

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“Aplicación de los números duales al modelado y control de robots”**

POR

**Ing. Jaqueline Ivonne Bernal Franco.**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Ricardo Emmanuel Campa Cocom.**

**ISSN: 0188-9060**



**RIITEC: (03)-TMCIE-2013**

Torreón, Coahuila, México,

Julio 2013

SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



Subsecretaría de Educación Superior  
Dirección General de Educación Superior Tecnológica  
Instituto Tecnológico de la Laguna

"2013, Año de la Lealtad Institucional y Centenario del Ejército Mexicano"

Dependencia: **DEPI**  
Oficio: **DEPIJ/145/2013**  
Asunto: **Autorización de impresión  
de tesis.**

Torroón, Coah., **26 Junio /2013**

**C. JAQUELINE IVONNE BERNAL FRANCO.**  
**CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Aplicación de los números duales al modelado y control de robots "**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (03)-TMCIE-2013**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE

**DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA**  
Jefe de la División de Estudios  
de Posgrado e Investigación

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA  
INSTITUTO TECNOLÓGICO  
de la Laguna  
División de Estudios de Posgrado  
e Investigación



SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



Subsecretaría de Educación Superior  
Dirección General de Educación Superior Tecnológica  
Instituto Tecnológico de La Laguna

“2013, Año de la Lealtad Institucional y Centenario del Ejército Mexicano”

Torreón, Coah., 26/ Junio /2013

**DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**  
**PRESENTE**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:


**“Aplicación de los números duales al modelado y control de robots”**


Desarrollado por el C. **JAQUELINE IVONNE BERNAL FRANCO**, con número de control **M06130865** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**

  
DR. RICARDO EMMANUEL CAMPA COCOM.  
Asesor/Director

  
DR. ALEJANDRO ENRIQUE DZUL LOPEZ  
Comité Tutorial

  
DR. VICTOR ADRIÁN SANTIBÁÑEZ DAVILA  
Comité Tutorial

  
DR. MIGUEL ANGEL LLAMÁ LEAL  
Comité Tutorial



---

## Ayer, hoy y mañana

"Él da esfuerzo al cansado, y multiplica las fuerzas al que no tiene ningunas.

Los muchachos se fatigan, los jóvenes flaquean y caen;  
pero los que esperan a Jehová tendrán nuevas fuerzas; levantarán alas como las águilas;  
correrán, y no se cansarán; caminarán, y no se fatigarán."

Isaías 40:29-31

---

*Dedicado a todas las personas que amo,  
especialmente a mi padre, el Sr. Martín Bernal.*

---

## Agradecimientos

Descubro profundamente agradecer a mis padres, la Sra. María Franco y el Sr. Martín Bernal, quienes me rodearon de todo lo necesario para llegar hasta aquí, por amarme, por enseñarme a ser independiente, apoyarme e inspirarme, por hacer de mí una mujer de bien. Principalmente quiero agradecer a mi padre, quien en compañía de Dios en todo momento es mi alegría, mi refugio, mi cayado, mi fuerza y por ser el mejor papá del mundo.

Quiero expresar mi gratitud a mis hermanos: Hugo, Liliana y Lizbeth, y a mi cuñada Rebecca Espinoza, con los que he pasado momentos buenos y malos, pero siempre juntos, unidos como uno solo y luchando hasta obtener lo anhelado; los amo. A mis lindos sobrinos por su hermosa sonrisa. A mis amigos: Mario Limón, Natalia Bustos, Haro Israel, Adriana de Limón, Jorge Amezcua, Rose Rivera, Selene Franco, Nayeli Fernández y a Emmanuel Suárez, quien, aun cuando me ve cansada y fastidiada del trabajo, se atreve a pedirme que le explique sus clases. En general agradezco a todos mis amigos de Mies Laguna, los cuales le han dado sabor a mi estancia en este Tecnológico.

Por supuesto, no perderé la oportunidad de agradecer a mi asesor y amigo el Dr. Ricardo Campa, por brindarme la oportunidad de trabajar con él, por creer en mí desde el inicio del posgrado, por ponerme a trabajar, por enseñarme lo basto que es el mundo del conocimiento, por lo analítico, formal y difícil de convencer, por incrementar en mí el interés por la ciencia, por corregirme y soportarme, por ser terno (igual que yo), por ser un excelente maestro y amigo (bueno aunque un poco perfeccionista y gruñón) y por enseñarme que ni en la vida ni en la investigación es bueno ir al grano. Agradezco a los profesores e investigadores que me alientan a ser mejor, a mis compañeros de posgrado que siempre me tratan con cariño y al CONACYT por apoyar mis estudios con una beca.

Finalmente agradezco a Dios, quien me da el privilegio de ser yo, de estar aquí y ahora, de disfrutar de gente maravillosa y porque aun cuando todos me abandonen, e incluso yo le falle, él siempre estará aquí, junto a mí.

**¡Muchas Gracias!**

---

## Resumen

Los números duales constituyen una extensión a los números reales, tal como lo son los números complejos. Las interesantes propiedades de estos números han demostrado ser útiles para el modelado de sistemas mecánicos. En esta tesis se explica cómo usar vectores de números duales para modelar la postura (posición y orientación) de un cuerpo rígido, y se realiza una comparación entre los modelos obtenidos con otras parametrizaciones de la postura, aunque son los números duales los que dan las expresiones más compactas, ya que permiten combinar en un solo término las expresiones de la posición y la orientación. Partiendo de esto se obtienen expresiones que permiten encontrar el modelo cinemático de un robot manipulador empleando números duales. También se definen el error de postura y el objetivo de control de postura de robots usando números duales. Se propone un controlador cinemático tipo velocidad resuelta, así como un controlador dinámico tipo aceleración resuelta empleando cuaterniones duales unitarios; se realizan las pruebas de estabilidad correspondientes y, finalmente, se presentan los resultados de simulaciones realizadas en el robot Mitsubishi PA10 de 6 g.c.l. utilizando dichos controladores.

---

## Abstract

Dual numbers constitute an extension to real numbers, so as complex numbers do. The interesting properties of dual numbers have proven to be useful for the modeling of mechanical systems. This thesis explains how to use vectors of dual numbers to model the pose (that is, the position and the orientation) of a rigid body. Such a model is compared with the models obtained using other parameterizations of the pose, although dual numbers give the most compact expressions because they allow to combine into a single term the expressions for position and orientation. From this, the expressions for computing the kinematic model of a robot using dual numbers are obtained. The definition of the pose error and the pose control objective using unit dual quaternions are given. A resolved-rate-type kinematic controller and a resolved-acceleration-type dynamic controller using unit dual quaternions are proposed, including their corresponding stability proofs; at the end, some simulations of these controllers in the 6 DOF version of the Mitsubishi PA10 robot arm are presented.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Tipos de números	1
1.1.1. De lo natural a lo complejo	1
1.1.2. Nuevas dimensiones	3
1.1.3. Números complejos generalizados	8
1.2. Modelado de robots	15
1.3. Esquemas de control de robots	29
1.4. Objetivos de la tesis	32
1.5. Organización del documento	33
<b>2. Fundamentos matemáticos</b>	<b>34</b>
2.1. Estructuras algebraicas	34
2.2. Álgebra lineal	39
2.2.1. Matrices particulares	40
2.2.2. Productos de vectores	42
2.2.3. Valores y vectores propios	44
2.3. Variedades y grupos de Lie	46
2.3.1. El concepto de variedad	46

2.3.2. Grupos de Lie . . . . .	47
2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	48
2.4.1. Variedad invariante . . . . .	49
2.4.2. Equilibrio . . . . .	50
2.4.3. Teoremas de estabilidad . . . . .	51
<b>3. Números complejos, duales y cuaterniones</b>	<b>53</b>
3.1. Números complejos (ordinarios) . . . . .	53
3.1.1. Otras representaciones de los números complejos . . . . .	55
3.1.2. Números complejos unitarios . . . . .	57
3.2. Números duales . . . . .	59
3.2.1. Otras representaciones de los números duales . . . . .	59
3.2.2. Números duales unitarios . . . . .	61
3.2.3. Funciones duales . . . . .	63
3.3. Cuaterniones (ordinarios) . . . . .	63
3.3.1. Otras representaciones de los cuaterniones . . . . .	65
3.3.2. Cuaterniones unitarios . . . . .	67
3.4. Cuaterniones duales . . . . .	68
3.4.1. Otras representaciones de los cuaterniones duales . . . . .	70
3.4.2. Cuaterniones duales unitarios . . . . .	72
<b>4. Cinemática de cuerpos rígidos</b>	<b>75</b>
4.1. Parametrizaciones tradicionales de la postura . . . . .	75
4.1.1. Ángulos de Euler . . . . .	76
4.1.2. Matrices de rotación . . . . .	76
4.1.3. Parámetros de Euler . . . . .	78
4.2. Coordenadas de Plücker y el principio de transferencia . . . . .	79
4.3. Parametrizaciones con números duales . . . . .	84
4.3.1. Matrices especiales ortogonales duales . . . . .	84
4.3.2. Cuaterniones duales unitarios . . . . .	85

4.4. Cinemática diferencial . . . . .	86
4.4.1. Con ángulos de Euler . . . . .	86
4.4.2. Con matrices de rotación . . . . .	87
4.4.3. Con parámetros de Euler . . . . .	88
4.4.4. Con matrices ortogonales duales . . . . .	89
4.4.5. Con cuaterniones duales unitarios . . . . .	90
4.5. Comparación entre parametrizaciones . . . . .	91
<b>5. Cinemática de robots manipuladores . . . . .</b>	<b>93</b>
5.1. Parámetros Denavit-Hartenberg . . . . .	94
5.1.1. Convención original . . . . .	94
5.1.2. Convención modificada . . . . .	97
5.2. MCD con matrices de transformación homogénea . . . . .	99
5.3. MCD usando parámetros de Euler . . . . .	101
5.4. MCD usando matrices ortogonales duales . . . . .	102
5.5. MCD usando cuaterniones duales unitarios . . . . .	103
<b>6. Control de postura con cuaterniones duales unitarios . . . . .</b>	<b>105</b>
6.1. Error de postura y objetivo de control . . . . .	107
6.1.1. Error de postura con cuaterniones duales unitarios . . . . .	107
6.1.2. Objetivo de control . . . . .	108
6.2. Control cinemático . . . . .	109
6.2.1. Análisis de estabilidad . . . . .	112
6.3. Control dinámico . . . . .	115
6.3.1. Análisis de estabilidad . . . . .	116
<b>7. Evaluación de controladores . . . . .</b>	<b>120</b>
7.1. Movimiento deseado . . . . .	121
7.2. Resultados de simulación . . . . .	123
7.2.1. Control cinemático . . . . .	124

7.2.2. Control dinámico	126
<b>8. Comentarios y conclusiones</b>	<b>130</b>
8.1. Contribuciones y trabajo futuro	131
8.2. Comentarios personales	132
<b>A. El robot PA10-7CE de 6 g.d.l.</b>	<b>139</b>
A.1. Modelo cinemático usando cuaterniones duales unitarios	140
A.2. Modelo dinámico	154

# Índice de figuras

1.1. Lugar geométrico de los números complejos unitarios: a) intersección de $D(x, y) = x^2 + y^2$ y $D(x, y) = 1$ ; b) proyección en el plano. . . . .	11
1.2. Lugar geométrico de los números dobles unitarios: a) intersección de $D(x, y) = x^2 - y^2$ y $ D(x, y)  = 1$ ; b) proyección en el plano. . . . .	13
1.3. Lugar geométrico de los números duales unitarios: a) intersección de $D(x, y) = x^3$ y $D(x, y) = 1$ ; b) proyección en el plano. . . . .	14
1.4. Ubicación de los números complejos generalizados en el plano $\alpha-\beta$ . . . . .	16
1.5. Mecanismo planar de un grado de movilidad. . . . .	19
1.6. Diagrama de bloques de un servomotor y su manejador. . . . .	30
1.7. Esquemas de control de robots: a) en coordenadas articulares y b) en coordenadas de postura. . . . .	31
3.1. Representación polar de un número complejo. . . . .	56
3.2. Ejemplo del producto de números complejos. . . . .	58
3.3. Representación polar de un número dual. . . . .	60
3.4. Ejemplo del producto de números duales. . . . .	62
3.5. Ejemplo del producto de un cuaternión unitario y un vector en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	69
3.6. Ejemplo del producto de un cuaternión dual unitario y un vector. . . . .	74
4.1. Posición y orientación de un cuerpo rígido . . . . .	76
4.2. Parámetros de una recta en el espacio. . . . .	80
5.1. Parámetros Denavit-Hartenberg originales de una recta. . . . .	95

5.2. Parámetros Denavit-Hartenberg modificados de una recta. . . . .	97
6.1. Esquema de control cinemático en espacio de postura. . . . .	109
7.1. Diagrama de bloques del proceso de simulación. . . . .	120
7.2. Control cinemático: errores de postura. . . . .	125
7.3. Control cinemático: errores de velocidad lineal y angular. . . . .	125
7.4. Control cinemático: pares articulares aplicados. . . . .	126
7.5. Control cinemático: velocidades articulares. . . . .	127
7.6. Control dinámico: errores de postura. . . . .	128
7.7. Control dinámico: errores de velocidad lineal y angular. . . . .	129
7.8. Control dinámico: pares articulares aplicados. . . . .	129
A.1. Robot PA10-7CE (estructura mecánica). . . . .	140
A.2. Marcos de coordenadas para los parámetros Denavit-Hartenberg originales. . . . .	141

## Índice de tablas

1.1. Tipos básicos de articulaciones y grados de libertad que poseen.	19
2.1. Algunos grupos de Lie multiplicativos.	48
3.1. Productos básicos de los cuaterniones ordinarios	65
3.2. Productos básicos de los cuaterniones duales	70
4.1. Comparación de las parametrizaciones de postura estudiadas.	92
7.1. Parámetros de las trayectorias empleados en las simulaciones.	121
A.1. Parámetros Denavit-Hartenberg del PA10-7CE de 6 g.d.l.	141

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Tipos de números

#### 1.1.1. De lo natural a lo complejo

Históricamente los números surgieron de forma natural para contar (números cardinales: uno, dos, tres, etc.) y, a la vez, para ordenar (números ordinales: primero, segundo, tercero, etc.). Por este motivo, el primer y más simple conjunto de números es el de los números naturales ( $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ). Es razonable comenzar cualquier estudio de los números con el conjunto de los naturales, ya que éstos son la base de todos los conjuntos de números existentes. Sin embargo, con el tiempo aparecieron nuevos usos para los números y, con los usos, nuevos números [1].

Los números naturales se pueden sumar y multiplicar; sin embargo, no se puede restar a un número natural otro mayor, porque el resultado ya no es un número natural. Así es como surgieron el cero y los números negativos. A la humanidad le tomó siglos aceptar estos nuevos números, pese a que tienen un sentido muy concreto cuando se usan, por ejemplo, para expresar deudas. Hoy en día los números negativos son de uso cotidiano.

Así fue como los números naturales dieron lugar a los enteros (cuyo conjunto es  $\mathbb{Z}$ ). Con los enteros se puede multiplicar, sumar y restar; sin embargo, los números enteros no permiten divisiones (a no ser que la división sea exacta, es decir, que tenga un residuo



igual a cero). Para poder incluir la división en el caso general es necesario extender el conjunto de los enteros al de los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ).

La geometría hizo evidente que tampoco alcanza con los números racionales para definir nuestro mundo, pues el teorema de Pitágoras mostró que la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide un metro es  $\sqrt{2}$ , además, se descubrió que el perímetro de un círculo de diámetro 1 metro es  $\pi$  metros y ni  $\sqrt{2}$  ni  $\pi$  son racionales. Hacen falta entonces los números reales cuyo conjunto se denota  $\mathbb{R}$ ; pero, a veces tampoco alcanza con los reales.

La resolución de ecuaciones como  $x^2 + 1 = 0$  introdujo los números complejos (pertenecientes al conjunto  $\mathbb{C}$ ), los cuales fueron vistos con mucha desconfianza durante tres siglos. Hizo falta que matemáticos de la talla de Leonhard Euler y Carl F. Gauss los emplearan, para que la comunidad científica dejara de lado sus prejuicios. Hoy se usan para resolver este tipo de ecuaciones. Otra importante aplicación son las ecuaciones de James C. Maxwell que explican el electromagnetismo, las cuales precisan de los números complejos [1].

Si se cuenta con los reales, los números complejos se pueden representar algebraicamente como sumas  $a + bi$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales e  $i$  es una solución de la ecuación  $x^2 + 1 = 0$ . En otras palabras, el conjunto  $\mathbb{C}$  se puede definir como:

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Ésta es la forma en que los presentó William R. Hamilton en la primera mitad del siglo XIX, treientos años después de que Gerolamo Cardano y Lodovico Ferrari los emplearan por primera vez. Y ésta es la forma en que los conocemos hoy.

