EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE HERMOSILLO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

INFORME FINAL DEL EJERCICIO SABÁTICO

Período del 19 de Agosto de 2019 al 18 de Febrero de 2020.

TIPO DE PROGRAMA ACADÉMICO:

ELABORACIÓN DE MATERIAL Y AUXILIARES DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA.

TÍTULO DEL PROYECTO: "MANUAL DE PRÁCTICAS DE CÁLCULO VECTORIAL"

PRESENTA:

DAGOBERTO ROSAS PANDURO

HERMOSILLO SONORA, A 18 DE FEBRERO DE 2020.

ÍNDICE

OBJETIVO GENERAL:

Proporcionar al maestro una herramienta teórico-práctica como apoyo para la enseñanza del Cálculo Vectorial, con lo cual el alumno pueda aplicar los principios y técnicas básicas de la materia para resolver problemas de ingeniería del entorno.

JUSTIFICACIÓN Y UTILIDAD DEL MANUAL:

La importancia de la realización de este documento se basa principalmente en la falta de herramientas a las que se enfrenta el docente al momento de impartir la materia de cálculo vectorial. Este curso se caracteriza por la amplitud y complejidad de su contenido, ya que es una extensión a varias variables de sus dos materias predecesoras: el cálculo diferencial y el cálculo integral. En esta materia se ven prácticamente todos los temas de las dos primeras matemáticas de licenciatura pero con mayor profundidad, ya que el alumno se enfrenta a la novedad de tener que analizar los temas con más de una variable, y eso lo obliga a enfrentar nuevos retos como saber graficar en tercera dimensión con la dificultad pedagógica que eso le agrega al trabajo del maestro.

Por lo anterior, es indispensable que el docente tenga los apoyos didácticos suficientes para brindar al alumno un abanico de casos y formas de resolver los problemas tan variados que presenta el curso. Este manual presentará una serie de ejercicios para que el alumno los resuelva en equipo y se nutra de los comentarios de sus compañeros; asimismo, el manual ofrecerá al maestro la solución de dichos casos, incluido el procedimiento. Además se incluirá una sección de exámenes de opción múltiple con la clave de las soluciones por separado como apoyo para el docente.

Estas herramientas didácticas, además de ayudar a unificar criterios de evaluación, buscan que el alumno obtenga los conocimientos de manera amplia para que los aplique eficientemente en materias posteriores de su carrera como ecuaciones diferenciales y algunos cursos de especialización; pero sobre todo tiene como finalidad primordial reducir el índice de reprobación de la materia y el índice de deserción en las carreras de ingeniería, justificando así la necesidad de la elaboración de este manual, y al mismo tiempo apoyando una de las finalidades de la institución, en cuanto a lograr las metas de egreso y titulación de sus alumnos.

PRÁCTICA 1: “ÁLGEBRA VECTORIAL Y SU GEOMETRÍA”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Conocer y desarrollar las propiedades de las operaciones con vectores para resolver problemas de aplicación en las diferentes áreas de la ingeniería.

INTRODUCCIÓN:

En el cálculo introductorio el estudio se concentra principalmente en las funciones de una variable cuyas gráficas existen en el plano bidimensional. De ahora en adelante iniciaremos el estudio del cálculo de varias variables con una introducción a los vectores en el espacio bidimensional, para luego expandirnos al espacio tridimensional.

En ciencias, matemáticas e ingeniería se distinguen dos cantidades importantes a saber: los escalares y los vectores. Muchas cantidades en geometría y física, como el área, el volumen, la temperatura, la masa y el tiempo se pueden caracterizar por medio de un sólo número real en unidades de medición apropiadas; estas cantidades se llaman **escalares**. Otras cantidades, como la fuerza, la velocidad y la aceleración, tienen magnitud y dirección y no pueden caracterizarse completamente por medio de un sólo número real, a estas cantidades se les llama **vectores**.

Los escalares y los vectores se analizan por separado y luego interactúan entre ellos para analizar resolver problemas prácticos de ingeniería.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

El cálculo vectorial es la expansión a más de dos dimensiones del cálculo diferencial e integral; es decir, prácticamente todos los temas que se ven en cálculo diferencial e integral con una variable independiente, ahora se analizarán nuevamente, pero con más de una variable independiente. Por otro lado, en la siguiente práctica se utilizan escalares y vectores para realizar los llamados producto punto y producto cruz, con aplicaciones prácticas sencillas. Además, en álgebra lineal se utiliza la noción del producto vectorial en el cálculo de determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Se analizarán las características principales de las cantidades escalares y vectoriales, así como las propiedades de los escalares y los vectores para que el alumno los pueda representar gráficamente y sea capaz de realizar operaciones entre ellos.

El análisis gráfico debe empezar en dos dimensiones con vectores y productos de escalares con vectores, para posteriormente representar vectores y problemas con vectores en tercera dimensión.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Hallar los vectores **u** y **v** cuyos puntos inicial y final se dan. Mostrar que **u** y **v** son equivalentes.

a) u: (-4,0), (1,8) b) (-4,-1), (11,-4)
v: (2,-1), (7,7) (10, 13), (25, 10)

II. Hallar el vector unitario en la dirección de **u** y verificar que tiene longitud 1.

a) **u** = 5i + 15j b) **u** = -6.2i + 3.4j

III. En los siguientes ejercicios, hallar lo siguiente: $\|\boldsymbol{\underline{u}}\|$, $\|\underline{u}+\underline{v}\|$ y $\left\|\frac{\underline{u}+\underline{v}}{\|\underline{u}+\underline{v}\|}\right\|$

a) **u** = j y **v** = 3i - 3j b) **u** = 2i - 4j y **v** = 5i + 5j

IV. Hallar las componentes del vector **v** dadas su magnitud y el ángulo que forma con el eje x positivo

a) $\|\underline{v}\|$= 5, θ= 120^o
b) $\|\underline{v}\|$= 1, θ= 3.5^o

V. Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Encontrar AB + BC + CA

VI. Sean **u** = i + j, **v** = j + k y **w** = a**u** + b**v**

a) Dibujar **u** y **v**
b) Si **w** = 0, demostrar que tanto a como b deben ser cero.
c) Hallar a y b tales que **w** = i + 2j + k
d) Probar que ninguna elección de a y b da **w** = i + 2j + 3k

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 1 (En equipo)

I. a) **u** = $\{1-(-4), 8-0\}$= $\{5, 8\}$

v = $\{7-2, 7-(-1)\}$= $\{5, 8\}$

u = v

b) **u** = $\{11-(-4), -4-(-1)\}$= $\{15, -3\}$

v = $\{25-0, 10-13\}$= $\{15, -3\}$

u = v

II. a) $\left\|\underline{u}\right\|$= $\sqrt{5^2+15^2}$= $\sqrt{250}$ = $5\sqrt{10}$

v = $\frac{\underline{u}}{\left\|\underline{u}\right\|}$= $\frac{\{5,15\}}{5\sqrt{10}}$= $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right\}$ **vector unitario**

b) $\left\|\underline{u}\right\|$= $\sqrt{(-6.2)^2+(3.4)^2}$= $\sqrt{50}$ = $5\sqrt{2}$

v = $\frac{\underline{u}}{\left\|\underline{u}\right\|}$= $\frac{\{-6.2,3.4\}}{5\sqrt{2}}$= $\left\{\frac{-1.24}{\sqrt{2}}, \frac{0.68}{\sqrt{2}}\right\}$ **vector unitario**

III. a) $\left\|\underline{u}\right\|$= $\sqrt{0+1}$ = 1

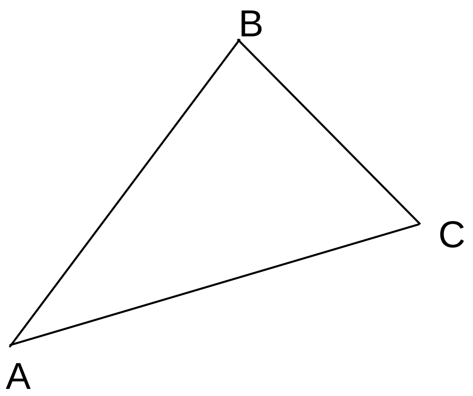
u + v = $\{3, -2\}$ → $\left\|\underline{u}+\underline{v}\right\|$ = $\sqrt{9+4}$= $\sqrt{13}$

$\frac{\underline{u}+\underline{v}}{\left\|\underline{u}+\underline{v}\right\|}$ = $\frac{\{3,-2\}}{\sqrt{13}}$ $\quad$ $\left\|\frac{\underline{u}+\underline{v}}{\left\|\underline{u}+\underline{v}\right\|}\right\|$ = 1

IV. **a)** v = 5$[(\cos 120^o)i + (sen\ 120^o)j]$ = $\frac{-5}{2}$i + $\frac{5\sqrt{3}}{2}$j

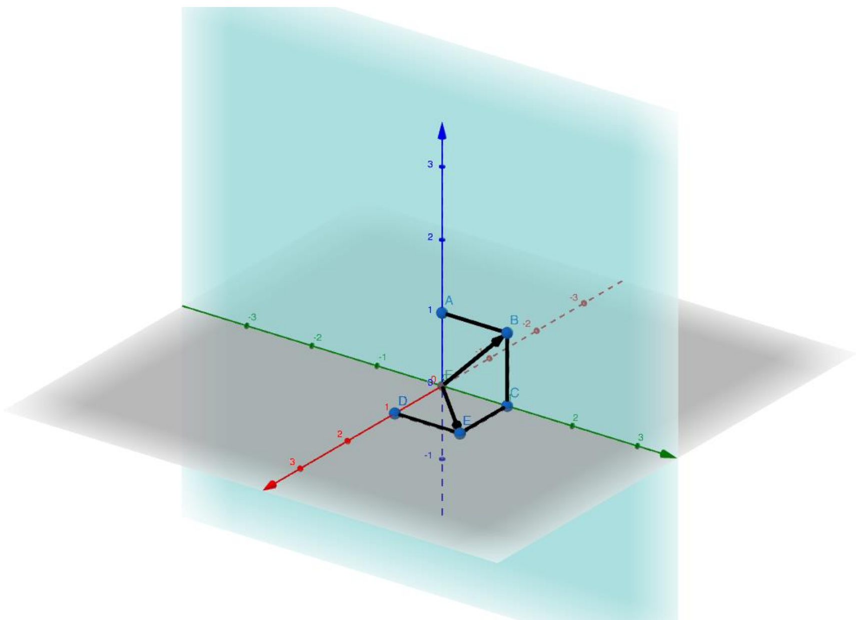
b) v = $[(\cos 3.5^o)i + (sen\ 3.5^o)j]$ = 0.9981i + 0.0610j

V.



AB + BC = AC Por lo tanto AB + BC + CA = AC + CA = 0

VI. a)



b) $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a\mathbf{i} + (a + b)\mathbf{j} + b\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$a = 0, \quad a + b = 0, \; b = 0$

Así, ambos a y b son cero

c) $a\mathbf{i} + (a + b)\mathbf{j} + b\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$a = 1, \; b = 1$

$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

d) $a\mathbf{i} + (a + b)\mathbf{j} + b\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$a = 1, \; a + b = 2, \; b = 3$

Lo cual no es posible

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Cantidad física que puede valer 1, y sólo tiene magnitud
   a) Vector
   b) Escalar
   c) Vector unitario
   d) Ninguna anterior

2. Dos vectores pueden sumarse colocándose de “punta a cola “ sin importar cuál se dibuja primero
   a) Propiedad distributiva
   b) Propiedad asociativa
   c) Propiedad conmutativa
   d) Ninguna anterior

3. Si tenemos dos vectores **u** y **v** y algún escalar c tal que **u** = c**v**, entonces los dos vectores son:
   a) Paralelos
   b) Perpendiculares
   c) Colineales
   d) Ninguna anterior

4. En un sistema dextrógiro, un punto que está colocado sobre el eje y, tiene 0 en su coordenada
   a) x
   b) y
   c) z
   d) Ninguna anterior

5. El siguiente punto se localiza siete unidades delante del plano yz, dos unidades a la izquierda del plano xz y una unidad debajo del plano xy
   a) (7,-2,-1)
   b) (-7, 2, 1)
   c) (-7, -2, -1)
   d) Ninguna anterior

6. Vector paralelo a **z** = $\frac{1}{2}$i - $\frac{2}{3}$j + $\frac{3}{4}$k
    a) 6i - 4j + 9k
    b) -i + 4/3j - 3/2k
    c) 12i + 9k
    d) ¾ i - j + 9/8k

7. Determine la localización de un punto (x, y, z) que satisfaga las condición $|y| \leq 3$
    a) El punto está abajo de y = 3
    b) El punto está a la izquierda de y = 3
    c) El punto está entre los planos y = -3 y y = 3
    d) Ninguna anterior

8. Hallar un vector unitario en la dirección opuesta a **u** = 6i + 8k
    a) - 6/10 i - 8/10k
    b) ⅗ i + ⅘ k
    c) $-6/\sqrt{10}$i - 8/$\sqrt{10}$k
    d) Ninguna anterior

9. Seleccione la ecuación que describe el cuerpo siguiente: "Esfera sólida de radio 4, centrada en (2, -3, 4)":
    a) $-2x^2 + 3y^2 - 4z^2 \leq 16$
    b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x - 6y + 8z - 13$
    c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq -4x + 6y - 8z - 13$
    d) Ninguna anterior

10. Si tenemos el vector **v** = i - ⅔ j + ½ k, su punto inicial (0, 2, 5/2), encuentre el punto final.
    a) (1, -4/3, 3)
    b) (1, 4/3, 3)
    c) (1, 4/3, -3)
    d) Ninguna anterior

SOLUCIÓN PRÁCTICA 1 (Etapa individual)

1. **b)**
2. **c)**
3. **a)**
4. **a)**
5. **a)**
6. **d)**
7. **c)**
8. **a)**
9. **b)**
10. **b)**

PRÁCTICA 2: “PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL”

COMPETENCIA A DESARROLLAR

Calcular y analizar características entre vectores como ángulos, paralelismo, perpendicularidad, entre otras.

INTRODUCCIÓN:

En esta práctica consideraremos dos tipos de productos entre vectores que se originaron en el estudio de la mecánica, la electricidad y el magnetismo: el producto punto y el producto cruz. El producto punto opera tanto en el espacio bidimensional como en el tridimensional y genera un número. Mientras que el producto cruz, sólo está definido para vectores en el espacio tridimensional y genera otro vector en el espacio tridimensional.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

Los productos entre vectores se relacionan con la aplicación de varios temas de física, como determinación de volúmenes, cálculo de fuerzas, obtención de cantidad de trabajo, cálculo de torques o momentos de fuerzas, etc. La base para su estudio está en la primera práctica con la caracterización de los vectores y su interpretación geométrica. Más adelante se verá una práctica denominada “funciones vectoriales” donde se analizan todo los ámbitos del cálculo para funciones definidas por vectores.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

El alumno debe distinguir las cantidades que entre vectores y escalares, y saber dónde se aplica cada caso para eso debe conocer las propiedades de cada uno de ellos. Además es importante que establezca con facilidad el paralelismo y la ortogonalidad entre los vectores para cuando tenga que resolver problemas de aplicación en el área de la física. Debe comprender los espacios en dos y tres dimensiones para graficar sin error, empezando con gráficas conocidas y, posteriormente poder localizar cualquier vector, desde su dibujo hasta el cálculo conjunto con otros vectores. Cualquier aplicación física con trazos bien hechos y propiedades bien aplicadas conducirá a un problema claro y de fácil comprensión para el estudio del alumno.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Determine a) **u** · **v**, b) **u** · **u**, c) $||\boldsymbol{u}||^2$, d) **(u · v)v** y e) **u** · **(2v)** para los siguientes pares de vectores

1. **u** = -4i + 8j y **v** = 6i + 3j
2. **u** = 2i + j - 2k y **v** = i - 3j + 2k

II. Determine a) **u x v**, b) **v x u** y c) **v x v** para los siguientes pares de vectores

1. **u** = 3i + 5k y **v** = 2i+ 3j - 2k
2. **u** = 3i -2j -2k y **v** = i + 5j + k

III. Los siguientes puntos son los vértices de un triángulo, compruebe que los vectores forman un triángulo rectángulo: (1, 2, 0), (0, 0, 0) y (-2, 1, 0)

IV. Calcule **u** x **v** y compruebe que es ortogonal tanto a **u** como a **v**

u = i + 6j **v** = -2i + j + k

V. PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN: Una fuerza de 200 libras actúa sobre el soporte mostrado en la figura.

a) Determine el vector **AB** y el vector **F** que representa la fuerza (**F** estará en términos de θ).
b) Calcular la magnitud del momento respecto a **A** evaluando $||\underline{\boldsymbol{AB}}\ \boldsymbol{x}\ \underline{\boldsymbol{F}}||$.
c) Usar el resultado del apartado b) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 30^o$.
d) Usar el resultado del apartado b) para determinar el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. A ese ángulo, ¿Cuál es la relación entre los vectores **F y AB**?, ¿Es lo que se esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?
e) Usar una graficadora para representar la función de la magnitud del momento respecto a A para $0^o \leq \theta \leq 180^o$. Hallar el cero de la función en el dominio dado. Interpretar el significado del cero en el contexto del problema.

VI. Use el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes u,v y w.

u = i + 3j +k v = 6j + 6k w = -4i - 4k

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 2 (En equipo)

I. 1 a) $\underline{u} \cdot \underline{v} = (-4i + 8j) \cdot (6i + 3j) = (-4)6 + 8(3) = 0$

b) $\underline{u} \cdot \underline{u} = (-4i + 8j) \cdot (-4i + 8j) = (-4)(-4) + 8(8) = 80$

c) $\left|\left|\underline{u}\right|\right|^2 = 116$

d) $(\underline{u} \cdot \underline{v})\underline{v} = 0\underline{v} = 0$

e) $\underline{u} \cdot (2\underline{v}) = 2(\underline{u} \cdot \underline{v}) = 2(0) = 0$

2. a) $\underline{u} \cdot \underline{v} = (2)1 + 1(-3) + (-2)(2) = -5$

b) $\underline{u} \cdot \underline{u} = (2)2 + 1(1) + (-2)(-2) = 9$

c) $\left|\left|\underline{u}\right|\right|^2 = 9$

d) $(\underline{u} \cdot \underline{v})\underline{v} = -5(i - 3j + 2k) = -5i + 15j - 10k$

e) $\underline{u} \cdot (2\underline{v}) = 2(\underline{u} \cdot \underline{v}) = 2(-5) = -10$

II. 1. a) $\underline{u}\ x\ \underline{v} = det\ |(3i + 5k)x(2i + 3j - 2k)| = -15i + 16j + 9k$

b) $\underline{v}\ x\ \underline{u} = -(\underline{u}\ x\ \underline{v}) = 15i - 16j - 9k$

c) $\underline{v}\ x\ \underline{v} = 0$

2. a) $\underline{u}\ x\ \underline{v} = det\ |(3i - 2j - 2k)x(i + 5j + k)| = 8i - 5j + 17k$

b) $\underline{v}\ x\ \underline{u} = -(\underline{u}\ x\ \underline{v}) = -8i + 5j - 17k$

c) $\underline{v}\ x\ \underline{v} = 0$

III. El vector $i + 2j\ que\ se\ obtiene\ de\ los\ puntos\ (1,2,0)\ y\ (0,0,0)$, es perpendicular al vector $-2i + j\ que\ se\ obtiene\ de\ los\ puntos\ (-2,1,0)\ y\ (0,0,0)$, entonces:$(i + 2j + 0k) \cdot (-2i + j + 0k) = 0$, por lo tanto el triángulo es un triángulo rectángulo.

