

SEP



SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

**INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE CD. MADERO**

Sistema Nacional de Educación Superior Tecnológica



Dirección General de Educación Superior Tecnológica

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



**“HIBRIDACIÓN DE
ALGORITMOS METAHEURÍSTICOS PARA
PROBLEMAS DE BIN PACKING”**

P A R A O B T E N E R E L G R A D O D E:
**MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIAS DE LA
COMPUTACIÓN**

P R E S E N T A:

ISC. DIANA MARITZA NIETO YÁÑEZ

A S E S O R:

DRA. LAURA CRUZ REYES

CD. MADERO, TAM. MEXICO DICIEMBRE DE 2007



Instituto Tecnológico de Cd. Madero

D.I.

Cd. Madero, Tam., a 04 de Diciembre de 2007.

Área: Posgrado
Nº Oficio: U5.479/07
Asunto: Autorización de Impresión
de Tesis

C. ING. DIANA MARITZA NIETO YÁÑEZ
Presente.

Me es grato comunicarle que después de la revisión realizada por el Jurado designado para su examen de grado de Maestra en Ciencias en Ciencias de la Computación, se acordó autorizar la impresión de su tesis titulada:

**“HIBRIDACIÓN DE ALGORITMOS METAHEURÍSTICOS PARA PROBLEMAS DE BIN
PACKING”**

Es muy satisfactorio para la División de Estudios de Posgrado e Investigación compartir con Usted el logro de esta meta. Espero que continúe con éxito su desarrollo profesional y dedique su experiencia e inteligencia en beneficio de México.

Atentamente
“POR MI PATRIA Y POR MI BIEN”

Ma. Yolanda Chávez Cinco
M.P. María Yolanda Chávez Cinco
Jefa de la División



S.E.P.
DIVISION DE ESTUDIOS
DE POSGRADO E
INVESTIGACION
ITCM

MYCHC 'NLCO' cerc*

RESUMEN

La rentabilidad y productividad de las empresas demanda una buena organización de sus procesos logísticos. Para posibilitar ahorros económicos importantes, el presente proyecto aborda el diseño de planes de distribución de objetos en contenedores. Este problema es conocido en las ciencias computacionales como BPP (acrónimo de Bin Packing Problem), y pertenece a una clase de problemas difíciles que demandan una alta cantidad de recursos computacionales. A pesar de su dificultad, la formulación de problemas mediante BPP permite resolver una gran cantidad de situaciones de las empresas, entre las cuales destaca el ahorro de espacios en planta y el acomodo de productos en vehículos y líneas de producción.

Los métodos tradicionales propuestos para la solución de BPP están limitados para resolver su intratabilidad. Una alternativa prometedora son los algoritmos metaheurísticos que obtienen soluciones que se aproximan a la solución óptima. Dado que no existe un algoritmo que sea la mejor opción para todas las situaciones posibles, tomar lo mejor de cada uno de ellos es un reto. Esta tesis parte del supuesto que la hibridación de algoritmos metaheurísticos, mediante técnicas especializadas, permitiría incrementar su alcance de solución.

Por lo anterior, se propone un algoritmo genético híbrido. El metaheurístico controla el proceso de búsqueda de la solución, e interactúa con un conjunto de estrategias heurísticas. Para la representación de soluciones se utiliza un esquema basado en bloques. Esto incrementa el desempeño pero genera soluciones inviables. Para manejar la inviabilidad e incrementar la capacidad de exploración se adaptaron cuatro algoritmos deterministas. Además, se incorporaron métodos para estimar valores cercanos al óptimo. Estos límites se utilizan para delimitar el espacio de la búsqueda y como criterio de paro del algoritmo.

Los resultados de los experimentos muestran que el algoritmo híbrido tiende a converger rápidamente hacia el óptimo. La hibridación permitió resolver un mayor número de instancias tomadas de un banco de pruebas estándar con un menor error, pasando de un 5.1% a un 0.17%. Experimentos adicionales muestran su alto nivel de competencia con respecto a los de la literatura.

SUMMARY

Profitability and productivity of the companies demand a good organization of their logistic processes. In order to facilitate important savings, the present project approaches the design of distribution plans of items in bins. This problem is known in computer sciences as BPP (Bin Packing Problem) and it belongs to a class of hard problems that demand a high quantity of computer resources. In spite of their difficulty, the formulation of problems through BPP allow to solve a big quantity of situations in the companies such as saving space in stores and the accommodation of products in vehicles and production lines.

The traditional methods proposed for the solution of BPP are limited to solve their intractability. A promising alternative are the metaheuristic algorithms because they obtain approximated solutions to the optimum solution. Due to there is not an algorithm that can be the best option for all the possible situations, to take the best of each of them is a challenge. This thesis dispatches the fact that hybridization of meta-heuristic algorithms, through specialized techniques, would permit to increase their solution scope.

For all before, a hybrid genetic algorithm is proposed. The metaheuristic controls the searching process of the solution and interacts with a set of heuristic strategies. For the representation of the solutions a scheme based in blocks is used. This increases the performance but generates nonviable solutions. In order to manage the inviability and increase the capacity of exploration, four deterministic algorithms were adapted. Furthermore, methods for estimation of the values near to the optimum were incorporated. These limits are used in order to delimitate the space of search and, as a stop criterion of the algorithm.

Experimentation results show that the hybrid algorithm tends to quickly converge to the optimum. The hybridization permitted to solve a big number of instances taken from a standard testing bench with a minor error, going from a 5.1% to a 0.17%. Additional experiments show a high level competence of the algorithm in comparison with the literature algorithms.

Contenido

Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Descripción del problema.....	3
1.3. Justificación del problema.....	4
1.4. Objetivos.....	5
1.4.1. Objetivos Específicos.....	5
1.5. Hipótesis.....	5
1.6. Alcances.....	6
1.7. Limitaciones.....	6
Capítulo 2. Fundamento Teórico.....	8
2.1. El Problema de Bin Packing.....	8
2.1.1. BPP y los problemas de Agrupación.....	9
2.1.2. Definición Formal.....	10
2.1.3. Complejidad Computacional.....	12
2.1.4. Aplicaciones.....	15
2.2. Variantes asociadas al Problema de Bin Packing.....	21
2.3. Algoritmos de Solución.....	23
2.3.1. Algoritmos Deterministas.....	25
2.3.2. Algoritmos No Deterministas.....	27
2.3.3. Algoritmos Híbridos.....	29
2.4. Límites para Bin Packing.....	34
2.4.1. Límite Inferior L_1	34
2.4.2. Límite Inferior L_2	34
2.4.3. Límite Inferior L_3	35

Capítulo 3. Estado del Arte	38
3.1. Estado del arte de BPP1D	38
3.1.1. Trabajos Relacionados.....	39
3.1.2. Análisis de Estado del Arte BPP1D	42
3.2. Estado del arte de las variantes de BPP.....	43
3.2.1. Variantes BPP de la Literatura	43
3.2.2. Variantes BPP del Problema de Transporte de Productos.....	44
Capítulo 4. Metodología de solución	46
4.1. Formalización de Variantes de Bin Packing	46
4.2. Recopilación, estandarización y generación de Casos de Prueba	47
4.3. Elección de un Algoritmo Metaheurístico Base.....	48
4.4. Incorporación de Técnicas de Hibridación (Algoritmo Genético Híbrido)	50
4.4.1. Adaptación de Técnicas de la Literatura	50
4.4.2. Algoritmo genético propuesto	51
4.4.3. Procedimientos para construir la Población	52
4.4.2. Procedimiento Cruzamiento por Agrupación.....	54
4.4.3. Procedimiento Mutación por Agrupación	56
4.4.4. Ejemplo de la Técnica Heurística GA	56
4.5. Extensión del Algoritmo Base.....	57
4.6. Evaluación del Desempeño del Algoritmo.....	58
Capítulo 5. Experimentación y Análisis de Resultados	60
5.1. Ambiente Experimental.....	61
5.1.1. Infraestructura.....	61
5.1.2. Descripción del conjunto de casos de prueba.....	61

5.2. Experimento 1: Generación de Individuos.....	63
5.2.1. Objetivo.....	63
5.2.2. Configuración del Experimento.....	64
5.2.3. Resultados.....	64
5.2.4. Análisis de Resultados.....	66
5.3. Experimento 2: Conservación de la Población	66
5.3.1. Objetivo.....	66
5.3.2. Configuración del Experimento.....	67
5.3.3. Resultados.....	67
5.3.4. Análisis de Resultados.....	68
5.4. Experimento 3: Selección de Individuos.....	68
5.4.1. Objetivo.....	68
5.4.2. Configuración del Experimento.....	68
5.4.3. Resultados	69
5.4.4. Análisis de Resultados.....	70
5.5. Experimento 4: Cruzamiento.....	70
5.5.1. Objetivo.....	70
5.5.2. Configuración del Experimento.....	70
5.5.3. Resultados.....	71
5.5.4. Análisis de Resultados.....	72
5.6. Experimento 5: Mutación.....	73
5.6.1. Objetivo.....	73
5.6.2. Configuración del Experimento.....	73
5.6.3. Resultados.....	73
5.6.4. Análisis de Resultados.....	75
5.7. Experimento 6: Variación en el porcentaje de Cruzamiento.....	75
5.7.1. Objetivo.....	75
5.7.2. Configuración del Experimento.....	75
5.7.3. Resultados.....	75

5.7.4.	Análisis de Resultados.....	76
5.8.	Experimento 7: Variación en el porcentaje de Mutación.....	77
5.8.1.	Objetivo.....	77
5.8.2.	Configuración del Experimento.....	77
5.8.3.	Resultados.....	77
5.8.4.	Análisis de Resultados.....	78
5.9.	Experimento 8: Variación en el Número de Individuos.....	78
5.9.1.	Objetivo.....	78
5.9.2.	Configuración del Experimento.....	79
5.9.3.	Resultados.....	79
5.9.4.	Análisis de Resultados.....	80
5.10.	Experimento 9: Variación del Número de Generaciones.....	80
5.10.1.	Objetivo.....	80
5.10.2.	Configuración del Experimento.....	80
5.10.3.	Resultados.....	80
5.10.4.	Análisis de Resultados.....	81
5.11.	Experimento 10: Mejora con Respecto al Tiempo Empleado y Análisis Final .	82
5.10.5.	Objetivo.....	82
5.10.6.	Configuración del Experimento.....	82
5.10.7.	Resultados y Análisis.....	83
Capítulo 6. Conclusiones		87
6.1.	Conclusiones.....	87
6.2.	Trabajos Futuros.....	89
Referencias Bibliográficas		90
Anexo A Modelo Matemático BPP con Variantes.		96
Anexo B Resultados de Casos <i>Stratus1</i>		98

Indice de Figuras

Figura 2.1. Distribución de objetos en contenedores	11
Figura 2.2. Ejemplo de conversión de instancias para BPP y PP.....	14
Figura 2.3. Ejemplo del Problema de Selección de Algoritmos	16
Figura 2.4. Tareas básicas dentro del problema Selección de Algoritmos.....	16
Figura 2.5. Ejemplo del Problema de Transporte	17
Figura 2.6. Tareas básicas dentro del problema de Transporte.....	18
Figura 2.7. Asignación de la carga en el problema de transportación de productos	18
Figura 2.8. Ejemplo de distribución de tareas	19
Figura 2.9. Ejemplo de minimización de espacio en el almacenamiento de datos	19
Figura 2.10. Ejemplo de cortado de materiales	20
Figura 2.11. Ejemplo de asignación de comerciales en espacios publicitarios.....	21
Figura 2.12. Algoritmos Deterministas para BPP	25
Figura 2.13. El criterio de dominación: F_2 domina sobre F_1	27
Figura 2.14. Clasificación de Metaheurísticos Híbridos	29
Figura 2.15. Diversas formas de fusión HC y SC	33
Figura 4.1. Ejemplo del Formato de un Caso Estándar.	47
Figura 4.2. Algoritmo Genético.....	51
Figura 5.1. Comportamiento de cada conjunto de casos: Generación de Individuos.....	65
Figura 5.2. Reducción del Radio Promedio Teórico: Generación de Individuos	65
Figura 5.3. Comportamiento de cada conjunto de casos: Conservación de la Población	67

Figura 5.4. Reducción del Radio Promedio Teórico: Conservación de la Población.....	68
Figura 5.5. Reducción del Radio Promedio Teórico: Selección de Individuos	69
Figura 5.6. Comportamiento de cada conjunto de casos: Selección de Individuos.....	73
Figura 5.7. Comportamiento de cada conjunto de casos: Cruzamiento.....	72
Figura 5.8. Reducción del Radio Promedio Teórico: Cruzamiento.....	72
Figura 5.9. Reducción del Radio Promedio Teórico: Mutación	74
Figura 5.10. Comportamiento de cada conjunto de casos: Mutación	74
Figura 5.11. Relación Tiempo - Radio Teórico: Porcentajes de Cruza.....	76
Figura 5.12. Relación Tiempo - Radio Teórico: Porcentajes de Mutación.....	78
Figura 5.13. Relación Tiempo - Radio Teórico: Número de Individuos	79
Figura 5.14. Incremento en el tiempo con respecto al número de Generaciones	81
Figura 5.15. Reducción del Radio Promedio Teórico: Algoritmo Genético Híbrido.....	83
Figura 5.16. Comparativa de Tiempo: Criterio de Paro	84

Índice de Algoritmos

Algoritmo 4.1. Procedimiento General de AG	52
Algoritmo 4.2. Procedimiento para la construcción de Individuos mediante la conversión de Algoritmos Deterministas a no Deterministas	53
Algoritmo 4.3. Procedimiento construir individuos utilizando el criterio del Límite	53
Algoritmo 4.4. Procedimiento para crear individuos utilizando L2 y ajuste de 3 objetos (DB3).....	54
Algoritmo 4.5. Procedimiento de Cruzamiento de individuos por Agrupación	55
Algoritmo 4.6. Procedimiento de Mutación por Agrupación	56

Índice de Tablas

Tabla 2.1. Ejemplos de Problemas de Agrupación.....	9
Tabla 2.2. P' : Problema de Partición.....	13
Tabla 2.3. P : Versión reducida de BPP	13
Tabla 2.4. Función de transformación de PP a BPP	14
Tabla 2.5. Tipos de BPP y sus Variantes.....	21
Tabla 2.6. Clasificación de los diferentes tipos de fusión HC y SC	32
Tabla 2.7. Definición de Grados de Fusión	33
Tabla 3.1 Estado del Arte de Algoritmos para BPP1D	41
Tabla 3.2 Configuración de parámetros de Algoritmos para BPP1D.....	41
Tabla 3.3 Estado del Arte de BPP y sus variantes.....	43
Tabla 3.4. Relación de variantes con el Problema de Transporte.....	44
Tabla 4.1. Características de Algoritmos Metaheurísticos	48
Tabla 4.2. Primera evaluación para ACO y GA	49
Tabla 5.1. Configuración: Generación de Individuos.....	64
Tabla 5.2. Radio Teórico Promedio: Generación de Individuos	65
Tabla 5.3. Radio Teórico Promedio: Conservación de la Población.....	67
Tabla 5.4. Radio Teórico Promedio: Selección de Individuos	69
Tabla 5.5. Tipos de Cruzamiento.....	71
Tabla 5.6. Radio Teórico Promedio: Cruzamiento	71
Tabla 5.7. Tipos de Mutación.....	73
Tabla 5.8. Radio Teórico Promedio: Mutación	74

Tabla 5.9. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Porcentajes de Cruzamiento	76
Tabla 5.10. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Porcentajes de Mutación.....	77
Tabla 5.11. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Número de Individuos	79
Tabla 5.12. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Número de Generaciones	81
Tabla 5.13. Radio Teórico Promedio: Algoritmo Genético Híbrido	83
Tabla 5.14. Resultados experimentales para instancias estándar	85
Tabla 5.15. Resultados experimentales para instancias aleatorias	85

Capítulo 1

Introducción

En el presente capítulo se ilustran las razones que impulsaron la creación de este proyecto, tales como los antecedentes que están centrados en las necesidades del sector productivo; la definición del problema de investigación; la justificación de la implementación; los objetivos, enfocados en el trabajo con algoritmos metaheurísticos; el producto a obtener a través de la hipótesis, así como los alcances y limitaciones de la investigación.

1.1. Antecedentes

En muchas organizaciones existen un gran número de problemas de optimización difíciles, en los cuales se busca una asignación eficiente de recursos con la finalidad de satisfacer los objetivos planteados por la entidad.

Para contribuir a que dichas organizaciones sean más competitivas, es necesario resolver estos problemas mediante el uso de herramientas computacionales capaces de adaptarse a diferentes escenarios y obtener buenas soluciones sin consumir altos volúmenes de recursos.

Algunos ejemplos de problemas de optimización son: distribución de bases de datos, distribución de objetos en contenedores (BPP, por sus siglas en inglés Bin Packing Problem), asignación de tareas a máquinas dentro de líneas de producción grandes y programación de horarios de universidades.

Actualmente no se cuenta con herramientas comerciales robustas que satisfagan consistentemente requisitos de eficiencia y eficacia para problemas de optimización difíciles. Un producto de este tipo es de suma importancia para cualquier organización, pero su desarrollo es de alta complejidad. En el Instituto Tecnológico de Ciudad Madero (ITCM) se ha generado una línea de investigación cuyo propósito es aportar conocimiento dentro de esta área de oportunidad. Los proyectos desarrollados en este contexto son a nivel maestría y doctorado, tienen relación estrecha con Bin Packing y se organizan en dos macro proyectos: Selección de Algoritmos y Transportación de productos embotellados.

El problema de selección de algoritmos permite, a partir de las características del caso que se resuelve, elegir el algoritmo con la mejor solución esperada. Un conjunto de algoritmos aproximados fueron propuestos, generándose para cada uno de ellos, regiones de dominación que incluyen los casos mejor resueltos [Cruz 2004]. Sin embargo el hecho de dominar sobre los demás algoritmos expuestos no implica alcanzar la solución óptima. En este sentido, disminuir el error en las soluciones es una tarea aún en proceso.

Por otro lado, el segundo y no menos importante, es el problema de transporte de productos embotellados; su estudio puede subdividirse en dos campos bastante amplios: el Problema del Enrutado de Vehículos (VRP, Vehicle Routing Problem) y el ya mencionado BPP [Rangel 2005, Herrera 2006]. El primero implica la asignación de rutas y horarios, el cual está siendo satisfactoriamente resuelto mediante el uso de un algoritmo metaheurístico, con los múltiples beneficios que conlleva este tipo de enfoque. Sin embargo, la asignación de carga, representada como un BPP, se ha abordado bajo un enfoque determinista simplificado, lo cual implica que generalmente la solución es aproximada y subóptima.

Ambos proyectos requieren el desarrollo de algoritmos que obtengan buenas soluciones del problema clásico Bin Packing, y del problema extendido con características y restricciones que presentan las aplicaciones del mundo real, y que son conocidas en la comunidad científica como variantes.

1.2. Descripción del problema

El problema de empaqueo de objetos en contenedores es NP-Duro, por lo cual se cree que no existen algoritmos exactos de solución cuyo tiempo de ejecución no aumente exponencialmente con el tamaño del problema. La aplicación de algoritmos de aproximación ofrece una solución viable para este tipo de problemas.

Los algoritmos metaheurísticos son estrategias de propósito general que permiten obtener soluciones “cercanas” a la solución óptima del problema con una inversión razonable de recursos [Fraire 2005]. Éstos han sido aplicados con éxito en la solución de subconjuntos particulares de instancias de un problema de optimización dado.

Los algoritmos metaheurísticos tienen la capacidad para integrar diversas estrategias heurísticas. El reto está en integrar efectivamente algoritmos aproximados que en el pasado han exhibido buenos comportamientos en regiones diferenciadas, generándose a partir de ello, el siguiente problema de investigación:

Desarrollar un algoritmo metaheurístico de alto desempeño que basado en técnicas de hibridación integre diversos algoritmos aproximados.

En particular se busca un algoritmo eficiente para la solución del problema de empaqueo de objetos en contenedores y con capacidad potencial de resolver un conjunto de variantes de BPP inmersas en los problemas de Selección de Algoritmos y Transportación de productos.

1.3. Justificación del problema

La programación metaheurística se ha convertido en una importante metodología de solución de problemas para muchos investigadores que trabajan en el área de computación inteligente. Estos algoritmos han sido ampliamente aceptados para resolver aplicaciones del mundo real en muchas áreas, entre ellas: ingeniería, negocios y comercio.

Es muy conocido que las tecnologías relacionadas con la computación evolucionan a pasos agigantados, por lo que se espera que en el futuro inmediato, las aplicaciones sean cada vez más complicadas en términos de magnitud y complejidad debido a los grandes volúmenes de datos y a lo intrincado de sus relaciones.

La complejidad de las nuevas aplicaciones demanda algoritmos más robustos. Con este fin, la hibridación de algoritmos metaheurísticos está tomando auge debido a la capacidad de éstos para conjuntar las estrategias de diversos algoritmos, tomando de cada uno de ellos sus mejores características.

Un algoritmo de alto desempeño para la solución de BPP, es de gran interés debido a lo extenso de sus aplicaciones industriales, por ejemplo: preparación de una colección de piezas musicales para su almacenamiento en discos de audio compacto, asignación de canales en redes de celulares, programación de multiprocesadores, y carga de camiones, entre otros.

En esta tesis se tiene particular interés en dos grandes proyectos institucionales que tienen estrecha relación con BPP. Por el tratamiento que se les ha dado y la experiencia adquirida, surge la necesidad de explorar la conjunción de diversas técnicas heurísticas en un algoritmo híbrido, posibilitando con ello la solución de problema del mundo real.

1.4. Objetivos

El objetivo general es el de dar solución a problemas de optimización complejos, en particular problemas de distribución de objetos en contenedores, mediante un algoritmo metaheurístico híbrido que muestre un nivel competitivo con respecto a los reportados en la literatura de las ciencias computacionales.

1.4.1. Objetivos Específicos

Como resultado de la presente investigación se busca:

- Definir formalmente las variantes del problema de Bin Packing inmersas en los problemas de Selección de Algoritmos y Transportación de Productos.
- Desarrollar un conjunto de algoritmos de solución de Bin packing, que sean representativos de las técnicas heurísticas más relevantes.
- Desarrollar un algoritmo metaheurístico híbrido para la solución de Bin packing, que integre las mejores estrategias de los algoritmos analizados.

1.5. Hipótesis

Las hipótesis de este trabajo parten de la idea de que un algoritmo híbrido es más eficiente que los algoritmos que componen la hibridación:

- El metaheurístico híbrido propuesto define una región de dominación mayor que las regiones definidas por cada uno de los algoritmos considerados en la hibridación.

- La incorporación del metaheurístico híbrido en el proceso de selección de algoritmos disminuye el radio promedio de las soluciones obtenidas.
- Un algoritmo metaheurístico híbrido utilizado en el llenado de contenedores es capaz de mejorar el desempeño en un Sistema de Transporte disminuyendo el total de camiones requeridos o aumentando el porcentaje de satisfacción del pedido.

1.6. Alcances

- En la definición del problema de Bin packing sólo se considerarán objetos de una dimensión.
- La formalización de variantes de Bin packing sólo incluirá las identificadas en el problema de Transportación de productos de la empresa caso de estudio y en el problema de Selección de Algoritmos.
- La consistencia en los resultados será demostrada mediante métodos estadísticos.

1.7. Limitaciones

- El desempeño del algoritmo será demostrado bajo la experimentación con casos de prueba estándar y casos de prueba aleatorios.

- Las condiciones del equipo y tiempos de ejecución deberán ser acordes con las especificaciones del mundo real: computadora personal con características estándar.
- El lenguaje utilizado será C.

Capítulo 2

Fundamento Teórico

En este capítulo se describen los conceptos básicos abordados en la investigación como lo son el problema de Bin Packing, así como la complejidad y variantes del mismo. Se muestra un estudio sobre algoritmos heurísticos y técnicas de hibridación además de una descripción de límites inferiores aplicados a la solución del problema de Bin Packing.

2.1. El Problema de Bin Packing

El problema de Bin Packing es un problema clásico de optimización combinatoria de los denominados *NP*-duro debido a que son considerados intratables pues demandan muchos recursos para su solución, y la cantidad requerida por éstos es parecida a una función polinomial de alto grado [Garey 1979]; en BPP existe un número ilimitado de contenedores cuya capacidad es un entero c , el número de objetos es n , el tamaño de cada objeto es w_i ($0 \leq i \leq n$) que esta limitado a ($0 \leq w_i \leq c$) [Coffman 2002, Baase 1998].

2.1.1. BPP y los problemas de Agrupación

BPP es miembro de la gran familia de problemas de agrupamiento, muchos de los cuales surgen naturalmente en la práctica. Este consiste en particionar el conjunto L de objetos, en una colección de subconjuntos disjuntos B_i de L , tal que $\cup B_i=L$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

El problema puede también definirse como aquél donde se busca agrupar los miembros del conjunto L en uno o más grupos. En la mayoría de estos problemas, no todos los posibles agrupamientos son permitidos, una solución del problema debe obedecer a varias restricciones difíciles, de otra manera la solución sería inválida. Esto es, usualmente un objeto no puede ser agrupado con todos los posibles subconjuntos.

El objetivo de la agrupación es optimizar la función de costo por el conjunto de soluciones válidas. La Tabla 2.1 muestra tres ejemplos de problemas de agrupación, las restricciones asociadas a cada uno de ellos y su función de costo.

Tabla 2.1. Ejemplos de Problemas de Agrupación

Problema	Restricciones	Función de Costo
<i>Empacado de Objetos</i>	Suma de pesos de objetos en algún grupo menor o igual que la capacidad del contenedor.	Número de Grupos
<i>Líneas de Balanceo</i>	Suma de los tiempos de tareas en una máquina menor o igual al tiempo de uso de la máquina.	Número de máquinas
<i>Coloreo de Grafos</i>	Nodos no conectados en cualquier grupo	Número de Grupos

2.1.2. Definición Formal

Dados

n = número de objetos a distribuir

c = capacidad del contenedor

L = secuencia de n objetos

w_i = tamaño de cada objeto

Encontrar una partición de L mínima, $L = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$ tal que en cada conjunto B_j la sumatoria del tamaño de cada objeto s_i en B_j no exceda c (ver expresión 2.1).

$$\begin{aligned} \min z = m \\ \sum_{w_i \in B_j} w_i \leq c \quad \forall j, 1 \leq j \leq m. \end{aligned} \quad (2.1)$$

El objetivo de Bin Packing es obtener el número mínimo de contenedores requeridos, la función objetivo consiste simplemente en contabilizar el número de contenedores usados para empaquetar todos los objetos. Esto es correcto desde el punto de vista matemático, pero no se utiliza mucho en la práctica, pues un mal uso de la capacidad de los contenedores conduce a la necesidad de contenedores adicionales, para empaquetar los objetos [Falkenauer 1992].

Si se tomaran dos contenedores y se mezclara su contenido, la situación donde está casi lleno uno de los contenedores (dejando el otro casi vacío) es mejor que cuando los dos contenedores están igualmente distribuidos. Esto es porque el contenedor casi vacío puede acomodar más fácilmente los objetos adicionales que podrían ser demasiado grandes para acomodarse en cualquiera de los contenedores medio llenos [Falkenauer 1992]. Este criterio puede verse con mayor claridad en la Figura 2.1.

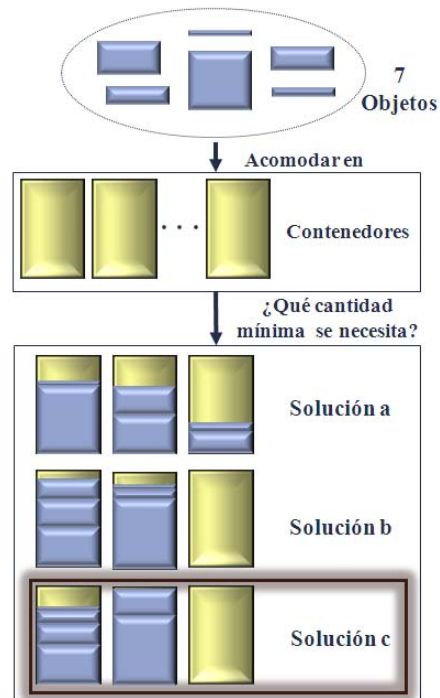


Figura 2.1. Distribución de objetos en contenedores

Mediante una función de costo alternativa (expresión 2.2) es posible maximizar el promedio de llenado de todos los contenedores, permitiendo medir la eficiencia del contenedor y explotar al máximo la capacidad.

$$\text{máx } z = \frac{\sum_{i=1 \dots N} (fill_i / C)^k}{N} \quad (2.2)$$

Donde:

N = Número de contenedores usados

$fill_i$ = Suma de los tamaños de los objetos en el contenedor i

C = Capacidad del contenedor

k = Constante que expresa la concentración de un buen llenado del contenedor, $k > 1$

(En [Falkenauer 1992] se recomienda $k = 2$).

2.1.3. Complejidad Computacional

Para demostrar que un problema es intratable se tiene que probar que no existe ningún algoritmo determinista que lo resuelva en tiempo polinomial o que todo algoritmo determinista que lo resuelve es de tiempo no polinomial. La teoría de la NP- Completez provee muchas técnicas simples para probar que un problema dado es “tan difícil” como un gran número de otros problemas que son ampliamente reconocidos por ser difíciles y que han desconcertado a los expertos por años.

La principal técnica utilizada para demostrar que dos problemas están relacionados es reducir uno a otro, dando una transformación que hace corresponder una instancia del primer problema en una instancia equivalente del segundo. Tal transformación provee la manera para convertir un algoritmo que resuelve el segundo problema en uno correspondiente para resolver el primero.

Para demostrar que el BPP es un problema de optimización intratable de la clase NP-Duro, se requiere primeramente demostrar que el problema es NP, para ello:

1. Se debe construir una máquina no determinista que genere aleatoriamente una solución candidata en tiempo polinomial. Para BPP, una solución candidata, es cualquier asignación aleatoria a cada objeto de un contenedor, lo cual se realiza en $\theta(n)$ pasos.
2. Posteriormente, debe validarse la factibilidad de esta solución en tiempo polinomial. Para el caso concreto de BPP, se verifica la restricción de capacidad de los contenedores lo cual requiere $\theta(n)$ pasos, sumando el peso de los objetos de cada contenedor.

Con lo anterior queda demostrado que el BPP pertenece a la clase de problemas NP. El siguiente paso es validar que P , la versión de decisión del problema, es NP-Completo. Para comprobarlo se selecciona un problema P' que se sabe está en la clase de problemas NP-completos, y se desarrolla una función de reducción de P' a P .

El problema de Partición (PP por sus siglas en ingles Partition Problem) es NP-completo, tal como se demuestra en [Garey 1979]. Dada su similitud con BPP, éste será considerado como el problema P' . Puesto que un problema se define por sus parámetros de entrada y las propiedades de la solución (Tabla 2.2), definiremos el problema de partición como: Dado un conjunto de enteros $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Determinar si hay una partición de enteros en dos subconjuntos $A', A'^C \subseteq A$ tales que $\sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_i \in A'^C} a_i = \sum_{i=1}^m a_i / 2$.

Tabla 2.2. P' : Problema de Partición

Parámetro	Descripción
M	Número de Enteros
A	Conjunto de Enteros $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$
A', A'^C	Partición de A
$\sum_{i=1}^m a_i / 2$	Tamaño de la partición

La versión de decisión del BPP se representa mediante un sub-problema de BPP donde: Dado un conjunto de objetos de tamaño w_1, w_2, \dots, w_n , un número limitado a $k=2$ contenedores de tamaño c . Determinar si es posible empacar todos los objetos en k contenedores. Éste sub-problema es denominado P (Tabla 2.3).

Tabla 2.3. P : Versión reducida de BPP

Parámetro	Descripción
n	Número de Objetos
W	Conjunto de Objetos (w_1, w_2, \dots, w_n)
B_i	Contenedor
c	Capacidad del Contenedor
k	Número de Contenedores

La transformación algorítmica de las entradas debe producir una solución equivalente; o sea, que convierta toda instancia I de P' en otra instancia $f(I)$ de P , tal que una instancia I de P' tiene solución afirmativa si y sólo si $f(I)$ de P tiene solución afirmativa.

La reducción de un caso del problema de Partición al sub-problema P de BPP es mostrado en la Tabla 2.4, y consiste en: Dado un conjunto de enteros de tamaño a_1, a_2, \dots, a_m , construir una caso de P con objetos w del mismo tamaño que los enteros, siendo k igual a 2 y el tamaño del contenedor $\sum_{i=1}^n s_i / 2$.

Tabla 2.4. Función de transformación de PP a BPP

Función de Reducción	Tiempo
$n = m$	1
$W = A$	N
$c = \sum_{i=1}^m a_i / 2$	N
$k = 2$	1
$B_1 = A'$	N
$B_2 = \{1, 2, \dots, m\} - A'$	

Hay una solución para P que use dos contenedores (Figura 2.2 (a)), si y solo si, hay una solución para el problema de Partición (Figura 2.2 (b)), es decir, un caso “si” de PP es un caso “si” del sub-problema de BPP, ya que $\sum_{i \in A'} a_i = \sum_{i \in B_1} w_i = c$ y $\sum_{i \in A^c} a_i = \sum_{i \in B_2} w_i = c$, obteniendo el mismo resultado en sentido contrario (instancia “si” del sub-problema P si y solo si instancia “si” de PP). Esta reducción se realiza en $\theta(n)$ pasos (Tabla 2.4) quedando demostrado que el sub-problema P es NP-Completo. Como dicho sub-problema está contenido en el problema de Bin Packing, $BPP \in NP$ -Completo. Dado que BPP es un problema de optimización y se ha demostrado que su versión de decisión es NP-Completo, se concluye que $BPP \in NP$ -Duro.

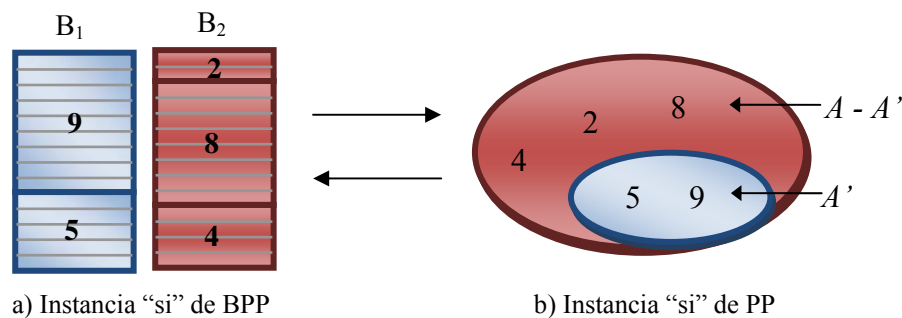


Figura 2.2. Ejemplo de conversión de instancias para BPP y PP

2.1.4. Aplicaciones

Diversas situaciones del mundo real pueden relacionarse con el problema de empaqueo de objetos en contenedores, éstas implican elevados tiempos de planeación y representan altísimos costos cuando no son resueltos con una adecuada metodología.