Nótese que un número complejo  $a + bi$ , haciendo  $b = 0$  se reduce a un número real, de modo que  $\mathbb{R}$  es un subconjunto de  $\mathbb{C}$ . De esta manera es posible escribir:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Sin embargo, los conjuntos de números que se usan hoy en día no se reducen a los naturales, enteros, racionales, reales y complejos; dependiendo del problema que se intente resolver, se utilizan muchos otros.

### 1.1.2. Nuevas dimensiones

En física y en matemáticas, la dimensión de un espacio u objeto se define informalmente como el mínimo número de coordenadas requeridas para especificar cualquier punto en él. Así, una línea tiene una dimensión igual a uno debido a que se necesita sólo una coordenada para especificar un punto en ella (por ejemplo: el punto 5 en una recta numérica). Una superficie tal como un plano o la superficie de una esfera, tiene una dimensión igual a dos, debido a que se necesitan dos coordenadas para localizar un punto en ella.

De acuerdo con lo anterior, debe resultar claro que los números reales (que pueden ser representados geoméricamente en una recta numérica), así como todos sus subconjuntos, definen un espacio de dimensión uno. Así mismo, los números complejos de la forma  $a + ib$  definen un espacio de dimensión dos (el plano complejo), siendo  $a$  y  $b$  las coordenadas del número correspondiente, de modo que un número complejo también puede ser expresado como un vector en el plano.

Un vector es un objeto geométrico que tiene magnitud y dirección. Muchas cantidades físicas se comportan como vectores. En general, un vector de  $n$  dimensiones requiere de  $n$  coordenadas para quedar completamente descrito, llamándose  $\mathbb{R}^n$  al espacio formado por vectores de dimensión  $n$ . Si  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$  son las  $n$  coordenadas del vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces se puede escribir  $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ .

Alrededor de 1830, los números complejos eran frecuentemente usados para representar cantidades vectoriales en el plano y muchos matemáticos estaban emprendiendo la búsqueda para encontrar al análogo tridimensional de los números complejos. Caspar Wessel, Carl F. Gauss, Joseph Servois y August F. Möbius fueron algunos de los matemáticos que intentaron resolver este problema, pero ninguno tuvo éxito. El crédito del desarrollo de tal análogo debe ser otorgado al matemático irlandés William R. Hamilton.

Como ya se mencionó, en 1833 Hamilton presentó ante la Real Academia Irlandesa un tratamiento formal de los números complejos, definiendo un número complejo como un par ordenado de números reales sujeto a ciertas reglas.

De manera natural Hamilton trató de extender esta idea a tres dimensiones. Él pensaba

que el análogo tridimensional de un número complejo sería una tripla  $a + bi + cj$ , con  $i$  y  $j$  siendo ambas raíces cuadradas de  $-1$ , pero distintas entre sí. La adición de tales triplas demostró no tener problema, pero por diez años Hamilton fue incapaz de definir la multiplicación de triplas. Para finales de 1843, el estudio de las triplas había ocupado tanto de su vida, que en una carta a uno de sus hijos, Hamilton escribió [2]:

“Every morning in the early part of October 1843, on my coming down to breakfast, your brother William Edward and yourself used to ask me: “Well, Papa, can you multiply triples?” Whereeto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head, “No, I can only add and subtract them.”

La solución llegó de una manera sorprendente. En un buen documentado destello de inspiración, Hamilton se dió cuenta que necesitaba abandonar la ley conmutativa de la multiplicación y usar cuádruplas en lugar de triplas. En 1865 le escribió a su hijo lo siguiente [2]:

“On the 15th day of October, which happened to be Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy, I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an undercurrent of thought was going on in my mind which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth the herald (as I foresaw immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work by myself, if spared, and, at all events on the part of others if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse - unphilosophical as it may have been - to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols  $i, j, k$ ; namely,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

which contains the solution of the problem, but, of course, the inscription has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16, 1843), which records the fact that I then asked for and obtained leave to read a Paper on Quaternions, at the first general meeting of the session; which reading took place accordingly, on Monday, the 13th of November following."

Hamilton definió un cuaternión como un número de la forma  $a + bi + cj + dk$ , donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  son números reales y  $i$ ,  $j$ ,  $k$  son tres raíces independientes de  $-1$ .  $a$  es conocida como la parte escalar del cuaternión y los elementos restantes son llamados la parte vectorial del cuaternión. En 1844, Hamilton probó que la multiplicación de un cuaternión es asociativa.

Hamilton también introdujo un importante operador diferencial denotado por el símbolo  $\nabla$ , al cual llamó nabla (debido a su similitud con un antiguo instrumento hebreo con este nombre). Cuando se aplica a una función escalar  $u(x, y, z)$  se obtiene:

$$\nabla u(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} i + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} j + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} k.$$

En la actualidad a este vector se le conoce como el gradiente de  $u(x, y, z)$ .

Por otro lado, si

$$\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

denota una función vectorial, entonces:

$$\nabla \mathbf{v} = - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) k,$$

donde la parte escalar de esta expresión (con signo contrario), actualmente se conoce como la divergencia de  $\mathbf{v}$ , mientras que la parte vectorial es el rotacional de  $\mathbf{v}$ .

Hamilton pasó los últimos años de su vida tratando de 'vender' la idea de sus cuaterniones. Él creía que eran importantes no sólo para las Matemáticas, sino también para la Física. En este aspecto fue apoyado por Peter G. Tait, quien en una serie de artículos publicados defendía el uso de los cuaterniones ante los físicos; no obstante, a muchos científicos de la época los cuaterniones les parecían demasiados complicados, y cuando poco

después se generalizó el uso de vectores y matrices, los cuaterniones fueron desplazados casi completamente.

Uno de los aspectos interesantes en la historia de las Matemáticas es que al mismo tiempo que Hamilton estaba resolviendo la parte complicada de sus cuaterniones, otra álgebra no conmutativa estaba siendo desarrollada.

En 1844, Herman G. Grassmann introdujo el concepto de hipernúmero. El hipernúmero de Grassmann estaba esencialmente relacionado con la geometría de  $n$  dimensiones y contenía el principio de las ideas que fueron desarrolladas más tarde como vectores y tensores.

En un artículo de 1855, Grassmann determinó no menos de 16 diferentes clases de productos para un hipernúmero de dimensión  $n$ . En ese artículo Grassmann también surgió muchas aplicaciones a mecánica, magnetismo y cristalografía. Sin embargo, por algún tiempo los matemáticos rechazaron el trabajo de Grassmann igual que los cuaterniones, pues deseaban algo que estuviera más ligado al espacio cartesiano tridimensional. Un paso en esta dirección fue tomado por James C. Maxwell, quien separó las partes escalar y vectorial de los cuaterniones y formuló así sus ecuaciones de la teoría electromagnética.

Menos conocido es el descubrimiento de los octoniones por John T. Graves, un viejo amigo de Hamilton con quien compartía su interés por el álgebra. Después de la inspiradora carinata de Hamilton, éste envió una carta a Graves donde describía los cuaterniones, a la cual Graves le respondió complementando la audacia de su idea: "Hay aún una cosa en el sistema que me inquieta, yo no tengo idea en qué medida estamos facultados para crear arbitrariamente números imaginarios y dotarlos de propiedades sobrenaturales." Y Graves agregó: "Si con tu alquimia puedes hacer tres libras de oro, ¿por qué parar allí?". Fue entonces cuando Graves se puso a trabajar en oro por su propia cuenta.

El 26 de diciembre del mismo 1843, Graves describió a Hamilton una nueva álgebra de dimensión 8, a la cual él llamó 'octavas' [3]. En enero de 1844, Graves envió a Hamilton tres cartas expandiendo su descubrimiento. Él consideró la idea de una teoría de '2<sup>m</sup>-ions', y trató de construir una álgebra de dimensión 16, pero se encontró con un inesperado obstáculo y dudó que esto fuera posible: Hamilton se percató que el producto de octoniones

no es asociativo.

Por otra parte, Arthur Cayley, recién egresado de Cambridge, había estado estudiando los cuaterniones desde que Hamilton anunció su existencia. Él parecía estar buscando relaciones entre los cuaterniones y las funciones hiperbólicas. En marzo de 1845, Cayley publicó un artículo en el que describía brevemente los octoniones y su trabajo sobre funciones, pero debido a la cantidad de errores que contenía el artículo referente a las funciones elípticas que trataba, finalmente su artículo fue olvidado, excepto la parte de octoniones. Posteriormente, Graves publicó su trabajo en la misma revista, pero fue demasiado tarde, los octoniones ya eran conocidos como los números de Cayley.

¿Por qué los octoniones languidecieron en la obscuridad? La principal razón fue su falta de aplicación en geometría y física. Su relevancia fue notada hasta en 1934 por Jordan, von Neumann y Wigner en los fundamentos de mecánica cuántica. El trabajo con octoniones ha continuado y recientemente se están aplicando para explicar la teoría de cuerdas, teoría moderna que pretende unificar la teoría de la relatividad especial y la teoría cuántica.

Hacia 1876 William Clifford había estudiado las diferentes álgebras multidimensionales existentes, y había creado las suyas propias, ideando un sistema de clasificación de las mismas. Es precisamente a Clifford a quien se le atribuye la invención de los números duales [4], los cuales serán definidos propiamente en la siguiente subsección. Actualmente las llamadas álgebras de Clifford son empleadas en las formulaciones matemáticas de la mecánica newtoniana, relativista y cuántica [5].

Como se se puede observar, el éxito de las álgebras de números hipercomplejos (de dimensión mayor o igual a dos) se encuentra estrechamente ligado a su aplicación en el campo de la física.

Por otra parte, el formal desarrollo de los vectores como una entidad fue hecho por dos matemáticos a principios de 1880. Josiah W. Gibbs y Oliver Heaviside comenzaron a desarrollar de forma independiente una teoría de vectores. Gibbs era físico y matemático y en un panfleto para sus estudiantes sobre Análisis Vectorial escribió lo siguiente:

“The fundamental principles of the following analysis are such as are fa-

familiar under a slightly different form to students of quaternions. The manner in which the subject is developed is somewhat different from that followed in treatises on quaternions, being simply to give a suitable notation for those relations between vectors, or between vectors and scalars, which seem most important, and which lend themselves most readily to analytical transformations, and to explain some of these transformations. As a precedent for such a departure from quaternionic usage, Clifford's *Kinematics* may be cited. In this connection, the name of Grassmann may also be mentioned, to whose system the following method attaches itself in some respects more closely than to that of Hamilton."

Por otro lado, Heaviside era un ingeniero que trabajaba en una oficina de correos y había estudiado cuaterniones, pero los consideraba demasiado difíciles para los ocupados ingenieros. En una serie de artículos durante los años 1880, Heaviside desarrolló su propio cálculo vectorial.

### 1.1.3. Números complejos generalizados

Considérese el conjunto de números de dimensión dos que, en general, puede ser representados como  $z = x + my$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}$  son las coordenadas del número y  $m$  es un número de una "clase especial" [6], tal que

$$m^2 = \alpha + m\beta, \quad (1.1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ . Si se le llama  $\mathbb{F}$  a ese conjunto de números, entonces:

$$\mathbb{F} = \{z = x + my : m^2 = \alpha + m\beta; x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \quad (1.2)$$

Dados dos números  $z_1 = x_1 + my_1$  y  $z_2 = x_2 + my_2 \in \mathbb{F}$ , la adición y sustracción es simplemente

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + my_1) \pm (x_2 + my_2) = (x_1 \pm x_2) + m(y_1 \pm y_2),$$

mientras que la multiplicación quedaría

$$\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 = (x_1 + my_1) \times (x_2 + my_2) = x_1x_2 + m(x_1y_2 + x_2y_1) + m^2y_1y_2,$$

y dada la definición (1.1):

$$\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 = x_1x_2 - \alpha y_1y_2 + m(x_1y_2 + x_2y_1 + \beta y_1y_2). \quad (1.3)$$

Ahora bien, para que se pueda definir la división de elementos de  $\mathbb{F}$ , es necesario que exista una inversa multiplicativa. Si  $\mathbf{z}^{-1} = \bar{x} + m\bar{y} \in \mathbb{F}$  es la inversa multiplicativa de  $\mathbf{z} = x + my \in \mathbb{F}$ , entonces se debe cumplir:

$$\mathbf{z} \times \mathbf{z}^{-1} = (x + my)(\bar{x} + m\bar{y}) = 1. \quad (1.4)$$

Usando (1.3) se puede desarrollar (1.4)

$$\mathbf{z} \times \mathbf{z}^{-1} = x\bar{x} + \alpha y\bar{y} - m(x\bar{y} + \bar{x}y + \beta y\bar{y}) = 1,$$

lo que lleva al siguiente sistema de ecuaciones para encontrar  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ :

$$\begin{bmatrix} x & \alpha y \\ y & x + \beta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

El sistema (1.5) tiene solución siempre que el determinante

$$D(x, y) = D(\mathbf{z}) = x^2 + \beta xy - \alpha y^2 \quad (1.6)$$

sea diferente de cero. En tal caso la inversa de  $\mathbf{z}$  resulta ser

$$\mathbf{z}^{-1} = \bar{x} + m\bar{y} = \frac{x + \beta y}{D(x, y)} - m \frac{y}{D(x, y)} \quad (1.7)$$

que satisface (1.4).

Al número  $\mathbf{z}^* = x + \beta y - my \in \mathbb{F}$  se le conoce como el conjugado de  $x + my \in \mathbb{F}$ , de modo que se puede escribir

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{\mathbf{z}^*}{D(x, y)}.$$

Además, el módulo de  $\mathbf{z} = x + my$  se define como [6]:

$$\text{mod}(\mathbf{z}) = \text{sign}(D(\mathbf{z}))\sqrt{|D(\mathbf{z})|}. \quad (1.8)$$



donde  $|D(\mathbf{z})|$  indica el valor absoluto de  $D(\mathbf{z})$  y  $\text{sign}(\cdot)$  es la conocida función signo. Nótese que si  $D(\mathbf{z}) \geq 0$  entonces  $\text{mod}(\mathbf{z}) = \sqrt{D(\mathbf{z})}$  y, en cualquier caso,  $\text{mod}^2(\mathbf{z}) = |D(\mathbf{z})|$ . De particular importancia son los números para los cuales se cumple  $\text{mod}^2(\mathbf{z}) = 1$  (o bien  $\text{mod}(\mathbf{z}) = \pm 1$ ), los cuales son conocidos como números complejos generalizados unitarios.

De acuerdo con lo anterior, dados los números  $\mathbf{z}_1 = x_1 + my_1$  y  $\mathbf{z}_2 = x_2 + my_2 \in \mathbb{F}$ , la división  $\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2}$  existe sólo si  $D(x_2, y_2) \neq 0$  y es igual a

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2^{-1} = \frac{\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2^*}{D(\mathbf{z}_2)} = \frac{(x_1 + my_1) \times (x_2 + \beta y_2 - my_2)}{D(x_2, y_2)}. \quad (1.9)$$

Lo que se ha hecho hasta ahora es mostrar que el conjunto  $\mathbb{F}$  definido en (1.2) representa una familia de números de dimensión dos con operaciones de: adición, sustracción, multiplicación y división bien definidas. Valores específicos de  $\alpha$  y  $\beta$  definen un tipo particular de números dentro de esta familia. Los siguientes tres casos son de particular importancia:

- **Números complejos ordinarios** ( $\alpha = -1, \beta = 0$ ).

En este caso  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  y  $m = i$ . Si  $\mathbf{z}_1 = x_1 + iy_1$  y  $\mathbf{z}_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ , entonces (1.3) queda

$$\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

la condición para que la inversa de  $\mathbf{z} = x + iy$  exista es

$$D(x, y) = x^2 + y^2 \neq 0,$$

de modo que el único número complejo que no tiene inversa es  $\mathbf{z} = 0$ .

