



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CD. MADERO

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

“ANÁLISIS DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN LA MÁQUINA DE INDUCCIÓN”

**TESIS QUE PRESENTA:
ING. ERICK MARTÍNEZ BÁRCENA**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**ASESOR DE TESIS:
DR. RUBÉN SALAS CABRERA**

CD. MADERO, TAMPS.

MARZO 2014

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR TECNOLÓGICA
Instituto Tecnológico de Ciudad Madero

"2014, Año de Octavio Paz"

Ciudad Madero, Tamps; a 14 de Mayo de 2014.

OFICIO No.: U2.106/14
AREA: DIVISIÓN DE ESTUDIOS
DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN DE TESIS

C. ING. ERICK MARTÍNEZ BÁRCENA.
NO. DE CONTROL G06071220
PRESENTE

Me es grato comunicarle que después de la revisión realizada por el Jurado designado para su examen de grado de Maestría en Ingeniería Eléctrica, el cual está integrado por los siguientes catedráticos:

PRESIDENTE :	DR. RUBÉN SALAS CABRERA
SECRETARIO :	M.C. EDUARDO NACÚ SALAS CABRERA
VOCAL :	M.C. RAFAEL CASTILLO GUTIÉRREZ
SUPLENTE:	M.C. JOSÉ GENARO GONZÁLEZ HERNÁNDEZ
DIRECTOR DE TESIS :	DR. RUBÉN SALAS CABRERA

Se acordó autorizar la impresión de su tesis titulada:

"ANÁLISIS DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN LA MÁQUINA DE INDUCCIÓN"

Es muy satisfactorio para esta División compartir con Usted el logro de esta meta, esperando que continúe con éxito su desarrollo profesional y dedique su experiencia e inteligencia en beneficio de México.

ATENTAMENTE

"Por mi patria y por mi bien"®

M. P. María Yolanda Chávez Cinco
M. P. MARIA YOLANDA CHÁVEZ CINCO
JEFA DE LA DIVISIÓN



S.E.P.
DIVISIÓN DE ESTUDIOS
DE POSGRADO E
INVESTIGACION
ITCM

c.c.p.- Minuta
Archivo
MYCHC 'HCV' jar



Ave. 1° de Mayo y Sor Juana I. de la Cruz, Col. Los Mangos, CP. 89440 Cd. Madero, Tam.
Tel. (833) 357 48 20, Fax, Ext. 1002, e-mail: itcm@itcm.edu.mx

www.itcm.edu.mx



Dedicatoria

*Dedico ésta tesis a Dios,
quien es el mayor acreedor
de todos mis logros.*

*A mi maestro asesor
Rubén Salas Cabrera, ya que
ésta tesis es solo una pequeña
fracción del conocimiento
y compromiso académico
que él me ha brindado.*

*A mis padres y hermanos
por su apoyo y amor incondicional.*

*A mi pareja, por estar
siempre a mi lado y aportarme
su amor y comprensión
en todo momento.*

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios quien me ha brindado el camino y la oportunidad de estar siempre en el lugar correcto con las personas correctas. En éste caso en particular por permitirme el tener la oportunidad de ingresar a la maestría, y estar a mi lado durante todo el trayecto de la misma.

A mis padres por siempre confiar en mi y apoyarme incondicionalmente a pesar de todas las adversidades.

A mi maestro asesor Dr. Rubén Salas Cabrera, por haber creído en mí, por enseñarme tantas cosas, por permitirme crecer académica y personalmente. Agradezco su apoyo moral que tanto me sirvió, sus consejos y sobretodo por haberme mostrado el lado humano del gran profesor que es.

Agradezco a mis hermanos por su compañía y apoyo que a pesar de la distancia siempre me brindaron la mano para salir adelante.

A mi novia por aguantar mis malos ratos y por compartir mis sueños y metas. Por amarme sin condiciones y por hacerme una mejor persona cada día.

Al profesor Ing. Rodolfo Castillo Ibarra por alentarme a formar parte de la maestría.

Gracias a CONACYT por el valioso apoyo económico brindado. A todas las personas que constituyen la maestría en ingeniería eléctrica, ya que forman un gran grupo académico y siempre se preocupan por el bienestar y la superación de los alumnos.

Análisis de puntos de equilibrio en la máquina de inducción.

Ing. Erick Martínez Bárcena

Resumen

En ésta tesis se presenta el análisis del fenómeno de bifurcación enfocado a una máquina de inducción en particular. Se realiza una variación paramétrica que permite hacer evidente dicho fenómeno. Para ello, primero se plantea el modelado matemático de la máquina de inducción que, en su forma completa, constituye nueve ecuaciones diferenciales, formando de ésta manera un sistema de orden nueve. Las ecuaciones son empleadas en coordenadas de fase. Además se plantea una transformación que permita un cambio de variables en coordenadas de fase a coordenadas $dq0$ en un marco de referencia estator y otra a un marco de referencia rotor.

Se estudia un método de continuación numérico que permite calcular con precisión el diagrama de bifurcación.

Se obtiene el diagrama de bifurcación de la máquina de inducción a partir de calcular sus ecuaciones diferenciales dentro del método de continuación.

Debido a que la bifurcación consiste en multiplicidad de equilibrios, se realiza un estudio de estabilidad de equilibrios para determinar la trayectoria real que tendrá la máquina de inducción.

Equilibrium points analysis on the induction machine .

Ing. Erick Martínez Bárcena

Abstract

This thesis presents the analysis of the phenomenon of bifurcation applied to the induction machine. Here a parametric change is carried out to demonstrate this phenomenon. First, the mathematical model is presented, it consists of nine differential equations, therefore the complete model is of nine order. Equations are used in dq0 coordinates.

A continuation method is studied to compute the bifurcation diagram of the machine.

The bifurcation diagram of the induction machine is obtained from calculating the differential equations using the continuation method.

Because a bifurcation phenomenon consists of multiplicity of equilibria, a stable equilibria study is performed in order to determine the real trajectory that the machine shall expose.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
Índice General	VI
Lista de figuras	IX
Lista de Tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.1.1. Máquina de Inducción Trifásica	2
1.1.2. Generadores de Corriente Alterna (Alternadores) . . .	3
1.1.3. Motores de Corriente Alterna	5
1.1.4. Teoría del Esquema de Referencia (Transformación de Park)	7
1.2. Planteamiento del Problema	8

1.3. Justificación	9
1.4. Objetivos	11
1.4.1. Objetivo General	11
1.4.2. Objetivos Particulares	12
1.5. Hipótesis	14
1.6. Alcances y Limitaciones	15
2. Máquinas de Inducción	17
2.1. Introducción	18
2.2. Modelos dq0 en Espacio de Estado para la Máquina de Inducción	20
2.2.1. Teoría del Esquema de Referencia	20
2.3. Ecuaciones de Voltaje y Par en Variables de Máquina	23
2.4. Transformación de Ecuaciones para Circuitos del Rotor	27
2.5. Ecuaciones de Voltaje y Par en Variables del Marco de Referencia Arbitrario	28
3. Bifurcaciones	33
3.1. Introducción	34
3.2. Principios de Bifurcación	34
3.3. Estabilidad de Puntos de Equilibrio	38
3.4. Dependencia Paramétrica	47
3.5. Bifurcaciones Básicas	51
3.6. Otro Tipo de Bifurcación	56
3.6.1. Histéresis	56
3.6.2. Múltiples Bifurcaciones	61

4. Método de Continuación	65
4.1. Introducción	66
4.2. Bases del Método de Continuación	67
4.2.1. Conceptos Principales	67
4.2.2. Principios del Método de Continuación	71
4.3. Estructuración del Método de Continuación	72
4.3.1. Parametrización Pseudo - Longitud de Arco	72
4.3.2. Método Predictor - Corrector	74
4.3.3. Cálculo del Método Newton	75
4.3.4. Cálculo de la Primera Tangente	76
5. Estudio de Bifurcación en la Máquina de Inducción	78
5.1. Introducción	79
5.2. Modelado de la Máquina de Inducción	79
5.3. Implementación del Método de Continuación en la Máquina de Inducción	82
5.4. Resultados Gráficos y Evidencia de Bifurcaciones	88
Referencias	95

Índice de figuras

2.1. Máquina de Inducción de dos polos, trifásica, conectada en estrella.	24
3.1. Flexión, sobre una tabla, ejercida por una carga λ	34
3.2. Cambio de forma en el patrón de una solución. La complejidad de la forma aumenta al disminuir el valor del parámetro λ	38
3.3. Estabilidad de una pelota.	40
3.4. Retrato de fase de la ecuación $f(x) = -x$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.	41
3.5. Retrato de fase de la ecuación $f(x) = x^2$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.	43
3.6. Retrato de fase de la ecuación $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.	44
3.7. Retrato de fase de la ecuación $f(x) = x - x^3$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.	45
3.8. Diagrama ficticio representando bifurcaciones	49
3.9. a) foco estable, b) centro, c) foco inestable.	52
3.10. Diagrama de bifurcación para un turning point abierto hacia la derecha.	53

3.11. Tipos de bifurcación mas comunes.	54
3.12. Bifurcación Transcritical.	55
3.13. Bifurcación Pitchfork.	55
3.14. Retrato de fase para $c = -1$	57
3.15. Retrato de fase para $c = 1$	58
3.16. Tres puntos de equilibrio para un solo valor $\lambda = 0$	59
3.17. Puntos límites de estabilidad en la histéresis.	59
3.18. Salto brusco entre equilibrios estables e inestables.	60
3.19. Formación del fenómeno de bifurcación histéresis.	60
3.20. Bifurcación histéresis con $m < 1$	61
3.21. Bifurcación supercritical pitchfork para $m = 1$	62
3.22. Bifurcación supercritical turning point para $m > 1$	63
3.23. Seguimiento del cambio de bifurcación para $m = 0$ hasta $m = 2$	64
4.1. Soluciones en un diagrama de bifurcación.	67
4.2. Posibles problemas en un diagrama de bifurcación.	69
4.3. Análisis paramétrico en un diagrama de bifurcación.	70
5.1. Diagrama de bifurcación de la máquina de inducción a gran escala.	89
5.2. Diagrama de bifurcación de la máquina de inducción función motor.	90
5.3. Apreciación de bifurcación Histéresis.	91
5.4. Estabilidad de los equilibrios en el diagrama.	92
5.5. Estabilidad de los equilibrios en el diagrama.	93
5.6. Estabilidad de los equilibrios en el diagrama.	94

Índice de tablas

3.1. Soluciones de la Figura 3.8.	50
---	----

CAPÍTULO **1**

Introducción

1.1. Antecedentes

1.1.1. Máquina de Inducción Trifásica

Los principios básicos del electromagnetismo se empezaron a desarrollar en el siglo XIX, con los experimentos de Oersted, Faraday, Henry, Lenz, Barlow y la sintetización que hizo Maxwell en 1879. Dentro de los trabajos que realizaron los científicos anteriores, se puede considerar como punto de partida para el estudio de las máquinas eléctricas, el principio de inducción electromagnética descubierto por Michael Faraday en 1831. Los experimentos posteriores de este gran investigador demuestran de un modo fehaciente el principio de conversión de la energía eléctrica en mecánica y viceversa (principio dinamo- eléctrico).

La ley de inducción de Faraday fue el detonador para que muchos científicos e ingenieros buscaran una máquina eléctrica que generase electricidad de un modo diferente al que se conocía en aquellos tiempos como era la pila de Volta. La ingeniería eléctrica se puede decir que nace en aquel momento.

En estos casi ciento treinta años de historia, se han producido grandes transformaciones y la ingeniería eléctrica que originalmente comprendía la conversión de energía: máquinas eléctricas, el alumbrado, la telegrafía y la telefonía, se ha desarrollado tan espectacularmente, que hoy día ha dado lugar a nuevas áreas, que incluyen aspectos tan diversos como la electrónica y las telecomunicaciones, las computadoras, el control automático de máquinas y procesos.

Durante la primera época de desarrollo de esta rama de la técnica, las máquinas eléctricas desempeñaron un papel rector, que determinaba el movimiento de toda la ingeniería eléctrica, merced a su aplicación en los campos

de la generación, transformación y utilización de la energía eléctrica.

Los perfeccionamientos en el diseño de máquinas eléctricas contribuían a nuevas posibilidades de su empleo práctico y estimulaban el progreso ulterior y las más diversas aplicaciones de la energía eléctrica, lo que explica el hecho de que los científicos e ingenieros le prestasen especial atención, y de que ésta adquiriese rápidamente la perfección técnica de sus formas constructivas que poseen actualmente.

Las máquinas eléctricas se plantean como convertidores de energía mecánica a energía eléctrica (generadores) o a la inversa, como convertidores de energía eléctrica a mecánica (motores). Una máquina eléctrica es un convertidor de energía de una forma a otra, una de las cuales al menos es eléctrica, y de acuerdo con ello se clasifican en:

- a) Generadores: Que transforman la energía mecánica en eléctrica.
- b) Motores: Que transforman la energía eléctrica en mecánica.
- c) Transformadores: Que transforman una energía eléctrica en otra de diferente magnitud.

1.1.2. Generadores de Corriente Alterna (Alternadores)

Debe destacarse que la máquina de corriente continua, después de adquirir un fuerte grado de desarrollo entre los años 1870 y 1890, reveló también una serie de dificultades técnicas relacionadas con la obtención de grandes potencias unitarias y altas tensiones entre sus terminales. Aunque se hicieron grandes esfuerzos de investigación para conseguir un transporte de energía

eficiente en corriente continua, fundamentalmente por el francés Marcel Deprez, se vio enseguida la ineficacia del dinamo.

Con el descubrimiento del transformador en el año 1885, se planteó el diseño de generadores de corriente alterna o alternadores que se habían dejado abandonados por la búsqueda de una máquina que diera una señal análoga a la de las pilas de Volta.

La introducción de la corriente alterna estuvo llena de grandes disputas, en las que se reflejaban motivos tanto técnicos como económicos. En Europa estaban a favor de la corriente continua: Lord Kelvin, Crompton, A.W. Kennedy y J.Hopkinson, y a favor de la corriente alterna: Ferranti, Gordon, W.M.Mordey y Silvanus Thompson.

En Estados Unidos, Edison defendía la corriente continua mientras que Westinghouse, Tesla, Sprague y Steinmetz defendían la corriente alterna.

El hecho de que el proyecto de la central eléctrica a instalar en las cataratas del Niágara fuera adjudicado a la compañía Westinghouse en 1893 fue el declive de la corriente continua a favor del auge de la corriente alterna, (esta Central tenía una potencia de 50.000 CV con un salto neto de 54 m; disponía de 10 turbinas tipo Fourneyron, que movían alternadores bifásicos de 3.500 kVA con eje vertical y que generaban una tensión de 2.300 V /fase, la velocidad de giro era de 250 r.p.m.; el inducido de cada alternador era interior y fijo, mientras que el inductor estaba situado en el exterior y era móvil con los polos radiales mirando hacia dentro de la estructura; componían un total de 12 polos, de tal modo que la velocidad tangencial en los mismos alcanzaba los 40 m/s y se obtenía una frecuencia de 25 Hz).

Al descubrirse el transformador alrededor de 1885, la experiencia acumulada por los ingenieros en el desarrollo de la máquina de corriente continua,

hace que el progreso en el diseño de generadores de corriente alterna ó alternadores, se efectúe con gran rapidez.

Las frecuencias de los alternadores variaban en principio entre los 25 Hz y los 135 Hz; finalmente se procedió a una normalización y se eligieron los valores de 50 Hz (Europa) y 60 Hz (EEUU).

1.1.3. Motores de Corriente Alterna

En cuanto a los motores de c.a. de tipo asíncrono o de inducción, en 1879 Walter Baily demostró ante la Physical Society de Londres, la posibilidad de producir una rotación mediante las corrientes inducidas en un disco de cobre. Ferraris en 1885 descubrió el campo magnético giratorio, utilizando dos corrientes alternas independientes de igual frecuencia pero diferente fase. El mismo descubrimiento fue hecho casi a la vez por Nikola Tesla que fue el primero que construyó y patentó este tipo de motores en Octubre de 1887 y por lo que se le considera como el inventor de los mismos.

Todos ellos disponían de un estator en forma de anillo. El primer tipo tenía un rotor con cuatro polos salientes, dando lugar a un motor de reluctancia que no poseía cualidades de auto arranque, pero que giraba a la velocidad de sincronismo, el segundo motor era un verdadero motor asíncrono, tenía el rotor devanado que podía arrancar pero que giraba a una velocidad por debajo de la correspondiente al sincronismo y el tercero era motor síncrono, que funcionaba suministrando corriente continua al devanado del rotor.

Debe destacarse que los primeros motores asíncronos eran bifásicos y con polos salientes en el estator, alimentados con dos corrientes desfasadas 90° en el tiempo y utilizando dos devanados desfasados 90° en el espacio.

George Westinghouse compró las patentes de Tesla y utilizó a este ingenie-

ro como consultor de su Empresa; con la ayuda de C.F. Scott y B.G. Lamme, la Empresa Westinghouse desarrolló un motor bifásico con devanados distribuidos tanto en el estator como en el rotor, lográndose un motor práctico alrededor de 1892. En la Feria Mundial de Chicago de 1893, la fábrica de Westinghouse presentó un motor bifásico de 300 CV, 12 polos a 220V, que era una gran hazaña para esa época; la alimentación de este motor se lograba mediante dos alternadores monofásicos de 500 CV, 60 Hz, acoplados mecánicamente en el mismo eje, pero que estaban desplazados 90° eléctricos en el espacio para poder generar una tensión bifásica.

En 1891 la Compañía americana Thomson-Houston comenzó la construcción de motores de inducción trifásicos bajo la dirección de H.G. Reist y W.J. Foster. Por otra parte en Europa, Dolivo-Dobrowolsky, ingeniero de la Empresa alemana AEG, sugirió la utilización de circuitos trifásicos pero no independientes entre sí, sino mutuamente conectados; la expresión alemana Verkettung der Phasen (encadenamiento de fases), traduce esta dependencia mutua de las tres corrientes que constituyen un sistema trifásico. Este sistema lo bautizó con el nombre Drehstrom (que significa corriente giratoria) alrededor de 1890. Para el año 1893 Dolivo-Dobrowolsky había construido motores asíncronos de doble jaula de ardilla que mejoraban las cualidades de arranque de estos motores, también sugirió la construcción del motor de inducción con rotor devanado o con anillos deslizantes, para regular la velocidad del mismo, para ello es preciso conectar a los anillos un reóstato de arranque y regulación de un modo equivalente al de los motores de c.c.

En EEUU, se unieron las Compañías Westinghouse y la Thomson-Houston para fabricar motores asíncronos trifásicos, para ello resultó de gran utilidad en aquel momento el invento del ingeniero C.F. Scott de la Empresa

Westinghouse para transformar un sistema bifásico en trifásico y poder alimentar estas máquinas. El rotor de jaula de ardilla construido mediante barras de aluminio, fue patentado en 1916 por H.G. Reist y H. Maxwell de la Compañía General Electric.

El motor asíncrono o de inducción es el motor que se utiliza con más frecuencia en el accionamiento industrial. Para comprender la evolución tecnológica de estas máquinas, sirva el dato comparativo de que un motor de 100 CV diseñado en 1992, ocupa el mismo espacio que otro de 7.5 CV construido en 1897.

1.1.4. Teoría del Esquema de Referencia (Transformación de Park)

A finales de los 1920, R.H. Park introdujo un nuevo enfoque al análisis de la máquina eléctrica. Él formuló un cambio en las variables, el cual, reemplazó las variables (voltajes, corrientes y sus enlaces de flujo) asociadas con los devanados de estator de una máquina síncrona a variables asociadas con devanados ficticios que giran con el rotor. En otras palabras, él transformó, o refirió, las variables de estator hacia un esquema de referencia fijado en el rotor. La transformación de Park, la cual revolucionó el análisis de la máquina eléctrica, tiene la propiedad única de eliminar todas las inductancias variantes en el tiempo de las ecuaciones de voltaje de la máquina síncrona que se producen debido a los circuitos eléctricos en movimiento relativo y los circuitos eléctricos con reluctancia magnética variante.

A finales de los 1930 H.C. Stanley empleó un cambio de variables en el análisis de las máquinas de inducción. Él demostró que las inductancias variantes en el tiempo en las ecuaciones de voltaje de una máquina de inducción debido a los circuitos eléctricos en movimiento relativo pueden ser elimina-

das por una transformación de variables asociadas con los devanados del rotor (variables del rotor) a variables asociadas con devanados ficticios estacionarios. En éste caso las variables del rotor son transformadas en un esquema de referencia fijado en el estator.

Gabriel Kron (1901 – 1968) introdujo un cambio de variables que eliminaba la posición de las inductancias mutuas variantes en el tiempo de una máquina de inducción simétrica usando la transformación de las variables del estator y del rotor hacia un esquema de referencia rotatorio en sincronismo con el campo magnético rotatorio. Éste esquema de referencia es comúnmente conocido como el esquema de referencia giratorio sincrónicamente.

Donald S. Brereton empleó un cambio de variables que también eliminaba las inductancias variantes en el tiempo de una máquina de inducción síncrona usando la transformación de las variables del estator hacia un esquema de referencia fijado en el rotor. Esto es esencialmente la transformación de Park aplicada a las máquinas de inducción.

1.2. Planteamiento del Problema

Los modernos algoritmos de control necesitan un conocimiento preciso de los parámetros del modelo de la máquina para su correcto funcionamiento. Aunque esta estimación de parámetros se puede realizar utilizando medidas de régimen permanente es más usual utilizar medidas de régimen transitorio.

