



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Modelado y control de temperatura de un  
fotobiorreactor escala piloto con intercambiador  
de calor.

presentada por

**Ing. Alexis Alonso Bastida**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería  
Electrónica**

Director de tesis

**Dr. Manuel Adam Medina**

Codirector de tesis

**Dr. Miguel Ángel Franco Nava**

Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 2020



"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Mor.,

17 junio/2020

No. de Oficio:

DIE/423/20

Asunto:

Aceptación de documentos de tesis

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ing. Alexis Alonso Bastida**, con número de control **M18CE081** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Modelado y control de temperatura para un fotobiorreactor escala piloto con intercambiador de calor"** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Manuel Adam Medina  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5992003

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Miguel Angel Franco Nava  
Maestro en Ciencias  
Cédula profesional 4875190

REVISOR 1

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza  
Doctor en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5505019

REVISOR 2

Dr. Juan Reyes Reyes  
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático  
Cédula profesional 4214833

C.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivas- Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Estudiante  
Expediente

MPS/rm





**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2020, Año de Leona Vicario, Benemérita Madre de la Patria"

Cuernavaca, Morelos **19/junio/2020**

OFICIO No. SAC/ 201/2020

**Asunto:** Autorización de impresión de tesis

**ALEXIS ALONSO BASTIDA**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**P R E S E N T E**

Por este conducto tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Modelado y control de temperatura para un fotobiorreactor escala piloto con intercambiador de calor", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica*  
*"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



**CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA**

C.c.p. M.E. Guadalupe Garrido Rivera. Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Expediente  
GVGR/CHG

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.  
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4106, e-mail: dir\_cenidet@tecnm.mx

[www.tecnm.mx](http://www.tecnm.mx) | [www.cenidet.edu.mx](http://www.cenidet.edu.mx)



# Resumen

---

En este trabajo de tesis se presentan los resultados en simulación de un control de temperatura de un fotobiorreactor escala piloto con iluminación interna y un intercambiador de calor inmerso en el sistema, para maximizar la producción de biomasa microalgal. Además de ser posible la manipulación del metabolismo celular de la microalga *Nannochloropsis oculata*, con la intención de mejorar su valor económico al generar interés en sectores productivos como pueden ser farmacológicos, nutricionales, acuícolas o biocombustibles.

La estrategia de control planteada consiste en un controlador predictivo por modelo de referencia (MPC). Para comprobar el desempeño de esta estrategia de control, se optó por realizar una comparación con respecto a un arreglo de controladores PID para el control de temperatura. Esta comparativa consiste en dos pruebas en simulación. Una de las pruebas está basada en una regulación de temperatura del medio de cultivo y la otra basada en un seguimiento de trayectoria de la temperatura del medio de cultivo.

Debido a que el sistema fotobiorreactor estudiado no contaba con una representación matemática que reflejará su la dinámica de las interacciones térmicas del intercambiador de calor, se optó por desarrollar un modelo matemático que fuera capaz de implementarse en la estrategia de control MPC, el cual es práctico para experimentaciones en simulación del fotobiorreactor en estudios de concentración celular con respecto a las dinámicas de las temperaturas del fotobiorreactor.

El modelo matemático planteado cuenta con tres ecuaciones diferenciales de las temperaturas del fotobiorreactor, así como una de la concentración celular de biomasa, además de una relación algebraica de la concentración celular máxima con respecto a la temperatura. Para la caracterización del modelo se aplicaron métodos de estimación de parámetros heurísticos, así como filtros de Kalman extendidos para la estimación de estados y parámetros. El modelo matemático fue validado con respecto a datos experimentales del sistema fotobiorreactor estudiado.

Al evaluar el desempeño del controlador MPC, resulta tener mejor desempeño en comparación al arreglo de controladores PID. Debido a la optimización realizada con respecto a la ley de control del sistema, se puede considerar como opción viable y novedosa para este tipo de sistemas de fotobiorreactores con iluminación interna y un intercambiador de calor inmerso en el sistema.

# Abstract

---

In this thesis work, the results are presented about a simulation of a temperature control for a pilot scale photobioreactor with internal lighting and a heat exchanger immersed in the system, to maximize the production of microalgal biomass. In addition to being possible to manipulate the cellular metabolism of the microalgae *Nannochloropsis oculata*, with the intention of improving its economic value by generating interest in productive sectors such as pharmacological, nutritional, aquaculture or biofuels.

The proposed control strategy consists of a predictive controller per reference model (MPC). To prove the performance of this control strategy, we opted to make a comparison against a PID controller array to evaluate temperature control. This comparison consists of two simulation tests. One of the tests is based on a temperature regulation of the culture medium and the other is based on a track of the culture medium temperature.

According to the fact that the studied photobioreactor system did not have a mathematical representation that would reflect the dynamic of the thermal interactions of the heat exchanger, it was decided to develop a mathematical model capable of being implemented in the MPC control strategy, which is practical for experiments in simulating the photobioreactor in studies of cell concentration with respect to the dynamics of the temperatures of the photobioreactor.

The proposed mathematical model has three differential equations of the photobioreactor temperatures, as well as one of the biomass cell concentration and lastly, an algebraic relationship of the maximum cell concentration with respect to temperature. For the characterization of the model, heuristic parameter estimation methods were applied, as well as extended Kalman filters for the estimation of states and parameters. The mathematical model was validated with respect to experimental data from the photobioreactor system studied.

When evaluating the performance of the MPC controller, it performs better compared to the array of PID controllers. Due to the optimization carried out in the system control law, it can be a viable and novel option for this type of photobioreactor systems with internal lighting and a heat exchanger immersed in the system.

*“Hoy por hoy soy responsable de mi vida, la vida no me debe nada y para tener lo que quiero tengo que merecerlo”*

*Gerry Sánchez.*

# Dedicatoria

---

A Dios por darme las capacidades para afrontar este reto en mi vida. Por qué la vida no tendría significado si todo fuera fácil. Gracias.

A mi familia (mi madre Ilda, mi padre Ramiro y mi hermano Ramiro) esos guerreros inquebrantables ante las tantas tragedias que nos han sucedido. Ellos son mis grandes maestros en esta vida, mi motor para seguir adelante. Nunca me cansare de agradecerles por creer en mí, por darme todo sin pedir nada a cambio. Me siento muy orgulloso de ser su hijo y su hermano. Muchas gracias por esos momentos buenos y malos que los atesoro con gran cariño porque son aquellos forjan el carácter. De todo corazón gracias por todo y por lo que viene más adelante.

A mis abuelos Rodriga, Gumaro, Bertha y Ramiro, por todo el esfuerzo que hicieron para formar a mis padres un ejemplo total de Fortaleza. Gracias por brindarnos su apoyo incondicional en todo momento, sin ustedes nada de esto podría ser posible.

A mis mascotas *Poopy*, *Bonney* y *Hershey*, por estar siempre a mi lado y darme su amor incondicional, muchas gracias.

Este trabajo no solo es mío es de todos ustedes, infinitamente gracias por ser parte de mi vida.

# Agradecimientos

---

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico brindado y darme la oportunidad de realizar una estancia en el Estado de Sinaloa.

Al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), por darme la oportunidad estudiar mis estudios de maestría.

A uno de mis grandes mentores de la vida, el Dr. Manuel Adam, una de esas personas que siempre tienen el consejo adecuado. No sabe cuánto le agradezco por todo ese apoyo tanto académico como personal. Uno de mis psicólogos de este proceso de maestría. Gracias por brindarme su amistad, sus conocimientos y además por siempre estar al pendiente de mí. Mas allá de ser mi asesor lo considero un gran amigo. Muchas gracias.

Al Dr. Miguel A. Franco, nunca había conocido a una persona tan comprometida con su trabajo. Muchas gracias por brindarme todo su tiempo y conocimiento en todas esas asesorías. Gracias por brindarme hospedaje en mi estancia en Mazatlán. Para mí usted es un ejemplo a seguir tanto académico como personal. Muchas gracias por su amistad.

A la familia del Dr. Miguel Franco, no saben cuánto valoro todas las atenciones que tuvieron conmigo. Muchas gracias.

Al Dr. Juan Reyes una de las personas más inteligentes que he conocido. Gracias por todos los consejos y aportaciones brindadas en este tema de tesis además de sus conocimientos impartidos durante clases. Sin usted este trabajo nunca hubiera llegado a tener este resultado.

Al Dr. Carlos M. Astorga por todo su conocimiento impartido en clase y en este tema tesis. Gracias por su disposición total en este proyecto.

A la Licenciada Lorena Ruiz, por todo el apoyo brindado en todos los trámites que se necesitaron realizar a lo largo de este proceso formativo. Además de la paciencia que tuvo conmigo para todo el llenado de documentación.

Al Dr. Gerardo V. Guerrero, no sabe lo mucho que le agradezco por todas esas charlas en clase que me ayudaron a crecer mucho como persona. Gracias por creer en mí y por darme cuenta de lo mucho que valgo. De verdad muchas gracias, esto es algo de lo que más valoro de todo este proceso de formación tanto académica como personal.

A todos los doctores que me impartieron clases, ya que de ellos obtuve los conocimientos necesarios para realizar este tema de tesis.

A mis amigos Yusef y Diego, muchas gracias por brindarme su amistad y apoyo en todo momento. Pero sobre todo muchas gracias por ayudarme a crecer como persona, lo valoro mucho.

A mis amigos Zuly, Donaciano, Isael, Samuel, Chuy, Jashiel, Juan, Christian (el profe), además de todos aquellos que no los mencione. Muchas gracias por todo su apoyo y amistad Brindada.



A la vida por darme tantos momentos tanto buenos y sobre todo esos momentos malos, que son aquellos de los que aprendí y me ayudaron a forjar aquel carácter que no tenía. Este trabajo es una manera muy humilde de agradecerle y regresar un poco de todo aquello que me ha regalado.

# Índice general

Resumen.....	I
Abstract.....	II
Índice de figuras.....	XI
Índice de tablas .....	XII
Nomenclatura.....	XIII
Capítulo 1. Preámbulo .....	1
1.1. Introducción .....	1
1.2. Planteamiento del problema.....	1
1.3. Objetivos .....	2
1.3.1. Objetivo general .....	2
1.3.2. Objetivos específicos.....	2
1.4. Metas.....	2
1.5. Justificación .....	3
1.6. Alcances y limitaciones .....	4
1.7. Estado del arte.....	4
1.8. Organización del documento .....	14
Capítulo 2. Generalidades del sistema .....	15
2.1. Fotobiorreactor.....	15
2.1.1. Tipos de fotobiorreactores .....	15
2.1.2. Fotobiorreactor de columna vertical.....	16
2.2. Microalgas.....	17
2.2.1. <i>Nannochloropsis oculata</i> .....	17
2.3. Fotobiorreactor estudiado .....	17
2.3.1. Descripción de las variables y entradas del modelado del sistema .....	18
2.4. Conclusiones de capítulo .....	19
Capítulo 3. Metodología del modelo matemático del sistema.....	21
3.1. Identificación de sistemas .....	21
3.1.1. Modelos de caja gris .....	21
3.2. Descripción general del problema del modelo matemático.....	22
3.3. Consideraciones para el modelo matemático del sistema.....	23
3.4. Modelado del subsistema térmico.....	23

3.4.1. Balances de energía del fotobiorreactor .....	24
3.4.2. Modelo dinámico de las temperaturas del fotobiorreactor .....	28
3.4.3. Modelo dinámico reducido de las temperaturas del fotobiorreactor .....	29
3.5. Modelado del subsistema bioquímico.....	30
3.5.1. Concentración celular máxima con respecto a la temperatura de medio de cultivo....	30
3.5.2. Representación matemática del subsistema bioquímico .....	31
3.6. Modelo matemático del sistema fotobiorreactor.....	31
3.7. Espacio de estados no lineal del modelo matemático.....	32
3.8. Conclusiones del capítulo .....	32
Capítulo 4. Metodología de estimación .....	33
4.1. Estimación de la concentración microalgal .....	33
4.1.1. Datos experimentales de la concentración microalgal .....	33
4.1.2. Resultados de la estimación.....	34
4.1.3. Índices de desempeño del modelo de crecimiento microalgal .....	36
4.1.4. Parámetros estimados del modelo de crecimiento microalgal.....	36
4.2. Observabilidad del sistema térmico del modelo no lineal del fotobiorreactor estudiado ..	37
4.3. Estimación del modelo térmico de sistema.....	38
4.3.1. Datos experimentales.....	38
4.3.2. Filtros de Kalman .....	40
4.3.3. Adecuaciones del modelo matemático del fotobiorreactor para su aplicación de los filtros de Kalman .....	43
4.3.4. Resultados de las temperaturas estimadas del sistema .....	44
4.3.5. Índices de desempeño de las estimaciones realizadas .....	47
4.3.6. Resultados de los parámetros estimados .....	48
4.3.7. Parámetros estimados del subsistema térmico.....	51
4.4. Ejemplo de estimación de parámetros basado en un DEFK .....	53
4.4.1. Descripción general de la simulación.....	53
4.4.2. Dinámica del sistema a estimar .....	53
4.4.3. Observabilidad del sistema lineal del fotobiorreactor .....	53
4.4.4. Parámetros a estimar.....	55
4.4.5. Resultados de las temperaturas estimadas del sistema .....	55
4.4.6. Resultados de los parámetros estimados del sistema.....	57
4.5. Ventajas y desventajas de los métodos de estimación presentados. ....	60

4.6. Conclusiones del capítulo .....	61
Capítulo 5. Metodología de control .....	62
5.1. Importancia del control térmico en la concentración microalgal.....	62
5.1.1. Efectos sobre la concentración celular con respecto a la temperatura .....	62
5.2. Descripción de las simulaciones realizadas .....	65
5.3. Controlabilidad del sistema.....	65
5.3.1. Sistema linealizado considerando una temperatura ambiente de 282.15 K .....	66
5.3.2. Sistema linealizado considerando una temperatura ambiente de 308.15 K .....	66
5.3.3. Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID).....	67
5.3.4. Controlador Predictivo por Modelo (MPC).....	68
5.3.5. Desarrollo del control predictivo .....	69
5.4. Resultados de las simulaciones de control.....	71
5.4.1. Simulación de los controladores ante pruebas de regulación .....	71
5.4.2. Simulación de los controladores ante pruebas de seguimiento de trayectoria .....	74
5.5. Comparativa de los controladores.....	77
5.5.1. Comparativa con respecto a las simulaciones de regulación.....	77
5.5.2. Comparativa con respecto a las simulaciones de seguimiento de trayectoria .....	77
5.6. Índices de desempeño de los controladores .....	78
5.6.1. Índices de desempeño con respecto a las simulaciones de regulación. ....	78
5.6.2. Índices de desempeño con respecto a las simulaciones de seguimiento de trayectoria. .....	79
5.7. Conclusiones del capítulo .....	79
Capítulo 6. Conclusiones .....	82
6.1. Conclusiones generales.....	82
6.2. Aportaciones del trabajo .....	83
6.3. Sugerencia de futuros trabajos .....	84
Bibliografía .....	85
Apéndices.....	91
A. Índices de desempeño .....	91
B. Observabilidad de un sistema.....	92
B.1. Observabilidad de un sistema no lineal .....	92
B.1.1. Resultados de las derivadas de alto orden de Lie del fotobiorreactor.....	94
B.1.2. Resultados de las derivadas parciales del Gradiente.....	94

B.2. Observabilidad de un sistema lineal .....	95
C. Controlabilidad de un sistema .....	96
C. 1 Controlabilidad de un sistema lineal .....	96
D. Dinámica de la temperatura del glicol a la entrada del I.C. ....	96
E. Control Predictivo por Modelo de referencia (MPC).....	98

# Índice de figuras

Figura 2.1 Diagrama general del Fotobiorreactor de columna vertical .....	18
Figura 3.1 Estructura general de la identificación del fotobiorreactor. ....	22
Figura 3.2 Estructura del modelo dinámico del fotobiorreactor. ....	22
Figura 3.3 Modelo energético del Fotobiorreactor de columna vertical.....	24
Figura 3.4 Análisis del sistema térmico.....	25
Figura 3.5 Interacciones térmicas del Fotobiorreactor. ....	25
Figura 4.1 Datos experimentales del crecimiento microalgal, [Águila M., 2018].....	33
Figura 4.2. Estimaciones de la concentración celular.....	34
Figura 4.3 Comparativa de los datos experimentales vs los datos estimados de la concentración celular.....	35
Figura 4.4 Dinámica del error de estimación de la concentración celular.....	35
Figura 4.5 Datos experimentales de la temperatura de la cámara interna. ....	39
Figura 4.6 Datos experimentales de la temperatura del medio de cultivo microalgal. ....	39
Figura 4.7 Datos experimentales de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor.....	40
Figura 4.8 Esquema de un filtro de Kalman extendido. ....	42
Figura 4.9 Esquema de un filtro de Kalman extendido dual.....	43
Figura 4.10. Estimación de la temperatura de la cámara interna. ....	45
Figura 4.11. Estimación de la temperatura del medio de cultivo.....	46
Figura 4.12. Estimación de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor. ....	47
Figura 4.13 Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de $w_1$ a $w_3$ . ....	48
Figura 4.14. Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de $w_4$ a $w_6$ . ....	49
Figura 4.15 Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de $w_7$ a $w_9$ . ....	50
Figura 4.16 Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de $w_{10}$ a $w_{11}$ .....	50
Figura 4.17 Dinámica de las temperaturas del sistema.....	53
Figura 4.18 Estimación de $T_{ch}$ con respecto a su error de estimación. ....	56
Figura 4.19 Estimación de $T_w$ con respecto a su error de estimación.....	56
Figura 4.20 Estimación de $T_e$ con respecto a su error de estimación.....	57
Figura 4.21 Estimación de $W_1$ con respecto a su error de estimación. ....	58
Figura 4.22 Estimación de $W_2$ con respecto a su error de estimación. ....	58
Figura 4.23 Estimación de $W_3$ con respecto a su error de estimación. ....	59
Figura 4.24 Estimación de $W_4$ con respecto a su error de estimación. ....	60
Figura 5.1. Dinámica de la concentración celular con respecto a una temperatura variante.....	63
Figura 5.2. Dinámica de la concentración celular con respecto a bajas temperaturas.....	63
Figura 5.3. Dinámica de la concentración celular con respecto a altas temperaturas.....	64
Figura 5.4. Dinámica de la concentración celular con respecto a la temperatura.....	65
Figura 5.5 Diagrama de control PID de la temperatura del medio de cultivo microalgal del fotobiorreactor.....	68
Figura 5.6 Diagrama de control MPC de la temperatura del medio de cultivo microalgal del fotobiorreactor.....	71
Figura 5.7. Resultados del control PID por regulación.....	72

Figura 5.8. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia del controlador PID.....	73
Figura 5.9. Resultados del control MPC por regulación.....	73
Figura 5.10. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia del controlador MPC.....	74
Figura 5.11. Resultados del control PID por seguimiento de trayectoria. ....	75
Figura 5.12. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia variante del controlador PID.....	75
Figura 5.13. Resultados del control MPC por seguimiento de trayectoria. ....	76
Figura 5.14. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia variante del controlador MPC.....	76
Figura 5.15. Comparativa de los controladores con respecto a las simulaciones de regulación. .	77
Figura 5.16. Comparativa de los controladores con respecto a las simulaciones de seguimiento de trayectoria. ....	78
Figura 0.1. Calentamiento del glicol.....	97
Figura 0.2. Enfriamiento del glicol.....	97

## Índice de tablas

Tabla 1.1. Trabajos importantes para la investigación. ....	10
Tabla 2.1 Características principales de los fotobiorreactores abiertos y cerrados [García et al., 2018]. ....	16
Tabla 2.2 Entradas y variables de estado del fotobiorreactor. ....	19
Tabla 4.1. Índices de desempeño de la estimación de concentración celular. ....	36
Tabla 4.2. Parámetros estimados del modelo de concentración celular. ....	36
Tabla 4.3. Índices de desempeño de las estimaciones de los estados del FBR.....	47
Tabla 4.4 Parámetros conocidos del sistema fotobiorreactor. ....	51
Tabla 4.5 Ciclos de trabajo de los elementos del fotobiorreactor.....	51
Tabla 4.6 Variables manipuladas del fotobiorreactor.....	52
Tabla 4.7 Parámetros estimados mediante la metodología de Kalman. ....	52
Tabla 4.8 Ventajas y desventajas de los métodos de estimación propuestos.....	60
Tabla 5.1. Índices de desempeño con respecto a los controladores aplicados a la regulación. ....	79
Tabla 5.2. Índices de desempeño con respecto a los controladores aplicados al seguimiento de trayectoria. ....	79

# Nomenclatura

## Nomenclatura Balance de energía

Variables del sistema		Letras griegas	
$A$	Área, $m^2$	$\varepsilon$	Emisividad
$C$	Capacidad calorífica, $JK^{-1}$	$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann, $5.67 \times 10^{-8} Jm^{-2}s^{-1}K^{-4}$
$C^d$	Coeficiente de descarga	$\rho$	Densidad, $kgm^{-3}$
$c$	Capacidad calorífica específica, $J kg^{-1}K^{-1}$	<b>Subíndices</b>	
$F$	Tasa de flujo másico, $kg s^{-1}$	$a$	Aire
$g$	Aceleración Gravitacional, $ms^{-2}$	$b$	Soplador
$G$	Conductancia térmica, $Js^{-1}K^{-1}$	$ch$	Cámara interior (carcasa de la lámpara)
$H$	Altura, $m$	$e$	Intercambiador de calor
$P$	Potencia efectiva, $Js^{-1}$	$g$	Glicol
$q$	Tasa de flujo de calor, $Js^{-1}$	$l$	Lámpara
$Q$	Energía acumulada, $J$	$r$	Laboratorio
$u$	Ciclo de trabajo	$s$	Efecto <i>Stack</i>
$V$	Volumen, $m^3$	$w$	Agua
		$\rightarrow$	Desde...hacia...

## Nomenclatura modelo de la concentración celular

<u>Nomenclatura</u>		<u>Subíndices</u>	
$X$	Concentración celular	$sT$	Temperatura específica de la experimentación
$X_m$	Concentración celular máxima		
$N$	Capacidad de carga		
$t$	Tiempo de experimentación		



## Nomenclatura Filtro de Kalman

---

<u>Nomenclatura</u>		<u>Subíndices</u>	
$A, C$	Jacobianos de sistema	$k$	Número de iteración
$e$	Error	$0$	Condición inicial
$I$	Matriz Identidad		
$K$	Ganancia de Kalman		<u>Superíndices</u>
$P$	Error de covarianza	$e$	Ruido en la medición (Parámetro)
$R$	Matriz de ruido	$n$	Ruido en la medición (Estado)
$W$	Vector de parámetros	$r$	Ruido en el sistema (Parámetro)

*“No desees que sea más fácil, desea ser mejor. No desees menos problemas, desea más habilidades. No desees menos retos, desea más sabiduría”*

*Jim Rohn.*

# Capítulo 1. Preámbulo

---

## 1.1. Introducción

Debido a que las condiciones ambientales en los lugares donde se realiza el cultivo de las microalgas son altamente cambiantes, es necesario utilizar fotobiorreactores tecnificados en donde sea posible controlar de mejor manera los distintos factores determinantes para el crecimiento de la microalga en cultivo. Para obtener los mejores resultados del control de estas variables es recomendable aplicar técnicas de control avanzadas con el fin de garantizar las expectativas propuestas. Actualmente en el Instituto Tecnológico de Mazatlán se dispone de un fotobiorreactor de columna vertical escala piloto, que fue diseñado en conjunto con el CENIDET. Este sistema cuenta con iluminación interna y un intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo de microalgas. En el caso del citado fotobiorreactor con este trabajo se pretende cambiar las técnicas de control *ON-OFF* con que cuenta el sistema, por técnicas más robustas basadas en modelos matemáticos.

Dado que el sistema no cuenta con un modelo representativo de su dinámica, es necesario en primera instancia obtener un modelo matemático a partir del cual, sea posible predecir el comportamiento de las variables a controlar, así como, modelar el comportamiento del sistema en diversas condiciones de operación. Sin embargo, debido a las recientes innovaciones que incorpora el fotobiorreactor del IT-Mazatlán, en la literatura sólo se dispone de un modelo que no corresponde para el sistema estudiado. Por esta razón se requirió desarrollar un modelo basado en la técnica de modelo de caja gris, el cual, con base a relaciones físicas y sus respectivas consideraciones del sistema, es posible obtener una representación matemática de la dinámica del sistema. Después de que se tiene la representación matemática del sistema, de acuerdo con los parámetros que son posibles de medir en el sistema, se determinan los parámetros que se pretende estimar. Una vez definidos estos parámetros a estimar y se hace uso de datos experimentales del sistema, que por medio de las técnicas de filtros de Kalman estiman los parámetros del sistema.

En esta tesis se presentan los resultados del modelo matemático desarrollado para el fotobiorreactor escala piloto del TecNM en Mazatlán, así como las técnicas de filtros de Kalman para la estimación de los parámetros no medibles. Por último, se realiza una propuesta del control de temperatura a utilizar en fotobiorreactores del tipo estudiado, para garantizar las condiciones adecuadas para el crecimiento de las microalgas en condiciones ambientales del estado de Sinaloa (México).

## 1.2. Planteamiento del problema

La calidad y cantidad en la producción de biomasa microalgal depende en gran medida de las condiciones ambientales y nutrimentales proporcionadas durante el cultivo de la microalga *Nannochloropsis oculata*, por ello es conveniente contar con ambientes de producción controlados que sean capaces de brindar estas condiciones para maximizar la producción de microalgas.

Debido a que el cultivo microalgal en lugares abiertos presenta una gran carencia en el control de las condiciones ambientales y nutrimentales, la obtención de este producto se ve reducida tanto en cantidad como en calidad. Por ello el uso de los fotobiorreactores cerrados cada día toma una mayor importancia para el cultivo microalgal, ya que en ellos es posible proporcionar y controlar las condiciones adecuadas para el crecimiento microalgal.

La temperatura es una variable de alto impacto en la producción microalgal debido a que este tipo de microorganismos cultivados comercialmente, tienen una mayor tasa de reproducción a temperaturas entre los 21 a 25°C. Caso contrario sucede a temperaturas menores donde el crecimiento se inhibe, lo mismo a temperaturas mayores donde el crecimiento tiende a disminuir por aumento en la mortalidad del microorganismo.

Debido a que el método de iluminación utilizado en el fotobiorreactor, así como la temperatura del medio circundante, son considerados como una fuente de calor, es necesario contar con un control de temperatura capaz de mantener el medio de cultivo celular bajo las condiciones de temperaturas adecuadas para crecimiento celular, ya sea en casos donde es necesario enfriar o calentar el medio de cultivo celular.

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo general**

Modelar un fotobiorreactor (FBR) con intercambiador de calor, que permita diseñar una estrategia de control para la temperatura del medio de cultivo, con la finalidad de generar y registrar datos que contribuyan estudio del fotobiorreactor escala piloto para la producción de biomasa microalgal.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Desarrollar un modelo matemático para un sistema de Fotobiorreactor con Intercambiador de calor.
- Implementar métodos de estimación paramétrica en el modelo propuesto.
- Validar el modelo matemático propuesto.
- Establecer una estrategia de control para mantener una temperatura deseada en el fotobiorreactor escala piloto.

## **1.4. Metas**

- Establecer una metodología para el modelado de un fotobiorreactor de columna vertical con iluminación interna y un intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo.
- Desarrollar una metodología de estimación de parámetros y estados a través de algoritmos de filtros de Kalman extendidos (EKF) y algoritmos duales del mismo (DEKF).
- Desarrollar una metodología de un diseño de una estrategia de control de temperatura en un fotobiorreactor para manipular y maximizar el cultivo de microalgas, la producción de omegas, pigmentos, proteínas y otros aceites para biocombustibles.

## 1.5. Justificación

La producción de microalgas día con día toma una mayor importancia en diversos sectores de producción, debido a su facilidad de generación y su gran aporte de nutrimental. En la industria farmacéutica su principal aplicación ha sido como agente gelificante y coloide [Quitral et al, 2012], por otro lado, en la industria alimenticia presenta diversos usos debido a que estas contienen una gran cantidad de proteínas, vitaminas, minerales, ácidos grasos y fibra dietética. Entre otros usos de este producto se encuentra el tratamiento de aguas residuales, donde las microalgas se encargan de remover de metales pesados, y la producción de biocombustibles y pueden ser usadas también para contra restar el efecto invernadero por la asimilación del CO<sub>2</sub> [García et al., 2019].

Los fotobiorreactores son el medio adecuado para realizar la producción de biomasa microalgal, pero entre ellos existen dos vertientes principales, los que son de tipo cerrado y los de tipo abierto. Dentro de estos dos tipos lo que los hace diferentes es que en los fotobiorreactores cerrados se puede manipular una amplia cantidad de variables ambientales del sistema con la finalidad de obtener la producción de mejor calidad y de una manera más rápida. Caso contrario sucede en los fotobiorreactores abiertos en donde se privilegia una producción masiva de microalgas sin considerar la calidad y el tiempo de producción de estas microalgas [Zhuang et al, 2019].

La temperatura es una es una variable de gran importancia para el crecimiento celular, ya que las microalgas tienen rangos de temperaturas en las que alcanzan su crecimiento máximo. [Grimaud et al, 2015], realizan pruebas para estimar el crecimiento celular basadas en modelos matemáticos, en donde se considera una temperatura mínima, una máxima y una óptima. En dichos trabajos se considera un crecimiento igual a cero cuando la temperatura del medio de cultivo es menor a la temperatura mínima tolerable por el microorganismo o de igual manera en el caso de que esta temperatura sea mayor a la temperatura máxima. Por lo que el proceso de reproducción celular solo es posible cuando la temperatura del medio de cultivo se encuentra entre los rangos de temperatura establecidos para una especie de microalga en particular.

En el Instituto Tecnológico de Mazatlán, se encuentra ubicado el fotobiorreactor de columna vertical estudiado en el cual se realizan gran cantidad de pruebas experimentales para diversas cepas de microalgas. En dicho fotobiorreactor son cultivadas bajo diferentes condiciones ambientales y nutrimentales, con la finalidad de tener un mayor entendimiento de su fisiología y particularmente la relacionada con la generación de biomoléculas de interés farmacológico, nutricional, acuícola o bioenergético. Este tipo de pruebas son realizadas gracias a que en el fotobiorreactor utilizado es posible aplicar un control de estas variables. Sin embargo, actualmente se cuenta con un sistema de instrumentación y control que requiere ser más robusto para adaptarse a los cambios ambientales de la región geográfica e incluso poderse llevar a otras latitudes. Además, los sistemas de control del fotobiorreactor requieren adaptarse a los posibles eventos no controlados o fallas en el sistema producción.

Debido a una serie de investigaciones referentes a la manipulación de las especies microalgales con respecto a la temperatura, es que surge una ventana de posibilidades para el control automático de las temperaturas del fotobiorreactor. Ya que, al presentar variaciones de temperatura en el medio de cultivo, es que se logra obtener diversas carteristas en la microalgal, pudiendo aumentar la

producción de omegas, pigmentos, proteínas y otros aceites que son de gran interés para una gran cantidad de sectores de producción.

Por lo tanto, se busca implementar una estrategia de control de temperatura en el fotobiorreactor estudiado, que permita que el sistema tenga la capacidad de adaptación ante las demandas de temperatura requeridas para la manipulación de la composición celular de la especie de microalga analizada. Considerándola como una de las principales contribuciones del trabajo.

## **1.6. Alcances y limitaciones**

El modelo matemático presentado se realizó en base a balances de energía con respecto a las temperaturas del sistema y a la expresión del modelo de crecimiento logístico para el caso de la tasa de crecimiento celular.

Debido a que los datos experimentales presentados no son los mismos para la estimación de las temperaturas y el crecimiento celular, por este motivo es que no se incluye en la estimación de parámetros la expresión matemática del modelo de crecimiento celular.

El modelo matemático desarrollado no fue posible validarlo con otra base de datos distinta a la utilizada.

Se desarrollaron dos estrategias de control, la primera es un arreglo de controladores Proporcional Integral Derivativo (PID) en paralelo, y la segunda es un Control Predictivo por Modelo (MPC). Estas estrategias solo fueron probadas y comparadas a nivel de simulación, por lo que no fue posible comprobar el desempeño de ambas estrategias a nivel experimental.

Debido al periodo de contingencia presentado en este año en curso no fue posible realizar pruebas experimentales del control de temperatura, ya que la institución donde se encuentra el fotobiorreactor se encuentra cerrada.

## **1.7. Estado del arte**

### ***Estudios realizados sobre Microalgas***

La microalga es la principal fuente para la producción de biomasa para usos alimenticios, farmacéuticos y recientemente aplicaciones para biocombustibles. Esto se debe a las propiedades que presentan las diversas especies de microalgas, las cuales son la tasa de crecimiento acelerada, a su capacidad de captación de energía proveniente de la luz, la alta cantidad de lípidos y nutrientes con los que cuenta y su capacidad para sobrevivir en condiciones de higiene precarias y limitadas de nutrientes.

[Hernández et al., 2014] hacen una recopilación en forma general la información actualizada (1972 a 2014) sobre diferentes aspectos y parámetros de importancia en el cultivo de microalgas, sus múltiples usos y beneficios. Esta recopilación hace mención en la luz como uno de los principales parámetros a considerar en un cultivo (la fotosíntesis se incrementa con el aumento de la intensidad lumínica, hasta alcanzar la máxima tasa de crecimiento específica para cada especie en el punto de saturación por luz). Los mismos autores dicen que el pH y CO<sub>2</sub> (cada especie necesita un rango

determinado de pH que permita un crecimiento óptimo) y la temperatura (la concentración celular aumenta proporcionalmente con la temperatura hasta alcanzar la temperatura óptima de cada especie) son otros factores sumamente importantes para el desarrollo de las microalgas en cultivo. Por encima de la temperatura óptima, aumenta la respiración y la fotorrespiración reduce la productividad global. La temperatura adecuada varía entre las especies tropicales, pero en general está entre 28° y 35°C. Además, hacen hincapié en la selección del método de cosecha, ya que es de gran importancia para la economía de la producción de biomasa, puesto que puede encarecer el costo total de la producción entre un 20-30%.

[Miyashita et al., 2014], llevan a cabo observaciones microscópicas de los comportamientos de las microalgas en una cámara de cultivo celular con una solución tampón que contiene cristales biogénicos de guanina. Además, de controlar los movimientos de las algas con una estimulación de luz directiva a partir de los cristales biogénicos alineados magnéticamente. El principal motivo de este estudio fue para estudiar ese tipo de cristales, ya que tienen forma de placa delgada, una alta reflectancia de luz y es proveniente de las escamas de pescado. Por lo anterior es que ellos trataron de aplicar los cristales biogénicos al cultivo de microalgas con el fin de acelerar la micro Síntesis fotónica de algas.

### ***Importancia de la biomasa microalgal***

Hoy en día la biomasa microalgal, es de gran importancia para los diversos sectores de producción, esto en gran parte se debe a que con ella es posible obtener diversos tipos de productos. Dentro de las aplicaciones por las cuales la biomasa toma esta importancia, se encuentran el desarrollo de biocombustibles, suplementos alimenticios, aceites, alimentos para diversas especies marinas, entre otros productos diversos.

[Tian et al., 2011], presenta un trabajo basado en las reacciones de conversión de energía en las microalgas, en él clasifican a las conversiones de energía en bioquímicas y termoquímicas. La bioquímica la subdividen en alcohol, fermentación, digestión anaerobia e hidrógeno fotobiológico. La conversión termoquímica la subdividen en gasificación, pirolisis y licuefacción. Los productos de estos procesos incluyen etanol, metano, H<sub>2</sub>, gas de síntesis y combustible líquido. Además, mencionan en su trabajo que las microalgas están entre las plantas de más rápido crecimiento en el mundo, y alrededor del 50% de su peso es aceite, el biocombustible de las microalgas es el único renovable. En su trabajo presentan que el biodiesel tiene un alto potencial para desplazar paulatinamente a los combustibles líquidos derivados del petróleo.

[Pacheco et al., 2017], presentan un proceso de extracción de aceite a partir de biomasa microalgal. Este proceso implica la recolección, deshidratación, destrucción celular, filtración, concentración, decantación y evaporación de la biomasa. Este estudio está fundamentado en el alto contenido de lípidos que tiene las microalgas, además de contar con la capacidad de crecer rápidamente en aguas marinas, dulces, residuales y no competir con las actividades agrícolas ya que no necesitan suelo fértil ni agua de calidad, propician la captura de CO<sub>2</sub> y tienen una elevada eficiencia fotosintética.

### ***Trabajos realizados con la microalga “Nannochloropsis oculata”***

Esta microalga, pertenece al género *Nannochloropsis*, de morfología generalmente esférica. La microalga se caracteriza por mostrar un rápido crecimiento, tener una simple estructura que les permite fijar carbono utilizando la energía de la luz con alta eficiencia, por ser especialmente resistente a la contaminación (de hongos, levaduras, bacterias, virus, etc.) y por tener una mayor concentración de clorofila. Esta microalga también produce ácidos grasos poliinsaturados, que juegan un papel importante en la prevención de diversas enfermedades humanas.

[Aleman et al., 2017], en este estudio de laboratorio evaluaron la floculación alcalina como un método de separación alternativo de bajo costo para cosechar *Nannochloropsis oculata*. Para ello, antes de proceder al cultivo, ellos ingresan nutrientes a la concentración de biomasa a lo largo del tiempo para obtener el rendimiento máximo del fotosistema. Con ello fueron capaces de mostrar patrones idénticos para los métodos de recolección realizados. Del mismo modo, estos métodos produjeron un mismo aumento en el contenido total de lípidos, al 40% en los primeros 2 días de la etapa de agotamiento de nutrientes, con un enriquecimiento en ésteres metílicos de ácidos grasos. Al término de este estudio concluyeron que, la centrifugación se puede reemplazar con floculación alcalina para cosechar *Nannochloropsis oculata* después de la primera etapa de cultivo.

[Saad et al., 2018], en su trabajo investigan la viabilidad del cultivo de dos especies de microalgas *Nannochloropsis oculata* e *Isochrysis galbana* en el cultivo de biomasa producida en campos petroleros para el tratamiento simultáneo de aguas residuales y la producción de biomasa. Los resultados mostraron que ambas cepas pueden sobrevivir y crecer eficientemente en campos petroleros cuando se proporciona una adaptación sucesiva adecuada. La cepa de *Nannochloropsis oculata* mostró mejores propiedades de crecimiento y adaptación en comparación con la cepa de *Isochrysis galbana* en presencia de campos petroleros.

### ***Trabajos sobre Fotobiorreactores***

En la producción de biomasa microalgal, los métodos de cultivo juegan un papel muy importante, esto tiene que ver en la alta demanda que existe hoy en día por la biomasa microalgal. La biomasa microalgal tiene una amplia cantidad de usos, por ello se busca que cuente con la mejor calidad posible y sea posible producirla en mayores cantidades en un menor tiempo posible. El fotobiorreactor es el principal dispositivo de cultivo para la biomasa microalgal, por lo cual gran parte de las investigaciones referentes al tema, están enfocadas a mejorar la producción de la biomasa aplicando métodos de control a los diversos tipos de fotobiorreactores.

[Hernández et al., 2014], en este trabajo se abordan conceptos de los sistemas de fotobiorreactores, ya sean abiertos o cerrados, se definen los criterios de diseño de estos mismos, los cuales son los siguientes: la biología de la especie a cultivar, la forma del cultivo; requerimientos nutricionales, lumínicos y resistencia al estrés, la relación de la superficie iluminada/volumen del reactor que determina la velocidad de crecimiento, orientación e inclinación; el tipo de sistemas de mezcla y dispersión de gases; sistemas de limpieza y de regulación de la temperatura; transparencia y



durabilidad del material, capacidad de escalado y bajos costos de construcción y operación para fines comerciales.

[Rebolledo et al., 2019], presenta la importancia del control de la fuente de luz en un fotobiorreactor de columna vertical, debido a que al variar la cantidad y coloración de la luz que se le proporciona al sistema el crecimiento microalgal se verá afectado, denotando que una coloración azul en la microalga provee 10 veces mayor cantidad de biomasa en contraste con una coloración de tono anaranjado.

