



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Análisis de estrategias de estimación de posición mediante
fusión de sensores basados en filtros de Kalman

presentada por
Ing. Isael Campos Juárez

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis
Dr. Carlos Daniel García Bertrán

Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 2020.



"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Mor., 08/junio/2020
No. de Oficio: DIE/414/20
Asunto: Aceptación de documentos de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ing. Isael Campos Juárez**, con número de control **M18CE083** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "**Análisis de estrategias de estimación de posición mediante fusión de sensores basados en filtros de Kalman**" y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 8699605

CODIRECTOR DE TESIS

REVISOR 1

Dr. Enrique Quintero-Mármol Márquez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química
Cédula profesional 10259407

REVISOR 2

Dr. Manuel Adam Medina
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5992003

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera- Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
Expediente

MPS/lrr.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos **16/junio/2020**

OFICIO No. SAC/ 191/2020

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ISAEL CAMPOS JUÁREZ
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Análisis de estrategias de estimación de posición mediante fusión de sensores basados en filtros de Kalman", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

Excelencia en Educación Tecnológica
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

**CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA**

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares
Expediente
CVGR/CHG

Para mi mamá y a mi papá.

Agradecimientos

Al Dr. **Carlos Daniel** por la confianza de dejarme realizar este tema de investigación.

Al Dr. **Gustavo** por otorgarme las bases al inicio de mi formación.

Al Dr. **Quintero** y al Dr. **Adam** por los comentarios de avances de Tesis.

Al Dr. **Guerrero**, Dr. **Víctor**, Dra. **Guadalupe** Dr. **José Francisco**, Dr. **Fabricio**, Dra. **Gloria**, Dr. **Astorga**, Dr. **Reyes Reyes**, Dr. **Madrigal**, Dr. **Ponce**, Dr. **Jaime**, Dr. **Vela**,
, Dr. **Mina** [...] por las materias impartidas y comentarios en mi formación académica.

A la Lic. **Lore** por apoyarme en el tramite de mi graduación.

A **Roger** y a **Lis** por dedicar tiempo a mi trabajo de investigación.

Al **CONACYT** por el apoyo económico para realizar mis estudios de posgrado.

Al **TecNM** por facilitar sus instalaciones durante mi estancia académica.

Resumen

El sistema de navegación INS/GPS/OF que se conforma por el sistema de navegación inercial (INS), el sistema de navegación global (GPS) y el sensor de flujo óptico (OF), así como de un algoritmo basado en filtro de Kalman *Unscented* se proponen como la estrategia de estimación de posición de los vehículos aéreos no tripulados (UAV) ante situaciones de pérdida de señal GPS.

El algoritmo predictor-corrector del sistema de navegación INS/GPS/OF realiza la fusión de señales de sensores que dependen de coeficientes difusos de las regiones válidas del GPS y del sensor de flujo óptico. Este algoritmo predictor-corrector realiza la fusión local y global de las estimaciones de posición del UAV considerando frecuencias de muestreo diferentes de los sensores de navegación.

El análisis de las respuestas experimentales del algoritmo propuesto implementado en el sistema de navegación INS/GPS/OF muestra ventajas de los errores cuadráticos medios y los valores límites de las covarianzas de las coordenadas este y norte en la estimación de posición del UAV tipo octorotor *X8-M 3DR* con respecto a algoritmos basados en filtros de Kalman lineales y extendidos. Algunas de las +585 pruebas experimentales realizadas en línea se comparan con los resultados obtenidos en simulación.

Palabras clave: UAV, Filtro de Kalman *Unscented*, Fusión de Datos, GPS, Sensor de Flujo Óptico, Sistema de Navegación, Estimación de Posición.

Abstract

The INS/GPS/OF navigation system which is integrated by the inertial navigation system (INS), the global positioning system (GPS) and the optical flow sensor (OF), so as an algorithm based on Unscented Kalman filter are proposed as the position estimation strategy of unmanned aerial vehicles (UAV) in situations of GPS signal loss.

The predictor-corrector algorithm of the INS/GPS/OF navigation system computes sensor data fusion depending on the valid regions of GPS and optical flow sensors. This algorithm does a local and global data fusion in position estimation of UAV, which consider different sampling rates of navigation sensors.

The experimental response analysis of the proposed algorithm implemented on the INS/GPS/OF navigation system shows advantages of the mean square errors and covariance limit values in east and north coordinates in position estimation on an *X8-M 3DR* octorotor with respect to algorithms based on linear and extended Kalman filters. Some of the +585 online experimental tests are compared to simulation results.

Keywords: UAV, Unscented Kalman Filter, Data Fusion, GPS, Optical Flow Sensor, Navigation System, Position Estimation.

Siglas y acrónimos

| | |
|------------------|---|
| AFUKF | <i>Adaptive Fading Unscented Kalman Filter</i> |
| AUV | <i>Autonomous Underwater Vehicles</i> |
| ARUKF | <i>Adaptive Robust Unscented Kalman Filter</i> |
| <i>b – frame</i> | <i>Body Frame</i> |
| CIMG | <i>Calidad de la imagen</i> |
| CKF | <i>Centralized Kalman Filter</i> |
| CNS | <i>Celestial Navigation System</i> |
| CUDA | <i>Compute Unified Device Architecture</i> |
| DAUKF | <i>Dual Adaptive Unscented Kalman Filter</i> |
| DEKF | <i>Dual Extented Kalman Filter</i> |
| DOP | <i>Dilution Of Precision</i> |
| ECEF | <i>Earth-Centered Earth-Fixed</i> |
| ECI | <i>Earth-Centered Inertial Frame</i> |
| EKF | <i>Extended Kalman Filter</i> |
| ENU | <i>East-North-Up</i> |
| EST | <i>Estado</i> |
| FHRKF | <i>Finite-Horizon Robust Kalman Filter</i> |
| FKF | <i>Federated Kalman Filter</i> |
| GLONASS | <i>GLObal NAVigation Satellite System</i> |
| GNS | <i>Geomagnetic Navigation System</i> |
| GNSS | <i>Global Navigation Satellite System</i> |
| GPS | <i>Global Positioning System</i> |
| GSM | <i>Global System for Mobile communications</i> |
| HDOP | <i>Horizontal Dilution Of Precision</i> |
| HS | <i>Horn-Schunck</i> |
| I ² C | <i>Inter-Integrated Circuit</i> |
| IEFK | <i>Invariant Extended Kalman Filter</i> |
| IMU | <i>Inertial Measurement Unit</i> |
| INS | <i>Inertial Navigation System</i> |
| KF | <i>Kalman Filter</i> |
| LC | <i>Loosely Couple</i> |
| LIDAR | <i>Light Detection And Ranging</i> |
| LK | <i>Lucas-Kanade</i> |
| LLF | <i>Local-Level Frame</i> |
| LTI | <i>Linear Time Invariant</i> |
| MAVlink | <i>Micro Air Vehicle Link</i> |
| MINS | <i>Microinertial Navigation System</i> |
| MLP | <i>Maximum Likelihood Principle</i> |
| MSE | <i>Minimum mean Square Error</i> |
| NED | <i>North-East-Down</i> |
| NMEA | <i>National Marine Electronics Association</i> |
| NSAT | <i>Número de satélites</i> |
| OF | <i>Optical Flow sensor</i> |
| OpenCV | <i>Open Computer Vision Library</i> |
| PDOP | <i>Position Dilution Of Precision</i> |
| PID | <i>Controlador Proporcional-Integral-Derivativo</i> |
| RN | <i>Red Neuronal</i> |
| RSSI | <i>Received Signal Strength Indicator</i> |
| RTSKF | <i>Robust Two-Stage Kalman Filter</i> |
| SAD | <i>Sum of Absolute differences</i> |
| SAR | <i>Synthetic Aperture Radar</i> |

| | |
|-------|--|
| SIFT | <i>Scale-Invariant Feature Transform</i> |
| SLAM | <i>Simultaneous Localization And Mapping</i> |
| SNR | <i>Signal to Noise Ratio</i> |
| SRUKF | <i>Square-Root Unscented Kalman Filter</i> |
| SURF | <i>Speeded-UP Robust Features</i> |
| TC | <i>Tightly Couple</i> |
| UART | <i>Universal Asynchronous Receiver-Transmitter</i> |
| UAV | <i>Unmanned Aerial Vehicle</i> |
| UERE | <i>User-Equivalent Range Error</i> |
| UKF | <i>Unscented Kalman Filter</i> |
| UT | <i>Unscented Transformation</i> |
| UTM | <i>Universal Transversal Mercator</i> |
| VDOP | <i>Vertical Dilution Of Precision</i> |
| VNS | <i>Vision Navigation System</i> |
| WGS | <i>World Geodetic System</i> |
| WIFI | <i>Wireless Fidelity</i> |

Símbolos

| | |
|--|--|
| A | Matriz de parámetros del sistema dinámico |
| \mathbf{A}_k | Matriz jacobiana del sistema dinámico en el tiempo k |
| B | Matriz de control del sistema dinámico |
| C | Matriz de observaciones/mediciones del sistema dinámico |
| \mathbf{H}_k | Matriz jacobiana de las mediciones del sistema dinámico |
| I | Matriz identidad |
| \mathcal{K}_k | Matriz de la ganancia de Kalman |
| Q | Matriz de la covarianza del ruido del sistema dinámico |
| R | Matriz de la covarianza del ruido de las mediciones del sistema dinámico |
| \mathbf{R}_a^b | Matriz de rotación del marco a a b |
| \mathbf{P}_k^- | Matriz de covarianza de los estados <i>a priori</i> del sistema dinámico |
| \mathbf{P}_k | Matriz de covarianza de los estados <i>a posteriori</i> del sistema dinámico |
| $\sqrt{\mathbf{P}}$ | Raíz cuadrada de la matriz de las covarianzas de los estados |
| $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k}$ | Matriz de covarianza de innovación |
| $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k}$ | Matriz de covarianza cruzada de los estados y de la salida |
| \mathcal{X}_k | Matriz de puntos sigma |
| \mathcal{X}_k^- | Matriz de puntos sigma propagados en el sistema dinámico |
| \mathcal{Y}_k^- | Matriz de puntos sigma propagados en las mediciones del sistema dinámico |
| d | Vector de datos de sensores |
| \mathbf{u}_k | Vector de entradas del sistema dinámico |
| \mathbf{v}_k | Vector de ruido de las mediciones del sistema dinámico |
| \mathbf{w}_k | Vector de ruido del sistema dinámico |
| \mathbf{w}_v | Vector de viento en el sistema dinámico |
| \mathbf{x}_k | Vector de estados del sistema dinámico |
| $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ | Vector de estados estimados <i>a priori</i> del sistema dinámico |
| $\hat{\mathbf{x}}_k$ | Vector de estados estimados <i>a posteriori</i> del sistema dinámico |
| \mathbf{y}_k | Vector de salidas del sistema dinámico |
| $\hat{\mathbf{y}}_k$ | Vector de salidas estimadas del sistema dinámico |
| $\mathbf{f}(\cdot)$ | Función no lineal del sistema dinámico |
| $\mathbf{h}(\cdot)$ | Función no lineal de las mediciones del sistema dinámico |
| a_x, a_y, a_z | Aceleraciones traslacionales en el marco del vehículo |
| \mathcal{C} | Regiones válidas de sensores |

| | |
|-------------------------------------|---|
| d | Distancia |
| dt | Paso de discretización del método numérico |
| $\mathcal{D}(\cdot)$ | Coefficientes difusos |
| \mathbb{E} | Valor esperado/esperanza matemática |
| eu | subíndice relacionado con los ángulos de Euler |
| f | Longitud focal |
| g | Aceleración de la gravedad |
| gps | subíndice relacionado con el sistema de posicionamiento global |
| I_i | Momento inercial, con $i = x, y, z$ |
| l | Longitud |
| m | Masa |
| \in | Pertenece a... |
| $\mathbb{R}^{n \times n}$ | ... los reales de dimensiones de $n \times n$ |
| O | Origen |
| of | subíndice relacionado con el sensor de flujo óptico |
| p, q, r | Velocidades angulares en el marco del vehículo |
| T | Frecuencia de muestreo de las mediciones del sistema dinámico |
| u, v, w | Velocidades traslacionales en el marco del vehículo |
| U_i | Señal de entradas en el vehículo, con $i = 1, 2, 3, 4$ |
| v_x, v_y | Velocidades traslacionales en el marco de vehículo |
| W | Valores de ponderación de puntos sigma |
| x, y y z | Coordenadas rectangulares |
| \dot{x} y \ddot{x} | Derivadas primera y segunda de x |
| λ, α, β y κ | Parámetros de las transformación <i>unscented</i> |
| λ, φ y h | Coordenadas geodésicas: longitud, latitud y altitud |
| ν_x y ν_y | Flujo óptico |
| $\mu(\cdot)$ | Función de membresía |
| $diag[\cdot]$ | Diagonal de una matriz |
| ϕ, θ y ψ | Ángulos <i>roll</i> , <i>pitch</i> y <i>yaw</i> |
| Ω_i | Velocidades angulares en los motores eléctricos, con $i = 1, 2, \dots, 8$. |
| $\mathcal{N}(0, R)$ | Media cero y covarianza R |

Contenido

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 2 |
| 1.2. Hipótesis | 4 |
| 1.3. Objetivos | 4 |
| 1.3.1. General | 4 |
| 1.3.2. Específicos | 4 |
| 1.4. Meta | 4 |
| 1.5. Justificación | 4 |
| 1.6. Revisión bibliográfica | 4 |
| 1.6.1. Sistemas de posicionamiento existentes en los UAV como alternativa al GPS | 5 |
| 1.6.2. Métodos para el filtrado y fusión de sensores | 8 |
| 1.6.3. Filtros de Kalman | 10 |
| 1.7. Organización del documento | 16 |
| 2. Filtros de Kalman | 17 |
| 2.1. Filtro de Kalman lineal | 18 |
| 2.1.1. Descripción del algoritmo del KF | 19 |
| 2.1.2. Ejemplo de la implementación del algoritmo KF | 20 |
| 2.2. Filtro de Kalman extendido | 21 |
| 2.2.1. Descripción del algoritmo EKF | 22 |
| 2.2.2. Ejemplo de la implementación del algoritmo EKF | 23 |
| 2.3. Filtro de Kalman <i>unscented</i> | 24 |
| 2.3.1. Descripción del algoritmo UKF | 27 |
| 2.3.2. Ejemplo de la implementación del algoritmo UKF | 28 |
| 2.4. Fusión de sensores con filtros de Kalman | 29 |
| 2.4.1. Arquitecturas de fusión de sensores | 30 |
| 2.4.2. Fusión del vector de estados | 31 |
| 2.4.3. Fusión de la matriz de información | 32 |
| 2.4.4. Ejemplo de fusión de sensores | 33 |
| 2.5. Indicador de la evaluación de estimaciones | 34 |
| 2.6. Análisis de las covarianzas de los filtros de Kalman | 34 |
| 3. Principios de navegación en vehículos aéreos no tripulados | 38 |
| 3.1. Principios de navegación | 38 |
| 3.1.1. Marcos de referencia | 38 |
| 3.1.2. Transformación de coordenadas de marcos de referencia | 40 |
| 3.1.3. Sistemas de coordenadas | 41 |
| 3.1.4. Sistemas de navegación global satelital | 43 |
| 3.1.5. Sistemas de navegación relativa | 47 |
| 3.1.6. Sistemas de navegación inercial | 47 |
| 3.1.7. Sistemas de navegación visual | 48 |
| 3.2. Vehículos aéreos no tripulados | 51 |
| 3.2.1. Modelo dinámico de los vehículos aéreos no tripulados | 51 |

| | |
|--|------------|
| 4. Estrategias de estimación de posición | 55 |
| 4.1. Ecuaciones del sistema de navegación | 55 |
| 4.2. Sistema de navegación INS/GPS | 57 |
| 4.3. Sistema de navegación INS/GPS + estrategia para evitar errores de posicionamiento | 58 |
| 4.3.1. Estimación de posición de los algoritmos KF y EKF en el sistema de navegación INS/GPS | 59 |
| 4.3.2. Estimación de posición del algoritmo UKF en el sistema de navegación INS/GPS | 60 |
| 4.4. Sistema de navegación INS/GPS/OF + estrategia para evitar errores de posicionamiento | 63 |
| 4.4.1. Estimación de posición de los algoritmos KF y EKF en el sistema de navegación INS/GPS/OF | 65 |
| 4.4.2. Estimación de posición de posición del algoritmo UKF en el sistema de navegación INS/GPS/OF | 67 |
| 4.4.3. Selección de funciones de membresía para la validez de sensores | 70 |
| 4.5. Condiciones de simulación | 73 |
| 5. Resultados | 76 |
| 5.1. Implementación en simulación de sistemas de navegación | 76 |
| 5.1.1. Sistema de navegación INS/GPS | 76 |
| 5.1.2. Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS + perturbación | 79 |
| 5.1.3. Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS | 80 |
| 5.1.4. Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS + perturbación | 83 |
| 5.2. Tablas de resultados en simulación | 85 |
| 5.3. Implementación experimental de sistemas de navegación en un prototipo | 86 |
| 5.3.1. Prototipo del sistema de navegación | 86 |
| 5.3.2. Condiciones de implementación experimental | 88 |
| 5.3.3. Análisis de la respuesta de los sensores | 91 |
| 5.3.4. Sistema de navegación INS/GPS | 97 |
| 5.3.5. Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS | 99 |
| 5.3.6. Sistema de navegación INS/GPS/OF | 101 |
| 5.3.7. Sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS | 104 |
| 5.3.8. Sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS | 106 |
| 5.3.9. Sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS | 108 |
| 5.4. Tablas de resultados en pruebas experimentales | 110 |
| 5.5. Discusión de resultados | 111 |
| 6. Conclusiones | 113 |
| A. Péndulo simple | 122 |
| A.1. Péndulo simple no lineal | 123 |
| A.2. Péndulo simple linealizado y discretizado | 123 |
| B. Ecuaciones dinámicas del UAV | 127 |
| B.1. Linealización del modelo completo del UAV | 127 |
| B.2. Linealización y discretización del subsistema traslacional | 134 |
| C. Linealización de las ecuaciones de navegación | 139 |
| D. Método de discretización numérico para filtros de Kalman | 146 |
| E. Demostraciones | 148 |
| E.1. Demostración de valores de ponderación | 148 |
| E.2. Demostración de mediciones lineales | 149 |
| F. Código Matlab | 150 |
| G. Código LabVIEW | 158 |

Figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. Navegación de los vehículos aéreos no tripulados. | 1 |
| 1.2. Debajo de puentes hay pérdida de señal de GPS. | 2 |
| 1.3. Sistemas de posicionamiento a) GPS, b) IMU y c) flujo óptico. | 3 |
| 1.4. Comportamiento de errores de posición del sensor IMU y del sensor de flujo óptico OF. | 3 |
| | |
| 2.1. Algoritmo a) predictor-corrector y b) filtro de Kalman. | 17 |
| 2.2. Filtro de Kalman implementado en el péndulo simple. | 21 |
| 2.3. Respuestas de un sistema dinámico lineal y no lineal. | 21 |
| 2.4. Filtro de Kalman Extendido implementado en el péndulo simple. | 24 |
| 2.5. Puntos sigma de los filtros de Kalman. | 28 |
| 2.6. Filtro de Kalman <i>Unscented</i> implementado en el péndulo simple. | 29 |
| 2.7. Arquitecturas de fusión de datos; a) centralizadas, b) descentralizadas, y c) jerárquicas. | 30 |
| 2.8. Fusión del vector de estados. | 33 |
| 2.9. Valores límite de covarianzas <i>a priori</i> y <i>a posteriori</i> del estado x_1 | 35 |
| 2.10. Análisis de covarianzas de los estados con valores de ruido diferentes. | 36 |
| 2.11. Estados estimados con valores de ruido diferentes. | 36 |
| | |
| 3.1. Marco de referencia ECEF y el sistema de coordenadas rectangulares-geodésicas. | 41 |
| 3.2. Geometría del elipsoide. | 42 |
| 3.3. El sistema de posicionamiento global. | 43 |
| 3.4. Datos entregados por el receptor GPS en formato NMEA. | 44 |
| 3.5. Decodificación de la sentencia NMEA [NMEA, 2019]. | 44 |
| 3.6. Configuración geométrica de los satélites GPS. | 45 |
| 3.7. Conversión de coordenadas del GPS. | 46 |
| 3.8. Componentes del sistema de navegación inercial. | 47 |
| 3.9. Flujo óptico. | 49 |
| 3.10. Componentes del sensor de flujo óptico PX4FLOW. | 49 |
| 3.11. Proyección de un punto real a coordenadas de píxeles. | 50 |
| 3.12. Movimientos rotacionales del UAV. | 51 |
| 3.13. Los subsistemas dinámicos de los vehículos aéreos no tripulados. | 52 |
| 3.14. Fuerzas y pares rotacionales del UAV tipo octorotor. | 53 |
| 3.15. Lazo de control de los vehículos aéreos no tripulados. | 54 |
| | |
| 4.1. Sistema de navegación INS/GPS. | 57 |
| 4.2. Filtro de Kalman generalizado en el sistema de navegación INS/GPS. | 57 |
| 4.3. Sistema de navegación INS/GPS + estrategia para evitar errores de posicionamiento. | 58 |
| 4.4. Mediciones y datos disponibles en el receptor GPS. | 58 |
| 4.5. Datos disponibles en el receptor GPS para la toma de decisiones a partir de funciones de membresía. | 59 |
| 4.6. Estructura de los filtros de Kalman en el sistema de navegación INS/GPS + estrategia para evitar errores de posicionamiento. | 62 |
| 4.7. Sistema de navegación INS/GPS/OF. | 63 |
| 4.8. Replicador de coordenadas UTM con el sensor de flujo óptico. | 64 |
| 4.9. Vector de ponderaciones a partir de funciones de membresía. | 64 |

| | |
|---|----|
| 4.10. Regiones válidas del GPS y del sensor de flujo óptico. | 64 |
| 4.11. Estructura de los filtros de Kalman para el sistema de navegación INS/GPS/OF. | 69 |
| 4.12. Funciones de membresía: 1) escalón, 2) γ y 3) complemento de γ | 70 |
| 5.1. Sistema de navegación INS/GPS en simulación. | 77 |
| 5.2. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS en simulación. | 77 |
| 5.3. Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS en simulación. | 78 |
| 5.4. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS en simulación. | 78 |
| 5.5. Sistema de navegación de navegación INS/GPS + perturbación en simulación. | 79 |
| 5.6. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS + perturbación en simulación. | 79 |
| 5.7. Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS + perturbación en simulación. | 80 |
| 5.8. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS + perturbación en simulación. | 80 |
| 5.9. Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación. | 81 |
| 5.10. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación. | 81 |
| 5.11. Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación. | 82 |
| 5.12. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación. | 82 |
| 5.13. Sistema de navegación de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación. | 83 |
| 5.14. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación. | 83 |
| 5.15. Covarianzas de las coordenadas este del sistema de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación. | 84 |
| 5.16. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación. | 84 |
| 5.17. Prototipo del sistema de navegación INS/GPS/OF sobre el octorotor <i>X8-M 3DR</i> | 86 |
| 5.18. Partes del prototipo del sistema de navegación INS/GPS/OF. | 86 |
| 5.19. Estructura de programación de bloques en LabVIEW. | 88 |
| 5.20. Área de pruebas de vuelo de las estrategias de estimación de posición. | 89 |
| 5.21. Condiciones de vuelo del UAV para su estimación de posición. | 89 |
| 5.22. Coordenadas geodésicas del GPS. | 92 |
| 5.23. Coordenadas UTM del GPS. | 92 |
| 5.24. Comparación entre la altitud GPS y la altitud barométrica. | 93 |
| 5.25. Indicadores de dilución de precisión del receptor GPS. | 93 |
| 5.26. Muestreo de las aceleraciones traslacionales y las velocidades angulares a 100 <i>Hz</i> | 93 |
| 5.27. Aceleraciones traslacionales y velocidades angulares del recorrido del UAV. | 94 |
| 5.28. Velocidades traslacionales directas del sensor de flujo óptico. | 94 |
| 5.29. Velocidades traslacionales del sensor de flujo óptico con procesamiento de datos. | 95 |
| 5.30. Trayectoria sin escalamiento del sensor de flujo óptico comparado con la trayectoria del GPS. | 96 |
| 5.31. Diferencia del ángulo <i>yaw</i> entre la trayectoria del GPS y el sensor de flujo óptico. | 96 |
| 5.32. Trayectoria del escalamiento del sensor de flujo óptico aproximado a la trayectoria del GPS. | 97 |
| 5.33. Sistema de navegación INS/GPS experimental. | 98 |
| 5.34. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS experimental. | 98 |
| 5.35. Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS experimental. | 99 |
| 5.36. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS experimental. | 99 |

| | |
|--|-----|
| 5.37. Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental. | 100 |
| 5.38. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este del sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental. | 100 |
| 5.39. Covarianzas de la coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental. | 101 |
| 5.40. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental. | 101 |
| 5.41. Sistema de navegación INS/GPS/OF experimental. | 102 |
| 5.42. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF experimental. | 102 |
| 5.43. Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF experimental. | 103 |
| 5.44. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF experimental. | 103 |
| 5.45. Sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental. | 104 |
| 5.46. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental. | 104 |
| 5.47. Covarianzas de la coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental. | 105 |
| 5.48. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental. | 105 |
| 5.49. Sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental. | 106 |
| 5.50. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental. | 106 |
| 5.51. Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental. | 107 |
| 5.52. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental. | 107 |
| 5.53. Sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental. | 108 |
| 5.54. Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental. | 108 |
| 5.55. Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental. | 109 |
| 5.56. Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental. | 109 |
| A.1. Péndulo simple. | 123 |
| G.1. Programa 1: IMU, sensor inercial. | 158 |
| G.2. Programa 2: Mag, brújula digital/magnetómetro. | 158 |
| G.3. Programa 3: GPS, sistema de posicionamiento global. | 159 |
| G.4. Programa 4: OF, sensor de flujo óptico. | 159 |
| G.5. Programa 5: Sistema de navegación. | 160 |
| G.6. Programa 6: Gráficas y guardado de datos. | 160 |

Tablas

| | |
|---|-----|
| 1.1. Estrategias de estimación de posición en los UAV. | 6 |
| 1.2. Variantes de algoritmos de visión para sensores de flujo óptico. | 8 |
| 1.3. Variantes del filtro de Kalman extendido. | 12 |
| 1.4. Variantes del filtro de Kalman <i>unscented</i> | 13 |
| 1.5. Clasificación de filtros de Kalman. | 14 |
| 1.6. Algoritmos para fusión de sensores. | 14 |
| 1.7. Fusión de datos usando filtros de Kalman. | 15 |
| 1.8. Fusión de datos en sistemas de navegación INS/GPS. | 15 |
| 1.9. Tipos de sistemas de posicionamiento en los UAV. | 15 |
| | |
| 2.1. Ecuaciones del filtro de Kalman. | 19 |
| 2.2. Ecuaciones del filtro de Kalman extendido. | 22 |
| 2.3. Ecuaciones de la transformada <i>unscented</i> para calcular puntos sigma. | 25 |
| 2.4. Ecuaciones del filtro de Kalman <i>unscented</i> | 26 |
| 2.5. Valores del filtro de Kalman en cada iteración. | 35 |
| | |
| 3.1. Error equivalente en el sistema de posicionamiento global. | 45 |
| 3.2. Ecuaciones dinámicas de los vehículos aéreos no tripulados tipo multorrotor. | 52 |
| 3.3. Parámetros y unidades de un UAV tipo octorrotor. | 53 |
| | |
| 5.1. Errores cuadráticos medios de sistemas de navegación en pruebas de simulación. | 85 |
| 5.2. Valores de covarianzas de la coordenada este en pruebas de simulación. | 85 |
| 5.3. Valores de covarianzas de la coordenada norte en pruebas de simulación. | 85 |
| 5.4. Errores cuadráticos medios de pruebas experimentales. | 110 |
| 5.5. Valores de covarianzas de la coordenada este en pruebas experimentales. | 110 |
| 5.6. Valores de covarianzas de la coordenada norte en pruebas experimentales. | 110 |
| | |
| A.1. Ecuaciones del péndulo simple. | 122 |
| A.2. Ecuaciones de linealización de sistemas dinámicos. | 124 |
| A.3. Ecuaciones para discretizar un sistema dinámico en tiempo continuo. | 125 |

Capítulo 1

Introducción

Los autos sin conductores de Tesla son ejemplos de autonomía de los automóviles terrestres en la actualidad. El uso de vehículos autónomos en actividades de transporte marítima, terrestre y aérea requiere la implementación de sistemas de navegación. Como objeto de estudio de los sistemas de navegación para este trabajo de investigación son los vehículos aéreos no tripulados (UAV, *Unmanned Aerial Vehicle*) que se emplean en la milicia, investigación, agricultura, seguridad, entretenimiento y educación [Kharchenko et al., 2013].

La navegación autónoma de aeronaves es posible de realizar con los sistemas de posicionamiento globales y/o relativos, como se muestra en la Figura 1.1. El primer sistema de posicionamiento, el cual se utiliza principalmente en la navegación de cualquier tipo de vehículos, involucra receptores GPS (*Global Positioning System*) para navegar a distancias largas¹ mientras que el segundo sistema de posicionamiento se integra por sensores diferentes como sensores visuales, láser y ultrasónicos para navegar a distancias cortas utilizando un punto de referencia. Este último sistema de navegación se utiliza para recorrer distancias cortas².



Figura 1.1: Navegación de los vehículos aéreos no tripulados.

El sistema de posicionamiento global, el cual es un sistema gratuito y accesible en cualquier hora del día, presenta errores de posicionamiento mayores de tres metros [Yun et al., 2007], estos errores de posicionamiento dependen principalmente de factores ambientales y lugares de aplicación de los receptores GPS. Uno de los inconvenientes del GPS es la pérdida de su señal en lugares con arboles y/o edificios que ocasiona la ausencia de posición de los UAV.

¹Mayor a cien de kilómetros.

²Menor a cien metros.

El avance de los sistemas de navegación para evitar errores de posicionamiento utilizan técnicas diferentes como los sistemas visuales con odometría visual³ [Perdices, 2017], los sistemas de radio frecuencias de redes WIFI (*Wireless Fidelity*) y de redes GSM (*Global System for Mobile communications*) [Sampedro et al., 2017], para conseguir la estimación de posición a partir de diversos sistemas de navegación globales y relativos. Lo cual implica que "si un sistema de navegación presenta errores de posicionamiento en el vehículo, se utilicen los otros sistemas de navegación disponibles para continuar con la navegación del vehículo".

Con lo anterior, la propuesta del desarrollo de una estrategia de estimación de posición basada en odometría visual para apoyar el sistema de navegación existente en el UAV se discute en las siguientes secciones.

1.1. Antecedentes

La navegación autónoma de los UAV utiliza los receptores GPS con unidades de medición inercial (IMU, *Inertial Measurement Unit*), a esta combinación de sensores se le conoce como el sistema de navegación IMU/GPS⁴. El funcionamiento del sistema de navegación GPS/IMU depende de la disponibilidad de la señal GPS durante la trayectoria recorrida del UAV. Sin embargo, la señal de GPS presenta errores de posicionamiento alrededor de tres metros [Yun et al., 2007] y aumentando este error debajo de puentes/túneles (Figura 1.2), lugares cerrados/interiores, cañones urbanos y alrededor de edificios, esto ocasiona caídas y aterrizajes forzadas del UAV.



Figura 1.2: Debajo de puentes hay pérdida de señal de GPS.

Por otra parte, la posición obtenida del sensor IMU presenta desviaciones de cientos de metros por minuto [Kakaes, 2015] debido a la doble integración realizada para llevar de aceleraciones a posiciones traslacionales.

La combinación del sistema de navegación IMU/GPS aprovecha del sensor IMU su frecuencia de muestro mayor a 100 Hz para su posicionamiento a distancias cortas, y del receptor GPS su posicionamiento a la frecuencia de muestreo de 1-10 Hz para corregir al sensor IMU [Marantos et al., 2016]. Esta combinación de señales para la estimación de posición funciona siempre y cuando no se presenten errores de posicionamiento en el receptor GPS.

Una solución para evitar los errores de posicionamiento GPS es la combinación del sistema de navegación IMU/GPS con sistemas de visión como el sensor de flujo óptico.

La explicación teórica de utilizar el sensor de flujo óptico (OF, *Optical Flow sensor*) se muestra en la Figura 1.3. Suponiendo que el intervalo de tiempo es de 0 a t ; que las aceleraciones y las velocidades

³Medición de distancias a partir de la visión.

⁴Otro nombre es el sistema de navegación INS/GPS (*Inertial Navigation System*) cuando se obtienen los ángulos de Euler y las posiciones traslacionales.

traslacionales y los errores de posicionamiento son constantes; que las velocidades traslacionales del sensor de flujo óptico son reales, ver Capítulo 3. En el plano bidimensional $x - y$, las posiciones de los tres sistemas de navegación P_{gps} , P_{imu} y P_{of} están sujetas a errores de posicionamiento. El incremento del $error_{gps}$ se debe a condiciones ambientales y afecta a la posición real del receptor GPS, $P_{gps|real}$. El incremento del $error_{imu}$ es igual al medio de cuadrado del tiempo, que surge a partir de la doble integración de las aceleraciones reales $A_{imu|real}$ a las posiciones del sensor IMU. El incremento del $error_{of}$ es proporcionalmente al tiempo, se debe a la integración de las velocidades a las posiciones del sensor de flujo óptico.

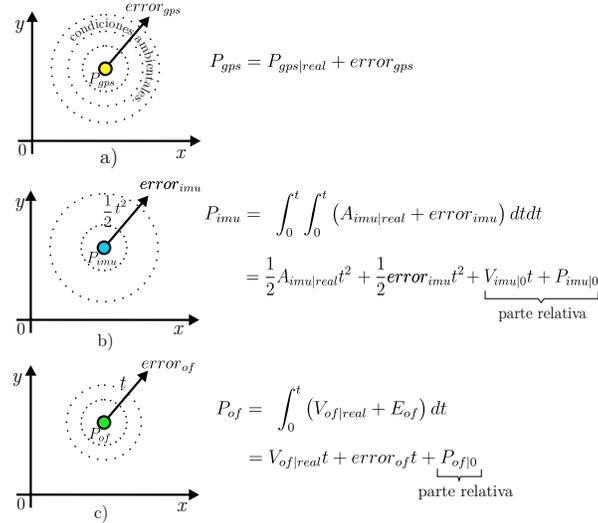


Figura 1.3: Sistemas de posicionamiento a) GPS, b) IMU y c) flujo óptico.

La comparación de estos tres sistemas de posicionamiento es teórica, debido a que las posiciones se obtienen de sensores de naturaleza diferente. Además, el GPS es un sistema de navegación global mientras que los sensores IMU y OF son sistemas de navegación relativos. Este trabajo de investigación se basa en la mejora del sistema de navegación IMU/GPS (o INS/GPS) al implementarle el sensor de flujo óptico. Es decir, el sensor de flujo óptico estimará la posición de vehículos en situaciones de errores de posicionamiento en el receptor GPS. Sin el sensor de flujo óptico el sistema de navegación IMU/GPS emplea solo el sensor IMU para estimar la posición ante tales situaciones. Lo cual implica que los errores de posicionamiento aumenten un medio del cuadrado del tiempo, mientras que empleando el sensor de flujo óptico los errores de posicionamiento se degrada de forma lineal con respecto al tiempo, los cuales son menores que empleando solo el sensor IMU. Esto se muestra en la Figura 1.4 lo cual supone valores constantes y unitarios de errores de los sensores IMU y OF.

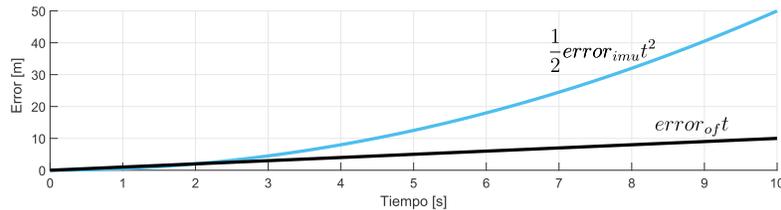


Figura 1.4: Comportamiento de errores de posición del sensor IMU y del sensor de flujo óptico OF.

La diferencia de errores de posicionamiento en ambos sensores es evidente debido a la función cuadrática del error en el sensor IMU, y la función lineal del error en el sensor de flujo óptico. Resulta la acumulación del error del sensor IMU sea de 50 m en el tiempo de 10 segundos, mientras que en el sensor de

flujo óptico sea de 10 *m*.

Esta combinación de señales se realiza con el filtro de Kalman *unscented* que se detalla en secciones posteriores.

1.2. Hipótesis

La incorporación del sensor de flujo óptico mediante la fusión de datos de sensores estimará la posición del UAV en zonas con pérdida de señal de GPS.

1.3. Objetivos

1.3.1. General

Desarrollar estrategias de estimación de posición basadas en la fusión de sensores GPS y flujo óptico mediante filtros de Kalman.

1.3.2. Específicos

- Desarrollar un algoritmo que estime la posición a partir del filtrado de datos de los sensores de un UAV, particularmente IMU y GPS.
- Implementar un sistema de posicionamiento basado en mediciones realizadas a través de odometría visual.
- Desarrollar un sistema de fusión de datos para la estimación óptima/robusta de posicionamiento.
- Desarrollar una estrategia de estimación de posición ante la pérdida de señal de GPS.

1.4. Meta

Es la estimación de posición de los UAV ante la pérdida de señal del GPS utilizando una estrategia basada en odometría visual.

1.5. Justificación

La pérdida de posición de vehículos aéreos no tripulados impide la realización de tareas programadas y aumenta la probabilidad de accidentes por caídas, por lo que una estrategia de estimación de posición en estos vehículos será capaz de seguir su trayectoria de vuelo ante situaciones de pérdida de señal GPS, esto utilizando algoritmos predictores-correctores basados en filtros de Kalman y aplicándolos en el sistema de navegación INS/GPS agregándole el sensor de flujo óptico (OF) para analizar su viabilidad.

1.6. Revisión bibliográfica

La revisión bibliográfica para la solución de la estimación de posición de vehículos aéreos se constituye por tres partes: 1) los sistemas de posicionamiento existentes en los UAV como alternativa al GPS, 2) los métodos para el filtrado y la fusión de sensores de navegación, y 3) los filtros de Kalman para la estimación de posición.

1.6.1. Sistemas de posicionamiento existentes en los UAV como alternativa al GPS

Las alternativas de las estrategias estimación de posición en vehículos aéreos emplean sensores inerciales, visuales, láser, y radiofrecuencias, por mencionar algunos. Además, el estudio de cada tipo de sensor se realiza dependiendo de la naturaleza de sus mediciones.

Estrategias de estimación de posición con sensores inerciales y visuales

Los sistemas de navegación GPS/IMU se estudian y usan principalmente en la navegación de los UAV debido a la fácil accesibilidad de sus componentes electrónicos. Como alternativa a estos sistemas de navegación GPS/IMU surgen sistemas de navegación visuales para resolver errores de posicionamiento GPS. Por ejemplo, en los trabajos de:

[Racero et al., 2014] mejoran la localización de los UAV mediante la fusión de señales del sensor IMU y del receptor GPS. Esta fusión de datos usa un filtro de Kalman disparado por eventos, que trabaja de forma diferente dependiendo de la presencia o ausencia de la señal GPS. Los resultados de simulaciones y experimentales obtenidos de la fusión de sensores muestran ventajas en los algoritmos propuestos.

[Mouats et al., 2015] proponen una estrategia de estimación de posición usando odometría visual en cámaras térmicas para obtener la posición durante el día y la noche. Los autores proponen diferentes métodos de calibración de cámaras térmicas.

[Oyekan, 2015] propone redes neuronales inspiradas biológicamente emulando el comportamiento de insectos, para utilizarlas en la detección visual de características del recorrido de los UAV, y para que sea capaz de volver a su punto de partida. Los resultados de la investigación presentan pruebas experimentales del recorrido del UAV.

[Castillo y Bonilla, 2016] desarrollan un sistema de odometría visual basado en flujo óptico que utiliza un algoritmo de Lucas-Kanade piramidal para la estimación de velocidades de los UAV. El trabajo presenta la implementación de cámaras de vídeos sobre los UAV para realizar capturas de imágenes del suelo que estimen sus desplazamientos. Además, los resultados del método propuesto se comparan contra desplazamientos GPS.

[Li et al., 2016] combinan señales de sensores IMU y de cámaras de vídeo para la estimación de estados de los micro UAV ⁵ usando el filtro de Kalman extendido.

[Marantos et al., 2016] presentan experimentalmente una estrategia de estimación de posición para los UAV tipo helicóptero, combinando la señal GPS con señales de navegación inercial.

[Goppert et al., 2017] usan el filtro de Kalman extendido invariante (IEFK, *Invariant Extended Kalman Filter*) y sensores de flujo óptico para la estimación de posición de los UAV. Además, presentan los modelos matemáticos del sensor IMU y del sensor de flujo óptico.

[de Souza et al., 2018] estiman la posición del UAV usando cámaras de vídeos infrarrojas en ambientes controlados. Las cámaras de vídeo realizan la emulación de pérdida de la señal GPS. La estimación de posición se realiza con filtros de Kalman para la disminución de ruido en señales de sensores. Este trabajo realiza la validación de los resultados experimentales con los resultados en simulaciones.

[Huang et al., 2018] utilizan filtros de Kalman para obtener un sistema de navegación inercial y visual en simulación.

⁵Los UAV que caben en la palma de la mano.

[Padhy et al., 2018] implementan cámaras monoculares para la navegación autónoma de los UAV. El algoritmo utilizado se basa en redes neuronales que realizan la comparación de imágenes obtenidas con las cámaras monoculares durante la navegación del UAV. Las pruebas se realizan en simulaciones y experimentales.

Estrategias de estimación de posición con sensores láser y radiofrecuencias

[Luo et al., 2013] estiman la posición de los UAV a partir de señales de radio frecuencias de módulos transmisores-receptores usando filtros de Kalman. Los resultados teóricos se validan con resultados experimentales.

[Stojkoska et al., 2017] proponen una solución para el posicionamiento de los mini UAV en ausencia de la señal de GPS en lugares cerrados. La solución se basa en infraestructuras de punto de acceso WIFI, que usan el indicador de fuerza señal recibida (RSSI, *Received Signal Strength Indicator*) para la estimación de posición. Además, se usan sensores ultrasónicos para mejorar la exactitud de posición.

[Reizenstein, 2017] diseña cuatro controladores PID para el seguimiento de trayectorias de los UAV mientras que un receptor GPS con sensores láser estima la posición de los UAV en planos tridimensionales.

[Hamnanaka, 2018] propone una estrategia de estimación de posición de los UAV, que usan sensores láser LiDar (*Light Detection and Ranging*) para la estimación de altura, realizado en simulación y experimental.

[Leonard, 2016] propone una solución para la estimación de posición de los UAV para mejorar la robustez en su aterrizaje automático en situaciones de ausencia de señal GPS. La combinación de señales se realiza con sensores inerciales, visuales, barométricos, láser y magnetómetros que se trabajan en simulación.

[Giribet et al., 2018] proponen un sistema de navegación integral basado en sensores visuales, inerciales y receptor GPS, fusionandolos usando el filtro de Kalman extendido para su aplicación en la formación de múltiples UAV en simulación.

La Tabla 1.1 resume las estrategias de estimación de posición en vehículos aéreos.

Tabla 1.1: Estrategias de estimación de posición en los UAV.

| Artículo | Algoritmo | Sistema | Fusión | Comentarios |
|----------------------------|-----------|-------------------|--------|--------------|
| [Racero et al., 2014] | KF | IMU/GPS | C y DC | Simulación |
| [Mouats et al., 2015] | No | Cámara térmica | No | Experimental |
| [Oyekan, 2015] | RN | Visual | No | Experimental |
| [Castillo y Bonilla, 2016] | No | Cámara | No | Experimental |
| [Li et al., 2016] | EKF | IMU/Visual | Sí | Simulación |
| [Marantos et al., 2016] | Sí | IMU/GPS/Visual | Sí | Experimental |
| [Goppert et al., 2017] | IEKF | Flujo óptico | No | Simulación |
| [de Souza et al., 2018] | KF | Cámaras | No | Experimental |
| [Huang et al., 2018] | KF | IMU/Visual | TC | Experimental |
| [Padhy et al., 2018] | RN | Cámara | No | Simulación |
| [Luo et al., 2013] | KF | Radio frecuencias | No | Experimental |
| [Stojkoska et al., 2017] | No | WIFI | No | Simulación |
| [Hamnanaka, 2018] | No | LIDAR | No | Experimental |
| [Leonard, 2016] | Sí | IMU/Visual/LIDAR | Sí | Simulación |
| [Giribet et al., 2018] | KF | IMU/GPS/Visual | LC | Simulación |
| [Gao et al., 2018b] | AFUKF | IMU/GNSS/CNS | J | Experimental |

Nota. Red Neuronal (RN), Simulación (S), Experimental (E), Centralizado (C), Descentralizado (DC), Jerárquico (J), *Loosely Couple* (LC), *Tightly Couple* (TC), *Global Navigation Satellite System* (GNSS) y *Celestial Navigation System* (CNS).

Donde los sistemas de navegación dependen de la estimación de posición en el plano bidimensional o

tridimensional, así como el uso de diferentes algoritmos para realizar la integración de sensores.

Sensores de flujo óptico y sus algoritmos

Dentro de las estrategias de estimación de posición se realizó la búsqueda bibliográfica enfocada en sensores visuales, especialmente, los que realizan el cálculo de flujo óptico para la estimación de posición. Por ejemplo, en los trabajos de:

[Honegger et al., 2013] presentan el sensor de flujo óptico PX4FLOW para calcular flujo óptico a partir del algoritmo SAD (*Sum of Absolute differences*). El sensor de flujo óptico se integra con sensores giroscópicos y un sensor ultrasónico para obtener velocidades reales⁶. El trabajo muestra la comparación de la estimación de posición de los sensores de flujo óptico PX4FLOW y ADNS-2080. Los resultados obtenidos muestran que el sensor PX4FLOW es superior al sensor ADNS-2080 en condiciones de baja luminosidad.

[Sun et al., 2013] diseñan un sensor de flujo óptico para mejorar su robustez y rendimiento, que lo comparan con el sensor PX4FLOW. Las estimaciones de velocidades se realizan con el algoritmo SAD *block matching*. Este trabajo menciona a los algoritmos para calcular flujo óptico: métodos clásicos Lucas-Kanade (LK) y Horn-Schunck (HS); y los métodos diferenciales.

[Baby and Ahamed, 2014] implementan el algoritmo de Lucas-Kanade en la tarjeta Raspberry Pi para la detección de movimiento a partir del flujo óptico. El algoritmo se programa en lenguaje Python usando librerías de OpenCV (*Open Computer Vision Library*).

[Unhelkar et al., 2014] implementan el sensor de flujo óptico PX4FLOW en robots móviles para localizarlos bajo escenarios controlados. El trabajo presenta resultados de simulaciones y experimentales.

[Mouats et al., 2015] usan sensores térmicos para la obtención de odometría visual multiespectral en vehículos móviles.

[Debnath et al., 2017] implementan el sensor de flujo óptico PX4FLOW con sensores LIDAR para mejorar el posicionamiento de los UAV.

[Sanahuja et al., 2011] implementan algoritmos de interpolación de imagen para obtener flujo óptico en la evasión de obstáculos de robots móviles.

[Vargas and Kurka, 2015] implementan el algoritmo de visión SURF (*Speeded-UP Robust Features*) en la arquitectura CUDA (*Compute Unified Device Architecture*) usando librerías de OpenCV. La posición obtenida con el algoritmo propuesto se compara contra coordenadas del GPS.

[Sugiki et al., 2015] implementan dos algoritmos de flujo óptico: LK y HS usando librerías de OpenCV. Estos dos algoritmos se implementan en una tarjeta Raspberry y en una PC para realizar comparaciones de velocidades en procesamiento de datos.

[Borges and Vidas, 2016] obtienen odometría visual a partir de cámaras térmicas para la navegación de vehículos terrestres.

[Zhang et al., 2016] implementan el algoritmo Lucas-Kanade usando cámaras de vídeo para estimar velocidades de los UAV. Además, se realizan comparaciones del consumo computacional del algoritmo propuesto contra el sensor PX4FLOW.

⁶Los algoritmos que calculan el flujo óptico necesitan darle sentido a ese valor por medio de una distancia de referencia, es decir, calcular el valor real de la velocidad.

[Chandra y Setijadi, 2016] usan librerías de OpenCV y cámaras de vídeo para calcular odometría visual en robots humanoides.

[Wu et al., 2017] presentan un algoritmo de odometría visual para mejorar la rapidez y robustez en vehículos.

[Min et al., 2017] implementan un algoritmo MSE (*Minimun mean Square Error*) *block matching* en el sensor PX4FLOW.

[Zenkin et al., 2020] presentan la simulación de un UAV para el monitoreo de tareas usando el sensor PX4FLOW que se utiliza para detectar objetos.

La Tabla 1.2 muestra el resumen de los algoritmos de flujo óptico usados en la estimación de posición. Los algoritmos de visión dependen de las cámaras de vídeo y procesadores de datos. En los sensores de flujo óptico se utilizan cámaras de vídeo, procesadores de datos y algoritmos que requieren de recursos comunicacionales bajos. El área de investigación de los algoritmos de visión es amplia para la estimación de posición de los vehículos aéreos.

Tabla 1.2: Variantes de algoritmos de visión para sensores de flujo óptico.

| Artículo | Algoritmo | Sensor | Sistema aplicado | Comentarios |
|--------------------------|-------------------------|--------------------|------------------|--------------|
| [Honegger et al., 2013] | SAD | PX4FLOW | UAV | Experimental |
| [Sun et al., 2013] | | Cámara de vídeo | UAV | Experimental |
| [Debnath et al., 2017] | | PX4FLOW | UAV | Experimental |
| [Min et al., 2017] | MSE | PX4FLOW | UAV | Experimental |
| [Vargas and Kurka, 2015] | SURF | Cámara de vídeo | No menciona | Experimental |
| [Sanahuja et al., 2011] | Interpolación de imagen | Cámara de vídeo | Robot móvil | Experimental |
| [Baby and Ahamed, 2014] | LK | Cámara de vídeo | No menciona | Experimental |
| [Sugiki et al., 2015] | | Imágenes guardadas | No menciona | |
| [Zhang et al., 2016] | | Cámara de vídeo | UAV | |

Nota. *Sum of Absolute differences* (SAD), *Minimun mean Square Error* (MSE), *Speeded-UP Robust Features* (SURF), Lucas-Kanade (LK) y Horn-Schunck (HS).

Estas secciones han presentado sensores de sistemas de navegación, así como sensores de flujo óptico y sus algoritmos de visión para la estimación de posición en vehículos aéreos. Las siguientes secciones presentan la búsqueda bibliográfica de algoritmos predictores-correctores para el filtrado y la fusión ⁷ de sensores de navegación.

1.6.2. Métodos para el filtrado y fusión de sensores

Los algoritmos para la fusión de sensores se basan principalmente en los filtros de Kalman como se muestran a continuación.

[Gao et al., 1993] realizan la comparación y el análisis de tres arquitecturas de fusión de datos: centralizado, descentralizado y *federated*, usando filtros de Kalman. Los autores presentan resultados de la implementación de estas arquitecturas utilizando ejemplos numéricos, en simulación y experimental. Los resultados muestran que el filtro *federated*-centralizado presenta ventajas ante situaciones de fallas.

[Sukkarieh et al., 1999] desarrollan un sistema de navegación INS/GPS para usarlo en vehículos terrestres. El trabajo presenta estrategias para la detección de errores en el sensor inercial y el receptor GPS. Los resultados del sistema de navegación INS/GPS se presentan en simulación.

[Gao y Harris, 2002] presentan algoritmos de fusión de datos basados en filtros de Kalman, con métodos que combinan 1) el vector de estados y 2) las mediciones de los sistemas dinámicos. Además, proponen

⁷Palabra referida a la combinación de varias señales de sensores.

dos algoritmos de fusión de sensores. El análisis matemático y la evaluación de los algoritmos de fusión de datos se implementan en simulación.

[Lee, 2003] presenta los algoritmos FKF (*Federated Kalman Filter*) y CKF (*Cubature Kalman Filter*) implementados en el sistema de navegación INS/GPS. Estos dos algoritmos configuran el aislamiento de sensores ante situaciones de fallas.

[Caron et al., 2006] proponen un algoritmo basado en filtro de Kalman y lógica difusa para el sistema de navegación GPS/IMU ante errores de posicionamiento del GPS. La lógica difusa determina la estimación dependiendo de la calidad de la señal GPS, esto bajo escenarios de simulación.

[Gao et al., 2009] presentan un método para la fusión de datos del sistema de navegación INS/GPS/SAR (SAR, *Synthetic Aperture Radar*) que usa la arquitectura de fusión de datos descentralizada con una fusión de datos global óptima para mejorar la exactitud y la confiabilidad del sistema de navegación. El trabajo presenta resultados experimentales.

[Gao et al., 2010] adoptan el concepto de *estimación de ponderación aleatoria* para una metodología en la fusión óptima de múltiples datos. El trabajo presenta resultados de la comparación analítica y experimental.

[Bancroft y Lachapelle, 2011] desarrollan tres algoritmos de fusión de datos con las arquitecturas centralizada y descentralizada. Estos algoritmos utilizan el receptor GPS y varios sensores inerciales para mejorar la exactitud en la navegación peatonal.

[Sánchez et al., 2013] comparan dos algoritmos para la estimación de estados de sistemas dinámicos no lineales: el filtro de Kalman extendido y el filtro de partículas Kalman extendido. Estos dos filtros no lineales estiman los estados de señales de electrocardiogramas en simulación.

[Herrera, 2014] presenta una estrategia para la fusión de sensores instalados en ductos de hidrocarburos. Menciona y compara los métodos de Filtro de Kalman, de Bayes para datos simples, de Dempster-Shafer para datos simples y por promedio ponderado de confianza.

[Infante et al., 2014] proponen técnicas para filtrar señales de electrocardiogramas comparándolos con algoritmos de filtro de partículas genérico, filtro de partículas con remuestreo, filtro de Kalman *unscented* y filtro de partículas *unscented*.

[Huang et al., 2015] muestran mejoras de robustez del filtro de Kalman *unscented* para el seguimiento de objetos. Estas mejoras disminuyen errores en las mediciones de sistemas dinámicos, que se comprueban con los resultados obtenidos en simulación.

[Outamazirt et al., 2015] proponen el filtro no lineal SVSF (*Smooth Variable Structure Filter*) que realiza la fusión de las señales del receptor GPS y el sistema inercial para la estimación de posición y la velocidad de los UAV. Además, realizan la comparación del filtro SVSF contra el filtro de Kalman extendido.

[Zhang et al., 2016] presentan el filtro de Kalman dual lineal para la fusión de sensores: giroscopios, acelerómetros y magnetómetros con el fin de estimar la orientación del UAV en tiempo real.

[Feng et al., 2017] proponen un algoritmo de filtro de Kalman basado en cuaterniones para mejorar la orientación de vehículos móviles equipados con sensores inerciales. La ventaja del algoritmo propuesto se encuentra en la reducción del cálculo computacional en su implementación.

[Gao et al., 2017] proponen el algoritmo ARUKF (*Adaptive Robust Unscented Kalman Filter*) para la fusión de datos del sistema de navegación INS/GPS considerando incertidumbres paramétricas tanto

en sistemas dinámicos como en sus mediciones. El algoritmo propuesto es la combinación de los algoritmo AFUKF y del RUKF.

[Gao et al., 2018a] presentan la combinación del algoritmo AUKF con el principio de máxima verosimilitud (MLP, *Maximum Likelihood Principle*) para sistemas dinámicos con incertidumbres en ruido. Este algoritmo se implementa en el sistema de navegación INS/GPS en simulación y experimental.

[Gao et al., 2018b] proponen el algoritmo no lineal tipo AFUKF (*Adaptive Fading Unscented Kalman Filter*) para el sistema de navegación INS/GNSS⁸/CNS (GNSS, *Global Navigation Satellite System* y CNS, *Celestial Navigation System*). Este algoritmo presenta mejoras de adaptabilidad y de robustez en la estimación de estados de sistemas dinámicos. El trabajo presenta la comparación de resultados de los algoritmos FKF (*Federated Kalman Filter*), UKF-FKF (*Unscented Kalman Filter-based Federated Kalman Filter*), UKF- MODF (*Unscented Kalman Filter-based Multi-sensor Optimal Data Fusion*) y AFUKF- MODF (*Adaptive Fading Unscented Kalman Filter-based Multi-sensor Optimal Data Fusion*).