Representar el modelo matemático del motor de inducción trifásico para el estudio del comportamiento dinámico de la máquina, implica un estudio analítico de los parámetros a tener en cuenta y las posibles opciones de resolución de algoritmos obtenidos.

Para trabajar con las ecuaciones de costoso cálculo hay que tener en cuen-

ta una serie de consideraciones previas a la realización de una transformación matemática que permita obtener una solución mediante herramientas de cálculo de forma rápida y sencilla. Esta herramienta debe ser capaz de solucionar el problema planteado en espacios de tiempo reducidos.

Por este motivo, a las ecuaciones se les aplica una transformación que las convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Existen múltiples transformaciones matemáticas que permiten resolver estos sistemas de ecuaciones mediante algoritmos de cálculo rápido, uno de ellos es:

- La transformación de Park, que presenta un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden en variables reales.

1.3. Justificación

Los cambios tecnológicos experimentados por la ingeniería eléctrica en los últimos años están relacionados con el desarrollo de la electrónica de potencia y de los computadores y de su incorporación a los sistemas eléctricos.

La máquina de inducción es uno de los componentes más importantes de las instalaciones eléctricas por su bajo costo y mantenimiento y sus altas prestaciones. Se utiliza ampliamente en todos los sectores, desde el industrial hasta el doméstico.

En la última década, el motor de inducción se ha vuelto el accionamiento de velocidad variable por excelencia.

Si las características ya tradicionales del motor de inducción, como podría ser su robustez, su bajo costo, y la bajísima necesidad de mantenimiento, se le

añaden las altas prestaciones dinámicas que se obtienen con las innovadoras estrategias de control aplicadas a los variadores que alimentan a los motores de inducción, se obtiene que este es el accionamiento a velocidad variable que mas presente y futuro tiene en los campos típicos de aplicación de estos accionamientos de la industria.

La progresiva automatización de los procesos ha sido un factor decisivo en el desarrollo industrial de las últimas décadas. Hasta hace algunos años, cuando se requería un control de velocidad, de posición, de par, de tensión, u otros, se utilizaba casi exclusivamente la máquina de continua, pero últimamente ha sido desplazada por las máquinas de alterna.

Este tipo de controles se está extendiendo de forma rápida. En aplicaciones donde se requiere una rápida respuesta del par, se debe aplicar el principio del control por orientación de campo, más conocido como control vectorial.

El estudio del comportamiento dinámico de las máquinas tiene especial importancia tanto en su propio diseño como en el de sus elementos y algoritmos de control. No obstante, la eficiencia de un controlador no depende únicamente de su diseño.

En gran parte depende de la exactitud con que el modelo elegido se ajusta a la realidad, por lo que se deberá tener un modelo adecuado de la máquina, así como el valor correcto de los parámetros del mismo. Por este motivo, la estimación de parámetros se encuentra de actualidad, siendo habitual realizar el procedimiento de estimación mientras la máquina está funcionando y preferiblemente, en tiempo real.

Por ello, es importante tener un buen análisis de la máquina, que pueda describir su comportamiento dinámico, así como su punto de estabilidad. Cabe mencionar que existen diferentes puntos de equilibrio en una máquina, depen-

diendo de sus parámetros internos y sus parámetros de excitación. Supóngase una máquina de 1800 rpm, al variar el par de la máquina, la velocidad variará de tal manera que para cada pequeño intervalo de cambio de velocidad existirá un punto de equilibrio diferente al anterior, en otras palabras, una máquina es capaz de tener múltiples puntos de equilibrio dependiendo de su condición operativa, los cuales serán analizados en este proyecto.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

El objetivo general es el análisis de los puntos de equilibrio en la máquina de inducción trifásica, que permita la simulación del comportamiento en régimen dinámico. Ya que la máquina alcance su estabilidad se procederá a realizar una variación paramétrica viable para que se presente el fenómeno de bifurcación. Dicho fenómeno de bifurcación provocará la aparición de multiplicidad de equilibrios en el sistema, lo cual es un comportamiento anormal. Se estudiará y se realizará un cálculo para determinar la estabilidad de los equilibrios y con ello determinar los equilibrios estables e inestables dentro de la bifurcación. Se adaptará un modelo matemático de cada variable para el estudio del comportamiento en funcionamiento como motor.

Para ello se han de resolver las ecuaciones diferenciales que definen el modelo matemático de la máquina de inducción. Estas ecuaciones no presentan solución analítica, lo que implica una resolución numérica en la que es necesario realizar una transformación previa de las ecuaciones originales.

1.4.2. Objetivos Particulares

El análisis de un convertidor electromecánico tiene por objetivo determinar el comportamiento del mismo ante cualquier variación de las variables de entrada. A continuación se presentan los objetivos particulares para el análisis de la máquina de inducción.

a) *Determinación del modelo matemático.*

Para la elección de un modelo matemático, es necesario observar de qué variables depende el problema planteado, frente al tipo de problema que vaya a analizarse y del grado de precisión deseado.

Por ejemplo: en una máquina eléctrica, en una primera aproximación pueden despreciarse las pérdidas en el entrehierro del circuito magnético y el fenómeno de la saturación, además de considerar al estator y rotor lisos (entrehierro constante).

Suponer una máquina sin desviaciones, es decir, una máquina de inducción trifásica equilibrada y simétrica (bobinas del estator iguales entre sí y bobinas del rotor iguales entre sí) permite que el modelo a estudiar no resulte un sistema matemático imposible de manejar, no debiendo de arrastrar procesos de cálculo demasiado complejos para su estudio, disminuyendo de forma notable los tiempos del cálculo.

Se plantearán de las ecuaciones obtenidas como un sistema de ecuaciones diferenciales.

Estas ecuaciones relacionan el campo magnético con tensiones y corrientes por una parte, y par y velocidad por otra, mediante un sistema de valores que dependen de las propiedades físicas de la máquina como conjunto.

Dado que a menudo estas ecuaciones diferenciales no son lineales, y en algunas ocasiones de coeficientes variables, la resolución de las mismas constituye uno de los pasos más difíciles.

Se emplearán estrategias para desplazar estas ecuaciones a otros espacios (esquema de referencia), pudiendo ser la "transformación de Park" donde podrán aparecer sistemas linealizados, a su vez, mediante aproximaciones de cálculo obtener un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

b) *Elegir el algoritmo de resolución (Método numérico).*

Es posible mediante algoritmo de programación resolver de forma numérica un sistema como el anterior. La elección de un método numérico adecuado permite que el sistema tenga tiempos de simulación relativamente bajos, para su implementación en aplicaciones tecnológicas.

Se desarrollará un programa computacional (en MATLAB) para la resolución del modelo matemático expresado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante un entorno gráfico que simula el comportamiento en régimen dinámico del motor de inducción.

c) *Bifurcaciones.*

Se realizará un estudio acerca del fenómeno de bifurcación, tipos de bifurcaciones y comportamiento de las mismas.

d) *Método de Continuación.*

Se explicará la composición del método de continuación ya que es una de las partes más esenciales en esta tesis. Este método ayudará a calcular el diagrama de fase de la máquina de bifurcación y con esto se podrá plasmar gráficamente dicho fenómeno.

e) *Implementación del Método en la Máquina*

Se implementará el método de continuación en el comportamiento transitorio de una máquina de inducción trifásica particular. Con la finalidad de observar y estudiar el fenómeno de bifurcación que hará presencia debido a variaciones paramétricas de la máquina.

1.5. Hipótesis

Mediante el modelo matemático del motor de inducción es posible realizar simulaciones de su comportamiento, así como también obtener cualquiera de sus puntos de equilibrio.

El modelo del motor evoluciona a partir de las variables de entrada, pudiendo ser tensiones o corrientes de distintas características que llevaran a un punto de equilibrio diferente en cada modificación de la entrada.

Las variaciones de las variables de entrada se transmiten sobre variaciones de las variables de salida. Es posible, estudiar el motor en distintas situaciones que reflejen maniobras de trabajo reales, pudiendo visualizar de forma gráfica el desarrollo, ya no solo de las variables externas, si no también el desarrollo de las variables internas de la máquina. Esto permite realizar estudios sobre el funcionamiento de distintas máquinas en condiciones extremas sin necesidad

de construirla físicamente.

En general el modelo puede ser útil en cualquier cálculo que involucre la evolución de la conducta real del motor.

Además el modelo puede ser transportado a otras aplicaciones para su evaluación conjunta con otros sistemas electro-mecánicos.

1.6. Alcances y Limitaciones

Dentro de los alcances y limitaciones se tomarán en cuenta los siguientes puntos:

- Se llevará a cabo el análisis para un motor en particular.
- El análisis se concentrará principalmente en la operación de estado estacionario.
- No se implementará ningún controlador para la máquina de inducción.
- Se llevará a cabo el análisis teórico para alimentación a frecuencia nominal en lazo abierto.
- Se llevará a cabo el análisis con al menos dos modelos diferentes para el par mecánico.

- Se investigará la posibilidad de considerar otros parámetros de bifurcación.
- Se investigará la posibilidad de hacer aproximación funcional para los parámetros de la máquina.

CAPÍTULO **2**

Máquinas de Inducción

2.1. Introducción

La máquina de inducción es usada en una amplia variedad de aplicaciones como medio de convertir energía eléctrica a energía mecánica. Éste es sin duda el caballo de batalla de la industria eléctrica.

El sistema eléctrico de potencia, que garantiza con su normal funcionamiento el trabajo de la industria, el transporte, la vida de la población, en general, toda la vida activa de las ciudades, regiones y todo el país, debe funcionar con confiabilidad. La condición principal para un funcionamiento confiable es su estabilidad, que quiere decir, la capacidad del sistema para restablecer su estado inicial, dicho de otra forma, su régimen de funcionamiento normal o prácticamente uno muy cercano a él, aún después de cualquier violación (grande o pequeña) de dicho régimen, de otra manera llamado perturbación.

La estabilidad se distingue en dos tipos:

1.- Estabilidad estática, la cual es considerada por dos aspectos:

- Estable: Como propiedad del régimen permanente dado de auto-restablecerse cuando hay perturbaciones pequeñas de sus valores iniciales en los parámetros del régimen, o también, que no se desprende de dichos parámetros.
- Inestable: Como propiedad de un régimen permanente que gradualmente va desmejorando al tener poca resistencia sobre pequeñas perturbaciones (desviaciones u oscilaciones) hasta cierto régimen límite.

Ambos tipos de estabilidad pueden demostrarse usando una canica y un tazón. Coloca la canica en el fondo del tazón de modo que no se mueva. A

esto le llamaremos la posición original. Si empujas la canica ligeramente en cualquier dirección, intentará regresar al centro del tazón. A esto se le conoce como un sistema estáticamente estable. Empuja otra vez la misma canica y observa cuánto tiempo tarda en volver a quedarse inmóvil en el fondo del tazón. Ahora bien, si el tazón se voltea boca abajo, y la canica se coloca cuidadosamente encima, cualquier leve contacto causará que la canica comience a rodar y se caiga del tazón por lo que la canica no volverá a su posición original. A esto se le llama sistema estáticamente inestable.

2.- Estabilidad dinámica: Ésta se analiza para desviaciones grandes (comúnmente no lineales) y que con frecuencia están acompañadas de cambios en la configuración y parámetros del sistema eléctrico de potencia (número de elementos en operación), así como también en los valores de sus parámetros.

Se distinguen dos tipos de estabilidad dinámica:

- Estabilidad de sincronismo: Es mantener el régimen después de oscilaciones grandes, pero sin que el rotor del generador dé vuelta (180° - 360°).
- Estabilidad resultante: Es restablecer el régimen después de ser perturbado durante un período corto (por ejemplo, cuando en el transcurso de algún tiempo los generadores del sistema eléctrico de potencia o algunas de sus partes funcionan fuera de sincronismo), pero el funcionamiento sincrónico normal se establece después de unas cuantas vueltas del rotor. El restablecimiento puede tener lugar por sí mismo a raíz de las propiedades intrínsecas del sistema o por acción de los dispositivos especiales del sistema automático.

En resumen, el equilibrio define el estado de un cuerpo o sistema cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es nula. Según la 1ª Ley del Movimiento de Newton, un cuerpo en reposo tiende a estar en reposo, y un cuerpo en movimiento tiende a permanecer en movimiento en línea recta salvo que se le aplique una fuerza externa. Lo mismo ocurre para cualquier tipo de sistema.

En éste capítulo se mostrarán las ecuaciones de voltaje y par de la máquina de inducción, expresadas en términos de variables de máquina. Con la finalidad de hacer que las ecuaciones sean más sencillas de resolver, se empleará una transformación que produce un cambio en dichas variables y las expresa en un marco de referencia arbitrario. Una vez hecho esto las ecuaciones estarán expresadas en el marco de referencia arbitrario $dq0$ [1].

De igual manera, en ésta tesis, se presentará un método de continuación [4], el cuál permitirá identificar los fenómenos de bifurcación que se puedan presentar en el análisis de estado estable de la máquina de inducción.

Se hará mención del método numérico que se implementará para resolver las ecuaciones diferenciales que presente la máquina.

2.2. Modelos $dq0$ en Espacio de Estado para la Máquina de Inducción

2.2.1. Teoría del Esquema de Referencia

Aunque los cambios de variables son usados en el análisis de las máquinas de A.C. para eliminar las inductancias variantes en el tiempo, los cambios de variables son también empleados en el análisis de componentes de siste-

mas de potencia con parámetros constantes y el control de sistemas asociados con los actuadores eléctricos. Por ejemplo, en muchos de los programas de computadora usados para el estudio de la estabilidad dinámica y transitoria de grandes sistemas de potencia, las variables de todos los componentes del sistema de potencia excepto para las máquinas síncronas, son representadas en un marco de referencia rotatorio a la velocidad síncrona. Por lo tanto, las variables asociadas con los transformadores, líneas de transmisión, cargas, bancos de capacitores y unidades estáticas de var, por ejemplo, deben ser transformadas al marco de referencia rotatorio síncrono por un cambio de variables. Similarmente, el valor promedio de las variables asociadas con el proceso de conversión en los sistemas de accionamiento eléctrico y sistemas de alto voltaje de AC-DC son comúnmente expresados en el marco de referencia rotatorio síncrono.

Afortunadamente, todas las transformaciones reales conocidas por estos componentes y controles también están contenidas en la transformación del marco de referencia arbitrario, la misma transformación general es usada para las variables de estator de las máquinas síncronas e inducción y para las variables del rotor en esta última. Aunque se pudiera formular una transformación del marco de referencia arbitrario que pudiera ser aplicada a todas las variables, es preferible considerar únicamente las variables asociadas con los circuitos estacionarios y después modificar este análisis para las variables asociadas con los devanados del rotor de la máquina de inducción en el tiempo que ésta es analizada.

Las ecuaciones diferenciales no lineales que describen la máquina de inducción y síncrona, cuando se expresan en variables de máquina, contienen coeficientes variantes en el tiempo, dependientes de la posición del rotor. Con

el fin de reducir la complejidad de ésta descripción matemática se propone una transformación de las variables originales de la máquina a un esquema de referencia que gira a una velocidad angular arbitraria.

El antecedente más importante en este tipo de transformación es el trabajo escrito por R.H. Park en 1929, que convertía el devanado del estator a un devanado ficticio que gira con el rotor. Un cambio de variables que formule una transformación de las variables trifásicas de los elementos de un circuito estacionario a un marco de referencia arbitrario puede ser expresado como

$$\mathbf{f}_{qd0s} = \mathbf{K}_s \mathbf{f}_{abcs} \quad (2.1)$$

Donde

$$\mathbf{f}_{qd0s} = \begin{bmatrix} f_{qs} & f_{ds} & f_{0s} \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

$$\mathbf{f}_{abcs} = \begin{bmatrix} f_{as} & f_{bs} & f_{cs} \end{bmatrix}^T \quad (2.3)$$

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}\theta & \text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.5)$$

Siendo \mathbf{K}_s una matriz constante con elementos dependientes del desplazamiento angular θ .

En dichas ecuaciones \mathbf{f} puede representar voltaje \mathbf{v} , corriente \mathbf{i} , enlace de flujo λ o carga eléctrica. Las variables, parámetros y transformación asociada

a circuitos estacionarios son indicados por s . Los subíndices $dq0$ refieren a circuitos en el marco de referencia arbitrario, por otro lado, los subíndices abc hacen referencia a circuitos en variables de máquina. Y la velocidad angular del esquema de referencia ω que puede ser constante o variante en el tiempo

Puede mostrarse también que la transformación K_s tiene una inversa, la cual permitirá una transformación partiendo del esquema de referencia hacia las variables de máquina, dicha transformación inversa puede ser mostrada como

$$(\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

De esta manera para ir de variables en el marco de referencia hacia variables de máquina se tiene que

$$\mathbf{f}_{abcs} = (\mathbf{K}_s)^{-1} \mathbf{f}_{qd0s} \quad (2.7)$$

2.3. Ecuaciones de Voltaje y Par en Variables de Máquina

En la Figura 2.1 se muestra el arreglo de devanado de una máquina de inducción de tres fases y dos polos conectada en estrella. Los devanados del estator son idénticos, distribuidos sinusoidalmente, desplazados 120° , con espiras equivalentes N_s y resistencias r_s . De igual manera, los devanados del rotor serán considerados como devanados idénticos, distribuidos sinusoidalmente, desplazados 120° , con espiras equivalentes N_r y resistencias r_r .

Las ecuaciones de voltaje en variables de máquina pueden ser expresados como

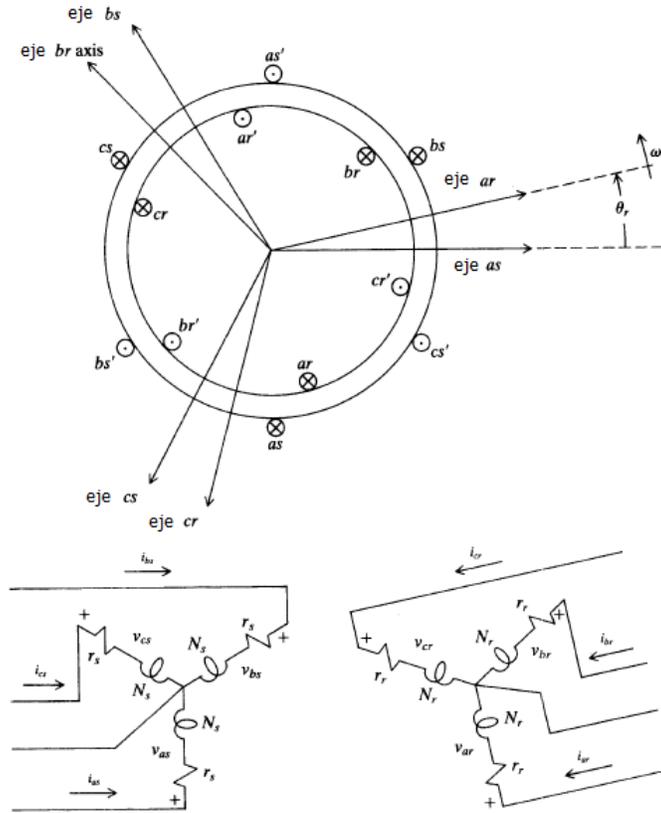


Figura 2.1: Máquina de Inducción de dos polos, trifásica, conectada en estrella.

$$\mathbf{V}_{abcs} = \mathbf{r}_s \mathbf{i}_{abcs} + \frac{d}{dt} \lambda_{abcs} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{V}_{abcr} = \mathbf{r}_r \mathbf{i}_{abcr} + \frac{d}{dt} \lambda_{abcr} \quad (2.9)$$

Donde

$$\mathbf{f}_{abcs} = \begin{bmatrix} f_{as} & f_{bs} & f_{cs} \end{bmatrix}^T \quad (2.10)$$

$$\mathbf{f}_{abcr} = \begin{bmatrix} f_{ar} & f_{br} & f_{cr} \end{bmatrix}^T \quad (2.11)$$

En las ecuaciones anteriores el subíndice s denota los parámetros y variables asociadas con los circuitos de estator, y el subíndice r denota los parámetros y variables asociadas con los circuitos del rotor. Ambas \mathbf{r}_s y \mathbf{r}_r son matrices diagonal, cuya diagonal son elementos no cero $\mathbf{r}_s = \text{diag} [r_s \ r_s \ r_s]$ y $\mathbf{r}_r = \text{diag} [r_r \ r_r \ r_r]$. Por otra parte para un sistema magnéticamente lineal, los enlaces de flujo pueden ser expresados como

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}'_{sr} \\ (\mathbf{L}'_{sr})^T & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abcs} \\ \mathbf{i}'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Donde

$$\mathbf{i}_{abcs} = [i_{as} \ i_{bs} \ i_{cs}]^T \quad (2.13)$$

$$\mathbf{i}'_{abcr} = [i'_{ar} \ i'_{br} \ i'_{cr}]^T \quad (2.14)$$

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{L}_{sr} = L_{sr} \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos\theta_r \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

En las ecuaciones anteriores de inductancias, L_{ls} y L_{ms} son, respectivamente, los enlaces y las inductancias magnetizantes de los devanados del estator; L_{lr} y L_{mr} son para el devanado del rotor. La inductancia L_{sr} es la amplitud de las inductancias mutuas entre los devanados del rotor y estator.

El par eléctrico es una de las variables más importantes del sistema, ya que contiene variables de gran importancia tales como las corrientes del rotor y estator.