2.1.4.1. Selección de Algoritmos

Los teoremas No-Free-Lunch [Wolpert 1997] sugieren la existencia de clases de problemas y un algoritmo para cada clase. El algoritmo asociado a una clase, es el que resuelve sus instancias más eficientemente. De lo anterior, se plantea el problema de la selección de algoritmos mediante la pregunta ¿de qué manera identificar las regiones de dominación de los algoritmos, de forma que puedan ser utilizadas para predecir la región a la que pertenece un caso dado y el algoritmo que mejor lo resuelva?

De manera formal se tiene que: Dados un conjunto de casos C de un problema de optimización combinatoria (el cual puede ser Bin Packing) y un conjunto A de dos o más algoritmos de solución aproximada (GA, ACO, FFD). ¿Es posible agrupar todos los casos de C para los cuales un algoritmo de A tuvo un desempeño igual o mejor que los otros algoritmos de A ?; esto mediante una función $d(a,c)$ que cuantifica el desempeño de un algoritmo $a \in A$ sobre un caso $c \in C$, encontrando de esta forma un conjunto disjunto de grupos G tal que todo grupo g tenga asociado un algoritmo dominante y todos los casos de C estén ubicados en algún grupo de G ¿Es posible proyectar un caso nuevo $x \notin C$, a una región de solución $g \in G$ dominada por un algoritmo $a \in A$? [Cruz 2004]. La Figura 5 ejemplifica este problema.

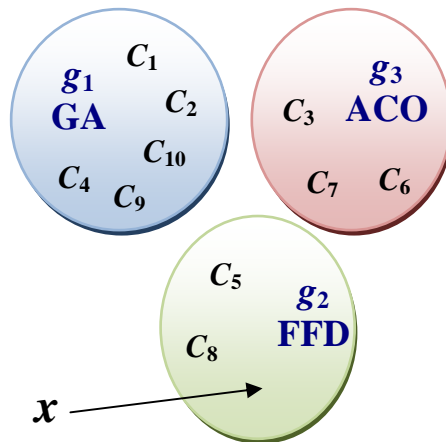


Figura 2.3. Ejemplo del Problema de Selección de Algoritmos

Dentro del problema de selección se presentan cuatro tareas. En la *constitución del ambiente* se extraen características que definen el problema (BPP) y los algoritmos de solución. El *entrenamiento* consiste en construir modelos de predicción del desempeño a partir de experiencia pasada. A partir del conocimiento se formula una tercera tarea que es la *predicción* del mejor algoritmo para un nuevo caso dado. Como última actividad se obtiene la *solución* de la instancia con el algoritmo elegido. La Figura 2.4 muestra las tareas descritas; los cuadros enmarcan la aportación de la tesis al problema de selección.

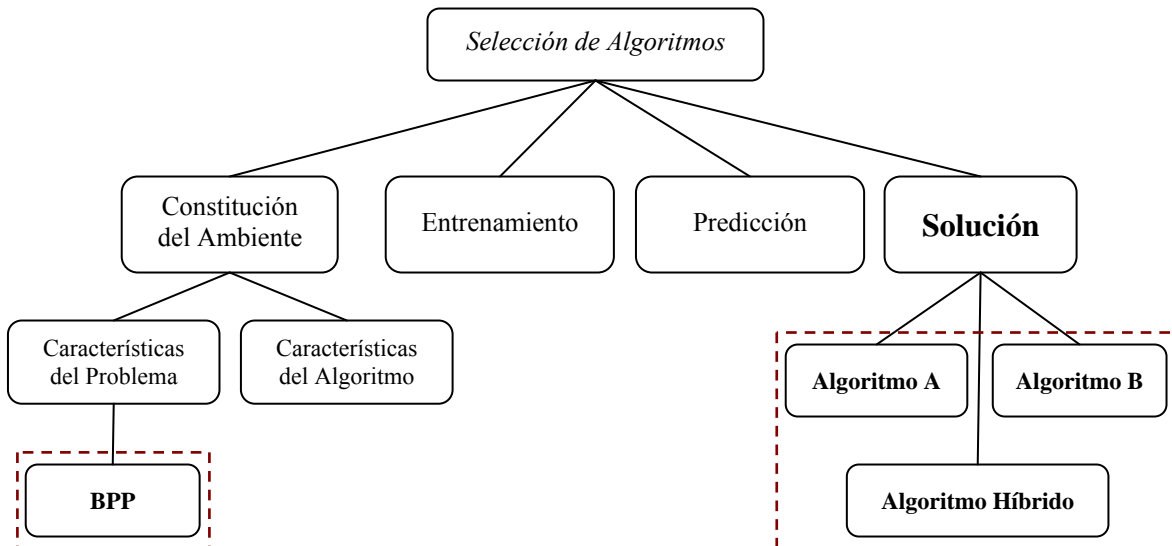


Figura 2.4. Tareas básicas dentro del problema Selección de Algoritmos

2.1.4.2.El Problema de Transporte

La Figura 2.5 muestra algunos de los factores considerados en [Herrera 2006] para definir un problema real de transporte de productos. La presente tesis retoma este proyecto para su mejora.

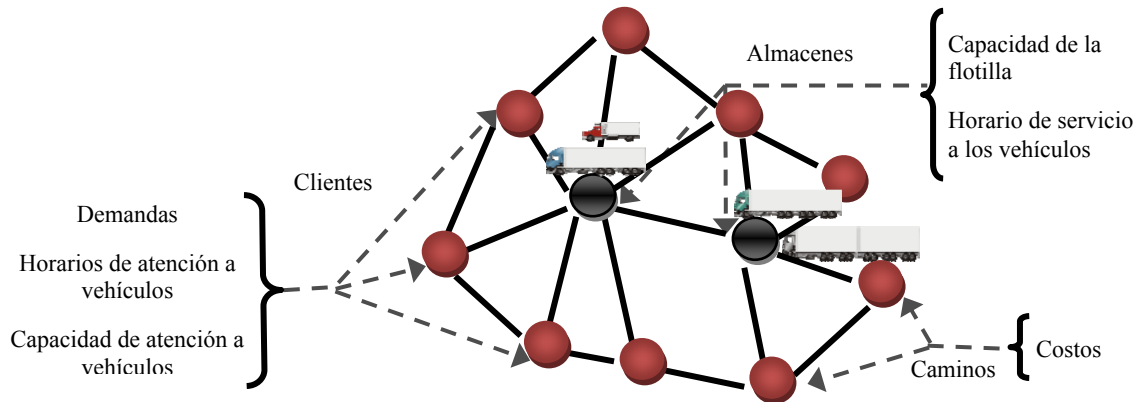


Figura 2.5. Ejemplo del Problema de Transporte

El objetivo principal consiste en satisfacer una serie de demandas, al menor costo y respetando las limitantes de operación. De éste se derivan las tres tareas básicas de la Figura 2.6. La *asignación de rutas* tiene como finalidad crear recorridos que inicien y terminen en el almacén visitando todos los clientes. La *asignación de horarios* determina las horas de entrada y salida de los vehículos en cada localidad. La *asignación de la carga*, en donde se encuentra inmerso el BPP, determina la ubicación exacta del producto dentro de un vehículo (Figura 2.7). Esta última se divide en tres tareas: *Construcción* de objetos de una dimensión, *asignación* de los productos considerando diversas variantes de BPP y *balanceo* de la carga.

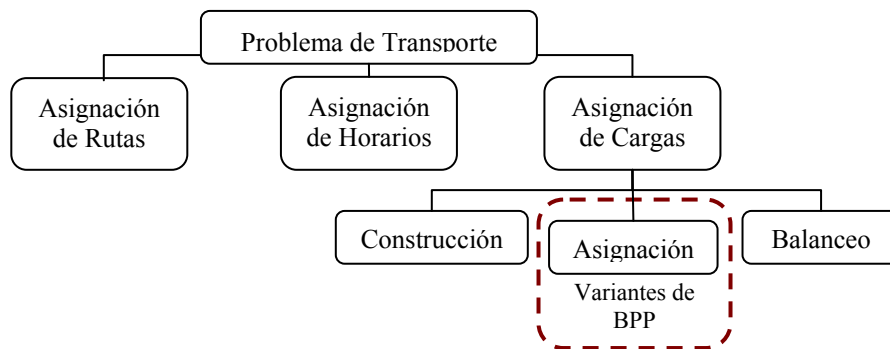
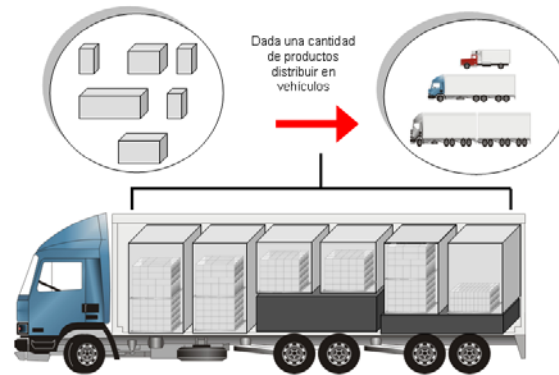


Figura 2.6. Tareas básicas dentro del problema de Transporte**Figura 2.7.** Asignación de la carga en el problema de transportación de productos

2.1.4.3. Otros problemas afines

Asignación eficiente de tareas en líneas de producción: Dado un conjunto de tareas de diferente duración y un conjunto de estaciones de trabajo con un tiempo dado de servicio, asignar cada tarea a una estación de trabajo buscando economizar maquinaria y tiempo, eliminar líneas de espera y cumplir con las restricciones de operación.

BPP está estrechamente relacionado con el multiprocesamiento de tareas independientes asociadas con el procesamiento de tiempo [Alvim 2003]. Cada tarea representa un objeto y la duración es su peso, mientras que las estaciones de trabajo son los contenedores y su tiempo de servicio la capacidad del mismo. Esta situación también podría ser aplicable en horas-hombre y otros problemas afines a la optimización del tiempo.

La Figura 2.8 muestra un ejemplo: una lavandería requiere de realizar un conjunto de procesos con la ropa. Las prendas están organizadas en grupo y tanto éstas como las lavadoras tienen un espacio de tiempo.

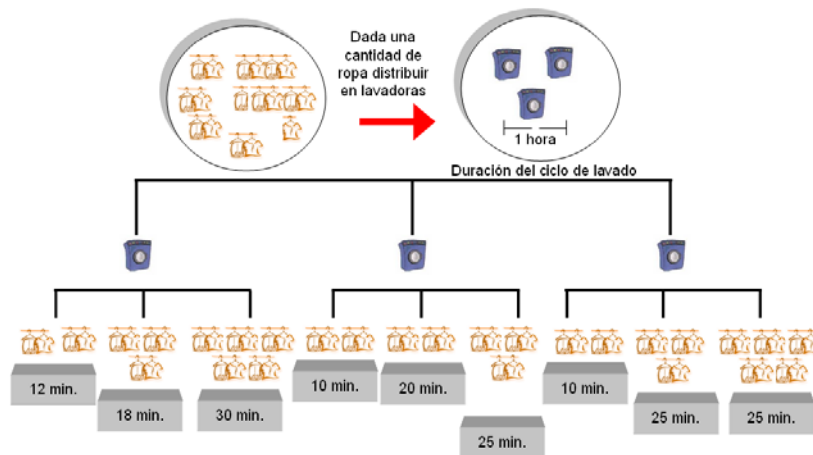


Figura 2.8. Ejemplo de distribución de tareas

Minimización de espacio en el almacenamiento de datos. Aunque pudiera verse como algo trivial, el disminuir la cantidad de unidades de almacenamiento requeridas para realizar respaldo de información, a la larga puede representar un gran ahorro económico.

Con respecto a BPP, el problema puede verse más fácilmente mediante el ejemplo de la Figura 2.9. Dada una colección de objetos de datos de multimedia con un tamaño específico, se requiere asignarlas a unidades de almacenamiento con cierta capacidad (tamaño de los contenedores), persiguiendo como objetivo el maximizar el número de objetos de datos a ser asignados [Golubchik 2000]

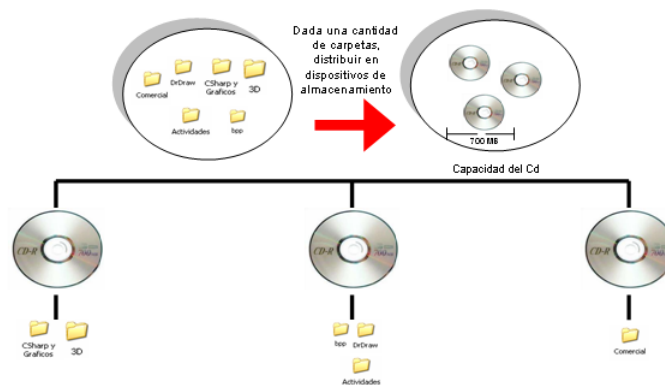


Figura 2.9. Ejemplo de minimización de espacio en el almacenamiento de datos

Corte de materiales. Muchas empresas requieren de piezas de una dimensión tales como cables, tubos, cadenas, correas, cintas o madera, por lo regular este tipo de materiales son vendidos en una longitud estándar y en la mayoría de los casos la demanda de piezas es de una longitud variante que no excede a la estándar. En [Dyckhooff 1990] se define el problema con dos grupos básicos. El grupo de grandes objetos es llamado “inventario” y el grupo de objetos pequeños es la lista de órdenes requeridas.

El proceso de cortado se realiza mediante la localización de los objetos pequeños dentro de las piezas grandes. El objetivo es evitar el desperdicio de materiales, conduciendo a su vez a la reducción del tiempo perdido en la orden de materia prima. La Figura 2.10 permite observar como construir una mesa a través del corte de piezas de madera.

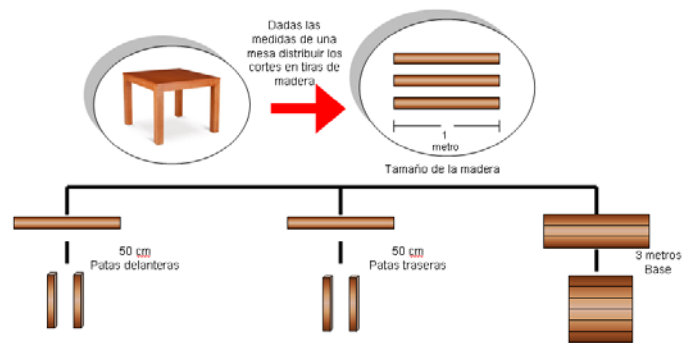


Figura 2.10. Ejemplo de cortado de materiales

Asignación de Comerciales en Segmentos Publicitarios. Los comerciales tienen longitudes arbitrarias de tiempo que deben ser asignados en bloques de tiempo publicitario. Cada bloque tiene una longitud máxima asignada y los comerciales asignados en cada uno no deben sobrepasar dicha longitud. Una de las aplicaciones prácticas para el problema de empaqueo de objetos es precisamente la asignación de comerciales para radio y televisión [Alvim 2003].

El objetivo es maximizar el número de comerciales expuestos en el total de bloques diarios traduciéndose en una ganancia para empresas de radio y televisión. En la Figura 2.11 se observa un ejemplo de este tipo de asignación

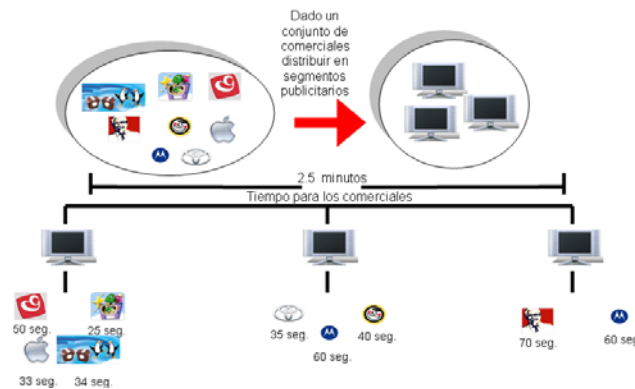


Figura 2.11. Ejemplo de asignación de comerciales en espacios publicitarios

2.2. Variantes asociadas al Problema de Bin Packing

La dinámica del mundo real ha inducido a través del tiempo, diversas características denominadas variantes del problema. La Tabla 2.5 muestra los distintos tipos de BPP que han sido estudiados [Goldenberg 2002]. La segunda columna presenta una descripción breve, señalando las principales aplicaciones. La tercera columna muestra las variantes involucradas [Kang 2003, Epstein 2005, Chan 2005, Verweij 1996, Eisenstein-Taylor 2001]. Para un análisis más exhaustivo se retoman aquellas variantes que han sido identificadas en el problema de transporte en particular.

Tabla 2.5. Tipos de BPP y sus Variantes

Tipos de BPP		Extensiones de BPP
Tipo	Características	
<i>ID</i>	En BPP unidimensional, hay solamente una variable que distingue los objetos: cada uno toma una cantidad particular de recurso, tal como espacio o tiempo. El empaqueo unidimensional se ha utilizado para problemas de calendarización de tareas, tales como asignar trabajos al CPU para reducir tiempo desperdiciado. Cuando se omite la dimensión se asume que es unidimensional.	Restricciones en los objetos que se pueden colocar en el mismo contenedor. BPPeC
		Cada objeto tiene un umbral de peso máximo soportado para no sufrir daño. BPPFO
		Objetos descargados en múltiples destinos. BPPFO
		Con umbral de peso mínimo para cada contenedor DBPP

Tipos de BPP		Extensiones de BPP
Tipo	Características	
2D	En BPP de dos dimensiones, los objetos se colocan en una superficie plana, finita en ambas dimensiones, con la finalidad de reducir al mínimo el espacio desperdiciado. La mayoría de las aplicaciones se centran en reducir el tamaño de un solo contenedor que deba llevar todos los objetos. Un ejemplo es el problema "stock cutting", en el que deben cortar las formas solicitadas.	Objetos a empacar pueden desaparecer durante el proceso. Ordenación unida a algunos de los pesos lo cuál limita la manera en que esos objetos pueden ser empacados. BPPFO, MDBPP
3D	Los objetos deben ser empacados en la mínima cantidad posible de contenedores de tamaño finito, y el uso práctico más común de BPP 3D está en el cargamento de mercancías en contenedores de envío.	Tamaño de objeto continuo. Tamaño de objetos discreto.
Guillotina	En algunas aplicaciones del mundo real, es importante que la solución sea guillotina, lo cual significa que puede ser producida por cortes rectos sucesivos hasta el final a través del material. Esto es importante para el corte de material con ciertos tipos de equipo de corte y tiene las ventajas de prestarse fácilmente a una variedad de representaciones.	Contenedores con capacidades o tamaños diferentes. BPPCC
En línea	El sistema funciona en tiempo real y sólo tiene información sobre contenedores abiertos, los objetos empacados hasta ahora y un objeto nuevo a la vez.	Contenedores de una capacidad o un tamaño estándar. BPPOn

Empacado de Objetos con Capacidad Restringida (BPPCC, BPP Capacity Constrained). Denominado también BPP de tamaño variable, donde los contenedores existentes cuentan con una capacidad específica y variable [Kang 2003].

Empacado de Objetos con Cardinalidad Restringida (BPPcC, BPP Cardinality Constrained). Presentada en [Epstein 2005] añade un límite en el número de objetos que pueden ser colocados en un contenedor.

Empacado de Objetos en Línea (BPPOn, BPP On-line). De acuerdo con [Epstein 2005], el número total de elementos a ser acomodados no se conoce al principio del proceso, por lo cual se deben ir empacando conforme llegan, esto imposibilita el asumir algún tipo de conocimiento a priori.

Empacado de Objetos con Objetos Frágiles Apilados (BPPSFO, BPP with Stacked Fragile Objects). Esta nueva variante se formuló a partir de BPPFO (BPP with Fragile Objects), donde cada objeto tiene un umbral de peso máximo soportado para no sufrir daño o deterioro [Chan 2005]. En BPPFO la suma de los pesos de todos los objetos en un contenedor debe ser menor o igual a la menor de las fragilidades de los objetos contenidos. Para BPPSFO, los objetos se encuentran uno encima de otro, requiriendo contabilizar el peso de la carga sobre cada objeto para no violar dicha restricción.

Empacado de Objetos con Múltiples Destinos (MDBPP, Multiple Destination BPP). En ésta variante se hace hincapié en el hecho de que los objetos tuviesen que ser descargados en múltiples destinos por lo cual sería importante el orden de su acomodo [Verweij 1996].

Empacado de Objetos con Mínima Capacidad Restringida (BPPMCC, BPP with Minimum Capacity Constrained). Esta nueva variante está inspirada en el principio de dualidad de BPP [Eisenstein-Taylor 2001]. El objetivo del problema dual es maximizar el número de objetos aceptados [Boyar 2005]. La característica retomada en BPPMCC es el umbral k de peso mínimo para que un contenedor sea válido.

2.3. Algoritmos de Solución

Cuando se tiene un problema donde se desea la optimización de recursos como es el caso de BPP, existen sólo dos tipos de enfoque en la solución:

Algoritmos Exactos: Uno de los métodos de optimización exacta más utilizados son la búsqueda exhaustiva, basada en la creación y evaluación de todas las soluciones factibles; para el problema de Bin Packing, una solución óptima puede encontrarse considerando todas las formas de hacer una partición del conjunto de n objetos en un subconjunto de tamaño n o más pequeño, pero el número de particiones sería mayor que $(n/2)^{n/2}$ [Baase 1998]. En términos computacionales, este proceso es bastante costoso para problemas complejos, por lo que su aplicación se limita a instancias relativamente pequeñas. Además, este tipo de metodologías resulta inefectiva en problemas del mundo real.

Algoritmos Heurísticos: Son procedimientos basados en el sentido común, que ofrecen una buena solución a problemas difíciles, de un modo fácil y rápido [Díaz 1996]. Cuando se tiene un problema *NP-duro* y se desea resolver un caso grande del mismo, la única opción es dar una "buena solución" al problema, pero no necesariamente la mejor [Beasley 1993]. Esto es posible mediante los *métodos heurísticos*, que generalmente obtienen buenas soluciones, pero no garantizan una solución óptima. En [Díaz 1996] se considera relevante su uso cuando:

- No existe un algoritmo exacto para solucionar el problema o éste requiere un tiempo computacional que crece de forma exponencial a medida que incrementa el tamaño del problema. Ofrecer una solución aceptablemente buena, representa una mejor opción que no tener ninguna solución.
- No es necesaria una solución óptima. Si los valores de la función objetivo son considerados relativamente cercanos al óptimo, puede no valer la pena emplear demasiado esfuerzo computacional el hallar una solución óptima que no representará un beneficio importante respecto a una que sea subóptima. Este fenómeno es presentado en casos reales donde el tiempo juega un papel preponderante para las empresas. Las limitaciones de tiempo y espacio obligan al empleo de algoritmos de rápida respuesta, aún a costa de la precisión.

- Los datos son poco fiables. En este caso, puede no ser de interés buscar una solución exacta, dado que esta no será más que una aproximación de la real, al basarse en datos que no son los reales.
- Es necesaria una solución como punto de inicio de otro algoritmo.

Una forma de clasificar los algoritmos heurísticos es en deterministas y no deterministas. Otra clasificación considera la presencia de hibridación.

2.3.1. Algoritmos Deterministas

Los *algoritmos deterministas* siempre siguen el mismo camino para llegar a una solución, por lo cual, obtienen la misma solución en diferentes ejecuciones. Dos temáticas son destacables aquí; la forma en que los objetos son seleccionados y el método en que los mismos son asignados a un contenedor. La Figura 2.12 muestra cinco de los principales algoritmos deterministas específicos para BPP con respecto a la asignación de los contenedores.

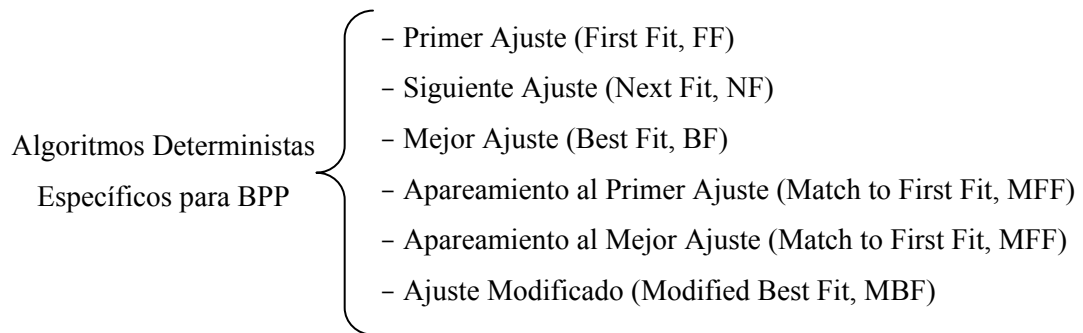


Figura 2.12. Algoritmos Deterministas para BPP

A continuación se describen los principales algoritmos deterministas descritos en [Cruz 2004, Martello 1990a] así como el criterio de dominación tomado de [Martello 1990b].

Primer Ajuste: Cada objeto puede ser seleccionado secuencialmente, o bien, los objetos pueden ser ordenados de forma decreciente con base en su tamaño, estableciéndose una variación en el método conocida como *Primer Ajuste Decreciente (First Fit Decreasing, FFD)*. El objeto seleccionado es colocado en el primer contenedor que tenga suficiente capacidad sin usar. Si ningún contenedor parcialmente lleno puede almacenarlo, el objeto se coloca en un contenedor vacío. El nivel de complejidad para ambos es de $O(n \log n)$.

Siguiente Ajuste: Esta estrategia sólo permite la selección de objetos de forma secuencial, su complejidad es $O(n)$. Es muy utilizada cuando no se tiene un conocimiento a priori de los objetos a acomodar (BPP en línea). Los contenedores son llenados uno a la vez, los objetos se colocan en el contenedor actual, cuando un objeto no cabe, se inicia un nuevo contenedor y los siguientes objetos ya no pueden ser almacenados en contenedores previos.

Mejor Ajuste (Best Fit Decreasing, BFD): De igual manera que en FF, los objetos pueden ser seleccionados secuencialmente o en orden decreciente considerando este último como *Mejor Ajuste Decreciente (Best Fit Decreasing, BFD)*. La única diferencia radica en que los objetos se colocan en el contenedor más lleno que lo pueda almacenar. Su complejidad es $O(n \log n)$.

Apareamiento al Primer Ajuste: Un conjunto de contenedores auxiliares se configura para almacenar objetos de un único rango de tamaño. A medida que la lista es procesada, cada objeto es examinado para verificar si puede ser empacado en un nuevo contenedor, con objetos de un contenedor complementario apropiado; o empacado en un contenedor parcialmente lleno; o empacado solo en un contenedor complementario. Finalmente, los objetos que aún permanecen en los contenedores complementarios se empacan utilizando el algoritmo básico.

Apareamiento al Mejor Ajuste: Es una variación de BFD y es similar a MFF, excepto por el algoritmo básico utilizado.

Ajuste Modificado: El algoritmo requiere de la especificación de un porcentaje de la capacidad del contenedor que puede quedar vacío y aún calificar como “buen ajuste”. Todos los objetos de tamaño mayor del 50% de la capacidad del contenedor son colocados en un contenedor propio. Con cada contenedor parcialmente lleno, se sigue un procedimiento especial para encontrar una combinación de objetos con un “buen ajuste”. Finalmente, todos los objetos restantes se empacan utilizando el algoritmo básico BF o BFD convirtiéndose en un *Ajuste Modificado Decreciente* (Modified Best Fit Decreasing, MBFD).

Criterio de Dominación. Concepto introducido por Martello y Toth en [Martello 1990b] e implementado mediante el algoritmo MTP en [Martello 1990a]. Dados dos conjuntos factibles F_1 y F_2 , si una partición de F_1 dentro de subconjuntos P_1, \dots, P_i y un subconjunto de objetos $\{j_1, \dots, j_i\}$ de F_2 existe tal que $w_{j_h} \geq \sum_{k \in P_h} w_k$ para $h=1, \dots, i$, entonces F_2 domina a F_1 (Figura 2.13). El criterio establece que: si es posible sacar un conjunto de objetos de un contenedor e intercambiarlos por un solo objeto del mismo peso que el conjunto, la solución puede ser mejorada debido a que será más fácil distribuir el conjunto de objetos pequeños en el resto de los contenedores a encontrar un lugar para el objeto grande, puesto que su dominio es mayor.

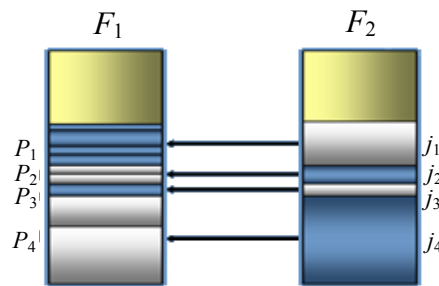


Figura 2.13. El criterio de dominación: F_2 domina sobre F_1

2.3.2. Algoritmos No Deterministas

Los *algoritmos no-deterministas*, no obtienen la misma solución en diferentes ejecuciones. Cuando éstos son de propósito general se les denomina Metaheurísticos [Fraire 2005, Barr 2001, Michalewicz 1999].

Los algoritmos de este tipo están basados en búsqueda por entornos; parten de una solución inicial factible y mediante alteraciones de esa solución, van pasando a otras soluciones factibles de su entorno. Para la terminación del proceso se sigue algún criterio de parada, dando como resultado la mejor solución visitada. Entre las ventajas que presentan las *metaheurísticas* se puede mencionar que aplican estrategias inteligentes y aleatorias lo cual permite ampliar las posibilidades de elección para evitar caer en mínimos locales, principalmente cuando existen factores no cuantificables que no han podido ser añadidos en el modelo, pero que también deben ser considerados. Algunos de los utilizados para BPP son:

Optimización basada en Colonias de Hormigas (Ant Colony Optimization, ACO), se inspira en el comportamiento que rige a las hormigas de diversas especies para encontrar los caminos más cortos entre las fuentes de comida y el hormiguero. La hormiga artificial es un agente computacional que intenta construir soluciones posibles al problema explotando los rastros de feromona disponibles y la información heurística. La reserva de feromonas evapora un poco después de cada iteración y se refuerza con buenas soluciones [Ducatelle 2001].

Búsqueda Tabú (Tabú Search, TS), se inspira en la administración de la memoria para la búsqueda de soluciones, esto con el fin de no repetir cosas malas que se hicieron en el pasado (tabú), evitando retrocesos y llegar a un mismo punto [Glover 1986]. El proceso consiste en: generar una lista de soluciones candidatas, seleccionar la mejor, que no sea tabú y, convertirla temporalmente en movimiento prohibido. Actualizando el tiempo de permanencia de las soluciones en la lista tabú, se quitan prohibiciones a soluciones que ya cumplieron su tiempo de estancia; para finalmente, tomar la solución que supere a la mejor solución general.

Recocido Simulado (Simulated Annealing, SA), Es un algoritmo de búsqueda por entornos con un criterio probabilístico de aceptación de soluciones basado en la Termodinámica. Desarrollado por [Kirkpatrick 1984], evita que la búsqueda finalice en óptimos locales permitiendo algunos movimientos hacia soluciones erróneas. El proceso utiliza una variable denominada temperatura, inicializada en un valor alto y se va reduciendo en cada iteración mediante un mecanismo de enfriamiento, hasta alcanzar una temperatura tendiente a cero.

Algoritmos Genéticos (Genetic Algorithms, GA), están inspirados en el principio Darwiniano de la evolución de las especies y en la genética [Goldberg 1989]. Son algoritmos probabilísticos que ofrecen un mecanismo de búsqueda paralela y adaptativa basada en el principio de supervivencia de los más aptos y en la reproducción. En los GAs, cada cromosoma es una estructura de datos que representa una de las posibles soluciones del espacio de búsqueda del problema, éstos son sometidos a un proceso de evolución que envuelve evaluación, selección, cruzamiento y mutación. Después de varios ciclos de evolución la población deberá contener individuos más aptos.

2.3.3. Algoritmos Híbridos

Los *algoritmos híbridos* son aquellos que combinan estrategias heurísticas de diferente naturaleza. Existen diversas formas de clasificar las técnicas de hibridación de algoritmos, a continuación se muestra dos enfoques de gran importancia.

2.3.3.1. Bajo un Enfoque de Alto y Bajo Nivel

La Figura 2.14 presenta una clasificación propuesta en [Talbi 2002], esta se basa en un enfoque de alto y bajo nivel según el grado de asociación de los algoritmos que intervienen en la hibridación.



Figura 2.14. Clasificación de Metaheurísticos Híbridos

En esta clasificación se combinan también dos esquemas; el jerárquico, que busca reducir las clasificaciones mediante la conjugación de características; y el plano, referente a los descriptores propios de cada algoritmo.

Esquema Jerárquico

Bajo Nivel: En el esquema jerárquico de bajo nivel se direcciona la composición funcional en un sólo método de optimización, es decir, existe un algoritmo que representa el núcleo del método general. Algunas funciones dadas del metaheurístico central son reemplazadas por otro metaheurísticos.

Alto Nivel: Los diferentes metaheurísticos son autosuficientes.

De Relevancia: Un conjunto de metaheurísticos son aplicados uno después de otro, cada uno usa la salida previa como entrada.

Coevolucionado: Modelo de optimización cooperativa, con agentes de cooperación paralela, donde cada agente lleva a cabo una búsqueda en un espacio de la solución.

La combinación de las diversas características llevarían a la creación de diversos algoritmos metaheurísticos tales como:

- *Híbrido de Bajo Nivel con Relevancia* (LRH, Low-level relay hybrid). Un metaheurístico dado es integrado dentro de una sola solución metaheurística. Un ejemplo se presenta al integrar una técnica de búsqueda local en particular dentro de recocido simulado.
- *Híbrido de Bajo Nivel Coevolucionado* (LTH, Low-level teamwork hybrid). Dos objetivos compiten para dirigir el diseño del metaheurístico: la exploración, que navega bajo todo el espacio de búsqueda con el fin de escapar de óptimos locales; y la explotación donde una vez encontrada una buena solución se intenta mejorarla moviéndose sólo en su vecindad. La exploración, necesaria para asegurar que cada parte del espacio de búsqueda sea suficiente para proporcionar una estimación fiable del óptimo global; y la explotación, importante para el refinamiento de la solución. Algoritmos basados en poblaciones como GA y ACO tiene alto poder en la exploración, después de cada generación, una búsqueda local podría agregar explotación.

- *Híbrido de Alto Nivel con Relevo* (HRH, High-level relay hybrid). En esta técnica, metaheurísticos autónomos son ejecutados en secuencia. Un ejemplo podría ser mejorar la solución final generada por un GA con una búsqueda Tabú.
- *Híbrido de Alto Nivel Coevolucionado* (HTH, High-level teamwork hybrid). El esquema HTH involucra varios algoritmos autónomos desempeñando una búsqueda en paralelo, y cooperando para encontrar un óptimo. El ejemplo más claro es el modelo de isla de GA donde la población es particionada en pequeñas sub-poblaciones y los individuos puede migrar entre las diferentes sub-poblaciones.

Esquema Plano

Homogéneo: Todas las combinaciones de algoritmos usan los mismos metaheurísticos.

Heterogéneo: Diferentes metaheurísticos son usados.

Global: Todos los algoritmos buscan en el espacio completo de búsqueda. El objetivo es explorar el espacio de soluciones más a fondo.

Parcial: El problema es resuelto descomponiéndolo en sub-problemas, cada uno tiene su espacio de búsqueda

General: Resuelven un problema de optimización designado.