[Gao et al., 2018c] presentan una estrategia óptima para la fusión de datos en el sistema de navegación INS/GNSS/CNS, la cual usa una estructura de dos niveles para realizar la combinación de señales de sensores. El trabajo presenta resultados en simulación y experimental.

[Kolanowski et al., 2018] proponen una red neuronal para la fusión de datos de sensores inerciales en los UAV. Los resultados experimentales presentan las estimaciones de posición de los UAV con el entrenamiento de la red neuronal.

[Korayem et al., 2018] realizan la fusión de datos de sensores inerciales y encoders usando lógica difusa para la detección de vibraciones en sistemas mecánicos. Un filtro de Kalman realiza la fusión de datos de sensores en simulación y experimental.

[Kim et al., 2018] proponen un algoritmo robusto basado en filtro de Kalman y lógica difusa para la fusión sensores inerciales con las señales del receptor GPS en transportadores. El algoritmo detecta y analiza errores de posicionamiento GPS usando su número de satélites. La lógica difusa se usa para distinguir señales de satélites GPS durante pruebas experimentales.

[Jia et al., 2019] proponen un algoritmo basado en filtros de partículas para mejorar la exactitud y el consumo computacional del sistema de navegación MINS/VNS/GNS (*Microinertial Navigation System/Visual Navigation System/ Geomagnetic Navigation System*) en simulación.

[Damerius y Jeinsch, 2019] presentan el algoritmo SR-SSUKF (*Square-Root Spherical Simplex UKF*) para la fusión de datos de los sistemas de navegación de vehículos.

1.6.3. Filtros de Kalman

Esta sección presenta la revisión bibliográfica de los filtros de Kalman extendido y *unscented* para entender los problemas en los sistemas dinámicos no lineales.

Filtros de Kalman Extendido

Los filtros de Kalman extendido se implementan en diversos sistemas no lineales. Por ejemplo, en los trabajos de:

[Chien-Shu Hsieh, 2000] realiza la aplicación del algoritmo RTSKF (*Robust Two-Stage Kalman Filter*) a sistemas dinámicos con entradas desconocidas. Además, presenta la demostración teórica del filtro

⁸Es el nombre moderno del sistema de posicionamiento global.

mencionado, que se compara con filtros diferentes.

[Zhe Dong and Zheng You, 2006] desarrollan la demostración teórica del filtro llamado FHRKF (*Finite-Horizon Robust Kalman Filter*) para sistemas dinámicos con incertidumbre en sus covarianzas.

[Vemula et al., 2007] realizan la comparación de filtros de Kalman y filtros de partículas en simulación. Los resultados de implementación muestran que los filtros de partículas superan a los filtros de Kalman.

[Xiong et al., 2008] proponen el algoritmo AREKF (*Adaptive Robust Extended Kalman Filter*) para adaptarse a perturbaciones externas. Los autores muestran la deducción matemática del filtro AREKF que posteriormente lo implementan en motores de inducción de dos fases y lo comparan con los algoritmos EKF, REK y AEKF (*Adaptive Extended Kalman Filter*). Los resultados muestran la superioridad del filtro propuesto contra los tres filtros de Kalman mencionados.

[Mammarella et al., 2008] realizan la fusión de sensores inerciales y visuales, y señales del receptor GSP usando el algoritmo EKF. Además, el análisis para la caracterización de las propiedades de ruido de los sensores se presentan en simulación.

[Seung et al., 2013] presentan el algoritmo DEKF (*Dual Extended Kalman Filter*) que lo aplican a dos tanques acoplados en simulación.

[Li et al., 2014] presentan el algoritmo ET-SREKF (*Error-Tolerant Switched Robust Extended Kalman Filter*) para trabajarlo en modo óptimo y robusto. Los resultados en simulación y experimental muestran que el algoritmo ET-SREKF presenta ventajas sobre los algoritmos EKF y REKF.

[Chen et al., 2014] comparan el algoritmo MREKF (*Multirate Extended Kalman Filter*) contra el algoritmo SREKF (*Single Rate Extended Kalman Filter*), que se implementan en baterías ion-litio para la estimación de estado de carga en simulación. El algoritmo MREKF realiza múltiples muestreos de sensores para mejorar su estimación.

[Jurado et al., 2015] proponen el algoritmo DMEKF (*Dual Modified Extended Kalman Filter*) para la estimación de estados y parámetros de los sistemas dinámicos no lineales, el cual consiste en dos filtros de Kalman extendido en paralelo. La implementación del algoritmo DMEKF se realiza en los UAV en simulación.

[Campestrini et al., 2016] presentan la comparación de dieciocho filtros de Kalman extendidos que estiman el estado de carga de baterías de ion-litio a diferentes temperaturas. Estos filtros no lineales son de tipo DAEKF (*Dual Adaptive Extended Kalman Filter*) y el DEKF (*Dual Extended Kalman Filter*), que se implementan experimentalmente.

[Jiang et al., 2017] proponen el algoritmo *Dual Time-Scale Extended Kalman Filter* para reducir su consumo computacional y facilitar su implementación.

[Wu et al., 2017] implementan el algoritmo DEKF en simuladores de vuelo de giradiscos para mejorar la exactitud de estimación de estados.

[Huang et al., 2018] proponen el algoritmo AEKF para la localización de los AUV (*Autonomous Underwater Vehicles*) mientras se realiza la estimación de propiedades de ruido de las mediciones en cada iteración del algoritmo.

La Tabla 1.3 presenta variantes de los filtros de Kalman extendido encontrados en la revisión bibliográfica. Además, se muestra el artículo, mejora, sistema dinámico, y tipo de implementación de estos filtros de Kalman para conocer sus características.

Las variantes de los filtros de Kalman extendido dependen de la aplicación de los sistemas dinámicos, es decir, en la estimación de estados, de parámetros, de propiedades de ruido, entre otros.

Tabla 1.3: Variantes del filtro de Kalman extendido.

| Artículo | Variante | Mejora | Sistema dinámico | Comentarios |
|---|--------------------|--|------------------------|--------------|
| [Campestrini et al., 2016]/ [Huang et al., 2018] | AEKF | Estimación de covarianzas. | Batería ion-litio/ UAV | Simulación |
| [Seung et al., 2013]/ [Wu et al., 2017] | DEKF | Estimación de parámetros y estados. | Tanques/ Giradiscos | Simulación |
| [Xiong et al., 2008] | AREKF y REKF | Robustez ante perturbaciones. | Motor de inducción | Simulación |
| [Ahmadian, 2014] | MEKF | Estimación de coordenadas polares. | Rodamiento | Simulación |
| [Jurado et al., 2015] | DMEKF | Exactitud en la linealización. | UAV | Simulación |
| [Chen et al., 2014] | Multirate-EKF | Múltiples muestreos en las mediciones. | Batería ion-litio | Simulación |
| [Jiang et al., 2017] | DTS-EKF | Facilidad en la implementación. | Máquina Diesel | Experimental |
| [Min et al., 2017] | SRKEF | Autoreconfigurable | Sistema de frecuencias | Simulación |
| [Zhao et al., 2017] | RIEKF | Respuesta en los transitorios. | Bus | Simulación |

Nota. *Adaptive Extended Kalman Filter* (AEKF), *Dual Extended Kalman Filter* (DEKF), *Adaptive Robust Extended Kalman Filter* (AREKF), *Robust Extended Kalman Filter* (REKF), *Modified Extended Kalman Filter* (MEKF), *Dual Modified Extended Kalman Filter* (DMEKF), *Self Recovering Extended Kalman Filter* (SREKF), *Robust Iterated Extended Kalman Filter* (RIEKF), *Dual Time-Scale Kalman Filter* (DTS-EKF).

La siguiente sección presenta una revisión general del filtro de Kalman *unscented*.

Filtros de Kalman *Unscented*

Esta sección presenta algunas variantes del filtro de Kalman *unscented* para la estimación de estados en sistemas dinámicos no lineales. Por ejemplo, en los trabajos de:

[Moon et al., 2016] implementan el algoritmo SRUKF (*Square-Root Unscented Kalman Filter*) para reducir su consumo computacional. La implementación del algoritmo en motores eléctricos síncronos muestra resultados en disminución del tiempo de computo del algoritmo SRUKF comparado con el algoritmo UKF.

[Guo et al., 2017] utilizan el algoritmo DAUKF (*Dual Adaptive Unscented Kalman Filter*) para estimar propiedades de ruido en cada iteración del algoritmo, que se implementa en baterías ion-litio con el fin de estimar parámetros y estado de carga.

[Xiong y Mu, 2017] usan el algoritmo DUKF (*Dual Unscented Kalman Filter*) para la estimación de estados y parámetros de baterías de litio.

[Chernikova, 2018] presenta el algoritmo AUKF (*Adaptive Unscented Kalman Filter*) para estimar ruido blanco gaussiano en las mediciones de los sistemas dinámicos no lineales, el cual se implementa en ecuaciones matemáticas.

[Jiang et al., 2019] proponen un algoritmo basado en el filtro de Kalman *unscented* para reducir la carga computacional y garantizar su rendimiento en la implementación de sistemas de reducción catalíticos selectivos.

[Ullah et al., 2020] realizan comparaciones del filtro de Kalman *unscented* y filtro de partículas para la localización por medio de redes de sensores inalámbricas. Analizan la robustez de los algoritmos en

varias pruebas de simulación.

Las variaciones de los filtros de Kalman *unscented* se enfocan en la propagación de puntos sigma, lo que implica diferencias entre estos algoritmos. Además, estos filtros dependen de los problema a resolver en los sistemas dinámicos no lineales al igual que en los filtros de Kalman lineal y extendido.

La Tabla 1.4 muestra las variantes del filtro de Kalman *unscented* que varían dependiendo de la aplicación en sistemas dinámicos al igual que en los filtros de Kalman extendido.

Tabla 1.4: Variantes del filtro de Kalman *unscented*.

| Artículo | Variante | Mejora | Sistema aplicado | Comentarios |
|----------------------|----------|--|---------------------------|--------------|
| [Moon et al., 2016] | SRUKF | Estimación de covarianzas. | Motor eléctrico síncrono. | Experimental |
| [Guo et al., 2017] | DAUKF | Estimación de parámetros, estados y covarianzas. | Batería ion-litio | Experimental |
| [Xiong y Mu, 2017] | DUKF | Estimación de covarianzas. | Batería ion-litio | Experimental |
| [Chemikova, 2018] | AUKF | Estimación de covarianzas. | Ecuación matemática. | Simulación |
| [Jiang et al., 2019] | DTS-UKF | Reducción de consumo computacional. | Máquina Diesel | Experimental |

Nota. *Square-Root Unscented Kalman Filter* (SRUKF), *Dual Adaptive Unscented Kalman Filter* (DAUKF), *Dual Unscented Kalman Filter* (DUKF), *Adaptive Unscented Kalman Filter* (AUKF), *Dual Time Scale Unscented Kalman Filter* (DTS-UKF).

Análisis y clasificación de los algoritmos

A partir de información de la revisión bibliográfica, esta sección realiza el análisis y clasificación de:

1. Los filtros de Kalman en la Tabla 1.5.
2. Los algoritmos de fusión de datos en la Tabla 1.6.
3. Los algoritmos de fusión de datos usando filtros de Kalman en la Tabla 1.7.
4. Las arquitecturas de fusión de datos en los sistemas de navegación INS/GPS e IMU/GPS en la Tabla 1.8.
5. Los sistemas de posicionamiento en los UAV en la Tabla 1.9.

La Tabla 1.5 muestra la clasificación de los filtros de Kalman lineales KF, no lineales EKF y UKF, para su aplicación en sistemas dinámicos bajo condiciones de incertidumbre.

En los sistemas dinámicos que consideran perturbaciones se usan los filtros de Kalman robustos REKF y RUKF; en los que consideran propiedades variantes de ruidos en los sistemas dinámicos y sus mediciones se usan los filtros de Kalman adaptables AEKF y AUKF; en los que consideran perturbaciones en los sistemas dinámicos y sus propiedades variantes de los ruidos en sus mediciones se usan los algoritmos AREKF y ARUKF; y para la estimación de estados y parámetros de los sistemas dinámicos se usan los filtros de Kalman Dual DEKF y DUKF.

Tabla 1.5: Clasificación de filtros de Kalman.

| | | | |
|-------------------|---|-------|--|
| Filtros de Kalman | } | KF { | FKF [Gao et al., 1993], [Lee, 2003], [Bancroft y Lachapelle, 2011] CKF [Gan and Harris, 2001], [Gao et al., 1993], [Lee, 2003], [Huang et al., 2015], [Bancroft y Lachapelle, 2011] |
| | | EKF { | normal [Sánchez et al., 2013] AEKF [Campestrini et al., 2016], [Huang et al., 2018] REKF [Xiong et al., 2008] AREKF [Xiong et al., 2008] DEKF [Wu et al., 2017], [Seung et al., 2013] MEKF [Ahmadian, 2014] DMEKF [Jurado et al., 2015] IMEKF [Goppert et al., 2017] |
| | | UKF { | normal [Gao et al., 2018c], [Huang et al., 2015] AUKF [Chernikova, 2018], [Gao et al., 2018a] AFUKF [Gao et al., 2017], [Gao et al., 2018b] RUKF [Gao et al., 2017] ARUKF [Gao et al., 2017] DUKF [Xiong y Mu, 2017] DAUKF [Guo et al., 2017] SRUKF [Moon et al., 2016], [Damerius y Jeansch, 2019] DTS-UKF [Jiang et al., 2019] |

La Tabla 1.6 muestra los algoritmos para realizar la fusión de sensores, los cuales se enfocan en filtros de Kalman. Los filtros de Kalman son los algoritmos por *default* para realizar la fusión de sensores desde los últimos veinte años, sin embargo, los filtros de partículas también son de interés para usarse como fusionadores de sensores, así como cualquier algoritmo predictor-corrector.

Estos algoritmos predictores-correctores necesitan de las estimaciones de estados y de matrices de covarianza como se muestra en la sección 2.

Además de los algoritmos predictores-correctores, las redes neuronales se utilizan para llevar a cabo la fusión de sensores, los cuales abren nuevas brechas para la investigación científica.

Tabla 1.6: Algoritmos para fusión de sensores.

| | | | |
|----------------------------|---|---------|---|
| Algoritmos de fusión datos | } | FK { | [Racero et al., 2014], [Li et al., 2016], [de Souza et al., 2018], [Huang et al., 2018], [Gao et al., 2018b], [Outamazirt et al., 2015], [Zhang et al., 2016], [Feng et al., 2017], [Gao et al., 1993] [Gao y Harris, 2002], [Gao et al., 2009], [Gao et al., 2017], [Gao et al., 2018a], [Gao et al., 2018c], [Caron et al., 2006], [Lee, 2003], [Huang et al., 2015], ... |
| | | FP { | [Jia et al., 2019] |
| | | RN { | [Kolanowski et al., 2018] |
| | | Otros { | [Outamazirt et al., 2015], [Gao et al., 2010] |

Anteriormente se menciona que cualquier filtro de Kalman puede ser utilizado como fusionador de datos de sensores, esto se muestra en la Tabla 1.7. Desde los algoritmos KF, EKF y UKF hasta sus variantes de cada uno de ellos se usan como fusionadores de datos que dependen de los sistemas dinámicos y de sus problemas a resolver.

Por otra parte, la palabra *fusión de datos* es intercambiable con la palabra *integración de sensores*, pero esta última palabra hace referencia a diferentes sensores para realizar mejores estimaciones de variables de interés.

Tabla 1.7: Fusión de datos usando filtros de Kalman.

| | | | |
|--|---|------------|---|
| Fusión de datos con algoritmos KF | { | KF | <ul style="list-style-type: none"> normal [Racero et al., 2014], [de Souza et al., 2018], [Huang et al., 2018], [Gao et al., 2018b], [Gao y Harris, 2002] [Caron et al., 2006], [Korayem et al., 2018], [Kim et al., 2018] FKF [Gao et al., 1993], [Lee, 2003], [Bancroft y Lachapelle, 2011] CKF [Gao et al., 1993], [Lee, 2003], [Huang et al., 2015], [Bancroft y Lachapelle, 2011] DKF [Zhang et al., 2016], [Gao et al., 1993], [Gao et al., 2009], [Huang et al., 2015] otro [Feng et al., 2017] |
| | | EKF | <ul style="list-style-type: none"> normal [Li et al., 2016], [Outamazirt et al., 2015] [Camestrini et al., 2016], [Huang et al., 2018] |
| | | UKF | <ul style="list-style-type: none"> normal [Gao et al., 2018c], [Huang et al., 2015] AUKF [Gao et al., 2018a] AFUKF [Gao et al., 2017], [Gao et al., 2018b] RUUKF [Gao et al., 2017] ARUKF [Gao et al., 2017] SRUKF [Damerius y Jeinsch, 2019] |

Las Tablas 1.8 y 1.9 muestran las arquitecturas de la fusión de sensores en los sistemas de navegación INS/GPS, que utilizan las arquitecturas centralizada y descentralizada que específicamente se llaman *tightly Couple* y *loosely Couple* en estos sistemas de navegación. La arquitectura centralizada se utiliza para los sistemas dinámicos con números limitados de sensores mientras que la fusión de datos descentralizada se usa en los sistemas dinámicos con números ilimitados sensores.

Por otra parte, los sistemas de posicionamiento visuales en los vehículos autónomos son de interés como alternativas al sistema de posicionamiento global.

Tabla 1.8: Fusión de datos en sistemas de navegación INS/GPS.

| | | | |
|------------------------------------|---|---|--|
| Fusión de datos INS/GPS | { | Centralizado (Tightly Couple) | <ul style="list-style-type: none"> *[Racero et al., 2014], [Outamazirt et al., 2015] *[de Souza et al., 2018], [Huang et al., 2018], [Feng et al., 2017], [Zhang et al., 2016], [Gao et al., 2018a], [Caron et al., 2006], [Bancroft y Lachapelle, 2011], [Korayem et al., 2018] [Kim et al., 2018], [Damerius y Jeinsch, 2019] |
| | | Descentralizado (Loosely Couple) | <ul style="list-style-type: none"> [Gao et al., 2009], [Gao et al., 2017], [Gao et al., 2018b], [Gao et al., 2018c], [Bancroft y Lachapelle, 2011] |

*Predicción (INS)-Corrección (GPS).

Tabla 1.9: Tipos de sistemas de posicionamiento en los UAV.

| | | | |
|--|---|------------------|--|
| Sistemas de posicionamiento | { | Globales | <ul style="list-style-type: none"> GPS [Racero et al., 2014], [Marantos et al., 2016], [Bancroft y Lachapelle, 2011] GNSS [Kharchenko et al., 2013] GSM [Luo et al., 2013] |
| | | Relativos | <ul style="list-style-type: none"> Visual [de Souza et al., 2018], [Goppert et al., 2017] Ultrasonido [Stojkoska et al., 2017] Laser [Hamnanaka, 2018] Radar [Gao et al., 2009] Celestial [Gao et al., 2018b], [Gao et al., 2018c] |

Nota. Los sensores inerciales se utilizan por defecto en la navegación de vehículos.

Bajo este análisis bibliográfico, la estrategia de estimación de posición propuesta se basa en filtros de Kalman *Unscented* para evitar errores de posicionamiento GPS usando valores de ponderación para la fusión de datos con funciones de membresía [Korayem et al., 2018] y [Caron et al., 2006]. Usando el modelo matemático como en [Goppert et al., 2017] y [Rhudy et al., 2011]. El sensor de flujo óptico como en [Honegger et al., 2013].

1.7. Organización del documento

El contenido de la información de este documento se organiza en seis capítulos.

El capítulo 1 introdujo el contexto de los vehículos aéreos no tripulados UAV y su problemática en la actualidad, así como los antecedentes que la originaron. Los objetivos, metas y justificación se fundamentaron con revisiones bibliográficas para este trabajo de investigación.

El capítulo 2 establece los conceptos matemáticos de algoritmos de Kalman para el filtraje y fusión de sensores.

El capítulo 3 presenta los principios de navegación en los vehículos aéreos no tripulados. Comenzando con sistemas de coordenadas y sus transformaciones. Posteriormente, se presentan los sensores de navegación para los vehículos aéreos no tripulados.

El capítulo 4 muestra la propuesta del sistema de navegación INS/GPS/OF para realizar la estimación de posición en zonas con pérdida de señal GPS.

El capítulo 5 realiza el análisis de resultados de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF bajo escenarios de simulación y de la implementación experimental en un prototipo.

El capítulo 6 concluye el trabajo de investigación con los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Filtros de Kalman

Este capítulo presenta algoritmos predictores-correctores que son filtros de Kalman para la reducción de ruido y estimación de variables de estados¹ para sistemas dinámicos lineales y no lineales, como se muestra en la Figura 2.1a. Los algoritmos de Kalman son equivalentes a una etapa de filtrado más una etapa de observación de estados² como se muestran en la Figura 2.1b, juntos para conseguir resultados óptimos en la estimación de estados de sistemas dinámicos.

La etapa de filtrado es capaz de disminuir el ruido en mediciones de sistemas dinámicos mientras que la etapa de observación estima variables no medibles en sistemas dinámicos. Esto son los filtros de Kalman, además de disminuir el ruido y estimar estados, estos algoritmos son capaces de estimar parámetros, fallas y la combinación de varias señales de sensores en sistemas dinámicos. El uso de filtros de Kalman dependen de su aplicación para solucionar problemas específicos.

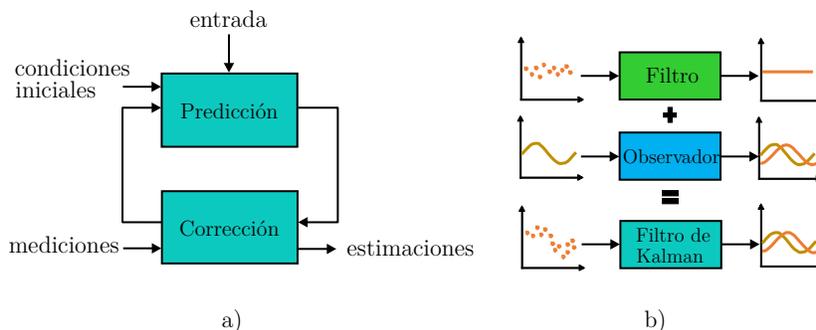


Figura 2.1: Algoritmo a) predictor-corrector y b) filtro de Kalman.

Las siguientes secciones describen la formulación matemática de los filtros de Kalman para la estimación de estados en sistemas dinámicos lineales y no lineales. Ejemplos de implementación de algoritmos de Kalman se programan en Matlab para utilizarlos en otros sistemas dinámicos.

Por otra parte, la presentación de las arquitecturas de fusión de sensores se realiza con algoritmos de Kalman.

¹Las variables de estado que normalmente tienen memoria, derivada diferencial, representan la evolución de los sistemas dinámicos. Los sistemas dinámicos son el conjunto de variables de estados y parámetros en forma de ecuaciones, modelo matemático, que se aproximan al comportamiento real de sistemas físicos.

²Los observadores de estados son las ecuaciones matemáticas para la sustitución y compensación de los sensores físicos.

2.1. Filtro de Kalman lineal

El filtro de Kalman (KF, *Kalman Filter*) [Kalman, 1960] es un algoritmo matemático recursivo³ que se usa para la atenuación de ruido y, al mismo tiempo, la estimación de variables de estado de los sistemas dinámicos lineales. Este filtro de Kalman es un observador en tiempo discreto para utilizarlo en aplicaciones de sistemas digitales.

Las ecuaciones 2.1 y 2.2 describen a los sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo (LTI, *Linear Time-Invariant*) y discretos. Además, estos sistemas dinámicos están sujetos a ruido blanco gaussiano que es la consideración principal de los filtros de Kalman.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (2.2)$$

Donde, $k \in \mathbb{R}$ es el tiempo discreto, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector de observaciones de los sistemas dinámicos; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de parámetros, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de control, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de observaciones de los sistemas dinámicos. Además, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de ruido en el sistema y $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector de ruido en las mediciones.

Los vectores de ruido \mathbf{w}_k y \mathbf{v}_k son de media cero y covarianza \mathbf{Q} y \mathbf{R} , por lo que se debe cumplir que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, es decir, una matriz simétrica definida positiva asociada con el ruido de los sistemas dinámicos, por lo tanto, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; y $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ asociada con el ruido en las mediciones de los sistemas dinámicos, por lo tanto, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Las matrices de ruido en los sistemas dinámicos y en sus mediciones se simplifican a matrices diagonales $\mathbf{Q} = \text{diag}[Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ \dots \ Q_n]$ y $\mathbf{R} = \text{diag}[R_1 \ R_2 \ R_3 \ \dots \ R_n]$ bajo la consideración de no correlación⁴ entre estos ruidos como se muestran en las ecuaciones 2.3-2.7.

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_i] = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_i] = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \begin{cases} \mathbf{0}, & i \neq j \\ \mathbf{Q}, & i = j \end{cases}, \quad (2.5)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T] = \begin{cases} \mathbf{0}, & i \neq j \\ \mathbf{R}, & i = j \end{cases}, \quad (2.6)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{0}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.7)$$

Donde, $\mathbb{E}[\cdot]$ es la esperanza matemática; $\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T$ es la correlación de ruido de los sistemas dinámicos; $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T$ es la correlación de ruido de las mediciones de los sistemas dinámicos; $\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j^T$ es la correlación del ruido de los sistemas dinámicos y de sus mediciones.

Las ecuaciones del filtro de Kalman [Simon, 2006] y [Haykin, 2001] que realizan la atenuación del ruido blanco gaussiano y la estimación de variables de estado de los sistemas dinámicos lineales se representan en la Tabla 2.1. En la que se observa que son dos pasos principales del filtro de Kalman: predicción y corrección, también llamados, estimación *a priori* y estimación *a posteriori*.

³El nombre se reduce a algoritmo de Kalman.

⁴Físicamente es complicado que el ruido de los sensores afecte al ruido del sistema dinámico. Por lo tanto, se consideran correlaciones ausentes entre ellos.

Tabla 2.1: Ecuaciones del filtro de Kalman.

Paso 0: condiciones iniciales ($k = 0$)

Media inicial $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0],$ (2.8)

Covarianza inicial $\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T].$ (2.9)

Inicia recursividad ($k=1,2,3,\dots$)

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k

Estimación *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k,$ (2.10)

Covarianza *a priori* $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}.$ (2.11)

Paso 2: corrección con la medición \mathbf{y}_k

Ganancia de Kalman $\mathcal{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1},$ (2.12)

Estados *a posteriori* $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-),$ (2.13)

Covarianza *a posteriori* $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^-.$ (2.14)

Paso 3: siguiente iteración ($k + 1$)

Nota. Estas ecuaciones presentan la notación matricial y vectorial diferente al original.

Donde, $\hat{\mathbf{x}}_k^- \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados estimado *a priori*, $\mathbf{P}_k^- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de covarianza de los estados *a priori* ⁵, $\mathcal{K}_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de la ganancia del filtro de Kalman, $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados estimado *a posteriori* ⁶, $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz la covarianza de los estados *a posteriori*. Además, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

2.1.1. Descripción del algoritmo del KF

Los pasos del algoritmo KF de las ecuaciones 2.8-2.14 son los siguientes:

Paso 0: condiciones iniciales ($k = 0$)

- Se inicia con el valor de las variables de estados estimados $\hat{\mathbf{x}}_0$ igual al sistema dinámico \mathbf{x}_0 .
- También se requiere el valor inicial de la covarianza \mathbf{P}_0 , lo cual se calcula con el error al cuadrado⁷ de la diferencia de las variables de estado del sistema dinámico y el estimado por el algoritmo KF, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$. Por lo que la matriz $\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^T]$ representa la covarianza de los estados del sistema dinámico. En estas dos condiciones iniciales es posible establecer otros valores iniciales diferentes a los propuestos por el algoritmo KF, que dependen del tipo de sistema dinámico y de sus valores de las propiedades del ruido tanto en el sistema dinámico como en sus mediciones.

Paso 1 y 2: inicia recursividad ($k = 1, 2, 3, \dots$)

- La estimación de los estados *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ se realiza con la entrada \mathbf{u} y con las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} del sistema dinámico discretizado analítica o numéricamente, en este último ver la sección D. Además, se requiere de los estados estimados de la iteración anterior del algoritmo KF, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. En términos estadísticos, la estimación de los estados significa la obtención de la media proyectada.
- La estimación *a priori* de la matriz de covarianza \mathbf{P}_k^- es función de la matriz \mathbf{A} del sistema dinámico discretizado y de la matriz \mathbf{P}_{k-1} . La agregación de la covarianza \mathbf{Q} se debe a la

⁵ *a priori* significa antes de realizar la corrección.

⁶ *a posteriori* significa a partir de realizar la corrección.

⁷ El cuadrado de la matriz A es igual a la misma matriz multiplicado por su transpuesta, es decir, AA^T .

consideración de ruido blanco gaussiano en el sistema dinámico que físicamente representa a las imperfecciones del sistema dinámico.

- La ganancia de Kalman \mathcal{K}_k se calcula en función de la matriz \mathbf{P}_k^- , la matriz \mathbf{C} y la matriz \mathbf{R} . Donde la matriz \mathbf{R} se debe a la consideración de ruido blanco gaussiano en la mediciones del sistema dinámico que físicamente representa a las imperfecciones de los sensores implementados, siendo $\mathbf{Q} \ll \mathbf{R}$ porque se considera la perfección en el sistema dinámico y la baja calidad de los sensores implementados para realizar las mediciones. Esta ganancia de Kalman minimiza el error $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-$ el cual también es llamado innovación o residuo.
- Los estados estimados *a posteriori* $\hat{\mathbf{x}}_k$ corrigen a la predicción $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ por medio de la medición \mathbf{y}_k y mediante la innovación $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-$ usando la ganancia \mathcal{K}_k .
- Por último, se actualiza la matriz \mathbf{P}_k considerando la ganancia de Kalman y la matriz de covarianza de los estados *a priori* para usarse en la siguiente iteración del algoritmo.

La siguiente sección muestra el ejemplo de la implementación del algoritmo KF a un péndulo simple.

2.1.2. Ejemplo de la implementación del algoritmo KF

La consideración del péndulo simple lineal del Anexo A con la masa $m = 5 \text{ kg}$, longitud $l = 10 \text{ m}$ y la aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ se usan en este ejemplo. Además, se asume que el péndulo es un sistema dinámico conservativo, en otras palabras, no hay pérdida de energía⁸.

Las ecuaciones en tiempo continuo 2.15 y 2.16 del péndulo simple se discretizan numéricamente usando el método de Euler⁹ con el paso de integración $dt = 0.0001$ y el tiempo de muestreo de las observaciones $T = 0.001$. El estado $x_1 = \theta$ es la posición angular y $x_2 = \dot{\theta}$ es la velocidad angular del péndulo. El par de entrada $u = 0$; y las condiciones iniciales de los estados del péndulo son $\mathbf{x}_0 = [\pi/18 \ 0.01]^T$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{g/l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v_1. \quad (2.16)$$

El sistema de la ecuación 2.15 está sujeto a ruido blanco gaussiano \mathbf{w}_k en sus dos estados, con propiedades de media cero y de covarianza \mathbf{Q} como lo muestra la ecuación 2.17.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 25e^{-9} & 0 \\ 0 & 25e^{-9} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

La medición de la ecuación 2.16 presenta ruido blanco gaussiano v_k de media cero y covarianza¹⁰ $R = 2e^{-4}$, que representa a un sensor de posición instalado en el péndulo.

La implementación del algoritmo KF de las ecuaciones de la tabla 2.1 considera condiciones iniciales en el vector de estados estimados $\hat{\mathbf{x}}_0 = [\pi/16 \ 0.01]^T$. Además, el paso de integración de este filtro es igual al tiempo de muestreo de las observaciones, $dt = T$. El código de esta implementación se encuentra en el Anexo F.

La Figura 2.2 muestra el comportamiento de la posición angular θ con ruido blanco gaussiano y la posición angular estimada $\hat{\theta}$ obtenida con el filtro de Kalman lineal. El estado $\hat{\theta}$ es la estimación sin ruido blanco gaussiano, mostrando que el filtro de Kalman es un atenuador de ruido en las mediciones de sistemas dinámicos.

⁸El péndulo es un sistema dinámico ideal para fines ilustrativos.

⁹Ver la sección D.

¹⁰También se define como $\mathcal{N}(0, R)$.

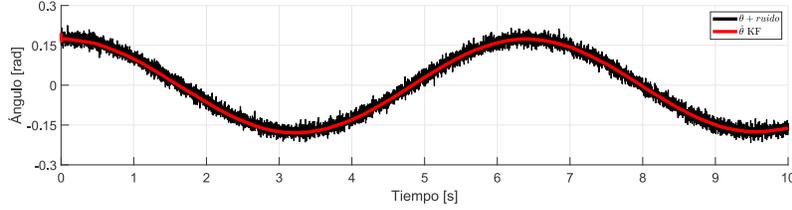


Figura 2.2: Filtro de Kalman implementado en el péndulo simple.

En este ejemplo el péndulo es un sistema dinámico lineal, por lo que usan filtros de Kalman lineales, sin embargo, para sistemas dinámicos no lineales se usan filtros de Kalman no lineales los cuales se presentan en las siguientes secciones.

2.2. Filtro de Kalman extendido

El filtro de Kalman extendido (EKF, *Extended Kalman Filter*) se usa en sistemas dinámicos no lineales para trabajarlos en varios puntos de equilibrio¹¹. La consideración de varios puntos de equilibrio presenta ventajas en estimaciones de variables de estado a diferencia de la consideración de un punto de equilibrio en el filtro de Kalman lineal. Remarcando que todos los sistemas dinámicos lineales se encuentran linealizados alrededor de un punto de equilibrio para reducir la complejidad analítica.

La Figura 2.3 muestra las respuestas de un sistema dinámico lineal y no lineal considerado puntos de equilibrio. Ambas respuestas coinciden cuando trabajan alrededor del mismo punto de equilibrio, pero discrepan cuando se alejan de él.

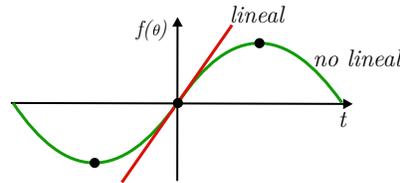


Figura 2.3: Respuestas de un sistema dinámico lineal y no lineal.

Las ecuaciones 2.18 y 2.19 representan a los sistemas dinámicos no lineales en tiempo discreto sujetos a ruido blanco gaussiano aditivo.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2.19)$$

Donde, $k \in \mathbb{R}$ es el tiempo discreto, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas y $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector de observaciones¹² de los sistemas dinámicos; $\mathbf{f}(\cdot)$ y $\mathbf{h}(\cdot)$ son funciones no lineales de los sistemas dinámicos y de sus observaciones. Además, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de ruido de los sistemas dinámicos y $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector de ruido de las observaciones de los sistemas dinámicos.

¹¹En los sistemas dinámicos no lineales existen varios puntos de equilibrio, mientras que en los sistemas dinámicos lineales existe solo un punto de equilibrio. Estos puntos son los valores de estados de los sistemas dinámicos en estado estable, donde sus derivadas diferenciales son iguales a cero. Estos puntos de equilibrio son estables o inestables [Khalil, 2012].

¹²Observaciones o también llamado mediciones.

El algoritmo de Kalman requiere el cálculo de las matrices jacobinas \mathbf{A}_k y \mathbf{H}_k de los sistemas dinámicos no lineales para su linealización considerando varios puntos de operación en cada iteración del algoritmo de Kalman.

La Tabla 2.2 muestra las ecuaciones del filtro de Kalman Extendido para la estimación de variables de estado [Haykin, 2001] y [Simon, 2006].

Tabla 2.2: Ecuaciones del filtro de Kalman extendido.

| | | |
|---------------------------------|--|--------|
| Fuera de línea | | |
| Matriz jacobiana de los estados | $\mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right _{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}},$ | (2.20) |

| | | |
|---------------------------------------|--|--------|
| Matriz jacobiana de las observaciones | $\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right _{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-}.$ | (2.21) |
|---------------------------------------|--|--------|

Paso 0: condiciones iniciales ($k = 0$)

| | | |
|---------------|--|--------|
| Media inicial | $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0],$ | (2.22) |
|---------------|--|--------|

| | | |
|--------------------|--|--------|
| Covarianza inicial | $\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T].$ | (2.23) |
|--------------------|--|--------|

Inicia recursividad ($k = 1, 2, 3, \dots$)

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k

| | | |
|----------------------------|--|--------|
| Estimación <i>a priori</i> | $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k),$ | (2.24) |
|----------------------------|--|--------|

| | | |
|----------------------------|---|--------|
| Covarianza <i>a priori</i> | $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}.$ | (2.25) |
|----------------------------|---|--------|

Paso 2: corrección con la medición \mathbf{y}_k

| | | |
|--------------------|---|--------|
| Ganancia de Kalman | $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R} \right)^{-1},$ | (2.26) |
|--------------------|---|--------|

| | | |
|-----------------------------|---|--------|
| Estados <i>a posteriori</i> | $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \hat{\mathbf{u}}_k)),$ | (2.27) |
|-----------------------------|---|--------|

| | | |
|--------------------------------|---|--------|
| Covarianza <i>a posteriori</i> | $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-.$ | (2.28) |
|--------------------------------|---|--------|

Paso 3: siguiente iteración ($k + 1$)

Nota. Este filtro de Kalman extendido se limita a sistemas dinámicos no lineales con ruido gaussiano blanco *aditivo*, sin embargo, hay variantes de estos filtros para sistemas dinámicos de la forma $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$ y en sus mediciones $\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$ donde en ambos casos el ruido blanco gaussiano es *no aditivo*.

2.2.1. Descripción del algoritmo EKF

El algoritmo EKF funciona de forma similar al algoritmo KF salvo a las consideraciones de las matrices jacobianas. Los pasos del algoritmo EKF para realizar la estimación de estados en los sistemas dinámicos no lineales son los siguientes:

Fuera de línea

- Las matrices jacobianas \mathbf{A}_k y \mathbf{H}_k se obtienen analíticamente fuera de línea y, posteriormente, evaluadas en cada iteración del algoritmo de Kalman.

Paso 0: condiciones iniciales ($k = 0$)

- Se establece el valor inicial de las variables de estados estimados, $\hat{\mathbf{x}}_0$.
- Además, se requiere el valor inicial de la matriz \mathbf{P}_0 el cual representa la covarianza de los estados.

Paso 2 y 3: inicia recursividad ($k = 1, 2, 3, \dots$)

- La estimación de los estados *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ se realiza al discretizar numéricamente el sistema dinámico no lineal $\mathbf{f}(\cdot)$, ver la sección D.
- La estimación *a priori* de la matriz de covarianza \mathbf{P}_k^- es función de la matriz jacobiana \mathbf{A}_k y de la matriz $\hat{\mathbf{P}}_{k-1}$. En donde, la matriz \mathbf{Q} se debe a la consideración de ruido blanco gaussiano aditivo en los sistemas dinámicos.
- La ganancia de Kalman \mathcal{K}_k se calcula en función de la matriz $\hat{\mathbf{P}}_k^-$, la matriz Jacobiana \mathbf{H}_k y la matriz \mathbf{R} . Es común que en la mayoría de los sistemas dinámicos sus mediciones sean lineales por lo que la matriz \mathbf{H}_k es constante.
- Los estados estimados *a posteriori* $\hat{\mathbf{x}}_k$ se obtienen de las predicciones $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ corregidas con la medición \mathbf{y}_k mediante la innovación $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \hat{\mathbf{u}}_k)$ y usando la ganancia \mathcal{K}_k .
- Por último, se actualiza la matriz \mathbf{P}_k para utilizarse en la siguiente iteración del algoritmo.

El ejemplo de la aplicación del algoritmo EKF al péndulo simple no lineal se muestra en la siguiente sección.

2.2.2. Ejemplo de la implementación del algoritmo EKF

La consideración del péndulo simple no lineal del Anexo A con la masa $m = 5 \text{ kg}$, longitud $l = 10 \text{ m}$ y la aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ se usan en este ejemplo para mostrar la estimación de estados con el filtro de Kalman extendido. Además, se considera que el péndulo es un sistema dinámico conservativo.

Las ecuaciones 2.29 y 2.30 del péndulo simple en tiempo continuo se discretizan numéricamente usando el método Euler¹³ con el paso de integración $dt = 0.0001$ y el tiempo de muestreo de las observaciones de $T = 0.001$. El estado $x_1 = \theta$ es la posición angular y el estado $x_2 = \dot{\theta}$ es la velocidad angular del péndulo. El par de entrada es $u = 0$; las condiciones iniciales de los estados del péndulo son $\mathbf{x}_0 = [\pi/2 \ 0.01]^T$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$y = x_1 + v_1. \quad (2.30)$$

El sistema dinámico de la ecuación 2.29 está sujeto a ruido blanco gaussiano \mathbf{w}_k de media cero y covarianza \mathbf{Q} de la ecuación 2.31.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 25e^{-9} & 0 \\ 0 & 25e^{-9} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

La medición de la ecuación 2.30 presenta ruido blanco gaussiano v_k de media cero y covarianza $R = 2e^{-4}$, físicamente representa a un sensor de posición angular¹⁴.

Las ecuaciones del algoritmo EKF se discretizan con el paso de integración igual al tiempo de muestreo $dt = T$. Las condiciones iniciales del algoritmo EKF son $\hat{\mathbf{x}}_0 = [\pi/16 \ 0]^T$. El código del algoritmo EKF se muestra en el Anexo F.

Además, el algoritmo KF se implementa en el péndulo no lineal con las mismas condiciones del algoritmo de EKF para observar las diferencias entre ambos algoritmos. Estos filtros utilizan la matriz de covarianza inicial de la ecuación 2.32.

¹³Ver la sección D.

¹⁴Es un sensor de baja calidad que presenta demasiado ruido en las mediciones, por ejemplo, un potenciómetro.

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1e^6 & 0 \\ 0 & 1e^6 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Los valores grandes de \mathbf{P}_0 garantizan la convergencia rápida del algoritmo KF, si embargo, esta matriz se debe de calcular de acuerdo a la Tabla 2.2.

La Figura 2.4 muestra la posición angular θ sujeto a ruido blanco gaussiano con la posición angular estimada $\hat{\theta}$ de los algoritmos KF y EKF. La estimación del algoritmo KF presenta una discrepancia mayor que la estimación del algoritmo EKF con respecto a la medición con ruido, es decir, las estimaciones del algoritmo EKF se aproximan más a las respuestas del modelo dinámico simulado.

Por otra parte, mientras el algoritmo KF linealiza el sistema dinámico una sola vez, el algoritmo EKF lo linealiza varias veces durante las iteraciones del algoritmo. Aquí es donde la mayoría de los observadores de estados no lineales linealizan el sistema dinámico para simplificar su complejidad analítica. La clave es la linealización de los sistemas dinámicos en línea para obtener mejores estimaciones sin aumentar la complejidad analítica.

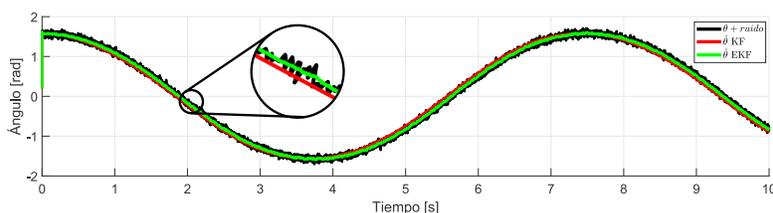


Figura 2.4: Filtro de Kalman Extendido implementado en el péndulo simple.

En resumen, el filtro de Kalman extendido linealiza analíticamente los sistemas dinámicos usando el método de linealización de Taylor de primer orden. Sin embargo, otra forma de linealizar los sistemas dinámicos es por medio de la linealización estadística llamada transformada *unscented* que es usada por el filtro de Kalman *Unscented*.

2.3. Filtro de Kalman *unscented*

El filtro de Kalman *Unscented* (UKF, *Unscented Kalman Filter*) [Julier and Uhlmann,] fue desarrollado como alternativa al algoritmo EKF. El algoritmo UKF reduce los errores de la linealización al emplear una linealización estadística, el cual tiene ventajas de precisión y consumo computacional sobre el algoritmo EKF [Shen et al., 2014].

Las ecuaciones 2.33 y 2.34 representan a los sistemas dinámicos no lineales sujetos a ruido blanco gaussiano aditivo.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2.34)$$

El algoritmo UKF utiliza la transformación *Unscented* (UT, *Unscented Transformation*) para linealizar sistemas dinámicos propagándoles varios puntos llamados *puntos sigma*. Los puntos sigma parametrizan la media y la covarianza de los sistemas dinámicos no lineales para obtener distribuciones de probabilidad [Julier and Uhlmann, 2004].

La transformación *unscented* es equivalente a la linealización analítica de Taylor de segundo orden y tiene la ventaja de evitar los cálculos de las matrices jacobianas en la linealización de sistemas dinámicos. Sin embargo, el número de operaciones matemáticas aumenta con el número de estados de los sistemas dinámicos y de los puntos sigma de la transformada *unscented*.

Las ecuaciones de la transformada *unscented* para calcular los puntos sigma del algoritmo UKF se presentan en la Tabla 2.3 [Brown, 2012] y [Haykin, 2001].

Tabla 2.3: Ecuaciones de la transformada *unscented* para calcular puntos sigma.

$$\mathcal{X}_0 = \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{X}_i = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\sqrt{\mathbf{P}_x})_i, \quad i = 1, \dots, n., \quad (2.36)$$

$$\mathcal{X}_i = \bar{\mathbf{x}} - \gamma(\sqrt{\mathbf{P}_x})_{i-n}, \quad i = n + 1, \dots, 2n., \quad (2.37)$$

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda}, \quad (2.38)$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad (2.39)$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n., \quad (2.40)$$

$$\gamma = \sqrt{n + \lambda}, \quad (2.41)$$

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n. \quad (2.42)$$

Donde, $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times (2n+1)}$ es la matriz de los puntos sigma de la transformada *unscented*; $W_i \in \mathbb{R}$ son los valores de ponderación de los puntos sigma en la media m y en la covarianza c ; $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro de escalamiento, $\alpha \in \mathbb{R}$ son parámetros de escalonamiento que determinan la anchura de los puntos sigma alrededor de la media; $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro que depende del conocimiento de la distribución gaussiana; $\kappa \in \mathbb{R}$ es un factor de escalamiento. Los valores por defecto de estos parámetros de acuerdo a [Julier and Uhlmann,] son $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\kappa = 0$.

Por otra parte, $(\sqrt{\mathbf{P}_x})_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la i -ésima columna de la raíz cuadrada de la matriz \mathbf{P}_x , que se resuelve con la factorización de Cholesky.

La transformada *unscented* hace que la solución de la estimación de estados en los sistemas dinámicos no sea única. Esto se debe a que los puntos sigma de la Tabla 2.3 se propagan de varias formas posibles con la configuración de los parámetros α , β y κ . Además, la cantidad de puntos sigma y su propagación en las mediciones de los sistemas dinámicos es modificable dependiendo del consumo computacional del algoritmo.

Las ecuaciones del UKF en la Tabla 2.4 muestran que en su paso de predicción la linealización se realiza con la transformada *unscented*, que es donde se aplica la linealización estadística. Mientras que en su paso de corrección permanece igual a los algoritmos KF y EKF. Esto significa que los métodos de linealización de los sistemas dinámicos solo afectan a los pasos de predicción en los filtros de Kalman.

Tabla 2.4: Ecuaciones del filtro de Kalman *unscented*.

| | |
|--|--|
| Fuera de línea | |
| Pesos de puntos sigma | $W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda}, \quad (2.43)$ |
| | $W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad (2.44)$ |
| | $W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (2.45)$ |
| Paso 0: cond. iniciales ($k = 0$) | |
| Media inicial | $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad (2.46)$ |
| Covarianza inicial | $\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]. \quad (2.47)$ |
| Inicia recur. ($k = 1, 2, 3, \dots$) | |
| Puntos sigma | $\mathcal{X}_{k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}]. \quad (2.48)$ |
| Paso 1: Predicción con \mathbf{u}_k | |
| Propagación de puntos sigma | $\mathcal{X}_{i,k}^- = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (2.49)$ |
| Estimación <i>a priori</i> | $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k}^-, \quad (2.50)$ |
| Covarianza <i>a priori</i> | $\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\mathcal{X}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-]^T + \mathbf{Q}, \quad (2.51)$ |
| Propagación de puntos sigma | $\mathcal{Y}_{i,k}^- = \mathbf{h}[\mathcal{X}_{i,k}^-], \quad (2.52)$ |
| Salida <i>a priori</i> | $\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{Y}_{i,k}^-. \quad (2.53)$ |
| Paso 2: Corrección con \mathbf{y}_k | |
| Covarianza de la salida | $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathcal{Y}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_k^-][\mathcal{Y}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_k^-]^T + \mathbf{R}, \quad (2.54)$ |
| Covarianza cruzada | $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\mathcal{Y}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_k^-]^T, \quad (2.55)$ |
| Ganancia de Kalman | $\mathcal{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k}^{-1}, \quad (2.56)$ |
| Estimación <i>a posteriori</i> | $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-), \quad (2.57)$ |
| Covarianza <i>a posteriori</i> | $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathcal{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k} \mathcal{K}_k^T. \quad (2.58)$ |
| Paso 3: siguiente iteración ($k+1$) | |

Donde, $\mathcal{X}_{i,k}^- \in \mathbb{R}^{n \times (2n+1)}$ es la matriz de la propagación de puntos sigmas a través de la función $\mathbf{f}(\cdot)$; $\hat{\mathbf{x}}_k^- \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la media estimada *a priori*; $\mathbf{P}_k^- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de covarianza de los estados *a priori*; $\mathcal{Y}_{i,k}^- \in \mathbb{R}^{p \times (2n+1)}$ es la matriz de la propagación de puntos sigma a través de la función $\mathbf{y}(\cdot)$; $\hat{\mathbf{y}}_k^- \in \mathbb{R}^p$ es el vector de observaciones de la media estimada; $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de covarianza de la salida; $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de covarianza cruzada de los estados y de la

salida; $\mathcal{K}_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de la ganancia del filtro de Kalman; $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados estimado *a posteriori*; $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de covarianza de los estados *a posteriori*.

2.3.1. Descripción del algoritmo UKF

Los pasos del algoritmo UKF para la estimación de estados de los sistemas dinámicos no lineales usando linealización estadística son los siguientes:

Fuera de línea

- Los pesos de los puntos sigma $W^{(m)}$ y $W^{(c)}$ se obtienen con los parámetros n , α , β y κ que consiguen soluciones diferentes en el algoritmo UKF.

Paso 0: condiciones iniciales ($k = 0$)

- Se establece el valor inicial de las variables de estados estimados, $\hat{\mathbf{x}}_0$.
- También se requiere el valor inicial de la matriz la covarianza de los estados, \mathbf{P}_0 . Este valor siempre debe ser definida positiva, $\mathbf{P}_0 > 0$, para evitar indeterminaciones en el cálculo de la factorización de Cholesky.

Paso 1 y 2: inicia recursividad ($k = 1, 2, 3, \dots$)

- La obtención de los puntos sigma \mathcal{X}_{k-1} se realiza con los estados $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ y la raíz cuadrada de la matriz de covarianza de los estados, $\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}$, que se obtiene con la factorización de Cholesky.
- El *i-ésimo* punto sigma $\mathcal{X}_{i,k-1}$ se propaga en la función $\mathbf{f}(\cdot)$ siendo una función discretizada con cualquier método numérico, esto para obtener *i-ésimas* funciones de $\mathcal{X}_{i,k-1}^-$. Ver la sección D para el método numérico.
- La estimación de los estados *a priori*, $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, se realiza ponderando la sumatoria de cada peso de la media, $W_i^{(m)}$, con cada punto propagado de $\mathcal{X}_{i,k-1}^-$ para obtener un vector de estimaciones.
- La estimación *a priori* de la matriz de covarianza \mathbf{P}_k^- se realiza ponderando cada peso de la covarianza $W_i^{(c)}$ con la desviación al cuadrado de la diferencia de $\mathcal{X}_{i,k-1}^-$ y $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, que representa la covarianza de los estados. Además, el sumando de la matriz \mathbf{Q} se debe a la consideración de ruido blanco gaussiano aditivo en los sistemas dinámicos. Para ruidos no aditivos se debe de considerar un vector de estados aumentado en el algoritmo UKF.
- En la función $\mathbf{h}(\cdot)$ se propaga los puntos sigma de $\mathcal{X}_{i,k-1}$ para conseguir $\mathcal{Y}_{i,k}^-$. Aquí es donde se reciclan los puntos sigma para evitar aumentar el consumo computacional. Sin embargo, es posible re-calcular nuevos puntos sigma para usarlos en la salida $\mathbf{h}(\cdot)$.
- La obtención de la salida *a priori*, $\hat{\mathbf{y}}_k^-$, se realiza ponderando la sumatoria de los pesos de la media $W_i^{(m)}$ con cada punto propagado en la salida $\mathcal{Y}_{i,k}^-$, esta elección se realiza dependiendo de las mediciones para la corrección.
- La covarianza de la salida $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k}$ se obtiene ponderando los pesos $W_i^{(c)}$ con la diferencia al cuadrado de los puntos propagados en la salida $\mathcal{Y}_{i,k}^-$ y la media de la salida *a priori* $\hat{\mathbf{y}}_k^-$. Además, el término \mathbf{R} se debe a la consideración de ruido blanco gaussiano aditivo en las observaciones de los sistemas dinámicos.
- La covarianza cruzada de los estados y de la salida $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k}$ se obtiene ponderando los pesos $W_i^{(c)}$ con la diferencia de los puntos propagados en $\mathcal{X}_{i,k}^-$ y su media $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ multiplicado por la diferencia al cuadrado de los puntos propagados en la salida $\mathcal{Y}_{i,k}^-$ y su media $\hat{\mathbf{y}}_k^-$.
- La ganancia de Kalman \mathcal{K}_k se calcula en función de las matrices $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k}$ y $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k}$. Esta parte es equivalente a los algoritmos KF y EKF cuando se realizan consideraciones lineales en las mediciones, como se muestra en el Anexo E.2.

- Los estados estimados a *posteriori*, $\hat{\mathbf{x}}_k$, se obtienen al corregirse la predicción $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ con la medición \mathbf{y}_k en la innovación $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-$ y usando la ganancia \mathbf{K}_k .
- Por último, se actualiza la matriz \mathbf{P}_k para usarse en la siguiente iteración del algoritmo UKF.

Las ecuaciones del algoritmo UKF son equivalentes a las ecuaciones de los algoritmos KF y EKF, solo que en el algoritmo UKF se realizan manipulaciones algebraicas para incorporar la linealización estadística a los sistemas dinámicos usando varios puntos sigma. Esto asume que la linealización de los algoritmos KF y EKF utilizan un punto sigma para propagarlo en los sistemas dinámicos.

La Figura 2.5 muestra la propagación de los puntos sigma de los algoritmos KF, EKF y UKF. Los algoritmos KF y EKF usan un punto sigma por cada estado para propagarlos en los sistemas dinámicos mientras que el algoritmo UKF utiliza varios puntos sigma por cada estado, por ejemplo, considerando que $n = 2$ estados del sistema dinámico, se obtiene $2n + 1 = 5$ puntos sigma para propagarlos en él. La cantidad de puntos sigma mejora la capacidad de filtrado en el algoritmo UKF para la estimación de estados en los sistemas dinámicos no lineales.

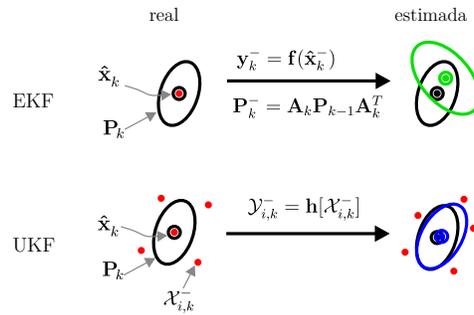


Figura 2.5: Puntos sigma de los filtros de Kalman.

Es importante resaltar que los filtros de Kalman requieren que la media y la covarianza de los sistemas dinámicos sean lineales para realizar la estimación de estados. Lo que implica las variaciones de los métodos de linealización en el paso de predicción de los algoritmos de Kalman, mientras que en el paso de corrección se presentan procedimientos similares. Dicho esto, el método de linealización afecta la exactitud de estimación de estados sin considerar las incertidumbres de los sistemas dinámicos y de los métodos numéricos de discretización. Sin embargo, estos errores presentes en los algoritmos de Kalman se compensan con la retroalimentación del paso de corrección.