La expresión para par eléctrico puede ser escrita como

$$\begin{aligned} T_e = & - \left(\frac{P}{2} \right) L_{ms} \left\{ \left[i_{as} \left(i'_{ar} - \frac{1}{2}i'_{br} - \frac{1}{2}i'_{cr} \right) + i_{bs} \left(i'_{br} - \frac{1}{2}i'_{ar} - \frac{1}{2}i'_{cr} \right) \right. \right. \\ & + i_{cs} \left(i'_{cr} - \frac{1}{2}i'_{br} - \frac{1}{2}i'_{ar} \right) \left. \right] \text{sen}\theta_r + \frac{\sqrt{3}}{2} [i_{as}(i'_{br} - i'_{cr}) + i_{bs}(i'_{cr} - i'_{ar}) \\ & + i_{cs}(i'_{ar} - i'_{br})] \cos\theta_r \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Donde P es el número de polos de la máquina y θ_r es el desplazamiento angular del rotor.

El par eléctrico y la velocidad del rotor están relacionadas por

$$T_e = J \left(\frac{2}{P} \right) \frac{d}{dt} \omega_r + T_L \quad (2.19)$$

Donde J es la inercia del rotor y en algunos casos la carga conectada, sus unidades son ($kg \cdot m^2$).

T_L es el par de carga o par de inercia y esta representado por

$$T_L = B_L \omega_r^2 \quad (2.20)$$

Siendo B_L el coeficiente asociado con el par de carga

2.4. Transformación de Ecuaciones para Circuitos del Rotor

El concepto de realizar una transformación que implique un cambio de las variables de máquina al marco de referencia arbitrario fue implementado a los circuitos del rotor. En el análisis de las máquinas de inducción también es deseable transformar las variables asociadas con los devanados simétricos del rotor al marco de referencia arbitrario. Un cambio de variables el cual formula una transformación de las tres fases de los circuitos del rotor al marco de referencia arbitrario es

$$\mathbf{f}'_{qd0r} = \mathbf{K}_r \mathbf{f}'_{abcr} \quad (2.21)$$

donde

$$\mathbf{f}'_{qd0r} = \begin{bmatrix} f'_{qr} & f'_{dr} & f'_{0r} \end{bmatrix}^T \quad (2.22)$$

$$\mathbf{f}'_{abcr} = \begin{bmatrix} f'_{ar} & f'_{br} & f'_{cr} \end{bmatrix}^T \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K}_r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\beta & \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}\beta & \text{sen}(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\beta = \theta - \theta_r \quad (2.25)$$

El desplazamiento angular θ esta definido por (2.5) y θ_r esta definida por

$$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt} \quad (2.26)$$

La inversa de la transformación para circuitos del rotor esta definida como

$$(\mathbf{K}_r)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta & 1 \\ \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\beta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

El subíndice r indica las variables, parámetros y la transformación asociada con los circuitos rotatorios.

2.5. Ecuaciones de Voltaje y Par en Variables del Marco de Referencia Arbitrario

Las ecuaciones de los voltajes de estator y rotor para una máquina de inducción, dentro del marco de referencia arbitrario, pueden expresarse como

$$\mathbf{v}_{qd0s} = \mathbf{r}_s \mathbf{i}_{qd0s} + \omega \lambda_{dqs} + \frac{d}{dt} \lambda_{qd0s} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v}'_{qd0r} = \mathbf{r}'_r \mathbf{i}'_{qd0r} + (\omega - \omega_r) \lambda'_{dqr} + \frac{d}{dt} \lambda'_{qd0r} \quad (2.29)$$

donde

$$\lambda_{dqs} = \begin{bmatrix} \lambda_{ds} & -\lambda_{qs} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.30)$$

$$\lambda'_{dqr} = \begin{bmatrix} \lambda'_{dr} & -\lambda'_{qr} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.31)$$

El conjunto de ecuaciones está completa al incluir la expresión de los enlaces de flujo. Sustituyendo las ecuaciones de transformación, (2.1) y (2.18), dentro de las ecuaciones de enlaces de flujo expresadas en variables de máquina *abc* (2.12) se obtienen las ecuaciones de enlace de flujo para un sistema magnéticamente lineal:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{qd0s} \\ \lambda'_{qd0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} (\mathbf{K}_r)^{-1} \\ \mathbf{K}_r (\mathbf{L}'_{sr})^T (\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_r \mathbf{L}'_r (\mathbf{K}_r)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{qd0s} \\ \mathbf{i}'_{qd0r} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Realizando las operaciones matriciales se tiene que

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{K}_r \mathbf{L}'_r (\mathbf{K}_r)^{-1} = \begin{bmatrix} L'_{lr} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L'_{lr} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} (\mathbf{K}_r)^{-1} = \mathbf{K}_r (\mathbf{L}'_{sr})^T (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Donde L_M es igual a $\frac{3}{2}L_{ms}$

De igual manera las ecuaciones de los voltajes pueden ser expresadas individualmente

$$v_{qs} = r_s i_{qs} + \omega \lambda_{ds} + \frac{d}{dt} \lambda_{qs} \quad (2.36)$$

$$v_{ds} = r_s i_{ds} - \omega \lambda_{qs} + \frac{d}{dt} \lambda_{ds} \quad (2.37)$$

$$v_{0s} = r_s i_{0s} + \frac{d}{dt} \lambda_{0s} \quad (2.38)$$

$$v'_{qr} = r'_r i'_{qr} + (\omega - \omega_r) \lambda'_{dr} + \frac{d}{dt} \lambda'_{qr} \quad (2.39)$$

$$v'_{dr} = r'_r i'_{dr} - (\omega - \omega_r) \lambda'_{qr} + \frac{d}{dt} \lambda'_{dr} \quad (2.40)$$

$$v'_{0r} = r'_r i'_{0r} + \frac{d}{dt} \lambda'_{0r} \quad (2.41)$$

La expresión del par eléctrico en términos de corrientes en el marco de referencia arbitrario

$$\mathbf{T}_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) L_M (i_{qs} i'_{dr} - i'_{ds} i_{qr}) \quad (2.42)$$

Otra representación del par eléctrico de la máquina de inducción puede ser

$$\mathbf{T}_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) (\lambda'_{qr} i'_{dr} - \lambda'_{dr} i'_{qr}) \quad (2.43)$$

$$\mathbf{T}_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) (\lambda'_{ds} i'_{qs} - \lambda'_{qs} i'_{ds}) \quad (2.44)$$

$$\mathbf{T}_e = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{P}{2}\right) \frac{M}{D} (\lambda_{qs} \lambda'_{dr} - \lambda_{ds} \lambda'_{qr}) \quad (2.45)$$

A continuación se expresan las ecuaciones diferenciales de las variables que conforman el modelado de la máquina de inducción.

Los enlaces de flujo obtenidos de (2.33) a (2.38)

$$\frac{d}{dt} \lambda_{qs} = V_{qs} - r_s i_{qs} - \omega \lambda_{ds} \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_{ds} = V_{ds} - r_s i_{ds} + \omega \lambda_{qs} \quad (2.47)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_{0s} = V_{0s} - r_s i_{0s} \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_{qr} = V_{qr} - r_r i_{qr} - (\omega - \omega_r) \lambda_{dr} \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_{dr} = V_{dr} - r_r i_{dr} + (\omega - \omega_r) \lambda_{qr} \quad (2.50)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_{0r} = V_{0r} - r_r i_{0r} \quad (2.51)$$

La velocidad del rotor de (2.19)

$$\frac{d}{dt}\omega_r = (T_e - T_L) \left(\frac{P}{2J} \right) \quad (2.52)$$

Y respectivamente el desplazamiento angular y la posición del rotor

$$\frac{d}{dt}\theta = \omega \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{dt}\theta_r = \omega_r \quad (2.54)$$

Donde ω es la velocidad angular y ω_r es la velocidad del rotor.

De esta forma se puede apreciar que para una máquina de inducción se tiene un sistema no lineal de orden nueve, el cual podrá ser analizado en sus puntos de equilibrio en (estado estable) y analizar los posibles fenómenos de bifurcación que se pudieran presentar haciendo un cambio paramétrico en alguno de sus elementos, pudiendo ser la frecuencia f , resistencias r_r o el coeficiente relacionado con el par de carga B_L

CAPÍTULO **3**

Bifurcaciones

3.1. Introducción

En la forma más general, por bifurcación se entiende como un cambio cualitativo de un sistema cuando uno de sus parámetros alcanza o sobrepasa un cierto valor crítico también llamado umbral. Más específicamente, se llama bifurcación de un punto de equilibrio al caso donde éste cambio cualitativo produce la aparición de nuevos puntos de equilibrio que al alejarse del parámetro del valor crítico, se alejan cada vez más del punto de equilibrio inicial. El estudio de este fenómeno despertó interés a partir del artículo realizado por E.Hopf publicado en 1942, donde se relaciona la aparición de soluciones periódicas con ciertos cambios en el comportamiento de la parte lineal del sistema bajo un cambio paramétrico.

3.2. Principios de Bifurcación

A diario y a lo largo de nuestras vidas, experimentamos cambios ya sean graduales o repentinos. Estos cambios pueden ser caracterizados como cuantitativos o cualitativos, respectivamente. Por ejemplo, considerando el siguiente ejemplo (Figura 3.1). Imagine una tabla de madera sostenida en sus extremos,

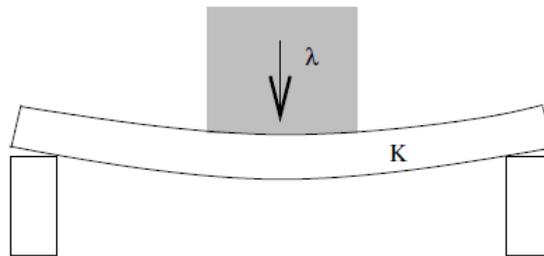


Figura 3.1: Flexión, sobre una tabla, ejercida por una carga λ

con una carga en medio. Si la carga λ no es muy grande, la tabla tendrá una deformación dependiendo en la magnitud de λ y en las propiedades de rigidez K de dicha tabla. La tabla permanecerá estable en el sentido de que una mínima variación de la carga λ (o en la rigidez de la tabla K) lleve a una perturbación del estado muy ligera. Dicha variación del parámetro puede ser considerada como un cambio cuantitativo. La tabla está deformada dentro de su régimen de elasticidad y regresará a su forma original cuando sea retirada la carga λ .

Esta situación cambia abruptamente cuando la carga λ es incrementada más haya de un cierto punto crítico λ_0 en el cual la tabla se romperá. Esta acción repentina es un ejemplo de un cambio cualitativo. Suponiendo que la forma de la tabla sea modelada por alguna función (solución de una ecuación). Se puede decir que existe una solución para los valores de la carga $\lambda < \lambda_0$ y que estas soluciones dejan de existir para $\lambda > \lambda_0$. La carga λ y la rigidez K son ejemplos de parámetros. El resultado de cualquier evento o experimento es controlado por los parámetros. Entonces, el problema práctico es controlar el estado del sistema, esto es, encontrar ciertos parámetros los cuales hagan que el estado realice nuestros requerimientos. Este rol de los parámetros es ocasionalmente enfatizado por términos como *control paramétrico*, o *diseño paramétrico*. El variar un parámetro puede resultar en una transición desde un cambio cuantitativo hacia un cambio cualitativo. Los siguientes pares de verbos pueden servir como ejemplo:

doblar \rightarrow romper

inclinarse \rightarrow volcar

estirar \rightarrow desgarrar

inflar \rightarrow reventar

Los verbos de la izquierda pueden clasificarse como estados que se mantienen estables bajo pequeñas perturbaciones; por lo tanto la respuesta de cada sistema puede ser considerada como cuantitativa. Éste comportamiento (cuantitativo) termina abruptamente en ciertos valores críticos (umbral) de los parámetros que producen cambios drásticos e irreversibles en el sistema. Dichos cambios están representados por los verbos de la derecha. Muy cerca del umbral crítico el sistema se convierte más sensible; mínimas perturbaciones pueden provocar cambios cualitativos (drásticos e irreversibles). Los valores del umbral son los detonantes de una clase de fenómenos denotados con el término de *bifurcaciones*. Un mecanismo clave para identificar estos fenómenos puede ser indicado como

estado estable \leftrightarrow movimiento

Por mencionar algunos ejemplos. El potencial de la membrana eléctrica de los nervios permanece estable mientras la corriente estimulante permanezca por de bajo de un umbral crítico; si este valor crítico es rebasado, el potencial de la membrana comienza a oscilar, resultando en impulsos nerviosos. Al estirar una liga, ésta siempre regresará a su forma original mientras no se sobrepase su umbral crítico, ya que, una vez rebasado dicho umbral la liga se romperá imposibilitando que regrese a su forma original. Considerando la oscilación de una bandera, permanecerá oscilando solo si el viento pasa sobre ella lo suficientemente rápido.

La transición de un estado estacionario a movimiento, y viceversa, es considerado como un cambio cualitativo. Tomando como ejemplo la bandera que oscila y sea un parámetro dado λ , con un valor crítico λ_0 . Teniendo como va-

riable de estado la velocidad del viento, el estado es estacionario para $\lambda < \lambda_0$ y oscilatorio para $\lambda > \lambda_0$.

En este capítulo los cambios cualitativos causados por variaciones de algunos parámetros físicos λ serán denotados como *bifurcación o ramal*. Se usa el mismo símbolo λ para representar cualquier tipo de variable paramétrica. La siguiente lista muestra algunos tipos de cambios cualitativos en los cuales pueden presentarse los fenómenos de bifurcación:

estable \leftrightarrow inestable
simétrico \leftrightarrow asimétrico
estacionario \leftrightarrow movimiento periódico (regular)
regular \leftrightarrow irregular
orden \leftrightarrow caos

Muchos de estos cambios pueden ocurrir simultáneamente en formas complicadas.

La cualidad de las soluciones o estados es también distinguida por su forma geométrica, es decir, por su patrón. Por ejemplo, los cinco patrones en la Figura 3.2 caracterizan cinco posibilidades de cómo una variable de estado varía con el tiempo. La forma que tiene la solución de la Figura 3.2(a) es "plana." estacionaria, el estado permanece en un nivel constante. La Figura 3.2(b) muestra un patrón oscilante con una estructura periódica. Los patrones de las Figuras(c) y (d) son también oscilatorios pero menos periódicos, y el patrón de la Figura(e) aparece irregular. Las cinco figuras diferentes surgen a partir de diferentes valores del parámetro λ ; se formarán patrones nuevos una vez que el parámetro λ sobrepase los valores críticos del sistema.

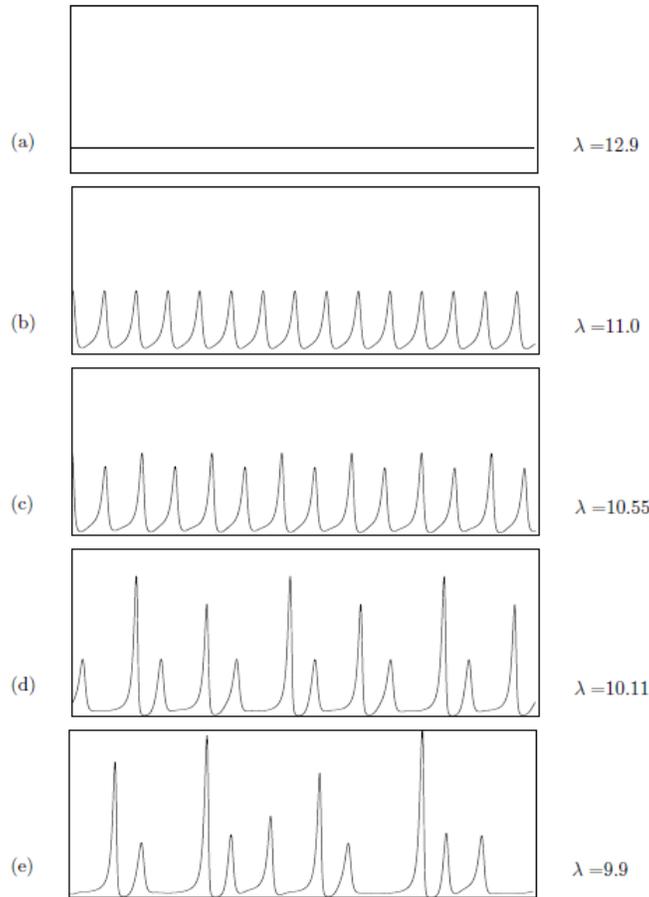


Figura 3.2: Cambio de forma en el patrón de una solución. La complejidad de la forma aumenta al disminuir el valor del parámetro λ .

3.3. Estabilidad de Puntos de Equilibrio

Un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un *punto de equilibrio* del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ cuando la velocidad del sistema en ese punto sea cero. Es decir, cuando $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Si \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio, la función constante $x(t) \equiv x_0$ es una solución del sistema no lineal pues

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esto significa que si una partícula se mueve según un campo de velocidad-

des, permanecerá quieta cuando se sitúe en una posición con velocidad cero.

Una buena pregunta sería, ¿Cómo se comportan las trayectorias de un sistema no lineal que parten de puntos cercanos a un punto de equilibrio del mismo sistema no lineal?. A grandes rasgos, se puede decir que un punto de equilibrio es estable cuando ninguna de las trayectorias que parten de puntos suficientemente cercanos se alejan de él; inestable cuando existen trayectorias que se alejan de él aunque partan de puntos muy próximos; asintóticamente estable cuando las trayectorias que parten de puntos suficientemente cercanos tienden a él conforme pasa el tiempo. La definición técnica de estos tipos de estabilidades se describe a continuación:

- *Estable* si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0) - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$$

Donde, $x(t)$ denota a una trayectoria cualquiera del sistema.

- *Inestable* cuando no es estable.
- *Asintóticamente estable o atractor* si y sólo si es estable y, además, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|x(0) - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0.$$

- *Repulsor* si y sólo si es atractor para el sistema $\mathbf{x}' = -f(\mathbf{x})$

Esta situación de estabilidad puede hacerse plausible si se toma como ejemplo la Figura 3.3, donde se pueden observar tres pelotas colocadas en tres diferentes posiciones, en la parte mas alta se encuentra una pelota en un punto de equilibrio ligeramente estable ya que podría considerarse que ante pequeñas perturbaciones la pelota permanecería en su misma posición, pero

ante perturbaciones mayores sería posible que la pelota saliera de su punto de equilibrio. La siguiente pelota se encuentra en un punto de equilibrio inestable, ya que sin ninguna perturbación permanecerá en esa posición, pero ante perturbaciones muy pequeñas inmediatamente dejará el punto de equilibrio donde se encuentra. Por último la tercer pelota se encuentra en un punto de equilibrio asintóticamente estable ya que ante bajas y altas perturbaciones puede asumirse que permanecerá situada en el punto de equilibrio donde se encuentra.

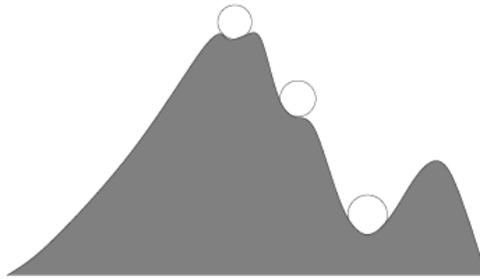


Figura 3.3: Estabilidad de una pelota.

A diferencia de los sistemas lineales, los cuales ellos mismos son los que definen su propia estabilidad, ya sea estable, asintóticamente estable (atractor) o inestable (repulsor), la estabilidad de los sistemas no lineales son definidos por medio de sus puntos de equilibrio. Por ejemplo, un sistema no lineal puede tener múltiples puntos de equilibrio asintóticamente estables (atractores) y puntos de equilibrio inestables (repulsores). Otra diferencia es el carácter local que tienen las definiciones en el caso no lineal, en contraposición al carácter global del caso lineal. Por ejemplo, si un sistema lineal es atractor, todas sus trayectorias tienden al origen. En cambio, dado un punto de equilibrio atractor de un sistema no lineal, tan solo se puede afirmar que tienden a él las trayectorias que empiezan lo suficientemente cerca de ese punto,

en una zona llamada dominio de atracción.

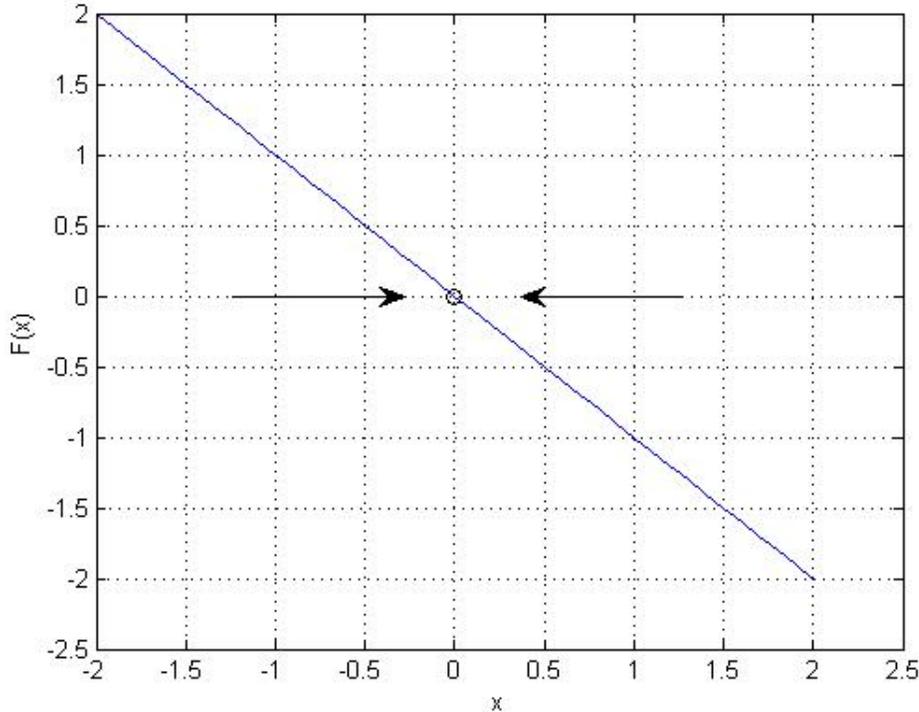


Figura 3.4: Retrato de fase de la ecuación $f(x) = -x$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.