IV. $\underline{u}\ x\ \underline{v} = det|(i + 6j + 0k)\ x\ (-2i + j + k)| = 6i - j + 13k$

$\underline{u} \cdot (\underline{u}\ x\ \underline{v}) = 1(6) + 6(-1) = 0 \ \Rightarrow \underline{u}$ es perpendicular a $(\underline{u}\ x\ \underline{v})$

$\underline{v} \cdot (\underline{u}\ x\ \underline{v}) = -2(6) + 1(-1) + 1(13) = 0 \ \Rightarrow \ \underline{v}$es perpendicular a $(\underline{u}\ x\ \underline{v})$

V. a) $\underline{AB} = \frac{-5}{4}j + k \quad y \quad \underline{F} = -200(cos\theta\ j + sen\theta\ k)$

b) $det\ \underline{AB}\ x\ \underline{F} = \left|(0i + \frac{-5}{4}j + k)\ x\ (0i - 200cos\theta\ j - 200sen\theta\ k)\right|$

$\left||\underline{AB}\ x\ \underline{F}|\right| = |250sen\theta + 200cos\theta| = 25|10sen\theta + 8cos\theta|$

c) Para 30^o, $\left||\underline{AB}\ x\ \underline{F}|\right| = 25(10(\frac{1}{2}) + 8(\frac{\sqrt{3}}{2})) = 25(5 + 4\sqrt{3}) \approx 298.2$

d) Si $M = \left||\underline{AB}\ x\ \underline{F}|\right|$

$$\frac{dM}{d\theta} = 25(10cos\theta - 8sen\theta) = 0 \Rightarrow tan\theta = \frac{5}{4} \Rightarrow \theta \approx 51.34^o$$

Los vectores son ortogonales, porque es donde se alcanza el momento de torsión máximo.

VI. $\underline{u} \cdot (\underline{v}\ x\ \underline{w}) = det\ |(0i + 6j + 6k)\ x\ (-4i + 0j - 4k)| = \ -72$

$$V = \left|\underline{u} \cdot (\underline{v}\ x\ \underline{w})\right| = 72$$

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Calcule el producto vectorial de los vectores unitarios **k** x **j**
a) 0
b) -i
c) -j
d) Ninguna anterior

2. Calcular $\underline{u} \cdot (\underline{v}\ x\ \underline{w})$para los vectores **u = i + j + k, v = 2i +j y w = k**
a) 1
b) -1
c) 0
d) Ninguna anterior

3. Calcule el área del triángulo con los vértices dados (½ $\left\|\underline{u}\ x\ \underline{v}\right\|$) (2,-3, 4), (0, 1,2) y (-1, 2, 0)
a) 11
b) -6i - 2j + 2k
c) $\sqrt{11}$
d) Ninguna anterior

4. Calcule el ángulo θ entre los vectores **u = 3i + j   y   v = 2i - j**
a) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) Ninguna anterior

5. Si $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ entonces los vectores son:
a) Perpendiculares
b) Paralelos
c) Colineales
d) Ninguna anterior

6. Encuentre el ángulo de dirección β del siguiente vector **u = - 4i + 3j + 5k**
a) 124.4^o
b) 45^o
c) 64.9^o
d) Ninguna anterior

7. Propiedad que no es válida en el producto vectorial
a) Distributiva
b) Elemento nulo
c) Conmutativa
d) Ninguna anterior

8. Calcule el área del paralelogramo que tiene los vectores dados como lados adyacentes. **u = i + j + k y v = j + k**
a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{13}$
c) 2
d) Ninguna anterior

9. Calcule el triple producto escalar $\underline{u} \cdot (\underline{u}\ x\ \underline{v})$ para **u = i + 6j y v = -2i + j + k**
a) 18
b) 6i - j + 13k
c) 0
d) Ninguna anterior

10. Verifique que los puntos son los vértices de un paralelogramo y calcule su área: (2, -3, 1), (6, 5, -1), (3, -6, 4) y (7, 2, 2)
a) $2\sqrt{230}$
b) 920
c) $\sqrt{194}$
d) Ninguna anterior

SOLUCIÓN PRÁCTICA 2 (Etapa individual)

1. **b)**
2. **b)**
3. **c)**
4. **c)**
5. **a)**
6. **c)**
7. **c)**
8. **a)**
9. **c)**
10. **a)**

PRÁCTICA 3: “ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE ALGUNAS CURVAS PLANAS Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Establecer ecuaciones de curvas planas en coordenadas rectangulares o en forma paramétrica, para brindarle al alumno las herramientas necesarias para el estudio de curvas más sofisticadas.

INTRODUCCIÓN:

Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo la más conveniente, de describir una curva en el plano de coordenadas. en esta práctica consideraremos una manera diferente de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones del cálculo.

Hasta ahora se ha representado una gráfica mediante una sola ecuación con dos variables. Ahora estudiaremos situaciones en las que se emplean tres variables para representar una curva en el plano.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

Esta práctica está directamente relacionada con el cálculo diferencial por la similitud en la construcción de gráficas. También está muy relacionada con el área de física por el tipo de situaciones que se representan como el análisis del movimiento de los objetos. al mismo tiempo se van sentando las bases para la graficación en otros sistemas de coordenadas, como coordenadas polares en dos dimensiones, y coordenadas cilíndricas y esféricas en tres dimensiones.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

El alumno debe entender la relación entre las variables y el parámetro utilizado. Debe hacerse siempre una tabulación detallada para que la gráfica quede bien definida. Deben utilizarse suficientes datos para lograr la “suavidad” necesaria en la representación gráfica final de la situación analizada, y debe incluirse la dirección del movimiento de la gráfica por medio de flechas, según el dominio utilizado.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Considere las ecuaciones paramétricas $x = 4cos^2\theta \quad y \quad y = 2sen\theta$

a) Haga una tabulación para hallar x y y con 5 valores del ángulo θ

b) Haga la gráfica con los puntos (x, y)generados en la tabulación anterior. Indique la orientación de la gráfica.

c) Halle la ecuación rectangular mediante la eliminación del parámetro y dibuje su gráfica.

d) Si se seleccionaran valores de θ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$para la tabla del inciso a), ¿Sería diferente la gráfica del inciso b)?. Explicar el razonamiento.

II. Trace la curva que representa las ecuaciones paramétricas y obtenga la ecuación rectangular por medio de la eliminación del parámetro

a) $x = 1 + \frac{1}{t}, \quad y = t - 1$

b) $x = tan^2\theta, \quad y = sec^2\theta$

III. Halle $\frac{dy}{dx}$ para:

a) $x = \sqrt[3]{t} \quad y \quad y = 4 - t$

b) $x = 2e^{\theta}, \ y \quad y = e^{-\frac{\theta}{2}}$

IV. Hallar $\frac{dy}{dx} \quad y \quad \frac{d^2y}{dx^2}$, así como la pendiente y la concavidad (de ser posible) en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

a) $x = \sqrt{t} \ \ y \ \ y = \sqrt{t - 1} \qquad t = 2$

b) $x = \theta - sen\theta \quad y \quad y = 1 - cos\theta \qquad \theta = \pi$

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

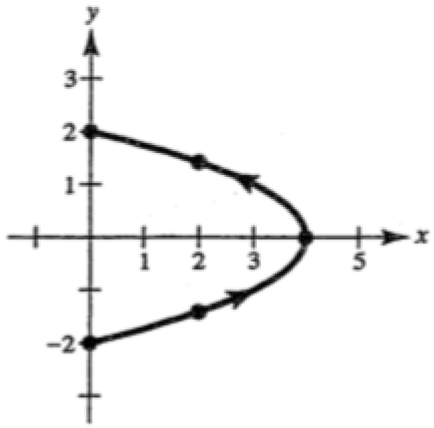
SOLUCIONES PRÁCTICA 3 (En equipo)

I a) $\boldsymbol{x = 4\cos^2\theta}$ $\boldsymbol{y = 2\,sen\,\theta}$

$\boldsymbol{0 \leq x \leq 4}$ $\boldsymbol{-2 \leq y \leq 2}$

θ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
x	0	2	4	2	0
y	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2

b)



c) $\frac{x}{4} = cos^2\theta$

$\frac{y^2}{4} = sen^2\theta$ $\frac{x}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

$x = 4 - y^2, \quad -2 \leq y \leq 2$

d) La gráfica estaría orientada en la dirección opuesta

II. a) $x = 1 + \frac{1}{t}$

$y = t - 1$

$x = 1 + \frac{1}{t} \quad implica \quad t = \frac{1}{x-1}$

$y = \frac{1}{x-1} - 1$

b) $x = tan^2\theta$

$y = sec^2\theta$

$sec^2\theta = tan^2\theta + 1$

$y = x + 1$

$x \geq 0$

III. a) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1}{(1/3)t^{\frac{-2}{3}}} = -3t^{\frac{2}{3}}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(-1/2)e^{\frac{-\theta}{2}}}{2e^{\theta}} = -\frac{1}{4}e^{-3\theta/2} = \frac{-1}{4e^{3\theta/2}}$

IV. a) $x = \sqrt{t}\,, \quad y = \sqrt{t-1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1/(2\sqrt{t-1})}{1/(2\sqrt{t})} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}} = \sqrt{2}\; cuando\; t = 2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[\sqrt{t-1}/(2\sqrt{t}) - \sqrt{t}(1/2\sqrt{t-1})\right]/(t-1)}{1/(2\sqrt{t})} = \frac{-1}{(t-1)^{3/2}} = -1 \quad cuando \;\; t = 2$$

Cóncava hacia abajo

b) $x = \theta - sen\theta, \quad y = 1 - cos\theta$ç

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\theta}{1-cos\theta} = 0 \quad cuando \quad \theta = \pi$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{\left[(1-cos\theta)cos\theta - sen^2\theta\right]}{(1-cos\theta)^2}}{1-cos\theta} = \frac{-1}{(1-cos\theta)^2} = -\frac{1}{4} \quad cuando \quad \theta = \pi$$

Cóncava hacia abajo

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. ¿Cuál es la ecuación rectangular que representa a $x = 3 - 2t \;\; y \;\; y = 2 + 3t$?

a) $2x - 3y + 5 = 0$
b) $2y + 3x - 13 = 0$
c) $3x - 2y - 8 = 0$
d) Ninguna anterior

2. ¿Cuál es la ecuación rectangular que representa a $x = 2t^2 \;\; y \;\; y = t^4 + 1$?

a) $y = \frac{x^2}{4} + 1$
b) $y = \frac{x^2}{4} - 1$
c) $y = \frac{x^4}{2} + 1$
d) Ninguna anterior

3. ¿Cuál es la ecuación rectangular que representa a $x = 3cos\theta \;\; y \;\; y = 3sen\theta$?

a) $x^2 + y^2 = 3$
b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 0$
c) $x^2 + y^2 = 9$
d) Ninguna anterior

4. ¿Qué gráfica resulta de las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = 2cos\theta \quad y \quad y = 6sen\theta$?

a) Una elipse
b) Dos curvas
c) Curvas periódicas
d) Ninguna anterior

5. ¿Qué gráfica resulta de las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = sec\theta \quad y \quad y = cos\theta$?
a) Curvas periódicas
b) Curvas asintóticas
c) Una recta
d) Ninguna anterior

6. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la siguiente ecuación rectangular $y = 3x - 2$:
a) $x = t \quad y \quad y = 3t - 2$
b) $x = t - 3 \quad y \quad y = 3t - 11$
c) $x = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \quad y \quad y = 2t$
d) Todas las anteriores

7. Halle la primera derivada $\frac{dy}{dx}$ de las ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{t} \quad y \quad y = 3t - 1 \quad en\,el\,punto\ t = 1$
a) 6
b) $\frac{1}{3}$
c) $\sqrt{3}$
d) Ninguna anterior

8. Halle la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de las ecuaciones paramétricas $x = 2cos\theta \quad y \quad y = 2sen\theta \quad en\,el\,punto\ \theta = \frac{\pi}{4}$
a) $\sqrt{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $-\sqrt{2}$
d) Ninguna anterior

9. Halle la pendiente de las siguientes ecuaciones paramétricas en el punto dado: $x = t^2 + 3t + 2 \quad y \quad y = 2t \quad en\ t = 0$.

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{2}{9}$
d) d) Ninguna anterior

10. Halle la concavidad de las siguientes ecuaciones paramétricas en el punto dado: $x = cos^3\theta \quad y \quad y = sen^3\theta \quad para\ \theta = \frac{\pi}{4}$.

a) Cóncava hacia abajo
b) Cóncava hacia arriba
c) Punto de inflexión
d) Sin concavidad

SOLUCIÓN PRÁCTICA 3 (Etapa individual)

1. **b)**
2. **a)**
3. **c)**
4. **a)**
5. **b)**
6. **d)**
7. **a)**
8. **c)**
9. **a)**
10. **b)**

PRÁCTICA 4: "CURVAS PLANAS Y GRAFICACIÓN EN COORDENADAS POLARES"

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Establecer ecuaciones de curvas planas en coordenadas rectangulares, polares, o en forma paramétrica, para brindarle al alumno las herramientas necesarias para el estudio de curvas más sofisticadas.

INTRODUCCIÓN:

Hasta ahora hemos utilizado el sistema de coordenadas rectangulares para especificar un punto P o describir una curva C en el plano. Este sistema es una retícula de líneas horizontales y verticales donde un punto se determina por la intersección de dos rectas perpendiculares en el plano. Otro sistema para localizar puntos en el plano es el sistema de coordenadas polares.

Para establecer un sistema de coordenadas polares empleamos un sistema de círculos centrados en el punto O, denominado polo, y líneas rectas o rayos que emanen de O. Tomamos como eje de referencia una media línea horizontal dirigida hacia la derecha del polo, a la cual se le nombra eje polar. Un punto P se identifica mediante el par ordenado (r, θ), que son las coordenadas polares de P.

Por otro lado veremos que la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$es el conjunto de puntos P con al menos un conjunto de coordenadas polares que satisfacen la ecuación.

Una manera de trazar la gráfica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas rectangulares para luego trazar la gráfica de la ecuación rectangular, con esto se comprueba que hay más de una manera de representar un mismo punto en el plano.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

Algunas gráficas , especialmente curvas, resultan más fáciles si se grafican con una recta y un ángulo, por eso se escogen las coordenadas polares en lugar de las rectangulares que se usaron en cálculo diferencial e integral.

Las ecuaciones que se utilizaron en los dos cursos anteriores ahora pueden ser transformadas a coordenadas polares y se podrá observar que gráficas complejas en coordenadas rectangulares, son sumamente sencillas de tabular y graficar en coordenadas polares, como el caso de una espiral $r = \theta$.

El uso de coordenadas polares será la base de la graficación en tercera dimensión de las coordenadas cilíndricas, pues al par ordenado (r, θ)sólo se le agrega la profundidad de la coordenada z para tener la triada ordenada (r, θ, z).

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Para poder hacer la transformación de coordenadas rectangulares a polares , lo primero que debe hacer el alumno es aprenderse las fórmulas y saber el origen de cada una de ellas para posteriormente poder transformar también ecuaciones de un sistema a otro.

También es conveniente que el alumno construya su propio plano polar y obtenga varias copias de él para estar practicando la construcción de las gráficas sencillas y luego más elaboradas. Entre más subdivisiones tenga el plano polar, mejor.

Debe analizarse de antemano la posible simetría de la gráfica para construirla más rápido y con menos trabajo, y debe hacerse lo más clara y grande posible .

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Representar gráficamente el punto dado en coordenadas polares y hallar las coordenadas rectangulares correspondientes:

a) $(-2, \frac{7}{4}\pi)$

b) $(-3, -1.57)$

II. Halle dos conjuntos de coordenadas polares del punto con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) $(4, -2)$

b) (3, -$\sqrt{3}$)

III. Transforme la ecuación rectangular a la forma polar y trace su gráfica

a) $x = 10$

b) $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$

IV. Transforme la ecuación polar a la forma rectangular y trazar su gráfica

a) $r = 2csc\theta$

b) $r = 5cos\theta$

V. Grafique la siguiente ecuación polar y halle un intervalo para θen el que la gráfica se trace sólo una vez

a) $r = 5(1 - 2sen\theta)$

b) $r^2 = 4sen2\theta$

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

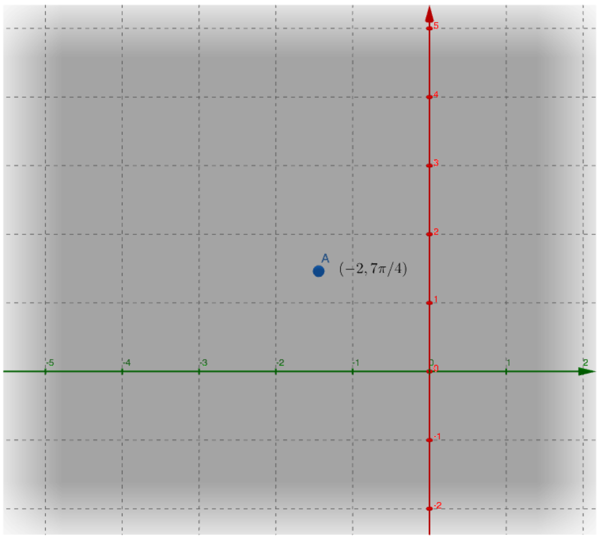
Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 4 (En equipo)

I. **a)** $(-2,\frac{7\pi}{4})$

$$x = -2\ cos\ \frac{7\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

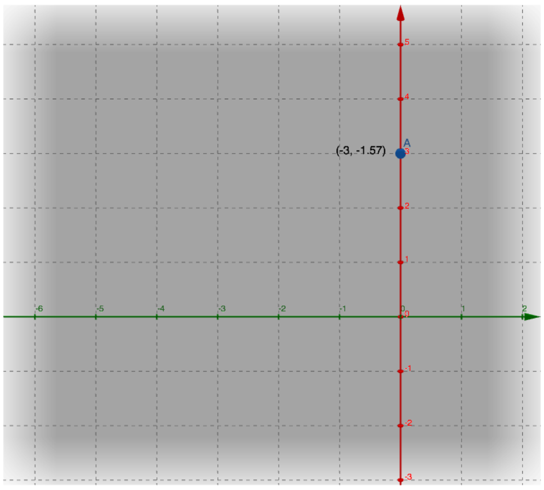
$$y = -2\ sen\ \frac{7\pi}{4} = \sqrt{2} \qquad\qquad (x,y) = (-\sqrt{2},\sqrt{2}\ )$$



b) $(-3,-1.57)$

$$x = -3\ cos\ (-1.57) \approx -0.0024$$

$$y = -3\ sen\ (-1.57) \approx 3 \qquad\qquad (x,y) =$$
$(-0.0024, 3)$



II. **a)** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathbf{4},-\mathbf{2})$

$$\boldsymbol{r} = \pm\sqrt{\mathbf{16}+\mathbf{4}} = \pm\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}$$

$$\boldsymbol{tan\theta} = \frac{-\mathbf{2}}{\mathbf{4}} = \frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$\theta \approx -\mathbf{0.464}$

$$(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}},-\mathbf{0.464}),(-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}},\mathbf{2.678})$$

b) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathbf{3},\sqrt{\mathbf{3}})$

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\mathbf{9}+\mathbf{3}} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{tan\theta} = \frac{-\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$$

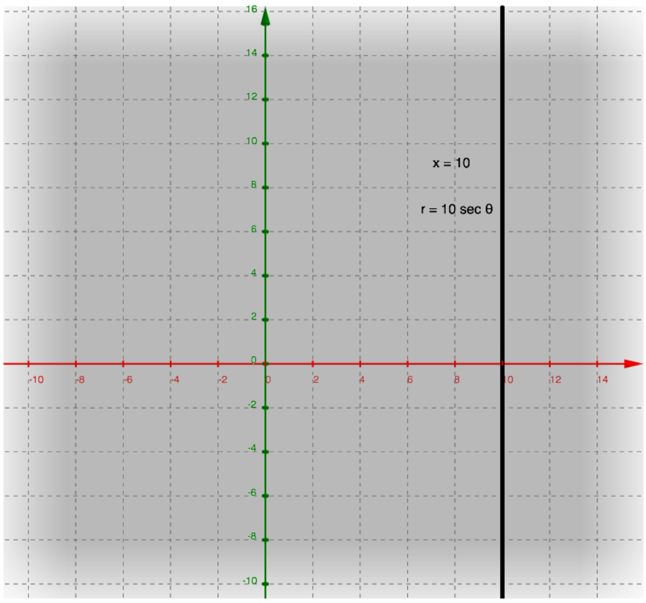
$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{11}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}})$$

$= (-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}})$

III. **a)** $\boldsymbol{x} = \mathbf{10}$

$\boldsymbol{rcos\theta} = \mathbf{10}$

$\boldsymbol{r} = \mathbf{10}\boldsymbol{sec\theta}$ $\quad$ $\boldsymbol{recta\ vertical}$