### ***Modelado matemático con respecto a fotobiorreactores y producción microalgal***

El modelado matemático de los sistemas fotobiorreactores, es de gran importancia conocer las dinámicas del sistema y poder realizar experimentaciones virtuales, así como para mejorar los sistemas de control automático ya que, teniendo un conocimiento previo de la dinámica del sistema bajo ciertas condiciones, es posible plantear estrategias de control que puedan mantener las condiciones adecuadas para el sistema o compensar alguna carencia que se presente a lo largo de toda la experimentación.

[Vásquez et al. 2013], realizaron una evaluación los modelos matemáticos de *Gompertz* y logístico en la cinética de crecimiento de microalga *Spirulina*, los cuales fueron comparados con un modelamiento por Redes Neuronales Artificiales *Backpropagation (RNA-BP)*. El alga *Spirulina* fue cultivada en un fotobiorreactor de laboratorio aireado (3 L/min) de 500 mL, con iluminación fluorescente de 40W y en Estado Sólido (LED-Diodo Emisor de Luz) de 1W; obteniendo con ambos sistemas 11.0 klx (Kilo Luxes). Con la iluminación LED, se obtuvo un valor elevado de biomasa de 0.90, en comparación con la obtenida con iluminación fluorescente de 0.82; así como una mayor velocidad de crecimiento  $\mu=0.63 \text{ h}^{-1}$ , precedida de un menor tiempo de latencia  $\lambda=0.34 \text{ h}$ . Resulta ventajoso el modelamiento a través del modelo corregido de *Gompertz I*, porque además de valores de coeficientes de correlación (R) de 0.987 y 0.990 en los cultivos de *Spirulina*. Con iluminación fluorescente y con LED respectivamente, permite obtener los parámetros de la cinética de crecimiento de manera directa.

[Tamrakar et al. 2016] en este trabajo ellos utilizan la ecuación “*thetalogistic growth*” para modelar el crecimiento de biomasa en fotobiorreactores. Justificando que existe una falta de modelos matemáticos adecuados para estudiar el funcionamiento de micro-redes remotas con fotobiorreactores. Con este modelo y junto a un sistema inteligente de gestión de la energía para micro-redes remotas, ellos pretenden ayudar a hacer del biodiesel una fuente de combustible innovadora una opción comercialmente viable para las micro-redes remotas, sostenibles y neutras en carbono.

### ***Estimación paramétrica en fotobiorreactores***

Gran cantidad de trabajos realizados con respecto al modelado matemático para sistemas de fotobiorreactores están basados en modelos de caja gris, ya que es por medio de balances de materia y energía que se obtiene una representación matemática del sistema y por medio de una

metodología de estimación paramétrica es que se hace la caracterización de dicho modelo. De ahí la importancia de un buen proceso de estimación paramétrica.

[Rost et al., 2017], presentan el modelado de los datos empíricos obtenidos en el cultivo de microalgas marinas (*Phaeodactylum tricornutum* y *Tetraselmis sp.*) en un fotobiorreactor de escala piloto de tubos concéntricos verticales con burbujeo en el espacio anular de 15 L de capacidad en flujo restringido y 22 L en flujo total. El modelado está basado en varias etapas del proceso, en la etapa inicial de adaptación (cuando la concentración de biomasa es muy pequeña), posteriormente la etapa dos es la etapa de crecimiento (fase de rápido crecimiento de orden exponencial, esto es debido a que las células más cercanas a la superficie externa del FBR interceptan la luz ensombreciendo a las restantes). Con este cambio en las etapas se puede observar que el incremento de la concentración de biomasa abandona el modelo exponencial y se ajusta a un modelo lineal o de productividad constante.

[Farza et al, 2019] desarrolla una identificación de un modelo matemático del crecimiento microalgal en un fotobiorreactor, en la cual aplica un observador de alta ganancia para la estimación de parámetros desconocidos del crecimiento microalgal con respecto a la concentración del dióxido de carbono disuelto en el medio de cultivo.

[Tebbani et al, 2013] mediante de una metodología de caja gris aplica un filtro de Kalman unscented para la estimación de componentes de la concentración de dióxido de carbono y oxígeno para las concentraciones de biomasa de la microalga *Chlamydomonas reinhardtii*. Con respecto a datos experimentales es que se valida dicha experimentación de los parámetros para la identificación de modelo matemático del fotobiorreactor.

### ***Control automático en fotobiorreactores***

Al contar con una buena metodología de control es posible acondicionar un medio de cultivo de manera que sea adecuado para el buen crecimiento microalgal en los sistemas de fotobiorreactores. Existen una gran cantidad de variables a controlar en el sistema que permiten garantizar la mayor cantidad de producción de biomasa microalgal, entre estas variables es importante considerar cuales tienen un gran impacto en el producto final deseado, ya que bajo ciertas condiciones las propiedades nutrimentales de la microalga tendrán diferente composición y por ende su valor económico también se verá afectado de la misma manera.

[Hoyo et al., 2017], Desarrollan una primera aproximación al control robusto del pH en un fotobiorreactor “*raceway*” para el cultivo de microalgas, considerando que la dinámica que el pH posee tiene un carácter fuertemente no lineal que está afectada por numerosos factores tales como el aporte del CO<sub>2</sub> al medio de cultivo o la realización de la fotosíntesis por parte de las microalgas. El diseño del controlador robusto con *QFT* fue realizado para obtener los requisitos de rendimiento y estabilidad robustos determinados, este algoritmo de control fue evaluado por medio de simulaciones frente a distintas condiciones de trabajo y en distintos puntos de operación. Para esta estrategia de control se realizó el modelado del sistema con incertidumbre paramétrica cubre los rangos de trabajo típicos del pH.

[Carreño et al., 2019] Desarrollan un control de pH para un fotobiorreactor tipo abierto (*raceway*), la metodología de control propuesta está basada en un controlador proporcional-integral robusto en combinación con un enfoque de rechazo de perturbación lineal activa. Para esta estrategia de control se utilizaron observadores generalizados proporcionales-integrales (GPI) para estimar las perturbaciones externas en línea y la dinámica no modelada. La metodología de control propuesta es validada en un fotobiorreactor *raceway* a escala completa, estos resultados muestran una mejora significativa en la precisión de la regulación del pH y en consecuencia hay una influencia positiva en la producción de biomasa microalgal.

[Pawlowski et al., 2019] describe una metodología de control basado en modelo para la regulación del pH en fotobiorreactores de canalización. Mediante el modelo de Wiener es posible estimar la variable de pH que busca un equilibrio entre la precisión y la complejidad del modelo. El modelo matemático utilizado para el controlador combina las dinámicas lineales y no lineales. La estrategia de control propuesta se basa en un controlador PID y un filtro robusto y utiliza un enfoque en el modelo que permite desacoplar los términos lineales y no lineales. Los resultados de la simulación mostrarán el comportamiento prometedor de la solución de control propuesta.

[Solimeno et al., 2017] Desarrolla un modelo matemático para la producción de microalgas en fotobiorreactores cerrados integrando en él, aspectos biológicos y de ingeniería de los sistemas. El modelo matemático es validado mediante datos experimentales de dos fotobiorreactores tubulares diferentes. Los aspectos representativos de este modelo se encuentran en la implementación de la atenuación hidrodinámica y de luz a través del medio para obtener una representación realista del fotobiorreactor. El resultado final del modelo fue capaz de predecir la producción de microalgas en diferentes condiciones climáticas, de igual manera la acumulación de oxígeno en todo el fotobiorreactor. Por último, con el modelo caracterizado realiza una comparación con respecto dos pruebas de la concentración celular considerando a una temperatura del medio de cultivo controlada y la otra prueba donde no se tiene un control de temperatura para cada mes del año. Los resultados confirman que, al tener una temperatura controlada de medio de cultivo, el nivel de la concentración celular es mayor debido que siempre se mantiene una temperatura de control adecuada para el crecimiento microalgal.

### ***Importancia de la temperatura con respecto a las propiedades de la biomasa***

La temperatura juega un papel muy importante en el desarrollo celular de la biomasa microalgal, ya que de ella es que se pueden ver afectada la composición final de la microalgal, obteniendo diferentes enfoques a la hora de producción de biomasa dependiendo sus aplicaciones finales.

[Nalley et al., 2018] examina 26 especies de microalgas de 5 grupos funcionales diferentes, cultivándolas a 6 temperaturas diferentes entre 9 y 32 ° C, para recolectar datos de rasgos ecofisiológicos como lo son las tasas de crecimiento máximas, temperaturas óptimas, anchos de nicho térmico y límites de temperatura inferior y superior para el crecimiento. Demostrando que la temperatura afecta significativamente la productividad general de biomasa microalgal.

[Song et al., 2015] realiza un estudio en cinco tipos de *micro-propágulos* de algas verdes, incluyendo *U. prolifera*, *U. linza*, *U. compressa*, *Ulva sp. (Clade 6)* y *Blidingia sp.*, donde se detectaron en las muestras de agua de mar recolectadas del mar de Subei Shoal. Los *micro-propágulos* comenzaron a germinar y la cantidad de germinación cambió notablemente entre 10°C y 30°C; (3). Los resultados fueron maximizados a temperaturas de 15°C, 10°C, 25°C y 20°C respectivamente para cada especie. El estudio indicó que la temperatura del mar jugó un papel importante en la germinación de los *micro-propágulos* de algas verdes en el agua.

[Converti et al., 2009] estudia los efectos de la temperatura y la concentración de nitrógeno en el contenido de lípidos de *Nannochloropsis oculata* y *Chlorella vulgaris* en vista de su posible utilización como nuevas materias primas para la producción de biodiesel. El contenido de lípidos de las microalgas estuvo fuertemente influenciado por la variación de los parámetros probados; de hecho, un aumento de temperatura de 20 a 25°C prácticamente duplicó el contenido de lípidos de *N. oculata* (de 7.90 a 14.92%). Caso contrario sucedió al presentarse un aumento de 25 a 30°C en la *C. vulgaris*, lo que provocó una disminución en su contenido de lípidos de 14.71 a 5.90%. Si la temperatura se incrementa hasta los 38°C el crecimiento del microorganismo se interrumpe de manera abrupta, la célula muere. el color cambia de verde a café. y, en consecuencia, la tasa de crecimiento de microalgas fue incluso negativa.

### **Trabajos importantes para la investigación**

Otras fuentes de información importantes utilizadas para el desarrollo de este trabajo están presentes en la tabla (1.1), la cual está estructurada por tres columnas, en la primera columna se define el nombre del artículo estudiado, en la segunda columna se define el autor y el año de la publicación y por último en la tercera columna se define la aportación del artículo para este trabajo de investigación.

Tabla 1.1. Trabajos importantes para la investigación.

Experimentación con microalgas		
Artículo estudiado	Autor	Aportación
Two-stage cultivation of <i>Nannochloropsis oculata</i> for lipid production using reversible alkaline flocculation.	Aleman et al., (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Evaluación de la floculación alcalina como un método de separación alternativo de bajo costo para cosechar <i>Nannochloropsis oculata</i>.</li> </ul>
Effect of temperature and nitrogen concentration on the growth and lipid content of <i>Nannochloropsis oculata</i> and <i>Chlorella vulgaris</i> for biodiesel production	Converti et al., (2009)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Coloración de las microalgas con respecto a la temperatura del medio de cultivo.</li> </ul>
Magnetically Controlled Biogenic Crystals as Photo-Bioreactors for Algae.	Miyashita et al. (2014)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estudio de los comportamientos de las</li> </ul>

		microalgas en una cámara de cultivo celular con un tampón que contiene cristales biogénicos.
Temperature effects on growth rates and fatty acid content in freshwater algae and cyanobacteria	Nalley et al., (2018)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Efectos de la temperatura en el desarrollo de las microalgas.</li> </ul>
Extracción de aceite de biomasa microalgal.	Pacheco et al., (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Extracción de aceite a través de biomasa microalgal.</li> </ul>
Cultivation of <i>Nannochloropsis oculata</i> and <i>Isochrysis galbana</i> microalgae in produced water for bioremediation and biomass production.	Saad et al., (2018)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Viabilidad del cultivo de dos especies de microalgas <i>Nannochloropsis oculata</i> e <i>Isochrysis galbana</i> en conjunto.</li> </ul>
Effects of temperature on the germination of green algae <i>micropropagules</i> in coastal waters of the Subei Shoal, China	Song et al., (2015)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Crecimiento de <i>micropropagulos</i> en cepas de microalgas con respecto a la temperatura.</li> </ul>
Microalgae Derived Biofuels and Processes.	Tian et al., (2011)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Realiza reacciones de conversión de energía en las microalgas.</li> </ul>
Fotobiorreactores		
Artículo estudiado	Autor	Aportación
Microalgas, cultivo y beneficios.	Hernández et al., (2014)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tipología de fotobiorreactores.</li> <li>Define los criterios de diseño de para los fotobiorreactores.</li> </ul>
Presente y futuro del cultivo de las microalgas para su uso como superalimentos.	García et al., (2018)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comparativa entre fotobiorreactores abiertos y cerrados.</li> </ul>
Diseño, modelado y control de un fotobiorreactor.	Jiménez A. (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diseño fotobiorreactor estudiado.</li> <li>Modelo de caja gris.</li> </ul>
Novel photobioreactor design for the culture of <i>Dunaliella tertiolecta</i> – Impact of color in the growth of microalgae.	Rebolledo et al., (2019)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diseño de un fotobiorreactor cerrado.</li> <li>Comportamiento de la concentración celular bajo diferentes parámetros de irradiancia.</li> </ul>

Modelos matemáticos		
Artículo estudiado	Autor	Aportación
Grey-box modeling and model predictive control for cascade-type.	Barzegari, et al. (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelos de caja gris.</li> </ul>
Convective heat transfer characteristics of microalgae slurries in a circular tube flow.	Chen, et. al. (2019)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Transferencia de calor por convección.</li> </ul>
First Principles Model of a Tubular Photobioreactor for Microalgal Production.	Fernández, I. (2014)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelado de la transferencia de calor en un fotobiorreactor tubular.</li> </ul>
Evaluation of several mathematical models for fitting the growth of the algae <i>Dunaliella tertiolecta</i> .	Halmi et al., (2014)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de diversos modelos matemáticos para la estimación de la concentración celular de la microalga <i>Dunaliella tertiolecta</i>.</li> </ul>
Modeling of Photobioreactors for Remote Microgrids.	Tamrakar et al. (2016)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modelan el crecimiento microalgal mediante relaciones de crecimiento logístico.</li> </ul>
The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family.	Tjørve et al. (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Uso del modelo de Gompertz para estimación de la concentración microbiana.</li> </ul>
Modelamiento matemático y por redes neuronales artificiales del crecimiento de <i>Spirulina sp.</i> en fotobiorreactor con fuente de luz fluorescente e iluminación en estado sólido	Vásquez et al. (2013)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Evaluación de modelos de la concentración celular basados en los modelos de Gompertz y crecimiento logístico.</li> </ul>
Diseño de ecuaciones de sintonía para controladores PID (proporcional-integral-derivativo) implementados en fotobiorreactores.	Verdeza et al., (2016)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ecuaciones para la entrada de refrigerante a la entrada de un intercambiador de calor.</li> </ul>
Estimación de parámetros		
Artículo estudiado	Autor	Aportación
Nonlinear state and parameter estimation using discrete time double Kalman filter.	Abdollahpouri, et. al. (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estimación paramétrica Filtros de Kalman Duales</li> </ul>
A new filtered high gain observer design for the estimation of the component's concentrations in a photobioreactor in microalgae culture.	Farza et al, (2019)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estimación paramétrica mediante un observador de alta ganancia para las concentraciones celulares.</li> </ul>

Biomass estimation of an industrial raceway photobioreactor using an extended Kalman filter and a dynamic model for microalgae production.	García et al. (2019)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estimación de biomasa basado en un filtro de Kalman extendido.</li> </ul>
Grey-box model identification of temperature dynamics in a photobioreactor.	Jimenez et al., (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificación de un Sistema fotobiorreactor de columna vertical basada en la metodología de modelos de caja gris.</li> </ul>
Modelado de la producción de biomasa microalgal en un fotobiorreactor de burbujeo anular y configuración variable.	Rost et al., (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estimación de la producción microalgal en un fotobiorreactor de burbujeo anular.</li> </ul>
Estimation of <i>chlamydomonas reinhardtii</i> growth in a torus photobioreactor.	Tebbani et al, (2013)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estimación de parámetros con un filtro de Kalman <i>unscented</i> para la concentración celular.</li> </ul>
<b>Control en Fotobiorreactores</b>		
Artículo estudiado	Autor	Aportación
Linear active disturbance rejection control for a raceway photobioreactor.	Carreño et al., (2019)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Control del pH del medio de cultivo para un fotobiorreactor <i>raceway</i>.</li> </ul>
Control robusto con QFT del pH en un fotobiorreactor <i>raceway</i> .	Hoyo et al., (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Controlador robusto para el pH del medio de cultivo en un fotobiorreactor <i>raceway</i>.</li> </ul>
Control System for pH in raceway Photobioreactors Based on Wiener Models.	Pawlowski et al., (2019)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Control basado en modelo para el control del pH del medio de cultivo.</li> </ul>
Mechanistic model for design, analysis, operation and control of microalgae cultures: Calibration and application to tubular photobioreactors.	Solimeno et al., (2017)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelado y control de concentración celular en fotobiorreactores tubulares</li> </ul>
Control of the light-to-microalgae ratio in a photobioreactor	Tebbani et al, (2014)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Con de los niveles de irradiancia para la maximización de la concentración microalgal.</li> </ul>

De acuerdo a estas fuentes de información presentadas, es que se demuestra que, para solucionar la problemática del control de temperatura del fotobiorreactor planteada, es necesario tener conocimientos previos de los sistemas de producción de la biomasa, las características de la microalga a cultivar, así como las repercusiones que pueden tener diversos factores ambientales en el crecimiento de esta. Esto con la finalidad de aplicar métodos de control más adecuados para

la solución de control necesaria. Esta solución de control puede ser más eficiente al tener conocimiento de la dinámica del sistema, que está dada por los modelos matemáticos.

## 1.8. Organización del documento

La estructura de este trabajo pretende ser familiarizar a lector con el tema del control de temperatura de un fotobiorreactor, seccionando este documento en seis capítulos los cuales a medida que se avanza en el documento dan al lector los conocimientos generales para el entendimiento adecuado de cada capítulo próximo.

El documento se compone de la siguiente manera:

- **Capítulo 1: Preámbulo.** En este capítulo se presenta nuestra problemática general, la cual a lo largo de esta sección se plantea una justificación de dicha problemática, así como se plantean los objetivos y metas de este trabajo de investigación, considerando los alcances que puede llegar a tener con respecto a las limitaciones actuales del sistema. Por último, se muestra un compendio de trabajos previos desarrollados con respecto a los aspectos más importantes del trabajo.
- **Capítulo 2: Generalidades del sistema.** Este capítulo muestra los conceptos generales de un fotobiorreactor, así como del producto microalgal que se cultiva en este tipo de dispositivos. Por último, se presenta una descripción general del fotobiorreactor de columna vertical estudiado.
- **Capítulo 3: Metodología del modelo matemático del sistema.** Este capítulo es una de las partes medulares del trabajo, ya que en él se plantean las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema. Estas ecuaciones son el producto del análisis del sistema desde el punto de vista térmico y bioquímico con base en balances de energía y relaciones de crecimiento logístico.
- **Capítulo 4: Metodología de estimación.** De acuerdo a las ecuaciones del sistema planteadas en el capítulo 3 y con datos experimentales, en este capítulo se plantean dos métodos de estimación basados en algoritmos de filtros de Kalman extendidos para la estimación de estados y parámetros del modelo matemático del fotobiorreactor estudiado.
- **Capítulo 5: Metodología de control.** En este apartado se plantean dos métodos de control de temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor, un controlador PID y un controlador MPC, con la finalidad de realizar un análisis del desempeño de dichos controladores y poder concluir si es conveniente o no utilizar métodos de control basados en modelos matemáticos para el control de temperatura en fotobiorreactores.
- **Capítulo 6: Conclusiones generales.** En él se muestran las conclusiones generales del trabajo de investigación realizadas, así como las aportaciones de dicho trabajo y una



sugerencia de trabajos futuros que pueden realizarse en el sistema del fotobiorreactor estudiado.

## Capítulo 2. Generalidades del sistema

---

### 2.1. Fotobiorreactor

Un fotobiorreactor es un contenedor translúcido cerrado destinado al cultivo masivo de microalgas [Zhuang et al., 2018], que reúne las condiciones adecuadas para la transmisión de luz. Su principal tarea es mantener un medio estable (temperatura, pH, baja concentración de  $O_2$ ) y proporcionar los nutrientes necesarios para el crecimiento de biomasa incluyendo la luz. Con el fin de obtener metabolitos para uso industrial y terapéutico, mitigación *de*  $CO_2$ , producción de biocombustibles, etc. [Chen et al., 2010].

#### 2.1.1. Tipos de fotobiorreactores

Existen dos principales clases de fotobiorreactores, los de tipo abierto y los de tipo cerrado, de cada una de estas clases se desprenden diversos tipos, los cuales tienen cierto diseño en específico dependiendo del enfoque en la producción microalgal que se quiera aprovechar de mejor manera.

- **Fotobiorreactor abierto:** Es un estanque artificial de baja profundidad el cual puede ser de configuración circular o rectangular, puede contar con sistema de agitación o no, el con la cual se asegura una distribución homogénea entre la microalga y el medio de cultivo, evitando que el producto quede estancado en el fondo o en las paredes del sistema. Este tipo de fotobiorreactores resulta económicamente viable debido a que se requiere poca energía ya que dependen de la luz natural del ambiente y son de fácil mantenimiento [García et al., 2018].
- **Fotobiorreactor cerrado:** Es un dispositivo translucido cerrado, el cual tiene el potencial de alcanzar mayores cantidades de biomasa microalgal en comparación con un fotobiorreactor de tipo abierto. Dentro de este segmento existen varios tipos que principalmente se diferencian entre ellos debidos a su forma física. Los más comunes son los fotobiorreactores tubulares, bolsas de plástico, de placas planas o reactores de tanque agitado. En este tipo de sistemas es posible controlar en mayor medida parámetros de alta importancia como lo es la temperatura, la longitud de onda de la luz suministrada, el pH, así como los ciclos de oscuridad/luz. Con la finalidad de obtener una productividad volumétrica de biomasa más alta [García et al., 2018].

En la tabla (2.1), se presenta una comparativa entre las principales características de ambos tipos de fotobiorreactor, resaltando sus principales ventajas y desventajas de cada sistema, así como su principal uso para la producción de biomasa microalgal de cada tipo de sistema.

Tabla 2.1 Características principales de los fotobiorreactores abiertos y cerrados [García et al., 2018].

Fotobiorreactor abierto	Fotobiorreactor cerrado
Forma rectangular o circular, de baja profundidad. Por lo general con una superficie máxima de uso de 10,000 m <sup>2</sup>	Tienen diferentes formas físicas, por lo general son del tipo tubular, de bolsas de plástico, placas planas, reactores de tanque agitado. La superficie máxima de uso no suele rebasar los 100 m <sup>2</sup> .
Requieren poca energía y su mantenimiento es económico por lo que son económicamente viables.	Requieren de nuevos desarrollos en la iluminación y el control para hacer que los sistemas de cultura cerrados sean competitivos.
Presentan dificultades para el control del sistema debido a que los cultivos no son axénicos, ya que están sometidos a las variaciones climáticas.	Facilidad del control sobre parámetros importantes como la temperatura, intensidad y longitud de onda de la luz suministrada, o los ciclos luz/oscuridad.
Las especies que se cultivan son mayoritariamente especies extremófilas capaces de crecer en un ambiente altamente selectivo (alto valor de pH, alta salinidad o alta temperatura) para evitar el crecimiento de otras especies contaminantes.	Es posible cultivar cualquier tipo de microalga debido al ambiente controlado con el que se cuenta, además de evitar contaminantes en el medio de cultivo debido a que el sistema está cerrado al medio ambiente.
Especies cultivadas: <i>Nannochloropsis</i> , <i>Chlorella</i> , <i>espirulina</i> , <i>D. salina</i> , <i>Scenedesmus</i> , <i>H. pluvialis</i> , <i>Anabaena</i> , <i>P. tricornutum</i> , <i>Micractinium</i> y <i>Actinastrum</i> .	El costo operacional puede llegar a ser hasta 100 veces superior al de los fotobiorreactores de tipo abierto.
Productividad volumétrica de microalga de 0,12-0,48 g/L/d), [Kumar et al., 2015].	Productividad volumétrica de microalga de (0,2-3,8g/L/d), [Kumar et al., 2015].
Método más utilizado para la producción microalgal.	Son demasiado pequeños para la producción de biocombustibles, pero de tamaño adecuado para la producción de productos de alto valor como los nutraceuticos.

### 2.1.2. Fotobiorreactor de columna vertical

Es un tipo de fotobiorreactor de columna vertical cilíndrica, compuesto por un material transparente, el cual permite el paso de luz del exterior. Generalmente este tipo de fotobiorreactores cuenta con un sistema de burbujeo que proporciona CO<sub>2</sub> al medio de cultivo y ayuda a la remoción de O<sub>2</sub> del mismo, además de evitar la formación de sedimentos en el fondo y las orillas del sistema promoviendo de esta forma el buen mezclado de la biomasa microalgal con el agua.

## 2.2. Microalgas

Las microalgas son organismos fotosintéticos unicelulares con tamaño y forma variables que viven principalmente en ambientes acuáticos y pueden sobrevivir tanto en el mar como en aguas Continentales [Rost et al., 2017].

Las microalgas tienen un alto contenido de proteínas son un alimento perfecto para peces y otros animales. Algunas microalgas producen moléculas valiosas, aceites de ácidos grasos poliinsaturados y pigmentos como suplementos nutricionales para humanos [Jiménez, 2017].

De la misma manera que las plantas, convierten la energía solar en energía mediante la fotosíntesis, por lo que se consideran maquinarias fotosintéticas generadoras de pigmentos con una adaptación eco-fisiológica y plasticidad bioquímica única.

### 2.2.1. *Nannochloropsis oculata*

La microalga “*Nannochloropsis oculata*” pertenece al género “*Nannochloropsis*” (*N*), el cual comprende 6 especies de microalgas pequeñas de morfología generalmente esférica que no pueden ser distinguidas unas de otras por métodos convencionales, sino por algunos métodos específicos como la microscopía [Chen et al., 2010].

Estas microalgas se caracterizan por mostrar un rápido crecimiento, tener una simple estructura que les permite fijar carbono utilizando la energía de la luz con alta eficiencia, por ser especialmente resistente a la contaminación (de hongos, levaduras, bacterias, virus, etc.) y por tener una mayor concentración de clorofila con respecto a otras especies como *N. gaditana* y *N. salina*.

Esta microalga también se caracteriza por su alta producción en ácidos grasos poliinsaturados, especialmente ácido eicosapentaenoico ( $C_{20:5}$ , EPA), que juegan un papel importante en la prevención de diversas enfermedades humanas [Vázquez, 2017].

## 2.3. Fotobiorreactor estudiado

El sistema estudiado para este trabajo es un fotobiorreactor de columna vertical con iluminación interna y un intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo microalgal del mismo. Este fotobiorreactor de acuerdo a [Jiménez, 2017] tiene las siguientes características generales:

Dimensiones: altura del recipiente de 1.50 m diámetro exterior de 0.30 m, cámara interna con 0.10 m de diámetro y una altura de 1.60 m, capacidad volumétrica de 80 m<sup>3</sup>.

Fuente de iluminación: Lámpara LED de  $12 \times 10^3$  lm, esta lámpara consiste en una estructura de aluminio sobre la que van montados 16 segmentos de 1.25 m de longitud de tiras LED de luz blanca a una temperatura de color de 6500 K.

### Actuadores del sistema:

- a) Sistema de inyección de CO<sub>2</sub>: Inyector de gases tipo *Venturi*, acoplado a un tubo de plástico transparente de 4 cm de diámetro y 1.3 m de largo.

- b) Rotámetro manual para gases: Cuenta con una válvula de aguja, con él es posible controlar el flujo de CO<sub>2</sub>.
- c) Presostato: Ajusta la presión de la línea de CO<sub>2</sub>.
- d) Sistema de enfriamiento tipo *chiller*.
- e) Como consideración en un aporte del diseño: Resistencia térmica inmersa en el recipiente del refrigerante la cual proporcione la capacidad de calentar al sistema.

A continuación, se presenta el diagrama del fotobiorreactor con la implementación del intercambiador de calor (Figura 2.1), en el cual se puede apreciar que el medio de cultivo se enfría por medio del refrigerante frío que pasa a través de dos tubos en “U”, para posteriormente regresar al recipiente de glicol y volver a recircularse.

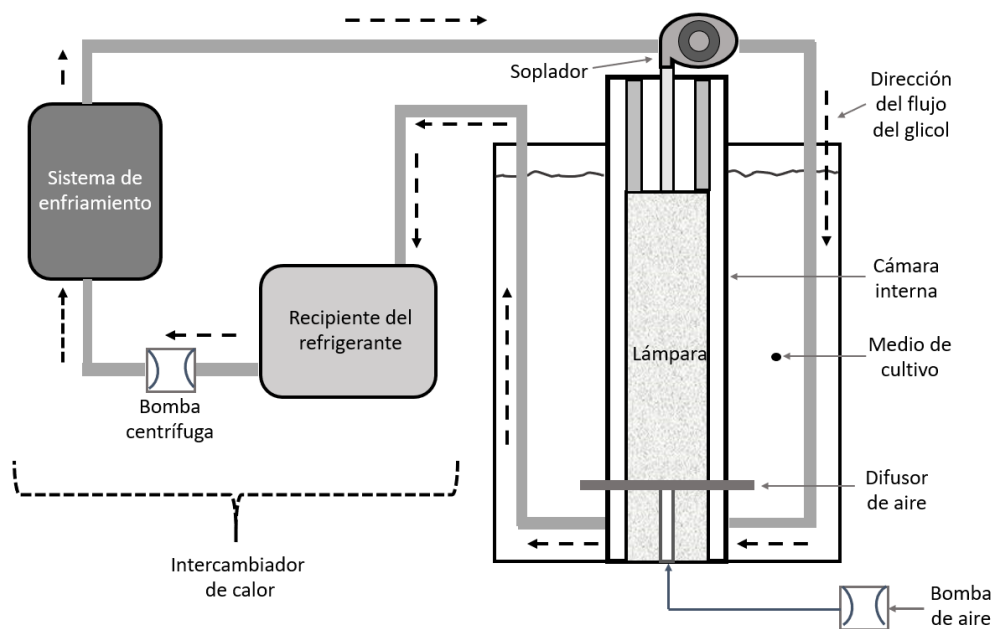


Figura 2.1 Diagrama general del Fotobiorreactor de columna vertical

### 2.3.1. Descripción de las variables y entradas del modelado del sistema

A continuación, en la tabla (2.2) se presenta de manera detallada los tipos de entradas (definidas como entradas manipuladas ubicadas en la parte central de la tabla y entradas exógenas ubicadas en el lado derecho de la misma) y variables de estado (conformadas por las temperaturas del sistema, así como de la tasa de crecimiento microalgal) del sistema que se consideran para el modelo matemático del fotobiorreactor de columna vertical estudiado.

Tabla 2.2 Entradas y variables de estado del fotobiorreactor.

<i>Variables de estado</i>	<i>Entradas manipuladas</i>	<i>Entradas exógenas</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Temperatura del medio de cultivo (<b>K</b>)</li> <li>• Temperatura del glicol a la salida del intercambiador (<b>K</b>)</li> <li>• Temperatura de la cámara interna (<b>K</b>)</li> <li>• Tasa de crecimiento microalgal (<math>\frac{\text{cel}}{\text{mL}}</math>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ciclo de trabajo de la lámpara</li> <li>• Ciclo de trabajo del soplador</li> <li>• Flujo del refrigerante del intercambiador</li> <li>• Temperatura del glicol a la entrada del intercambiador de calor (<b>K</b>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Temperatura del laboratorio (<b>K</b>)</li> </ul>

## 2.4. Conclusiones de capítulo

De acuerdo a la información recabada, la manera más viable de producir biomasa microalgal, radica en los dispositivos denominados fotobiorreactores, los cuales pueden ser del tipo abiertos o del tipo cerrado. Cada tipo de biorreactor presenta ciertas características propias que le dan un mayor enfoque a ciertos parámetros de la producción.

Lo anterior cobra mucha importancia, ya que existen gran cantidad de factores al considerar en el crecimiento celular de biomasa microalgal, los más comunes son la luminiscencia, el pH y la temperatura. Estos factores al presentar en medio de cultivo valores extremos provocan desde una inhibición del crecimiento hasta la muerte del cultivo.

Por estos motivos, es que en este estudio se hace un enfoque particular en los comportamientos de la microalgal *Nannochloropsis oculata*, bajo condiciones cambiantes de temperatura en el fotobiorreactor estudiado. Esto con la finalidad de maximizar la concentración celular de biomasa microalgal, con respecto a la temperatura. De acuerdo con la información presentada en este capítulo, la manera de alcanzar estos objetivos propuestos puede ser mediante la aplicación de metodologías de control térmico, las cuales al estar basadas en un modelo matemático permiten obtener mejores resultados en comparación con metodologías comunes que no están basadas en uno.

Por ello la importancia del desarrollo de un modelo matemático que sea representativo del sistema fotobiorreactor con el cual sea posible desarrollar aplicaciones de control térmico, así como estudios variados, referentes al comportamiento de la microalga con respecto a la temperatura.

Analizando la literatura, experiencia y trabajos previos del grupo de trabajo, así como estudios realizados por el TecNM (CENIDET e ITMAZ) e instituciones externas como La Universidad Politécnica de Sinaloa (UPSIN) y el Centro de Investigación en Alimentación y Desarrollo del estado de Sinaloa (CIAD), es que se consideró realizar pruebas en simulación de seguimiento de

trayectoria en el sistema, ya que la temperatura no solamente afecta el crecimiento microalgal, sino también las características de la microalga, como lo son la concentración de lípidos, la coloración, el sabor, entre otras propiedades de la microalga de gran importancia farmacéutica, nutricional, acuícola y bioenergética.

Por tanto, al garantizar que la estrategia de control térmico propuesta es capaz de seguir referencias de temperaturas variantes en el sistema, se promueven este tipo de estudios en la composición celular microalgal en este fotobiorreactor.

El sistema estudiado en este trabajo fue un fotobiorreactor tipo cerrado de columna vertical, el cual tiene un diseño particular al contar con iluminación interna y con un intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo. Si bien es cierto que cuenta con las características principales de este tipo de sistemas, la iluminación interna del sistema resulta ser de gran utilidad para el crecimiento microalgal debido a que se garantiza una iluminación adecuada a lo largo de todo el fotobiorreactor y con el intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo, es posible tener una temperatura controlada en todo el medio de cultivo durante todo el proceso de producción bajo las condiciones ambientales de la zona geográfica en donde se encuentra ubicado el sistema.

# Capítulo 3. Metodología del modelo matemático del sistema

---

## 3.1. Identificación de sistemas

Para la identificación de sistemas físicos existen gran cantidad de metodologías, pero todas estas metodologías están basadas en diversas estructuras de modelo, las cuales son los modelos de caja blanca, negra y gris, cada uno de ellos tiene diferentes enfoques de aplicación los cuales se describen a grandes rasgos en seguida:

- **Modelos de caja blanca:** Modelos en los cuales por medio de un amplio conocimiento del sistema se obtiene su representación matemática.
- **Modelos de caja negra:** Son modelos que se obtienen solamente con datos experimentales del sistema, por lo que no se cuenta con ningún conocimiento de la dinámica del sistema.
- **Modelos de caja gris:** Este tipo de modelos son un híbrido de los dos anteriores en estos se cuenta con un conocimiento general del sistema y con base a los datos experimentales es que se obtienen los valores de los parámetros del sistema mediante métodos de estimación paramétrica.

### 3.1.1. Modelos de caja gris

El modelado de caja gris es una técnica que combina los conocimientos físicos que se cuentan del sistema con respecto a datos experimentales recabados del mismo. Según [Madsen, 2017] el modelo de caja gris no necesariamente tiene que estar totalmente descrito por ecuaciones físicas, pero las ecuaciones y los parámetros deben ser físicamente interpretables.

Por medio de este tipo de modelado es posible formular fácilmente los modelos no lineales y no estacionarios, además de que los parámetros que no medibles, es posible estimarlos con lo cual el conocimiento físico disponible y las herramientas de modelado estadístico se combinan para realizar una estimación del sistema dinámico sumamente compleja [Madsen, 2017].

En este trabajo se utiliza la metodología de los modelos de caja gris para obtener la representación matemática del sistema. En la figura (3.1), se presenta la estructura básica de la metodología de los modelos de caja gris utilizada en este problema en general; cómo se puede apreciar la identificación está compuesta por dos partes importantes, la primera parte es la representación matemática del sistema, en ella se desarrollan las ecuaciones diferenciales tanto del subsistema térmico como del subsistema bioquímico, los cuales son producto de balances de energía del sistema, así como de ecuaciones de obtenidas de la literatura. La segunda parte del sistema está compuesta por la estimación paramétrica, en la cual con base a datos experimentales del sistema y a métodos de estimación de parámetros recursivos se estiman los valores de los parámetros del sistema. Por lo tanto, el conjunto de estas dos partes da como resultado una identificación del sistema del fotobiorreactor, la cual está desarrollada principalmente para fines de control de temperatura del sistema.

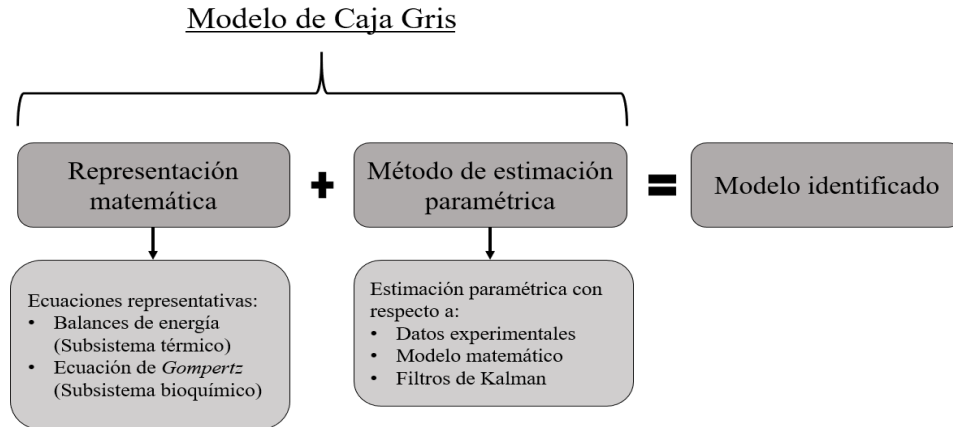


Figura 3.1 Estructura general de la identificación del fotobiorreactor.

### 3.2. Descripción general del problema del modelo matemático

El modelo matemático del sistema está dividido en dos partes importantes, la parte térmica y bioquímica del sistema, para obtener las representaciones de las temperaturas del sistema, así como del crecimiento de la microalga, se desarrollan balances de energía y se adapta la ecuación de crecimiento logístico, con la cual es posible modelar el crecimiento de la microalga con respecto a la temperatura del medio de cultivo microalgal.

La figura (3.2) muestra la estructura para el desarrollo del modelo matemático del fotobiorreactor, el modelado está dividido de acuerdo a dos subsistemas, el térmico y el bioquímico. El subsistema térmico está compuesto por tres temperaturas, la temperatura de la cámara interna ( $T_{ch}$ ), la temperatura del medio de cultivo microalgal ( $T_w$ ) y la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor ( $T_e$ ). El subsistema bioquímico está compuesto únicamente por la concentración celular ( $X$ ).