Dentro del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, sus soluciones pueden ser mostradas mediante una representación gráfica llamada *retrato de fase*, en la cual se puede apreciar la trayectoria de las soluciones del sistema. El siguiente teorema ayuda a determinar la estabilidad de un punto de equilibrio:

Un punto de equilibrio \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$ es estable si existe $\delta > 0$ tal que $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$ para $|x - \bar{x}| < \delta$. De forma similar, \bar{x} es asintóticamente estable si y solo si existe una $\delta > 0$ tal que $(x - \bar{x})f(x) < 0$ para $0 < |x - \bar{x}| < \delta$. Un punto de equilibrio \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$ es inestable si existe una $\delta > 0$ tal que $(x - \bar{x})f(x) > 0$ para ambos $0 < x - \bar{x} < \delta$ ó $-\delta < x - \bar{x} < 0$.

Donde x es la variable, \bar{x} es el punto de equilibrio y $f(x)$ es la función. El ejemplo mas sencillo se muestra en la Figura 3.4, que es el retrato de fase de la ecuación diferencial

$$f(x) = -x. \quad (3.1)$$

Es fácil saber que dicha ecuación cuenta con un único equilibrio $\bar{x} = 0$ y que tiene dos intervalos abiertos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Se pueden tomar valores para la variable x que sean cercanos al equilibrio (dentro del dominio de atracción), pudiendo ser $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$. Teniendo el equilibrio \bar{x} y valores para la variable x se sustituyen dichos valores en el teorema quedando de la siguiente manera:

Teorema: estable (atractor) si $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$.

Función: $f(x) = -x$.

Equilibrio: $\bar{x} = 0$.

Primera variable: $x_1 = -2$

Desarrollo: $(-2 - 0)(-(-2)) = (-2)(2) = -4 \leq 0$ estable.

Estabilidad: Atractora.

Segunda variable: $x_2 = 2$

Desarrollo: $(2 - 0)(-(2)) = (2)(-2) = -4 \leq 0$ estable.

Estabilidad: Atractora

En ambos valores tanto en $x_1 = -2$ como en $x_2 = 2$ se tiene una estabilidad atractora hacia el punto de equilibrio \bar{x} . Probablemente éste punto de equilibrio sea asintóticamente estable para valores de x que tiendan a $\pm\infty$.

La Figura 3.5 muestra otro ejemplo donde está representado gráficamente el retrato de fase de la ecuación

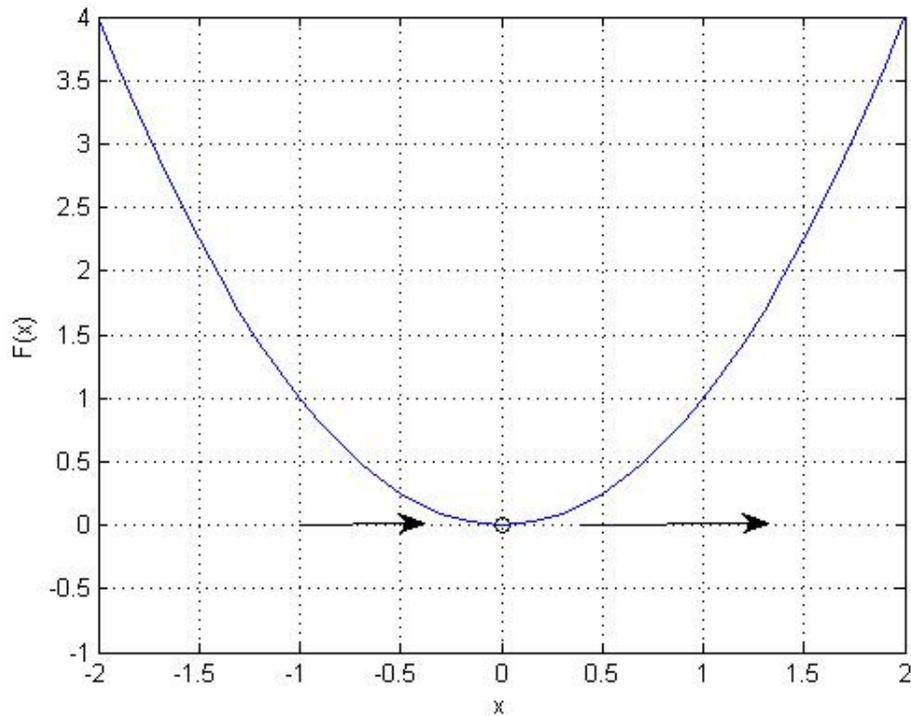


Figura 3.5: Retrato de fase de la ecuación $f(x) = x^2$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.

$$f(x) = x^2. \quad (3.2)$$

Ésta ecuación presenta un único equilibrio denotado por $\bar{x} = 0$. Acudiendo al mismo procedimiento para determinar el tipo de estabilidad se tiene que:

Teorema: estable (atractor) si $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$.

Función: $f(x) = x^2$

Equilibrio: $\bar{x} = 0$.

Primera variable: $x_1 = -1$

Desarrollo: $(-1 - 0)(-1)^2 = (-1)(1) = -1 \leq 0$ estable.

Estabilidad: Atractora.

Segunda variable: $x_2 = 1$

Desarrollo: $(1 - 0)(1)^2 = (1)(1) = 1 \geq 0$ inestable.

Estabilidad: Repulsora

Por lo que se puede deducir que para valores negativos de la variable x se tiene una estabilidad atractora hacia el equilibrio, mientras que para valores positivos se tiene una estabilidad que se aleja de el equilibrio.

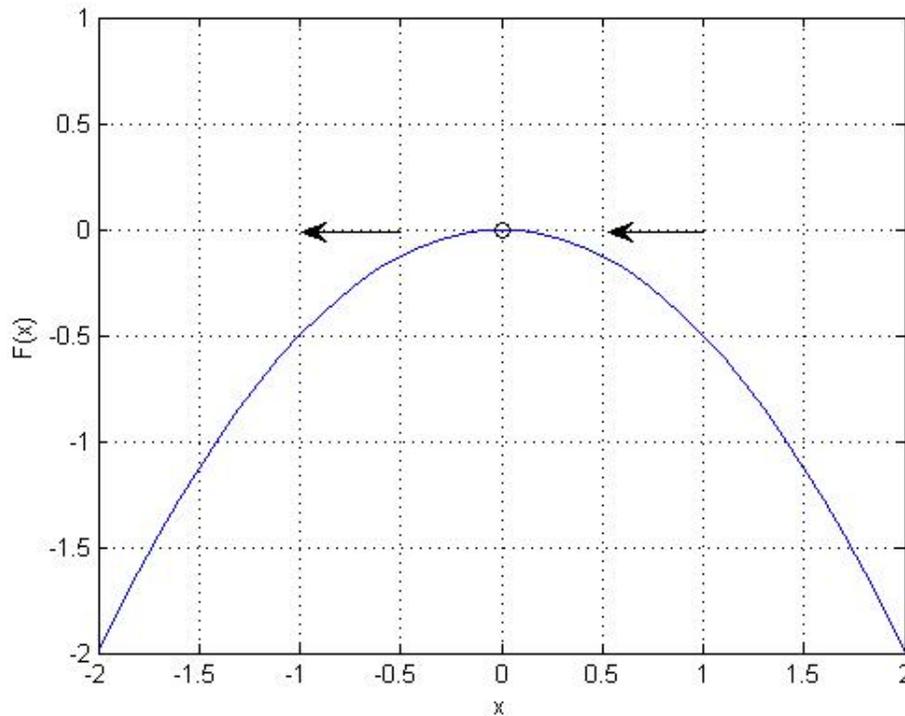


Figura 3.6: Retrato de fase de la ecuación $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.

Otro ejemplo es mostrado en la Figura 3.6, donde está representado el retrato de fase de la ecuación

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} \tag{3.3}$$

Esta ecuación cuenta con un único equilibrio $\bar{x} = 0$. De la misma manera se procede al teorema y se realiza el cálculo para poder determinar el tipo de estabilidad que tiene su punto de equilibrio.

Teorema: estable (atractor) si $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$.

Función: $f(x) = -\frac{x^2}{2}$

Equilibrio: $\bar{x} = 0$.

Primera variable: $x_1 = -1$

Desarrollo: $(-1 - 0)(-\frac{-1^2}{2}) = (-1)(-0,5) = 0,5 \geq 0$ inestable.

Estabilidad: Repulsora.

Segunda variable: $x_2 = 1$

Desarrollo: $(1 - 0)(-\frac{1}{2}) = (1)(-0,5) = -0,5 \leq 0$ estable.

Estabilidad: Atractora.

Por último ejemplo se muestra la ecuación

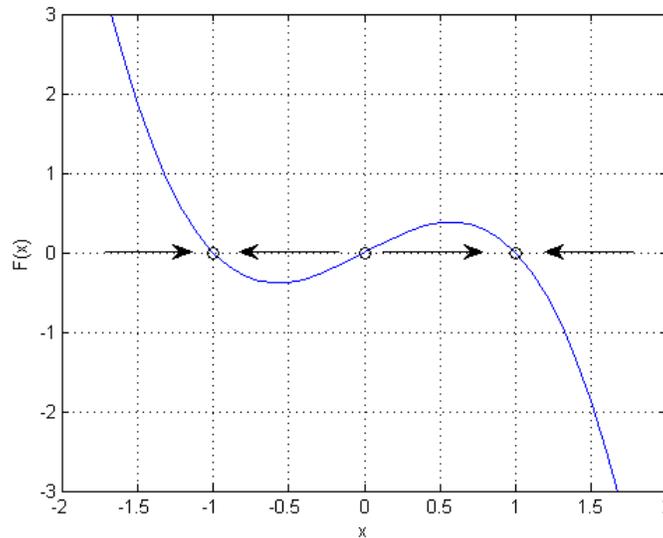


Figura 3.7: Retrato de fase de la ecuación $f(x) = x - x^3$ mostrando sus puntos de equilibrio y estabilidad.

$$f(x) = x - x^3. \quad (3.4)$$

Ésta ecuación es representada en su retrato de fase en la Figura 3.7. En ésta se presentan tres puntos de equilibrio cuyos valores son -1 , 0 y 1 . Se muestra que existen cuatro órbitas que trabajan en las fronteras de los tres puntos de equilibrio. Dichas órbitas son los intervalos abiertos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

Es fácil determinar que la estabilidad en cada punto de equilibrio es estable, la cuestión es determinar si dichos puntos de equilibrios son estables o inestables, para ello se usa el teorema antes mencionado y se calcula la estabilidad. Para el punto de equilibrio $\bar{x} = -1$ y dado que existen dos órbitas abiertas $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ en su frontera, es viable elegir soluciones cercanas en ambos lados tal que $x_1 < \bar{x}$ y $x_2 > \bar{x}$ y determinar la estabilidad en ese punto de equilibrio; pudiendo ser la soluciones $x_1 = -1,5$ y $x_2 = -0,5$. El procedimiento sería el siguiente:

Teorema: estable (atractor) si $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$.

Función: $f(x) = x - x^3$

Equilibrio: $\bar{x} = -1$.

Primera variable: $x_1 = -1,5$

Desarrollo: $[-1,5 - (-1)][-1,5 - (-1,5)]^3 \leq 0$

$-0,9375 < 0$

Estable < 0

Estabilidad: Atractora.

Segunda variable: $x_2 = -0,5$

Desarrollo: $[-0,5 - (-1)][-0,5 - (-0,5)]^3 \leq 0$

$-0,1875 < 0$

Estable < 0

Estabilidad: Atractora. Equilibrio: $\bar{x} = 0$.

Primera variable: $x_1 = -0,5$

Desarrollo: $(-0,5 - 0)(-0,5 - (-0,5)^3)$
 $(-0,5)(-0,5 + 0,125) = 0,187 \geq 0$ inestable.

Estabilidad: Repulsora.

Segunda variable: $x_2 = 0,5$

Desarrollo: $(0,5 - 0)(0,5 - (0,5)^3) (0,5)(0,5 - 0,125) = 0,187 \geq 0$ inestable.

Estabilidad: Repulsora. Equilibrio: $\bar{x} = 1$.

Primera variable: $x_1 = 0,5$

Desarrollo: $(0,5 - 1)(0,5 - (0,5)^3) (-0,5)(0,5 - 0,125) = -0,187 \leq 0$
 estable.

Estabilidad: Atractora.

Segunda variable: $x_2 = 1,5$

Desarrollo: $(1,5 - 1)(1,5 - (1,5)^3) (0,5)(1,5 - 3,37) = -0,9375 \leq 0$ estable.

Estabilidad: Atractora.

Por lo que el punto de equilibrio $\bar{x} = -1$ es atractor para las soluciones $x_1 = -1,5$ y $x_2 = -0,5$. El equilibrio $\bar{x} = 0$ es repulsor para las soluciones $x_1 = -0,5$ y $x_2 = 0,5$. Y el último equilibrio $\bar{x} = 1$ es atractor para las soluciones $x_1 = 0,5$ y $x_2 = 1,5$.

3.4. Dependencia Paramétrica

La no linealidad y la dependencia paramétrica juegan un papel importante en el estudio de los fenómenos ocurridos en sistemas no lineales. A lo largo de este capítulo, se asume que λ es un parámetro real. De igual manera se estudian las soluciones de un sistema de ODEs,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda), \quad (3.5)$$

o soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda). \quad (3.6)$$

Los vectores \mathbf{y} y \mathbf{f} tienen n componentes. En el caso de que algún sistema presente más de un parámetro, se asume que todos son parámetros fijos, excepto λ .

Una curva solución muy particular, (también llamada *diagrama de bifurcación* o *diagrama de rama*), puede presentarse tal como se muestra en la Figura 3.8. En dicha figura se presenta $[\mathbf{y}]$ contra λ , donde (\mathbf{y}, λ) son soluciones de la ecuación 3.5 o ecuación 3.6.

El estudio de los diagramas de bifurcación será muy importante, ya que en ellos se ve reflejada la influencia que tiene la variable paramétrica en la formación de ramales que evidencien múltiples puntos de equilibrio. Tal como se muestra en la Figura 3.8, las soluciones pueden estar en forma continua y pueden existir varios conjuntos de soluciones, los cuales generan *ramas de bifurcación*.

La ecuación 3.5 consiste en n ecuaciones escalares con $n + 1$ incógnitas (\mathbf{y}, λ) ; por lo tanto los ramales son curvas uni-dimensionales en \mathbb{R}^{n+1} . Al

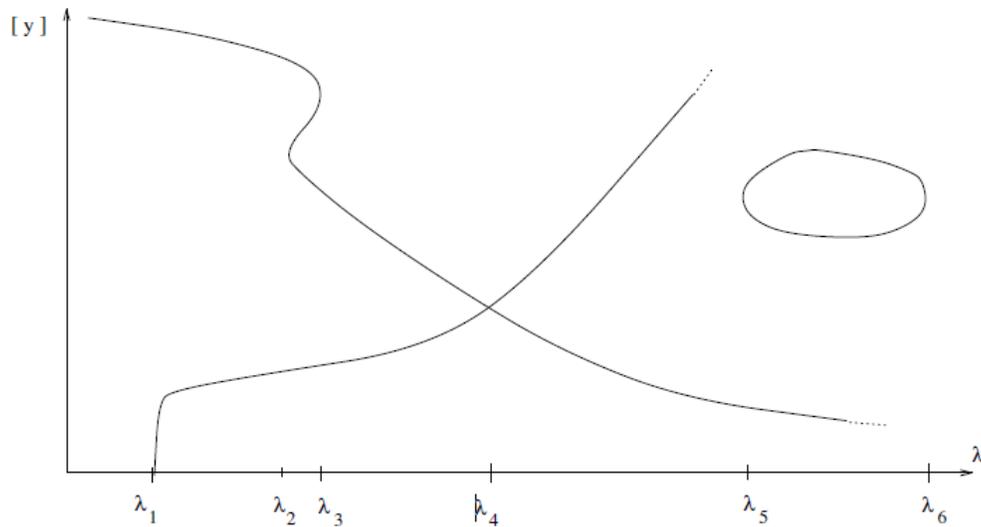


Figura 3.8: Diagrama ficticio representando bifurcaciones

variar λ , el número de soluciones también variará, con ello, las ramas pueden surgir, terminar o incluso cruzarse. En la Tabla 3.1 se muestra una lista de la multiplicidad de soluciones mostradas en el diagrama de bifurcación de la Figura 3.8.

La importancia de los valores de $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ establece que un *punto de bifurcación* o *punto de ramal* (con respecto a λ) es una solución (y_0, λ_0) de la ecuación 3.5 o 3.6, donde el número de soluciones cambia cuando λ rebasa λ_0 .

intervalo - λ	Número de soluciones y
$\lambda < \lambda_1$	1
$\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$	2
λ_2	3
$\lambda_2 \leq \lambda < \lambda_3$	4
λ_3	3
$\lambda_3 \leq \lambda < \lambda_4$	2
λ_4	1
Etc.	Etc.

Tabla 3.1: Soluciones de la Figura 3.8.

3.5. Bifurcaciones Básicas

Esta sección consiste en una serie de ejemplos específicos que ilustran el efecto que tiene la variación paramétrica dentro de los sistemas no lineales. Con la finalidad de que dichos ejemplos básicos evidencien los fenómenos de bifurcación mas comunes. A pesar de su sencillez, éstos ejemplos muestran lo que ocurre en el caso más general.

Antes de dar comienzo a los ejemplos es necesario plantear algunos conceptos que serán básicos en el estudio de la dependencia paramétrica.

Un equilibrio es llamado *hiperbólico* o *no-degenerativo* cuando el correspondiente jacobiano no tiene valores propios con parte real cero. En contraste, si alguno de los valores propios tiene parte real cero, se le llama equilibrio *no-hiperbólico* o *degenerativo*. Si el sistema es de orden dos, existe la posibilidad de que los valores propios sean complejos conjugados con parte real diferente de cero. Es decir, los valores propios son de la siguiente forma

$$\mu_1 = \alpha + i\beta \quad \mu_2 = \alpha - i\beta$$

Si $\alpha = 0$ entonces se le llama centro.

Si $\alpha > 0$ entonces se le llama foco inestable.

Si $\alpha < 0$ entonces se llama foco estable. Tal y como muestra la Figura 3.9.

Cuando el parámetro λ pasa por un valor crítico λ_0 la parte real $\alpha(\lambda)$ puede cambiar se signo y el equilibrio se convierte en un foco inestable. Durante esta transición, un foco degenerativo (centro) aparece momentáneamente. Con el frecuencia, cambios cualitativos tales como la pérdida de estabilidad, ocurren cuando se pasa por casos degenerativos.

Considerando la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{y} = f(y, \lambda)$$

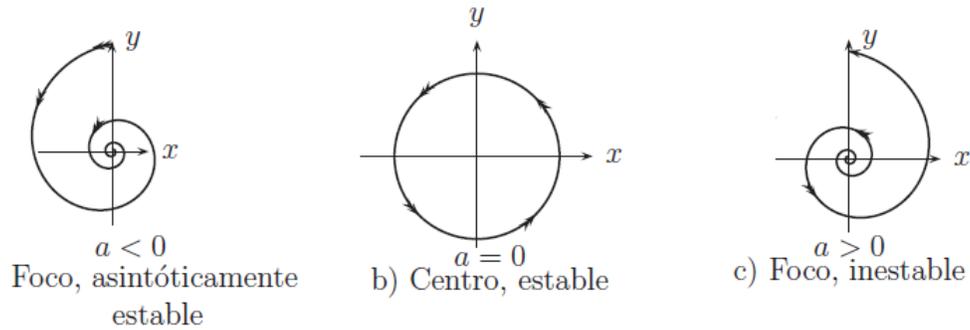


Figura 3.9: a) foco estable, b) centro, c) foco inestable.

con el propósito de ilustrar gráficamente la dependencia de y en λ en un plano, se requiere una medida del vector y n-dimensional. Sea $[y]$ la notación para esta medida escalar del vector n-dimensional y . Por ejemplo:

$$[y] = y_k \text{ en donde } 1 \leq k \leq n$$

$$[y] = \| y \|_2 = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$$

$$[y] = \| y \|_\infty = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|\}$$

Algunas ecuaciones involucran una variable escalar (no necesariamente una variable de estado) que tiene connotación significativa en lo referente a describir la condición operativa del sistema.

En esos casos es preferible emplear esa variable escalar como una medida escalar en función del parámetro real λ de variación cuasi-estática. Para ecuaciones diferenciales que contienen un ciclo limite (solución de estado estacionario en lugar de punto de equilibrio), la amplitud es frecuentemente un buen candidato para esa medida escalar. En algunos casos, una medida escalar significativa podría ser la potencia o el par.

Un diagrama que muestre la variable escalar significativa $[y]$ en función de λ donde (y, λ) es una solución de estado estacionario del sistema diferencial,

se le llama “*diagrama de rama*” ó “*diagrama de bifurcación*”.