2.3.2. Ejemplo de la implementación del algoritmo UKF

El péndulo simple no lineal usado en el algoritmo EKF se considera en este ejemplo para la implementación del algoritmo UKF en la estimación de estados. Con los parámetros de masa $m = 5 \text{ kg}$, de longitud $l = 10 \text{ m}$ y de aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Las ecuaciones 2.59 y 2.60 del péndulo simple en tiempo continuo se discretizan numéricamente usando el método de Euler con el paso de integración $dt = 0.0001$ y el tiempo de muestreo de las observaciones de $T = 0.001$. El estado $x_1 = \theta$ es la posición angular y $x_2 = \dot{\theta}$ es la velocidad angular del péndulo. El par de entrada es $u = 0$; y las condiciones iniciales de los estados son $\mathbf{x}_0 = [\pi/2 \ 0.01]^T$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

$$y = x_1 + v_1. \quad (2.60)$$

El sistema dinámico en la ecuación 2.59 está sujeto a ruido blanco gaussiano \mathbf{w}_k de media cero y covarianza \mathbf{Q} como en la ecuación 2.61.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 25e^{-9} & 0 \\ 0 & 25e^{-9} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

La medición 2.61 presenta ruido blanco gaussiano v_k de media cero y covarianza $R = 2e^{-4}$.

El algoritmo UKF se discretiza con el paso de integración igual al tiempo de muestreo $dt = T$. Las condiciones iniciales del algoritmo UKF son $\hat{\mathbf{x}}_0 = [\pi/16 \ 0]^T$. El Anexo F muestra el código del algoritmo UKF.

Además, el algoritmo EKF se implementa en el péndulo no lineal con las mismas condiciones iniciales que el algoritmo UKF para realizar una comparación.

La Figura 2.6 muestra el comportamiento de la estimación de la posición angular θ obtenida con los algoritmos EKF y UKF que visualmente presentan comportamientos similares. Es decir, los dos algoritmos reducen el ruido en las mediciones del péndulo no lineal, presentándose mayor filtraje en el algoritmo UKF. Las ventajas de cada algoritmo dependen de la complejidad no lineal de los sistemas dinámicos y de sus incertidumbres.

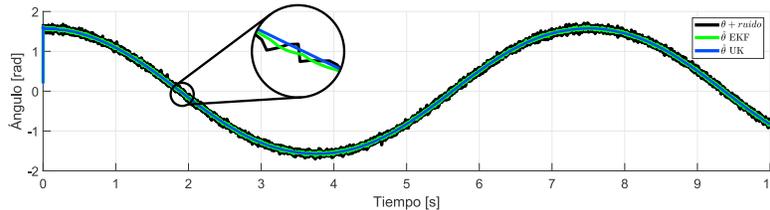


Figura 2.6: Filtro de Kalman *Unscented* implementado en el péndulo simple.

Esta sección termina con el fundamento de algoritmos KF, EKF y UKF para la estimación de estados en sistemas dinámicos. Las variaciones de cada algoritmo de Kalman dependen de su aplicación en los sistemas dinámicos para resolver problemas particulares.

Las secciones siguientes presentan los filtros de Kalman para usarse en la combinación de señales de sensores para la estimación de estados en sistemas dinámicos.

2.4. Fusión de sensores con filtros de Kalman

La fusión de datos de sensores, simplemente *fusión de sensores* o *fusión de datos*¹⁵, se refiere a la combinación de señales de diferentes sensores disponibles en los sistemas dinámicos para obtener mejores estimaciones de las variables de interés.

En los sistemas dinámicos, el usar un solo sensor para medir variables ocasiona los siguientes inconvenientes [Raol, 2010]:

- La falla del sensor origina la pérdida total de los datos adquiridos, ocasionando problemas en los sistemas dinámicos.
- El sensor solo cubre regiones restringidas del entorno, por lo que los datos son para eventos locales.

¹⁵El primero cuando se hable de datos de sensores en específico. El segundo cuando se hable de datos en general.

- Las mediciones del sensor dependen de su exactitud, precisión y frecuencia de muestreo. Esto es común en los sistemas de navegación INS/GPS donde el sistema de navegación inercial presenta frecuencias de muestreo altas, pero involucra mayores errores en sus mediciones. Mientras que el sistema de posicionamiento global presenta frecuencias de muestro lentas, pero mayor exactitud en sus mediciones.

Estos inconvenientes se evitan al fusionar múltiples datos de sensores disponibles en los sistemas dinámicos. Algunas de las ventajas de esta fusión de sensores se describen a continuación.

- *Redundancia de sensores.* Múltiples sensores en los sistemas dinámicos garantizan su funcionalidad ante fallas presentes en sus sensores.
- *Complementariedad* entre diversos sensores. Sensores de diferente naturaleza aumentan las regiones del entorno de los sistemas dinámicos.
- *Mejoramiento de incertidumbre y resolución* de las mediciones. La combinación de varios sensores garantizan datos completos y confiables en sus mediciones.

La fusión de sensores se realiza usando las arquitecturas: 1) *centralizadas*, 2) *descentralizadas* y 3) *jerárquicas* [Mitchell, 2007], como se presentan a continuación.

2.4.1. Arquitecturas de fusión de sensores

Las arquitecturas de fusión de datos realizan la combinación, el procesamiento de información, la toma de decisiones, y la estimación de variables de estados. Las arquitecturas centralizadas, descentralizadas y jerárquicas se muestran en la Figura 2.7.

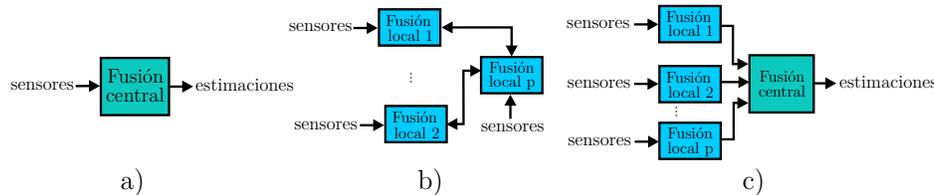


Figura 2.7: Arquitecturas de fusión de datos; a) centralizadas, b) descentralizadas, y c) jerárquicas.

Arquitecturas centralizadas

Estas arquitecturas usan fusiones de datos centrales como se muestra en la Figura 2.7a, en los que es necesario el ingreso de datos de sensores para obtener estimaciones a partir de ellos. La comunicación entre estos sensores es sencilla debido a la única conexión que existe con la fusión de datos central mientras que compartir información hacia otras unidades de fusión de datos se complica. Este tipo de arquitecturas es útil en situaciones donde las frecuencias de muestreo de sensores son asíncronos.

Arquitecturas descentralizadas

También conocidas como arquitecturas distribuidas las cuales contienen etapas de fusión de datos como se muestran en la Figura 2.7b. Estas arquitecturas evitan las fusiones de datos centrales, sin embargo, comparten información entre ellas mismas por medio de nodos. Estas arquitecturas se utilizan en sistema dinámicos que emplean sensores diferentes.

Arquitecturas jerárquicas

Son arquitecturas híbridas de la combinación de las arquitecturas centralizadas y descentralizadas, para obtener características de ambas arquitecturas. La Figura 2.7c muestra las arquitecturas jerárquicas

y se observa que hay varias fusiones de datos locales que llevan su información a la fusión de datos central. Las fusiones de datos locales procesan varios datos de sensores para obtener mejores distribuciones en los sistemas dinámicos.

Las arquitecturas de fusión de datos utilizan generalmente *fusionadores* de algoritmos predictores-correctores basados en los filtros de Kalman.

Las siguientes secciones presentan filtros de Kalman para utilizarlos en la fusión de sensores por medio del vector de estados y de la matriz de información que se implementan en un sistema dinámico.

2.4.2. Fusión del vector de estados

Este método de fusión de datos usa varios filtros de Kalman locales para fusionar sus vectores de estados y sus matrices de covarianza [Raol, 2010], obteniendo una fusión global óptima, lo cual es una arquitectura de fusión de datos jerárquica.

Por ejemplo, las ecuaciones 2.63-2.67 pertenecen a los filtros de Kalman lineales para utilizarlos en la fusión de datos de los sistemas dinámicos con mediciones de la misma variable.

Paso 0: condiciones iniciales

$$\hat{\mathbf{x}}_{s|0}, \mathbf{P}_{s|0} \quad (2.62)$$

Inicia recursividad ($k=1,2,3,\dots$)

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k

$$\hat{\mathbf{x}}_{s|k}^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{s|k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{P}_{s|k}^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{s|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_s. \quad (2.64)$$

Paso 2: corección con las mediciones $\mathbf{y}_{s|k}$

$$\mathcal{K}_{s|k} = \mathbf{P}_{s|k}^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}_{s|k}^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_s)^{-1}, \quad (2.65)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{s|k} = \hat{\mathbf{x}}_{s|k}^- + \mathcal{K}_{s|k} (\mathbf{y}_{s|k} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{s|k}^-), \quad (2.66)$$

$$\mathbf{P}_{s|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{s|k}\mathbf{C}) \mathbf{P}_{s|k}^-. \quad (2.67)$$

Paso 3: Fusión de datos global

$$\hat{\mathbf{x}}_{f|k} = \hat{\mathbf{x}}_{1|k} + \mathbf{P}_{1|k}(\mathbf{P}_{1|k} + \mathbf{P}_{2|k})^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{2|k}), \quad (2.68)$$

$$\mathbf{P}_{f|k} = \mathbf{P}_{2|k} - \mathbf{P}_{1|k}(\mathbf{P}_{1|k} + \mathbf{P}_{2|k})^{-1}(\mathbf{P}_{1|k})^T. \quad (2.69)$$

Paso 4: siguiente iteración ($k+1$)

Donde, $s = \{1, 2\}$ es el número de sensores redundantes de los sistemas dinámicos, en este ejemplo se suponen dos sensores, por lo tanto hay dos filtros de Kalman para realizar la fusión de datos. El dimensionamiento de los vectores y de las matrices de covarianza de este algoritmo de Kalman así como su funcionamiento se detallan en la sección 2.1.

La combinación de los vectores de estados¹⁶ $\hat{\mathbf{x}}_{s|k}$ y las matrices de covarianza $\mathbf{P}_{s|k}$ se realizan con las ecuaciones 2.68 y 2.69. Lo cual, $\hat{\mathbf{x}}_{f|k}$ representa el vector de estados fusionado y $\mathbf{P}_{f|k}$ la matriz de covarianza fusionada de los dos filtros de Kalman.

La ventaja de este algoritmo de fusión de datos es la posibilidad de retroalimentar el vector de estados $\hat{\mathbf{x}}_f$ y la matriz de covarianza \mathbf{P}_f a cada uno de los filtros locales. La retroalimentación es común en los filtros de Kalman *Federated* (FKF, *Federated Kalman Filter*) para obtener estimaciones con base a datos anteriores.

2.4.3. Fusión de la matriz de información

Este algoritmo de fusión de datos utiliza una arquitectura central, el cual es llamado filtro de Kalman centralizado (CKF, *Centralized Kalman Filter*). La fusión de datos se realiza mediante la matriz de información del filtro de Kalman¹⁷ [Durrant-Whyte, 2001], [Gan and Harris, 2001] y [Lee, 2003]. Esta matriz de información es la inversa de la matriz de covarianza de estados.

Las ecuaciones 2.71-2.74 del filtro de Kalman realizan la fusión de datos para la estimación de estados de los sistemas dinámicos.

Paso 0: condiciones iniciales

$$\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0 \quad (2.70)$$

Inicia recursividad ($k=1,2,3,\dots$)

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (2.72)$$

Paso 2: corrección con las mediciones $\mathbf{y}_{i,k}$

$$\mathbf{P}_k = \left([\mathbf{P}_k^-]^{-1} + \sum_{i=1}^s \mathbf{C}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{C}_i \right)^{-1}, \quad (2.73)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{P}_k \left([\mathbf{P}_k^-]^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^- + \sum_{i=1}^s \mathbf{C}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{y}_{i,k} \right). \quad (2.74)$$

Paso 3: siguiente iteración ($k+1$)

Donde, s es el número de sensores redundantes de los sistemas dinámicos; $[\mathbf{P}_k^-]^{-1}$ es la matriz de información.

La representación del filtro de Kalman en su forma de la matriz de información reduce el consumo computacional y facilita la agregación de sensores al algoritmo de Kalman para realizar la estimación de estados.

Un ejemplo de la implementación de los algoritmos de fusión de sensores en sistemas dinámicos se muestra en la siguiente sección.

¹⁶Es en este paso donde se realiza la fusión de datos de sensores.

¹⁷También se llama como filtro de información de Kalman.

2.4.4. Ejemplo de fusión de sensores

Como ejemplo de la fusión de sensores mediante la combinación del vector de estados, se considera el sistema dinámico lineal en tiempo discreto de la ecuación 2.75 que representa el movimiento traslacional de un objeto.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \frac{dt^2}{2} \\ dt \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_k. \quad (2.75)$$

Donde, $dt = 0.01$ es el paso de integración del sistema dinámico; $\mathbf{x}_k = [x_1 \ x_2]^T$ es el vector de estados siendo x_1 la posición y x_2 la velocidad traslacional del objeto con las condiciones iniciales $\mathbf{x}_0 = [0.5 \ 0.01]^T$; $u_k = 0.1t^2$ es la entrada en el sistema dinámico; $\mathbf{w}_k = [w_1 \ w_2]^T$ es el vector ruido con las propiedades $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$, es decir, ruido blanco gaussiano de media cero y covarianza \mathbf{Q} que afecta al estado x_2 del sistema dinámico como se muestra en la ecuación 2.76.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1e^{-10} \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Las observaciones en el sistema dinámico son $y_{1|k}$ y $y_{2|k}$ con el tiempo de muestreo $T = 0.01$.

$$y_{1|k} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + v_{1|k}, \quad (2.77)$$

$$y_{2|k} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + v_{2|k}. \quad (2.78)$$

Las matrices $\mathbf{C}_1 = [1 \ 0]$ y $\mathbf{C}_2 = [1 \ 0]$ se asocian a las mediciones $y_{1|k}$ y $y_{2|k}$ que representan la redundancia de sensores en el sistema dinámico. Estas mediciones están sujetas a ruido blanco gaussiano con $v_{1|k} \sim \mathcal{N}(0, R_1)$ y $v_{2|k} \sim \mathcal{N}(0, R_2)$, donde las propiedades de covarianzas son $R_1 = 1e^{-4}$ y $R_2 = 2e^{-5}$.

Para realizar la fusión del vector de estados es necesario considerar grupos de sensores del sistema dinámico. En este ejemplo hay dos grupos de sensores $y_{1|k}$ y $y_{2|k}$ y cada uno tiene un sensor.

La cantidad de grupo de sensores $s = 2$, implica la implementación de dos filtros de Kalman de las ecuaciones 2.63-2.67 para obtener dos vectores de estados estimados $\hat{\mathbf{x}}_{1|k}$ y $\hat{\mathbf{x}}_{2|k}$. Además, las condiciones iniciales de estos vectores estimados son $\hat{\mathbf{x}}_{1|0} = \hat{\mathbf{x}}_{2|0} = [0.6 \ 0.01]^T$.

La fusión del vector de estados se realiza utilizando las ecuaciones 2.68 y 2.69 para obtener una fusión óptima en el vector de estados $\hat{\mathbf{x}}_{f|k}$ y la matriz de covarianza $\mathbf{P}_{f|k}$.

La Figura 2.8 muestra la estimación de posición \hat{y}_{f1} del vector de estados fusionado $\hat{\mathbf{x}}_f$ considerando las mediciones y_1 y y_2 . La fusión del vector de estados reduce el ruido en las mediciones del sistema dinámico y, al mismo tiempo, combina sus señales para obtener estimaciones de ellos.

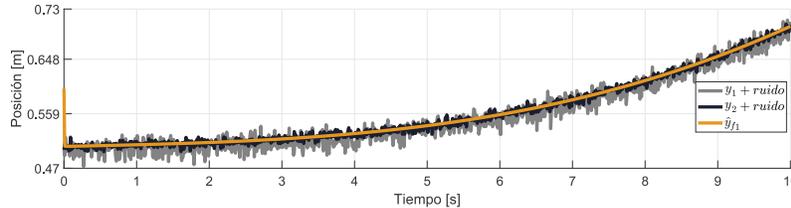


Figura 2.8: Fusión del vector de estados.

Los sensores considerados en este ejemplo son casi ideales¹⁸. Sin embargo, se tiene que considerar la presencia de fallas y errores en las mediciones de sensores, así como frecuencias de muestreo diferentes.

Estas secciones han mostrado comparaciones gráficas de los resultados de algoritmos de Kalman. Para obtener comparaciones numéricas de los algoritmos de Kalman se usan el indicador llamado *error cuadrático medio y el análisis de la matriz de covarianzas* que son útiles para el análisis de fusión de sensores.

2.5. Indicador de la evaluación de estimaciones

El error cuadrático medio (ECM) de la ecuación 2.79 es el indicador usado para obtener globalmente los errores de las estimaciones de los sistemas dinámicos.

$$ECM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)(x_i - \hat{x}_i)^T \quad (2.79)$$

Donde, N es el número total de datos, x es el valor de referencia y \hat{x} es el valor estimado.

El error cuadrático medio en su forma recursiva, ecuación 2.79, muestra el comportamiento de los errores durante la evolución de los sistemas dinámicos.

$$ECM_{k+1} = \frac{1}{k} [(k-1)ECM_k + (x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \quad (2.80)$$

Este indicador se usa para la comparación de los algoritmos de Kalman en la fusión de datos de sensores.

2.6. Análisis de las covarianzas de los filtros de Kalman

El análisis del comportamiento de la covarianzas de los algoritmos predictores-correctores se realizan con el sistema dinámico de la ecuación 2.75. Lo cual se considera que:

- El paso de integración es igual y unitario a la frecuencia de muestreo de las mediciones, $dt = T = 1$. Esto para facilitar el análisis de cada iteración del algoritmo.
- El tiempo final de simulación es $t = 10$ segundos.
- La covarianza *a priori* y *a posteriori* de variable de estado, x_1 , es la única analizada.
- El ruido w_k en el sistema dinámico es no aleatorio e igual al valor de la matriz \mathbf{Q} de la ecuación 2.76 y solo afecta al estado x_2 del sistema dinámico.
- La medición y está sujeta a ruido no aleatorio con propiedad $R = 1$.
- La entrada al sistema dinámico es $u = 0.1t^2$.
- Las condiciones iniciales del vector de estados del sistema dinámico son $\mathbf{x}_0 = [0.5 \quad 0.01]^T$.
- El algoritmo es el filtro de Kalman lineal con condiciones iniciales $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0.6 \quad 0.0]^T$.
- La matriz de covarianza del filtro de Kalman es $\mathbf{P}_0 = \text{diag}[2 \quad 3]$.

¹⁸Casi es debido al ruido presente en las mediciones.

Por lo tanto, se obtiene el sistema dinámico de la ecuación 2.81.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1e^{-10} \end{bmatrix}_k. \quad (2.81)$$

La medición en la ecuación 2.82.

$$y_k = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + [1]_k. \quad (2.82)$$

La Tabla 2.5 muestra las iteraciones del algoritmo de Kalman lineal que comienza con las condiciones iniciales en la iteración $k = 0$ y, posteriormente, se realizan las iteraciones, $k = 1, 2, 3, \dots$, hasta finalizar en la iteración $k = 10$. Además, los valores de u y y se introducen en cada iteración k .

Tabla 2.5: Valores del filtro de Kalman en cada iteración.

| | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | \dots | $k = 10$ |
|---|--|--|--|--|---------|--|
| $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}u_k =$ | $\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.60 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.85 \\ 1.36 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.70 \\ 2.22 \end{bmatrix}$ | \dots | $\begin{bmatrix} 52.48 \\ 42.39 \end{bmatrix}$ |
| $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} =$ | $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.75 & 2.00 \\ 2.00 & 2.00 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.50 & 1.00 \\ 1.00 & 0.73 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.60 \end{bmatrix}$ | \dots | $\begin{bmatrix} 0.87 & 0.64 \\ 0.64 & 0.46 \end{bmatrix}$ |
| $\mathcal{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} =$ | | $\begin{bmatrix} 0.73 \\ 0.53 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.52 \\ 0.38 \end{bmatrix}$ | \dots | $\begin{bmatrix} 0.46 \\ 0.34 \end{bmatrix}$ |
| $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_k (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) =$ | | $\begin{bmatrix} 1.26 \\ 1.08 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.82 \\ 1.34 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.49 \\ 2.07 \end{bmatrix}$ | \dots | $\begin{bmatrix} 51.90 \\ 41.97 \end{bmatrix}$ |
| $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- =$ | | $\begin{bmatrix} 0.73 & 0.53 \\ 0.53 & 0.93 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.40 & 0.33 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.52 & 0.38 \\ 0.38 & 0.29 \end{bmatrix}$ | \dots | $\begin{bmatrix} 0.46 & 0.34 \\ 0.34 & 0.25 \end{bmatrix}$ |

Las matrices de las covarianzas *a priori* y *a posteriori* del algoritmo de Kalman, \mathbf{P}_k y \mathbf{P}_k^- , en la iteración $k = 10$ son las siguientes:

$$\mathbf{P}_k^- = \begin{bmatrix} 0.87 & 0.64 \\ 0.64 & 0.46 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.34 \\ 0.34 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

En este análisis la Figura 2.9 muestra el comportamiento de las covarianzas \mathbf{P}_{11}^- y \mathbf{P}_{11} del estado x_1 . Se observa que los valores de las covarianzas incrementan durante el paso de predicción y disminuyen en el paso de corrección. Este comportamiento continua a lo largo del tiempo hasta alcanzar valores estables, a esto se le llamarán como *los valores límite de las covarianzas de la predicción y corrección*, y es donde el filtro de Kalman se encuentra en estado estable, *estabilidad del filtro*.

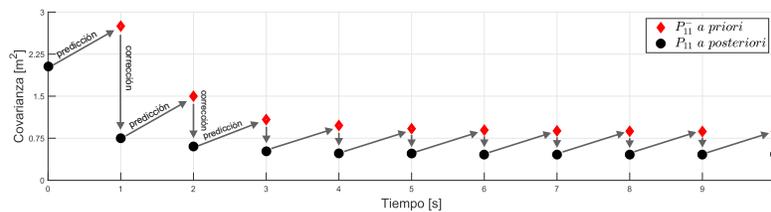


Figura 2.9: Valores límite de covarianzas *a priori* y *a posteriori* del estado x_1 .

Ahora se considera el siguiente análisis como lo muestra la Figura 2.10 donde se grafican tres valores límite de las covarianzas de predicción y corrección. Estas tres respuestas corresponden a valores de covarianzas *a priori* y *a posteriori* del estado x_1 con propiedades diferentes de ruido en las mediciones: $R = 0.5$, $R = 1$ y $R = 5$. El resto del algoritmo permanece igual a las condiciones anteriores.

La interpretación de este análisis es el siguiente:

1. Entre menor sea R las covarianzas se aproximan a cero y la diferencia entre las covarianzas *a priori* y *a posteriori* se reduce.
2. Entre mayor sea R la convergencia de los valores límite de la covarianzas a valores constantes se ve afectada con retraso en el tiempo.
3. El valor inicial \mathbf{P}_0 define la tendencia del comportamiento \mathbf{P} a valores positivos o negativos hasta alcanzar valores estables.

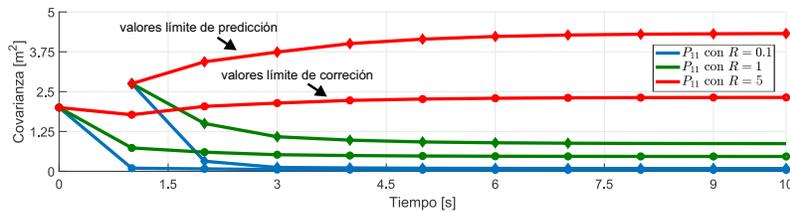


Figura 2.10: Análisis de covarianzas de los estados con valores de ruido diferentes.

El análisis 1 y 2 son de importancia en la estimación de estados. Para esto el uso del error cuadrático medio de la ecuación 2.80 muestra el efecto de las propiedades de ruido R en las estimaciones del sistema dinámico.

La Figura 2.11 muestra la medición y y las tres estimaciones de x_1 con valores diferentes de R . Se observa que entre mayor es R , la convergencia de los estados estimados presenta discrepancias mayores con la medición y , lo que provoca el aumento en los errores cuadráticos medios: para el valor de $R = 0.1$ se obtiene $ECM = 0.1828$; para el valor de $R = 1.0$ se obtiene $ECM = 1.7603$; para el valor de $R = 5$ se obtiene $ECM = 7.8405$.

Interpretación. El filtrado mayor en el algoritmo de Kalman altera las estimaciones de estados dependiendo de las propiedades del ruido en las mediciones, R . Esto es el precio que se tiene que pagar cuando la selección de este ruido no es la correcta, que va a depender de la naturaleza de los sensores instalados en los sistemas dinámicos.

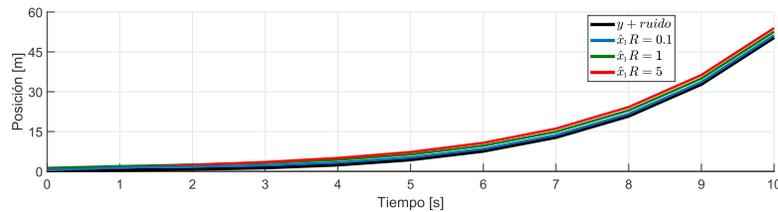


Figura 2.11: Estados estimados con valores de ruido diferentes.

Remarcando que el filtro de Kalman como su nombre lo indica es un filtro que depende de las propiedades de ruido de los sistemas dinámicos y de sus mediciones para obtener estimaciones óptimas,

como se muestra en la sección [2.1](#).

Por último, estas son algunas de las discusiones de los filtros de Kalman que se abordarán en el capítulo [5](#).

- Los filtros de Kalman son algoritmos predictores-correctores.
- La estimación de estados y las predicciones de los filtros de Kalman y de cualquier observador son conceptos diferentes.
- Lo anterior implica que si el tiempo de discretización de los sistemas dinámicos son iguales a la frecuencia de muestreo de los sensores, el algoritmo de Kalman es dominado por su etapa de corrección.
- Los filtros de Kalman requieren que la media y la covarianza de los estados sean lineales en el paso de predicción.
- Lo anterior implica los diferentes métodos de linealización de los sistemas dinámicos.
- Una vez obtenido la media y la covarianza de los estados linealizados, es posible realizar la fusión de datos con cualquier fusionador lineal en el paso de corrección.
- Las propiedades del ruido de los sistemas dinámicos afectan las estimaciones de los filtros de Kalman.
- Los filtros de Kalman trabajan como observadores y como filtros de forma dependiente e independiente.

Capítulo 3

Principios de navegación en vehículos aéreos no tripulados

Este capítulo presenta los diferentes marcos de referencia y sistemas de coordenadas para los sistemas de navegación en vehículos aéreos no tripulados (UAV). Los sensores inerciales y visuales, así como el sistema de posicionamiento global (GPS), se mencionan como el fundamento de la estrategia de estimación de posición de los vehículos aéreos no tripulados tipo multirrotor.

3.1. Principios de navegación

El objetivo de la navegación terrestre, aérea y acuática es conocer la localización y dirección de los vehículos en movimiento. Esto se logra con el uso de herramientas como los marcos de referencia, los sistemas de coordenadas, los sistemas de posicionamiento y los sensores de navegación, los cuales se discuten a continuación.

3.1.1. Marcos de referencia

Los marcos de referencia son el conjunto de coordenadas establecidas para conocer la posición de vehículos en planos bidimensionales y tridimensionales. Estos marcos de referencia son:

- El marco inercial centrado en la tierra (ECI, *Earth-Centered Inertial Frame*).
- El marco de referencia fijo centrado en la tierra (ECEF, *Earth-Centered Earth-Fixed*).
- El marco de nivel local (LLF, *local-level frame*).
- El marco de referencia fijo al cuerpo del vehículo (*b-frame*, *Body Frame*).
- El marco de referencia Norte-Este-Abajo (NED, *North-East-Down*).

El uso de estos marcos de referencia dependen de la aplicación de vehículos en actividades terrestres, aéreas o acuáticas.

Marco inercial centrado en la tierra (ECI)

El marco de referencia ECI se encuentra en estado estacionario en el espacio y moviéndose a una velocidad constante. El cual asume lo siguiente:

1. El origen O_I se encuentra en el centro de la tierra.
2. El eje z_I se encuentra en dirección al polo norte.

3. El eje x_I está en la dirección del ecuador apuntando al equinoccio de primavera.
4. El eje y_I es ortogonal a los ejes z_I y x_I

Marco de referencia fijo centrado en la tierra (ECEF)

El marco de referencia ECEF se encuentra fijo y rotando junto a la tierra como lo muestra la Figura 3.1. Las consideraciones de este marco son:

1. El origen O_e se encuentra en el centro de la tierra.
2. El eje z_e se encuentra en dirección al polo norte.
3. El eje x_e es la intersección del ecuador y el primer meridiano.
4. El eje y_e es ortogonal a los ejes z_e y x_e

Este marco de referencia se utiliza en los sistemas de posicionamiento global.

Marco de nivel local (LLF)

También llamado marco de navegación local porque representa las posiciones y velocidades de vehículos sobre la superficie de la tierra. El cual asume lo siguiente:

1. El origen O_n se encuentra en el centro del vehículo.
2. El eje z_n apunta hacia dentro o afuera de la tierra.
3. El eje x_n apunta hacia la coordenada este.
4. El eje y_n apunta hacia la coordenada norte.

Los dos marcos de navegación de nivel local son el NED (North-East-Down) y el ENU (East-North-Up). El primer marco de navegación se emplea en vehículos aéreos mientras que el segundo en vehículos terrestres.

La Figura 3.1 además de mostrar el marco de referencia ECEF también muestra el marco de nivel local NED para la navegación de vehículos aéreos.

Marco de referencia fijo al cuerpo (b-frame)

El marco de referencia b - *frame* se encuentra fijo al cuerpo del vehículo con las siguientes consideraciones:

1. El origen O_b se localiza en el centro de gravedad del vehículo.
2. El eje x_b es colineal con el frente del vehículo apuntado hacia adelante.
3. El eje y_b se encuentra al costado del vehículo.
4. El eje z_b apunta hacia abajo o arriba del vehículo.

Además, la notación vectorial de las velocidades traslacionales del vehículo relacionado a las coordenadas x_b , y_b y z_b se representan en la ecuación 3.1.

$$\mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

La notación vectorial de las aceleraciones traslacionales del vehículo se muestran en la ecuación 3.2.

$$\mathbf{a}_b = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

La transformación de coordenadas de estos marcos de referencia se realiza para obtener una referencia en común.

3.1.2. Transformación de coordenadas de marcos de referencia

La transformación de coordenadas se realiza utilizando métodos como cosenos directores, ángulos de Euler y cuaterniones. Por ejemplo, con los ángulos de Euler ϕ , θ y ψ se obtienen matrices individuales de rotación de las coordenadas del espacio tridimensional x , y y z [Ortiz et al., 2015], las cuales se muestran en la ecuaciones 3.3-3.5.

$$\mathbf{R}_0^1(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{R}_0^1(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{R}_0^1(z, \psi) = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Donde, $\mathbf{R}_0^1(x, \phi)$ es la matriz de rotación alrededor del eje x ; $\mathbf{R}_0^1(y, \theta)$ es la matriz de rotación alrededor del eje y ; $\mathbf{R}_0^1(z, \psi)$ es la matriz de rotación alrededor del eje z . Los cuales representan la rotación individual de las coordenadas del plano tridimensional.

Las matrices individuales de rotación son ortogonales y presentan tres propiedades:

1. $(\mathbf{R}_a^b)^{-1} = (\mathbf{R}_a^b)^T = (\mathbf{R}_a^b)$,
2. $(\mathbf{R}_b^c)(\mathbf{R}_a^b) = \mathbf{R}_a^c$,
3. $\det(\mathbf{R}_a^b) = \mathbf{I}$.

Donde, \mathbf{R}_a^b es la matriz de rotación de las coordenadas del marco a a las coordenadas de marco b ; \mathbf{I} es la matriz identidad.

La matriz de rotación completa $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ se obtiene de la multiplicación de matrices individuales como se muestra en la ecuación 3.6.

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}_0^1(x, \phi)\mathbf{R}_0^1(y, \theta)\mathbf{R}_0^1(z, \psi). \quad (3.6)$$

Sustituyendo los elementos de cada matriz de rotación de las coordenadas x , y y z , se obtiene la ecuación 3.7.

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Lo cual desarrollado lo anterior, resulta la ecuación 3.8.

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & c\theta s\phi \\ c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

El uso principal de la matriz de rotación $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ es para llevar el marco b -frame al marco ECEF y al marco de nivel local LLF, con este último marco de referencia la notación de la matriz se expresa como $\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta, \psi)$ el cual se utiliza en la sección 4.1. Otros tipos de transformaciones de marcos de referencia se detallan en [Noureldin et al., 2013].

La transformación de marcos de referencia es común en las señales de sensores de vehículos para su navegación, por ejemplo, las mediciones de acelerómetros se encuentran en el marco b -frame y son llevados al marco ECEF para que sean compatibles con el sistema de posicionamiento global.

Los sistemas de posicionamiento global involucran a sistemas de coordenadas en los planos bidimensionales y tridimensionales, los cuales se discuten a continuación.

3.1.3. Sistemas de coordenadas

Los sistemas de coordenadas representan globalmente la localización de vehículos. Para esto se considera que la geometría de la tierra es esférica o elipsoidal. En estas secciones la forma elipsoidal se utiliza para explicar los sistemas de coordenadas rectangulares y geodésicas.

Los sistemas de coordenadas rectangulares y geodésicas en el marco de referencia ECEF los muestra la Figura 3.1.

El sistema de coordenadas rectangulares se define por las coordenadas x , y y z que están alineados paralelamente con las coordenadas x_e , y_e y z_e . El sistema de coordenadas geodésicas se define por las coordenadas λ , φ y h que representan la *longitud*, *latitud* y *altitud*.

En el sistema de coordenadas geodésicas, la longitud¹ λ es el ángulo formado entre el primer meridiano de la tierra y la rotación alrededor del Ecuador²; la latitud φ es el ángulo formado entre el Ecuador y la rotación alrededor del primer meridiano; la altura h es la distancia formada entre el radio del elipsoide R_N y cualquier punto de la superficie O_n .

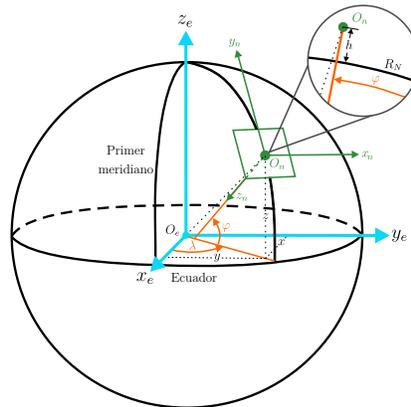


Figura 3.1: Marco de referencia ECEF y el sistema de coordenadas rectangulares-geodésicas.

¹Londres es el centro de la tierra en dirección con la longitud.

²Ecuador es el centro de la tierra en dirección con la latitud.

La conversión del sistema de coordenadas geodésicas (λ, φ, h) al sistema de coordenadas rectangulares (x_e, y_e, z_e) se realiza con la ecuación 3.9.

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_N + h) \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ (R_N + h) \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ [R_N(1 - e^2)] \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Donde, R_N es el radio normal y e es la excentricidad del elipsoide del modelo WGS 84 (*World Geodetic System*).

La conversión del sistema de coordenadas rectangulares al sistema de coordenadas geodésicas presenta una complejidad mayor que hacerlo de forma inversa. Esto implica que la solución del sistema de coordenadas geodésicas de las ecuaciones 3.10-3.12 sea una aproximación.

$$\lambda = 2 \arctan \left(\frac{y_e}{x_e + \sqrt{x_e^2 + y_e^2}} \right), \quad (3.10)$$

$$\varphi = 2 \arctan \left(\frac{z_e + (c_1)^2 b \sin^3(c_2)}{p - e^2 a \cos^3(c_2)} \right), \quad (3.11)$$

$$h = \frac{p}{\cos(\varphi)} - N, \quad (3.12)$$

Con las siguientes definiciones:

$$c_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}, \quad (3.13)$$

$$c_2 = \arctan \left(\frac{z_e a}{p b} \right), \quad (3.14)$$

$$p = \sqrt{x_e^2 + y_e^2}, \quad (3.15)$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}}. \quad (3.16)$$

Donde, a y b son las longitudes del elipsoide de la Figura 3.2.

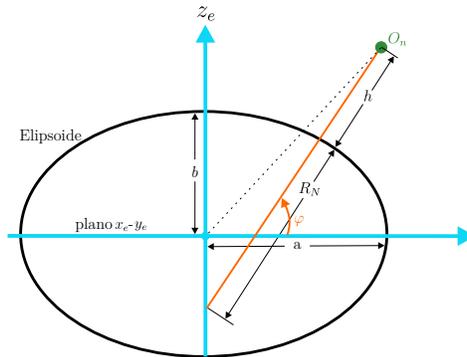


Figura 3.2: Geometría del elipsoide.

La solución anterior, al igual que otras soluciones basadas en algoritmos iterativos, presenta el inconveniente de usar tres coordenadas rectangulares para realizar la transformación de coordenadas al sistema de coordenadas geodésicas y viceversa. Además, se tienen los problemas de trabajar en los

planos bidimensionales $x - y$ y $\lambda - \varphi$, y de la presencia de errores de posicionamiento en la altitud h que son mayores que en las coordenadas $x - y$ como se muestra en la sección 5.3.3. Considerando lo anterior, el procedimiento de la transformación de coordenadas se complica. La solución es usar las ecuaciones de Coticchia-Surace [Coticchia y Surace, 1978] que realizan el cambio del sistema de coordenadas geodésicas al sistema de coordenadas de marcador transversal universal³ (UTM, *Universal Transversal Mercator*) separando la altitud del plano tridimensional. Las variables UTM se representan por medio de las coordenadas *este* y *norte* (x y y).

Por otra parte, para calcular la distancia entre dos puntos de la tierra conociendo su longitud y latitud se utiliza la fórmula de Haversine y el algoritmo de Vicenty. La fórmula de Haversine asume que la geometría de la tierra es esférica, por lo que la solución se basa en trigonometría esférica. Mientras que el algoritmo de Vicenty asume que la geometría de la tierra es geodésica, para que el algoritmo reduzca de forma recursiva el error entre dos puntos para obtener la distancia entre ellos.

Los marcos de referencia y los sistemas de coordenadas se utilizan en los sistemas de posicionamiento globales y relativos para la navegación de vehículos.

3.1.4. Sistemas de navegación global satelital

Los sistemas de posicionamiento global como el GPS en Estados Unidos, Galileo en Europa, GLONASS (*GLObal Navigation Satellite System*) en Rusia, BeiDou en China y el GNSS que es la integración de los sistemas anteriores, entregan el posicionamiento de los vehículos en coordenadas globales.

El funcionamiento del GPS se considera en estas secciones para usarlo en los sistemas de posicionamiento de los vehículos aéreos no tripulados.

Sistema de posicionamiento global

El sistema de posicionamiento global (GPS, *Global Positioning System*) determina las coordenadas espaciales de usuarios/vehículos respecto al sistema de referencia mundial ECEF [Huerta et al., 2005], siendo un sistema de posicionamiento libre y accesible en cualquier hora del día.

El sistema de posicionamiento global se divide por el segmento espacial, de control y de usuario como los muestra la Figura 3.3.

1. *El segmento espacial* es el conjunto de satélites que determinan la ubicación de usuarios.
2. *El segmento de control* es la integración de varias estaciones terrestres para monitorear, controlar, sincronizar relojes del sistema y transmitir información a los satélites GPS.
3. *El segmento de usuario* es el conjunto de instrumentos electrónicos que realizan el procesamiento y recepción de las señales de satélites GPS.



Figura 3.3: El sistema de posicionamiento global.

³Google Maps y Google Earth usan este tipo de coordenadas.

El receptor GPS del segmento de usuario por medio de una antena adquiere y procesa las señales de los satélites procedentes del segmento espacial para obtener la siguiente información:

- Número de satélites consultados.
- Indicadores de intensidad y calidad de las señales recibidas.
- Coordenadas geodésicas de longitud, latitud y altitud.
- Velocidades respecto al suelo.
- Azimut⁴.
- Entre otros datos.

La información del receptor GPS se obtiene a partir de secuencias de datos codificados en formato NMEA (*National Marine Electronics Association*). La decodificación de los datos es necesaria para la interpretación de información [NMEA, 2019].

Un ejemplo de las sentencias NMEA se muestra en la Figura 3.4, lo cual se forma por 1) diferentes códigos separados por un salto de línea y 2) datos separados por comas. La Figura 3.5 muestra 3) la decodificación⁵ de una sentencia NMEA disponible en el receptor GPS.

```

①
$GPRMC,183729,A,3907.356,N,12102.482,W,000.0,360.0,080301,015.5,E*6F
$GPRMB,A,,,,,,,,,,,,,V*71
$GPGGA,123519,4807.038,N,01131.000,E,1,08,0.9,545.4,M,46.9,M,0.0,000.0,M,0.0,000.0,A*47
$GPGSA,A,3,02,,,,07,,09,24,26,,,,,1.6,1.6,1.0*3D
$GPGSV,2,1,08,02,43,088,38,04,42,145,00,05,11,291,00,07,60,043,35*71
$GPGSV,2,2,08,08,02,145,00,09,46,303,47,24,16,178,32,26,18,231,43*77
$PGRME,22.0,M,52.9,M,51.0,M*14
$PGDLL,3907.360,N,12102.481,W,183730,A*33
$PGRMZ,2062,f,3*2D
$PGRMM,WGS 84*06
$GPBOD,,T,,M,,*47
$GPRTE,1,1,c,0*07
$GPRMC,183731,A,3907.482,N,12102.436,W,000.0,360.0,080301,015.5,E*67
$GPRMB,A,,,,,,,,,,,,,V*71
  
```

Figura 3.4: Datos entregados por el receptor GPS en formato NMEA.

GGA - essential fix data which provide 3D location and accuracy data.

```

②
$GPGGA,123519,4807.038,N,01131.000,E,1,08,0.9,545.4,M,46.9,M,0.0,000.0,M,0.0,000.0,A*47
  
```

Where:

| | |
|---------------|--|
| GGA | Global Positioning System Fix Data |
| 123519 | Fix taken at 12:35:19 UTC |
| 4807.038,N | Latitude 48 deg 07.038' N |
| 01131.000,E | Longitude 11 deg 31.000' E |
| 1 | Fix quality: 0 = invalid |
| | 1 = GPS fix (SPS) |
| | 2 = DGPS fix |
| | 3 = PPS fix |
| | 4 = Real Time Kinematic |
| | 5 = Float RTK |
| | 6 = estimated (dead reckoning) (2.3 feature) |
| | 7 = Manual input mode |
| | 8 = Simulation mode |
| 08 | Number of satellites being tracked |
| 0.9 | Horizontal dilution of position |
| 545.4,M | Altitude, Meters, above mean sea level |
| 46.9,M | Height of geoid (mean sea level) above WGS84 ellipsoid |
| (empty field) | time in seconds since last DGPS update |
| (empty field) | DGPS station ID number |
| *47 | the checksum data, always begins with * |

Figura 3.5: Decodificación de la sentencia NMEA [NMEA, 2019].

⁴Es el valor que muestra una brújula magnética.

⁵La decodificación se mantiene en su formato original y sin alteraciones.

La cantidad de códigos NMEA así como su actualización varían dependiendo del modelo y aplicación de receptores GPS.

Por otra parte, la información de las coordenadas geodésicas entregadas por el receptor GPS, de aquí en adelante solo GPS, es afectada por factores del entorno y del usuario que se conocen como *errores de posicionamiento*.

Errores de posicionamiento del GPS

Las coordenadas geodésicas se encuentran sujetas a errores de posicionamiento ocasionados por factores atmosféricos, por geometría de los satélites, por efectos *multipath*⁶, por la sincronización de relojes satelitales, y por el usuario.

La representación de los diferentes errores de posicionamiento se realiza con el indicador UERE (*User-Equivalent Range Error*), que dependiendo del número de consideraciones de las diversas fuentes de errores este indicador se encuentra entre los valores 5-7 [Shuai et al., 2019], [Joardar et al., 2016] y [Beard, 2012]. La Tabla 3.1 presenta las fuentes de errores para obtener el indicador UERE.

Tabla 3.1: Error equivalente en el sistema de posicionamiento global.

| Fuente de error | Bias | Aleatoriedad | Total |
|----------------------------|------|--------------|-------|
| Datos de efémerides | 2.1 | 0.0 | 2.1 |
| Relojes satelitales | 2.0 | 0.7 | 2.1 |
| Ionósfera | 4.0 | 0.5 | 4.0 |
| Monitoreo de la troposfera | 0.5 | 0.5 | 0.7 |
| <i>Multipath</i> | 1.0 | 1.0 | 1.4 |
| Mediciones recibidas | 0.5 | 0.2 | 0.5 |
| UERE, rms* | 5.1 | 1.4 | 5.3 |

*root mean square (rms)

El indicador UERE con el indicador DOP (*Dilution Of Precision*), este último también disponible en el GPS, obtienen aproximaciones de errores de posicionamiento de los lugares donde se utilizan los receptores GPS. Este indicador DOP representa la configuración de los satélites GPS en el momento de realizar la petición de posición con los receptores GPS. Por ejemplo, la Figura 3.6 muestra dos peticiones de posición realizadas con el receptor GPS. El primero se realiza en lugares abiertos y sin obstáculos, que consigue la geometría adecuada de los satélites GPS. La segunda petición se realiza en lugares cerrados y alrededor de obstáculos, que consigue la configuración inadecuada de los satélites GPS. Esto provoca el incremento del valor del indicador DOP que se interpreta como errores de posicionamiento GPS.

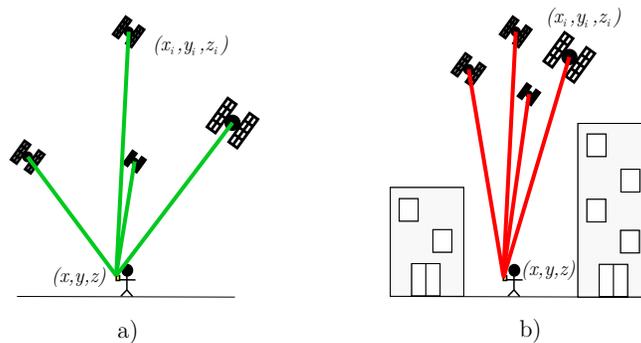


Figura 3.6: Configuración geométrica de los satélites GPS.

⁶Señales del GPS reflejadas sobre objetos como edificios, arboles y objetos grandes.

El indicador DOP se divide principalmente en los indicadores HDOP, VDOP y PDOP los cuales se muestran en las ecuaciones 3.17-3.19.

$$HDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \quad (3.17)$$

$$VDOP = \sqrt{\sigma_z^2}, \quad (3.18)$$

$$PDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}. \quad (3.19)$$

Donde, σ_x es la diferencia de la posición del receptor x y la posición del i -ésimo satélite x_i ; σ_y es la diferencia de la posición del receptor y y la posición del i -ésimo satélite y_i ; σ_z es la diferencia de la posición del receptor z y la posición del i -ésimo satélite z_i . El número de satélites depende de su disponibilidad al momento de realizarse las peticiones en el receptor GPS.

El indicador de dilución de precisión horizontal (HDOP, *Horizontal Dilution Of Precision*) realiza la estimación de errores de posicionamiento en el plano bidimensional $x - y$ y el indicador de dilución de la precisión vertical (VDOP, *Vertical Dilution Of Precision*) obtiene la estimación de errores de posicionamiento en el plano vertical h , altitud. El indicador de dilución de precisión PDOP (*Position Dilution Of Precision*) para la estimación de errores de posicionamiento en el plano tridimensional es función de los indicadores HDOP y VDOP.

La aproximación de los errores de posicionamiento en metros usando los indicadores DOP y UERE se realiza con las ecuaciones 3.20 y 3.21.

$$Error_H = HDOP \times UERE, \quad (3.20)$$

$$Error_V = VDOP \times UERE. \quad (3.21)$$

Además de obtener errores de posicionamiento GPS con el indicador DOP, también es posible conocer el ruido de las señales en cada satélite GPS, esto se realiza con el indicador SNR (*Signal to Noise Ratio*) el cual también está disponible en el receptor GPS.

Modelo matemático del GPS para simulación

El modelo matemático generalizado de la simulación del GPS [Beard, 2012] se presenta en las ecuaciones 3.22-3.24.

$$y_{GPS,n} = p_n + v_n, \quad (3.22)$$

$$y_{GPS,e} = p_e + v_e, \quad (3.23)$$

$$y_{GPS,h} = h + v_h. \quad (3.24)$$

Donde, P_e y P_n son las coordenadas rectangulares este y norte; h es la altitud sobre el nivel del mar; v_n , v_e y v_h son errores de posicionamiento.

Sin embargo, las coordenadas de posicionamiento del receptor GPS son geodésicas, lo que significa trabajarlas en escalas angulares. Para trabajarlos en escalas métricas es necesario realizar la transformación de coordenadas como se muestra en la Figura 3.7.

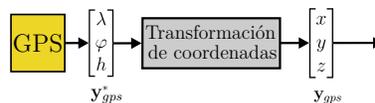


Figura 3.7: Conversión de coordenadas del GPS.

Donde,

$\mathbf{y}_{gps}^* = [\lambda \quad \varphi \quad h]^T$ es el vector de mediciones del GPS en coordenadas geodésicas.

$\mathbf{y}_{gps} = [x \quad y \quad z]^T$ es el vector de mediciones del GPS, convertido a coordenadas rectangulares.

En la navegación de vehículos, los sistemas de posicionamiento global normalmente se combinan con sistemas de posicionamiento relativos para obtener ventajas de ambos sistemas de posicionamiento.

3.1.5. Sistemas de navegación relativa

Los sistemas de navegación relativa requieren de referencias para obtener la posición de vehículos, que dependen de la naturaleza de los sensores de navegación como los que se basan en mediciones inerciales, láser, ultrasónicos y visuales.

Las siguientes secciones muestran el funcionamiento de los sensores inerciales y visuales como sistemas de navegación en vehículos aéreos no tripulados.

3.1.6. Sistemas de navegación inercial

Los sistemas de navegación inercial (INS, *Inertial Navigation System*) emplean varios sensores inerciales para conocer la posición de los vehículos. El sensor principal es el IMU⁷ que se conforma por acelerómetros y giroscopios en los ejes x , y y z . Los acelerómetros miden aceleraciones traslacionales mientras que los giroscopios miden velocidades angulares en el marco del vehículo para determinar su posición.

La diferencia entre los términos IMU e INS se muestra en la Figura 3.8. El término IMU lo constituye los acelerómetros y los giroscopios, es decir, las aceleraciones traslacionales y las velocidades angulares en el marco del vehículo. Mientras que el término INS hace referencia a las variables de navegación *posición*, *velocidad* y *actitud*⁸ que se obtienen de ecuaciones de mecanización de las señales pre-procesadas del sensor IMU. La etapa de pre-procesamiento de señales son filtros para la disminución de ruido en las mediciones. Las ecuaciones de navegación son el conjunto de herramientas matemáticas para la obtención de variables de navegación.

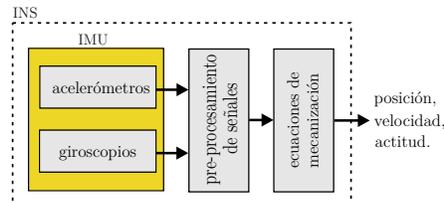


Figura 3.8: Componentes del sistema de navegación inercial.

Las ventajas de usar el sensor IMU son:

- Es un dispositivo que funciona sin complementos externos para medir aceleraciones y velocidades angulares, esto lo hace útil en lugares cerrados, túneles y debajo del agua.
- Las frecuencias de muestreo son mayores a 100 Hz.

⁷El sensor IMU se especifica por grados de libertad (DoF, *Degrees of Freedom*). Cada DoF realiza la medición una variable de interés. Por ejemplo, el sensor IMU de seis DoF se conforma por tres acelerómetros y tres giroscopios en los ejes x , y y z .

⁸Los ángulos de Euler.

- Es un elemento que se integra fácilmente con otro tipos de sensores para usarse en aplicaciones de aeronáuticas, guiado y control de vehículos autónomos.

Mientras que la desventaja principal es:

- El error de la posición incremental con el medio al cuadrado del tiempo, como se muestra en la sección 1.1.

Las ecuaciones 3.25 y 3.26 realizan la simulación del comportamiento de las señales de acelerómetros y de giroscopios [Goppert et al., 2017] y [Beard, 2012].

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{m} + g \sin \theta + w_{a_x} \\ \frac{f_y}{m} - g \cos \theta \sin \phi + w_{a_y} \\ \frac{f_z}{m} - g \cos \theta \cos \phi + w_{a_z} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^* + w_p \\ q^* + w_q \\ r^* + w_r \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Donde, a_x , a_y y a_z son las aceleraciones traslacionales; p , q y r son las velocidades angulares; f_x , f_y y f_z son las fuerzas presentes en el vehículo; g es la aceleración de la gravedad y m es la masa del vehículo; θ y ϕ son los ángulos de Euler; w_{a_x} , w_{a_y} y w_{a_z} son ruidos blancos gaussianos de los acelerómetros; w_p , w_q y w_r son ruidos blancos gaussianos de los giroscopios; p^* , q^* y r^* son velocidades angulares ideales.

3.1.7. Sistemas de navegación visual

Los sistemas de navegación visual se basan en cámaras de vídeo y en algoritmos de visión para la navegación de vehículos. El área de investigación de estos sistemas de navegación visual es enorme a comparación con los sistemas de navegación inercial.

Estos sistemas de navegación visual presentan alternativas tanto en el *hardware* como en el *software*. El hardware involucra el tipo, tamaño y aplicación de las cámaras de vídeo, así como también su procesamiento computacional. El software abarca a los algoritmos de visión para la obtención de características del entorno, los cuales entran en clasificaciones que dependen de su aplicación.

En aplicaciones de creación de mapas tridimensionales para la navegación de vehículos se usan los algoritmos SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*) que requieren de recursos computacionales altos. En aplicaciones de reconocimiento de texturas y patrones se usan los algoritmos SIFT y SURF que requieren de menos recursos computacionales que los algoritmos SLAM. En aplicaciones de odometría visual se usan algoritmos de flujo óptico para la detección del flujo de píxeles del entorno de navegación.

Los sensores de flujo óptico y sus algoritmos de visión que son utilizados para la navegación de vehículos aéreos del capítulo 4 se describen a continuación.

Sensor de flujo óptico

La definición de flujo óptico se entiende como el flujo de píxeles⁹ entre los *frames*¹⁰ que capturan las cámaras de vídeo. La Figura 3.9 muestra dos *frames* de 4×4 píxeles que capturan imágenes del recorrido de un vehículo entre el punto A y B. Estos dos *frames* presentan el flujo de píxeles siempre y cuando haya movimiento entre los dos puntos, esto origina el flujo óptico.

⁹Un píxel es la parte más pequeña de una pantalla digital.

¹⁰Los *frames* son la secuencia de capas de grabación en cámaras de vídeo.

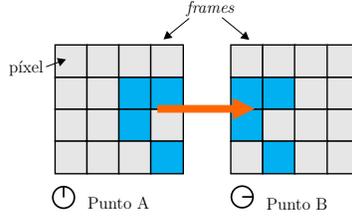


Figura 3.9: Flujo óptico.

Lo común es que el flujo óptico se obtenga a partir de algoritmos de visión como los métodos clásicos basados en los algoritmos de diferencia Lucas-Kanade (LK) y Horn-Schunck (HS), los algoritmos basados en la extracción de características *Scale-Invariant Feature Transform* (SIFT) y *Speeded-UP Robust Features* (SURF) [Sun et al., 2013]. Estos algoritmos requieren de recursos computacionales altos mientras que los métodos basados en la interpolación y comparación de bloques (*block matching*) requieren de menos recursos computacionales.

Con lo anterior, los sensores de flujo óptico ¹¹ obtienen velocidades relativas de la navegación de vehículos. Por ejemplo, la Figura 3.10 muestra los elementos del sensor de flujo óptico PX4FLOW para la obtención de velocidades traslacionales [Honegger et al., 2013], que se constituye por el sensor óptico CMOS, giroscopios, sensor ultrasónico y procesador de datos y el algoritmo SAD (*Sum of Absolute Differences*) *block matching*.

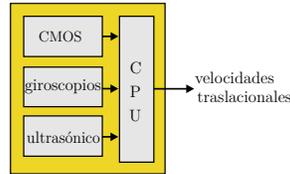


Figura 3.10: Componentes del sensor de flujo óptico PX4FLOW.