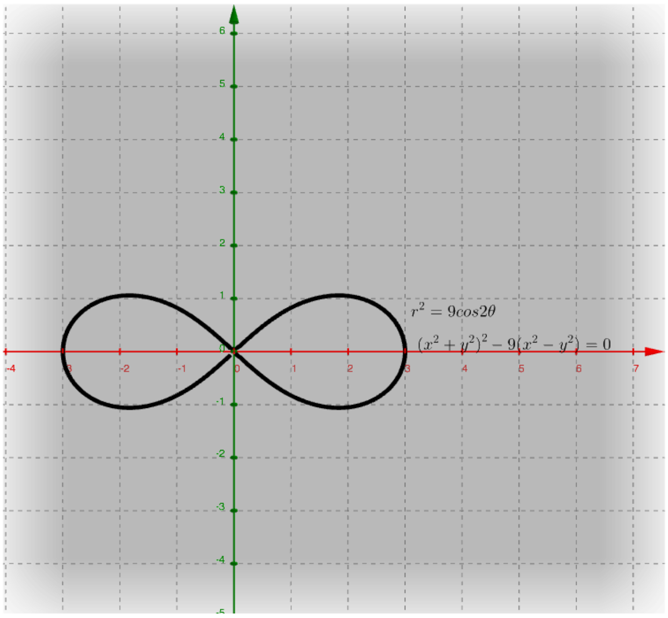


b) $$(x^2+y^2)^2-9(x^2-y^2)=0$$

$$(r^2)^2-9(r^2cos^2\theta \quad -r^2sen^2\theta)=0$$

$$r^2[r^2-9(cos2\theta)]=0$$

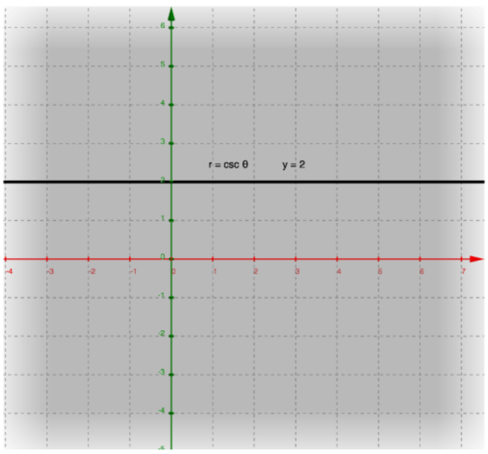
$$r^2=9cos2\theta \quad Limaz\acute{o}n$$



IV. a) $$r=2\ csc\ \theta$$

$$r\ sen\ \theta\ =2$$

$$y=2 \quad \Rightarrow y-2\ =\ 0 \qquad recta\ horizontal$$



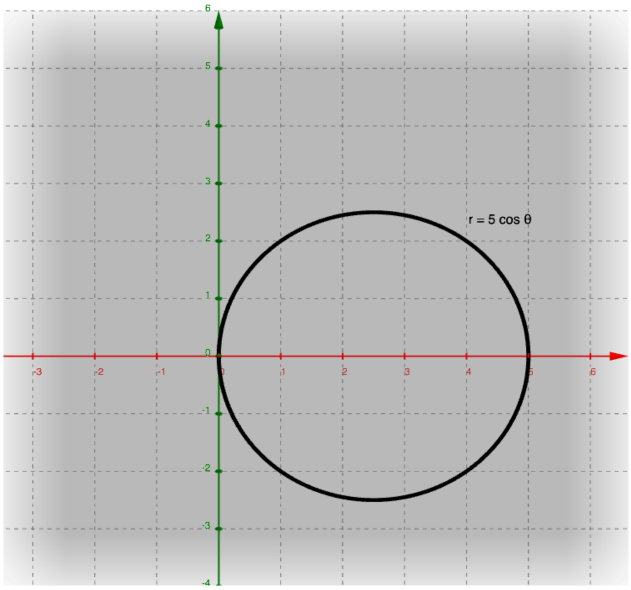
b) $$\boldsymbol{r = 5\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{r^2 = 5\,r\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 5x}$$

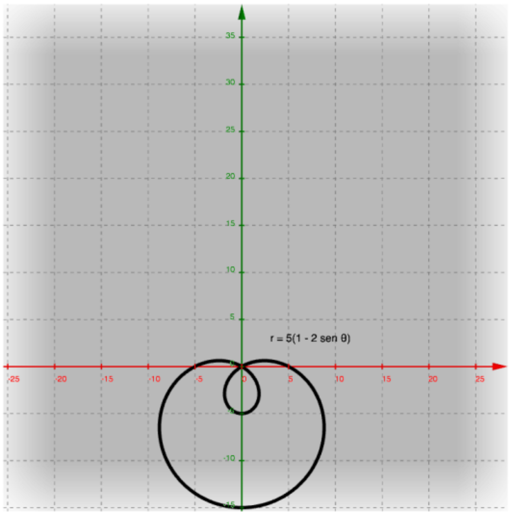
$$\boldsymbol{x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 = \frac{25}{4}}$$

$$\boldsymbol{(x - \tfrac{5}{2})^2 + y^2 = (\tfrac{5}{2})^2}$$ ***círculo de radio*** $\boldsymbol{\frac{5}{2}}$ ***centrado en el punto*** $\boldsymbol{(\frac{5}{2}, 0)}$.



V. **a)** $r = 5(1 - 2\,sen\theta)$ $\quad$ $Intervalo\ pedido\ es\ 0 \leq \theta \preccurlyeq 2\pi$

$Cardioide\ con\ rizo\ interior$

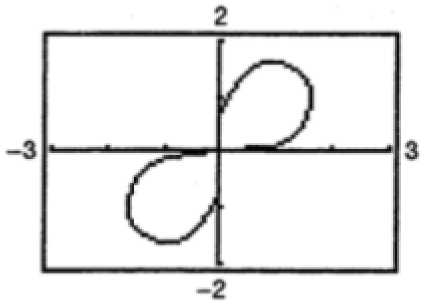


b) $r^2 = 4sen2\theta$

$\boldsymbol{r_1 = 2\sqrt{sen2\theta}}$

$\boldsymbol{r_2 = -2\sqrt{sen2\theta}}$ $\quad$ $\boldsymbol{Intervalo\ pedido\ es\ 0 \leq \theta \leqslant \frac{\pi}{2}}$

$Limazón\ a\ 45^o$



ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Halle las coordenadas rectangulares correspondientes del punto polar $(-2\,\frac{11\pi}{6})$
a) $(-1.73,1)$
b) $(-1, 1.73)$
c) $(1, -1.73)$
d) Ninguna anterior

2. Halle un conjunto de coordenadas polares del punto dado en coordenadas rectangulares $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
a) $(45, 6)$
b) $(6, 6)$
c) $(6, 0.785)$
d) Ninguna anterior

3. ¿Qué figura resulta de la siguiente ecuación polar $r = 4 + 3cos\theta$?
a) Caracol con hoyuelo
b) Cardioide
c) Caracol con lazo interior
d) Ninguna anterior

4. ¿Qué figura resulta de la siguiente ecuación polar $r = 2cos3\theta$?
a) Rosa de 6 pétalos
b) Rosa de 3 pétalos
c) Rosa de 5 pétalos
d) No es una curva rosa

5. Transforme la ecuación rectangular a la forma polar $x = 10$
a) $r = 10csc\theta$
b) $r = 10sen\theta$
c) $r = 10cos\theta$
d) Ninguna anterior

6. Transforme la ecuación polar a la forma rectangular $\theta = \frac{5\pi}{6}$
a) $\frac{\sqrt{3}}{3}x$
b) $\frac{-\sqrt{3}}{3}x$
c) $\frac{3}{\sqrt{3}}x$
d) Ninguna anterior

7. Círculo con centro en $y = \frac{1}{2}$y de radio $r = \frac{1}{2}$
a) $r = sen\theta$
b) $r = \frac{1}{2}$
c) $\theta = \frac{1}{2}$
d) Ninguna anterior

8. Recta vertical $x = -3$
a) $r = 3sec\theta$
b) $r = -3cos\theta$
c) $r = -3sec\theta$
d) $r = 3/cos\theta$

9. Recta que pasa por el origen y por el punto (3, 3)
a) $\theta = -45^o$
b) $r = 45$
c) $\theta = -135^o$
d) $r = 225$

10. Espiral que se abre sin fin a la izquierda y derecha del polo
a) $r = \theta$
b) $r = -\theta$
c) Cualquiera anterior
d) Ninguna anterior

SOLUCIÓN PRÁCTICA 4 (Etapa individual)

1. **a)**
2. **c)**
3. **a)**
4. **b)**
5. **d)**
6. **b)**
7. **a)**
8. **c)**
9. **c)**
10. **c)**

PRÁCTICA 5: “FUNCIÓN VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Establecer ecuaciones de curvas en el espacio en forma paramétrica para analizar el movimiento curvilíneo de un objeto, así como contribuir al diseño de elementos que involucren curvas en el espacio.

INTRODUCCIÓN:

Una función vectorial asigna vectores a números reales. Se puede usar una función vectorial para representar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva.

Una función vectorial en dos dimensiones está formado por un vector i y otro vector j; en tres dimensiones, tenemos tres vectores: i, j y k.

Las funciones vectoriales es otra forma de representar curvas en el espacio.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

Las funciones vectoriales son un compendio de las ecuaciones paramétricas vistas en prácticas anteriores. Si se analiza una curva plana, tendremos entonces pares ordenados $(f(t), g(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas. Si la curva analizada es una curva en el espacio C, se tendrá un conjunto de todas las ternas ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas.

En la siguiente práctica se utilizará la derivación e integración de funciones vectoriales para hallar, en el primer caso, con una derivada y segunda derivada, la velocidad y la aceleración de una partícula.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Se debe estar bien familiarizado con la graficación en tercera dimensión con sistemas dextrógiros. El alumno debe aprender a construir referencias visuales claras, como sombras y líneas punteadas, para la ubicación de los puntos y los planos en el espacio.

Se deben llevar a cabo las siguientes actividades clave cuando se está graficando: escribir la ecuación que se está graficando cerca del dibujo, plasmar la dirección del movimiento de la partícula, anotar las coordenadas de los puntos claves de la trayectoria dibujada y toda la identificación necesaria en la gráfica para una interpretación correcta del problema representado.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Hallar el dominio de la función vectorial dada

a) $\underline{r}(t) = \underline{F}(t) + \underline{G}(t) \quad donde$

$$\underline{F}(t) = cost\ i - sent\ j - \sqrt{t}\ k\ , \qquad \underline{G}(t) = cost\ i + sent\ j$$

b) $\underline{r}(t) = \underline{F}(t)\ \ x\ \ \underline{G}(t) \quad donde$

$$\underline{F}(t) = t^3\ i - t\ j + t\ k\ , \qquad \underline{G}(t) = \sqrt[3]{t}\ i + \frac{1}{t\ +\ 1}\ j + (t+2)\ k$$

II. Si $\underline{r}(t) = 3cost\ i + 2sent\ j + (t-2)\ k\ \ y\ \ \underline{u}(t) = 4sent\ i - 6cost\ j + t^2\ k$hallar $\underline{r}(t) \cdot \underline{u}(t)$. ¿Es el resultado una función vectorial? Explicar

III. Dibujar tres gráficas de la función vectorial $\underline{r}(t) = t\ i + t\ j + 2\ k$ vistas desde los puntos:

a) (0, 0, 20)

b) (10, 0, 0)

c) (5, 5, 5)

IV. Dibuje la curva representada por la función vectorial y dar la orientación de la curva

a) $\underline{r}(t) = (t^2 + t)\ i + \ (t^2 - t)\ j$

b) $\underline{r}(t) = 3cost\ i + 4sent\ j + \frac{t}{2}\ k$

V. Representar las siguientes curvas planas por medio de una función vectorial:

a) $y = 4 - x^2$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

VI. Evalúe los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{t\to 0} \left(e^t\ i + \frac{sent}{t}\ j + e^{-t}\ k \right)$

b) $\lim\limits_{t\to \infty} \left(e^{-t}\ i + \frac{1}{t}\ j + \frac{t}{t^2+1}\ k \right)$

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 5 (En equipo)

I. a) $\boldsymbol{\underline{r}(t) = \underline{F}(t) + \underline{G}(t) = (cost\ i - sent\ j + \sqrt{t}\,k) + (cost\ i + sent\ j) =}$

$$\boldsymbol{2\ cost\ i + \sqrt{t}k}$$

Dominio: $\boldsymbol{x \geq 0}$

b) $\boldsymbol{\underline{r}(t) = \underline{F}(t) * \underline{G}(t) = det\left[(t^3\ i - t\ j + t\ k)x(\sqrt[3]{t}\ i + \frac{1}{t+1}\ j + (t+2)\ k)\right]}$**=**

$$\boldsymbol{\left[-t(t+2) - \frac{t}{t+1}\right] i - \left[t^3(t+2) - t\sqrt[3]{t}\right] j + \left[\frac{t^3}{t+1} + t\sqrt[3]{t}\right] k}$$

Dominio:$(-\infty, -\mathbf{1}), (-\mathbf{1}, \infty)$

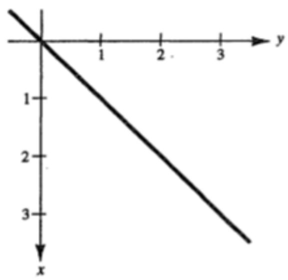
II. $\boldsymbol{\underline{r}(t) \cdot \underline{u}(t) = (3cost)(4sent) + (2sent)(-6cost) + (t-2)(t^2) =}$

$$\boldsymbol{t^3 - 2t^2\ \ es\ un\ escalar}$$

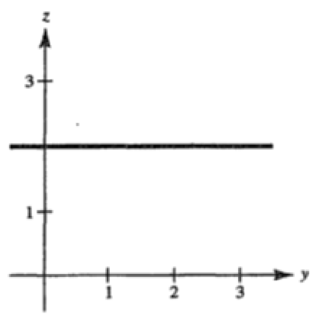
III. $\underline{r}(t) = t\ i + t\ j + 2\ k$

$$x = t,\ \ y = t,\ \ z = 2\ \ \Rightarrow\ \ x = y$$

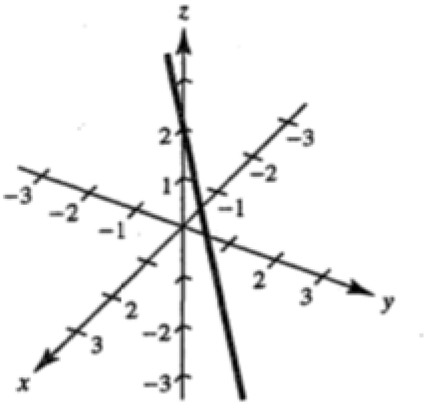
a) (0,0,20)



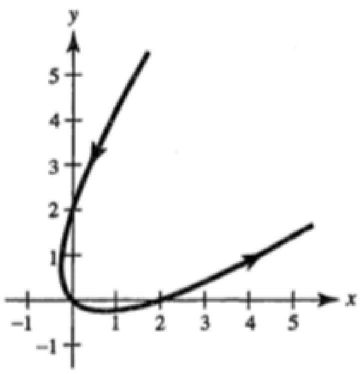
b) (10,0,0)



c) $(\mathbf{5},\mathbf{5},\mathbf{5})$



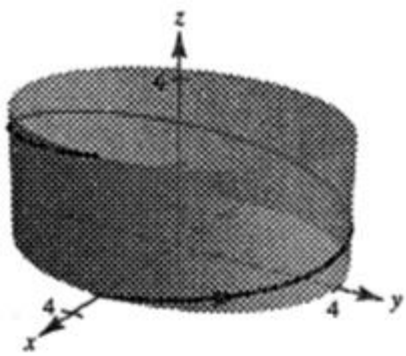
IV. **a)** $\underline{r}(t) = (t^2 + t)\, i + \ (t^2 - t)\, j$



b) $\underline{r}(t) = 3cost\ i + 4sent\ j + \frac{t}{2}\ k$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad z = \frac{t}{2}}$$

$$\boldsymbol{H\acute{e}lice\ el\acute{i}ptica}$$



V. a) $y = 4 - x^2$

$$Si\ \ x = t, entonces\ y = 4 - t^2$$

$$\underline{r}(t) = t\, i + (4 - t^2)\, j$$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$Si\ \ x = 4\cos t,\ \ y = 3\, sen\, t$$

$$\underline{r}(t) = 4\cos t\, i + 3\, sen\, t\, j$$

VI. a) $\lim\limits_{t \to 0} \left[e^t\, i + \frac{sen\, t}{t}\, j + e^{-t}\, k \right] = i + j + k$

$$Debido\ a\ que\ \lim_{t \to 0} \frac{sen\, t}{t} = 1\ \ (Regla\ de\ L'H\hat{o}pital)$$

b) $\lim\limits_{t \to \infty} \left[e^{-t}\, i + \frac{1}{t}\, j + \frac{1}{t^2+1}\, k \right] = 0$

$$Debido\ a\ que\ \lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0,\ \ y\ \ \lim_{t \to \infty} \frac{t}{t^2+1} = 0$$

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. El producto punto de dos funciones vectoriales arroja:
a) Un vector
b) Un escalar
c) Cualquiera anterior
d) Ninguna anterior

2. Evalúe la función vectorial $\underline{r}(t) = \sqrt{t}\, i + t^{\frac{3}{2}}\, j + e^{\frac{-t}{4}}\, k \quad en \;\; t = 0$
a) 0
b) 1
c) k
d) Ninguna anterior

3. El dominio de una función vectorial es
a) La unión de los dominios de i, j y k
b) La suma de los dominios de i, j y k
c) La intersección de los dominios de i, j y k
d) Cualquiera anterior

4. Evalúe la función vectorial $\underline{r}(t) = ln\, t\, i + \frac{t}{2}\, j + 3t\, k \quad en \;\; t = 0$
a) 0
b) No está definida
c) i
d) Ninguna anterior

5. Una curva plana puede representarse por una función vectorial:

   F o V

6. Hallar una función vectorial que describa los límites de la región encerrada por $y = x^2$, $x = 0 \quad y \quad y = 4$.

a) $\underline{r}(t) = t\,i + t^2\,j \quad 0 \leq t \leq 2$

b) $\underline{r}(t) = (2 - t)\,i + 4\,j \quad 0 \leq t \leq 2$

c) $\underline{r}(t) = 4 - t\ \ j \quad 0 \leq t \leq 4$

d) Cualquier anterior

7. Determine el o los intervalos en que la siguiente función vectorial es continua: $\underline{r}(t) = 2e^{-t}\,i + e^{-t}\,j + ln(t-1)\,k$

a) $(1, +\infty)$

b) (-∞, 1)

c) (-∞, $+\infty$)

d) Ninguna anterior

8. El producto cruz de dos funciones vectoriales es:

a) Otra función vectorial

b) Un escalar

c) Cualquiera anterior

d) Ninguna anterior

9. Si $f, g\ y\ h$ son funciones polinómicas de primer grado, entonces la curva dada por $x = f(t), y = g(t) \quad y \quad z = h(t)$ es una recta: F o V

10. Si la curva dada por $x = f(t), y = g(t) \quad y \quad z = h(t)$ es una recta, entonces $f, g\ y\ h$ son funciones polinómicas de primer grado:

F o V

SOLUCIÓN PRÁCTICA 5 (Etapa individual)

1. **b)**
2. **c)**
3. **c)**
4. **b)**
5. **V**
6. **d)**
7. **a)**
8. **a)**
9. **V**
10. **F**

PRÁCTICA 6: “DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Resolver derivadas e integrales de funciones vectoriales con el fin de determinar algunas características físicas de las curvas analizadas.

INTRODUCCIÓN:

La definición de la derivada e integral de una función vectorial es paralela a la dada para funciones reales.

El proceso de límite en la interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial es similar al de las funciones de una variable del cálculo diferencial.

Las propiedades de las derivadas son similares también a las vistas en cálculo diferencial, excepto por el hecho de que ahora se debe tener cuidado cuando se derive un producto, porque puede ser producto punto o producto cruz.

La integral definida de una función vectorial sigue un proceso análogo al de cálculo integral.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

Las reglas de derivación e integración del cálculo diferencial e integral sirven de base para el análisis de esta práctica, sólo que la noción de una variable se extiende a tres dimensiones, o mejor dicho a tres vectores **i, j** y **k**.

También se hace uso del álgebra lineal al momento de resolver productos vectoriales.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

El alumno debe tener bien identificadas las reglas de derivación y todos los métodos de integración para poder avanzar en el cálculo de las funciones vectoriales.