El ejemplo más simple es el de un “*turning point*.”^{el} cual se puede mostrar en la Figura 3.10 representada por la siguiente ecuación escalar:

$$\dot{y} = y^2 - \lambda \tag{3.7}$$

cuya solución es

$$y = \pm\sqrt{\lambda} \tag{3.8}$$

la cual forma una parábola que es definida para $\lambda \geq 0$. En $\lambda = 0$ existe una sola solución ($y = 0$), mientras que para $\lambda > 0$ existen dos soluciones:

$$y_1 = +\sqrt{\lambda} \quad ; \quad y_2 = -\sqrt{\lambda}$$

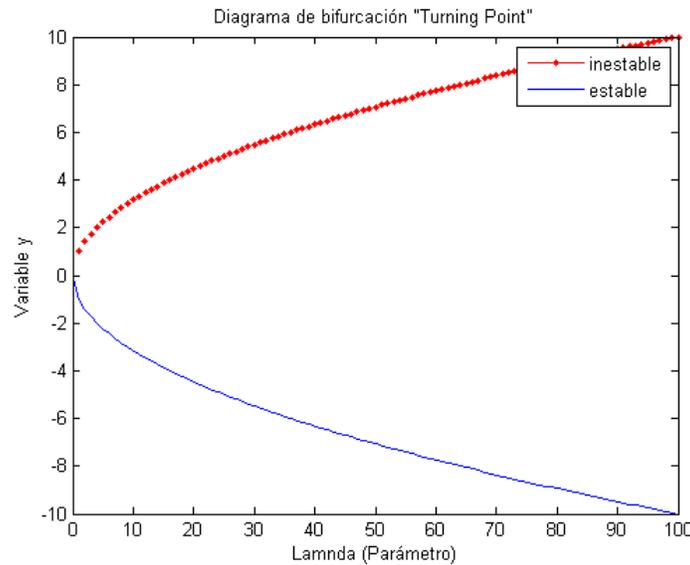


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación para un turning point abierto hacia la derecha.

El punto en el que estas dos últimas soluciones empiezan se le llama “*turning point*”.

Geoméricamente se pueden caracterizar los puntos de bifurcación como aquellos en los que dos ramales con tangentes distintas se intersecan. Los dos tipos de bifurcaciones más comunes son “*bifurcación transcritical*” y “*bifurcación pitchfork (tridente)*” las cuales son mostradas en la Figura 3.11.

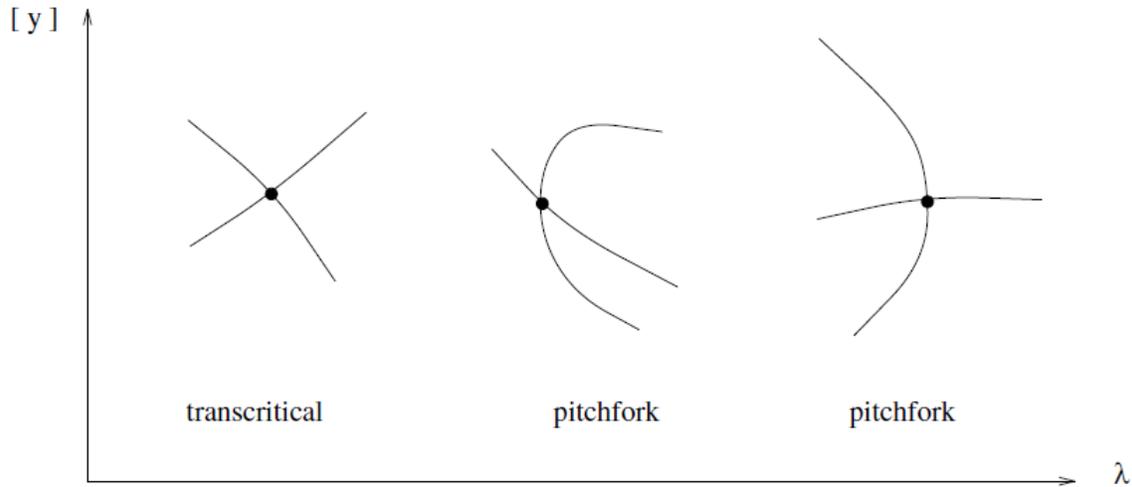


Figura 3.11: Tipos de bifurcación mas comunes.

Un ejemplo de bifurcación transcritical se muestra en la Figura 3.12, la cual está representada mediante la ecuación

$$\dot{y} = \lambda y + y^2 \quad (3.9)$$

cuyas soluciones son $y_1 = 0$ y $y_2 = -\lambda$.

De igual manera, un ejemplo de bifurcación pitchfork se muestra en la figura 3.13, la cual está representada mediante la ecuación

$$\dot{y} = \lambda x - x^3 \quad (3.10)$$

cuyas soluciones son $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{\lambda}$ y $y_3 = -\sqrt{\lambda}$.

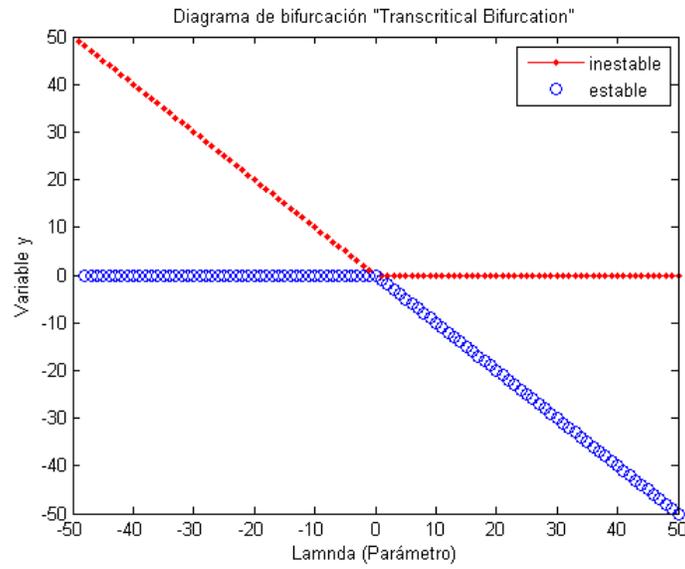


Figura 3.12: Bifurcación Transcritical.

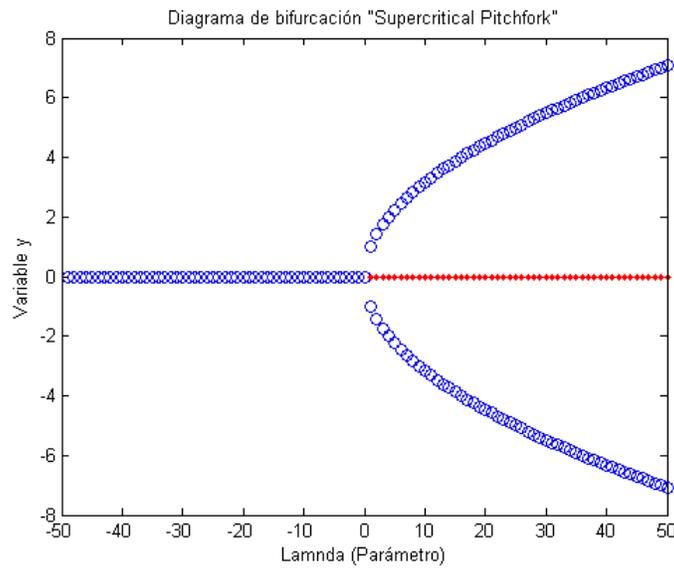


Figura 3.13: Bifurcación Pitchfork.

3.6. Otro Tipo de Bifurcación

3.6.1. Histéresis

La Histéresis es un fenómeno de bifurcación en forma de letra “S”, cuya particularidad es la unión de dos bifurcaciones Turning Point, una de estas abierta hacia la izquierda y otra hacia la derecha. A continuación se analiza una bifurcación Histéresis.

Considerando el sistema

$$\dot{y} = f(y, \lambda) = \lambda + cy - y^3.$$

Donde λ es un parámetro que se puede manipular y c es un parámetro de diseño. Se pueden construir gráficas de la solución de estado estacionario para cada valor de c . Por ejemplo para $c = -1$

$$f(y, c) = \lambda - y - y^3 = 0$$

Al comprobar la estabilidad del sistema mediante su Jacobiano se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1 - 3y^2.$$

El hecho de que la ecuación sea siempre negativa significa que todos sus puntos de equilibrio son estables, por lo tanto, no existen puntos de bifurcación ni tampoco multiplicidad de equilibrios.

En la Figura 3.14 se muestra el retrato de fase del sistema para $c = -1$, donde se contempla una condición normal de un sistema, ya que existe un solo equilibrio para cada valor paramétrico de c .

A diferencia de la Figura 3.14, la Figura 3.15 muestra el diagrama de bifurcación del mismo sistema pero haciendo una modificación del parámetro

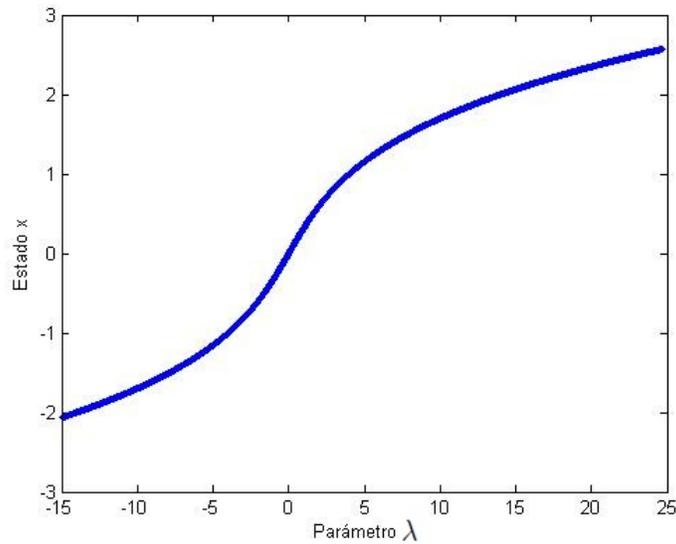


Figura 3.14: Retrato de fase para $c = -1$.

$c = 1$. En ésta figura se hace evidente la multiplicidad paramétrica, ya que, para dentro de un intervalo del parámetro λ se obtienen tres equilibrios simultáneos diferentes.

Modificando a $c = 1$

$$f(y, c) = \lambda + y - y^3 = 0.$$

Ésta es una ecuación cubica representada en las Figuras 3.15 y 3.16, donde se pueden tener tres soluciones diferentes para un determinado valor de λ .

Al obtener el Jacobiano se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 3y^2.$$

El retrato de fase para $c = 1$ se muestra en la Figura 3.16, donde se puede observar que para $\lambda = 0$ se tienen tres puntos de equilibrio $y = -1,7$, $y = 0$ y $y = 1,7$.

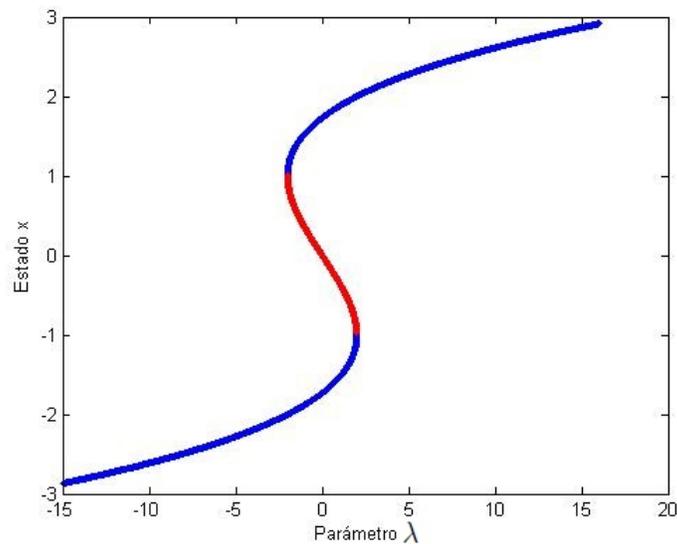


Figura 3.15: Retrato de fase para $c = 1$.

En éste caso la zona de color rojo representa la inestabilidad de equilibrios. La Histéresis cuenta con dos puntos de bifurcación, uno en cada cúspide de los Turing Points. En la Figura 3.17 se muestran los puntos de bifurcación que delimitan la estabilidad del sistema.

En este caso, dependiendo de la dirección en que se vaya moviendo el parámetro de bifurcación λ se puede tener un salto brusco en los puntos límites, y ese fenómeno es denominado histéresis. La Figura 3.18 muestra el salto entre puntos de equilibrio para un valor constante de $c = 1$

La Figura 3.19 muestra la formación de la bifurcación histéresis al ir modificando el parámetro c . Es importante recordar que para valores negativos de c no existe bifurcación, por lo tanto, a partir de valores positivos es cuando se comienza a formar la histéresis y con ello la multiplicidad de equilibrios.

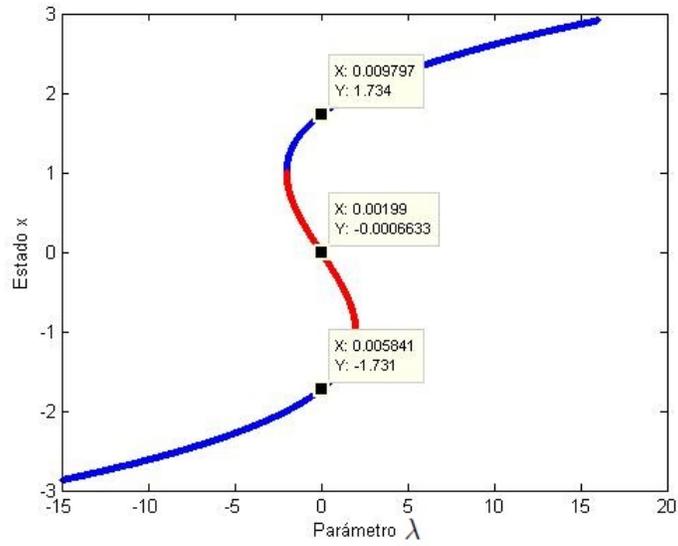


Figura 3.16: Tres puntos de equilibrio para un solo valor $\lambda = 0$.

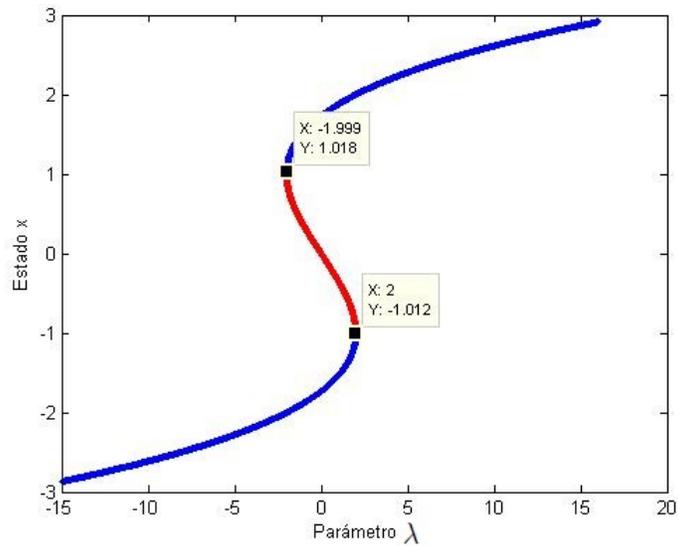


Figura 3.17: Puntos límites de estabilidad en la histéresis.

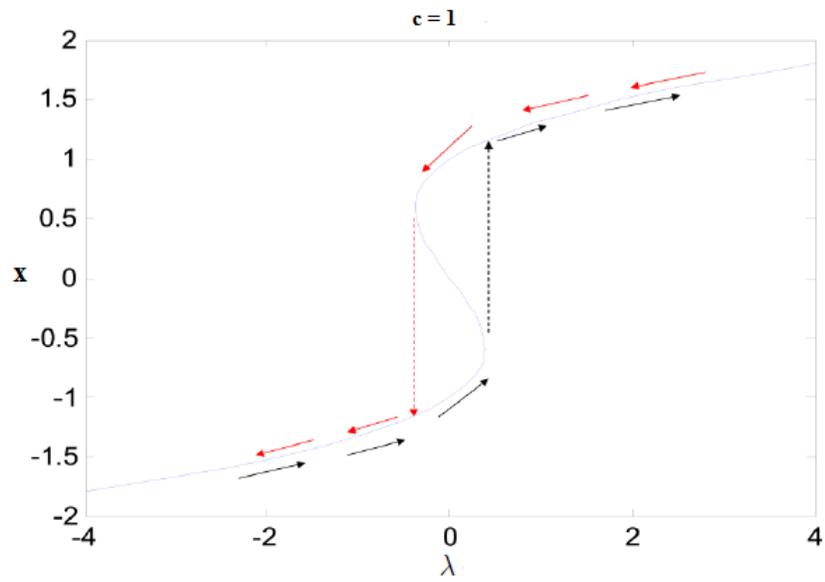


Figura 3.18: Salto brusco entre equilibrios estables e inestables.

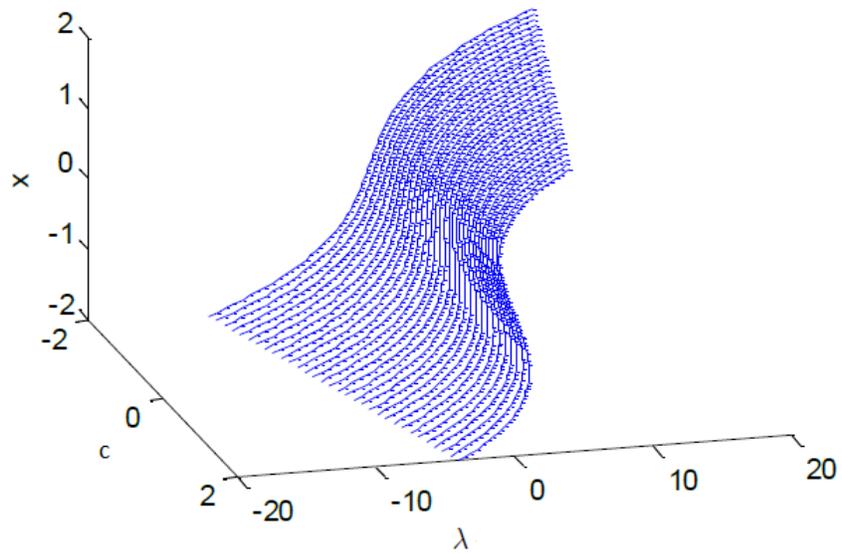


Figura 3.19: Formación del fenómeno de bifurcación histéresis.

3.6.2. Múltiples Bifurcaciones

Existen casos en que al variar uno de los parámetros del sistema se pueden presentar bifurcaciones distintas para ciertos valores determinados de dicho parámetro. El siguiente ejemplo expone tres tipos de bifurcaciones diferentes para un mismo sistema. El sistema está expresado como

$$\frac{dx}{dt} = \lambda + (mc + 1)x - x^3$$

donde m es el parámetro detonante que hace que la bifurcación cambie de una forma a otra. c es el parámetro de bifurcación y x es el estado.

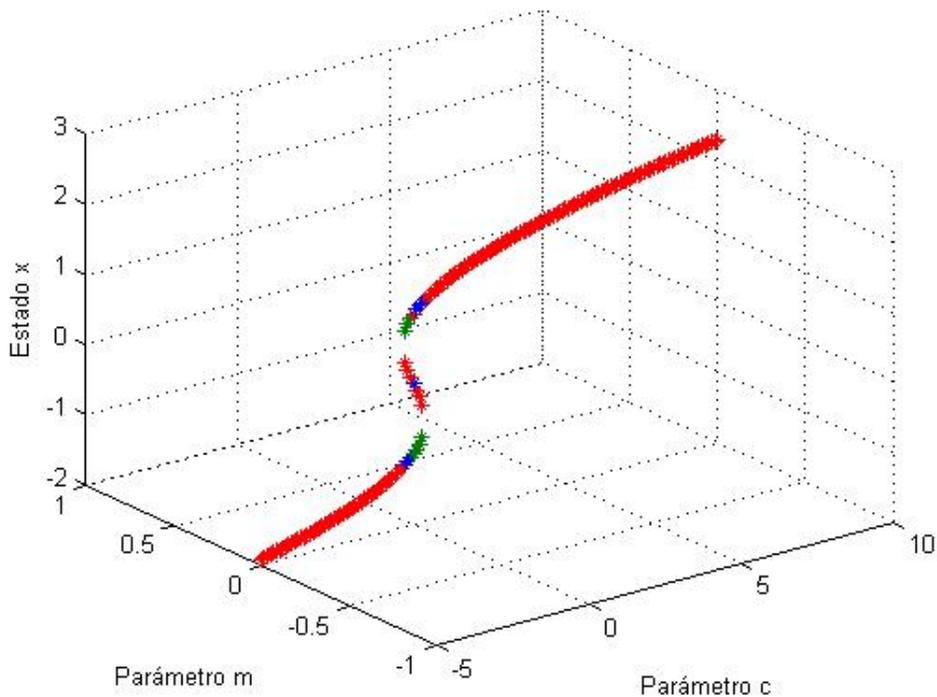


Figura 3.20: Bifurcación histéresis con $m < 1$.

Para evidenciar éste fenómeno es necesario hacer una variación en el parámetro m , las bifurcaciones se presentan en ciertos valores clave denotados por

$m < 1$, $m = 1$ y $m > 1$.