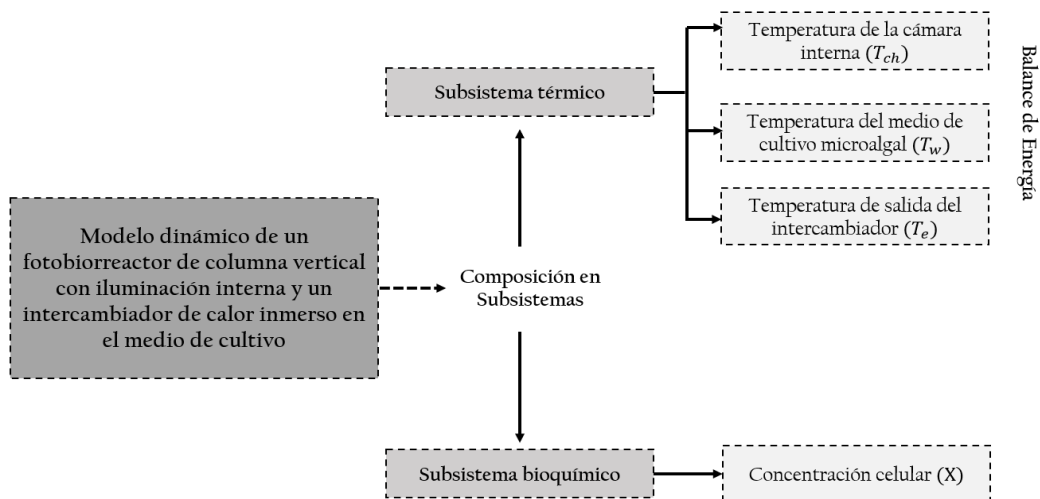


Figura 3.2 Estructura del modelo dinámico del fotobiorreactor.



### 3.3. Consideraciones para el modelo matemático del sistema

- El aire en la cámara interior y el agua en la cámara exterior están bien mezclados, es decir, que no existen gradientes de temperatura.
- Para un flujo de aireación fijo, la conductancia térmica interfacial entre el medio líquido y las burbujas permanece constante.
- Se considera una temperatura del laboratorio constante, debido al sistema de aire acondicionado con que se cuenta.
- Se considera a la temperatura del intercambiador de calor como la temperatura de salida del mismo.
- La pérdida de calor por evaporación es despreciable en fotobiorreactores [Fernández et al. 2013].
- El calor radiado por la lámpara es completamente absorbido por el volumen de agua.
- La lámpara puede ser vista como un elemento estático generador de calor.
- El aire puede ser tratado como un gas ideal bajo presión constante.
- Las capacidades caloríficas específicas son constantes.
- La variación de densidad en el agua es despreciable.
- El calor metabólico de la microalga es despreciable.

### 3.4. Modelado del subsistema térmico

El modelo matemático de subsistema térmico del fotobiorreactor está compuesto por tres temperaturas las que son consideradas como estados del sistema:

- a) La temperatura de la cámara interna ( $T_{ch}$ ) que es aquella donde está situado el sistema de iluminación interna del sistema.
- b) La temperatura del medio de cultivo ( $T_w$ ), que es el medio acuoso donde se cultiva el alga.
- c) La temperatura promedio del glicol a la salida del intercambiador de calor ( $T_e$ ), la cual es la temperatura del fluido refrigerante a la salida de la tubería del intercambiador de calor que está inmersa en el medio de cultivo.

En el modelo matemático se consideran dos entradas exógenas (la temperatura del medio ambiente ( $T_r$ ) y el efecto *stack*) y dos entradas manipuladas (la temperatura del intercambiador de calor a la entrada ( $T_{ein}$ ) y el porcentaje de apertura de la válvula de entrada del refrigerante ( $o_e$ )). En la figura (3.3) se representa las interacciones de las temperaturas y las entradas del fotobiorreactor.

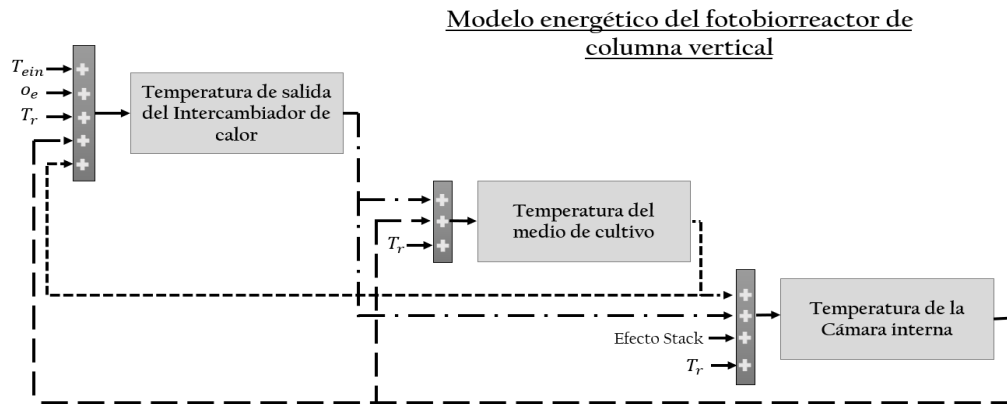


Figura 3.3 Modelo energético del Fotobiorreactor de columna vertical.

### 3.4.1. Balances de energía del fotobiorreactor

*“La energía acumulada en un sistema en específico es producto de la transferencia de energía hacia el sistema por el límite del mismo, menos la transferencia de energía del sistema por el límite del mismo, más la generación de la energía del sistema, menos el consumo de energía dentro del sistema” [Calderón, 2016].*

Para desarrollar los balances de energía del fotobiorreactor se procedió a seccionar el sistema en varios subsistemas, los subsistemas analizados son los siguientes:

- Iluminación interna del fotobiorreactor (lámpara).
- Cámara interna del fotobiorreactor.
- Medio de cultivo de microalga
- Intercambiador de calor.

En la figura (3.4) se representa las ecuaciones de base para cada uno de los balances de energía realizados en el sistema del fotobiorreactor. En estas ecuaciones se considera la tasa de cambio con respecto al tiempo del calor emitido en cada subsistema. Como se puede apreciar se presentan cuatro ecuaciones diferenciales, la del calor en la lámpara de fotobiorreactor, el calor en la cámara interna de sistema, el calor del medio de cultivo de las microalgal y el calor del glicol a la salida del intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo.

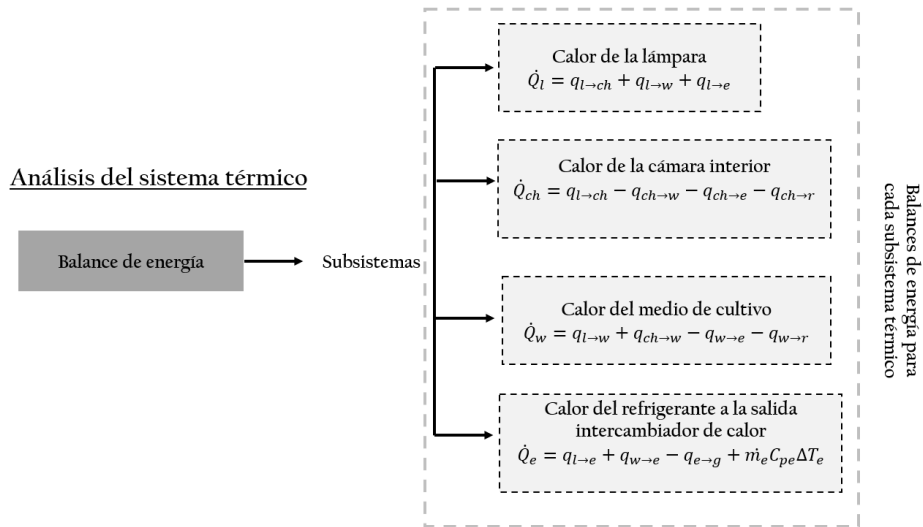


Figura 3.4 Análisis del sistema térmico.

**Interacciones térmicas del sistema**

Para el desarrollo de cada uno de los balances de energía considerados en el sistema, se estudió cada una de las interacciones de calor ( $q$ ) entre cada uno de los componentes del sistema. En la figura (3.5), se muestra el diagrama correspondiente de las interacciones de calor del fotobiorreactor, en él se representa una vista aumentada del sistema en la que las flechas indican la dirección de cada interacción de calor y las flechas que se presentan como subíndices de cada interacción de calor representa el sentido de la interacción que se presenta entre los componentes analizados.

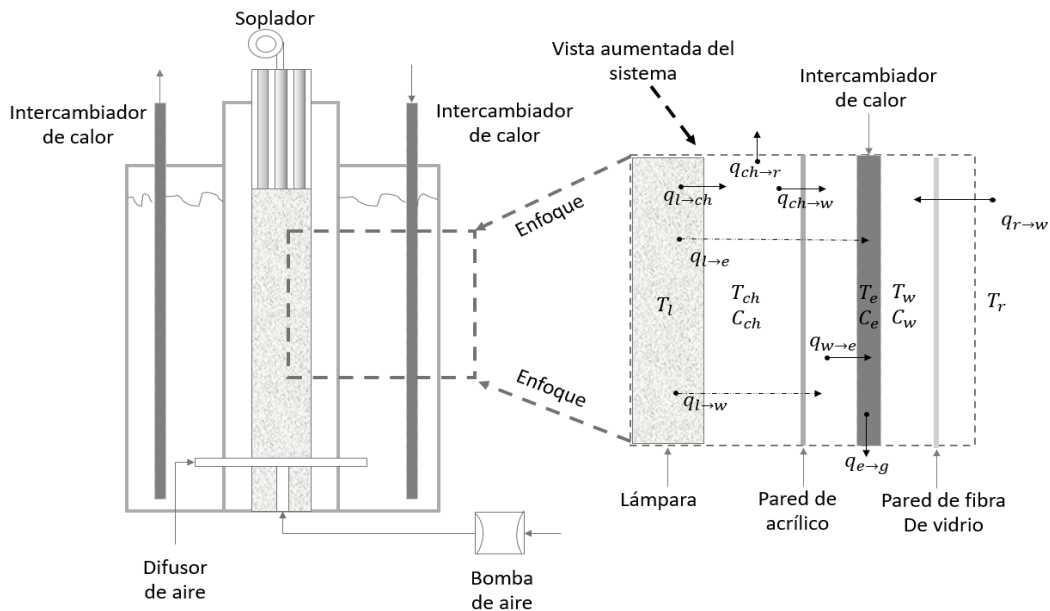


Figura 3.5 Interacciones térmicas del Fotobiorreactor.

### ***Balance de energía para la lámpara***

El balance de energía del subsistema de la lámpara tiene como ecuación de base, la energía acumulada de la lámpara, que está representada de la siguiente manera:

$$\dot{Q}_l = q_{l \rightarrow ch} + q_{l \rightarrow w} + q_{l \rightarrow e} \quad (3.1)$$

Donde el calor generado en los diferentes apartados se obtiene de la siguiente manera,  $q_{l \rightarrow ch}$ : Convección;  $q_{l \rightarrow w}$ : Radiación;  $q_{l \rightarrow e}$ : Radiación.  $q_l$  es el calor total generado por la lámpara y está relacionado con el ciclo de trabajo de la lámpara  $u_l \in \{0,1\}$  y la potencia efectiva de la lámpara convertida en calor  $P_l$ . Por lo tanto, se puede representar de la siguiente manera:

$$q_l = P_l u_l \quad (3.2)$$

El flujo por radiación  $q_{l \rightarrow w}$  y  $q_{l \rightarrow e}$ , depende de la temperatura de la lámpara  $T_l$ , de la temperatura del aire contenido en la cámara interior  $T_{ch}$  y de la temperatura del intercambiador de calor  $T_e$ , por lo que puede ser aproximada por la siguiente relación [Marín, 2009]:

$\forall q_{l \rightarrow w}$ :

$$q_{l \rightarrow w} = \sigma \varepsilon_l A_l (T_l^4 - T_{ch}^4) \approx 4\sigma \varepsilon_l A_l T_{ch}^3 (T_l - T_{ch}) \quad (3.3)$$

$\forall q_{l \rightarrow e}$ :

$$q_{l \rightarrow e} = \sigma \varepsilon_l A_l (T_l^4 - T_e^4) \approx 4\sigma \varepsilon_l A_l T_e^3 (T_l - T_e) \quad (3.4)$$

Por lo tanto, la ecuación del total generado por la lámpara puede reescribirse como:

$$P_l u_l = G_{l|ch} (T_l - T_{ch}) + 4\sigma \varepsilon_l A_l T_{ch}^3 (T_l - T_{ch}) + 4\sigma \varepsilon_l A_l T_e^3 (T_l - T_e) \quad (3.5)$$

Al no tener disponible la medición de la temperatura de la lámpara, es necesario realizar un despeje con respecto a la ecuación (3.6) para obtener la temperatura de la lámpara, con lo cual se obtiene la siguiente ecuación:

$$T_l = \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^4 + T_e^4)}{G_{l|ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^3 + T_e^3)} \quad (3.6)$$

### ***Balance de energía para la cámara interior***

El análisis para el balance de energía se realiza de manera análoga como en [Aketounane et al, 2016]. El calor es transferido al volumen de agua a través de la pared de acrílico ( $q_{ch \rightarrow w}$ ), el calor es transportado al intercambiador de la misma manera ( $q_{ch \rightarrow e}$ ) y es transferido al exterior ( $q_{ch \rightarrow r}$ ) por un flujo de aire ( $F_{ch}$ ):

$$\dot{Q}_{ch} = q_{l \rightarrow ch} - q_{ch \rightarrow w} - q_{ch \rightarrow r} \quad (3.7)$$

Donde el calor generado en los diferentes apartados se da de la siguiente manera,  $q_{l \rightarrow ch}$ : Convección;  $q_{ch \rightarrow w}$ : Conducción;  $q_{ch \rightarrow r}$ : Convección.

$$C_{ch} \dot{T}_{ch} = \rho_{ch} V_{ch} c_a \dot{T}_{ch} = G_{l|ch} (T_l - T_{ch}) - G_{ch|w} (T_{ch} - T_w) - c_a F_{ch} (T_{ch} - T_r) \quad (3.8)$$

El flujo másico total que pasa a través de la cámara interior ( $F_{ch}$ ), es producto de la suma del flujo producido cuando el soplador de enfriamiento es activado ( $F_b$ ) y del flujo relacionado al efecto “Stack” (flujo activado por flotabilidad)  $F_s$ , que ocurre por la diferencia de temperaturas que existe entre el aire de la cámara interior y el aire del laboratorio:

$$F_{ch} = u_b F_b + F_s \quad (3.9)$$

Donde:  $u_b$  es el ciclo de trabajo del soplador  $u_b \in \{0,1\}$ , y  $F_s$  está dado por la siguiente relación algebraica [Etheridge, 2011]:

$$F_s = \rho_{ch} C^d \left( \frac{g H_{ch} |T_{ch} - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

Despejando la temperatura de la cámara interior de la ecuación (3.8) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\dot{T}_{ch} = \frac{G_{l|ch}}{C_{ch}} (T_l - T_{ch}) - \frac{G_{ch|w}}{C_{ch}} (T_{ch} - T_w) - \frac{c_a}{C_{ch}} \left( u_b F_b + \rho_{ch} C^d \left( \frac{g H_{ch} |T_{ch} - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (T_{ch} - T_r) \quad (3.11)$$

### ***Balance de energía del medio de cultivo***

Debido a la transferencia de calor del agua hacia las burbujas de aire generadas por el compresor de aire por medio de convección, el calor del agua se transfiere hacia el intercambiador de calor y al aire del laboratorio. Entonces la ecuación de balance de energía para el volumen de agua es:

$$\dot{Q}_w = q_{l \rightarrow w} + q_{ch \rightarrow w} - q_{w \rightarrow e} + q_{r \rightarrow w} \quad (3.12)$$

Donde el calor generado en los diferentes apartados se da como:  $q_{l \rightarrow w}$ : Radiación;  $q_{ch \rightarrow w}$ : Conducción;  $q_{w \rightarrow e}$ : Conducción y  $q_{r \rightarrow w}$ : Convección.

La ecuación en términos de temperatura se reescribe como:

$$C_w \dot{T}_w = 4\sigma \varepsilon_l A_l T_{ch}^3 (T_l - T_{ch}) + G_{ch|w} (T_{ch} - T_w) - G_{w|e} (T_w - T_e) + G_{r|w} (T_r - T_w) \quad (3.13)$$

Despejando la temperatura del medio de cultivo de la ecuación (3.13) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\dot{T}_w = \frac{4\sigma \varepsilon_l A_l T_{ch}^3}{C_w} (T_l - T_{ch}) + \frac{G_{ch|w}}{C_w} (T_{ch} - T_w) + \frac{G_{w|e}}{C_w} (T_w - T_e) + \frac{G_{r|w}}{C_w} (T_r - T_w) \quad (3.14)$$

### ***Balance de energía para el intercambiador de calor, Análisis respecto a [Verdeza et al, 2016]***

La energía acumulada en el subsistema del intercambiador de calor está dada como:

$$\dot{Q}_e = q_{l \rightarrow e} + q_{w \rightarrow e} - o_e F_e C_{pe} \Delta T_e \quad (3.15)$$

Donde el calor generado en los diferentes apartados se da como:  $q_{l \rightarrow e}$ : Radiación;  $q_{w \rightarrow e}$ : Conducción y  $o_e F_e C_{pe} \Delta T_e$ : es la relación del flujo másico y del calor específico con respecto a una diferencia de temperatura del glicol entre la entrada y la salida de la tubería del intercambiador de calor dada por:

$$\Delta T_e = T_{eout} - T_{ein} \quad (3.16)$$

Sí:

$$\dot{Q}_e = C_e \dot{T}_e \quad (3.17)$$

Sustituyendo:

$$C_e \dot{T}_e = G_{l|e} (T_l - T_e) + G_{w|e} (T_w - T_e) - o_e F_e C_{pe} \Delta T_e \quad (3.18)$$

Por tanto, la ecuación de la temperatura promedio del glicol a la salida de la tubería del intercambiador de calor es:

$$\dot{T}_e = \frac{G_{l|e}}{C_e} (T_l - T_e) + \frac{G_{w|e}}{C_e} (T_w - T_e) - o_e \frac{F_e C_{pe}}{C_e} (T_{eout} - T_{ein}) \quad (3.19)$$

### 3.4.2. Modelo dinámico de las temperaturas del fotobiorreactor

Debido a que no se tiene disponible la temperatura de la lámpara, la ecuación (3.6) se sustituye en las ecuaciones de la temperatura de la cámara interna (3.11), la temperatura del medio de cultivo (3.14) y la temperatura promedio del glicol a la salida de la tubería del intercambiador de calor (3.19), por lo tanto, el modelo dinámico del subsistema térmico del fotobiorreactor queda de la siguiente manera:

#### Ecuaciones diferenciales del subsistema térmico

$$\dot{T}_{ch} = \frac{G_{l|ch}}{C_{ch}} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^4 + T_e^4)}{G_{l|ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^3 + T_e^3)} \right) - T_{ch} \right) - \frac{G_{ch|w}}{C_{ch}} (T_{ch} - T_w) - \frac{ca}{C_{ch}} \left( u_b F_b + \rho_{ch} C^d \left( \frac{g H_{ch} |T_{ch} - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (T_{ch} - T_r) \quad (3.20)$$

$$\dot{T}_w = \frac{4\sigma \varepsilon_l A_l T_{ch}^3}{C_w} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^4 + T_e^4)}{G_{l|ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^3 + T_e^3)} \right) - T_{ch} \right) + \frac{G_{ch|w}}{C_w} (T_{ch} - T_w) + \frac{G_{w|e}}{C_w} (T_w - T_e) + \frac{G_{r|w}}{C_w} (T_r - T_w) \quad (3.21)$$

$$\dot{T}_e = \frac{G_{l|e}}{C_e} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^4 + T_e^4)}{G_{l|ch} + 4\sigma \varepsilon_l A_l (T_{ch}^3 + T_e^3)} \right) - T_e \right) + \frac{G_{w|e}}{C_e} (T_w - T_e) - o_e \frac{F_e C_{pe}}{C_e} (T_{eout} - T_{ein}) \quad (3.22)$$

### 3.4.3. Modelo dinámico reducido de las temperaturas del fotobiorreactor

Considerando que existe una gran cantidad de parámetros no medibles, es necesario reducir este número de parámetros, esto con la finalidad de realizar una futura estimación paramétrica del subsistema térmico, por lo que se plantea una reducción del modelo de este subsistema del fotobiorreactor con la finalidad de contar con un menor número de parámetros no medibles en el modelo matemático y sea posible facilitar la estimación paramétrica del subsistema.

#### *Justificación de la reducción del modelo matemático del fotobiorreactor*

Considerando un valor de emisividad para lámparas incandescentes  $\varepsilon = 0.35$  (Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, 2016), y con respecto a la Ley de Stefan Boltzmann para lámparas incandescentes (3.23):

$$P = \varepsilon\sigma A_s T_l^4 \quad (3.23)$$

Donde:  $P$  es la potencia real,  $\varepsilon$  es la emisividad,  $A_s$  es el área de superficie de la lámpara,  $T$  es la temperatura de color de la lámpara y  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} Jm^{-2}s^{-1}K^{-4}$  es la constante de Stefan Boltzmann.

*Consideraciones:* De acuerdo a la escala de temperaturas de color, para un color blanco azulado en un led, la temperatura del color de la lámpara LED es de  $T_l = 6500 K$ .

Por lo que considerando que la lámpara trabaja a un 78.43%, la temperatura de color de la lámpara esta dado por:

$$T_l = \frac{\begin{matrix} 6500K \rightarrow 100\% \\ T_l \rightarrow 78.43\% \\ (6500K)(78.43\%) \\ 100\% \end{matrix}}{T_l = 5098.03K} \quad (3.24)$$

Obteniendo el área superficial de la lámpara:

$$A_s = \frac{P}{\varepsilon\sigma T_l^4} \quad (3.25)$$

$$A_s = 1.0117 \times 10^{-4} m^2$$

Sustituyendo los valores numéricos anteriormente calculados con respecto a la ecuación (3.25), sin considerar aún ninguna temperatura de color, tenemos como resultado lo siguiente:

$$4\sigma\varepsilon A_s = 8.031 \times 10^{-12} Js^{-1}K^{-4} \quad (3.26)$$

Considerando la temperatura del color de la lámpara el resultado de la potencia generada es la siguiente:

$$P = 4.094 \times 10^{-8} Js^{-1} \quad (3.27)$$

Por lo que considerando los valores de los colores de la cámara interior y del intercambiador de calor, los valores de la potencia real serán demasiado pequeños como para representar un cambio significativo en la dinámica de la temperatura del sistema.

### Modelo dinámico reducido subsistema térmico

$$\dot{T}_{ch} = \frac{G_{l|ch}}{C_{ch}} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch}}{G_{l|ch}} \right) - T_{ch} \right) - \frac{G_{ch|w}}{C_{ch}} (T_{ch} - T_w) - \frac{c_a}{C_{ch}} \left( u_b F_b + \rho_{ch} C^d \left( \frac{g H_{ch} |T_{ch} - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (T_{ch} - T_r) \quad (3.28)$$

$$\dot{T}_w = \frac{G_{ch|w}}{C_w} (T_{ch} - T_w) + \frac{G_{w|e}}{C_w} (T_w - T_e) + \frac{G_{r|w}}{C_w} (T_r - T_w) \quad (3.29)$$

$$\dot{T}_e = \frac{G_{l|e}}{C_e} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch}}{G_{l|ch}} \right) - T_e \right) + \frac{G_{w|e}}{C_e} (T_w - T_e) - o_e \frac{F_e C_{pe}}{C_e} (T_{eout} - T_{ein}) \quad (3.30)$$

## 3.5. Modelado del subsistema bioquímico

La concentración celular en el medio de cultivo del fotobiorreactor, es calculada mediante la ecuación de crecimiento de bacteriano de *Gompertz*, con la cual se relaciona el crecimiento microalgal con respecto a la concentración celular máxima del cultivo y la velocidad de crecimiento específico del cultivo.

La ecuación (3.31), representa la representación matemática de la dinámica de dicha concentración con respecto al tiempo.

$$\dot{X} = \alpha + X_{max} e^{-\beta e^{-\mu t}} \quad (3.31)$$

Donde  $X$  es la concentración celular del cultivo a lo largo del tiempo,  $X_{max}$  es la concentración celular máxima del cultivo,  $t$  es el tiempo de experimentación,  $\alpha$  al igual que  $\beta$  son parámetros de ajuste del modelo.

### 3.5.1. Concentración celular máxima con respecto a la temperatura de medio de cultivo

La concentración celular máxima de cultivo microalgal depende de los efectos de la temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor, por lo que dicha relación es representada por medio de una función gaussiana (ecuación 3.32).

$$X_{max} = \gamma + \varphi e^{-\left(\frac{(T_w - \sigma)^2}{2\theta^2}\right)} \quad (3.32)$$

Donde  $T_w$  es la temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\sigma$  y  $\theta$  son parámetros de ajuste de la concentración celular máxima.



### 3.5.2. Representación matemática del subsistema bioquímico

La representación matemática del subsistema bioquímico del fotobiorreactor estudiado está compuesta por una ecuación diferencial de la concentración celular microalgal producida en el sistema y una relación algebraica de la concentración celular máxima del cultivo con respecto a la temperatura del medio de cultivo de fotobiorreactor.

Por tanto, el modelo dinámico del subsistema bioquímico queda definido como se presenta en las ecuaciones (3.33 – 3.34).

#### Modelo dinámico del subsistema bioquímico

$$\dot{X} = \alpha + X_{max} e^{-\beta e^{-\mu t}} \quad (3.33)$$

Relaciones algebraicas:

$$X_{max} = \gamma + \varphi e^{-\left(\frac{(T_w - \sigma)^2}{2\theta^2}\right)} \quad (3.34)$$

### 3.6. Modelo matemático del sistema fotobiorreactor

Agrupando el modelo matemático reducido de la dinámica del subsistema térmico y la del subsistema bioquímico se obtiene la representación final del modelo matemático del sistema fotobiorreactor de columna vertical estudiado representado en las ecuaciones (3.35 – 3.39).

#### Modelo dinámico reducido subsistema térmico

$$\dot{T}_{ch} = \frac{G_{l|ch}}{C_{ch}} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch}}{G_{l|ch}} \right) - T_{ch} \right) - \frac{G_{ch|w}}{C_{ch}} (T_{ch} - T_w) - \frac{c_a}{C_{ch}} \left( u_b F_b + \rho_{ch} C^d \left( \frac{g H_{ch} |T_{ch} - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (T_{ch} - T_r) \quad (3.35)$$

$$\dot{T}_w = \frac{G_{ch|w}}{C_w} (T_{ch} - T_w) + \frac{G_{w|e}}{C_w} (T_w - T_e) + \frac{G_{r|w}}{C_w} (T_r - T_w) \quad (3.36)$$

$$\dot{T}_e = \frac{G_{l|e}}{C_e} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{l|ch} T_{ch}}{G_{l|ch}} \right) - T_e \right) + \frac{G_{w|e}}{C_e} (T_w - T_e) - o_e \frac{F_e C_{pe}}{C_e} (T_{eout} - T_{ein}) \quad (3.37)$$

#### Modelo dinámico del subsistema bioquímico

$$\dot{X} = \alpha + X_{max} e^{-\beta e^{-\mu t}} \quad (3.38)$$

Relaciones algebraicas:

$$X_{max} = \gamma + \varphi e^{-\left(\frac{(T_w - \sigma)^2}{2\theta^2}\right)} \quad (3.39)$$

### 3.7. Espacio de estados no lineal del modelo matemático.

La ecuación (3.40), presenta la representación no lineal del sistema en espacio de estados del sistema fotobiorreactor, como se puede apreciar se consideran cuatro estados del sistema los cuales son las temperaturas del fotobiorreactor y la concentración celular de la biomasa en el medio de cultivo. Para esta representación de espacio de estados no lineal se hace un cambio en la nomenclatura de los estados, con la finalidad de que estos queden representados por un vector de estados ( $x$ ). Donde  $x_1$  es la temperatura de la cámara interna de sistema,  $x_2$  es la temperatura del medio de cultivo,  $x_3$  es la temperatura del refrigerante a la salida del intercambiador y  $x_4$  es la concentración celular de la biomasa microalgal. Para este estudio en particular solamente se considera a la temperatura del medio de cultivo como una salida del sistema, la cual está representado en la función  $y(\cdot)$ .

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{G_{lch}}{C_{ch}} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{lch} x_1}{G_{lch}} \right) - x_1 \right) - \frac{G_{ch|w}}{C_{ch}} (x_1 - x_2) - \frac{c_a}{C_{ch}} \left( u_b F_b + \rho_{ch} C^d \left( \frac{g H_{ch} |x_1 - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (x_1 - T_r) \\ \dot{x}_2 = \frac{G_{ch|w}}{C_w} (x_1 - x_2) + \frac{G_{w|e}}{C_w} (x_2 - x_3) + \frac{G_{r|w}}{C_w} (T_r - x_2) \\ \dot{x}_3 = \frac{G_{le}}{C_e} \left( \left( \frac{P_l u_l + G_{lch} x_1}{G_{lch}} \right) - x_3 \right) + \frac{G_{w|e}}{C_e} (x_2 - x_3) - o_e \frac{F_e C_{pe}}{C_e} (x_3 - T_{ein}) \\ \dot{x}_4 = \alpha + X_{max} e^{-\beta e^{-\mu t}} \\ X_{max} = \gamma + \varphi e^{-\frac{(x_2 - \sigma)^2}{2\theta^2}} \\ y = h(x, u) = x_2 \end{cases} \quad (3.40)$$

### 3.8. Conclusiones del capítulo

Basado en lo resultados presentes en este capítulo, se logró desarrollar un modelo matemático general de un fotobiorreactor, en el cual se consideran la parte térmica y bioquímica del sistema. Esta representación matemática del sistema está compuesta por cuatro ecuaciones diferenciales y una relación algebraica.

Al seccionar el sistema fotobiorreactor en dos subsistemas (el térmico y el bioquímico), fue posible determinar mediante balances de energía la relación que existe entre las temperaturas del sistema (con respecto al subsistema térmico). Mediante la ecuación de crecimiento de *Gompertz* se logra modelar el comportamiento de la concentración celular con respecto al tiempo (con respecto al subsistema bioquímico). Y como un aspecto resaltable, al considerar la relación algebraica propuesta de la concentración celular máxima con respecto a la temperatura del medio de cultivo es que se logra amalgamar tanto el análisis térmico como el bioquímico en uno sólo, dando como resultado final el modelo matemático propuesto del fotobiorreactor. Ya que es gracias a esta relación algebraica es que existe la correlación entre la temperatura y la concentración celular.

Concluyendo, se logró desarrollar un modelo matemático general del fotobiorreactor que es aplicable para fines de control, además de fungir como estructura general a este tema de tesis. Con el modelo propuesto, se logra una aportación de gran valor para estudios generales de modelado matemático. Dejando como base una metodología para el desarrollo de modelos matemáticos referentes a este tipo de sistemas de fotobiorreactores que tienen características peculiares con respecto a los demás.

## Capítulo 4. Metodología de estimación

### 4.1. Estimación de la concentración microalgal

La estimación de parámetros del modelo matemático para el subsistema bioquímico fue obtenida de manera heurística, con respecto a una base de datos experimentales de la concentración celular del fotobiorreactor estudiado y el modelo matemático del subsistema bioquímico desarrollado en la sección anterior.

La estimación se considera heurística ya que se utilizó la herramienta de regresiones no lineales del software Matlab, en la que las condiciones iniciales de estimación se obtuvieron a prueba y error hasta obtener un buen ajuste de la estimación, por lo que no se utilizó ningún método de ajuste para dichos valores de las condiciones iniciales. El algoritmo utilizado por Matlab es está basado en el método “Trust-Region”.

#### 4.1.1. Datos experimentales de la concentración microalgal

La figura (4.1), representa la base de datos de la concentración celular de la microalga *Nannochloropsis oculata* de acuerdo a [Águila M., 2018]. Dicha figura presenta cinco experimentos de concentración celular en el fotobiorreactor estudiado. El color azul representa la dinámica de la concentración celular a una temperatura de 291.15 K (18°C), el color rojo considerando la temperatura de 293.15 K (20°C), el color amarillo considerando la temperatura de 295.15 K (22°C), el color morado considerando la temperatura de 297.15 K (24°C) y por último el color verde considerando la temperatura de 299.15 K (26°C).

Analizando los resultados presentados se demuestra que para el tipo de microalga estudiada el crecimiento celular se inhibe a temperaturas menores a partir de 291.15 K (18°C) y lo mismo ocurre a temperaturas mayores a partir de 299.15 K (26°C). Por otro lado, cuando la temperatura de medio se encuentra entre temperaturas de 293.15 K (20°C) a 297.15 K (24°C), la microalga alcanza su mayor crecimiento poblacional observable después de 25 horas de experimentación.

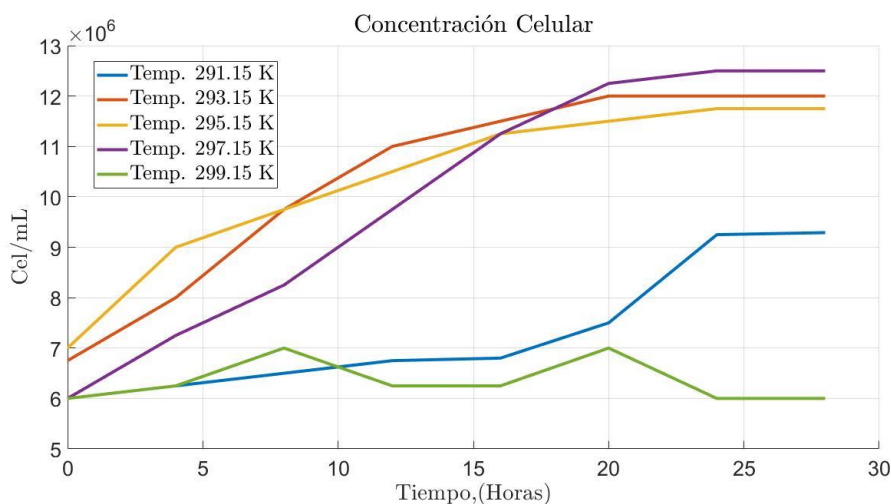


Figura 4.1 Datos experimentales del crecimiento microalgal, [Águila M., 2018].

## 4.1.2. Resultados de la estimación

### 4.1.2.1 Resultados de acuerdo al modelo matemático de la concentración celular

La figura (4.2), muestra los resultados de las estimaciones del subsistema bioquímico con respecto a los parámetros estimados para cada temperatura analizada (Tabla 4.2). El color azul representa la estimación de la concentración celular a una temperatura de 291.15 K (18 °C), el color rojo a una temperatura de 293.15 K (20 °C), el color amarillo para 295.15 K (22 °C), el color morado para 297.15 (24°C) y el color verde la representa para una temperatura de 299.15 K (26 °C). Como se puede apreciar, al igual que con los datos experimentales la concentración celular se comienza a inhibir a temperaturas menores de 293.15 K y a temperaturas mayores a 299.15 K. Encontrando sus valores de concentración máximos en un intervalo de temperatura de 293.15 a 297.15 K, para el caso de la microalga *Nannochloropsis oculata*.

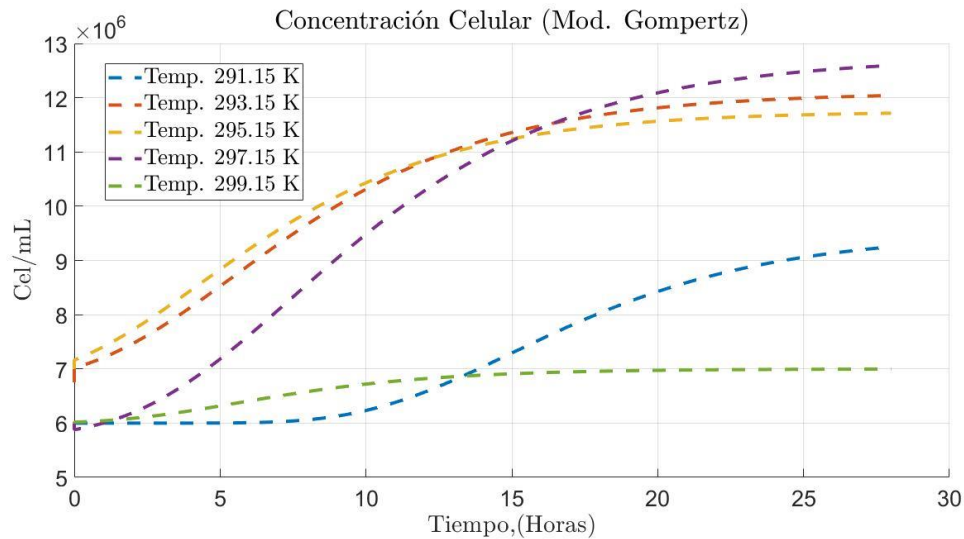


Figura 4.2. Estimaciones de la concentración celular.

La figura (4.3), es una comparativa de los datos reales de la concentración celular del fotobiorreactor estudiado con respecto a los resultados estimados del modelo matemático propuesto. Donde las líneas solidas representan los datos reales del sistema y las líneas discontinuas representan la estimación con base al modelo. El color azul representa la concentración celular a una temperatura de 291.15 K, el color rojo a 293.15 K, el amarillo a 295.15 K, el morado a 297.15 K y el verde a 299.15K.

Los mejores crecimientos reflejados por la concentración celular se presentan entre las temperaturas de 293.15 a 297.15 K, ya que en esta franja el comportamiento de la concentración celular del cultivo respecto al tiempo tiende a tomar una forma sigmoideal, la cual se obtiene mediante el modelado de *Gompertz* [Trinidad, 2014]. Para los datos que se encuentran fuera de este intervalo de temperaturas, el crecimiento celular no obtuvo los resultados adecuados debido a que el comportamiento de las concentraciones reales presentó una dinámica característica de inhibición de la división celular, que para los datos que se presentan, se ve reflejada en la fase de retardo de la concentración celular. En el caso de la concentración celular a 291.15 K esta se

mantiene casi constante hasta la hora 16, que es donde la velocidad de crecimiento se acelera y produce una pendiente pronunciada, pero en la hora 24 de experimentación la concentración celular llega a su punto máximo para esta temperatura. Para el caso de la curva de crecimiento celular a 299.15 K, ésta nunca llega a ser constante, teniendo etapas de incremento y decremento a lo largo de toda la experimentación. Por ello es que, en ambos casos, el modelo de *Gompertz* no puede tener una aproximación cercana de la concentración en dichos niveles de temperatura. Lo que confirma la inhibición del crecimiento celular típico, en este caso por efecto de las temperaturas extremas (291.15 y 299.15 K).

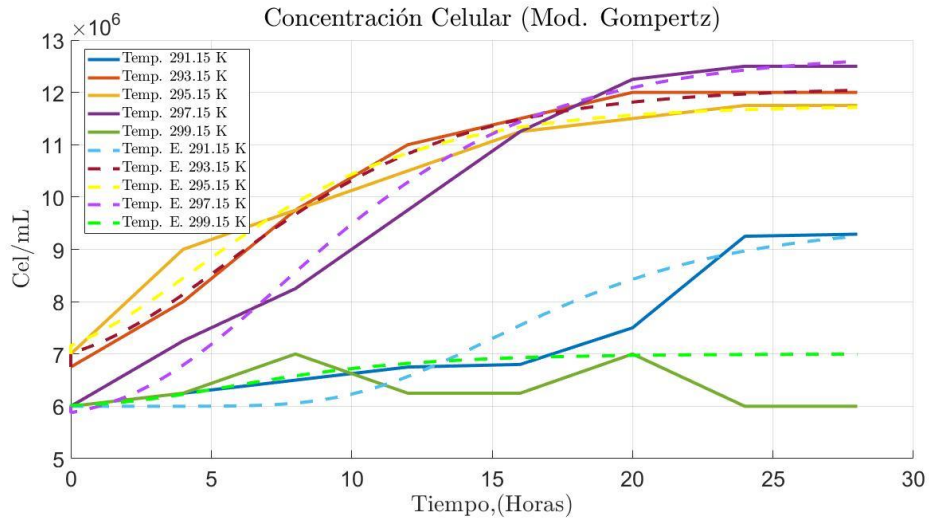


Figura 4.3 Comparativa de los datos experimentales vs los datos estimados de la concentración celular.