Además, se observa que el módulo de un número complejo es

$$\text{mod}(\mathbf{z}) = \text{sign}(x^2 + y^2) \sqrt{|x^2 - y^2|} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{z}\|,$$

donde  $\|\mathbf{z}\|$  es la norma euclidiana de  $\mathbf{z}$ ; así que, para cualquier punto diferente de  $\mathbf{z} = 0$ , la inversa está dada por:

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{\mathbf{z}^*}{\|\mathbf{z}\|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

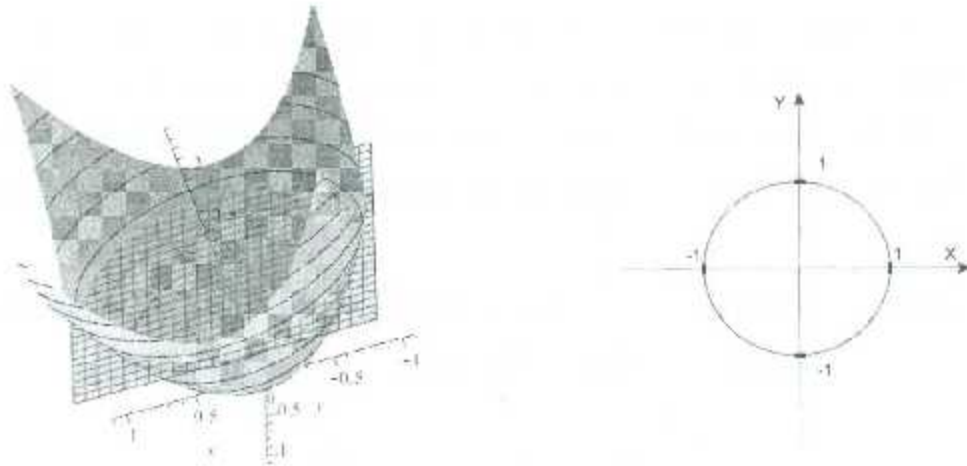


Figura 1.1: Lugar geométrico de los números complejos unitarios: a) intersección de  $D(x, y) = x^2 + y^2$  y  $D(x, y) = 1$ ; b) proyección en el plano.

Finalmente, de (1.9) la división de números complejos es

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times z_2^{-1} = \frac{z_1 \times z_2^*}{\|z_2\|^2}.$$

Los números complejos unitarios son aquellos para los cuales se cumple que  $D(z) = \|z\|^2 = x^2 + y^2 = 1$ . Claramente éstos corresponden a los puntos dentro del círculo unitario en el plano complejo. En la figura 1.1 está se muestra como la intersección del parabolóide  $D(x, y) = x^2 + y^2$  y el plano  $D(x, y) = 1$ .

Los números complejos unitarios se emplean en mecánica para describir rotaciones en el plano.

- **Números dobles** ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ).

Considérese ahora otro caso particular de  $\mathbb{F}$  en (1.2), cuando  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$ . Debido a su importancia, a este conjunto se le da un nombre particular,  $\mathbb{E}$ , y a sus elementos se les conoce como números dobles. Entonces el conjunto de los números dobles es:

$$\mathbb{E} = \{x + \mu y : x, y \in \mathbb{R}, \mu^2 = -1\}$$

El símbolo  $\mu$  representa un número de una clase especial (no real), que al ser elevado al cuadrado (o multiplicarse por sí mismo) da como resultado 1. Y aunque en principio es difícil asimilar la existencia de tal número  $\mu$ , debe tenerse en cuenta que hace dos siglos era más complicado de aceptar que existiera un número no real  $i$  tal que  $i^2 = -1$ .

Sea  $\mathbb{E} \equiv \mathbb{F}$  el conjunto de los números dobles y  $\mu = m$ , entonces dos números dobles  $z_1 = x_1 + \mu y_1$  y  $z_2 = x_2 + \mu y_2 \in \mathbb{E}$  se multiplican siguiendo la regla

$$z_1 \times z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \mu(x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbb{E}.$$

La condición para la existencia de la inversa de  $z = x + \mu y \in \mathbb{E}$  es

$$D(x, y) = x^2 - y^2 \neq 0,$$

de modo que los números dobles no tienen inversa cuando  $|x| = |y|$ ; en cualquier otro caso la inversa es

$$z^{-1} = \frac{x - \mu y}{x^2 - y^2} = \frac{z^*}{x^2 - y^2}$$

y la división de números dobles queda

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times z_2^{-1} = \frac{z_1 \times z_2^*}{x_2^2 - y_2^2}.$$

Por otro lado, conociendo que  $D(x, y) = x^2 - y^2$ , de (1.8) se tiene que el módulo de un número doble es

$$\text{mod}(z) = \text{sign}(x^2 - y^2) \sqrt{|x^2 - y^2|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \geq |y| \\ -\sqrt{y^2 - x^2} & \text{si } |x| < |y|. \end{cases}$$

En la figura 1.2 se muestra: a) La superficie  $D(x, y) = |x^2 - y^2|$  y su intersección con la superficie  $|D(x, y)| = 1$  y b) el lugar geométrico de los números dobles unitarios en el plano.

En la actualidad, los números dobles son aplicados en la geometría pseudo-euclídeana (espacio-tiempo) [7].

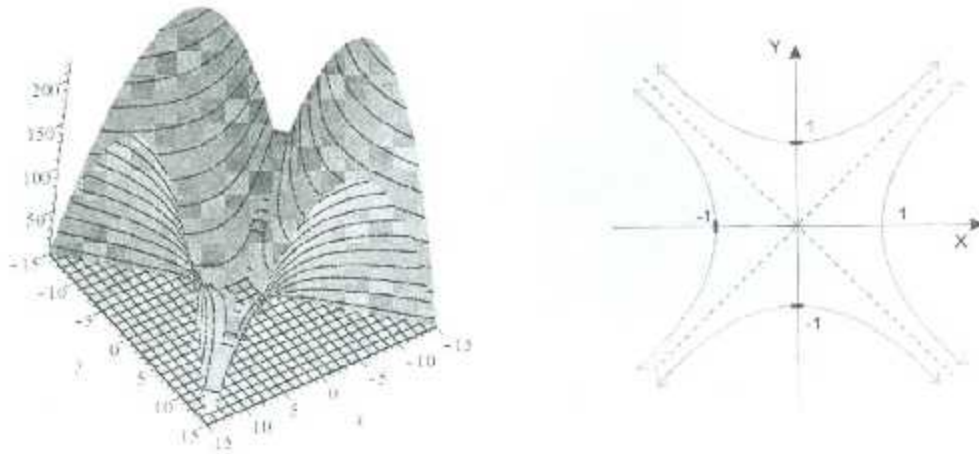


Figura 1.2: Lugar geométrico de los números dobles unitarios: a) intersección de  $|D(x, y)| = |x^2 - y^2|$  y  $|D(x, y)| = 1$ ; b) proyección en el plano.

- **Números duales** ( $\alpha = 0, \beta = 0$ ).

Finalmente, si se considera este caso particular de  $\mathbb{F}$ , se llega al conjunto de los llamados números duales, los cuales son el tema modular de esta tesis. Si se denomina  $\mathbb{D}$  a este conjunto, entonces:

$$\mathbb{D} = \{z = x + \sigma y : x, y \in \mathbb{R}, \sigma^2 = 0\}$$

donde  $\sigma$  es otro "número especial", no real, que al ser multiplicado por sí mismo da como resultado cero.

Dados dos números duales  $z_1 = x_1 + \sigma y_1$  y  $z_2 = x_2 + \sigma y_2 \in \mathbb{D}$ , éstos se multiplican siguiendo la regla

$$z_1 \times z_2 = x_1 x_2 + \sigma(x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbb{D}.$$

La condición para la existencia de la inversa de  $z = x + \sigma y \in \mathbb{D}$  es

$$D(x, y) = x^2 \neq 0,$$

de modo que los números duales no tienen inversa cuando  $x = 0$ ; en cualquier otro

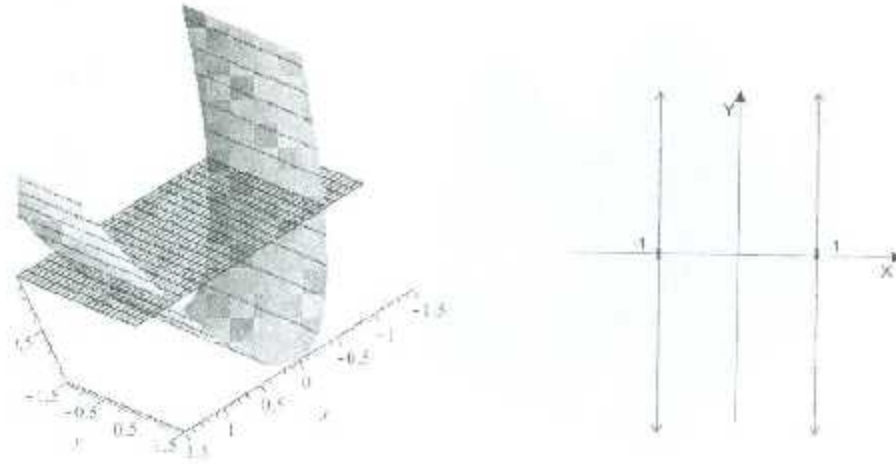


Figura 1.3: Lugar geométrico de los números duales unitarios: a) intersección de  $D(x, y) = x^2$  y  $D(x, y) = 1$ . b) proyección en el plano.

caso la inversa es

$$z^{-1} = \frac{z^*}{x^2} = \frac{x - \sigma y}{x^2}$$

y la división queda

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times z_2^{-1} = \frac{z_1 \times z_2^*}{x_2^2}.$$

Por otro lado, dado que  $D(x, y) = x^2$ , de (1.8) se tiene que el módulo de un número dual es

$$\text{mod}(z) = \text{sign}(x^2) \sqrt{|x^2|} = x.$$

En la figura 1.3, se muestra a) la intersección de las superficies  $D(x, y) = x^2$  y  $D(x, y) = 1$  y b) el lugar geométrico de los números duales unitarios.

Como se verá en este documento, los números duales se emplean en mecánica para describir en forma combinada traslación y rotación, además de velocidades lineales y angulares o fuerzas y momentos, que son indispensables para modelar la cinemática y dinámica de un cuerpo rígido.

Los números complejos, dobles y duales son casos particulares de (1.2), pero ¿Qué hay de todos los demás miembros de la familia? Estos números son conocidos como números

complejos generalizados y se pueden clasificar empleando la expresión (1.6).

Es fácil reconocer en (1.5) la forma general de una sección cónica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con  $A = 1$ ,  $B = \beta$ ,  $C = -\alpha$ ,  $D = E = 0$  y  $F = -D(x, y)$ . El discriminante de la sección cónica, es decir,

$$\Delta = B^2 - 4AC = \beta^2 + 4\alpha$$

determina el tipo de cónica.

Se presentan tres casos:

- Si  $\Delta < 0$ ,  $D(x, y)$  representa una elipse.
- Si  $\Delta = 0$ ,  $D(x, y)$  representa una parábola.
- Si  $\Delta > 0$ ,  $D(x, y)$  representa una hipérbola.

El conjunto  $\mathbb{F}$  define entonces un sistema de números elípticos, parabólicos e hiperbólicos, dependiendo del valor de  $\Delta$ . Los sistemas de números complejos, duales y dobles son, respectivamente, los sistemas canónicos de los sistemas elípticos, parabólicos e hiperbólicos. En [7] se menciona que cualquier sistema de números complejos generalizados puede obtenerse a partir de su sistema canónico, a través de una transformación lineal del sistema canónico correspondiente; es decir, cada sistema es isomórfico a su sistema canónico. La figura 1.5 muestra el plano  $\alpha$ - $\beta$  y la ubicación de los diferentes casos de números complejos generalizados, así como los sistemas canónicos ( $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{E}$ ).

## 1.2. Modelado de robots

En general, un robot es un mecanismo automático, controlado, reprogramable y capaz de posicionar y orientar piezas, útiles o dispositivos especiales, siguiendo trayectorias variables reprogramables, para la ejecución de diversas tareas. Su unidad de control incluye un dispositivo de memoria y ocasionalmente de percepción del entorno. Normalmente su

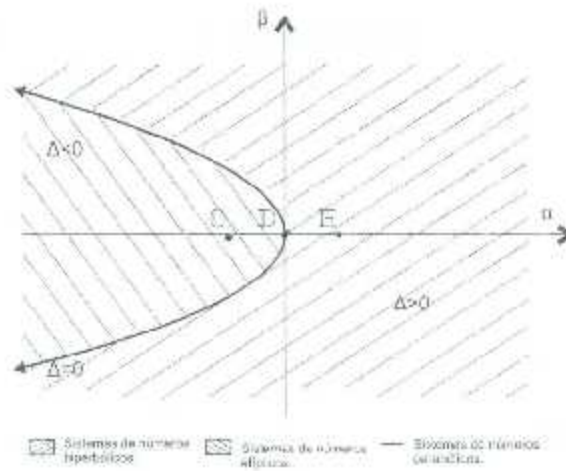


Figura 1.4: Ubicación de los números complejos generalizados en el plano  $\alpha\text{-}\beta$ .

uso es el de realizar una tarea de manera cíclica, pudiéndose adaptarse a otra sin cambios permanentes en su estructura [8].

Los robots se clasifican en dos grandes categorías:

- **Robots manipuladores.** De acuerdo con la Federación Internacional de Robótica (FIR), un robot manipulador se define como una máquina manipuladora con varios grados de libertad, controlada automáticamente, reprogramable y de múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo en aplicaciones industriales [9].
- **Robots móviles.** Un robot móvil es un vehículo de propulsión autónoma y movimiento programado por medio de control automático, para realizar una tarea específica. Dependiendo del medio en el cual se desplazan, pueden clasificarse en: robots móviles terrestres, aéreos, acuáticos y espaciales [10].

Los robots manipuladores son, por mucho, los más usados en la industria, al grado de que el término robot industrial se ha vuelto un sinónimo de robot manipulador. De acuerdo con [14] un robot industrial está constituido por:

- Una estructura mecánica o *manipulador* que consiste de una sucesión de cuerpos

rígidos (*eslabones*) conectados por medio de *articulaciones*; un manipulador se caracteriza por un *brazo* que le asegura movilidad, una *muñeca* que le confiere destreza y un *órgano terminal* que realiza la tarea requerida por el robot.

- *Actuadores* que ponen en movimiento al manipulador por medio de las articulaciones; los motores empleados son típicamente eléctricos e hidráulicos, y ocasionalmente neumáticos.
- *Sensores* que miden el estado del manipulador (sensores propioceptivos) y, de ser necesario, el estado del medio ambiente (sensores exteroceptivos).
- Un *sistema de control* (computadora) que permite controlar y supervisar el movimiento del manipulador.

Los robots móviles se consideran formados por los mismos elementos básicos (estructura mecánica, actuadores, sensores y sistemas de control), pero en este caso, los actuadores sólo se usan para dar movilidad a la estructura mecánica, que en general se considera como un cuerpo rígido que se desplaza en un medio particular.

Pero aún con sus diferencias estructurales y funcionales, los robots manipuladores y móviles tienen características comunes. Tanto unos como otros están compuestos por partes rígidas que se mueven impulsados por los actuadores.

Al trabajar con robots generalmente se busca controlar la postura, es decir, la posición y orientación ya sea del órgano terminal, en el caso de un robot manipulador, o del robot móvil en sí.

En física, un cuerpo rígido es una idealización de un cuerpo sólido en el cual se desprecia la deformación. En otras palabras, la distancia entre dos puntos dados de un cuerpo rígido permanece constante, sin importar las fuerzas externas que se apliquen.

Para determinar la posición y orientación (las que en conjunto se denominan aquí postura) de un cuerpo rígido en el espacio tridimensional se necesitan seis coordenadas independientes, siendo tres para la posición (generalmente coordenadas cartesianas) y otras tres para la orientación (por ejemplo, ángulos de Euler). Por ello se dice que el espacio de



postura de un cuerpo rígido es de dimensión seis, o, equivalentemente, la postura de un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad; no obstante, si el cuerpo rígido está restringido a moverse sólo en un plano (dos dimensiones), entonces el número de grados de libertad se reduce de seis a tres (dos para la posición y uno para la orientación). En general, si  $d$  es la dimensión del espacio en el que se mueve el cuerpo, entonces el número de g.d.l. es  $\frac{d(d+1)}{2}$ , siendo  $d$  para la posición y  $\frac{d(d-1)}{2}$  para la orientación.

Dos cuerpos rígidos pueden unirse a través de una articulación que permite el movimiento relativo entre ellos; pero, también es posible ver una articulación como un elemento de un sistema de cuerpos rígidos que reduce la movilidad del sistema. En el espacio tridimensional, una articulación con  $l$  grados de libertad que une dos cuerpos rígidos impone  $6 - l$  restricciones holonómicas. De este modo, se llega a la siguiente fórmula general que proporciona el número de grados de libertad de movimiento (también conocidos como grados de movilidad)  $W$  de un sistema de  $n$  cuerpos rígidos móviles con  $j$  articulaciones entre ellos [11]:

$$W = \frac{d(d+1)}{2}n - \sum_{i=1}^j \left[ \frac{d(d+1)}{2} - l_i \right] = \frac{d(d+1)}{2}(n-j) - \sum_{i=1}^j l_i \quad (1.10)$$

En la fórmula anterior,  $l_i$  es el número de grados de libertad de la articulación  $i$  (para  $i = 1, 2, \dots, j$ ). Si algún cuerpo rígido se mantiene inmóvil (fijo), es obvio que éste no aporta movilidad al sistema. Por ejemplo, el mecanismo planar de la figura 1.5 se mueve en el plano, por lo que  $d = 2$ , tiene tres eslabones móviles  $n = 3$  y  $j = 2$ , ya que existen dos articulaciones entre tales eslabones; debido a que todas las articulaciones son rotacionales,  $l_1 = l_2 = 1$ . Sustituyendo los valores anteriores en (1.10), se obtiene que el número de grados de movilidad del mecanismo es 1.