El proceso de la derivación debe hacerse sin saltarse pasos aunque en algunos casos sean procesos largos sobre todo cuando se involucran derivadas de orden superior y productos vectoriales.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Para las siguientes funciones vectoriales encuentre $\underline{r}"(t)\ \ y\ \ \underline{r}'(t)\cdot\underline{r}"(t)$

a) $\underline{r}(t) = (t^2+t)\, i + (t^2-t)\, j$

b) $\underline{r}(t) = e^{-t}\, i + t^2\, j + tan\ t\ k$

II. Halle la integral indefinida:

a) $\int \left(ln\ t\ i\ +\ \frac{1}{t}\ j + k\right) dt$

b) $\int (e^{-t} sen\ t\ i + e^{-t} cos\ t\ j) dt$

III. Halle la integral definida:

a) $\int_{-1}^{1} \left(t\ i\ +\ t^3\ j\ +\sqrt[3]{t}\ k\right) dt$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [(sec\ t\ tan\ t\ ) i + (tan\ t)\ j + (2sen\ t\ cos\ t)\ k] dt$

IV. Halle el vector unitario tangente $\underline{T}(t)$, el vector unitario normal principal $\underline{N}(t)$ y las componentes tangencial y normal de la aceleración para la función vectorial $\underline{r}(t) = e^t\ i + e^{-2t}\ j, \quad t = 0$

V. Halle la longitud de la curva que genera $\underline{r}(t) = 2\ sen\ t\ i +\ 5t\ j\ +\ 2\ cos\ t\ k \quad de\ [0, \pi]$

VI. Hallar la curvatura K de la curva $\underline{r}(t) = 4cos\ 2\pi\ t\ i + 4sen\ 2\pi\ t\ j$

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 6 (En equipo)

I. a) $\underline{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{t}^2 + \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{i} + (\boldsymbol{t}^2 - \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{j}$

$\underline{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) = (2\boldsymbol{t} + 1)\ \boldsymbol{i} + (2\boldsymbol{t} - 1)\ \boldsymbol{j}$

$\underline{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) = 2\ \boldsymbol{i} + 2\ \boldsymbol{j}$

$$\underline{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \cdot \underline{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) = (2\boldsymbol{t} + 1)(2) + (2\boldsymbol{t} - 1)(2) = 8\boldsymbol{t}$$

b) $\underline{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{t}^2\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{tan}(\boldsymbol{t})\ \boldsymbol{k}$

$\underline{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{sec}^2\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{k}$

$\underline{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{i} + 2\ \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{sec}^2\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{tan}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{k}$

$$\underline{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \cdot \underline{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{e}^{-2\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{sec}^4\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{tan}\ \boldsymbol{t}$$

II. $\int \left[\boldsymbol{ln}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{i} + \frac{1}{\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right] \boldsymbol{dt} = (\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{lnt} - \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{ln}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{Integración\ por\ partes}$

$\int [\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}\boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}\boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{j}]\boldsymbol{dt} = \frac{\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}}{2}(-\boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{t} - \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{i}$

$+ \frac{\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}}{2}(-\boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{t} + \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{C}$

III. $\int_{-1}^{1}(\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{t}^3\ \boldsymbol{j} + \sqrt[3]{\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{k})\ \boldsymbol{dt} = \left[\frac{\boldsymbol{t}^2}{2}\ \boldsymbol{i}\right] + \left[\frac{\boldsymbol{t}^4}{4}\ \boldsymbol{j}\right] + \left[\frac{3}{4}\boldsymbol{t}^{4/3}\ \boldsymbol{k}\right] = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(\boldsymbol{sec}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{tan}\ \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{i} + (\boldsymbol{tan}\ \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{j} + (2\ \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{t})\ \boldsymbol{k}]\boldsymbol{dt} =$

$[\boldsymbol{sec}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{sec}\ \boldsymbol{t}|\boldsymbol{j} + \boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{k}] =$

$= (\sqrt{2} - 1)\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{ln}\sqrt{2}\ \boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\ \boldsymbol{k}$

IV. $\underline{r}(t) = e^t\, i \;+\; e^{-2t}\, j,\;\; t = 0$

$\underline{v}(t) = e^t\, i \;-2e^{-2t}\, j, v(0) = \; i - 2\, j$

$\underline{a}(t) = e^t\, i \;-4e^{-2t}\, j, a(0) = \; i \;+\; 4\, j$

$\underline{T}(t) = \frac{\underline{v}(t)}{\left\|\underline{v}(t)\right\|} = \frac{e^t i - 2e^{-2t}\, j}{\sqrt{4e^{-4t} + e^{2t}}}$

$\underline{T}(0) = \frac{i - 2\, j}{\sqrt{5}}$

$$\underline{N}(0) = \frac{2\, i \;+\; j}{\sqrt{5}}$$

$$a_T = \underline{a} \cdot \underline{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - 8) = \frac{-7\sqrt{5}}{5}$$

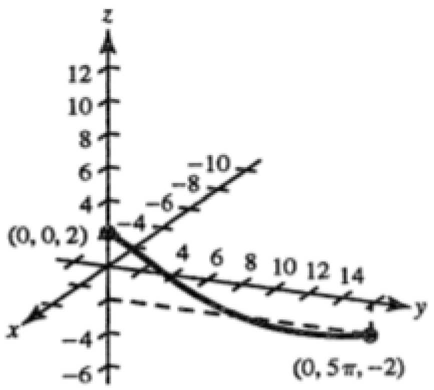
$$a_N = \underline{a} \cdot \underline{N} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 + 4) = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

V. $\underline{r}(t) = 2\; sen\; t\; i + 5t\; j + 2\; cos\; t\; k \quad en \;\; [0, \pi]$

$$\frac{dx}{dt} = 2\; cos\; t, \;\; \frac{dy}{dt} \; = 5, \;\; \frac{dz}{dt} = -2\; sen\; t$$

$$s = \int_0^{\pi} \;\; \sqrt{4\; cos^2 t \;+\; 25 \;+\; 4\; sen^2 t}\;\; dt$$

$= \int_0^{\pi} \;\; \sqrt{29}\; dt \;=\; \sqrt{29}\pi$



VI. $\underline{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{4}\ \boldsymbol{cos}\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{i}\ +\ \mathbf{4}\ \boldsymbol{sen}\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{j}$

$\underline{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) = -\mathbf{8}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{sen}\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{i}\ +\ \mathbf{8}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{cos}\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{j}$

$\underline{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{sen}\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{t}\ \boldsymbol{i}\ +\ \boldsymbol{cos}\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi t}\ \boldsymbol{j}$

$\underline{\boldsymbol{T}}'(\boldsymbol{t}) = -\mathbf{2}\boldsymbol{\pi cos}\mathbf{2}\boldsymbol{\pi t}\ \boldsymbol{i}\ -\mathbf{2}\boldsymbol{\pi sen}\mathbf{2}\boldsymbol{\pi t}\ \boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{K} = \frac{\left\|\underline{\boldsymbol{T}}'(\boldsymbol{t})\right\|}{\left\|\underline{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\right\|} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}\boldsymbol{\pi}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Halle $\underline{r}'(t)$ $para$ $\underline{r}(t) = 4\sqrt{}\ t$ i+$t^2\sqrt{t}\ j + ln\ t^2\ k$

a) $\underline{r}'(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}i + \frac{5t^{\frac{3}{2}}}{2}\ j + \frac{2}{t}\ k$

b) $\underline{r}'(t) = \frac{4}{\sqrt{t}}i + \frac{3t^{\frac{3}{2}}}{2}\ j + \frac{2}{t}\ k$

c) $\underline{r}'(t) = \frac{-2}{\sqrt{t}}i + \frac{5t^{\frac{3}{2}}}{2}\ j + \frac{2}{3}\ k$

d) Ninguna anterior

2. Halle la curvatura de $\underline{r}(t) = 4t\ i - \ 2t\ j \quad en\ \ t = 1$

a) 4

b) 0

c) 2

d) Ninguna anterior

3. Halle la longitud de arco de $\underline{r}'(t) = t\ i + t^2 j \quad de\ \ [0,4]$

a) 4.87

b) 8.15

c) 16.82

d) Ninguna anterior

4. La división de la derivada del la función vectorial entre su magnitud

a) K

b) $\underline{N}(t)$

c) $\underline{T}(t)$

d) Ninguna anterior

5. La división de la derivada del vector unitario tangente entre su magnitud
a) K
b) $\underline{N}(t)$
c) $\underline{T}(t)$
d) Ninguna anterior

6. La división de la magnitud de la derivada del vector unitario tangente entre la magnitud de la derivada de la función vectorial
a) K
b) $\underline{N}(t)$
c) $\underline{T}(t)$
d) Ninguna anterior

7. La curvatura de $\underline{r}'(t) = t\,i + t^2\,j \quad t = 1$
a) $\frac{2}{5\sqrt{5}}$
b) $\frac{4}{5\sqrt{5}}$
c) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$
d) Ninguna anterior

8. Si una partícula se mueve a lo largo de una esfera centrada en el origen, entonces su vector derivada es siempre tangente a la esfera
F o V

9. La integral definida de una función vectorial es un número real

F o V

10. Si el indicador de velocidad de un automóvil es constante, entonces el automóvil no puede estar acelerando F o V

SOLUCIÓN PRÁCTICA 6 (Etapa individual)

1. **a)**
2. **b)**
3. **c)**
4. **c)**
5. **b)**
6. **a)**
7. **a)**
8. **V**
9. **F**
10. **F**

PRÁCTICA 7: “GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Aprender a graficar diferentes tipos de superficies en el espacio, comenzando con superficies cuadráticas conocidas, extendiéndose a funciones de varias variables

INTRODUCCIÓN:

Muchas cantidades en la vida real son funciones de dos o más variables y en esta práctica aprenderemos a representar gráficamente ese tipo de funciones, empezando por comprender las representaciones gráficas que se denominan curvas de nivel. Las curvas de nivel se utilizan para plasmar en el plano el parámetro de una función en particular, por ejemplo la altura de una montaña, el cambio de temperatura de un mapa, entre otros.

Aunque los tres ejes coordenados pueden dibujarse de diferentes maneras, debe cuidarse que sigan la regla de la mano derecha en su ubicación.

Una gráfica en tres dimensiones bien hecha nos dejará ver el dominio y rango de la función directamente, también podremos tener una idea de la derivada en cualquier punto de la superficie, y podremos establecer los límites de integración para obtener el volumen de cualquier cuerpo en tercera dimensión.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

La graficación en tercera dimensión se relaciona con la construcción de gráficas en dos dimensiones de prácticas anteriores, ya que para dibujar un sólido tridimensional es necesario empezar dibujando la proyección en el plano de dos dimensiones y luego dar la altura a cada punto del plano.

La gráfica es la herramienta que nos ayuda a definir con mayor rapidez cualquier tema del cálculo, desde la definición del límite, continuidad, derivadas e integrales. Sobre todo en el tema de las integrales múltiples, la gráfica es una pieza clave en el planteamiento de la integral para resolver cualquier situación que involucre varias variables, principalmente volúmenes, los cuales se verán en las dos últimas prácticas.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Cuando se construye una gráfica, sobre todo en tercera dimensión, debe ponerse atención a varios detalles fundamentales para que el dibujo final no arroje errores de apreciación. La escala de los ejes debe ser la misma, aunque el eje que da la profundidad puede ser de escala diferente para contrarrestar ese efecto. De la misma manera debe cuidarse el paralelismo de todas las trazas para que el dibujo final no quede alterado. También, para disminuir la complejidad de graficar con tres variables, puede hacerse primero la proyección en el plano de las parejas ordenadas y después agregar la altura o profundidad de la tercera dimensión.

Por otro lado, es aconsejable plasmar todos los datos clave en la gráfica, como función, ejes, triadas ordenadas, puntos de inflexión, máximos o mínimos, etc., esto se hace con el fin de que esos detalles sirvan de auxiliares para cuando se requiera hacer las manipulaciones de cualquier cantidad de los temas del cálculo vectorial, como derivadas, longitudes e integrales.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Halle y simplifique los valores de la función.

1. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

a) (0,5,4) b) (6,8,-3) c) (4,6,2) d) (10,-4,-3)

2. $f(x, y) = 3xy + y^2$

a) $\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ b) $\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$

II. Describa el dominio y rango o recorrido de la función

a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

b) $f(x, y) = arccos(\frac{y}{x})$

III. Dibuje la superficie dada por la función

a) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

b) $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = e^{-x}$

IV. Dibuje la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ para el valor de “c” que se especifica.

a) $f(x, y, z) = 4x + y + 2z, \quad c = 4$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad c = 9$

V. La temperatura T (en grados celsius) en cualquier punto (x,y) de un placa circular de acero de 10 metros de radio es:

$$T = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$$

donde x y y se miden en metros. Dibujar algunas de las curvas isotérmicas.

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 7 (En equipo)

I.

1. **a)** $f(0,5,4) = \sqrt{0+5+4=3}$
   b) $f(6,8-3) = \sqrt{6+8-3} = \sqrt{11}$
   c) $f(4,6,2) = \sqrt{4+6+2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   d) $f(10,-4,-3) = \sqrt{10-4-3} = \sqrt{3}$

2. **a)** $\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \frac{[3(x+\Delta x)y+y^2]-(3xy+y^2)}{\Delta x}$

$$=\frac{3xy+3(\Delta x)y+y^2-3xy-y^2}{\Delta x} = \frac{3(\Delta x)y}{\Delta x} = 3y, \Delta x \neq 0$$

b) $\frac{f(x,,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \frac{[3x(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2]-(3xy+y^2)}{\Delta y}$

$$=\frac{3xy+3x(\Delta y)+y^2+2y(\Delta y)+(\Delta y)^2-3xy-y^2}{\Delta y}$$

$$=\frac{\Delta y(3x+2y+\Delta y)}{\Delta y} = 3x+2y+\Delta y, \Delta y \neq 0$$

II. **a)** $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$

Dominio: $4-x^2-4y^2 \geq 0$ Rango: $0 \leq z \leq 2$

$$x^2+4y^2 \leq 4$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1} \leq 1$$

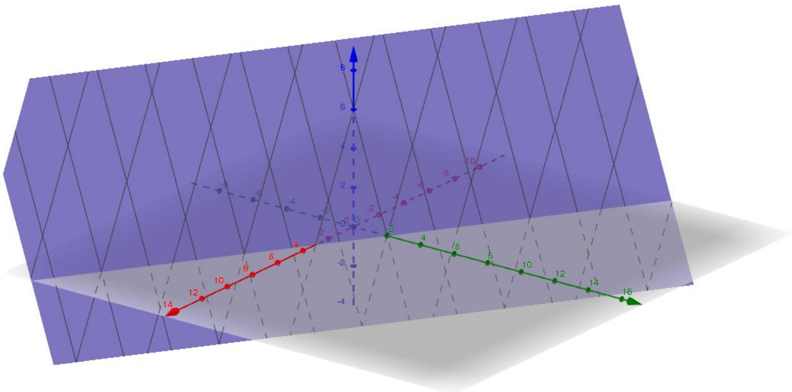
$$\left\{(x,y): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1} \leq 1\right\}$$

b) $f(x,y) = arccos\frac{y}{x}$

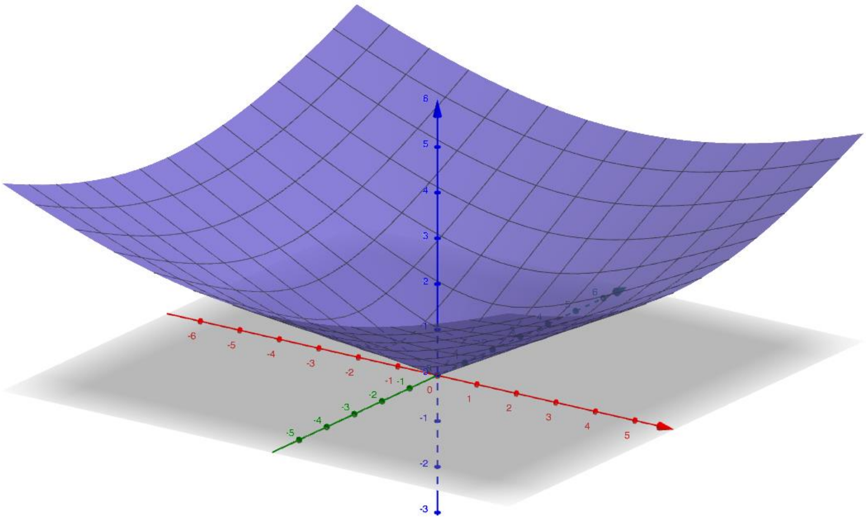
Dominio: $\left\{(x,y): -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1\right\}$

Rango: $0 \leq z \leq \pi$

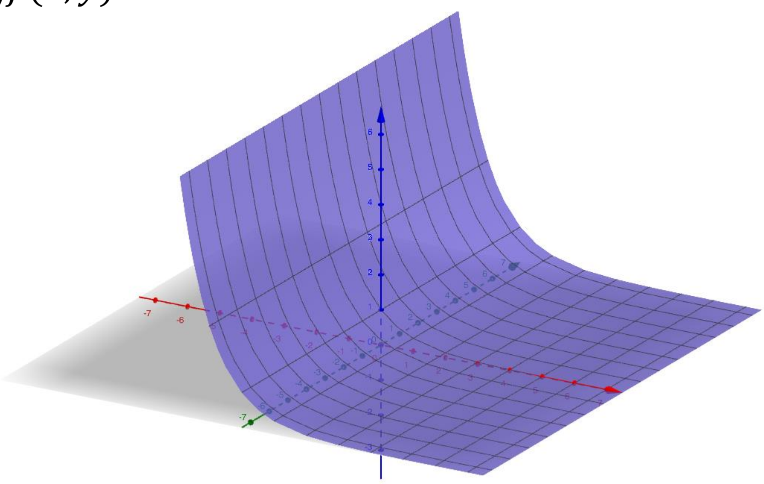
III. **a)** $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$



b) $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

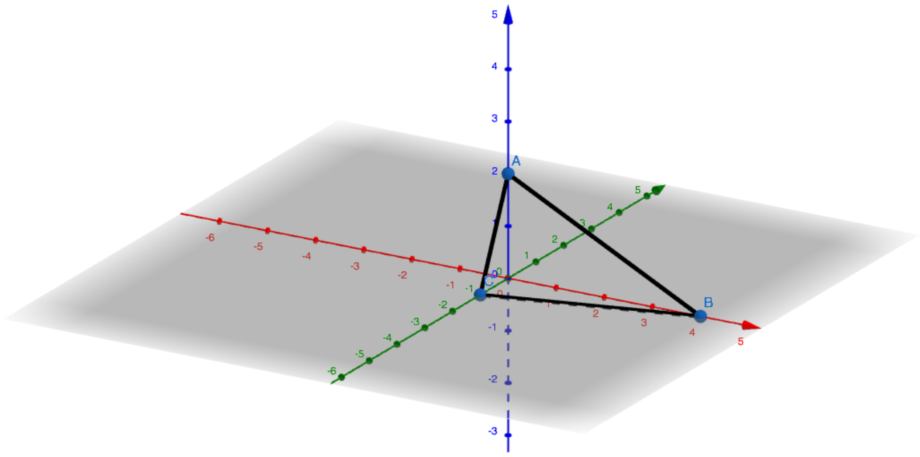


c) $f(x, y) = e^{-x}$



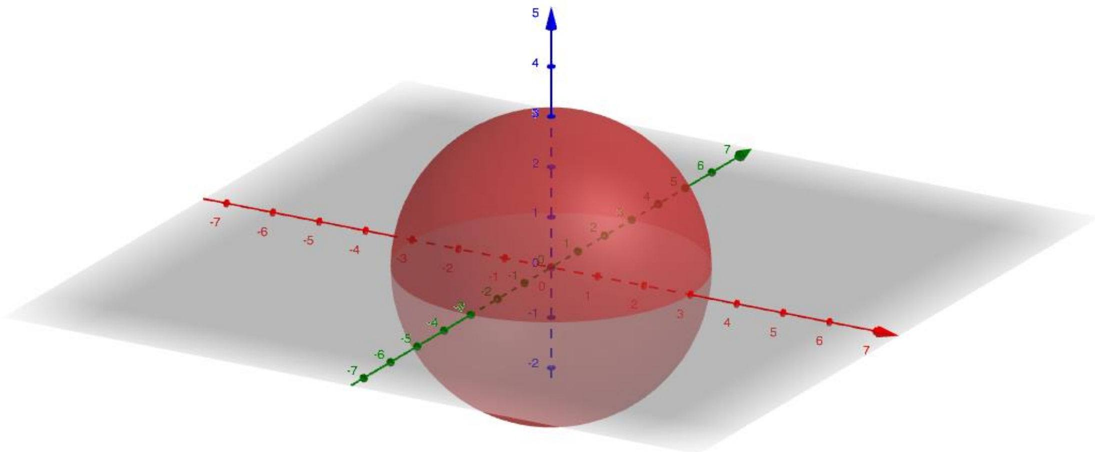
IV. **a)** $f(x,y,z) = 4x + y + 2z \qquad c = 4$

$$4 = 4x + y + 2z \qquad Plano$$



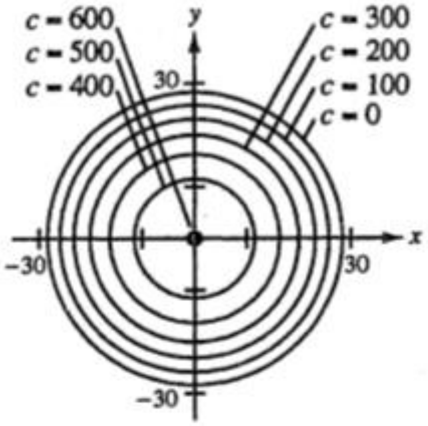
b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad c = 9$