Especializado: Combinan algoritmos los cuales resuelven diferentes problemas

2.3.3.2. Bajo un Enfoque de Hard Computing y Soft Computing

Una segunda clasificación de técnicas de hibridación es definida en [Ovaska 2006]. Dos metodologías computacionales compiten en la búsqueda de buenas soluciones: Hard Computing (HC) representado por un enorme y heterogéneo conjunto de técnicas tradicionales y Soft Computing (SC) conocido como un conjunto de técnicas complementarias tales como redes neuronales, lógica difusa y computación evolutiva.

Ambas metodologías pueden ser comparadas con los dos hemisferios del cerebro. Los humanos aplican razonamiento lógico y matemático, así como análisis y procesamiento serial para resolver problemas utilizando el hemisferio izquierdo del cerebro (HC). El hemisferio derecho usa el reconocimiento de patrones, la creatividad, la síntesis de ideas y el procesamiento en paralelo (SC). La motivación central detrás de la fusión HC y SC tiene como objetivo superar las limitaciones de las metodologías individuales. La fusión de HC y SC es definida como: La unión de un algoritmo o sistema nivelado de metodologías particulares de HC y SC, en las cuales cada metodología es una señal, un parámetro o una estructura inteligente que depende y recibe un reforzamiento funcional de la otra.

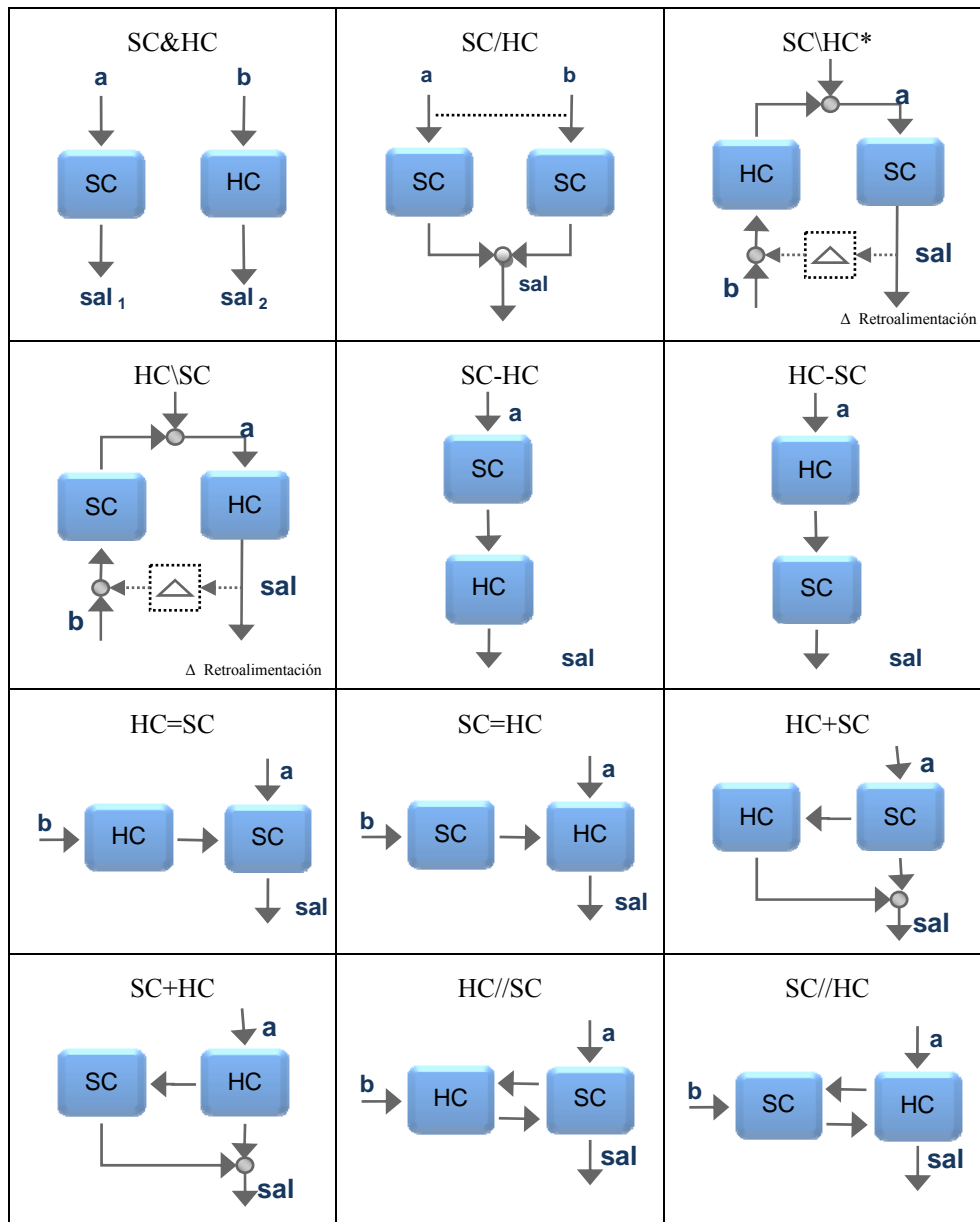
Existen diferentes formas de establecer una fusión [Ovaska 2006]. En la Tabla 2.6 se introducen 12 núcleos de categorías para la fusión de HC y SC, estos fueron definidos dado un análisis de un substancial número de aplicaciones. Así mismo, la Tabla 2.7, presenta las categorías según el grado de fusión y la Figura 2.15 los diagramas de flujo de cada categoría.

Tabla 2.6. Clasificación de los diferentes tipos de fusión HC y SC

No.	Notación	Grado de Fusión	Descripción
1	SC&HC	Bajo	SC y HC tienen un rol independiente, y no existe una conexión explícita entre ellos.
2	SC/HC	Moderado	SC y HC están conectados en paralelo, cualquier SC está complementando el comportamiento de un HC primario o viceversa.
3	SC\HC	Moderado	SC como primario con retroalimentación de HC
4	HC\SC	Moderado	HC como primario con retroalimentación de SC
5	SC-HC	Moderado	SC está en cascada con HC
6	HC-SC	Moderado	HC está en cascada con SC
7	HC=SC	Alto/Muy Alto	HC asiste en el diseño o configuración de SC
8	SC=HC	Alto/Muy Alto	SC asiste en el diseño o configuración de HC
9	HC+SC	Muy Alto	HC usa datos internos de SC. La salida de HC incrementa a SC
10	SC+HC	Muy Alto	SC usa datos internos de HC. La salida de SC incrementa a HC
11	HC//SC	Muy Alto	Estructuras tipo maestro-esclavo. Son extraídos datos de SC (maestro), procesándolos con HC (esclavo) y retroalimentado en SC.
12	SC//HC	Muy Alto	Estructuras tipo maestro-esclavo. Son extraídos datos de HC (maestro), procesándolos con SC (esclavo) y retroalimentado en HC.

Tabla 2.7. Definición de Grados de Fusión

Grado de Fusión	Definición Cualitativa
Bajo	SC y HC están en uso simultáneo o alternativo sin conexiones explícitas.
Moderado	Conexiones en entrada y salida sólo del nivel de la señal.
Alto	SC o HC usados en la determinación de valores de parámetros internos.
Muy Alto	HC o SC usados para la determinación de la estructura interna o la generación/manipulación interna de datos.



Donde *a* y *b* representan entradas y *sal* la salida

Figura 2.15. Diversas formas de fusión HC y SC

2.4. Límites para Bin Packing

Cuando se tiene un problema tan complejo como BPP, a medida que crece el tamaño del problema es menos factible conocer cual es el valor óptimo para una instancia dada. Una forma de validar la calidad de las soluciones es establecer límites inferiores a lo que podría ser la mejor solución y de esta forma obtener un resultado. El presente estudio muestra algunos límites inferiores utilizados para el problema de empaclado de objetos.

2.4.1. Límite Inferior L_1

Está basado en la relajación de la propiedad de indivisibilidad de un objeto (expresión 2.3), esto permite que un objeto pueda ser dividido para empaquetarse en diversos contenedores [Martello 1990a].

$$L_1 = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{c} \right\rceil \quad (2.3)$$

El límite L_1 representa el menor espacio para acomodar todo los objetos. Cuando los objetos son relativamente pequeños con respecto de la capacidad del contenedor, es muy fácil obtener este límite como solución de la instancia. L_1 también es conocido como el óptimo teórico.

2.4.2. Límite Inferior L_2

Dada una instancia I de BPP, y un entero α , $0 \leq \alpha \leq c/2$, calcular:

$$\begin{aligned} J_1 &= \{j \in N : s_j > c - \alpha\} & N &= \{0, 2, \dots, n\} \\ J_2 &= \{j \in N : c - \alpha \geq s_j > c/2\} \\ J_3 &= \{j \in N : c/2 \geq s_j \geq \alpha\} \\ L(\alpha) &= |J_1| + |J_2| + \max \left(0, \left\lceil \frac{\sum_{j \in J_3} s_j - (|J_2|c - \sum_{j \in J_2} s_j)}{c} \right\rceil \right) \\ L_2 &= \max \{L(\alpha) : 0 \leq \alpha \leq c/2, \alpha \text{ int}\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

El valor L_2 representa un límite inferior para encontrar una solución óptima $z(I)$ [Martello 1990a].

Para ejemplificar el cálculo de L_2 se utiliza la instancia de BPP definida por:

N	9
C	100
S	70 60 50 33 33 33 11 7 3

Una solución óptima requiere 4 contenedores para el conjunto de objetos:

Objetos	1,7,8,9	2,4	3,5	6
Acumulado en el Contenedor	91	93	83	33

Con el propósito de determinar L_2 se calcula $L(\alpha)$ con todos los valores de α entre 0 y $c/2$:

$$L(50) = 2 + 0 + \max\left(0, \lceil (50 - 0) / 100 \rceil\right) = 3$$

$$L(33) = 1 + 1 + \max\left(0, \lceil (149 - 40) / 100 \rceil\right) = 4$$

$$L(11) = 0 + 2 + \max\left(0, \lceil (160 - 70) / 100 \rceil\right) = 3$$

$$L(7) = 0 + 2 + \max\left(0, \lceil (167 - 70) / 100 \rceil\right) = 3$$

$$L(3) = 0 + 2 + \max\left(0, \lceil (170 - 70) / 100 \rceil\right) = 3$$

El máximo valor obtenido de $L(\alpha)$ es 4. Por lo tanto $L_2 = 4$. Con esta información, los cuatro objetos más grandes se pueden colocar en contenedores independientes y distribuir el resto con algún algoritmo determinístico.

2.4.3. Límite Inferior L_3

Para determinar el límite inferior L_3 de BPP, se requiere del uso del procedimiento de reducción denominado MTRP descrito a continuación.

MTRP. Un procedimiento genérico para reducir el tamaño de una instancia de BPP podría enumerar todos los conjuntos viables, encontrar un conjunto F que domine todos los demás, atribuir los objetos de F a un nuevo contenedor y eliminar los objetos del conjunto total de la instancia. Sin embargo verificar todas las posibilidades sería impráctico. El procedimiento *MTRP* se limita a buscar un conjunto viable de cardinalidades no mayor a tres y evita enumeraciones inútiles. Los objetos son considerados en orden decreciente y para cada objeto j , se busca un conjunto F factible tal que $j \in F$ con $|F| \leq 3$, domine todos los posibles conjuntos factibles que pudiesen contener j . Siempre que un conjunto es encontrado, los objetos correspondientes son asignados al nuevo contenedor y la búsqueda continúa con el resto de los objetos [Martello 1990a].

Sea I una instancia original de BPP, cuando *MTRP* es aplicado a una instancia I , se obtiene un número de contenedores b_1 , y el sobrante de objetos no reducidos son considerados como la instancia residual I_1 correspondiente.

El límite L_2 cuando es aplicado a la instancia I_1 produce el límite $L_1' = b_1 + L_2(I_1)$ para la instancia original. I_1 es relajada a través del reacomodo de los objetos más ligeros y *MTRP* es aplicado a esta instancia relajada, resultando en b_2 contenedores fijos y un nuevo problema residual I_2 . Posteriormente, $L_2' = b_1 + b_2 + L_2(I_2)$ es un límite inferior del problema original.

Este procedimiento se repite hasta que la instancia residual quede vacía. El límite inferior $L_k' = b_1 + b_2 + \dots + b_k + L_2(I_k)$ es generado en la etapa k . Entonces, $L_3 = \max \{L_1', L_2', \dots, L_k'\}$ es un límite inferior válido para la instancia original.

En particular, si todos los objetos hubieran sido colocados en algún contenedor, el procedimiento termina, entonces la solución heurística obtenida es óptima. Dado que la complejidad del *MTRP* es $O(n^2)$ la complejidad del cálculo de L_3 es $O(n^3)$.

El siguiente ejemplo fue tomado de [Martello 1990a]. Dada la instancia:

N	14													
C	100													
S	99	94	79	64	50	46	43	37	32	19	18	7	6	3

En la primera ejecución del MTRP se generan dos contenedores:

$$F=\{1\} \text{ y } F=\{2, 13\}$$

$$z = 2; \text{ solución} = (1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$$

$$\text{De la instancia residual } L_2=4, L_3= z + L_2= 6$$

Para la segunda ejecución de MTRP se generan cinco contenedores más:

$$F=\{3,10\}, F=\{4,9\}, F=\{6,5\}, F=\{7,8,11\}, F=\{12\}$$

$$z = 7; \text{ solución} = (1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 4, 3, 6, 7, 2, 0)$$

De la instancia residual $L_2=0$ y $L_3= z + L_2= 7$ quedando sólo el objeto más pequeño fácil de colocar en algún contenedor.

Capítulo 3

Estado del Arte

Diversos investigadores en el área de las ciencias computacionales se han dado a la tarea de dar soluciones prácticas a implementaciones reales relacionadas con el problema BPP con resultados prometedores. En el presente capítulo, los trabajos relacionados han sido divididos en dos grandes secciones; aquellos referentes a BPP clásico de una dimensión que en su mayoría son algoritmos metaheurísticos híbridos, y las investigaciones que contemplan las variantes del problema.

3.1. Estado del arte de BPP1D

Actualmente la hibridación de algoritmos metaheurísticos adquiere popularidad, pues el enfoque combinado se considera necesario para resolver problemas actuales y futuros del mundo real. Tomando como base que para resolver un problema es necesario resolver primero una simplificación de la misma, a continuación se muestra un estudio de BPP1D.

3.1.1. Trabajos Relacionados

Muchos autores han trabajado con BPP1D, algunos de los más sobresalientes son descritos en este apartado (en su mayoría con enfoque híbridos). A manera de ejemplo, la Tabla 3.1 identifica el tipo de técnica de hibridación utilizada en algunos de los trabajos analizados.

El algoritmo aproximado MTP introducido en [Martello 1990a] está basado en el Criterio de Dominación descrito en el capítulo 2. Este método utiliza el algoritmo FFD para inicializar la solución. Con base en los criterios de límites L_2 y L_3 se busca reducir el tamaño de la instancia. Posteriormente se utilizan algoritmos como BFD y WFD (Worst Fit Decreasing, contrario a BFD) produciéndose otras alternativas que pudiesen alejarse del óptimo pero que a larga benefician la solución. En [Falkenauer 1996] se realiza una comparativa con 160 casos estándar [Library_BOR], resultando superior el segundo.

El híbrido HGGA propuesto en [Falkenauer 1996], conjunta un algoritmo genético de agrupación (GGA), modificado para satisfacer problemas de agrupamiento; y un método de optimización local inspirado en criterios de dominación [Martello 1990a]. Los problemas de agrupación son aquellos donde el objetivo es encontrar una buena partición de un conjunto, o un buen agrupamiento de los miembros del conjunto, tal es el caso de BPP. Los experimentos son realizados con 160 instancias [Library_BOR] de las cuales en siete de ellas no fue posible alcanzar el óptimo teórico (u120 08 y 19; u250 07, 12, y 13; t_60 07 y 18). Sin embargo se obtienen mejores soluciones y en menor tiempo que el MTP propuesto en [Martello 1990a].

Un procedimiento de mejora denominado HI-BP, para BPP, es desarrollado por Alvim [Alvim 2004]. Consta de tres fases: construcción, redistribución y mejora. Durante la fase de construcción genera soluciones inviables mediante modificaciones a algoritmos deterministas como BFD. En la redistribución trata de eliminar la inviabilidad resolviendo problemas contenidos en BPP (*Number Partitioning Problem, NPP* y *Subset Sum Problem, SSP*) mediante el equilibrio y desequilibrio de pesos de contenedores. La mejora es realizada mediante búsqueda tabú. Como resultado, más del 95% de las instancias son resueltas en la redistribución y el criterio de paro se establece a través de límites superiores e inferiores.

Ducatelle desarrolla en [Ducatelle 2001] un algoritmo híbrido de ACO, combinado con una estrategia de mejora mediante búsqueda local, basada nuevamente en el criterio de dominación. La solución de cada hormiga se mejora moviendo algunos objetos alrededor, y las soluciones mejoradas se usan para actualizar la matriz de feromonas. Para problemas grandes, ACO con búsqueda local no siempre encuentra la solución señalada en [Falkenauer 1996], sin embargo, siempre supera al algoritmo puro de ACO.

Kos describe BPPCC en [Kos 1999]. La variante es abordada a través de un algoritmo genético híbrido (VBPP) el cual inicia con un pre-procesamiento de Optimización con información sobre el estado del inventario, y añadiendo una segunda optimización local para reempaquetar elementos eliminados en fases de cruzamiento y mutación. Como parte de la mutación elimina los contenedores menos aptos del cromosoma. Dicho algoritmo obtiene soluciones óptimas para instancias de tamaño 120 (incluyendo 2 en las que en [Falkenauer 1996] se dice que no tenían óptimo), esto sin alcanzar el número máximo de generaciones.

Scholl muestra el desarrollo del método denominado BISON en [Scholl 1996], éste es un procedimiento híbrido exacto donde combina la bien conocida metaheurística de búsqueda tabú con el procedimiento *Branch and Bound* y la incorporación de nuevos límites además del uso de la reducción del problema por medio de MTRP [Martello 1990a] y de algoritmos deterministas tales como NF, FF, BF y WF. El desempeño del algoritmo es mostrado a través de las instancias de la librería [Library_OR] obteniendo la mejor solución conocida al momento para dichas instancias.

A través de una Red Neuronal denominada AugNN (Augmented Neural Networks) es resuelto BPP en [Kasap 2004]. El procedimiento combina reglas de prioridad y un aprendizaje iterativo por medio de la red Neuronal. El metaheurístico combinado con una heurística que explota la estructura del problema y el uso de límites inferiores y superiores, es utilizada para dar solución a casos BPP difíciles tales como los de la librería [Library_OR], dividiéndolos en subproblemas. La configuración de la experimentación es dada con 2500 épocas y un radio de aprendizaje de 0.0005 y un factor de reforzamiento de 3.

Tabla 3.1 Estado del Arte de Algoritmos para BPP1D

Algoritmo	Tipo de Híbrido		Características
	Alto-Bajo Nivel	Fusión HC-SC	
MTP [Martello 1990a]	Alto Nivel Coevolucionado	HC	Criterio de Dominación con uso de algoritmos deterministas a través de criterios de límites
HGGA [Falkenauer 1996]	Global de Bajo Nivel Coevolucionado	HC+SC	Algoritmo Genético de agrupación y Optimización local por el criterio de dominación. Población inicial mediante FFD
HI-BP [Alvim 2004]	Global de Bajo Nivel Coevolucionado	SC/HC	Construcción, redistribución y mejora mediante Tabú. Tratamiento de infactibilidad.
HACO [Ducatelle 2001]	Alto Nivel con Relevó	HC//SC	ACO con optimización Local por el criterio de dominación
VBPP [Kos 1999]	Bajo Nivel con Relevó	HC+SC	Algoritmo Genético de agrupación además de aplicar un preprocesamiento de Optimización con información sobre el estado del inventario.

La Tabla 3.2 muestra una especificación de los parámetros de configuración para algunos de los trabajos anteriormente descritos..

Tabla 3.2 Configuración de parámetros de Algoritmos para BPP1D

Inst.	MTP	HGGA					HI-BP		HACO		VBPP		
	Iter.	Gen.	Pob.	% Cruza	% Muta	% Inv.	Iter. Redist.	Max Tabu	Gen.	Pob.	Gen.	Pob.	% Muta
u120	1500000	2000	100	50%	33%	25%	100	4000	2000	100	2000	67	10
u250	1500000	2000	100	50%	33%	25%	100	4000	2000	100	2000	67	10
u500	1500000	5000	100	50%	33%	25%	100	4000	5000	100	---	---	---
u1000	1500000	5000	100	50%	33%	25%	100	4000	5000	100	---	---	---
t60	1500000	1000	100	50%	33%	25%	100	4000	1000	100	---	---	---
t120	1500000	1000	100	50%	33%	25%	100	4000	1000	100	---	---	---
t249	1500000	2000	100	50%	33%	25%	100	4000	2000	100	---	---	---
t501	1500000	2000	100	50%	33%	25%	100	4000	2000	100	---	---	---

3.1.2. Análisis de Estado del Arte BPP1D

A través del estudio del estado del arte es posible ilustrar el campo de acción de la presente investigación, a continuación se estipulan las principales conclusiones obtenidas mediante el análisis.

1. Los estudios de Bin Packing con enfoques evolutivos son los más comunes, razón por la cual deben considerarse dentro de esta investigación como prometedores, sin embargo, en trabajos previos publicados en [Nieto 2006] se han analizados algunos de ellos como lo son los algoritmos genéticos observándose que las estrategias clásicas del mismo son insuficientes para problemas de la complejidad de BPP, requiriéndose con ello un estudio más amplio sobre los mismos.
2. Un punto en común dentro de las investigaciones es el uso del criterio de dominación propuesto por [Martello 1990b], por lo cual se establece como punto importante dentro de la resolución en este proyecto.
3. El enfoque coevolutivo domina sobre los demás tipos de hibridación estudiadas bajo el enfoque de alto y bajo nivel. En cuanto al enfoque de fusión HC-SC no existe una clara dominación por algún tipo, sin embargo si lo hay con el grado de fusión pues en su mayoría es muy alto.
4. Los resultados muestran que los algoritmos con resultados más prometedores son los publicados en [Alvim 2004], [Falkenauer 1996] y [Scholl], planteando con ello la posibilidad de utilizar parte de éstos enfoques analizando aquellos detalles como lo son el uso de búsqueda tabú, algoritmos deterministas y modificaciones de los mismos, así como la oportunidad de aplicar límites de la literatura científica con resultados prometedores.
5. Las configuraciones de los parámetros de los algoritmos son elevadas por lo que una configuración más baja representa un área de oportunidad.

3.2. Estado del arte de las variantes de BPP

La complejidad del sistema de transporte abordado en este proyecto no permite resolver el problema con el BPP clásico, por lo cual se requiere un análisis de las variantes de BPP.

3.2.1. Variantes BPP de la Literatura

Se realizó un estudio de las propuestas de diversos autores sobre las variantes identificadas en el problema de transporte. La Tabla 3.3 resume los puntos clave de cada investigación.

Tabla 3.3 Estado del Arte de BPP y sus variantes

Autor	Variantes	Características	Relacionado con:
Epstein [Epstein 2005]	BPPCC BPPcC BPPOn	Enfoque determinista que clasifica los objetos en sub-intervalos k . Análisis teórico del desempeño del algoritmo encontrando radios competitivos para valores pequeños de k .	No se establece relación con el mundo real
Chan , Chin, Ye, Zhang, Zhang [Chan 2005]	BPPFO BPPON	Basado en NF y FF . Los objetos son organizados en clases en función de su fragilidad. El desempeño teórico es $\Theta(n \log n)$.	Asignación de canales en redes de celulares (canales limitados para evitar fallas en la señal)
Kang, Park [Kang 2003]	BPPCC	Algoritmos voraces iterativos basados en los algoritmos deterministas FFD y BFD . Mediante un Análisis Teórico se concluye que se pueden obtener soluciones óptimas cuando objetos y contenedores tienen las mismas restricciones de divisibilidad.	Modo de transmisión asíncrona en redes con diferentes anchos de banda pero en tamaños divisibles.
Kos, Duhovnik [Kos 1999]	BPPCC	Algoritmo Genético de Agrupación. Se realizó una experimentación con BPP clásico.	Disminución de desperdicio de material en cortes de piezas de longitud variable.

Autor	Variantes	Características	Relacionado con:
Verweij [Verweij 1996]	MDBPP, BPPOn	Resolución de un solo contenedor a la vez, reacomodos con la visita de un nuevo cliente y uso de un esquema completo de aproximación polinomial para <i>subset-sum problem</i>	Distribución de mercancía para múltiples clientes
Manyem [Manyem 2000]	BPPCC, BPPOn, BPPFO*	Algoritmo determinista, basado en modificaciones de NF y FF dando una prioridad inferior a objetos más pesados y creando grupos para diferentes tamaños de contenedor.	Industria del transporte

* Variante contemplada parcialmente mediante la localización de objetos pesados en la parte inferior del vehículo

3.2.2. Variantes BPP del Problema de Transporte de Productos

Una alternativa para incorporar las variantes de BPP en un algoritmo de solución es penalizar la función objetivo cuando las restricciones impuestas por las variantes no sean cumplidas. De manera natural el algoritmo evolucionará hacia soluciones factibles. Por lo anterior, esta tesis se enfoca en el desarrollo de un algoritmo para BPPID competitivo y en el estudio de sus variantes. La Tabla 3.4 muestra la descripción operativa de las variantes identificadas en el caso de estudio.

Tabla 3.4. Relación de variantes con el Problema de Transporte

Variante	Descripción Operativa
BPPCC	Los contenedores pueden tener diferentes alturas y por consecuencia distinta capacidad de carga.
BPPcC	El máximo número de tarimas que pueden apilarse en un contenedor esta acotado.
BPPMCC*	Existe un mínimo de carga en cada camión para ser considerado parte de la solución pues el utilizar vehículo con poca carga puede representar gasto innecesario en lugar de un beneficio.
MDBPP	Existen distintos puntos de descarga en una misma ruta por lo que el producto debe ser organizado con base en el orden de visita de los clientes, es decir al descargar las tarimas de un cliente dado en su tiempo de visita no debe ser necesario mover alguna tarima que no pertenezca a tal cliente.

Variante	Descripción Operativa
BPPOn	A causa de que la asignación depende del cliente elegido a visitar en al ruta, no es posible conocer desde un principio todo el producto a distribuir en un vehículo.
	Cada tarima ** sólo puede incluir producto del pedido de un cliente.
	Dentro de una tarima las camas *** del mismo producto deben permanecer juntas.
BPPSFO	Cada producto tiene una cantidad de peso soportado que no debe ser sobrepasada para evitar darlo.
	Peso total de la carga debe ser menor o igual al soportado por el vehículo.
	Toda tarima del contenedor soporta el peso de las superiores a ella. Las camas pueden apilarse si y solo si para toda cama el peso de la caja más pesada acumulado de cada cama superior es menor o igual que su peso soportado.
	La carga total transportada por un vehículo no debe superar el peso máximo soportado por él sin ejes neumáticos más el producto del número de ejes neumáticos por el peso extra por eje.
	Los vehículos deben acatar las normas de la SCT cuando transitan por las diferentes carreteras, dichas normas se refieren en general al peso máximo que una carretera soporta con base en las características físicas de un vehículo.

* Variante no tipificada en la literatura y acuñada en esta tesis.

** Unidad de asignación que surge de la necesidad de control del producto dentro del almacén y para facilitar su manejo.

*** Constituida por un conjunto de cajas ordenadas de tal manera que su largo y ancho se ajuste al del contenedor del camión, lo cual permiten convertir tres dimensiones en una sola dimensión.

Capítulo 4

Metodología de solución

En este capítulo se describe la metodología utilizada para la solución del problema de Bin Packing mediante la hibridación de diversos algoritmos metaheurísticos entre los que destaca el uso de Algoritmos Genéticos.

4.1. Formalización de Variantes de Bin Packing

Con base al objetivo propuesto se desarrolló un análisis del estado del arte de Bin Packing buscando con ello identificar y definir formalmente las variantes del mismo inmersas en el problema de transportación (ver sección 3.2.2).

Producto de este análisis se identificaron seis variantes de las cuales la última (BPPMCC) no estaba tipificada como tal y fue tipificada en esta tesis. Para la definición formal se creó un modelo matemático con variantes de BPP (ver Anexo A). Cada restricción del modelo implica una condición adicional dentro del algoritmo para BPP clásico. La incorporación de condiciones altamente restrictivas puede generar dificultad en la generación de soluciones factibles.

Una alternativa prometedora es penalizar la función objetivo cuando las restricciones impuestas por las variantes no sean cumplidas [Cruz 1999]. De manera natural el algoritmo evolucionará hacia soluciones factibles.

4.2. Recopilación, estandarización y generación de Casos de Prueba

Dado que el análisis experimental representa una excelente estrategia para medir el desempeño de un algoritmo, esto debido al reconocimiento de que el análisis teórico es insuficiente para analizar el rendimiento de los algoritmos del mundo real [Johnson 2002], se requirió de la recopilación de casos de prueba estándar que fueran representativos de diversas situaciones encontradas en el mundo real.

Se recopilaron 1,680 casos estándar que serán descritos en el capítulo de experimentación. Éstos fueron tomados de sitios de Internet reconocidos como la biblioteca de Investigación de Operaciones de Beasley [Library_BOR] y la biblioteca de Investigación de Operaciones de la Universidad Tecnológica de Darmstadt [Library_OR] entre otros. Debido a las diferencias entre los formatos de ambas librerías se estandarizó el formato según el ejemplo mostrado en la Figura 4.1.

```
//Number of items
60
//Bin Capacity
100.00
//Known Best Solution
20
//Weight of Item
36.60
26.80
...
27.50
31.50
```

Figura 4.1. Ejemplo del Formato de un Caso Estándar.

Así mismo, buscando una mayor representación de la población fue necesaria la creación de generadores de casos aleatorios. 2430 casos fueron generados combinando técnicas de muestreo de encuestas y reducción de la varianza detalladas en [Cruz 2004] donde los parámetros de cada caso fueron obtenidos a partir de las características más sobresalientes del problema de BPP.

4.3. Elección de un Algoritmo Metaheurístico Base

Diversas razones llevaron a tomar como base de hibridación la Optimización de una Colonia de Hormigas y los Algoritmos Genéticos. Como primer punto, en [Birattari 2001] se propone la clasificación de algoritmos metaheurísticos de acuerdo a ciertas características. La Tabla 4.1 resume dichas características para los algoritmos descritos en la sección 2.3.2. Se puede observar que algoritmos como GA y ACO reúnen un mayor número de esas características.

Tabla 4.1. Características de Algoritmos Metaheurísticos

Característica \ Algoritmo	SA	TS	GA	ACO
Siguen una trayectoria de búsqueda	✓	✓		
Salto en el espacio de búsqueda			✓	✓
Basado en la Población			✓	✓
Uso de Memoria		✓	✓*	✓
Múltiples Vecinos			✓*	
Inspirados en la Naturaleza	✓		✓	✓

* Característica parcialmente incluida

Un segundo factor fue derivado del análisis del estado del arte de BPP clásico. ACO muestra buenos resultados e inclusive óptimos en [Ducatelle 2001]. Resultados similares se obtienen en el GA propuesto en [Falkenauer 1992, Kos 1999].

En resumen, la elección de ACO y GA se debió: al mayor número de características mostrado y la facilidad para conjuntar diversos metaheurísticos mediante alguna de las categorías de hibridación propuestas [Talbi 2002, Ovaska 2006].

Se implementaron los algoritmos de ACO y GA propuestos en [Ducatelle 2001] y [Falkenauer 1992] respectivamente. La Tabla 4.2 muestra los resultados para cinco conjuntos de instancias de [Library_BOR, Library_OR]. La segunda columna muestra el número de instancias de cada conjunto de casos y la tercera el número de instancias evaluadas de cada grupo. En muchas instancias, la experimentación con ACO no fue concluida por el alto costo de procesamiento requerido. Con respecto al tiempo, GA es una mejor opción. La solución encontrada es reportada con el radio promedio (razón entre el número de contenedores obtenidos y el número óptimo de contenedores). GA mostró un radio ligeramente mayor al de ACO, lo cual podría implicar que ACO es superior, sin embargo se desconoce la calidad de las instancias sin resolver.

Por lo anterior, y considerando que el tiempo computacional es un factor preponderante para las aplicaciones del mundo real, el algoritmo metaheurístico base elegido fue GA. Además, GA se percibe como un algoritmo más prometedor para la hibridación.

Tabla 4.2. Primera evaluación para ACO y GA

Tipo de Instancia	Total de Instancias	Instancias Evaluadas	GA		ACO	
			Tiempo	Radio	Tiempo	Radio
Uniform	80	40	0.276	1.049	312.782	1.003
Triplets	80	80	0.485	1.077	16506.470	1.012
Hard	10	9	5.321	1.063	11049.010	1.001
NCW	720	632	0.818	1.015	9775.868	1.005
NWBR	480	389	0.057	1.050	279.768	1.010
Total	1370	1150	1.391	1.051	7584.779	1.006

4.4. Incorporación de Técnicas de Hibridación (Algoritmo Genético Híbrido)

La base del método propuesto es un algoritmo genético, sin embargo, el trabajar BPP con estrategias clásicas de GA, lleva a resultados factibles pero lejanos al óptimo tal como se enuncia en [Falkenauer 1996]. En [Nieto 2006] se da evidencia experimental de este hecho, motivando el desarrollo de un algoritmo genético híbrido.

4.4.1. Adaptación de Técnicas de la Literatura

Representación cromosómica basada en bloques

El presente trabajo ha tomado la estrategia cromosómica propuesta por [Falkenauer 1996] donde en lugar de cruzarse objetos cambiando estos de contenedor, son contenedores completos los que son heredados en el cruzamiento, y contenedores completos son eliminados en fases de mutación, consiguiendo de esta forma, un esquema de codificación relevante para problemas de agrupación basado en la construcción de bloques.

Algoritmos deterministas

Algoritmos deterministas como BFD, FFD, WFD y DB3 (ver sección 4.4.3) fueron seleccionados para incorporarse al algoritmo GA mediante hibridación. Con estos algoritmos se crean nuevos individuos y se maneja la inviabilidad generada por las operaciones de bloque.

Límites

En la sección 2.4 se describió el concepto de Límite como un número inicial de contenedores cercanos al óptimo. En esta tesis se incorporan los métodos propuestos en [Alvim 2004, Martello 1990a] para el cálculo de límites. El valor límite se utiliza para delimitar el espacio de la búsqueda heurística y como criterio de paro de GA.

4.4.2. Algoritmo genético propuesto

La Figura 4.2 muestra la arquitectura general del algoritmo genético en el cual se centra el proceso, además, se observa como intervienen dos enfoques de hibridación en el proceso. El algoritmo híbrido propuesto es una fusión de *Hard Computing* (HC) y *Soft Computing* (SC) [Ovaska 2006]. El proceso recae en el GA que representa SC. El uso de límites en la generación de individuos y las estrategias de reparación en fases de cruzamiento y mutación implican lógica matemática considerada como HC.

Por otro lado, representa un algoritmo híbrido de bajo nivel al tener un algoritmo central del cual depende todo. A su vez, manifiesta *coevolución* al trabajar con una porción de la instancia en la reparación de individuos alterados en procesos de evolución y presenta un comportamiento *global* al utilizar diversas estrategias para la creación de la población [Talbi 2002].