En la tabla 1.1 se muestran los tipos básicos de articulaciones, así como el número de grados de libertad que poseen.

Un robot manipulador, como ya se mencionó, está formado por eslabones (cuerpos rígidos) unidos generalmente mediante articulaciones simples tipo P o tipo R, (que tienen sólo un grado de libertad cada una). Si el robot es tipo serie (o serial) existe sólo un camino (una cadena cinemática abierta) desde la base (eslabón fijo) hasta el órgano terminal

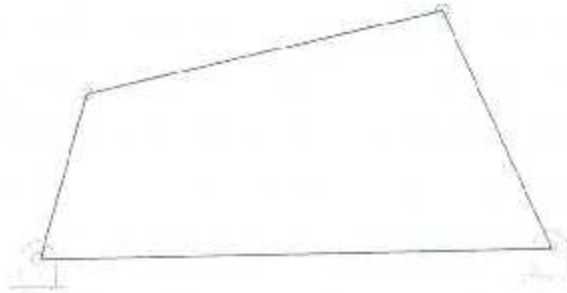


Figura 1.5: Mecanismo planar de un grado de movilidad.

Tabla 1.1: Tipos básicos de articulaciones y grados de libertad que poseen.

Nombre	Símbolo	G.D.L.	Movimientos relativos
Rotacional	R	1	1 rotación, 0 traslación
Prismática	P	1	0 rotación, 1 traslación
Helicoidal	H	1	1 rotación y 1 traslación dependientes entre sí
Cilíndrica	C	2	1 rotación y 1 traslación independientes
Universal	U	2	2 rotaciones, 0 traslación
Esférica	S	3	3 rotaciones, 0 traslación
Planar	E	3	1 rotación, 2 traslaciones

(que es el cuerpo rígido cuya postura se desea controlar), es fácil comprobar usando la fórmula (1.10) que en este caso el número de grados de movilidad del robot es igual al número de articulaciones. Si el robot es de tipo paralelo, entonces habrá más articulaciones que eslabones móviles, el número de grados de movilidad será menor que el número de articulaciones y, por lo tanto, podrá haber articulaciones pasivas (no actuadas).

En este sentido, hay que recordar que en un robot el número de actuadores requerido para tener un control completo de la postura del cuerpo de interés es igual al número de grados de movilidad que el robot posee. Si el robot tiene menos actuadores que grados de movilidad, se dice que el robot es subactuado; si por el contrario, tiene más actuadores que grados de libertad, se dice entonces que el robot es sobreactuado.

Debe notarse también que un robot móvil, aunque puede poseer articulaciones y partes con movimiento relativo al robot en sí, siempre habrá más eslabones (móviles todos) que

articulaciones, y de acuerdo a la fórmula (1.10), siempre tendrá al menos  $\frac{d(d-1)}{2}$  grados de movilidad. Aunque esto pareciera indicar que el control de la postura de un robot móvil es más sencillo que el de un manipulador, en la práctica no es así, sino lo contrario, esto se debe a que la distribución de los actuadores en este tipo de robots normalmente produce un movimiento que está sujeto a restricciones no holonómicas.

En las subsecciones siguientes se explica como obtener el modelo cinemático y dinámico de robots en general.

### Modelado cinemático

Considérese en general un robot (manipulador o móvil) de  $n$  grados de libertad (movilidad), por definición se requieren  $n$  variables independientes para especificar la configuración del robot. Llámese  $\mathbf{q}$  al vector en el que se agrupan esas  $n$  variables de configuración, entonces:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Suponiéndose que el robot tiene  $n$  actuadores (uno por cada grado libertad), al vector  $\mathbf{q}$  se le puede llamar como vector de variables articulares activas, y  $q_i$  sería la variable correspondiente a la  $i$ -ésima articulación activa.

En seguida se plantea el caso de un robot manipulador paralelo, el cual además de contar con articulaciones activas también posee articulaciones pasivas. Supóngase que  $p$  es el número de articulaciones pasivas y  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  son las variables asociadas a esas articulaciones pasivas, entonces el vector de variables articulares pasivas es:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

Finalmente, sea  $\mathbf{x}$  el vector de variables de postura del elemento de interés (plataforma, efector final o vehículo). Como ya se mencionó, la postura de cualquier cuerpo rígido en un

espacio tridimensional tiene en general  $\frac{d(d+1)}{2}$  grados de libertad (donde  $d$  es la dimensión del espacio en el que se mueve el cuerpo); si  $\mathbf{p}$  y  $\phi$  describen respectivamente la posición y la orientación del elemento de interés, donde  $\mathbf{p}$  es un vector de  $d$  componentes, es decir,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$  y  $\phi$  un vector que puede estar compuesto por  $m$  parámetros, pero sólo  $\delta = \frac{d(d+1)}{2}$  de ellos son independientes (esto es debido a que el espacio de configuración de la orientación es una variedad de dimensión  $\delta$ , que será denominada aquí en general como  $V^\delta$ ); entonces, es posible escribir  $\phi \in V^\delta \subseteq \mathbb{R}^m$  ( $m \geq \delta$ ) y

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d \times V^\delta \subseteq \mathbb{R}^{d+m}.$$

El modelo cinemático de un robot es una función que relaciona el vector de variables de configuración  $\mathbf{q}$  con el vector de variables de postura del elemento de interés  $\mathbf{x}$ . Si esa función permite obtener  $\mathbf{x}$  a partir de  $\mathbf{q}$ , entonces se habla del modelo cinemático directo. Sea  $\mathbf{h}$  tal función, entonces  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d \times V^\delta$  y

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{q}).$$

Por otro lado, el modelo cinemático inverso permite determinar el vector  $\mathbf{q}$  a partir del vector  $\mathbf{x}$ ; es decir, se busca encontrar la función inversa de  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}).$$

Si existen  $p$  articulaciones pasivas, entonces deben existir también  $p$  restricciones holonómicas entre las variables  $\mathbf{q}$ ,  $\beta$  y  $\mathbf{x}$ . Dado un conjunto de variables  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , una restricción holonómica entre esas variables es una ecuación de la forma  $\gamma(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$  que establece una relación entre las  $k$  variables, de modo que si se especifican  $k - 1$  de esas variables, debería ser posible encontrar la faltante, despejándola de la ecuación de la restricción. De acuerdo con lo anterior, dadas las  $p$  restricciones holonómicas de la forma  $\gamma(\mathbf{q}, \beta, \mathbf{x}) = 0 \in \mathbb{R}^p$  deben permitir expresar cada una de las variables articulares pasivas en términos de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{x}$ , es decir, se puede llegar a tener

$$\beta(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p.$$

por lo que se pueden eliminar las variables articulares pasivas del sistema de ecuaciones y encontrar así el modelo cinemático.

En el caso de robots paralelos es común también definir un vector

$$\rho = \begin{bmatrix} q \\ \beta \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p-d} \times V^d \subset \mathbb{R}^{n+p+d+m}, \quad (1.11)$$

si se define  $r = n + p + d + m$  entonces  $\rho \in \mathbb{R}^r$  y si el robot tiene sólo  $n$  g.d.l., entonces existe un vector de restricciones holonómicas

$$\gamma(\rho) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{r-n}, \quad (1.12)$$

### Cinemática diferencial

En general, el movimiento del elemento de interés del robot con respecto a un marco fijo (inercial), estará compuesto de un movimiento traslacional y un movimiento rotacional. La tasa de cambio temporal de cada uno de estos movimientos relativos queda descrita, respectivamente, por medio de un vector *velocidad lineal* y un vector *velocidad angular*. La *cinemática diferencial*, es la que establece la relación entre las velocidades articulares activas y las correspondientes velocidades lineal y angular del elemento de interés [14].

Si  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  denota el vector de velocidades articulares activas,  $v \in \mathbb{R}^3$  es el vector velocidad lineal del elemento de interés y  $\omega \in \mathbb{R}^3$  es el vector velocidad angular del elemento de interés, estos últimos referidos a un marco fijo, entonces es posible escribir:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q} \quad (1.13)$$

que representa la *ecuación cinemática diferencial* del robot. La matriz  $J(q) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es conocida como el *jacobiano geométrico* del robot, y como se observa, es una matriz que permite la obtención del vector de velocidad lineal y angular, a partir de la derivada de las coordenadas articulares. Euseguida se explican algunos conceptos indispensables para la obtención de esta matriz, que en general, es función de las coordenadas de configuración.

Las configuraciones  $\mathbf{q}$  para las que  $J(\mathbf{q})$  pierde rango, son denominadas *singularidades cinemáticas* del robot [14]. Evitar las singularidades en un robot es de interés por muchas razones.

La ecuación (1.13) puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p(\mathbf{q}) \\ J_o(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

donde  $J_p(\mathbf{q}), J_o(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$  son las matrices correspondientes a la contribución de las velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  a la velocidad lineal y angular, respectivamente.

Por otra parte, considerando el vector de coordenadas de postura

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{V}^d \subseteq \mathbb{R}^{d+m},$$

se tiene que la derivada del vector de posición  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$  es justamente la velocidad lineal:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = J_p(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^d,$$

con  $J_p(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ , mientras que en el caso del vector de orientación  $\phi \in \mathbb{W}^d \subseteq \mathbb{R}^m$  se tiene

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = J_o(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^m$$

con  $J_o(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . De esta manera es posible escribir

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p(\mathbf{q}) \\ J_o(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = J_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{d+m} \quad (1.14)$$

donde  $J_A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(d+m) \times n}$  es conocido como el *jacobiano analítico* del robot, que es justamente el jacobiano de la función cinemática  $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{q})$ :

$$J_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}},$$

el cual es útil para obtener, a partir de  $\dot{\mathbf{q}}$ , la derivada respecto al tiempo del vector  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$ .

Por definición, la velocidad lineal indica la variación de la posición en la dirección de las coordenadas cartesianas; de modo que si  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$  está expresado también en coordenadas cartesianas, entonces:

$$\mathbf{v} = H_{\partial \times d} \dot{\mathbf{p}}. \quad (1.15)$$

donde, en general  $H_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz tal que el elemento en el renglón  $i$  y la columna  $j$  es 1 si  $i = j$  y es 0 si  $i \neq j$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ . Por ejemplo, si el movimiento del robot es en 3D, entonces  $d = 3$ ,  $H_{3 \times 3} = I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{p}$ ; si el movimiento está restringido al plano (que, por convención, se considera es el plano XY),

entonces  $d = 2$  y  $H_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ .

Dada una parametrización de la orientación  $\phi$ , es posible encontrar también una relación lineal entre la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  y la velocidad rotacional  $\dot{\phi} \in \mathbb{R}^m$ . Es decir

$$\boldsymbol{\omega} = T_\phi(\mathbf{q})\dot{\phi} \quad (1.16)$$

donde  $T_\phi \in \mathbb{R}^{3 \times m}$  es una matriz de transformación que depende de la parametrización de la orientación empleada, y es proporcionada para algunas parametrizaciones de la orientación en el capítulo 4. De (1.15) y (1.16), es posible escribir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = T_A(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

donde

$$T_A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} H_{3 \times d} & 0_{3 \times m} \\ 0_{3 \times d} & T_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times (d+m)},$$

por tanto, no importa que parametrización se emplee, el jacobiano geométrico siempre es el mismo.

Comparando (1.13) con (1.14) y (1.17) se aprecia la relación entre el jacobiano geométrico y el jacobiano analítico:

$$J(\mathbf{q}) = T_A(\mathbf{q})J_A(\mathbf{q}).$$

Del conjunto de singularidades cinemáticas de un robot, aquellas que son debidas a la pérdida de rango de la matriz de transformación  $T_A(\mathbf{q})$  son conocidas como *singularidades de representación* [14].

En el caso de robots con restricciones holonómicas de la forma (1.12) es posible tomar la derivada con respecto al tiempo para obtener

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \dot{\boldsymbol{\rho}} = D(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}, \quad (1.18)$$

dónde  $D(\rho) \in \mathbb{R}^{(r-m) \times r}$  es la matriz que mapea el vector  $\dot{\rho} = \begin{bmatrix} \dot{q}^T & \dot{\beta}^T & \dot{x}^T \end{bmatrix}^T$  al vector de las derivadas de las restricciones, que por definición es nulo, (ver 1.12).

Por otra parte, es posible definir tres matrices  $R_q(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $R_\beta(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times p}$  y  $R_x(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times (d-m)}$  tales que

$$\dot{\rho} = R_q(\rho)\dot{q},$$

$$\dot{\rho} = R_\beta(\rho)\dot{\beta}$$

y

$$\dot{\rho} = R_x(\rho)\dot{x},$$

de modo que de (1.18) se tiene

$$D(\rho)R_q(\rho)\dot{q} = D(\rho)R_\beta(\rho)\dot{\beta} = D(\rho)R_x(\rho)\dot{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{r-m}.$$

### Modelado dinámico

El modelo dinámico de un robot proporciona la relación entre las fuerzas y momentos (pares) aplicados a cada articulación activa y el movimiento del robot descrito por medio de las variables de configuración y sus derivadas temporales. Al igual que en cinemática existen dos casos: el modelo dinámico directo e inverso. El modelo dinámico directo se enfoca en encontrar el movimiento resultante del robot como una función del tiempo ante la aplicación de fuerzas y pares externos. Por otro lado, el modelo dinámico inverso permite encontrar las fuerzas y momentos requeridos para lograr un movimiento deseado del robot.

Considérese nuevamente un robot de  $n$  grados de libertad, con  $n$  articulaciones activas que se agrupan en el vector  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . El movimiento del robot queda entonces descrito por  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$ , siendo los dos últimos los vectores de velocidades y aceleraciones articulares, respectivamente.

Si  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de fuerzas generalizadas aplicadas al robot, es decir:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$



donde  $\tau_i$  es la fuerza (o momento) aplicado a la articulación activa  $i$ , entonces el modelo dinámico directo es una función  $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  tal que

$$\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \mu(\tau)$$

mientras que el modelo dinámico inverso sería:

$$\tau = \mu^{-1}(q, \dot{q}, \ddot{q}).$$

Existen varios métodos para obtener el modelo dinámico de robots manipuladores [15], siendo los dos más conocidos el que se basa en la formulación de Newton-Euler y el que parte de la formulación de Lagrange. En el método de Newton-Euler se resuelven las ecuaciones de movimiento de Newton (para traslación) y de Euler (para rotación) en cada eslabón, por lo que es necesario tomar en cuenta todas las fuerzas y momentos (externos y de reacción) que actúan en el robot.

En el método de Lagrange se parte del principio de conservación de la energía, del cual derivan las ecuaciones de movimiento. Aunque éste es un método analíticamente más simple y generalmente lleva a una forma explícita del modelo dinámico, tiene la desventaja de que sólo considera las fuerzas y momentos aplicados, y no las fuerzas y momentos de reacción entre los eslabones.

A continuación se describe brevemente el método de Lagrange para la obtención del modelo dinámico de robots en general.

El primer paso es definir el vector de variables generalizadas que será empleado para describir la configuración del robot. Cabe mencionar que aquí se usa el término "variables generalizadas" para describir cualquier conjunto de variables (independientes entre sí, o no) que describa de forma única el estado dinámico del robot.

Aunque puede haber muchas posibles elecciones de coordenadas generalizadas, para un sistema físico generalmente se seleccionan algunas que sean convenientes para la especificación de la configuración del sistema y que hagan más fácil la solución de las ecuaciones de movimiento. Si estas variables son independientes entre sí, entonces el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad del robot.

Por ejemplo, en el caso de robots manipuladores seriales, dado que el número de grados de libertad es igual al número de articulaciones, y éstas por lo general son actuadas, es común usar el vector de variables articulares activas como el vector de variables generalizadas y no hay restricciones holonómicas. Si se selecciona el vector  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^r$  definido en (1.11) como el vector de variables generalizadas, entonces debe existir un vector de restricciones holonómicas como el definido en (1.12). En el análisis siguiente se usará en general  $\boldsymbol{\rho}$ , como el vector de variables generalizadas.

Una vez definido esto es necesario determinar la energía cinética  $\mathcal{K}_i$  y la energía potencial  $\mathcal{U}$  en términos de esas variables  $\boldsymbol{\rho}$  y sus derivadas  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ .

La energía cinética del eslabón  $i$  está dada por:

$$\mathcal{K}_i(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T I_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (1.19)$$

donde  $m_i$  es la masa del eslabón,  $I_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de momentos de inercia con respecto al centro de masa del eslabón,  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$  es el vector velocidad lineal del centro de masa, y  $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$  es el vector velocidad angular del eslabón.

La energía potencial de un sólido se define como el trabajo que realiza el peso del cuerpo al desplazar su centro de masa hasta un plano de referencia normal a la aceleración de la gravedad, por tanto la energía potencial del eslabón  $i$  se obtiene usando la siguiente expresión:

$$\mathcal{U}_i(\boldsymbol{\rho}) = -m_i \mathbf{p}_{c_i}^T \mathbf{g}_o \quad (1.20)$$

donde  $\mathbf{p}_{c_i} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de posición del centro de masa del eslabón y  $\mathbf{g}_o$  es el vector de aceleración debida a la gravedad, la cual obviamente siempre es dirigida hacia el centro de la tierra y por tanto, al sustituirse en (1.20) proporcionará el trabajo realizado por el peso para desplazar el eslabón  $i$ , el cual, como se aprecia en (1.20), es positivo si  $\mathbf{p}_{c_i} > 0$  y negativo si  $\mathbf{p}_{c_i} < 0$ .

Es importante mencionar que en (1.19) los vectores  $\mathbf{v}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$  y la matriz  $I_i$  deben estar referidas al mismo marco coordenado, aunque se puede demostrar que la energía cinética  $\mathcal{K}_i$  es la misma en cualquier marco de referencia.

En el caso de la ecuación (1.20), los vectores  $\mathbf{p}_{ci}$  y  $\mathbf{g}_o$  también deben estar referidos a un mismo marco; si ese marco cambia, la energía potencial cambia también; no obstante, la diferencia entre las energías potenciales referidas a dos marcos fijos (inmóviles) es siempre constante.

Una vez obtenidas las energías cinética y potencial de cada eslabón  $i$ , se puede calcular la energía cinética total  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  y la energía potencial total  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})$  del robot:

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \sum_{i=1}^l \mathcal{K}_i(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$$

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^l \mathcal{U}_i(\boldsymbol{\rho})$$

donde  $l$  es el número total de eslabones en el robot.

La función lagrangiana (o simplemente el lagrangiano) de un robot se define como:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) - \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho})$$

y a partir de esta función se pueden establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange que definen la dinámica de cualquier robot.

Si se usan  $n$  variables generalizadas (es decir,  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ) entonces las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se escriben:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau},$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector de fuerzas generalizadas aplicadas al robot o, en forma compacta,

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (1.21)$$

donde  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercias del robot,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitacionales.

En el caso de robots con restricciones holonómicas las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\tau}_a + \left( \frac{\partial \gamma(\boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (1.22)$$

donde  $\gamma(\rho) \in \mathbb{R}^{r-n}$  es el vector de restricciones holonómicas y  $\lambda \in \mathbb{R}^{r-n}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange que permite reducir el número de ecuaciones independientes a  $n$ . La forma compacta de (1.22) es:

$$M_r(\rho)\ddot{\rho} + C_r(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho} + g_r(\rho) = \tau_\rho + D(\rho)^T \lambda,$$

donde  $M_r(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $C_r(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $g_r(\rho) \in \mathbb{R}^r$  y  $\tau_\rho \in \mathbb{R}^r$  se definen de manera similar a los correspondientes elementos en (1.21), pero son de dimensión mayor.

Finalmente, si las  $r - n$  restricciones son no holonómicas, las ecuaciones de movimiento de Lagrange quedan [13]:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho})}{\partial \dot{\rho}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho})}{\partial \rho} = \tau + \left[ \frac{\partial \gamma(\rho, \dot{\rho})}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \gamma(\rho, \dot{\rho})}{\partial \dot{\rho}} \right\} \right]^T \lambda.$$

### 1.3. Esquemas de control de robots

Desde el punto de vista de control automático, la estructura mecánica de un robot es vista como un sistema que tiene como entradas las fuerzas o pares aplicados a las articulaciones activas, mientras que como salidas es posible elegir un conjunto de variables generalizadas y sus respectivas velocidades.

Por otra parte, la mayoría de los robots emplea como actuadores servomotores eléctricos, ya sea de CD o de CA (como los comúnmente llamados motores de CD sin escobillas). Para su correcto funcionamiento, los servomotores requieren manejadores (drivers) electrónicos que incluyen no sólo la etapa de potencia, sino también una etapa de control a bajo nivel en cada uno de los actuadores del robot. Esta etapa de control puede incluir hasta tres secciones: un controlador de posición, un controlador de velocidad y un controlador de par, tal como se muestra en la figura 1.6. Los tres controladores constituyen un esquema jerárquico con lazos de control anidados. En la mayoría de los casos es posible configurar el manejador de manera que su señal de entrada corresponda a la posición, a la velocidad o al par deseado en el motor (respectivamente  $q_d$ ,  $\omega_d$  o  $\tau_d$  en la figura 1.6). Así que se habla de tres modos de operación indicados por líneas punteadas en la figura 1.6.

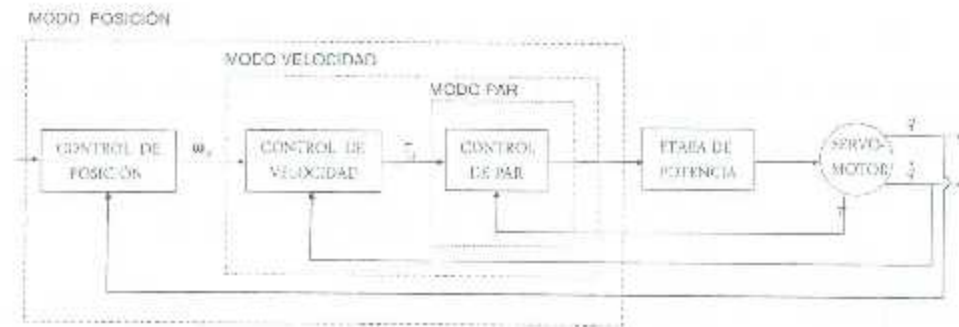


Figura 1.6: Diagrama de bloques de un servomotor y su manejador.

Al emplear servomotores, el control de la configuración (o postura) del robot se puede lograr de varias maneras. La más simple es configurar el manejador directamente en modo posición; la desventaja de este esquema es que, en general, no es posible cambiar el controlador de posición interno o sus ganancias. Otra manera es configurar el manejador en modo velocidad e implementar un controlador de posición externo que genere las referencias de velocidad para el manejador. Finalmente, el manejador se puede configurar en modo par, requiriendo el diseño de un controlador de posición externo que genere el par deseado. Para más información sobre este tema ver [16].

En la literatura, se ha acuñado el término “control cinemático” para referirse a aquellos esquemas de control de robots que entregan referencias de velocidad articular, en vez de referencias de par. Debe resultar claro que estos algoritmos son válidos sólo si los actuadores del robot están configurados en modo velocidad. Por extensión, se les llama “controladores dinámicos” a aquellos que entregan referencias de par al robot, lo que implica que éste debe estar operando en modo par.

En el caso de esta tesis, se considera únicamente el llamado *objetivo de control de movimiento*, que consiste en lograr un seguimiento asintótico de la configuración de salida del robot a una trayectoria temporal de configuración deseada, en el espacio libre. La configuración del robot puede ser expresada en coordenadas articulares o de postura.

Así, dada una trayectoria deseada expresada en coordenadas articulares,  $q_d(t) \in \mathbb{R}^n$ ,

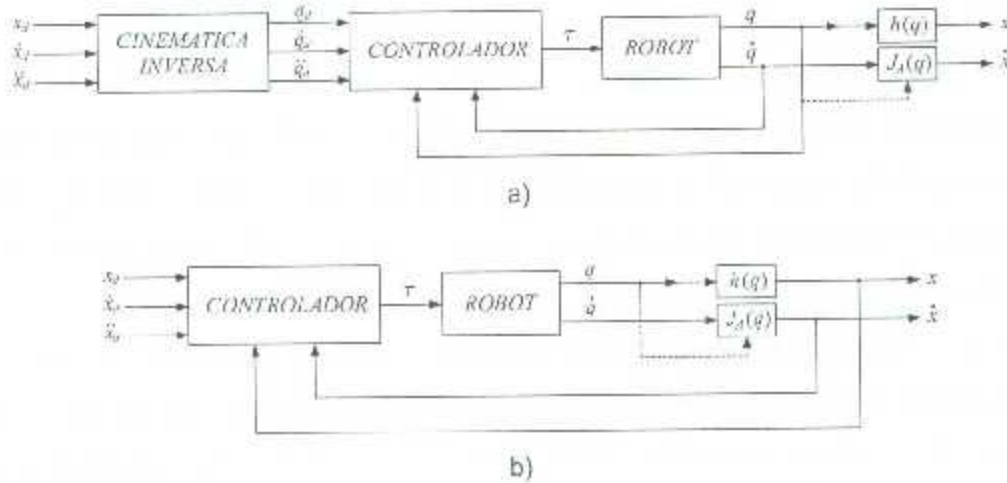


Figura 1.7: Esquemas de control de robots: a) en coordenadas articulares y b) en coordenadas de postura.

el objetivo de control de movimiento en coordenadas articulares es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d(t),$$

mientras que si la trayectoria deseada es expresada en coordenadas de postura,  $\mathbf{x}_d(t) \in \mathbb{R}^d \times M^i \subseteq \mathbb{R}^{d+m}$ , entonces el objetivo de control de movimiento en coordenadas de postura sería

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d(t).$$

Es importante señalar que en los robots las acciones de control son aplicadas directamente a cada articulación activa, sin embargo, la especificación de las tareas a realizar generalmente se hace en a través de la postura del elemento de interés. Este hecho conduce en forma natural a considerar dos clases generales de esquemas de control, denominados aquí esquema de *control en espacio articular* y esquema de *control en espacio de postura* [14]; diagramas de estos esquemas de control se muestran en la figura 1.7.

El problema de control en espacio articular se puede dividir en dos partes. Primero, se resuelve la cinemática inversa para transformar el movimiento requerido del espacio de postura al espacio articular. Luego, se diseña un controlador en espacio articular que

permite el seguimiento de las nuevas referencias articulares. La principal desventaja de este esquema, sin embargo, es que las coordenadas de postura quedan fuera del lazo de retroalimentación y son controladas en mala abierta a través de la estructura mecánica del manipulador, expresada mediante la cinemática directa y diferencial. Es claro que cualquier incertidumbre en la estructura causa una pérdida de exactitud en la postura real del extremo final del robot.

El problema de control en espacio de postura sigue un enfoque global que requiere algoritmos de mayor complejidad, debido a que la cinemática inversa está ahora incluida dentro del lazo de retroalimentación. Esta ventaja conceptual da la posibilidad de actuar directamente sobre las variables de postura; no obstante, ésta es sólo una ventaja potencial, pues por lo general la postura del extremo final no es medida directamente, sino calculada usando la cinemática directa a partir de mediciones de las coordenadas articulares.

## 1.4. Objetivos de la tesis

El objetivo general de la presente tesis consiste en estudiar los fundamentos matemáticos de los números duales, así como su aplicación al modelado y al control de robots. Para lograr este objetivo general se proponen los siguientes objetivos específicos:

1. Estudiar los fundamentos teóricos (operaciones básicas y propiedades) de los números duales.
2. Investigar en la literatura la aplicación de los números duales en el modelado de cuerpos rígidos y robots en general.
3. Estudiar y, en su caso, proponer algoritmos de control de robots que utilicen números duales.
4. Realizar simulaciones y/o experimentos en un robot real para mostrar la aplicación de los algoritmos de control estudiados.

## 1.5. Organización del documento

Este documento de tesis se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se explican los fundamentos matemáticos requeridos para el desarrollo de la tesis: las estructuras algebraicas básicas, algunos conceptos y operaciones del álgebra lineal, así como de variedades y grupos de Lie, y la estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En el capítulo 3 se explican las propiedades y operaciones de los números complejos, números duales, cuaterniones y cuaterniones duales.

En el capítulo 4 se explican diversas maneras de parametrizar la postura de un cuerpo rígido en el espacio, las cuales emplean: ángulos de Euler, matrices de rotación, parámetros de Euler y números duales (matrices de transformación dual y cuaterniones duales unitarios). Además se presentan las expresiones de cinemática diferencial para cada una de las parametrizaciones anteriormente mencionadas.

En el capítulo 5 se estudia el modelado cinemático directo de robots manipuladores seriales, se explican los parámetros Denavit-Hartenberg (D-H) y su aplicación al modelado cinemático directo de robots valiéndonos de: matrices de transformación homogénea, parámetros de Euler, matrices ortogonales duales y cuaterniones duales unitarios.

En el capítulo 6 se describen los esquemas de control, se expone el error de postura y el objetivo de control empleando cuaterniones duales unitarios y además se proponen dos controladores que utilizan cuaterniones duales unitarios: un controlador cinemático y un controlador dinámico.

Con el fin de evaluar los controladores propuestos en el capítulo 6 en un robot, en el capítulo 7 se realizaron simulaciones numéricas empleando el paquete Matlab/Simulink, así como el modelo y parámetros del robot Mitsubishi PA10.

Por último, en el capítulo 8 se exponen los comentarios y conclusiones surgidos del trabajo realizado.



## Capítulo 2

# Fundamentos matemáticos

Este capítulo está destinado a presentar conceptos y herramientas básicas que serán útiles en los capítulos subsecuentes. La mayor parte del material ha sido extraído de [17].

En este texto se emplearán los siguientes símbolos matemáticos de abreviación:

$\forall$  "para todo"

$\exists$  "existe"

$\in$  "perteneciente a"

$\Rightarrow$  "implica"

y los siguientes símbolos de operaciones:

$\times$  multiplicación de cualquier número complejo generalizado.

$\otimes$  multiplicación de cuaterniones.

$\odot$  multiplicación de cuaterniones duales.

### 2.1. Estructuras algebraicas

Se dice que un conjunto de números  $S$  es *cerrado* bajo una *operación binaria*  $*$  si para todo  $a, b \in S$  se tiene que  $a * b \in S$ . Por ejemplo, el conjunto de los *números naturales* es cerrado bajo las operaciones de adición (+) y multiplicación ( $\times$ ), pero no lo es para la sustracción y la división.

## Grupo

Un grupo  $(G, *)$  se define como un conjunto  $G$  que es cerrado bajo la operación binaria  $*$ , y que satisface los siguientes axiomas,  $\forall a, b, c \in G$ :

- *Asociatividad*:  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .
- *Elemento identidad*:  $\exists e \in G : a * e = e * a = a$ .
- *Inversa*:  $\exists d \in G : a * d = d * a = e$  (el elemento identidad).

Si además de los axiomas anteriores se satisface también el siguiente:

- *Conmutatividad*:  $a * b = b * a$

se dice que el grupo es *abeliano*. Por ejemplo, los números reales forman un grupo bajo la adición, pero no bajo la multiplicación, ya que el cero no tiene inversa multiplicativa.

## Anillo

Un anillo  $(R, +, \times)$  es un conjunto  $R$  que es cerrado bajo las operaciones de adición  $(+)$  y  $(\times)$ , y satisface los siguientes axiomas  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ :

- *Asociatividad aditiva*:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
- *Conmutatividad aditiva*:  $a + b = b + a$ .
- *Identidad aditiva*:  $\exists 0 \in R : 0 + a = a + 0 = a$ .
- *Inversa aditiva*:  $\exists -a \in R : a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- *Asociatividad multiplicativa*:  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ .
- *Distributividad*:  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$  y  $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ .

Se puede decir que un anillo es un grupo abeliano con una segunda operación que es asociativa y distributiva sobre la operación del grupo abeliano. El ejemplo más común de anillo son los números enteros; otros ejemplos que son de interés en esta tesis, son los números duales y los cuaterniones.

### Campo

Un campo  $(F, +, \times)$  es un conjunto  $F$  que es cerrado bajo las operaciones de adición (+) y multiplicación ( $\times$ ), tiene un elemento identidad aditivo (0) diferente del elemento identidad multiplicativo (1) y satisface los siguientes axiomas,  $\forall a, b, c \in F$ :

- *Asociatividad aditiva:*  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
- *Commutatividad aditiva:*  $a + b = b + a$ .
- *Identidad aditiva:*  $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ .
- *Inversa aditiva:*  $\exists -a \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- *Asociatividad multiplicativa:*  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ .
- *Commutatividad multiplicativa:*  $a \times b = b \times a$ .
- *Identidad multiplicativa:*  $\exists 1 \in F : a \times 1 = 1 \times a = a$ .
- *Inversa multiplicativa (excepto para 0):*  $\forall a \in F - \{0\}, \exists a^{-1} \in F : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ .
- *Distributividad:*  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$  y  $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ .

Se puede decir que un campo es un conjunto de números que es cerrado para las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división (diferente de cero). La condición  $0 \neq 1, 0, 1 \in F$  asegura que un campo debe tener al menos dos elementos. El campo más pequeño es entonces el de los números binarios, donde las operaciones básicas del campo de los binarios son "XOR" y "AND". Otros ejemplos de campos son: los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ), los números reales ( $\mathbb{R}$ ) y los números complejos ( $\mathbb{C}$ ), con las operaciones de adición y multiplicación convencionales. Los cuaterniones ( $\mathbb{H}$ ) y los números duales ( $\mathbb{D}$ ) no forman un campo, pues los primeros no satisfacen el axioma de conmutatividad multiplicativa y los segundos no cumplen con la inversa multiplicativa  $\forall z \in \mathbb{D} - \{0\}$ .

### Espacio vectorial

Un *espacio vectorial*  $(V, +, \cdot)$  sobre un campo  $(F, +, \times)$  es un conjunto  $V$ , cerrado bajo las operaciones *adición vectorial*  $(+ : V \times V \rightarrow V)$  y *multiplicación escalar*  $(\cdot : F \times V \rightarrow V)$ , y que además satisface las siguientes propiedades,  $\forall a, b \in F, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ :

1. *Asociatividad aditiva*:  $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ .
2. *Commutatividad aditiva*:  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ .
3. *Identidad aditiva*:  $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ .
4. *Inversa aditiva*:  $\forall \mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .
5. *Asociatividad multiplicativa*:  $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \times b) \cdot \mathbf{v}$ .
6. *Identidad multiplicativa*:  $\exists 1 \in F : \forall \mathbf{v} \in V, 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ .
7. *Distributividad sobre la adición vectorial*:  $a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a \cdot \mathbf{v} + a \cdot \mathbf{w}$ .
8. *Distributividad sobre la adición del campo*:  $(a+b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$ .

Los elementos de un espacio vectorial se conocen en general como *vectores*. Una *base* de un espacio vectorial  $V$  sobre  $F$ , se define como un conjunto de *vectores básicos*  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n \in V$  que son *linealmente independientes* y que *generan* (*span*) el espacio  $V$ . Consecuentemente, si  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$  es un conjunto de vectores en  $V$  entonces esos vectores forman una base si y sólo si todo  $\mathbf{v} \in V$  puede ser escrito en forma única como

$$\mathbf{v} = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_n \hat{\mathbf{e}}_n \quad (2.1)$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ . Un espacio vectorial tendrá muchas bases diferentes, pero hay siempre el mismo número de vectores básicos en cada una de ellas. El número de vectores básicos es llamado la *dimensión* de  $V$ .

Si  $F$  es el campo de los números reales  $\mathbb{R}$ , entonces se habla de un *espacio vectorial sobre los reales*. El ejemplo más común de un espacio vectorial sobre los reales es el *espacio*

euclidiano de dimensión  $n$ , denotado por  $\mathbb{R}^n$ . Otros ejemplos de espacios vectoriales sobre los reales son los números complejos, los números duales y los cuaterniones.

Sean  $U$  y  $V$  dos espacios vectoriales sobre el mismo campo  $F$ , y sea  $f : U \rightarrow V$  una función invertible tal que

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

para todo  $x, y \in U$  y todo  $a, b \in F$ , entonces se dice que  $f$  es un *isomorfismo* y  $U$  y  $V$  son *isomórficos*, es decir, son esencialmente idénticos.

Obsérvese que, dado un espacio vectorial de dimensión  $n$ , cada vector  $v \in V$ , expresado en la forma (2.1) puede ser expresado también como:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

de modo que el mapeo  $V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo. En general, dos espacios vectoriales son isomórficos si y sólo si tienen la misma dimensión. Por ejemplo, los números complejos definen un espacio vectorial sobre los reales de dimensión dos, que es isomórfico al espacio vectorial real  $\mathbb{R}^2$ , esto se escribe:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$

Los espacios vectoriales (o *espacios lineales*) y las transformaciones entre ellos son el objeto de estudio principal de la llamada *álgebra lineal*.

### Álgebra sobre un campo

Sea  $(V, +, \cdot)$  un espacio vectorial sobre un campo  $(F, +, \times)$ . Si se define una operación *multiplicación vectorial*  $(* : V * V \rightarrow V)$  tal que  $V$  sea cerrado bajo esa operación, y satisfaga las siguientes propiedades,  $\forall a \in F, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ :

- *Distributividad:*  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) * \mathbf{w} = \mathbf{u} * \mathbf{w} + \mathbf{v} * \mathbf{w}$  y  $\mathbf{u} * (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{u} * \mathbf{w}$ .
- *Bilinealidad:*  $(a \cdot \mathbf{u}) * \mathbf{v} = \mathbf{u} * (a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot (\mathbf{u} * \mathbf{v})$ .

entonces se tiene un *álgebra*  $(V, +, \cdot, *)$  sobre el campo  $(F, +, \times)$ .

Nótese que un álgebra no requiere ni asociatividad ni conmutatividad en la multiplicación de vectores, es por eso que pueden definirse *álgebras no conmutativas* y *álgebras no asociativas*. Por ejemplo, el *álgebra de matrices* es asociativa, pero no conmutativa.

Un tipo interesante de álgebras no asociativas y no conmutativas son las *álgebras de Lie*, que satisfacen las siguientes propiedades,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in (V, +, \cdot, *)$ :

- *Antisimetría*:  $\mathbf{u} * \mathbf{v} = -\mathbf{v} * \mathbf{u}$ . (2.3)

- *Identidad de Jacobi*:  $\mathbf{u} * (\mathbf{v} * \mathbf{w}) + \mathbf{w} * (\mathbf{u} * \mathbf{v}) + \mathbf{v} * (\mathbf{w} * \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . (2.4)

Un ejemplo común de un álgebra de Lie es el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , con la multiplicación vectorial dada por el *producto cruz* de vectores.

## 2.2. Álgebra lineal

El espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es el conjunto de vectores  $\mathbf{x}$  de *dimensión*  $n$ , formados por  $n$ -adas de números reales en forma de columna:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  son las *coordenadas* del vector  $\mathbf{x}$ . Similarmente, se denota por  $\mathbb{R}^{n \times m}$  al conjunto de *matrices*  $A$  formadas por arreglos de números reales ordenados por  $n$  renglones y  $m$  columnas:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

En general, el espacio de matrices  $\mathbb{R}^{n \times m}$  es isomórfico al espacio de vectores  $\mathbb{R}^{nm}$ , y tiene por tanto dimensión  $nm$ . Nótese también que un vector es simplemente una *matriz columna*, es decir, con  $m = 1$ .

### 2.2.1. Matrices particulares

El conjunto de matrices diagonales de  $n \times n$  forma un espacio vectorial, de dimensión  $n$ , sobre los reales. Dos matrices diagonales de particular utilidad son la matriz *identidad*, definida como  $I_{n \times n} = \text{diag}\{1\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y la matriz *nula*:  $0_{n \times n} = \text{diag}\{0\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Cuando no haya lugar a confusión, las matrices identidad y nula se denotarán simplemente como  $I$  y  $0$ , respectivamente.

La matriz *transpuesta* de  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , denotada por  $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , es la que se obtiene al intercambiar los renglones y columnas de  $A$ . Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *simétrica* si es igual a su transpuesta, es decir, si  $A = A^T$ , mientras que es *antisimétrica* si  $A = -A^T$ . Nótese que, dada una matriz cualquiera  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , las matrices  $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $A A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son simétricas. Es fácil comprobar que los conjuntos de matrices simétricas y antisimétricas forman subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , cuyas dimensiones son  $\frac{1}{2}n(n+1)$  y  $\frac{1}{2}n(n-1)$ , respectivamente. Por ejemplo, la matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

es claramente isomórfica a  $\mathbb{R}^6$ , por lo que su dimensión es 6. El conjunto de matrices antisimétricas de  $n \times n$  es de importancia y se denomina  $\text{so}(n)$ , es decir:

$$\text{so}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = -A^T\}.$$

El *rango* de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , denotado por  $\text{rank}(A)$ , se define como el máximo número de renglones (o columnas) linealmente independientes de  $A$ . En general,  $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ . Si  $\text{rank}(A) = \min\{m, n\}$  se dice que  $A$  es de *rango completo* (*full rank*).

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *singular* si su determinante es nulo, i.e., si  $\det(A) = 0$ ; por esta razón, una matriz singular no tiene inversa. Si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $A$  es *no singular* y su matriz *inversa*,  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , cumple  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ; además  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

El conjunto de matrices cuadradas no singulares forma un grupo bajo la multiplicación matricial convencional. Este grupo es denominado *grupo lineal general*,  $\text{GL}(n)$ :

$$\text{GL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}. \quad (2.5)$$

La operación inversa de matrices puede extenderse al caso de matrices no cuadradas, siempre y cuando sean de rango completo. Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n > m$  y  $\text{rank}(A) = m$ , entonces existe una matriz *pseudoinversa izquierda* de  $A$ ,  $A_l^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , dada por

$$A_l^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

tal que  $A_l^\dagger A = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Si por el contrario,  $n < m$  y  $\text{rank}(A) = n$ , entonces se tiene la matriz *pseudoinversa derecha* de  $A$ ,  $A_r^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$A_r^\dagger = A^T (A A^T)^{-1} \quad (2.6)$$

tal que  $A A_r^\dagger = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Es fácil demostrar que si  $n = m$  y  $\text{rank}(A) = n$  (o lo que es lo mismo,  $\det(A) \neq 0$ ), entonces  $A_l^\dagger = A_r^\dagger = A^{-1}$ .

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisface que  $A^T A = A A^T = I$  se dice que es *ortogonal*. Obsérvese que si  $A$  es ortogonal, entonces  $A^{-1} = A^T$ . El conjunto de matrices ortogonales de  $n \times n$  se denota por  $O(n)$ , es decir:

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A A^T = A^T A = I\}.$$

$O(n)$  no forma un espacio vectorial, pero sí un grupo, bajo la operación multiplicación matricial, y es llamado el *grupo ortogonal*. El determinante de una matriz ortogonal puede ser 1 ó  $-1$ . El conjunto de matrices ortogonales de  $n \times n$  con determinante igual a 1 es también un grupo multiplicativo, conocido como *grupo especial ortogonal*,  $SO(n)$ :

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}.$$

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , no necesariamente simétrica, es *definida positiva*, y se escribe  $A > 0$ , si:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Cualquier matriz simétrica y definida positiva  $A = A^T > 0$  es no singular; por tanto su inversa existe. Más aún,  $A = A^T > 0$  si y sólo si  $A^{-1} = (A^{-1})^T > 0$ . Una forma sencilla



de determinar la positividad de una matriz simétrica  $A = \{a_{ij}\}$  es empleando el llamado *teorema de Sylvester*, que establece que  $A > 0$  si y sólo si se cumple que

$$\det[a_{:,1}] > 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det[A] > 0. \quad (2.7)$$

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *semidefinida positiva*, y se escribe  $A \geq 0$ , si:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *definida negativa* si  $-A$  es definida positiva, mientras que es *semidefinida negativa* si  $-A$  es semidefinida positiva.

### 2.2.2. Productos de vectores

Dados dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , el *producto interior* (*producto escalar* o *producto punto*),  $\cdot: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se define como:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}.$$

El producto interior permite definir la *norma euclidiana* de un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , denotada por  $\|\mathbf{x}\|$ , como:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Propiedades útiles de la norma euclidiana son,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ :

- $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (desigualdad del triángulo). (2.8)

- $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$  (desigualdad de Schwartz). (2.9)

En el caso de vectores en  $\mathbb{R}^3$ , el producto interior también se puede obtener usando la siguiente expresión:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos(\theta_{xy}),$$

donde  $\theta_{xy}$  es el ángulo entre los vectores  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ .

En el caso particular del espacio  $\mathbb{R}^3$  se tiene también el *producto exterior* (*producto vectorial* o *producto cruz*) de dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que se define como:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Alternativamente, se puede escribir  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = S(\mathbf{x})\mathbf{y}$ , donde, para un vector  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ , la matriz  $S(\mathbf{x})$  se define como:

$$\begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{so}(3) \quad (2.10)$$

que es una matriz antisimétrica. Así que  $S(\cdot)$  se puede ver como un operador matricial  $S(\cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{so}(3)$ .

El operador  $S(\cdot)$  satisface las siguientes propiedades,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ :

$$S(\mathbf{x})^T = S(-\mathbf{x}) = -S(\mathbf{x}), \quad (2.11)$$

$$S(\mathbf{x})(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = S(\mathbf{x})\mathbf{y} + S(\mathbf{x})\mathbf{z}, \quad (2.12)$$

$$S(\mathbf{x})\mathbf{y} = -S(\mathbf{y})\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

$$S(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{y}^T S(\mathbf{x})\mathbf{y} = 0, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{x}^T S(\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{z}^T S(\mathbf{x})\mathbf{y}, \quad (2.16)$$

$$S(\mathbf{x})S(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\mathbf{y}^T, \quad (2.17)$$

$$S(S(\mathbf{x})\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\mathbf{y}^T. \quad (2.18)$$

El producto exterior se puede obtener también empleando:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin(\theta_{xy}) \mathbf{u}_{xy}, \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{u}_{xy}$  es el vector unitario perpendicular tanto a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  como a  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ .

### 2.2.3. Valores y vectores propios

Considérese la transformación lineal de un vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , establecida por una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si el vector resultante de la transformación tiene la misma dirección de  $\mathbf{u}$  (con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ), entonces

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad (2.20)$$

donde, en general,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La ecuación (2.20) puede ser reescrita como

$$(\lambda I - A)\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

Para que el sistema homogéneo de ecuaciones (2.21) tenga una solución diferente de la trivial, se debe tener

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

que es la *ecuación característica* de  $A$ . Las  $n$  raíces de esta ecuación, denotadas  $\lambda_1\{A\}$ ,  $\lambda_2\{A\}$ , ...,  $\lambda_n\{A\}$  son los *valores propios* (*valores característicos* o *eigenvalores*) de  $A$ . Bajo la suposición de valores propios distintos, los  $n$  vectores  $\mathbf{u}_i$  que satisfacen la ecuación

$$(\lambda_i\{A\}I - A)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n$$

son llamados los *vectores propios* (*vectores característicos* o *eigenvectores*) asociados a los valores propios  $\lambda_i\{A\}$ .

La *traza* de una matriz cuadrada  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , denotada por  $\text{tr}(A)$ , es la suma de los elementos en la diagonal principal de  $A$ , es decir:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Dados los  $n$  valores propios de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la traza y el determinante de  $A$  satisfacen:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\{A\}, \quad (2.22)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i\{A\}. \quad (2.23)$$

En el caso de una matriz simétrica  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  todos sus valores propios son números reales. En lo sucesivo, se denotará por  $\lambda_m\{A\}$  y  $\lambda_M\{A\}$  a los valores propios mínimo y máximo de una matriz simétrica  $A$ , respectivamente. El *teorema de Rayleigh Ritz* establece que en una matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se tiene,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\lambda_m\{A\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_M\{A\}\|\mathbf{x}\|^2. \quad (2.24)$$

Una matriz cuadrada, no necesariamente simétrica,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva si y sólo si los valores propios de  $A + A^T$  son positivos, i.e.,  $\lambda_i\{A + A^T\} > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Más aún, una matriz simétrica  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva si y sólo si  $\lambda_i\{A\} > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ .

### Norma espectral

La *norma espectral* de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  se define como:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_M\{A^T A\}}.$$

Si  $A$  es simétrica entonces  $\|A\| = \max_i |\lambda_i\{A\}|$ . Si  $A$  es además definida positiva,  $A = A^T > 0$ , entonces simplemente  $\|A\| = \lambda_M\{A\}$ . Por otra parte, en el caso particular de  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  antisimétrica, i.e.,  $A \in \mathfrak{so}(3)$ , entonces existe un vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $A = S(\mathbf{a})$ , y se puede demostrar que

$$\|A\| = \|S(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|, \quad (2.25)$$

y que

$$\|A^2\| = \|AA\| = \|S(\mathbf{a})S(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|^2, \quad (2.26)$$

donde  $\|A\|$  es la norma espectral de la matriz  $A$ , mientras que  $\|\mathbf{a}\|$  denota la norma euclidiana del vector  $\mathbf{a}$ .

