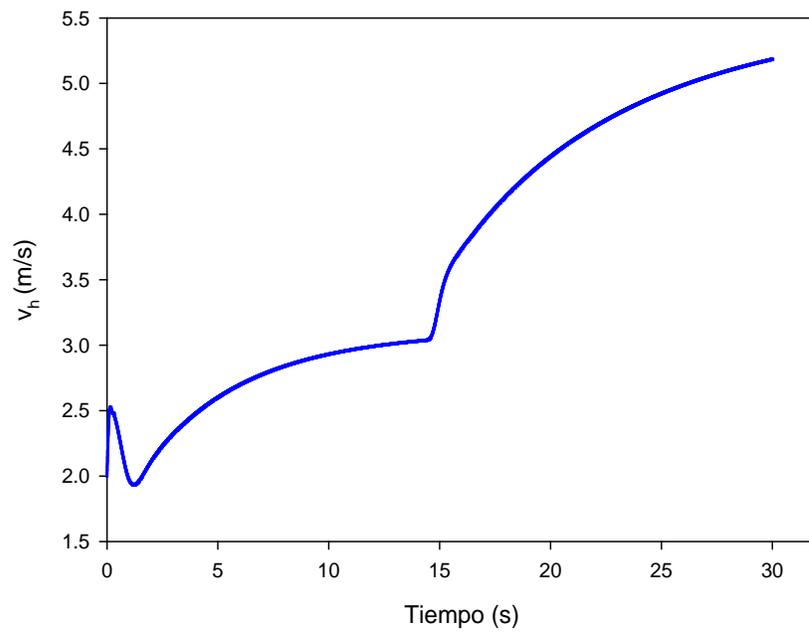
Parámetros	$\phi$	$(I_e, I_u)_{r=1(t)ss}$	$(I_e, I_u)_{r=1(t)sim}$	$(I_e, I_u)_{r=5(t)sim}$
$K_{p22} = 0.39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$	1.30	(0.43, 0.02)	(0.51, 0.02)	(2.3, 0.05)
$K_{i22} = 0.69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{°C}^{-1}$				

**TABLA 7.5** Características del control SISO en un CCTHE manipulando la variable  $v_h$ .

Los resultados de la simulación que se muestran en la Fig.7.13 y 7.14 no fue posible una comparación directa con el controlador geométrico propuesto por Maida *et al.*, 2009, sin embargo algunas características dinámicas fueron comparadas. El controlador PI tuvo 6 segundos en la estabilización del seguimiento del problema, en cambio Maida *et al.*, 2009 consiguieron un tiempo de estabilización correspondiente a 5 segundos. El controlador PI tuvo 9 segundos en estabilización del problema del regulador y el controlador geométrico muestra 6 segundos. El desempeño del controlador propuesto en la literatura es mejor al controlador, pero utilizando 4 parámetros y con la necesidad de evaluar la primera y segunda derivada (6.16). El control PI tuvo un buen desempeño, con solo dos parámetros y sin necesidad de evaluar la primera y segunda derivada.