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad Esfera$$



V. $\boldsymbol{T = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2}$

Las curvas de nivel son de la forma:



$$c = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{600 - c}{0.75}$$

Las curvas de nivel son círculos centrados en el origen

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Halle el valor de la función $f(x,y) = xseny$ en el punto $(-3, \frac{\pi}{3})$

a) $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\frac{-3\sqrt{2}}{3}$ d) Ninguna anterior

2. Halle el valor de la función $g(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t} dt$ en el punto (4, 1)

a) $ln\ \frac{1}{4}$ b) $-ln\ 4$ c) Las dos anteriores d) Ninguna anterior

3. Determine el dominio de la función $f(x,y) = ln(xy-6)$

a) $xy - 6 \geq 0$ b) $xy \geq 6$ c) $0 \preccurlyeq -6 + xy$ d) Ninguna anterior

4. ¿Cuál es el valor de x en la gráfica de la siguiente función: $z = y^2$?

a) Cero b) $(-\infty, +\infty)$ c) x = y d) Ninguna anterior

5. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x,y) = 8$?

a) $x, y \geq 0$ b) $x, y = 8$ c) $x, y = R$ d) Ninguna anterior

6. La gráfica de la función $f(x,y) = 8 - 2x - 4y$pasa por los puntos:

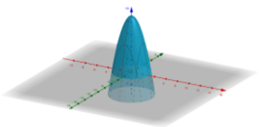
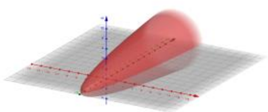
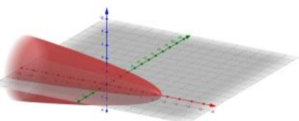
a) $-8\ en\ el\ eje\ z, 2\ en\ el\ eje\ x, 4\ en\ el\ eje\ y$

b) $8\ en\ el\ eje\ z, 4\ en\ el\ eje\ x, 2\ en\ el\ eje\ y$

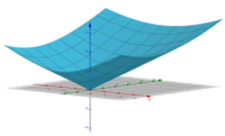
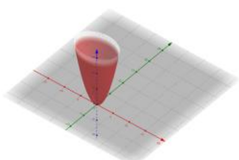
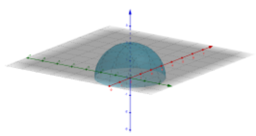
c) $8\ en\ el\ eje\ z, -2\ en\ el\ eje\ x, -4\ en\ el\ eje\ y$

d) Ninguna anterior

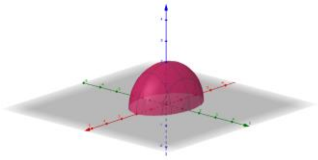
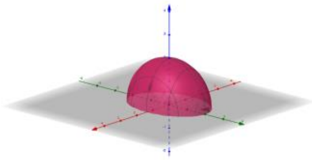
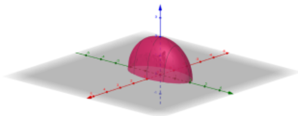
7. ¿Cuál es la gráfica de la función $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$?

a)  b)  c) 

8. ¿Cuál es la gráfica de la función $f(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$?

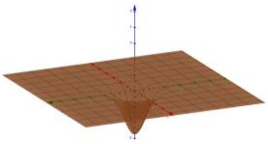
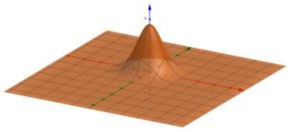
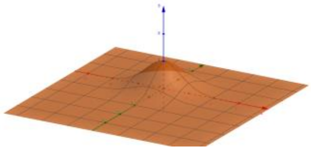
a)  b)  c) 

9. ¿Cuál es la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$?

a) b) c)

10. ¿Cuál es la gráfica de la función $f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$?

a) b) c)

SOLUCIÓN PRÁCTICA 7 (Etapa individual)

1. **a)**
2. **c)**
3. **c)**
4. **b)**
5. **c)**
6. **b)**
7. **a)**
8. **a)**
9. **b)**
10. **b)**

PRÁCTICA 8: “DERIVADAS PARCIALES”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Aplicar los principios del cálculo de funciones de varias variables con derivadas parciales, para resolver y optimizar problemas de ingeniería del entorno, así como para mejorar su capacidad de análisis e interpretación de leyes físicas.

INTRODUCCIÓN:

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes?, se puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o el ritmo de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes se pueden utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama **derivación parcial** y el resultado se llama **derivada parcial** de f con respecto a la variable independiente elegida.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO.

Este tema está relacionado directamente con la interpretación de la pendiente de la tangente del cálculo diferencial ya que se sigue el mismo análisis, pero en nuestro caso, la interpretación geométrica se extiende al análisis de varias variables. Por otro lado, las derivadas parciales nos dan la base metodológica para comprender el estudio de la derivada direccional con sus múltiples aplicaciones: gradiente, divergencia y rotacional; y por último se puede decir que el estudio de las derivadas parciales sirve de requisito fundamental para la comprensión de la integrales iteradas que es una herramienta básica en la comprensión de la integración múltiple en todas sus formas y aplicaciones, y que por su complejidad será el tema de la última práctica de este manual.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Para una adecuada comprensión del funcionamiento de la derivación parcial, el alumno debe conocer y manejar sin error las principales reglas de derivación del cálculo diferencial, y extender su uso a funciones de más de una variable. También debe saber distinguir la diferenciación parcial y sus modalidades: implícita, regla de la cadena y de orden superior. Debe comprender la diferencia entre derivación parcial y total. Debe comprobar, entre otras cosas, que las derivadas de orden superior son consistentes en su resultado, independientemente del orden de ejecución de las derivadas. Debe distinguir las formas de resolver derivadas parciales implícitas, así como las del tipo donde se aplica la regla de la cadena. Y por último, uno de las sugerencias más importantes: el alumno debe optimizar la parte del proceso denominada simplificación de resultados.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Hallar las dos derivadas parciales de primer orden $\partial x \;\; y \;\; \partial y$.

a) $z = ln\frac{x+y}{x-y}$

b) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$

c) $z = e^y sen\, xy$

II. Utilice la definición de derivada parcial empleando límites para calcular $f_x(x, y) \;\; y \;\; f_y(x, y)$.

a) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

b) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

III. Calcule la pendiente de la superficie $z = e^{-x} cos\, y$ en las direcciones de "x" y de "y" en el punto $(0,0,1)$

IV. Calcule las derivadas parciales de primer orden con respecto a x, y y z de la función $G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.

V. Muestre que las derivadas parciales mixtas $f_{xyy}, f_{yxy} \;\; y \;\; f_{yyx}$ son iguales para la función $f(x, y, z) = \frac{2z}{x+y}$.

VI. TEMPERATURA APARENTE: Una medida de la percepción del calor ambiental por unas personas promedio es el índice de temperatura aparente. Un modelo para este índice es:

$$A = 0.885t - 22.4h + 1.20th - 0.544$$

donde A es la temperatura aparente en grados celsius, t es la temperatura del aire y h es la humedad relativa dada en forma decimal (Fuente: The UMAP journal, otoño 1984)

a) Hallar $\partial A/\partial t \;\; y \;\; \partial A/\partial h \; si \; t = 30^o \;\; y \;\; h = 0.80$

b) ¿Qué influye más sobre A, la temperatura del aire o la humedad? Explicar.

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 8 (En equipo)

I. a) $z = ln\frac{x+y}{x-y} = ln(x+y) - ln(x-y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = -\frac{2y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{2y}{x^2-y^2}$$

b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(y)-(xy)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(x)-(xy)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$

c) $z = e^y sen\, xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^y cos\, xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y sen\, xy + xe^y cos\, xy$$

$$= e^y(x\, cos\, xy \; + \; sen\, xy)$$

II. a) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+y}-\sqrt{x+y}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x+y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x+\Delta x+y}+\sqrt{x+y})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+y}+\sqrt{x+y})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x+y}+\sqrt{x+y})} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{x+y+\Delta y}-\sqrt{x+y}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\sqrt{x+y+\Delta y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x+y+\Delta y}+\sqrt{x+y})}{\Delta y(\sqrt{x+y+\Delta y}+\sqrt{x+y})}$$

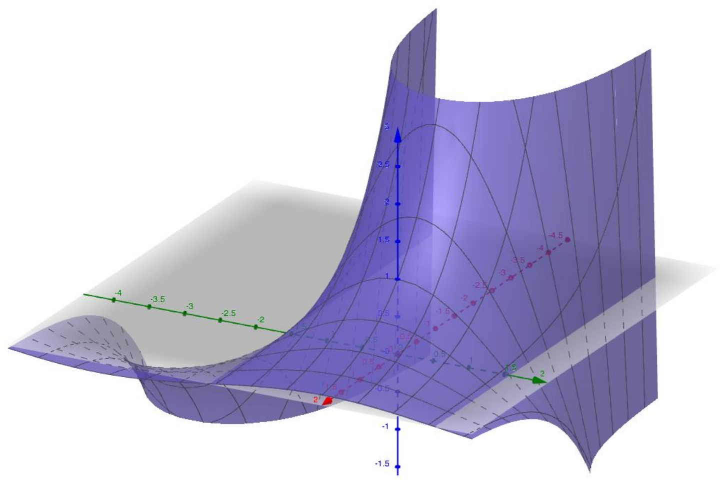
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+y+\Delta y}+\sqrt{x+y})} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

b) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x+y}-\frac{1}{x+y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x+y)(x+y)} = \frac{-1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{1}{x+y+\Delta y}-\frac{1}{x+y}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-1}{(x+y+\Delta y)(x+y)} = \frac{-1}{(x+y)^2}$$

III. Superficie: $z = e^{-x}\cos y$



$\boldsymbol{z = e^{-x} cos\ y}$ en el punto (0,0,1)

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{e^{-x} cos\ y}$$

$$En\ (0,0){:}\ \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{e^{-x} sen\ y}$$

$$En\ (0,0){:}\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

IV. $\boldsymbol{G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}}$

$\boldsymbol{G_x(x,y,z) = \frac{x}{(1-x^2-y^2-z^2)^{3/2}}}$

$\boldsymbol{G_y(x,y,z) = \frac{y}{(1-x^2-y^2-z^2)^{3/2}}}$

$\boldsymbol{G_z(x,y,z) = \frac{z}{(1-x^2-y^2-z^2)^{3/2}}}$

V. $\boldsymbol{f(x,y,z) = \frac{2z}{x+y}}$

$$\boldsymbol{f_x(x,y,z) = \frac{-2z}{(x+y)^2}}$$

$$\boldsymbol{f_y(x,y,z) = \frac{-2z}{(x+y)^2}}$$

$$\boldsymbol{f_{yy}(x,y,z) = \frac{4z}{(x+y)^3}}$$

$$\boldsymbol{f_{xy}(x,y,z) = \frac{4z}{(x+y)^3}}$$

$$\boldsymbol{f_{yx}(x,y,z) = \frac{4z}{(x+y)^3}}$$

$$\boldsymbol{f_{yyx}(x,y,z) = \frac{-12z}{(x+y)^4}}$$

$$\boldsymbol{f_{xyy}(x,y,z) = \frac{-12z}{(x+y)^4}}$$

$$\boldsymbol{f_{yxy}(x,y,z) = \frac{-12z}{(x+y)^4}}$$

VI. $A = 0.885t - 22.4h + 1.20th - 0.544$

a) $\boldsymbol{\frac{\partial A}{\partial t} = 0.885 + 1.20h}$

$$\boldsymbol{\frac{\partial A}{\partial t}(30^o, 0.80) = 0.885 + 1.20(0.80) = 1.845}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial A}{\partial h} = -22.4 + 1.20t}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial A}{\partial h}(30^o, 0.80) = -22.4 + 1.20(30^o) = 13.6}$$

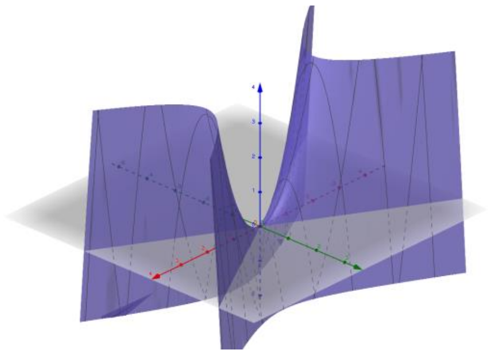
b) La humedad tiene un mayor efecto sobre A ya que su coeficiente -22.4 es más grande (en valor absoluto)que el de t.

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. ¿Cuál es el signo de la derivada parcial $\partial z/\partial x$ en el punto$(-1{,}0)$de la siguiente figura?

a) $\partial z/\partial x \succ 0$ b) $\partial z/\partial x \preccurlyeq 0$ c) $\partial z/\partial x = 0$ d) Ninguna



2. En la figura anterior, ¿Cuál es el signo de la derivada parcial $\partial z/\partial y$ en el mismo punto?

a) $\partial z/\partial y \succ 0$ b) $\partial z/\partial y \preccurlyeq 0$ c) $\partial z/\partial y = 0$ d) Ninguna

3. De la misma figura, halle el signo de la derivada parcial $\partial z/\partial x$ en el origen

a) $\partial z/\partial x \succ 0$ b) $\partial z/\partial x \preccurlyeq 0$ c) $\partial z/\partial x = 0$ d) Ninguna

4. Halle la derivada parcial $\partial z/\partial y$ para $z = ln(x^2 - y^2)$.

a) $\frac{2x}{x^2-y^2}$ b) $\frac{\boldsymbol{-2y}}{\boldsymbol{x^2-y^2}}$ c) $\frac{-2x}{x^2-y^2}$ d) Ninguna

5. Evalúe f_y en el punto (1,1) para $f(x,y) = \frac{6xy}{\sqrt{4x^2+5y^2}}$.

a) 8/9 b) 10/9 c) 7/9 d) Ninguna

6. Calcule la derivada parcial de primer orden con respecto a z de la función $w = \frac{xy}{x+y+z}$ en el punto (3, 1, -1)

a) 0 b) ⅔ c) -⅓ d) Ninguna

7. Si $z = 2xe^y - 3ye^{-x}$ calcule la derivada parcial mixta $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

a) $2e^y + 3ye^{-x}$ b) $2e^y - 3ye^{-x}$ c) $2e^y + 3e^{-x}$ d) Ninguna

8. Si $f(x,y,z) = e^{-x}\, sen\, yz$ muestre que las derivadas parciales f_{xyy}, f_{yxy} y f_{yyx} son iguales a:

a) $z^2 e^{-x}\, sen\, yz$ b) $-z \quad e^{-x}\, cos\, yz$ c) $-z^2 e^{-x}\, sen\, yz$ d) Ninguna

9. Si $f(x,y) = \int_x^y \quad (t^2 - 1)dt$ halle $f_x(x,y)$

a) $y^2 - 1$ b) $1 - x^2$ c) $2t + C$ d) Ninguna

10. ¿En qué punto (x,y) de la función $f(x,y) = 3x^3 - 12xy + y^3$ resulta que $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ simultáneamente?

a) $(0,0)$ b) $(\frac{4}{3^{2/3}}, \frac{4}{3^{1/3}})$ c) Incisos a) y b) d) Ninguna

SOLUCIÓN PRÁCTICA 8 (Etapa individual)

1. **b)**
2. **c)**
3. **c)**
4. **b)**
5. **a)**
6. **c)**
7. **c)**
8. **a)**
9. **b)**
10. **c)**

PRÁCTICA 9: "REGLA DE LA CADENA Y DERIVACIÓN IMPLÍCITA"

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Aplicar los principios del cálculo de funciones de varias variables con derivadas parciales utilizando, la regla de la cadena y la derivación implícita para resolver y optimizar problemas de ingeniería del entorno, así como para mejorar su capacidad de análisis e interpretación de leyes físicas.

INTRODUCCIÓN:

Cuando una función de varias variables está conectada a un parámetro en cada una de sus variables, entonces la derivada parcial de la función con respecto al parámetro se vuelve una derivada total. Por ejemplo si $z = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x y y, y si $x = g(t)\ y\ y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, entonces z es una función diferenciable de t, y:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Y si la función tiene dos variables independientes como parámetro, entonces tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Además tenemos una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida implícitamente:

Si la función F(x, y) = 0 define a y implícitamente como función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \qquad F_y(x, y) \neq 0$$

Si la ecuación F(x, y, z) = 0 define a z implícitamente como función diferenciable de x y y, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0$$

este teorema puede extenderse a funciones diferenciables de cualquier número de variables.

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

Los temas de derivación por regla de la cadena y derivación implícita tienen la misma base teórica que cuando se vieron para sólo dos variables, la regla de la cadena puede hacerse tan extensa como se necesite de acuerdo al número de variables que participen en la función, y por otro lado la derivación implícita es un recurso necesario para utilizarse cuando sea complicado hacer el despeje de la función analizada.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

El alumno deberá practicar primero con derivadas que contengan un sólo parámetro o variable independiente para resolver derivadas totales, y después deberá ser capaz de resolver derivadas parciales encadenadas a cualquier número de funciones y variables para aplicar correctamente la regla de la cadena. Los resultados de la regla de la cadena podrán ser comprobados sustituyendo las funciones secundarias en la función principal y derivando ésta, los resultados deberán ser equivalentes.

El alumno podrá también validar el método de derivación implícita para funciones de varias variables comenzando con una función que pueda ser despejada directamente para derivarla explícitamente y después obtener el mismo resultado de manera implícita.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Hallar dw/dt a) utilizando la regla de la cadena apropiada y b) convirtiendo w en función de t antes de derivar.

1. $w = xy\cos z \quad x = t, \quad y = t^2, \quad z = \arccos t$
2. $w = xy \quad x = 2\,sen\,t, \quad y = \cos t$

II. A continuación se dan las ecuaciones paramétricas de las trayectorias de dos proyectiles. ¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos en el valor de t dado?

$$x_1 = 48\sqrt{2}\,t, \quad y_1 = 48\sqrt{2}\,t - 16t^2$$

$$x_2 = 48\sqrt{3}\,t, \quad y_2 = 48\,t - 16t^2 \qquad t = 1$$

III. Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada.

1. $w = x\cos yz, \quad x = s^2, \quad y = t^2, \quad z = s - 2t$
2. $w = ze^{x/y}, \quad x = s - t, \quad y = s + t, \quad z = st$

IV. Hallar dy/dx por derivación implícita

1. $\cos x + \tan xy + 5 = 0$
2. $\frac{x}{x^2+y^2} - y^2 = 6$

V. Hallar las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita

$$x + sen(y + z) = 0$$

VI. Hallar las primeras derivadas parciales de w por derivación implícita

$$w - \sqrt{x - y} - \sqrt{y - z} = 0$$

VII. VOLUMEN Y ÁREA SUPERFICIAL. El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de 6 pulgadas por minuto, y la altura decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. ¿Cuál es la velocidad o el ritmo de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es de 12 pulgadas y la altura de 36 pulgadas?

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 9 (En equipo)

I.