En la figura (4.4) se presenta la dinámica de los errores de las estimaciones realizadas, el color azul representa la dinámica del error con respecto a una temperatura de 291.15 K, el color rojo a 293.15 K, el amarillo a 295.15 K, el morado a 297.15 K y el verde a 299.15 K. Como ya se ha mencionado anteriormente los resultados de 293.15 a 297.15 K, tienden a llegar a cero, caso contrario sucede en los errores que se encuentran fuera de este margen.

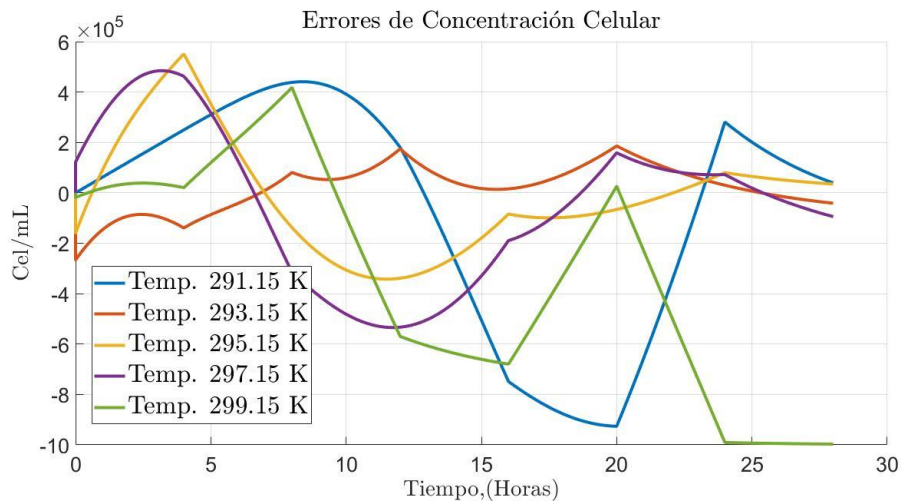


Figura 4.4 Dinámica del error de estimación de la concentración celular.

### 4.1.3. Índices de desempeño del modelo de crecimiento microalgal

La tabla (4.1), presenta los resultados de los índices de desempeño de la estimación de la concentración celular con respecto a los datos experimentales del fotobiorreactor estudiado a una temperatura variante que va de los 291.15 a los 299.15 K, con incremento de 2 grados por cada estimación experimental. Los índices de desempeño utilizados para este trabajo son los siguientes, la integral del error absoluto (IAE), la integral del tiempo por el error absoluto (ITAE), la integral del error cuadrático (ISE), la integral del tiempo por el error cuadrático (ITSE), la media del error cuadrático (MSE) y el error medio cuadrático (MCE).

Con respecto al error medio cuadrático (MCE) los resultados alcanzados con respecto a la temperatura de 293.15 K fueron los mejores obteniendo un valor de  $2.901 \times 10^6 \frac{cel}{mL}$ , caso contrario sucedió a una temperatura de 299.15 K donde el MCE fue de  $16.949 \times 10^6 \frac{cel}{mL}$ , debido al comportamiento tan inusual de la concentración celular en la experimentación bajo condiciones de inhibición por temperatura.

Tabla 4.1. Índices de desempeño de la estimación de concentración celular.

Temperatura (K)	IAE ( $1 \times 10^{10}$ )	ITAE ( $1 \times 10^{11}$ )	ISE ( $1 \times 10^{15}$ )	ITSE ( $1 \times 10^{17}$ )	MSE ( $1 \times 10^{14}$ )	MCE ( $1 \times 10^7$ )
291.15	1.0288	1.5443	5.8201	0.9497	2.0786	1.4417
293.15	0.2120	0.2535	0.2357	0.0258	0.0842	0.2901
295.15	0.4794	0.4752	1.3565	0.1065	0.4845	0.6960
297.15	0.6877	0.6991	2.5917	0.2365	0.9256	0.9621
299.15	1.1768	2.2244	8.0431	1.7067	2.8725	1.6949

### 4.1.4. Parámetros estimados del modelo de crecimiento microalgal

En la tabla (4.2) se presentan los resultados obtenidos de las estimaciones paramétricas con respecto a una temperatura variante. Los valores de temperatura considerados van de 291.15 a 299.15 K, presentando un incremento de dos grados por estimación. Los parámetros calculados son los parámetros de ajuste del modelo de *Gompertz*, los cuales son  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$ , de la ecuación (3.38).

Tabla 4.2. Parámetros estimados del modelo de concentración celular.

Temperatura (K)	$\alpha$	$\beta$	$\mu$
291.15	$6.00 \times 10^6$	20	0.20
293.15	$6.75 \times 10^6$	3	0.20
295.15	$6.75 \times 10^6$	2.5	0.21
297.15	$5.75 \times 10^6$	4.0	0.185
299.15	$6.00 \times 10^6$	4.0	0.25

Parámetros de ajuste de la ecuación de concentración celular máxima con respecto a la temperatura de la ecuación (3.39):

$$\gamma = 5.9 \times 10^6; \quad \varphi = 6.1 \times 10^6; \quad \sigma = 22; \quad \theta = 2.6$$

## 4.2. Observabilidad del sistema térmico del modelo no lineal del fotobiorreactor estudiado

Para el análisis de observabilidad del sistema no lineal del subsistema térmico del fotobiorreactor, es necesario contar con una representación matemática del sistema como se muestra en la ecuación (4.1):

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{cases} \dot{x}_1 = w_1 \left( \left( \frac{P_l u_l + w_2 x_1}{w_2} \right) - x_1 \right) - w_3 (x_1 - x_2) - w_4 \left( u_b F_b + \rho_{ch} w_5 \left( \frac{g H_{ch} |x_1 - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (x_1 - T_r) \\ \dot{x}_2 = w_6 (x_1 - x_2) + w_7 (x_2 - x_3) + w_8 (T_r - x_2) \\ \dot{x}_3 = w_9 \left( \left( \frac{P_l u_l + w_2 x_1}{w_2} \right) - x_3 \right) + w_{10} (x_2 - x_3) - o_e \frac{F_e C_{pe}}{w_{11}} (x_3 - T_{ein}) \\ y = h(x, u) = x_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Una vez que se cuenta con la representación no lineal de los estados y salidas del sistema se procede a obtener las derivadas parciales de las salidas del mismo (ecuación 4.2):

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} = [0, 1, 0]; \quad (4.2)$$

Para conocer si el sistema no lineal es observable, es necesario obtener la matriz de observabilidad del sistema no lineal, la cual es la derivada de una matriz del gradiente del sistema ( $dG$ ). Esta matriz es producto de las derivadas de Lie de alto orden del sistema.

Como el sistema estudiado cuenta con tres estados la matriz del gradiente queda representada de la siguiente manera (ecuación 4.3):

$$G = \begin{bmatrix} L_f^0 h \\ L_f^1 h \\ L_f^2 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ w_6 (x_1 - x_2) + w_7 (x_2 - x_3) + w_8 (T_r - x_2) \\ w_1 w_6 \left( \left( \frac{P_l u_l + w_2 x_1}{w_2} \right) - x_1 \right) - w_3 w_6 (x_1 - x_2) - \dots - w_7 \left( u_e \frac{F_e C_{pe}}{w_{11}} (x_3 - T_{ein}) \right) \end{bmatrix}; \quad (4.3)$$

Por lo tanto, la derivada de la matriz del gradiente está dada por la ecuación (4.4):

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_f^0 h}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f^0 h}{\partial x_2} & \frac{\partial L_f^0 h}{\partial x_3} \\ \frac{\partial L_f^1 h}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f^1 h}{\partial x_2} & \frac{\partial L_f^1 h}{\partial x_3} \\ \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x_1} & \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x_2} & \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x_3} \end{bmatrix}; \quad (4.4)$$

La matriz de observabilidad del sistema queda representada como se muestra en la ecuación (4.5):

$$Obs = \frac{\partial G}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ w_6 & -w_6 + w_7 - w_8 & -w_7 \\ -(conj(w_6))(w_3 + \dots + conj(w_8)) & w_3 w_6 + \dots - w_7 w_{10} & w_6 - w_7 + \dots - w_7 o_e \frac{F_e C_{pe}}{w_{11}} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Calculando el rango de la matriz de observabilidad del sistema no lineal del fotobiorreactor, la matriz acaba siendo de rango completo, lo que nos da como resultado que el sistema no lineal del fotobiorreactor es localmente observable.

Nota: Debido a que las derivadas de alto orden de Lie son bastante extensas en la matriz de observabilidad no se presentan de manera completas estas representaciones. Por ello los resultados de cada una derivada de Lie son presentados en la sección B de los apéndices.

### 4.3. Estimación del modelo térmico de sistema

La estimación del subsistema térmico del sistema está basada en los filtros de Kalman extendidos, de los cuales se realizó una comparativa entre un filtro de Kalman extendido y un filtro de Kalman extendido Dual. El proceso de estimación de parámetros es realizado mediante una base de datos real del sistema físico, donde se cuentan con las temperaturas de la cámara interna, del medio de cultivo microalgal y la del glicol a la salida del intercambiador de calor, además de contar con los valores de los parámetros medibles del sistema.

#### 4.3.1. Datos experimentales

A continuación, en las figuras (4.5 a 4.7) se presentan los datos recolectados del sistema en el periodo de noviembre del año 2018 ubicado en el municipio de Mazatlán del estado de Sinaloa, México.

##### 4.3.1.1 Datos de la temperatura de la cámara interna

En la figura (4.5), se representa el comportamiento de la temperatura de la cámara interna del fotobiorreactor. Los cambios bruscos de la temperatura son producto de la acción del ciclo de control del sistema de enfriamiento de la lámpara, este sistema de enfriamiento actúa como mecanismo de seguridad para evitar averías de la lámpara. El cual entra en funcionamiento al llegar a una temperatura de 319 K en la cámara interna del fotobiorreactor.



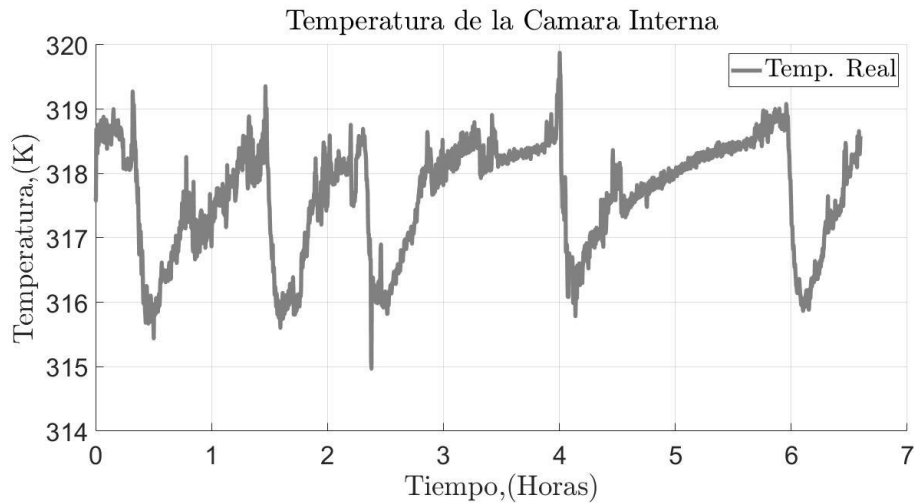


Figura 4.5 Datos experimentales de la temperatura de la cámara interna.

#### 4.3.1.2 Datos de la temperatura del medio de cultivo microalgal

En la figura (4.6) se muestra el comportamiento de la temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor, debido a la acción de control *ON-OFF* del sistema de enfriamiento, donde se puede observar que la temperatura del medio oscila entre 292 a 294 K.

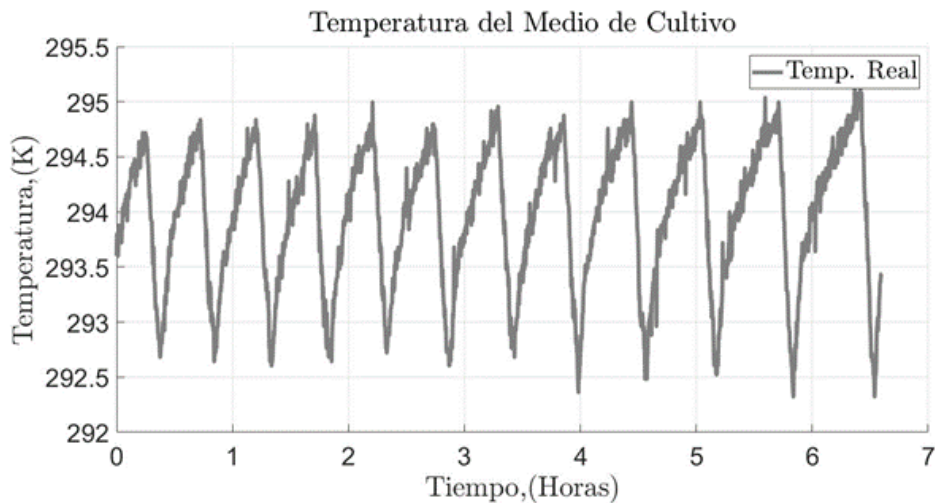


Figura 4.6 Datos experimentales de la temperatura del medio de cultivo microalgal.

#### 4.3.1.3 Datos de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor

En la figura (4.7) se presenta el comportamiento de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor. La cual tiene un comportamiento similar al de la temperatura del medio de cultivo. El comportamiento presentado es debido a que entre estas dos temperaturas el

intercambio de calor producido presenta una gran inferencia sobre la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor.

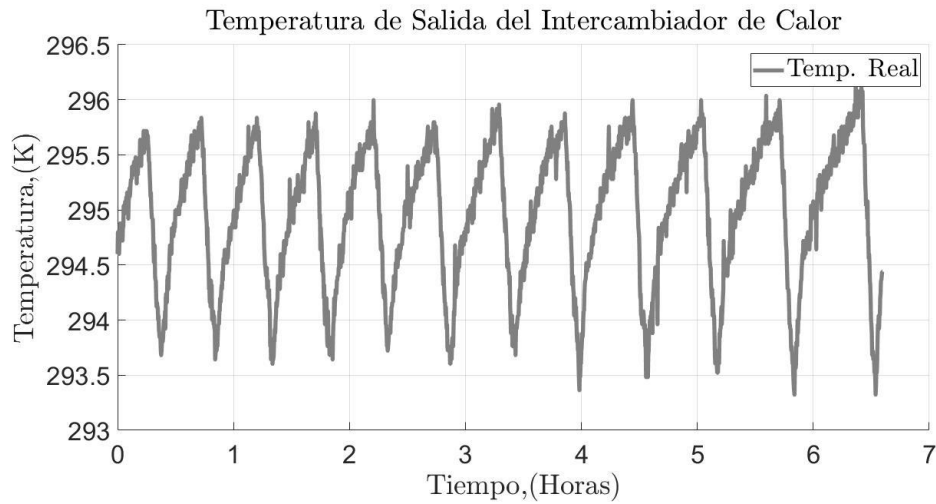


Figura 4.7 Datos experimentales de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor.

### 4.3.2. Filtros de Kalman

Los filtros de Kalman son métodos recursivos utilizados para estimar el comportamiento dinámico del sistema con base a una serie de señales con ruidos [Popa, 2008]. “El objetivo del filtro de Kalman es minimizar el error cuadrático medio entre los datos reales y estimados. Por lo tanto, proporciona la mejor estimación de los datos en el sentido de error cuadrático medio” [Simon, 2006]. Este tipo de filtro es aún óptimo para diversos tipos de sistemas en donde el ruido no es necesariamente gaussiano, para este tipo de casos se considera que el filtro es un estimador linealmente óptimo [Popa, 2008].

Los filtros de Kalman no solamente se utilizan para estimación de estados, sino también para estimaciones de los pesos de los parámetros del sistema que no puedan ser medibles o no se encuentre disponibles en el sistema. Por las razones anteriormente expuestas es que se conoce como un método para establecer un conjunto de parámetros del sistema en base a una técnica de mínimos cuadrados recursivos (RLS, *Recursive Least Squares*), [R. Sirisha and Pant, 2010].

Existen una gran cantidad de variantes del filtro de Kalman, desde los que están destinados para estimaciones de sistemas lineales, hasta los más complejos para estimaciones de sistemas no lineales. Para el tipo de sistemas no lineales se utilizan los filtros de Kalman ya sea extendidos o *Unscented*, debido a que este tipo de filtros hacen una linealización en cada iteración del sistema por medio de las series de Taylor truncas.

#### 4.3.2.1 Filtro del Kalman extendido (EKF)

El filtro de Kalman Extendido es un algoritmo basado en métodos matemáticos recursivos, con el cual es posible estimar ya sea parámetros o estados de un sistema dinámico no lineal, este tipo de

algoritmo utiliza expansiones de series de Taylor, las cuales son evaluadas en cada iteración con la finalidad de aproximar las ecuaciones de estado con base a un valor estimado de las mismas, [Simón, 2006].

Para la aplicación del filtro e Kalman es necesario contar con una representación no lineal del sistema a estudiar (ecuación 4.6):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + \omega_k \\ y_k &= h(x_k, u_k) + v_k \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donde,  $f(\cdot)$  y  $h(\cdot)$  representan a las funciones no lineales del sistema,  $x$  representa al vector de estados del sistema y  $y$  representa al vector de salidas del sistema. El subíndice  $k$ , representa la iteración del algoritmo y, por último  $\omega$  y  $v$  son los vectores de ruido en la medición de los estados y las salidas del sistema.

Una vez que se tiene la representación no lineal del sistema, se procede al cálculo de las matrices jacobianas del sistema (ecuación 4.7):

$$\begin{aligned} A_k &= \left. \frac{\partial f(x_k, u_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} ; \\ C_k &= \left. \frac{\partial h(x_k, u_k)}{\partial w} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} ; \end{aligned} \quad (4.7)$$

Estas matrices jacobianas serán evaluadas en cada iteración del algoritmo, para poder tener una aproximación no lineal del sistema.

Una vez que sean calculado las matrices jacobinas del sistema se asignan condiciones iniciales a los estados o parámetros dependiendo el caso de estudio y a los errores de covarianza del filtro, estas condiciones iniciales deben de ser asignadas de manera adecuada, ya que estas son las que darán estabilidad a la estimación del filtro.

Nota: para nuestro caso particular las condiciones iniciales fueron calculadas de manera heurística, hasta que se encontraron los mejores valores de la estimación y con ello garantizamos la estabilidad de los filtros de Kalman utilizados.

El filtro de Kalman extendido cuenta con dos etapas, la etapa de predicción y la de corrección. Como se puede apreciar en la figura (4.8), en la etapa de predicción se realiza un cálculo *a priori* de los estados o parámetros estimados según sea el caso (en la figura 4.8, se presenta el caso de un filtro de Kalman extendido de parámetros), así como de su respectivo error de covarianza. Posteriormente en la etapa de corrección se calcula la ganancia de Kalman del estimador y por último se calculan *a posteriori* la estimación de los estados o parámetros estimados y el error de covarianza, donde se da por terminada la iteración del algoritmo. El número de iteraciones del algoritmo es finito y dependerá de las condiciones de la experimentación.

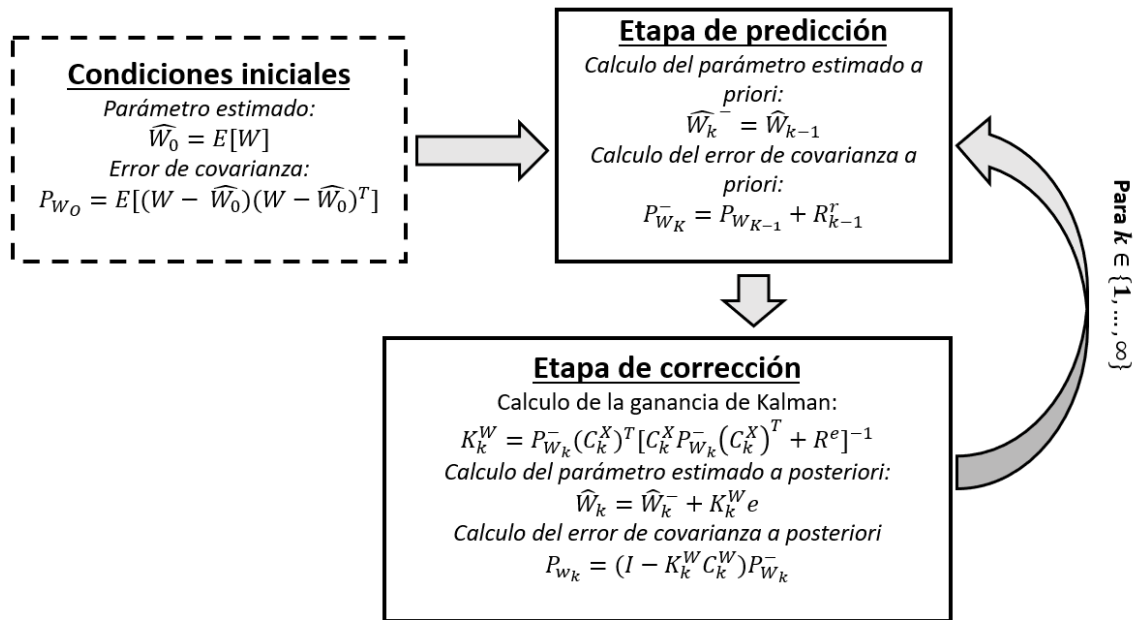


Figura 4.8 Esquema de un filtro de Kalman extendido.

#### 4.3.2.2 Filtro de Kalman extendido dual (DEKF)

El filtro de Kalman extendido dual, cuenta con una estructura análoga a un filtro de Kalman extendido convencional, lo que diferencia a este filtro dual con respecto al convencional es que este filtro estima al mismo tiempo parámetros y estados del sistema a diferencia del convencional que solamente puede estimar uno de ellos a la vez.

En la figura (4.9), se presenta el esquema general de un filtro de Kalman extendido dual, como se puede apreciar al igual que en el filtro de Kalman extendido esta metodología cuenta también con la etapa de predicción y corrección, en las que se hace un cálculo a *priori* y a *posteriori* de los errores de covarianza, los estados y parámetros estimados, además de una ganancia de corrección (ganancia de Kalman) para cada filtro. La peculiaridad de este filtro se encuentra en el acoplamiento de un filtro de parámetros y uno de estados.

Con respecto a la estabilidad de estimación de este tipo de metodología, igualmente radica en los valores de las condiciones iniciales, para su caso particular se consideran tanto las condiciones iniciales del filtro de estados y del filtro de parámetros.

La gran ventaja de este filtro en comparación de uno convencional es que debido a que está conformado por un filtro de estados y uno de parámetros, ambos se retroalimentan mutuamente, obteniendo valores estimados más precisos debido a que cada una de las señales que entra en los filtros es tratada por el otro filtro, evitando así señales con ruido a la entrada de cada uno de los filtros.

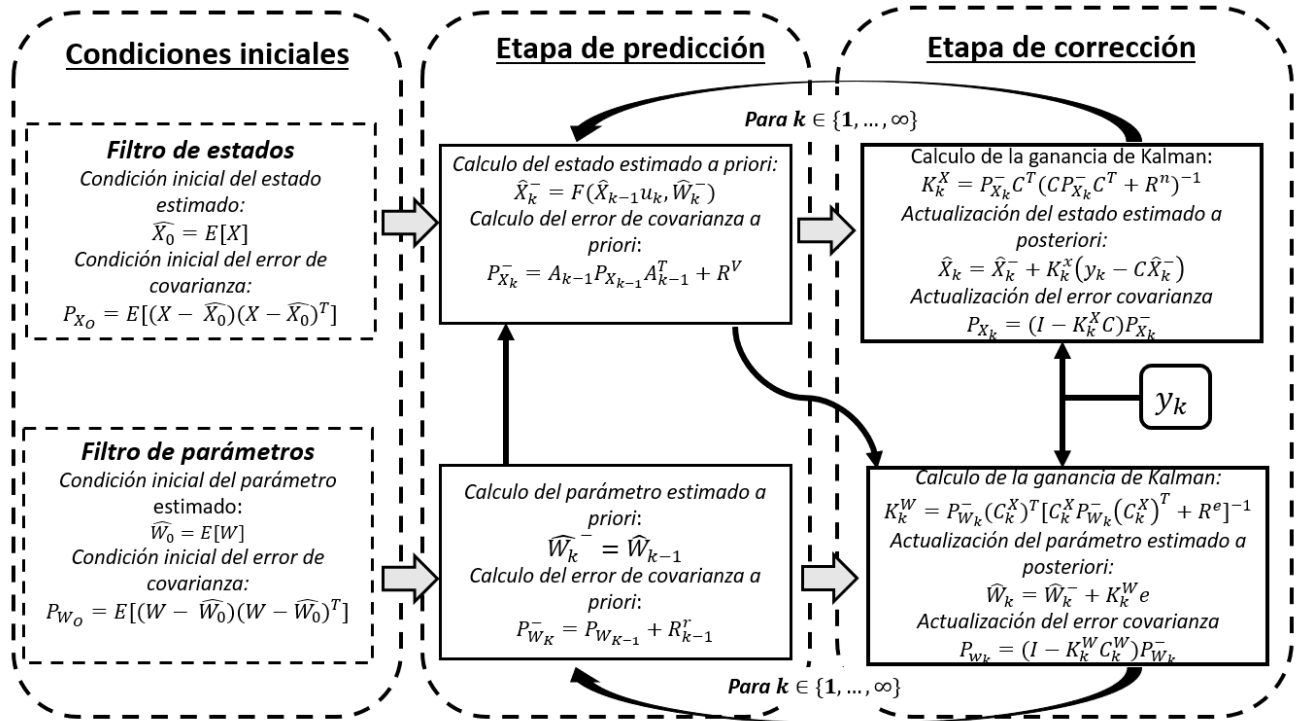


Figura 4.9 Esquema de un filtro de Kalman extendido dual.

### 4.3.3. Adecuaciones del modelo matemático del fotobiorreactor para su aplicación de los filtros de Kalman

Para la implementación de la técnica del filtro de Kalman extendido para estimación paramétrica, así como del filtro de Kalman extendido dual, fue necesario realizar adecuaciones al modelo matemático térmico del fotobiorreactor estudiado, planteado en la sección anterior (ecuaciones 3.28 a 3.30). Substituir las temperaturas del sistema por la variable  $x$  y los parámetros desconocidos por  $w$ , con la finalidad de uniformizar la nomenclatura de todos los datos a estimar. Las ecuaciones (4.8 a 4.9), muestran el resultado del cambio de la nomenclatura del modelo.

Vector de estados:

$$X = \begin{bmatrix} T_{ch} \\ T_w \\ T_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad (4.8)$$

Vector de parámetros desconocidos.

$$W^T = \begin{bmatrix} \frac{G_{l|ch}}{c_{ch}} & G_{l|ch} & \frac{G_{ch|w}}{c_{ch}} & \frac{ca}{c_{ch}} & c^d & \frac{G_{ch|w}}{c_w} & \frac{G_{w|e}}{c_w} & \frac{G_{r|w}}{c_w} & \frac{G_{l|e}}{c_e} & \frac{G_{w|e}}{c_e} & c_e \end{bmatrix}; \quad (4.9)$$

$$W^T = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8 \quad w_9 \quad w_{10} \quad w_{11}];$$

Sustituyendo los términos de los estados y parámetros con respecto a la forma utilizada en los filtros de Kalman, el resultado del modelo matemático es el mostrado en las ecuaciones 4.10 a 4.12. Una vez realizadas dichas adecuaciones, es posible aplicar las técnicas de los filtros de Kalman extendidos en el subsistema térmico.

#### Modelo matemático del subsistema térmico adaptado para filtros de Kalman

$$\dot{x}_1 = w_1 \left( \left( \frac{P_l u_l + w_2 x_1}{w_2} \right) - x_1 \right) - w_3 (x_1 - x_2) - w_4 \left( u_b F_b + \rho_{ch} w_5 \left( \frac{g H_{ch} |x_1 - T_r|}{T_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (x_1 - T_r) \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_2 = w_6 (x_1 - x_2) + w_7 (x_2 - x_3) + w_8 (T_r - x_2) \quad (4.11)$$

$$\dot{x}_3 = w_9 \left( \left( \frac{P_l u_l + w_2 x_1}{w_2} \right) - x_3 \right) + w_{10} (x_2 - x_3) - o_e \frac{F_e C_{pe}}{w_{11}} (x_3 - T_{ein}) \quad (4.12)$$

#### 4.3.4. Resultados de las temperaturas estimadas del sistema

Con respecto a los estados del sistema, se realizaron comparaciones de las estimaciones de los estados obtenidos por medio de la metodología de los filtros de Kalman extendidos y de los datos reales de una corrida experimental de siete horas de experimentación, durante el mes de noviembre del año del 2018. Estos resultados de la estimación de las temperaturas del sistema fotobiorreactor están compuestos por la temperatura de la cámara interna, la temperatura del medio de cultivo y la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor, mismos que se describen a continuación.

##### *Estimación de la temperatura de la cámara interna*

En la figura (4.10), se presenta en la parte superior la temperatura de la cámara interior del fotobiorreactor de los datos experimentales del sistema, además de los resultados de dos métodos de estimación paramétrica utilizados. El color azul representa la temperatura real del sistema, el color gris representa la estimación por medio del filtro Dual (DEKF) y el color negro representa el filtro de Kalman extendido (EKF). Como se puede apreciar la señal es muy ruidosa debido a que se presentan muchas fluctuaciones en la temperatura por ser la temperatura del aire que se encuentra confinado en la cámara interior del fotobiorreactor, donde se encuentra la lámpara que provee de luz a la fotosíntesis. Los cambios drásticos de la temperatura se deben al sistema de protección térmica de la lámpara, el cual, al sobrepasar una temperatura de 318 K, se activa un ventilador con el que se reduce la temperatura de la cámara interna del fotobiorreactor.

A continuación, en la parte inferior de la figura (4.10) se presentan los resultados gráficos de la dinámica del error en la estimación de la temperatura de la cámara interna del fotobiorreactor. Donde la línea de color gris representa la dinámica del error con respecto a la estimación basada en un DEKF y la línea en color negro representa la dinámica del error basado en un EKF para estimación de parámetros. Al analizar los resultados obtenidos, se puede apreciar que no existe una diferencia considerable en los errores de estimación entre un método y otro, ya que su error es muy similar a lo largo del tiempo de estimación.

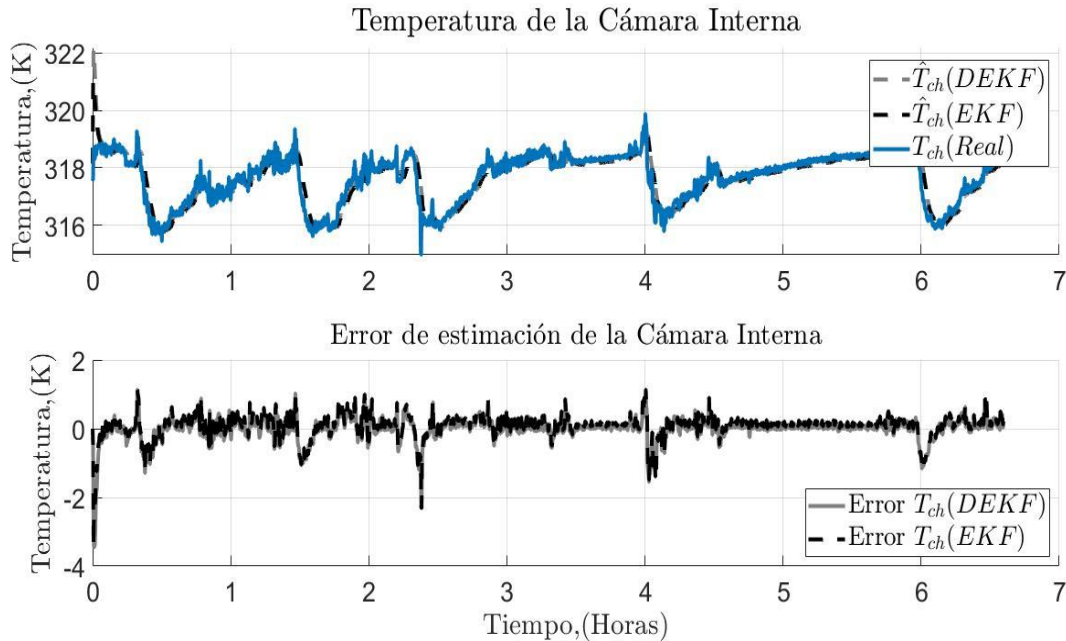


Figura 4.10. Estimación de la temperatura de la cámara interna.

### ***Estimación de la temperatura del medio de cultivo***

La parte superior de la figura (4.11), ilustra la temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor (color azul), así como las temperaturas estimadas con respecto al método de estimación DEKF (color gris) y el EKF (color negro). Con los métodos de estimación utilizados se obtuvieron dos resultados aproximados al real, ya que la dinámica del sistema es muy parecida a la del sistema real, aun cuando el sistema presenta un comportamiento altamente no lineal la señal estimada logra obtener una gran semejanza de la real tomando en cuenta la señal de error presentadas posteriormente.

En la parte inferior de la figura (4.11) se presenta la dinámica del error de la temperatura del medio de cultivo a lo largo del tiempo de experimentación presentado en la base de datos utilizada. Donde la línea de color gris representa la dinámica del error de estimación de la temperatura del medio de cultivo microalgal basada en el método de estimación de un DEKF y la línea de color negro representa el error de estimación basado en la estimación con un EKF. De acuerdo a los resultados presentados se puede observar como la dinámica de los errores de estimación oscila entre  $\pm 0.5$  K, además de que tiende a ser muy similar el comportamiento en ambos métodos de estimación.

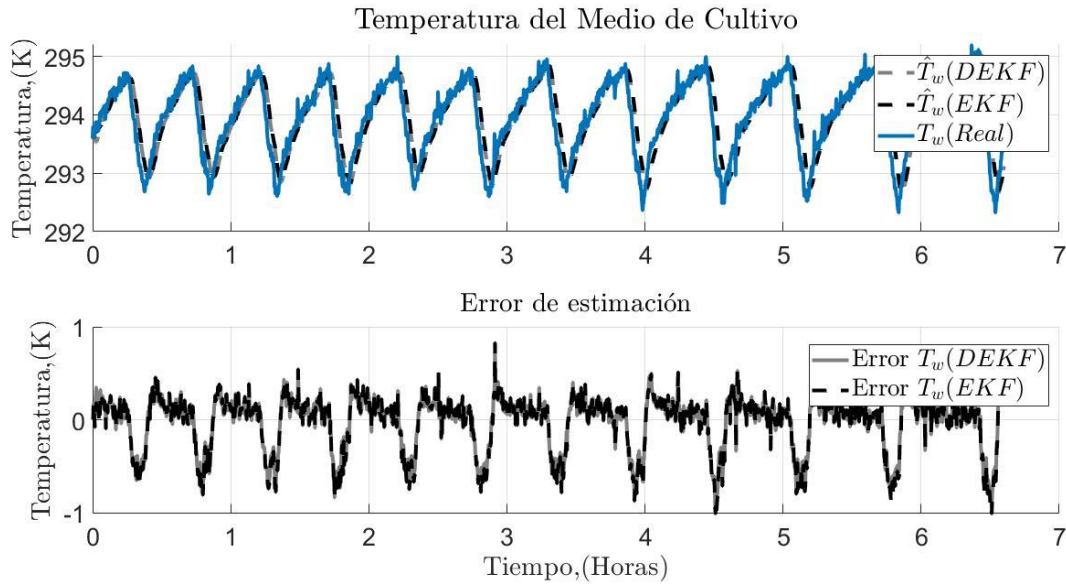


Figura 4.11. Estimación de la temperatura del medio de cultivo.

### ***Estimación de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor***

Con respecto a la temperatura de salida del intercambiador de calor, en la figura (4.12) se presenta la dinámica real del sistema (color gris), la dinámica estimada por medio del método de DEKF (color azul) y por método de EKF (color negro). Como se puede apreciar en dicha figura, la temperatura de la salida del intercambiador de calor no se logra estimar adecuadamente por medio de la ecuación de caja gris usando el EFK para este elemento del subsistema.

La dinámica del error de estimación de la temperatura a la salida del intercambiador de calor con respecto a los métodos de estimación anteriormente descritos está representada en la parte inferior de la figura (4.12). Donde la línea de color gris representa al método del DEKF y la línea de color negro representa el error de estimación basado en un EKF. De acuerdo a la dinámica del error de estimación presentada, la estimación basada en el filtro de Kalman extendido dual tiende a ser mejor que la estimación del filtro de Kalman extendido, debido a que el error es menor a lo largo de todo el periodo de estimación.



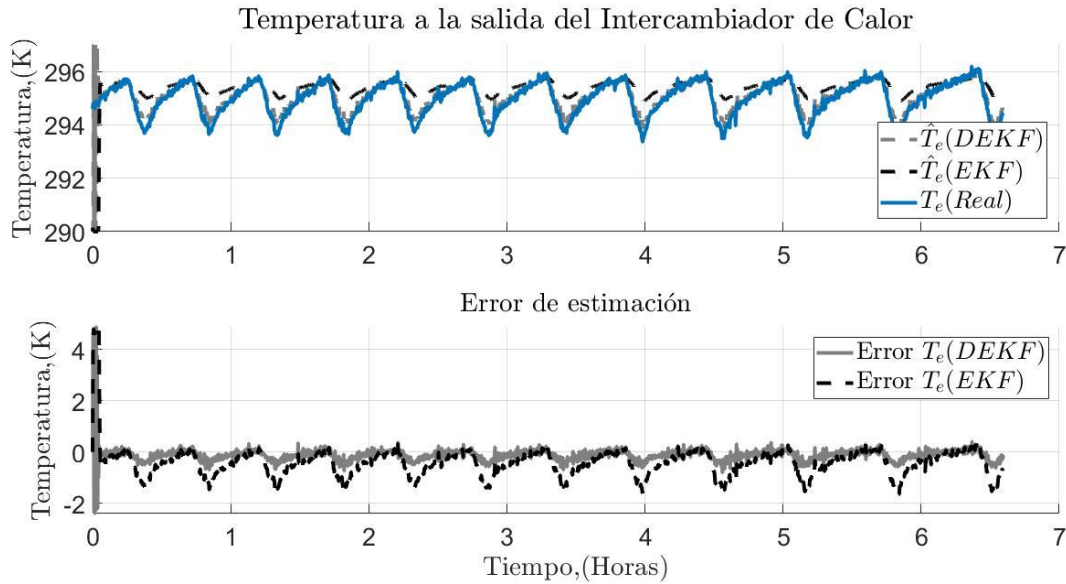


Figura 4.12. Estimación de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor.

#### 4.3.5. Índices de desempeño de las estimaciones realizadas

Para comprobar la fiabilidad de las estimaciones realizadas entre las dos metodologías de estimación presentadas en la tabla (4.3), se presentan los índices de desempeño de cada estimación de temperatura del fotobiorreactor. Los índices de desempeño presentados en la tabla, son la Integral del Error Absoluto (IAE), la Integral del Tiempo por el Error absoluto (ITAE), la Integral del Error Cuadrático (ISE), la Integral del Tiempo por el Error Cuadrático (ITSE), la Media del error Cuadrático (MSE) y el Error Medio Cuadrático (MCE).

En la parte superior de la tabla se presentan los índices de desempeño de cada temperatura del fotobiorreactor estimada, los cuales fueron obtenidos de la estimación por método del filtro de Kalman extendido dual. Posteriormente en la parte inferior de la tabla se presentan dichos índices de desempeño que son producto de la estimación por medio del filtro de Kalman Extendido.

Tabla 4.3. Índices de desempeño de las estimaciones de los estados del FBR.