Para la obtención de las velocidades traslacionales, se considera el punto tridimensional $\mathbf{P} = [X, Y, Z]^T$ situado sobre una superficie, esto es el marco de referencia de la cámara de vídeo, a su vez este punto \mathbf{P} se proyecta al punto de coordenadas de píxeles $\mathbf{p} = [x, y, f]^T$ por medio de una lente con distancia focal f , como se muestra en la Figura 3.11. La relación de los puntos \mathbf{P} y \mathbf{p} , el real y el proyectado, se presenta en la ecuación 3.27.

$$\mathbf{p} = f \frac{\mathbf{P}}{Z}. \quad (3.27)$$

La proyección anterior se realiza al conocer la longitud focal de la cámara de vídeo y la profundidad del escenario.

Además, es necesario obtener el movimiento relativo entre la cámara de vídeo y el punto \mathbf{P} con la ecuación 3.28.

$$\mathbf{V} = -\mathbf{T} - \omega \mathbf{P}. \quad (3.28)$$

Donde, ω es la velocidad angular y \mathbf{T} es la componente traslacional de movimiento la cual se obtiene con algoritmos de visión.

¹¹El ratón de la computadora usa un sensor de flujo óptico para posicionar el puntero.

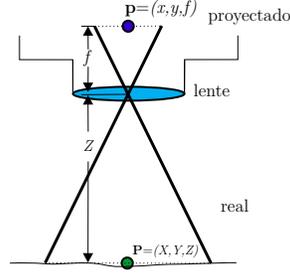


Figura 3.11: Proyección de un punto real a coordenadas de píxeles.

El desplazamiento de la cámara de vídeo hace que los puntos \mathbf{P} y \mathbf{p} sean función del tiempo mientras que la longitud focal f sea siempre constante. Por lo tanto, el flujo de píxeles se obtiene derivando en ambos lados la ecuación 3.27, resultando la siguiente ecuación:

$$\frac{\text{flujo}}{\Delta t} \triangleq \mathbf{v} = f \frac{Z\mathbf{V} - V_z\mathbf{P}}{Z^2}. \quad (3.29)$$

Donde, V_z es la derivada de Z .

La ecuación 3.28 se sustituye en la ecuación 3.29 para obtener el flujo de píxeles de las componentes x y y como se muestran en las ecuaciones 3.30 y 3.31.

$$\nu_x = \frac{T_z x - T_x f}{Z} - \omega_y f + \omega_z y + \frac{\omega_x x y - \omega_y x^2}{f}, \quad (3.30)$$

$$\nu_y = \frac{T_z y - T_y f}{Z} + \omega_x f - \omega_z x + \frac{\omega_x y^2 - \omega_y x y}{f}. \quad (3.31)$$

Donde, ν_x y ν_y son flujos ópticos de las componentes x y y ; T_x , T_y y T_z son los movimientos traslacionales de las componentes x , y y z ; ω_x , ω_y y ω_z son velocidades angulares del sensor de flujo óptico.

Las ecuaciones 3.30 y 3.31 se simplifican al considerar que el movimiento traslacional de la componente z es igual a cero $T_z = 0$ debido a que la longitud focal es constante. Además, la división de cualquier variable por la longitud focal es despreciable debido a su valor pequeño. Por lo tanto, se obtienen las ecuaciones 3.32 y 3.33.

$$\nu_x = \frac{-T_x f}{Z} - \omega_y f + \omega_z y, \quad (3.32)$$

$$\nu_y = \frac{-T_y f}{Z} + \omega_x f - \omega_z x. \quad (3.33)$$

Las ecuaciones 3.30-3.33 muestran que las componentes ν_x y ν_y son iguales a una parte traslacional sumados a una parte rotacional. La parte traslacional es la que lleva información de la profundidad del escenario Z mientras que la parte rotacional carece de esa información. Con lo anterior, las velocidades angulares se usan para compensar los movimientos del sensor de flujo óptico, sin embargo, es posible despreciarlos si $(w_x, w_y, w_z) \approx 0$.

Para llevar el flujo óptico a velocidades traslacionales escalados a metros, proyectados a reales, se realiza con la ecuación 3.34.

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v} \frac{Z}{f}. \quad (3.34)$$

Donde, $\mathbf{v}_m = [v_x, v_y]^T$ es el vector de velocidades traslacionales escalados y $\mathbf{v} = [\nu_x, \nu_y]^T$ es el vector de flujos ópticos.

Esta sección ha presentado sistemas de navegación y sus sensores para utilizarlos en los vehículos aéreos no tripulados.

3.2. Vehículos aéreos no tripulados

Los vehículos aéreos no tripulados (UAV) son aeronaves capaces de volar sin tripulación y permanecer en el aire durante un tiempo determinado. Una de las clasificaciones de los vehículos aéreos no tripulados es mediante sus sistemas de propulsión de vuelo, por ejemplo, los UAV con sistemas de propulsión de ala fija se clasifican como aviones; los UAV con sistemas de propulsión de máquinas eléctricas rotacionales se clasifican como multirrotores. Estos multirrotores se subclasifican dependiendo del número de motores eléctricos empleados para su vuelo, esto determina el nombre del UAV tipo multirrotor. Por ejemplo, los trirrotores emplean tres motores, los quadrotores emplean cuatro motores, los hexarrotos emplean seis motores eléctricos, y así sucesivamente.

Los motores eléctricos del UAV llamados *brushless* realizan fácilmente los movimientos para desplazarse y elevarse. Este tipo de motores eléctricos, rotores, se encuentran posicionados sobre estructuras en forma de cruz " + " o de equis " X ". La Figura 3.12 muestra la estructura del UAV en forma de " X ". Además, la misma Figura 3.12 muestra los ángulos *roll* ϕ , *pitch* θ y *yaw* ψ que realizan desplazamientos rotacionales¹² del UAV. El ángulo *roll* o movimiento alabeo consiguen los desplazamientos de izquierda a derecha; el ángulo *pitch* o movimiento cabeceo realiza los desplazamientos hacia adelante y hacia atrás; el ángulo *yaw* o movimiento guiñada realiza giros sobre su propio eje.

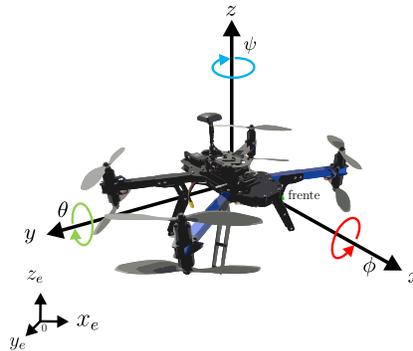


Figura 3.12: Movimientos rotacionales del UAV.

Los movimientos traslacionales y rotacionales que realizan los vehículos aéreos no tripulados se analizan a partir de sus modelos dinámicos.

3.2.1. Modelo dinámico de los vehículos aéreos no tripulados

Las ecuaciones de la Tabla 3.2 representan el modelo dinámico de los UAV de tipo multirrotor [Ortiz et al., 2015]. Este modelo dinámico se divide en el subsistema traslacional y rotacional como se muestra en la Figura 3.13. El subsistema traslacional realiza los movimientos en las coordenadas x , y y z , mientras que el subsistema rotacional realiza los movimientos en las coordenadas ϕ , θ y ψ .

¹²En el idioma inglés los ángulos *roll*, *pitch* y *yaw* hacen referencia a los ángulos de Euler mientras que la traducción al español hace referencia a los movimientos rotacionales, por lo tanto, los ángulos alabeo, cabeceo y guiñada no son comunes.

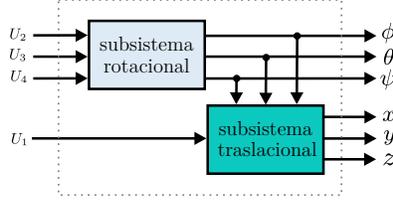


Figura 3.13: Los subsistemas dinámicos de los vehículos aéreos no tripulados.

El subsistema rotacional no depende del subsistema traslacional para realizar los desplazamientos angulares, sin embargo, el subsistema traslacional depende del subsistema rotacional para desplazarse en las coordenadas x , y y z . Esto hace posible analizar de forma independiente a los dos subsistemas dinámicos del UAV.

Tabla 3.2: Ecuaciones dinámicas de los vehículos aéreos no tripulados tipo multirrotor.

Subsistema rotacional

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta}\Omega_r + \frac{l}{I_x} U_2, \quad (3.35)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi}\Omega_r + \frac{l}{I_y} U_3, \quad (3.36)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} U_4. \quad (3.37)$$

Subsistema traslacional

$$\ddot{x} = (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) \frac{1}{m} U_1, \quad (3.38)$$

$$\ddot{y} = (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) \frac{1}{m} U_1, \quad (3.39)$$

$$\ddot{z} = -g + (c\theta c\phi) \frac{1}{m} U_1. \quad (3.40)$$

Donde, x , y , z , ϕ , θ y ψ son las variables de estado del UAV; U_i es la i -ésima entrada al UAV, con $i = 1, 2, 3, 4$; Ω_r es la perturbación de efecto giroscópico en el UAV. Además, I_x , I_y y I_z son los momentos inerciales del UAV y J_r es el momento inercial de los rotores; m es la masa del UAV, l es la distancia desde el centro de gravedad del UAV hasta el centro del rotor y g es la aceleración de la gravedad.

Se considera la notación reducida de las funciones trigonométricas $s\phi = \sin(\phi)$ y $c\phi = \cos(\phi)$, así sucesivamente con las funciones restantes.

Las ecuaciones 3.35-3.40 representan el modelo matemático generalizado de los UAV de tipo multirrotor, los cuales no consideran la cantidad de motores eléctricos en ellos. Las entradas U_1 , U_2 , U_3 y U_4 son funciones de las velocidades angulares del n -ésimo motor eléctrico de los UAV. Por ejemplo, para el octorotor de la Figura 3.14 estas entradas se describen en las ecuaciones 3.41-3.45.

$$U_1 = b (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_5^2 + \Omega_6^2 + \Omega_7^2 + \Omega_8^2) \quad (3.41)$$

$$U_2 = b (\Omega_3^2 - \Omega_4^2 + \Omega_7^2 - \Omega_8^2) \quad (3.42)$$

$$U_3 = b (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_5^2 - \Omega_6^2) \quad (3.43)$$

$$U_4 = d (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2 + \Omega_5^2 + \Omega_6^2 - \Omega_7^2 - \Omega_8^2) \quad (3.44)$$

$$\Omega_r = -\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2 - \Omega_5^2 - \Omega_6^2 + \Omega_7^2 + \Omega_8^2 \quad (3.45)$$

Donde, Ω_n es la velocidad angular del motor, con $n = 1, 2, 3, \dots, 8$ n -ésimo; b es el factor de empuje de la propela del rotor y d es el factor de resistencia aerodinámica de la propela del rotor. En términos físicos las ecuaciones 3.41-3.45 se interpretan como la fuerza de empuje U_1 que hace elevar al UAV; U_2 , U_3 y U_4 como los pares rotacionales τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ que actúan sobre los ángulos *roll* ϕ , *pitch* θ y *yaw* ψ del UAV.

La Figura 3.14 muestra las fuerzas de los n -ésimos motores eléctricos M para realizar el vuelo del UAV tipo octorrotor.

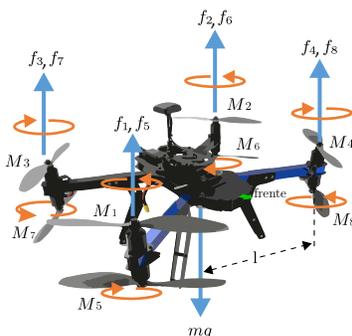


Figura 3.14: Fuerzas y pares rotacionales del UAV tipo octorrotor.

Los parámetros y las unidades de un UAV tipo octorrotor en el sistema internacional se muestran en la Tabla 3.3 [Merheb et al., 2015].

Tabla 3.3: Parámetros y unidades de un UAV tipo octorrotor.

| Parámetro | Valor | Variable | Unidad |
|-----------|-----------------|--------------------------|-----------|
| m | 1.64 kg | posición traslacional | m |
| l | 0.4 m | velocidad traslacional | m/s |
| g | 9.81 m/s^2 | aceleración traslacional | m/s^2 |
| d | $3e - 5 Nms^2$ | ángulo | rad |
| b | $10e - 6 Ns^2$ | velocidad angular | rad/s |
| I_x | $44e - 3 kgm^2$ | aceleración angular | rad/s^2 |
| I_y | $44e - 3 kgm^2$ | fuerza de empuje | N |
| I_z | $88e - 3 kgm^2$ | par rotacional | Nm |
| J_r | $90e - 6 kgm^2$ | | |

La simulación de las ecuaciones de la Tabla 3.2 con los parámetros de la Tabla 3.3 requieren de métodos control para estabilizar el vuelo del UAV. Estos métodos de control son como los propuestos en [Ortiz et al., 2015] y [Muro et al., 2013].

La Figura 3.15 muestra el diagrama generalizado para el control de posición traslacional de los UAV.

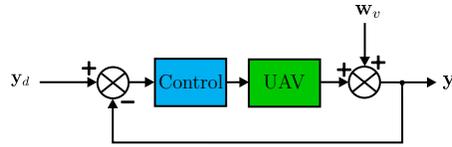


Figura 3.15: Lazo de control de los vehículos aéreos no tripulados.

$\mathbf{y}_d = [x_d \ y_d \ z_d]^T$ es el vector de referencia deseada del UAV en coordenadas rectangulares.

$\mathbf{y}_d = [x \ y \ z]^T$ es el vector de salidas del UAV en coordenadas rectangulares.

$\mathbf{w}_v = [w_{vx} \ w_{vy} \ w_{vz}]^T$ es el vector de perturbaciones del UAV los cuales son velocidades traslacionales del viento que afectan al subsistema traslacional del UAV.

Este capítulo ha presentado los conceptos necesarios para realizar las estrategias de estimación de posición en los vehículos aéreos no tripulados ante errores de posicionamiento GPS. Estas estrategias de posicionamiento se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Estrategias de estimación de posición

Esta sección presenta las estrategias de estimación de posición para los vehículos aéreos no tripulados (UAV), enfocado a la fusión de datos del sensor IMU, del receptor GPS y del sensor de flujo óptico para evitar errores de posicionamiento GPS. La sección 4.1 muestra las ecuaciones del sistema de navegación para los UAV; la sección 4.2 introduce el sistema de navegación INS/GPS; la sección 4.3 muestra el desarrollo del sistema de navegación INS/GPS para evitar errores de posicionamiento GPS; la sección 4.4 muestra la propuesta del sistema de navegación INS/GPS/OF con el sensor de flujo óptico para evitar errores de posicionamiento GPS. En cada sistema de navegación se presenta el filtro de Kalman *unscented* como algoritmo de fusión de datos de los sensores de navegación.

4.1. Ecuaciones del sistema de navegación

Las ecuaciones de navegación se utilizan para la estimación de posición de vehículos por medio de sus comportamientos cinemáticos, es decir, el movimiento realizado sin considerar las fuerzas que la originan ¹. Por otra parte, estas ecuaciones de navegación se usan en los algoritmos predictores-correctores para la estimación de posición de vehículos.

La ecuación 4.1 [Outamazirt et al., 2015] tiene la ventaja de utilizar el marco de referencia fijo en el vehículo (*b-frame*) y el marco de referencia fijo en la tierra, este último marco de referencia es llevado al marco de nivel local (*local-level frame*). Esta transformación de marcos de referencia se muestra en la sección 3.1.1.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^L(\phi, \theta, \psi) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_b^L(\phi, \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ a_x \\ a_y \\ a_z \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Las matrices $\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta, \psi)$ y $\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta)$ son las matrices de rotación para realizar el cambio del marco de referencia fijo en el vehículo b al marco fijo en la tierra L . Con esto es posible trabajar en el mismo marco de referencia [Ortiz, 2018] y [Outamazirt et al., 2015]. $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ es la matriz identidad que se obtiene

¹Definición en mecánica.

al considerar aceleraciones lineales como en [Rhudy et al., 2011]; $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ es la matriz de ceros. Estas matrices se muestran a continuación².

$$\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\psi \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t g\theta & c\phi t g\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi s e\theta & c\phi s e\theta \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Donde, el vector de estados $\mathbf{x} = [x \ y \ z \ u \ v \ w \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ se constituye por: las coordenadas x , y , y z en UTM; las velocidades traslacionales u , v , y w referidas al marco del vehículo; y los ángulos de Euler ϕ , θ , ψ . Por otra parte, el vector de entradas $\mathbf{u} = [a_x \ a_y \ a_z \ p \ q \ r]^T$ se constituye por: las aceleraciones lineales a_x , a_y y a_z ; y las velocidades angulares p , q y r .

Este vector de entradas \mathbf{u} lleva la información dinámica del UAV para utilizarlo en la ecuación 4.1 a diferencia de las ecuaciones de la Tabla 3.2 de la sección 3.2 donde la información dinámica se obtiene apartir del las velocidades angulares de los rotores del UAV. Sin embargo, ambos modelos dinámicos son equivalentes para la estimación de posición del UAV. El primer modelo matemático realiza la estimación de posición en función de la información dinámica de las señales de los sensores³ $\mathbf{u} = \mathbf{f}(a_x, a_y, a_z, p, q, r)$ mientras que el segundo modelo matemático la realiza en función de las velocidades angulares y propiedades de los rotores del UAV $\mathbf{U} = \mathbf{f}(\Omega_n, b, d)$, con $n = 1, 2, 3, \dots, 8$. El análisis de la equivalencia de las ecuaciones es posible obtenerlo conforme en [Ortiz, 2018].

Por otra parte, la ecuación 4.1 representa el sistema dinámico no lineal, mientras que la ecuación 4.6 representa el sistema dinámico linealizado en el punto de operación *hover*. Este sistema dinámico linealizado se realiza en el Anexo C para obtener sus matrices jacobianas y utilizarlos en los algoritmos predictores-correctores lineales.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Los sistemas de navegación continuos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ de las ecuaciones 4.1 y 4.6 se discretizan numéricamente con el método de Euler para obtener $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ y $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$ y utilizarlos en los algoritmos predictores-correctores.

²Con la notación reducida $c\phi = \cos(\phi)$, $s\phi = \sin(\phi)$, $t g\theta = \tan(\theta)$, $s e\theta = \sec(\theta)$, entre otros.

³Leídas por el sensor inercial como se muestra en la sección 3.1.6

4.2. Sistema de navegación INS/GPS

El diagrama de la Figura 4.1 muestra el sistema de navegación INS/GPS [Noureldin et al., 2013] que utiliza el sistema de navegación inercial (INS, *Inertial Navigation System*) y el sistema de posicionamiento global (GPS, *Global Positioning System*) los cuales están implementados en el UAV para su estimación de posición.

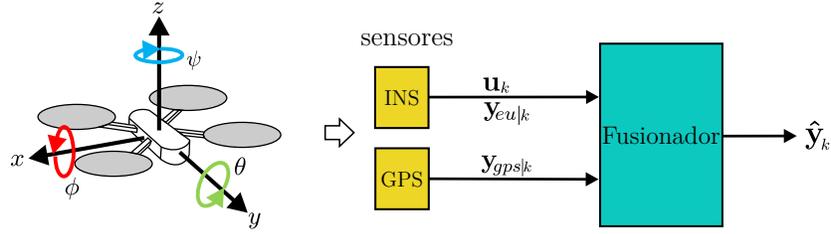


Figura 4.1: Sistema de navegación INS/GPS.

Donde,

$\mathbf{u}_k = [a_x \ a_y \ a_z \ p \ q \ r]^T_k$ es el vector de entradas del sistema dinámico; a_x , a_y y a_z son aceleraciones lineales; p , q y r son velocidades angulares del giroscopio. Estas variables se obtienen del sensor IMU.

$\mathbf{y}_{gps|k} = [x \ y \ z]^T_k$ es el vector de mediciones del GPS convertido a coordenadas UTM.

Además de los vectores anteriores, para reducir los inconvenientes de ruido y *bias* en el giroscopio durante la implementación práctica del sistema de navegación INS/GPS, se agrega la medición $\mathbf{y}_{eu|k}$ que se obtiene del sistema de navegación inercial INS.

$\mathbf{y}_{eu|k} = [\phi \ \theta \ \psi]^T_k$ es el vector de los ángulos de Euler. Esta consideración tiene dos ventajas: 1) contar siempre con los ángulos de Euler para realizar la transformación de marcos de referencia en toda la navegación del UAV. 2) evitar aumentar el número de estados en el sistema de navegación con errores de tipo *bias* presentes en las mediciones angulares.

En la parte de los algoritmos predictores-correctores se usan filtros de Kalman como fusionadores de señales de sensores. La Figura 4.2 muestra el diagrama generalizado de los algoritmos de Kalman para el sistema de navegación INS/GPS.

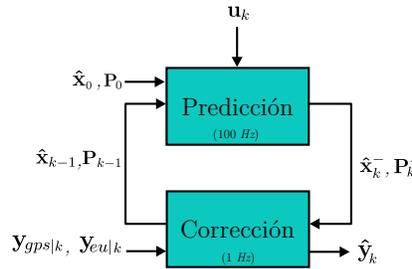


Figura 4.2: Filtro de Kalman generalizado en el sistema de navegación INS/GPS.

Los filtros de Kalman KF, EKF y UKF se muestran en las Tablas 2.1, 2.1 y 2.1 para su implementación en el sistema de navegación GPS/INS. Las frecuencias de las predicciones y de las correcciones de estos filtros se realizan a valores diferentes. Las predicciones con el vector de entradas \mathbf{u}_k se realizan a 100 Hz que es la velocidad de muestreo del sensor inercial. Las corrección con el vector de mediciones

$\mathbf{y}_{gps|k}$ se realizan a 1 Hz que es la frecuencia de muestreo del receptor GPS.

Además, la agregación de la medición $\mathbf{y}_{eu|k}$ solo realiza la corrección de los ángulos de Euler en la parte rotacional del sistema de navegación.

4.3. Sistema de navegación INS/GPS + estrategia para evitar errores de posicionamiento

La Figura 4.3 muestra la propuesta de la estrategia de estimación de posición para evitar errores de posicionamiento en el GPS. Esta detección se realiza con funciones de membresía a partir de los datos disponibles en el receptor GPS. El bloque fuzzificador es el que realiza la toma de decisiones para realizar la fusión de datos en el bloque fusionador a partir de regiones validas de GPS.

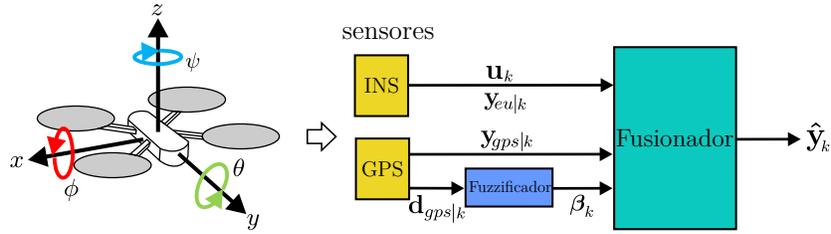


Figura 4.3: Sistema de navegación INS/GPS + estrategia para evitar errores de posicionamiento.

A partir de los vectores \mathbf{u}_k , $\mathbf{y}_{gps|k}$ y $\mathbf{y}_{eu|k}$ definidos en la sección 4.2, en esta estrategia de estimación de posición se agregan los vectores $\mathbf{d}_{gps|k}$ y β_k que se explican a continuación.

$\mathbf{d}_{gps|k} = [EST \ NSAT \ PDOP \ HDOP \ VDOP \ SNR]_k^T$ es el vector de datos disponibles del GPS [NMEA, 2019]; $EST \in \{A, V\}$ es el estado (A) activo o (V) bloqueado; $NSAT \in \mathbb{R}$ es el número de satélites consultados; $PDOP \in \mathbb{R}$ (*position dilution of precision*) es el indicador del error de posición tridimensional; $HDOP \in \mathbb{R}$ (*horizontal dilution of precision*) es el indicador del error de posición bidimensional; $VDOP \in \mathbb{R}$ (*vertical dilution of precision*) es el indicador de error de posición vertical; $SNR \in \mathbb{R}$ (*signal to noise ratio*) es la relación ruido-síñal de cada satélite. Las condiciones normales de estos datos se presentan en las secciones 4.4.3 y 4.5.

La Figura 4.4 muestra las mediciones y los datos disponibles del receptor GPS para determinar los errores de posicionamiento en el sistema de navegación INS/GPS. La obtención de las mediciones y los datos del GPS se muestran en la sección 3.1.4.

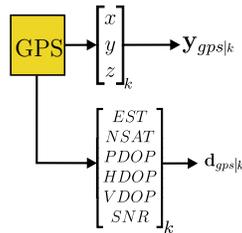


Figura 4.4: Mediciones y datos disponibles en el receptor GPS.

Por otra parte, $\beta_k = [\beta_0 \ \beta_{gps}]_k^T$ es el vector de ponderaciones [Korayem et al., 2018] que actúa en función de los datos del GPS para realizar las estimaciones *a priori* y *a posteriori* de los filtros de Kalman en caso de presentarse errores de posicionamiento GPS; β_0 es la ponderación de la parte de

predicción de los filtros de Kalman, estimación *a priori*; β_{gps} es la ponderación de la estimación *a posteriori* con el GPS.

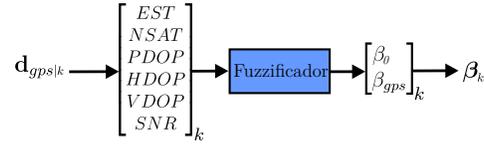


Figura 4.5: Datos disponibles en el receptor GPS para la toma de decisiones a partir de funciones de membresía.

Los valores de ponderación se obtienen en el bloque *fuzzificador* de la Figura 4.5, se muestran en las ecuaciones 4.7 y 4.8.

$$\beta_{gps} = \mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps}), \quad (4.7)$$

$$\beta_0 = \overline{\beta_{gps}} = 1 - \beta_{gps}. \quad (4.8)$$

Donde, se debe de cumplir la condición $\beta_0 + \beta_{gps} = 1$. Además, $\mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps})$ es la función de membresía equivalente del GPS que se obtiene en la sección 4.4.3. Por lo tanto, la detección de errores de posicionamiento en el GPS es posible usando funciones de membresía utilizando los datos disponibles en él.

Lo anterior, implica la modificación de los filtros de Kalman en el paso de corrección para evitar errores de posicionamiento GPS como se muestra a continuación.

4.3.1. Estimación de posición de los algoritmos KF y EKF en el sistema de navegación INS/GPS

En los algoritmos KF y EKF el procedimiento para la estimación de posición en el sistema de navegación INS/GPS es el mismo. La única diferencia en el algoritmo EKF es la consideración de las matrices jacobianas del sistema de navegación del Anexo C, como lo establece el algoritmo EKF de la Tabla 2.2.

Por lo tanto, los algoritmos basados en los filtros de Kalman lineal y extendido para el sistema de navegación INS/GPS son los siguientes.

Paso 0: condiciones iniciales ($k=0$)

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad (4.9)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]. \quad (4.10)$$

Inicia recursividad ($k=1,2,3,\dots$)

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k (100 Hz)

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (4.12)$$

Paso 2.1: corrección con la medición $\mathbf{y}_{eu|k}$ (100 Hz)

$$\mathcal{K}_{eu|k} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{eu}^T (\mathbf{C}_{eu} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{eu}^T + \mathbf{R}_{eu})^{-1}, \quad (4.13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{eu|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{eu|k} (\mathbf{y}_{eu|k} - \mathbf{C}_{eu} \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (4.14)$$

$$\mathbf{P}_{eu|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{eu|k} \mathbf{C}_{eu}) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.15)$$

Paso 2.2: corrección con la medición $\mathbf{y}_{gps|k}$ (1 Hz)

$$\mathcal{K}_{gps|k} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gps}^T (\mathbf{C}_{gps} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gps}^T + \mathbf{R}_{gps})^{-1}, \quad (4.16)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{gps|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{gps|k} (\mathbf{y}_{gps|k} - \mathbf{C}_{eu} \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (4.17)$$

$$\mathbf{P}_{gps|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{gps|k} \mathbf{C}_{gps}) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.18)$$

Paso 3: fusión global (100 Hz)

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \beta_{0|k} \hat{\mathbf{x}}_{eu|k} + \beta_{gps|k} \hat{\mathbf{x}}_{gps|k}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{P}_k = \beta_{0|k} \mathbf{P}_{eu|k} + \beta_{gps|k} [\mathbf{P}_{gps|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})^T]. \quad (4.20)$$

Paso 4: siguiente iteración ($k+1$)

Considerando las ecuaciones lineales del sistema de navegación, $\hat{\mathbf{x}}_k^- \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a priori*; $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado en la fusión global; $\hat{\mathbf{x}}_{eu|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a posteriori* en la parte rotacional; $\hat{\mathbf{x}}_{gps|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a posteriori* con mediciones del GPS; $\mathcal{K}_{eu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ es la matriz de la ganancia de Kalman en la parte rotacional; $\mathcal{K}_{gps|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ es la matriz de la ganancia de Kalman con mediciones del GPS; $\mathbf{P}_k^- \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a priori*; $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas en la fusión global; $\mathbf{P}_{eu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* en la parte rotacional; $\mathbf{P}_{gps|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* en el GPS. $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^6$ es el vector de entradas del sensor IMU; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de parámetros del sistema de navegación; $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ es la matriz de control del sistema de navegación; $\mathbf{C}_{eu} \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$ es la matriz de mediciones de la parte rotacional; $\mathbf{C}_{gps} \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$ es la matriz de mediciones con el GPS; $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas del sistema de navegación; $\mathbf{R}_{eu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones de la parte rotacional; $\mathbf{R}_{gps} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones del GPS; $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz identidad. $\mathbf{y}_{eu|k} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de mediciones de la parte rotacional; $\mathbf{y}_{gps|k} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de mediciones con el GPS.

Este filtro de Kalman realiza la fusión global con los coeficientes $\beta_{0|k}$ y $\beta_{k|gps}$ dependiendo de las regiones de válidas del GPS. La estimación de posición para el algoritmo UKF se muestra a continuación.

4.3.2. Estimación de posición del algoritmo UKF en el sistema de navegación INS/GPS

En el algoritmo de UKF la modificación de las matrices de covarianza se realizan dependiendo de las mediciones consideradas con los ángulos de Euler en la parte rotacional y con las posiciones del GPS en la parte traslacional. El cálculo de los parámetros de la transformada *unscented* se realiza de acuerdo a la Tabla 2.3. Este algoritmo modificado se basa en las ecuaciones de la sección 2.3.

Paso 0: condiciones iniciales ($k=0$)

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad (4.21)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]. \quad (4.22)$$

Inicia recursividad ($k=1,2,3,\dots$)

Puntos sigma:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}]. \quad (4.23)$$

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k (100 Hz)

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- = \mathbf{f}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (4.24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^-, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-]^T + \mathbf{Q}, \quad (4.26)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{i,k}^- = \mathbf{h}[\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^-], \quad (4.27)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{i,k}^-. \quad (4.28)$$

Paso 2.1: corrección con la medición $\mathbf{y}_{eu|k}$ (100 Hz)

$$\mathbf{P}_{eu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-][\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-]^T + \mathbf{R}_{eu}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{P}_{eu|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-]^T, \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{eu|k} = \mathbf{P}_{eu|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{eu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k}^{-1}, \quad (4.31)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{eu|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \boldsymbol{\mathcal{K}}_{eu|k} (\mathbf{y}_{eu|k} - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-), \quad (4.32)$$

$$\mathbf{P}_{eu|k} = \mathbf{P}_k^- - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{eu|k} \mathbf{P}_{eu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{eu|k}^T. \quad (4.33)$$

Paso 2.2: corrección con la medición $\mathbf{y}_{gps|k}$ (1 Hz)

$$\mathbf{P}_{gps|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{gps|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-][\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{gps|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-]^T + \mathbf{R}_{gps}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{P}_{gps|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{gps|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-]^T, \quad (4.35)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{gps|k} = \mathbf{P}_{gps|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{gps|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k}^{-1}, \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{gps|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \boldsymbol{\mathcal{K}}_{gps|k} (\mathbf{y}_{gps|k} - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-), \quad (4.37)$$

$$\mathbf{P}_{gps|k} = \mathbf{P}_k^- - \boldsymbol{\mathcal{K}}_{gps|k} \mathbf{P}_{gps|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} \boldsymbol{\mathcal{K}}_{gps|k}^T. \quad (4.38)$$

Paso 3: fusión global (100 Hz)

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \beta_{0|k} \hat{\mathbf{x}}_{eu|k} + \beta_{gps|k} \hat{\mathbf{x}}_{gps|k}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{P}_k = \beta_{0|k} \mathbf{P}_{eu|k} + \beta_{gps|k} [\mathbf{P}_{gps|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})^T]. \quad (4.40)$$

Paso 4: siguiente iteración ($k+1$)

Considerando las ecuaciones no lineales del sistema de navegación, $\hat{\mathbf{x}}_k^- \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a priori*; $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado en la fusión global; $\hat{\mathbf{x}}_{eu|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a posteriori* en la parte rotacional; $\hat{\mathbf{x}}_{gps|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a posteriori* con mediciones del GPS; $\mathcal{K}_{eu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ es la matriz de la ganancia de Kalman en la parte rotacional; $\mathcal{K}_{gps|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ es la matriz de la ganancia de Kalman con mediciones del GPS; $\mathbf{P}_k^- \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a priori*; $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas en la fusión global; $\mathbf{P}_{eu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* en la parte rotacional; $\mathbf{P}_{eu|y_k y_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de covarianzas de innovación en la parte rotacional; $\mathbf{P}_{eu|x_k y_k} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ es la matriz de covarianzas cruzada en la parte rotacional; $\mathbf{P}_{gps|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* en el GPS; $\mathbf{P}_{gps|y_k y_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de covarianzas de innovación en el GPS; $\mathbf{P}_{gps|x_k y_k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz cruzada *a posteriori* en el GPS. $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^6$ es el vector de entradas del sensor IMU; $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas del sistema de navegación; $\mathbf{R}_{eu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones de la parte rotacional; $\mathbf{R}_{gps} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones del GPS. $\mathbf{y}_{eu|k} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de mediciones de la parte rotacional; $\mathbf{y}_{gps|k} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de mediciones con el GPS. $\mathcal{X}_{k-1} \in \mathbb{R}^{9 \times 19}$ es la matriz de propagación de puntos sigma; $\mathcal{X}_k^- \in \mathbb{R}^{9 \times 19}$ es la matriz de puntos sigma propagados en el sistema de navegación; $\mathcal{Y}_k^- \in \mathbb{R}^{9 \times 19}$ es la matriz de puntos sigma propagados en las mediciones del sistema de navegación; $\hat{\mathbf{y}}_k^-$ es el vector de salidas estimada *a priori* en lo cual se obtienen $\hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^- \in \mathbb{R}^3$ en la parte rotacional y $\hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^- \in \mathbb{R}^3$ en la parte traslacional con el GPS. Los valores de ponderación de puntos sigma W en la covarianza c y en la media m se obtienen de acuerdo a la Tabla 2.3.

La fusión global realiza la combinación de las estimaciones de la parte rotacional y traslacional del sistema de navegación INS/GPS. Las ponderaciones $\beta_{0|k}$ y $\beta_{gps|k}$ realizan la combinación de estimaciones dependiendo de las regiones de válida del GPS.

La Figura 4.6 muestra el diagrama general de los algoritmos de Kalman para el sistema de navegación INS/GPS en la estimación de posición del UAV y evitando errores de posicionamiento del GPS. Se observa que la predicción y corrección rotacional se encuentran a 100 Hz debido a la frecuencia de muestreo del sensor inercial, mientras que el receptor GPS se mantiene a 1 Hz para realizar correcciones en la parte traslacional.

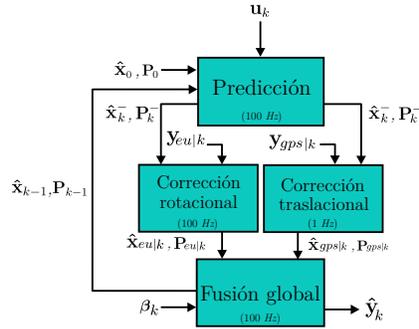


Figura 4.6: Estructura de los filtros de Kalman en el sistema de navegación INS/GPS + estrategia para evitar errores de posicionamiento.

La incorporación del sensor de flujo óptico al sistema de navegación INS/GPS para evitar errores de posicionamiento GPS se muestra a continuación.

4.4. Sistema de navegación INS/GPS/OF + estrategia para evitar errores de posicionamiento

La sección 4.2 describe el sistema de navegación INS/GPS mientras que la sección 4.3 presenta el mismo sistema de navegación considerando la estrategia para evitar errores de posicionamiento del GPS. Sin embargo, esta última estrategia de navegación no garantiza una estimación de posición adecuada ante la presencia de errores de posicionamiento y pérdida de señal GPS.

Por lo que esta sección presenta la estrategia de estimación INS/GPS/OF para evitar errores de posicionamiento GPS, como se muestra en la Figura 4.7. La agregación del sensor de flujo óptico (OF, *Optical Flow sensor*) es capaz de continuar con la estimación de posición del UAV ante situaciones de ausencia de señal GPS. Mientras que el bloque fuzzificador realiza la toma de decisiones para la fusión de datos de señales, el bloque replicador obtiene coordenadas globales a partir de mediciones del sensor de flujo óptico.

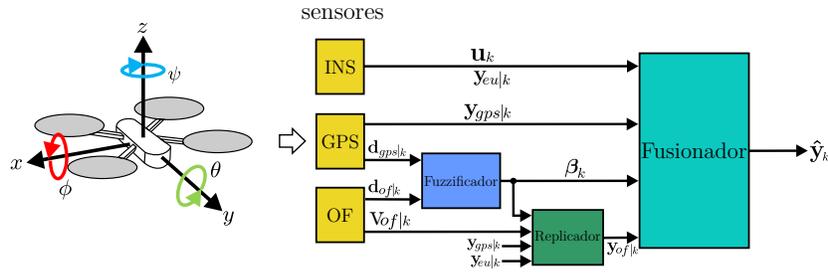


Figura 4.7: Sistema de navegación INS/GPS/OF.

Son considerados los vectores \mathbf{u}_k , $\mathbf{y}_{gps|k}$ y $\mathbf{y}_{eu|k}$ definidos en la sección 4.2; los vectores $\mathbf{d}_{gps|k}$ y β_k definidos en la sección 4.3. El sistema de navegación INS/GPS/OF utiliza los vectores $\mathbf{v}_{of|k}$, $\mathbf{y}_{of|k}$, $\mathbf{d}_{of|k}$, $\hat{\mathbf{y}}_k$ y el redimensionamiento del vector β_k los cuales se explican a continuación.

$\mathbf{v}_{of|k} = [v_x \ v_y \ d]_k^T$ es el vector de mediciones del sensor de flujo óptico OF; v_x y v_y son velocidades traslacionales en el marco fijo del vehículo; d es la distancia del UAV con respecto al suelo.

$\mathbf{d}_{of|k} = [CIMG \ d]_k^T$ es el vector de datos del sensor de flujo óptico; $CIMG \in \mathbb{R}$ es la calidad de la imagen del sensor de flujo óptico; $d \in \mathbb{R}$ es la altura del UAV con respecto al suelo.

$\mathbf{y}_{of|k} = [x \ y \ z]_k^T$ es el vector de mediciones de posicionamiento del sensor de flujo óptico que replican a las coordenadas UTM a partir de las mediciones del GPS en una región válida.

La Figura 4.8 muestra la relación de los vectores $\mathbf{v}_{of|k}$ y $\mathbf{y}_{of|k}$ en el bloque *replicador*. Lo cual una transformación de coordenadas se realiza con la matriz de rotación $\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta, \psi)$ para tener la misma referencia que el sistema de posicionamiento global. Posteriormente, se realiza la obtención de la posición a partir de un filtro de Kalman lineal con las ecuaciones de la Tabla 2.1.

La corrección en el bloque replicador se realiza con las mediciones del GPS solo si se presentan regiones válidas en él, esto se decide con el vector de ponderaciones β_k . Se asume que $d = constante$ para obtener sus velocidades $v_d = 0$. Este bloque obtiene coordenadas globales de posicionamiento a partir de mediciones del sensor de flujo óptico que son coordenadas relativas. La teoría del funcionamiento del sensor de flujo óptico se muestra en la sección 3.1.7.

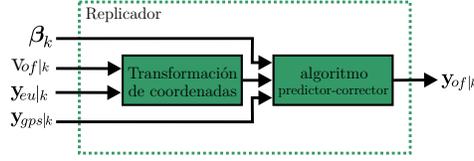


Figura 4.8: Replicador de coordenadas UTM con el sensor de flujo óptico.

$\hat{\mathbf{y}}_k = [\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z}]_k^T$ es el vector de salidas de las posiciones estimadas con los filtros de Kalman en coordenadas UTM.

$\beta_k = [\beta_0 \ \beta_{gps} \ \beta_{of} \ \beta_{gpsof}]_k^T$ es el vector de ponderaciones para la fusión de estimaciones. Además, se agregan los valores β_{of} y β_{gpsof} que ponderan al sensor de flujo óptico y a la fusión local del sensor de flujo óptico y del GPS.

La Figura 4.9 muestra el bloque *fuzzificador* que es la relación entre el vector de ponderaciones β_k y los vector de datos $\mathbf{d}_{gps|k}$ y $\mathbf{d}_{of|k}$. Con este bloque se realiza la toma de decisiones para realizar la fusión de datos en el bloque *fusionador* a partir del vector de ponderaciones β_k .

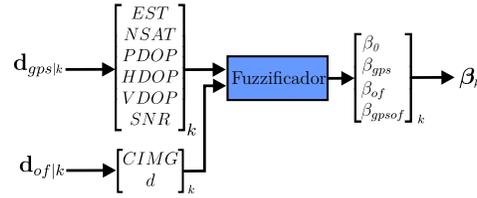


Figura 4.9: Vector de ponderaciones a partir de funciones de membresía.

El bloque *fuzzificador* contiene las ecuaciones 4.41-4.44 para obtener los valores de ponderación correspondientes a las regiones válidas de los sensores del sistema dinámico [Korayem et al., 2018]. Para ello se establece el escenario Z con las regiones válidas del receptor GPS y el sensor de flujo óptico, \mathcal{C}_{gps} y \mathcal{C}_{of} , como se muestra en la Figura 4.10 para analizar la relación de estos dos sensores.

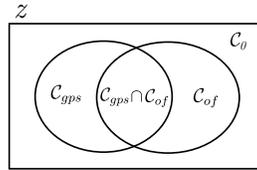


Figura 4.10: Regiones válidas del GPS y del sensor de flujo óptico.

A su vez, la asignación de los grados de coeficiente difusos de las regiones no válidas de sensores se definen en las ecuaciones 4.41-4.44.

$$\beta_{gps} = \mathcal{C}_{gps} \cap \overline{\mathcal{C}_{of}}, \quad (4.41)$$

$$\beta_{of} = \overline{\mathcal{C}_{gps}} \cap \mathcal{C}_{of}, \quad (4.42)$$

$$\beta_{gpsof} = \mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}, \quad (4.43)$$

$$\beta_0 = \overline{\mathcal{C}_{gps}} \cap \overline{\mathcal{C}_{of}}. \quad (4.44)$$

Donde, \cap es valor mínimo entre dos coeficientes difusos. Además, se cumple la condición $\beta_0 + \beta_{gps} + \beta_{of} + \beta_{gpsof} = 1$ como se muestra en el Anexo E.1.

Así mismo, la asignación de grados de coeficiente difusos $\mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps})$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}_{of})$ y $\mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of})$, dados los vectores \mathbf{d}_{gps} y \mathbf{d}_{of} , se obtienen con las ecuaciones 4.45-4.47.

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps}|\{\mathbf{d}_{gps}, \mathbf{d}_{of}\}) = \mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps}), \quad (4.45)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}_{of}|\{\mathbf{d}_{gps}, \mathbf{d}_{of}\}) = \mu_{of}(\mathbf{d}_{of}), \quad (4.46)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}|\{\mathbf{d}_{gps}, \mathbf{d}_{of}\}) = \mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps}) \cap \mu_{of}(\mathbf{d}_{of}). \quad (4.47)$$

Donde, $\mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps})$ es la función de membresía del GPS y $\mu_{of}(\mathbf{d}_{of})$ es la función de membresía del sensor de flujo óptico. Estas funciones de membresía se obtienen en la sección 4.4.3.

4.4.1. Estimación de posición de los algoritmos KF y EKF en el sistema de navegación INS/GPS/OF

El funcionamiento de los algoritmos KF y EKF es el mismo, requiriendo el algoritmo EKF las matrices jacobianas del sistema de navegación del Anexo C.

Este sistema de navegación INS/GPS/OF utiliza los filtros de Kalman con las mediciones del receptor GPS y del sensor de flujo óptico para la estimación de posición, como se muestra a continuación.

Paso 0: condiciones iniciales ($k=0$)

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad (4.48)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]. \quad (4.49)$$

Inicia recursividad ($k=1,2,3,\dots$)

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k (100 Hz)

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (4.51)$$

Paso 2.1: corrección con la medición $\mathbf{y}_{eu|k}$ (100 Hz)

$$\mathcal{K}_{eu|k} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{eu}^T (\mathbf{C}_{eu} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{eu}^T + \mathbf{R}_{eu})^{-1}, \quad (4.52)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{eu|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{eu|k} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_{eu} \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (4.53)$$

$$\mathbf{P}_{eu|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{eu|k} \mathbf{C}_{eu}) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.54)$$

Paso 2.2: corrección con la medición $\mathbf{y}_{gps|k}$ (1 Hz)

$$\mathcal{K}_{gps|k} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gps}^T (\mathbf{C}_{gps} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gps}^T + \mathbf{R}_{gps})^{-1}, \quad (4.55)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{gps|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{gps|k} (\mathbf{y}_{gps|k} - \mathbf{C}_{gps} \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (4.56)$$

$$\mathbf{P}_{gps|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{gps|k} \mathbf{C}_{gps}) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.57)$$

Paso 2.3: corrección con la fusión local de las mediciones $\mathbf{y}_{of|k}$ y $\mathbf{y}_{eu|k}$ (100 Hz)

$$\mathcal{K}_{ofeu|k} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{ofeu}^T (\mathbf{C}_{ofeu} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{ofeu}^T + \mathbf{R}_{ofeu})^{-1}, \quad (4.58)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{ofeu|k} (\mathbf{y}_{ofeu|k} - \mathbf{C}_{ofeu} \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (4.59)$$

$$\mathbf{P}_{ofeu|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{ofeu|k} \mathbf{C}_{ofeu}) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.60)$$

Paso 2.4: corrección con la fusión local de las mediciones $\mathbf{y}_{of|k}$ y $\mathbf{y}_{gps|k}$ (1 Hz)

$$\mathcal{K}_{gpsof|k} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gpsof}^T (\mathbf{C}_{gpsof} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gpsof}^T + \mathbf{R}_{gpsof})^{-1}, \quad (4.61)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{gpsof|k} (\mathbf{y}_{gpsof|k} - \mathbf{C}_{gpsof} \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (4.62)$$

$$\mathbf{P}_{gpsof|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{gpsof|k} \mathbf{C}_{gpsof}) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.63)$$

Paso 3: fusión global (100 Hz)

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \beta_{0|k} \hat{\mathbf{x}}_{eu|k} + \beta_{gps|k} \hat{\mathbf{x}}_{gps|k} + \beta_{of|k} \hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k} + \beta_{gpsof|k} \hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k}, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k = & \beta_{0|k} \mathbf{P}_{eu|k} + \beta_{gps|k} [\mathbf{P}_{gps|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})^T] \\ & + \beta_{of|k} [\mathbf{P}_{ofeu|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k})^T] \\ & + \beta_{gpsof|k} [\mathbf{P}_{gpsof|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k})^T] \end{aligned} \quad (4.65)$$

Paso 4: siguiente iteración ($k+1$)

Considerando las ecuaciones lineales del sistema de navegación y el dimensionamiento de sus matrices y vectores en la sección 4.3.1, se agregan: $\hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a posteriori* de la fusión local de la parte rotacional y traslacional con el sensor de flujo óptico; $\hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado *a posteriori* con la fusión local de las mediciones del GPS y del sensor de flujo óptico; $\mathcal{K}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ es la matriz de la ganancia de Kalman en la parte rotacional y la parte traslacional con el sensor de flujo óptico; $\mathcal{K}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ es la matriz de la ganancia de Kalman con mediciones del GPS y el sensor de flujo óptico; $\mathbf{P}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* en la parte rotacional y traslacional con el sensor de flujo óptico; $\mathbf{P}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* con mediciones del GPS y sensor de flujo óptico. $\mathbf{C}_{ofeu} \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ es la matriz de mediciones de la parte rotacional y la parte traslacional; $\mathbf{C}_{gpsof} \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ es la matriz de mediciones con el GPS y el sensor de flujo óptico; $\mathbf{R}_{ofeu} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones de la parte rotacional y traslacional; $\mathbf{R}_{gpsof} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones del GPS y el sensor de flujo óptico. $\mathbf{y}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^6$ es el vector de mediciones de la parte rotacional y traslacional; $\mathbf{y}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^6$ es el vector de mediciones con el GPS y el sensor de flujo óptico, estas mediciones se deben dimensionar correctamente.

Donde, $\hat{\mathbf{x}}_{gps|k}$, $\mathbf{P}_{gps|k}$, $\hat{\mathbf{x}}_{of|k}$ y $\mathbf{P}_{of|k}$ se obtienen de la corrección del GPS y del sensor de flujo óptico. Mientras que las matrices $\hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k}$ y $\mathbf{P}_{gpsof|k}$ resultan de la fusión a nivel local de los vectores de estados y matrices de covarianza del GPS y del sensor de flujo óptico OF.

Además, los vectores \mathbf{C}_{ofeu} y \mathbf{C}_{gpsof} se definen en las ecuaciones 4.66 y 4.67.

$$\mathbf{C}_{ofeu} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{of} \\ \mathbf{C}_{eu} \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

$$\mathbf{C}_{gpsof} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of} \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Los vectores \mathbf{R}_{ofeu} y \mathbf{R}_{gpsof} se definen en las ecuaciones 4.68 y 4.69.

$$\mathbf{R}_{ofeu} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{of} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{eu} \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{R}_{gpsof} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{gps} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{of} \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Además, los vectores de las mediciones \mathbf{y}_{ofeu} y \mathbf{y}_{gpsof} se definen en las ecuaciones 4.70 y 4.71.

$$\mathbf{y}_{ofeu} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{of} \\ \mathbf{y}_{eu} \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

$$\mathbf{y}_{gpsof} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{gps} \\ \mathbf{y}_{of} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

4.4.2. Estimación de posición de posición del algoritmo UKF en el sistema de navegación INS/GPS/OF

El algoritmo UKF incorpora las mediciones de los ángulos de Euler, GPS y flujo óptico para la estimación de posición. Además, en este sistema de navegación se realizan dos fusiones locales y una fusión global para la combinación de datos a partir de mediciones. Esta estrategia se basa en las ecuaciones de la sección 2.3.

Los pasos del algoritmo UKF para la estimación posición son los siguientes:

Paso 0: condiciones iniciales ($k=0$)

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad (4.72)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]. \quad (4.73)$$

Puntos sigma:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}]. \quad (4.74)$$

Paso 1: predicción con la entrada \mathbf{u}_k (100 Hz)

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- = \mathbf{f}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (4.75)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^-, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-]^T + \mathbf{Q}, \quad (4.77)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{i,k}^- = \mathbf{h}[\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^-], \quad (4.78)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \boldsymbol{\mathcal{Y}}_{i,k}^-. \quad (4.79)$$

Paso 2.1: corrección con la medición $\mathbf{y}_{eu|k}$ (100 Hz)

$$\mathbf{P}_{eu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-][\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-]^T + \mathbf{R}_{eu}, \quad (4.80)$$

$$\mathbf{P}_{eu|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-]^T, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{K}_{eu|k} = \mathbf{P}_{eu|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{eu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k}^{-1}, \quad (4.82)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{eu|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_{eu|k} (\mathbf{y}_{eu|k} - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-), \quad (4.83)$$

$$\mathbf{P}_{eu|k} = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_{eu|k} \mathbf{P}_{eu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_{eu|k}^T. \quad (4.84)$$

Paso 2.2: corrección con la medición $\mathbf{y}_{gps|k}$ (1 Hz)

$$\mathbf{P}_{gps|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathbf{y}_{gps|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-] [\mathbf{y}_{gps|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-]^T + \mathbf{R}_{gps}, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{P}_{gps|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathbf{x}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-] [\mathbf{y}_{gps|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-]^T, \quad (4.86)$$

$$\mathcal{K}_{gps|k} = \mathbf{P}_{gps|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{gps|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k}^{-1}, \quad (4.87)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{gps|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{gps|k} (\mathbf{y}_{gps|k} - \hat{\mathbf{y}}_{gps|k}^-), \quad (4.88)$$

$$\mathbf{P}_{gps|k} = \mathbf{P}_k^- - \mathcal{K}_{gps|k} \mathbf{P}_{gps|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} \mathcal{K}_{gps|k}^T. \quad (4.89)$$

Paso 2.3: corrección con la fusión local de las mediciones $\mathbf{y}_{of|k}$ y $\mathbf{y}_{eu|k}$ (100 Hz)

$$\mathbf{P}_{ofeu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} \mathbf{Y}_{ofeu|i,k} + \mathbf{R}_{gpsof}, \quad (4.90)$$

$$\mathbf{P}_{ofeu|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} \mathbf{X}_{ofeu|i,k}, \quad (4.91)$$

$$\mathcal{K}_{ofeu|k} = \mathbf{P}_{ofeu|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{ofeu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k}^{-1}, \quad (4.92)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{ofeu|k} (\mathbf{y}_{ofeu|k} - \hat{\mathbf{y}}_{ofeu|k}^-), \quad (4.93)$$

$$\mathbf{P}_{ofeu|k} = \mathbf{P}_k^- - \mathcal{K}_{ofeu|k} \mathbf{P}_{ofeu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} \mathcal{K}_{ofeu|k}^T. \quad (4.94)$$

Paso 2.4: corrección con la fusión local de las mediciones $\mathbf{y}_{of|k}$ y $\mathbf{y}_{gps|k}$ (1 Hz)

$$\mathcal{K}_{gpsof|k} = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gpsof}^T (\mathbf{C}_{gpsof} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_{gpsof}^T + \mathbf{R}_{gpsof})^{-1}, \quad (4.95)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathcal{K}_{gpsof|k} (\mathbf{y}_{gpsof|k} - \mathbf{C}_{gpsof} \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (4.96)$$

$$\mathbf{P}_{gpsof|k} = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_{gpsof|k} \mathbf{C}_{gpsof}) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.97)$$

Paso 3: fusión global (100 Hz)

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \beta_{0|k} \hat{\mathbf{x}}_{eu|k} + \beta_{gps|k} \hat{\mathbf{x}}_{gps|k} + \beta_{of|k} \hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k} + \beta_{gpsof|k} \hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k}, \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k = & \beta_{0|k} \mathbf{P}_{eu|k} + \beta_{gps|k} [\mathbf{P}_{gps|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gps|k})^T] \\ & + \beta_{of|k} [\mathbf{P}_{ofeu|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k})^T] \\ & + \beta_{gpsof|k} [\mathbf{P}_{gpsof|k} + (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k})^T] \end{aligned} \quad (4.99)$$

Paso 4: siguiente iteración ($k+1$)

Considerando las ecuaciones no lineales del sistema de navegación y de sus matrices en la sección 4.3.2, se agregan: $\hat{\mathbf{x}}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado de la fusión local de la parte rotacional y la parte traslacional con el sensor de flujo óptico; $\hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^9$ es el vector de estados estimado de la fusión local de mediciones del GPS y del sensor de flujo óptico; $\mathcal{K}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ es la matriz de la ganancia de Kalman en la parte rotacional y en la parte traslacional; $\mathcal{K}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ es la matriz de la ganancia de Kalman con mediciones del GPS y sensor de flujo óptico; $\mathbf{P}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* en la parte rotacional; $\mathbf{P}_{ofeu|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de covarianzas de innovación en la parte rotacional; $\mathbf{P}_{ofeu|\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ es la matriz de covarianzas cruzada en la parte rotacional; $\mathbf{P}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz de covarianzas *a posteriori* en el GPS y el sensor de flujo óptico. $\mathbf{R}_{ofeu} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones de la parte rotacional y la parte traslacional; $\mathbf{R}_{gpsof} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de covarianzas de las mediciones del GPS y el sensor de

flujo óptico. $\mathbf{y}_{ofeu|k} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de mediciones de la parte rotacional y la parte traslacional; $\mathbf{y}_{gpsof|k} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de mediciones con el GPS y el sensor de flujo óptico. $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ es la matriz identidad.