1. $\boldsymbol{w = xy\ cos\ z}$

$$\boldsymbol{x = t}$$

$$\boldsymbol{y = t^2}$$

$$\boldsymbol{z = arccos\ t}$$

a) $\frac{dw}{dt} = (y\ cos\ z)(1)\ +\ (x\ cos\ z)(2t)\ +$
$(-xy\ sin\ z)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$

$$=\ t^2(1)\ +\ t(t)(2t)\ - t(t^2)\sqrt{1-t^2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)}$$

$$=\ t^3 + 2t^3 + t^3 = 4t^3$$

b) $w = t^4$, $\frac{dw}{dt} = 4t^3$

2. $\boldsymbol{w = xy},\ \ \boldsymbol{x = 2\ sen\ t},\ \ \boldsymbol{y =\ cos\ t}$

a) $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2y\ cos\ t\ +\ x(-sen\ t) = 2y\ cos\ t - x\ sen\ t \qquad = 2(cos^2 t - sen^2 t) =\ 2\ cos\ 2t$

b) $w = 2\ sen\ t\ cos\ t\ =\ sen\ 2t,\quad \frac{dw}{dt} =\ 2\ cos\ 2t$

II. $\boldsymbol{Distancia = f(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =}$

$$= \sqrt{\left[48 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\ \ \right]^2 + \left[48t(1 - \sqrt{2}\right]^2}$$

$$= \boldsymbol{48t\sqrt{8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}}$$

$$\boldsymbol{f'(t) = 48\sqrt{8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}\ \ = f'(1)}$$

III. **1**. $w = x\ cos\ yz, \quad x = s^2, \quad y = t^2, \quad z = s - 2t$

$\partial w/\partial s = cos\ (yz)(2s) - xz\ sen\ (yz)(0) - xy\ sen\ (yz)(1)$

$= \ cos\ (st^2 - 2t^3)2s - s^2t^2\ sen(st^2 - 2t^3)$

$\partial w/\partial t = cos\ (yz)(0)\ -\ xz\ sen(yz)(2t)\ -\ xy\ sen\ (yz)(-2)$

$= \ -2s^2t(s-2t)\ sen(st^2 - 2t^3) + 2s^2t^2\ sen\ (st^2 - 2t^3)$

$= (6s^2t^2 - 2s^3t)\ sen\ (st^2 - 2t^3)$

2. $w = ze^{x/y}, \quad x = s - t, \quad y = s + t, \quad z = st$

$$\partial w/\partial s = \frac{z}{y}e^{x/y}(1) + -\frac{zx}{y^2}e^{x/y}(1) + e^{x/y}(t)$$

$$= e^{(s-t)/(s+t)}\left[\frac{st}{s+t} - \frac{(s-t)st}{(s+t)^2} + t\right]$$

$$= e^{(s-t)/(s+t)}\left[\frac{st(s+t)-s^2t+st^2+t(s+t)^2}{(s+t)^2}\right]$$

$$= e^{(s-t)/(s+t)}\,\frac{t(s^2+4st+t^2)}{(s+t)^2}$$

$$= \frac{z}{y}e^{x/y}(-1) + -\frac{zx}{y^2}e^{x/y}(1) + e^{x/y}(s)$$

$$= e^{(s-t)/(s+t)}\left[\frac{-st}{s+t} - \frac{st(s-t)}{(s+t)^2} + s\right]$$

$$= e^{(s-t)/(s+t)}\left[\frac{-st(s+t)-st(s-t)+s(s+t)^2}{(s+t)^2}\right]$$

$$= e^{(s-t)/(s+t)}\,\frac{s(s^2+t^2)}{(s+t)^2}$$

IV.

1. $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{-\,sen\,x + y\,sec^2xy}{x\,sec^2xy}}$

2. $\boldsymbol{\frac{x}{x^2+y^2} - y^2 - 6 = 0} \qquad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}}$

$$\boldsymbol{= -\frac{(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2}{(-2xy)/(x^2+y^2)^2-2y}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{y^2-x^2}{2xy+2y(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{2xy+2yx^4+4x^2y^3+2y^5}}$$

V. $\boldsymbol{x + sen(y + z) = 0}$

$(i)\ 1 + \frac{\partial z}{\partial x} cos(y + z) = 0$ *implica que*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{cos(y + z)} = -sec(y + z)$$

$(ii)\ \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) cos\ (y + z) = 0$ *implica que* $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$

VI. $\boldsymbol{F(x, y, z, w) = w - \sqrt{x - y} - \sqrt{y - z} = 0}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_w} = \frac{1}{2}\frac{(x-y)^{-1/2}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_w} = \frac{1}{2}\frac{(x-y)^{-1/2}}{1} + \frac{1}{2}(y - z)^{-1/2}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} + \frac{1}{2\sqrt{y-z}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-F_z}{F_w} = \frac{-1}{2\sqrt{y-z}}$$

VII. $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right) = \pi r\left(2h\frac{dr}{dt} + r\frac{dh}{dt}\right)$$

$$= \pi(12)[2(36)(6) + 12(-4)]$$

$$= 4608\pi\ in^3/min$$

$$S = 2\pi r(r + h)$$

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi\left[(2r + h)\frac{dr}{dt} + r\frac{dh}{dt}\right] = 2\pi[(24 + 36)(6) + 12(-4)]$$

$$= 624\pi\ in^3/min.$$

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Si $w = cos\ (x - y),\ \ x = t^2,\ \ y = 1$; Halle dw/dt utilizando la regla de la cadena apropiada.
a) $-2t\ sen\ (t^2 - 1)$_b)$2t\ sen\ (t^2 - 1)$ c)$-2\ sen\ (t^2 - 1)$ d) Ninguna

2. Si $w = x^2/y,\ x = t^2,\ y = t + 1,\ \ t = 1.$ Evalúe d^2w/dt^2 utilizando la regla de la cadena apropiada en el valor de t dado.
a) 4.25 b) 2.45 c) 5.42 d) Ninguna

3. Una primera derivada parcial de $x^2 + y^2 + z^2 - 5yw + 10w^2 = 2$ por derivación implícita es:
a) $\frac{2x}{5y-20w}$ b) $\frac{5w-2y}{20w-5y}$ c) $Incisos\ a\ y\ b$ d) Ninguna anterior

4. Halle $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $tan(x + y) + tan(y + z) = 1$:
a) $-\frac{sec^2(x+y)}{sec^2(y+z)}$ b) $\frac{sec^2(x+y)}{sec^2(y+z)} + 1$ c) $Incisos\ a\ y\ b$ d) Ninguna anterior

5. Halle $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ si $w = \frac{yz}{x},\ \ x = \theta^2,\ \ y = r + \theta,\ \ z = r - \theta$
a) $\frac{2r}{\theta^2}$ b) $\frac{r^2}{\theta}$ c) $\boldsymbol{\frac{-2r^2}{\theta^3}}$ d) Ninguna anterior

6. Si $z = e^{xy^2};\ \ x = u^3,\ \ y = u - v^2$ Encuentre $\frac{\partial z}{\partial v}$
a) $-4vxye^{xy^2}$ b) $-4xye^{xy^2}$ c) $4vxye^{xy^2}$ d) Ninguna anterior

7. Encuentre dy/dx en la ecuación $y = sen\ xy$.
a) $\frac{y\ cos\ xy}{1-x\ cos\ xy}$ b) $\frac{y\ cos\ xy}{1+x\ cos\ xy}$ c) $\frac{-y\ cos\ xy}{1-x\ cos\ xy}$ d) Ninguna anterior

8. En $w = xyz,\ \ x = t^2,\ \ y = 2t,\ \ z = e^{-t}$ la derivada parcial de z con respecto a x se llama:
a) Derivada parcial b) Derivada total c) Cualquiera d) Ninguna

9. Si $x\ lny\ + y^2z\ + z^2 = 8$. Halle una primera derivada parcial de z.
a) $\frac{ln\ y}{y^2-2z}$ b) $\boldsymbol{\frac{-ln\ y}{y^2-2z}}$ c) $\frac{ln\ y}{y^2+2z}$ d) Ninguna anterior

10.Sea θ el ángulo entre los lados iguales de un triángulo isósceles y sea x la longitud de estos lados. Si x se incrementa a razón de ½ metro por hora y θse incrementa a razón de $\pi/90$radianes por hora. Hallar la tasa de incremento del área cuando $x = 6\ y\ \theta = \pi/4$.

a) $5.622\ m^2/h$ b) $6.255\ m^2/h$ c)$2.566\ m^2/h$ d) Ninguna

SOLUCIÓN PRÁCTICA 9 (Etapa individual)

1. **a)**
2. **a)**
3. **c)**
4. **d)**
5. **c)**
6. **a)**
7. **a)**
8. **b)**
9. **b)**
10. **c)**

PRÁCTICA 10: “INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS RECTANGULARES Y POLARES”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Formula y resuelve integrales múltiples a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado para desarrollar su capacidad para resolver problemas.

INTRODUCCIÓN:

En las prácticas anteriores se vió cómo derivar funciones de varias variables con respecto a una variable, manteniendo constantes las demás. Empleando un procedimiento similar, se pueden integrar funciones de varias variables. Además, se pueden resolver integrales con múltiples variables; pero de manera práctica, se analizará el caso del área de una región plana mediante la integración doble y mediante la integral triple, encontraremos volúmenes.

En el caso de la utilización de integrales dobles para el cálculo de áreas, lo haremos por medio de coordenadas rectangulares y polares. Dependiendo del caso a veces es más conveniente utilizar uno de los dos sistemas de coordenadas.

También se pueden encontrar volúmenes utilizando la integración doble, así como áreas de superficies definidas en tres dimensiones.

Por último, podemos decir que la integral doble también tiene otras aplicaciones geométricas y físicas, entre ellas: masa de una lámina plana, centros de masa, momentos de inercia y radios de giro.

La forma general de una integral doble para obtener el volumen de una región sólida se desprende de la siguiente definición:

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x,y) \geq 0 \; para \; todo \; (x,y)$ en R, entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como:

$$V = \int_R \int f(x,y)\, dA$$

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

La integración iterada, que da paso a la integración múltiple, está directamente relacionada con el tema de la derivación parcial, ya que es su proceso inverso, y su desarrollo servirá siempre como comprobación.. Dentro de la integración múltiple, la integración doble está relacionada con la integral triple porque con ambas técnicas pueden obtenerse volúmenes de regiones sólidas.

El tema de integración múltiple tiene una fuerte dependencia del cálculo diferencial, del cálculo integral y de los primeros temas de este mismo curso de cálculo vectorial. Su análisis es definitivamente análogo a los cursos anteriores pero extendiendo el estudio a más de una variable.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

El alumno deberá recordar claramente las principales fórmulas de derivación e integración de los cursos anteriores, así como las técnicas para su aplicación y métodos de solución. Lo anterior servirá como una herramienta que hará más fácil el cálculo de las integrales múltiples.

Una vez que el alumno tiene claridad en las fórmulas necesarias, entonces se deberá concentrar en aplicar la técnica de integración iterada paso a paso, cuidando siempre el manipular una sóla variable a la vez, y tratando a las demás variables como si fueran constantes.

Se sugieren al alumno varias comprobaciones de sus cálculos: Cuando resuelva una integral iterada, puede comprobarla mediante derivación parcial o cambiando el orden de las variables de integración para volver a resolver la integral.

También puede cambiar de sistema de coordenadas, en este caso de rectangulares a polares, con el fin de hacer la integral de las dos formas y obtener el mismo resultado.

Siempre será fundamental hacer una buena representación gráfica de la región a evaluar, ya sea un área o un volumen; porque la definición clara de los límites de las regiones bajo estudio, hará que los límites de integración sean correctamente establecidos y el orden de integración sea fácilmente elegido. Entonces como paso final, sólo quedará aplicar bien las técnicas de integración que se han visto desde cursos anteriores, para definir el resultado del área o volumen buscado.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. **Evaluar las siguientes integrales iteradas:**

a) $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}dydx$

b) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{cos\theta} 3r^2sen\theta drd\theta$

II. **Utilice una integral iterada para hallar el área de la región:**

a) **Bajo la curva** $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ **y** $2 \leq x \leq 5$.

b) **Entre** $y = x, \; y = 2x, \; x = 2$

III. **Dibuje la región R y evalúe la integral iterada** $\int_R \int f(x, y)\, dA$

a) $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} sen^2xcos^2y\, dydx$

b) $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2y^2\, dxdy$

IV. **Utilice una integral doble para hallar el volumen del sólido indicado:**

a) **En el primer octante, bajo el plano** $x + y + z = 2$

b) **En el primer octante, entre las gráficas de** $z = 4 - y^2, \; y = x \;\; y \;\; y = 2$

V. **Evalúe la integral doble** $\int_R \int f(r, \theta)\, dA$:

a) $\int_0^{\pi/4} \int_0^4 r^2sen\theta\, cos\theta\, drd\theta$

b) $\int_0^{\pi/2} \int_2^3 \sqrt{9 - r^2}\, rdrd\theta$

VI. **Utilice una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones:**

a) $z = x^2 + y^2 + 3, \; z = 0, \; x^2 + y^2 = 1$

b) **Interior al hemisferio** $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ **y exterior al cilindro** $x^2 + y^2 = 1$.

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 10 (En equipo)

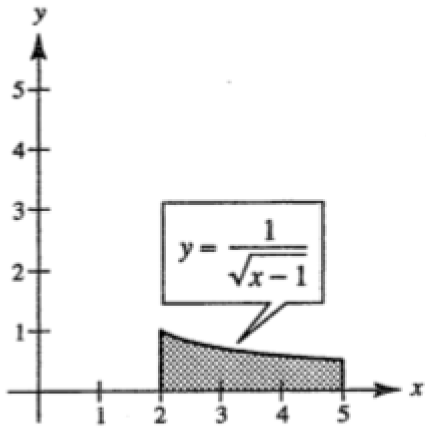
I. **a)** $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x} dydx = \int_1^4 [y^2 e^{-x}]_1^{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 (xe^{-x} - e^{-x}) dx = [-xe^{-x}]_1^4$

$$= -4e^{-4} + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{4}{e^4}$$

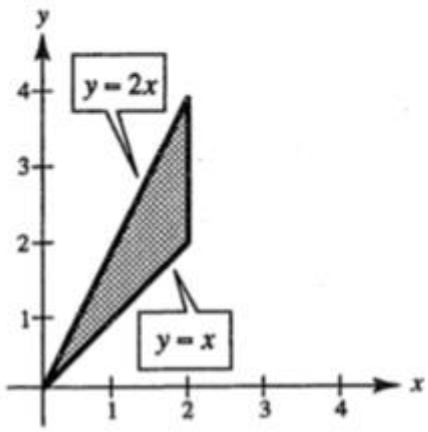
c) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{cos\theta} 3r^2 sen\theta drd\theta = \int_0^{\pi/4} [r^3 sen\,\theta]_0^{cos\,\theta} d\theta = \int_0^{\pi/4} cos^3\theta sen\theta d\theta =$

$$\left[-\frac{cos^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 1\right] = \frac{3}{16}$$

II. **a)** $\int_2^5 \int_0^{1/\sqrt{x-1}} dydx = \int_2^5 [y]_0^{1/\sqrt{x-1}} dx = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_2^5 = 2$



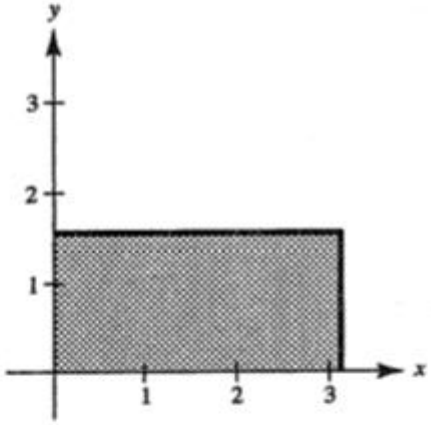
b) $A = \int_0^2 \int_x^{2x} dydx = \int_0^2 (2x - x) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$



III. **a)** $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2x cos^2y\, dydx = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}sen^2x\left(y+\frac{1}{2}sen\ 2y\right)\right]_0^{\pi/2} dx$

$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}sen^2x\left(\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}(1-cos2x)dx$$

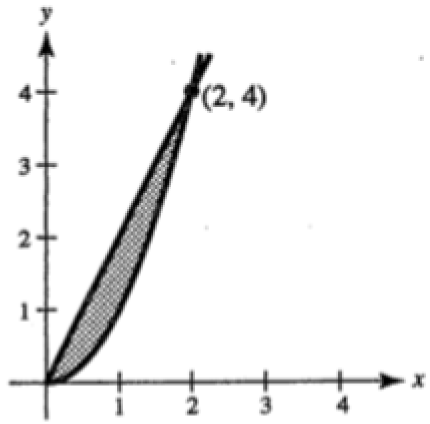
$$= \left[\frac{\pi}{8}\left(x-\frac{1}{2}sen2x\right)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{8}$$



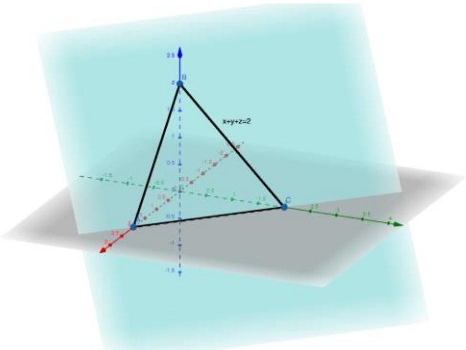
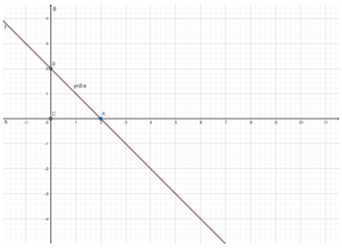
b) $\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x^2y^2\, dxdy = \int_0^4\left[\frac{x^3y^2}{3}\right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy =$

$$\int_0^4\left(\frac{y^{7/2}}{3}-\frac{y^5}{24}\right)dy = \left[\frac{2y^{9/2}}{27}-\frac{y^6}{144}\right]_0^4$$

$$= \frac{1024}{27}-\frac{256}{9} = \frac{256}{27}$$



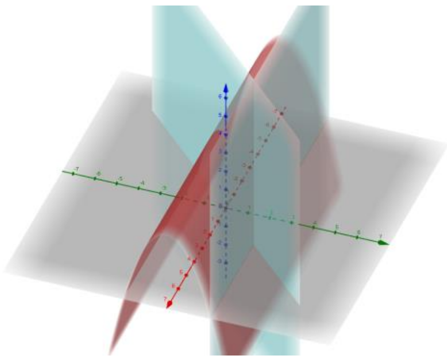
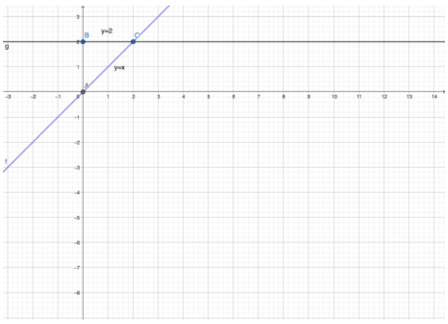
IV. a) Volumen bajo el plano $x + y + z = 2$

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} (2 - x - y)dydx = \int_0^2 \left[2y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}(2 - x)^2 dx = \left[-\frac{1}{6}(x - 2)^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

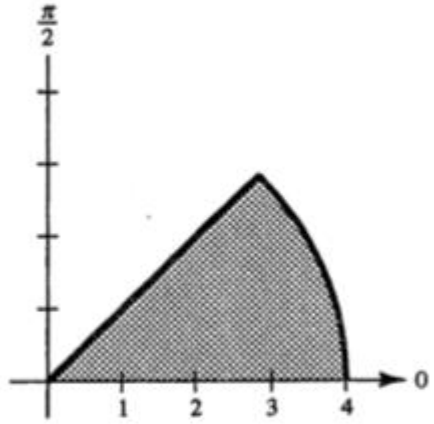
b) $\boldsymbol{Volumen\ entre\ las\ gráficas\ de\ z = 4 - y^2,\ \ y = x\ \ y\ \ y = 2}$

$$V = \int_0^2 \int_0^y (4 - y^2)dxdy = \int_0^2 (4y - y^3)dy = \left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 4$$