Filtro de Kalman Extendido Dual (DEKF)						
Estados	IAE	ITAE	ISE	ITSE	MSE	MCE
$T_{ch} \rightarrow X_1$	$0.443 \times 10^3$	$1.257 \times 10^3$	263.668	$0.734 \times 10^3$	39.949	6.320
$T_w \rightarrow X_2$	$0.472 \times 10^3$	$1.600 \times 10^3$	243.726	$0.843 \times 10^3$	36.928	6.076
$T_e \rightarrow X_3$	$1.211 \times 10^3$	$4.100 \times 10^3$	854.737	$2.944 \times 10^3$	129.505	11.380

Filtro de Kalman Extendido (EKF)						
Estados	IAE	ITAE	ISE	ITSE	MSE	MCE
$T_{ch} \rightarrow X_1$	$0.5112 \times 10^3$	$1.5259 \times 10^3$	$0.2636 \times 10^3$	$0.7388 \times 10^3$	39.9570	6.3212
$T_w \rightarrow X_2$	$0.4602 \times 10^3$	$1.5263 \times 10^3$	$0.1883 \times 10^3$	$0.6513 \times 10^3$	28.5406	5.3423
$T_e \rightarrow X_3$	$1.0159 \times 10^3$	$3.1077 \times 10^3$	$1.1056 \times 10^3$	$3.8081 \times 10^3$	167.6054	12.9463

### 4.3.6. Resultados de los parámetros estimados

La dinámica de los parámetros estimados mediante las técnicas de los filtros de Kalman extendidos y los filtros de Kalman extendidos duales, es presentada en las figuras (4.13 a 4.16). Donde la línea de color gris representa la estimación del parámetro con respecto a la técnica de filtro de Kalman extendido Dual, la línea discontinua de color negro representa la estimación del parámetro con respecto a la técnica del filtro de Kalman extendido.

En la figura (4.13) se muestran las primeras tres estimaciones de los parámetros de la conductancia térmica de la lámpara hacia la cámara interna dividida entre la capacidad calorífica de la cámara interna  $\left(\frac{G_{l \rightarrow ch}}{C_{ch}}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_1)$ ; la conductancia térmica de la lámpara hacia la cámara interna  $(G_{l \rightarrow ch})$ , representado como  $(\hat{w}_2)$ ; y la conductancia térmica de la cámara interna hacia el medio de cultivo dividida entre la capacidad calorífica de la cámara interna  $\left(\frac{G_{ch \rightarrow w}}{C_{ch}}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_3)$ .

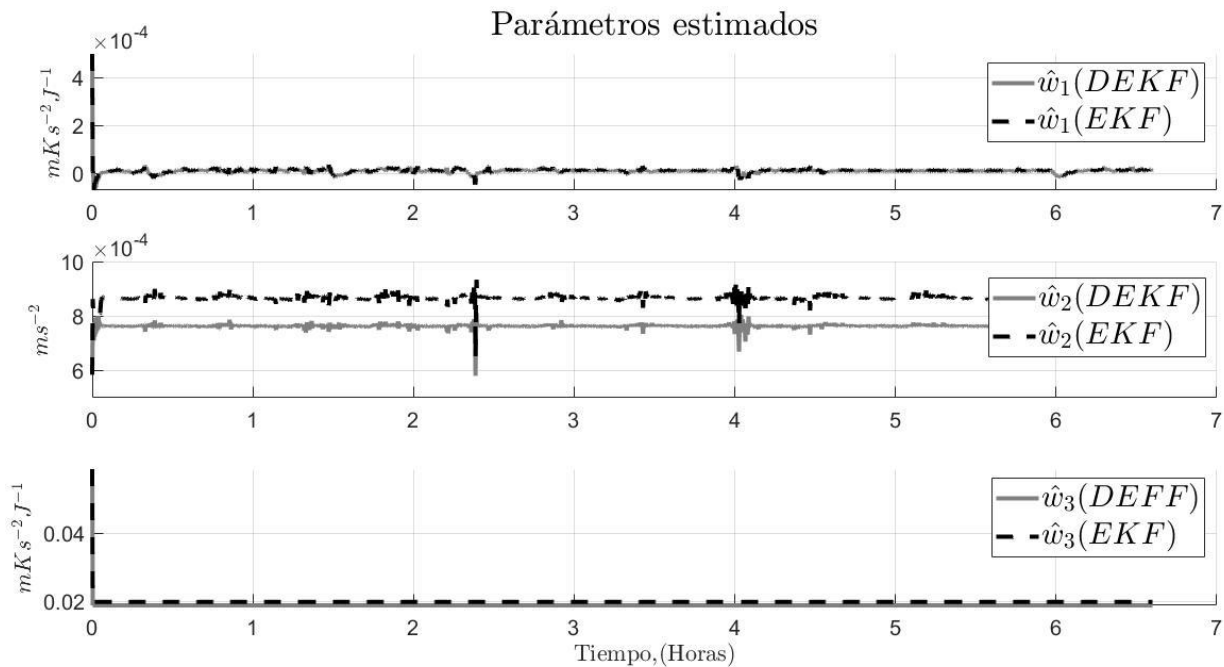


Figura 4.13 Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de  $\hat{w}_1$  a  $\hat{w}_3$ .

En la figura (4.14), se presentan las estimaciones de los parámetros de la capacidad calorífica específica del aire dividida entre la capacidad calorífica de la cámara interna  $\left(\frac{c_a}{C_{ch}}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_4)$ ; el coeficiente de descarga ( $C^d$ ), representado como  $(\hat{w}_5)$ ; y la conductancia térmica de la cámara interna hacia el medio de cultivo dividida entre la capacidad calorífica del medio de cultivo  $\left(\frac{G_{ch \rightarrow w}}{C_w}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_6)$ .

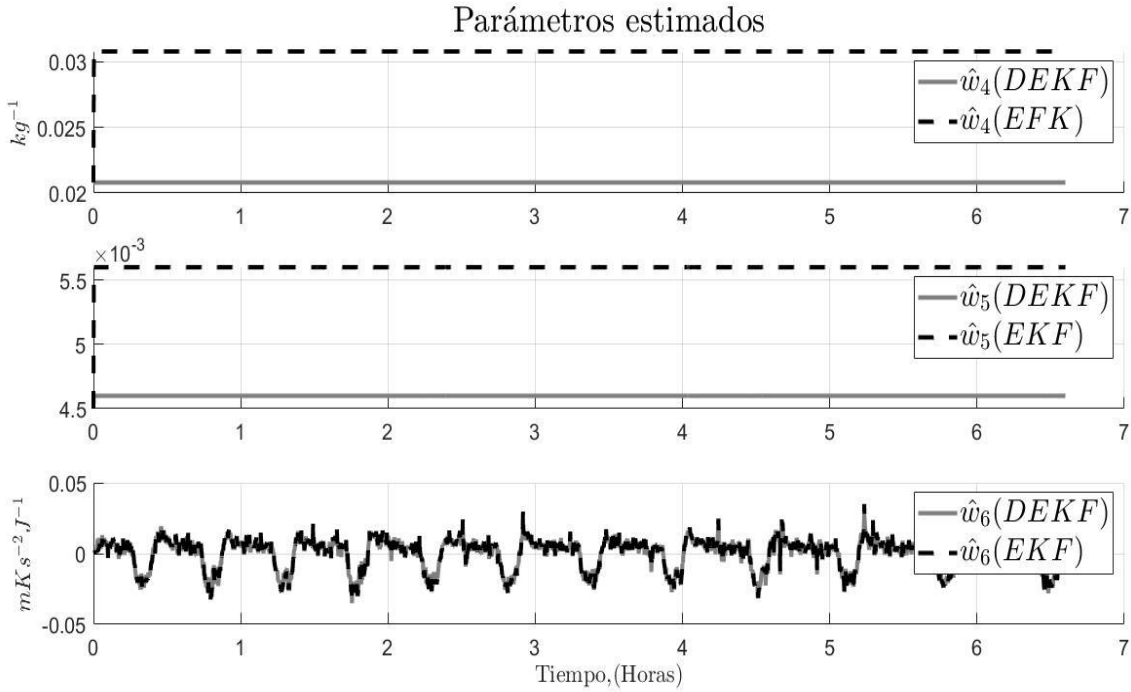


Figura 4.14. Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de  $\hat{w}_4$  a  $\hat{w}_6$ .

La figura (4.15), ilustra las estimaciones paramétricas de la convección térmica del medio de cultivo hacia el intercambiador de calor dividida entre la capacidad calorífica del medio de cultivo  $\left(\frac{G_{w \rightarrow e}}{C_w}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_7)$ ; la convección térmica del medio del ambiente hacia el medio de cultivo dividida entre la capacidad calorífica del medio de cultivo  $\left(\frac{G_{r \rightarrow w}}{C_w}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_8)$ ; y la radiación térmica de la lámpara hacia el intercambiador de calor dividida entre la capacidad calorífica del intercambiador de calor  $\left(\frac{G_{l \rightarrow e}}{C_e}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_9)$ .

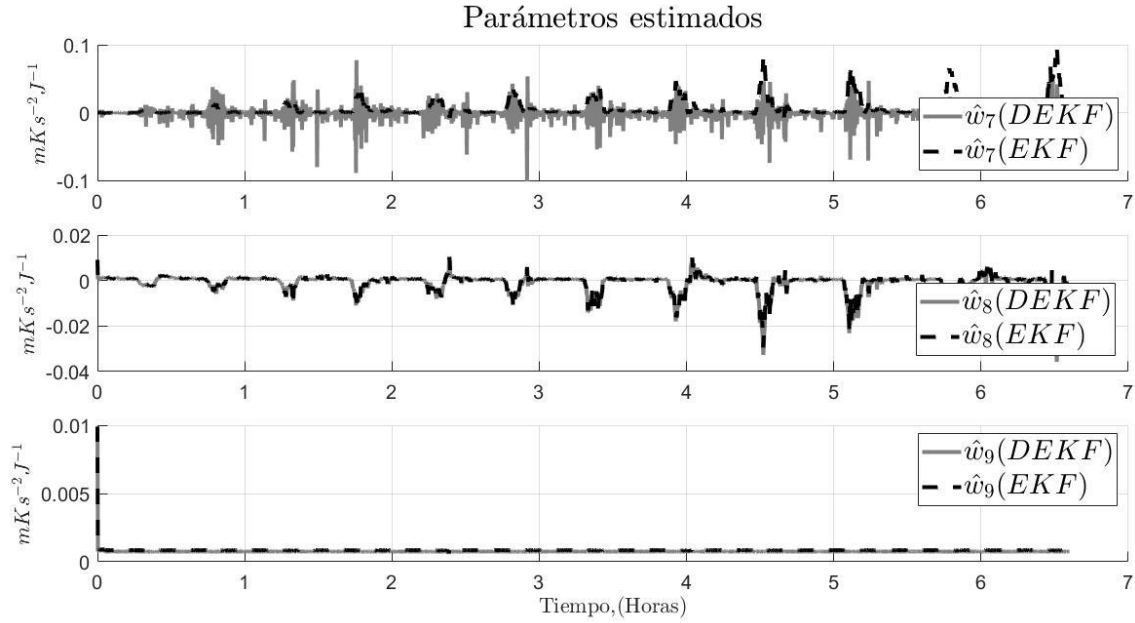


Figura 4.15 Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de  $\hat{w}_7$  a  $\hat{w}_9$ .

La figura (4.16), presenta la estimación paramétrica de la convección térmica del medio de cultivo hacia el intercambiador de calor dividida entre la capacidad calorífica del intercambiador de calor  $\left(\frac{G_{w \rightarrow e}}{C_e}\right)$ , representado como  $(\hat{w}_{10})$ ; y la capacidad calorífica del intercambiador de calor  $(C_e)$ , representado como  $(\hat{w}_{11})$ .

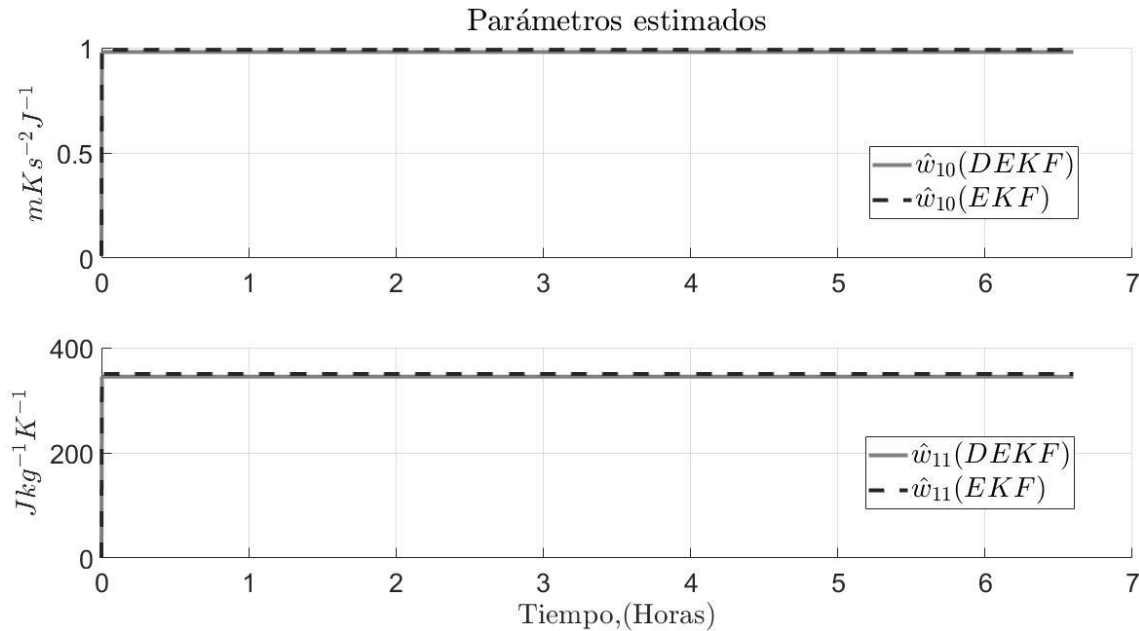


Figura 4.16 Parámetros estimados del sistema fotobiorreactor de  $\hat{w}_{10}$  a  $\hat{w}_{11}$ .

### 4.3.7. Parámetros estimados del subsistema térmico

Para la caracterización del modelo matemático propuesto, se obtuvieron los parámetros de diversas maneras, por lo que en esta sección se define la manera de cómo fue obtenido cada parámetro del sistema. La obtención de estos parámetros está basada en seleccionar primeramente qué parámetros son medibles, cuáles son posibles obtener por medio de la literatura, cuáles pueden variar y cuales no son medibles. Por último, se asignó a cada parámetro en la manera adecuada de su caracterización y se obtuvo dicho valor numérico.

#### *Parámetros conocidos del sistema fotobiorreactor*

En la tabla (4.4), se presentan los valores de los parámetros que fueron obtenidos mediante mediciones y mediante valores propuestos en la literatura. La tabla consta de tres secciones, en la primera columna se definen los parámetros estudiados, en la segunda se precisa las unidades de cada parámetro y en la tercera columna se presenta el valor numérico de cada parámetro analizado.

Tabla 4.4 Parámetros conocidos del sistema fotobiorreactor.

<i>Parámetros obtenidos de la literatura</i>		
Parámetro	Unidades	Valor numérico
$C_{pe}$	$Jkg^{-1}K^{-1}$	2200
$F_b$	$m^3kg^{-1}s^{-1}$	21.1
$g$	$ms^{-2}$	9.81
$H$	$m$	1.5
$\rho_{ch}$	$kgm^{-3}$	1.225
$T_r$	$K$	308.15

#### *Parámetros variantes en el tiempo*

Los parámetros presentados en la tabla (4.5), son aquellos que pueden variar en el tiempo y dependiendo de los propósitos de cada experimentación es que se mantendrán constantes o variarán de acuerdo al tiempo de experimentación, estos parámetros son adimensionales y van desde un valor inicial de 0 hasta un valor máximo de 1.

Tabla 4.5 Ciclos de trabajo de los elementos del fotobiorreactor.

<i>Ciclos de trabajo</i>		
Parámetro	Unidades	Valor numérico
$u_b$	—	0 a 1
$u_l$	—	0 a 1

En la tabla (4.6), se presentan las variables manipuladas del sistema, las cuales también pueden ser vistos como parámetros que varían en el tiempo, pero para el propósito de este trabajo son aquellas que se consideran a manipular en la futura sección de control térmico del fotobiorreactor.

Tabla 4.6 Variables manipuladas del fotobiorreactor.

<i>Variables manipuladas</i>		
Variable	Unidades	Margen de acción
$o_e$	–	0 a 1
$T_{ein}$	K	280 a 324

***Parámetros estimados del sistema***

En la siguiente tabla (4.7), se presenta los resultados de los valores numéricos de las estimaciones del sistema fotobiorreactor, basados en las técnicas de filtro de Kalman extendidos, una de ellas está enfocado en la estimación de parámetros y la otra técnica basada en una estimación dual de parámetros y estados del sistema. La tabla consta de cuatro columnas la primera columna ilustra el parámetro a estimar, la segunda las unidades del parámetro estimado y por último las dos columnas restantes presentan los valores numéricos de las estimaciones de cada una de las técnicas utilizadas.

Tabla 4.7 Parámetros estimados mediante la metodología de Kalman.

<i>Parámetros estimados</i>			
Parámetro	Unidades	Estimación EKF	Estimación DEKF
$\frac{G_{l ch}}{C_{ch}}$	$mKs^{-2}J^{-1}$	0.0034	0.0029
$G_{l ch}$	$ms^{-2}$	1.6277	1.6277
$\frac{G_{ch w}}{C_{ch}}$	$mKs^{-2}J^{-1}$	0.0019	0.0018
$\frac{c_a}{C_{ch}}$	$kg^{-1}$	0.0038	0.0040
$C^d$	–	0.0160	0.0204
$\frac{G_{ch w}}{C_w}$	$mKs^{-2}J^{-1}$	$2.7555 \times 10^{-4}$	$2.4777 \times 10^{-4}$
$\frac{G_{w e}}{C_w}$	$mKs^{-2}J^{-1}$	0.0058	0.0049
$\frac{G_{r w}}{C_w}$	$mKs^{-2}J^{-1}$	0.0066	0.0066
$\frac{G_{l e}}{C_e}$	$mKs^{-2}J^{-1}$	0.0025	0.0020
$\frac{G_{w e}}{C_e}$	$mKs^{-2}J^{-1}$	1.5020	1.4999
$C_e$	$Jkg^{-1}K^{-1}$	450	450

## 4.4. Ejemplo de estimación de parámetros basado en un DEFK

### 4.4.1. Descripción general de la simulación

Se desarrolló una estimación de estados y parámetros del sistema del fotobiorreactor mediante la técnica de estimación de un filtro de Kalman extendido dual para una corrida en simulación de 20 horas de experimentación y una temperatura ambiente constante de 294.15 K (21°C). En la simulación se estiman cuatro parámetros que son los que tienen una mayor influencia de las temperaturas del sistema.

### 4.4.2. Dinámica del sistema a estimar

En la figura (4.17) se presenta la dinámica de las temperaturas del fotobiorreactor estudiado para un experimento de 20 horas a una temperatura ambiente de 294.15 K (21°C), donde la línea de color gris oscuro representa la temperatura de la cámara interna, la línea de color rojo representa la temperatura del medio de cultivo y por último la línea de color gris claro representa la temperatura de salida del intercambiador de calor que se encuentra inmerso en el sistema.

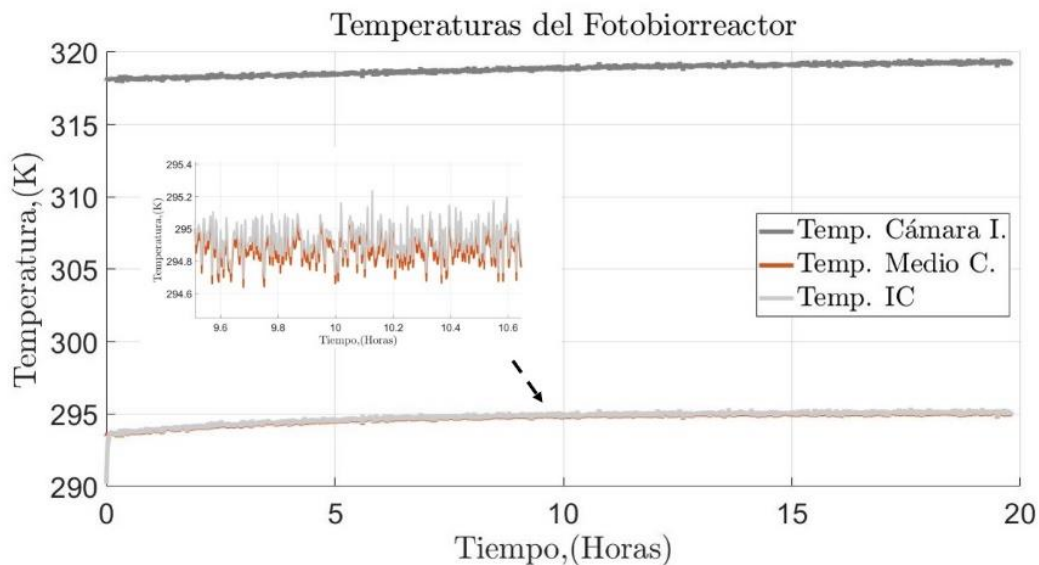


Figura 4.17 Dinámica de las temperaturas del sistema.

### 4.4.3. Observabilidad del sistema lineal del fotobiorreactor

Para conocer si el sistema del fotobiorreactor es observable, se procedió a realizar las pruebas de observabilidad del sistema considerando restricciones en la temperatura ambiente, ya que de acuerdo a la zona geográfica donde está ubicado el sistema es bastante improbable que la temperatura del medio ambiente rebase los 308.15 K (35°C) o que se encuentre por debajo de los 282.15 K (9°C), de acuerdo con los datos climatológicos del Servicio meteorológico Nacional.

Para realizar este análisis se procedió a linealizar el sistema considerando la forma canónica de modelo de espacio de estados, representado en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX\end{aligned}\tag{4.13}$$

Tomando en cuenta que nuestro sistema solo cuenta con tres estados, la matriz de observabilidad queda de la siguiente manera:

$$Obs = [C^T \ A^T C^T \ A^{T^2} C^T]\tag{4.14}$$

#### 4.4.3.1 Sistema linealizado considerando una temperatura ambiente de 282.15 K

A continuación, se presentan los valores numéricos de la matriz de los estados del sistema (representados por A) y de las salidas del mismo (representados por C) además del vector de las entradas del sistema (representados por B).

$$A = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.0018 & 0 \\ 2.477 \times 10^{-4} & -0.002 & -0.0049 \\ 0.002 & 1.499 & -5.0690 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5691 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 1 \ 0];\tag{4.15}$$

Por lo tanto, la matriz de observabilidad queda expresada de la siguiente manera:

$$Obs = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1 & -0.0020 & -0.0074 \\ 0 & -0.0049 & 0.0249 \end{bmatrix}.\tag{4.16}$$

Como la matriz de observabilidad es de rango completo, el sistema es observable.

#### 4.4.3.2 Sistema linealizado considerando una temperatura ambiente de 308.15 K

De la misma manera que en la sección anterior, se presentan los valores numéricos de la matriz de los estados del sistema (representados por A) y de las salidas del mismo (representados por C) además del vector de las entradas del sistema (representados por B).

$$A = \begin{bmatrix} -0.0019 & 0.0018 & 0 \\ 0.0002 & -0.002 & -0.0049 \\ 0.002 & 1.499 & -5.0690 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5691 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 1 \ 0];\tag{4.17}$$

Por lo tanto, la matriz de observabilidad queda expresada de la siguiente manera:

$$Obs = \begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1 & -0.0020 & -0.0074 \\ 0 & -0.0049 & 0.0249 \end{bmatrix}.\tag{4.18}$$

Como la matriz de observabilidad es de rango completo, el sistema es observable.



#### 4.4.4. Parámetros a estimar

De acuerdo al modelo matemático del subsistema térmico del fotobiorreactor, se consideran cuatro parámetros a estimar, los cuales representan los mayores cambios en la dinámica de la temperatura del medio de cultivo y la temperatura de salida del intercambiador de calor.

Los parámetros a estimar son los siguientes:

- Conductancia térmica del medio del medio de cultivo hacia el intercambiador de calor sobre la capacidad calorífica del medio de cultivo  $\left(\frac{G_{w \rightarrow e}}{C_w}\right)$ , con un valor de 0.0049  $mK s^{-2} J^{-1}$  denominado en la estimación como  $W_1$ .
- Conductancia térmica del medio del intercambiador de calor hacia el medio de cultivo sobre la capacidad calorífica del medio de cultivo  $\left(\frac{G_{r \rightarrow w}}{C_w}\right)$ , con un valor de 0.0066  $mK s^{-2} J^{-1}$  denominado en la estimación como  $W_2$ .
- Conductancia térmica del medio de cultivo hacia el intercambiador de calor sobre la capacidad calorífica del intercambiador de calor  $\left(\frac{G_{w \rightarrow e}}{C_e}\right)$ , con un valor de 1.4999  $mK s^{-2} J^{-1}$  denominado en la estimación como  $W_3$ .
- La capacidad calorífica del intercambiador de calor ( $C_e$ ), con un valor de 450  $J kg^{-1} K^{-1}$  denominado en la estimación como  $W_4$ .

#### 4.4.5. Resultados de las temperaturas estimadas del sistema

##### 4.4.5.1 Estimación de la temperatura de la cámara interna del fotobiorreactor

En la figura (4.18) se presenta en la parte superior la estimación de la temperatura de la cámara interna del fotobiorreactor delimitada entre 318.15 K (45°C) y 319.30 K (46.15°C), donde la línea de color gris es la temperatura real del sistema y la temperatura estimada se encuentra representada por la línea discontinua de color negro. En la parte inferior se presenta la dinámica del error de estimación de la temperatura con respecto a la temperatura real. Como se puede apreciar la estimación de la temperatura ésta se encuentra filtrada del ruido en la medición debido a el filtro de Kalman extendido dual, por lo que el error nunca llegará a ser cero, pero siempre se encontrará alrededor de una zona de  $\pm 0.5$  K.

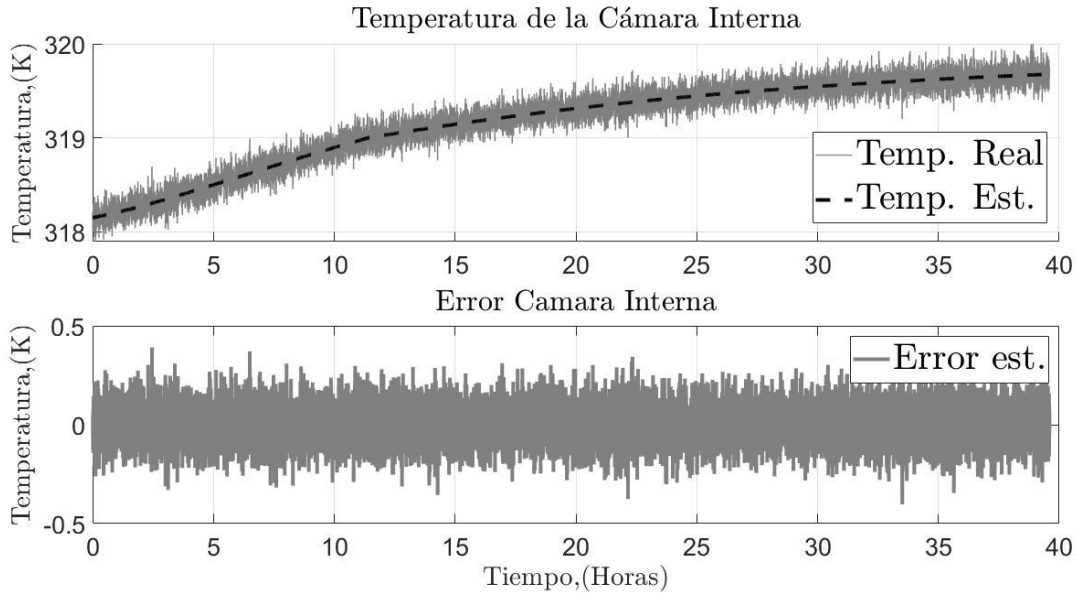


Figura 4.18 Estimación de  $T_{ch}$  con respecto a su error de estimación.

#### 4.4.5.2 Estimación de la temperatura del medio de cultivo

La parte superior de la figura (4.19) representa la estimación de la temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor delimitada entre 293.50 K (20.35°C) y 295.50 K (22.35°C), donde la línea de color gris es la temperatura real del medio de cultivo y la temperatura estimada del medio se encuentra representada por la línea discontinua de color negro. En la parte inferior de la figura, se ilustra la dinámica del error de estimación de la temperatura del medio de cultivo con respecto a la temperatura real. Como se puede apreciar en la dinámica del error debido a el ruido gaussiano considerado en la simulación es que el error de estimación nunca llegará a ser cero y a lo largo de toda la simulación se encontrará alrededor de  $\pm 0.5$  K.

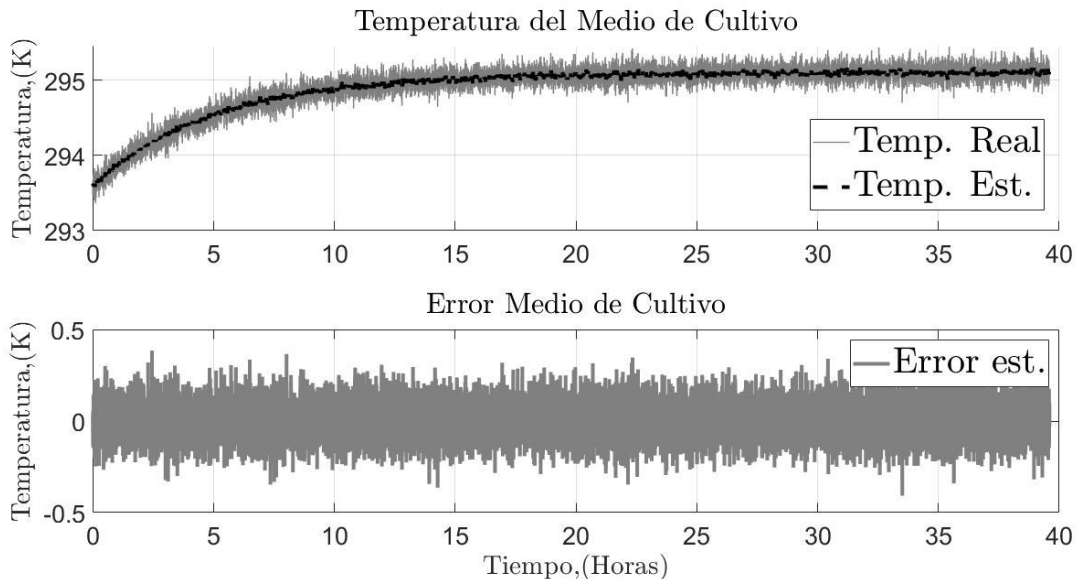


Figura 4.19 Estimación de  $T_w$  con respecto a su error de estimación.

### 4.4.5.3 Estimación de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor

En la figura (4.20) la parte superior presenta la estimación de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor inmerso en el fotobiorreactor delimitada entre 293.50 K (20.35°C) y 294.50 K (21.35°C), donde la línea de color gris es la temperatura real a la salida del intercambiador de calor y la temperatura estimada se encuentra representada por la línea discontinua de color negro. En la parte inferior se presenta la dinámica del error con respecto al tiempo de la estimación de la temperatura del glicol a la salida del intercambiador de calor. Debido a que las condiciones iniciales del filtro de Kalman extendido dual y la temperatura real son distintos, es que se presenta una etapa de adaptación del filtro en los primeros instantes de la simulación, hasta llegar a un estado considerado estable como estable donde la su dinámica oscilara alrededor de los  $\pm 0.5$  K, debido al ruido en las mediciones de las salidas del sistema.

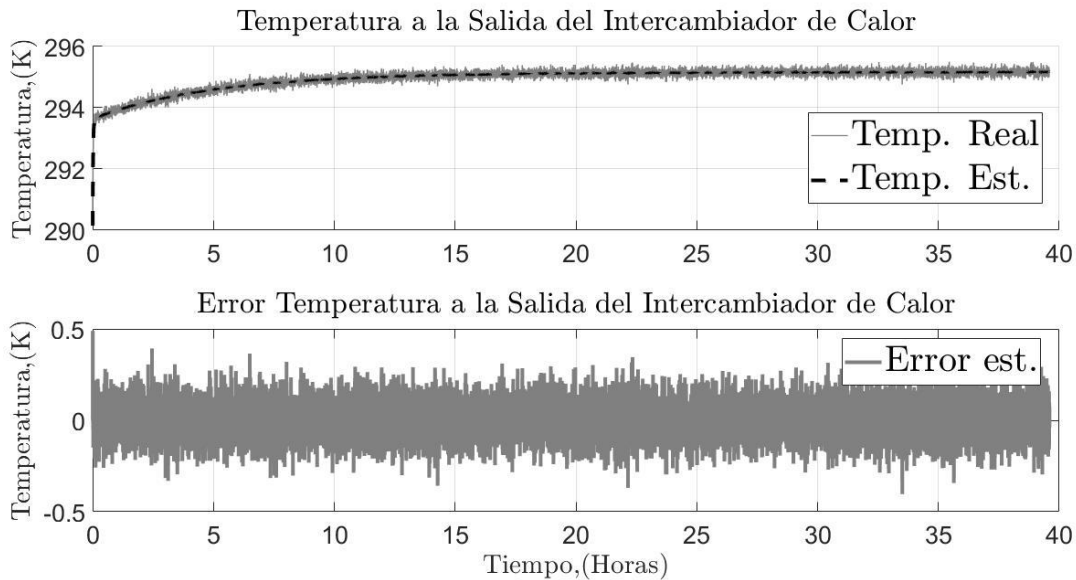


Figura 4.20 Estimación de  $T_e$  con respecto a su error de estimación.

## 4.4.6. Resultados de los parámetros estimados del sistema

### 4.4.6.1 Estimación de $W_1$

En la parte superior de la figura (4.21) se presenta la estimación del parámetro de la conductancia térmica del medio del medio de cultivo hacia el intercambiador de calor sobre la capacidad calorífica del medio de cultivo  $\left(\frac{G_{w \rightarrow e}}{C_w}\right)$ , el cual tiene un valor nominal  $0.0049 \text{ mK s}^{-2} \text{ J}^{-1}$  este parámetro está representado por la línea discontinua de color negro y la estimación del mismo por la línea de color gris. En la parte inferior de dicha figura se ilustra la dinámica del error de estimación del parámetro estimado con respecto al parámetro real, para que el error de estimación llegue a un estado estable, el filtro de Kalman dual tarda aproximadamente tres horas en llegar, ya que durante este tiempo la estimación presenta dos sobretiros importantes que evitan su pronta estimación.

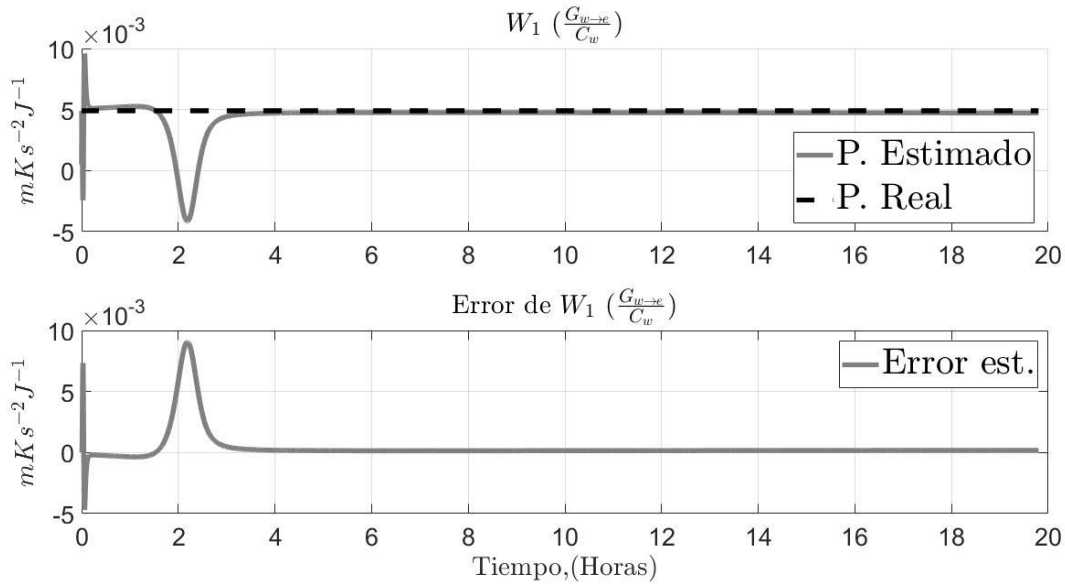


Figura 4.21 Estimación de  $W_1$  con respecto a su error de estimación.

#### 4.4.6.1 Estimación de $W_2$

En la parte superior de la figura (4.22) se presenta la estimación del parámetro de la Conductancia térmica del medio del intercambiador de calor hacia el medio de cultivo sobre la capacidad calorífica del medio de cultivo  $\left( \frac{G_{r-w}}{C_w} \right)$ , con un valor nominal de  $0.0066 mK s^{-2} J^{-1}$ . Donde la línea de color gris representa el parámetro estimado y la línea discontinua de color negro representa el valor nominal del parámetro. La parte inferior de la figura (4.22), se presenta la dinámica del error de estimación del parámetro. De acuerdo a los datos presentados, la técnica de estimación utilizada se tarda aproximadamente seis horas hasta estimar de manera correcta el parámetro.

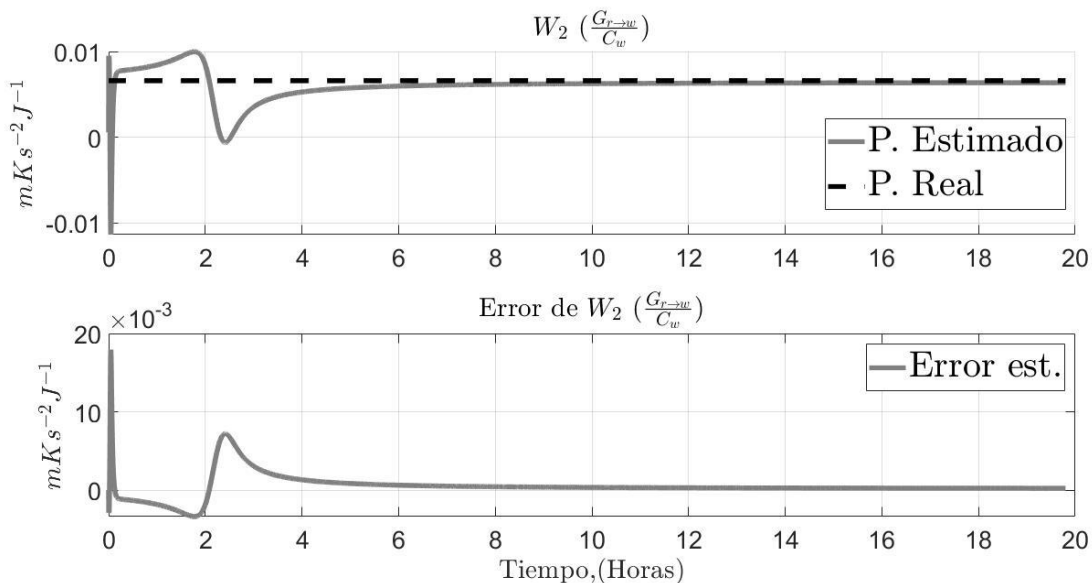


Figura 4.22 Estimación de  $W_2$  con respecto a su error de estimación.

#### 4.4.6.1 Estimación de $W_3$

En la figura (4.23), la parte superior presenta la comparativa de la estimación del parámetro de la conductancia térmica del medio de cultivo hacia el intercambiador de calor sobre la capacidad calorífica del intercambiador de calor  $\left(\frac{G_{w \rightarrow e}}{C_e}\right)$ , con un valor nominal de  $1.4999 \text{ mK s}^{-2} \text{ J}^{-1}$ . Donde la línea de color gris representa la dinámica de la estimación del parámetro y la línea discontinua de color negro representa el valor nominal del parámetro. En la parte inferior se presenta la dinámica del error de estimación del parámetro con respecto al tiempo de simulación.

Considerando los datos, el estado transitorio de la estimación es menor que las otras tres estimaciones de parámetros presentadas, ya que la estimación a partir de la primera hora de simulación converge al valor nominal del parámetro.