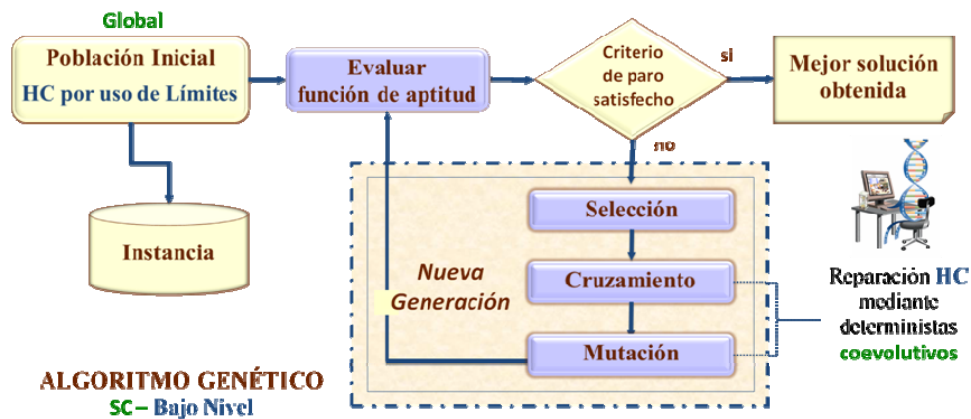


Figura 4.2. Algoritmo Genético

El Algoritmo 4.1 describe el procedimiento general; el proceso consta de generar una población para lo cual se generan un conjunto de individuos de forma determinista (FFD, BFD, FFDL, BFDL, WFDL y DB3BFD) y un conjunto mayor de individuos en forma no deterministas (1 individuo DB3BF aleatorio y diversos por BF Aleatorio) detallados en la sección 4.4.3 (5).

Después de la primera generación, la probabilidad de mantener al individuo de la generación previa es proporcional a su aptitud y a la generación de un número aleatorio (4-12). Dado un porcentaje y con base a la aptitud (13), se eligen mediante selección proporcional un conjunto de individuos para aplicarles los operadores evolutivos de cruzamiento y mutación (14-15), posteriormente se guarda la mejor solución de la población para después de un cierto número de generaciones se cuenta con aquel individuo más apto.

ALGORITMO GENÉTICO PARA BPP

```

1 Inicio
2   inicializar parámetros
3   para cada generación
4     para cada individuo
5       new_binsol=generar individuo
6       Calcula aptitud del individuo
7       si random[0-1) > 0.9
8         si fitness(new_binsol)>fitness(old_binsol)
9           old_binsol = new_binsol
10        fin si
11      fin si
12    fin para
13    Seleccionar individuos de forma proporcional
14    Cruzamiento por Agrupación
15    Mutación por Agrupación
16    Recalcular la aptitud de individuos
17    Busca la mejor solución
18  fin para
19 fin procedimiento

```

Algoritmo 4.1. Procedimiento General de AG

4.4.3. Procedimientos para construir la Población

Diversas técnicas para crear la población de individuos han sido implementadas, la estrategia FFD detallada en [Coffman 1997] de tipo determinístico permite generar un solo individuo. Para generar un conjunto de individuos se realizan variaciones al método, la diferencia radica en que los objetos no tienen un orden específico sino que son tomados de forma aleatoria (3), el Algoritmo 4.2 describe el método general.

CONSTRUIR INDIVIDUO

```

1 inicio
2   mientras existan objetos sin acomodar
3     Seleccionar aleatoriamente o en forma descendente
       un objeto
4     Colocar el objeto mediante alguna estrategia
       determinista
5   fin mientras
6 fin procedimiento

```

Algoritmo 4.2. Procedimiento para la construcción de Individuos mediante la conversión de Algoritmos Deterministas a no Deterministas

Sin embargo, parte fundamental del desarrollo de algoritmos genéticos es la construcción de buenos individuos, en [Martello 1990a] conjuntan el algoritmo BFD con el límite L_2 , como otro límite inferior (*lower bound* LB). La idea es retomada para implementar métodos de generación de individuos. El punto de partida es calcular un conjunto de límites propios del problema (ver sección 2.4), el mejor de ellos representará el límite LB (2). Posteriormente los LB objetos más grandes son colocados en contenedores independientes (4-6), para colocar el resto utilizando estrategias deterministas como FF, BF y WF (7). Buscando diversificación en la población algunas veces los objetos son seleccionados aleatoriamente y en otras en forma decreciente (Algoritmo 4.3).

CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB

```

1 inicio
2   Calcular el mejor LB
3   Ordenar objetos en forma descendente
4   para los primeros LB objetos
5     Colocar el objeto en un contenedor vacío
6   fin para
7   Llamar a la función Construir Individuo
8 fin procedimiento

```

Algoritmo 4.3. Procedimiento construir individuos utilizando el criterio del Límite

El uso de Límites, permite desde el inicio hacer uso del Criterio de Dominación abordado en [Martello 1990b], pues se están colocando al inicio los objetos más dominantes lo cual se traduce en un ahorro de tiempo.

Otro método incorporado para construir individuos toma como base el algoritmo DB3FD (Dual Best 3-Fit Decreasing) propuesto en [Alvim 2004], en donde dado un objeto en un contenedor se busca un par de objetos libres que llenen el contenedor. Aplicado a nuestros requerimientos (Algoritmo 4.4) se calculan un límite **LB** (2) para calcular un número inicial de contenedores (cercano al óptimo). Se realiza un intento por llenar los primeros **LB** contenedores con tres objetos (4-10). Para los objetos restantes se utiliza el Algoritmo 4.2 (11).

CONSTRUIR INDIVIDUO CON DB3 Y LB

```

1 Inicio
2   Calcular LB
3   Ordenar los objetos en forma decreciente
4   para los primeros LB contenedores
5     Seleccionar un objeto
6     Insertar un objeto en el contenedor
7     si 2 objetos libres llenan el contenedor
8       Insertar los objetos en el contenedor
9     fin si
10  fin para
12  Llamar a la función Construir Individuo
13 fin procedimiento

```

Algoritmo 4.4. Procedimiento para crear individuos utilizando L2 y ajuste de 3 objetos (DB3)

4.4.2. Procedimiento Cruzamiento por Agrupación

El cruzamiento por agrupación fue propuesto en [Falkenauer 1992]; en este tipo de estructura cromosómica los genes del individuo están representados por contenedores y no por objetos. Cruzar individuos implica que contenedores sean heredados de padres a hijos y aquellos contenedores que sobreviven de generación en generación se caracterizan por ser dominantes sobre otros. Como parte de la técnica que el propone, el nuevo individuo (hijo) está formado el 1er segmento de contenedores del primer padre, el 2do. Segmento de contenedores del segundo padre y el resto de contenedores del primer padre, eliminándose contenedores con objetos duplicados y reacomodándose con FFD.

Diversas experimentaciones fueron realizadas haciendo variaciones al método, se analizaron campos de oportunidad y se desarrolló la variante del cruzamiento esbozada en el Algoritmo 4.5.

CRUZAMIENTO POR AGRUPACIÓN

```

1 Inicio
2   Copiar contenedores del 1er. Segmento del 1er padre
3   Segmento = Mejor segmento evaluado del 2do padre
4   para cada contenedor de Segmento del 2do. Padre
5     si los objetos del contenedor actual no se
        encuentran en algún contenedor del hijo
6       Copiar al hijo el contenedor
7     sino
8       Liberar los objetos del contenedor actual que no
        pertenezcan a la solución
9     fin si
10  fin para
11  para cada contenedor del 3er. segmento del 1er. Padre
12    si los objetos del contenedor actual no se
        encuentran en algún contenedor del hijo
13      Copiar al hijo el contenedor
14    sino
15      Liberar los objetos del contenedor actual que no
        pertenezcan a la solución
16    fin si
17  fin para
18  si existen objetos libres
19    Empaquetar objetos libres utilizando BFD
21  fin si
22 fin procedimiento

```

Algoritmo 4.5. Procedimiento de Cruzamiento de individuos por Agrupación

El procedimiento se esboza en el Algoritmo 4.5, donde se incorpora en un hijo, la primer parte del primer padre (2), se evalúa parcialmente el llenado de los contenedores de cada segmento del segundo padre y el mejor segmento es tomado (3), incorporando al hijo aquel segmento de contenedores con mayor aptitud (4); así mismo, el tercer segmento del padre 1 es añadido a la solución del hijo (11); sin embargo, en los procesos (4-10) y (11-17) algunos objetos pueden ya pertenecer a contenedores del hijo, por lo cual se desechan contenedores y los objetos libres son reacomodados mediante el algoritmo determinista BFD (18-21).

4.4.3. Procedimiento Mutación por Agrupación

Retomando la metodología de [Falkenauer 1996], a diferencia de la mutación normal que cambia de contenedor algunos objetos, el Algoritmo 4.6 detalla la mutación por agrupación que elimina un porcentaje de los contenedores menos llenos (2-6). Los objetos liberados son distribuidos utilizando alguna estrategia de reacomodo (7). El utiliza FFD, en este proyecto se experimentó con BFD y una estrategia basada en el criterio de dominación propuesto en [Martello 1990b].

MUTACIÓN POR AGRUPACIÓN	
1	Inicio
2	para el numero de contenedores a vaciar
3	Buscar el contenedor con el menor peso acumulado
4	Eliminar el contenedor actual de la solución
5	Integrar como objetos libres los que pertenecían al contenedor
6	fin para
7	Empaquetar objetos libres mediante alguna estrategia de reacomodo
8	fin procedimiento

Algoritmo 4.6. Procedimiento de Mutación por Agrupación

4.4.4. Ejemplo de la Técnica Heurística GA

1. Generar una Población inicial de la cual tomaremos dos individuos.

- Primer Padre:

1,2	3	0,8	4	6,7,5	0.629
-----	---	-----	---	-------	-------

Aptitud
- Segundo Padre:

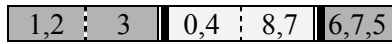
1,3	2,5	0,4	8,7	6	0.677
-----	-----	-----	-----	---	-------

Aptitud

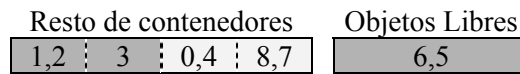
2. Elegir al azar dos puntos de corte en ambos padres.

1,2	3	0,8	4	6,7,5
1,3	2,5	0,4	8,7	6
0.521	0.782	0.232		

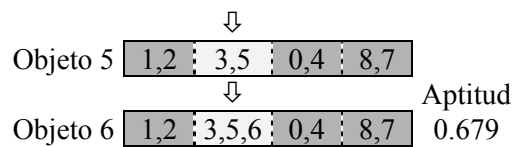
3. Generar el primer hijo intercambiando el segundo segmento del segundo padre por el segmento con mayor aptitud del segundo padre.



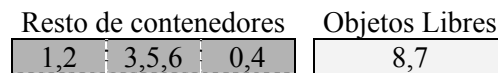
4. Eliminar contenedores que dupliquen objetos, y liberar los objetos no duplicados.



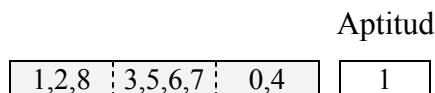
5. Utilizando BFD reacomodar los objetos libres.



6. La solución generada tiene mayor aptitud que la de sus progenitores, sin embargo, la estrategia de mutación podría mejorarla, para ello, se elimina el contenedor mas vacío, que por simplificación suponemos es el cuarto.



7. Mediante alguna estrategia de reacomodo, se distribuyen los objetos obteniendo como resultado una solución óptima con tres contenedores totalmente llenos.



4.5. Extensión del Algoritmo Base

La solución de problemas de optimización del mundo real, por su grado de complejidad, requiere algoritmos robustos que produzcan resultados de alta calidad con una mínima cantidad de recursos computacionales. En ese sentido, es importante iniciar el desarrollo de estos algoritmos, abordando el problema en su forma clásica.

Dado que para la solución de problemas clásicos la literatura provee algoritmos de referencia, es recomendable que los algoritmos propuestos sean competitivos con los del estado del arte. Por lo anterior, se espera que la extensión de un algoritmo que es competitivo con problemas clásicos, también lo sea con problemas multivariantes derivados del mismo. Para la extensión, se propone utilizar el modelo de programación lineal entera correspondiente. El conjunto de restricciones derivadas de las variantes del problema se convierten en condiciones que deben ser satisfechas durante la generación de soluciones factibles.

Para la evaluación del algoritmo metaheurístico extendido es indispensable contar con casos de prueba reales. Actualmente la empresa caso de estudio se encuentra en la etapa inicial de la generación de estos casos. Por lo que este trabajo sólo establece las bases para que futuras investigaciones realicen la extensión propuesta para el algoritmo básico.

4.6. Evaluación del Desempeño del Algoritmo

Actualmente, los investigadores han mostrado un enorme interés en el análisis experimental de algoritmos. Éste se debe a la insuficiencia del análisis teórico para evaluar el desempeño de los algoritmos del mundo real [Johnson 2002]. Para el diseño de experimentos computacionales que permitan producir conocimiento científico relevante se proponen una serie de principios [Barr 2001, Johnson 2002, McGeoch 1992, Moret 2003, Fraire 2005, Cruz 2004]. Entre estos se señala que se debe incluir experimentos vinculados con la literatura, capaces de reproducir y comparar con los de otras investigaciones, y que utilicen casos de prueba estándar. Una situación presentada con frecuencia es la falta de evidencia estadística que soporte las aseveraciones realizadas. La presentación de resultados no debe limitarse a la generación de las mejores soluciones, mas bien, implica un análisis exhaustivo del desempeño del algoritmo donde la consistencia en los resultados debe ser un factor preponderante en la evaluación de la calidad de los métodos de solución.

Por citar un ejemplo, si un algoritmo reporta valores óptimos, y al tratar de corroborarlo mediante experimentaciones consecutivas se obtiene una desviación estándar alta, podría considerarse que existe una mala codificación del algoritmo o que el método no es apropiado para el problema en cuestión. En [Cruz 2004], la información de desempeño de algoritmos heurísticos, se obtuvo calculando el desempeño promedio para cada caso, efectuando 30 corridas, por ser el tamaño de muestra mínimo aceptable [Ross 1999], del mismo modo es presentado en este trabajo mostrando evidencia estadística de la consistencia en los resultados.

Así mismo dos métricas para determinar la calidad de la solución: radio teórico que es la razón entre la solución obtenida y el óptimo teórico cuando no se conoce la solución óptima y radio absoluto cuando se conoce la solución óptima siendo la razón entre la solución obtenida y el valor óptimo. El óptimo teórico en Bin Packing, es un límite inferior del valor óptimo, y es igual a la suma de los tamaños de todos los objetos dividida por la capacidad del contenedor.

Capítulo 5

Experimentación y Análisis de Resultados

En el presente capítulo se evalúa el desempeño del algoritmo metaheurístico híbrido desarrollado. Para ello, se resuelven conjuntos de casos de prueba considerados como estándar y un grupo de casos aleatorios generados con base a características de complejidad del problema. Con ambos grupos se determina el desempeño general del algoritmo y de cada estrategia que lo conforma.

De igual manera, se busca la mejor combinación de estrategias en la hibridación, esto, mediante el desarrollo de un conjunto de experimentaciones en forma gradual sobre las diversas partes que conforman un algoritmo genético (generación de individuos, conservación de la población, selección de individuos, cruzamiento y mutación). En cada experimento se establece: objetivo, configuración de la experimentación, resultados y análisis de los mismos.

5.1. Ambiente Experimental

5.1.1. Infraestructura

El algoritmo fue desarrollado en lenguaje C y las experimentaciones fueron realizadas en una computadora personal con procesador Pentium D a 3 Ghz y 2GB de RAM. En cada experimento se realizaron 30 corridas del algoritmo y se aplicaron pruebas estadísticas para verificar su consistencia.

En los primeros experimentos la evaluación fue realizada a través del radio teórico (razón entre la solución obtenida y la mejor solución conocida). En los experimentos consistentes en definir tamaño de la población o porcentaje de cruza o muta, además del radio se incorpora el tiempo de procesamiento. En la experimentación final la validez de los resultados de la experimentación se determina con métodos estadísticos.

5.1.2. Descripción del conjunto de casos de prueba

Los primeros conjuntos de casos fueron tomados de diferentes librerías reconocidas por la comunidad científica, dichas instancias son consideradas como estándar.

Uniform [Library_OR]: consideradas en [Falkenauer 1996] e identificadas con la letra *u* debido a que su principal característica es que los pesos de los objetos están uniformemente distribuidos entre 20 y 100; la capacidad del contenedor es de 150 y existen casos con 120, 250, 500 y 1000 objetos.

Triplets [Library_OR]: inician con la letra *t*, también introducidas en [Falkenauer 1996], su nombre se debe a que las instancias fueron construidas con una solución óptima conocida de $n/3$ contenedores; el tamaño de las instancias es de 60, 120, 249 y 501, los pesos están distribuidos entre 25 y 50, mientras que el tamaño del contenedor es de 100.

Data Set 1 [Library_BOR]: Construida de forma similar que las usadas en [Martello 1990b]. Son un conjunto de 720 instancias denotadas con N-C-W por los datos que maneja: $n = 50, 100, 200, 500$, capacidad del contenedor $c = 100, 120, 150$ y pesos w generados uniformemente en intervalos de $[1,100]$, $[20,100]$ y $[30,100]$.

Data Set 2 [Library_BOR]: Denotadas por N-w-b-r. Cada sigla representa la configuración de un parámetro de entrada: número de objetos N con valores de 50, 100, 200 y 500; con un peso w medio deseado de $c/3, c/5, c/7, c/9$, y una desviación b máxima de dicho peso de 20%, 50% y 90%. Dada la combinación de características se cuenta con 48 sub-clases, cada una con 10 instancias todas con capacidad $c = 1000$.

Data Set 3 [Library_BOR]: Diez instancias mejor conocidas como hard; cada una con 200 objetos, una capacidad de contenedor de 100000 y pesos distribuidos entre 30000 y 35000.

was 1 [Schwerin 1997]: Formado por 100 instancias de capacidad 1000; cada una con 100 objetos cuyos pesos se encuentran distribuidos entre 150 y 200.

was 2 [Schwerin 1999]: 100 instancias con una capacidad de 1000; cada una con 120 objetos a ser distribuidos con pesos entre 150 y 200.

gau 1 [Wäscher 1996]: Conjunto de 17 instancias de características variadas. La capacidad de los contenedores es de 1000, el número de objetos varía de 57 a 239 mientras que los pesos se encuentran distribuidos entre 2 y 7332.

Hard28 [CaPaD]: Descritas en [Belov 2004], son las 28 instancias más difíciles propuestas por [Schoenfeld 2002]. El tamaño de los objetos varía entre 140 y 200. La capacidad del contenedor es 1000.

NIRUP (non-IRUP) [CaPaD]: Término derivado de *Integer Roud-UPK* [Belov 2005]. A través del límite inferior LB_{GG} y de la solución óptima OPT se considera instancia non-IRUP cuando $OPT - LB_{GG} \geq 1$.

Otras Instancias [CaPaD]: Conjuntos adicionales de instancias fueron encontradas en la librería CaPaD, sin embargo no se cuenta con suficiente información al respecto. Cinco de ellas son denominadas HART1CSP, cinco más con el nombre de 5xMTP0 y tres instancias 3xMTP0.

Stratus1 [Cruz 2005]: Como parte de la investigación se contemplan un conjunto de 2430 instancias generadas con un método de muestreo estratificado basado en características del problema de Bin Packing [Cruz 2004], por lo cual pueden considerarse representativas para la evaluación del desempeño del algoritmo. Estas instancias se denotan por *P-B-T-D-F* para hacer referencia a cinco indicadores de complejidad normalizados: *P* es el tamaño de problema, *B* el número de contenedores requeridos en la solución, *T* el tamaño promedio del objeto con respecto al tamaño del contenedor, *D* la dispersión de los tamaños de los objetos y *F* el número de objetos cuyo peso es factor de la capacidad del contenedor. Dado que para éstas instancias no existía una solución de referencia, se utilizaron algoritmos deterministas como base de comparación. Los resultados de ésta tesis se constituyen en la primera referencia completa para otros investigadores.

5.2. Experimento 1: Generación de Individuos

5.2.1. Objetivo

Evaluar el desempeño de un conjunto de técnicas para generación de individuos, buscando una población apta y diversificada desde el inicio de la metodología.

5.2.2. Configuración del Experimento

Tomando como base la generación de 30 individuos se desarrollaron 8 configuraciones del algoritmo. Cada versión es una combinación de ocho métodos para generar individuos. En la Tabla 5.1, el número en cada columna representa la cantidad de individuos generados con el método correspondiente. Tratando de que no hubiese intervención por parte de los métodos evolutivos, éstos no se contemplan en esta fase. Dichas versiones fueron establecidas en forma gradual observando los resultados de la prueba antecesora. Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, Data Set 2 y Data Set 3.

Tabla 5.1. Configuración: Generación de Individuos

Nombre	CONSTRUIR INDIVIDUO							FFD
	ALEATORIO				DECRECIENTE			
	SIN LB		CON LB=L ₁		DB3	DB3	BF	
FF	BF	FF	BF	BF	BF	BF		
Config. 1	30							
Config. 2		30						
Config. 3			30					
Config. 4				30				
Config. 5				28			1	1
Config. 6				27		1	1	1
Config. 7				27	1		1	1
Config. 8				26	1	1	1	1

5.2.3. Resultados

A través del radio teórico promedio para cada conjunto de instancias, es posible observar la mejora en el desempeño de la hibridación. La Tabla 5.2 muestra los valores promedio de cada conjunto y del total de instancias. En la Figura 5.1 se ilustra el comportamiento en cada conjunto de datos y la Figura 5.2 el decremento en el error.

Tabla 5.2. Radio Teórico Promedio: Generación de Individuos

Instancia	Config.1	Config.2	Config.3	Config.4	Config.5	Config.6	Config.7	Config.8
Set 1	1.02110	1.01257	1.01079	1.00962	1.00376	1.00369	1.00376	1.00352
Set 2	1.01697	1.01586	1.01419	1.01261	1.01113	1.01086	1.01021	1.00919
Set 3	1.05699	1.05878	1.06060	1.09259	1.06060	1.06060	1.06060	1.06060
T	1.08477	1.08352	1.06935	1.06919	1.06935	1.02686	1.02725	1.02333
U	1.03971	1.03555	1.03474	1.03199	1.01161	1.01161	1.01161	1.01161
Total	1.02472	1.01955	1.01741	1.01606	1.01104	1.00843	1.00826	1.00755

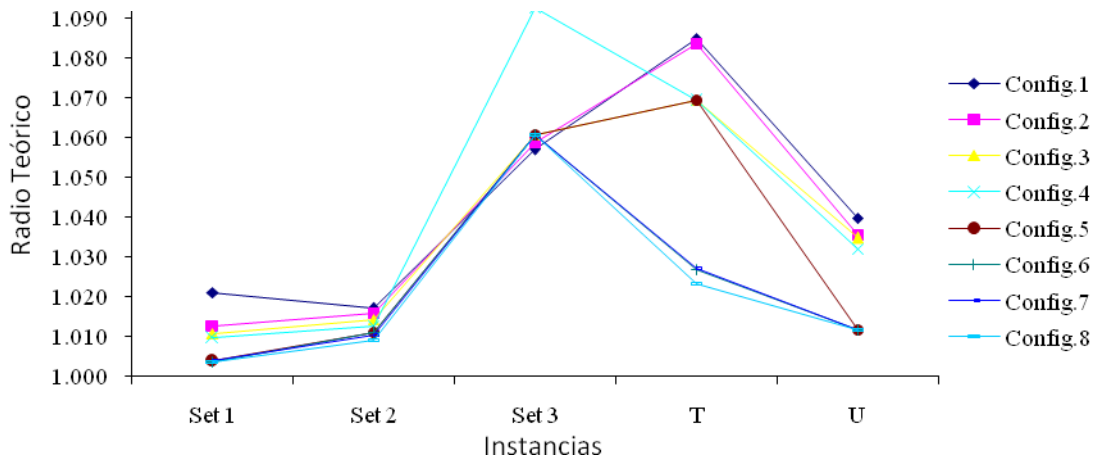


Figura 5.1. Comportamiento de cada conjunto de casos: Generación de Individuos

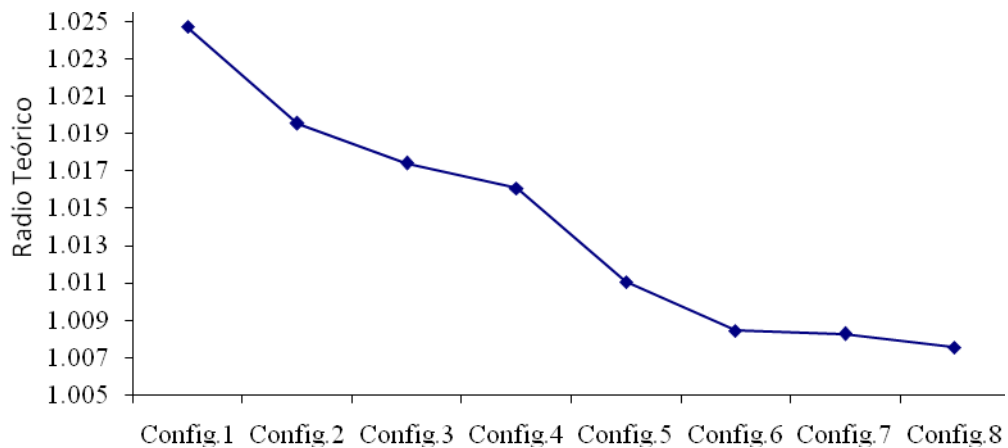


Figura 5.2. Reducción del Radio Promedio Teórico: Generación de Individuos

5.2.4. Análisis de Resultados

A través de los resultados es posible observar que la conjunción de estrategias deterministas con no deterministas mejora el desempeño del algoritmo. Los conjuntos Set 1, Set 2 y U son los más fáciles de resolver y el comportamiento de todas las configuraciones se mantiene relativamente constante.

Con respecto a los conjuntos Set 3 y T, se observó una notable deficiencia con la configuración Config.4; a diferencia de otros conjuntos que mejoran en gran medida el desempeño del algoritmo. Se tomó como base esta configuración y en Config.8 se incorporó otro mecanismo que pudiera contrarrestar la deficiencia observada. Dado que los pesos de los objetos de ambos conjuntos están caracterizados por representar aproximadamente la tercera parte de un contenedor, se anexó una estrategia (**CONTRUIR INDIVIDUO CON DB3 Y LB**) que intenta colocar tres objetos por contenedor. Esta estrategia se implementó en dos modos (avaro y determinista) para explotar la solución y en otro momento de forma aleatoria para explorar un poco más el espacio de búsqueda.

Concluyendo esta experimentación se seleccionó la configuración 8, que reduce el error de un 2.47% a un 0.76% .

5.3. Experimento 2: Conservación de la Población

5.3.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo con respecto a diferentes grados de supervivencia de individuos a través de la probabilidad de permanencia de los mismos en las nuevas generaciones.

5.3.2. Configuración del Experimento

A partir de la configuración Config.8 se establece una probabilidad (100, 95, 90 u 80%) para decidir si la aptitud del individuo será evaluada con respecto de su sucesor. Se consideran porcentajes altos con la finalidad de conservar una cantidad alta de individuos. Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, Data Set 2 y Data Set 3.

5.3.3. Resultados

La Tabla 5.3 y la Figura 5.3 muestran los valores de radio teórico promedio de cada conjunto con las diversas probabilidades aplicadas. Mientras que en la Figura 5.4 se observa un panorama más general de los resultados.

Tabla 5.3. Radio Teórico Promedio: Conservación de la Población

Instancia	100%	95%	90%	80%
Set 1	1.00245	1.00245	1.00258	1.00239
Set 2	1.00821	1.00793	1.00820	1.00850
Set 3	1.04816	1.04456	1.04634	1.04456
T	1.02333	1.02341	1.02333	1.02333
U	1.00889	1.00886	1.00907	1.00896
Total	1.00640	1.00628	1.00646	1.00644

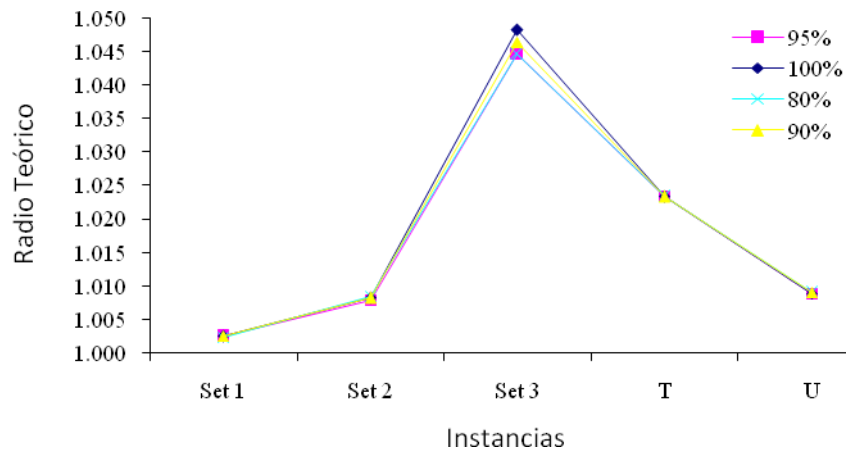


Figura 5.3. Comportamiento de cada conjunto de casos: Conservación de la Población

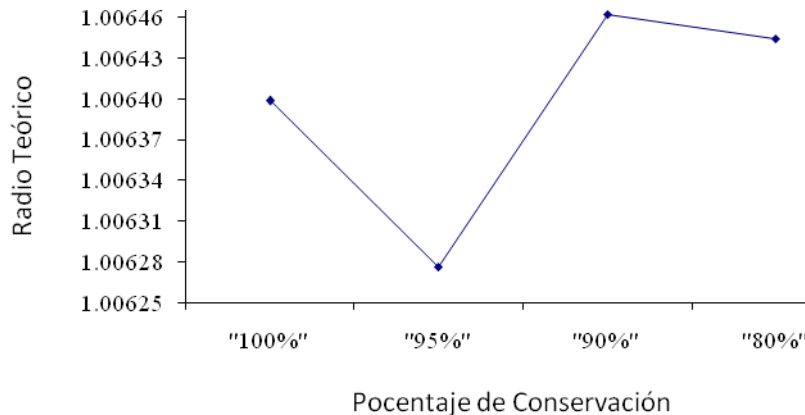


Figura 5.4. Reducción del Radio Promedio Teórico: Conservación de la Población

5.3.4. Análisis de Resultados

A través de la experimentación se puede observar que establecer una probabilidad total o una probabilidad muy alta de supervivencia de los individuos no produce mejoras importantes en la calidad de las soluciones. La hibridación concretada hasta este momento encuentra su estabilidad estableciendo una probabilidad de conservación de población del 95% disminuyendo el error de 0.76% a un 0.63%.

5.4. Experimento 3: Selección de Individuos

5.4.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo con respecto al tipo de selección de individuos.

5.4.2. Configuración del Experimento

Este experimento se configura con un porcentaje bajo de cruzamiento (20% con el fin de que no represente un factor preponderante en los resultados), 95% de probabilidad de conservación de la población y la configuración Config.8.

Se realizaron dos experimentaciones, la primera bajo el criterio de seleccionar proporcionalmente y la segunda mediante torneo de tamaño 3. Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, Data Set 2 y Data Set 3.

5.4.3. Resultados

El radio teórico de cada conjunto de casos se muestra en la Tabla 5.4. Las Figuras 5.5 y 5.6. presentan los resultados en forma gráfica.

Tabla 5.4. Radio Teórico Promedio: Selección de Individuos

Instancia	Proporcional	Torneo
Set 1	1.00190	1.00254
Set 2	1.00727	1.00822
Set 3	1.04280	1.04813
T	1.02348	1.02333
U	1.00750	1.00895
Total	1.00567	1.00645

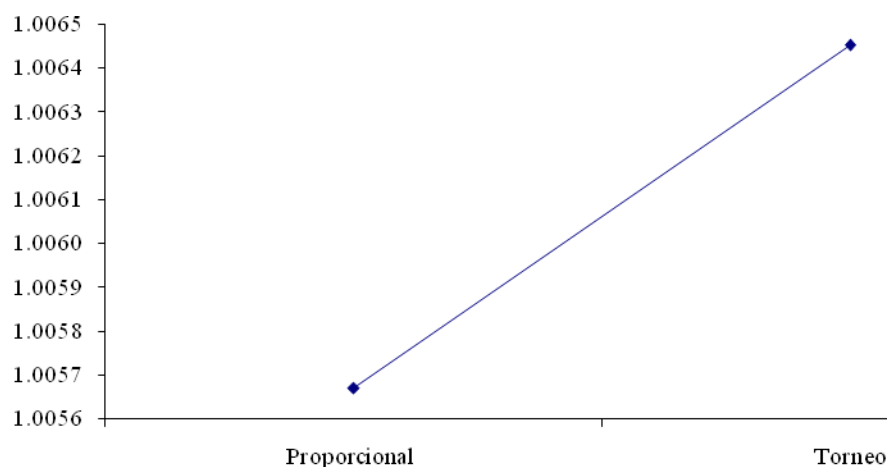


Figura 5.5. Reducción del Radio Promedio Teórico: Selección de Individuos

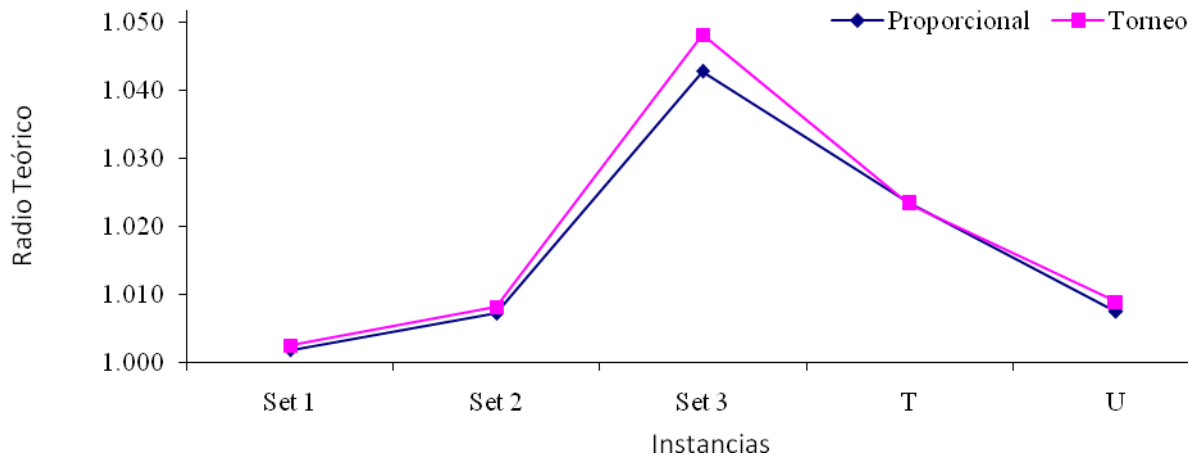


Figura 5.6. Comportamiento de cada conjunto de casos: Selección de Individuos

5.4.4. Análisis de Resultados

A excepción de los casos *T* el comportamiento del algoritmo se traduce en un mayor beneficio con selección proporcional. La reducción en el error fue de 0.63% a 0.57%

5.5. Experimento 4: Cruzamiento

5.5.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo con diferentes estrategias de selección de segmentos y bajo el criterio de cruzamiento por agrupación (gen = contenedor).