El vector de ponderaciones β_k realiza la fusión global de las ecuaciones 4.98 y 4.99 [Korayem et al., 2018]. Los vectores $\hat{\mathbf{x}}_{gps|k}$, $\mathbf{P}_{gps|k}$, $\hat{\mathbf{x}}_{of|k}$ y $\mathbf{P}_{of|k}$ se obtienen de las correcciones a partir de las señales del receptor GPS y del sensor de flujo óptico. Mientras que los vectores $\hat{\mathbf{x}}_{gpsof|k}$ y $\mathbf{P}_{gpsof|k}$ representan la fusión a nivel local de los vectores de estados y de las matrices de covarianza del GPS y el sensor de flujo óptico.

Las matrices aumentadas $\mathbf{Y}_{ofeu|i,k}$ y $\mathbf{X}_{ofeu|i,k}$ se representan en las ecuaciones 4.100 y 4.101.

$$\mathbf{Y}_{ofeu|i,k} = \begin{bmatrix} [\mathbf{y}_{of|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{of|k}^-][\mathbf{y}_{of|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{of|k}^-]^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & [\mathbf{y}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-][\mathbf{y}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-]^T \end{bmatrix}. \quad (4.100)$$

$$\mathbf{X}_{ofeu|i,k} = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\mathbf{y}_{of|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{of|k}^-]^T & [\mathbf{x}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\mathbf{y}_{eu|i,k}^- - \hat{\mathbf{y}}_{eu|k}^-]^T \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

Las ecuaciones 4.95-4.97 usan las matrices \mathbf{C}_{gpsof} y \mathbf{R}_{gpsof} , que consideran mediciones lineales⁴ en el receptor GPS y el sensor de flujo óptico para realizar la fusión de datos a nivel local del algoritmo UKF. Esta dos matrices se calculan de acuerdo a las ecuaciones 4.67 y 4.69. La demostración de la linealidad en las mediciones se realiza en el Anexo E.2.

La Figura 4.11 muestra la estructura de los filtros de Kalman para realizar las estimaciones de posiciones en el sistema de navegación INS/GPS/OF. De las cuatro correcciones, dos se realizan a la frecuencia de muestreo más lento, a 1 Hz del GPS, mientras que las restantes se realizan a la frecuencia de muestreo del sensor inercial 100 Hz.

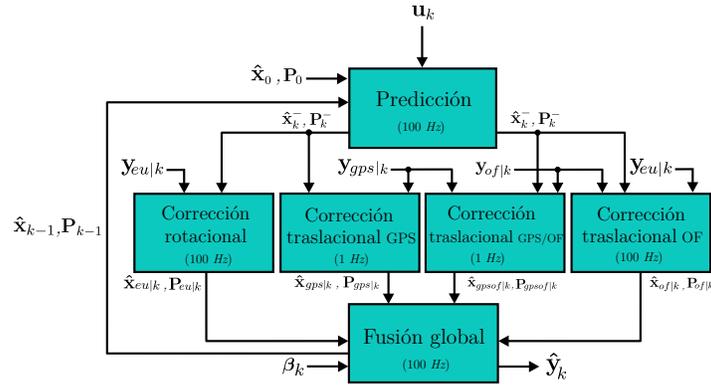


Figura 4.11: Estructura de los filtros de Kalman para el sistema de navegación INS/GPS/OF.

Estas secciones han presentado las estrategias de estimación de posición en los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF basados en algoritmos de Kalman.

Las siguientes secciones presentan la selección de las funciones de membresía del GPS y del sensor de flujo óptico para evitar errores de posicionamiento.

⁴Mediciones lineales del tipo $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$, a diferencia de las mediciones no lineales $\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k$. En ambos el ruido es aditivo.

4.4.3. Selección de funciones de membresía para la validez de sensores

Las funciones de membresía para la toma de decisiones son de tipo⁵: 1) escalón, 2) *gamma* y 3) complemento de *gamma*, las cuales se muestran en la Figura 4.12.

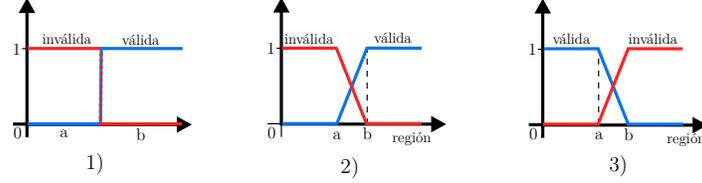


Figura 4.12: Funciones de membresía: 1) escalón, 2) *gamma* y 3) complemento de *gamma*.

El análisis de sensores se realiza en sus regiones válidas para obtener funciones de membresía que dependen de la naturaleza de sus mediciones.

De acuerdo con los vectores de datos $\mathbf{d}_{gps|k}$ y $\mathbf{d}_{of|k}$, es posible determinar las definiciones 4.102-4.107 para las funciones de membresía del GPS.

$$\mu_{gps_1} = f_{est}(k, EST), \quad (4.102)$$

$$\mu_{gps_2} = f_{nsat}(k, NSAT), \quad (4.103)$$

$$\mu_{gps_3} = f_{pdop}(k, PDOP), \quad (4.104)$$

$$\mu_{gps_4} = f_{hdop}(k, HDOP), \quad (4.105)$$

$$\mu_{gps_5} = f_{vdop}(k, VDOP), \quad (4.106)$$

$$\mu_{gps_6} = f_{snr}(k, SNR). \quad (4.107)$$

Las definiciones 4.108 y 4.109 para las funciones de membresía del sensor de flujo óptico son:

$$\mu_{of_1} = f_{cimg}(k, CIMG), \quad (4.108)$$

$$\mu_{of_2} = f_d(k, d). \quad (4.109)$$

Con las ecuaciones anteriores se forman las funciones de membresía $\mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps})$ y $\mu_{of}(\mathbf{d}_{of})$ que dependen de las consideraciones de cada sensor como se muestran a continuación.

Funciones de membresía para el GPS

La función de membresía μ_{gps_1} se relaciona con el dato *EST* que cuenta con los valores (A) activo y (V) bloqueado. Considerando esto es conveniente seleccionar la función de membresía de tipo escalón como se representa en la ecuación 4.110.

$$\mu_{gps_1}(EST) = \begin{cases} 0 & \text{si } a == V, \\ 1 & \text{si } b == A. \end{cases} \quad (4.110)$$

Por otra parte, la función de membresía μ_{gps_2} se selecciona con base al número de satélites *NSAT* vistos en el receptor GPS. Los satélites mínimos consultados para obtener mediciones precisas son $NSAT \geq 4$ de un total de 24 satélites⁶, por lo tanto, se elige la función de membresía de tipo *gamma*, como se muestra en la ecuación 4.111.

⁵El tipo de funciones de membresía es modificable dependiendo de su aplicación.

⁶Inicialmente eran 24 satélites en la constelación del sistema de posicionamiento global, pero este número de satélites varía con el paso de los años.

$$\mu_{gps_2}(NSAT) = \begin{cases} 0 & \text{si } NSAT < a, \\ \frac{NSAT-a}{b-a} & \text{si } a \leq NSAT \leq b, \\ 1 & \text{si } NSAT > b. \end{cases} \quad (4.111)$$

Considerando que $NSAT \geq 4$, se ajustan los valores $a = 0$ y $b = 4$ los cuales hacen el valor $NSAT = 3$ para conseguir regiones válidas del 75 %.

Las funciones de membresía μ_{gps_3} , μ_{gps_4} y μ_{gps_5} pertenecen al mismo grupo de indicadores de dilución de precisión en el rango de 0 – 99, con los valores ideales de $PDOP = 1$, $HDOP = 1$ y $VDOP = 1$, entre más bajo sean estos indicadores, los errores de posicionamiento GPS también son menores, y por lo tanto, las mediciones de posición son más exactas. Los límites considerados en estos indicadores son $PDOP \leq 6$, $HDOP \leq 6$ y $VDOP \leq 6$, esto se debe a la multiplicación del indicador UERE (*User-Equivalent Range Error*) por los indicadores anteriores, para obtener aproximaciones de errores de posicionamiento del GPS. Por ejemplo, con los valores $UERE = 5.1 \text{ m}$ [Beard, 2012], [Shuai et al., 2019] y $HDOP = 6$ se obtiene lo siguiente:

$$Error_h = (HDOP)(UERE), \quad (4.112)$$

$$= (6)(5.1 \text{ m}), \quad (4.113)$$

$$= 30.6 \text{ m}. \quad (4.114)$$

Lo que significa la presencia de errores de posicionamiento de 30 m en el plano este-norte. El mismo análisis se aplica para los indicadores $VDOP$ y $PDOP$. Además, el indicador $VDOP$ presenta errores de 1.5 – 2 veces mayor que el indicador $HDOP$ [Shuai et al., 2019], [Joardar et al., 2016], [Noureldin et al., 2013].

Por lo tanto, las funciones de membresía μ_{gps_3} , μ_{gps_4} y μ_{gps_5} son de tipo complemento de *gamma* para evitar los errores de posicionamiento GPS.

La función de membresía μ_{gps_3} se define en la ecuación 4.115.

$$\mu_{gps_3}(PDOP) = \begin{cases} 1 & \text{si } PDOP < a, \\ \frac{b-PDOP}{b-a} & \text{si } a \leq PDOP \leq b, \\ 0 & \text{si } PDOP > b. \end{cases} \quad (4.115)$$

Con los valores $a = 2.3$ y $b = 6$, hacen que los valores $PDOP = 2.5$ obtengan regiones válidas del 95 %.

La función de membresía μ_{gps_4} se define en la ecuación 4.116.

$$\mu_{gps_4}(HDOP) = \begin{cases} 1 & \text{si } HDOP < a, \\ \frac{b-HDOP}{b-a} & \text{si } a \leq HDOP \leq b, \\ 0 & \text{si } HDOP > b. \end{cases} \quad (4.116)$$

Considerando los valores $a = 1.2$ y $b = 6$, en valores $HDOP = 1.44$ resultan regiones validas del 95 %.

La función de membresía μ_{gps_5} se define en la ecuación 4.117.

$$\mu_{gps_5}(VDOP) = \begin{cases} 1 & \text{si } VDOP < a, \\ \frac{b-VDOP}{b-a} & \text{si } a \leq VDOP \leq b, \\ 0 & \text{si } VDOP > b. \end{cases} \quad (4.117)$$

Estableciendo los valores $a = 1.5$ y $b = 6$, para obtener regiones válidas del 95 % en valores $HDOP = 1.72$.

En la función de membresía $\mu_{gps_6}(SNR)$, se considera valores de $0 - 99$ dB en el indicador SNR . A su vez, cada satélite de GPS se encuentra sujeto a su propio SNR . En valores $SNR > 20$ db las mediciones del GPS presentan valores aceptables para la estimación de posición [Jong y Jang, 2017]. Dado lo anterior, la elección de la función de membresía μ_{gps_6} es de tipo *gamma* como se muestra a continuación.

$$\mu_{gps_6}(SNR) = \begin{cases} 0 & \text{si } SNR < a, \\ \frac{SNR-a}{b-a} & \text{si } a \leq SNR \leq b, \\ 1 & \text{si } SNR > b. \end{cases} \quad (4.118)$$

Considerando $SNR > 20$ db, se proponen los valores $a = 0$ y $b = 20$, los cuales garantizan regiones válidas del 95 % a partir de valores $SNR = 19$ dB.

Funciones de membresía para el sensor de flujo óptico

Las funciones de membresía del sensor de flujo óptico para la estimación de posición son μ_{of_1} y μ_{of_2} .

La primer función de membresía, μ_{of_1} , se relaciona con la calidad de imagen $CIMG$ que presenta valores de $0 - 255$ que se obtienen al considerar una resolución de 8 bits. A valores mayores de cien, la calidad de la imagen es mejor para obtener velocidades traslacionales a partir del flujo óptico.

La función de membresía μ_{of_1} es de tipo *gamma* como se muestra en la ecuación 4.119.

$$\mu_{of_1}(CIMG) = \begin{cases} 0 & \text{si } CIMG < a, \\ \frac{CIMG-a}{b-a} & \text{si } a \leq CIMG \leq b, \\ 1 & \text{si } CIMG > b. \end{cases} \quad (4.119)$$

Se proponen los valores $a = 50$ y $b = 100$ que garantizan regiones válidas del 100 % cuando se presenten valores de $CIMG \geq 100$. Mientras regiones válidas del 0 % con valores $CIMG \leq 50$.

La segunda función de membresía, μ_{of_2} , se relaciona con la distancia d que valores de $0.3 - 4$ m, esta distancia se obtiene de un sensor ultrasónico que realiza el escalamiento de velocidades de flujo óptico a velocidades traslacionales en m/s , como se describe en la sección 3.1.7. Para garantizar el escalamiento correcto de las velocidades traslacionales se utiliza la función de membresía de tipo escalón como se muestra en la ecuación 4.120.

$$\mu_{of_2}(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0.3, \\ 1 & \text{si } 0.3 \leq d \leq 4, \\ 0 & \text{si } d > 4. \end{cases} \quad (4.120)$$

Donde, los valores de $0.3 - 4$ m de la función escalón garantizan el funcionamiento del sensor de flujo óptico para la estimación de posición del UAV.

Con base en las funciones de membresía propuestas y los datos obtenidos de cada sensor de navegación, es posible determinar las estimaciones de posición en las coordenadas x , y y z ante errores de posicionamiento. A mayores cantidad de datos de los sensores, la decisiones tomadas con las funciones de membresía son mejores para la estimación de posición en las coordenadas x , y y z .

Sin embargo, este trabajo de investigación se limita en las coordenadas x y y para la estimación de posición de los UAV, por lo tanto, la función de membresía del GPS se propone en la ecuación 4.121.

$$\mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps}) = \mu_{gps_1}(EST) \cap [(\mu_{gps_2}(NSAT) \cap \mu_{gps_6}(SNR)) \cap \mu_{gps_4}(HDOP)]. \quad (4.121)$$

Donde, existe la relación $\mu_{gps_2}(SNR)$ y $\mu_{gps_6}(NSAT)$ en los satélites GPS, en otras palabras, a menor relación señal-ruido y número de satélites, las regiones válidas de las señales GPS disminuyen, $\mu_{gps_2}(NSAT) \cap \mu_{gps_6}(SNR)$. Lo anterior se compara con el valor mínimo del $\mu_{gps_4}(HDOP)$ que es el error de posición en el plano horizontal. Para que finalmente se consulte con el valor de $\mu_{gps_1}(EST)$.

Por otra parte, la función de membresía del sensor de flujo óptico se muestra en la ecuación 4.122.

$$\mu_{of}(\mathbf{d}_{of}) = \mu_{of_1}(CIMG) \cap \mu_{of_2}(d). \quad (4.122)$$

Donde, la mayor parte de su región válida se evalúa en función de la calidad de la imagen, siempre y cuando se encuentre en el rango de la distancia del sensor ultrasónico.

Las funciones de membresía del receptor GPS y del sensor OF, así como de sus parámetros a y b , son modificables dependiendo de la aplicación del sistema de navegación y de la cantidad de datos que se dispongan.

En estas secciones es posible la implementación de los algoritmos de Kalman en los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF ante diferentes escenarios de simulación.

4.5. Condiciones de simulación

Las condiciones de simulación son las siguientes:

Condición número 1. El modelo matemático del UAV tipo octorotor y sus parámetros para la simulación se presentan en las Tablas 3.2 y 3.3 de la sección 3.2.1. Las estrategias de control se obtienen en [Ortiz et al., 2015] y [Muro et al., 2013].

Condición número 2. Los sistemas dinámicos continuos del UAV de la Tabla 3.2 y del sistema de navegación de la ecuación 4.6 se discretizan usando el método numérico de Euler con el paso de integración $dt = 0.01$, para ello se utiliza el anexo D para los filtros de Kalman.

Condición número 3. Las frecuencias de los algoritmos de Kalman son a 100 Hz, iguales a las frecuencias de muestreo del sensor IMU y del sensor de flujo óptico. La frecuencia de muestreo del GPS es igual a 1 Hz.

Condición número 4. Las matrices de covarianzas \mathbf{Q} , \mathbf{R}_{gps} , \mathbf{R}_{of} y \mathbf{R}_{eu} se obtienen a partir de datos reales del sensor IMU, del receptor GPS y del sensor OF.

Condición número 5. Suposición en el INS. Las propiedades estocásticas del acelerómetro y giroscopio del sensor IMU se asocian con el ruido del sistema de navegación, esto lo muestra la ecuación 4.123.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5e^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5e^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8e^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5e^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5e^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4e^{-7} \end{bmatrix}. \quad (4.123)$$

Condición número 6. Suposición en el GPS. El ruido de las mediciones GPS se asocia con sus errores de posicionamiento, como lo muestra la ecuación 4.124.

$$\mathbf{R}_{gps} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.124)$$

Condición número 7. Suposición en el OF. El ruido en el sensor de flujo óptico es igual al ruido en las mediciones GPS como lo muestra la ecuación 4.125.

$$\mathbf{R}_{of} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.125)$$

Condición número 8. Las condiciones iniciales en los sistemas de navegación y en los algoritmos de Kalman son: $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Condición número 9. La simulación del viento se realiza con forme a las ecuaciones 4.126 y 4.127 [Langelaan et al., 2011], para obtener comportamientos laminares en las coordenadas x y y . La coordenada z se descarta.

$$w_x = v_x + \sum_{i=1}^n a_i \sin(bt + c), \quad (4.126)$$

$$w_y = v_y + \sum_{i=1}^n a_i \sin(bt + c). \quad (4.127)$$

Condición número 10. Los parámetros de simulación del viento son $n = 1$, $a = 0.1$, $b = 1$, $c = 0$; Los límites de velocidades del viento son $0 < v_x \leq 1$ y $0 < v_y \leq 1$ m/s. Las componentes w_x y w_y se introducen en $120 \leq t \leq 150$ y $220 \leq t \leq 250$ de forma independiente.

Condición número 11. Los valores predeterminados del vector de datos \mathbf{d}_{gps} que simulan su funcionamiento normal son los siguientes:

$$\mathbf{d}_{gps} = \begin{bmatrix} EST \\ NSAT \\ PDOP \\ HDOP \\ VDOP \\ SNR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 8 \\ 1.75 \\ 0.9 \\ 1.44 \\ 30 \end{bmatrix}. \quad (4.128)$$

Condición número 12. La simulación de pérdida de señal GPS se realiza entre $190 \leq t \leq 220$, con los valores modificados del vector de datos \mathbf{d}_{gps} : $NSAT = 2$, $HDOP = 20$, $VDOP = 30$ $PDOP = 36$ y $SNR = 5$.

Condición número 13. Los valores predeterminados del vector de datos \mathbf{d}_{of} que simulan el funcionamiento normal del sensor de flujo óptico son: calidad de imagen $CIMG = 200$ y distancia $d = z$.

Condición número 14. Las funciones de membresía del GPS y del sensor de flujo óptico son las siguientes:

$$\mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps}) = \mu_{gps_1}(EST) \cap [(\mu_{gps_2}(NSAT) \cap \mu_{gps_6}(SNR)) \cap \mu_{gps_4}(HDOP)], \quad (4.129)$$

$$\mu_{of}(\mathbf{d}_{of}) = \mu_{of_1}(CIMG) \cap \mu_{of_2}(d). \quad (4.130)$$

Donde,

$$\mu_{gps_1}(EST) = \begin{cases} 0 & \text{si } EST == V, \\ 1 & \text{si } EST == A. \end{cases}, \mu_{gps_2}(NSAT) = \begin{cases} \frac{NSAT}{4} & \text{si } 0 \leq NSAT \leq 4, \\ 1 & \text{si } NSAT > 4. \end{cases} \quad (4.131)$$

$$\mu_{gps_4}(HDOP) = \begin{cases} 1 & \text{si } HDOP < 1.2, \\ \frac{6-HDOP}{4.8} & \text{si } 1.2 \leq HDOP \leq 6, \\ 0 & \text{si } HDOP > 6. \end{cases} \quad (4.132)$$

$$\mu_{gps_6}(SNR) = \begin{cases} \frac{SNR}{20} & \text{si } 0 \leq SNR \leq 20, \\ 1 & \text{si } SNR > 20. \end{cases} \quad (4.133)$$

$$\mu_{of_1}(CIMG) = \begin{cases} 0 & \text{si } CIMG < 50, \\ \frac{CIMG-50}{50} & \text{si } 50 \leq CIMG \leq 100, \\ 1 & \text{si } CIMG > 100. \end{cases}, \mu_{of_2}(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0.3, \\ 1 & \text{si } 0.3 \leq d \leq 4, \\ 0 & \text{si } d > 4. \end{cases} \quad (4.134)$$

Con estas condiciones de simulación se obtienen los análisis de resultados de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF.

Capítulo 5

Resultados

La presentación de resultados se divide en la implementación de algoritmos de Kalman en los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF bajo escenarios de simulación y pruebas experimentales. Ambos resultados presentan análisis de errores cuadráticos medios y de matrices de covarianzas de las coordenadas estimadas *este* y *norte* para la evaluación de fusión de sensores.

La sección 5.1 presenta resultados de los sistemas de navegación bajo escenarios de simulación; la sección 5.3 muestra los resultados experimentales del prototipo de los sistemas de navegación montado en el octorotor *X8-M 3DR*, así como las condiciones del lugar de las pruebas realizadas y el análisis de los sensores de navegación. Los tres algoritmos de Kalman se ejecutan en línea en pruebas *in situ*, obteniéndose +585 pruebas experimentales.

5.1. Implementación en simulación de sistemas de navegación

La implementación en simulación de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF y los algoritmos KF, EKF y UKF para la estimación de posición de los UAV se muestra en las siguientes secciones. Los errores cuadráticos medios y los valores de las covarianzas de las coordenadas este y norte se obtienen para el análisis de degradación de los algoritmos predictores-correctores.

Las condiciones iniciales se establecen de acuerdo a la sección 4.5 para realizar los escenarios de simulación en la navegación de UAV con el siguiente orden:

Sistema de navegación INS/GPS.

Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS + perturbación.

Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS.

Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS + perturbación.

Además, se realizan dos escenarios de simulación que sus resultados se presentan en tablas.

5.1.1. Sistema de navegación INS/GPS

La estimación de posición del sistema de navegación INS/GPS de la sección 4.3 se muestra en la Figura 5.1. Se observa la presencia de *rizos* en el comportamiento de las posiciones estimadas con los algoritmos KF, EKF y UKF, esto se debe a las predicciones realizadas con el sensor IMU a la frecuencia de muestreo de 100 *Hz* y a las correcciones realizadas con las mediciones del GPS a la frecuencia de muestreo 1 *Hz*.

En esta prueba de estimación de posición se introducen tres comportamientos tipo *zig-zag* en las mediciones del GPS para analizar el comportamiento de los algoritmos de Kalman ante estos errores de

posicionamiento. Por otra parte, en estas pruebas de simulación el inicio de posición se define por las concordadas (0, 0) y el recorrido del UAV es antihorario a las manecillas del reloj.

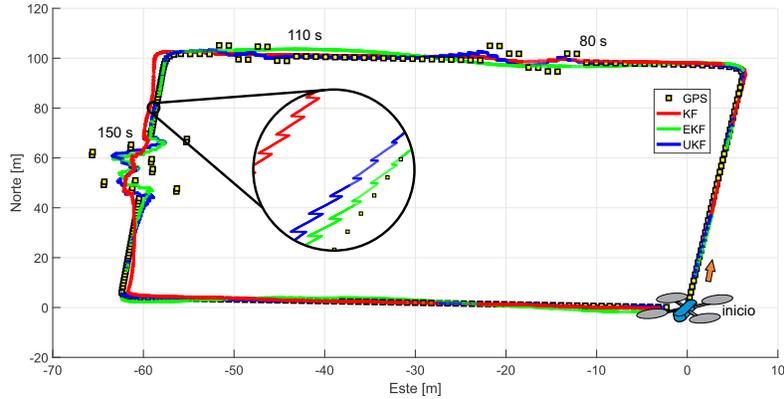


Figura 5.1: Sistema de navegación INS/GPS en simulación.

Los errores cuadráticos medios (ECM) del sistema de navegación INS/GPS los muestra la Figura 5.2. La degradación de la coordenada este es mayor en el algoritmo KF mientras que la degradación de la coordenada norte es mayor en el algoritmo EKF. El algoritmo UKF presenta moderaciones en las degradaciones de las coordenadas este y norte por debajo de los algoritmos anteriores para la estimación de posición.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 0.7691$, $ECM_{este|EKF} = 0.3921$ y $ECM_{este|UKF} = 0.4053$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 0.5765$, $ECM_{norte|EKF} = 2.0822$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.6980$.

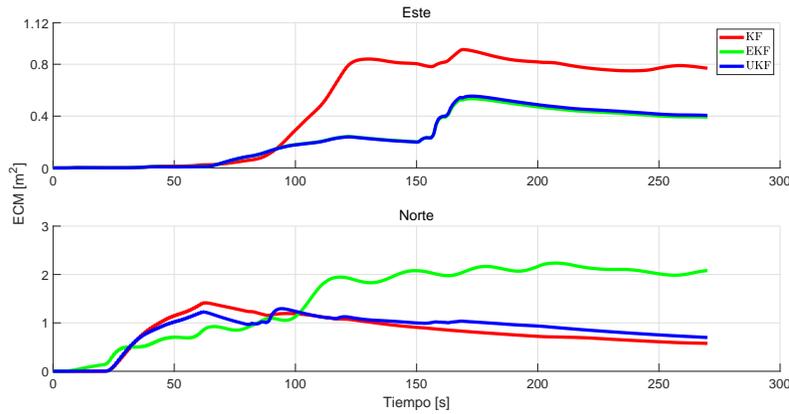


Figura 5.2: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS en simulación.

Las covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS de los algoritmos de Kalman presentes en los pasos predicción y corrección se muestran en la Figura 5.3. Los valores límite de las covarianzas de predicción y corrección se mantienen durante toda la trayectoria del UAV, excepto en las partes de errores de posicionamiento del GPS, los cuales tienen a incrementar.

Los valores límite de las covarianzas de la coordenada este P_{este} son: $0.1905 \leq P_{este|KF} \leq 0.2107$, $0.5298 \leq P_{este|EKF} \leq 0.7186$ y $0.5422 \leq P_{este|UKF} \leq 0.7415$; en la coordenada norte P_{norte} son:

$0.1856 \leq P_{norte|KF} \leq 0.2044$, $P_{norte|EKF} = 0.0081$ y $0.5302 \leq P_{norte|UKF} \leq 0.7192$. El análisis de estas covarianzas se realizan de acuerdo a la sección 2.6. En esta prueba de estimación de posición los valores límite de las covarianzas del algoritmos EKF en la coordenada norte son constantes. El algoritmo UKF presenta valores límites de covarianzas mayores que los filtros anteriores, lo que se interpreta como un mayor filtrado en las mediciones.

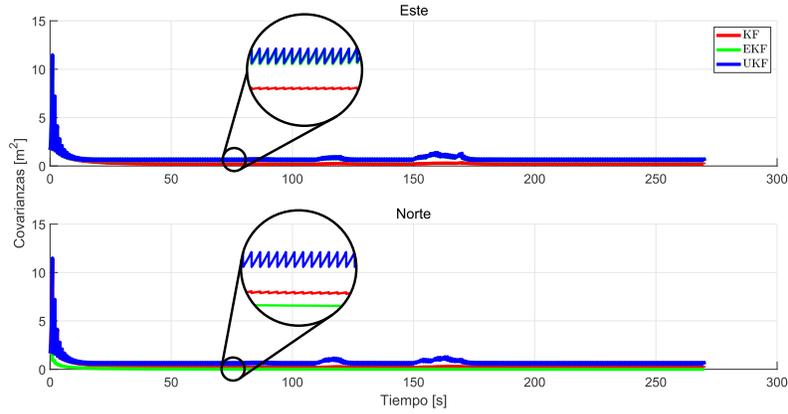


Figura 5.3: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS en simulación.

Los valores de ponderación para el sistema de navegación INS/GPS se presentan en la Figura 5.36. El valor de ponderación β_0 realiza predicciones a la frecuencia de 100 Hz y el valor de ponderación β_{gps} realiza correcciones a la frecuencia de 1 Hz . Esta combinación de señales aprovecha la frecuencia de muestreo de las predicciones con el sensor IMU mayor a la frecuencia de muestreo de las correcciones con las señales del GPS.

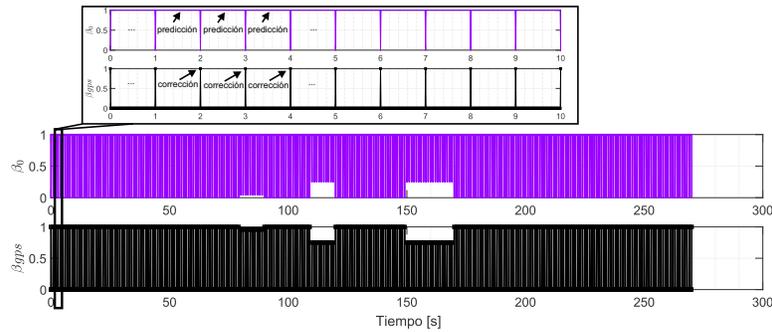


Figura 5.4: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS en simulación.

Estos valores de ponderación se mantienen durante todo el recorrido del UAV que dependen de las regiones válidas del GPS como se muestra en la sección 4.4.3.

Los errores de posicionamiento del GPS ocasionan que las ponderaciones de β_0 obtengan valores diferentes de cero.

Este escenario de simulación se representa el funcionamiento normal de la navegación del UAV. A continuación se agregan errores de posicionamiento GPS y perturbaciones al UAV para analizar su comportamiento.

5.1.2. Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS + perturbación

La estimación de posición del sistema de navegación INS/GPS con pérdida de señal GPS y perturbación se muestra en la Figura 5.5. La duración de la pérdida de señal GPS es de 30 segundos a partir del tiempo de 190 segundos del escenario de simulación. La perturbación la realiza el viento de flujo laminar en las coordenadas este y norte en los tiempos de 120 y 220 segundos, cada una de forma separado con duración de 30 segundos.

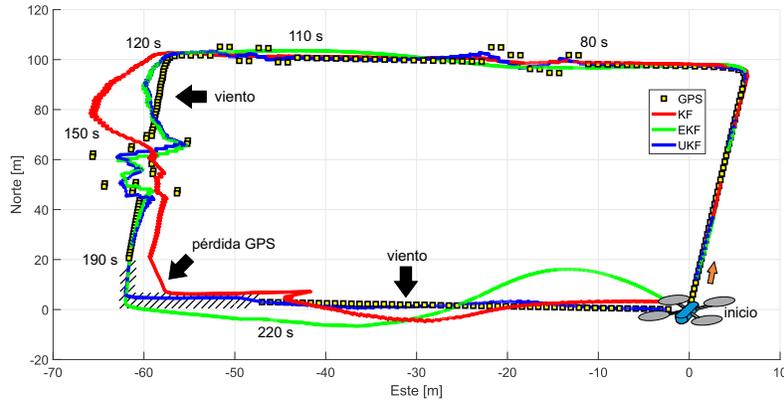


Figura 5.5: Sistema de navegación de navegación INS/GPS + perturbación en simulación.

Los errores cuadráticos medios del sistema de navegación INS/GPS con pérdida de señal GPS y perturbación los muestra la Figura 5.6. La degradación de la coordenada este es mayor en el algoritmo KF mientras que la degradación en la coordenada norte es mayor en el algoritmo EKF. El algoritmo UKF presenta degradaciones menores que los algoritmos KF y EKF en la estimación de posición considerando condiciones de perturbación en el sistema de navegación, esto se debe a la respuesta de los valores límite de las covarianzas obtenidas de los puntos sigma presentes en el algoritmo UKF, como se muestran en las secciones 2.3 y 4.3.2.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 6.8143$, $ECM_{este|EKF} = 0.6670$ y $ECM_{este|UKF} = 0.6645$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 3.4428$, $ECM_{norte|EKF} = 19.8018$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.9681$.

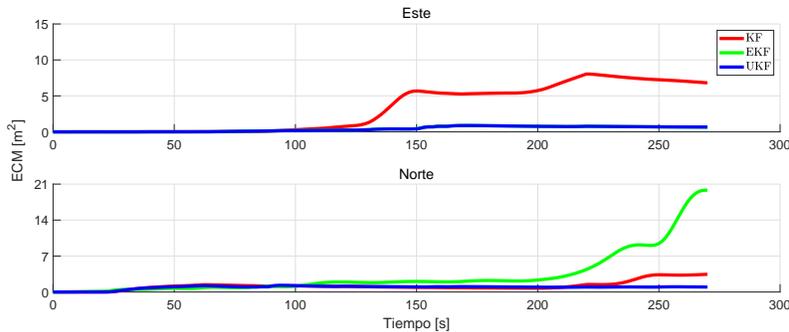


Figura 5.6: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS + perturbación en simulación.

Las covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS de los algoritmos de Kalman presentes en los pasos predicción y corrección se muestran en la Figura 5.7. Los valores lími-

te de predicción y corrección de las covarianzas se obtienen de sus valores máximos en los 30 segundos de la pérdida de señal GPS, esto para analizar sus comportamientos. Los valores límites de covarianzas algoritmo UKF reaccionan en ambas coordenadas este y norte a valores mayores que los dos algoritmos anteriores. Esto significa como la compensación por parte de las predicciones del algoritmo UKF ante la ausencia de correcciones.

Los valores límite de las covarianzas de la coordenada este P_{este} son: $P_{este|KF} = 2.2360$, $P_{este|EKF} = 76.190$ y $P_{este|UKF} = 83.540$; en la coordenada norte P_{norte} son: $P_{norte|KF} = 2.0690$, $P_{norte|EKF} = 0.0117$ y $P_{norte|UKF} = 76.230$. En esta prueba de estimación de posición los valores límite de las covarianzas del algoritmo EKF en la coordenada norte son constantes.

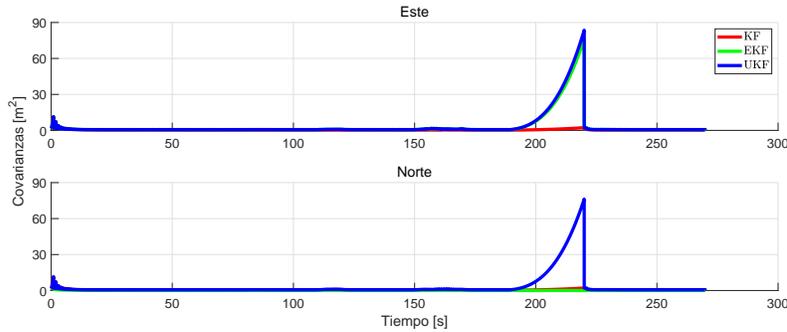


Figura 5.7: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS + perturbación en simulación.

La Figura 5.8 muestra los valores de ponderación para el sistema de navegación INS/GPS ante la pérdida de señal de GPS. A partir del tiempo de 190 segundos, el valor de ponderación $\beta_0 = 1$ realiza la estimación de posición del UAV ante la ausencia de 20 segundos de la señal del GPS, lo cual $\beta_{gps} = 0$.

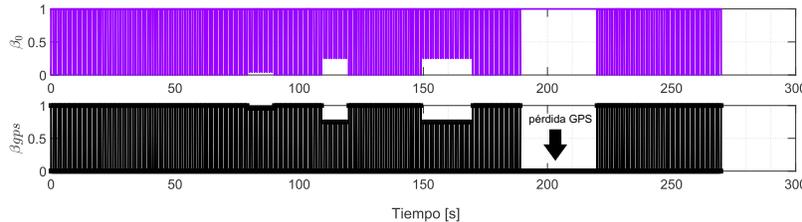


Figura 5.8: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS + perturbación en simulación.

Una observación en estos escenarios de simulación del sistema de navegación INS/GPS con pérdida de señal GPS es que las predicciones realizadas con el sensor IMU obtienen las estimaciones de posición del UAV sin aumentar la degradación en los errores cuadráticos medios. Esto es diferente en las pruebas experimentales de la estimación de posición del UAV donde los errores cuadráticos medios muestran valores superiores ante situaciones de la ausencia de señal GPS.

La siguiente sección muestra el sistema de navegación INS/GPS/OF ante errores de posicionamiento GPS.

5.1.3. Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS

La estimación de posición con la implementación del sensor de flujo óptico (OF, *Optical Flow sensor*) al sistema de navegación INS/GPS se muestra en la Figura 5.9. Este es el sistema de navegación INS/GPS/OF. La frecuencia de muestreo del sensor de flujo óptico es igual a la frecuencia de muestreo del

sensor IMU a 100 Hz mientras que la frecuencia de muestreo de las mediciones GPS se mantienen a 1 Hz . Los algoritmos de Kalman con la implementación del sensor de flujo óptico siguen la metodología de la sección 4.4.

El escenario de simulación para la estimación de posición del sistema de navegación INS/GPS/OF considera la pérdida de señal GPS en el tiempo de 190 segundos con la duración de 30 segundos, para evaluar los errores cuadráticos medios de la implementación del sensor de flujo óptico. El interés de este escenario de simulación es el comportamiento de la estimación del posición realizado con el sensor de flujo óptico ante situaciones de errores de posicionamiento GPS.

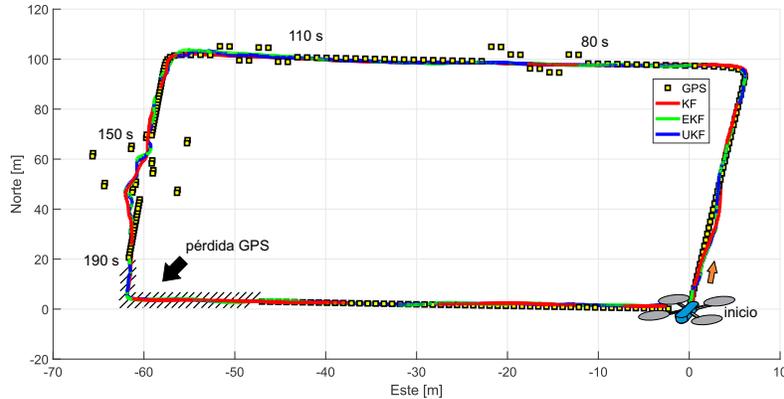


Figura 5.9: Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación.

Los errores cuadráticos medios del sistema de navegación INS/GPS/OF con pérdida de señal GPS se muestran en la Figura 5.10. La degradación de las coordenadas este y norte de los tres algoritmos de Kalman y la implementación del sensor de flujo óptico presenta tendencias positivas y negativas de las estimaciones de posición durante el recorrido del UAV.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 0.3476$, $ECM_{este|EKF} = 0.3333$ y $ECM_{este|UKF} = 0.3327$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 0.7255$, $ECM_{norte|EKF} = 1.0040$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.7551$. El algoritmo UKF presenta comportamientos de degradación en ambas coordenadas por debajo de los dos algoritmos restantes.

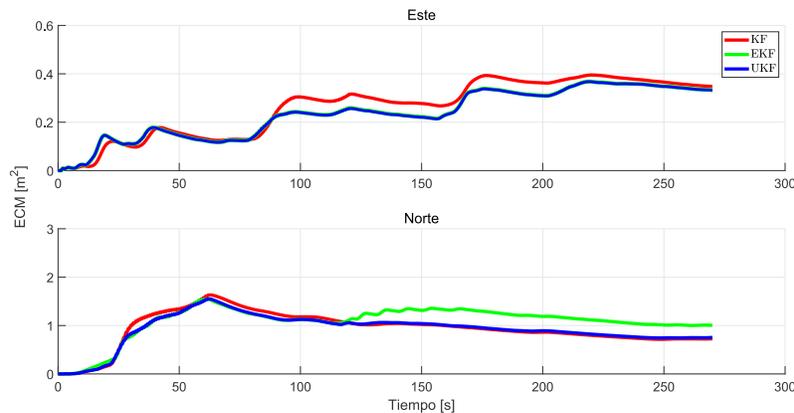


Figura 5.10: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación.

La Figura 5.11 muestra las covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF de los algoritmos de Kalman. Los valores límite de predicción y corrección de las covarianzas se obtienen dentro de los 30 segundos de la pérdida de señal GPS. Mientras que en el tiempo de 110–120 segundos se presenta ausencia del sensor de flujo óptico en la estimación del posición del UAV.

Los valores límite de las covarianzas de la coordenada este P_{este} son: $0.0062 \leq P_{este|KF} \leq 0.0063$, $0.0191 \leq P_{este|EKF} \leq 0.0193$ y $0.0196 \leq P_{este|UKF} \leq 0.0199$; en la coordenada norte P_{norte} son: $0.0060 \leq P_{norte|KF} \leq 0.0061$, $P_{norte|EKF} = 0.0001$ y $0.0191 \leq P_{norte|UKF} \leq 0.0193$. Aún con el sensor de flujo óptico en el sistema de navegación los valores límites de covarianzas del algoritmo UKF reaccionan mejor que los algoritmos restantes.

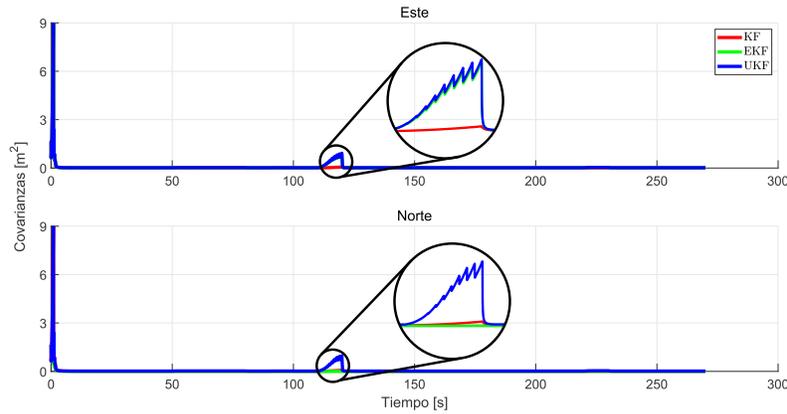


Figura 5.11: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación.

Los valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF se muestran en la Figura 5.12. El valor β_0 pondera a las predicciones del sensor IMU; el valor β_{gps} pondera a las correcciones del GPS; el valor β_{of} pondera a las correcciones del sensor de flujo óptico y el valor β_{gpsof} pondera a las correcciones de la fusión local del GPS y del sensor de flujo óptico.

Dentro de los 30 segundos de pérdida de señal GPS el sensor de flujo óptico realiza la estimación de posición del UAV.

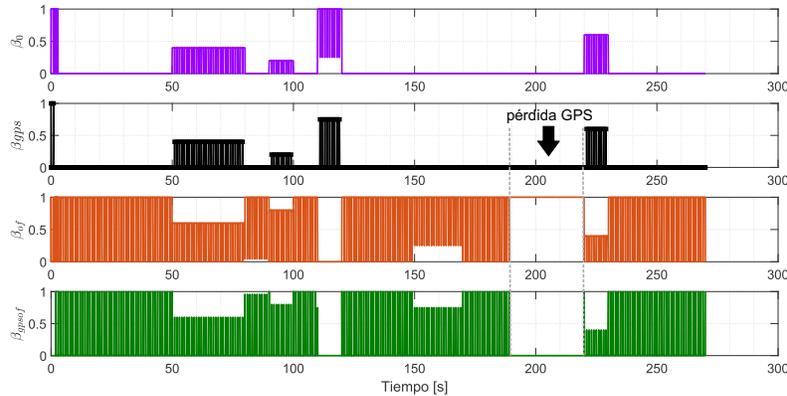


Figura 5.12: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS en simulación.

El sistema de navegación INS/GPS/OF bajo el escenario de simulación de pérdida de señal GPS y perturbación se presenta a continuación.

5.1.4. Sistema de navegación INS/GPS/OF + pérdida de señal GPS + perturbación

La estimación de posición del sistema de navegación INS/GPS/OF con pérdida de señal GPS y presencia de perturbaciones se muestra en la Figura 5.13. La perturbación en el sistema de navegación INS/GPS/OF se introduce como viento de flujo laminar en las coordenadas este y norte en los tiempos de 120 y 220 segundos. Este procedimiento se realiza al igual que en el sistema de navegación INS/GPS.

La estimación de posición del UAV con el sensor de flujo óptico presenta degradaciones menores ante condiciones de viento laminar, esto se comprueba con los comportamientos de los errores cuadráticos medios.

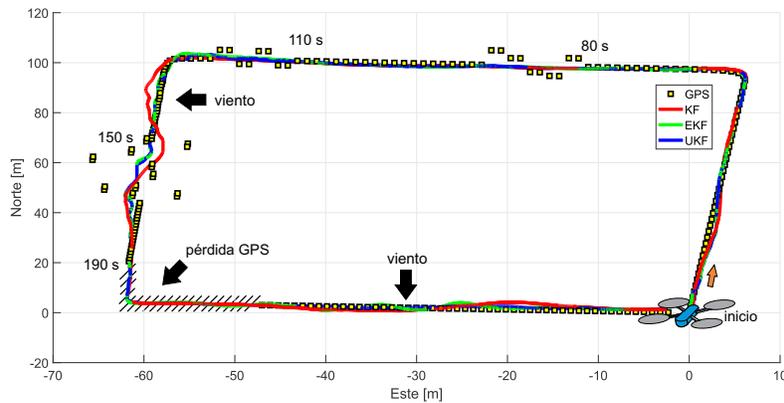


Figura 5.13: Sistema de navegación de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación.

La Figura 5.14 muestra los errores cuadráticos medios del sistema de navegación INS/GPS/OF con efecto de perturbación. Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 0.4788$, $ECM_{este|EKF} = 0.3310$ y $ECM_{este|UKF} = 0.3304$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 1.0603$, $ECM_{norte|EKF} = 1.0972$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.7688$. El comportamiento de degradación del algoritmo UKF es menor que los algoritmos restantes.

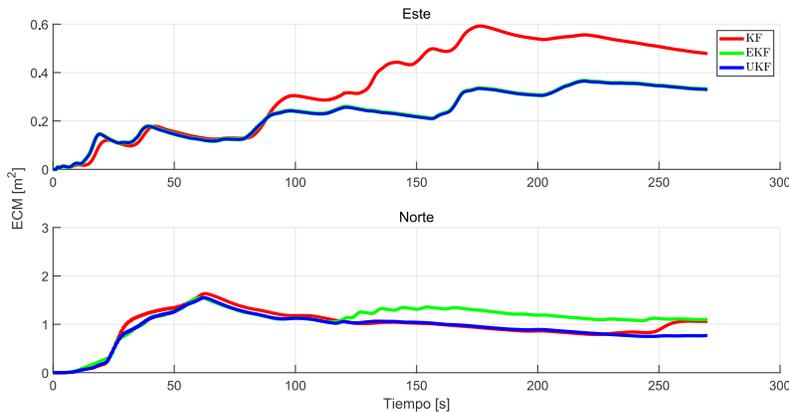


Figura 5.14: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación.

Las covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF con perturbación se muestran en la Figura 5.15. Los valores límite de las covarianzas de predicción y corrección se obtienen dentro de los 30 segundos de la pérdida de señal GPS.

Los valores límite de las covarianzas de la coordenada este P_{este} son: $P_{este|KF} = 0.0063$, $P_{este|EKF} = 0.0193$ y $P_{este|UKF} = 0.0199$; en la coordenada norte P_{norte} son: $P_{norte|KF} = 0.0061$, $P_{norte|EKF} = 0.0001$ y $P_{norte|UKF} = 0.0194$. Los valores límite de las covarianzas de los tres algoritmos de Kalman se aproximan a valores constantes cercanos a cero con la agregación del sensor de flujo óptico.

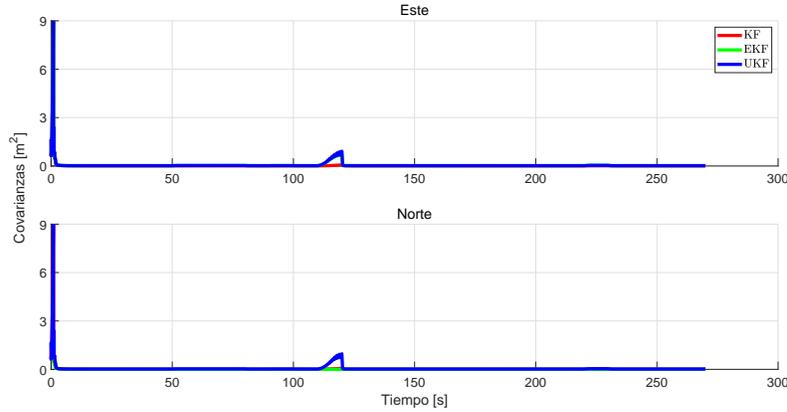


Figura 5.15: Covarianzas de las coordenadas este del sistema de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación.

Los valores de ponderación de la Figura 5.16 muestran el mismo comportamiento que la Figura 5.12 debido a que los algoritmos de Kalman no relacionan a los efectos de perturbación con los errores de posicionamiento del GPS y del sensor de flujo óptico, esto se observa en la sección 4.4.3.

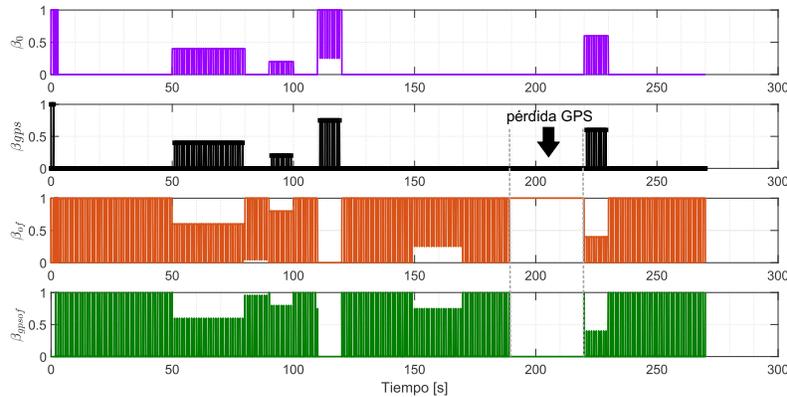


Figura 5.16: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + perturbación en simulación.

Esta sección finaliza las pruebas de estimación de posición en los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF incluyendo errores de posicionamiento GPS, realizado bajo escenarios diferentes de simulación para evaluar los algoritmos de Kalman.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de escenarios de simulación.

5.2. Tablas de resultados en simulación

La Tabla 5.16 resume los errores cuadráticos medios de los algoritmos de Kalman bajo escenarios de simulación en los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF involucrando errores de posicionamiento GPS y perturbaciones en la navegación del UAV.

Tabla 5.1: Errores cuadráticos medios de sistemas de navegación en pruebas de simulación.

| Escenarios de simulación | Coordenada | KF | EKF | UKF |
|---|------------|--------|--------|--------|
| INS/GPS | este | 0.7691 | 0.3921 | 0.4053 |
| | norte | 0.5765 | 2.0822 | 0.6980 |
| INS/GPS + 30 s no GPS | este | 1.0674 | 0.4460 | 0.4605 |
| | norte | 1.2216 | 6.4533 | 0.7764 |
| INS/GPS + 30 s no GPS + perturbación | este | 6.8143 | 0.6670 | 0.6645 |
| | norte | 3.4428 | 19.802 | 0.9681 |
| INS/GPS/OF | este | 0.2996 | 0.2753 | 0.2746 |
| | norte | 0.7254 | 1.0042 | 0.7549 |
| INS/GPS/OF + 30 s no GPS | este | 0.3476 | 0.3333 | 0.3327 |
| | norte | 0.7255 | 1.0040 | 0.7551 |
| INS/GPS/OF + 30 s no GPS + perturbación | este | 0.4788 | 0.331 | 0.3304 |
| | norte | 1.0603 | 1.0972 | 0.7688 |

Nota número 1. Los valores finales de los errores cuadráticos medios indican globalmente la degradación de los algoritmos predictores-correctores. Estos indicadores se tienen que analizar gráficamente a lo largo de cada prueba de estimación de posición del UAV, en otras palabras, sus comportamientos evitan interpretaciones erróneas en la interpretación de resultados.

Las Tablas 5.2 y 5.3 resumen los valores límite de las covarianzas de los algoritmos de Kalman en los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF bajo diferentes escenarios de simulación.

Tabla 5.2: Valores de covarianzas de la coordenada este en pruebas de simulación.

| Escenarios de simulación | Límite | KF | EKF | UKF |
|---|------------|--------|--------|--------|
| INS/GPS | predicción | 0.2107 | 0.7186 | 0.7415 |
| | corrección | 0.1905 | 0.5298 | 0.5422 |
| INS/GPS + 30 s no GPS | predicción | 2.2290 | 76.190 | 83.540 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS + 30 s no GPS + perturbación | predicción | 2.2360 | 76.190 | 83.540 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF | predicción | 0.0063 | 0.0194 | 0.0199 |
| | corrección | 0.0062 | 0.0192 | 0.0198 |
| INS/GPS/OF + 30 s no GPS | predicción | 0.0063 | 0.0193 | 0.0199 |
| | corrección | 0.0062 | 0.0191 | 0.0196 |
| INS/GPS/OF + 30 s no GPS + perturbación | predicción | 0.0063 | 0.0193 | 0.0199 |
| | corrección | - | - | - |

Tabla 5.3: Valores de covarianzas de la coordenada norte en pruebas de simulación.

| Escenarios de simulación | Límite | KF | EKF | UKF |
|---|------------|--------|--------|--------|
| INS/GPS | predicción | 0.2044 | - | 0.7192 |
| | corrección | 0.1856 | 0.0081 | 0.5302 |
| INS/GPS + 30 s no GPS | predicción | 2.0620 | 0.0117 | 76.230 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS + 30 s no GPS + perturbación | predicción | 2.069 | 0.0117 | 76.230 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF | predicción | 0.0061 | - | 0.0193 |
| | corrección | 0.0060 | 0.0003 | 0.0192 |
| INS/GPS/OF + 30 s no GPS | predicción | 0.0061 | - | 0.0193 |
| | corrección | 0.0060 | 0.0001 | 0.0191 |
| INS/GPS/OF + 30 s no GPS + perturbación | predicción | 0.0061 | - | 0.0194 |
| | corrección | - | - | - |

Nota número 2. En las pruebas de los sistemas de navegación con pérdida de señal de GPS, los valores límites de las covarianzas se analizan en el intervalo de ausencia de la señal GPS para evaluar

la fusión de datos de las señales del sensor IMU y del sensor de flujo óptico.

5.3. Implementación experimental de sistemas de navegación en un prototipo

Las siguientes secciones presentan el desarrollo del prototipo del sistema de navegación INS/GPS/OF para la implementación de las estrategias de estimación del capítulo 4. Los algoritmos de Kalman se ejecutan en *línea* y en pruebas *in situ* con un prototipo del sistema de navegación montado sobre el vehículo aéreo no tripulado tipo octorotor *X8-M 3DR*.

5.3.1. Prototipo del sistema de navegación

El prototipo del sistema de navegación INS/GPS/OF montado sobre el octorotor *X8-M 3DR* lo muestra la Figura 5.17, el cual se integra por el sistema de procesamiento de datos MyRIO 1900 y los diferentes componentes: el sensor IMU, el receptor GPS, el compás digital, el sensor de flujo óptico y el barómetro. Los cuales se relacionan entre ellos de acuerdo a la Figura 5.18.



Figura 5.17: Prototipo del sistema de navegación INS/GPS/OF sobre el octorotor *X8-M 3DR*.

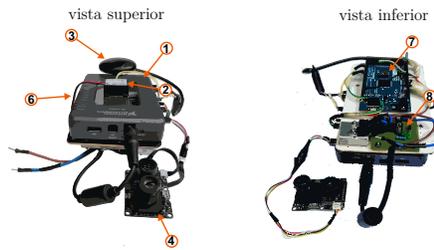


Figura 5.18: Partes del prototipo del sistema de navegación INS/GPS/OF.

La descripción de los componentes electrónicos del sistema de navegación INS/GPS/OF de acuerdo a

las Figuras 5.17 y 5.18 se enumeran en los siguientes ocho puntos.

Punto número 1) La tarjeta de adquisición y procesamiento de datos MyRIO 1900 realiza la programación en el entorno de LabVIEW y lenguaje C manejando los puertos de entrada/salida A y B tanto digitales como analógicos. Los puertos de entrada/salida cuentan con las interfaces de comunicación de datos I²C (*Inter-Integrated Circuit*) y UART (*Universal Asynchronous Receiver-Transmitter*) para usarlos como los protocolos de comunicación entre la tarjeta MyRIO 1900 y los sensores de navegación.