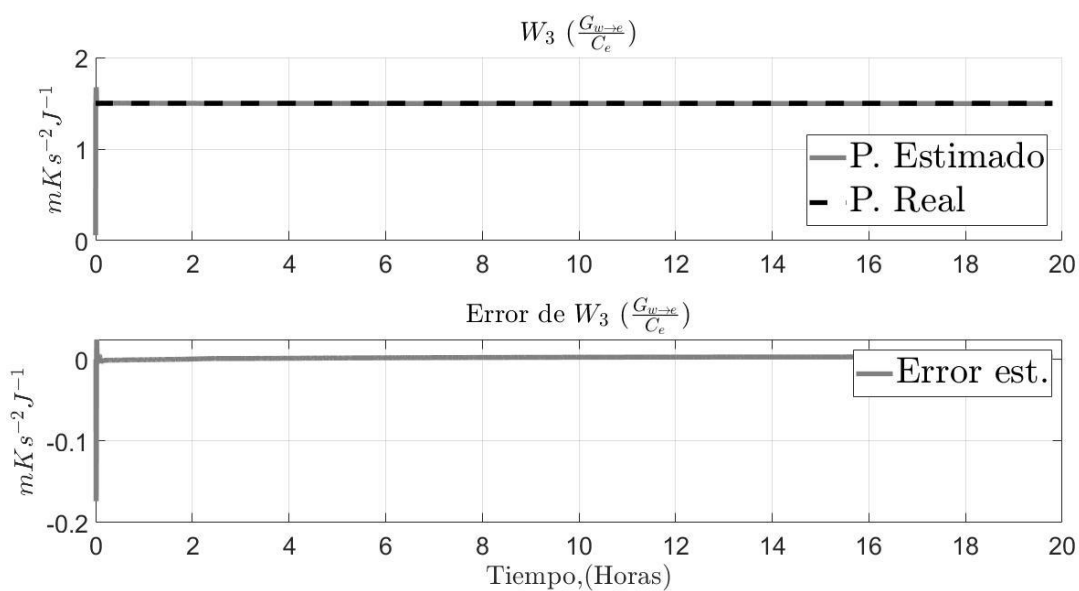


Figura 4.23 Estimación de  $W_3$  con respecto a su error de estimación.

#### 4.4.6.2 Estimación de $W_4$

La parte superior de la figura (4.24) presenta la comparativa de la estimación del parámetro estimado con respecto a el valor real del parámetro de la capacidad calorífica del intercambiador de calor ( $C_e$ ), con un valor nominal de  $450 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Donde la línea de color gris representa el valor estimado de la capacidad calorífica y la línea discontinua de color negro representa el valor nominal del parámetro. En la parte inferior se presenta la dinámica del error de estimación del parámetro con respecto a al tiempo de simulación.

La estimación del parámetro tiende a converger al valor real del sistema de manera pronta ya que en los primeros minutos el valor estimado es igual a valor real, por ende, el error de estimación tiende a cero de manera pronta al igual que la estimación del parámetro.

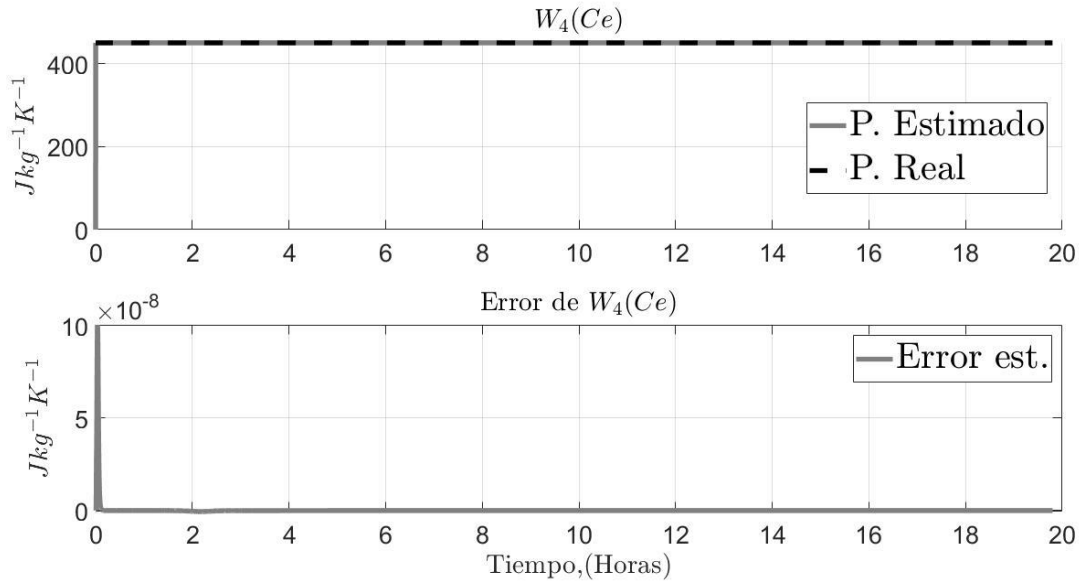


Figura 4.24 Estimación de  $W_4$  con respecto a su error de estimación.

## 4.5. Ventajas y desventajas de los métodos de estimación presentados.

En la tabla (4.8), se presentan las ventajas y desventajas de los tres métodos de estimación paramétrica utilizados en este trabajo de investigación. Donde la primera columna muestra los métodos de estimación utilizados, la segunda y tercera columna muestran las ventajas y desventajas de cada método.

Tabla 4.8 Ventajas y desventajas de los métodos de estimación propuestos.

Método de estimación	Ventajas	Desventajas
<i>Estimación heurística</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fácil implementación.</li> <li>• No es necesario realizar cálculos matemáticos.</li> <li>• Presenta resultados altamente eficientes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No es posible estimar más de un estado del sistema.</li> <li>• Complicado estimar una gran cantidad de parámetros.</li> <li>• Es necesario hacer gran cantidad de pruebas de ajuste.</li> </ul>
<i>Filtro de Kalman extendido</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posibilidad de estimar una gran cantidad de parámetros.</li> <li>• Menor gasto computacional.</li> <li>• Estimaciones con un porcentaje de error bajo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Considerar condiciones iniciales que garanticen la estabilidad del filtro.</li> <li>• Es necesario hacer un cálculo de los jacobianos del sistema.</li> </ul>
<i>Filtro de Kalman extendido dual</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Posibilidad de estimar parámetros y estados simultáneamente.</li> <li>• Eficaz ante sistemas altamente no lineales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Considerar condiciones iniciales que garanticen la estabilidad del filtro.</li> <li>• Es necesario hacer un cálculo de los jacobianos del sistema.</li> <li>• Es el método que tiene un gasto computacional más alto.</li> </ul>

De acuerdo a lo presentado en la tabla (4.8), se puede apreciar que una estimación heurística puede ser considerada cuando los parámetros a estimar se encuentran confinados a una ecuación diferencial, pero para un sistema dinámico que cuenta con varios estados interactuando, es necesario considerar técnicas más robustas como lo pueden ser los filtros de Kalman los cuales presentan buenos resultados al estimar parámetros y estados de sistema altamente no lineal. Con respecto a la aplicación será la decisión de aplicar métodos de estimaciones de Kalman convencionales o duales, ya que estos además de estimar parámetros, estiman estados que a su vez son filtrados de ruido en las mediciones.

#### **4.6. Conclusiones del capítulo**

De acuerdo a los resultados presentados de las estimaciones paramétricas tanto del subsistema bioquímico, así como del subsistema térmico, se logró validar tanto el modelo matemático propuesto en la sección anterior. Esto gracias a la implementación de dos metodologías de estimación paramétrica, con respecto a la complejidad de la representación matemática propuesta para cada subsistema.

En el caso del subsistema bioquímico, se estimaron seis parámetros de la representación matemática propuesta, por medio de una estimación heurística. Donde los resultados del MCE, que estiman el comportamiento del crecimiento celular, rondaron entre  $0.2901 \times 10^7$  a  $0.9621 \times 10^7 \text{ cel/mL}$ , en el caso de las temperaturas de 293.15 a 297.15 K respectivamente. En el caso de las condiciones de temperaturas extremas. Este resultado es consistente con el hecho que el comportamiento de la microalgal parece ser mas de inhibición celular. Por esta razón, la representación matemática no es la más adecuada y por ende el MCE se desvía más del modelo de crecimiento propuesto por *Gompertz*.

Para el caso del subsistema térmico, los resultados de los 11 parámetros estimados con respecto a la metodología de estimación de Kalman, el MCE de las temperaturas del sistema osciló entre 5.3423 a 6.3212 K para las estimaciones de las temperaturas de la cámara interna y el medio de cultivo microalgal, donde se encontraron los mejores resultados de las estimaciones. En el caso de la temperatura del refrigerante a la salida del intercambiador de calor, el MCE fue de 12.9463 K, dando una estimación de menor calidad que las otras dos temperaturas estimadas, pero aun así reflejando de manera adecuada la dinámica de dicha temperatura.

Con respecto a los resultados presentados en los índices de desempeño y los errores de estimación, se considera que cualquier método presentado puede ser viable para aplicar dicha estimación, ya que en este caso particular estudiado las variaciones presentadas en el desempeño resultan ser despreciables ya que tienden a tener dinámicas muy similares y ambos siguen de manera correcta dicha estimación, debido a que la ganancia de ambos observadores se recalcula en cada periodo de muestreo.

Concluyendo, en este capítulo se logró desarrollar las metodologías de estimación paramétrica con las cuales es posible caracterizar el modelo matemático desarrollado en la sección anterior. De tal forma que se logró validar el modelo matemático que fue utilizado para fines de control en este trabajo de investigación.

## Capítulo 5. Metodología de control

---

### 5.1. Importancia del control térmico en la concentración microalgal

El control térmico en un fotobiorreactor es de gran importancia para obtener características concretas del producto final de la biomasa microalgal. Entre otras razones, es un factor por el cual se pueden obtener mayores o menores cantidades en la concertación celular de biomasa [Nalley et al, 2018]. Por otro lado, los cambios de temperatura también afectan las características de las células, ya sea desde la cantidad de lípidos y nitrógeno contenidos en la biomasa [Converti et al., 2009], el sabor de la biomasa [Yang et al, 2015], entre otras. Dependiendo la utilidad que tendrá el producto final, ya sea que se utilice para producción de biodiesel, de fármacos o suplementos alimenticios, como alimento en el área de la acuicultura, etc., es que se requerirá modificar las condiciones del cultivo, entre ellas y muy importante, la temperatura.

En el caso particular del fotobiorreactor estudiado, por personal del Instituto Tecnológico de Mazatlán, el CENIDET, así como de la Universidad Politécnica de Sinaloa; se están realizando experimentaciones para estudiar los efectos de la temperatura del medio de cultivo en la concentración de lípidos contenidos en la microalga *Nannochloropsis oculata*.

#### 5.1.1. Efectos sobre la concentración celular con respecto a la temperatura

Con la finalidad de demostrar el impacto de la temperatura del medio de cultivo sobre la cinética de crecimiento microalgal, se desarrolló una simulación de la concentración celular ante una temperatura del medio de cultivo variante en el tiempo. El valor inicial de la temperatura del medio de cultivo comienza en 299.15 K y en la hora 10 de simulación se programó un cambio descendente de dos grados hasta 297.15 K, que es la temperatura en la que la microalga ha tenido mejores rendimientos con respecto a su crecimiento.

Cuando la temperatura del medio de cultivo se encuentra a 299.15 K, la tasa de crecimiento celular en el fotobiorreactor es mucho menor que cuando ésta se encuentra a una temperatura de 297.15 K. Dichos comportamientos son presentados en la figura (5.1).



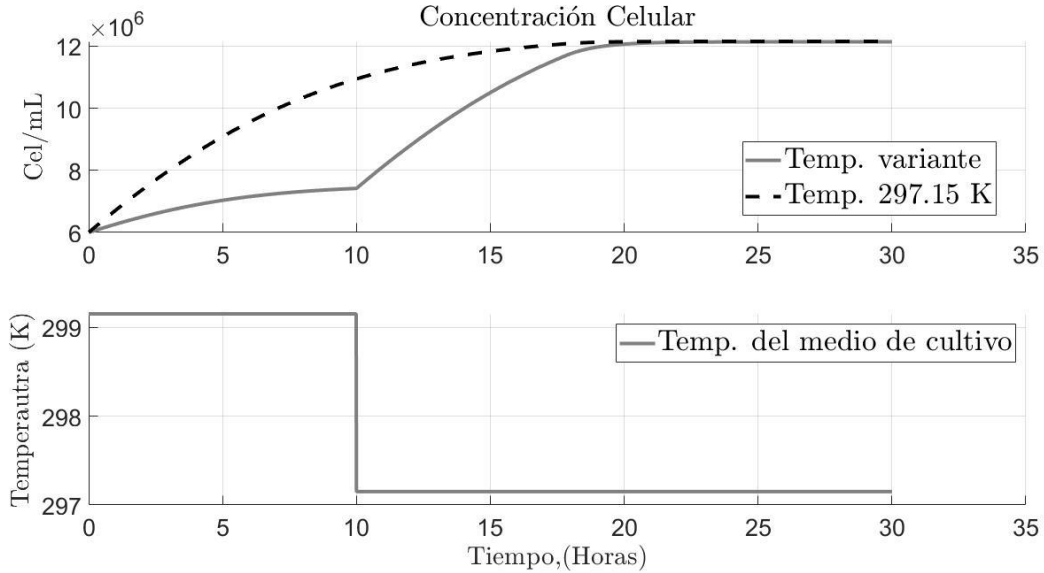


Figura 5.1. Dinámica de la concentración celular con respecto a una temperatura variante.

### 5.1.1.1 Limitaciones de la concentración celular con respecto a la temperatura.

#### *Limitaciones de la concentración celular a temperaturas descendentes.*

En la figura (5.2), se muestra el comportamiento de la concentración celular de la microalga *Nannochloropsis oculata* con respecto a temperaturas descendentes a partir de la temperatura de 295 K en la cual se obtuvieron los mejores resultados de concentración celular. Como se puede apreciar partiendo de un valor de concentración máxima al existir un decremento continuo de temperatura, el valor de la concentración celular comienza a descender hasta llegar a la muerte microalgal.

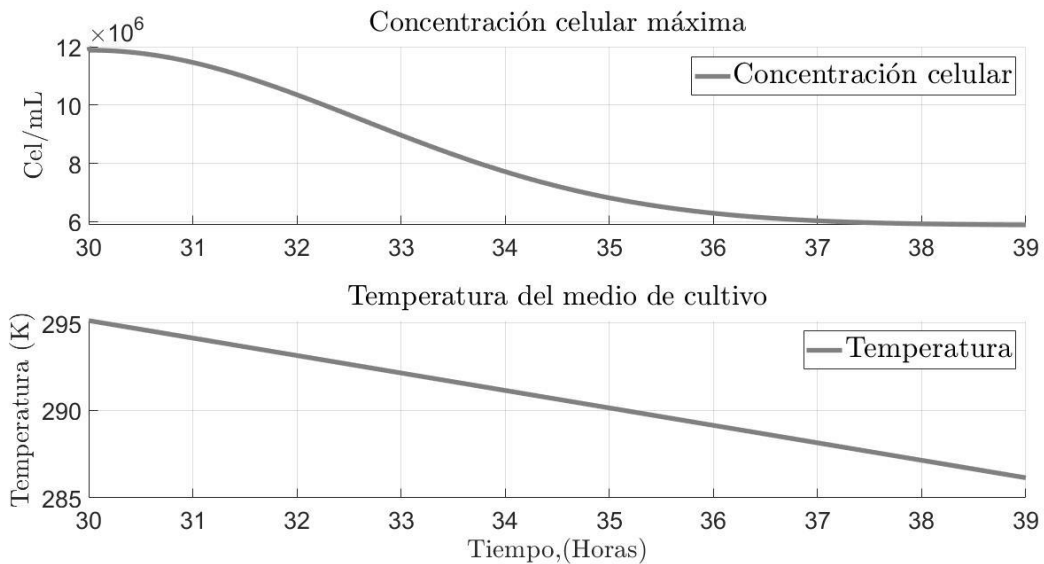


Figura 5.2. Dinámica de la concentración celular con respecto a bajas temperaturas.

### ***Limitaciones de la concentración celular a temperaturas ascendentes***

En la figura (5.3), se muestra el comportamiento de la concentración celular de la microalga *Nannochloropsis oculata* con respecto a temperaturas ascendentes a partir de la temperatura de 295 K. Al igual que en el caso de un decremento de temperatura como el presentado anteriormente, al incrementar gradualmente la temperatura del medio de cultivo, se puede apreciar que, a partir de un valor de concentración celular máxima, el valor de la concentración celular comienza a descender hasta llegar a la muerte microalgal.

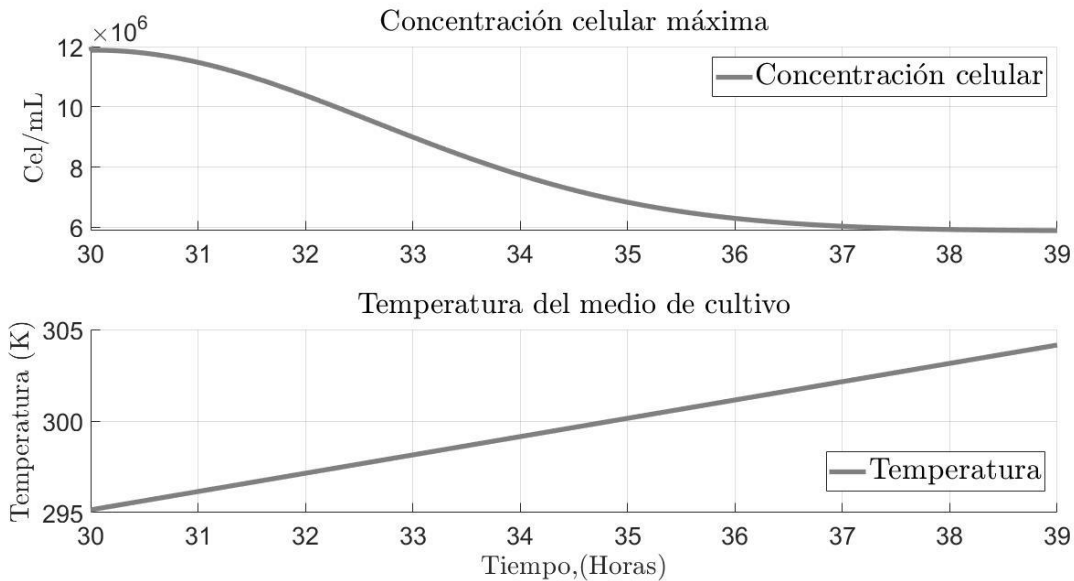


Figura 5.3. Dinámica de la concentración celular con respecto a altas temperaturas.

### ***Dinámica de la concentración celular con respecto a la temperatura***

En la figura (5.4) se ilustra la dinámica del crecimiento celular máximo de la microalga *Nannochloropsis oculata*, con respecto a la temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor. Estos resultados están basados en los datos obtenidos del sistema fotobiorreactor estudiado.

Como se puede apreciar por medio de la relación algebraica del crecimiento celular planteado, se obtiene la relación de la concentración de celular máxima, en donde el valor máximo se encuentra a 295 K, y a partir de las temperaturas 300 K en adelante la concentración celular se minimiza. Mismo caso sucede a temperaturas por debajo de 290 K en la zona de decremento térmico.

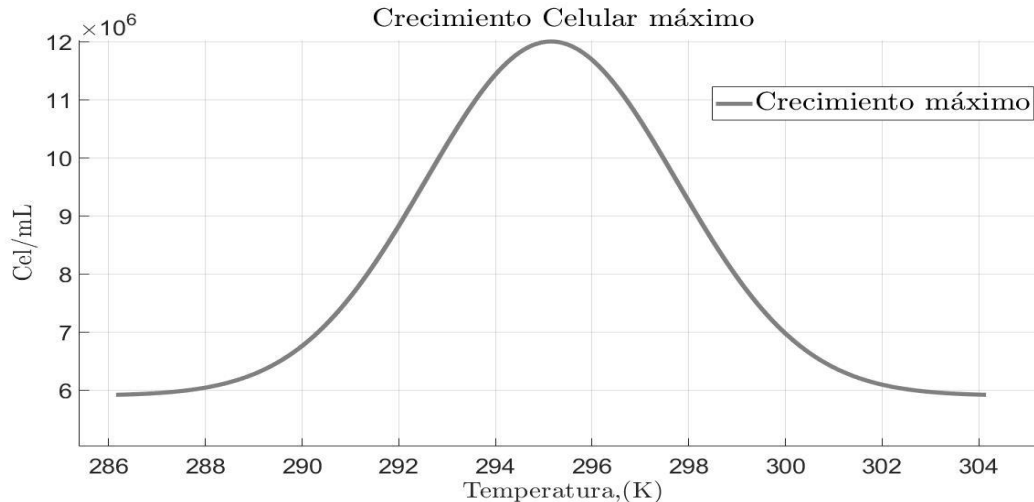


Figura 5.4. Dinámica de la concentración celular con respecto a la temperatura.

## 5.2. Descripción de las simulaciones realizadas

Se realizaron dos pruebas de control en simulación para cada una de las estrategias de control reportadas, la primera es una prueba de regulación, en la cual la referencia se sitúa a 297.15 K (24°C), que es la temperatura en la que se presenta mejores resultados en la tasa crecimiento de la microalga *Nannochloropsis oculata*. Este tipo de prueba fue realizada ya que son las condiciones en las que por lo general se opera el fotobiorreactor bajo una experimentación habitual. La segunda prueba es una de seguimiento de trayectoria en la cual la referencia varía a lo largo del tiempo de simulación entre 293 K (20°C) y 300 K (27°C) que son los rangos de experimentación que en forma regular se aplican en el fotobiorreactor estudiado. La prueba de seguimiento se realizó con la finalidad de conocer el desempeño de los controladores bajo condiciones inusuales en una experimentación. Cabe resaltar que para todas las pruebas presentadas se consideró una temperatura del laboratorio constante de 300.15 K (27°C), así como un ciclo de trabajo de la iluminación interna al 80% de su capacidad y se consideró un tiempo de simulación de 42 horas considerando que en este intervalo se pueden ver mejores resultados debido a que la dinámica de las temperaturas consideradas del fotobiorreactor es relativamente lenta.

## 5.3. Controlabilidad del sistema

Para saber si el sistema del fotobiorreactor es controlable, se procedió a realizar las pruebas de controlabilidad del sistema considerando restricciones en la temperatura ambiente, ya que de acuerdo a la zona geográfica donde está ubicado el sistema es bastante improbable que la temperatura del medio ambiente rebase los 308.15 K (35°C) o que se encuentre por debajo de los 282.15 K (9°C), de acuerdo con los datos climatológicas del Servicio meteorológico Nacional.

Para realizar este análisis se procedió a linealizar el sistema considerando la forma canónica de modelo de espacio de estados, representado en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX\end{aligned}\tag{5.1}$$

Por lo tanto, para conocer si el sistema es controlable, se plantea la siguiente matriz:

$$Cont = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]\tag{5.2}$$

Donde si esta matriz es de rango completo, significa que el sistema es controlable.

Tomando en cuenta que nuestro sistema solo cuenta con tres estados, la matriz de controlabilidad queda de la siguiente manera:

$$Cont = [B \ AB \ A^2B]\tag{5.3}$$

### 5.3.1. Sistema linealizado considerando una temperatura ambiente de 282.15 K

A continuación, se presentan los valores numéricos de la matriz de los estados del sistema (representados por A) y de las salidas del mismo (representados por C) además del vector de las entradas del sistema (representados por B).

$$A = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.0018 & 0 \\ 2.477 \times 10^{-4} & -0.002 & -0.0049 \\ 0.002 & 1.499 & -5.0690 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5691 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 1 \ 0];\tag{5.4}$$

Por lo tanto, la matriz de controlabilidad queda expresada de la siguiente manera:

$$cont = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0126 & 0.0639 \\ 2.5691 & -13.0229 & 65.9948 \end{bmatrix}\tag{5.5}$$

Como la matriz de controlabilidad es de rango completo, el sistema es controlable.

### 5.3.2. Sistema linealizado considerando una temperatura ambiente de 308.15 K

De la misma manera que en la sección anterior, se presentan los valores numéricos de la matriz de los estados del sistema (representados por A) y de las salidas del mismo (representados por C) además del vector de las entradas del sistema (representados por B).

$$A = \begin{bmatrix} -0.0019 & 0.0018 & 0 \\ 0.0002 & -0.002 & -0.0049 \\ 0.002 & 1.499 & -5.0690 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5691 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 1 \ 0];\tag{5.6}$$

Por lo tanto, la matriz de controlabilidad queda expresada de la siguiente manera:

$$cont = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0126 & 0.0639 \\ 2.5691 & -13.0229 & 65.9948 \end{bmatrix}.\tag{5.7}$$

Como la matriz de controlabilidad es de rango completo, el sistema es controlable.

### 5.3.3. Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

Un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), es un conjunto de tres tipos de acciones de control, la proporcional, la integral y la derivativa. A continuación, se presenta una breve descripción de cada una de ellas:

- *Acción proporcional:* Este tipo de acción proporciona una salida del controlador, la cual es proporcional al error, la cual matemáticamente se representa de la siguiente manera:

$$u_p(t) = k_p \cdot e(t) \quad (5.8)$$

Donde  $u_p$  es la acción de control proporcional,  $k_p$  es la constante de proporcionalidad ajustable de la acción de control y  $e$  es el error producto de la diferencia entre la salida del controlador y una referencia.

- *Acción integral:* Esta acción proporciona una salida del controlador que es proporcional al error acumulado, lo que presenta que esta acción tiene una dinámica lenta en el controlador. La representación matemática está representada por:

$$u_i(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau = \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.9)$$

Donde  $u_i$  es la acción de control integral,  $k_i$  es la constante ajustable de la acción integral,  $T_i$  es el tiempo integral y  $e$  es la dinámica del error que va desde un tiempo igual a cero hasta un tiempo finito.

- *Acción derivativa:* Este tipo de acción de control tiene la característica de ser previsiva, ya que promueve una acción de control más rápida, debido a la velocidad de dicha acción, esta puede llegar a amplificar las señales de ruido en el sistema y en consecuencia la saturación en los actuadores de dicho sistema. La representación matemática de esta acción es la siguiente:

$$u_d(t) = k_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.10)$$

Donde  $u_d$  es la acción de control derivativa,  $k_p$  es la constante ajustable de la acción proporcional,  $T_d$  es el tiempo derivativo y  $e$  es la dinámica del error.

Por lo tanto, la expresión matemática del controlador PID está dada por la sumatoria de las tres acciones de control anteriormente mencionadas, dicha representación es la siguiente:

$$u(t) = k_p \cdot e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.11)$$

### 5.3.3.1 Descripción general del controlador PID planteado.

La figura (5.5) representa el diagrama de control de temperatura del fotobiorreactor de columna vertical estudiado, donde se consideran dos controladores PID (Proporcional Integral Derivativo) en paralelo, para controlar la temperatura de entrada del intercambiador de calor, uno de ellos (PID 2) es para controlar la temperatura manipulando el enfriador del intercambiador de calor y el otro (PID 1) es para controlar la temperatura manipulando la resistencia eléctrica que se considera como medio de calefacción. La elección entre los controladores a utilizar se produce mediante dos condicionales que manipulan un interruptor, el cual se encuentra abierto cuando la temperatura del medio de cultivo ( $T_w$ ) es menor que la temperatura del medio deseada ( $T_{wd}$ ) y cuando el interruptor se encuentra cerrado la temperatura del medio de cultivo ( $T_w$ ) es mayor que la temperatura deseada ( $T_{wd}$ ).

Los valores de las ganancias de los controladores PID fueron obtenidos por medio de la herramienta de sintonización de *simulink* del software Matlab, los cuales son presentados en seguida:

Contante proporcional (Kp):	PID1 = 5.6343;	PID2 = 3.0296;
Contante integral (Ti):	PID1 = 0.0798;	PID2 = 0.3036;
Constante derivativa (Td):	PID1 = 31.9879;	PID2 = 0.0154;

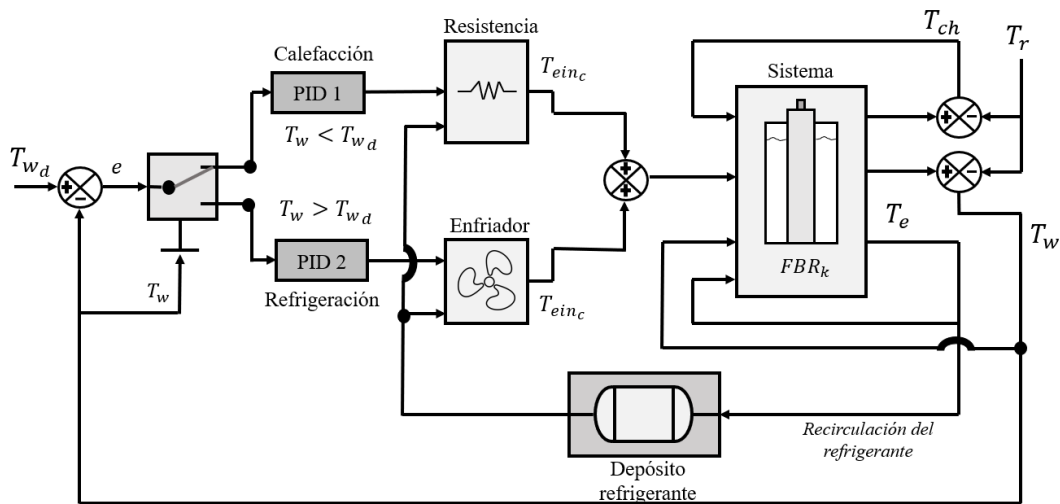


Figura 5.5 Diagrama de control PID de la temperatura del medio de cultivo microalgal del fotobiorreactor.

### 5.3.4. Controlador Predictivo por Modelo (MPC)

Un controlador Predictivo por Modelo (MPC), es un controlador que se caracteriza por contar con un modelo matemático de referencia para predecir las salidas futuras del sistema. Este modelo es

utilizado con la finalidad de desarrollar una secuencia de control, de manera que sea posible minimizar una función objetivo.

El control MPC cuenta con una estrategia de horizonte deslizante, la cual se desplaza en cada iteración del controlador y es la encargada de proveer de una retroalimentación al controlador. De acuerdo a este horizonte únicamente es necesario aplicar la primera señal de control calculada. Esta señal de control puede estar acotada a diversas restricciones, ya sea que se consideren en los actuadores o en las variables de control.

Nota: La teoría correspondiente a la metodología de control MPC se presenta en la sección E de los apéndices.

### 5.3.5. Desarrollo del control predictivo

Para el desarrollo del controlador se definió un horizonte de predicción de 60 ( $N_p = 60$ ) y un horizonte de control de 10 ( $N_c = 10$ ), esto debido a que la dinámica de la temperatura del sistema tiende a ser moderadamente lenta, por lo que se consideraron valores numéricos grandes de los horizontes del controlador.

Para el desarrollo del controlador lineal se considera un espacio de estados continuo del sistema fotobiorreactor (ecuación 5.12), el cual es calculado en la sección 5.3.5:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0019 & 0.0018 & 0 \\ 0.0002 & -0.002 & -0.0049 \\ 0.002 & 1.499 & -5.0690 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5691 \end{bmatrix}; \quad (5.12)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0];$$

Discretizando las matrices de espacio de estados continuo del fotobiorreactor con un tiempo de muestreo de 0.1, se obtiene la siguiente representación discreta del sistema linealizado (ecuación 5.13):

$$A = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.0002 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.9998 & -0.0004 \\ 0.0002 & 0.1176 & 0.6023 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ -0.0001 \\ 0.2015 \end{bmatrix}; \quad (5.13)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0];$$

El modelo de espacio de estados aumentados es el siguiente (ecuación 5.14):

$$A = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.0002 & -0.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.9998 & -0.0004 & 0 \\ 0.0002 & 0.1176 & 0.6023 & 0 \\ 0.0000 & 0.9998 & -0.0004 & 1.0000 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -0.0000 \\ -0.0001 \\ 0.2015 \\ -0.0001 \end{bmatrix}; \quad (5.14)$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1];$$

Considerando la representación del modelo de espacio de estados aumentado, se generan las matrices  $F$  y  $\phi$ , las cuales están representados en las siguientes ecuaciones (5.15 – 5.16):

$$F_{60 \times 4} = \begin{bmatrix} 1.99 \times 10^{-5} & 0.9997 & -3.84 \times 10^{-4} & 1.0000 \\ 5.97 \times 10^{-5} & 1.9992 & -0.0010 & 1.0000 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0347 & 58.4272 & -0.0550 & 0 \\ 0.0358 & 59.4076 & -0.0559 & 1.0000 \end{bmatrix}; \quad (5.15)$$

$$\phi_{60 \times 10} = \begin{bmatrix} -5.35 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1.84 \times 10^{-4} & -5.35 \times 10^{-5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -0.0140 & -0.0137 & -0.0135 & -0.0132 & \dots & -0.0120 & -0.0118 \\ -0.0142 & -0.0140 & -0.0137 & -0.0135 & \dots & -0.0123 & -0.0120 \end{bmatrix}; \quad (5.16)$$

Para obtener una solución óptima de la señal de control es necesario vincular la variable de estados  $x(k_i)$  del sistema con respecto a la señal de referencia  $r(k_i)$ . Por la tanto es necesario obtener los valores numéricos de  $\phi^T \phi$ ,  $\phi^T F$  y  $\phi \bar{R}_s$ , estos resultados son mostrados en las ecuaciones (5.17 – 5.19).

$$\phi^T \phi_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} 0.0040 & 0.0039 & 0.0038 & 0.0037 & \dots & 0.0032 & 0.0031 \\ 0.0039 & 0.0038 & 0.0037 & 0.0036 & \dots & 0.0031 & 0.0030 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0.0032 & 0.0031 & 0.0030 & 0.0030 & \dots & 0.0026 & 0.0025 \\ 0.0031 & 0.0030 & 0.0029 & 0.0029 & \dots & 0.0025 & 0.0024 \end{bmatrix}; \quad (5.17)$$

$$\phi^T F_{10 \times 4} = \begin{bmatrix} -0.0079 & -17.1828 & 0.0160 & -0.4231 \\ -0.0077 & -16.7381 & 0.0155 & -0.4088 \\ -0.0075 & -16.2941 & 0.0151 & -0.39483 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.0066 & -14.0912 & 0.0131 & -0.3283 \\ -0.0064 & -13.6559 & 0.0127 & -0.3157 \\ -0.0062 & -13.2229 & 0.0123 & -0.3034 \end{bmatrix}; \quad (5.18)$$

$$\phi^T \bar{R}_{10 \times 1} = \begin{bmatrix} -0.4231 \\ -0.4088 \\ -0.39483 \\ \vdots \\ -0.3283 \\ -0.3157 \\ -0.30344 \end{bmatrix}; \quad (5.19)$$

Una vez realizados los cálculos de  $\phi^T \phi$ ,  $\phi^T F$  y  $\phi \bar{R}_s$ , es posible encontrar la acción de control óptima  $\Delta U$  la cual es calculada en cada instante de la iteración como se muestra en la ecuación (5.20).

$$\Delta U_{k_i 10 \times 1} = (\phi^T \phi)^{-1} (\phi \bar{R}_s - \phi^T F(k_i)). \quad (5.20)$$



Para este caso particular al estar utilizando un horizonte de control y sólo considerar un actuador, el vector de la acción de control tendrá las dimensiones de diez filas y una columna.

### 5.3.5.1 Descripción general del controlador MPC planteado

En la figura (5.6) se presenta la estructura del control predictivo diseñado para resolver el problema de control de temperatura planteado. Como se puede apreciar en este controlador se considera un interruptor el cual es accionado cuando la temperatura del medio de cultivo ( $T_w$ ) es mayor que la temperatura de referencia ( $T_{wd}$ ). El propósito de este interruptor es el de realizar un cambio de actuador para manipular la temperatura de entrada del intercambiador de calor, por si es necesario enfriar o calentar dicha temperatura manipulada. Una vez tomada la decisión, esta temperatura del intercambiador de calor entra al sistema con la finalidad de controlar la temperatura del medio de cultivo, para posteriormente retroalimentar al sistema y con ello ciclar esta acción de control.

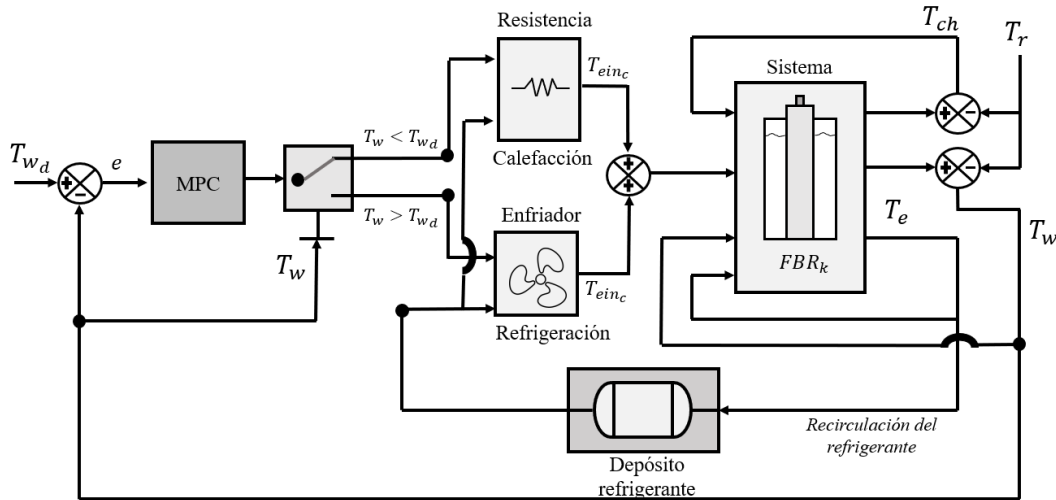


Figura 5.6 Diagrama de control MPC de la temperatura del medio de cultivo microalgal del fotobiorreactor.

## 5.4. Resultados de las simulaciones de control

En la presente sección, se presentan los resultados en simulación de las dos pruebas realizadas para cada metodología de control. Primeramente, se presentan las pruebas de regulación de temperatura y posteriormente se presentan las pruebas de seguimiento de trayectoria (ambas pruebas detalladas en apartados previos).

### 5.4.1. Simulación de los controladores ante pruebas de regulación

Se realizaron dos simulaciones de regulación de temperatura del medio de cultivo microalgal, ambas pruebas se realizaron tomando en cuenta las mismas condiciones para cada prueba, una de ellas fue considerando la metodología de control PID planteada y la otra con respecto a la metodología de control MPC.

### 5.4.1.1 Resultados con respecto a un controlador PID

#### *Control de temperatura del medio de cultivo microalgal basado en un controlador PID*

En la figura (5.7), se presenta la dinámica de la temperatura del medio de cultivo microalgal con respecto a un proceso de regulación, donde la primera gráfica presenta la dinámica de la temperatura del medio de cultivo con una línea de color gris y en color negro la temperatura de referencia la cual se encuentra a 297 K (24°C aproximadamente). Por otro lado, en la gráfica inferior muestra la dinámica de la temperatura de entrada del intercambiador de calor que es la variable que se está manipulando en la simulación. Con respecto a los resultados, el sistema alcanza la temperatura de referencia deseada a las 5 horas de simulación por medio de la metodología del control PID.