**FIGURA. 7.13** Desempeño de la salida del control SISO del CCTHE

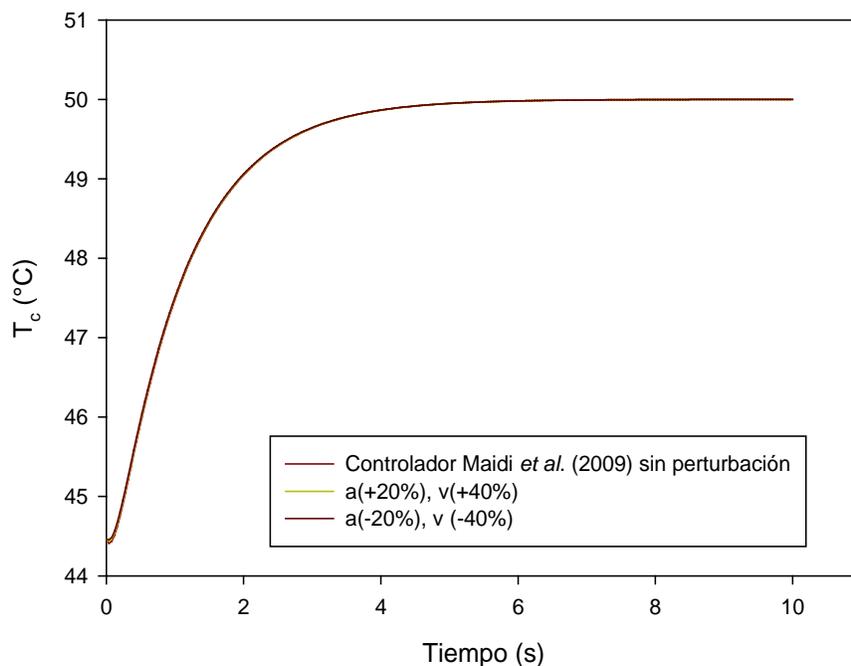


**FIGURA. 7.14** Esfuerzo de la acción de control SISO en un CCTHE.

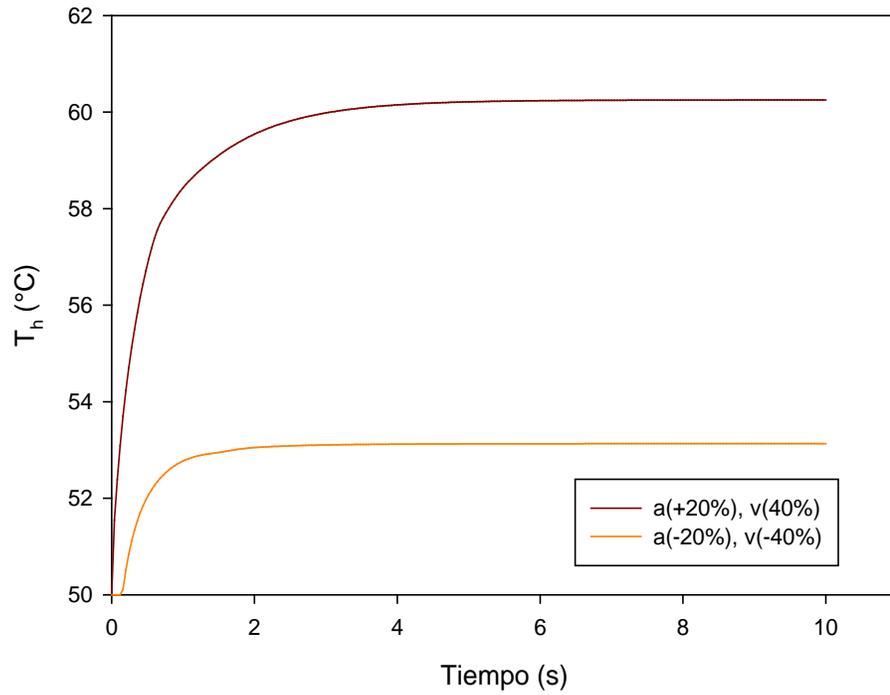
### 4.3.3 Comparación del controlador SISO-PI utilizando el criterio $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$

Se llevó a cabo la reproducción de la robustez del controlador reportado en la literatura de acuerdo a la Fig. 7.15 y 7.16, con un primer modelo perturbado utilizando 20% en el coeficiente de transferencia de calor en el líquido interno y 40% en la velocidad del fluido interno, además se probó con un modelo perturbado utilizando -20% de coeficiente de transferencia de calor en el líquido interno y -40% de velocidad del fluido interno, los resultados no corresponde al análisis de robustez representado con los resultados propuestos en la literatura.