5.5.2. Configuración del Experimento

El algoritmo se configuró con un porcentaje bajo de cruzamiento (20%, posteriormente probado con otros porcentajes), 95% de probabilidad de conservación de la población,

Config.8 y selección proporcional. Se implementaron las variantes de cruce mostradas en la Tabla 5.5. Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, 2 y 3.

Tabla 5.5. Tipos de Cruzamiento

Nombre	1er. Corte	2do. Corte	3er. Corte
Cruza 1	Segmento 1, 1er. padre	Segmento 2, 2do. Padre	Segmentos 2 y 3, 1er. padre
Cruza 2	Segmento 1, 1er. padre	Segmento más apto, 2do. Padre	Segmentos 2 y 3, 1er. padre
Cruza 3	Segmento 1, 1er. padre	Segmento 2, 2do. Padre	Segmentos 3, 1er. Padre
Cruza 4	Segmento 1, 1er. padre	Segmento más apto, 2do. Padre	Segmentos 3, 1er. Padre

5.5.3. Resultados

A través de la Tabla 5.6 y las Figura 5.7 y 5.8 se puede observar la diferencia entre cada tipo de cruce.

Tabla 5.6. Radio Teórico Promedio: Cruzamiento

Instancia	Cruza 1	Cruza 2	Cruza 3	Cruza 4
Set 1	1.00190	1.00216	1.00157	1.00151
Set 2	1.00727	1.00729	1.00704	1.00697
Set 3	1.04280	1.04098	1.04280	1.04098
T	1.02348	1.02386	1.02393	1.02431
U	1.00750	1.00820	1.00725	1.00719
Totales	1.00567	1.00586	1.00543	1.00537

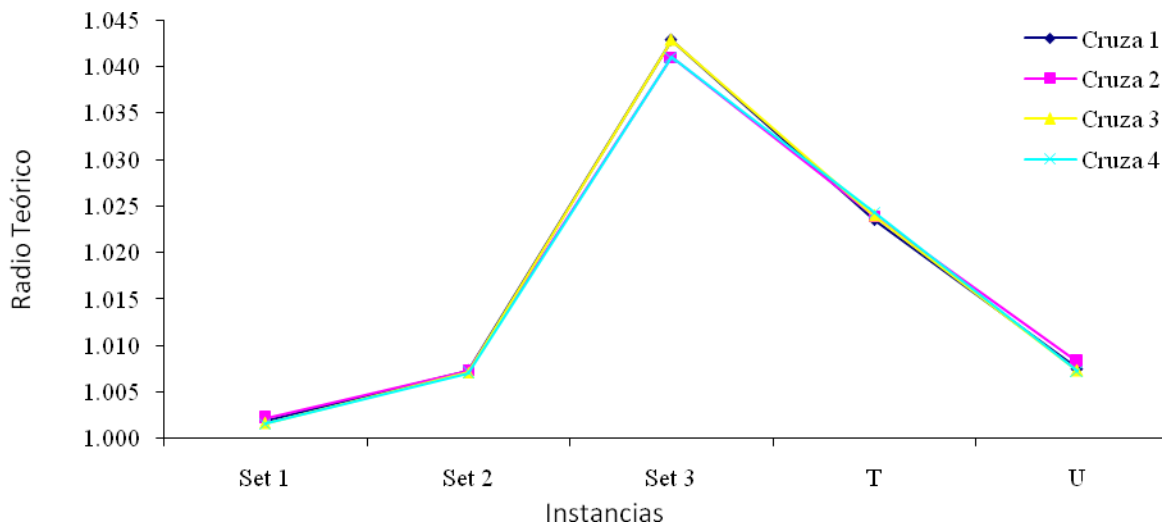


Figura 5.7. Comportamiento de cada conjunto de casos: Cruzamiento

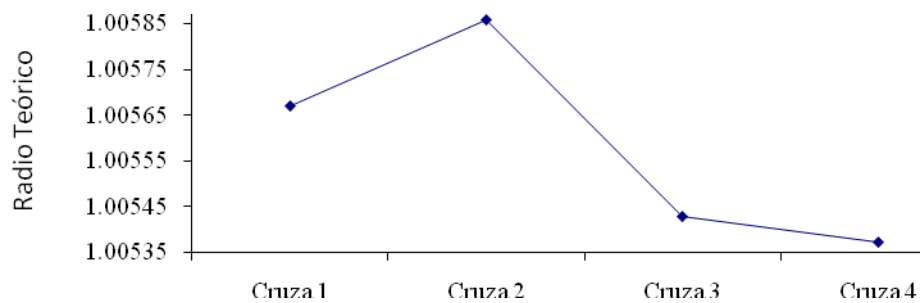


Figura 5.8. Reducción del Radio Promedio Teórico: Cruzamiento

5.5.4. Análisis de Resultados

En los dos primeros cruzamientos, al incorporar todos los segmentos del primer padre, el último segmento tiene menos posibilidad de sobrevivir. Para equilibrar los siguientes cruzamientos no se colocan segmentos adicionales y se usa el criterio de conservación del mejor segmento de contenedores del segundo padre. Con esta estrategia el error se redujo del 0.57% al 0.54%.

5.6. Experimento 5: Mutación

5.6.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo para diferentes porcentajes de eliminación de contenedores y con diferentes estrategias de reacomodo de objetos liberados.

5.6.2. Configuración del Experimento

Con un porcentaje bajo de cruzamiento (20%, posteriormente probado con otros porcentajes), 95% de probabilidad de conservación de la población, la configuración Config.8, selección proporcional y cruza 4. Fueron generadas diversas estrategias de reacomodo de objetos (Tabla 5.7). Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, 2 y 3.

Tabla 5.7. Tipos de Mutación

Nombre	Contenedores a Eliminar	Redistribución
Mutación 1	10% más vacíos	BFD
Mutación 2	20% más vacíos	BFD
Mutación 3	30% más vacíos	BFD
Mutación 4	20% más vacíos, 50% abajo de su capacidad	BFD
Mutación 5	20% más vacíos	Criterio de Dominación

5.6.3. Resultados

En la Tabla 5.8 se puede apreciar el radio teórico promedio de cada conjunto con respecto a la forma de redistribuir los objetos. Los resultados del experimento son esquematizados a través de las gráficas de las Figuras 5.9 y 5.10.

Tabla 5.8. Radio Teórico Promedio: Mutación

Instancia	Mutación 1	Mutación 2	Mutación 3	Mutación 4	Mutación 5
Set 1	1.00109	1.00094	1.00094	1.00097	1.00087
Set 2	1.00505	1.00459	1.00455	1.00458	1.00177
Set 3	1.03215	1.02494	1.02500	1.02854	1.00718
T	1.02333	1.02341	1.02333	1.02333	1.02341
U	1.00447	1.00358	1.00379	1.00373	1.00379
Totales	1.00420	1.00386	1.00386	1.00390	1.00264

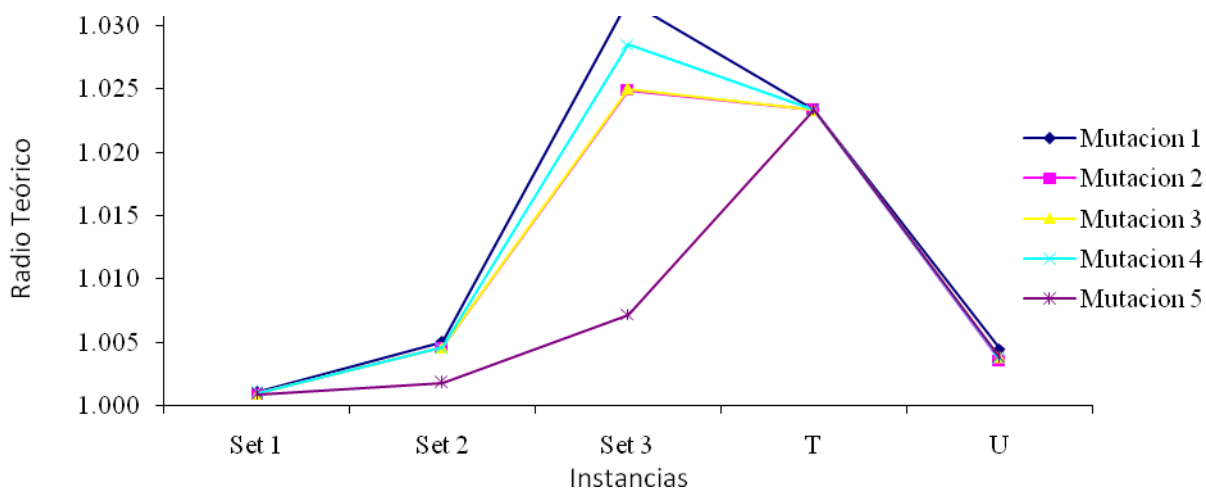


Figura 5.9. Reducción del Radio Promedio Teórico: Mutación

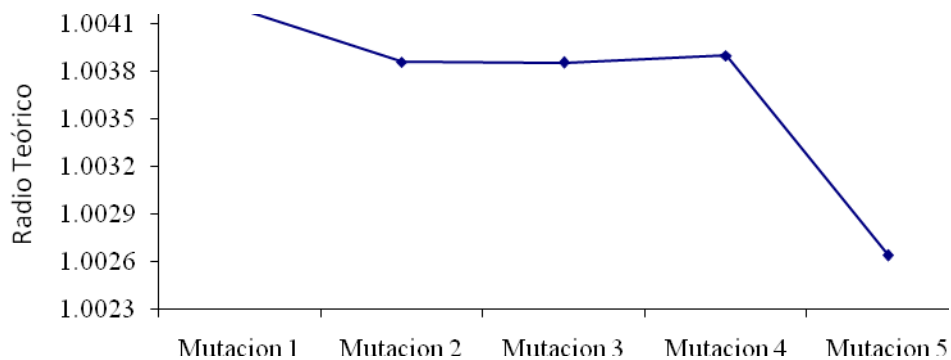


Figura 5.10. Comportamiento de cada conjunto de casos: Mutación

5.6.4. Análisis de Resultados

Nuevamente aumentar o disminuir porcentajes no significa una mejora significativa. El porcentaje más estable de contenedores eliminado fue el 20%. La mejora radica en la estrategia de reacomodo de objetos (20% de contenedores liberados y BFD un error del 0.39%, con criterio de dominación 0.26%). Con respecto al desempeño del algoritmo general, el error anterior era del 0.54% y disminuyó al 0.26%. Este resultado revela la gran importancia de la mutación en el algoritmo.

5.7. Experimento 6: Variación en el porcentaje de Cruzamiento

5.7.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo para diferentes porcentajes de cruzamiento.

5.7.2. Configuración del Experimento

Se utilizan las estrategias ganadoras en el experimento anterior, modificando los porcentajes de cruzamiento (20%, 30%, 40% y 50%). Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, Data Set 2 y Data Set 3.

5.7.3. Resultados

La Tabla 5.9 muestra la variación del radio teórico promedio de cada conjunto y el tiempo empleado con cada porcentaje. La Figura 5.11 establece una relación entre el tiempo y el radio teórico alcanzado.

Tabla 5.9. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Porcentajes de Cruzamiento

Instancia	20%		30%		40%		50%	
	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo
Set 1	1.00087	2.71361	1.00092	2.59000	1.00084	2.56774	1.00087	2.40751
Set 2	1.00177	0.62679	1.00146	0.59162	1.00168	0.77222	1.00170	0.54727
Set 3	1.00718	1.19063	1.00360	1.22813	1.00360	1.16247	1.00360	1.20890
T	1.02341	1.27473	1.02333	1.26940	1.02333	1.25249	1.02333	1.23412
U	1.00243	9.52479	1.00286	8.99434	1.00266	8.74820	1.00306	8.24160
Totales	1.00264	2.28505	1.00255	2.17676	1.00257	2.21250	1.00262	2.01915

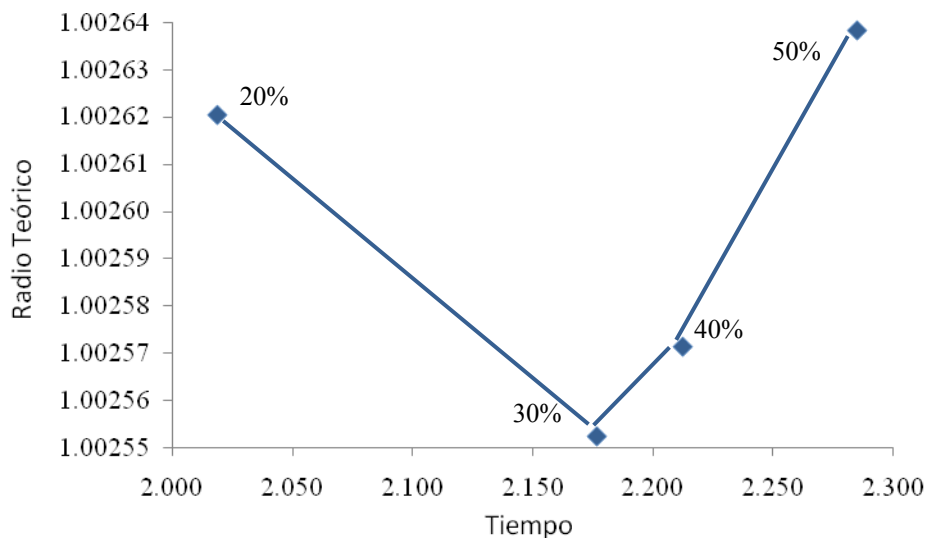


Figura 5.11. Relación Tiempo - Radio Teórico: Porcentajes de Cruza

5.7.4. Análisis de Resultados

Tal como se muestra en la gráfica, el tiempo se incrementa con respecto al número de generaciones, sin embargo, el radio no disminuye bajo la misma proporción. De aquí se concluye que un 30% de cruzamiento es suficiente para mejorar el desempeño del algoritmo.

Con respecto al experimento anterior, el error disminuyó de un 0.264% a un 0.255%, la diferencia puede considerarse pequeña pero es en gran medida por que la mayoría de las instancias han alcanzado el óptimo y el resto están muy cercanas de el.

5.8. Experimento 7: Variación en el porcentaje de Mutación

5.8.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo para diferentes porcentajes de mutación.

5.8.2. Configuración del Experimento

Modificar los porcentajes de mutación en un rango no mayor al 50% evitando un reacomodo total de los individuos, (20%, 30%, 40% y 50%). Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, Data Set 2 y Data Set 3.

5.8.3. Resultados

En la Tabla 5.10 se observa como varían el radio teórico promedio de cada conjunto y el tiempo empleado con cada porcentaje. La Figura 5.12 permite ver el incremento del tiempo con respecto a cada porcentaje y la relación del primero con respecto del radio teórico promedio alcanzado.

Tabla 5.10. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Porcentajes de Mutación

Instancia	20%		30%		40%		50%	
	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo
Set 1	1.00092	2.59000	1.00060	2.97521	1.00054	3.39803	1.00063	3.64151
Set 2	1.00146	0.59162	1.00129	0.65281	1.00145	0.75307	1.00126	0.83889
Set 3	1.00360	1.22813	1.00360	1.45003	1.00360	1.60780	1.00360	1.76777
T	1.02333	1.26940	1.02333	1.63868	1.02365	2.05247	1.02396	2.45301
U	1.00286	8.99434	1.00206	10.25828	1.00136	11.30867	1.00133	12.44957
Totales	1.00255	2.17676	1.00228	2.49764	1.00228	2.84162	1.00227	3.09083

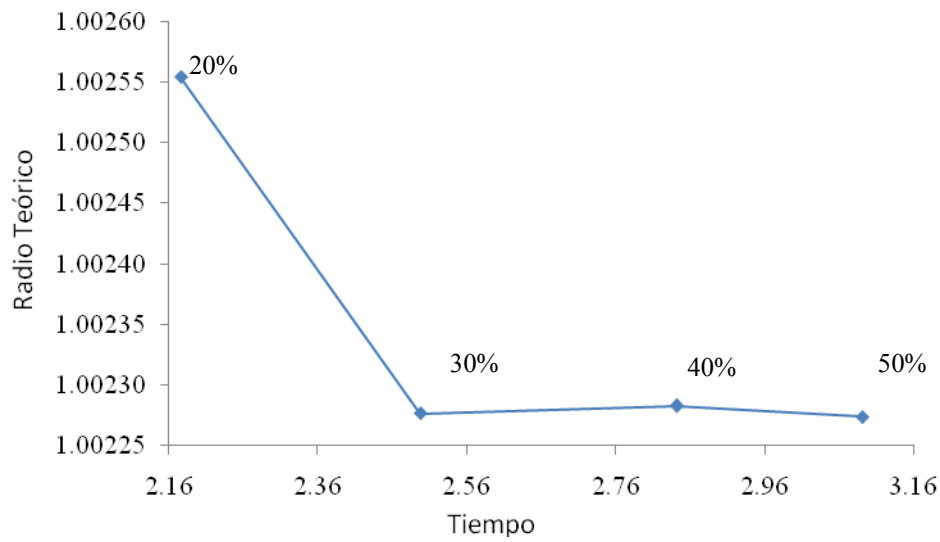


Figura 5.12. Relación Tiempo - Radio Teórico: Porcentajes de Mutación

5.8.4. Análisis de Resultados

En el experimento 5.7 fue posible observar que el aumentar el cruzamiento no mejora la solución, comparado con los resultados del presente experimento volvemos a concluir que la mutación con criterio de dominación como técnica de reacomodo de objetos es un factor preponderante en la búsqueda de mejores soluciones. Aunque la diferencia entre el 30% y el 50%, es sólo una cienmilésima, en la primera se alcanzó la mejor solución conocida en promedio en 1169 casos, para la segunda fueron 1179 en promedio. Con respecto al tiempo utilizado, este se incrementa unas cuantas décimas. El error fue disminuido de 0.255% a 0.227%.

5.9. Experimento 8: Variación en el Número de Individuos

5.9.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo para diferentes tamaños de población.

5.9.2. Configuración del Experimento

Experimentar con diferentes tamaños de población (se propone 30, 40, 50 y 100 debido a los buenos resultados alcanzados con 30). Los conjuntos de datos para la experimentación fueron: U, T, Data Set 1, Data Set 2 y Data Set 3.

5.9.3. Resultados

Resultados con respecto al radio teórico promedio y tiempo promedio empleado son mostrados en la Tabla 5.11. La Figura 5.13 establece la relación del tiempo empleado con respecto al radio teórico alcanzado.

Tabla 5.11. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Número de Individuos

Instancia	30		40		50		100	
	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo
Set 1	1.00063	3.64151	1.00049	4.24451	1.00048	4.81260	1.00035	7.70395
Set 2	1.00126	0.83889	1.00123	0.98990	1.00094	1.18776	1.00077	2.18550
Set 3	1.00360	1.76777	1.00360	2.15470	1.00360	2.65367	1.00360	4.77457
T	1.02396	2.45301	1.02388	3.26614	1.02365	4.11793	1.02396	8.41283
U	1.00133	12.44957	1.00129	15.09167	1.00101	17.51263	1.00000	30.82768
Totales	1.00227	3.09083	1.00219	3.66523	1.00205	4.22787	1.00188	7.14078

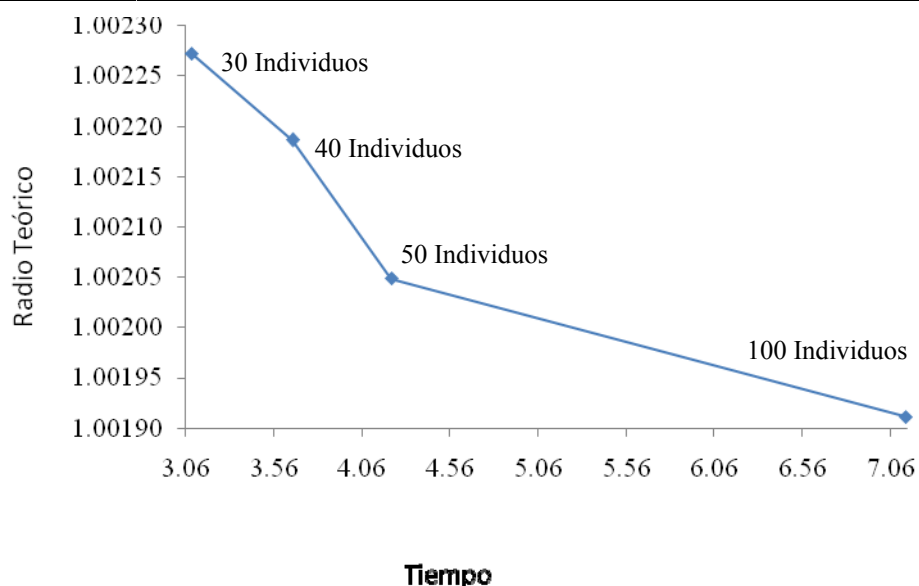


Figura 5.13. Relación Tiempo - Radio Teórico: Número de Individuos

5.9.4. Análisis de Resultados

El radio teórico promedio muestra como valor mínimo 1.00188 con 100 individuos y tiempo promedio de 7.14 segundos. 1209 instancias alcanzaron la mejor solución conocida bajo este parámetro. Sin embargo al observar la gráfica de relación radio teórico – tiempo (Figura 5.13) concluimos que 50 individuos son suficientes, esto debido a que el tiempo se incrementa casi al doble entre 50 y 100 individuos mientras que con respecto del radio la diferencia es 0.00017. En general, bajo el criterio de 50 individuos, con respecto al experimento previo, el error fue disminuido de 0.227% a 0.205%.

5.10. Experimento 9: Variación del Número de Generaciones

5.10.1. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo con respecto a la variación en el número de generaciones.

5.10.2. Configuración del Experimento

Establecer diferentes números de generaciones (100, 1000, 2000, 5000). Los tres últimos valores son reportados en la comunidad científica para Bin Packing (Ver Tabla 3.2). Dado que desde el inicio de la experimentación se observó un aumento significativo de tiempo, se tomaron conjuntos más pequeños de instancias de tipo T, Data Set 1, Data Set 2 y Data Set 3.

5.10.3. Resultados

La Tabla 5.12 muestra el radio teórico y tiempo promedio de cada variación. En la Figura 5.14 se puede observar como el tiempo incrementa constantemente con relación al número de generaciones considerándose importante hacer hincapié en el hecho de que el radio teórico no disminuye en el mismo sentido sino que se comporta variable.

Tabla 5.12. Radio Teórico y Tiempo Promedio: Número de Generaciones

Instancia	100		1000		2000		5000	
	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo	Radio	Tiempo
Set 1	1.00048	4.81260	1.00063	120.30985	1.00050	145.55082	1.00070	496.59048
Set 2	1.00094	1.18776	1.00100	108.88120	1.00061	139.42890	1.00101	462.63420
Set 3	1.00360	2.65367	1.00360	108.88120	1.00360	139.42890	1.00360	462.63420
T	1.02365	4.11793	1.04500	35.25630	1.03688	49.87800	1.04063	164.59215
Totales	1.00205	4.22787	1.00262	105.35797	1.00209	129.64140	1.00249	432.77987

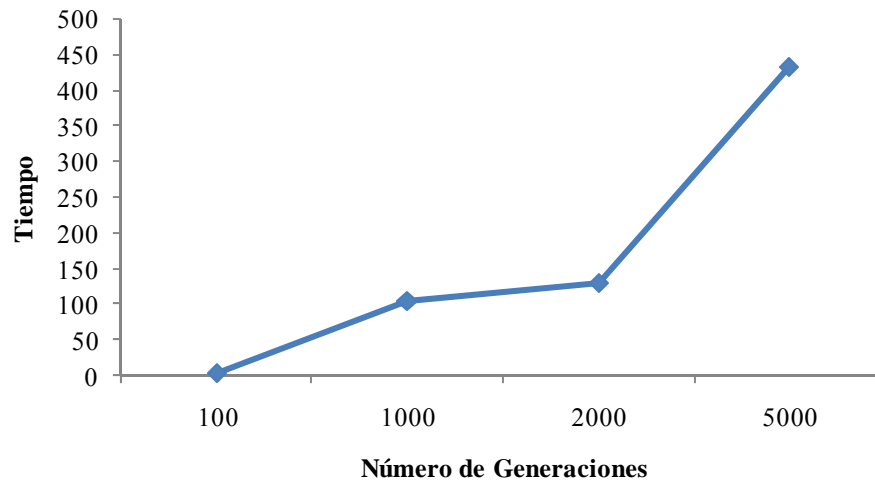


Figura 5.14. Incremento en el tiempo con respecto al número de Generaciones

5.10.4. Análisis de Resultados

Esta experimentación ha permitido medir el grado de convergencia del algoritmo. De este experimento se concluye que a diferencia de aquellos algoritmos evaluados en número de generaciones y desarrollados por otros investigadores, el algoritmo propuesto en esta tesis permite alcanzar excelentes resultados con tan sólo 100 generaciones.

5.11. Experimento 10: Mejora con Respecto al Tiempo Empleado y Análisis Final

5.10.5. Objetivo

Evaluar el desempeño del algoritmo con el establecimiento del límite L_2 y tres algoritmos deterministas adicionales.

5.10.6. Configuración del Experimento

En los experimentos de las secciones 5.2 al 5.11 se proponen técnicas y parámetros para mejorar el desempeño del algoritmo. Los mejores resultados se obtienen a partir de las siguientes configuraciones:

- Generar: 1 individuo con FFD, 1 individuo con **CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB(BFD)**, 1 individuo con **CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB Y DB3(BFD)**, individuo con **CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB Y DB3(BF aleatorio)**, 46 individuos con **CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB(BF aleatorio)**.
- Conservar individuos de la generación previa si son mejores con respecto a los nuevos individuos, tomando una probabilidad del 95% de aceptar dicha condición.
- 30% de cruzamiento de Tipo 4.
- 50% de mutación de Tipo 5.
- Como criterio de paro: una solución con L_1 contenedores o 100 generaciones.

Para disminuir el tiempo empleado se busca una convergencia más rápida hacia el óptimo. Para ello primero se generan 3 individuos más con algoritmos deterministas: BFD, **CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB(FFD)** y **CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB(WFD)**. Estos algoritmos son capaces de obtener la mejor solución conocida en casos muy específicos, según experimentaciones previas. Dado que un valor cercano al óptimo está representado mediante un límite inferior, el primer criterio de paro será representado por el límite L_2 por ser mejor que L_1 contemplándose implementaciones futuras de otros límites más cercanos al óptimo. En esta última experimentación se utilizan todos los conjuntos de prueba descritos en 5.1.

5.10.7. Resultados y Análisis

A continuación se muestra de una forma más generalizada sólo para instancias U, T, Data Set 1, 2 y 3; el grado de avance que representó cada una de las fases del algoritmo genético híbrido. Siguiendo el mismo esquema de las experimentaciones en las secciones anteriores, la Tabla 5.13 esquematiza el radio promedio de cada uno de los conjuntos de instancias. El promedio total de cada experimento se muestra en la Figura 5.16 donde se reconoce que la mutación representa la más grande aportación en el mejoramiento del desempeño del algoritmo. Por su parte, la Figura 5.15 del tiempo utilizado para resolver cada conjunto comparando las dos últimas experimentaciones y observando el beneficio utilizar L_2 como criterio de paro en lugar de L_1 .

Tabla 5.13. Radio Teórico Promedio: Algoritmo Genético Híbrido

Instancia	Gen. Ind. (3 Det., 26 No Det.)	Conserv. Pob. (95% Prob.)	Selección Propor.	Cruza (20% Sin Muta)	Muta (20%)	Cruza (30%) Muta (50%)	Con 50 Individuos	Mejora (L2, 6 Det., 44 No Det.)
Set 1	1.00352	1.00245	1.00190	1.00151	1.00092	1.00062	1.00048	1.00025
Set 2	1.00919	1.00793	1.00727	1.00697	1.00146	1.00126	1.00094	1.00065
Set 3	1.06060	1.04456	1.04280	1.04098	1.00360	1.00360	1.00360	1.00360
T	1.02333	1.02341	1.02348	1.02431	1.02333	1.02396	1.02365	1.02326
U	1.01161	1.00886	1.00750	1.00719	1.00286	1.00133	1.00101	1.00042
Totales	1.00755	1.00628	1.00567	1.00537	1.00255	1.00227	1.00205	1.00177

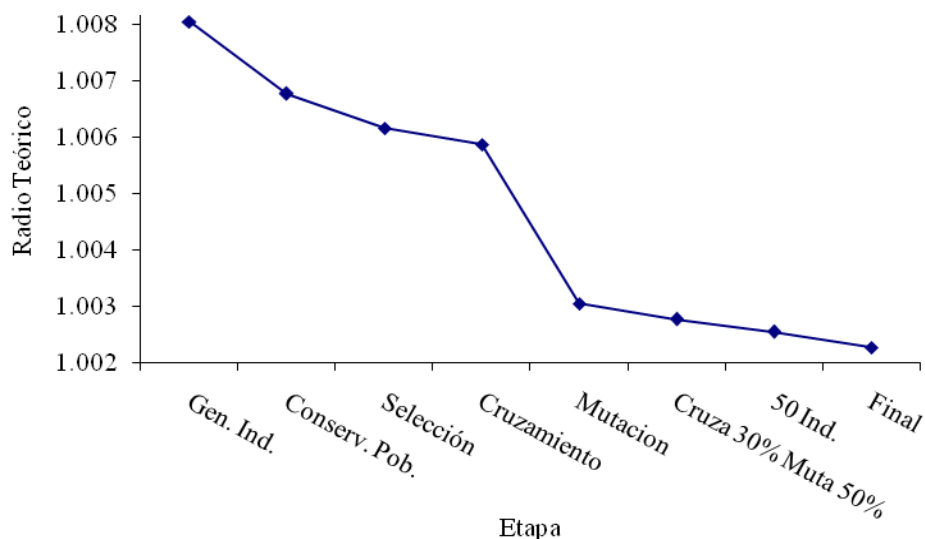


Figura 5.15. Reducción del Radio Promedio Teórico: Algoritmo Genético Híbrido

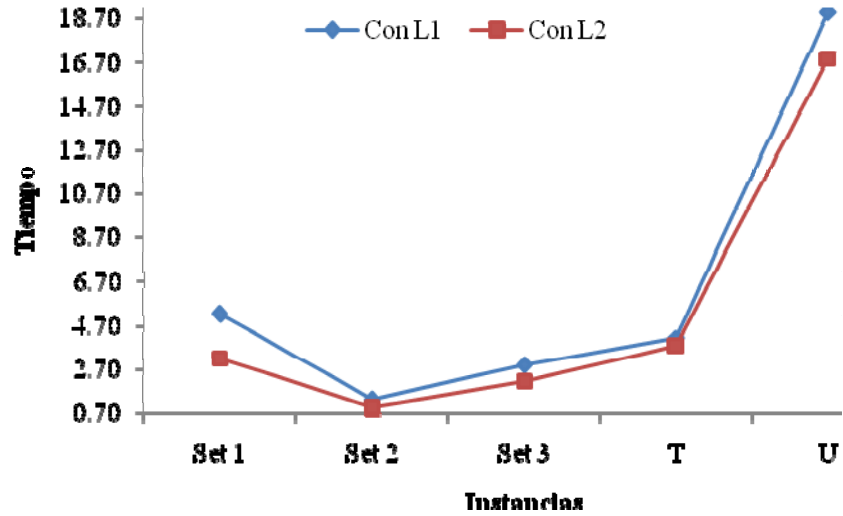


Figura 5.16. Comparativa de Tiempo: Criterio de Paro

Con los resultados experimentales finales, las Tablas 5.14 y 5.15 muestran la cantidad de instancias donde la mejor solución reportada por la comunidad científica fue alcanzada para cada conjunto de casos. En la cuarta columna se hace hincapié en aquellos casos donde la la mejor solución conocida fue superada, la quinta columna muestra el radio teórico que es una medida del error de la solución con respecto de un valor de referencia, en este caso la mejor solución conocida; este es considerablemente pequeño pues en la mayoría de los casos la mejor solución conocida es alcanzada y aquellos que no, sólo hay uno o dos contenedores adicionales. Las dos últimas columnas muestran el tiempo promedio requerido para resolver cada instancia y la generación promedio donde dicha solución fue alcanzada.

Tabla 5.14. Resultados experimentales para instancias estándar

Instancias	No. Instancias	Instancias Óptimas	Mejor Solución Conocida Mejorada	Radio Teórico	Tiempo	Generación Promedio
Data Set 1	720	696	2	1.00025	6.37178	26
Data Set 2	480	457	0	1.00065	1.94672	10
Data Set 3	10	8	0	1.00360	4.29690	74
T	80	0	0	1.02326	7.52674	62
U	80	63	2	1.00042	8.10783	55
GAU1	17	14	0	1.01180	1.29866	30
WAE1	100	100	0	1.00000	0.04970	7
WAE2	100	100	0	1.00000	0.41822	23
Hard28	28	28	0	1.00000	2.03310	4
NIRUP	53	20	0	1.01530	1.88518	42
Otras	10	1	1	1.04665	1.59018	50
Total	1678	1487	4	1.00233	5.42632	24

Tabla 5.15. Resultados experimentales para instancias aleatorias

Instancias	No. Instancias	Instancias Óptimas	Mejor Solución Conocida Mejorada	Radio Teórico	Tiempo	Generación Promedio
(0, 100)	288	286	12	1.00291	1.04680	9
[100, 200)	202	200	13	0.99681	0.92107	25
[200, 300)	320	318	32	0.99856	2.75186	35
[300, 400)	136	135	9	0.99947	6.20320	36
[400, 500)	267	266	39	0.99856	9.60773	40
[500, 600)	262	261	40	0.99873	15.06914	40
[600, 700)	251	249	38	0.99881	23.27972	44
[700, 800)	195	194	31	0.99839	30.77495	43
[800, 900)	317	316	40	0.99923	46.06383	48
[900, 1000)	192	191	26	0.99921	55.17048	43
Total	2430	2416	280	0.99915	18.72648	36

* Para establecer la mejor solución conocida se tomó como referencia el resultado de un conjunto de algoritmos deterministas. Ver Anexo B

Como ya se ha mencionado, el presentar resultados confiables no debe limitarse solo a la generación de las mejores soluciones, requiere del análisis exhaustivo del desempeño del algoritmo, pues la consistencia en los resultados debe ser un factor preponderante para evaluar la calidad de los métodos de solución.

Atacando esta necesidad, la Tablas 5.16 muestra un conjunto de casos tomados aleatoriamente del total de las instancias evaluadas. El algoritmo muestra un comportamiento robusto y consistente observado en los bajos valores de Desviación Estándar, Coeficiente de Variación, así como en la casi nula diferencia entre el máximo, mínimo y promedio. Con respecto a la primera tabla dichos valores son con base al número de contenedores.