Punto número 2) El sensor *CHR-UM6* obtiene las mediciones de aceleraciones traslacionales, velocidades angulares y los ángulos de Euler a frecuencias de muestreo de 20 – 300 *Hz*. La frecuencia de muestreo configurado para el sistema de navegación es de 100 *Hz*, con esto se evita saturaciones en el búfer del puerto de comunicación UART de la tarjeta MyRIO.

Punto número 3) El receptor GPS *NEO-6M* y su compás digital. El receptor GPS obtiene las coordenadas geodésicas a la frecuencia de muestreo de 1 *Hz* por medio del protocolo UART. Por otra parte, el compás digital consigue el *azimut*, esto es el ángulo *yaw* que toma a la coordenada norte como referencia. La comunicación del compás digital se realiza por medio del protocolo I²C.

Punto número 4) El sensor de flujo óptico PX4FLOW obtiene las velocidades traslacionales a partir de flujo de píxeles, el cual utiliza una cámara de video de resolución de 64x64 píxeles y una lente de 16 *mm* [Honegger et al., 2013]. Con la lente de 16 *mm* y considerando distancias de 1 *m* desde el sensor de flujo óptico al suelo, se obtienen velocidades máximas de 2.4 *m/s*; a distancias de 3 *m* se obtienen velocidades máximas de 7.2 *m/s*; a distancias de 10 *m* se obtienen velocidades máximas de 24 *m/s*. Sin embargo, las distancias se encuentran limitadas por un sensor ultrasónico de valores 0.3 – 4 *m*. La frecuencia de muestreo¹ del sensor de flujo óptico es de 100 *Hz* por medio de el protocolo I²C.

Punto número 5) La batería LiPo (*Lithium Polymer*) de cuatro celdas conectadas en serie 4S suministra el voltaje de 14.8 *v* y la corriente de 10,000 *mA*H al octorotor *X8-M 3DR* y al sistema de navegación.

Punto número 6) El barómetro *BMP180* se utiliza para la obtención de la altitud a partir de presiones atmosféricas, a esto se le conoce como altitud barométrica.

Punto número 7) La tarjeta Arduino Mega se utiliza como el puente de comunicación entre el sensor *CHR-UM6* y la tarjeta MyRIO, debido a que el sensor *CHR-UM6* requiere del envío y recepción de peticiones por medio de microprocesadores externos, en este caso la tarjeta MyRIO. Sin embargo, en las pruebas realizadas de comunicación conectando el sensor *CHR-UM6* a la tarjeta MyRIO se presentaba lactancia y pérdida de datos debido a la programación en el entorno de LabVIEW. Por lo que el uso de la tarjeta Arduino Mega como intermediario entre el sensor *CHR-UM6* y la tarjeta MyRIO evita esos problemas.

Punto número 8) Esta tarjeta electrónica contiene una etapa de regulación de voltaje para disminuir el valor de 14.8 a 12 *v* de la batería LiPo, y así evitar las fluctuaciones de voltaje y corriente causadas por las aceleraciones del UAV. Además, se evita daños posibles en el prototipo del sistema de navegación y en la batería LiPo.

Además de la descripción de los componentes electrónicos del sistema de navegación INS/GPS/OF, la estructura de programación de los algoritmos en LabVIEW para el sistema de navegación se muestra en la Figura 5.19, el cual se divide en seis programas diferentes.

Los primeros cuatro programas son subrutinas de los sensores implementados en el sistema de navegación. El quinto programa contiene los algoritmos para la fusión de sensores y la estimación de posición

¹La frecuencia de procesamiento del flujo óptico es de 250 *Hz*.

del UAV. El sexto programa muestra y guarda los datos de la fusión de sensores.

La explicación de los seis programas en LabVIEW se muestra a continuación.

Programa 1 IMU. Esta subrutina realiza las mediciones de aceleraciones traslacionales, de velocidades angulares y de altitudes barométricas. Para lograr esto, el uso de la tarjeta de programación Arduino Mega reduce el consumo computacional en la tarjeta MyRIO, debido a que el sensor *CHR-UM6* requiere de programación para solicitar variables de interés. A esto se le agregan subrutinas que contienen las ecuaciones para calcular la altitud barométrica. El sensor barométrico se conecta a la tarjeta de programación Arduino Mega por medio del protocolo de comunicación I²C. Los datos procesados del Arduino Mega se envían a la tarjeta MyRIO por medio del protocolo de comunicación UART.

Programa 2 Mag. Esta subrutina calcula el azimuth para conocer la orientación del UAV referenciado a la coordenada norte. El magnetómetro se conecta a la tarjeta MyRIO mediante el protocolo de comunicación I²C.

Programa 3 GPS. Esta subrutina decodifica las secuencias NMEA del GPS de acuerdo a la sección 3.1.4.

Programa 4 OF. Esta subrutina obtiene el flujo de píxeles y la distancia del sensor de flujo óptico PX4FLOW, que se realiza de acuerdo a la sección 3.1.7.

Programa 5 Sistema de navegación. Esta es la rutina de programación principal que contiene los algoritmos de fusión de datos para la estimación de posición del UAV. Los algoritmos KF, EKF y UKF de las secciones 4.3 y 4.4 se programan como los fusionadores de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF.

Programa 6 Gráficas y guardado de datos. Esta subrutina se ejecuta en la PC para leer los datos de la tarjeta MyRIO vía WIFI. Los datos en gráficas se muestran en línea y se guardan para su análisis.

Las seis subrutinas programadas en el entorno LabVIEW se muestran en el Anexo G.

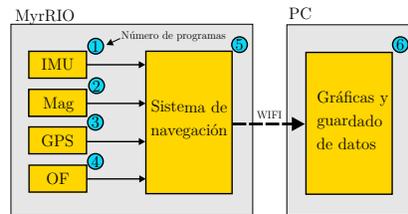


Figura 5.19: Estructura de programación de bloques en LabVIEW.

Además de la complejidad del hardware como de software del prototipo del sistema de navegación del UAV, se tienen que considerar las condiciones de la implementación experimental.

5.3.2. Condiciones de implementación experimental

Las consideraciones de la implementación experimental de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF para la estimación de posición del UAV son las siguientes:

Condición número 1. El área de pruebas de vuelo es una cancha de fútbol profesional. La Figura 5.20 muestra el recorrido del UAV que empieza en el punto *inicio* y recorre a los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 en ese orden. Las dimensiones de la geometría del recorrido están dentro de los $50 \times 50 m^2$ debido a dos limitaciones: i) a mayores distancias recorridas por el UAV, la autonomía de la batería se reduce,

lo que implica la reducción del número de pruebas de los sistemas de posicionamiento propuestos; ii) la calibración de los sensores de los sistemas de posicionamiento se realiza al inicio de cada prueba de vuelo para evitar problemas asociados a sensores, que implica el monitoreo de las variables de interés en cada vuelo del UAV. Este monitoreo se realiza a través de una interfaz gráfica de usuario por medio de la conexión WIFI del sistema de navegación como se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 5.19. La red WIFI se limita dentro de un radio menor de 50 m para garantizar la disponibilidad de los datos durante las pruebas de estimación de posición del UAV.



Figura 5.20: Área de pruebas de vuelo de las estrategias de estimación de posición.

Condición número 2. Las distancias de vuelo del UAV se realizan a valores aproximadamente constantes entre 1 – 4 m, y los movimientos de desplazamiento del UAV se aproximan al estado *hover* como se muestra en la Figura 5.21. Las condiciones de la textura del suelo para el sensor de flujo óptico durante el recorrido del UAV son de pasto verde y medio verde [Qi et al., 2017]. El horario de las pruebas de vuelo del UAV se encuentran entre las 9 : 00 – 11 : 00 a.m. para mantener las mismas condiciones de luminosidad en el sensor de flujo óptico. Además, el ángulo ψ es constante.



Figura 5.21: Condiciones de vuelo del UAV para su estimación de posición.

Condición número 3. Las propiedades de ruido de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GP-S/OF y de los sensores implementados para las correcciones de los algoritmos de Kalman se representan en las ecuaciones 5.1-5.3.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5e^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5e^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8e^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5e^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.5e^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4e^{-3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

$$\mathbf{R}_{gps} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

$$\mathbf{R}_{eu} = \begin{bmatrix} 1e^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 1e^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 1e^{-7} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Donde a partir de diferentes pruebas, los valores óptimos de las propiedades del ruido son: 0.1, 0.01 y 1.0 veces \mathbf{R}_{gps} en los algoritmos KF, EKF y UKF. Las propiedades de ruido \mathbf{R}_{of} se consideran iguales a \mathbf{R}_{gps} para conseguir el mismo comportamiento de la posición del GPS.

Las propiedades de ruido en el sensor de flujo óptico para dos filtros de Kalman lineales son: $Q_{of} = 1.0$ y $R_x = R_y = 0.9e^{-4}$.

Condición número 4. Los valores iniciales² de los vectores de estados y matrices de covarianzas de los estados en los algoritmos de Kalman se representan en las ecuaciones 5.4 y 5.5.

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Condición número 5. El paso de integración de los algoritmos de Kalman es igual a la frecuencia de muestreo del sensor IMU igual a 100 Hz. La frecuencia de muestreo del GPS es a 1 Hz y la frecuencia de muestreo del sensor de flujo óptico es a 100 Hz.

Condición número 6. La pérdida de señal de GPS se introduce al manipular el valor del indicador *HDOP* a valores mayores a seis. Esta ausencia de la señal de GPS ocasiona que los algoritmos de Kalman detecten errores de posicionamiento del receptor GPS, sin embargo, las mediciones del GPS siempre se encuentran disponibles para ser usadas como referencia. Esta referencia es válida siempre y cuando el valor *HDOP* antes de manipularlo sea menor a uno.

La pérdida de la señal GPS es de tres a cinco segundos, y aparece de forma aleatoria durante el recorrido del UAV.

²Es recomendable seguir las condiciones iniciales que se proponen en los algoritmos de Kalman.

Condición número 7. El análisis de las respuestas de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF se realiza con los indicadores de errores cuadráticos medios (ECM) y de las matrices de covarianzas, como se muestra en la sección 2.6, para evaluar la fusión de datos de las señales del receptor GPS y del sensor de flujo óptico para la estimación de posición de del UAV.

Condición número 8. Las funciones de membresía para evitar errores de posicionamiento en el receptor GPS y al sensor de flujo óptico en las pruebas de estimación de posición se representan a continuación.

$$\mu_{gps}(\mathbf{d}_{gps}) = \mu_{gps_1}(EST) \cap [(\mu_{gps_2}(NSAT) \cap \mu_{gps_6}(SNR)) \cap \mu_{gps_4}(HDOP)], \quad (5.6)$$

$$\mu_{of}(\mathbf{d}_{of}) = \mu_{of_1}(CIMG) \cap \mu_{of_2}(d). \quad (5.7)$$

Donde,

$$\mu_{gps_1}(EST) = \begin{cases} 0 & \text{si } EST == V, \\ 1 & \text{si } EST == A. \end{cases}, \mu_{gps_2}(NSAT) = \begin{cases} \frac{NSAT}{4} & \text{si } 0 \leq NSAT \leq 4, \\ 1 & \text{si } NSAT > 4. \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\mu_{gps_4}(HDOP) = \begin{cases} 1 & \text{si } HDOP < 1.2, \\ \frac{6-HDOP}{4.8} & \text{si } 1.2 \leq HDOP \leq 6, \\ 0 & \text{si } HDOP > 6. \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\mu_{gps_6}(SNR) = \begin{cases} \frac{SNR}{20} & \text{si } 0 \leq SNR \leq 20, \\ 1 & \text{si } SNR > 20. \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\mu_{of_1}(CIMG) = \begin{cases} 0 & \text{si } CIMG < 50, \\ \frac{CIMG-50}{50} & \text{si } 50 \leq CIMG \leq 100, \\ 1 & \text{si } CIMG > 100. \end{cases}, \mu_{of_2}(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0.3, \\ 1 & \text{si } 0.3 \leq d \leq 4, \\ 0 & \text{si } d > 4. \end{cases} \quad (5.11)$$

Cada una de las funciones de membresía es modificable dependiendo de la aplicación del sistema de navegación INS/GPS/OF y de la sensibilidad los de sensores utilizados.

5.3.3. Análisis de la respuesta de los sensores

El análisis de la respuesta de las mediciones del GPS, del sensor inercial y del sensor de flujo óptico es necesario para considerar ventajas y desventajas en los algoritmos de Kalman de la implementación experimental.

Las mediciones del GPS, del sensor inercial y del sensor de flujo óptico se obtienen a partir de varios vuelos del octorotor *X8-M 3DR* bajo las condiciones de la sección 5.3.2. Ocho análisis de la respuesta de los sensores de navegación se presentan a continuación.

Análisis número 1. Las posiciones de las coordenadas geodésicas del receptor GPS a la frecuencia de muestreo de 1 Hz se muestran en la Figura 5.22, las cuales se obtienen a partir del recorrido del octorotor *X8-M 3DR* desde el punto de inicio y avanzando en dirección a las cuatro flechas hasta llegar al punto final. Las coordenadas geodésicas *longitud* y *latitud* corresponden aproximadamente al lugar del área de pruebas de la Figura 5.20, las cuales se representan en unidades de grados decimales, lo que dificulta la medición del recorrido del UAV. Además, es necesario trabajar las coordenadas de posicionamiento en coordenadas métricas de acuerdo a los modelos dinámicos de las secciones 3.2 y 4.1.

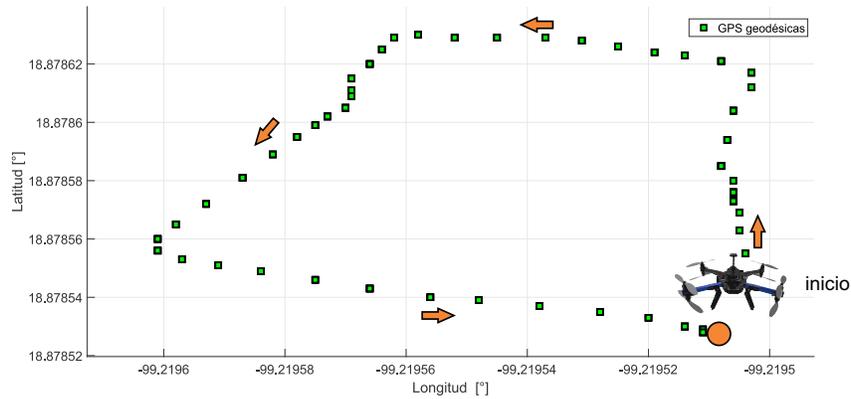


Figura 5.22: Coordenadas geodésicas del GPS.

Análisis número 2. Las posiciones de las coordenadas UTM del receptor GPS se muestran en la Figura 5.23. La comparación de estas coordenadas UTM con las coordenadas geodésicas de la Figura 5.22 muestra que la forma del recorrido del octorotor *X8-M 3DR* es la misma, lo cual la estimación de posición del UAV en las coordenadas UTM es fácil de medir. Las coordenadas UTM corresponden a las direcciones *este* y *norte* en unidades métricas tomando como punto de inicio el lugar donde se realizan las pruebas de vuelo del octorotor *X8-M 3DR*.

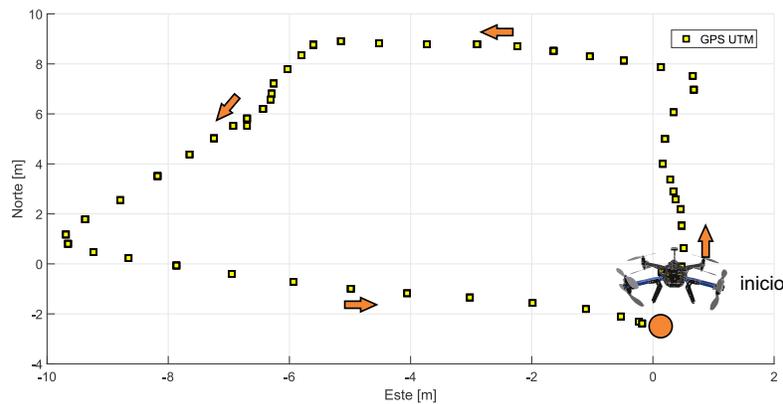


Figura 5.23: Coordenadas UTM del GPS.

La conversión de coordenadas geodésicas a coordenadas rectangulares/UTM se realizan de acuerdo a la sección 3.1.3, esto es necesario en la implementación experimental del sistema de navegación INS/GPS/OF.

Análisis número 3. La comparación de la altitud del GPS y la altitud barométrica se muestra en la Figura 5.24, lo cual se observa que las mediciones de la altitud barométrica presentan más aleatoriedades que las mediciones de la altitud del GPS, esto entre valores menores a tres metros. Bajo este análisis de altitudes, la estimación de posición del UAV solo se realiza en el plano este-norte de las coordenadas UTM, esto es posible siempre y cuando la conversión de coordenadas geodésicas a coordenadas métricas separe la altitud del plano este-norte como se explica en la sección 3.1.3.

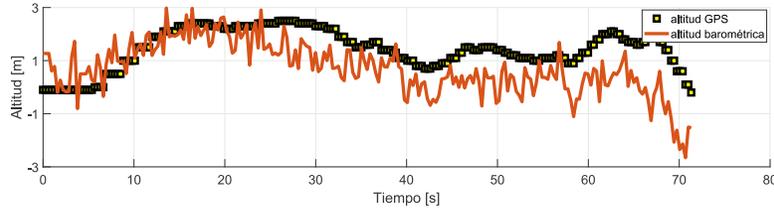


Figura 5.24: Comparación entre la altitud GPS y la altitud barométrica.

Análisis número 4. Los indicadores para determinar los errores de posicionamiento del receptor GPS son $HDOP$, $VDOP$ y $PDOP$ los cuales se muestran en la Figura 5.25. El indicador $HDOP$ es de interés para definir los errores de posicionamiento del receptor GPS en el plano este-norte. Además, la misma Figura 5.25 muestra que los valores del indicador $HDOP$ son menores a uno y menores que los valores del indicador $VDOP$. Ambos indicadores son afectados en los mismos instantes de tiempo durante el recorrido del UAV. El indicador DOP es función de los indicadores $HDOP$ y $VDOP$, como se detalla en la sección 3.1.4.

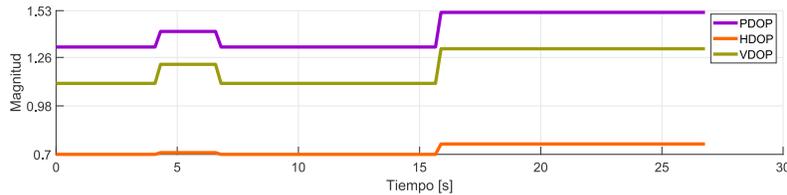


Figura 5.25: Indicadores de dilución de precisión del receptor GPS.

Los valores de estos indicadores presentan variaciones que dependen del lugar donde se realicen las mediciones del receptor GPS, así como de las condiciones atmosféricas del entorno, esto se explica en la sección 3.1.4.

Análisis número 5. En el sistema de navegación inercial las mediciones de las aceleraciones traslacionales y de las velocidades angulares se muestran en la Figura 5.26. Ambas mediciones se realizan a la frecuencia de muestreo de 100 Hz . Sin embargo, en la etapa de adquisición de datos en la PC, ver la Figura 5.19, estas mediciones se realizan a frecuencias menores de 100 Hz como se muestra en la Figura 5.27. Esto solo altera la visualización de resultados.

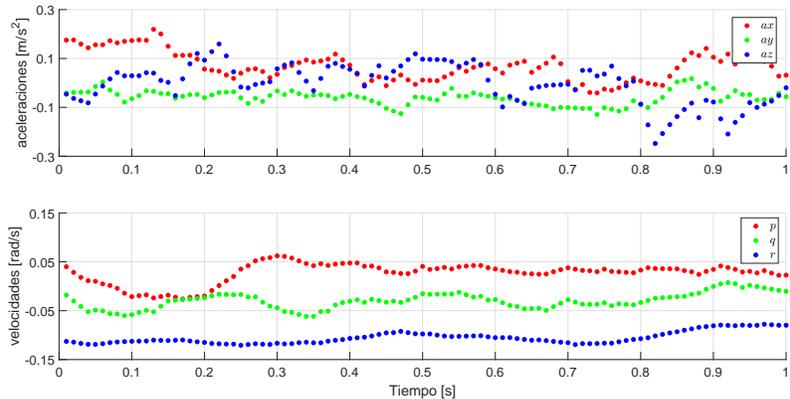


Figura 5.26: Muestreo de las aceleraciones traslacionales y las velocidades angulares a 100 Hz .

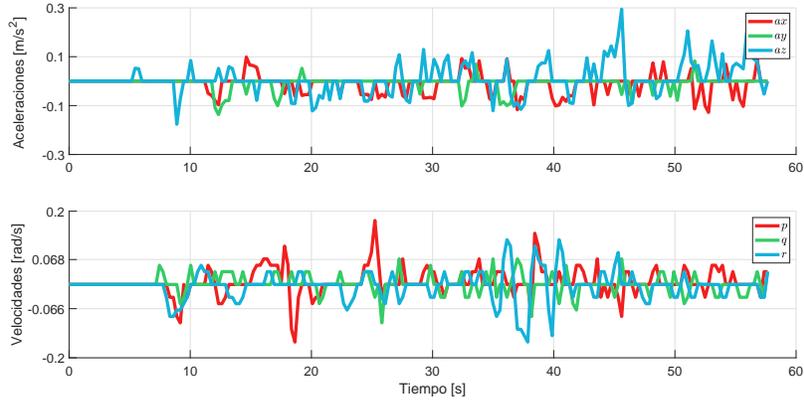


Figura 5.27: Aceleraciones traslacionales y velocidades angulares del recorrido del UAV.

Análisis número 6. En el sensor de flujo óptico las velocidades traslacionales obtenidas del módulo del sensor y sin ninguna manipulación presentan los inconvenientes de pérdida de información en los valores de sus velocidades traslacionales. Por ejemplo, la Figura 5.28 muestra la respuesta de la velocidad traslacional en el eje x donde la ausencia de información se ocasiona por la distancia del sensor ultrasónico cuando $d = 0$, es decir, hay pérdida de información en la distancia leída durante el recorrido del UAV.

Las mediciones del sensor ultrasónico dependen de la rigurosidad del suelo donde se realicen las pruebas experimentales. En este caso la rigurosidad del suelo se sujetan a las condiciones de las pruebas de vuelo del UAV de acuerdo a la sección 5.3.2.

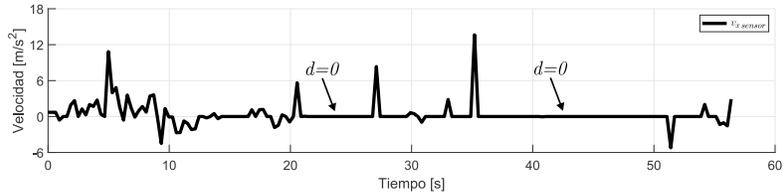


Figura 5.28: Velocidades traslacionales directas del sensor de flujo óptico.

La solución para obtener las velocidades traslacionales sin pérdida de información es filtrar la distancia d en las ecuaciones de la sección 3.1.7. La Figura 5.29 muestra la distancia del sensor ultrasónico sin y con pre-procesamiento de datos para evitar la pérdida de su información.

El pre-procesamiento de datos se realiza con algoritmos de filtrado; el filtrado de Kalman y el filtro ventana de media móvil son opciones que llegan a los mismos resultados en la implementación experimental. En otras palabras, cualquiera de esos dos filtros funcionan de forma similar en las pruebas experimentales.

La recomendación para la obtención la distancia sin ruido durante el vuelo del UAV es el uso de sensores LIDAR. Además, las mediciones de la distancia de estos sensores ópticos son mayores que las distancias de los sensores ultrasónicos.

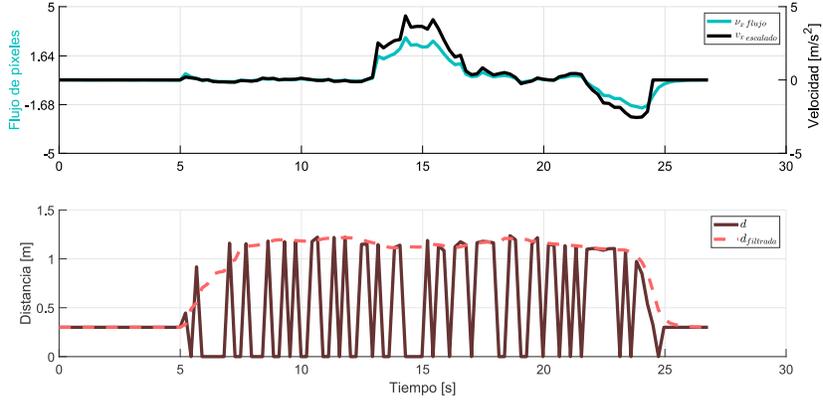


Figura 5.29: Velocidades traslacionales del sensor de flujo óptico con procesamiento de datos.

En resumen a lo anterior, la misma Figura 5.29 muestra el flujo de píxeles y la velocidad traslacional del eje x , este último es el resultado de utilizar la distancia filtrada d , por lo que se observa la información completa en la respuesta de la velocidad traslacional.

Análisis número 7. El escalonamiento de flujo de píxeles a velocidades traslacionales está dada por la distancia d lo cual representa la profundidad del escenario como se muestra en la sección 3.1.7. Sin embargo, en las pruebas experimentales es necesario la calibración del sensor de flujo óptico antes de iniciar cada prueba de vuelo del UAV para obtener valores reales.

En la ecuación 5.12 se introduce la ganancia $G(t)$ para compensar los efectos de textura del suelo en las pruebas de vuelo del UAV.

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v} \frac{G(t)Z}{f}. \quad (5.12)$$

Donde, $G(t) = f(\text{textura}, \text{luminosidad})$ es una ganancia que asume valores constantes de la textura y la luminosidad del escenario de las pruebas de vuelo, lo que implica que tal ganancia sea constante, esto es una consideración como lo realizan los algoritmos de visión. Caso contrario es necesario la calibración en línea del sensor de flujo óptico para la obtención de los valores reales del sensor de flujo óptico.

Las posiciones del sensor de flujo óptico comparados con las posiciones del GPS se muestran en la Figura 5.30. En esta respuesta es necesario encontrar el valor de G para hacer que las posiciones del sensor de flujo óptico tengan la misma escala que las posiciones del GPS, esto suponiendo valores constante de la textura y la luminosidad del escenario de las pruebas de vuelo del UAV.

Esta parte hace que las posiciones del sensor de flujo óptico coincidan en magnitud con las posiciones del GPS, en otras palabras, el sistema de navegación relativa se une con el sistema de navegación global. Esto es posible mediante mediciones realizadas a través de odometría visual³ para comparar ambos resultados.

³Son las mediciones que se realizan con dispositivos visuales como las cámaras de vídeo.

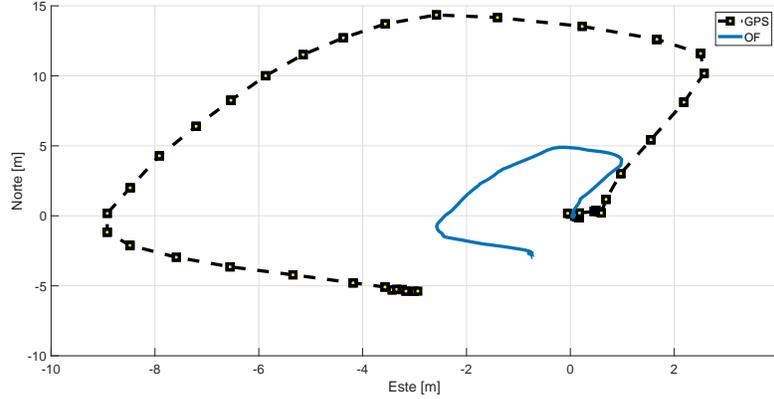


Figura 5.30: Trayectoria sin escalamiento del sensor de flujo óptico comparado con la trayectoria del GPS.

Análisis número 8. Otro punto a considerar en la posición del sensor de flujo óptico es su dirección dado un punto de referencia. El punto de referencia se obtiene con la brújula digital/magnetómetro que representa el *azimut*. El inconveniente es la aproximación de la dirección de la trayectoria del sensor de flujo óptico y del GPS, como se muestra en la Figura 5.31.

La ecuación 5.13 muestra la diferencia de la orientación del GPS y del magnetómetro, lo cual la única variable manipulable es el ángulo ψ_{mag} debido a que el ángulo ψ_{gps} está dado por el sistema de posicionamiento global.

$$\Delta\psi = \psi_{gps} - \psi_{mag}. \quad (5.13)$$

Lo que se busca es la aproximación $\psi_{gps} - \psi_{mag} \approx 0$ para evitar discrepancias entre entre las trayectorias del sensor de flujo óptico y del GPS. Además, el ángulo ψ_{mag} obtiene la orientación con referencia al norte magnético, y lo que se busca es la orientación con referencia al norte geográfico, por lo tanto, es necesario realizar una compensación de la orientación para llevar el norte magnético al norte geográfico que además depende de la zona geográfica donde se utilice la brújula digital.

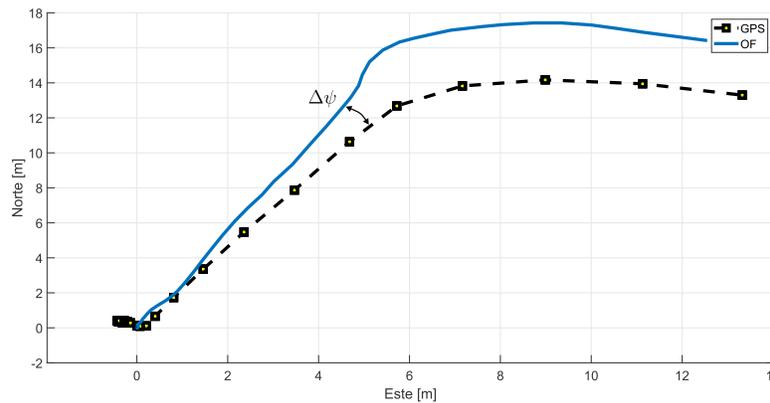


Figura 5.31: Diferencia del ángulo *yaw* entre la trayectoria del GPS y el sensor de flujo óptico.

Una vez encontrado la ganancia G que escale los valores del sensor de flujo óptico a los valores del GPS y aproximando $\psi_{gps} \approx \psi_{mag}$, se obtiene la respuesta de posición del sensor de flujo óptico aproximado a la posición del GPS como se muestra en la Figura 5.32.

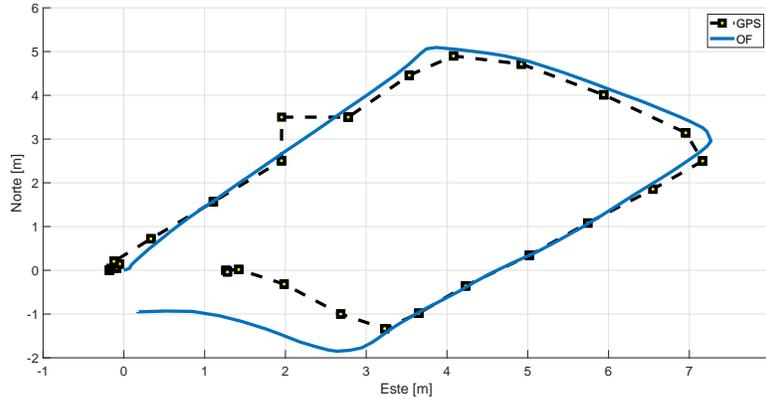


Figura 5.32: Trayectoria del escalamiento del sensor de flujo óptico aproximado a la trayectoria del GPS.

En esta misma respuesta, se observa que las respuestas del GPS presentan *zigzag* durante el recorrido del UAV, lo cual se intuye que es posible evitar ese error de posicionamiento del GPS con el sensor de flujo óptico.

Por lo tanto, es posible obtener respuestas de las posiciones del sensor del flujo óptico iguales a las respuestas del GPS considerando lo siguiente:

1. La textura y luminosidad de las pruebas de vuelo del UAV sean constantes.
2. La diferencia de la orientación del GPS y el magnetómetro se aproximen a cero.
3. Las distancias del UAV con respecto al suelo sean a valores constantes y dentro del rango del sensor de flujo óptico.

Los resultados de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF una vez realizado el análisis de sensores, se presentan en las siguientes secciones con el orden:

Sistema de navegación INS/GPS.

Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS.

Sistema de navegación INS/GPS/OF.

Sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS.

Sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS.

Sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS.

5.3.4. Sistema de navegación INS/GPS

La estimación de posición del sistema de navegación INS/GPS se muestra en la Figura 5.33, la cual utiliza los algoritmos de la sección 4.3. El prototipo del sistema de navegación INS/GPS y las condiciones de las pruebas experimentales se realizan con forme a la secciones 5.3.1 y 5.3.2. En estas pruebas experimentales el inicio de posición es aproximadamente en las coordenadas (0, 0).

Esta prueba de estimación de posición considera el funcionamiento normal del receptor GPS. Las frecuencias de predicción a 100 Hz y de corrección a 1 Hz hacen que la estimación de posición presente *rizos* durante la trayectoria recorrida del UAV al igual que en los resultados del escenario de simulación de la sección 5.1.1.

Los rizados en la estimación de posición del UAV se deben a los efectos vibratorios de la dinámica del vuelo del UAV, que son leídos por el sensor IMU. Esto ocasiona que las predicciones de las posiciones traslacionales con el sensor IMU divergen con las posiciones traslacionales del GPS.

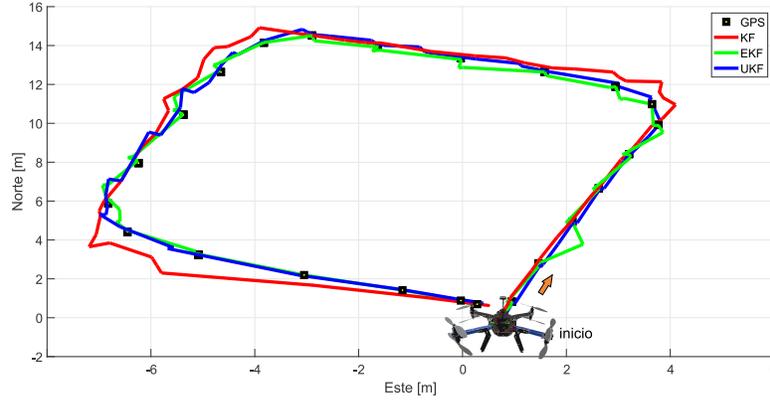


Figura 5.33: Sistema de navegación INS/GPS experimental.

Los errores cuadráticos medios (ECM) del sistema de navegación INS/GPS se muestran en la Figura 5.34. La degradación del algoritmo *unscented* (UKF) en las coordenadas este y norte es mayor que los algoritmos KF y EKF para esta prueba de estimación de posición.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 0.1669$, $ECM_{este|EKF} = 0.0944$ y $ECM_{este|UKF} = 0.1628$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 0.2940$, $ECM_{norte|EKF} = 0.3606$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.4650$.

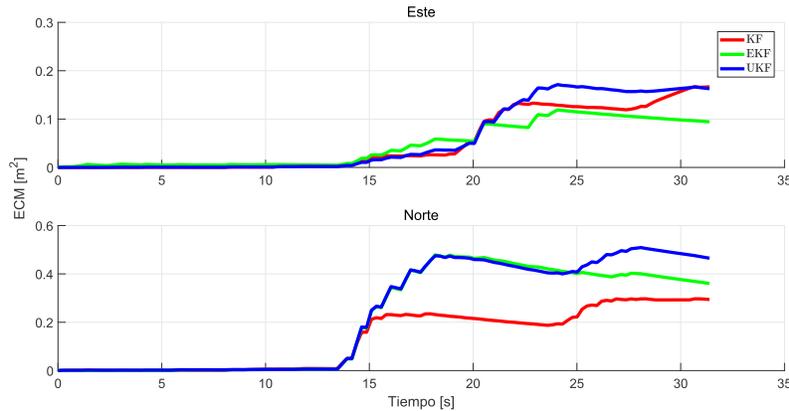


Figura 5.34: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS experimental.

Las covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS de los algoritmos de Kalman se muestran en la Figura 5.35. Los valores límite de las covarianzas de predicción y corrección se mantienen durante toda la trayectoria del UAV. El comportamiento de los resultados experimentales de las covarianzas se validan con los resultados de simulación de la sección 5.1.1.

Los valores límite de las covarianzas de la coordenada este P_{este} son: $0.0195 \leq P_{este|KF} \leq 0.0513$, $0.0283 \leq P_{este|EKF} \leq 0.5065$ y $3.6150 \leq P_{este|UKF} \leq 15.0900$; en la coordenada norte P_{norte} son: $0.0192 \leq P_{norte|KF} \leq 0.0492$, $0.0033 \leq P_{norte|EKF} \leq 0.0571$ y $3.36 \leq P_{norte|UKF} \leq 13.45$.

En esta prueba de estimación de posición se observa que los valores límite de las covarianzas del algoritmo UKF son mayores a los algoritmos KF y EKF.

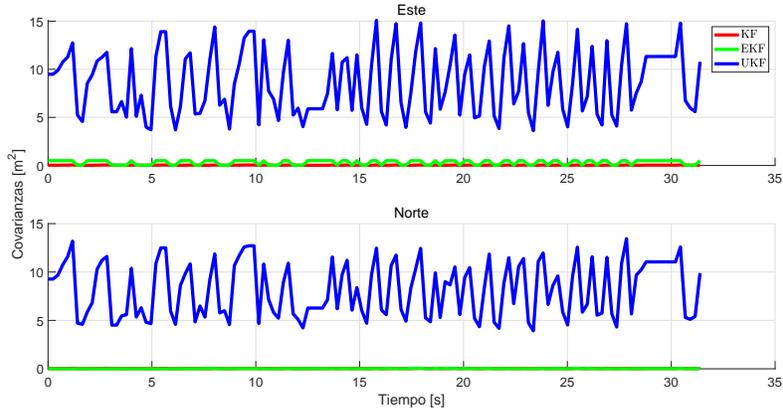


Figura 5.35: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS experimental.

La secuencia de predicciones y correcciones del sistema de navegación INS/GPS se realiza conforme a la Figura 5.36. El valor de ponderación β_0 realiza predicciones a frecuencias de 100 Hz . El valor de ponderación β_{gps} realiza correcciones a frecuencias de muestreo de 1 Hz .

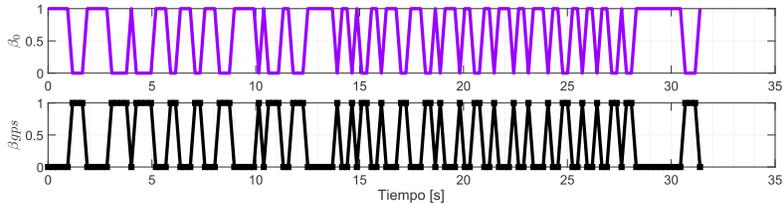


Figura 5.36: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS experimental.

En esta implementación experimental las frecuencias de predicción-corrección se aproximan a los valores ideales establecidos de 100 Hz y 1 Hz , esto se debe a la cantidad de código de las subrutinas de los algoritmos para la estimación de posición. Esto es diferente a los resultados de ponderación en simulación de la sección 5.1.1.

El sistema de navegación INS/GPS considerando la pérdida de señal GPS se analiza a continuación.

5.3.5. Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS

La estimación de posición del sistema de navegación INS/GPS con pérdida de señal GPS se muestra en la Figura 5.37. La ausencia de señal de GPS se realiza alterando el valor del indicador $HDOP$ a un valor igual a seis para que los algoritmos de Kalman detecten este error de posicionamiento. Sin embargo, las posiciones del GPS siguen estando presentes en el recorrido del UAV para compararlas con las estimaciones de posición del UAV.

Los algoritmos de Kalman a partir del tiempo de 25.7 segundos solo estiman la posición del UAV con las predicciones del sensor IMU, las cuales muestran que en los algoritmos KF, EKF y UKF se presentan discrepancias comparados con las señales del receptor GPS. El algoritmo UKF es el que estima las posiciones por algunos metros ante la pérdida de señal GPS a diferencia de los algoritmos restantes. El solo usar el sensor IMU para la estimación de posición ocasiona errores de posicionamiento asociados con ruido del propio sensor inercial⁴.

⁴El sensor IMU se usa principalmente para obtener los ángulos de Euler en la navegación de vehículos.

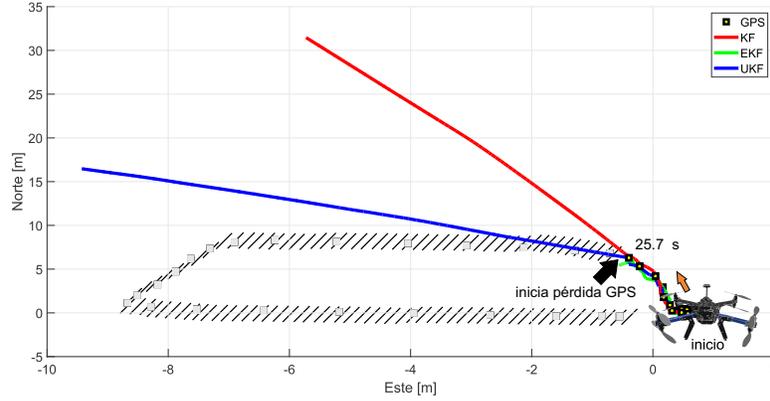


Figura 5.37: Sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental.

Los errores cuadráticos medios del sistema de navegación INS/GPS con pérdida de señal GPS se muestran en la Figura 5.38, lo cual la degradación de los algoritmos KF, EKF y UKF aumentan durante el recorrido del UAV debido al error de posicionamiento del GPS.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 6.0200$, $ECM_{este|EKF} = 11.7450$ y $ECM_{este|UKF} = 5.9821$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 131.287$, $ECM_{norte|EKF} = 6.3646$ y $ECM_{norte|UKF} = 38.204$.

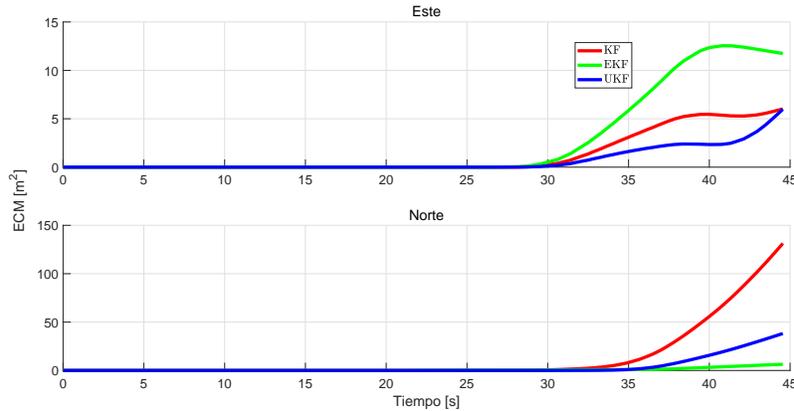


Figura 5.38: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este del sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental.

La Figura 5.39 muestra las covarianzas de las coordenadas este y norte de los algoritmos de Kalman del sistema de navegación INS/GPS con pérdida de señal GPS. Los valores límite de predicción de las covarianzas se disparan entre más es la trayectoria recorrida del UAV.

Los valores límite de las covarianzas de la coordenada este P_{este} son: $P_{este|KF} = 135.00$, $P_{este|EKF} = 0.4898$ y $P_{este|UKF} = 401.60$; en la coordenada norte P_{norte} son: $P_{norte|KF} = 122.00$, $P_{norte|EKF} = 0.0300$ y $P_{norte|UKF} = 397.70$. El algoritmo UKF presenta respuestas mayores ante la pérdida de GPS que los algoritmos restantes.

Una característica en esta prueba de estimación de posición es que los valores de las covarianzas del algoritmo EKF no se disparan a valores cercanos de los algoritmos KF y UKF. Además la estimación

de posición de las predicciones del EKF presenta valores constantes después de la pérdida de señal GPS.

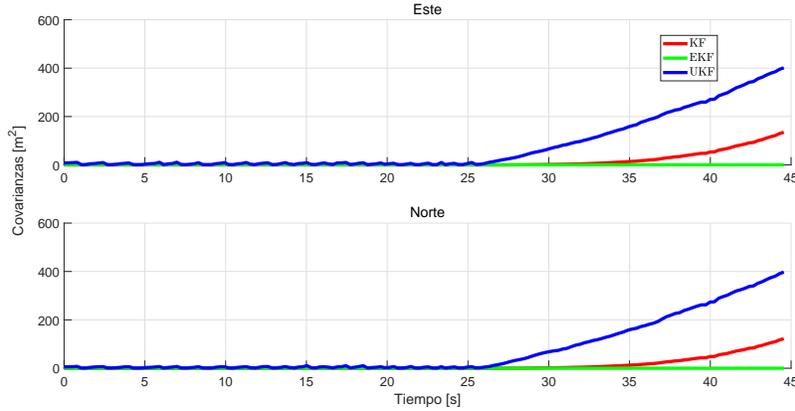


Figura 5.39: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental.

En el sistema de navegación INS/GPS, la pérdida de la señal GPS a partir del tiempo de 25.7 segundos ocasiona que $\beta_0 = 1$ y $\beta_{gps} = 0$, es decir, los algoritmos predictores-correctores realizan la estimación de posición solo con las predicciones del sensor IMU.

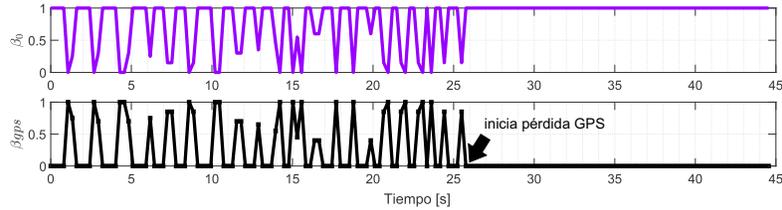


Figura 5.40: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS + pérdida de señal GPS experimental.

Las secciones 5.3.4 y 5.3.5 muestran el análisis de los resultados del sistema de navegación INS/GPS con y sin errores de posicionamiento GPS. Las siguientes secciones presentan los resultados del sistema de navegación INS/GPS y el algoritmo UKF con el sensor de flujo óptico para mejorar la estimación de posición del UAV.

5.3.6. Sistema de navegación INS/GPS/OF

La estimación de posición del sistema de navegación INS/GPS/OF con los algoritmos de Kalman de la sección 4.4 se muestran en la Figura 5.41. La implementación del sensor de flujo óptico (OF) al sistema de navegación INS/GPS mejora la estimación de posición del UAV como lo muestran los errores cuadráticos medios.

El sensor de flujo se implementa y se calibra de acuerdo a las secciones 4.4 y 5.3.3. La frecuencia de muestreo de las mediciones este sensor es de 100 Hz.

Los errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF se muestran en la Figura 5.42. El comportamiento de la degradación del algoritmo KF es menor que los algoritmos EKF y UKF.

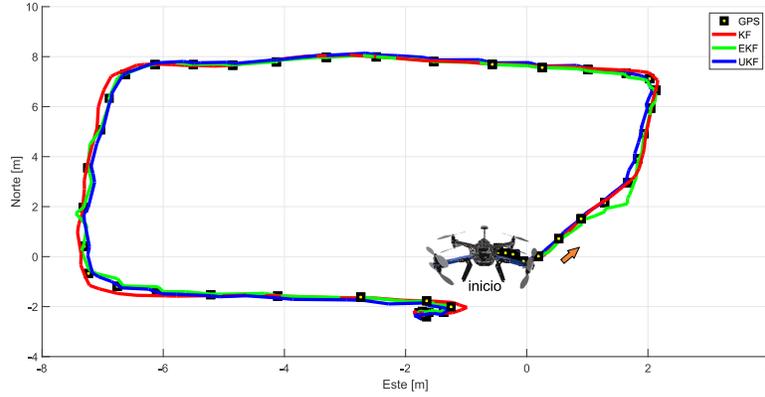


Figura 5.41: Sistema de navegación INS/GPS/OF experimental.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 0.0341$, $ECM_{este|EKF} = 0.0344$ y $ECM_{este|UKF} = 0.0457$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|EKF} = 0.0429$, $ECM_{norte|EKF} = 0.0749$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.0600$.

Los errores cuadráticos medios se reducen a valores de 10 veces con la implementación del sensor de flujo óptico al sistema de navegación INS/GPS, esto es diferente en los errores cuadráticos medios obtenidos sin el sensor de flujo óptico como se muestra en la sección 5.3.4.

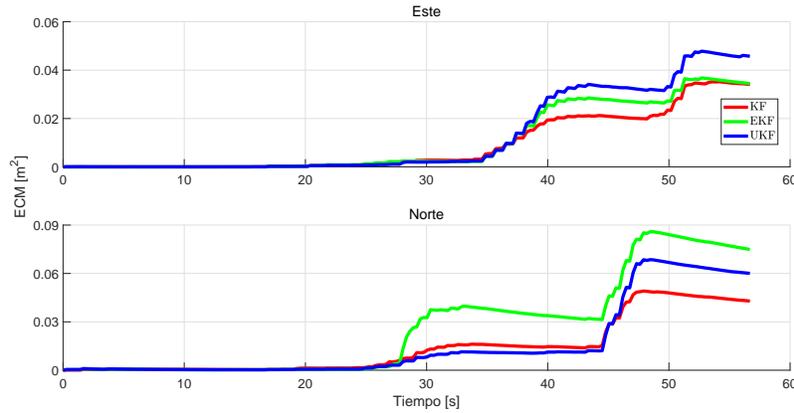


Figura 5.42: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF experimental.

La Figura 5.43 muestra los valores límite de las covarianzas del sistema de navegación INS/GPS/OF, los cuales antes del tiempo de 15.59 segundos se utiliza el sistema de navegación INS/GPS⁵, posteriormente al tiempo establecido, se usa el sistema de navegación INS/GPS/OF para la estimación de posición del UAV.

Considerando el tiempo anterior, los valores límite de las covarianzas en la coordenada este son: $0.0097 \leq P_{este|KF} \leq 0.0126$, $0.0143 \leq P_{este|EKF} \leq 0.0279$ y $2.838 \leq P_{este|UKF} \leq 4.204$; en la coordenada norte son: $0.0094 \leq P_{norte|KF} \leq 0.0130$, $0.0004 \leq P_{norte|EKF} \leq 0.0072$ y $2.66 \leq P_{norte|UKF} \leq 3.754$.

⁵En este sistema de navegación el UAV se encuentra despegando y el sensor de flujo no se encuentra en su región válida, sección 4.4.3.

La implementación del sensor de flujo óptico al sistema de navegación INS/GPS hace que la diferencia de los valores límite de las covarianzas *a priori* y *a posteriori* disminuyan. El algoritmo UKF sigue alcanzando valores límite de covarianzas por encima de los algoritmos restantes. Mayores valores implican un mayor filtrado. Un mayor filtrado implica que la estimación de posición se vea afectada como se observa en la Figura 5.42 para el algoritmo UKF.

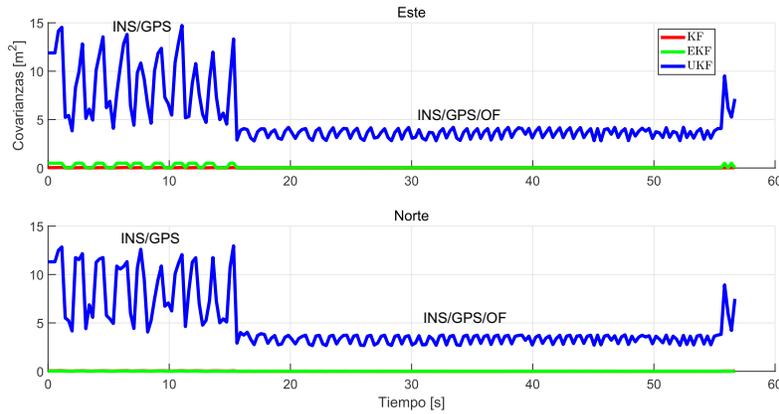


Figura 5.43: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF experimental.

Los valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF los muestra la Figura 5.44, los cuales antes del tiempo de 15.59 segundos la ponderación de la predicción-corrección la realizan los valores β_0 y β_{gps} con las frecuencias de muestreo de 100 y 1 Hz. Posteriormente al tiempo establecido, los valores de ponderación β_{of} y β_{gpsof} con las frecuencias de muestreo de 100 y 1 Hz, los cuales ponderan al sensor de flujo óptico y a la fusión local del GPS y del sensor de flujo óptico, dominan a los algoritmos de Kalman en su etapa de corrección debido a la aproximación de la frecuencia de corrección igual a la frecuencia de predicción, $T \approx dt$.

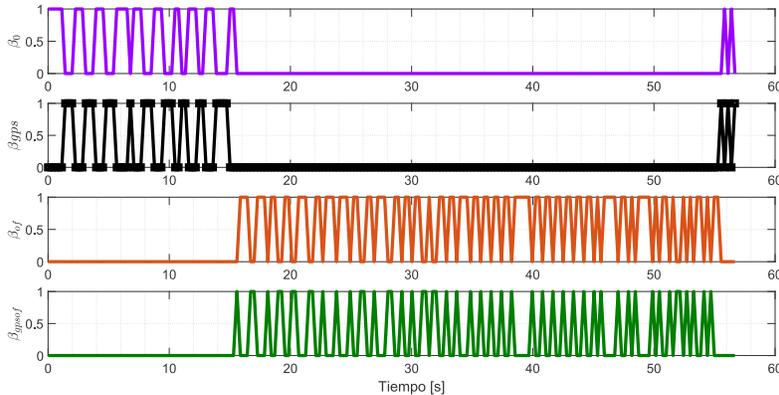


Figura 5.44: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF experimental.

El comportamiento del sistema de navegación INS/GPS/OF con errores de posicionamiento del GPS se analizan en las siguientes secciones.

5.3.7. Sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS

La estimación de posición con pérdida de señal GPS por cinco segundos en el sistema de navegación INS/GPS/OF se muestra en la Figura 5.45. La ausencia de señal GPS se consigue al manipular el valor del indicador $HDOP$ a un valor igual a seis para obtener errores de posicionamiento en las coordenadas este-norte en el tiempo de 34.36 segundos.

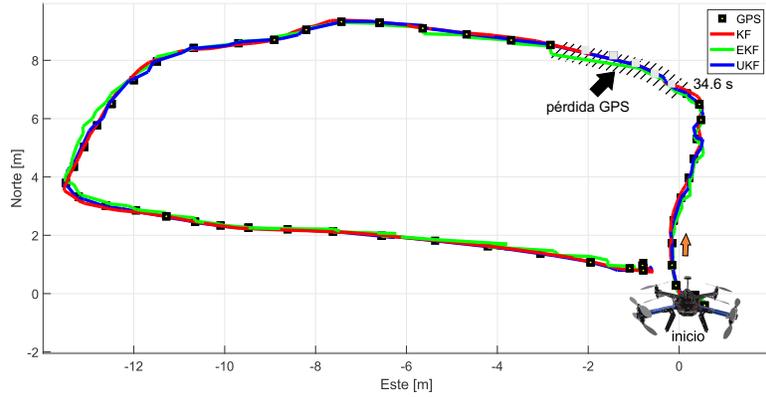


Figura 5.45: Sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental.

Los errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF los muestra la Figura 5.46. La pérdida de señal GPS ocasiona tendencias positivas mayores de degradación en los algoritmos KF, EKF y UKF.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este: $ECM_{este|KF} = 0.1107$, $ECM_{este|EKF} = 0.1061$ y $ECM_{este|UKF} = 0.1098$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 0.0410$, $ECM_{norte|EKF} = 0.0703$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.0417$.

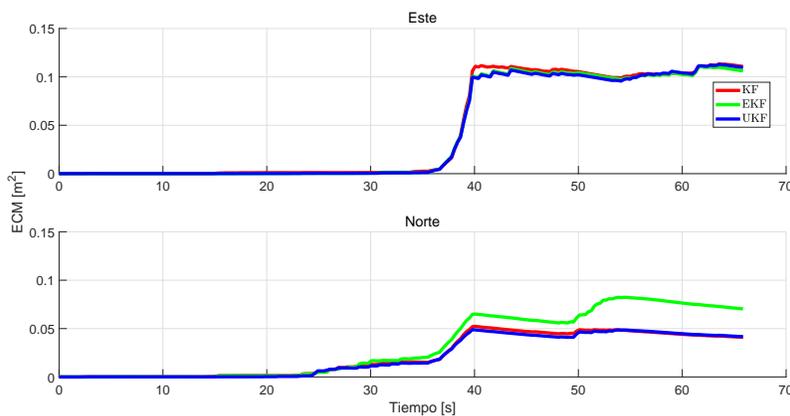


Figura 5.46: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental.