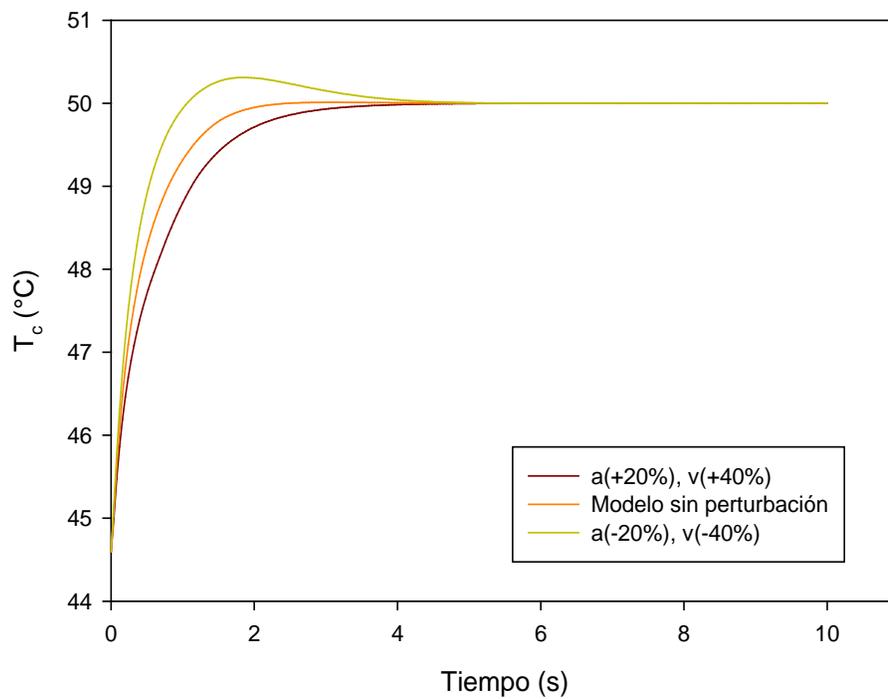
Además se aplicó robustez al controlador geométrico paramétrico  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  del sistema SISO-PI manipulando la temperatura de entrada del fluido caliente, este controlador se comparó al reportado en literatura, se observa mayor robustez en las salidas del controlador de Maidi *et al.* (2009). Sin embargo si se compara directamente con la representación gráfica, se nota que tienen el mismo tiempo de ajuste para estabilizar el modelo perturbado.



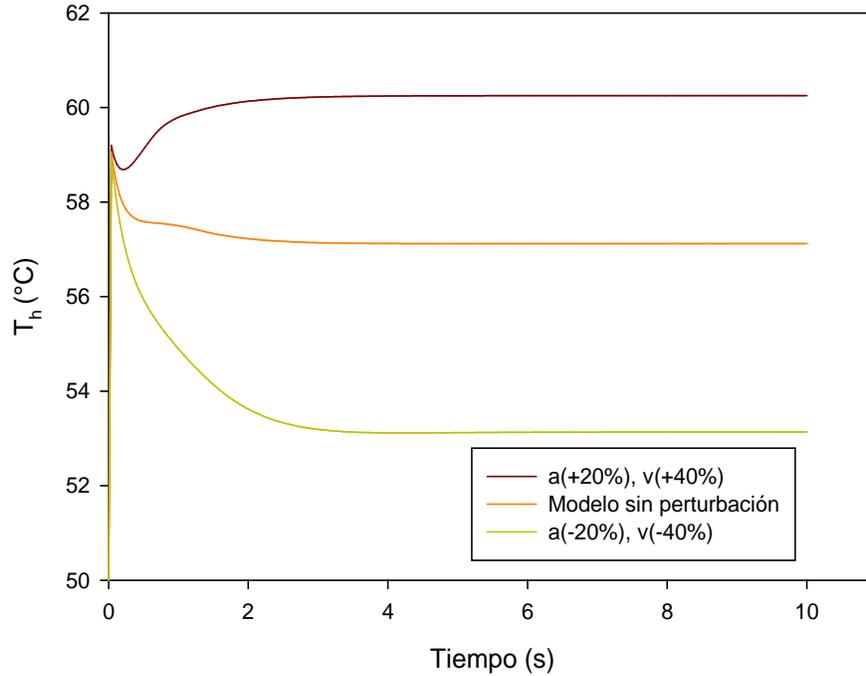
**FIGURA. 7.15** Desempeño de la salida en un modelo robusto.