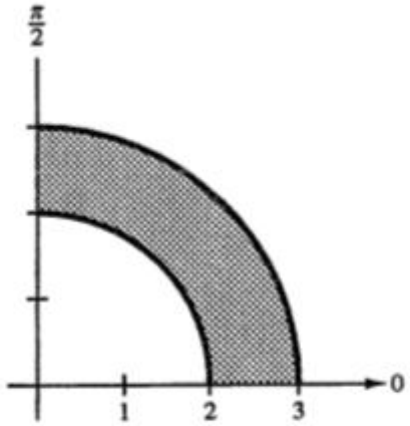
V. **a)** $\int_0^{\pi/4}\int_0^4 r^2 sen\theta\, cos\theta\, drd\theta = \int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^3}{3} sen\theta cos\theta\right]_0^4 d\theta =$

$$\left[\left(\frac{64}{3}\right)\frac{sen^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{16}{3}$$



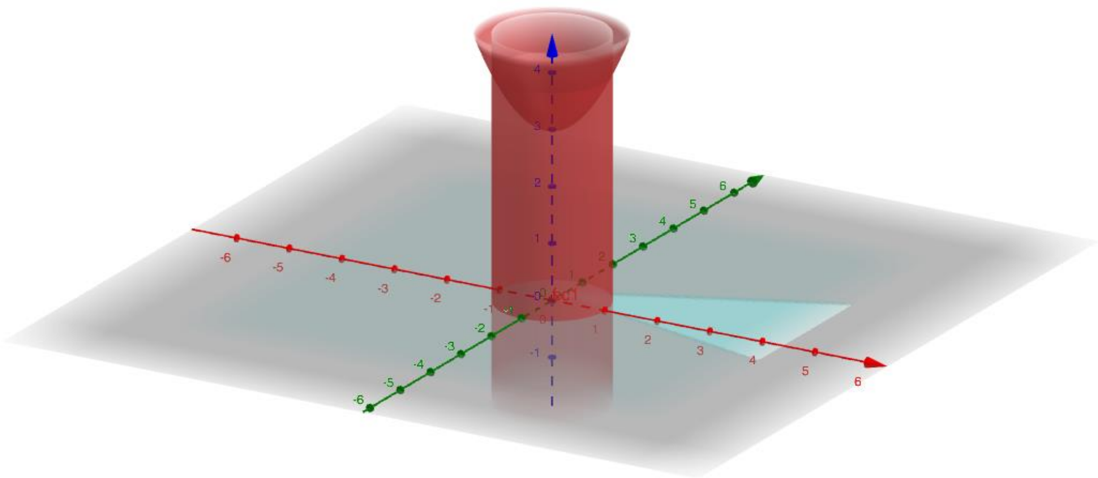
b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^3 \sqrt{9-r^2}\, rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 d\theta =$

$$\left[\frac{5\sqrt{5}}{3}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$$

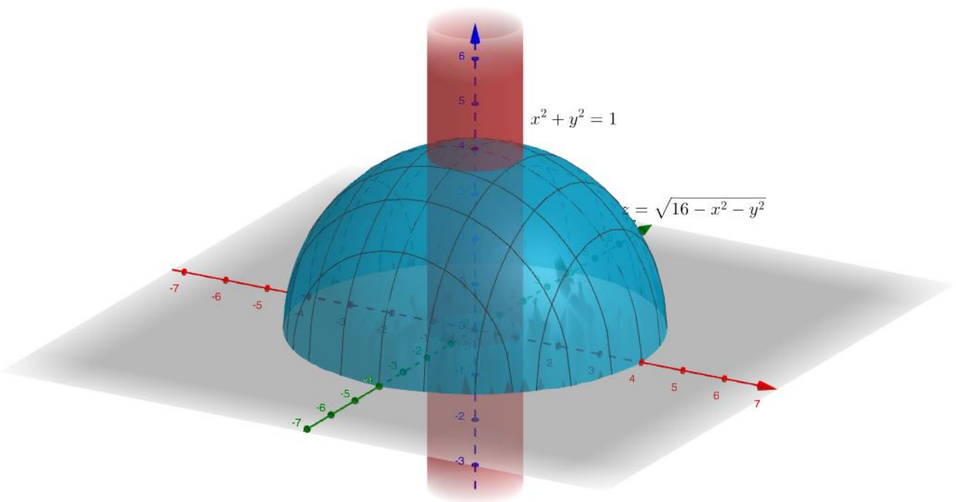


VI. a) $\boldsymbol{Volumen\ entre\ \ z = x^2 + y^2 + 3,\ \ z = 0,\ \ x^2 + y^2 = 1}$

$$\boldsymbol{V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2+3)r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^4}{4}+\frac{3r^2}{2}\right)_0^1 d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\frac{7}{4}d\theta = \frac{7\pi}{2}}$$



b) $$\boldsymbol{V = \int_0^{2\pi}\int_1^4 \sqrt{16-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(\sqrt{16-r^2})^3\right]_1^4 d\theta = \int_0^{2\pi} 5\sqrt{15}\,d\theta = 10\sqrt{15}\pi}$$



ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. En una integral doble debe resolverse primero la integral que contiene el:

a) 1er diferencial b) 2do diferencial c) Cualquiera d)Ninguna

2. Evalúe la siguiente integral iterada $\int_0^2 \int_y^{2y} (10 + 2x^2 + 2y^2)dxdy$

a) $\frac{130}{4}$ b) $\frac{140}{3}$ c) $\frac{135}{12}$ d) Ninguna

3. La integral doble que determina el área entre las siguientes funciones $xy = 9, y = x, y = 0, x = 9$ es:

a) $\int_0^3 \int_0^x dydx + \int_3^9 \int_0^{9/x} dydx$ b) $\int_0^1 \int_y^9 dxdy + \int_1^3 \int_y^{9/y} dxdy$ c)a ó b d) Ninguna

4. La integral doble que determina el área entre las siguientes funciones $2x - 3y = 0, x + y = 5, y = 0$ es:

a) $\int_0^2 \int_{3y/2}^{5-y} dxdy$ b) $\int_0^5 \int_{3y/2}^{2-y} dxdy$ c) $\int_0^2 \int_{3y/2}^{5-y} dydx$ d) Ninguna

5. Evalúe la integral en coordenadas polares $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 re^{-r^2} drd\theta$

a) $\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{e^9}\right)$ b) $\frac{\pi}{4}\left(-1 + \frac{1}{e^9}\right)$ c) $\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^9}\right)$ d) Ninguna

6. Evalúe la integral en coordenadas polares $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1-cos\theta} (sen\theta) rdrd\theta$.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{6}$ c) $\frac{3}{6}$ d) Ninguna

7. Con una integral doble determine el volumen entre los planos $x = 2,\ y = x,\ z = 4$, en el primer octante.

a) 2 b) 4 c) 8 d) Ninguna

8. Con una integral doble determine el volumen entre los planos $x = 4,\ y = 2,\ z = 6 - 2y$, en el primer octante

a) 12 b) 32 c) 48 d) Ninguna

9. Utilice una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones rectangulares $z = ln(x^2 + y^2),\ z = 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\ y\ x^2 + y^2 \leq 4$

a) $4\pi\left(ln\,4 - \frac{3}{4}\right)$ b) $3\pi\left(ln\,3 - \frac{3}{4}\right)$ c) $4\pi\left(ln\,3 - \frac{3}{4}\right)$ d) Ninguna

10. Utilice una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}\ \ e\ \ interior\ al\ cilindro\ x^2 + y^2 - 4x = 0.$

a) $\frac{69}{4}(3\pi + 4)$ b) $\frac{64}{9}(3\pi - 4)$ c) $\frac{64}{9}(4\pi - 3)$ d) Ninguna

SOLUCIÓN PRÁCTICA 10 (Etapa individual)

1. a)
2. b)
3. c)
4. a)
5. c)
6. a)
7. c)
8. b)
9. a)
10. b)

PRÁCTICA 11: "INTEGRAL TRIPLE EN COORDENADAS RECTANGULARES"

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Formula y resuelve integrales múltiples a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado para desarrollar su capacidad para resolver problemas.

INTRODUCCIÓN:

El procedimiento utilizado para definir una integral triple es análogo al que se utiliza para integrales dobles. Considerar una función f en tres variables que es continua sobre una región sólida acotada. Entonces se encierra dicha región en una red de cubos y se forma una partición interna que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de la región. El volumen del i-ésimo cubo es:

$$\Delta V_i = \Delta X_i \, \Delta Y_i \, \Delta Z_i$$

Que sirve de base para la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \, \Delta V_i$$

Tomando el límite cuando la partición tiende a cero se llega a la siguiente definición:

"Si f es continua sobre una región sólida acotada Q, entonces la integral triple de f sobre Q se define como:

$$\int \int_Q \int f(x, y, z) dV = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \, \Delta V_i$$

siempre que el límite exista. El volumen de la región sólida Q está dada por:

Volumen de Q = $\int \int_Q \int dV$

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

La integración múltiple, sobre todo en los ejercicios de aplicación, sirve de repaso para que el alumno recuerde la interpretación geométrica de la integral; ya que , al estar graficando las funciones que dan lugar a los cuerpos sólidos, el alumno debe decidir cuál es el mejor orden de integración y para esto debe visualizar el cuerpo, primero en el plano y luego, proyectándolo a la tercera dimensión, como un volumen.

Otra vez la derivación parcial es clave como un proceso inverso de la integración iterada, y sobre todo para ayudar en el proceso matemático de “completar el integrando” en cada uno de los tres órdenes de integración.

La integración doble de la práctica anterior está estrechamente relacionada con la integración triple por el hecho de que en realidad, una integral doble es una integral triple resuelta en uno de sus tres órdenes de integración, y con las dos técnicas se obtienen volúmenes.

Las integrales triples en coordenadas rectangulares tienen, en su complejidad una limitante; cuando es muy complicado resolver una triple integral por medio de ecuaciones rectangulares, entonces se utiliza una nueva herramienta que se analizará en la siguiente y última práctica: las coordenadas cilíndricas y esféricas.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

En esta práctica debe hacerse un mayor énfasis en cuidar el detalle de construir una gráfica lo suficientemente clara y grande, de tal manera que la decisión sobre los límites de integración sea sencilla, y nos lleve a la elección del orden de integración más adecuado para nuestro problema.

No se debe dudar en cambiar el orden de integración en el caso de que resulte una integral que no sea elemental y nos lleve mucho tiempo resolverla; es mejor buscar otra opción para llegar a una integral lo más directa posible.

Antes de empezar a plantear la integral múltiple, se debe analizar la figura para saber si el sólido tiene alguna simetría con el fin de concentrarse en sólo una parte del sólido y reducir el trabajo al mínimo.

Cuando ya se tiene completa la figura, y antes de empezar el proceso de integración, el alumno debe ensayar lo más que sea posible una respuesta aproximada del volumen del sólido analizado de acuerdo a las coordenadas utilizadas en los ejes principales; lo anterior le servirá para saber si sus cálculos van por buen camino, pero en el caso de que el resultado de su ejercicio se separe mucho de la realidad a simple vista, será mejor que revise a detalle los pasos de los cálculos hechos.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. Evalúe la integral iterada:

a) $\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} zdzdxdy$

b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} sen\ y\ dzdxdy$

II. Plantear una integral triple para el volumen del sólido indicado:

a) El sólido acotado por $z = 9 - x^2,\ z = 0,\ x = 0\ \ y\ \ y = 2x$

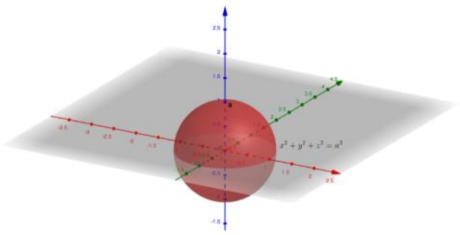
b) El sólido que es interior común bajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 80$ y sobre el paraboloide $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

III. Dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada:

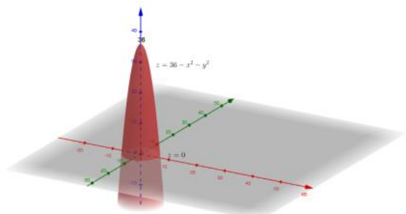
a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{6-x-y} dzdydx$

b) $\int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dzdydx$

IV. Utilice una integral triple para hallar el volumen del sólido mostrado:



a)



b)

V. En los siguientes ejercicios, escriba los seis posibles órdenes de integración de la integral triple sobre la región sólida Q.

a) $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 4\}$

b) $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2,\ 0 \leq z \leq 6\}$

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 11 (En equipo)

I. a) $\int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} zdzdxdy = \frac{1}{2}\int_0^9 \int_0^{\frac{y}{3}} (y^2-9x^2)dxdy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^9 [xy^2-3x^3]_0^{y/3}$$

$$= \frac{2}{18}\int_0^9 y^3 dy = \left[\frac{1}{36}y^4\right]_0^9 = \frac{729}{4}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} \int_0^{\frac{1}{y}} sen\, y\, dzdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{sen\, y}{y} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} sen\, y\, dy =$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

II. a) $\int_0^3 \int_0^{2x} \int_0^{9-x^2} dzdydx$

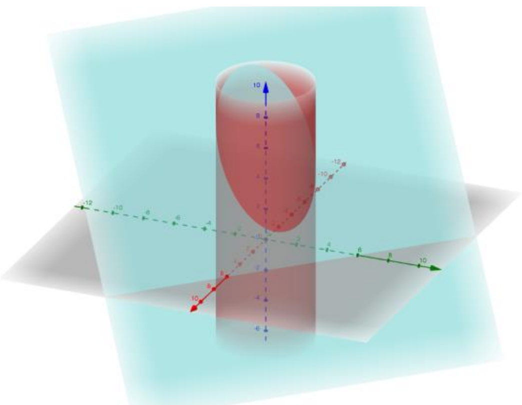
b) $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow 2z = x^2+y^2$

$x^2+y^2+z^2 = 2z+z^2 = 80 \Rightarrow z^2+2z-80=0$

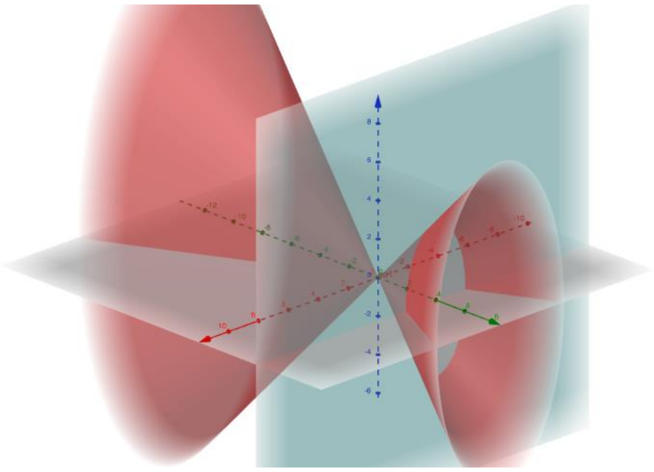
$\Rightarrow (z-8)(z+10)=0 \Rightarrow z=8 \Rightarrow x^2+y^2=2z=16$

$\int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{\sqrt{80-x^2-y^2}} dzdydx$

III. a) Plano superior: $x+y+z=6$, lado cilíndrico: $x^2+y^2=9$



b) Cono elíptico: $4x^2 + z^2 = y^2$



IV. **a)** $8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dzdydx$

$$= 8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^a \left[y\sqrt{a^2-x^2-y^2} + (a^2-x^2)\, arcsen(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}})\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^a (a^2-x^2)dx = \left[2\pi\left(a^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3$$

b) $4\int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-x^2}} \int_0^{36-x^2-y^2} dzdydx \quad =$

$$4\int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-x^2}} (36-x^2-y^2)dydx$$

$$= 4\int_0^6 \left[36y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{36-x^2}} dx$$

$$= 4\int_0^6 \left[36\sqrt{36-x^2} - x^2\sqrt{36-x^2} - \frac{1}{3}(36-x^2)^{3/2}\right] dx$$

$$= 4\left[9x\sqrt{36-x^2} + 324 arcsen\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{1}{6}x(36-x^2)^{3/2}\right]_0^6$$

$$= 4(162\pi) = 648\pi$$

V. **a)** $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 4\}$

$$\int_Q \int \int \boldsymbol{xyz\, dV} = \int_0^4 \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \boldsymbol{xyzdydxdz}$$

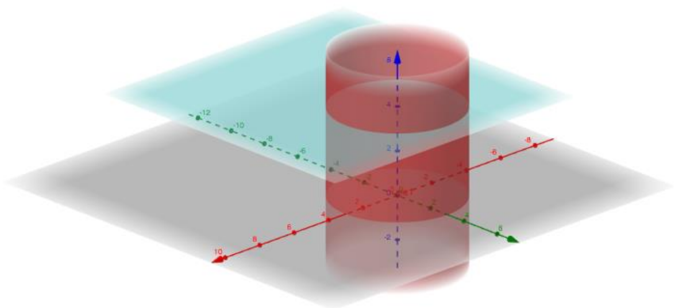
$$= \int_0^4 \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \boldsymbol{xyzdxdydz}$$

$$= \int_{-3}^3 \int_0^4 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \boldsymbol{xyzdxdzdy}$$

$$= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^4 \boldsymbol{xyzdzdxdy}$$

$$= \int_{-3}^3 \int_0^4 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \boldsymbol{xyzdydzdx}$$

$$= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^4 \boldsymbol{xyzdzdydx}$$



b) $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2,\ 0 \leq z \leq 6\}$

$$\int\int_Q \int xyz\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^6 xyzdzdydx$$

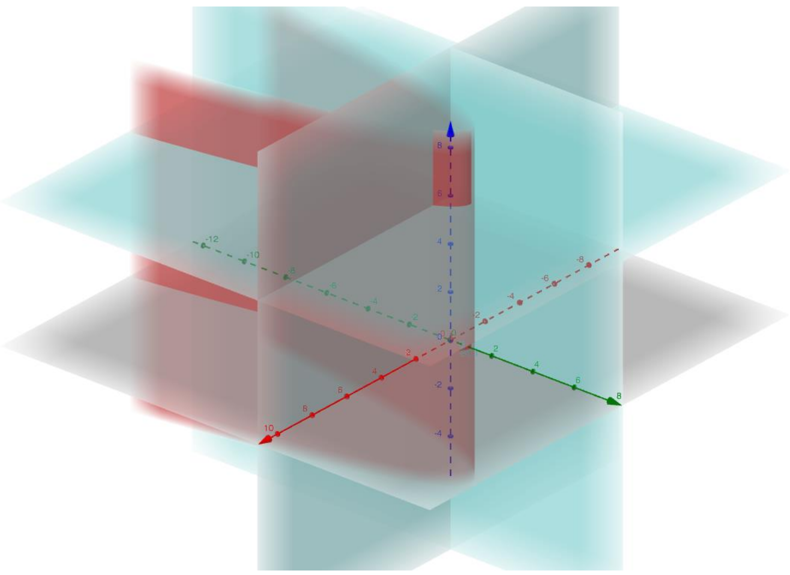
$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} \int_0^6 xyzdzdxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^6 \int_0^{\sqrt{1-y}} xyzdxdzdy$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{6}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} xyzdxdydz$$

$$= \int_0^1 \int_0^6 \int_0^{1-x^2} xyzdydzdx$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{6}} \int_0^1 \int_0^{1-x^2} xyzdydxdz$$



ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Resuelva la siguiente integral triple $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xdzdydx$

a) $\frac{15}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)$ b) $\frac{15}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$ c) $\frac{15}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ d) Ninguna

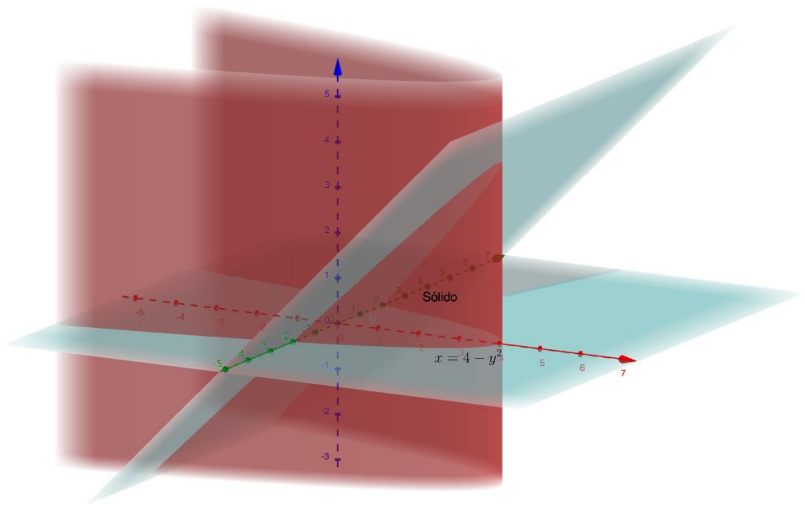
2. Resuelva la siguiente integral triple $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2y^2z^2dxdydz$

a) 8/27 b) 27/8 c)15/7 d) Ninguna

3. Resuelva la siguiente integral triple $\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} lnzdydzdx$

a) $4ln4$ b) $4ln2$ c) $2ln4$ d) Ninguna

4. Escriba la integral triple que determina el volumen del sólido mostrado entre las gráficas siguientes



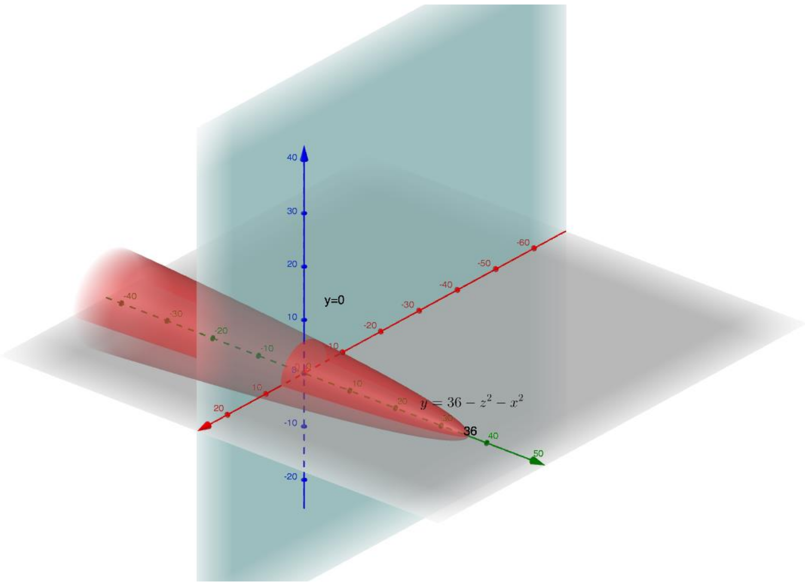
a) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^x dzdxdy$ b)$\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^x dzdydx$

c)$\int_{-2}^2 \int_0^z \int_0^{4-y^2} dzdxdy$ d) Ninguna

5. ¿Cuál es el volumen resultante del anterior ejercicio?