Los valores límite de las covarianzas del sistema de navegación INS/GPS/OF con cinco segundos de pérdida de señal GPS se muestran en la Figuras 5.47. La ausencia de señal GPS por cinco segundos

se produce a partir del tiempo de 34.36 segundos.

Dentro de estos cinco segundos de error de posicionamiento del GPS, los valores límite de las covarianzas se aproximan a valores constantes. En la coordenada este son: $P_{este|KF} = 0.0147$, $P_{este|EKF} = 0.0281$ y $P_{este|UKF} = 0.8992$; en la coordenada norte son: $P_{norte|KF} = 0.0143$, $P_{norte|EKF} = 0.0020$ y $P_{norte|UKF} = 1.0230$. Los valores límite de covarianzas del algoritmo UKF es mayor que los algoritmos restantes.

El comportamiento de las covarianzas se aprecia mejor en estas pruebas experimentales que en las pruebas de simulación de la sección 5.1.3.

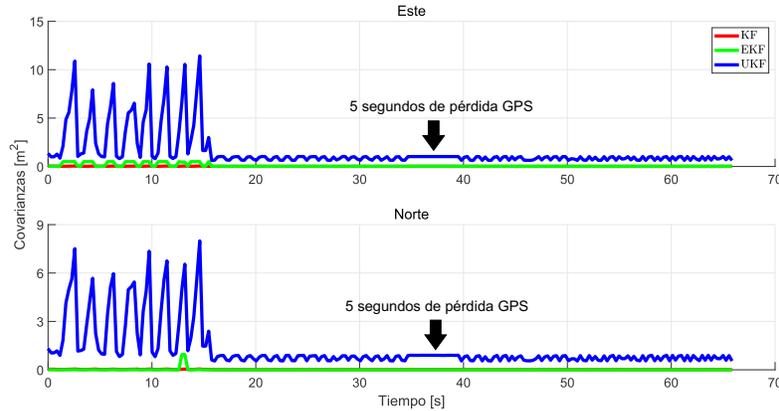


Figura 5.47: Covarianzas de la coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental.

Los valores de ponderación durante los cinco segundos de pérdida de señal GPS los muestra la Figura 5.48, lo cual el valor β_{of} realiza la ponderación del sensor de flujo óptico para estimar la posición del UAV durante la ausencia del GPS. En este punto de ausencia de señal GPS, las predicciones de los algoritmos de Kalman son dominadas por las correcciones del sensor de flujo óptico, debido a que la frecuencia de corrección es igual a la frecuencia de predicción, $T = dt$. Esto ocasiona que los valores de las covarianzas de las coordenadas este y norte obtengan valores constantes como se muestran en la Figura 5.47.

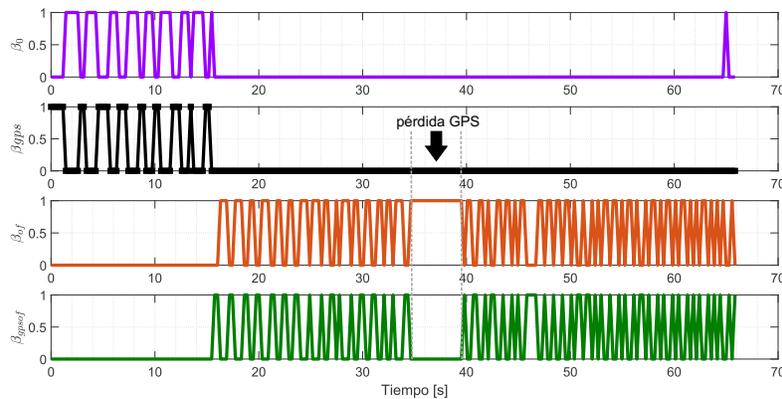


Figura 5.48: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + cinco segundos de pérdida de señal GPS experimental.

El sistema de navegación INS/GPS/OF considerando múltiples pérdidas de señal GPS se presenta a continuación.

5.3.8. Sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS

Varias pérdidas de señal GPS con duración de cinco segundos en la estimación de posición del UAV con el en el sistema de navegación INS/GPS/OF se muestran en la Figura 5.49, a este comportamiento se le conoce como *vaivén* de pérdida de señal GPS, debido a que la señal del GPS se pierde y, posteriormente, al pasar los cinco segundos regresa. La señal de GPS se ausenta tres veces durante la estimación de posición del UAV.

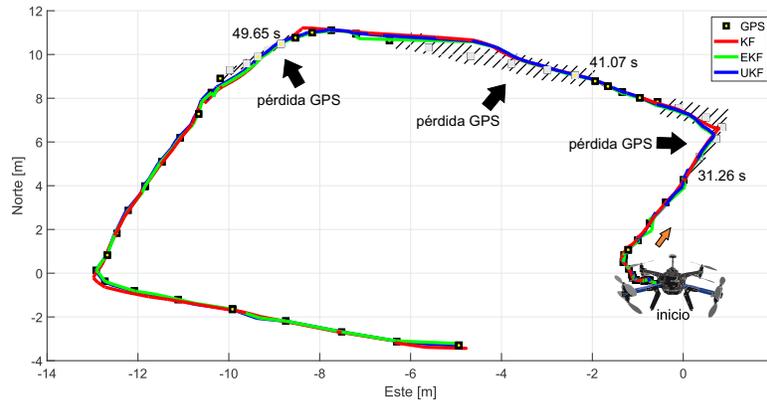


Figura 5.49: Sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental.

Los errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF con vaivén de pérdida de señal de GPS los muestra la Figura 5.50, los cuales presentan tendencias positivas ante la ausencia de GPS y tendencias negativas ante su regreso.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 0.1471$, $ECM_{este|EKF} = 0.11398$ y $ECM_{este|UKF} = 0.1392$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 0.0337$, $ECM_{norte|EKF} = 0.0347$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.0337$.

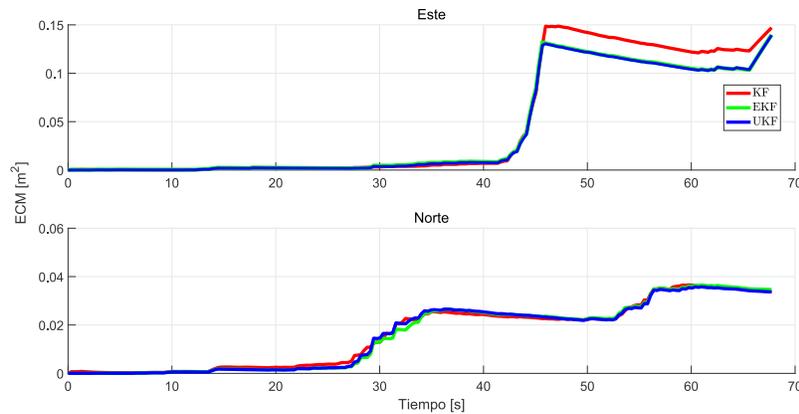


Figura 5.50: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental.

Los valores límite de las covarianzas del sistema de navegación INS/GPS/OF con vaivén de pérdida de señal GPS se muestran en la Figuras 5.51. Las tres pérdidas de señal GPS por cinco segundos se producen a partir de los tiempos de 31.26, 41.07 y 49.65 segundos.

Dentro de los cinco segundos de no señal GPS, la aproximación a valores constantes de los límite de las covarianzas en la coordenada este son $P_{este|KF} = 0.0147$, $P_{este|EKF} = 0.0281$ y $P_{este|UKF} = 0.8992$; en la coordenada norte son: $P_{norte|KF} = 0.0143$, $P_{norte|EKF} = 0.0020$ y $P_{norte|UKF} = 1.0230$.

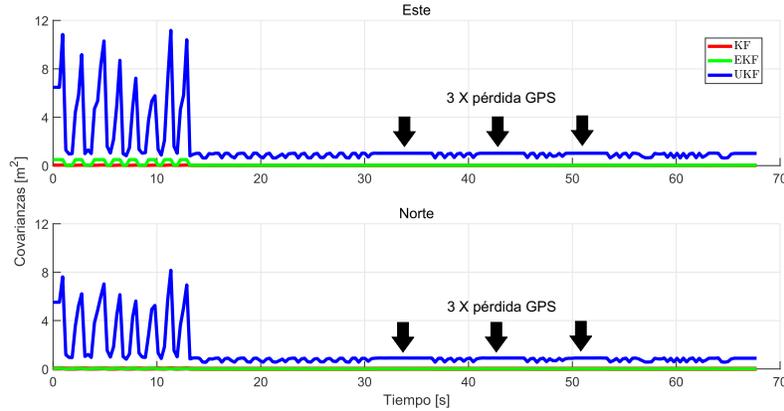


Figura 5.51: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental.

La Figura 5.52 muestra los valores de ponderación $\beta_{of} = 1$, esto significa que el sensor de flujo óptico estima la posición del UAV ante la pérdida de señal GPS, este comportamiento sucede tres veces durante el recorrido del UAV.

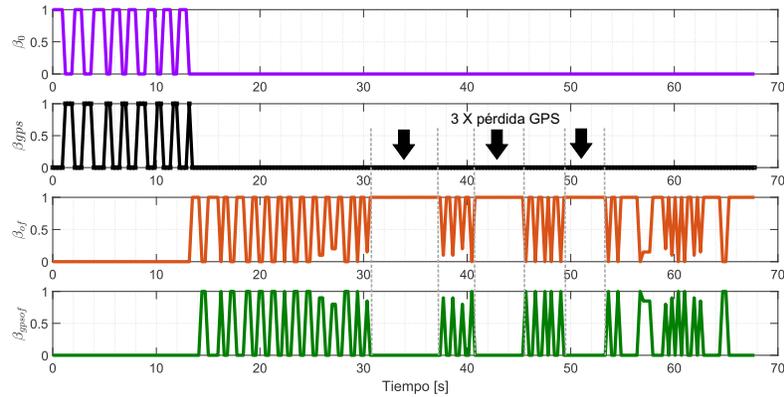


Figura 5.52: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + vaivén de pérdida de señal GPS experimental.

Estas secciones muestran que el sistema de navegación INS/GPS/OF es capaz de estimar las posición del UAV ante ausencia de señal GPS por intervalos de tiempo.

A continuación se muestra la pérdida completa de la señal GPS en el sistema de navegación propuesto.

5.3.9. Sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS

En esta última prueba de estimación de posición se considera la permanencia de la pérdida de señal GPS en el sistema de navegación INS/GPS/OF como lo muestra la Figura 5.53. En el tiempo de 34.57 segundos se aumenta el valor del indicador $HDOP$ a seis para obtener un error de posicionamiento del GPS y mantenerlo con ese valor hasta finalizar el recorrido del UAV.

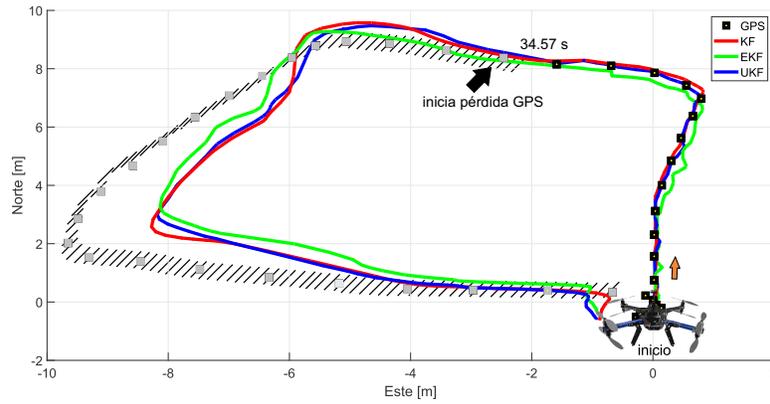


Figura 5.53: Sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental.

La Figura 5.54 muestra los errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF con permanencia de pérdida de señal GPS. En esta prueba de estimación de posición se observa que los algoritmos KF, EKF y UKF presentan tendencias positivas de las degradaciones ante la ausencia de la señal de GPS. Sin embargo, el comportamiento de estos errores cuadráticos medios presentan degradaciones menores que los errores cuadráticos medios del sistema de navegación INS/GPS, como los muestra la sección 5.3.5.

Los valores finales de los errores cuadráticos medios en la coordenada este son: $ECM_{este|KF} = 0.3941$, $ECM_{este|EKF} = 0.4080$ y $ECM_{este|UKF} = 0.3979$; en la coordenada norte son: $ECM_{norte|KF} = 0.1350$, $ECM_{norte|EKF} = 0.3796$ y $ECM_{norte|UKF} = 0.1377$.

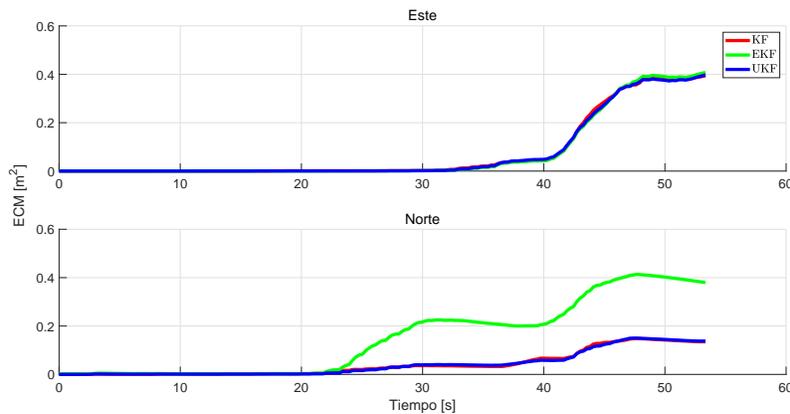


Figura 5.54: Errores cuadráticos medios de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental.

La Figura 5.55 muestra los valores límite de las covarianzas del sistema de navegación INS/GPS/OF cuando hay permanencia de pérdida de señal GPS a partir del tiempo de 34.57 segundos.

Al igual que en las pruebas de ausencia de señal GPS, los valores de las covarianzas se aproximan a valores constantes, los cuales en la coordenada este son: $P_{este|KF} = 0.0147$, $P_{este|EKF} = 0.0283$ y $P_{este|UKF} = 1.019$; en la coordenada norte son: $P_{norte|KF} = 0.0143$, $P_{norte|EKF} = 0.0024$ y $P_{norte|UKF} = 0.9018$.

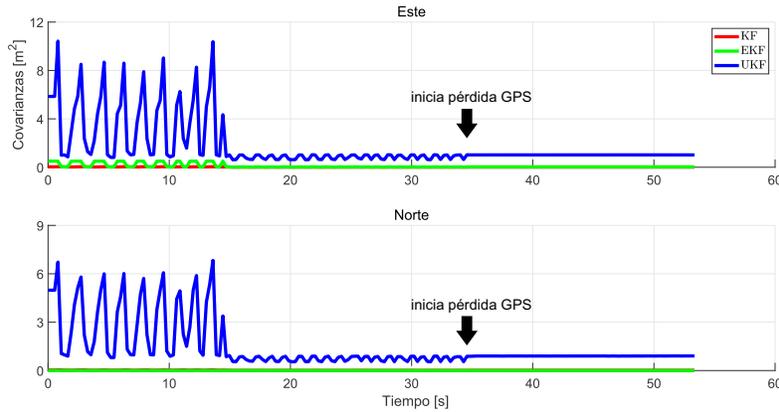


Figura 5.55: Covarianzas de las coordenadas este y norte del sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental.

El presentarse la permanencia de pérdida de señal GPS a partir del tiempo de 34.57 segundos, el valor de ponderación β_{of} es la que realiza la estimación de posición con el sensor de flujo óptico durante la trayectoria del UAV, esto se muestra en la Figura 5.56.

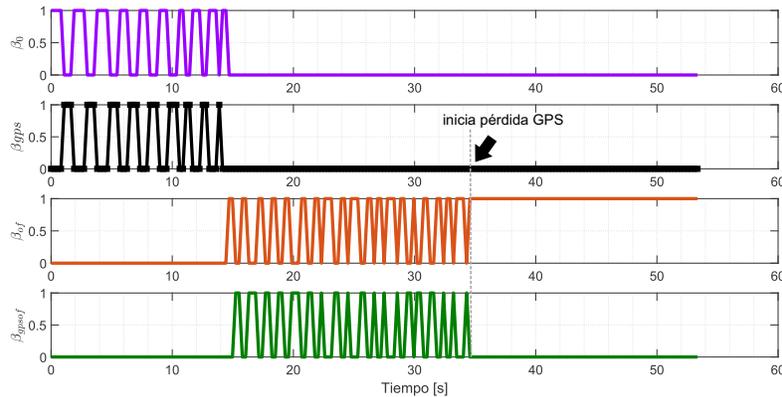


Figura 5.56: Valores de ponderación del sistema de navegación INS/GPS/OF + permanencia de pérdida de señal GPS experimental.

Esta sección 5.3.9 del sistema de navegación INS/GPS/OF con permanencia de pérdida de señal GPS termina las pruebas de estimación de posición del UAV.

A continuación se resumen los resultados de los errores cuadráticos medios y los valores límite de las covarianzas de las coordenadas este y norte obtenidos de los algoritmos KF, EKF y UKF.

5.4. Tablas de resultados en pruebas experimentales

Los resultados finales de los errores cuadráticos medios de la implementación experimental se muestran en la Tabla 5.4. Los valores límite de las covarianzas en las coordenadas este y norte se presentan en las Tablas 5.5 y 5.6. Para la interpretación de estas tablas se tiene que considerar las notas 1-3.

Tabla 5.4: Errores cuadráticos medios de pruebas experimentales.

| Prueba experimental | Coordenada | KF | EKF | UKF |
|-------------------------|------------|---------|--------|--------|
| INS/GPS | este | 0.1669 | 0.0944 | 0.1628 |
| | norte | 0.2940 | 0.3606 | 0.4650 |
| INS/GPS + no GPS | este | 6.0200 | 11.745 | 5.9821 |
| | norte | 131.287 | 6.3646 | 38.204 |
| INS/GPS/OF | este | 0.0341 | 0.0344 | 0.0457 |
| | norte | 0.0429 | 0.0749 | 0.0600 |
| INS/GPS/OF + 5 s no GPS | este | 0.1107 | 0.1061 | 0.1098 |
| | norte | 0.0410 | 0.0703 | 0.0417 |
| INS/GPS/OF + vaivén GPS | este | 0.1471 | 0.1398 | 0.1392 |
| | norte | 0.0337 | 0.0347 | 0.0337 |
| INS/GPS/OF + no GPS | este | 0.3940 | 0.4080 | 0.3979 |
| | norte | 0.1349 | 0.3796 | 0.1377 |

Nota número 1. Los errores cuadráticos medios indican de forma global los errores presentes en todo el recorrido del UAV, estos valores con las gráficas de su comportamiento son de apoyo para observar la degradación de los sistemas de posicionamiento propuestos.

Tabla 5.5: Valores de covarianzas de la coordenada este en pruebas experimentales.

| Prueba experimental | Límite | KF | EKF | UKF |
|-------------------------|------------|--------|--------|--------|
| INS/GPS | predicción | 0.0513 | 0.5065 | 15.090 |
| | corrección | 0.0195 | 0.0283 | 3.6150 |
| INS/GPS + no GPS | predicción | 135.00 | 0.4898 | 401.60 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF | predicción | 0.0126 | 0.0279 | 4.2040 |
| | corrección | 0.0097 | 0.0143 | 2.8380 |
| INS/GPS/OF + 5 s no GPS | predicción | 0.0147 | 0.0281 | 0.8992 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF + vaivén GPS | predicción | 0.0147 | 0.0281 | 0.8992 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF + no GPS | predicción | 0.0147 | 0.0283 | 1.019 |
| | corrección | - | - | - |

Tabla 5.6: Valores de covarianzas de la coordenada norte en pruebas experimentales.

| Prueba experimental | Límite | KF | EKF | UKF |
|-------------------------|------------|--------|--------|--------|
| INS/GPS | predicción | 0.0492 | 0.0571 | 13.450 |
| | corrección | 0.0192 | 0.0033 | 3.3600 |
| INS/GPS + no GPS | predicción | 122.00 | 0.0300 | 397.70 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF | predicción | 0.0130 | 0.0072 | 3.7540 |
| | corrección | 0.0094 | 0.0004 | 2.6690 |
| INS/GPS/OF + 5 s no GPS | predicción | 0.0143 | 0.0020 | 1.0230 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF + vaivén GPS | predicción | 0.0143 | 0.0020 | 1.0230 |
| | corrección | - | - | - |
| INS/GPS/OF + no GPS | predicción | 0.0143 | 0.0024 | 0.9018 |
| | corrección | - | - | - |

Nota número 2. Los valores límite de covarianzas solo dependen del intervalo de las pruebas de estimación de posición de los diferentes sistema de navegación. Para el sistema de navegación INS/GPS, solo se consideran los valores límite de covarianza asociados con ese sistema de navegación. Lo mismo sucede con el sistema de navegación INS/GPS/OF, esto con el fin de evitar redundancia de datos.

Nota número 3. Los valores límite de covarianzas de las coordenadas este y norte con pérdida de señal GPS solo son considerados en el intervalo de tiempo de ausencia de señal GPS.

5.5. Discusión de resultados

La discusión de resultados experimentales/simulaciones de los sistemas de navegación INS/GPS e INS/GPS/OF con el algoritmo UKF propuestos como las estrategias de estimación de posición del UAV se presentan a continuación.

Discusión número 1. Las predicciones de la posición traslacional del UAV a partir de las aceleraciones traslacionales del sensor IMU presentan errores de posicionamiento ocasionados por efectos de vibración en el UAV, como lo muestra el sistema de navegación INS/GPS de la sección 5.3.4 el cual es mayor que en el escenario de simulación de la sección 5.1.1. Estas vibraciones se disminuyen con movimientos del UAV cercanos al estado *hover*, sin embargo, las aceleraciones tienen a ser cero. La alternativa para reemplazar al sensor IMU de las predicciones, es utilizar las entradas virtuales del UAV a partir de las velocidades angulares de sus propelas, sin embargo, estas velocidades se tienen que estimar a partir de los pulsos de modulación de los motores eléctricos. Lo que implica la estimación de la estimación de la estimación.

Discusión número 2. En el sistema de navegación INS/GPS, la pérdida de señal GPS ocasiona que los algoritmos KF, EKF y UKF presenten incrementos mayores en los errores cuadráticos medios que sin pérdida de señal GPS como se muestran en las pruebas experimentales de las secciones 5.3.4 y 5.3.5. Por otra parte, en el escenario de simulación de la sección 5.1.2, el sistema de navegación INS/GPS es capaz de seguir estimando la posición del UAV con las predicciones del sensor IMU, lo cual es diferente en las pruebas experimentales.

Discusión número 3. La frecuencia de las predicciones de 100 Hz y la frecuencia de las correcciones de 1 Hz ocasionan que la diferencia de los valores límite de las covarianzas de las coordenadas este y norte de los algoritmos de Kalman se incrementen, como se muestra en la sección 5.3.4 de las pruebas experimentales. Además, la disminución de la diferencia de los valores límite de la predicción de las covarianzas se logra aproximando la frecuencia de las predicciones con la frecuencia de las correcciones, como se realizan en la sección 5.3.6, lo que significa que la etapa de corrección de los algoritmos de Kalman dominan al resto del algoritmo, es decir, a las predicciones, por lo tanto, el ruido asociados con la aceleraciones y velocidades angulares, así como de imperfecciones del sistema dinámico incluyendo errores de linealización, son compensados por la retroalimentación de las correcciones, esto es evidente cuando se introduce el sensor de flujo óptico al sistema de navegación INS/GPS a la frecuencia de corrección a 100 Hz . Esto se comprueba con los valores constantes de las covarianzas de las coordenadas este y norte.

Discusión número 4. El sistema de navegación INS/GPS/OF realiza la estimación de la posición del UAV ante la pérdida de señal GPS por algunos segundos e incluso teniendo una permanencia de ausencia de señal de GPS. Esto hace que la fusión de datos de sensores sea robusta ante tales errores de posicionamiento de GPS, como se muestra en las secciones 5.3.7 y 5.3.9 de las pruebas experimentales.

Discusión número 5. La estimación de posición ante la pérdida de señal de GPS depende de la calidad sensor de flujo óptico, esto incluye el hardware y el software, y además la calibración del sensor de flujo óptico antes de realizar el recorrido del UAV.

Discusión número 6. El sensor de flujo óptico es capaz de estimar la posición del UAV a distancias menores de 10 metros debido a la degradación presente en el mismo sensor. Esto se debe al incremento de los errores asociados a los sensores de navegación como se menciona en la hipótesis de la sección 1.1; como se estudia en la sección 3.1.7; como se analiza en la 5.3.3; y como se comprueba en la sección 5.3.9.

Discusión número 7. La posición del sensor de flujo óptico presenta una menor degradación que la posición obtenida del sensor IMU, de acuerdo a la discusión numero 6. Esto se debe a solo una integración requerida en el sensor de flujo óptico para obtener la posición, es decir, de velocidades a posiciones traslacionales; a diferencia del sensor IMU, de aceleraciones a posiciones traslacionales, en este último sensor dos integraciones son requeridas para obtener la posición. Esta degradación menor en el sensor de flujo óptico se cumple siempre y cuando la calibración del sensor de flujo óptico se realice antes de iniciar cada vuelo del UAV, como se observa en la sección 5.3.3.

Discusión número 8. Los algoritmos KF y UKF presentan los mismos comportamientos en la estimación de posición como se muestran en los escenarios de simulación y pruebas experimentales, a diferencia del algoritmo EKF que presenta inestabilidades del filtrado de los estados estimados. Comportamientos que también se presentan en los escenarios de simulación de [Outamazirt et al., 2015].

Discusión número 9. En los algoritmos predictores-correctores, es posible usar cualquier algoritmo lineal o no lineal para la estimación de posición siempre y cuando la frecuencia de las correcciones se aproxime o sea igual a la frecuencia de las predicciones como se muestra en las secciones 5.3.6, 5.3.7 y en la discusión numero 3. Considerando esto, las estimaciones de los algoritmos dependen de las propiedades de ruido del sistema dinámico y de sus mediciones los cuales se seleccionan de tal forma que se obtengan valores óptimos en las estimaciones de estados.

Discusión número 10. Con base a la discusión número 9. Cuando se presenten valores diferentes de las frecuencias de predicción y corrección como en las secciones 5.1.1 y 5.3.4, las estimaciones de las variables de estados dependen más del modelo del sistema dinámico que de las mediciones, debido a la falta de compensación por parte de la retroalimentación a los errores asociados de linealización, de métodos de discretización, de incertidumbres en los sistemas dinámicos.

Las discusiones anteriores se fundamentan a partir de los escenarios de simulación y las +585 pruebas experimentales⁶ realizadas en los vehículos aéreos no tripulados (UAV). Sin embargo, estas discusiones son solo de base para su aplicación en otras áreas de investigación.

⁶Los cuales el 20 % corresponden a pruebas en el UAV.

Capítulo 6

Conclusiones

La propuesta del algoritmo predictor-corrector UKF comparado con los algoritmos KF y EKF en el sistema de navegación INS/GPS/OF ha mostrado que la estimación de posición del UAV es posible en intervalos cortos ante situaciones de pérdida de señal de GPS. El algoritmo UKF se modificó para integrar el sistema de navegación inercial (INS), el sistema de posicionamiento global (GPS) y el sensor de flujo óptico (OF).

El análisis de las respuestas de los algoritmos KF, EKF y UKF ha mostrado similitudes en la estimación de posición cuando las frecuencias de las correcciones se aproximan a las frecuencias de las predicciones de los algoritmos de Kalman. El algoritmo UKF presenta mayor filtrado que los algoritmos restantes, por lo que lo hace mejor en la estimación de posición ante errores de posicionamiento GPS, pero ante condiciones normales presenta mismos resultados que los algoritmos EK y EKF.

La discrepancia de los resultados experimentales y en simulación se encuentra entre el sensor inercial y el sensor de flujo óptico. En el sensor inercial, las aceleraciones traslacionales son afectados por vibraciones del UAV que ocasionan comportamientos indeseables para la estimación de posición. Por otro lado, en el sensor de flujo óptico las velocidades traslacionales dependen de las condiciones de textura y luminosidad del lugar de vuelo del UAV. Esto afecta los resultados de la estimación de posición de los algoritmos analizados como lo mostraron las pruebas experimentales.

Por lo tanto, el sensor de flujo óptico para la estimación de posición en zonas con pérdida de señal GPS es una opción viable siempre y cuando la calibración de este sensor se realice antes de cada vuelo del UAV que representa un problema de calibración. Sin embargo, la ventaja del sensor de flujo óptico respecto al sensor inercial es la obtención de menores degradaciones en las posiciones traslacionales este y norte estimadas.

Trabajos futuros

La integración de sensores LIDAR y radar en sistemas de navegación del UAV para la creación de mapas tridimensionales, así como un sensor de viento para utilizarlo en optimizaciones de vuelo.

Algoritmos de visión e inteligencia artificial para determinar y evitar zonas de pérdida de señal GPS, y a su vez utilizarlos en optimización de baterías de UAV. La calibración en línea de sistemas de navegación visuales con algoritmos predictores-correctores para manejar múltiples datos.

El diseño de sistemas distribuidos para manejar grandes cantidades de datos de sensores en la toma de decisiones, y llevar la autonomía de vuelo del UAV a un nivel 3 y 4.

Utilizar tarjetas de vuelo para el UAV que sean de código abierto para implementar algoritmos de estimación de posición, filtros de partículas, y a su vez unirlos con estrategias de control.

Conclusions

The proposal of the UKF predictor-corrector algorithm compared to the KF and EKF algorithms at the INS/GPS/OF navigation system has shown that the UAV position estimation is possible at short intervals in situations of GPS signal loss. The UKF algorithm was modified to integrate the inertial navigation system (INS), the global positioning system (GPS) and the optical flow sensor (OF).

The response analysis of KF, EKF and UKF algorithms has shown similarities in position estimation in which the correction frequencies approximate to the prediction frequencies of Kalman algorithms. The UKF algorithm presents better filtering than the remaining algorithms, so it is better at the position estimation in positioning errors of GPS, but in normal conditions it presents same results with respect to the KF and EKF algorithms.

The discrepancy of experimental and simulation results is present between inertial and optical flow sensors. In inertial sensor, the vibrations in UAV affect the translation accelerations which are not beneficial for position estimation. Otherwise, in optical flow sensor the translational velocities depend on features of UAV flight places. This affects the results of the presented algorithms in position estimation as the experimental tests showed them.

Furthermore, the optical flow sensor for position estimation in GPS loss signal places is a good option as long as the calibration of this sensor is done before each UAV flight that represents a calibration problem. However, this optical flow sensor presents the advantage of less position deterioration in east and north coordinates with respect to inertial sensor.

Future works

The integration of LIDAR and radar sensors in UAV navigation system in order to get tridimensional maps, as well as an air sensor to use it in flight optimizations.

Vision and artificial algorithms to determine and avoid no GPS signal places, and to use them in optimization of UAV batteries. Likewise, the calibration online of visual navigation systems with predictor-corrector algorithms to manipulate multiple data.

Implementation of distribute system to work with big sensor data in decision making, and to carry UAV flight autonomy to a 3 and 4 level.

The use of flight electronic board to implement algorithms of position estimation, particle filters, and control strategies.

Bibliografía

- [Ahmadian, 2014] Ahmadian, A. (2014). A modified extended kalman filter for bearings-only tracking. *The 22nd Iranian Conference on Electrical Engineering*, PP:1712–1716.
- [Baby and Ahamed, 2014] Baby, R. M. and Ahamed, R. R. (2014). Optical flow motion detection on raspberry pi. In *2014 Fourth International Conference on Advances in Computing and Communications*, pages 151–152.
- [Bancroft y Lachapelle, 2011] Bancroft y Lachapelle (2011). Data fusion algorithms for multiple inertial measurement units. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 11:6771–98.
- [Beard, 2012] Beard, R. W. (2012). *Small Unmanned Aircraft, Theory and Practice*. Princeton University Press, first edition.
- [Borges and Vidas, 2016] Borges, P. V. K. and Vidas, S. (2016). Practical infrared visual odometry. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(8):2205–2213.
- [Brown, 2012] Brown, R. G. (2012). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab exercises*. Wiley, fourth edition.
- [Campestrini et al., 2016] Campestrini, C., Heil, T., Kosch, S., and Jossen, A. (2016). A comparative study and review of different kalman filters by applying an enhanced validation method. *Journal of Energy Storage*, 8:142 – 159.
- [Caron et al., 2006] Caron, F., Duflos, E., Pomorski, D., and Vanheeghe, P. (2006). Gps/imu data fusion using multisensor kalman filtering: introduction of contextual aspects. *Information Fusion*, 7(2):221 – 230.
- [Castillo y Bonilla, 2016] Castillo y Bonilla (2016). Odometría visual basada en flujo óptico para drones multirrotor. In *Memorias del XVIII Congreso Mexicano de Robótica*, pages 1–7.
- [Chandra y Setijadi, 2016] Chandra y Setijadi (2016). Stereo visual odometry system design on humanoid robot nao. In *2016 6th International Conference on System Engineering and Technology (ICSET)*, pages 34–38.
- [Chen et al., 2014] Chen, L., Zhang, Q., Fan, Y., Wan, G., and Yin, G. (2014). A strategy of estimating stage-of-charge of lifepo4 battery based on multirate extended kalman filter. In *2014 9th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, pages 48–51.
- [Chernikova, 2018] Chernikova, O. S. (2018). An adaptive unscented kalman filter approach for state estimation of nonlinear continuous-discrete system. In *2018 XIV International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE)*, pages 37–40.
- [Chien-Shu Hsieh, 2000] Chien-Shu Hsieh (2000). Robust two-stage kalman filters for systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12):2374–2378.
- [Coticchia y Surace, 1978] Coticchia y Surace (1978). Risoluzione di problemi geodetici con le miscalcolatrici elettroiche programmabili. *Bolletino di geodesia e scienze affini; Istituto Geografico Militare, Firenze Italia; Biblioteca Nazionale Centrale Di Firenze*, 37(1):108–136.

- [Damerius y Jeinsch, 2019] Damerius y Jeinsch (2019). A generic inertial navigation system. In *International Interdisciplinary PhD Workshop*, pages 1–6.
- [de Souza et al., 2018] de Souza, C., Castillo, P., Lozano, R., and Vidolov, B. (2018). Enhanced uav pose estimation using a kf: experimental validation. In *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1255–1261.
- [Debnath et al., 2017] Debnath et al. (2017). Visual odometry data fusion for indoor localization of an unmanned aerial vehicle. In *2017 IEEE International Conference on Power, Control, Signals and Instrumentation Engineering (ICPCSI)*, pages 279–284.
- [Durrant-Whyte, 2001] Durrant-Whyte, H. (2001). *Multi sensor data fusion*. The University of Sydney, first edition.
- [Feng et al., 2017] Feng, K., Li, J., Xiaoming, Z., Shen, C., Bi, Y., Zheng, T., and Liu, J. (2017). A new quaternion-based kalman filter for real-time attitude estimation using the two-step geometrically-intuitive correction algorithm. *Sensors*, 17:2146.
- [Gan and Harris, 2001] Gan, Q. and Harris, C. J. (2001). Comparison of two measurement fusion methods for kalman-filter-based multisensor data fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 37(1):273–279.
- [Gao et al., 2018a] Gao, B., Gao, S., Hu, G., Zhong, Y., and Gu, C. (2018a). Maximum likelihood principle and moving horizon estimation based adaptive unscented kalman filter. *Aerospace Science and Technology*, 73:184 – 196.
- [Gao et al., 2017] Gao, B., Gao, S., Zhong, Y., Hu, G., and Gu, C. (2017). Interacting multiple model estimation-based adaptive robust unscented kalman filter. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 15.
- [Gao et al., 2018b] Gao, B., Hu, G., Gao, S., Zhong, Y., and Gu, C. (2018b). Multi-sensor optimal data fusion based on the adaptive fading unscented kalman filter. *Sensors*, 18:488.
- [Gao et al., 2018c] Gao, B., Hu, G., Gao, S., Zhong, Y., and Gu, C. (2018c). Multi-sensor optimal data fusion for ins/gnss/cns integration based on unscented kalman filter. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 16:1–12.
- [Gao et al., 2010] Gao, S., Zhong, Y., and Shirinzadeh, B. (2010). Random weighting estimation for fusion of multi-dimensional position data. *Information Sciences*, 180(24):4999 – 5007.
- [Gao et al., 2009] Gao, S., Zhong, Y., Zhang, X., and Shirinzadeh, B. (2009). Multi-sensor optimal data fusion for ins/gps/sar integrated navigation system. *Aerospace Science and Technology*, 13(4):232 – 237.
- [Gao et al., 1993] Gao, Y., Krakiwsky, E. J., Abousalem, M. A., and McLellan, J. F. (1993). Comparison and analysis of centralized, decentralized, and federated filters. *Navigation*, 40(1):69–86.
- [Gao y Harris, 2002] Gao y Harris (2002). Some remarks on kalman filters for the multisensor fusion. *Information Fusion*, 3(3):191 – 201.
- [Giribet et al., 2018] Giribet, J. I., Mas, I., and Moreno, P. (2018). Vision-based integrated navigation system and optimal allocation in formation flying. In *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 52–61.
- [Goppert et al., 2017] Goppert, J., Yantek, S., and Hwang, I. (2017). Invariant kalman filter application to optical flow based visual odometry for uavs. In *2017 Ninth International Conference on Ubiquitous and Future Networks (ICUFN)*, pages 99–104.
- [Guo et al., 2017] Guo, H., Wang, Z., Li, Y., Wang, D., and Wang, G. (2017). State of charge and parameters estimation for lithium-ion battery using dual adaptive unscented kalman filter. In *2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, pages 4962–4966.

- [Hamnanaka, 2018] Hamnanaka, M. (2018). Deep learning-based area estimation for unmanned aircraft systems using 3d map. In *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 416–423.
- [Haykin, 2001] Haykin, S. (2001). *Kalman Filtering and Neural Networks*. Wiley, first edition.
- [Herrera, 2014] Herrera, R. H. (2014). Método para la integración de datos de múltiples sensores de flujo en líneas de conducción de hidrocarburos refinados. In *Tesis de maestría, Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad Nacional de Colombia*.
- [Honegger et al., 2013] Honegger, D., Meier, L., Tanskanen, P., and Pollefeys, M. (2013). An open source and open hardware embedded metric optical flow cmos camera for indoor and outdoor applications. In *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1736–1741.
- [Huang et al., 2015] Huang, J., Yan, B., and Hu, S. (2015). Centralized fusion of unscented kalman filter based on huber robust method for nonlinear moving target tracking. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- [Huang et al., 2018] Huang, L., Song, J., Zhang, C., and Cai, G. (2018). Design and performance analysis of landmark-based ins/vision navigation system for uav. *Optik*, 172:484 – 493.
- [Huerta et al., 2005] Huerta, E., Manguiaterra, A., and Noguera, G. (2005). *GPS Posicionamiento satelital, primera edición*. UNR editora, first edition.
- [Infante et al., 2014] Infante, S., Sánchez, L., and Cedeño, F. (2014). Filtro no lineales para reconstruir señales de electrocardiogramas. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 21:199.
- [Jia et al., 2019] Jia et al. (2019). A quaternion-based robust adaptive spherical simplex unscented particle filter for mins/vns/gns integrated navigation system. *Hindawi Mathematical Problems in Engineering*, 2019(4):1–13.
- [Jiang et al., 2019] Jiang, K., Yan, F., and Zhang, H. (2019). Hydrothermal aging factor estimation for two-cell diesel-engine scr systems via a dual time-scale unscented kalman filter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pages 1–1.
- [Jiang et al., 2017] Jiang, K., Zhang, H., and Lin, J. (2017). NH_3 coverage ratio estimation of diesel-engine scr systems by a dual time-scale extended kalman filter. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, PP:1–1.
- [Joardar et al., 2016] Joardar, S., Siddique, T. A., Alam, S., and Hossam-E-Haider, M. (2016). Analyses of different types of errors for better precision in gnss. In *2016 3rd International Conference on Electrical Engineering and Information Communication Technology (ICEEICT)*, pages 1–6.
- [Jong y Jang, 2017] Jong y Jang (2017). Improvement of gps position estimation using snr and doppler. In *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pages 1645–1650.
- [Julier and Uhlmann,] Julier, S. J. and Uhlmann, J. K. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. *In AeroSense 1997*, 3068:182–193.
- [Julier and Uhlmann, 2004] Julier, S. J. and Uhlmann, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422.
- [Jurado et al., 2015] Jurado, F., Rodriguez, M., Dzul, A., and Campa, R. (2015). Stochastic feedback controller for a quadrotor uav with dual modified extended kalman filter. In *2015 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)*, pages 186–194.
- [Kakaes, 2015] Kakaes, K. (2015). What drones can do and how they can do it. *New America*, pages 9–17.

- [Kalman, 1960] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82:35–45.
- [Khalil, 2012] Khalil, H. K. (2012). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, third edition edition.
- [Kharchenko et al., 2013] Kharchenko, V., Kondratyuk, V., Ilnytska, S., Kutsenko, O., and Larin, V. (2013). Urgent problems of uav navigation system development and practical implementation. In *2013 IEEE 2nd International Conference Actual Problems of Unmanned Air Vehicles Developments Proceedings (APUAVD)*, pages 157–160.
- [Kim et al., 2018] Kim, Y., An, J., and Lee, J. (2018). Robust navigational system for a transporter using gps/ins fusion. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(4):3346–3354.
- [Kolanowski et al., 2018] Kolanowski, K., ?wietlicka, A., Kapela, R., Pochmara, J., and Rybarczyk, A. (2018). Multisensor data fusion using elman neural networks. *Applied Mathematics and Computation*, 319:236 – 244. Recent Advances in Computing.
- [Korayem et al., 2018] Korayem, M., Yousefzadeh, M., and Kian, S. (2018). Precise end-effector pose estimation in spatial cable-driven parallel robots with elastic cables using a data fusion method. *Measurement*, 130:177 – 190.
- [Langelaan et al., 2011] Langelaan, J., Alley, N., and Neidhoefer, J. (2011). Wind field estimation for small unmanned aerial vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34:1016–1030.
- [Lee, 2003] Lee, T. G. (2003). Centralized kalman filter with adaptive measurement fusion: its application to a gps/sdins integration system with an additional sensor. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 1(4):444–452.
- [Leonard, 2016] Leonard, T. (2016). Automatic landing without gps. In *Master of Science Thesis, Automatic Control, Lund University*.
- [Li et al., 2016] Li, P., Garratt, M., Lambert, A., and Lin, S. (2016). Metric sensing and control of a quadrotor using a homography-based visual inertial fusion method. *Robotics and Autonomous Systems*, 76:1 – 14.
- [Li et al., 2014] Li, Y., Ding, L., and Liu, G. (2014). Error-tolerant switched robust extended kalman filter with application to parameter estimation of wheel-soil interaction. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(4):1448–1460.
- [Luo et al., 2013] Luo, C., McClean, S. I., Parr, G., Teacy, L., and De Nardi, R. (2013). Uav position estimation and collision avoidance using the extended kalman filter. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 62(6):2749–2762.
- [Mammarella et al., 2008] Mammarella, M., Campa, G., Napolitano, M. R., Fravolini, M. L., Gu, Y., and Perhinschi, M. G. (2008). Machine vision/gps integration using ekf for the uav aerial refueling problem. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 38(6):791–801.
- [Marantos et al., 2016] Marantos, P., Koveos, Y., and Kyriakopoulos, K. J. (2016). Uav state estimation using adaptive complementary filters. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(4):1214–1226.
- [Merheb et al., 2015] Merheb, A., Bateman, F., and Noura, H. (2015). Passive and active fault tolerant control of octorotor uav using second order sliding mode control. In *2015 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 1907–1912.
- [Min et al., 2017] Min, H. R., Jianqi, L., Mengyao, S., and Zhongjie, T. (2017). Quadrotor hovering scheme based on improved optical flow. In *2017 Chinese Automation Congress (CAC)*, pages 2357–2362.

- [Mitchell, 2007] Mitchell, H. B. (2007). *Multi-sensor data fusion an introduction*. Springer, first edition.
- [Moon et al., 2016] Moon, C., Han, J. S., and Kwon, Y. A. (2016). Square-root unscented kalman filter for state estimation of permanent magnet synchronous motor. In *2016 55th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, pages 460–464.
- [Mouats et al., 2015] Mouats, T., Aouf, N., Chermak, L., and Richardson, M. A. (2015). Thermal stereo odometry for uavs. *IEEE Sensors Journal*, 15(11):6335–6347.
- [Muro et al., 2013] Muro, C., Luque, L., Castillo-Toledo, B., and Loukianov, A. (2013). Backstepping control with sliding mode estimation for a hexacopter. In *International conference on electrical engineering, computing science and automatic control*, pages 31–36.
- [NMEA, 2019] NMEA (2019). Nmea data, <https://www.gpsinformation.org/dale/nmea.htm>, 25 de noviembre del 2019.
- [Noureldin et al., 2013] Noureldin, A., Karamat, T. B., and Georgy, J. (2013). *Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration*. Springer.
- [Ogata, 2010] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Pearson educación, fifth edition.
- [Ortiz, 2018] Ortiz, G. T. (2018). Control tolerante a fallas aplicado a vehículos aéreos no tripulados. In *Tesis de Doctorado en ciencias en Ingeniería Electrónica, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, México*.
- [Ortiz et al., 2015] Ortiz, G. T., Garcia-Beltrán, C., Reyes-Reyes, J., Vidal-Rosas, A., and Astorga-Zaragoza, C. (2015). Control tolerante a fallas pasivo de un octorotor tipo x8 utilizando controladores backstepping en cascada. In *Convención de Ingeniería Eléctrica*, pages 1–8.
- [Outamazirt et al., 2015] Outamazirt, F., Yan, L., Li, F., and Nemra, A. (2015). Solving the uav localization problem using a smooth variable structure filtering. In *2015 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–12.
- [Oyekan, 2015] Oyekan, J. (2015). A vision-based terrain morphology estimation model inspired by the avian hippocampus. *Digital Communications and Networks*, 1(2):134 – 140.
- [Padhy et al., 2018] Padhy, R. P., Verma, S., Ahmad, S., Choudhury, S. K., and Sa, P. K. (2018). Deep neural network for autonomous uav navigation in indoor corridor environments. *Procedia Computer Science*, 133:643 – 650. International Conference on Robotics and Smart Manufacturing (RoSMa2018).
- [Perdices, 2017] Perdices, E. G. (2017). Técnicas para la localización visual robusta de robots en tiempo real con y sin mapas. In *Tesis de Doctorado en Sistemas de Hardware y Software Avanzados, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid, España*.
- [Qi et al., 2017] Qi, J., Yu, N., and Lu, X. (2017). A uav positioning strategy based on optical flow sensor and inertial navigation. In *2017 IEEE International Conference of Unmanned Sytems (ICUS)*, pages 81–87.
- [Racero et al., 2014] Racero, J. L., Sastre, S., Vignoni, A., García-Nieto, S., and Picó, J. (2014). Mejora de la localización de un cuadricóptero mediante la fusión de su sistema de metrología y un gps. *Actas de las XXXV Jornadas de Automática*, pages 1 – 8. Actas de las XXXV Jornadas de Automática, 3-5 de septiembre de 2014, Valencia.
- [Raol, 2010] Raol, J. R. (2010). *Multi-sensor data fusion with Matlab*. CRC Press, first edition.
- [Reizenstein, 2017] Reizenstein, A. (2017). Position and trajectory control of a quadcopter using pid and lq controllers. In *Master of Science Thesis in Electrical Engineering, Linköping University*.
- [Rhudy et al., 2011] Rhudy, M., Gu, Y., Gross, J., and Napolitano, M. (2011). Sensitivity analysis of ekf and ukf in gps/ins sensor fusion. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference 2011*.

- [Sampedro et al., 2017] Sampedro, C., Bavle, H., Rodríguez-Ramos, A., Carrio, A., Fernández, R. A. S., Sanchez-Lopez, J. L., and Campoy, P. (2017). A fully-autonomous aerial robotic solution for the 2016 international micro air vehicle competition. In *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 989–998.
- [Sanahuja et al., 2011] Sanahuja, G., Valera, A., Sánchez, A., Ricolfe-Viala, C., Vallés, M., and Marín, L. (2011). Control embebido de robots móviles con recursos limitados basado en flujo Óptico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 8(3):250 – 257.
- [Seung et al., 2013] Seung, J., Lee, D., and Chong, K. (2013). Parameter estimation method for coupled tank system using dual extended kalman filter. In *2013 13th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2013)*, pages 1223–1228.
- [Shen et al., 2014] Shen, J., Liu, Y., Wang, S., and Sun, Z. (2014). Evaluation of unscented kalman filter and extended kalman filter for radar tracking data filtering. In *2014 European Modelling Symposium*, pages 190–194.
- [Shuai et al., 2019] Shuai, W., Xing, Q., Li, X., Xing, Y., and Cai, X. (2019). An improved marine multi-constellation pseudorange single-point positioning algorithm. In *2019 Prognostics and System Health Management Conference (PHM-Paris)*, pages 1–6.
- [Simon, 2006] Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Wiley, first edition.
- [Sánchez et al., 2013] Sánchez, L., Ordoñez, J., and Infante, S. (2013). Extended kalman filter and extended kalman particle filter for nonlinear estimation problems. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad de Carabobo*, 20 (1):1–17.
- [Stojkoska et al., 2017] Stojkoska, B., Palikrushev, J., Trivodaliev, K., and Kalajdziski, S. (2017). Indoor localization of unmanned aerial vehicles based on rssi.
- [Sugiki et al., 2015] Sugiki, Y., Yamaguchi, T., and Harada, H. (2015). Implementation of optical flow measurement system with an embedded processor. In *2015 15th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, pages 347–350.
- [Sukkarieh et al., 1999] Sukkarieh, S., Nebot, E. M., and Durrant-Whyte, H. F. (1999). A high integrity imu/gps navigation loop for autonomous land vehicle applications. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(3):572–578.
- [Sun et al., 2013] Sun, K., Yu, Y., Zhou, W., Zhou, G., Wang, T., and Li, Z. (2013). A low-cost and robust optical flow cmos camera for velocity estimation. In *2013 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pages 1181–1186.
- [Ullah et al., 2020] Ullah, I., Shen, Y., and Su, X. (2020). A localization based on unscented kalman filter and particle filter localization algorithms. *Bolletino di geodesia e science affini; Istituto Geografico Militare, Firenze Italia; Biblioteca Nazionale Centrale Di Firenze*, 8:2233–2246.
- [Unhelkar et al., 2014] Unhelkar, V. V., Perez, J., Boerkoel, J. C., Bix, J., Bartscher, S., and Shah, J. A. (2014). Towards control and sensing for an autonomous mobile robotic assistant navigating assembly lines. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 4161–4167.
- [Vargas and Kurka, 2015] Vargas, J. A. D. and Kurka, P. R. G. (2015). The use of a graphic processing unit (gpu) in a real time visual odometry application. In *2015 IEEE International Conference on Dependable Systems and Networks Workshops*, pages 141–146.
- [Vemula et al., 2007] Vemula, M., Bugallo, M. F., and Djuric, P. M. (2007). Performance comparison of gaussian-based filters using information measures. *IEEE Signal Processing Letters*, 14(12):1020–1023.

- [Wu et al., 2017] Wu, M., Lam, S., and Srikanthan, T. (2017). A framework for fast and robust visual odometry. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 18(12):3433–3448.
- [Xiong et al., 2008] Xiong, K., Zhang, H., and Liu, L. (2008). Adaptive robust extended kalman filter for nonlinear stochastic systems. *IET Control Theory Applications*, 2(3):239–250.
- [Xiong y Mu, 2017] Xiong y Mu (2017). Accurate state of charge estimation for lithium-ion battery using dual uncensored kalman filters. In *2017 Chinese Automation Congress (CAC)*, pages 5484–5487.
- [Yun et al., 2007] Yun, B., Peng, K., and Chen, B. M. (2007). Enhancement of gps signals for automatic control of a uav helicopter system. In *IEEE International Conference on Control and Automation*, pages 1185–1189.
- [Zenkin et al., 2020] Zenkin, A., Berman, I., and Pachkouski, K. (2020). Quadcopter simultaion model for researh of monitoring tasks. In *2020 26th Coference of Open Innovations Association (FRUCT)*, pages 449–457.
- [Zhang et al., 2016] Zhang, S., Yu, S., Liu, C., Yuan, X., and Liu, S. (2016). A dual-linear kalman filter for real-time orientation determination system using low-cost mems sensors. *Sensors*, 16:264.
- [Zhao et al., 2017] Zhao, J., Netto, M., and Mili, L. (2017). A robust iterated extended kalman filter for power system dynamic state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(4):3205–3216.
- [Zhe Dong and Zheng You, 2006] Zhe Dong and Zheng You (2006). Finite-horizon robust kalman filtering for uncertain discrete time-varying systems with uncertain-covariance white noises. *IEEE Signal Processing Letters*, 13(8):493–496.

Anexo A

Péndulo simple

Las ecuaciones dinámicas del péndulo simple en variables de estado se representan en la Tabla A.1.

Tabla A.1: Ecuaciones del péndulo simple.

Péndulo simple no lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$y = x_1. \quad (\text{A.2})$$

Péndulo simple lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u, \quad (\text{A.3})$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Péndulo simple lineal y discretizado (ESTE SE UTILIZA EN EL ALGORITMO KF LINEAL):

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) & \sqrt{\frac{l}{g}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \\ -\sqrt{\frac{g}{l}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) & \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{mgl}(\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) - 1) \\ \frac{1}{m\sqrt{gl^3}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \end{bmatrix} u, \quad (\text{A.5})$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Nota. En este análisis se realiza la consideración de que el péndulo simple es un sistema conservativo para fines de simplicidad. Además, un sensor de posición angular se implementa en él.

La obtención de las ecuaciones de la Tabla A.1 se realiza a continuación.

El modelo matemático del péndulo simple se representa en la ecuación diferencial A.7, el cual es un sistema dinámico no lineal.

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + kl^2 \frac{d\theta}{dt} + mgl \sin(\theta) = \tau \quad (\text{A.7})$$

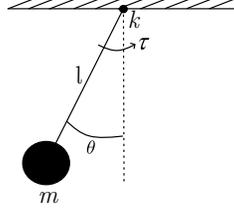


Figura A.1: Péndulo simple.

Donde, m es la masa; g es la gravedad; l es la distancia del centro de gravedad hasta el punto de fijación; k es el coeficiente de fricción; θ es la posición angular y τ es el par aplicado al péndulo simple, como se muestra en la Figura A.1. Para fines de simulación, el péndulo simple se considera un sistema conservativo, es decir, no hay pérdida de energía en él, por lo tanto el término $k = 0$. Con esta consideración la ecuación A.7 se simplifica a la ecuación A.8.

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = \tau \quad (\text{A.8})$$

En este análisis matemático se usa la notación de Newton: diferenciación con respecto al tiempo, es decir, *theta* dos puntos $\ddot{\theta}$ y *theta* punto $\dot{\theta}$ son las derivadas $d^2\theta/dt^2$ y $d\theta/dt$, respectivamente.

Además, la posición angular θ es la única variable medible.

La ecuación A.8 se representa en variables de estado en su forma no lineal y lineal los cuales dependen de la aplicación. En seguida se presenta la obtención del las ecuaciones no lineales del péndulo simple.

A.1. Péndulo simple no lineal

El sistema dinámico de la ecuación A.8 se representa en variables de estado considerando el cambio de variable $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ y $u = \tau$, como se muestra en las ecuaciones A.9 y A.10.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u. \quad (\text{A.10})$$

En su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

A.2. Péndulo simple linealizado y discretizado

La ecuación A.11 del péndulo simple no lineal presenta dos puntos de equilibrio [Khalil, 2012]. Estos puntos de equilibrio son $p_{1s} = (0, 0)$ y $p_{1s} = (\pi/2, 0)$ cuando $u_s = 0$. Donde el primer punto de equilibrio es estable, mientras que el segundo punto de equilibrio es inestable. La linealización se realiza en el punto de equilibrio estable p_{1s} .

El método para linealizar los sistemas dinámicos es por medio de la serie de Taylor de primer orden [Ogata, 2010]. El cual en su forma matricial se representa en las ecuaciones A.12 y A.13.

El término $\Delta = -\mathbf{A}\mathbf{x}_s - \mathbf{B}\mathbf{u}_s$ contiene las variables de desviación del sistema dinámico linealizado, por lo tanto, $\Delta \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}_s \in \mathbb{R}^m$ son los vectores de estados y de entradas evaluadas en los

Tabla A.2: Ecuaciones de linealización de sistemas dinámicos.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \Delta, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (\text{A.13})$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s} \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_s} \quad (\text{A.14})$$

Nota. La representación de estas ecuaciones se manipularon algebraicamente para agrupar los variables de desviación.

puntos de equilibrio p_s y u_s ; las matrices de parámetros $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y de control $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ del sistema dinámico se conocen como jacobianos y se obtienen al evaluar los puntos de equilibrio en las derivadas parciales; $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de observaciones, en este ejemplo se considera que las mediciones de los sensores son lineales. Sin embargo, en el caso de que las mediciones sean no lineales, es necesario la obtención de la matriz jacobiana de las mediciones.