Los tipos de bifurcaciones que se presentan en este sistema son:

- Para $m < 1$ se presenta el fenómeno de histéresis.
- Para $m = 1$ se presenta la bifurcación tipo *supercritical pitchfork*.
- Para $m > 1$ se presenta la bifurcación *supercritical turning point*.

En la Figura 3.20 se puede observar la bifurcación tipo histéresis que se produce cuando se tiene un parámetro $m < 1$.

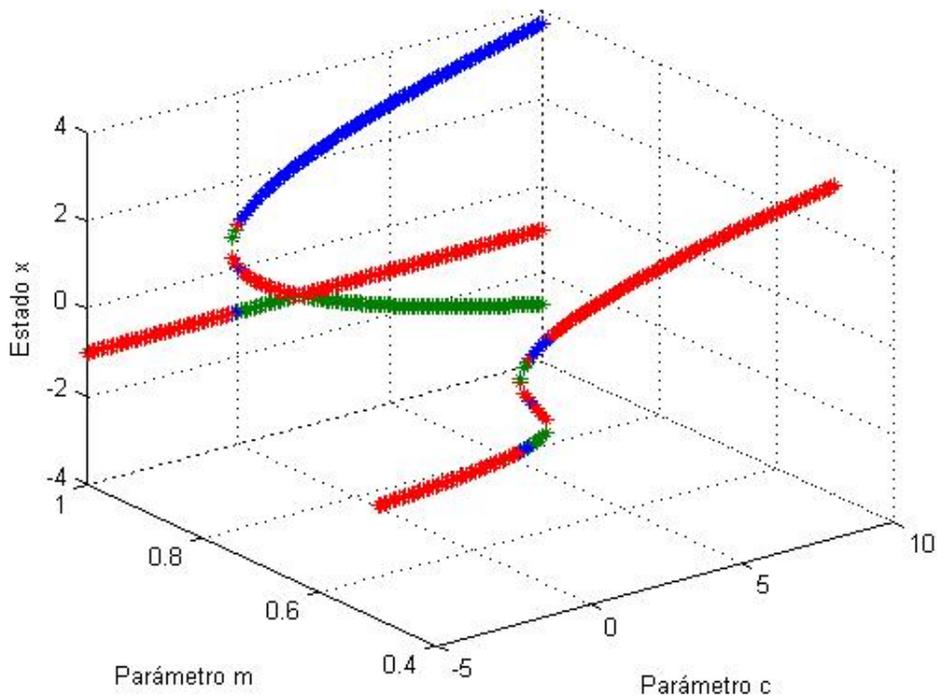


Figura 3.21: Bifurcación supercritical pitchfork para $m = 1$.

La Figura 3.21 muestra el mismo retrato de fase pero añadiendo el valor de $m = 1$, lo cual produce la bifurcación *supercritical pitchfork*.

La Figura 3.22 muestra el mismo diagrama de bifurcación pero ahora con los tres valores de m : $m < 1$, $m = 1$ y $m > 1$. Con ello se suma la bifurcación *supercritical turning point* dentro del mismo sistema.

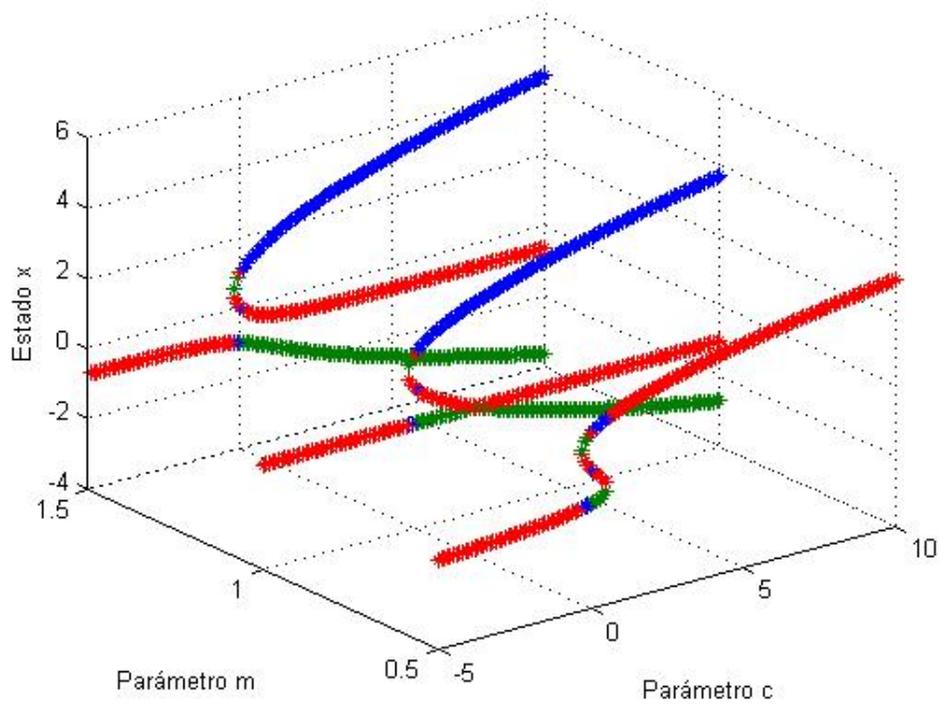


Figura 3.22: Bifurcación supercritical turning point para $m > 1$.

Un seguimiento más detallado puede observarse en la Figura 3.23, donde se puede observar el seguimiento del cambio de bifurcación producido por la variación paramétrica m con un pequeño incremento de 0,2 en cada valor.

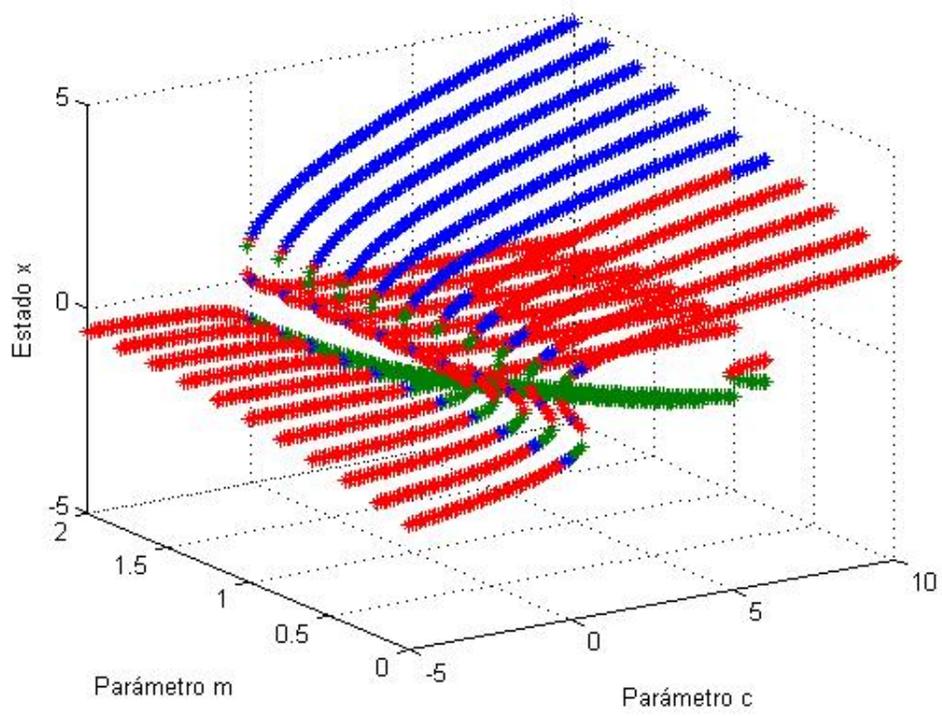


Figura 3.23: Seguimiento del cambio de bifurcación para $m = 0$ hasta $m = 2$.

CAPÍTULO **4**

Método de Continuación

4.1. Introducción

Los diagramas mostrados en el capítulo anterior son idealizaciones de los resultados que pudiesen obtenerse en la práctica. En la realidad numérica no es tan sencillo como se puede apreciar en los diagramas. Las líneas planas en los diagramas de bifurcación son representadas a partir de un esqueleto de puntos calculados. Esto requiere de imaginación y confianza para dibujar un buen diagrama a partir de unos pocos puntos calculados. El hecho de saber como seleccionar y construir los puntos es una de las mayores preocupaciones, y la otra es la interpretación correcta, la cual puede resumirse por dibujar un ramal plano. Pueden resolverse las ecuaciones únicamente para un número finito de valores paramétricos. Suponiendo que, debido a limitantes como por ejemplo el tiempo, únicamente es posible encontrar soluciones aproximadas para 90 valores paramétricos expresados como $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{90}$. Esto significa que se desconocen las soluciones que se encuentren fuera de este rango de valores paramétricos. Ésta situación puede ser comparada al reemplazar una película por un conjunto de fotos consecutivas. Al graficar los resultados se obtiene un conjunto de puntos (ver Figura 4.1 b). Cada punto representado significa una solución. Al unir el conjunto de puntos por una curva plana se obtiene un diagrama de bifurcación, aunque esto no garantiza que dicha curva este correctamente dibujada. Se puede correr con algo de suerte como en la Figura 4.1, cuando la curva representa la dependencia paramétrica real. Aparentemente en dicha situación el cálculo de futuras soluciones para valores de los parámetros intermedios no revelarán más información. Pero en los espacios entre las soluciones consecutivas calculadas pudiera existir alguna bifurcación interesante.

Si se hace un enfoque en construir los ramales para un diagrama de bifur-

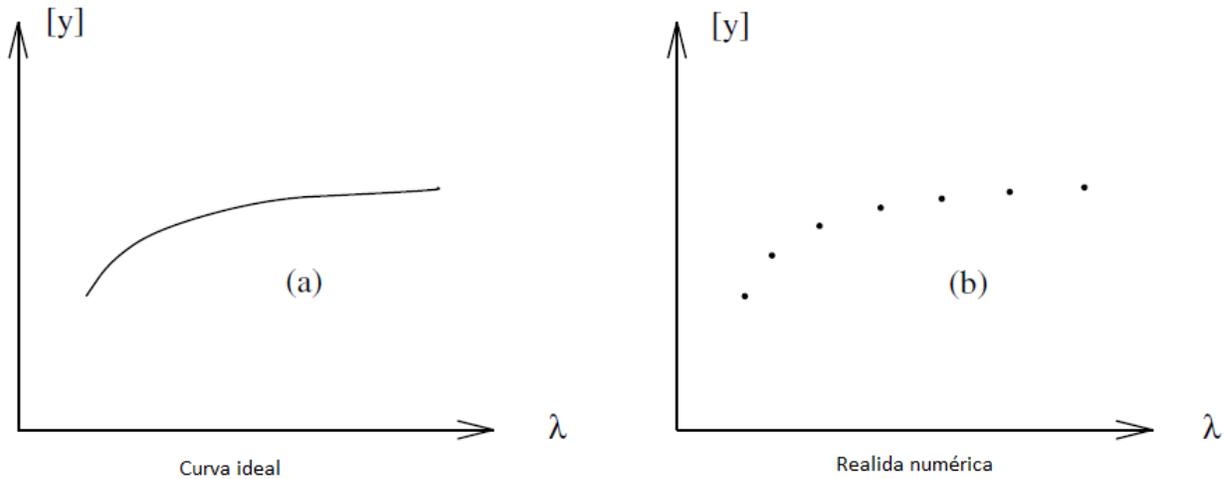


Figura 4.1: Soluciones en un diagrama de bifurcación.

cación se puede asumir que las ecuaciones del sistema pueden ser resueltas por medio de un método de análisis numérico también llamado *Método de Continuación* el cual puede ser llevado a un *software* para un cálculo más rápido y preciso. En el caso de este proyecto de investigación el método de continuación es programado en MATLAB.

4.2. Bases del Método de Continuación

4.2.1. Conceptos Principales

Cuando se esta ante un problema multiparamétrico se deben mantener todos los parámetros fijos excepto uno (usualmente denotado como λ), el cual será el parámetro de interés. Durante el estudio multiparamétrico los parámetros pueden cambiar de un valor a otro, mientras existan estos cambios cabe la posibilidad de que alguno de los parámetros pueda convertirse en un parámetro de bifurcación. Si se supone un rango paramétrico de tres valores denotado por:

$$\lambda_a \leq \lambda \leq \lambda_b$$

se debe realizar el cálculo de una primera solución para $\lambda_1 = \lambda_a$. Hacer el cálculo de esta primera solución resulta ser en la mayoría de las ocasiones el paso más complicado. En algunas otras, escoger valores especiales de los parámetros (comúnmente = 0) conduce a ecuaciones sencillas de resolver, y en otros casos más complicados se debe resolver una secuencia de ecuaciones con una simplificación de disminución de grado hasta resolver la ecuación completa, este proceso es llamado *Homotopía*. En el caso particular de la máquina de inducción no es necesario utilizar la homotopía ya que la primera solución λ_1 es obtenida del estado estable de la misma máquina, dicho en otras palabras, para el estudio del fenómeno de bifurcación en la máquina de inducción se requiere que dicha máquina se encuentre en estado estacionario, para que de esta manera se tenga accesibilidad a la primera solución y a partir de ello pueda hacerse la variación paramétrica y se encuentren los valores del parámetro λ que manifiesten la bifurcación.

Una vez obtenida la primera solución λ_1 la cuestión es cómo elegir λ_2 . Una estrategia pudiera ser tomar por ejemplo que únicamente es posible calcular un total de 90 soluciones, por lo que se puede elegir un incremento $\Delta\lambda$ que será definida como $\Delta\lambda = (\lambda_b - \lambda_a)/89$. El cálculo de λ_2 sería definido como

$$\lambda_{j+1} = \lambda_j + \Delta\lambda, \quad j = 1, 2, \dots$$

Dicha estrategia de tomar valores paramétricos equidistantes pudiera resultar una buen opción ya que se obtendría una solución para cada λ_j . Pero también es posible que ocurran algunos de los siguientes problemas (Figura 4.2):

- Pasar por alto una bifurcación (A).

- Que exista un *turning point* (B) y no se pueda converger a algún valor de λ .
- Que $\Delta\lambda$ sea escogida muy grande pasando por alto bifurcaciones o muy pequeña causando pérdida de tiempo.

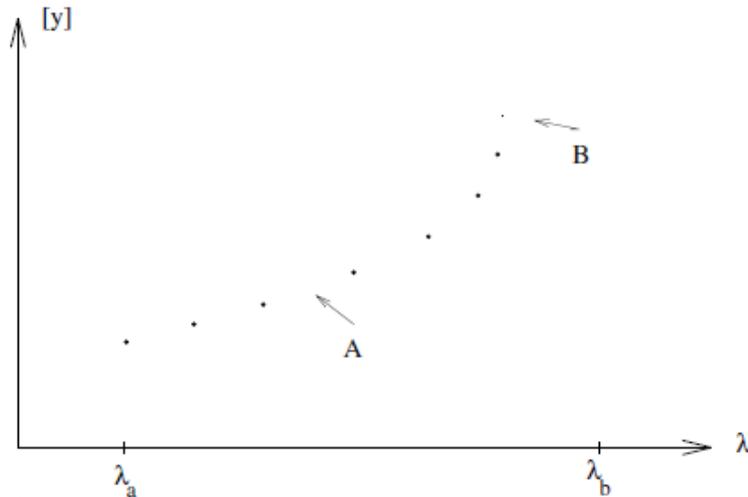


Figura 4.2: Posibles problemas en un diagrama de bifurcación.

Para evitar caer en alguno de estos problemas se requiere utilizar un *método de continuación*. Un método de continuación puede ser usado para los siguientes requerimientos.

- Generar una cadena de ramales.
- Construir todo un ramal.
- Tener el seguimiento de un ramal a través de un turning point.
- Conmutar de un ramal a otro.

En la Figura 4.3 se supone que el ramal (A/B/C) ha sido calculado y se requiere hacer una conmutación hacia el ramal (H/F/G). Encontrar el punto

de bifurcación (A) es prioritario para determinar que por ese punto se cruza otro ramal que pudiera conducir más fácilmente a la solución deseada. Solo basta con calcular una solución en el “nuevo” ramal (Figura 4.3,F) y con el método de continuación conducirse bien sea hacia (G) o hacia (H).

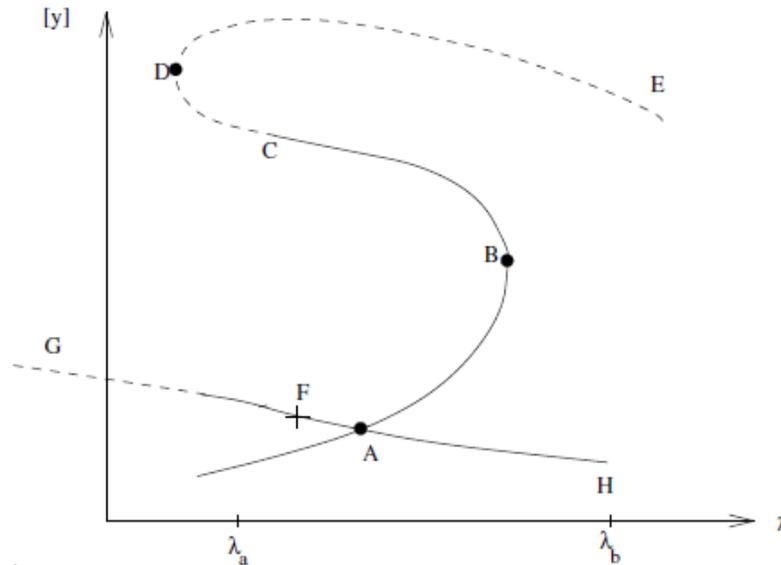


Figura 4.3: Análisis paramétrico en un diagrama de bifurcación.

Entonces, por medio del método de continuación puede generarse el ramal completo (G/H). Es posible que los problemas en la Figura 4.2 pudieran presentarse de igual manera en la Figura 4.3. El hecho de poder detectar el punto de bifurcación (A) hace más sencillo llegar a la solución λ_b por vía de (H). Aplicar el método de continuación pasando el turning point (B) proveerá información acerca de otra parte del ramal (C/D/E), que de igual manera, conllevará hacia la solución λ_b pero por un camino más largo y complicado. De igual manera si se realiza una extensión suficientemente larga por el nuevo ramal hacia la izquierda de (F) es posible considerar que éste ramal no regresará a (G) ni exhibirá una bifurcación que la lleve de vuelta al rango de

estudio $\lambda_a \leq \lambda \leq \lambda_b$.

Las herramientas básicas requeridas para el estudio paramétrico son

- Método de continuación capaz de detectar puntos de bifurcación y la estabilidad de los mismos.
- Método para conmutar desde un ramal hacia otro.

4.2.2. Principios del Método de Continuación

Asumiendo que se tiene que resolver una ecuación $f(x)$ y ésta ecuación contiene algún parámetro λ . La solución de la ecuación depende del valor de dicho parámetro. Por lo tanto se reescribe la ecuación, la cual exprese dicha dependencia:

$$f(x, \lambda) = 0 \tag{4.1}$$

Si la dimensión de x es d y si f es una función vector d -dimensional, este es un sistema de d ecuaciones y de $d + 1$ incógnitas. Entonces la ecuación define una curva uni-dimensional en el espacio paramétrico \mathbb{R}^{d+1} .

Esta curva es una rama de soluciones que proporciona la dependencia de la solución con el parámetro λ . El cálculo de dicha rama de soluciones es un *problema de continuación*.

Por continuación se puede encontrar la relación entre el parámetro y la solución. Esto proporciona información acerca del efecto que tienen los disturbios en el parámetro, en la estabilidad de la solución y si es que existe una solución para cada valor del parámetro. En la rama se pueden encontrar bifurcaciones, que son cambios cualitativos en el comportamiento de la solución y pueden presentarse como bifurcaciones de tipo *turning points*, *pitchfork*, *histéresis* y *hopf*. Haciendo el seguimiento del ramal y haciendo saltos sobre

las bifurcaciones se puede encontrar si existe más de una solución para un parámetro.

La continuación es usada también para problemas complejos con muchas variables paramétricas. Si existe una solución conocida para algún conjunto de valores paramétricos se puede usar esta solución como un punto de inicio para el proceso de continuación pudiendo seguir las trayectorias para todos los parámetros hasta alcanzar el valor deseado para cada parámetro. No es necesario encontrar todos los puntos de la curva de continuación. Más bien es suficiente con encontrar unas cuantas soluciones para tener una impresión del comportamiento de la solución. El objetivo es caminar a través de la curva en pocos pasos. A este proceso se le llama "*Método de Continuación Numérica*".

El método de continuación es un conjunto de mecanismos matemáticos en los que paso a paso se pretende calcular una nueva solución a partir de una ya calculada, la ventaja de usar un método de continuación numérica es que se pueden calcular ramales enteros aún cuando existan turning points u otro tipo de bifurcaciones involucrados dentro del ramal. En las siguientes secciones se describen las diferentes partes que constituyen el método de continuación.

4.3. Estructuración del Método de Continuación

4.3.1. Parametrización Pseudo - Longitud de Arco

Si s es la variable de parametrización, podemos añadir una ecuación $q(x, \lambda, s) = 0$ a la ecuación (4.1). Esta ecuación extra caracteriza la parametrización. Aho-

ra se debe resolver el siguiente sistema

$$g(x) \equiv \begin{bmatrix} f(x, \lambda) \\ q(x, \lambda, s) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{con } x = \begin{bmatrix} x(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Para cada valor de s el sistema tiene $d + 1$ ecuaciones y $d + 1$ incógnitas.