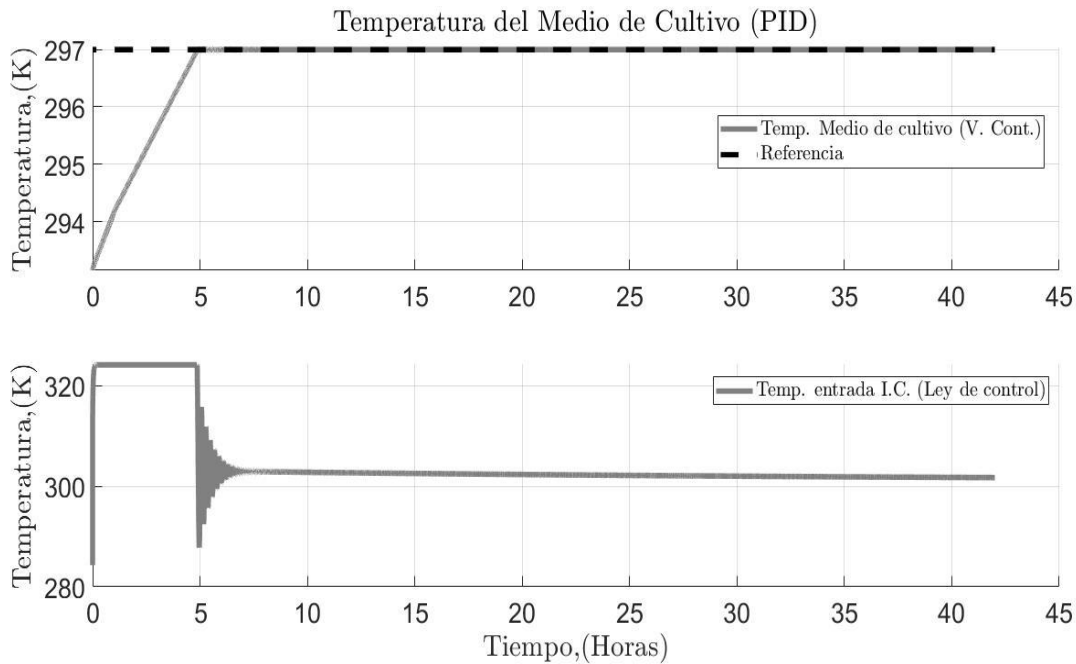


Figura 5.7. Resultados del control PID por regulación.

Nota: La dinámica de la temperatura del glicol a la entrada de intercambiador de calor esta descrita en el apartado “D” de los apéndices.

#### *Dinámica del error del control de temperatura mediante el controlador PID*

La figura (5.8), representa la dinámica del error de la temperatura del medio de cultivo microalgal con respecto a la temperatura referencia al emplear una metodología del controlador PID, en ella es posible apreciar que a partir de la hora 5 de simulación el error entra en un estado estacionario presentando un pequeño offset con respecto al cero.

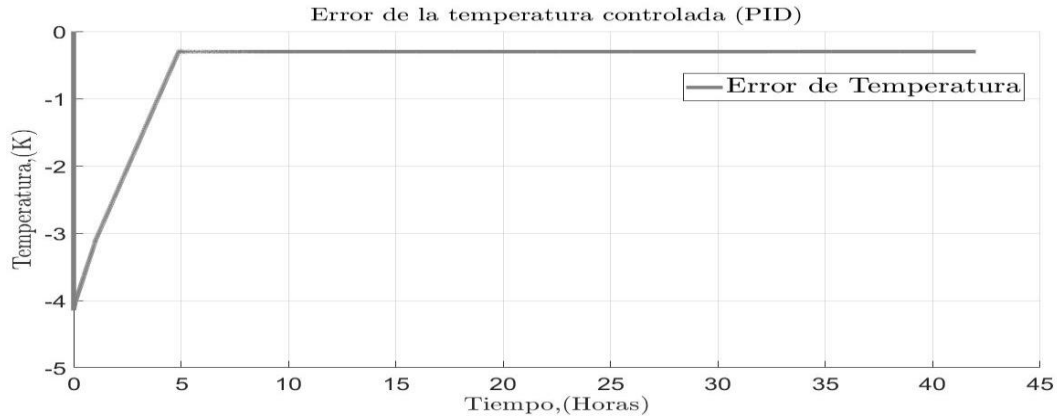


Figura 5.8. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia del controlador PID.

### 5.4.1.2 Resultados con respecto a un controlador MPC

#### *Control de temperatura del medio de cultivo microalgal basado en un controlador MPC*

En la figura (5.9) se ilustra la dinámica de la temperatura del medio de cultivo microalgal con respecto a una referencia de temperatura fija a 297 K, utilizando un control predictivo por modelo, donde la gráfica superior muestra con una línea en color gris a la temperatura del medio de cultivo, y en color negro se presenta la temperatura de referencia. Por otro lado, en la gráfica inferior se muestra la ley de control del sistema, la cual para este caso es la temperatura de entrada del intercambiador de calor.

De acuerdo a estos resultados gráficos se puede apreciar como la temperatura controlada, en las primeras dos horas de simulación tiene un comportamiento ascendente, debido a que su condición inicial es diferente a la temperatura de referencia, por lo que la variable manipulada presenta una dinámica similar con el fin de que la temperatura controlada llegue lo más pronto a la referencia sin tener que saturar al actuador del sistema.

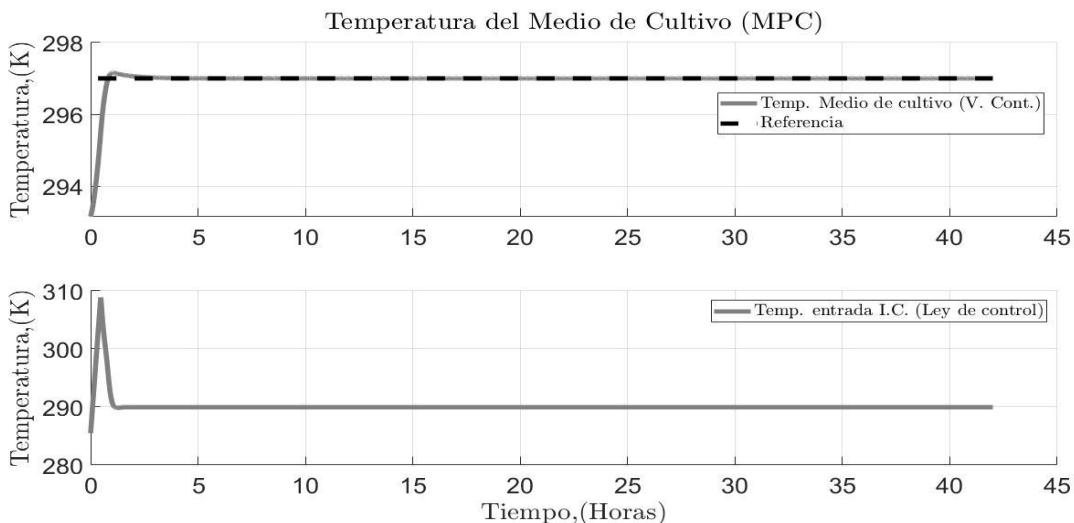


Figura 5.9. Resultados del control MPC por regulación.

### *Dinámica del error del control de temperatura mediante el controlador MPC*

Con respecto a la simulación realizada, se presentan los resultados gráficos de la dinámica del error de la temperatura del medio de cultivo microalgal con respecto a la temperatura de referencia deseada (figura 5.10). Donde el controlador comienza a llevar a este error lo más cercano a cero posible, lo cual es posible a partir de las dos primeras horas de simulación en que el error tiende a un estado estacionario muy cercano a cero.

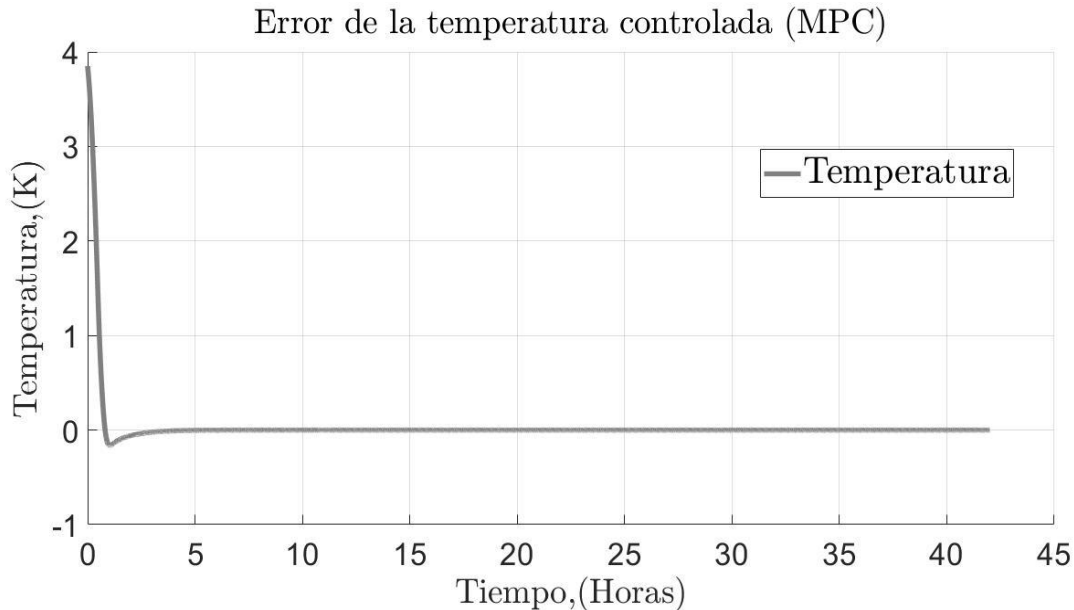


Figura 5.10. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia del controlador MPC.

### **5.4.2. Simulación de los controladores ante pruebas de seguimiento de trayectoria**

Se realizaron dos simulaciones de seguimiento de trayectoria tomando como referencia para los controladores a la temperatura del medio de cultivo microalgal, ambas pruebas se realizaron tomando en cuenta las mismas condiciones para cada prueba, una de ellas fue considerando la metodología de control PID planteada y la otra con respecto a la metodología de control MPC.

#### **5.4.2.1 Resultados con respecto a un controlador PID**

##### ***Control de temperatura del medio de cultivo microalgal basado en un controlador PID***

A continuación, en la figura (5.11) se muestra el comportamiento de la temperatura del medio de cultivo microalgal con respecto a una referencia de temperatura variable en el tiempo, considerando un margen de cambio de la referencia entre 293 K (20°C) y 300 K (27°C). En la gráfica superior se exhibe la temperatura del medio de cultivo microalgal representada por la línea en color gris y la referencia se encuentra representada por la línea discontinua en color negro. Posteriormente en la gráfica inferior se presenta la ley de control del sistema que es la temperatura de entrada del intercambiador de calor.

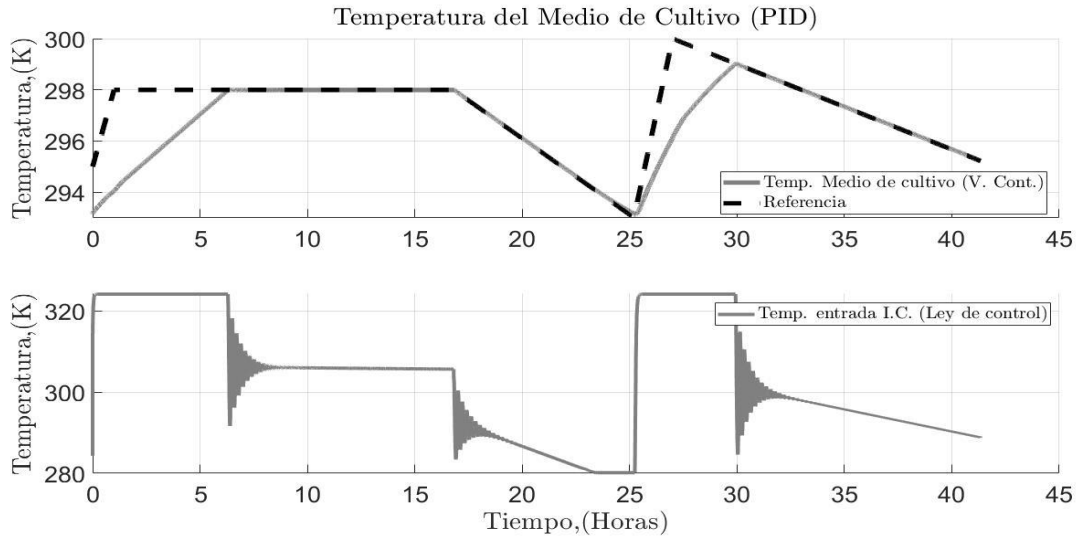


Figura 5.11. Resultados del control PID por seguimiento de trayectoria.

### ***Dinámica del error del control de temperatura mediante el controlador PID***

En la figura (5.12) se ilustra la dinámica del error de la temperatura del medio de cultivo microalgal con respecto a la temperatura de referencia. De acuerdo a los resultados gráficos se puede ver que existe un pequeño offset del error con respecto al cero.

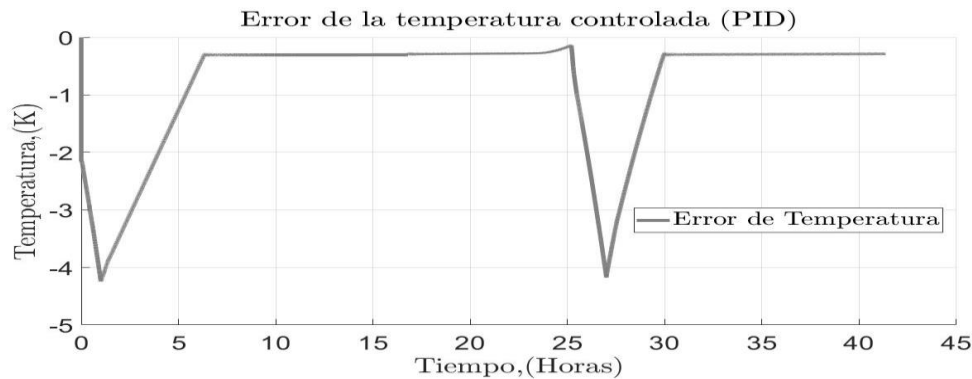


Figura 5.12. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia variante del controlador PID.

### **5.4.2.2 Resultados con respecto a un controlador MPC**

#### ***Control de temperatura del medio de cultivo microalgal basado en un controlador MPC***

En la figura (5.13) se presenta la dinámica de la temperatura del medio de cultivo microalgal (línea de color gris) con respecto a una referencia de temperatura variante en el tiempo (línea discontinua de color negro). En la gráfica superior de la figura se presenta dicho comportamiento y posteriormente en la gráfica inferior se presenta la dinámica de la temperatura de entrada del intercambiador de calor, que para este caso es considerada como la variable manipulada del sistema.

De acuerdo a la dinámica de la variable manipulada se puede observar que a pesar de los cambios de referencia esta variable nunca llega a saturarse para que la temperatura del medio de cultivo siga dicha referencia, considerando que la temperatura de referencia se encuentra en los rangos comunes de operación del sistema.

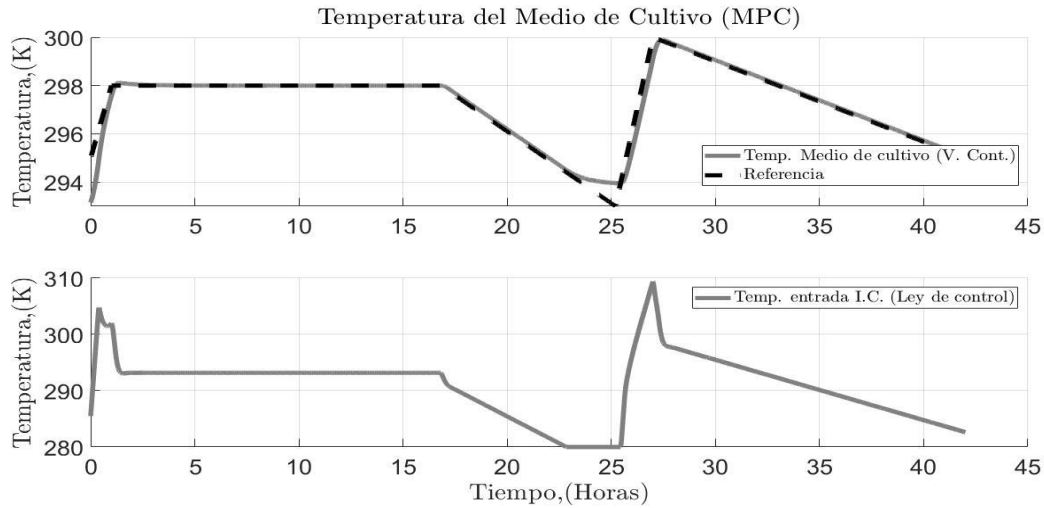


Figura 5.13. Resultados del control MPC por seguimiento de trayectoria.

### ***Dinámica del error del control de temperatura mediante el controlador MPC***

Con respecto a las simulaciones realizadas referentes al seguimiento de trayectoria, de acuerdo a un controlador predictivo por modelo presentadas anteriormente, en la figura (5.14) se ilustra el comportamiento del error que es producto de la diferencia que existe entre la temperatura del medio de cultivo (considerada como la variable controlada) y la temperatura de referencia. Con lo cual, si bien es cierto que, en cada cambio de referencia presentado en la simulación, la tendencia de dicho error diverge de cero, con el paso del tiempo este tiende a ser cero debido a la acción de control realizada.

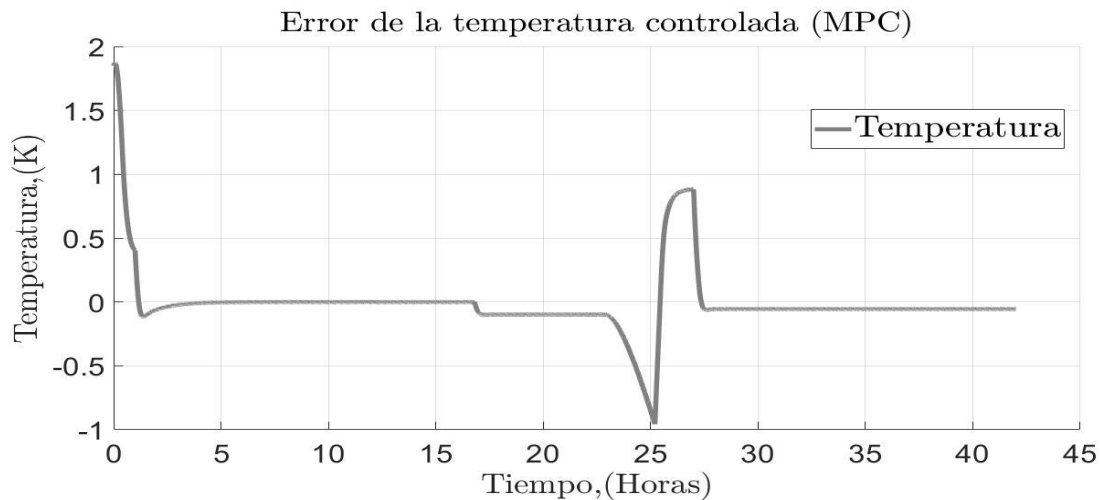


Figura 5.14. Error de la temperatura del medio de cultivo respecto a la temperatura de referencia variante del controlador MPC.

## 5.5. Comparativa de los controladores

De acuerdo a las dos metodologías de control presentadas en este trabajo, se desarrolló una comparación entre ambas con la finalidad de tener una referencia de qué tipo de control es más adecuado implementar en el sistema del fotobiorreactor estudiado.

### 5.5.1. Comparativa con respecto a las simulaciones de regulación

La comparación realizada con respecto a una situación en la que se considera una referencia de temperatura constante se presenta en la figura (5.15), donde la temperatura de referencia del sistema está representada por la línea discontinua de color azul, la cual permanece con una temperatura constante de 297 K, a lo largo de toda la simulación. Con una línea de color gris se representa la dinámica de la temperatura del medio de cultivo con respecto a la metodología del controlador PID utilizada, la cual presenta una respuesta más lenta en comparación a el controlador MPC, pero evita un sobretiro con respecto a la referencia. Y por último con la línea de color negro se representa dicha temperatura de acuerdo a la metodología del controlador MPC la cual alcanza la referencia de manera más rápida que con el controlador PID, pero con un pequeño sobretiro de 0.2 K.

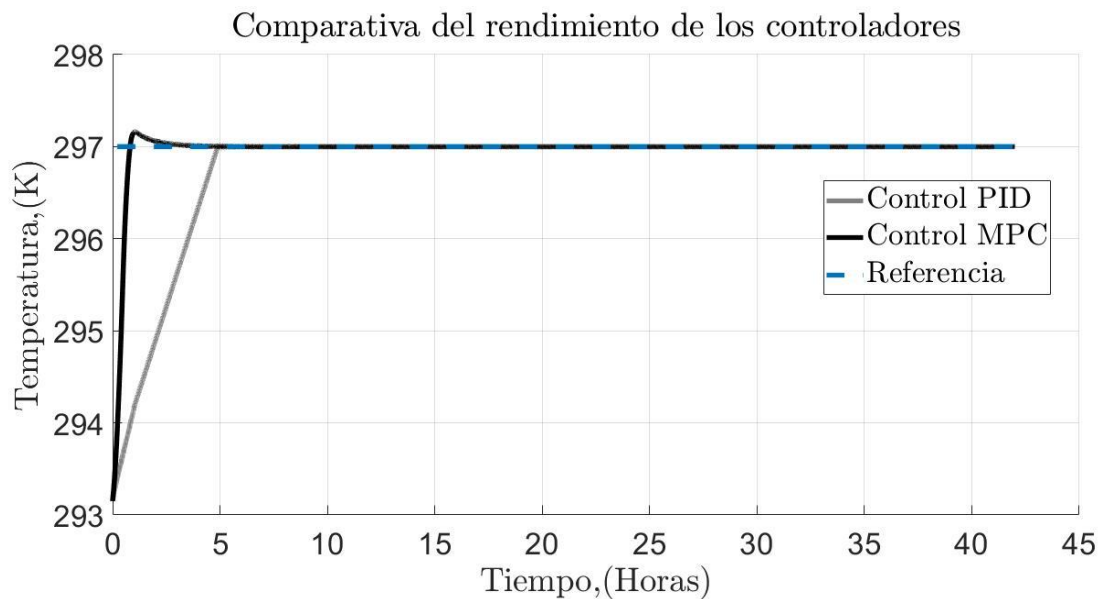


Figura 5.15. Comparativa de los controladores con respecto a las simulaciones de regulación.

### 5.5.2. Comparativa con respecto a las simulaciones de seguimiento de trayectoria

A continuación, en la figura (5.16) se muestra el comportamiento de la temperatura del medio de cultivo con respecto a una referencia de temperatura variante en el tiempo, con respecto a las dos estrategias de control planteadas. La línea discontinua en color azul representa la temperatura de referencia, la cual varía entre 293 a 300 K, a lo largo de toda la simulación presentada. En color gris se presenta la dinámica de la temperatura del medio de cultivo con respecto al controlador PID, la cual tiende a poseer un mayor retardo al momento de alcanzar la referencia deseada con respecto a los resultados del controlador MPC (representados con la línea de color negro), los

cuales siguen mejor la referencia desde un inicio, teniendo pocos desfases a medida que se presentan cambios bruscos en la referencia.

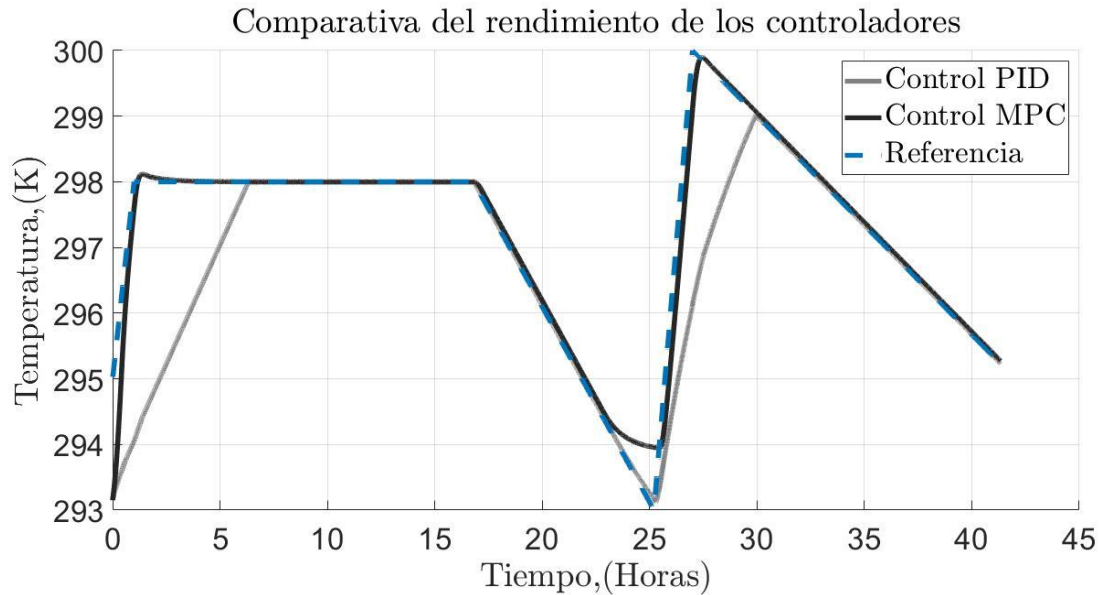


Figura 5.16. Comparativa de los controladores con respecto a las simulaciones de seguimiento de trayectoria.

## 5.6. Índices de desempeño de los controladores

Para comprobar el desempeño de las dos estrategias de control realizadas, se realizó un estudio basado en índices de desempeño para cada controlador con respecto a las simulaciones de regulación y la de seguimiento de trayectoria realizadas. Los índices de desempeño presentados son la Integral del Error Absoluto (IAE), la Integral del Tiempo por el Error absoluto (ITAE), la Integral del Error Cuadrático (ISE), la Integral del Tiempo por el Error Cuadrático (ITSE), la Media del error Cuadrático (MSE) y el Error Medio Cuadrático (MCE). El error para el cálculo de estos índices de desempeño es la diferencia existente entre la variable de control (temperatura del medio de cultivo microalgal) y la referencia.

### 5.6.1. Índices de desempeño con respecto a las simulaciones de regulación.

Los siguientes resultados exhibidos son referentes a la prueba de regulación de temperatura del medio de cultivo aplicados para cada una de las estrategias de control planteadas.

En la parte superior de la tabla (5.1) se presentan los índices de desempeño con respecto al controlador PID y en la parte inferior se presentan los resultados con respecto al control MPC. De acuerdo con dichos datos, se comprueba que el desempeño del controlador MPC presenta mejores resultados en comparación con el controlador PID ya que en el caso del índice MCE en el control MPC son de poco más del 50% de la totalidad del MCE para el controlador PID.



Tabla 5.1. Índices de desempeño con respecto a los controladores aplicados a la regulación.

<i>Arreglo de controladores PID</i>						
Estados	IAE	ITAE	ISE	ITSE	MSE	MCE
$T_w \rightarrow x_2$	$3.4418 \times 10^3$	$4.2044 \times 10^4$	$5.4023 \times 10^3$	$1.7349 \times 10^4$	128.6271	11.3414
<i>Control MPC</i>						
Estados	IAE	ITAE	ISE	ITSE	MSE	MCE
$T_w \rightarrow x_2$	377.5122	137.1950	$1.0019 \times 10^3$	168.9820	23.8553	4.8842

### 5.6.2. Índices de desempeño con respecto a las simulaciones de seguimiento de trayectoria.

En la tabla (5.2), se presentan los resultados de los índices de desempeño con respecto a las simulaciones de seguimiento de trayectoria de ambos controladores, los resultados del control PID se presentan en la parte superior de dicha tabla y los resultados con el controlador MPC se ubican en la parte inferior de la tabla.

Como se puede observar los resultados del desempeño del controlador MPC son de una mayor calidad en comparación a los presentados con el controlador PID, ya que en cada uno de los índices analizados los resultados del control MPC son significativamente menores que los obtenidos con el controlador PID.

Tabla 5.2. Índices de desempeño con respecto a los controladores aplicados al seguimiento de trayectoria.

<i>Arreglo de controladores PID</i>						
Estados	IAE	ITAE	ISE	ITSE	MSE	MCE
$T_w \rightarrow x_2$	$5.5458 \times 10^3$	$8.5330 \times 10^4$	$1.2402 \times 10^4$	$1.5778 \times 10^5$	299.9986	17.3205
<i>Control MPC</i>						
Estados	IAE	ITAE	ISE	ITSE	MSE	MCE
$T_w \rightarrow x_2$	880.7369	$1.7027 \times 10^4$	634.1391	$8.4925 \times 10^3$	15.3396	3.9166

## 5.7. Conclusiones del capítulo

Para resolver la problemática planteada sobre el control de temperatura del medio de cultivo en el fotobiorreactor propuesto, se desarrollaron dos metodologías de control, una de ellas basada en el modelo matemático del fotobiorreactor propuesto (un controlador MPC) y la otras sin considerar modelo matemático alguno (un controlador PID). Estas dos metodologías propuestas son

desarrolladas con la finalidad de obtener un análisis comparativo de ambas metodologías y con ello poder comprobar si es viable la implementación de un control por modelo de referencia en el sistema fotobiorreactor.

Con respecto a las dos estrategias de control térmico desarrolladas, se logró plantear una alternativa de control de temperatura que es viable en el fotobiorreactor estudiado, la cual fue eficiente bajo condiciones de seguimiento de trayectoria o regulación. Así se le dio un enfoque particular al cultivo microalgal en el fotobiorreactor estudiado, debido a que bajo la manipulación de esta temperatura es posible manipular la producción en diversas sustancias que forman parte de la composición del producto final y que cobran importancia dependiendo el sector al cual se quiera comercializar.

Bajo las simulaciones presentadas con respecto al objetivo de regulación de temperatura, el MCE del controlador MPC obtuvo un mejor rendimiento en comparación al controlador PID. Donde se obtuvo un valor de 4.8842 K, mientras que el MCE del controlador PID fue de 11.3414 K, existiendo una diferencia de 6.4572 K con respecto al MCE de cada controlador. Estos resultados demuestran que bajo condiciones de simulación es más recomendable aplicar un controlador MPC para el sistema estudiado.

Analizando los resultados de las simulaciones presentadas con respecto a un seguimiento de trayectoria, el controlador MPC demostró tener un desempeño más adecuado con respecto al controlador PID, bajo estas condiciones de simulación. El MCE del control MPC fue de 3.9166 K, mientras que el del control PID fue de 17.3205 K, existiendo una diferencia de 13.4039 K entre el MCE de cada controlador. Lo anterior refleja cómo el MPC es una opción viable bajo condiciones de seguimiento de trayectoria, ya que se garantiza una dinámica de la temperatura de salida muy similar a la de referencia.

Tomando en cuenta el desempeño de ambos controladores, se pueden rescatar cosas positivas y negativas de cada uno de ellos. Las ventajas de un controlador PID se encuentran en su fácil implementación a sistemas físicos, así como la facilidad de ajuste de ganancias del controlador. Como desventajas de este controlador, la más notoria se presenta en el desempeño del controlador ante pruebas de seguimiento de trayectoria, ya que sus principales fortalezas se encuentran bajo condiciones de regulación. Considerando las ventajas del controlador MPC, estas principalmente radican en la optimización de la acción de control con respecto a predicciones de los estados del sistema, además al ser un controlador con retroalimentación, permitiendo que el desempeño ante diversos objetivos de control tenga un resultado altamente eficiente en comparación al controlador PID. La desventaja de este tipo de controlador radica, en la limitante de trabajar bajo un margen cercano al punto de operación, pero para este trabajo en particular este no es un problema, debido a que bajo las condiciones de trabajo del sistema el controlador tiene un desempeño altamente eficiente. Por último, cabe resaltar que el gasto computacional del control MPC es mucho mayor al del controlador PID.

Cabe resaltar que debido a que no se cuenta con datos experimentales de la relación entre la temperatura del refrigerante a la entrada del intercambiador de calor con respecto al voltaje suministrado a los actuadores del intercambiador, es que se colocó la ley de control del sistema

con respecto a la temperatura del refrigerante a la entrada del intercambiador de calor y no con respecto a los voltajes suministrados a los actuadores del sistema. Esto es debido a que se considera que la dinámica de la temperatura del glicol con respecto al tiempo, tendría un comportamiento semejante al de una ecuación de primer orden, mientras que una representación matemática de la temperatura con relación al voltaje suministrado al actuador tendría un comportamiento altamente no lineal.

Siendo crítico con los resultados presentados, hacen falta validar dichos controladores en condiciones experimentales, ya que es muy común ver cómo los resultados de las simulaciones divergen de los resultados producto de experimentación.

# Capítulo 6. Conclusiones

---

## 6.1. Conclusiones generales

Debido a que en el sistema fotobiorreactor estudiado existían carencias en la estrategia de control de temperatura planteada, es que surge la oportunidad de mejorar dicha estrategia de control. Esto con la finalidad de obtener una producción mayor de biomasa microalgal, además de poder manipular el metabolismo celular de la microalga por medio del manejo de la temperatura del fotobiorreactor. Con el objetivo de obtener un valor económico mayor, además de una mayor comercialización de del producto en los sectores de producción.

En la búsqueda de esta mejora en la estrategia de control térmico, se observó que el control térmico utilizado en este sistema no estaba basado en un modelo matemático del sistema. Por tal motivo es que se plantea resolver dicho problema con base a estrategias de control predictivo basadas en un modelo de referencia.

En este trabajo de investigación se desarrolló un modelo matemático para el sistema fotobiorreactor con iluminación interna y un intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo. El cual se basa en la metodología de los modelos de caja gris para identificación de sistema.

La representación matemática del sistema abarca las dinámicas térmicas, así como la dinámica de la concentración celular en el fotobiorreactor. Por lo que para la representación matemática se realizó para los dos subsistemas (el térmico y el bioquímico) del fotobiorreactor. Dicha representación cuenta con tres ecuaciones diferenciales de las temperaturas del fotobiorreactor y una de la concentración celular de biomasa microalgal del mismo. Además de contar con una relación algebraica de la concentración celular máxima con respecto a la temperatura, que es la que relaciona la concentración celular de biomasa con la temperatura del fotobiorreactor.

El proceso de caracterización del modelo matemático propuesto se realizó de manera separada para el subsistema térmico y el bioquímico. En el caso del subsistema térmico se optó por implementar métodos de estimación paramétrica y de estados basados en la metodología de los filtros de Kalman extendidos. De la cual se implementó un EKF para estimación paramétrica y un DEFK para estimar parámetros y estados. Con respecto a la caracterización del modelo del subsistema bioquímico se implementó una estimación paramétrica heurística. En total se estimó un total de 17 parámetros en todo el modelo matemático en general y fue posible validar este modelo con respecto a datos experimentales del sistema y analizando las estimaciones con respecto a un análisis de los índices de desempeño de cada estimación.

Con respecto a la estrategia de control térmico del sistema, se plantearon dos estrategias de control una basada en el modelo matemático propuesto (Controlador MPC) y la otra sin considerar un modelo matemático (Controlador PID). Estas dos estrategias se plantean con la finalidad de realizar un análisis comparativo de ambos controladores y comparar su desempeño en condiciones de simulación con respecto al seguimiento de referencia y regulación de temperatura del medio de cultivo. En ambas simulaciones el controlador MPC tuvo un mejor desempeño en comparación al controlador PID. Esto en gran medida se debe a que el MPC es una técnica de control en lazo

cerrado que realiza una optimización de la ley de control del sistema, bajo una ventana de tiempo que permite llevar a la temperatura del medio de cultivo lo más cercano posible a la señal de referencia.

Resumiendo, se logró desarrollar un modelo matemático que refleja la dinámica del sistema fotobiorreactor propuesto. Este modelo matemático fue validado con respecto a datos experimentales y posteriormente fue implementado en un controlador MPC para resolver el problema de control de temperatura del fotobiorreactor y con ello mejorar las concentraciones celulares de biomasa microalgal. Además de poder manipular el metabolismo celular de la microalga *Nannochloropsis oculata*, con la intención de mejorar su valor económico al generar interés en sectores productivos como pueden ser farmacológicos, nutricionales, acuícolas o biocombustibles. Siendo todo este conjunto de actividades la principal contribución del trabajo.

Por lo tanto, la originalidad de este trabajo radica principalmente en dos aspectos importantes.

- Modelo matemático desarrollado: En este tipo de sistemas de fotobiorreactores con iluminación interna, no existen modelos matemáticos que representen la dinámica de la temperatura del sistema con respecto a la concentración celular. Esto es debido a que este tipo de sistemas son relativamente nuevos.
- Control de temperatura por modelo de referencia: Debido a la escasez de modelos matemáticos en los fotobiorreactores con iluminación interna y a la poca investigación de control invertida en este tipo de sistemas es que por lo general siempre se utilizan métodos de control PID. Por lo tanto, al presentar técnicas de control por modelo de referencia es que se hacen grandes avances referentes a estudios de control en este tipo de sistemas.

De acuerdo a estos dos aspectos presentados es que este trabajo sirve como una base bibliográfica para diversos estudios tecnológicos referentes al control, en procesos de producción de microalgal en fotobiorreactores con iluminación interna.

Cabe resaltar que gracias a la estancia realizada en el TecNM de Mazatlán Sinaloa en colaboración con el Centro de Investigación en Alimentación y Desarrollo del estado de Sinaloa CIAD, fue posible tener un mayor entendimiento de los aspectos teóricos referentes a los conceptos de bioquímica y biología marina presentados. Sin este apoyo científico y económico, así como del personal de ambos institutos este tema no hubiera sido desarrollado de la manera en que se presenta en este estudio.

## **6.2. Aportaciones del trabajo**

- Se desarrolló un modelo matemático para el fotobiorreactor de columna vertical con iluminación interna y un intercambiador de calor inmerso en el medio de cultivo, con la finalidad de ser un modelo representativo del sistema con el cual sea posible realizar simulaciones capaces de aportar a los estudios de fisiología microalgal realizados en el TecNM.

- Se presenta una alternativa de estimación de estados y parámetros basada en la metodología de los filtros de Kalman para el fotobiorreactor de columna vertical del Instituto Tecnológico de Mazatlán.
- Se desarrollaron dos alternativas del control de temperatura del medio de cultivo microalgal en simulación, una de ellas diseñada a partir del modelo matemático desarrollado del fotobiorreactor. Las cuales son un parte-aguas para la aplicación de diversos estudios ya sean vistas desde el punto control o el diagnóstico de fallas para el sistema en general.

### **6.3. Sugerencia de futuros trabajos**

Con respecto a fines de modelado:

- Sería prudente realizar un análisis más profundo del sistema bioquímico del fotobiorreactor, con la finalidad de tener relaciones de las características de la microalga como puede ser la cantidad de lípidos que se producen con base a la cantidad de concentración celular de biomasa microalgal, así como otras características que dan diferente valor al producto final.

Para trabajos futuros con respecto a fines de control:

- Es conveniente obtener la relación que existe entre el voltaje que se suministra a los actuadores y el valor de temperatura obtenido a la entrada del intercambiador de calor, para representar de una manera más adecuada la ley de control de las metodologías de control aplicadas.
- Sería adecuado realizar pruebas de control multivariable, con respecto a los ciclos de trabajo que para este estudio se consideraron constantes, al igual que seguir utilizando la temperatura del refrigerante a la entrada del intercambiador de calor y el porcentaje de apertura de la válvula que regula el paso de refrigerante en el intercambiador de calor.
- Es conveniente considerar para futuras pruebas valores de ruido en las mediciones de las salidas de los estados del sistema, así como perturbaciones en el sistema térmico que permitan abordar un estudio de control tolerante a fallas del sistema térmico de un fotobiorreactor de columna vertical.
- Como trabajos futuros es prudente realizar pruebas de control no lineal de control de temperatura del medio de cultivo del fotobiorreactor, con la finalidad de aprovechar la riqueza del modelo matemático propuesto.