Tabla 5.16. Análisis estadístico de las mejores soluciones para la Configuración 6

Nombre	Conjunto	Óptimo Teórico	Mejor Sol.	Min.	Max.	Prom.	Desv. Est.	Coef. Variación
N1c1w1_l	Data Set 1	29	33	33	33	33	0	0
N2c1w2_c		59	68	68	68	68	0	0
N4c3w4_k		214	215	215	215	215	0	0
N1w3b3r4	Data Set 2	8	8	8	8	8	0	0
N3w4b3r9		23	23	23	23	23	0	0
N4w1b3r0		166	166	166	166	166	0	0
Hard2	Data Set 3	56	56	57	57	57	0	0
Hard9		56	56	56	56	56	0	0
t60_10	T	20	20	21	21	21	0	0
t120_07		40	40	41	42	41	0.57735	0.014082
t501_14		165	167	168	168	168	0	0
u120_10	U	52	52	52	52	52	0	0
u500_13		196	196	196	197	196	0.57735	0.002946
u1000_18		399	399	399	400	400	0.57735	0.001443
TEST0049	GAU1	11	11	11	11	11	0	0
TEST0084		16	16	16	16	16	0	0
BPP15	WAE1	18	18	18	18	18	0	0
BPP55		18	18	18	18	18	0	0
BPP_22	WAE2	22	22	22	22	22	0	0
BPP_99		22	22	22	22	22	0	0
hBPP14	Hard28	22	22	22	22	22	0	0
hBPP832		22	22	22	22	22	0	0
BPP04000107_0697	NIRUP	15	16	16	16	16	0	0
BPP04005007_0612		15	16	16	16	16	0	0
e1i1	Stratus1	4	-1	4	4	4	0	0
e2i4		24	-1	24	24	24	0	0
e2i5		51	-1	51	51	51	0	0
e32i6		137	-1	138	138	138	0	0
e32i8		179	-1	179	179	179	0	0
e28i8		90	-1	90	90	90	0	0
e55i9		112	-1	112	112	112	0	0

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente capítulo se enuncian las aportaciones realizadas por la presente investigación, así como los trabajos futuros encaminados hacia la solución de un problema real de transporte de productos. En particular para planificar de manera eficiente el acomodo de productos en vehículos mediante el algoritmo genético propuesto en esta tesis. Este problema es conocido en la literatura como Bin Packing.

6.1. Conclusiones

El presente trabajo de investigación presenta el desarrollo sistemático de un algoritmo metaheurístico híbrido para la solución de Bin Packing. El algoritmo muestra un buen nivel de competencia con respecto a los de la literatura especializada. En un 86.61% de los casos estándar, la mejor solución conocida fue alcanzada, y en aquellos casos en los que no se cumplió este objetivo sólo había un contenedor excedido de lo reportado en las ciencias computacionales, representando un error del 0.23%.

Del mismo modo, para los casos propuestos, la solución estipulada por los algoritmos deterministas fue alcanzada en el 99.42% de los casos y mejorada en 280 de ellos mientras que el radio teórico es representado por un valor inferior a 1.

Aunado a lo anterior, las principales contribuciones de esta tesis son:

- Un algoritmo metaheurístico híbrido basado en un algoritmo genético que controla el proceso de búsqueda de la solución, y un conjunto de estrategias heurísticas complementarias que contribuyen a incrementar la calidad de la búsqueda. Los resultados de los experimentos muestran que el algoritmo híbrido tiende a converger rápidamente hacia el óptimo. Sólo 100 generaciones fueron requeridas para la evaluación del problema, a diferencia de otras investigaciones que reportan entre 1000 y 5000 generaciones, dependiendo del tamaño del problema.
- Un análisis de los principales algoritmos para la solución de problemas de optimización complejos, en particular de algoritmos heurísticos deterministas y metaheurísticos.
- El estudio de métodos para calcular límites inferiores de la solución óptima. En particular para el problema de empaqueo de objetos en contenedores. Los valores límite se usaron como mecanismo de control de paro del algoritmo genético propuesto y como apoyo en la generación de nuevos individuos.
- Un estado del arte de algoritmos híbridos que han sido aplicados a la solución de Bin Packing. Se analizaron dos enfoques diferentes para clasificar las diferentes técnicas de hibridación de algoritmos y en algunos de los algoritmos analizados se identificó la categoría a la que pertenece la estrategia de hibridación propuesta.

- Un modelo matemático que formaliza las variantes de Bin Packing identificadas en el caso de estudio. Este modelo permitiría el desarrollo de un método de solución exacto cuyas soluciones sirvan de referencias para instancias de pequeña y mediana escala. Así mismo, el modelo sería una guía para incorporar dichas variantes al algoritmo propuesto en esta tesis.
- Seis estrategias heurísticas basadas en algoritmos deterministas, límites y criterio de dominación (ver sección 4.4.3).
- Cuatro artículos reportando los resultados del algoritmo genético híbrido, publicados en congresos de talla internacional.
- Un artículo referente al proceso de carga dentro del problema de transportación de productos embotellados.

6.2. Trabajos Futuros

Una vez formalizadas las variantes de BPP, y establecido un modelo matemático, el principal trabajo futuro es la incorporación del algoritmo genético híbrido al problema de transportación de productos embotellados.

Cuando se cuenta con un algoritmo competitivo con excelentes resultados para la resolución de casos estándar en un problema en su forma más sencilla, éste resolverá de igual manera un problema más complejo diseccionado hacia el mismo objetivo final. Por lo tanto, el incorporar las variantes del mismo representa sólo el esfuerzo de validar las condiciones establecidas por el nuevo modelo matemático, ya sea a través de condiciones o de la penalización de la función objetivo.

Referencias Bibliográficas

- [Alvim 2003] Alvim A.: Uma Heurística Híbrida de Melhoria para o Problema de Bin Packing e sua Aplicação ao Problema de escalonamento de Tarefas. Tesis Doctoral. Catholic University of Rio de Janeiro, Department of Computer Science, Rio de Janeiro, Brazil, 2003
- [Alvim 2004] Alvim, A., Glover, F., Ribeiro, C., Aloise, D.: A hybrid improvement heuristic for the one-dimensional bin packing problem, *Journal of Heuristics* 10, pp 205-229, 2004
- [Baase 1998] Baase, S., Van Gelder: *Computer Algorithms, Introduction to Design and Analysis*, Editorial Addison-Wesley Publishing Company, 1998
- [Barr 2001] Barr, R.S., Golden, B.L., Kelly, J., Steward, W.R., Resende, M.: Guidelines for Designing and Reporting on Computational Experiments with Heuristic Methods. *Proceedings of International Conference on Metaheuristics for Optimization*. Kluwer Publishing, Norwell, MA, 2001, 1-17
- [Beasley 1993] Beasley, J. F., Doesland, K., Glover, F., Laguna, M.: *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. Reeves Colin R. (editor). Gran Bretaña (1993)
- [Belov 2004] Belov, G.: *Problems, Models and Algorithms in One- and Two – Dimensional Cutting*. PHD thesis. Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Dresden. 2004
- [Belov 2005] Belov, G., Letchford, A., Uchoa, E.: *A Node-Flow Model for 1D Stock Cutting: Robust Branch-Cut-and-Price*. University of Dresden, Lancaster University and Universidade Federal Fluminense. 2005
- [Birattari 2001] Birattari, M., Paquete, L., Stützle, T., Varrentapp, K.: *Classification of Metaheuristics and Design of Experiments for the Analysis of Components*, Intellektik, Darmstadt University of Rechnology, Germany, 2001

- [Boyar 2005] Boyar, J., Epstein, L., Favrholt, L., Kohrt, J., Larsen, K., Pedersen, M., Wohlk, S.: The Maximum Resource Bin Packing Problem. Fifteenth International Symposium of Fundamentals of Computation Theory. 2005
- [CaPaD] Cutting and Packing at Dresden University. <http://www.math.tu-dresden.de/~capad/cpd-ti.html#pmp>
- [Chan 2005] Chan, W., Chin, F.Y.L., Ye, D., Zhang, G., Zhang, Y.: Online Bin Packing of Fragile Objects with Application in Cellular Networks, tech. report, Hong Kong RGC Grant HKU5172/03E, 2005.
- [Coffman 1997] Coffman, J.E., Garey, M.R., Johnson, D.S.: Approximation algorithms for bin packing: A survey. In Approximation Algorithms for NP-Hard Problems, PWS Publishing Company, Boston, pp. 46-93, 1997
- [Coffman 2002] Coffman, J.E., Courboubetis, C., Garey, M.R., Johnson, D.S., Shor, P.W., Weber, R.R.: Perfect Packing Theorems and the Average Case Behavior of Optimal and Online Bin Packing, SIAM Review Vol. 44, pp. 95-108, 2002
- [Cruz 1999] L. Cruz: Automatización del Diseño de la Fragmentación Vertical y Ubicación en Bases de Datos Distribuidas Usando Métodos Heurísticos y Exactos. Tesis de maestría. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, México (1999)
- [Cruz 2004] Cruz, L.: Clasificación de Algoritmos Heurísticos Para la Solución de Problemas de Bin Packing. Tesis Doctoral. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) Cuernavaca, México, 2004
- [Diaz 1996] Díaz, A., González, J. L., Laguna, M., Mascato, P., Tseng, F. T., Glover, F., Ghaziri, H. M.: Optimización Heurística y Redes Neuronales. Editorial Parainfo, España (1996)
- [Ducattelle 2001] Ducattelle, F.: Ant Colony Optimisation for Bin Packing and Cutting Stock Problems, School of Artificial Intelligence, Division of Informatics University of Edinburgh, 2001
- [Dyckhoff 1990] Dyckhoff, H.: A Typology of Cutting and Packing Problem. European Journal of Operational Research, 44, 145-159

- [Epstein 2005] Epstein, L.: Online Bin Parking with Cardinality Constraints, Proc. 13th European Symposium on Algorithms, 2005.
- [Eisenstein-Taylor 2001] Eisenstein-Taylor, M.: Polytopes, Permutations, and the Bin Packing Problems. Tesis Doctoral. Faculty of the Graduate School of Arts and Sciences, Brandeis University, Waltham, Massachusetts. Mayo 2001
- [Falkenauer 1992] Falkenauer, E., Delchambre, A.: A Genetic Algorithm for Bin Packing and Line Balancing. CRIF- Research Centre for Belgian Metalworking Industry, Brussels, Belgium, 1992
- [Falkenauer 1996] Falkenauer, E.: A Hybrid Grouping Genetic Algorithm for Bin Packing, CRIF - Research Centre for Belgian Metalworking Industry Industrial Management and Automation, 1996
- [Fraire 2005] Fraire, H.: Una Metodología para el Diseño de la Fragmentación y Ubicación en Grandes Bases de Datos Distribuidas. Tesis Doctoral. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) Cuernavaca, México, 2005
- [Garey 1979] Garey, M.R., Johnson, D.S.: Computer and intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness, WH Freeman, New York 1979
- [Glover 1986] Glover, F., Laguna, M.: Tabu Search. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1986
- [Goldberg 1989] Goldberg, D.: Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1989
- [Goldenberg 2002] Goldenberg, E., Automatic layout of variable-content print data, School of Cognitive & Computing Sciences, University of Sussex, Brighton, UK, Research conducted at HP Labs, Bristol, 2002
- [Golubchik 2000] Golubchik, L., Khanna, S., Khuller, S., Thurimella, R., Zhu, A.: Approximation Algorithms for Data Placement on Parallel Disks. Department of Computer Science and Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland. 2000

- [Herrera 2006] Herrera J.: Desarrollo de una metodología basada en heurísticas para la solución integral de problemas de asignación de rutas, horarios y cargas en el proceso de distribución y entrega de productos. Tesis de Maestría. Instituto Tecnológico de Cd. Madero (ITCM), Tamaulipas, México, 2006.
- [Johnson 2002] Johnson, D.S., McGeoch, L.A.: Experimental Analysis of Heuristics for the STSP. In: Gutin, G., Punnen, A. (eds.): The Traveling Salesman Problem and its Variations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002) 369-443
- [Kang 2003] Kang, J., Park S.: Algorithms for Variable Sized Bin Packing Problem, Proc. Operational Research, vol. 147, pp. 365-372, 2003.
- [Kasap 2004] Kasap, N., Agarwal, A.: Augmented-Neural-Networks Approach for the Bin-Packing Problem, Presented in 4th. International Symposium On Intelligent Manufacturing Systems (IMS 2004), September 6-8, Sakarya, Turkey. 2004
- [Kirkpatrick 1984] Kirkpatrick, S.: Optimization by simulated annealing: quantitative studies. Journal of Statistical Physics 34: 5-6. 1984
- [Kos1999] Kos, L., Duhovnik J.: Cutting optimisation with variable-sized stock and inventory status data, University of Ljubljana, Faculty of Mechanical Engineering, Avskervceva 6, Ljubljana, Slovenia. 1999
- [Library_BOR] The Beasley's OR-Library, <http://www.ms.ic.ac.uk/info.html>
- [Library_OR] The Operational Research Library, <http://www.bwl.tu-darmstadt.de/bwl3/forsch/projekte/binpp>
- [Martello 1990^a] Martello S., Toth P.: Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations. Wiley & Sons Ltd. 1990
- [Martello 1990^b] Martello S., Toth P.: Lower Bounds and Reduction Procedures for the Bin Packing Problem, in Discrete Applied Mathematics, vol. 22, North-Holland, Elsevier Science Publishers B.V., 1990, 59-70.
- [McGeoch 1992] McGeoch, C.C.: Analyzing Algorithms by Simulation: Variance Reduction Techniques and Simulation Speedups. ACM Computer Survey. Vol. 24 No. 2. 1992, 1995-212

- [Michalewicz 1999] Michalewicz, Z., Fogel, D.B.: How to Solve It: Modern Heuristics. Springer Verlag (1999)
- [Moret 2003] Moret, B.M.E.: Toward a Discipline of Experimental Algorithmics. In: Goldwasser, M.H., Johnson, D.S., McGeoch, C. (eds.): Data Structures, Near Neighbor Searches, and Methodology: Fifth and Sixth DIMACS Implementation Challenges, Series DIMACS, Vol. 5, 2003, 197-214
- [Nieto 2006] Nieto, D., Tomas, P., Castilla, G., Fraire, H., Cruz, L.: Configuración de Algoritmos Genéticos para el Problema de Empacado de Objetos, 13th International Congress on Computer Science Research (CIICC), Cd. Madero Tamaulipas México, 2006.
- [Ovaska 2006] Ovaska S. J., Kamiya A., Chen YQ.: Fusion of Soft Computing and Hard Computing: Computational Structures and Characteristic Features, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part C: Applications and Reviews, VOL. 36, NO. 3, MAY 2006
- [Rangel 2005] Rangel N.: Análisis de los Problemas de Asignación de Rutas, Horarios y Cargas en una Distribuidora de Productos, master's thesis, Posgrado en Ciencias de la Computación, Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, 2005.
- [Ross 1999] Ross, S.M.: Simulación. Segunda edición. Prentice Hall, 1999
- [Schoenfield 2002] Schoenfield, J. E.: Fast, exact solution of open bin packing problems without linear programming. Draft, US Army Space & Missile Defense Command, Huntsville, Alabama, USA, 2002
- [Scholl 1997] Scholl, A., Klein, R., Jürgens, C.: BISON: A fast hybrid procedure for exactly solving the one-dimensional bin packing problem. Computers and Operations Research 24, 627-645. 1997
- [Schwerin 1997] Schwerin, P., Wäscher, G.: The bin-packing problem: A problem generator and some numerical experiments with FFD packing and MTP. International Transactions in Operational Research, 4:337-389, 1997
- [Schwerin 1999] Schwerin, P., Wäscher, G.: A new lower bound for the bin-packing problem and its integration to MTP. Pesquisa Operacional, 19:111-129, 1999

- [Talbi 2002] Talbi, E.G.: A Taxonomy of Hybrid Metaheuristics. *Journal of Heuristics*, Kluwer Academic Publishers, 8,541–564. 2002
- [Verweij 1996] Verweij, B.: Multiple Destination Bin Packing, tech. report, *Algorithms and Complexity in Information Technology*, 1996.
- [Wäscher 1996] Wäscher, G., Gau, T.: Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem: A computational study. *OR Spektrum*, 18:131-144, 1996
- [Wolpert 1997] Wolpert, D. H., Macready, W. G.: No Free Lunch Theorems for Optimizations. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 1 (1997) 67-82

Anexo A

Modelo Matemático BPP con Variantes.

Como ya se hizo mención en la sección 2.1.1.1, el problema de transporte tiene relación directa con el problema de Bín Packing en la distribución de la carga dentro de los camiones, sin embargo, para hacer esto posible se requiere hacer uso de las variantes del mismo. El presente anexo tiene como finalidad el mostrar un modelo matemático el cual permita resolver de forma exacta instancias pequeñas relacionadas con las 6 variantes descritas en 3.1.

nb = Número de contenedores

f_h = Fragilidad del objeto h

k_j = Número máximo de objetos en el contenedor j

w_h = Peso del objeto h

c_j = Peso mínimo en el contenedor j

h = h-ésimo objeto

i = i-ésima posición en el contenedor

j = j-ésimo contenedor

Minimizar $z = \sum_{j=1}^n y_j$

Sujeto a: $\sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^{k_j} w_h x_{hij} \leq c_j y_j \forall_j \Rightarrow BPPCC$

$$\sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^{k_j} w_h x_{hij} \geq mc_j y_j \forall_j \Rightarrow BPPMCC$$

Uso de posiciones de contenedores sin repetición

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{hij} = 1 \forall_h \Rightarrow \text{Asignación de objetos sin repetición}$$

$$\sum_h x_{hij} \leq 1 \forall_i \forall_j$$

$$\sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^{k_j} x_{hij} \leq k_j y_j \forall_j \Rightarrow BPPcC$$

$$y_j \sum_{l=j+1}^n y_l = (nb - j) \quad j = 1 \dots nb - 1 \Rightarrow MDBPP \text{ Respecto del camión}$$

$$\sum_h x_{hij} \sum_h \sum_{l=i+1}^{k_j} x_{hij} = (k_j - i) \sum_h x_{hij} \forall_j \forall_i \Rightarrow MDBPP \text{ Respecto del contenedor}$$

$$\sum_{l=i+1}^{k_j} \sum_h w_h x_{hij} \leq \sum_h f_h w_h x_{hij} \forall_j \forall_i \Rightarrow BPPSFO$$

$$y_j = 0 \text{ o } 1$$

$$x_{hij} = 0 \text{ o } 1$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si el contenedor } j \text{ es usado} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x_{hij} = \begin{cases} 1 & \text{si el objeto } h \text{ es asignado en la posición } i \text{ del contenedor } j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Anexo B

Resultados de Casos *Stratus1*

Dada la reciente creación de los casos Stratus1, no se conoce una solución que sirva de referencia para evaluar dichas instancias. Por esta razón, el presente anexo contiene los resultados obtenidos por cuatro algoritmos deterministas y el algoritmo genético de hibridación. Los algoritmos se encuentran denotados de la siguiente forma:

- BFD
- CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB(BFD)
- FFD
- CONSTRUIR INDIVIDUO CON LB(FFD)
- Algoritmo Metaheurístico Híbrido Propuesto (Se señalan en negrita 280 casos donde se superó el resultado planteado por los deterministas.

Caso	a	b	c	d	e	Caso	a	b	c	d	e	Caso	a	b	c	d	e	Caso	a	b	c	d	e
e1i1	4	4	4	4	4	e61i9	175	176	175	176	174	e122i7	214	214	214	214	214	e183i4	209	209	209	209	209
e1i2	18	20	18	20	18	e61i10	224	231	224	231	220	e122i8	337	337	337	337	337	e183i5	6	6	6	6	6
e1i3	3	3	3	3	4	e62i1	308	316	308	316	308	e122i9	207	207	207	207	207	e183i6	179	179	179	179	179
e1i4	11	11	11	11	10	e62i2	315	319	315	319	314	e122i10	239	239	239	239	239	e183i7	289	289	289	289	289
e1i5	31	31	31	31	31	e62i3	274	274	274	274	274	e123i1	300	300	300	300	300	e183i8	164	164	164	164	164
e1i6	3	3	3	3	3	e62i4	379	379	379	379	379	e123i2	177	179	177	179	175	e183i9	117	118	117	118	117
e1i7	28	28	28	28	28	e62i5	352	352	352	352	352	e123i3	181	182	181	182	181	e183i10	50	50	50	50	50
e1i8	45	45	45	45	45	e62i6	381	381	381	381	381	e123i4	193	193	193	193	193	e184i1	36	36	36	36	36
e1i9	4	4	4	4	4	e62i7	432	432	432	432	432	e123i5	269	269	269	269	269	e184i2	180	180	180	180	179
e1i10	44	44	44	44	43	e62i8	342	342	342	342	342	e123i6	237	237	237	237	237	e184i3	104	104	104	104	104
e2i1	11	11	11	11	11	e62i9	264	283	264	283	264	e123i7	181	182	181	182	181	e184i4	114	114	114	114	114
e2i2	32	33	32	33	31	e62i10	311	344	311	344	311	e123i8	212	215	212	215	212	e184i5	237	237	237	237	237
e2i3	68	68	68	68	68	e63i1	390	390	390	390	390	e123i9	196	198	196	198	196	e184i6	31	31	31	31	31
e2i4	25	25	25	25	24	e63i2	341	341	341	341	341	e123i10	194	194	194	194	194	e184i7	217	217	217	217	217
e2i5	51	52	51	52	51	e63i3	409	409	409	409	409	e124i1	268	275	268	275	268	e184i8	111	111	111	111	111
e2i6	16	16	16	16	16	e63i4	423	423	423	423	423	e124i2	173	173	173	173	173	e184i9	76	76	76	76	76
e2i7	27	27	27	27	27	e63i5	342	342	342	342	342	e124i3	206	206	206	206	205	e184i10	88	88	88	88	88
e2i8	32	34	32	34	32	e63i6	382	382	382	382	382	e124i4	166	166	166	166	166	e185i1	145	145	145	145	145
e2i9	84	85	84	85	84	e63i7	348	348	348	348	348	e124i5	282	282	282	282	282	e185i2	157	160	157	160	157
e2i10	27	27	27	27	25	e63i8	345	347	345	347	344	e124i6	236	236	236	236	236	e185i3	79	79	79	79	79
e3i1	47	47	47	47	47	e63i9	326	352	326	352	326	e124i7	232	232	232	232	232	e185i4	153	153	153	153	153
e3i2	1	1	1	1	1	e63i10	381	381	381	381	381	e124i8	342	342	342	342	342	e185i5	69	69	69	69	69
e3i3	33	34	33	34	33	e64i1	315	320	315	320	312	e124i9	243	245	243	245	243	e185i6	109	109	109	109	109

Caso	a	b	c	d	e	Caso	a	b	c	d	e	Caso	a	b	c	d	e	Caso	a	b	c	d	e
e3i4	24	26	24	26	24	e64i2	527	527	527	527	527	e124i10	317	317	317	317	317	e185i7	70	70	70	70	70
e3i5	22	22	22	22	22	e64i3	566	566	566	566	566	e125i1	281	281	281	281	281	e185i8	160	160	160	160	160
e3i6	24	24	24	24	24	e64i4	508	508	508	508	508	e125i2	248	248	248	248	248	e185i9	6	6	6	6	6
e3i7	2	2	2	2	2	e64i5	586	586	586	586	586	e125i3	221	221	221	221	221	e185i10	50	50	50	50	50
e3i8	24	24	24	24	24	e64i6	548	548	548	548	548	e125i4	376	376	376	376	376	e186i1	157	157	157	157	157
e3i9	14	14	14	14	14	e64i7	563	563	563	563	563	e125i5	259	259	259	259	259	e186i2	8	8	8	8	8
e3i10	4	4	4	4	4	e64i8	521	521	521	521	521	e125i6	291	291	291	291	289	e186i3	42	42	42	42	42
e4i1	47	47	47	47	47	e64i9	519	519	519	519	519	e125i7	205	205	205	205	205	e186i4	151	151	151	151	151
e4i2	22	22	22	22	22	e64i10	328	334	328	334	326	e125i8	229	229	229	229	228	e186i5	76	76	76	76	76
e4i3	46	47	46	47	46	e65i1	460	460	460	460	460	e125i9	338	339	338	339	338	e186i6	131	131	131	131	131
e4i4	4	4	4	4	4	e65i2	378	389	378	389	378	e125i10	214	214	214	214	214	e186i7	5	5	5	5	5
e4i5	4	4	4	4	4	e65i3	424	424	424	424	424	e126i1	278	278	278	278	278	e186i8	123	123	123	123	123
e4i6	72	72	72	72	72	e65i4	704	704	704	704	704	e126i2	257	257	257	257	256	e186i9	6	6	6	6	6
e4i7	40	40	40	40	40	e65i5	360	360	360	360	360	e126i3	278	278	278	278	278	e186i10	97	97	97	97	97
e4i8	59	63	59	63	59	e65i6	404	404	404	404	404	e126i4	171	171	171	171	171	e187i1	89	89	89	89	89
e4i9	2	2	2	2	2	e65i7	467	467	467	467	467	e126i5	301	304	301	304	301	e187i2	177	177	177	177	177
e4i10	28	28	28	28	28	e65i8	471	474	471	474	468	e126i6	266	266	266	266	266	e187i3	182	182	182	182	182
e5i1	124	124	124	124	124	e65i9	549	559	549	559	548	e126i7	289	289	289	289	289	e187i4	132	132	132	132	132
e5i2	49	49	49	49	49	e65i10	959	959	959	959	959	e126i8	303	305	303	305	303	e187i5	251	251	251	251	251
e5i3	74	74	74	74	74	e66i1	682	682	682	682	682	e126i9	190	190	190	190	190	e187i6	33	33	33	33	33
e5i4	68	68	68	68	68	e66i2	335	335	335	335	335	e126i10	275	275	275	275	275	e187i7	67	67	67	67	67
e5i5	5	5	5	5	5	e66i3	759	759	759	759	759	e127i1	509	509	509	509	509	e187i8	127	127	127	127	127
e5i6	106	106	106	106	106	e66i4	490	490	490	490	490	e127i2	556	556	556	556	556	e187i9	61	61	61	61	61
e5i7	18	18	18	18	18	e66i5	525	525	525	525	525	e127i3	349	349	349	349	349	e187i10	208	208	208	208	208
e5i8	64	66	64	66	64	e66i6	557	557	557	557	557	e127i4	389	389	389	389	389	e188i1	196	196	196	196	196
e5i9	77	77	77	77	77	e66i7	344	350	344	350	344	e127i5	569	569	569	569	569	e188i2	121	121	121	121	121
e5i10	71	78	71	78	71	e66i8	535	551	535	551	535	e127i6	449	449	449	449	449	e188i3	7	7	7	7	7
e6i1	3	3	3	3	3	e66i9	370	374	370	374	370	e127i7	540	540	540	540	540	e188i4	151	151	151	151	151
e6i2	6	6	6	6	6	e66i10	448	448	448	448	448	e127i8	419	419	419	419	419	e188i5	49	49	49	49	49
e6i3	78	78	78	78	77	e67i1	370	370	370	370	370	e127i9	409	409	409	409	409	e188i6	157	157	157	157	157
e6i4	64	64	64	64	64	e67i2	539	539	539	539	539	e127i10	620	620	620	620	620	e188i7	131	132	131	132	131
e6i5	4	4	4	4	4	e67i3	502	502	502	502	502	e128i1	509	509	509	509	509	e188i8	64	64	64	64	64
e6i6	132	132	132	132	132	e67i4	532	532	532	532	533	e128i2	435	435	435	435	436	e188i9	150	150	150	150	150
e6i7	121	121	121	121	121	e67i5	452	452	452	452	452	e128i3	287	287	287	287	287	e188i10	139	140	139	140	139
e6i8	40	40	40	40	40	e67i6	476	476	476	476	476	e128i4	400	400	400	400	400	e189i1	86	86	86	86	86
e6i9	43	43	43	43	43	e67i7	375	375	375	375	375	e128i5	491	491	491	491	491	e189i2	48	48	48	48	48
e6i10	94	94	94	94	94	e67i8	568	568	568	568	567	e128i6	381	391	381	391	381	e189i3	131	131	131	131	131
e7i1	66	69	66	69	66	e67i9	320	326	320	326	320	e128i7	649	649	649	649	649	e189i4	78	78	78	78	78
e7i2	91	91	91	91	91	e67i10	453	453	453	453	453	e128i8	419	419	419	419	419	e189i5	128	128	128	128	128
e7i3	5	5	5	5	5	e68i1	365	365	365	365	363	e128i9	550	550	550	550	550	e189i6	5	5	5	5	5
e7i4	61	61	61	61	61	e68i2	372	372	372	372	372	e128i10	307	307	307	307	307	e189i7	135	135	135	135	135
e7i5	42	42	42	42	42	e68i3	455	455	455	455	455	e129i1	299	299	299	299	299	e189i8	142	142	142	142	142
e7i6	44	44	44	44	44	e68i4	382	382	382	382	382	e129i2	303	303	303	303	303	e189i9	118	118	118	118	118
e7i7	3	3	3	3	3	e68i5	505	505	505	505	502	e129i3	379	379	379	379	379	e189i10	69	69	69	69	69
e7i8	79	79	79	79	79	e68i6	399	399	399	399	399	e129i4	443	443	443	443	443	e190i1	64	64	64	64	64
e7i9	25	25	25	25	25	e68i7	461	461	461	461	461	e129i5	370	370	370	370	370	e190i2	176	176	176	176	176
e7i10	3	3	3	3	3	e68i8	318	318	318	318	318	e129i6	258	258	258	258	258	e190i3	82	83	82	83	82
e8i1	20	20	20	20	19	e68i9	379	381	379	381	377	e129i7	400	400	400	400	400	e190i4	147	148	147	148	146
e8i2	121	121	121	121	121	e68i10	319	320	319	320	318	e129i8	429	436	429	436	429	e190i5	140	140	140	140	140
e8i3	35	35	35	35	35	e69i1	425	425	425	425	425	e129i9	312	312	312	312	312	e190i6	103	103	103	103	103
e8i4	116	116	116	116	116	e69i2	484	484	484	484	484	e129i10	490	490	490	490	490	e190i7	96	97	96	97	96
e8i5	50	52	50	52	50	e69i3	386	414	386	414	386	e130i1	386	386	386	386	386	e190i8	29	29	29	29	29
e8i6	69	69	69	69	68	e69i4	436	436	436	436	436	e130i2	446	446	446	446	446	e190i9	118	118	118	118	117
e8i7	30	32	30	32	30	e69i5	483	483	483	483	483	e130i3	389	389	389	389	389	e190i10	105	105	105	105	104
e8i8	104	110	104	110	104	e69i6	412	412	412	412	412	e130i4	398	398	398	398	398	e191i1	69	67	69	67	67
e8i9	60	60	60	60	60	e69i7	459	459	459	459	459	e130i5	348	349	348	349	348	e191i2	119	120	119	120	119
e8i10	101	101	101	101	101	e69i8	349	355	349	355	349	e130i6	385	385	385	385	385	e191i3	106	105	106	105	105
e9i1	17	17	17	17	17	e69i9	394	397	394	397	390	e130i7	410	410	410	410	410	e191i4	69	70	69	70	69
e9i2	5	5	5	5	5	e69i10	412	412	412	412	412	e130i8	412	412	412	412	412	e191i5	84	85	84	85	84