Un resultado importante es el siguiente. Considérese la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ . La norma euclidiana del vector  $A\mathbf{x}$  satisface:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|.$$

Más aún, siendo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , el valor absoluto de  $\mathbf{y}^T A \mathbf{x}$  satisface:

$$|\mathbf{y}^T A \mathbf{x}| \leq \|A\| \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}\|. \quad (2.27)$$

## 2.3. Variedades y grupos de Lie

### 2.3.1. El concepto de variedad

Aunque la definición formal de una *variedad* (en inglés *manifold*) es algo compleja, para fines de esta tesis, el concepto se puede explicar de una manera simple. Supóngase que se tiene un espacio vectorial de dimensión  $n$ , el cual se considera equivalente (isomórfico) al espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Una variedad de dimensión  $m$  (con  $m \leq n$ ) es simplemente un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que en forma local se puede ver como un espacio euclideo de dimensión  $m$ .

El ejemplo clásico de una variedad es el de la superficie de una esfera (tal la superficie de la Tierra idealmente lo es). Aunque una esfera es un cuerpo geométrico de tres dimensiones, en forma local (es decir, sobre la superficie de la esfera), se puede considerar que sólo tiene dos dimensiones, por lo que es localmente equivalente al plano  $\mathbb{R}^2$ . Se puede decir entonces que una esfera es una variedad de dimensión 2, la cual es un subconjunto del espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . En general, se usará aquí la notación  $V^m \subset \mathbb{R}^n$  para referirse a una variedad de dimensión  $m$  en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Nótese que  $1 \leq m \leq n$ .

Así que si  $V^m \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces

$$V^m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \gamma(\mathbf{x}) = 0 \in \mathbb{R}^{n-m}\}$$

Por ejemplo, obsérvese que una esfera de radio  $r$  y centro en el origen, puede definirse en términos de las tres coordenadas cartesianas como:

$$\left\{ \left[ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

Una variedad de dimensión uno es una curva vista en un espacio de dimensión mayor o igual a uno. Una variedad de dimensión 2 es una superficie, la cual puede existir sólo en

un espacio de dimensión 2 o mayor. Una variedad de dimensión 3 representa entonces un volumen pero que existe en un espacio de dimensión mayor o igual a tres.

La definición formal de una *variedad diferenciable* requiere también conceptos avanzados de geometría diferencial; pero, en términos generales se puede decir que una variedad es diferenciable si en cada punto de la variedad se puede definir una función continua y diferenciable.

La importancia del concepto de variedad en Robótica se debe a que el espacio de configuración de la orientación no es un espacio vectorial sino una variedad diferenciable de dimensión 3.

### 2.3.2. Grupos de Lie

La importancia de los llamados grupos de Lie se debe a que son herramientas matemáticas que tienen aplicación en diversos problemas de mecánica de sólidos y física cuántica. Fueron introducidos por Sophus Lie en 1870 con el fin de estudiar las simetrías de las ecuaciones diferenciales. En esta sección se compilan algunos conceptos elementales que resultan útiles en cinemática y control de robots.

Un *grupo de Lie* es un conjunto  $G$  que satisface las siguientes condiciones:

- $G$  es un grupo.
- $G$  es una variedad (i.e.  $G = V^m \subset \mathbb{R}^n$ ).
- La operación de grupo  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  y el mapeo inverso  $^{-1} : G \rightarrow G$  son funciones continuas y diferenciables (suaves).

La *dimensión* de un grupo de Lie es la dimensión de la variedad correspondiente, es decir, si  $G = V^m \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $\dim\{G\} = m$ . Los ejemplos más comunes de grupos de Lie son los grupos de matrices invertibles de  $n \times n$  (bajo la operación multiplicación), es decir, el grupo lineal general,  $GL(n)$ , definido en (2.5) y todos sus subgrupos, que son, en general, variedades en  $\mathbb{R}^n$ .

En la tabla 2.1 se enlistan algunos grupos de Lie que son de interés en el modelado de cuerpos rígidos.  $U(n)$  es el *grupo unitario* de orden  $n$ , es decir, el conjunto de matrices complejas no singulares  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tales que  $(A^*)^T A = I$ , donde  $(A^*)^T$  es la *matriz adjunta* (transpuesta conjugada) de  $A$ .  $SU(n)$  es el *grupo especial unitario* de matrices unitarias con determinante igual a 1. Obsérvese que  $SU(1)$  no está definido y que  $U(1)$  es el grupo formado por los números complejos de la forma  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ . En la tabla se incluyen también  $S$  y  $S^3$  como ejemplos de grupos de Lie, bajo la multiplicación convencional de números complejos y cuaterniones, respectivamente.

Tabla 2.1: Algunos grupos de Lie multiplicativos.

Grupo ( $G$ )	Dimensión
$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$	$n^2$
$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$	$n^2$
$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* A = I\}$	$n^2$
$SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$	$n^2 - 1$
$S = \{x \in \mathbb{C} : \ x\  = 1\}$	1
$S^3 = \{x \in \mathbb{H} : \ x\  = 1\}$	3

## 2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

El concepto de *estabilidad* juega un papel muy importante en el análisis de sistemas dinámicos, es decir, que son descritos por medio de ecuaciones diferenciales. En el caso de sistemas no lineales, las definiciones de estabilidad son numerosas. En esta sección se presentan algunos conceptos y teoremas básicos de lo que se conoce como *estabilidad en el sentido de Lyapunov*, que se refiere al estudio de las soluciones del sistema dinámico, cuando el *estado inicial* se encuentra cercano a un punto de equilibrio.

Sin embargo, a diferencia de la mayoría de los textos sobre el tema, que consideran ecuaciones diferenciales sobre espacios vectoriales, aquí se considera el caso más general

de ecuaciones diferenciales sobre variedades, es decir, de la forma [20]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \forall t \geq 0, \quad (2.28)$$

con  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times V^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y con condición inicial  $\mathbf{x}(0) \in V^n \subseteq \mathbb{R}^m$ .

### 2.4.1. Variedad invariante

Una variedad  $V^m \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es invariante respecto a (2.28) si

$$\mathbf{x}(0) \in V^m \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in V^m, \forall t \geq 0 \quad (2.29)$$

Es importante verificar la condición (2.29) dados una variedad  $V^m \subset \mathbb{R}^n$  y con un sistema dinámico de la forma (2.28). Para esto se utiliza el siguiente lema:

**Lema 1.** Considérese un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $g(\mathbf{x}) = 0$ , con  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una restricción holonómica.

Defínase el conjunto

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Supóngase que

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0$$

para todo  $\mathbf{x} \in D$  y para todo  $t \geq 0$ . Entonces

$$\mathbf{x}(0) \in D \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in D, \forall t \geq 0.$$

**Prueba.**

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \frac{dg(\mathbf{x})}{dt} = 0.$$

Así que  $g(\mathbf{x})$  debe permanecer constante ( $= 0$ ) para todo  $\mathbf{x} \in D$  y para todo  $t \geq 0$ .



**Ejemplo**

Considérese el oscilador armónico, un sistema autónomo descrito por:

$$f(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.30)$$

Por otra parte, en el caso del círculo unitario  $S$  la restricción holonómica es  $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ , de manera que

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0$$

Así que, por el lema 1, el círculo unitario es invariante respecto al sistema (2.30), es decir, partiendo de cualquier punto  $\mathbf{x}(0) \in S$ , la solución  $\mathbf{x}(t) \in S, \forall t \geq 0$ .

**2.4.2. Equilibrio**

Un punto  $\mathbf{x}^* \in V^n \subseteq \mathbb{R}^m$  es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (2.28) si

$$f(t, \mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0.$$

Una consecuencia directa de la definición de equilibrio es que si la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^* \in V^n \subseteq \mathbb{R}^m$  es un equilibrio entonces

- $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0.$

En general, una ecuación diferencial puede tener más de un equilibrio, inclusive un número infinito de ellos. Sin embargo, también puede ocurrir que una ecuación no posea equilibrio alguno.

**Positividad de funciones**

**Definición.** Una función continua  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $W(\mathbf{0}) = 0$  se dice que es [9]:

- *definida positiva localmente* si  $\exists r > 0 : W(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tal que  $\|\mathbf{x}\| < r$ .
- *definida positiva* si  $W(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Una función  $W(\mathbf{x})$  se dice que es *definida negativa* si  $-W(\mathbf{x})$  es definida positiva y es *semidefinida negativa* si  $-W(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva. Además, si en la definición de positividad la condición  $W(\mathbf{x}) > 0$  se relaja por  $W(\mathbf{x}) \geq 0$ , se dice que la función es *semidefinida positiva (localmente)*.

**Definición.** Una función continua  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $W(\mathbf{x}^*) = 0$ , se dice que es:

- *definida positiva localmente alrededor de  $\mathbf{x}^*$*  si  $\exists r > 0 : W(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$  tal que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < r$ .
- *definida positiva alrededor de  $\mathbf{x}^*$*  si  $W(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ .

Obsérvese que si  $W(\mathbf{x})$  es definida positiva, entonces es definida positiva alrededor del origen.

### 2.4.3. Teoremas de estabilidad

En la formulación de los teoremas se consideran en general sistemas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua que satisface la condición de Lipschitz (unicidad de soluciones) y  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Además  $\mathbf{x}^* \in D$  se considera un equilibrio de (2.31). Nótese que  $D$  puede ser por igual una región de  $\mathbb{R}^n$  o una variedad invariante. El siguiente teorema da condiciones suficientes para estabilidad de un equilibrio en el sentido de Lyapunov.

**Teorema 1.** El equilibrio  $\mathbf{x}^*$  es un equilibrio estable de (2.31) si existe una función continuamente diferenciable  $V(t, \mathbf{x})$ , con  $V : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

- $V(t, \mathbf{x})$  es definida positiva localmente, alrededor de  $\mathbf{x}^*$ .

- $V(t, \mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x})$ , con  $W(\mathbf{x})$  definida positiva, alrededor de  $\mathbf{x}^*$ .
- $\exists r > 0: \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ , para todo  $t \geq 0$  y para todo  $\mathbf{x}$  tal que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < r$ .

El siguiente es un bien conocido teorema sobre estabilidad asintótica de sistemas no autónomos, únicamente se ha extendido para considerar el caso de equilibrios fuera del origen:

**Teorema 2.** Considérese el sistema (2.31) y sea  $\mathbf{x}^*$  un equilibrio del mismo. Sea  $V: \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$W_2(\mathbf{x}) \geq V(t, \mathbf{x}) \geq W_1(\mathbf{x})$$

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x})$$

para todo  $t \geq 0$  y para todo  $\mathbf{x} \in D$ , donde  $W_1(\mathbf{x})$ ,  $W_2(\mathbf{x})$  y  $W_3(\mathbf{x})$  son funciones continuas definidas positivas alrededor de  $\mathbf{x}^*$  en  $D$ . Entonces,  $\mathbf{x}^*$  es un equilibrio asintóticamente estable.

## Capítulo 3

# Números complejos, duales y cuaterniones

En la subsección 1.1.3 se presentaron los números complejos ordinarios y los números duales como casos particulares de los números complejos generalizados. En este capítulo se abordan nuevamente, aunque con más detalle, este tipo de números. Además, se describen también los cuaterniones ordinarios y los cuaterniones duales, que son de importancia en esta tesis.

### 3.1. Números complejos (ordinarios)

El conjunto de números complejos se define como:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Dado un número complejo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , se dice que  $x \in \mathbb{R}$  es la parte real y  $y \in \mathbb{R}$  es la parte imaginaria del número complejo.  $\mathbb{C}$  es un espacio vectorial de dimensión 2, por lo que es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , es decir

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

### 3. Números complejos, duales y cuaterniones

De acuerdo con lo anterior, un número complejo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  se puede escribir también como:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Dados dos números complejos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , con  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$ , entonces se puede comprobar que:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \\ z_1 \times z_2 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (3.1)$$

La operación multiplicación dada en (3.1) define el álgebra de números complejos; se observa que la operación es conmutativa.

Dado un número complejo  $z = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}$ , su complejo conjugado es

$$z^* = x - iy = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Obsérvese que el producto de un número complejo por su conjugado, dado por

$$z \times z^* = z^* \times z = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un número real que corresponde a la norma (o magnitud) al cuadrado del número complejo, es decir:

$$\|z\|^2 = z \times z^* = x^2 + y^2. \quad (3.2)$$

Finalmente, la inversa multiplicativa para cualquier número complejo diferente de cero es:

$$z^{-1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{-1} = \frac{z^*}{\|z\|^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

de modo que  $z \times z^{-1} = z^{-1} \times z = 1$

### 3.1.1. Otras representaciones de los números complejos

En general, un número complejo  $z$  se puede expresar como una combinación lineal de la forma:

$$z = x \cdot \hat{1} + y \cdot \hat{i}$$

donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas del número complejo;  $\hat{1}$  y  $\hat{i}$  son los vectores básicos, que deben de satisfacer los siguientes productos básicos:

$$\hat{1} \times \hat{1} = \hat{1}; \quad \hat{1} \times \hat{i} = \hat{i}; \quad \hat{i} \times \hat{1} = \hat{i}; \quad \hat{i} \times \hat{i} = -\hat{1}, \quad (3.3)$$

los cuales definen completamente el álgebra de los números complejos.

Es claro que cuando se usa la representación rectangular (como parte real e imaginaria,  $z = x + iy$ ) los vectores básicos son  $\hat{1} = 1$  y  $\hat{i} = i$ . En la representación como vectores en  $\mathbb{R}^2$  se usa como operación multiplicación la definida en (3.1) y los vectores básicos son:  $\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  o  $\hat{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Pero, además de las representaciones ya mencionadas, existen otras posibles representaciones de los números complejos, siendo las más utilizadas las siguientes:

a) **Como magnitud y ángulo (forma polar).**

Otra representación común de los números complejos es la llamada forma polar, que parte de describir cualquier  $z \in \mathbb{C}$  como un vector de posición en el plano complejo. Tal vector es caracterizado a través de su magnitud  $\|z\|$  y su ángulo de inclinación con respecto al semieje real positivo, denotado por  $\angle z$ ; por tanto, dado un número complejo  $z = x + iy$  se tiene:

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \angle z = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right).$$

El número complejo  $z \in \mathbb{C}$  se puede escribir entonces como  $\|z\| \angle z$ , donde el símbolo  $\angle$  se usa generalmente en ingeniería como equivalente a la función compleja  $e^{i(\cdot)}$ ; de modo que si  $\theta = \angle z$  entonces  $z = \|z\| e^{i(\theta)} = \|z\| [\cos(\theta) + i \sin(\theta)] = \|z\| \cos(\theta) + i \|z\| \sin(\theta) = x + iy$ . En la figura 3.1 se muestran gráficamente estos parámetros.

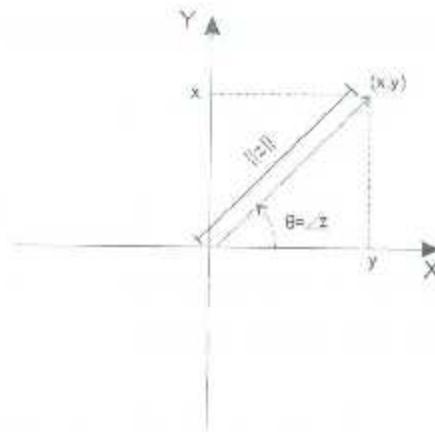


Figura 3.1: Representación polar de un número complejo.

Una ventaja de expresar los números complejos en forma polar es la simplicidad con que se realiza la operación multiplicación. Sean  $z_1$  y  $z_2$  dos números complejos expresados en forma polar y  $z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$  su producto, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} |z_1 \times z_2| &= |z_1| |z_2| \\ \angle z_1 \times z_2 &= \angle z_1 + \angle z_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Es claro que en este caso los vectores básicos son  $\hat{\mathbf{i}} = 1/\underline{0}^\circ$  y  $\hat{\mathbf{j}} = 1/\underline{90}^\circ$ .

b) Como matrices en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Es posible también expresar los números complejos como matrices. La ventaja de esto es que la multiplicación de números complejos se convierte en una multiplicación convencional de matrices. Por ejemplo, considérese el siguiente par de vectores básicos:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que, usando la multiplicación de matrices, el producto (3.1) se satisface. Empleando los anteriores vectores básicos, la correspondiente repre-

sentación matricial de los números complejos sería:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (3.5)$$

Obsérvese que en este caso  $\mathbb{C}$  es una variedad (subespacio vectorial) de dimensión 2, en un espacio vectorial de dimensión 4. Nótese también que el determinante de esta matriz es igual a  $\|\mathbf{z}\|^2$ , de modo que  $\mathbf{z}^{-1}$  se puede obtener usando la definición convencional para matrices.