Antes de que se pueda usar el método de continuación numérica, se debe de elegir la parametrización para la curva. Una parametrización identifica las soluciones de la rama.

Una elección adecuada es usar el parámetro λ de la ecuación como una curva paramétrica, entonces $q = \lambda - s$. Con esto se podría tener problemas en los *turning points* donde se tiene que $\frac{dx}{d\lambda} = \infty$. Si no se tiene mucha información a cerca de la curva, se requiere de un método que haga posible tomar en cuenta *turning points* y otros tipos de bifurcaciones. Esto es posible con la parametrización *pseudo-longitud de arco* que se describirá más adelante. Finalmente es indispensable un método que permita ir de un punto en la curva al siguiente punto. Dicho método es el modelo predictor - corrector que se mostrará más adelante.

Sea s el parámetro de longitud de arco, que está implícitamente definido por

$$\zeta \left\| \frac{dx}{ds} \right\|_2^2 + \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 = 1 \quad (4.3)$$

para $\zeta = 1$. El factor de sintonía $0 < \zeta < 1$ pertenece a la parametrización pseudo-longitud de arco y puede ser usado para establecer diferentes énfasis en x y λ . En este caso se escoge $\zeta = 1/d$, la inversa de la dimensión de x .

Asumiendo que para $s = s_0$ existe una solución en la rama $(\bar{x}, \bar{\lambda}) = (x(s_0), \lambda(s_0))$, que servirá como solución inicial. Se requiere conocer la so-

lución en la distancia longitud de arco Δ_s . Sea $s_1 = s_0 + \Delta_s$, entonces la siguiente solución será $(x, \lambda) = (x(s_1), \lambda(s_1))$. Estos dos puntos pueden ser usados para reemplazar las derivadas en la ecuación (4.3) por medio de las siguientes aproximaciones.

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x - \bar{x}}{\Delta_s}, \quad y \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\Delta_s} \quad (4.4)$$

Sustituyendo (4.4) en la ecuación (4.3) y una multiplicación por Δ_s^2 se obtiene la ecuación deseada:

$$q(x, \lambda, s) = \zeta \|x - \bar{x}\|_2^2 + (\lambda - \bar{\lambda})^2 - (\Delta_s)^2 \quad (4.5)$$

4.3.2. Método Predictor - Corrector

Dentro de la continuación numérica se usa un método predictor-corrector. Significa que, dado un punto inicial, se predice de alguna manera el siguiente punto en la rama. Probablemente esta predicción esté equivocada, por lo que tendrá que corregirse. La continuación *Euler-Newton* se usa comúnmente, la cual tiene un Euler como predictor y un Newton como corrector. El predictor Euler provee la primera suposición

$$(x_0, \lambda_0) = (\bar{x}, \bar{\lambda}) + \Delta_s \cdot (\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{\lambda}}) \quad (4.6)$$

donde $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{\lambda}})$ denota la derivada de $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ con respecto a s . El valor $x_0 = (x_0, \lambda_0)$ es corregido mediante el método de Newton, para $n = 1, 2, \dots$

$$g'(x_n) \cdot \Delta_x = -g(x_n) \quad (4.7)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta_x \quad (4.8)$$

hasta que el criterio de convergencia sea satisfecho $\| \Delta_x \|_\infty < \varepsilon$

Para el cálculo de la primera predicción en ecuación (4.6) se necesita conocer $(\dot{\bar{x}}$ y $\dot{\bar{\lambda}})$. Para determinar una aproximación de la derivada es factible usar los dos últimos puntos en la rama obtenidos. Por lo tanto, se usa nuevamente la misma aproximación diferencial para $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{\lambda}})$ tal y como hicimos para $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ en la ecuación (4.4). Aun así, se debe calcular la derivada real en el punto inicial.

En la aproximación diferencial para $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{\lambda}})$ no se usó un predictor Euler, sino más bien un *predictor secante*. Ambos métodos son de primer orden en Δ_s , por lo tanto la elección realmente no afecta la calidad de la predicción.

4.3.3. Cálculo del Método Newton

En cada iteración del proceso del cálculo del Newton se tiene que resolver una ecuación con el Jacobiano $g'(x_n)$, que puede ser escrita como

$$g'(x) = \begin{bmatrix} \Phi & f_\lambda \\ (\frac{\partial q}{\partial x})^T & \frac{\partial q}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

donde Φ es la matriz de derivadas de f con respecto a x y f_c el vector de derivadas con respecto a c . Cabe mencionar que todos los elementos de la matriz son dependientes de x , c y s . Las derivadas de q pueden obtenerse derivando la ecuación (4.5). Si éstas son puestas en el Jacobiano entonces se debe resolver el siguiente sistema en cada paso de iteración

$$\begin{bmatrix} \Phi & f_\lambda \\ 2\zeta \cdot (x - \bar{x})^T & 2 \cdot (\lambda - \bar{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -q \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La solución de este sistema puede obtenerse en dos pasos, los cuales solo

son resueltos sistemas lineales con Φ . Expandiendo (4.10) se tiene

$$\Phi \cdot \Delta_x + f_\lambda \cdot \Delta_\lambda = -f \quad (4.11)$$

$$2\zeta \cdot (x - \bar{x})^T \cdot \Delta_x + 2 \cdot (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \Delta_\lambda = -q \quad (4.12)$$

Ahora se introduce z_1 y z_2 , las cuales son soluciones de

$$\Phi z_1 = -f, \quad y \quad \Phi z_2 = f_\lambda \quad (4.13)$$

Insertando z_1 y z_2 en (4.11) se tiene

$$\Phi \cdot \Delta_x + \Delta_\lambda \cdot \Phi \cdot z_2, \quad \text{entonces} \quad \Delta_x = z_1 - \Delta_\lambda \cdot z_2 \quad (4.14)$$

Ahora Δ_x puede ser eliminada desde (4.12) resultando en una expresión para Δ_λ

$$\Delta_\lambda = \frac{-q - 2\zeta \cdot (x - \bar{x})^T z_1}{2 \cdot (\lambda - \bar{\lambda}) - 2\zeta \cdot (x - \bar{x})^T z_2} \quad (4.15)$$

En resumen, cada paso de iteración del Newton debe comenzar con el cálculo de z_1 y z_2 en la ecuación (4.13). Con ello, Δ_λ y Δ_x pueden ser calculadas con la ecuación (4.14) y (4.15). El desarrollo del cálculo de cada iteración del Newton es mostrado en un conjunto de pasos en la Tabla (4.1).

4.3.4. Cálculo de la Primera Tangente

En el primer punto inicial de la rama no se usa el predictor secante, debido a que no se tiene un punto previo, por lo tanto se debe usar el predictor Euler. Para dicho predictor Euler se debe calcular la tangente $(\dot{x}, \dot{\lambda})$ (la derivada de un punto en la curva para el parámetro longitud de arco). Ésta derivada puede obtenerse derivando la ecuación $f(x, \lambda) = 0$ con respecto a λ lo cual resulta

como

$$\Phi \frac{dx}{d\lambda} + f_\lambda = 0$$

Arreglando la ecuación se tiene

$$\Phi \frac{dx}{d\lambda} = -f_\lambda \tag{4.16}$$

Las derivadas de x y λ con respecto a s se obtienen de la ecuación pseudo-longitud de arco. Sustituyendo

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} \tag{4.17}$$

dentro de la ecuación (4.3), y reescribiendo la ecuación se obtiene

$$\frac{d\lambda}{ds} = 1 / \sqrt{1 + \zeta \left\| \frac{dx}{d\lambda} \right\|^2} \tag{4.18}$$

Finalmente, usando la ecuación (4.17) se obtiene \dot{x} y con ello la dirección que lleva la curva en el punto inicial.

CAPÍTULO **5**

Estudio de Bifurcación en la Máquina de Inducción

5.1. Introducción

Como se ha visto en capítulos anteriores, las bifurcaciones son fenómenos que ocurren en sistemas multiparamétricos y producen un cierto comportamiento “anormal” en el sistema, más específicamente producen, en algunos casos, curvas solución en las cuales se tiene más de una solución para un valor paramétrico determinado. En un sistema con un comportamiento “normal” lo común sería ver una curva solución con solo una solución para cada valor paramétrico. Para poder saber si una variación paramétrica produce alguna bifurcación en el sistema, es necesario implementar un método de continuación que permita ir calculando las diferentes soluciones para los diferentes cambios de los valores paramétricos que se efectúen. En éste capítulo el método de continuación es aplicado al sistema de una máquina de inducción trifásica que se encuentra en estado estacionario. Se muestra también la curva solución de la máquina de inducción para un rango paramétrico $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n$ en la cual se hace evidente la bifurcación producida por dicho cambio paramétrico. El parámetro de bifurcación (λ) para el estudio de ésta máquina es el coeficiente de carga B_L . La variable significativa para éste estudio es el par eléctrico T_e . La ecuación de par eléctrico (2.45) revela información muy importante del sistema ya que dentro de ésta se pueden encontrar variables como las corrientes, los enlaces de flujo, la velocidad angular eléctrica entre otras variables que influyen directamente en el comportamiento de dicha ecuación.

5.2. Modelado de la Máquina de Inducción

Para el estudio del fenómeno de bifurcación implementado en la máquina de inducción, es necesario hacer algunos ajustes en el modelado de la máqui-

na presentado en el Capítulo 2. De manera que las ecuaciones diferenciales de los enlaces de flujo en (2.46), (2.47), (2.48), (2.49), (2.50) y (2.51) no presenten explícitamente los valores de corrientes en el lado derecho de cada ecuación, sino que únicamente presenten enlaces de flujo en ambos lados de dichas ecuaciones. Para ello, es importante el hacer una sustitución de corrientes por enlaces de flujo; la relación de estas dos variables está presentada en la ecuación (2.32). A continuación se muestra dicha sustitución empezando por despejar las corrientes de la ecuación (2.32) obteniendo que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{qd0s} \\ \mathbf{i}'_{qd0r} \end{bmatrix} = M_L^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{qd0s} \\ \lambda'_{qd0r} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde

$$M_L^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_s \mathbf{L}'_{sr} (\mathbf{K}_r)^{-1} \\ \mathbf{K}_r (\mathbf{L}'_{sr})^T (\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_r \mathbf{L}'_r (\mathbf{K}_r)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.2)$$

Al invertir la matriz M_L se tiene como resultado

$$M_L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_r}{D} & 0 & 0 & -\frac{M}{D} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{D} & 0 & 0 & -\frac{M}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M}{D} & 0 & 0 & \frac{L_s}{D} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{D} & 0 & 0 & -\frac{L_s}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{lr}} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

para

$$L_s = L_{ls} + M; \quad L_r = L_{lr} + M; \quad D = L_{ls}L_{lr} + L_{ls}M + L_{lr}M \quad (5.4)$$

donde

$$M = \frac{X_M}{w} \quad (5.5)$$

X_M es la reactancia magnetizante y w es la velocidad angular eléctrica de la fuente de alimentación definida como $w = 2\pi f$.

Al hacer la sustitución de (5.1) en el lado derecho de las ecuaciones (2.46) a (2.51) se obtiene el modelado de los enlaces de flujo en el marco de referencia arbitrario $dq0$ de la máquina de inducción, dicho modelado está representado en su forma completa como

$$\frac{d}{dt}\lambda_{qs} = v_{qs} - \frac{L_r}{D}r_s\lambda_{qs} + \frac{M}{D}r_s\lambda_{qr} - w\lambda_{ds} \quad (5.6)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{ds} = v_{ds} - \frac{L_r}{D}r_s\lambda_{ds} + \frac{M}{D}r_s\lambda_{dr} + w\lambda_{qs} \quad (5.7)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{0s} = v_{0s} - r_s\frac{1}{L_{ls}}\lambda_{0s} \quad (5.8)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{qr} = v_{qr} - \frac{L_s}{D}r_r\lambda_{qr} + \frac{M}{D}r_r\lambda_{qs} - (w - w_r)\lambda_{dr} \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{dr} = v_{dr} - \frac{L_s}{D}r_r\lambda_{dr} + \frac{M}{D}r_r\lambda_{ds} + (w - w_r)\lambda_{qr} \quad (5.10)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_{0r} = v_{0r} - r_r\frac{1}{L_{lr}}\lambda_{0r} \quad (5.11)$$

La ecuación diferencial para la velocidad del rotor ω_r se mantiene sin cambios

$$\frac{d}{dt}\omega_r = (T_e - T_L) \left(\frac{P}{2J} \right) \quad (5.12)$$

donde la variable significativa es el par eléctrico T_e , representada por la ecuación (2.45) y el par de carga T_L es representado por (2.20). Las ecuaciones del desplazamiento angular θ y la posición del rotor θ_r son las ya vistas en (2.53) y (2.54) respectivamente.

5.3. Implementación del Método de Continuación en la Máquina de Inducción

La descripción mostrada en la sección anterior, representa un motor de inducción trifásico conectado a una fuente trifásica de corriente alterna balanceada. Los valores de los parámetros y variables de la máquina de inducción se presentan a continuación.

$$r_r = 0,4601\Omega.$$

$$r_s = 10,6651\Omega.$$

$$X_{ls} = X_{lr} = 9,9061\Omega.$$

$$X_M = 69,569\Omega.$$

$$B_L \approx \text{de } 1 \times 10^{-5} \text{ a } 4 \times 10^{-5} \text{ Nmsec}^2/\text{rad}^2.$$

$$P = 4.$$

$$w = \text{de } 2(10\pi) \text{ a } 2(60\pi).$$

$$f = 60\text{Hz}.$$

$$L_{ls} = X_{ls}/(2\pi f).$$

$$L_{lr} = L_{ls}.$$

$$M = X_M/(2\pi f).$$

$$V_{LL-nominal} = 208\text{v.}$$

$$J = 0,089\text{kg m}^2.$$

Debido a que el modelado está representado en el marco de referencia arbitrario $dq0$ solo existen valores para uno de los voltajes

$$v_{qs} = k \cdot w.$$

$$v_{ds} = 0.$$

$$v_{qr} = 0.$$

$$v_{dr} = 0.$$

donde k es una constante determinada como

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{V_{LL}}{120\pi} \right) \quad (5.13)$$

El estudio realizado en este trabajo implica evidenciar el fenómeno de bifurcación en la máquina de inducción en estado estable, teniendo como variable significativa el par eléctrico T_e , el parámetro de bifurcación es el coeficiente de carga B_L . Se implementó dicho estudio para diferentes valores de la velocidad angular w . Los valores en estado estable de las variables de estado se presentan a continuación.

Para los enlaces de flujo es necesario hacer un cálculo de sus valores en estado estable. Debido a que en estado estable la velocidad del rotor ω_r permanece constante el sistema pasa a ser un sistema algebraico lineal, por lo que pueden obtenerse los valores de los enlaces de flujo mediante la forma $Ax = B$. Igualando las ecuaciones diferenciales de los enlaces a cero se tiene

$$0 = v_{qs} - \frac{L_r}{D} r_s \lambda_{qs} + \frac{M}{D} r_s \lambda_{qr} - w \lambda_{ds} \quad (5.14)$$

$$0 = v_{ds} - \frac{L_r}{D} r_s \lambda_{ds} + \frac{M}{D} r_s \lambda_{dr} + w \lambda_{qs} \quad (5.15)$$

$$0 = v_{qr} - \frac{L_s}{D} r_r \lambda_{qr} + \frac{M}{D} r_r \lambda_{qs} - (w - \omega_r) \lambda_{dr} \quad (5.16)$$

$$0 = v_{dr} - \frac{L_s}{D} r_r \lambda_{dr} + \frac{M}{D} r_r \lambda_{ds} + (w - \omega_r) \lambda_{qr} \quad (5.17)$$

despejando los voltajes de las ecuaciones anteriores se tiene que

$$v_{qs} = \frac{L_r}{D} r_s \lambda_{qs} - \frac{M}{D} r_s \lambda_{qr} + w \lambda_{ds} \quad (5.18)$$

$$v_{ds} = \frac{L_r}{D} r_s \lambda_{ds} - \frac{M}{D} r_s \lambda_{dr} - w \lambda_{qs} \quad (5.19)$$

$$v_{qr} = \frac{L_s}{D} r_r \lambda_{qr} - \frac{M}{D} r_r \lambda_{qs} + (w - \omega_r) \lambda_{dr} \quad (5.20)$$

$$v_{dr} = \frac{L_s}{D} r_r \lambda_{dr} - \frac{M}{D} r_r \lambda_{ds} - (w - \omega_r) \lambda_{qr} \quad (5.21)$$

a partir de estas ecuaciones se pueden obtener las matrices A , B y x , las cuales son representadas respectivamente como

$$A = \begin{bmatrix} \frac{L_r}{D} r_s & +w & -\frac{M}{D} r_s & 0 \\ -w & \frac{L_r}{D} r_s & 0 & -\frac{M}{D} r_s \\ -\frac{M}{D} r_r & 0 & \frac{L_s}{D} r_r & +(w - \omega_r) \\ 0 & -\frac{M}{D} r_r & -(w - \omega_r) & \frac{L_s}{D} r_r \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$B = \begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{qr} \\ v_{dr} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$x = \begin{bmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

representando el sistema para obtener los valores de λ se tiene que

$$x = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_r}{D}r_s & +w & -\frac{M}{D}r_s & 0 \\ -w & \frac{L_r}{D}r_s & 0 & -\frac{M}{D}r_s \\ -\frac{M}{D}r_r & 0 & \frac{L_s}{D}r_r & +(w - \omega_r) \\ 0 & -\frac{M}{D}r_r & -(w - \omega_r) & \frac{L_s}{D}r_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{qs} \\ v_{ds} \\ v_{qr} \\ v_{dr} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Con todos estos datos es posible iniciar con el proceso para la implementación del método de continuación en la máquina de inducción.

Ya que en estado estable la variable significativa T_e permanece constante, el valor del par de carga T_L se encuentra en el mismo punto, por lo que

$$T_L = T_e \quad (5.26)$$

A continuación se presentan los pasos requeridos en el proceso de la implementación del método de continuación en la máquina de inducción. De igual

manera se establece que en la nomenclatura utilizada en este estudio, la variable significativa T_e es representada por el conjunto de variables de estado, las cuales son vectorialmente representadas como x , mientras que el parámetro de bifurcación B_L es representado como λ . El primer paso es calcular el Euler que sirve como predicción para después realizar la corrección y tener el siguiente punto en el ramal que se está calculando. Para el cálculo del Euler representado en la ecuación (4.6) es necesario tener un punto de partida, dicho punto de partida es expresado como $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ y la derivada de dicho punto con respecto a s expresado como $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{\lambda}})$. Los valores para $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ son los calculados en la ecuación (5.25) para \bar{x} , mientras que para $\bar{\lambda}$ es el valor en estado estable de B_L , el cual se obtiene despejándolo de la ecuación (2.20). Para obtener $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{\lambda}})$ se emplean las ecuaciones (4.17) y (4.18) donde $\frac{dx}{d\lambda}$ está expresada en la ecuación (4.16). En esta última ecuación (4.16) el término Φ es la matriz del Jacobiano de las derivadas de las variables de estado, es decir, las derivadas parciales de cada una de las expresiones de las derivadas de las variables de estado, cada derivada parcial con respecto a cada una de las mismas variables de estado. Simbólicamente queda expresada como

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\frac{Lr}{D}r_s & -w & \frac{M}{D}r_s & 0 & 0 \\ w & -\frac{Lr}{D}r_s & 0 & \frac{M}{D}r_s & 0 \\ \frac{M}{D}r_r & 0 & -\frac{Ls}{D}r_r & -w + \omega_r & 0 \\ 0 & \frac{M}{D}r_r & w - \omega_r & -\frac{Ls}{D}r_r & 0 \\ \frac{3}{8}\frac{P^2M}{DJ}\lambda_{dr} & -\frac{3}{8}\frac{P^2M}{DJ}\lambda_{qr} & -\frac{3}{8}\frac{P^2M}{DJ}\lambda_{ds} & \frac{3}{8}\frac{P^2M}{DJ}\lambda_{qs} & -\frac{PB_L}{J}\omega_r \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Mientras que f_λ es un vector, el cual es representado por la derivada parcial de las ecuaciones diferenciales de las variables de estado con respecto a la

variable paramétrica B_L , simbólicamente expresado como

$$f_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{P}{J} \omega_r^2 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Con ello, el siguiente paso es el cálculo de (4.5), donde se propone $\zeta = 0,1$, $x = x_0$, $\lambda = \lambda_0$ y Δ_s se propone como $-0,05$. Después el calculo de z_1 en la ecuación (4.13) donde f es el vector de las funciones de las variables de estado, mejor expresado como

$$f = \begin{bmatrix} v_{qs} - \frac{L_r}{D} r_s \lambda_{qs} + \frac{M}{D} r_s \lambda_{qr} - w \lambda_{ds} \\ v_{ds} - \frac{L_r}{D} r_s \lambda_{ds} + \frac{M}{D} r_s \lambda_{dr} + w \lambda_{qs} \\ v_{qr} - \frac{L_s}{D} r_r \lambda_{qr} + \frac{M}{D} r_r \lambda_{qs} - (w - \omega_r) \lambda_{dr} \\ v_{dr} - \frac{L_s}{D} r_r \lambda_{dr} + \frac{M}{D} r_r \lambda_{ds} + (w - \omega_r) \lambda_{qr} \\ (T_e - T_L) \left(\frac{P}{2J} \right) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Para z_2 se tiene la ecuación la segunda parte de la ecuación (4.13). Después, se calculan los incrementos Δ_x y Δ_λ de las ecuaciones (2.14) y (2.15) respectivamente. Por último se actualizan los valores de x y λ mediante

$$x = x + \Delta_x \quad (5.30)$$

$$c = c + \Delta_\lambda \quad (5.31)$$

5.4. Resultados Gráficos y Evidencia de Bifurcaciones

El objetivo principal del estudio realizado en esta tesis, fue evidenciar gráficamente el fenómeno de bifurcación que se presenta en la máquina de inducción al realizar variaciones paramétricas del coeficiente de par de carga B_L . Para hacerlo posible, se implementó un código de programación en el software MATLAB R2013b, en el cual fueron integradas y resueltas las ecuaciones diferenciales presentadas en el Capítulo 2 por medio del método de continuación mencionado en el Capítulo 4. Se tomó como variable significativa el par eléctrico T_e debido a la valiosa información que contiene ésta variable dentro de su ecuación. También se tomó un rango de simulación para diferentes valores de la velocidad angular eléctrica ω . Como resultado se muestran las siguientes gráficas que representan el diagrama de bifurcación de la máquina de inducción. Dichas gráficas están presentadas en tres ejes; x , y y z . Teniendo como eje x el parámetro de bifurcación λ (coeficiente de carga B_L). En el eje y se encuentra la velocidad eléctrica ω . Y en el eje z la variable significativa de par eléctrico T_e .