e9i3	64	64	64	64	64	e70i1	296	296	296	296	296	e130i9	438	438	438	438	438	e191i6	105	106	105	106	105
e9i4	21	21	21	21	21	e70i2	389	389	389	389	389	e130i10	449	449	449	449	449	e191i7	104	104	104	104	104
e9i5	42	42	42	42	42	e70i3	441	441	441	441	441	e131i1	208	208	208	208	208	e191i8	127	127	127	127	127
e9i6	91	91	91	91	91	e70i4	392	392	392	392	392	e131i2	280	280	280	280	280	e191i9	101	102	101	102	100
e9i7	23	23	23	23	23	e70i5	374	374	374	374	374	e131i3	287	287	287	287	287	e191i10	41	41	41	41	41
e9i8	26	26	26	26	26	e70i6	429	429	429	429	429	e131i4	353	353	353	353	353	e192i1	33	33	33	33	33
e9i9	18	18	18	18	18	e70i7	444	444	444	444	444	e131i5	342	342	342	342	342	e192i2	148	148	148	148	148
e9i10	44	44	44	44	44	e70i8	446	446	446	446	446	e131i6	203	204	203	204	203	e192i3	53	53	53	53	53
e10i1	103	103	103	103	103	e70i9	432	432	432	432	432	e131i7	242	242	242	242	242	e192i4	70	70	70	70	70
e10i2	99	102	99	102	94	e70i10	318	318	318	318	318	e131i8	393	393	393	393	393	e192i5	163	163	163	163	163
e10i3	170	170	170	170	94	e71i1	400	400	400	400	400	e131i9	319	319	319	319	319	e192i6	41	42	41	42	41
e10i4	137	137	137	137	137	e71i2	441	441	441	441	441	e131i10	306	306	306	306	306	e192i7	148	149	148	149	148
e10i5	65	65	65	65	65	e71i3	453	461	453	461	453	e132i1	241	241	241	241	241	e192i8	142	145	142	145	142
e10i6	75	75	75	75	75	e71i4	309	309	309	309	308	e132i2	268	268	268	268	268	e192i9	122	122	122	122	122
e10i7	20	20	20	20	20	e71i5	456	458	456	458	456	e132i3	300	300	300	300	300	e192i10	175	175	175	175	174
e10i8	75	75	75	75	75	e71i6	459	459	459	459	459	e132i4	267	267	267	267	267	e193i1	99	99	99	99	99
e10i9	60	60	60	60	60	e71i7	502	502	502	502	502	e132i5	206	206	206	206	206	e193i2	258	258	258	258	258
e10i10	90	90	90	90	90	e71i8	430	430	430	430	430	e132i6	226	226	226	226	226	e193i3	191	191	191	191	189
e11i1	8	8	8	8	8	e71i9	416	416	416	416	416	e132i7	250	250	250	250	250	e193i4	151	152	151	152	151
e11i2	137	141	137	141	135	e71i10	394	394	394	394	394	e132i8	326	329	326	329	326	e193i5	148	156	148	156	148
e11i3	166	168	166	168	165	e72i1	356	369	356	369	356	e132i9	293	294	293	294	293	e193i6	207	218	207	218	207
e11i4	78	78	78	78	78	e72i2	380	380	380	380	380	e132i10	255	255	255	255	255	e193i7	220	220	220	220	220
e11i5	82	84	82	84	81	e72i3	488	488	488	488	488	e133i1	304	304	304	304	304	e193i8	197	207	197	207	197
e11i6	80	80	80	80	80	e72i4	364	364	364	364	364	e133i2	274	274	274	274	274	e193i9	139	143	139	143	139
e11i7	65	65	65	65	65	e72i5	458	463	458	463	458	e133i3	422	422	422	422	422	e193i10	119	119	119	119	119
e11i8	139	139	139	139	139	e72i6	496	498	496	498	496	e133i4	439	439	439	439	437	e194i1	210	210	210	210	210
e11i9	193	193	193	193	192	e72i7	363	363	363	363	363	e133i5	385	385	385	385	385	e194i2	132	139	132	139	132
e11i10	152	152	152	152	152	e72i8	416	416	416	416	416	e133i6	295	295	295	295	295	e194i3	235	235	235	235	233
e12i1	187	187	187	187	187	e72i9	450	450	450	450	449	e133i7	400	400	400	400	400	e194i4	229	229	229	229	229
e12i2	62	62	62	62	62	e72i10	460	460	460	460	460	e133i8	284	284	284	284	284	e194i5	87	87	87	87	87
e12i3	50	56	50	56	50	e73i1	800	800	800	800	800	e133i9	380	380	380	380	380	e194i6	179	185	179	185	178
e12i4	25	25	25	25	25	e73i2	920	920	920	920	920	e133i10	318	318	318	318	318	e194i7	254	254	254	254	254
e12i5	25	25	25	25	25	e73i3	650	650	650	650	650	e134i1	255	255	255	255	255	e194i8	205	205	205	205	205
e12i6	2	2	2	2	2	e73i4	746	746	746	746	746	e134i2	273	273	273	273	273	e194i9	168	168	168	168	168
e12i7	128	128	128	128	128	e73i5	879	879	879	879	879	e134i3	305	305	305	305	305	e194i10	131	131	131	131	131
e12i8	72	72	72	72	72	e73i6	870	870	870	870	870	e134i4	369	369	369	369	369	e195i1	166	167	166	167	166
e12i9	115	115	115	115	115	e73i7	860	860	860	860	860	e134i5	207	207	207	207	207	e195i2	198	204	198	204	198
e12i10	88	88	88	88	88	e73i8	959	959	959	959	959	e134i6	271	271	271	271	271	e195i3	170	170	170	170	169
e13i1	133	133	133	133	133	e73i9	839	839	839	839	839	e134i7	288	288	288	288	288	e195i4	249	249	249	249	249
e13i2	59	59	59	59	59	e73i10	879	879	879	879	879	e134i8	263	263	263	263	263	e195i5	147	147	147	147	147
e13i3	126	126	126	126	126	e74i1	800	800	800	800	800	e134i9	221	221	221	221	221	e195i6	208	208	208	208	208
e13i4	39	40	39	40	39	e74i2	601	601	601	601	601	e134i10	292	292	292	292	292	e195i7	163	163	163	163	163
e13i5	117	118	117	118	116	e74i3	652	652	652	652	652	e135i1	174	174	174	174	174	e195i8	117	117	117	117	116
e13i6	44	44	44	44	44	e74i4	920	920	920	920	920	e135i2	332	332	332	332	332	e195i9	202	202	202	202	202
e13i7	169	169	169	169	169	e74i5	711	711	711	711	711	e135i3	188	188	188	188	188	e195i10	167	168	167	168	167
e13i8	25	25	25	25	25	e74i6	819	819	819	819	819	e135i4	303	303	303	303	303	e196i1	133	133	133	133	133
e13i9	79	82	79	82	79	e74i7	668	668	668	668	668	e135i5	304	304	304	304	304	e196i2	79	79	79	79	79
e13i10	119	120	119	120	119	e74i8	839	839	839	839	839	e135i6	217	217	217	217	217	e196i3	222	222	222	222	222
e14i1	25	25	25	25	25	e74i9	615	615	615	615	615	e135i7	199	199	199	199	199	e196i4	107	111	107	111	106
e14i2	66	66	66	66	66	e74i10	839	839	839	839	839	e135i8	203	203	203	203	203	e196i5	127	127	127	127	127
e14i3	165	165	165	165	165	e75i1	761	761	761	761	761	e135i9	291	291	291	291	291	e196i6	145	148	145	148	145
e14i4	45	45	45	45	45	e75i2	606	618	606	618	606	e135i10	322	322	322	322	322	e196i7	149	155	149	155	148
e14i5	158	159	158	159	158	e75i3	680	680	680	680	680	e136i1	101	101	101	101	101	e196i8	133	133	133	133	133
e14i6	74	74	74	74	74	e75i4	573	573	573	573	573	e136i2	67	67	67	67	67	e196i9	121	121	121	121	121
e14i7	29	29	29	29	29	e75i5	720	720	720	720	720	e136i3	276	277	276	277	275	e196i10	184	184	184	184	184
e14i8	133	133	133	133	133	e75i6	669	669	669	669	669	e136i4	266	266	266	266	266	e197i1	144	150	144	150	144
e14i9	87	87	87	87	87	e75i7	800	800	800	800	800	e136i5	101	101	101	101	101	e197i2	191	191	191	191	191
e14i10	47	47	47	47	47	e75i8	720	720	720	720	720	e136i6	243	243	243	243	242	e197i3	166	178	166	178	166
e15i1	121	121	121	121	121	e75i9	920	920	920	920	920	e136i7	24	24	24	24	24	e197i4	243	244	243	244	242
e15i2	93	93	93	93	93	e75i10	920	920	920	920	920	e136i8	71	76	71	76	71	e197i5	222	226	222	226	221
e15i3	24	24	24	24	24	e76i1	687	687	687	687	687	e136i9	160	160	160	160	160	e197i6	201	207	201	207	200
e15i4	128	128	128	128	128	e76i2	626	626	626	626	626	e136i10	251	263	251</								

e15i6	6	6	6	6	6	e76i4	600	600	600	600	600	e137i2	23	23	23	23	23	e197i9	180	180	180	180	180
e15i7	98	101	98	101	98	e76i5	558	558	558	558	558	e137i3	55	55	55	55	55	e197i10	168	173	168	173	168
e15i8	65	65	65	65	65	e76i6	574	574	574	574	570	e137i4	167	169	167	169	167	e198i1	157	157	157	157	157
e15i9	67	67	67	67	67	e76i7	606	606	606	606	606	e137i5	137	137	137	137	137	e198i2	236	236	236	236	236
e15i10	143	143	143	143	143	e76i8	504	516	504	516	504	e137i6	130	134	130	134	128	e198i3	170	170	170	170	170
e16i1	69	69	69	69	69	e76i9	498	498	498	498	498	e137i7	158	165	158	165	155	e198i4	240	240	240	240	240
e16i2	33	33	33	33	33	e76i10	645	645	645	645	641	e137i8	238	240	238	240	238	e198i5	225	225	225	225	224
e16i3	49	49	49	49	49	e77i1	551	551	551	551	551	e137i9	85	85	85	85	85	e198i6	129	132	129	132	129
e16i4	76	76	76	76	76	e77i2	484	485	484	485	484	e137i10	64	64	64	64	64	e198i7	170	170	170	170	170
e16i5	183	183	183	183	183	e77i3	427	427	427	427	426	e138i1	155	155	155	155	155	e198i8	273	276	273	276	273
e16i6	4	4	4	4	4	e77i4	403	403	403	403	403	e138i2	170	171	170	171	170	e198i9	176	182	176	182	176
e16i7	122	122	122	122	122	e77i5	566	566	566	566	566	e138i3	101	104	101	104	100	e198i10	153	153	153	153	153
e16i8	129	129	129	129	129	e77i6	575	575	575	575	575	e138i4	243	243	243	243	243	e199i1	250	250	250	250	250
e16i9	28	28	28	28	28	e77i7	408	408	408	408	408	e138i5	205	206	205	206	204	e199i2	245	258	245	258	234
e16i10	108	108	108	108	108	e77i8	470	470	470	470	470	e138i6	157	157	157	157	157	e199i3	246	247	246	247	246
e17i1	49	49	49	49	49	e77i9	392	392	392	392	392	e138i7	231	232	231	232	231	e199i4	163	163	163	163	163
e17i2	65	65	65	65	65	e77i10	518	518	518	518	518	e138i8	143	143	143	143	143	e199i5	157	157	157	157	157
e17i3	114	114	114	114	114	e78i1	452	452	452	452	452	e138i9	92	98	92	98	92	e199i6	179	179	179	179	178
e17i4	81	81	81	81	81	e78i2	484	484	484	484	484	e138i10	235	235	235	235	235	e199i7	255	255	255	255	255
e17i5	31	31	31	31	31	e78i3	513	516	513	516	513	e139i1	178	180	178	180	178	e199i8	268	268	268	268	268
e17i6	96	96	96	96	96	e78i4	342	343	342	343	342	e139i2	230	230	230	230	230	e199i9	356	356	356	356	356
e17i7	135	135	135	135	135	e78i5	386	394	386	394	386	e139i3	268	274	268	274	268	e199i10	318	318	318	318	318
e17i8	105	105	105	105	105	e78i6	376	376	376	376	376	e139i4	278	278	278	278	278	e200i1	285	285	285	285	285
e17i9	5	5	5	5	5	e78i7	365	366	365	366	365	e139i5	249	250	249	250	248	e200i2	240	240	240	240	240
e17i10	5	5	5	5	5	e78i8	524	526	524	526	524	e139i6	229	229	229	229	229	e200i3	402	402	402	402	402
e18i1	44	45	44	45	44	e78i9	481	481	481	481	481	e139i7	294	294	294	294	293	e200i4	367	367	367	367	367
e18i2	82	82	82	82	82	e78i10	465	465	465	465	465	e139i8	331	331	331	331	331	e200i5	285	285	285	285	285
e18i3	78	78	78	78	78	e79i1	677	677	677	677	677	e139i9	291	291	291	291	290	e200i6	529	529	529	529	529
e18i4	84	84	84	84	84	e79i2	553	553	553	553	553	e139i10	203	203	203	203	203	e200i7	263	263	263	263	263
e18i5	65	65	65	65	65	e79i3	518	518	518	518	518	e140i1	346	346	346	346	346	e200i8	336	336	336	336	336
e18i6	119	122	119	122	119	e79i4	436	436	436	436	436	e140i2	219	245	219	245	219	e200i9	240	240	240	240	240
e18i7	106	106	106	106	106	e79i5	500	500	500	500	500	e140i3	255	256	255	256	255	e200i10	195	195	195	195	195
e18i8	40	40	40	40	40	e79i6	496	498	496	498	491	e140i4	314	314	314	314	314	e201i1	134	134	134	134	134
e18i9	90	90	90	90	90	e79i7	679	679	679	679	679	e140i5	200	205	200	205	199	e201i2	629	629	629	629	629
e18i10	100	100	100	100	100	e79i8	485	485	485	485	485	e140i6	272	272	272	272	271	e201i3	278	278	278	278	278
e19i1	8	8	8	8	8	e79i9	501	501	501	501	501	e140i7	345	345	345	345	345	e201i4	151	151	151	151	151
e19i2	40	40	40	40	40	e79i10	699	699	699	699	699	e140i8	276	276	276	276	276	e201i5	230	230	230	230	230
e19i3	46	46	46	46	46	e80i1	442	442	442	442	442	e140i9	249	268	249	268	249	e201i6	216	216	216	216	216
e19i4	214	214	214	214	214	e80i2	415	415	415	415	415	e140i10	292	292	292	292	292	e201i7	151	151	151	151	151
e19i5	99	99	99	99	99	e80i3	605	605	605	605	605	e141i1	253	253	253	253	253	e201i8	183	184	183	184	182
e19i6	50	50	50	50	50	e80i4	432	445	432	445	432	e141i2	277	277	277	277	277	e201i9	353	353	353	353	353
e19i7	50	50	50	50	50	e80i5	506	506	506	506	506	e141i3	424	424	424	424	424	e201i10	99	100	99	100	99
e19i8	170	170	170	170	170	e80i6	421	421	421	421	421	e141i4	346	346	346	346	346	e202i1	323	323	323	323	323
e19i9	129	129	129	129	129	e80i7	607	607	607	607	607	e141i5	386	386	386	386	386	e202i2	226	226	226	226	226
e19i10	250	250	250	250	250	e80i8	513	513	513	513	513	e141i6	350	350	350	350	350	e202i3	326	326	326	326	326
e20i1	90	90	90	90	90	e80i9	677	677	677	677	677	e141i7	457	457	457	457	457	e202i4	321	321	321	321	321
e20i2	50	50	50	50	50	e80i10	497	497	497	497	497	e141i8	341	341	341	341	341	e202i5	322	328	322	328	320
e20i3	163	163	163	163	163	e81i1	489	489	489	489	489	e141i9	438	442	438	442	438	e202i6	183	183	183	183	182
e20i4	127	127	127	127	127	e81i2	584	584	584	584	584	e141i10	423	426	423	426	422	e202i7	206	210	206	210	206
e20i5	87	87	87	87	87	e81i3	436	436	436	436	436	e142i1	357	369	357	369	357	e202i8	232	232	232	232	232
e20i6	44	44	44	44	44	e81i4	445	445	445	445	445	e142i2	294	325	294	325	294	e202i9	247	247	247	247	247
e20i7	100	100	100	100	100	e81i5	382	382	382	382	382	e142i3	339	339	339	339	339	e202i10	271	271	271	271	270
e20i8	250	250	250	250	250	e81i6	435	435	435	435	435	e142i4	336	336	336	336	335	e203i1	201	202	201	202	200
e20i9	9	9	9	9	9	e81i7	469	469	469	469	469	e142i5	288	288	288	288	288	e203i2	198	198	198	198	198
e20i10	176	176	176	176	176	e81i8	436	436	436	436	436	e142i6	251	251	251	251	250	e203i3	280	281	280	281	280
e21i1	50	50	50	50	50	e81i9	391	391	391	391	391	e142i7	248	248	248	248	247	e203i4	324	326	324	326	324
e21i2	250	250	250	250	250	e81i10	407	407	407	407	407	e142i8	201	215	201	215	198	e203i5	346	346	346	346	346
e21i3	289	289	289	289	289	e82i1	38	38	38	38	37	e142i9	268	274	268	274	268	e203i6	282	282	282	282	282
e21i4	194	194	194	194	194	e82i2	75	75	75	75	74	e142i10	291	292	291	292	290	e203i7	252	252	252	252	252
e21i5	289	289	289	289	289	e82i3	6	6	6	6	6	e143i1	312	312	312	312	312	e203i8	289	289	289	289	289
e21i6	170	170	170	170	170	e82i4	35	35	35	35	34	e143i2	345	345	345	345	345	e203i9	163	163	163	163	163
e21i7	289	289	289	289	289	e82i5	64	64	64	64	64	e143i3	263	26									

e21i9	8	8	8	8	8	e82i7	37	37	37	37	37	e143i5	371	371	371	371	371	e204i2	205	205	205	205	205
e21i10	170	170	170	170	170	e82i8	3	3	3	3	3	e143i6	273	273	273	273	273	e204i3	277	277	277	277	277
e22i1	138	138	138	138	138	e82i9	7	7	7	7	7	e143i7	380	380	380	380	380	e204i4	217	217	217	217	217
e22i2	130	130	130	130	130	e82i10	24	24	24	24	24	e143i8	357	377	357	377	357	e204i5	182	182	182	182	182
e22i3	56	56	56	56	56	e83i1	16	16	16	16	16	e143i9	266	271	266	271	266	e204i6	191	191	191	191	191
e22i4	64	64	64	64	64	e83i2	32	35	32	35	32	e143i10	336	336	336	336	336	e204i7	204	204	204	204	204
e22i5	140	140	140	140	140	e83i3	14	14	14	14	14	e144i1	411	412	411	412	411	e204i8	183	183	183	183	183
e22i6	84	84	84	84	84	e83i4	17	19	17	19	17	e144i2	403	411	403	411	403	e204i9	308	308	308	308	308
e22i7	178	178	178	178	178	e83i5	5	5	5	5	5	e144i3	333	333	333	333	333	e204i10	275	275	275	275	275
e22i8	140	140	140	140	139	e83i6	63	63	63	63	63	e144i4	392	416	392	416	391	e205i1	167	167	167	167	166
e22i9	114	114	114	114	114	e83i7	14	13	14	13	13	e144i5	388	412	388	412	388	e205i2	257	258	257	258	257
e22i10	7	7	7	7	7	e83i8	2	2	2	2	2	e144i6	360	361	360	361	360	e205i3	137	137	137	137	137
e23i1	64	64	64	64	64	e83i9	45	45	45	45	45	e144i7	292	292	292	292	292	e205i4	252	252	252	252	251
e23i2	132	133	132	133	132	e83i10	22	22	22	22	22	e144i8	350	350	350	350	349	e205i5	327	327	327	327	327
e23i3	60	60	60	60	60	e84i1	44	45	44	45	44	e144i9	370	370	370	370	370	e205i6	291	291	291	291	291
e23i4	49	49	49	49	49	e84i2	15	15	15	15	15	e144i10	449	449	449	449	449	e205i7	215	226	215	226	215
e23i5	116	116	116	116	116	e84i3	24	24	24	24	24	e145i1	342	342	342	342	342	e205i8	330	330	330	330	330
e23i6	97	97	97	97	97	e84i4	3	3	3	3	3	e145i2	523	523	523	523	523	e205i9	292	297	292	297	291
e23i7	7	7	7	7	7	e84i5	15	15	15	15	15	e145i3	367	367	367	367	367	e205i10	234	234	234	234	234
e23i8	85	85	85	85	85	e84i6	27	27	27	27	27	e145i4	736	736	736	736	736	e206i1	226	227	226	227	225
e23i9	5	5	5	5	5	e84i7	30	30	30	30	30	e145i5	403	403	403	403	404	e206i2	243	244	243	244	243
e23i10	128	128	128	128	128	e84i8	50	49	50	49	49	e145i6	425	425	425	425	425	e206i3	211	211	211	211	211
e24i1	138	138	138	138	138	e84i9	40	41	40	41	40	e145i7	447	447	447	447	447	e206i4	276	276	276	276	276
e24i2	185	185	185	185	185	e84i10	71	73	71	73	71	e145i8	531	531	531	531	531	e206i5	340	340	340	340	340
e24i3	139	139	139	139	139	e85i1	112	112	112	112	112	e145i9	535	535	535	535	535	e206i6	187	187	187	187	187
e24i4	75	75	75	75	75	e85i2	53	53	53	53	53	e145i10	344	344	344	344	344	e206i7	232	232	232	232	232
e24i5	162	162	162	162	162	e85i3	58	58	58	58	56	e146i1	381	381	381	381	381	e206i8	247	247	247	247	247
e24i6	130	130	130	130	130	e85i4	16	16	16	16	16	e146i2	361	361	361	361	361	e206i9	209	220	209	220	209
e24i7	65	65	65	65	65	e85i5	4	4	4	4	4	e146i3	515	521	515	521	515	e206i10	191	192	191	192	191
e24i8	7	7	7	7	7	e85i6	80	83	80	83	78	e146i4	380	380	380	380	380	e207i1	286	291	286	291	286
e24i9	51	51	51	51	51	e85i7	96	105	96	105	96	e146i5	270	276	270	276	266	e207i2	204	204	204	204	204
e24i10	6	6	6	6	6	e85i8	75	75	75	75	75	e146i6	444	445	444	445	443	e207i3	250	256	250	256	250
e25i1	102	102	102	102	102	e85i9	12	13	12	13	12	e146i7	513	514	513	514	505	e207i4	248	248	248	248	248
e25i2	183	183	183	183	183	e85i10	69	69	69	69	69	e146i8	407	411	407	411	407	e207i5	187	193	187	193	187
e25i3	169	169	169	169	169	e86i1	61	61	61	61	61	e146i9	458	458	458	458	458	e207i6	163	164	163	164	163
e25i4	153	153	153	153	153	e86i2	42	42	42	42	42	e146i10	497	497	497	497	497	e207i7	155	155	155	155	155
e25i5	42	42	42	42	42	e86i3	33	33	33	33	33	e147i1	535	535	535	535	536	e207i8	210	210	210	210	210
e25i6	195	195	195	195	195	e86i4	52	54	52	54	52	e147i2	357	357	357	357	357	e207i9	214	214	214	214	213
e25i7	196	196	196	196	196	e86i5	4	4	4	4	4	e147i3	442	442	442	442	437	e207i10	306	306	306	306	306
e25i8	106	106	106	106	106	e86i6	62	62	62	62	61	e147i4	480	480	480	480	480	e208i1	379	379	379	379	379
e25i9	88	88	88	88	88	e86i7	3	3	3	3	3	e147i5	387	387	387	387	386	e208i2	500	500	500	500	500
e25i10	94	94	94	94	94	e86i8	23	23	23	23	23	e147i6	475	475	475	475	474	e208i3	432	432	432	432	432
e26i1	124	124	124	124	124	e86i9	21	21	21	21	21	e147i7	879	879	879	879	879	e208i4	376	376	376	376	375
e26i2	165	165	165	165	165	e86i10	56	64	56	64	56	e147i8	203	203	203	203	203	e208i5	408	408	408	408	408
e26i3	120	121	120	121	120	e87i1	103	103	103	103	103	e147i9	306	324	306	324	306	e208i6	459	459	459	459	459
e26i4	213	213	213	213	213	e87i2	44	44	44	44	43	e147i10	480	480	480	480	480	e208i7	430	430	430	430	430
e26i5	110	110	110	110	110	e87i3	44	44	44	44	44	e148i1	437	438	437	438	437	e208i8	610	610	610	610	610
e26i6	32	32	32	32	32	e87i4	60	60	60	60	60	e148i2	416	416	416	416	415	e208i9	311	312	311	312	311
e26i7	30	30	30	30	30	e87i5	21	21	21	21	21	e148i3	419	419	419	419	419	e208i10	295	295	295	295	295
e26i8	4	4	4	4	4	e87i6	24	24	24	24	24	e148i4	371	371	371	371	371	e209i1	349	349	349	349	349
e26i9	118	121	118	121	118	e87i7	3	3	3	3	3	e148i5	493	493	493	493	493	e209i2	569	569	569	569	569
e26i10	6	6	6	6	6	e87i8	125	125	125	125	125	e148i6	392	393	392	393	392	e209i3	460	460	460	460	460
e27i1	63	63	63	63	63	e87i9	6	6	6	6	6	e148i7	344	344	344	344	344	e209i4	639	639	639	639	639
e27i2	63	63	63	63	63	e87i10	134	134	134	134	134	e148i8	414	414	414	414	414	e209i5	315	323	315	323	312
e27i3	27	27	27	27	27	e88i1	103	103	103	103	103	e148i9	412	412	412	412	411	e209i6	344	344	344	344	344
e27i4	27	27	27	27	27	e88i2	99	99	99	99	99	e148i10	394	401	394	401	394	e209i7	372	371	372	371	370
e27i5	26	26	26	26	26	e88i3	50	50	50	50	50	e149i1	444	444	444	444	444	e209i8	439	439	439	439	439
e27i6	69	69	69	69	69	e88i4	93	93	93	93	92	e149i2	392	403	392	403	392	e209i9	248	248	248	248	248
e27i7	70	70	70	70	70	e88i5	100	100	100	100	100	e149i3	448	448	448	448	448	e209i10	324	325	324	325	323
e27i8	3	3	3	3	3	e88i6	27	28	27	28	26	e149i4	348	353	348	353	347	e210i1	514	514	514	514	514
e27i9	8	8	8	8	8	e88i7	109	109	109	109	109	e149i5	431	431	431	431	431	e210i2	490	490	490	490	490
e27i10	48	48	48	48	48	e88i8	17	17	17	17	17	e149i6	382	391	382	391	382	e210i3	379	379	379	379	379
e28i1	95	95	95	95	94	e88i9	54	54	54	54	54	e149i7	406	406	406	406	406	e210i4	379	379	379	379	379

e28i2	107	107	107	107	106	e88i10	81	87	81	87	80	e149i8	380	382	380	382	378	e210i5	370	370	370	370	370
e28i3	169	176	169	176	169	e89i1	45	45	45	45	45	e149i9	452	457	452	457	452	e210i6	360	360	360	360	360
e28i4	110	111	110	111	107	e89i2	93	93	93	93	92	e149i10	394	394	394	394	394	e210i7	490	490	490	490	490
e28i5	72	72	72	72	72	e89i3	95	95	95	95	94	e150i1	461	461	461	461	461	e210i8	569	569	569	569	569
e28i6	101	101	101	101	101	e89i4	18	19	18	19	18	e150i2	357	357	357	357	357	e210i9	449	449	449	449	449
e28i7	129	131	129	131	129	e89i5	107	107	107	107	107	e150i3	458	458	458	458	458	e210i10	579	579	579	579	579
e28i8	90	91	90	91	90	e89i6	16	16	16	16	16	e150i4	427	427	427	427	427	e211i1	249	249	249	249	249
e28i9	90	90	90	90	90	e89i7	49	49	49	49	49	e150i5	376	376	376	376	376	e211i2	417	418	417	418	417
e28i10	208	208	208	208	208	e89i8	70	71	70	71	70	e150i6	411	411	411	411	411	e211i3	467	467	467	467	467
e29i1	182	185	182	185	182	e89i9	4	4	4	4	4	e150i7	354	354	354	354	354	e211i4	544	544	544	544	544
e29i2	123	123	123	123	122	e89i10	35	35	35	35	35	e150i8	457	457	457	457	457	e211i5	202	202	202	202	202
e29i3	164	169	164	169	161	e90i1	111	114	111	114	111	e150i9	360	361	360	361	360	e211i6	388	388	388	388	388
e29i4	191	187	191	187	184	e90i2	85	85	85	85	85	e150i10	378	378	378	378	378	e211i7	341	341	341	341	341
e29i5	157	164	157	164	157	e90i3	76	76	76	76	75	e151i1	319	319	319	319	319	e211i8	355	357	355	357	355
e29i6	65	65	65	65	65	e90i4	89	89	89	89	89	e151i2	434	434	434	434	434	e211i9	494	494	494	494	494
e29i7	51	51	51	51	51	e90i5	129	129	129	129	129	e151i3	455	455	455	455	455	e211i10	221	221	221	221	221
e29i8	68	68	68	68	68	e90i6	77	78	77	78	77	e151i4	456	456	456	456	455	e212i1	394	394	394	394	394
e29i9	53	53	53	53	52	e90i7	101	101	101	101	101	e151i5	465	465	465	465	465	e212i2	267	267	267	267	267
e29i10	71	70	71	70	68	e90i8	4	4	4	4	4	e151i6	516	516	516	516	511	e212i3	318	318	318	318	318
e30i1	54	54	54	54	54	e90i9	4	4	4	4	4	e151i7	387	396	387	396	387	e212i4	190	190	190	190	190
e30i2	52	52	52	52	52	e90i10	81	81	81	81	80	e151i8	469	469	469	469	469	e212i5	268	268	268	268	268
e30i3	64	64	64	64	64	e91i1	261	261	261	261	261	e151i9	412	412	412	412	412	e212i6	218	218	218	218	218
e30i4	163	163	163	163	162	e91i2	111	111	111	111	111	e151i10	480	480	480	480	480	e212i7	368	368	368	368	368
e30i5	199	199	199	199	199	e91i3	8	8	8	8	8	e152i1	399	400	399	400	398	e212i8	437	437	437	437	437
e30i6	143	143	143	143	143	e91i4	146	146	146	146	146	e152i2	333	333	333	333	333	e212i9	426	426	426	426	426
e30i7	110	110	110	110	110	e91i5	110	110	110	110	110	e152i3	366	366	366	366	366	e212i10	240	240	240	240	240
e30i8	178	178	178	178	178	e91i6	60	60	60	60	60	e152i4	399	399	399	399	399	e213i1	301	301	301	301	301
e30i9	2	2	2	2	2	e91i7	113	113	113	113	111	e152i5	479	481	479	481	476	e213i2	316	316	316	316	316
e30i10	123	123	123	123	123	e91i8	103	105	103	105	103	e152i6	570	570	570	570	570	e213i3	458	458	458	458	457
e31i1	209	209	209	209	209	e91i9	173	173	173	173	173	e152i7	414	423	414	423	414	e213i4	300	300	300	300	300
e31i2	78	79	78	79	77	e91i10	188	188	188	188	188	e152i8	568	573	568	573	568	e213i5	192	192	192	192	192
e31i3	205	205	205	205	205	e92i1	131	136	131	136	131	e152i9	467	467	467	467	467	e213i6	154	154	154	154	154
e31i4	218	218	218	218	218	e92i2	9	9	9	9	9	e152i10	499	499	499	499	499	e213i7	168	168	168	168	168
e31i5	150	150	150	150	150	e92i3	7	7	7	7	7	e153i1	435	435	435	435	435	e213i8	178	178	178	178	178
e31i6	121	123	121	123	119	e92i4	218	218	218	218	218	e153i2	475	475	475	475	475	e213i9	224	224	224	224	224
e31i7	240	240	240	240	240	e92i5	62	62	62	62	62	e153i3	432	432	432	432	432	e213i10	272	272	272	272	272
e31i8	135	135	135	135	135	e92i6	5	5	5	5	5	e153i4	366	366	366	366	366	e214i1	373	373	373	373	373
e31i9	156	168	156	168	155	e92i7	22	22	22	22	22	e153i5	442	458	442	458	442	e214i2	433	433	433	433	433
e31i10	138	140	138	140	138	e92i8	68	68	68	68	68	e153i6	419	419	419	419	419	e214i3	609	609	609	609	609
e32i1	128	128	128	128	128	e92i9	121	121	121	121	121	e153i7	431	431	431	431	431	e214i4	376	376	376	376	376
e32i2	141	141	141	141	141	e92i10	34	34	34	34	34	e153i8	314	314	314	314	314	e214i5	442	442	442	442	442
e32i3	103	107	103	107	103	e93i1	26	26	26	26	26	e153i9	378	378	378	378	378	e214i6	463	463	463	463	464
e32i4	185	185	185	185	185	e93i2	61	61	61	61	60	e153i10	384	384	384	384	384	e214i7	318	318	318	318	318
e32i5	164	179	164	179	164	e93i3	137	137	137	137	137	e154i1	826	826	826	826	826	e214i8	364	364	364	364	364
e32i6	139	146	139	146	138	e93i4	54	56	54	56	54	e154i2	759	759	759	759	759	e214i9	333	333	333	333	333
e32i7	172	172	172	172	172	e93i5	104	104	104	104	104	e154i3	783	783	783	783	783	e214i10	270	270	270	270	270
e32i8	180	180	180	180	179	e93i6	93	93	93	93	93	e154i4	959	959	959	959	959	e215i1	337	337	337	337	337
e32i9	170	170	170	170	170	e93i7	58	59	58	59	58	e154i5	800	800	800	800	800	e215i2	208	208	208	208	208
e32i10	254	254	254	254	254	e93i8	91	91	91	91	91	e154i6	839	839	839	839	839	e215i3	365	365	365	365	365
e33i1	303	303	303	303	303	e93i9	129	129	129	129	130	e154i7	839	839	839	839	839	e215i4	298	298	298	298	298
e33i2	179	180	179	180	179	e93i10	5	5	5	5	5	e154i8	839	839	839	839	839	e215i5	338	338	338	338	338
e33i3	260	260	260	260	260	e94i1	58	58	58	58	57	e154i9	800	800	800	800	800	e215i6	294	294	294	294	294
e33i4	126	133	126	133	126	e94i2	126	126	126	126	126	e154i10	879	879	879	879	879	e215i7	340	340	340	340	340
e33i5	199	201	199	201	199	e94i3	24	25	24	25	24	e155i1	720	720	720	720	720	e215i8	236	236	236	236	236
e33i6	252	252	252	252	251	e94i4	34	34	34	34	34	e155i2	597	597	597	597	597	e215i9	348	348	348	348	348
e33i7	189	189	189	189	189	e94i5	70	72	70	72	70	e155i3	839	839	839	839	839	e215i10	254	254	254	254	254
e33i8	178	178	178	178	177	e94i6	29	29	29	29	29	e155i4	720	720	720	720	720	e216i1	190	190	190	190	190
e33i9	133	133	133	133	133	e94i7	5	6	5	6	5	e155i5	800	800	800	800	800	e216i2	240	240	240	240	240
e33i10	179	179	179	179	179	e94i8	160	160	160	160	160	e155i6	920	920	920	920	920	e216i3	228	228	228	228	228
e34i1	107	121	107	121	107	e94i9	131	131	131	131	131	e155i7	759	759	759	759	759	e216i4	183	183	183	183	183
e34i2	162	168	162	168	162	e94i10	81	81	81	81	81	e155i8	504	504	504	504	504	e216i5	293	293	293	293	293
e34i3	200	200	200	200	200	e95i1	107	107	107	107	106	e155i9	839	839	839	839	839	e216i6	236				