**FIGURA. 7.16** Desempeño del esfuerzo de control en un modelo robusto.



**FIGURA. 7.17** Desempeño de la salida en un modelo robusto.

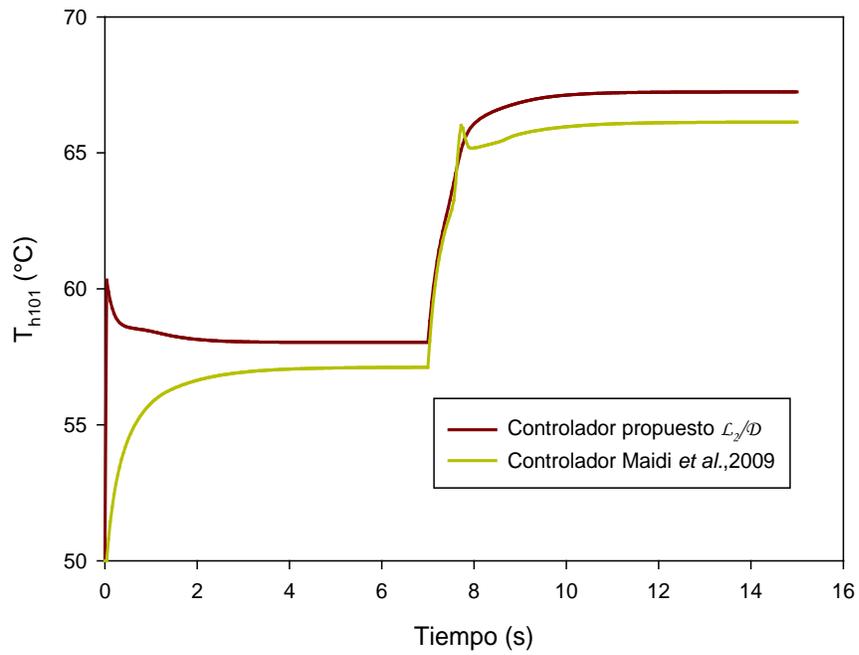


**FIGURA. 7.18** Desempeño del esfuerzo de control en un modelo robusto

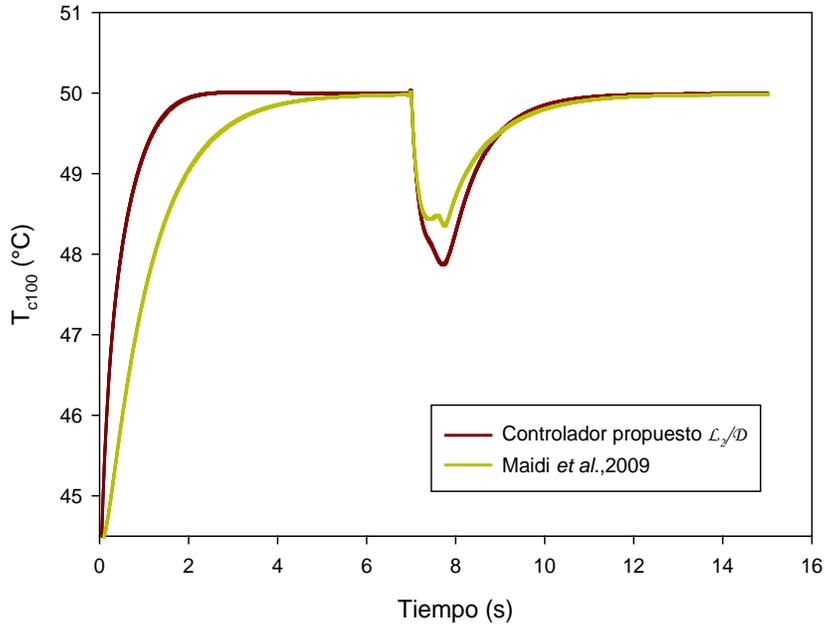
Finalmente se probó la robustez del controlador PI con las variaciones de los parámetros más extremas sugeridas por Maida *et al.*, (2009). Estas perturbaciones se introdujeron con las siguientes variaciones de entrada. El desempeño y esfuerzo de acción de control se muestra en la Fig. 7.19 y Fig. 7.20.

$$r = \begin{cases} 44.5 & t < 0 \\ 50.0 & t > 0 \end{cases} \quad a_c = \begin{cases} 2.92 & t < 7 \text{ s} \\ 2.34 & t > 7 \text{ s} \end{cases} \quad v_c = \begin{cases} 1.0 & t < 7 \text{ s} \\ 1.4 & t > 7 \text{ s} \end{cases}$$

$$a_h = \begin{cases} 5.0 & t < 7 \text{ s} \\ 4.0 & t > 7 \text{ s} \end{cases} \quad v_c = \begin{cases} 2.0 & t < 7 \text{ s} \\ 2.8 & t > 7 \text{ s} \end{cases}$$