Cabe mencionar que el fenómeno de bifurcación únicamente hace presencia en un intervalo determinado, dicho intervalo es denotado por la variación paramétrica de λ (B_L). A continuación se muestran los intervalos en donde se presenta la bifurcación.

- Para el eje x se tiene el parámetro de bifurcación λ que representa al coeficiente de par de carga B_L . La bifurcación aparece en un intervalo entre 0 y $2 \times 10^{-4} N \cdot m \cdot sec^2 / rad^2$.
- Para el eje y , velocidad angular eléctrica ω , se empleó un intervalo entre 60 y 130 rad/seg.

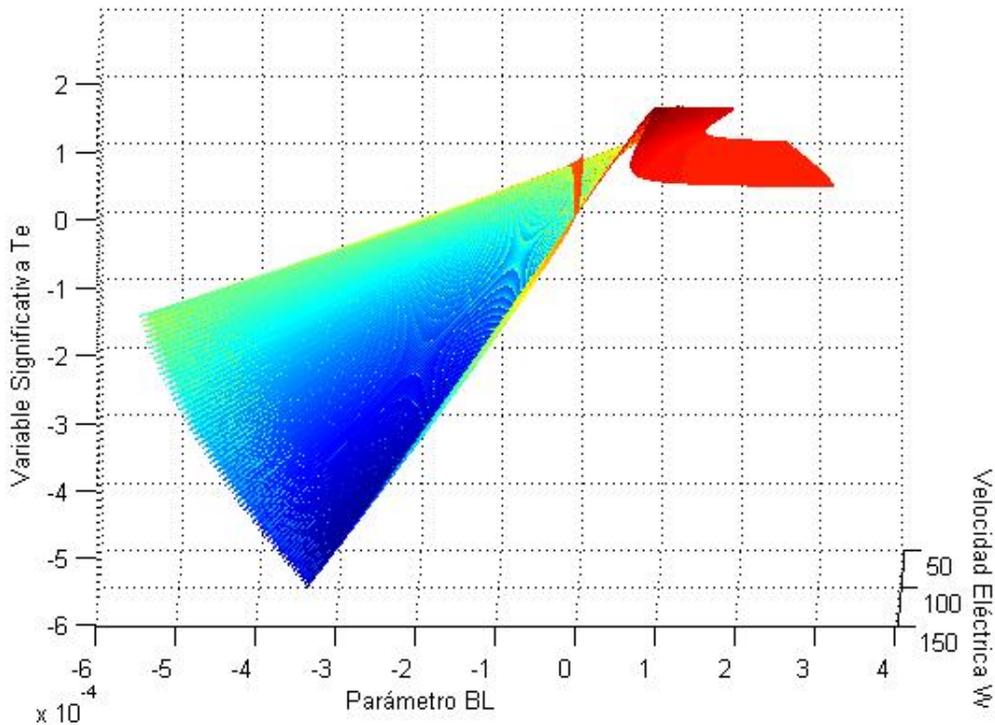


Figura 5.1: Diagrama de bifurcación de la máquina de inducción a gran escala.

- Para el eje z , par eléctrico T_e , el intervalo es entre 0 y $2 N \cdot m$.

En la Figura 5.1 se muestra un diagrama de bifurcación a gran escala, en donde puede apreciarse que la bifurcación se presenta para valores positivos de B_L debido a que la máquina está en función motor. Por lo contrario, los valores negativos del coeficiente de par de carga B_L representan la función generador de la máquina.

En la Figura 5.2 se encuentra la misma gráfica pero únicamente en la función motor de la máquina de inducción (solo para valores positivos de B_L).

La figura 5.3 muestra la misma figura pero en diferente posición, con la finalidad de una mayor apreciación de la bifurcación, que en este caso es del tipo Histéresis. Tal y como se vio en el Capítulo 3, la Histéresis es un

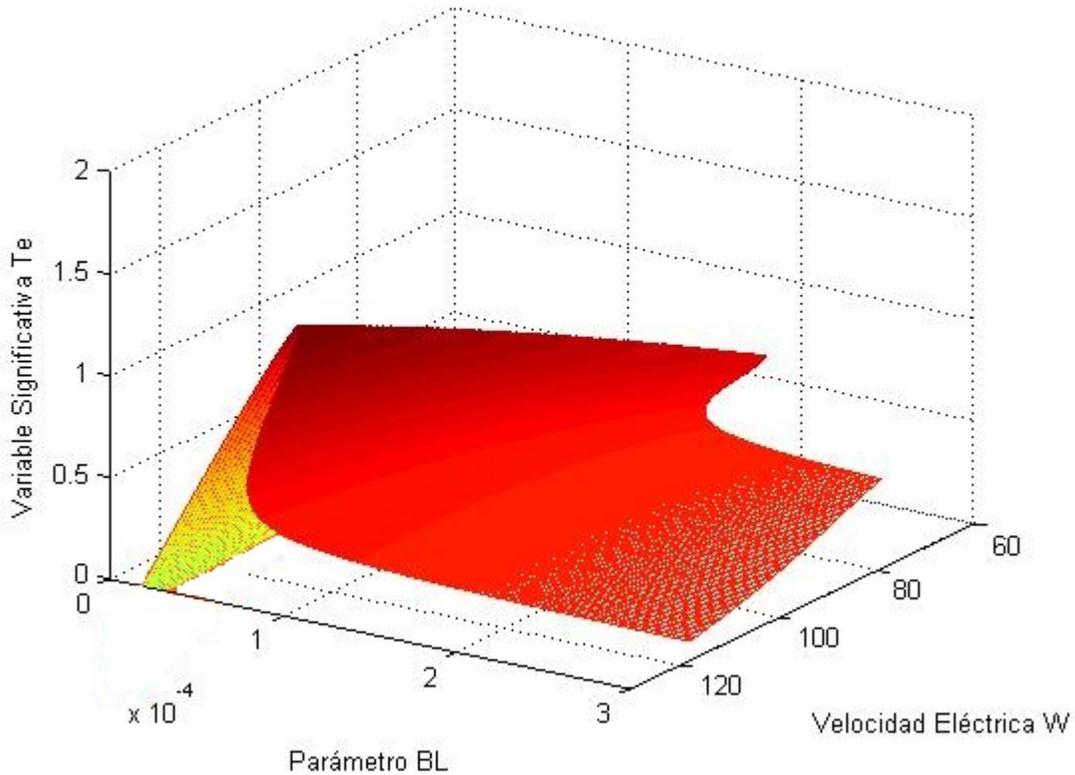


Figura 5.2: Diagrama de bifurcación de la máquina de inducción función motor.

fenómeno de bifurcación formado por la unión de dos turning points. Uno de éstos turning points se encuentra en la cúspide de la curva, mientras que el otro se encuentra en la parte baja. La bifurcación Histéresis produce que para ciertos valores específicos de B_L puedan llegar a existir hasta tres equilibrios diferentes de par eléctrico T_e .

Por mencionar un ejemplo supóngase valores aproximados del parámetro $B_L = 0,8 \times 10^{-4} N \cdot m \cdot sec^2 / rad^2$. En éste valor de B_L se tienen tres puntos de equilibrio diferentes de par eléctrico T_e siendo un aproximado de $T_{e1} = 0,3$, $T_{e2} = 0,8$ y $T_{e3} = 1,1 N \cdot m$. Todos éstos valores para una velocidad angular eléctrica de $125 rad/seg$.

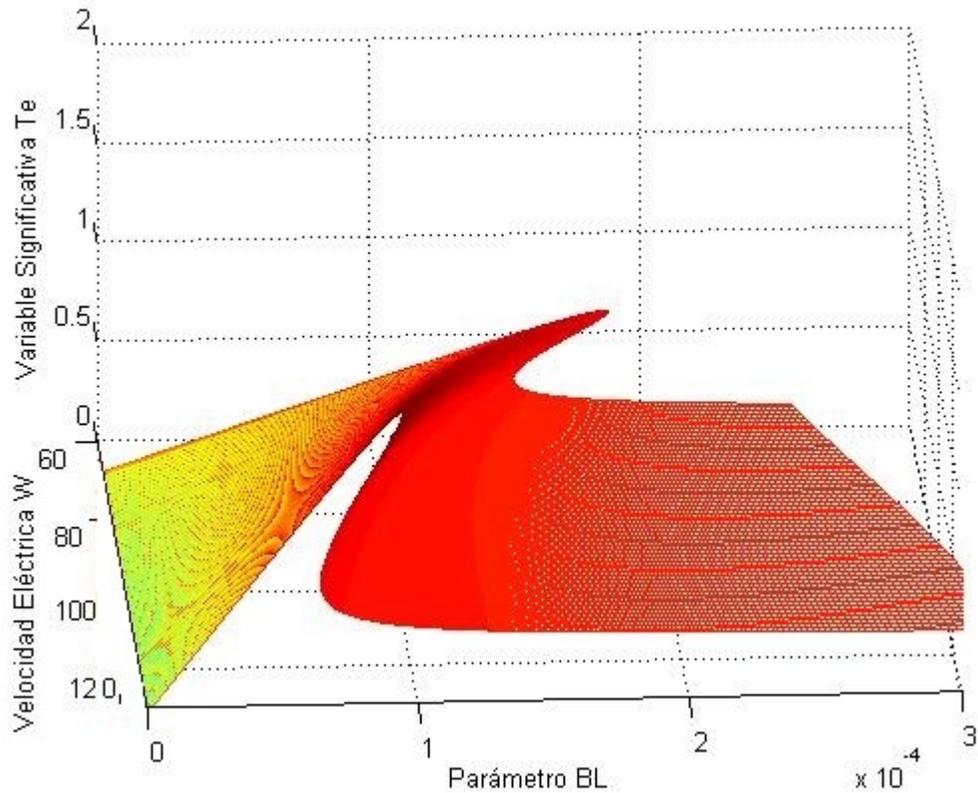


Figura 5.3: Apreciación de bifurcación Histéresis.

Tal y como se ha comprobado en éste estudio, existe más de un punto de equilibrio para un valor específico del parámetro B_L . Lo anterior solo es posible hablando teóricamente ya que en la realidad una máquina de inducción solo trabajará en un solo equilibrio, sin importar la variación paramétrica que se le realice.

A partir de ahora la cuestión que debería hacerse sería, ¿cómo identificar los valores reales que tomará el par eléctrico como puntos de equilibrio?. Ya que fuera de la teoría solo existirá un equilibrio único para cada valor paramétrico B_L muy particular, el siguiente paso sería realizar un cálculo que permita obtener la estabilidad de la curva de equilibrios de la máquina, con

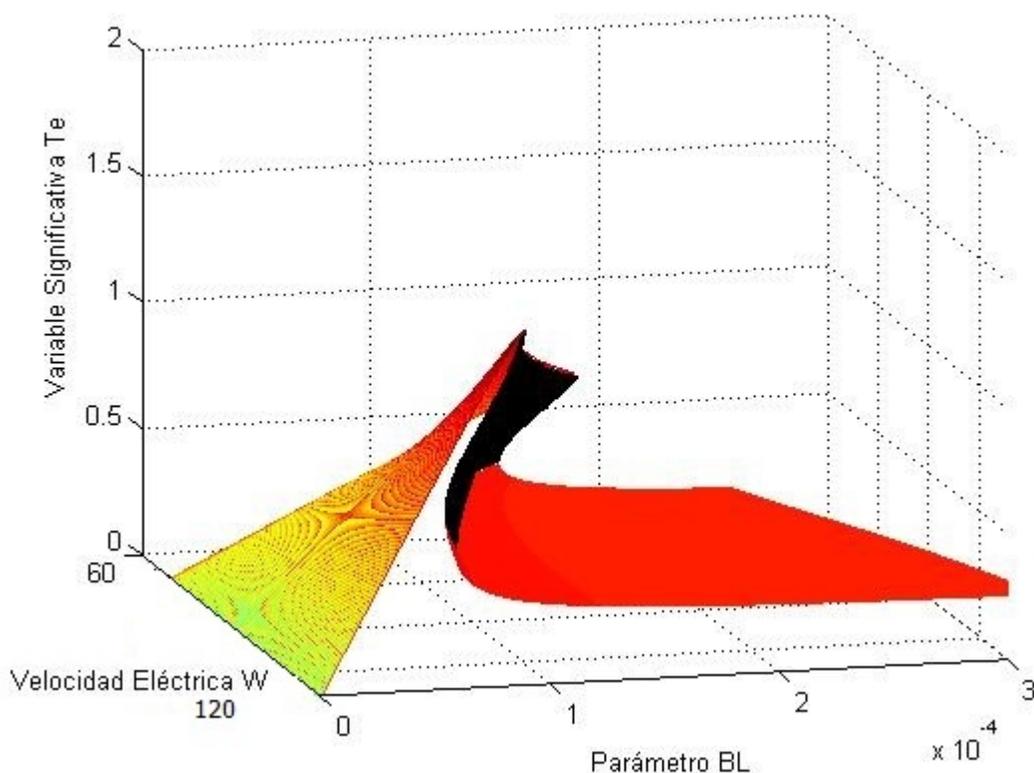


Figura 5.4: Estabilidad de los equilibrios en el diagrama.

éste cálculo podrá determinarse el camino que tomará la curva en una situación real. El código de programación de éste cálculo se puede encontrar dentro de los anexos. Las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 muestran el resultado gráfico obtenido de la estabilidad de los equilibrios.

La zona en color negro de la curva solución determina inestabilidad en los equilibrios del sistema, mientras que el resto significa estabilidad. Dicho de otra manera, un sistema real seguirá la curva solución estable saltándose la zona de color negro para continuar nuevamente sobre los equilibrios estables tal y como se mostró en el ejemplo de Histéresis dentro del Capítulo 3.

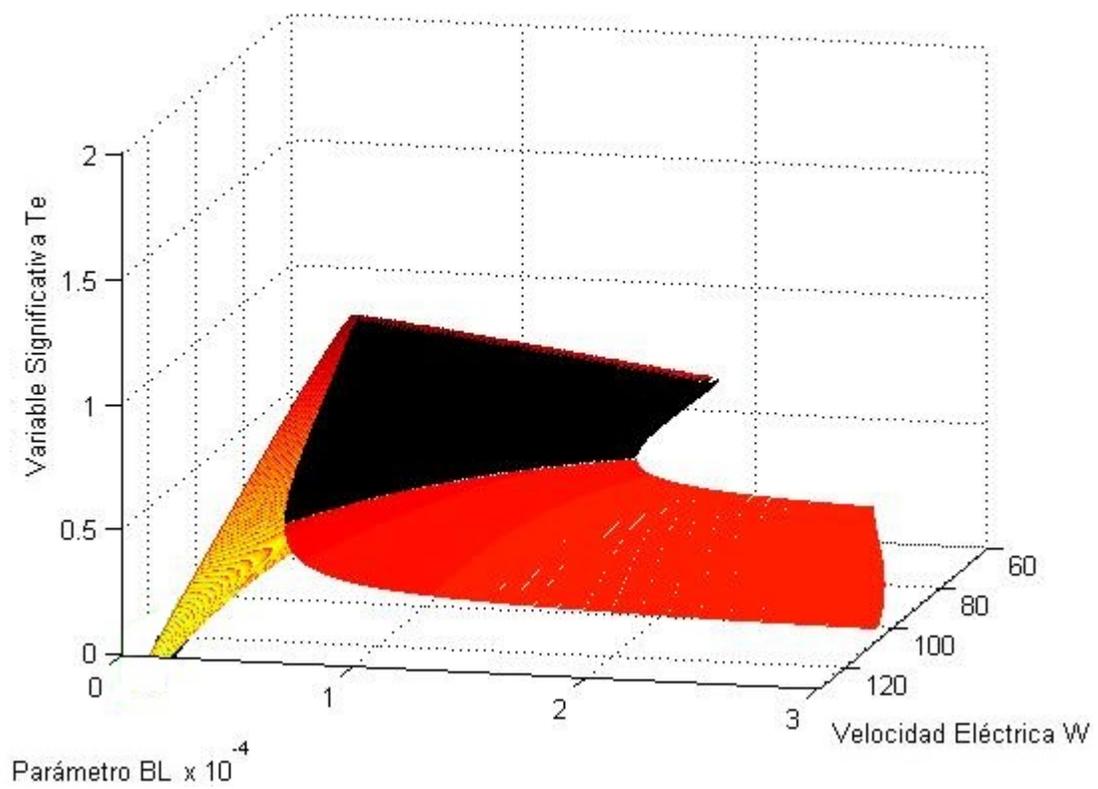


Figura 5.5: Estabilidad de los equilibrios en el diagrama.

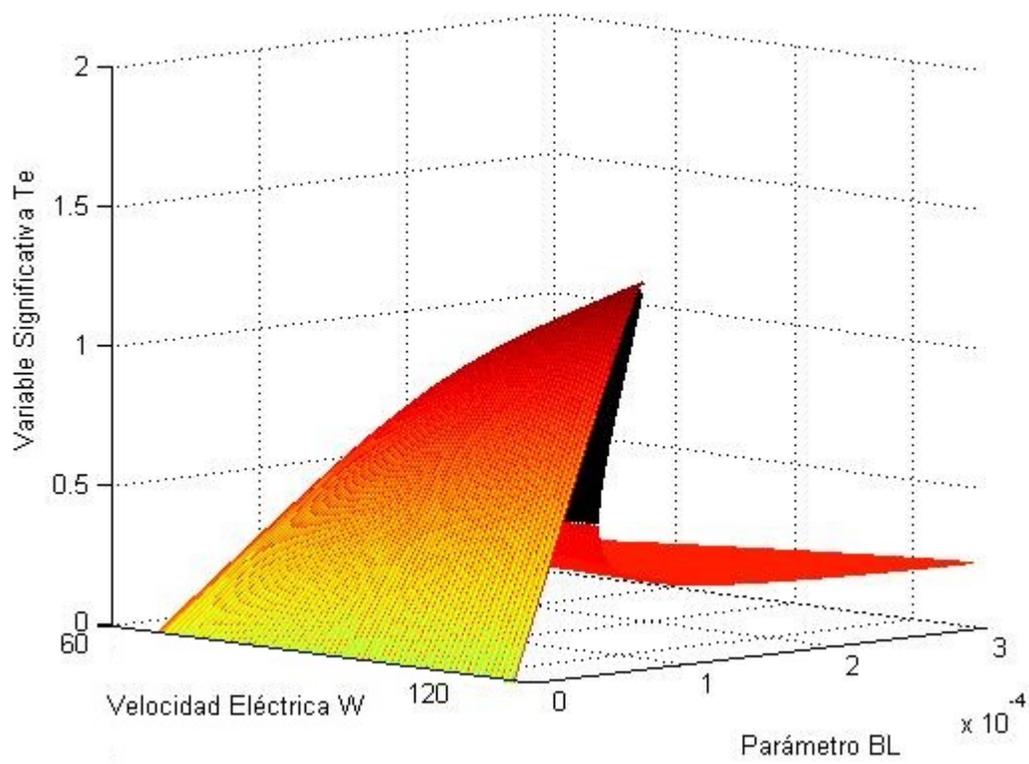


Figura 5.6: Estabilidad de los equilibrios en el diagrama.

Bibliografía

- [1] Paul C. Krause: Analysis of Electric Machinery and Drive Systems. Mohamed E. El-Hawary, Series Editor. Segunda Edición. IEEE Press Power Engineering Series. IEEE, 2002.
- [2] Rüdiger Seydel: Practical Bifurcation and Stability Analysis. Springer, Third Edition. Universität Köln Mathematisches Institut Weyertal, Germany 1990.
- [3] Jack K. Hale, Hüseyin Kocak: Dynamics and Bifurcations. Springer. Springer - Verlag New York, Inc. August 1991.
- [4] Arie de Niet: Step-size Control and Corrector Methods in Numerical Continuation of Ocean Circulation and Fill-reducing Orderings in Multilevel ILU Methods. Department of Mathematics University of Groningen. August 2002.
- [5] Eugene L. Allgower, Kurt Georg: Numerical Continuation Method. Colorado State University. Colorado 1990.
- [6] Andrés Tovar Pérez, Hernando Díaz: Herramienta Computacional Para la Detección de Bifurcaciones Locales en Sistemas Dinámicos. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería Eléctrica y Mecánica.