Las matrices jacobianas \mathbf{A} y \mathbf{B} del péndulo simple se obtienen a continuación.

En la primera matriz jacobiana:

$$\mathbf{A} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s}, \quad (\text{A.15})$$

$$= \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s}. \quad (\text{A.16})$$

En la segunda matriz jacobiana:

$$\mathbf{B} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u_2} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_s}, \quad (\text{A.17})$$

$$= \left. \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_s}. \quad (\text{A.18})$$

Evaluando los puntos de equilibrio \mathbf{x}_s y \mathbf{u}_s se obtiene el sistema dinámico lineal en la ecuación [A.19](#).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (\text{A.19})$$

La consideración de la medición lineal resulta $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. Donde, $\mathbf{C} = [1 \ 0]$ representa de forma general a los sensores implementados en el péndulo simple, en este caso hay un sensor de posición angular. Sin embargo, si $\mathbf{C} = [1 \ 1]$, se considera la implementación de un sensor de posición y otro de velocidad angular.

La discretización analítica de la ecuación [A.19](#) se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) & \sqrt{\frac{l}{g}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \\ -\sqrt{\frac{g}{l}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) & \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{mgl}(\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) - 1) \\ \frac{1}{m\sqrt{gl^3}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \end{bmatrix} u, \quad (\text{A.20})$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Estas ecuaciones son las que se utilizan en el filtro de Kalman lineal y se obtienen con el procedimiento de la siguiente sección.

Discretización del péndulo simple

El modelo discreto de la ecuación A.19 se obtiene a partir de la matriz de transición de estados como se muestra en las ecuaciones A.22 y A.23.

Tabla A.3: Ecuaciones para discretizar un sistema dinámico en tiempo continuo.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k. \quad (\text{A.23})$$

Las matrices $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se calculan de la siguiente forma:

$$\mathbf{\Phi} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \}, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{\Gamma} = \int_0^h \mathbf{\Phi}(\tau) \mathbf{B} d\tau. \quad (\text{A.25})$$

Donde, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz identidad; s es una variable compleja; h es el paso de discretización (también definido como dt).

Por lo tanto, resolviendo para $\mathbf{\Phi}$:

$$\mathbf{\Phi} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) & \sqrt{\frac{l}{g}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \\ -\sqrt{\frac{g}{l}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) & \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Resolviendo para $\mathbf{\Gamma}$

$$\mathbf{\Gamma} = \int_0^h \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\tau) & \sqrt{\frac{l}{g}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}\tau) \\ -\sqrt{\frac{g}{l}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}\tau) & \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \right\} d\tau \quad (\text{A.28})$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{mgl}(\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) - 1) \\ \frac{1}{m\sqrt{gl^3}} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Representándolo en la forma de la ecuación A.22 y haciendo $t = h$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) & \sqrt{\frac{l}{g}}\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \\ -\sqrt{\frac{g}{l}}\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) & \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{mgl}(\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}h) - 1) \\ \frac{1}{m\sqrt{gl^3}}\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}h) \end{bmatrix} u \quad (\text{A.30})$$

El procedimiento analítico se complica para sistemas dinámicos lineales de más de dos estados, por lo que es recomendable utilizar las herramientas computacionales de Matlab de discretización. La otra alternativa es utilizar métodos numéricos como el método de Euler para discretizar el sistema dinámico en tiempo continuo.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + (\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k)dt, \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k. \quad (\text{A.32})$$

Además, las ecuaciones [A.31](#) y [A.32](#) se utilizan para discretizar los sistemas dinámicos no lineales.

Anexo B

Ecuaciones dinámicas del UAV

B.1. Linealización del modelo completo del UAV

Esta sección presenta la linealización de las ecuaciones B.1-B.6 los cuales representan el modelo dinámico completo de los UAV tipo multirroto¹.

$$\ddot{x} = (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) \frac{1}{m} U_1, \quad (\text{B.1})$$

$$\ddot{y} = (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) \frac{1}{m} U_1, \quad (\text{B.2})$$

$$\ddot{z} = -g + (c\theta c\phi) \frac{1}{m} U_1. \quad (\text{B.3})$$

$$\ddot{\phi} = \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} \dot{\theta}\Omega_r + \frac{l}{I_x} U_2, \quad (\text{B.4})$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r}{I_y} \dot{\phi}\Omega_r + \frac{l}{I_y} U_3, \quad (\text{B.5})$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} U_4. \quad (\text{B.6})$$

El procedimiento del cambio de variables normales a variables de estado se presenta a continuación.

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_7 &= \phi, \\ \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2, & \dot{x}_7 &= \dot{\phi} = x_8, \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x}, & \dot{x}_8 &= \ddot{\phi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= y, & x_9 &= \theta, \\ \dot{x}_3 &= \dot{y} = x_4, & \dot{x}_9 &= \dot{\theta} = x_{10}, \\ \dot{x}_4 &= \ddot{y}, & \dot{x}_{10} &= \ddot{\theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= z, & x_{11} &= \psi, \\ \dot{x}_5 &= \dot{z} = x_6, & \dot{x}_{11} &= \dot{\psi} = x_{12}, \\ \dot{x}_6 &= \ddot{z}, & \dot{x}_{12} &= \ddot{\psi}. \end{aligned}$$

¹En esta sección se ha cambiado el orden de las ecuaciones dinámicas de la Tabla 3.2.

Por lo tanto, las ecuaciones B.1-B.6 representadas en variables de estado son las siguientes:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{x}_2 = (cx_{11}sx_9cx_7 + sx_{11}sx_7)\frac{1}{m}u_1, \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{x}_4 = (sx_{11}sx_9cx_7 - cx_{11}sx_7)\frac{1}{m}u_1, \quad (\text{B.10})$$

$$\dot{x}_5 = x_6, \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{x}_6 = -g + (cx_9cx_7)\frac{1}{m}u_1, \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{x}_7 = x_8, \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{x}_8 = x_{10}x_{12}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_r x_{10}\Omega_r}{I_x} + \frac{l}{I_x}u_2, \quad (\text{B.14})$$

$$\dot{x}_9 = x_{10}, \quad (\text{B.15})$$

$$\dot{x}_{10} = x_8x_{12}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{J_r x_8\Omega_r}{I_y} + \frac{l}{I_y}u_3, \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{x}_{11} = x_{12}, \quad (\text{B.17})$$

$$\dot{x}_{12} = x_8x_{10}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}u_4. \quad (\text{B.18})$$

El vector de estados del sistema dinámico es $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}]^T = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$ y el vector de entradas es $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T$.

La linealización de las ecuaciones B.7-B.18 se realiza con las ecuaciones de la Tabla A.2 los cuales se reescriben a continuación.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{\Delta}, \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (\text{B.20})$$

La matriz jacobiana \mathbf{A} del sistema dinámico se obtiene en la ecuación B.21.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} \end{bmatrix}_{x=x_s}. \quad (\text{B.21})$$

Considerando las funciones $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_1$ y $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_2$, sus derivadas parciales son las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} = 1, & \vdots \\
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} = 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0, \\
\vdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = (-cx_{11}sx_9sx_7 + sx_{11}cx_7)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} = 0. & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = 0, \\
& \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = (cx_{11}cx_9)\frac{1}{m}u_1, \\
& \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{10}} = 0, \\
& \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{11}} = (-sx_{11}sx_9cx_7 + cx_{11}sx_7)\frac{1}{m}u_1, \\
& \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0.
\end{array}$$

Con las funciones $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_3$ y $f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_4$, sus derivadas parciales son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} = 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_4} = 1, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = (-sx_{11}sx_9sx_7 - cx_{11}cx_7)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} = 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = 0, \\
\vdots & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = (sx_{11}cx_9cx_7)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} = 0. & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{10}} = 0, \\
& \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{11}} = (cx_{11}sx_9cx_7 + sx_{11}sx_7)\frac{1}{m}u_1, \\
& \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0.
\end{array}$$

Con las funciones $f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_6$ y $f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_7$, sus derivadas parciales son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 1, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = (-cx_9sx_7)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = 0, \\
\vdots & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = (-sx_9cx_7)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} = 0. & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{10}} = 0, \\
& \vdots \\
& \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0.
\end{array}$$

Con las funciones $f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_8$ y $f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_9$, sus derivadas parciales son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = 0, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = 1, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{10}} = x_{12}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_r\Omega_r}{I_x}, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{11}} = 0, \\
\vdots & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} = x_{10}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right). \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} = 0. &
\end{array}$$

Con las funciones $f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_9$ y $f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_{10}$, sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, \\
&\vdots & &\vdots \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} &= 0, & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} &= 0, \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{10}} &= 1, & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} &= x_{12} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r \Omega_r}{I_y}, \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{11}} &= 0, & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} &= 0, \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} &= 0, & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{10}} &= 0, \\
&& \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{11}} &= 0, \\
&& \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} &= x_8 \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right).
\end{aligned}$$

Por último, con las funciones $f_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_{11}$ y $f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_{12}$, sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, \\
&\vdots & &\vdots \\
\frac{\partial f_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{11}} &= 0, & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} &= 0, \\
\frac{\partial f_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} &= 1, & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} &= x_{10} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right), \\
&& \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} &= 0, \\
&& \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{10}} &= x_8 \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right), \\
&& \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{11}} &= 0, \\
&& \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_{12}} &= 0.
\end{aligned}$$

La matriz jacobiana \mathbf{B} del sistema dinámico se obtiene a continuación.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} \end{bmatrix}_{u=u_s}. \quad (\text{B.22})$$

Las derivadas parciales de las funciones $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= (cx_{11}sx_9cx_7 + sx_{11}sx_7)\frac{1}{m}, \\
&\vdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0. & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= 0, \\
& & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de las funciones $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= (sx_{11}sx_9cx_7 - cx_{11}cx_7)\frac{1}{m}, \\
&\vdots & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0. & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= 0, \\
& & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de las funciones $f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= (cx_9cx_7)\frac{1}{m}, \\
&\vdots & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= 0, \\
& & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de las funciones $f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, \\
&\vdots & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= \frac{l}{I_x}, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0. & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= 0, \\
& & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de las funciones $f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, \\
&\vdots & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0, & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= \frac{l}{I_y}, \\
& & \frac{\partial f_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0.
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de las funciones $f_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, \\
&\vdots & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0, & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= 0, \\
& & \frac{\partial f_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= \frac{l}{I_z}.
\end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio para la linealización del UAV se realizan en el estado estacionario *hover*, los cuales consideran los valores: $(\phi, \theta, \psi, \ddot{z}) = 0$ y $(u_2, u_3, u_4) = 0$. Mientras que la entrada u_1 se obtiene al despejarse de la ecuación B.3 del UAV.

$$\ddot{z} = -g + (c\theta c\phi) \frac{u_1}{m}, \quad (\text{B.23})$$

$$0 = -g + (c\theta c\phi) \frac{u_1}{m}, \quad (\text{B.24})$$

$$u_1 = mg. \quad (\text{B.25})$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio de los estados son $\mathbf{x}_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y de la entrada son $\mathbf{u}_s = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T$ que al sustituirse en los jacobianos \mathbf{A} y \mathbf{B} resultan:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Las variables de desviación $\Delta = -\mathbf{x}_s\mathbf{A} - \mathbf{u}_s\mathbf{B}$ son:

$$\Delta = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

B.2. Linealización y discretización del subsistema traslacional

Esta sección presenta la linealización del subsistema traslacional del UAV. El cual se considera el vector de estados $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z}]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$ y el vector de entradas $\mathbf{u} = [U_1 \ \phi \ \theta \ \psi]^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$.

Por lo tanto, las ecuaciones del subsistema traslacional representado en variables de estado son los siguientes:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (\text{B.29})$$

$$\dot{x}_2 = (cu_4su_3cu_2 + su_4su_2) \frac{1}{m} u_1, \quad (\text{B.30})$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad (\text{B.31})$$

$$\dot{x}_4 = (su_4su_3cu_2 - cu_4su_2) \frac{1}{m} u_1, \quad (\text{B.32})$$

$$\dot{x}_5 = x_6, \quad (\text{B.33})$$

$$\dot{x}_6 = -g + (cu_3cu_2) \frac{1}{m} u_1. \quad (\text{B.34})$$

La linealización de las ecuaciones B.29-B.32 se realizan usando las ecuaciones de la Tabla A.2.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{\Delta}, \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (\text{B.36})$$

La matriz jacobiana \mathbf{A} para el subsistema traslacional del UAV se calcula a continuación.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} \end{array} \right]_{x=x_s}. \quad (\text{B.37})$$

Donde las derivadas parciales de las funciones $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ de la matriz \mathbf{A} son:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} = 1, & \vdots & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} = 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0. & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} = 0, \\ \vdots & & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_4} = 1, \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0. & & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} = 0, \\ & & \frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0. \end{array}$$

Para las funciones $f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0. & \frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0. \\ & \frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 1. & \end{array}$$

La matriz jacobiana \mathbf{B} se obtiene a continuación.

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} \end{array} \right]_{u=u_s}. \quad (\text{B.38})$$

Las derivadas parciales de las funciones $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= (cu_4su_3cu_2 + su_4su_2)\frac{1}{m}, \\
&\vdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= (-cu_4su_3su_2 + su_4cu_2)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0. & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= (cu_4cu_3cu_2)\frac{1}{m}u_1, \\
& & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= (-su_4su_3cu_2 + cu_4su_2)\frac{1}{m}u_1.
\end{aligned}$$

Para las funciones $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= (su_4su_3cu_2 - cu_4su_2)\frac{1}{m}, \\
&\vdots & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= (-su_4su_3su_2 - cu_4cu_2)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0. & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= (su_4cu_3cu_2)\frac{1}{m}u_1, \\
& & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= (cu_4su_3cu_2 + su_4su_2)\frac{1}{m}u_1.
\end{aligned}$$

En las funciones $f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= (cu_3cu_2)\frac{1}{m}, \\
&\vdots & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} &= (-cu_3su_2)\frac{1}{m}u_1, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} &= (su_3cu_2)\frac{1}{m}u_1, \\
& & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0.
\end{aligned}$$

Considerando los puntos de equilibrio en estado *hover* del UAV, se obtiene el vector de estados $\mathbf{x}_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y el vector de entradas $\mathbf{u} = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T$ entonces las matrices de la linealización del subsistema traslacional del UAV son los siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.39})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

El término $\Delta = -\mathbf{x}_s\mathbf{A} - \mathbf{u}_s\mathbf{B}$ es el siguiente:

$$\Delta = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}. \quad (\text{B.41})$$

Las matrices discretas se obtienen a continuación.

Discretización de subsistema traslacional del UAV

Las matrices A y B de las ecuaciones B.39-B.40 se discretizan de acuerdo a la Tabla A.3 considerando un tiempo de integración h .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \Delta, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k. \end{aligned}$$

El término Δ contiene a las variables de desviación del sistema linealizado, por lo tanto, $\Delta = -\Phi \mathbf{x}_s - \Gamma \mathbf{u}_s$.

Resolviendo para la matriz Φ

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \quad (\text{B.42})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.43})$$

Realizando cambio de variable $t = h$, entonces:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.44})$$

Resolviendo para la matriz Γ

$$\Gamma = \int_0^h \Phi(\tau) B d\tau \quad (\text{B.45})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h^2}{2}g & 0 \\ 0 & 0 & hg & 0 \\ 0 & -\frac{h^2}{2}g & 0 & 0 \\ 0 & -hg & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{2m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.46})$$

La representación de las ecuaciones del UAV tanto lineales como no lineales son útiles para el diseño y aplicación de controladores en el UAV. Las ecuaciones dinámicas para la estimación de posición de UAV se mencionan en el siguiente Anexo.

Anexo C

Linealización de las ecuaciones de navegación

Las ecuaciones de navegación se presentan en la ecuación C.1.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^L(\phi, \theta, \psi) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_b^L(\phi, \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ a_x \\ a_y \\ a_z \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Donde,

$$\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\psi \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{R}_b^L(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t g\theta & c\phi t g\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi s e\theta & c\phi s e\theta \end{bmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

El cambio de variables del vector de estados es el siguiente:

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9]^T = [x \ y \ z \ u \ v \ w \ \phi \ \theta \ \psi]^T$,
y en el vector de entradas:

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T = [a_x \ a_y \ a_z \ p \ q \ r]^T.$$

Sustituyendo las variables de estado \mathbf{x} y \mathbf{u} en la ecuación C.1, y desarrollando la multiplicación matricial se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = x_4 c x_8 c x_9 + x_5 (-c x_7 s x_9 + s x_7 s x_8 c x_9) + x_6 (s x_7 s x_9 + c x_7 s x_8 c x_9), \quad (\text{C.6})$$

$$\dot{x}_2 = x_4 c x_8 s x_9 + x_5 (c x_7 c x_9 + s x_7 s x_8 s x_9) + x_6 (-s x_7 c x_9 + c x_7 s x_8 s x_9), \quad (\text{C.7})$$

$$\dot{x}_3 = -x_4 s x_8 + x_5 (s x_7 c x_8) + x_6 (c x_7 c x_9), \quad (\text{C.8})$$

$$\dot{x}_4 = u_1, \quad (\text{C.9})$$

$$\dot{x}_5 = u_2, \quad (\text{C.10})$$

$$\dot{x}_6 = u_3, \quad (\text{C.11})$$

$$\dot{x}_7 = u_4 + u_5 s x_7 t a x_8 + u_6 c x_7 t a x_8, \quad (\text{C.12})$$

$$\dot{x}_8 = u_5 c x_7 - u_6 s x_7, \quad (\text{C.13})$$

$$\dot{x}_9 = u_5 s x_7 s e x_8 + u_6 c x_7 s e x_8. \quad (\text{C.14})$$

La linealización de las ecuaciones C.6-C.14 se realiza usando las ecuaciones de la Tabla A.2. La matriz jacobiana $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ se obtiene a continuación:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} \end{bmatrix}_{x=x_s} \quad (\text{C.15})$$

Considerando las funciones $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_1$, $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_2$, $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_3, \dots, f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{x}_9$, sus derivadas parciales se desarrollan a continuación.

Para la función $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_4} = c x_8 c x_9,$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} = -c x_7 s x_9 + s x_7 s x_8 c x_9,$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = s x_7 s x_9 + c x_7 s x_8 c x_9,$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = x_5 (s x_7 s x_9 + c x_7 s x_8 c x_9) + x_6 (c x_7 s x_9 - s x_7 s x_8 c x_9),$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = -x_4 (s x_8 c x_9) + x_5 (s x_7 c x_8 c x_9) + x_6 (c x_7 c x_8 c x_9),$$

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = -x_4 (c x_8 s x_9) + x_5 (-c x_7 c x_9 - s x_7 s x_8 s x_9) + x_6 (s x_7 c x_9 - c x_7 s x_8 s x_9).$$

Para la función $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} &= 0, \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_4} &= cx_8cx_9, \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} &= cx_7cx_9 + sx_7sx_8sx_9, \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} &= -sx_7cx_9 + cx_7sx_8sx_9, \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} &= x_5(-sx_7cx_9 + cx_7sx_8sx_9) + x_6(-cx_7cx_9 - sx_7sx_8sx_9), \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} &= -x_4(sx_8sx_9) + x_5(sx_7cx_8sx_9) - x_6(cx_7cx_8sx_9), \\
\frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} &= x_4(cx_8cx_9) + x_5(-cx_7sx_9 + sx_7sx_8cx_9) + x_6(sx_7sx_9 + cx_7sx_8cx_9).
\end{aligned}$$

Para las funciones $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_3} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_4} &= -sx_8, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_4} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} &= sx_7scx_8, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_5} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} &= cx_7cx_8, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} &= x_5(cx_7cx_8) - x_6(sx_7cx_8), & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} &= -x_4(cx_8) - x_5(sx_7sx_8) - x_6(cx_7sx_8), & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} &= 0, \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} &= 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} &= 0.
\end{aligned}$$

Para las funciones $f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} &= 0, \\
&\vdots & &\vdots \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} &= 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} &= 0.
\end{aligned}$$

Para las funciones $f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = u_5(cx_7tx_8) - u_6(sx_7tx_8), & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = -u_5(sx_7) - u_6(cx_7), \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = u_5(sx_7se^2x_8) + u_6(cx_7se^2x_8), & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = 0, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = 0.
\end{array}$$

Para la función $f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} = 0, \\
\vdots \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_6} = 0, \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_7} = u_5(cx_7sex_8) - u_6(sx_7sex_8), \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_8} = u_5(sx_7se^2x_8tx_8) + u_6(cx_7se^2x_8tx_8), \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_9} = 0.
\end{array}$$

Las matriz jacobiana $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$ se obtiene a continuación.

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} \end{array} \right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_s} \quad (\text{C.16})$$

Para las funciones $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = 0, & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = 0.
\end{array}$$

Para las funciones $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 1, \\
\vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = 0, & \frac{\partial f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = 0.
\end{array}$$

Para las funciones $f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = 1, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = 0, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = 1, \\
\vdots & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} = 0, \\
\frac{\partial f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = 0, & \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_5} = 0, \\
& \frac{\partial f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = 0,
\end{array}$$

Para las funciones $f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = 0, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = 0, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = 0, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} = 1, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} = 0, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_5} = sx_7tgx_8, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_5} = cx_7, \\
\frac{\partial f_7(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = cx_7tgx_8, & \frac{\partial f_8(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} = -sx_7.
\end{array}$$

Para las funciones $f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_4} &= 0, \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_5} &= sx_7sex_8, \\
\frac{\partial f_9(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_6} &= cx_7sex_8.
\end{aligned}$$

Considerando los puntos de equilibrio en *hover* del UAV como se muestra en la sección B.1, el vector de estados $\mathbf{x}_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y el vector de entradas $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, que evaluando los puntos de equilibrio en las derivadas parciales, se obtienen las matrices de las ecuaciones de navegación en su forma lineal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{\Delta} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Con,

$$\mathbf{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.21})$$

Lo cual se representa como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{\Delta}, \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}. \quad (\text{C.23})$$

La matriz de mediciones \mathbf{C} depende de los sensores que se dispongan en el sistema dinámico.

Nota. La discretización del sistema dinámico lineal y no lineal se realiza con el método numérico de Euler, es posible realizarse con otros tipos de métodos numéricos.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + (\mathbf{Ax}_k + \mathbf{Bu}_k)dt \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{Cx}_k. \end{aligned}$$

La introducción de este modelo dinámico discreto en los filtros de Kalman se presenta en la siguiente sección.

Anexo D

Método de discretización numérico para filtros de Kalman

Los filtros de Kalman requieren del modelo dinámico en tiempo discreto. Analíticamente es posible obtener este modelo dinámico discreto en el filtro de Kalman lineal, pero su complejidad aumenta para sistemas dinámicos de más de dos estados. En los filtros de Kalman no lineales es necesario utilizar métodos numéricos para discretizar el sistema dinámico no lineal debido a que casi imposible obtener un modelo dinámico discreto.

En esta sección se presenta la parte de predicción de los filtros de Kalman para introducir los métodos dinámicos en tiempo continuo, pero discretizados con un método numérico. Existen diferentes métodos numéricos como Euler, Trapezoidal, Runge-Kutta, Simpson, etc. En esta sección se utiliza el método numérico de Euler como se muestra a continuación

Las ecuaciones [D.1](#) y [D.2](#) representan el paso de predicción del filtro de Kalman lineal de la sección [2.1](#).

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (\text{D.2})$$

Las ecuaciones [D.3](#) y [D.4](#) representan el paso de predicción del filtro de Kalman extendido de la sección [2.2](#).

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}. \quad (\text{D.4})$$

En la parte de predicción de los filtros de Kalman es donde se requiere los modelos dinámicos discretos. Una forma fácil de discretizar es considerar esta parte de predicción en tiempo continuo e introducir el método de discretización de Euler [[Beard, 2012](#)] y [[Simon, 2006](#)].

El paso de predicción del filtro de Kalman lineal con el método de Euler se conforma por las siguientes ecuaciones.

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{x}_k + (\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t)dt, \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{k-1} + (\mathbf{A}\mathbf{P}_{t-1} + \mathbf{P}_{t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})dt. \quad (\text{D.6})$$

El paso de predicción del filtro de Kalman extendido con el método de Euler se conforma por las siguientes ecuaciones.

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{x}_k + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{t-1}, \mathbf{u}_t)dt, \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{k-1} + (\mathbf{A}\mathbf{P}_{t-1} + \mathbf{P}_{t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})dt. \quad (\text{D.8})$$

En las ecuaciones D.5 y D.7 se incluye el método numérico de Euler y es importante utilizarlo en los filtros de Kalman¹. Mientras que en las ecuaciones D.6 y D.8 son discretizaciones de la matriz de covarianza *a priori*. Con estas ecuaciones se conoce a estos filtros como filtros de Kalman continuos-discretos.

En el paso de predicción del filtro de Kalman *Unscented* de la sección 2.3 siendo un filtro de Kalman no lineal se utiliza la ecuación D.7 para discretizar el sistema dinámico no lineal. No es necesario discretizar la covariza *a priori* en este filtro porque utiliza la diferencia de $[\mathcal{X}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-]$ lo cual ya están discretas al obtenerse de la ecuación D.7. Esto es diferente en el filtro de Kalman lineal porque las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} son constantes, excepto en el filtro de Kalman extendido que son variantes y evaluadas en cada iteración del algoritmo que también no es necesario discretizar la covarainza *a priori* siempre y cuando el algoritmo no se indetermine.

Las ecuaciones discretas del paso de predicción del filtro de Kalman *unscented* son las siguientes.

$$\mathcal{X}_{i,k}^- = \mathcal{X}_{i,k-1} + \mathbf{f}(\mathcal{X}_{i,t-1}, \mathbf{u}_t)dt, \quad (\text{D.9})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k}^-, \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-][\mathcal{X}_{i,k}^- - \hat{\mathbf{x}}_k^-]^T + \mathbf{Q}. \quad (\text{D.11})$$

El resto de los algoritmos se mantiene igual.

¹Es aquí donde es posible cambiar el método de numérico de Euler por otro.

Anexo E

Demostraciones

E.1. Demostración de valores de ponderación

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \mathcal{D}(\overline{\mathcal{C}_{gps}} \cap \overline{\mathcal{C}_{of}}), \\ &= \mathcal{D}((1 - \mathcal{C}_{gps}) \cap (1 - \mathcal{C}_{of})), \\ &= \mathcal{D}(1 - \mathcal{C}_{gps} - \mathcal{C}_{of} + \mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{gps} &= \mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} \cap \overline{\mathcal{C}_{of}}), \\ &= \mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} \cap (1 - \mathcal{C}_{of})), \\ &= \mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} - \mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{of} &= \mathcal{D}(\overline{\mathcal{C}_{gps}} \cap \mathcal{C}_{of}), \\ &= \mathcal{D}((1 - \mathcal{C}_{gps}) \cap \mathcal{C}_{of}), \\ &= \mathcal{D}(\mathcal{C}_{of} - \mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}).\end{aligned}$$

$$\beta_{gpsof} = \mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(1 - \mathcal{C}_{gps} - \mathcal{C}_{of} + \mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}) + \mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} - \mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}) + \mathcal{C}_{of} - \mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of} + \mathcal{D}(\mathcal{C}_{gps} \cap \mathcal{C}_{of}) &= 1, \\ \mathcal{D}(1) &= 1.\end{aligned}$$

E.2. Demostración de mediciones lineales

La matriz de covarianza de las salidas:

$$\mathbf{P}_{gpsof|\mathbf{y}\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_{gpsof} - \hat{\mathbf{y}}_{gpsof}^-)(\mathbf{y}_{gpsof} - \hat{\mathbf{y}}_{gpsof}^-)^T, \quad (\text{E.1})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{gps} \\ \mathbf{y}_{of} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_{gps}^- \\ \hat{\mathbf{y}}_{of}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{gps} \\ \mathbf{y}_{of} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_{gps}^- \\ \hat{\mathbf{y}}_{of}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{gps} \\ \mathbf{y}_{of} \end{pmatrix}^T. \quad (\text{E.2})$$

Considerando mediciones lineales y ruido blanco gaussiano, entonces:

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps}\hat{\mathbf{x}}^- \\ \mathbf{C}_{of}\hat{\mathbf{x}}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps}\hat{\mathbf{x}}^- \\ \mathbf{C}_{of}\hat{\mathbf{x}}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix}^T, \quad (\text{E.3})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of} \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^-] + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of} \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^-] + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix}^T. \quad (\text{E.4})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of} \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^-] + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix} \left([\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^-]^T \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix}^T \right). \quad (\text{E.5})$$

Suposición. No existe la correlación entre los estados y el ruido en las mediciones, ni la correlación entre ruido de las mediciones del GPS y del sensor OF, por lo tanto:

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of} \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^-] [\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^-]^T \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{gps} \\ \mathbf{C}_{of} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{gps} \\ \mathbf{w}_{of} \end{pmatrix}^T. \quad (\text{E.6})$$

Resultando:

$$\mathbf{P}_{gpsof|\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k} = \mathbf{C}_{gpsof}\mathbf{P}^-\mathbf{C}_{gpsof}^T + \mathbf{R}_{gpsof}. \quad (\text{E.7})$$

De forma similar se realiza para la matriz cruzada de los estados y las salidas:

$$\mathbf{P}_{gpsof|\mathbf{x}\mathbf{y}} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^-)(\mathbf{y}_{gpsof} - \hat{\mathbf{y}}_{gpsof}^-)^T, \quad (\text{E.8})$$

$$= (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^-)(\mathbf{C}_{gpsof}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^-) + \mathbf{w}_{gpsof})^T, \quad (\text{E.9})$$

$$= (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^-)((\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}^-)^T \mathbf{C}_{gpsof}^T + \mathbf{w}_{gpsof}^T). \quad (\text{E.10})$$

Suposición. No existe la correlación de los estados y el ruido en las mediciones, ni la correlación entre ruido de las mediciones del GPS y del sensor OF, resultando:

$$\mathbf{P}_{gpsof|\mathbf{x}\mathbf{y}} = \mathbf{P}^-\mathbf{C}_{gpsof}^T. \quad (\text{E.11})$$

En todo este procedimiento matemático se considera la propagación de un solo punto sigma en las mediciones.

Nótese que a partir de esta formulación lineal es posible obtener la ganancia de Kalman \mathcal{K}_{gpsof} y la matriz de covarianza \mathbf{P}_{gpsof} similar al filtro de Kalman *unscented* que se representan en las ecuaciones E.12 y E.13.

$$\mathcal{K}_{gpsof} = \mathbf{P}_{gpsof|\mathbf{x}\mathbf{y}}\mathbf{P}_{gpsof|\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1}, \quad (\text{E.12})$$

$$\mathbf{P}_{gpsof} = \mathbf{P}^- - \mathcal{K}_{gpsof}\mathbf{P}_{gpsof|\mathbf{y}\mathbf{y}}\mathcal{K}_{gpsof}^T. \quad (\text{E.13})$$

Anexo F

Código Matlab

Algoritmo F.1: KF en péndulo simple

```
1 clear all      %Limpia las variables guardadas en la memoria
2 close all     %Cierra todas las ventanas de gráficas
3 clc          %Limpia la ventana de comandos
4
5 %IMPLEMENTACIÓN DE FILTRO DE KALMAN LIENAL (KF) A UN PÉNDULO SIMPLE
6
7 %Descripción del sistema:
8 %Esta simulación presenta la implementación de un Filtro de Kalman
   lineal
9 %(KF) a un péndulo lineal. La consideración de diferentes tiempos de
10 %dicretización dt y tiempo de muestreo T se consideran en el sistema y
   en el
11 %filtro de Kalman.
12
13 %% Parámetros del péndulo
14 g = 9.81;     %m/s^2
15 m = 5;        %kg
16 l = 10;       %m
17
18 %% Parámetros de simulación
19 T = 0.001;    %Tiempo de muestreo
20 dt = 0.0001; %Tiempo de discretización
21 tfinal = 10;  %Tiempo de simulación
22
23 %% Matrices del sistema continuo en variables de espacio de estado
24 A = [0 1; -g/l 0]; %Matriz A de dimensiones 2x2
25 B = [0 1/(m*l^2)]'; %Matriz B de dimensiones 2x1
26 C = [1 0];       %Matriz C de dimensiones 1x2; el estado x1 es
   observable
27 D = 0;           %Matriz D
28
29 %% Propiedades de ruido
30 Q = [25e-9 0; 0 25e-9]; %Matriz diagonal de la covarianza de
   ruido del proceso de dimensiones 2x2
31 R = 2e-4;        %Matriz diagonal de covarianza de ruido
   de las mediciones de dimensión 1x1
32 I = eye(2,2);   %Matriz identidad de 2x2
33
```

```

34 %% Condiciones iniciales
35 x(1:2,1) = [pi/18; 0.01];      %Estados; x1 = theta (posición angular);
    x2 = tethapunto (velocidad angular. El valor 0.01 es para Matriz P
    =P^T>0.
36 xhat(1:2,1) = [pi/16; 0];      %Estados estimados
37 P = (x-xhat)*(x-xhat)';        %Matriz P=P^T>0 (simétrica definida
    positiva) de la covarianza del error de los estados
38 time = 0;                       %Tiempo
39
40 xArray = [x];                   %Vector de estados x
41 yArray = [x(1)];               %Vector de salidas y
42 xhatArray = [xhat];            %Vector de estados xhat
43 yhatArray = [xhat(1)];         %Vector de salidas yhat
44 timeArray = [time];            %Vector tiempo
45
46 %% Simulación
47 for t = 0 : T : tfinal-T        %Iteraciones
48
49     %Sistema dinámico
50     for k = 0: dt : T-dt
51         time = time + dt;        %Incrementa el tiempo
52         u(1) = 0;                %Entrada; par
53         x(1:2) = x(1:2) + (A*x(1:2) + B*u(1) + sqrt(Q*dt)*[0;randn])*
            dt; %Ruido en la velocidad
54     end
55     y(1) = C*x(1:2) + sqrt(R)*(randn) ; %Medición; sqrt(R) es la
        desviación estandar.
56
57     %Algoritmo del KF
58     %Predicción
59     xhatbar = xhat(1:2) + (A*xhat(1:2) + B*u(1))*T; %Propaga la media
        ; estimación a priori
60     Pbar = A*P*A' + Q;           %Propaga la
        matriz de covarianza; estimación a priori
61
62     %Corrección
63     K = (Pbar*C')*inv(C*Pbar*C' + R); %Calcula la ganancia de
        Kalman
64     xhat(1:2) = xhatbar + K*(y(1)- C*xhatbar); %Corrige los estados;
        estimacion a posteriori
65     P = (I - K*C)*Pbar;         %Actualiza la matriz de
        covarianza del error de los estados
66
67     %Obtiene la salida
68     yhat = C*xhat(1:2);
69
70     %Guarda datos en los siguientes vectores. Así el programa es más
71     %eficiente.
72     xArray = [xArray x];
73     yArray = [yArray y];
74     xhatArray = [xhatArray xhat];
75     yhatArray = [yhatArray yhat];
76     timeArray = [timeArray time];
77 end

```

```

78
79 %Gráficas
80 figure (1)
81 hold on
82 plot(timeArray,yArray, 'k', 'LineWidth',2)
83 plot(timeArray,yhatArray, 'r', 'LineWidth',2)
84 title('Filtro de Kalman lineal','FontSize', 12,'FontWeight','bold')
85 xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize', 12,'FontWeight','bold')
86 ylabel('Ángulo [rad]', 'FontSize', 12,'FontWeight','bold')
87 xlim([0 tfinal])
88 legend('$\theta + ruido$', '$\hat{\theta}_1$ $KF$', 'Interpreter',
      'latex','FontSize', 12)
89 grid on

```

Algoritmo F.2: EKF en péndulo simple

```

1 clear all      %Limpia las variables guardadas en la memoria
2 close all     %Cierra todas las ventanas de gráficas
3 clc          %Limpia el la ventana de comandos
4
5 %IMPLEMENTACIÓN DE FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO (EKF) A UN PÉNDULO
6   SIMPLE
7
8 %Descripción del sistema:
9 %Esta simulación presenta la implementación de un Filtro de Kalman
10 %Extendido
11 %(EKF) a un péndulo. La consideración de diferentes tiempos de
12 %dicretización dt y tiempo de muestreo T se consideran en el sistema y
13 %en el
14 %filtro de Kalman.
15
16 %% Parámetros del péndulo
17 g = 9.81;      %Aceleración gravitacional [m/s^2]
18 m = 5;         %Masa [kg]
19 l = 10;        %longitud del brazo [m]. Sólo con estos parámetros
20 %funciona el EKF.
21
22 %% Parámetros de simulación
23 T = 0.001;     %Tiempo de muestreo
24 dt = 0.0001;  %Tiempo de discretización
25 tfinal = 10;  %Tiempo de simulación
26
27 %% Propiedades de ruido
28 Q = [25e-9 0; 0 25e-9]; %Matriz diagonal de la covarianza de
29 %ruido del proceso de dimesiones 2x2
30 R = 2e-4;      %Matriz diagonal de covarianza de ruido
31 %de las medicioes de dimensión 1x1
32 I = eye(2,2); %Matriz identidad de 2x2
33
34 %% Condiciones iniciales
35 x(1:2,1) = [pi/2; 0]; %Estados; x1 = theta (posición angular);
36 %x2 = tethapunto (velocidad angular). El valor 0.01 es para Matriz
37 %P=P^T>0.
38 xhat(1:2,1) = [pi/16; 0]; %Estados estimados

```

```

32 P = (x-xhat)*(x-xhat)';           %Matriz P=P^T>0 (simétrica definida
    positiva) de la covarianza del error de los estados
33 time = 0;                          %Tiempo
34
35 xArray = [x];                       %Vector de estados x
36 yArray = [x(1)];                   %Vector de salidas y
37 xhatArray = [xhat];                %Vector de estados xhat
38 yhatArray = [xhat(1)];             %Vector de salidas yhat
39 timeArray = [time];                %Vector tiempo
40
41 %% Simulación
42 for t = 0 : T : tfinal-T           %Iteraciones
43
44     %Sistema dinámico
45     for k = 0: dt : T-dt
46         time = time + dt;           %Incrementa el tiempo
47         u(1) = 0;                   %Entrada; par
48         x(1:2) = x(1:2) + ([x(2);-g/l*sin(x(1))+ 1/(m*l^2)*u] + sqrt(Q
    )*[0;randn])*dt ; %Integración de Euler
49     end
50
51     %Ruido en la velocidad
52     y(1) = x(1) + sqrt(R)*(randn);  %Medición; sqrt(R) es la
    desviación estandar.
53
54     %Algoritmo del EKF
55     A = [0 1;-g/l*cos(xhat(1)) 0]; %Matriz Jacobiana A, variable en el
    tiempo
56
57     %Predicción
58     xhatbar = xhat + ([xhat(2); 1/(m*l^2)*u - g/l*sin(xhat(1))])*T; %
    Propaga la media; estimación a priori
59     Pbar = A*P*A' + Q;              %Propaga
    la matriz de covarianza; estimación a priori
60
61     H = [1 0];                      %Matriz Jacobiana H, constante en
    el tiempo
62
63     %Corrección
64     yhatbar = xhatbar(1);            %Obtiene la medición
    estimada a partir de la estimación a priori
65     K = Pbar*H'*inv(H*Pbar*H' + R); %Calcula la ganancia
    de Kalman
66     xhat(1:2) = xhatbar + K*(y(1) - yhatbar(1)); %Corrige los estados
    ; estimación a posteriori
67     P = (I - K*H)*Pbar;             %Actualiza la matriz
    de covarianza del error de los estados
68
69     %Obtiene la salida
70     yhat = xhat(1);
71
72     %Guarda datos en los siguientes vectores
73     xArray = [xArray x];
74     yArray = [yArray y];

```

```

73     xhatArray = [xhatArray xhat];
74     yhatArray = [yhatArray yhat];
75     timeArray = [timeArray time];
76 end
77
78 %Gráficas
79 figure (1)
80 hold on
81 plot(timeArray,yArray, 'k', 'LineWidth',2)
82 plot(timeArray,yhatArray,'m', 'LineWidth',2)
83 title('Filtro de Kalman Extendido','FontSize', 12,'FontWeight','bold')
84 xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize', 12,'FontWeight','bold')
85 ylabel('Ángulo [rad]', 'FontSize', 12,'FontWeight','bold')
86 xlim([0 tfinal])
87 legend('$x_1 + ruido$', '$\hat{x}_1$ EKF', 'Interpreter','latex',
88         , 'FontSize', 12)
89 grid on

```

Algoritmo F.3: UKF en péndulo simple

```

1  clear all      %Limpia las variables guardadas en la memoria
2  close all     %Cierra todas las ventanas de gráficas
3  clc          %Limpia el la ventana de comandos
4
5  %%IMPLEMENTACIÓN DE FILTRO DE KALMAN UNSCENTED (UKF) A UN PÉNDULO
6     SIMPLE
7
8  %Descripción del sistema:
9  %Esta simulación presenta la implementación de un Filtro de Kalman
10 %Unscented
11 %(UKF) a un péndulo. La consideración de diferentes tiempos de
12 %dicretización dt y tiempo de muestro T se consideran en el sistema y
13 %en el
14 %filtro de Kalman.
15
16 %% Parámetros del péndulo
17 g = 9.81;      %Aceleración gravitacional [m/s^2]
18 m = 5;         %Masa [kg]
19 l = 10;        %longitud del brazo [m]
20
21 %% Parámetros de simulación
22 T = 0.001;     %Tiempo de muestreo
23 dt = 0.0001;  %Tiempo de discretización
24 tfinal = 10;  %Tiempo de simulación
25
26 %% Propiedades de ruido
27 Q = [25e-9 0; 0 25e-9]; %Matriz diagonal de la covarianza de
28 %ruido del proceso de dimesiones 2x2
29 R = 2e-4;      %Matriz diagonal de covarianza de ruido
30 %de las medicioes de dimensión 1x1
31 I = eye(2,2); %Matriz identidad de 2x2
32
33 %%Definir los parámetros de la transformada Unscented y los vectores
34 %de peso
35 n = 2;        %Tamaño del vector de estados

```

```

31 alpha = 1; %Parámetro de escalamiento primario
32 beta = 2; %Parámetro de escalamiento secundario
33 kappa = 0; %Parámetro de escalamiento terciario
34 lambda = alpha^2*(n+kappa) - n;
35 wm = ones(2*n + 1,1)*1/(2*(n+lambda)); %Calcular el vector de
    pesos de la media
36 wc = wm; %Calcular el vector de
    pesos de la covarianza
37 wm(1) = lambda/(lambda+n); %Calcular el primer
    peso del vector de la media
38 wc(1) = lambda/(lambda+n) + 1 - alpha^2 + beta; %Calcular el primer
    peso del vector de la covarianza
39
40 %% Condiciones iniciales
41 x(1:2,1) = [pi/2; 0.01]; %Estados; x1 = theta (posición angular);
    x2 = tethapunto (velocidad angular). El valor 0.01 es para Matriz
    P=P^T>0.
42 xhat(1:2,1) = [pi/16; 0]; %Estados estimados
43 P = (x-xhat)*(x-xhat)'; %Matriz P=P^T>0 (simétrica definida
    positiva) de la covarianza del error de los estados
44 time = 0; %Tiempo
45
46 xArray = [x]; %Vector de estados x
47 yArray = [x(1)]; %Vector de salidas y
48 xhatArray = [xhat]; %Vector de estados xhat
49 yhatArray = [xhat(1)]; %Vector de salidas yhat
50 timeArray = [time]; %Vector tiempo
51
52 %% Simulación
53 for t = 0 : T : tfinal-T %Iteraciones
54
55 %Sistema dinámico
56 for k = 0: dt : T-dt
57     time = time + dt; %Incrementa el tiempo
58     u(1) = 0; %Entrada; par
59     x(1:2) = x(1:2) + ([x(2);-g/l*sin(x(1))+ 1/(m*l^2)*u] + sqrt(Q)
        )*[0;randn])*dt ; %Integración de Euler
60 end
61
62 %Ruido en la velocidad
61 y(1) = x(1) + sqrt(R)*(randn); %sqrt(R) es la desviación estandar
62
63 %Algoritmo del UKF
64
65 % Paso 1: Obtener los puntos sigma
66 sP = chol(P,'lower'); %Calcular la raíz cuadrada de la matriz de
    la covarianza del error de los estados
67 X = [xhat(1:2), xhat(1:2)*ones(1,n)+sqrt(n+lambda)*sP, ...
68     xhat(1:2)*ones(1,n)-sqrt(n+lambda)*sP];
69
70 % Step 2: Transformación de la predicción
71 % Propagar cada punto sigma através de la predicción
72 % chi_m = "chi minus" = chi(k|k-1)

```

```

73     for i=1:2*n+1
74         Xbar(1:2,i) = X(:,i) + ([X(2,i); 1/(m*l^2)*u - g/l*sin(X(1,i))
           ])*T; %Discretizar esta parte
75     end
76
77     xbar = Xbar*wm; % Calcular la media de cada estado predecido
78
79     %Calcular la covarianza del estado predecido
80     Pbar = Q;
81
82     for i = 1:2*n+1
83         Pbar = Pbar + wc(i)*(Xbar(:,i) - xbar)*(Xbar(:,i) - xbar)';
84     end
85
86     %Paso 3: Transformación de la observación
87     %Propagar cada punto sigma a través de las observaciones
88     Ybar = Xbar(1,:);
89     ybar = Ybar*wm; %Calcular la media de la salida predecida
90
91     %Calcular la covarianza de la salida predecida
92     %y la covarianza cruzada entre el estado y la salida
93     Pyy = R;
94     Pxy = zeros(n,1);
95     for i = 1:2*n+1
96         Pyy = Pyy + wc(i)*(Ybar(:,i) - ybar)*(Ybar(:,i) - ybar)';
97         Pxy = Pxy + wc(i)*(Xbar(:,i) - xbar)*(Ybar(:,i) - ybar)';
98     end
99
100    % Paso 4: Corrección
101    K = Pxy*inv(Pyy); %Calcular la ganancia de Kalman
102    xhat(1:2) = xbar + K*(y(1) - ybar); %Actualizar el estado estimado
103    P = Pbar - K*Pyy*K'; %Actualizar la covarianza estimada
104
105    %Obtiene la salida
106    yhat = xhat(1);
107
108    %Guarda los datos en los siguientes vectores. Así el programa es
      más
109    %eficiente.
110    xArray = [xArray x];
111    yArray = [yArray y];
112    xhatArray = [xhatArray xhat];
113    yhatArray = [yhatArray yhat];
114    timeArray = [timeArray time];
115 end
116
117 %Gráficas
118 figure (1)
119 hold on
120 plot(timeArray,yArray, 'color',[0.8500 0.3250 0.0980], 'LineWidth',2)
121 plot(timeArray,yhatArray, '--', 'color',[0 0.4470 0.7410], 'LineWidth'
      ,2)
122 title('Filtro de Kalman Unscented','FontSize', 12,'FontWeight','bold')
123 xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize', 12,'FontWeight','bold')

```

```
124 ylabel('Ángulo [rad]', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold')
125 xlim([0 tfinal])
126 legend('$x_1 + ruido$', '$$\hat{x}_1$$ $$UKF$$ ', 'Interpreter', 'latex',
127         'FontSize', 12)
127 grid minor
128
129 %Nota. Estos filtros de Kalman funcionan bien en simulación. De hecho
    todo funciona bien en simulación...
```

Anexo G

Código LabVIEW

Recordando que los programas 1-4 son subrutinas para los sensores de navegación, el programa 5 es la subrutina principal para los algoritmos de Kalman; el programa 6 es la subrutina para la visualización y guardado de datos.

Observación número 1. Los programas se escriben en el entorno de LabVIEW usando bloques y lenguajes de programación en C y en Matlab.

Observación número 2. En las Figuras de las subrutinas de programación realizar ZOOM para visualizarlas mejor¹.

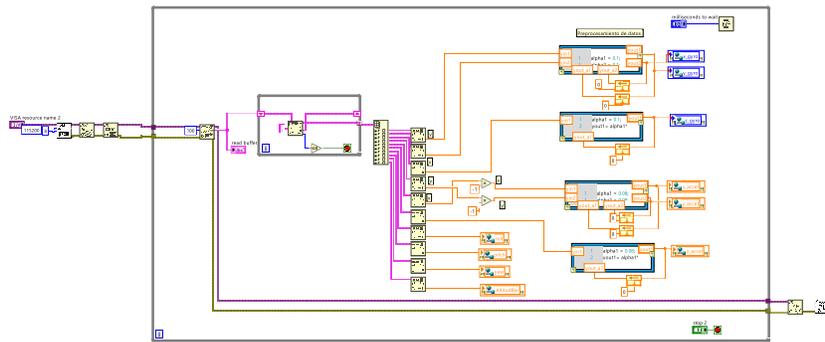


Figura G.1: Programa 1: IMU, sensor inercial.

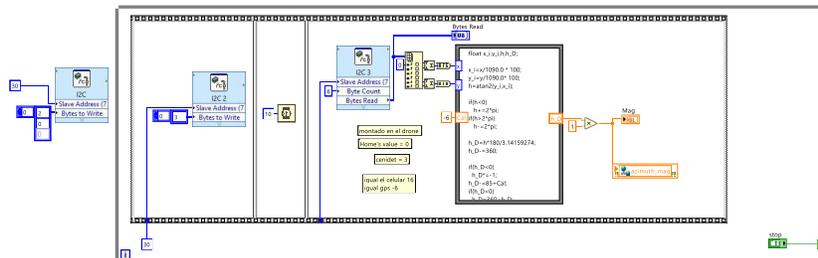


Figura G.2: Programa 2: Mag, brújula digital/magnetómetro.

¹Tesis 100 % digital.

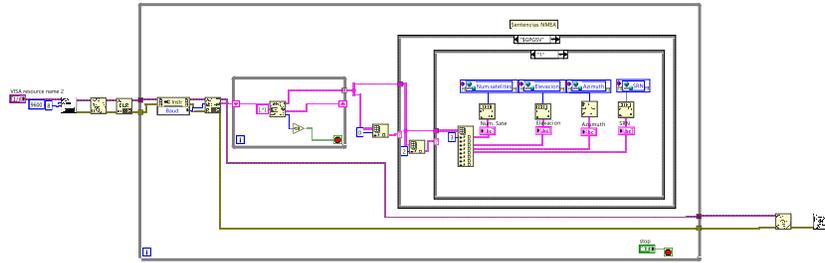


Figura G.3: Programa 3: GPS, sistema de posicionamiento global.

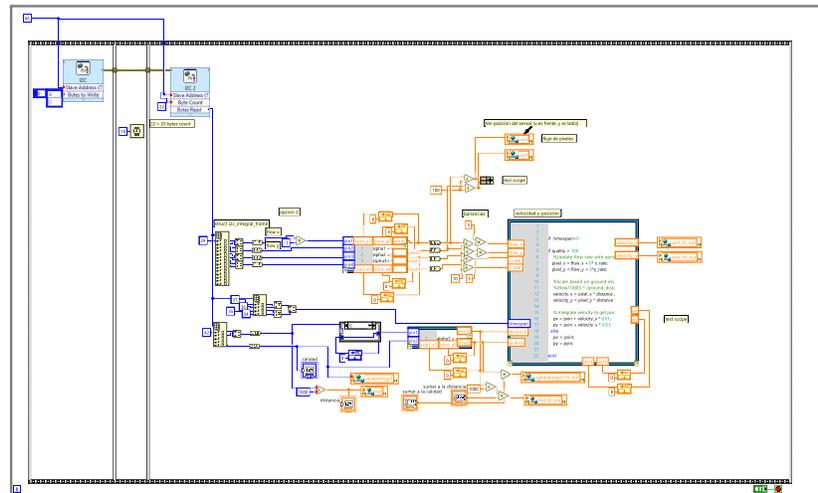


Figura G.4: Programa 4: OF, sensor de flujo óptico.

Observación número 3. La programación en bloques de LabVIEW facilita la implementación de los algoritmos de Kalman. Sin embargo, el tiempo de compilación del código aumenta con la agregación de algoritmos.

Observación número 4. La programación de las subrutinas se realiza en diferentes *loops* para reducir tiempos muertos de programación, porque el sistema operativo de la tarjeta MyRIO se basa en linux de tiempo real, esto lo hace una programación de multitareas.

Observación número 5. Respecto a la observación anterior, es necesario la declaración de variables globales y locales para enlazar cada subrutina de programación.

Observación número 6. El monitoreo de +81 variables del sistema de navegación incluyendo señales y datos de sensores, valores de calibración y estados estimados, se realizan con el programa 6.

Observación número 7. El tiempo de programación *versión 1* del sistema de navegación paso de cinco meses a dos meses gracias a la colaboración de la estancia de un estudiante de maestría y de estancias de residencias profesionales.

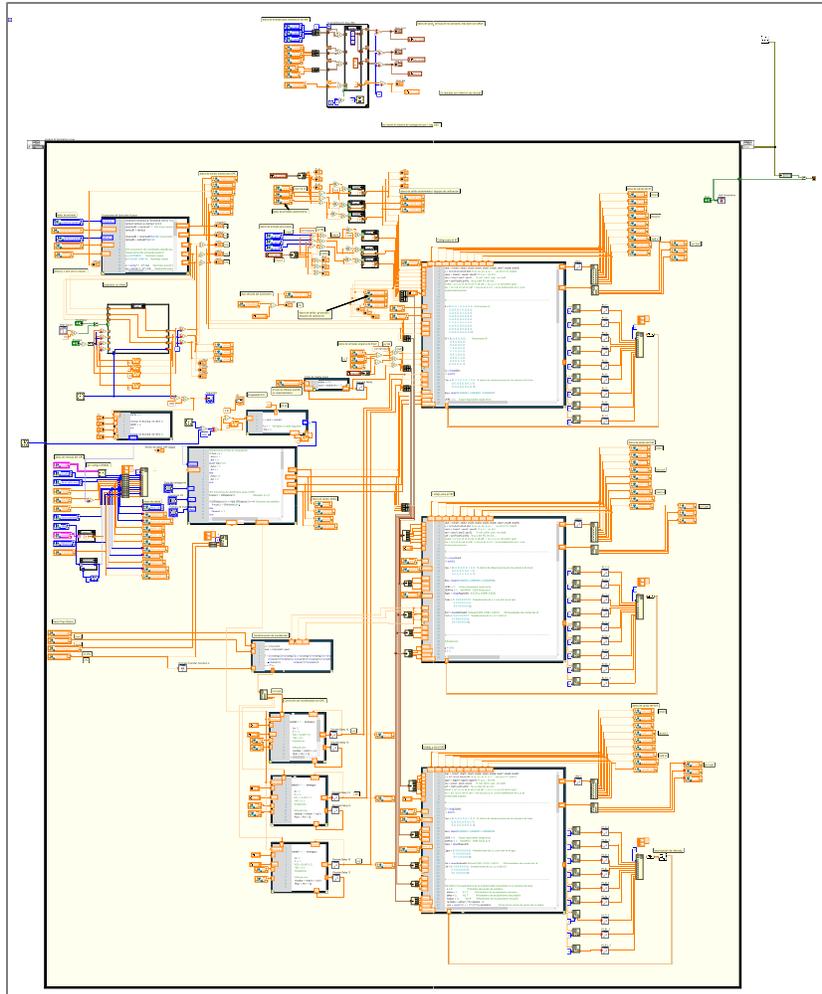


Figura G.5: Programa 5: Sistema de navegación.

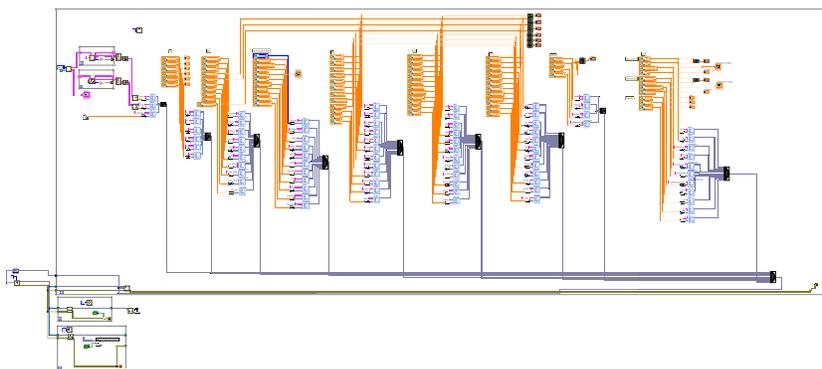


Figura G.6: Programa 6: Gráficas y guardado de datos.