**FIGURA. 7.19** Comparación del desempeño de control aplicado al CCTHE.



**FIGURA. 7.20** Comparación del esfuerzo de la acción de control en CCTHE.

## 5. CONCLUSIÓN

- El control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  fue matemáticamente definido y se demostró que el espacio de soluciones forman una variedad matemática, por lo tanto el controlador  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  pertenece a la familia de los controles geométricos con la función  $u$  definida y dependiente de los parámetros, es por esto que se obtiene un control geométrico paramétrico.
- El control geométrico paramétrico  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  se aplicó con éxito a un CCTHE con estructura MIMO-PI e incluyó acciones de desacoplamiento.
- El procedimiento de sintonización encontró dos parámetros en el control  $\mathcal{L}_2/\mathcal{D}$  con estructura SISO-PI aplicado al CCTHE con similar desempeño y robustez a los controladores geométricos de tres y cuatro parámetros reportado previamente en la literatura.

## 6. REFERENCIAS

- Agarwal, P., Sikand, A., & Shanthi, V. (2014). Application of Heat Exchangers in Bioprocess Industry: a Review. *International Journal of Pharmacy and Pharmaceutical Sciences*, 6(1).
- Aguilar-Garnica, E., García-Sandoval, J. P., & González-Álvarez, V. (2011). PI controller design for a class of distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*,
- Alvarez-Ramirez, J., & Monroy-Loperena, R. (2001). A PI Control Configuration for a Class of MIMO Processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 40, 1186–1199.
- Boscain, U.; Piccoli, B., 1998. Geometric control approach to synthesis theory. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*. 56, 53-68.
- Carrillo-Ahumada, J., Reynoso-Meza, G., García-Nieto, S., Sanchis, J., & García-Alvarado, M. A. (2015). Sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos para sistemas multivariables. Aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad. *RIAI - Revista Iberoamericana de Automatica E Informatica Industrial*, 12(2), 177–188.
- Carrillo-Ahumada, J., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. A. (2011). Tuning optimal-robust linear MIMO controllers of chemical reactors by using Pareto optimality. *Chemical Engineering Journal*, 174(1), 357–367.
- Flores, J. A. & et al. (2015). *Control optimo robusto en equilibrio de Nash de un intercambiador de energía térmica de tubos concéntricos*. Instituto Tecnológico de Veracruz.
- García-Alvarado, M. a., & Ruiz-López, I. I. (2010). A design method for robust and quadratic optimal MIMO linear controllers. *Chemical Engineering Science*, 65(11),
- García-Alvarado, M. a., Ruiz-López, I. I., & Torres-Ramos, T. (2005). Tuning of multivariate PID controllers based on characteristic matrix eigenvalues, Lyapunov functions and robustness criteria. *Chemical Engineering Science*, 60(4), 897–905.
- Goncalves, E.N., Palhares, R.M., Takahashi, R.H.C., 2008. A novel approach for H2/Hinf robust PID synthesis for uncertain systems. *J. Process Contr.* 18, 19–26.
- Heldman, Dennis R; Lund, D. (2006). *Handbook of Food Engineering*, Second Edition.
- Maidi, A., Diaf, M., & Corriou, J. P. (2009). Boundary geometric control of a counter-current heat exchanger. *Journal of Process Control*, 19(2), 297–313.

Maidi, A., Diaf, M., & Corriou, J. P. (2010). Boundary control of a parallel-flow heat exchanger by input-output linearization. *Journal of Process Control*, 20(10), 1161–

Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Vasa.

Piccoli, U. B. B. (1998). Geometric Control Approach. *Synthesis*, 56, 53–68.

Rodríguez Rubio, F., & López Sánchez, M. J. (1996). Control Adaptativo. *Control Adaptativo Y Robusto*, 9–26.

Ruiz-López, I. I., Rodríguez-Jimenes, G. C., & García-Alvarado, M. a. (2006). Robust MIMO PID controllers tuning based on complex/real ratio of the characteristic matrix eigenvalues. *Chemical Engineering Science*, 61(13), 4332–4340.

Shih, Y.P., 1969. Optimal control of distributed-parameters system with integral equation constrains. *Chem. Eng. Sci.* 24, 671-680.

Vargas, S. (2014). Relation between First Order Dynamic Parameters with Pi Control Parameters in Nash Equilibrium, (0), 2–7.