e34i5	140	141	140	141	140	e95i3	168	168	168	168	168	e156i1	959	959	959	959	959	e216i8	200	200	200	200	200
e34i6	97	97	97	97	97	e95i4	124	124	124	124	124	e156i2	680	680	680	680	680	e216i9	176	177	176	177	176
e34i7	248	249	248	249	246	e95i5	154	154	154	154	154	e156i3	879	879	879	879	879	e216i10	269	269	269	269	269
e34i8	180	180	180	180	180	e95i6	128	128	128	128	128	e156i4	493	509	493	509	493	e217i1	138	138	138	138	138
e34i9	100	103	100	103	98	e95i7	169	169	169	169	168	e156i5	598	598	598	598	598	e217i2	133	134	133	134	133
e34i10	127	128	127	128	126	e95i8	42	42	42	42	41	e156i6	571	571	571	571	571	e217i3	228	228	228	228	226
e35i1	271	271	271	271	271	e95i9	138	138	138	138	138	e156i7	800	800	800	800	800	e217i4	212	212	212	212	212
e35i2	160	160	160	160	159	e95i10	88	88	88	88	88	e156i8	768	768	768	768	768	e217i5	101	101	101	101	100
e35i3	129	135	129	135	129	e96i1	4	4	4	4	4	e156i9	680	680	680	680	680	e217i6	150	149	150	149	148
e35i4	155	156	155	156	155	e96i2	82	82	82	82	82	e156i10	510	510	510	510	510	e217i7	49	49	49	49	48
e35i5	152	152	152	152	152	e96i3	46	46	46	46	46	e157i1	499	499	499	499	499	e217i8	161	161	161	161	161
e35i6	231	231	231	231	231	e96i4	5	5	5	5	5	e157i2	660	660	660	660	660	e217i9	123	123	123	123	123
e35i7	145	145	145	145	145	e96i5	26	26	26	26	25	e157i3	597	597	597	597	597	e217i10	106	106	106	106	106
e35i8	182	184	182	184	182	e96i6	28	28	28	28	28	e157i4	539	539	539	539	539	e218i1	37	37	37	37	36
e35i9	205	205	205	205	205	e96i7	6	6	6	6	6	e157i5	538	538	538	538	538	e218i2	212	213	212	213	212
e35i10	227	236	227	236	226	e96i8	26	26	26	26	26	e157i6	611	611	611	611	610	e218i3	116	116	116	116	116
e36i1	221	223	221	223	219	e96i9	89	89	89	89	89	e157i7	517	517	517	517	517	e218i4	237	237	237	237	234
e36i2	291	292	291	292	291	e96i10	49	49	49	49	49	e157i8	492	506	492	506	492	e218i5	237	238	237	238	236
e36i3	298	298	298	298	298	e97i1	27	27	27	27	27	e157i9	698	698	698	698	698	e218i6	152	152	152	152	151
e36i4	221	224	221	224	220	e97i2	100	100	100	100	100	e157i10	493	493	493	493	493	e218i7	198	198	198	198	197
e36i5	245	246	245	246	245	e97i3	73	73	73	73	73	e158i1	512	512	512	512	512	e218i8	267	271	267	271	267
e36i6	238	238	238	238	238	e97i4	127	127	127	127	127	e158i2	642	642	642	642	642	e218i9	169	169	169	169	169
e36i7	232	232	232	232	232	e97i5	82	82	82	82	81	e158i3	722	722	722	722	722	e218i10	74	74	74	74	74
e36i8	178	178	178	178	178	e97i6	84	84	84	84	84	e158i4	547	551	547	551	547	e219i1	153	154	153	154	153
e36i9	288	288	288	288	288	e97i7	84	84	84	84	84	e158i5	668	668	668	668	668	e219i2	119	119	119	119	119
e36i10	251	251	251	251	251	e97i8	95	97	95	97	95	e158i6	521	521	521	521	521	e219i3	53	53	53	53	53
e37i1	310	310	310	310	310	e97i9	81	81	81	81	82	e158i7	526	526	526	526	526	e219i4	252	265	252	265	252
e37i2	154	159	154	159	152	e97i10	56	56	56	56	56	e158i8	515	515	515	515	515	e219i5	457	457	457	457	457
e37i3	639	639	639	639	639	e98i1	114	114	114	114	114	e158i9	465	465	465	465	465	e219i6	191	191	191	191	191
e37i4	296	296	296	296	297	e98i2	139	139	139	139	139	e158i10	488	488	488	488	488	e219i7	10	10	10	10	10
e37i5	382	382	382	382	382	e98i3	48	49	48	49	48	e159i1	415	415	415	415	415	e219i8	221	221	221	221	221
e37i6	277	277	277	277	277	e98i4	119	119	119	119	119	e159i2	409	410	409	410	409	e219i9	130	134	130	134	130
e37i7	390	390	390	390	389	e98i5	5	6	5	6	5	e159i3	589	589	589	589	589	e219i10	91	91	91	91	91
e37i8	225	225	225	225	225	e98i6	4	4	4	4	4	e159i4	410	410	410	410	410	e220i1	249	251	249	251	249
e37i9	257	257	257	257	257	e98i7	100	100	100	100	100	e159i5	380	381	380	381	380	e220i2	218	218	218	218	218
e37i10	251	266	251	266	250	e98i8	98	98	98	98	98	e159i6	328	328	328	328	328	e220i3	202	204	202	204	201
e38i1	175	178	175	178	175	e98i9	6	6	6	6	6	e159i7	438	441	438	441	438	e220i4	274	274	274	274	274
e38i2	329	329	329	329	329	e98i10	108	108	108	108	108	e159i8	333	334	333	334	333	e220i5	202	202	202	202	202
e38i3	245	263	245	263	235	e99i1	129	129	129	129	129	e159i9	335	335	335	335	335	e220i6	269	269	269	269	269
e38i4	327	327	327	327	325	e99i2	126	126	126	126	126	e159i10	481	483	481	483	481	e220i7	204	204	204	204	202
e38i5	509	509	509	509	509	e99i3	44	44	44	44	44	e160i1	644	644	644	644	644	e220i8	208	208	208	208	208
e38i6	322	322	322	322	322	e99i4	42	42	42	42	42	e160i2	579	579	579	579	579	e220i9	268	268	268	268	268
e38i7	186	186	186	186	186	e99i5	88	91	88	91	88	e160i3	407	407	407	407	407	e220i10	187	195	187	195	187
e38i8	210	210	210	210	210	e99i6	42	42	42	42	42	e160i4	659	659	659	659	659	e221i1	251	273	251	273	250
e38i9	303	303	303	303	303	e99i7	44	44	44	44	43	e160i5	543	543	543	543	543	e221i2	306	306	306	306	306
e38i10	353	353	353	353	353	e99i8	74	74	74	74	74	e160i6	716	716	716	716	716	e221i3	156	156	156	156	155
e39i1	325	336	325	336	325	e99i9	24	24	24	24	24	e160i7	602	602	602	602	602	e221i4	167	168	167	168	166
e39i2	230	230	230	230	230	e99i10	160	160	160	160	160	e160i8	655	655	655	655	655	e221i5	267	267	267	267	267
e39i3	239	240	239	240	238	e100i1	9	9	9	9	9	e160i9	603	603	603	603	603	e221i6	257	295	257	295	257
e39i4	136	136	136	136	136	e100i2	8	8	8	8	8	e160i10	633	633	633	633	633	e221i7	292	305	292	305	292
e39i5	160	160	160	160	160	e100i3	250	250	250	250	250	e161i1	466	466	466	466	466	e221i8	279	279	279	279	279
e39i6	430	430	430	430	430	e100i4	50	50	50	50	50	e161i2	441	441	441	441	441	e221i9	229	243	229	243	229
e39i7	209	209	209	209	208	e100i5	50	50	50	50	50	e161i3	658	658	658	658	658	e221i10	236	236	236	236	235
e39i8	360	361	360	361	360	e100i6	129	129	129	129	129	e161i4	455	455	455	455	455	e222i1	305	305	305	305	305
e39i9	521	521	521	521	521	e100i7	289	289	289	289	289	e161i5	404	404	404	404	404	e222i2	284	285	284	285	284
e39i10	230	230	230	230	229	e100i8	289	289	289	289	289	e161i6	464	464	464	464	464	e222i3	315	315	315	316	313
e40i1	352	352	352	352	352	e100i9	250	250	250	250	250	e161i7	490	490	490	490	490	e222i4	445	445	445	445	445
e40i2	321	321	321	321	321	e100i10	119	119	119	119	119	e161i8	467	467	467	467	467	e222i5	282	292	282	292	282
e40i3	250	251	250	251	249	e101i1	250	250	250	250	250	e161i9	578	578	578	578	578	e222i6	391	391	391	391	391
e40i4	304	304	304	304	304	e101i2	135	139	135	139	135	e161i10	635	635	635	635	635	e222i7	279	279	279	279	279
e40i5	229	229	229	229	229	e101i3	124	124	124	124	124	e162i1	441	443	441								

e40i8	285	285	285	285	285	e10i16	47	47	47	47	47	e162i4	511	511	511	511	511	e223i1	307	327	307	327	307
e40i9	408	409	408	409	406	e10i17	9	9	9	9	9	e162i5	415	415	415	415	415	e223i2	280	280	280	280	280
e40i10	245	251	245	251	245	e10i18	228	228	228	228	228	e162i6	323	323	323	323	323	e223i3	301	301	301	301	301
e41i1	285	285	285	285	285	e10i19	73	73	73	73	73	e162i7	495	495	495	495	495	e223i4	346	346	346	346	345
e41i2	279	279	279	279	279	e10i1i10	289	289	289	289	289	e162i8	399	399	399	399	399	e223i5	219	219	219	219	219
e41i3	268	268	268	268	268	e102i1	120	120	120	120	120	e162i9	359	359	359	359	359	e223i6	329	348	329	348	328
e41i4	347	350	347	350	347	e102i2	170	170	170	170	170	e162i10	394	394	394	394	394	e223i7	221	221	221	221	221
e41i5	226	228	226	228	226	e102i3	90	90	90	90	90	e163i1	37	43	37	43	37	e223i8	235	235	235	235	235
e41i6	382	382	382	382	382	e102i4	9	9	9	9	9	e163i2	33	34	33	34	33	e223i9	201	202	201	202	201
e41i7	159	162	159	162	159	e102i5	209	209	209	209	209	e163i3	36	36	36	36	36	e223i10	278	278	278	278	278
e41i8	216	216	216	216	216	e102i6	50	50	50	50	50	e163i4	87	92	87	92	85	e224i1	271	271	271	271	271
e41i9	314	314	314	314	314	e102i7	90	90	90	90	90	e163i5	38	38	38	38	38	e224i2	215	225	215	225	212
e41i10	281	281	281	281	281	e102i8	90	90	90	90	90	e163i6	32	32	32	32	32	e224i3	235	240	235	240	235
e42i1	279	279	279	279	279	e102i9	83	83	83	83	83	e163i7	78	78	78	78	78	e224i4	253	253	253	253	253
e42i2	369	369	369	369	369	e102i10	209	209	209	209	209	e163i8	6	6	6	6	6	e224i5	278	278	278	278	278
e42i3	221	227	221	227	221	e103i1	197	198	197	198	197	e163i9	2	2	2	2	2	e224i6	287	287	287	287	285
e42i4	211	211	211	211	211	e103i2	167	167	167	167	167	e163i10	61	62	61	62	61	e224i7	199	208	199	208	199
e42i5	185	185	185	185	185	e103i3	7	7	7	7	7	e164i1	59	60	59	60	58	e224i8	294	294	294	294	293
e42i6	265	265	265	265	265	e103i4	147	148	147	148	147	e164i2	25	25	25	25	25	e224i9	354	354	354	354	354
e42i7	279	279	279	279	279	e103i5	169	169	169	169	169	e164i3	24	25	24	25	24	e224i10	219	219	219	219	219
e42i8	200	202	200	202	200	e103i6	168	168	168	168	168	e164i4	59	59	59	59	59	e225i1	345	345	345	345	345
e42i9	274	281	274	281	274	e103i7	7	7	7	7	7	e164i5	39	39	39	39	39	e225i2	304	304	304	304	304
e42i10	302	302	302	302	302	e103i8	156	157	156	157	156	e164i6	6	6	6	6	6	e225i3	246	249	246	249	246
e43i1	219	219	219	219	219	e103i9	32	32	32	32	32	e164i7	51	51	51	51	51	e225i4	441	441	441	441	441
e43i2	333	333	333	333	333	e103i10	35	35	35	35	35	e164i8	3	3	3	3	3	e225i5	326	326	326	326	326
e43i3	223	223	223	223	223	e104i1	103	103	103	103	103	e164i9	23	23	23	23	23	e225i6	353	353	353	353	353
e43i4	186	186	186	186	186	e104i2	34	35	34	35	34	e164i10	79	80	79	80	78	e225i7	305	305	305	305	305
e43i5	305	305	305	305	305	e104i3	5	5	5	5	5	e165i1	70	70	70	70	69	e225i8	359	366	359	366	359
e43i6	207	207	207	207	207	e104i4	31	31	31	31	31	e165i2	89	89	89	89	89	e225i9	242	243	242	243	242
e43i7	272	272	272	272	272	e104i5	31	31	31	31	31	e165i3	3	3	3	3	3	e225i10	329	329	329	329	329
e43i8	301	301	301	301	301	e104i6	176	176	176	176	176	e165i4	60	60	60	60	60	e226i1	340	340	340	340	340
e43i9	340	340	340	340	340	e104i7	154	154	154	154	154	e165i5	17	17	17	17	17	e226i2	480	480	480	480	480
e43i10	252	252	252	252	252	e104i8	101	101	101	101	101	e165i6	24	24	24	24	24	e226i3	361	361	361	361	359
e44i1	244	244	244	244	244	e104i9	160	160	160	160	160	e165i7	75	75	75	75	75	e226i4	511	512	511	512	507
e44i2	280	280	280	280	279	e104i10	243	243	243	243	243	e165i8	11	11	11	11	11	e226i5	437	440	437	440	437
e44i3	252	252	252	252	252	e105i1	177	177	177	177	177	e165i9	23	23	23	23	23	e226i6	508	509	508	509	507
e44i4	218	218	218	218	218	e105i2	159	160	159	160	159	e165i10	28	28	28	28	28	e226i7	470	470	470	470	471
e44i5	281	282	281	282	280	e105i3	107	107	107	107	107	e166i1	77	77	77	77	77	e226i8	420	420	420	420	420
e44i6	266	266	266	266	266	e105i4	6	6	6	6	6	e166i2	43	45	43	45	43	e226i9	378	378	378	378	378
e44i7	255	255	255	255	255	e105i5	70	70	70	70	70	e166i3	98	98	98	98	98	e226i10	490	490	490	490	490
e44i8	297	297	297	297	297	e105i6	94	94	94	94	94	e166i4	84	84	84	84	84	e227i1	426	426	426	426	426
e44i9	264	264	264	264	264	e105i7	5	5	5	5	5	e166i5	13	14	13	14	13	e227i2	404	405	404	405	404
e44i10	343	343	343	343	343	e105i8	30	30	30	30	30	e166i6	44	45	44	45	44	e227i3	397	397	397	397	397
e45i1	302	302	302	302	302	e105i9	106	106	106	106	106	e166i7	42	42	42	42	42	e227i4	399	399	399	399	399
e45i2	348	348	348	348	348	e105i10	86	86	86	86	86	e166i8	35	35	35	35	35	e227i5	362	418	362	418	362
e45i3	299	300	299	300	299	e106i1	174	174	174	174	174	e166i9	52	52	52	52	52	e227i6	414	414	414	414	414
e45i4	255	255	255	255	255	e106i2	88	88	88	88	88	e166i10	74	74	74	74	74	e227i7	800	800	800	800	800
e45i5	318	318	318	318	318	e106i3	83	83	83	83	83	e167i1	103	103	103	103	103	e227i8	371	371	371	371	371
e45i6	305	305	305	305	305	e106i4	8	8	8	8	8	e167i2	4	4	4	4	4	e227i9	355	356	355	356	353
e45i7	285	289	285	289	283	e106i5	148	148	148	148	148	e167i3	81	81	81	81	80	e227i10	404	404	404	404	404
e45i8	215	215	215	215	215	e106i6	117	118	117	118	117	e167i4	114	114	114	114	114	e228i1	410	410	410	410	410
e45i9	275	278	275	278	275	e106i7	189	189	189	189	188	e167i5	48	48	48	48	48	e228i2	759	759	759	759	759
e45i10	326	326	326	326	326	e106i8	63	63	63	63	63	e167i6	89	90	89	90	89	e228i3	356	359	356	359	356
e46i1	529	529	529	529	529	e106i9	78	78	78	78	78	e167i7	57	57	57	57	57	e228i4	520	520	520	520	520
e46i2	369	369	369	369	367	e106i10	54	56	54	56	54	e167i8	101	101	101	101	100	e228i5	281	295	281	295	281
e46i3	569	569	569	569	569	e107i1	69	69	69	69	69	e167i9	4	4	4	4	4	e228i6	273	273	273	273	273
e46i4	371	371	371	371	371	e107i2	156	156	156	156	156	e167i10	4	4	4	4	4	e228i7	361	361	361	361	361
e46i5	579	579	579	579	579	e107i3	137	137	137	137	137	e168i1	76	77	76	77	76	e228i8	321	321	321	321	321
e46i6	469	469	469	469	468	e107i4	99	99	99	99	99	e168i2	37	37	37	37	37	e228i9	412	412	412	412	409
e46i7	600	600	600	600	600	e107i5	131	131	131	131	131	e168i3	74	74	74	74	74	e228i10	346	346	346	346	346
e46i8	437	437	437	437	437	e107i6	110	110	110	110	110	e168i4	115	115	115	115	115	e229i1	428	428	428	428	428
e46i9	379	379	379	379	379	e107i7	56	56	56	56	56	e168i5	33	33	33	33	32	e229i2	499	499	499	499	499
e46i10	389	389	389	389	389	e107i8	181	181	18														

e47i1	360	360	360	360	360	e107i9	215	215	215	215	215	e168i7	81	81	81	81	81	e229i4	458	458	458	458	458
e47i2	489	489	489	489	489	e107i10	167	167	167	167	167	e168i8	33	34	33	34	33	e229i5	344	344	344	344	343
e47i3	449	449	449	449	449	e108i1	5	5	5	5	5	e168i9	118	118	118	118	118	e229i6	378	378	378	378	377
e47i4	401	401	401	401	401	e108i2	69	69	69	69	69	e168i10	4	4	4	4	4	e229i7	424	424	424	424	424
e47i5	550	550	550	550	550	e108i3	4	4	4	4	4	e169i1	90	90	90	90	90	e229i8	388	388	388	388	387
e47i6	338	338	338	338	338	e108i4	117	118	117	118	117	e169i2	93	93	93	93	93	e229i9	358	358	358	358	358
e47i7	436	436	436	436	436	e108i5	26	26	26	26	26	e169i3	25	25	25	25	25	e229i10	403	403	403	403	403
e47i8	579	579	579	579	579	e108i6	158	158	158	158	158	e169i4	70	70	70	70	69	e230i1	400	400	400	400	400
e47i9	529	529	529	529	529	e108i7	51	51	51	51	51	e169i5	3	3	3	3	3	e230i2	367	367	367	367	367
e47i10	469	469	469	469	469	e108i8	23	23	23	23	23	e169i6	45	45	45	45	45	e230i3	504	512	504	512	504
e48i1	439	439	439	439	439	e108i9	67	68	67	68	67	e169i7	47	47	47	47	47	e230i4	490	490	490	490	490
e48i2	579	579	579	579	579	e108i10	112	112	112	112	112	e169i8	71	77	71	77	71	e230i5	386	386	386	386	386
e48i3	542	542	542	542	538	e109i1	94	94	94	94	94	e169i9	77	77	77	77	77	e230i6	336	336	336	336	336
e48i4	579	579	579	579	579	e109i2	115	115	115	115	115	e169i10	59	59	59	59	59	e230i7	310	310	310	310	310
e48i5	409	409	409	409	409	e109i3	62	62	62	62	62	e170i1	47	47	47	47	47	e230i8	393	404	393	404	393
e48i6	295	303	295	303	295	e109i4	113	112	113	112	112	e170i2	70	73	70	73	70	e230i9	434	436	434	436	434
e48i7	413	413	413	413	413	e109i5	136	136	136	136	136	e170i3	45	46	45	46	45	e230i10	380	383	380	383	379
e48i8	610	610	610	610	610	e109i6	61	62	61	62	59	e170i4	12	12	12	12	12	e231i1	406	408	406	408	406
e48i9	379	379	379	379	379	e109i7	67	73	67	73	65	e170i5	96	96	96	96	96	e231i2	312	313	312	313	311
e48i10	354	359	354	359	354	e109i8	148	152	148	152	144	e170i6	95	96	95	96	95	e231i3	318	333	318	333	318
e49i1	320	320	320	320	320	e109i9	119	119	119	119	118	e170i7	35	37	35	37	35	e231i4	483	487	483	487	483
e49i2	296	296	296	296	296	e109i10	96	96	96	96	96	e170i8	74	78	74	78	74	e231i5	339	339	339	339	339
e49i3	353	353	353	353	353	e110i1	101	103	101	103	101	e170i9	115	115	115	115	115	e231i6	474	475	474	475	473
e49i4	249	249	249	249	249	e110i2	36	36	36	36	36	e170i10	35	36	35	36	35	e231i7	444	446	444	446	444
e49i5	356	356	356	356	356	e110i3	134	136	134	136	132	e171i1	4	4	4	4	4	e231i8	341	341	341	341	341
e49i6	276	276	276	276	276	e110i4	106	115	106	115	106	e171i2	74	74	74	74	74	e231i9	441	442	441	442	441
e49i7	424	425	424	425	424	e110i5	171	177	171	177	171	e171i3	104	104	104	104	104	e231i10	454	454	454	454	454
e49i8	287	292	287	292	286	e110i6	55	55	55	55	55	e171i4	4	4	4	4	4	e232i1	396	397	396	397	395
e49i9	289	289	289	289	289	e110i7	185	185	185	185	185	e171i5	105	105	105	105	105	e232i2	302	303	302	303	302
e49i10	382	387	382	387	382	e110i8	87	87	87	87	86	e171i6	34	34	34	34	34	e232i3	375	375	375	375	375
e50i1	361	361	361	361	361	e110i9	44	45	44	45	44	e171i7	4	4	4	4	4	e232i4	410	410	410	410	410
e50i2	365	365	365	365	365	e110i10	182	182	182	182	182	e171i8	77	77	77	77	77	e232i5	353	353	353	353	353
e50i3	316	316	316	316	316	e111i1	167	169	167	169	166	e171i9	19	19	19	19	19	e232i6	369	369	369	370	368
e50i4	290	291	290	291	290	e111i2	144	145	144	145	143	e171i10	65	65	65	65	65	e232i7	374	374	374	374	374
e50i5	306	306	306	306	306	e111i3	79	79	79	79	79	e172i1	45	45	45	45	45	e232i8	336	336	336	336	336
e50i6	304	304	304	304	304	e111i4	81	84	81	84	81	e172i2	29	29	29	29	28	e232i9	413	413	413	413	412
e50i7	220	220	220	220	220	e111i5	108	108	108	108	108	e172i3	72	72	72	72	72	e232i10	468	468	468	468	468
e50i8	222	222	222	222	222	e111i6	40	40	40	40	40	e172i4	182	182	182	182	182	e233i1	393	393	393	393	393
e50i9	281	282	281	282	281	e111i7	162	163	162	163	162	e172i5	6	6	6	6	6	e233i2	441	443	441	443	441
e50i10	414	414	414	414	414	e111i8	111	111	111	111	111	e172i6	100	101	100	101	100	e233i3	524	524	524	524	524
e51i1	571	571	571	571	569	e111i9	23	23	23	23	23	e172i7	191	191	191	191	191	e233i4	406	409	406	409	405
e51i2	329	330	329	330	329	e111i10	85	87	85	87	85	e172i8	5	5	5	5	5	e233i5	329	335	329	335	328
e51i3	231	232	231	232	231	e112i1	155	157	155	157	154	e172i9	49	49	49	49	49	e233i6	481	481	481	481	481
e51i4	220	220	220	220	220	e112i2	199	206	199	206	199	e172i10	68	69	68	69	68	e233i7	430	439	430	439	430
e51i5	187	187	187	187	187	e112i3	137	137	137	137	137	e173i1	4	4	4	4	4	e233i8	426	426	426	426	420
e51i6	230	230	230	230	230	e112i4	130	130	130	130	130	e173i2	122	122	122	122	122	e233i9	481	481	481	481	480
e51i7	327	327	327	327	327	e112i5	161	161	161	161	160	e173i3	250	250	250	250	250	e233i10	476	476	476	476	475
e51i8	344	344	344	344	344	e112i6	216	218	216	218	215	e173i4	31	31	31	31	31	e234i1	404	404	404	404	404
e51i9	314	314	314	314	314	e112i7	220	229	220	229	220	e173i5	140	140	140	140	140	e234i2	399	407	399	407	399
e51i10	326	326	326	326	326	e112i8	129	129	129	129	128	e173i6	116	117	116	117	116	e234i3	388	388	388	388	388
e52i1	288	288	288	288	288	e112i9	166	166	166	166	166	e173i7	120	120	120	120	120	e234i4	392	392	392	392	392
e52i2	270	270	270	270	270	e112i10	114	119	114	119	114	e173i8	56	56	56	56	56	e234i5	375	375	375	375	375
e52i3	324	324	324	324	324	e113i1	157	162	157	162	157	e173i9	65	65	65	65	65	e234i6	309	309	309	309	309
e52i4	291	291	291	291	291	e113i2	125	125	125	125	125	e173i10	126	126	126	126	125	e234i7	310	310	310	310	310
e52i5	381	381	381	381	381	e113i3	261	277	261	277	261	e174i1	75	75	75	75	75	e234i8	373	373	373	373	373
e52i6	393	393	393	393	393	e113i4	187	187	187	187	187	e174i2	289	289	289	289	289	e234i9	444	444	444	444	444
e52i7	312	312	312	312	312	e113i5	224	224	224	224	224	e174i3	134	134	134	134	135	e234i10	284	284	284	284	284
e52i8	269	269	269	269	269	e113i6	126	127	126	127	125	e174i4	49	51	49	51	49	e235i1	686	686	686	686	686
e52i9	295	295	295	295	295	e113i7	156	156	156	156	156	e174i5	62	62	62	62	62	e235i2	920	920	920	920	920
e52i10	337	339	337	339	337	e113i8	141	141	141	141	141	e174i6	179	179	179	179	179	e235i3	720	720	720	720	720
e53i1	439	439	439	439	439	e113i9	179	182	179	182	178	e174i7	153	153	153	153	153	e235i4	839	839	839	839	839
e53i2	294	294																					

e53i4	284	284	284	284	284	e114i2	215	216	215	216	215	e174i10	49	49	49	49	48	e235i7	793	793	793	793	793
e53i5	337	337	337	337	337	e114i3	271	271	271	271	271	e175i1	118	118	118	118	118	e235i8	604	604	604	604	604
e53i6	478	478	478	478	478	e114i4	129	129	129	129	129	e175i2	5	5	5	5	5	e235i9	800	800	800	800	800
e53i7	304	309	304	309	304	e114i5	6	6	6	6	6	e175i3	165	165	165	165	165	e235i10	779	779	779	779	779
e53i8	312	312	312	312	312	e114i6	133	133	133	133	133	e175i4	30	30	30	30	29	e236i1	920	920	920	920	920
e53i9	282	282	282	282	282	e114i7	122	125	122	125	122	e175i5	33	33	33	33	33	e236i2	552	552	552	552	552
e53i10	234	234	234	234	234	e114i8	184	191	184	191	183	e175i6	127	127	127	127	127	e236i3	920	920	920	920	920
e54i1	203	203	203	203	203	e114i9	227	227	227	227	227	e175i7	32	32	32	32	32	e236i4	879	879	879	879	879
e54i2	257	257	257	257	257	e114i10	220	220	220	220	220	e175i8	106	106	106	106	106	e236i5	959	959	959	959	959
e54i3	191	191	191	191	191	e115i1	136	143	136	143	136	e175i9	84	84	84	84	84	e236i6	680	680	680	680	680
e54i4	344	344	344	344	344	e115i2	148	148	148	148	147	e175i10	4	4	4	4	4	e236i7	580	580	580	580	580
e54i5	327	327	327	327	327	e115i3	147	153	147	153	146	e176i1	5	5	5	5	5	e236i8	839	839	839	839	839
e54i6	336	337	336	337	336	e115i4	249	249	249	249	249	e176i2	109	109	109	109	109	e236i9	667	667	667	667	667
e54i7	279	279	279	279	279	e115i5	99	99	99	99	98	e176i3	106	106	106	106	106	e236i10	721	721	721	721	721
e54i8	309	309	309	309	309	e115i6	208	208	208	208	208	e176i4	3	3	3	3	3	e237i1	839	839	839	839	839
e54i9	201	201	201	201	201	e115i7	135	139	135	139	134	e176i5	104	104	104	104	104	e237i2	627	627	627	627	627
e54i10	320	320	320	320	320	e115i8	150	150	150	150	150	e176i6	66	68	66	68	66	e237i3	720	720	720	720	720
e55i1	142	144	142	144	142	e115i9	236	236	236	236	236	e176i7	77	78	77	78	77	e237i4	453	453	453	453	453
e55i2	176	175	176	175	168	e115i10	142	142	142	142	142	e176i8	5	5	5	5	5	e237i5	655	655	655	655	655
e55i3	78	78	78	78	78	e116i1	188	188	188	188	188	e176i9	39	40	39	40	39	e237i6	897	897	897	897	897
e55i4	236	236	236	236	236	e116i2	223	223	223	223	223	e176i10	24	24	24	24	24	e237i7	839	839	839	839	839
e55i5	154	154	154	154	146	e116i3	228	229	228	229	228	e177i1	4	4	4	4	4	e237i8	789	789	789	789	789
e55i6	197	197	197	197	197	e116i4	232	232	232	232	232	e177i2	78	78	78	78	78	e237i9	855	855	855	855	855
e55i7	150	150	150	150	150	e116i5	125	128	125	128	125	e177i3	111	111	111	111	111	e237i10	648	648	648	648	648
e55i8	92	93	92	93	92	e116i6	176	176	176	176	176	e177i4	115	115	115	115	115	e238i1	781	781	781	781	781
e55i9	112	112	112	112	112	e116i7	140	142	140	142	139	e177i5	57	57	57	57	56	e238i2	538	538	538	538	538
e55i10	161	161	161	161	161	e116i8	246	246	246	246	246	e177i6	5	5	5	5	5	e238i3	523	523	523	523	523
e56i1	130	138	130	138	124	e116i9	245	245	245	245	245	e177i7	61	61	61	61	61	e238i4	549	551	549	551	549
e56i2	101	101	101	101	101	e116i10	265	265	265	265	264	e177i8	96	98	96	98	96	e238i5	656	656	656	656	656
e56i3	278	286	278	286	277	e117i1	171	171	171	171	171	e177i9	81	81	81	81	81	e238i6	757	757	757	757	757
e56i4	208	210	208	210	208	e117i2	162	168	162	168	162	e177i10	47	48	47	48	47	e238i7	518	518	518	518	518
e56i5	68	69	68	69	68	e117i3	215	215	215	215	215	e178i1	49	49	49	49	48	e238i8	501	501	501	501	501
e56i6	210	212	210	212	209	e117i4	206	207	206	207	206	e178i2	145	145	145	145	145	e238i9	796	796	796	796	796
e56i7	225	249	225	249	224	e117i5	302	303	302	303	302	e178i3	6	6	6	6	6	e238i10	751	751	751	751	751
e56i8	43	43	43	43	42	e117i6	188	200	188	200	188	e178i4	130	130	130	130	130	e239i1	545	545	545	545	545
e56i9	107	107	107	107	107	e117i7	301	303	301	303	301	e178i5	7	7	7	7	7	e239i2	403	403	403	403	403
e56i10	161	161	161	161	161	e117i8	233	233	233	233	233	e178i6	5	5	5	5	5	e239i3	462	462	462	462	462
e57i1	296	297	296	297	296	e117i9	168	168	168	168	168	e178i7	127	131	127	131	127	e239i4	532	532	532	532	532
e57i2	182	185	182	185	182	e117i10	191	192	191	192	191	e178i8	46	46	46	46	46	e239i5	621	621	621	621	621
e57i3	114	114	114	114	114	e118i1	202	202	202	202	202	e178i9	138	138	138	138	138	e239i6	522	524	522	524	522
e57i4	102	102	102	102	102	e118i2	320	320	320	320	320	e178i10	59	60	59	60	60	e239i7	428	428	428	428	428
e57i5	211	215	211	215	198	e118i3	295	295	295	295	295	e179i1	79	79	79	79	79	e239i8	432	432	432	432	432
e57i6	234	234	234	234	234	e118i4	317	317	317	317	316	e179i2	5	5	5	5	5	e239i9	389	389	389	389	389
e57i7	128	128	128	128	128	e118i5	329	329	329	329	329	e179i3	93	93	93	93	93	e239i10	407	407	407	407	407
e57i8	47	47	47	47	47	e118i6	331	331	331	331	330	e179i4	43	43	43	43	43	e240i1	413	413	413	413	413
e57i9	248	252	248	252	247	e118i7	317	317	317	317	317	e179i5	105	106	105	106	105	e240i2	334	334	334	334	334
e57i10	170	172	170	172	169	e118i8	339	339	339	339	339	e179i6	96	97	96	97	96	e240i3	340	340	340	340	340
e58i1	367	367	367	367	367	e118i9	306	307	306	307	305	e179i7	152	152	152	152	150	e240i4	495	495	495	495	495
e58i2	128	128	128	128	128	e118i10	230	230	230	230	230	e179i8	20	21	20	21	20	e240i5	476	476	476	476	476
e58i3	261	272	261	272	261	e119i1	500	500	500	500	500	e179i9	63	63	63	63	63	e240i6	390	392	390	392	390
e58i4	303	303	303	303	303	e119i2	183	188	183	188	180	e179i10	123	123	123	123	122	e240i7	486	486	486	486	486
e58i5	317	317	317	317	317	e119i3	403	403	403	403	403	e180i1	115	119	115	119	115	e240i8	380	386	380	386	380
e58i6	241	250	241	250	241	e119i4	209	212	209	212	209	e180i2	55	55	55	55	55	e240i9	435	435	435	435	435
e58i7	197	216	197	216	197	e119i5	352	352	352	352	352	e180i3	44	44	44	44	44	e240i10	599	599	599	599	599
e58i8	350	362	350	362	350	e119i6	328	325	328	325	324	e180i4	71	71	71	71	71	e241i1	510	515	510	515	510
e58i9	141	142	141	142	141	e119i7	374	374	374	374	374	e180i5	3	3	3	3	3	e241i2	619	619	619	619	619
e58i10	307	323	307	323	307	e119i8	290	290	290	290	290	e180i6	111	111	111	111	111	e241i3	461	461	461	461	461
e59i1	250	250	250	250	250	e119i9	283	283	283	283	283	e180i7	5	5	5	5	5	e241i4	656	656	656	656	656
e59i2	213	216	213	216	212	e119i10	190	190	190	190	190	e180i8	132	134	132	134	132	e241i5	392	394	392	394	392
e59i3	371	371	371	371	370	e120i1	240	240	240	240	240	e180i9	22	22	22	22	22	e241i6	529	529	529	529	529
e59i4	278	278	278	278	278	e120i2	212	215	212	215	212	e180i10	105	105	105	105	105	e241i7	525	525	525	525	525
e59i5	209	211	209	211	208	e120i3	269	281	269	281	255												

e59i7	339	339	339	339	339	e120i5	139	139	139	139	139	e181i3	289	289	289	289	289	e241i10	722	722	722	722	722
e59i8	288	288	288	288	288	e120i6	361	361	361	361	361	e181i4	8	8	8	8	8	e242i1	401	401	401	401	401
e59i9	311	317	311	317	311	e120i7	216	217	216	217	216	e181i5	250	250	250	250	250	e242i2	573	576	573	576	573
e59i10	311	311	311	311	311	e120i8	116	118	116	118	116	e181i6	129	129	129	129	129	e242i3	437	438	437	438	437
e60i1	425	425	425	425	425	e120i9	239	239	239	239	239	e181i7	26	26	26	26	26	e242i4	455	455	455	455	455
e60i2	388	388	388	388	388	e120i10	136	136	136	136	136	e181i8	129	129	129	129	129	e242i5	548	548	548	548	548
e60i3	423	423	423	423	423	e121i1	260	265	260	265	260	e181i9	170	170	170	170	170	e242i6	538	538	538	538	538
e60i4	290	290	290	290	290	e121i2	237	237	237	237	237	e181i10	50	50	50	50	50	e242i7	380	380	380	380	380
e60i5	448	448	448	448	448	e121i3	185	185	185	185	185	e182i1	250	250	250	250	250	e242i8	659	659	659	659	659
e60i6	318	318	318	318	318	e121i4	294	294	294	294	294	e182i2	9	9	9	9	9	e242i9	546	546	546	546	546
e60i7	374	374	374	374	373	e121i5	221	221	221	221	221	e182i3	9	9	9	9	9	e242i10	494	494	494	494	494
e60i8	40	40	40	40	40	e121i6	349	349	349	349	348	e182i4	140	140	140	140	140	e243i1	421	422	421	422	421
e60i9	332	332	332	332	332	e121i7	369	369	369	369	369	e182i5	250	250	250	250	250	e243i2	382	382	382	382	382
e60i10	307	314	307	314	307	e121i8	268	269	268	269	268	e182i6	90	90	90	90	90	e243i3	532	532	532	532	532
e61i1	285	285	285	285	285	e121i9	342	342	342	342	341	e182i7	90	90	90	90	90	e243i4	367	368	367	368	367
e61i2	248	248	248	248	248	e121i10	269	269	269	269	269	e182i8	121	121	121	121	121	e243i5	409	409	409	409	409
e61i3	285	285	285	285	285	e122i1	261	263	261	263	260	e182i9	209	209	209	209	209	e243i6	449	449	449	449	449
e61i4	327	327	327	327	327	e122i2	296	296	296	296	296	e182i10	209	209	209	209	209	e243i7	414	414	414	414	414
e61i5	167	171	167	171	167	e122i3	201	201	201	201	201	e183i1	289	289	289	289	289	e243i8	312	312	312	312	312
e61i6	260	260	260	260	260	e122i4	293	293	293	293	293	e183i2	258	258	258	258	258	e243i9	407	407	407	407	407
e61i7	272	272	272	272	272	e122i5	229	229	229	229	229	e183i3	167	167	167	167	167	e243i10	463	464	463	464	463
e61i8	372	372	372	372	372	e122i6	220	224	220	224	220												