# Bibliografía

---

- [Abdollahpouri et al., 2017] Abdollahpouri, M., Haring, M., Johansen, T. A., Takács, G., and Rohal-Ilkiv, B. (2017). Nonlinear state and parameter estimation using discrete-time double Kalman filter. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):11632-11638.
- [Acién et al., 2017] Acién, F., Molina, E., Reis, A., Torzillo, G., Zittelli, G., Sepúlveda, C., and Masojídek, J. (2017). Photobioreactors for the production of microalgae. In *Microalgae-Based Biofuels and Bioproducts*, pages 1-44. Elsevier.
- [Aketouane et al., 2016] Aketouane, Z., Bah, A., Malha, M., and Ansari, O. (2016). Effect of emissivity on the thermal behavior of a double wall façade with a closed cavity. In 2016 *International Renewable and Sustainable Energy Conference (IRSEC)*. IEEE.
- [Águila M., 2018] Águila L. Moisés Ernesto, (2017). “Modelado de la transferencia de calor en el bioproceso de producción de biomasa microalgal (nannochloropsis sp)”. Informe Técnico De Residencia Profesional. Instituto Tecnológico de Mazatlán.
- [Aleman et al., 2017] Gibran Sidney Aleman, Nava Koenraad Muylaert, Sara Paulina Cuellar Bermudez, Orily Depraetere, Bruce Rittmann and Roberto Parra Saldívar Dries Vandamme Reinaldo (2017). “Two-stage cultivation of Nannochloropsis oculata for lipid production using reversible alkaline flocculation”. “*Bioresource Technology*”, Volume 226, February, pp. 18-23.
- [Banerjee et al, 2019] S. Banerjee and S. Ramaswamy, “Comparison of productivity and economic analysis of microalgae cultivation in open raceways and flat panel photobioreactor”, *Bioresource Technology Reports*, vol. 8, p. 100328, Dec. 2019.
- [Barzegari et al., 2017] Barzegari, M. M., Alizadeh, E., and Pahnabi, A. H. (2017). Grey-box modeling and model predictive control for cascade-type PEMFC. *Energy*, 127:611-622.
- [Calderón, 2016] Calderón, B. Alicia (2016). Balance de Energía. *UTN Facultad Regional La Plata Integración III*
- [Carreño et al., 2019] J.J. Carreño-Zagarra, J.L. Guzmán, J.C. Moreno, R. Villamizar (2019). Linear active disturbance rejection control for a raceway photobioreactor. “Control Engineering Practice”, Practice 85 (2019) 271–279.
- [Chen et al., 2010] Chen, B., Yu, Y., and Huang, J. (2010). Effect of microwave radiation on the antioxidant responses of *nannochloropsis oculata*. In 2010 *4th International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering*. IEEE.
- [Converti et al., 2009] Attilio Converti and Alessandro A. Casazza and Erika Y. Ortiz and Patrizia Perego and Marco Del Borghi, “Effect of temperature and nitrogen concentration on the growth and lipid content of Nannochloropsis oculata and Chlorella vulgaris for biodiesel production”, “*Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*”, vol. 48, no. 6, pp 1146 - 1151, jun. 2009

- [Deprá et al., 2019] Deprá, M. C., Mérida, L. G., de Menezes, C. R., Zepka, L. Q., and Jacob-Lopes, E. (2019). A new hybrid photobioreactor design for microalgae culture. *Chemical Engineering Research and Design*, 144:1-10.
- [Díaz et al., 2019] Díaz, J. P., Inostroza, C., and Fernández, F. A. (2019). Fibonacci-type tubular photobioreactor for the production of microalgae. *Process Biochemistry*, 86:1-8.
- [Etheridge, 2011] Etheridge, D. (2011). Natural ventilation of buildings: theory, measurement and design. John Wiley & Sons.
- [Farza et al, 2019] Farza, M., Rodríguez Mata, A., Robles-Magdaleno, J., and M'Saad, M. (2019). A new filtered high gain observer design for the estimation of the component's concentrations in a photobioreactor in microalgae culture. "*IFAC-PapersOnLine*", 52(1), 904{909. doi: 10.1016/j.ifacol.2019.06.177
- [Fernández, I. 2014] Fernández, F. A., Sevilla, J. F., Grima, E. M. (2013). Photobioreactors for the production of microalgae. *Reviews in Environmental Science and Bio/Technology*, 12(2), 131-151.
- [Grimaud et al, 2015] G. M. Grimaud and Valerie Le Guennec, (2015) "Modelling the effect of temperature on phytoplankton growth across the global ocean72," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 1, pp. 228–233, 2015.
- [Halimi et al., 2014] Halimi, M.I.E, Shukor, M.S. Johari, W.L.W. and Shukor, M.Y. (2014). "Evaluation of several mathematical models for fitting the growth of the algae *Dunaliella tertiolecta*". *Asian Journal of Plant Biology*, 2014, Vol 2, No 1, 1-6.
- [Hernández et al, 2014] Hernández Pérez Alexis y I. Labbé José (2014) "Microalgas, cultivo y beneficios". "*Revista de Biología Marina y Oceanografía*", Vol. 49, N°2: 157-173, agosto.
- [Hoyo et al., 2017] Hoyo Ángeles, Guzmán José Luis, Moreno José Carlos, Berenguel Manuel (2017) "Control robusto con QFT del pH en un fotobiorreactor raceway". XXXVIII Jornadas de Automática, CEA (Comité Español de Automática), Gijon Convention Bureau 77-83.
- [Jichkar et al., 2017] C. D. Jichkar and S. Y. Sondkar, (2017) "Comparative study of real time implementation of LabVIEW based MPC controller and PID controller for flow control loop," in *2017 2nd International Conference for Convergence in Technology (I2CT)*, 2017.
- [Jiménez, 2017] Jiménez-González, A., Adam-Medina, M., Franco-Nava, M. A., Guerrero-Ramírez, G.V. (2017). Grey-box model identification of temperature dynamics in a photobioreactor. *Chemical Engineering Research and Design*, 121, 125-133.
- [Jiménez, 2017] González J. Abraham. (2017). "Diseño, Modelado y Control de un Fotobiorreactor". Tesis De Doctorado En Ciencias, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- [Kicsiny, 2017] Kicsiny, R. (2017). Grey-box model for pipe temperature based on linear regression. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 107:13-20.



- [García et al., 2018] José Luis García<sup>a,b</sup>, Marta de Vicente<sup>a</sup> y Beatriz Galána. (2018). Presente y futuro del cultivo de las microalgas para su uso como superalimentos. Centro de Investigaciones Biológicas-CSIC e <sup>b</sup>Instituto de Biología Integrativa de Sistemas-CSIC.
- [García et al, 2019] F. García Matilde and J.L. Guzman and M. Berenguel and F.G. Acién, (2019), “Biomass estimation of an industrial raceway photobioreactor using an extended Kalman filter and a dynamic model for microalgae production”, *Algal Research*, vol. 37, pp. 103–114, Jan. 2019.
- [García et al., 2019] Garcia-Mañas, F., Guzman, J., Berenguel, M., and Acién, F. (2019). Biomass estimation of an industrial raceway photobioreactor using an extended kalman filter and a dynamic model for microalgae production. *Algal Research*, 37, 103{114. doi: 10.1016/j.algal.2018.11.009.
- [González, 2017] González J. A. (2017). Diseño, Modelado y Control de un Fotobiorreactor. PhD thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET).
- [Madsen, 2017] Madsen Henrik. (2017). Statistical Modelling of Physical Systems An introduction to Grey Box modelling, *ESI 101 Course, NREL, Colorado*, International Institute for Energy Systems Integration.
- [Marín, 2009] Marín, E. (2009). Linear relationships in heat transfer. *Latin-American Journal of Physics Education*, 3(2), 9.
- [Marzaki et al, 2014] M. H. Marzaki, M. H. A. Jalil, H. M. Shariff, R. Adnan, and M. H. F. Rahiman, (2014) “Comparative study of Model Predictive Controller (MPC) and PID Controller on regulation temperature for SSISD plant,” in *2014 IEEE 5th Control and System Graduate Research Colloquium*, 2014.
- [Miyashita et al., 2014] Miyashita Yuito, Mizukawa Yuri, Endo Hirotoishi Endo, and Iwasaka Masakazu. (2014).” Magnetically Controlled Biogenic Crystals as Photo-Bioreactors for Algae”. “*IEEE Transactions on Magnetics*”, Volume 50, Article Sequence Number: 5001504.
- [Nalley et al., 2018] Jakob O. Nalley y Daniel R., Donnell and Elena Litchman, (2018) Temperature effects on growth rates and fatty acid content in freshwater algae and cyanobacteria, *Algal Research*, 2018, Volume 35, pages 500-507, nov, [52777:6], 10.1016/j.algal.2018.09.018.
- [Pacheco et al., 2017] Pacheco Vila Alma Diana, García Guerrero Fabiola, (2017).” Extracción de aceite de biomasa microalgal”. *Universidad Iberoamericana Puebla*, Repositorio Institucional, otoño.
- [Pawlowski et al., 2019] A. Pawlowski, J. L. Guzmán, M. Berenguel, F. G. Acién. (2019). Control System for pH in raceway Photobioreactors Based on Wiener Models. *IFAC PapersOnLine* 52-1 (2019) 928–933.
- [Pfaffinger et al., 2019] Pfaffinger, C. E., Severin, T. S., Apel, A. C., Gobel, J., Sauter, J., and Weuster-Botz, D. (2019). Light-dependent growth kinetics enable scale-up of well-mixed phototrophic bioprocesses in different types of photobioreactors. *Journal of Biotechnology*, 297:41-48.

- [Popa, 2008] Popa, F. L. L. X. D. (2008). *Optimal and Robust Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory*. Taylor and Francis Group.
- [Quitral, 2012] Quitral R Vilma Morales G., “Nutritional and health properties of seaweeds and its potential as a functional ingredient”, *Revista chilena de nutrición*, vol.39, n.4, pp.196-202., 2012.
- [Rebolledo et al., 2019] José Rebolledo-Oyarcea, José Mejía-López, Griselda García, Leonardo Rodríguez-Córdova, César Sáez-Navarrete. (2019). “Novel photobioreactor design for the culture of *Dunaliella tertiolecta* – Impact of color in the growth of microalgae”. *Bioresource Technology* 289 (2019) 121645.
- [Reynders et al., 2015] Reynders, G., Diriken, J., and Saelens, D. (2015). Impact of the heat emission system on the identification of grey-box models for residential buildings. *Energy Procedia*, 78:3300-3305.
- [Rost et al., 2017] Rost, E. J., Perales, S. G., Carstens, M. R., and Pérez, L. B. (2017). Modelado de la producción de biomasa microalgal en un fotobiorreactor de burbujeo anular y configuración variable. *Información tecnológica*, 28(2):95-104.
- [Saad et al., 2018], Saad H. Ammara, Hussein J. Khadim b, Ahmed Isam Mohamedb. (2018). “Cultivation of *Nannochloropsis oculata* and *Isochrysis galbana* microalgae in produced water for bioremediation and biomass production”. “*Environmental Technology & Innovation*”. Published by Elsevier B.V.
- [Sirisha and Pant, 2010] R. Sirisha and Pant, Y. V. (2010). *Multiple target tracking using Kalman filter*. *Master's thesis*, College of Engineering Roorkee.
- [Shenawy et al., 2019] Shenawy, E. E., Elkelawy, M., Bastawissi, H. A.-E., Taha, M., Panchal, H., kumar Sadasivuni, K., and Thakar, N. (2019). Effect of cultivation parameters and heat management on the algae species growth conditions and biomass production in a continuous feedstock photobioreactor. *Renewable Energy*.
- [Simon, 2006] Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation Kalman, H, and Nonlinear Approaches*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [Solimeno et al., 2017] Alessandro Solimeno, F. Gabriel, Joan García. (2019). Mechanistic model for design, analysis, operation and control of microalgae cultures: Calibration and application to tubular photobioreactors. “*Algal Research*”. *Algal Research* 21 (2017) 236–246.
- [Song, et al., 2015] Wei Song, Keqin Peng, Jie Xiao, Yan Li, Zongling Wang, Xiangqing Liu, Mingzhu Fu, Shiliang Fan, Mingyuan Zhu, Ruixiang Li. (2015). Effects of temperature on the germination of green algae *micropropagules* in coastal waters of the Subei Shoal, China. *Estuarine, Coastal and Shelf Science XXX (2014)*.
- [Tamrakar et al., 2016] Tamrakar Ujjwol, Laursen Evan, Maharjan Manisha, Gent Stephen, Tonkoski Reinaldo (2016).” Modeling of Photobioreactors for Remote Microgrids”. “*IEEE International Conference on Electro Information Technology (EIT)*”. 0686 – 0689.

- [Tebbani et al, 2013] Tebbani, S., Titica, M., Caraman, S., and Boillereaux, L. (2013). Estimation of *chlamydomonas reinhardtii* growth in a torus photobioreactor. IFAC Proceedings Volumes, 46(31), 72{77. doi:10.3182/20131216-3-in-2044.00053.
- [Tebbani et al, 2014] Sihem Tebbani, Mariana Titica, George Ifrim, Sergiu Caraman (2014). Control of the light-to-microalgae ratio in a photobioreactor. Proceedings of the 18th International Conference on System Theory. Control and Computing, Sinaia, Romania, October 17-19, 2014.
- [Tian et al., 2011] Tian Yibin, Li Chunhu, Bian Junjie, Feng Lijuan. (2011).” Microalgae Derived Biofuels and Processes”. *College of Chemistry and Chemical Engineering Ocean University of China Qingdao*, P R China. IEEE.
- [Tjørve et al., 2017] Kathleen M. C. Tjørve\*, Even Tjørve. (2017). “The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family”. Inland Norway University of Applied Sciences, Elverum, Norway.
- [Trelles, 2017] Trelles A. M. Z., “Cultivo de microalgas marinas potenciales para la acuicultura del litoral entre Puerto Salaverry y Puerto Chicama, La Libertad, Perú;”, *Arnaldoa*, vol. 24, no. 2, pp. 567–582, diciembre. 2017.
- [Trinidad, 2014] Adalberto Trinidad Bello, (2014). “Modelos de crecimiento en biología, su significado biológico y selección del modelo por su ajuste”. Tesis de maestría en matemáticas aplicadas e industriales. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingenierías.
- [Ulloa et al., 2010] Ulloa Ibarra J. A., José Trinidad; Rodríguez Carrillo, Jorge Armando, (2010). El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. *Revista Electrónica de Veterinaria*, vol. 11, núm. 3, marzo, 2010.
- [Vázquez, 2017] Vázquez T. Juan A. (2017). “Diagnóstico de fallas aplicado a sensores de un fotobiorreactor tipo columna de tubular”. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET).
- [Vázquez et al. 2013] Vázquez-Villalobos Víctor, Artega Gutiérrez Paola, Chanamé Acevedo Kattia, Esquivel Torres Ana. (2013).” Modelamiento matemático y por redes neuronales artificiales del crecimiento de *Spirulina sp.* en fotobiorreactor con fuente de luz fluorescente e iluminación en estado sólido”. “*Scientia Agropecuaria*”, 4, 199 – 209.
- [Verdeza et al., 2016] Verdeza, A., Mare, L. D., Sanjuán, M., and Bula, A. (2016). Diseño de ecuaciones de sintonía para controladores PID (proporcional-integral-derivativo) implementados en fotobiorreactores. *Información tecnológica*, 27(4):121-132.
- [Wang et al., 2012] Wang, B., Lan, C. Q., and Horsman, M. (2012). Closed photobioreactors for production of microalgal biomasses. *Biotechnology Advances*, 30(4):904-912.
- [Xu et al., 2020] Xu, Y., Hu, M., Zhou, A., Li, Y., Li, S., Fu, C., and Gong, C. (2020). State of charge estimation for lithium-ion batteries based on adaptive dual Kalman filter. *Applied Mathematical Modelling*, 77:1255-1272.

[Yang et al., 2015] Xi Yang, Ping Xie, Yunzhen Yu, Hong Shen, Xuwei Deng, Zhimei Ma, Peili Wang, Min Tao, Yuan Niu, “Microcystis aeruginosa/Pseudomonas pseudoalcaligenes interaction effects on off-flavors in algae/bacteria co-culture system under different temperatures”, *Journal of Environmental Sciences*, Vol. 31, pp. 38 – 43, 2015.

[Zhuang et al., 2018] Zhuang, L.-L., Yu, D., Zhang, J., fei Liu, F., Wu, Y.-H., Zhang, T.-Y., Dao, G.-H., and Hu, H.-Y. (2018). The characteristics and influencing factors of the attached microalgae cultivation: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 94:1110-1119.

[Zhuang et al., 2019] Zhuang L.-L., Yang T., Zhang B.-Y., Wu Y.-H. and Hu H.-Y. (2019), “The growth model and its application for microalgae cultured in a suspended-solid phase photobioreactor (ssPBR) for economical biomass and bioenergy production”, *Algal Research*, vol. 39, p. 101463, May 2019.

# Apéndices

---

## A. Índices de desempeño

Los índices de desempeño, son aquellas funciones definidas por un usuario con la finalidad de indicar el comportamiento de un sistema dinámico, comparando la semejanza que existe entre una señal real y una estimación de dicha señal. El desempeño de la estimación sistema mediante los índices de desempeño está relacionado con el valor numérico del índice, ya que para un buen desempeño de la estimación el valor numérico del índice deberá ser lo menor posible.

### *Integral del error absoluto (IAE)*

Este tipo de índice de desempeño está basado en la integral del error absoluto con respecto un tiempo inicial a un tiempo final; la manera análoga utilizada para el cálculo computacional está basada en la sumatoria del error absoluto (producto de la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida) desde una iteración inicial hasta una iteración final (ver ecuación 0.1).

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)|dt \rightarrow IAE = \sum_{n_k=1}^N |e(n_k)| \quad (0.1)$$

### *Integral del tiempo por el error absoluto (ITAE)*

Este índice de desempeño está basado en la integral del producto del error absoluto y un tiempo de experimentación que va desde un tiempo inicial a un tiempo final; la manera análoga utilizada para el cálculo computacional de este índice está basada en la sumatoria del error absoluto (producto de la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida) por el valor del tiempo de iteración, que va desde una iteración inicial hasta una iteración final (ver ecuación 0.2).

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt \rightarrow ITAE = \sum_{n_k=1}^N n_k|e(n_k)| \quad (0.2)$$

### *Integral del error cuadrático (ISE)*

El ISE está basado en la integral del error absoluto al cuadrado con respecto un tiempo inicial a un tiempo final; la manera análoga utilizada para el cálculo computacional está basada en la sumatoria del error absoluto (producto de la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida) al cuadrado desde una iteración inicial hasta una iteración final (ver ecuación 0.3).

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t)dt \rightarrow ISE = \sum_{n_k=1}^N e^2(n_k) \quad (0.3)$$

### ***Integral del tiempo por el error cuadrático (ITSE)***

El índice de desempeño (ITSE) está basado en la integral del producto del error absoluto al cuadrado y un tiempo de experimentación que va desde un tiempo inicial a un tiempo final; la manera análoga utilizada para el cálculo computacional de este índice está basada en la sumatoria del error absoluto (producto de la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida) al cuadrado por el valor del tiempo de iteración, que va desde una iteración inicial hasta una iteración final (ver ecuación 0.4).

$$ITSE = \int_0^{\infty} te^2(t)dt \rightarrow ITSE = \sum_{n_k=1}^N n_k e^2(n_k) \quad (0.4)$$

### ***Media del error cuadrático (MSE)***

El MSE, es calculado mediante la ecuación (0.5), la característica principal de este índice es penalizar más errores (producto de la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida) grandes que pequeños.

$$MSE = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t)dt \rightarrow MSE = \lim_{n_k \rightarrow N} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n_k} e^2(k) \quad (0.5)$$

### ***Error cuadrático medio (MCE)***

El MCE, es calculado mediante la ecuación (0.6), la característica principal de este índice es proveer la media del error (producto de la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida) a lo largo de un tiempo de experimentación.

$$MCE = \sqrt{\frac{\sum_{n_k}^N e^2(n_k)}{N}} \quad (0.6)$$

## **B. Observabilidad de un sistema**

### **B.1. Observabilidad de un sistema no lineal**

Para conocer si un sistema no lineal es observable, primero es necesario contar con una representación no lineal del sistema, como la que se muestra en la ecuación (0.7).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) + w \\ y &= h(x, u) + v \end{aligned} \quad (0.7)$$

Posteriormente una vez que se cuenta con dicha representación se procede a calcular las derivadas parciales de la función de salida con respecto a los estados del sistema (ecuación 0.8).

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]; \quad (0.8)$$

De manera análoga como se obtuvo las derivadas parciales de la salida del sistema se procede a obtener las derivadas parciales de la función de estados del sistema con respecto a dichos estados (ecuación 0.9).

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \quad (0.9)$$

Matriz de observabilidad de un sistema no lineal está dada por la derivada de un vector del gradiente del sistema, dicho gradiente es producto de las derivadas de Lie de alto orden del sistema, como se puede apreciar en la ecuación (0.10):

$$G = \begin{bmatrix} L_f^0 h \\ L_f^1 h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix} \quad (0.10)$$

El cálculo de una derivada de Lie se representa de la siguiente manera (ecuación 0.11):

$$L_f h = \nabla h \cdot f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}} \cdot f_i; \quad (0.11)$$

Por lo tanto, vista de manera vectorial la derivada de Lie es:

$$L_f h = \left[ \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} \right] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}; \quad (0.12)$$

Para el cálculo de las derivadas de Lie de alto orden se procede a aplicar la siguiente forma (ecuación 0.13):

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h; \\ L_f^1 h &= \nabla h \cdot f; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_f^2 h &= \nabla[l_f^1 h] \cdot f; \\
&\vdots \\
L_f^n h &= \nabla[L_f^{n-1} h] \cdot f
\end{aligned} \tag{0.13}$$

Por lo tanto, una vez calculadas las derivadas de Lie de alto orden del sistema y realizando la derivación del gradiente del sistema, la matriz de observabilidad del sistema queda representado de la siguiente manera (ecuación 0.14):

$$Obs = \frac{\partial G}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_f^0 h}{\partial x} \\ \frac{\partial L_f^1 h}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial L_f^{n-1} h}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{0.14}$$

Por último, para conocer si el sistema no lineal analizado es observable, es necesario obtener el rango de la matriz de observabilidad y si esta matriz es de rango completo, significa que el sistema no lineal es observable.

### B.1.1. Resultados de las derivadas de alto orden de Lie del fotobiorreactor

A continuación, se presenta los resultados de las derivadas de alto orden de Lie calculadas para la observabilidad no lineal del sistema fotobiorreactor analizado.

$$L_f^0 h = x_2; \tag{0.15}$$

$$L_f^1 h = w_6(x_1 - x_2) + w_7(x_2 - x_3) + w_8(T_r - x_2); \tag{0.16}$$

$$\begin{aligned}
L_f^2 h &= -(w_8(T_r - x_2) + w_6(x_1 - x_2) + w_7(x_2 - x_3))(conj(w_6) - conj(w_7) + conj(w_8)) \\
&\quad - conj(w_6) \left( w_3(x_1 - x_2) + w_1 \left( x_1 - \frac{P_l u_l + w_2 x_1}{w_2} \right) - w_4(T_r - x_1) \left( F_b u_b + w_5 \rho_{ch} \left( \frac{(gh|T_r - x_1|)^{\frac{1}{2}}}{T_r} \right) \right) \right) \\
&\quad - conj(w_7) \left( w_{10}(x_2 - x_3) - w_9 \left( x_3 - \frac{P_l u_l + w_2 * x_1}{w_2} \right) + \frac{(C_{pe} F_e u_e (T_{ein} - x_3))}{w_{11}} \right)
\end{aligned} \tag{0.17}$$

### B.1.2. Resultados de las derivadas parciales del Gradiente

A continuación, se presenta los resultados de las derivadas parciales del vector gradiente calculadas para la observabilidad no lineal del sistema fotobiorreactor analizado.



$$\frac{\partial L_f^0 h}{\partial x_1} = 0; \quad (0.18)$$

$$\frac{\partial L_f^0 h}{\partial x_2} = 1; \quad (0.19)$$

$$\frac{\partial L_f^0 h}{\partial x_3} = 0; \quad (0.20)$$

$$\frac{\partial L_f^1 h}{\partial x_1} = w_6; \quad (0.21)$$

$$\frac{\partial L_f^1 h}{\partial x_2} = w_7 - w_6 - w_8; \quad (0.22)$$

$$\frac{\partial L_f^1 h}{\partial x_3} = -w_7; \quad (0.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_f^2 h}{\partial x_1} = & -conj(w_6) \left( w_3 + w_4 \left( F_b u_b + w_5 \rho_{ch} \left( \frac{(gh|Tr - x_1|)}{Tr} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{(w_4 w_5 gh \rho_{ch} sign(Tr - x_1)(Tr - x_1))}{2Tr \left( \frac{(gh|Tr - X1|)}{Tr} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ & - w_9 conj(w_7) - w_6 (conj(w_6) - conj(w_7) + conj(w_8)); \end{aligned} \quad (0.24)$$

$$\frac{\partial L_f^2 h}{\partial x_2} = (w_6 - w_7 + w_8)(conj(w_6) - conj(w_7) + conj(w_8)) + w_3 conj(w_6) - w_{10} * conj(W_7); \quad (0.25)$$

$$\frac{\partial L_f^2 h}{\partial x_3} = conj(w_7) \left( w_9 + w_{10} + \frac{C_{pe} F_e u_e}{w_{11}} \right) + w_7 (conj(w_6) - conj(w_7) + conj(w_8)); \quad (0.26)$$

## B.2. Observabilidad de un sistema lineal

Para realizar este análisis de observabilidad en sistemas no lineales se procedió primeramente a linealizar el sistema no lineal estudiado, considerando la forma canónica de modelo de espacio de estados, representado en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX \end{aligned} \quad (0.27)$$

Por lo tanto, para conocer si el sistema es observable, se plantea una matriz de observabilidad producto de las matrices “A” y “C” de la forma canónica del sistema linealizado. La matriz de observabilidad está representada de la siguiente forma (ecuación 0.28):

$$Obs = [C^T \ A^T C^T \ A^{T^2} C^T \ \dots \ A^{T^{n-1}} C^T] \quad (0.28)$$

Donde si esta matriz de observabilidad es de rango completo, significa que el sistema es observable.

## C. Controlabilidad de un sistema

### C. 1 Controlabilidad de un sistema lineal

Para realizar este análisis de controlabilidad en sistemas lineales, primeramente, se procedió a linealizar el sistema no lineal estudiado, considerando la forma canónica de modelo de espacio de estados, representado en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX\end{aligned}\quad (0.29)$$

Por lo tanto, para conocer si el sistema es controlable, se plantea la siguiente matriz:

$$Cont = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (0.30)$$

Donde si esta matriz es de rango completo, significa que el sistema es controlable.

Tomando en cuenta que nuestro sistema solo cuenta con tres estados, la matriz de controlabilidad queda de la siguiente manera:

$$Cont = [B \ AB \ A^2B] \quad (0.31)$$

## D. Dinámica de la temperatura del glicol a la entrada del I.C.

Al no conocer exactamente la dinámica de los actuadores de la resistencia térmica (para calentar al sistema), así como del *chiller* (para enfriar al sistema), esta dinámica esta modelada con la siguiente expresión matemática:

$$\dot{T}_{ac} = \frac{1}{\tau_{ac}}T_{ac} + \frac{1}{\tau_{ac}}T_{ein} \quad (0.32)$$

Donde  $T_{ac}$  es la temperatura del glicol producto del actuador,  $\tau_{ac} = 0.065$  es un constante de tiempo de los actuadores y  $T_{ein}$  es la temperatura del glicol a la entrada del intercambiador de calor.

### *Temperatura del glicol producto de la resistencia térmica*

En la figura (0.1), se representa el comportamiento de la temperatura del glicol cuando es calentado por la resistencia térmica, donde se inicia desde una temperatura de 285.15 K, que es la temperatura de la mínima a la que puede estar el glicol y llega hasta la temperatura de 308 K, considerada como la temperatura máxima a la que puede llegar el glicol. De acuerdo con los datos mostrados la resistencia térmica tarda 18 minutos en llegar a la temperatura máxima desde una temperatura mínima.

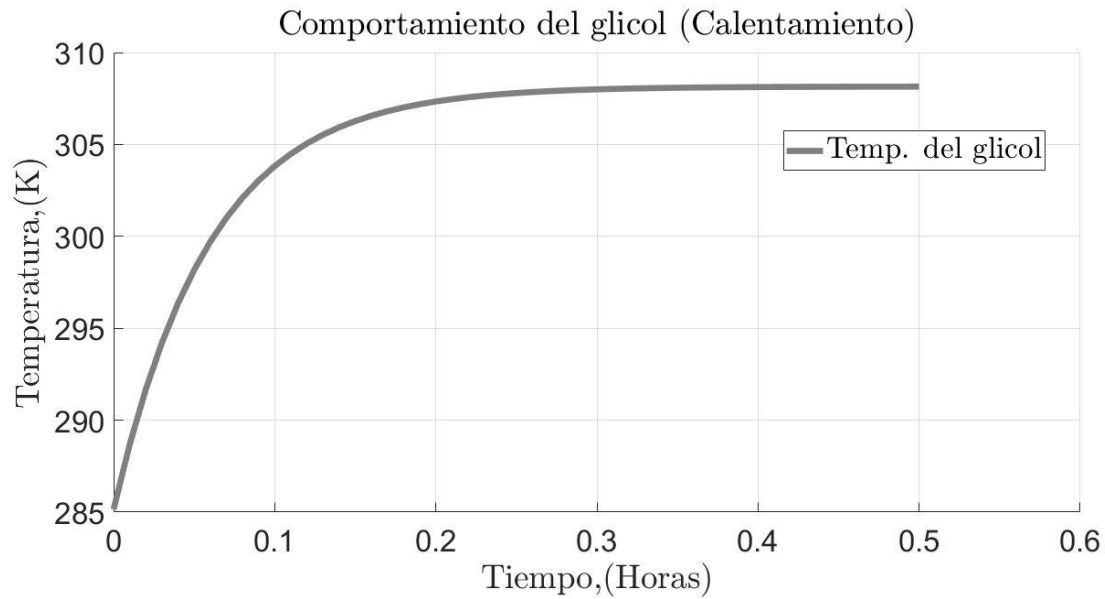


Figura 0.1. Calentamiento del glicol.

**Modelo del enfriador**

En la figura (0.2), se ilustra la dinámica de la temperatura del glicol cuando es enfriado por el *chiller*, donde las restricciones del glicol al enfriamiento, son las semejantes que en el método de calefacción. Por lo tanto, se considera que el sistema tarda el mismo tiempo en enfriar como en calentar el glicol.

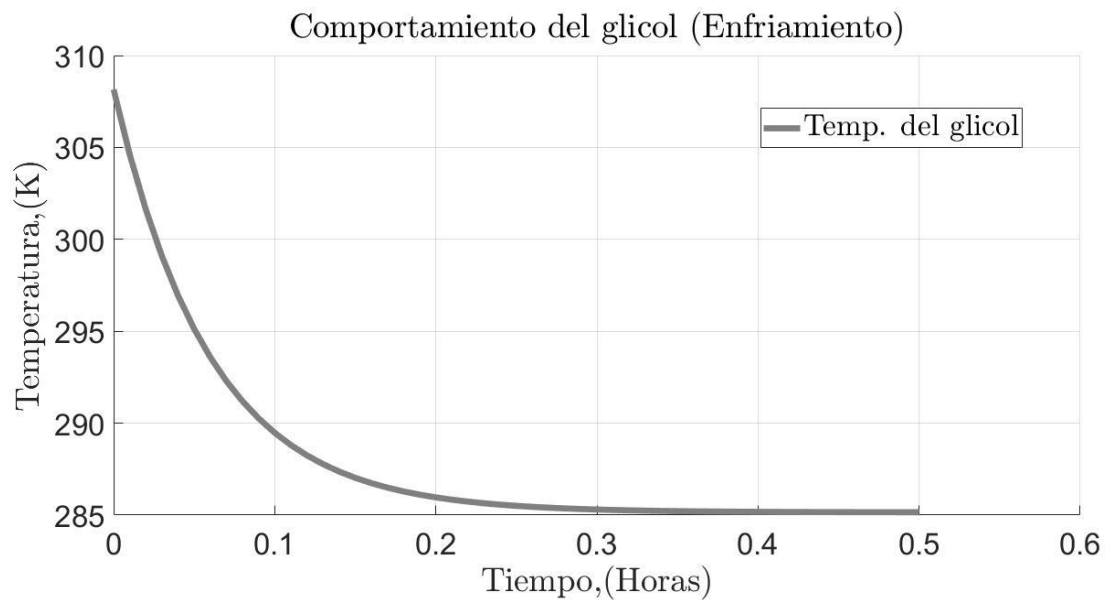


Figura 0.2. Enfriamiento del glicol

## E. Control Predictivo por Modelo de referencia (MPC)

El control predictivo por modelo de referencia con una ventana de optimización, se encarga de calcular una trayectoria futura para las variables del sistema que sean manipulables en el sistema. Este cálculo está delimitado con base a una ventana de tiempo que está restringida con respecto a las consideraciones tomadas en cuenta para el diseño del controlador. Esta manipulación de la trayectoria es realizada con la finalidad de obtener un valor optimizado de las salidas del sistema.

Para el desarrollo de un controlador MPC lineal primeramente es necesario contar con una representación no lineal del sistema como la mostrada en la ecuación (0.33).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + w \\ y &= h(x, u) + v\end{aligned}\quad (0.33)$$

Una vez que se cuenta con dicha representación se procede a realizar una linealización del sistema con respecto a un punto de operación, dicha linealización queda representada mediante la forma canónica de un sistema de espacio de estados lineal representado en la ecuación (0.34).

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m u(k) \\ y_m(k) &= C_m x_m(k)\end{aligned}\quad (0.34)$$

Con respecto al espacio de estados lineal de sistema, se procede a discretizar el sistema con respecto a un tiempo de discretización con el cual la dinámica del sistema sea representada de manera adecuada.

Una vez que se cuenta con una modelo de espacio de estados discretizado se procede a realizar una representación aumentada del mismo (ecuación 0.35) con el que se calcularan las variables de estado futuras del sistema. Así como definir un horizonte de predicción ( $N_p$ ) el cual define el largo del tamaño de la ventana de optimización al igual que un horizonte de control ( $N_c$ ) con el que se definen el número de parámetros que se utilizaran para capturar la trayectoria de control futura. Dicho  $N_c$  nunca debe de ser de un valor mayor al horizonte de predicción ( $N_p$ ), por lo que puede elegirse con valores iguales o menores a ( $N_p$ ).

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ y(k) &= [0_m \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (0.35)$$

Donde  $0_m = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ , es un vector de ceros que complementa las matrices del espacio aumentado y  $k$  es el instante actual del tiempo de iteración.

El cálculo de las variables de estado futuras mediante el espacio aumentado se realiza secuencialmente considerando a  $N_p$  como el numero de la secuencia final del cálculo como se muestra en la ecuación (0.36).

$$\begin{aligned}x_m(k+1|k) &= A_m x_m(k) + B_m \Delta u(k) \\ x(k+2|k) &= A_m^2 x_m(k) + A_m B_m \Delta u(k) + B \Delta u(k+1) \\ &\vdots \\ x(k+N_p|k) &= A_m^{N_p} x_m(k) + A_m^{N_p-1} B_m \Delta u(k) + A_m^{N_p-2} B_m \Delta u(k+1) + \dots + A_m^{N_p-N_c} B_m \Delta u(k_i + N_c - 1);\end{aligned}\quad (0.36)$$

De acuerdo con las variables de estado predichas anteriormente, es posible calcular las salidas predichas mediante la ecuación (0.37).

$$\begin{aligned}
y(k+1|k) &= C_m A_m x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) \\
(k+2|k) &= C_m A_m^2 x_m(k) + C_m A_m B_m \Delta u(k) + C_m B_m \Delta u(k+1) \\
&\vdots \\
y(k+N_p|k) &= C_m A_m^{N_p} x_m(k) + C_m A_m^{N_p-1} B_m \Delta u(k) + C_m A_m^{N_p-2} B_m \Delta u(k+1) + \dots \\
&\quad + C_m A_m^{N_p-N_c} B_m \Delta u(k+N_c-1);
\end{aligned} \tag{0.37}$$

Por lo tanto, los vectores de las salidas y las entradas quedan definidos de la siguiente manera (ecuaciones 0.38 – 0.39):

$$Y = [y(k+1|k), y(k+2|k), y(k+3|k), \dots, y(k+N_p|k)]^T; \tag{0.38}$$

$$\Delta U = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \Delta u(k+2), \dots, \Delta u(k+N_c-1)]^T; \tag{0.39}$$

Con la finalidad de tener una representación más compacta de la matriz de salidas se hace una agrupación de las ecuaciones (0.38 y 0.39), obteniendo una representación como la que se muestra en la ecuación (0.40).

$$Y = F x_m(k) + \phi \Delta U; \tag{0.40}$$

Donde:

$$F = \begin{bmatrix} C_m A_m \\ C_m A_m^2 \\ C_m A_m^3 \\ \vdots \\ C_m A_m^{N_p} \end{bmatrix}; \tag{0.41}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} C_m B_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_m A_m B_m & C_m B_m & 0 & \dots & 0 \\ C_m A_m^2 B_m & C_m A_m B_m & C_m B_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_m A_m^{N_p-1} B_m & C_m A_m^{N_p-2} B_m & C_m A_m^{N_p-3} B_m & \dots & C_m A_m^{N_p-N_c} B_m \end{bmatrix}. \tag{0.42}$$

### ***Desarrollo de la optimización***

Considerando que el objetivo del controlador MPC es trasladar a la salida predicha lo más cerca posible de la señal de referencia  $r(k)$ , donde se asume que permanecerá constante en la ventana de optimización. Es necesario calcular el mejor vector de parámetros de control, con la finalidad de reducir el error que existe entre la señal de referencia y la salida predicha del sistema.

El vector de datos de la referencia está dado por la ecuación (0.43).

$$R_s^T = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] r(k); \tag{0.43}$$

Donde  $[1 \ 1 \ \dots \ 1]$  es del largo de  $N_p$ .

Por lo tanto, se procede a definir una función costo, la cual manifieste el objetivo de control como se muestra en la ecuación (0.44).

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U; \quad (0.44)$$

donde el primer término se designa al objetivo de minimizar el error entre la salida predicha y la señal de referencia, mientras el segundo término refleja la consideración dada al tamaño de  $\Delta U$  cuando la función objetivo  $J$  está hecha para ser lo más pequeña posible.  $\bar{R}$  es una matriz diagonal en la forma de  $\bar{R} = r_w I_{N_c \times N_c}$ , ( $r_w > 0$ ) donde  $r_w$  es usado como parámetro de sintonización para el comportamiento deseado en lazo cerrado.

Para encontrar la  $\Delta U$  óptima que minimice  $J$ , de la salida de predicha del sistema (ecuación 0.40), la función costo  $J$  se representa como la ecuación (0.45).

$$J = (R_s - Fx(k))^T (R_s - Fx(k)) - 2\Delta U^T \phi^T (R_s - Fx(k)) + \Delta U^T (\phi^T \phi + \bar{R}) \Delta U; \quad (0.45)$$

Calculando la primera derivada de la función costo (ecuación 0.46) el resultado es el siguiente:

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = -2\phi^T (R_s - Fx(k)) + 2(\phi^T \phi + \bar{R}) \Delta U; \quad (0.46)$$

La condición necesaria del mínimo de  $J$  es obtenida igualando la derivada de la función costo a cero, como se muestra en la ecuación (0.47).

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0; \quad (0.47)$$

Por lo tanto, la solución óptima de la señal de control es definida como se muestra en la ecuación (0.48).

$$\Delta U = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (R_s - Fx_m(k)); \quad (0.48)$$

Con la suposición de que  $(\phi^T \phi + R)^{-1}$  existe. la matriz  $(\phi^T \phi + R)^{-1}$  en la literatura de optimización es llamada matriz *hessiana*.  $R_s$  es un vector de datos que contiene la información de la referencia expresado como:

$$R_s^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T r(k) = \bar{R}_s r(k); \quad (0.49)$$

Donde  $\bar{R}_s$  tiene el tamaño de  $N_p$ .

Por lo tanto, la solución óptima de la señal de control está dada con respecto a la señal de referencia  $r(k)$  y las variables de estado  $x(k)$ . La representación de dicha ecuación es la siguiente (ecuación 0.50):

$$\Delta U = (\phi^T \phi + \bar{R})^{-1} \phi^T (\bar{R}_s r(k) - Fx_m(k)). \quad (0.50)$$

### ***Restricciones de la variable de control***

Debido a que en todos los sistemas físicos los actuadores tienen un rango limitado de operación es necesario considerar valores máximos y mínimos en las condiciones de operación, esta relación está representada en la ecuación (0.51).

$$u_{min} < u(k) < u_{max} \quad (0.51)$$

Donde se considera  $u_{min}$  como la condición de trabajo mínima del actuador y  $u_{max}$  como la condición de trabajo máxima de actuador.