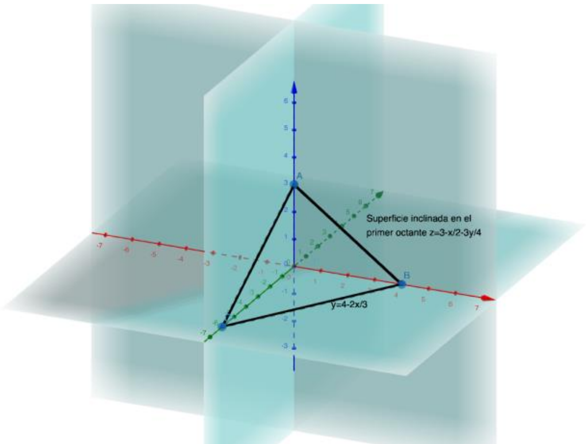
a) $\frac{265}{16}$ b) $\frac{526}{25}$ c) $\frac{256}{15}$ d) Ninguna

6. Utilice una integral triple para determinar el volumen del sólido que se forma entre las superficies de $y = 0 \;\; y \;\; y = 36 - z^2 - x^2$



a) 648π b) 684π c) 468π d) Ninguna

7. Halle la integral triple que determina el volumen en el siguiente sólido del primer octante:



a) $\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} dzdxdy$ b) $\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} dzdydx$

8. Encuentre el volumen V del sólido acotado por las gráficas de $x = y^2$, $4 - x = y^2$, $z = 0$, $z = 3$.

a) $16\sqrt{2}$ b) $14\sqrt{3}$ c) $18\sqrt{2}$ d) Ninguna

9. Encuentre el volumen V del sólido acotado por las gráficas de $y = x^2 + z^2$, $y = 8 - x^2 - z^2$.

a) 14π b) 16π c) 18π d) Ninguna

10. Integral triple para hallar el volumen de una esfera de radio 2

a) $8\int_0^a \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

b) $8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dzdydx$ c) Ninguna

SOLUCIÓN PRÁCTICA 11 (Etapa individual)

1. **c)**
2. **a)**
3. **c)**
4. **a)**
5. **c)**
6. **a)**
7. **b)**
8. **a)**
9. **b)**
10. **a)**

PRÁCTICA 12: “INTEGRAL TRIPLE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS”

COMPETENCIA A DESARROLLAR:

Formula y resuelve integrales múltiples a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado para desarrollar su capacidad para resolver problemas.

INTRODUCCIÓN:

Muchas regiones sólidas comunes como esferas, elipsoides, conos y paraboloides pueden dar lugar a integrales triples difíciles de calcular en coordenadas rectangulares. De hecho, fue precisamente esta dificultad la que llevó a la introducción de sistemas de coordenadas no rectangulares. en esta práctica se aprenderá a usar coordenadas cilíndricas y esféricas para evaluar integrales triples.

Recordemos que la conversión de coordenadas cilíndricas a rectangulares se obtiene así:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,sen\,\theta \qquad y \qquad z = z$$

y la conversión de coordenadas esféricas a rectangulares es:

$$x = \rho\,sen\,\phi\cos\theta \qquad y = \rho\,sen\,\phi\,sen\,\theta \qquad y \qquad z = \rho\cos\phi$$

CORRELACIÓN CON OTROS TEMAS DEL PROGRAMA DE ESTUDIO. APLICACIÓN EN EL CONTEXTO

Esta práctica es la segunda parte del tema de integración triple que inicia en la práctica anterior, complementa los tipos de situaciones que se pueden presentar al tratar de determinar el volumen de una región sólida en tercera dimensión, sobre todo cuando no es práctico resolver un problema en coordenadas rectangulares.

Así como una integral doble puede resolverse también en coordenadas polares por facilidad; la integración triple cambia las coordenadas rectangulares por cilíndricas o incluso por esféricas.

Esta práctica constituye la culminación del tema de cálculo vectorial ya que su nivel de complejidad exige que sean dominados los temas anteriores tales como: dominio, rango y gráfica de una función de varias variables, derivación parcial e integración iterada, así como la integración múltiple en diversos tipos de sistemas de coordenadas.

MEDIDAS DE SEGURIDAD E HIGIENE

No requeridas

MATERIAL Y EQUIPO NECESARIO:

Papel para graficar, calculadora y lápiz

METODOLOGÍA:

Reunirse en equipo para resolver los ejercicios por medio de lluvia de ideas y por comparación

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

El alumno deberá dominar las ecuaciones que sirven para transformar sistemas de coordenadas, y deberá visualizar en qué situaciones es más conveniente cambiar de sistema de coordenadas para que la integral sea más fácil de resolver. Incluso debe saber decidir cuando es más conveniente utilizar coordenadas cilíndricas o esféricas como recurso auxiliar.

Debe iniciar haciendo ejercicios de figuras con varios límites constantes, luego ejercicios que involucren figuras con simetría para poder reducir el trabajo convenientemente, después debe animarse a resolver ejercicios más complicados, recordando que deberá volver a hacer estos mismos ejercicios cambiando el orden de integración cuantas veces sea necesario para que le sirva de comprobación de los ejercicios resueltos.

Cuando un ejercicio transformado a un sistema de coordenadas auxiliar resulta más fácil de resolver se ve la verdadera utilidad de la existencia de estos recursos matemáticos, y el por qué de la necesidad y pertinencia de incluirlos en los programas de estudio de los cursos de Cálculo.

ACTIVIDADES A REALIZAR (En equipo)

I. **Evalúe las siguientes integrales iteradas:**

a) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{2} e^{-\rho^3}\rho^2 d\rho d\theta d\phi$

b) $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2 sen\phi\cos\phi d\rho d\theta d\phi$

II. **Dibuje la región sólida cuyo volumen está dado por la integral iterada, y evalúe la integral iterada**

a) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{3}\int_0^{e^{-r^2}} r dz dr d\theta$

b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{3-r^2} r dz dr d\theta$

III. **Convertir la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evaluar la integral más sencilla.**

a) $\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dz dy dx$

b) $\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz dy dx$

IV. **Utilice coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido interior a $x^2+y^2+z^2=16$ y exterior a $z=\sqrt{x^2+y^2}$.**

V. **Utilice coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido comprendido entre las esferas:**

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad y \quad x^2+y^2+z^2=b^2, \; b \succ a$$

$$e\ interior\ al\ cono\ z^2=x^2+y^2.$$

REPORTE DEL ALUMNO (RESULTADOS)

BIBLIOGRAFÍA

Larson, R. (2009). *Cálculo de varias variables*. México: Mc Graw Hill
Zill, D. (2015). *Matemáticas 3*. México: Mc Graw Hill
Purcell, E. (2000). *Cálculo*. México: Prentice Hall

SOLUCIONES PRÁCTICA 12 (En equipo)

I. a) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{2} e^{-\rho^3}\rho^2 d\rho d\theta d\phi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{3}e^{-\rho^3}\right]_0^2 d\theta d\phi =$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\frac{1}{3}(1-e^{-8})d\theta d\phi = \frac{\pi^2}{6}(1-e^{-8}).$$

b) $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2 sen\phi cos\phi d\rho d\theta d\phi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4} sen\phi cos\phi cos^3\theta d\theta d\phi$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4} sen\phi cos\phi[cos\theta(1-sen^2\theta)] \quad d\theta d\phi$$

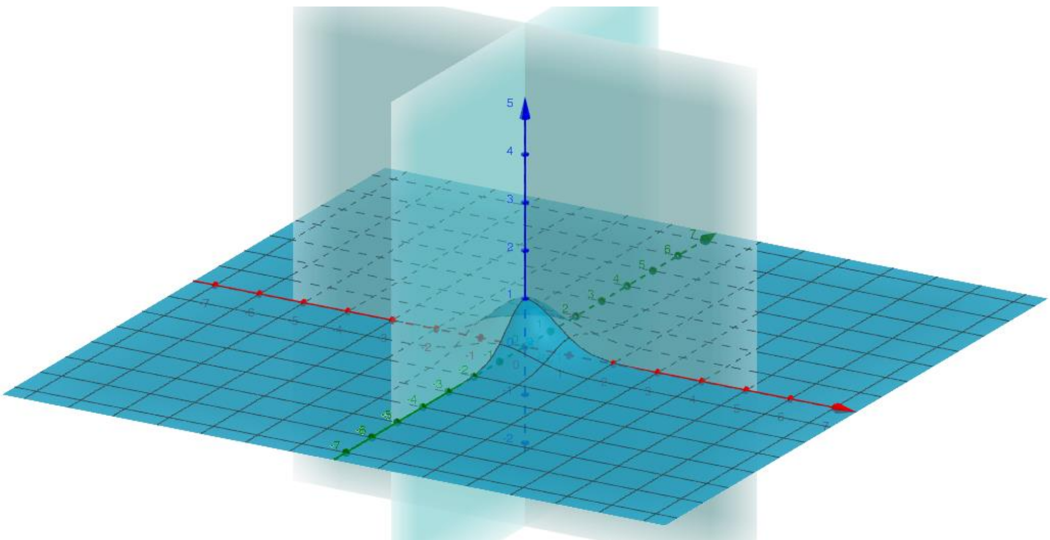
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} sen\phi cos\phi\left[sen\theta - \frac{sen^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/4} \quad d\phi$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{36}\int_0^{\pi/4} sen\phi cos\phi d\phi = \left[\frac{5\sqrt{2}}{36}\frac{sen^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2}}{144}$$

II. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\int_0^{e^{-r^2}} r dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3}\int_0^{e^{-r^2}} re^{-r^2} dr d\theta =$

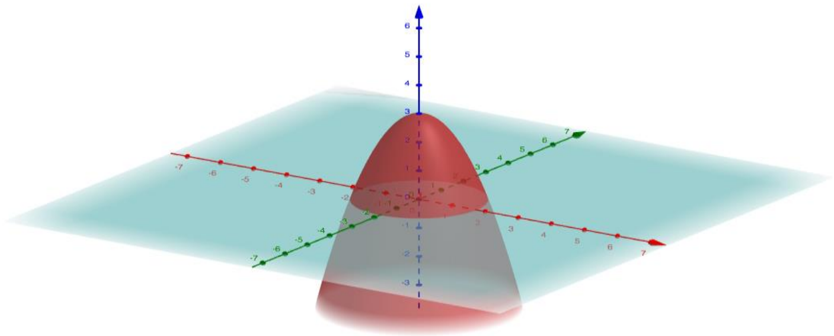
$$\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^3 d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-e^{-9})d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-9})$$



b) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{3-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{9}{4}d\theta = \frac{9\pi}{2}$$



III. **a)** $$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^2\,dz\,dr\,d\theta = \frac{8\pi^2}{3}-2\pi\sqrt{3}$$

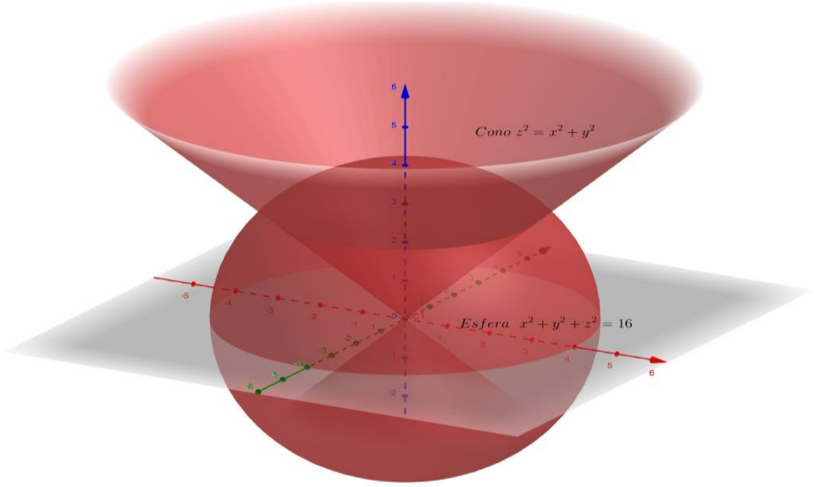
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^4 \rho^3 sen^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_4^{2\csc\phi}\rho^3 sen^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{8\pi^2}{3}-2\pi\sqrt{3}$$

b) $$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\sqrt{r^2+z^2}\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3 sen\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{8}$$

IV. Volumen del sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y exterior a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



$$V = Volumen\ del\ hemisferio\ inferior + 4(volumen\ del\ primer\ octante)$$

$$V = \frac{2}{3}\pi(4)^3 + 4\left[\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sqrt{2}}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_{2\sqrt{2}}^{4}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta\right]$$

$$V = \frac{128\pi}{3} + 4\left[\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sqrt{2}}\int_0^{r} r^2\,dr\,d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_{2\sqrt{2}}^{4} r\sqrt{16-r^2}\,dr\,d\theta\right]$$

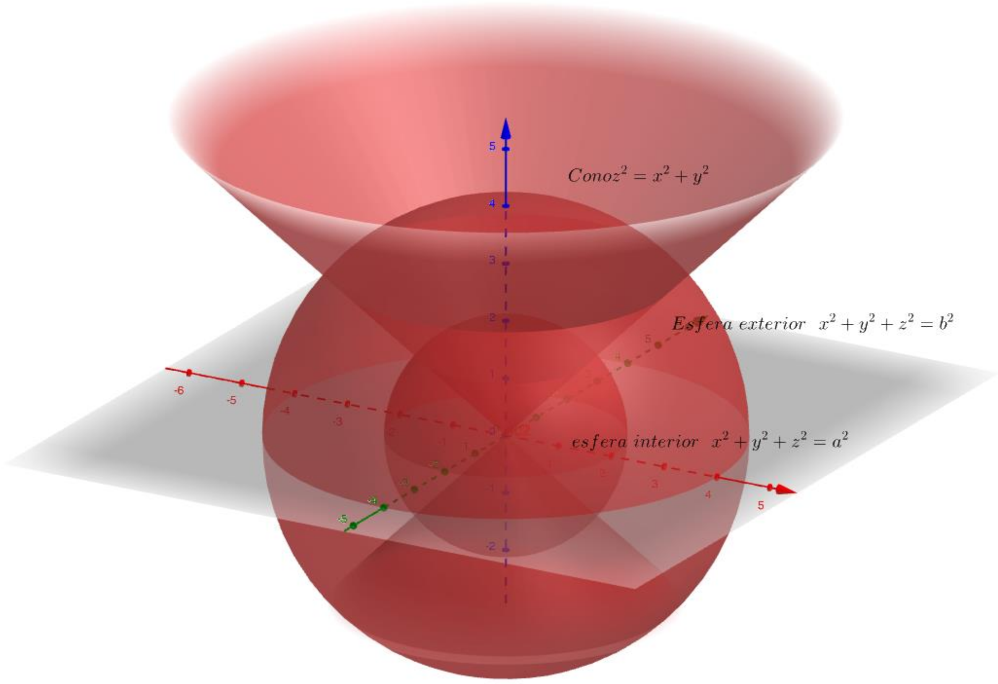
$$= \frac{128\pi}{3} + 4\left[\frac{8\sqrt{2}\pi}{3} + \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(16-r^2)^{3/2}\right]_{2\sqrt{2}}^{4} d\theta\right]$$

$$= \frac{128\pi}{3} + 4\left[\frac{8\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}\right] = \frac{128\pi}{3} + \frac{64\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}(2+\sqrt{2})$$

V. Volumen del sólido comprendido entre las esferas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad y \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad b \succ a$$

$$e\ interior\ al\ cono\ z^2 = x^2 + y^2.$$



$$V = 8\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\int_a^b \rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi \Leftarrow Incluye\ conos\ inf.\, y\ sup.$$

$$= \frac{8}{3}(b^3 - a^3)\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} sen\phi d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)\int_0^{\pi/4} sen\phi d\phi =$$

$$= \left[\frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)(-cos\phi)\right]_0^{\pi/4} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3) =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)$$

ACTIVIDADES A REALIZAR (Etapa individual)

Seleccione la respuesta correcta:

1. Convierta el punto $(1,-1,-9)$ de coordenadas rectangulares a cilíndricas

a) $(\sqrt{2},-\pi/4,-9)$ b) $(\sqrt{2},\pi/2,-9)$ c) $(\sqrt{2},-\pi/6,-9)$ d) Ninguna

2. Convierta el punto $(5,\pi/2,1)$ de coordenadas cilíndricas a rectangulares

a) $(0,5,1)$ b) $(1,0,5)$ c) $(1,5,0)$ d) Ninguna

3. Convierta la ecuación $x^2+y^2-z^2=1$a coordenadas cilíndricas.

a) $r-z^2=1$ b) $\sqrt{r}-z^2=1$ c) $r^2-z^2=1$ d) Ninguna

4. Convierta la ecuación $r=5\ sec\theta$ a coordenadas rectangulares.

a) $x=\frac{1}{5}$ b) $x=5$ c) $x=\sqrt{5}$ d) Ninguna

5. Resuelva la integral $\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{2-r} rzdzdrd\theta$ en coordenadas cilíndricas.

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{9}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) Ninguna

6. Resuelva la integral $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{cos\phi} \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta$ en coordenadas esféricas.

a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) Ninguna

7. Convierta la integral $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} xdzdydx$ a coordenadas cilíndricas

a) $\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r^2 cos\theta dzdrd\theta$ b) $\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^2\int_0^4 r^2 cos\theta drdzd\theta$ c) Ninguna

8. ¿Cual es el resultado de la integral del ejercicio anterior?

a) -2 b) 0 c) 2 d) Ninguna

9. Determine la integral en coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido comprendido entre las esferas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 \quad y \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4^2, \;\; b \succ a$$

$$e\ interior\ al\ cono\ z^2 = x^2 + y^2.$$

a) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_3^4 \rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi$ b) $8\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\int_3^4 \rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi$

c) Ninguna

10. ¿Cuál es el volumen resultante de la integral del ejercicio 9?

a) 54.26 b) 64.52 c) 45.62 d) Ninguna

SOLUCIÓN PRÁCTICA 12 (Etapa individual)

1. a)
2. a)
3. c)
4. b)
5. c)
6. a)
7. a)
8. b)
9. b)
10. c)