### 3.1.2. Números complejos unitarios

De particular interés es el subconjunto de los números complejos con norma (magnitud) unitaria, que será denominado aquí como  $\mathbb{C}^{\circ}$ :

$$\mathbb{C}^{\circ} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\|^2 = 1\}.$$

Teniendo en cuenta (3.4) es fácil comprobar que  $\mathbb{C}^{\circ}$  forma un grupo bajo la multiplicación de números complejos, es decir, el producto de dos números complejos unitarios es también un número complejo unitario. Además, de (3.2), se tiene que  $\|z\|^2 = 1$  implica que  $x^2 + y^2 = 1$ . Esta es una restricción holonómica que reduce la dimensión del espacio  $\mathbb{C}$ , lo que significa que  $\mathbb{C}^{\circ}$  es una variedad de dimensión uno en  $\mathbb{R}^2$ .

El que la dimensión de  $\mathbb{C}^{\circ}$  sea uno implica que se necesita sólo una variable (coordenada) real para determinar cualquier número  $z \in \mathbb{C}^{\circ}$ . Esta variable es generalmente  $\theta = \angle z$ . La representación común de un número complejo unitario,  $z(\theta) \in \mathbb{C}^{\circ}$  es:

$$z(\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in U(1),$$

aunque también se pueden usar las parametrizaciones (3.1) y (3.5) para obtener otras parametrizaciones de  $\mathbb{C}^{\circ}$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \in S^1, \quad \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \in SO(2) \subset \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

donde  $S$  y  $SO(2)$ , así como  $U(1)$  son los grupos de Lie de dimensión 1 definidos en la tabla 2.1.



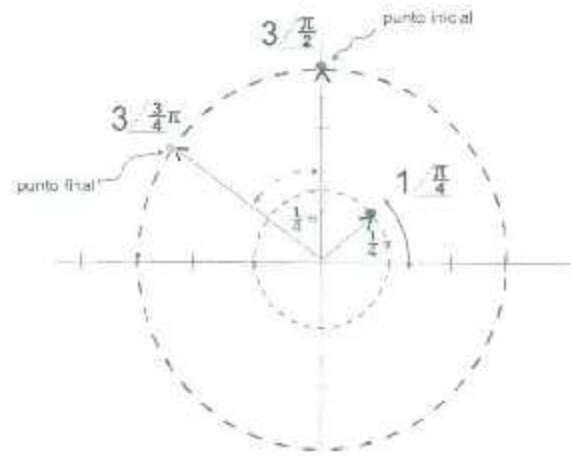


Figura 3.2: Ejemplo del producto de números complejos.

De todo esto se concluye que

$$\mathbb{C}^* \cong U(1) \cong S^1 \cong SO(2),$$

### Aplicación de los números complejos unitarios

Sea un número complejo  $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$  y sea  $z = e^{i\theta}$  un número complejo unitario; al llevar a cabo el producto de ambos se observa lo siguiente:

$$z_2 = z_1 \times z = (|z_1| e^{i\theta_1}) \times (e^{i\theta}) = |z_1| e^{i(\theta_1 + \theta)}$$

lo cual muestra que el número complejo resultante conserva la magnitud del número complejo inicial, sólo que ahora se encuentra girado un ángulo  $\theta$  respecto al número complejo inicial  $z_1$ ; por tanto, se concluye que el producto por un número complejo unitario es útil para representar la rotación de un vector en el plano. La figura 3.2 muestra en forma gráfica el caso en el que  $z_1 = 3 e^{i\pi/2}$  y se le aplica una rotación de  $\theta = \frac{\pi}{4}$  radianes.

## 3.2. Números duales

Como ya se explicó en la sección 1.1.3, el conjunto de los números duales (denotado aquí por  $\mathbb{D}$ ), se define como:

$$\mathbb{D} = \{z = x + \sigma y : x, y \in \mathbb{R}, \sigma^2 = 0\},$$

donde  $x$  es la parte primaria (o real) y  $y$  la parte secundaria (o dual) del número dual. El símbolo  $\sigma$  representa un número no real tal que  $\sigma^2 = 0$ .

Un número dual  $z = x + \sigma y \in \mathbb{D}$  se puede representar también como un vector  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$ . Dados dos números duales:  $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$ , se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{D} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

Además, si  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$  entonces su conjugado es  $\mathbf{z}^* = \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{D}$  y

$$\mathbf{z} \times \mathbf{z}^* = x^2. \quad (3.6)$$

La inversa del número  $z = x + \sigma y \in \mathbb{D}$  es

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{x - \sigma y}{x^2}$$

de modo que  $\mathbf{z} \times \mathbf{z}^{-1} = \mathbf{z}^{-1} \times \mathbf{z} = 1$ .

### 3.2.1. Otras representaciones de los números duales

En general, un número dual se puede expresar como una combinación lineal de la forma:

$$\mathbf{z} = x \cdot \hat{\mathbf{1}} + y \cdot \hat{\sigma}$$

donde  $\hat{\mathbf{1}}$  y  $\hat{\sigma}$  son los vectores básicos del espacio de los números duales. Los siguientes productos son satisfechos por estos vectores básicos:

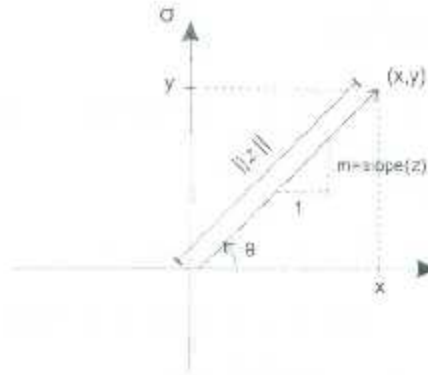


Figura 3.3: Representación polar de un número dual.

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{1}}; \quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\sigma} = \hat{\sigma}; \quad \hat{\sigma} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\sigma}; \quad \hat{\sigma} \times \hat{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

estos productos definen completamente el álgebra de los números duales.

Tal como ocurre con los números complejos, además de las representaciones convencionales como la forma rectangular (con vectores base  $\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  y  $\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ), los números duales también tienen otras formas posibles de representación.

**a) Como abscisa y pendiente (forma polar).**

Otra representación de los números duales es la llamada forma polar, que parte de describir cualquier  $\mathbf{z} = x + \sigma y \in \mathbb{D}$  como un vector de posición en el plano dual. Tal vector es caracterizado a través de su módulo  $\text{mod}(\mathbf{z})$ , que en este caso es igual a la abscisa del extremo del vector, es decir  $\text{mod}(\mathbf{z}) = x$ , y la pendiente del vector, que se supone es obtenida a través de la función  $\text{slope}(\mathbf{z}) = \frac{y}{x}$ . En la figura 3.3 se pueden apreciar estos parámetros. Empleando los parámetros  $x = \text{mod}(\mathbf{z})$  y  $m = \text{slope}(\mathbf{z})$  un número dual  $\mathbf{z} = x + \sigma y$  se puede reescribir como

$$\mathbf{z} = x(1 + \sigma m)$$

Una ventaja de expresar los números duales en forma polar, es la simplicidad con que se realiza la operación multiplicación. Sean  $\mathbf{z}_1 = x_1(1 + \sigma m_1)$  y  $\mathbf{z}_2 = x_2(1 + \sigma m_2)$  dos números complejos expresados en forma polar y  $\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 \in \mathbb{D}$  su producto, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned}\text{mod}(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) &= x_1 x_2 = \text{mod}(\mathbf{z}_1) \text{mod}(\mathbf{z}_2) \\ \text{slope}(\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2) &= m_1 + m_2 = \text{slope}(\mathbf{z}_1) + \text{slope}(\mathbf{z}_2)\end{aligned}\tag{3.8}$$

b) Como matrices en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Es posible también expresar los números duales como matrices. La ventaja de esto es que la multiplicación de números duales se convierte en una multiplicación convencional de matrices. Por ejemplo, considérese el siguiente par de vectores básicos:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que usando la multiplicación de matrices, los productos (3.7) se satisfacen. Empleando los anteriores vectores básicos, la correspondiente representación matricial de los números duales sería:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}\tag{3.9}$$

Obsérvese que en este caso  $\mathbb{D}$  es una variedad de dimensión 2 en un espacio vectorial de dimensión 4. Nótese también que el determinante de esta matriz es igual a  $\text{mod}^2(\mathbf{z}) = x^2$ , de modo que  $\mathbf{z}^{-1}$  se puede obtener usando la definición convencional para matrices.

### 3.2.2. Números duales unitarios

De particular interés es el subconjunto de los números duales unitarios que será denominado aquí como  $\mathbb{D}^c$ .

$$\mathbb{D}^c = \{\mathbf{z} \in \mathbb{D} : \text{mod}^2(\mathbf{z}) = 1\}.$$

Teniendo en cuenta (3.8) es fácil comprobar que  $\mathbb{D}^c$  forma un grupo bajo la multiplicación de números duales, es decir, el producto de dos números duales unitarios da un número dual unitario. Además, de (3.6), se tiene que  $\|\mathbf{z}\|^2 = 1$  implica que  $x^2 = 1$ . Esta es una restricción holonómica que reduce en uno la dimensión de  $\mathbb{D}$ , lo que significa que  $\mathbb{D}^c$  es una

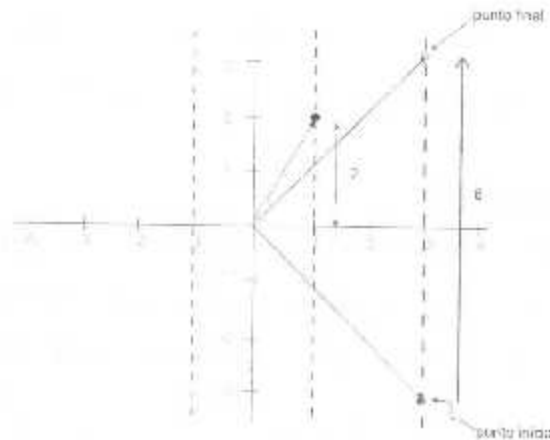


Figura 3.4: Ejemplo del producto de números duales.

variedad de dimensión uno, lo cual implica que se necesita sólo una variable (coordenada) real para determinar cualquier número  $z \in \mathbb{D}^n$ ; esa variable es generalmente la pendiente  $m = \text{slope}(z)$ . En la figura 1.3 se muestra el lugar geométrico de los números duales unitarios: las líneas  $x = 1$  y  $x = -1$ .

#### Aplicación de los números duales unitarios

Sea  $z_1 = x_1[1 + \sigma m_1]$  un número dual y  $z = 1 + \sigma m$  un número dual unitario en su representación polar, al realizar el producto de ambos números se obtiene:

$$z_2 = z_1 \times z = x_1[(1 + \sigma(m_1 + m))]$$

lo cual muestra que el efecto de multiplicar un número dual por un número dual unitario da como resultado un número dual con el mismo módulo (abscisa) que el número original pero trasladado en el eje dual (ordenada) una distancia igual a  $m x_1$ . Se concluye que el producto de un número dual es útil para describir la traslación de un punto en el plano. La figura 3.4 muestra gráficamente el producto de dos números duales, para  $x_1 = 3$ ,  $m_1 = -1$  y  $m = 2$ .

### 3.2.3. Funciones duales

Considérese una función  $f$  que mapea un número real a otro número real (es decir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Supóngase ahora que el argumento de  $f$  reemplaza por un número dual  $z = x + \sigma y$ , entonces el resultado de la función sería también un número dual; la función resultante, denotada por  $\mathbf{f}$  sería una extensión de la  $f$  original, tal que  $\mathbf{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ .

Tal como se explica en [12], toda función de este tipo puede desarrollarse como:

$$\mathbf{f}(x + \sigma y) = f(x) + \sigma y f'(x), \quad (3.10)$$

donde  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ .

En lo sucesivo, por simplicidad, se usará la notación  $\mathbf{f}(z)$ , con  $z$  dual, para referirse a la función  $\mathbf{f}(z)$ . De acuerdo con esto, las siguientes son identidades útiles de funciones duales:

$$\cos(x + \sigma y) = \cos(x) - \sigma y \sin(x) \quad (3.11)$$

$$\sin(x + \sigma y) = \sin(x) + \sigma y \cos(x) \quad (3.12)$$

$$e^{x + \sigma y} = (1 + \sigma y)e^x \quad (3.13)$$

## 3.3. Cuaterniones (ordinarios)

Como ya se explicó, los cuaterniones son una extensión de los números complejos y su álgebra fue propuesta por Sir W. Hamilton en el siglo XIX. El conjunto de los cuaterniones se denota por el símbolo  $\mathbb{H}$  (en honor a Hamilton) y se define como

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{w} = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

los números  $i$ ,  $j$  y  $k$  son no reales y diferentes entre sí, pero los tres al multiplicarse por sí mismos, dan como resultado  $-1$ . Los cuaterniones también se pueden representar como vectores en  $\mathbb{R}^4$ , es decir  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$ , de modo que  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ . Una representación más empleada es la que agrupa los últimos tres elementos del cuaternión

### 3. Números complejos, duales y cuaterniones

$w \in \mathbb{H}$  en un vector  $v \in \mathbb{R}^3$ , es decir  $v = \begin{bmatrix} b & c & d \end{bmatrix}^T$  y

$$w = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4,$$

se dice entonces que un cuaternión tiene una parte escalar (o real) y una parte vectorial (o imaginaria).

Dados dos cuaterniones  $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 & v_1^T \end{bmatrix}^T$  y  $w_2 = \begin{bmatrix} a_2 & v_2^T \end{bmatrix}^T$  se cumplen las siguientes operaciones:

- Adición:

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$$

- Multiplicación:

$$w_1 \otimes w_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - v_1^T v_2 \\ a_1 v_2 + a_2 v_1 + S(v_1) v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \quad (3.14)$$

- Conjugación: Dado un cuaternión  $w = \begin{bmatrix} a & v^T \end{bmatrix}^T$ , su conjugado se representa como:

$$w^* = \begin{bmatrix} a & -v^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{H}$$

- Norma:

$$\|w\|^2 = w \otimes w^* = a^2 + v^T v = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

- Inversa multiplicativa:

$$w^{-1} = \frac{w^*}{\|w\|^2}$$

La inversa se usa para definir la operación división, ya que

$$\frac{w_1}{w_2} = w_1 \otimes w_2^{-1}$$

### 3.3.1. Otras representaciones de los cuaterniones

Los cuaterniones forman un espacio vectorial de dimensión 4. En general, un cuaternión  $w \in \mathbb{H}$  se puede expresar como una combinación lineal de la forma

$$w = a \cdot \hat{1} + b \cdot \hat{i} + c \cdot \hat{j} + d \cdot \hat{k}$$

donde  $\hat{1}$ ,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son los vectores básicos del espacio vectorial de los cuaterniones, que deben de satisfacer los productos básicos indicados en la siguiente tabla:

Tabla 3.1: Productos básicos de los cuaterniones ordinarios

$\otimes$	$\hat{1}$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	$\hat{i}$	$-\hat{1}$	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$\hat{j}$	$-\hat{k}$	$-\hat{1}$	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	$-\hat{1}$

De particular interés son los productos entre los vectores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , que son llamados los *vectores básicos imaginarios* de los cuaterniones, debido a que satisfacen

$$\hat{i} \otimes \hat{i} = \hat{j} \otimes \hat{j} = \hat{k} \otimes \hat{k} = -\hat{1}$$

De la misma manera que los números complejos son una extensión de los números reales, los cuaterniones son una extensión de los números complejos. De hecho, si se descartan los vectores  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  (o cualesquiera dos vectores básicos imaginarios) el álgebra de cuaterniones se reduce al álgebra de complejos. Por eso los cuaterniones son llamados también *números hipercomplejos* (o números complejos de rango 4).

Además de la forma rectangular y la representación como vectores en  $\mathbb{R}^4$ , cuyos vectores básicos son:

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Otras posibles representaciones de los cuaterniones son:



a) Como matrices en  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ .

Existen varios posibles conjuntos de vectores básicos, uno de ellos es:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $i = \sqrt{-1}$ . Se observa que estos vectores básicos satisfacen los productos indicados en la tabla 3.1, usando la operación multiplicación matricial convencional. A partir de los vectores básicos anteriores es posible obtener una representación matricial de un cuaternión:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{2 \times 2} \quad (3.15)$$

Nótese que el determinante de esta matriz es igual a  $\|\mathbf{w}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

b) Como matrices en  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

La representación de los vectores base de los cuaterniones, a través de matrices en  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ , es:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

las cuales también satisfacen los productos de la tabla 3.1. Con estas matrices, se llega a la siguiente representación de un cuaternión

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a & b & -d & -c \\ -b & a & -c & d \\ d & c & a & b \\ c & -d & -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad (3.16)$$

### 3.3.2. Cuaterniones unitarios

Los *cuaterniones unitarios* se definen como el subconjunto de los cuaterniones que tienen norma unitaria, y se denotarán por  $\mathbb{H}^\circ$ , es decir:

$$\mathbb{H}^\circ = \{\mathbf{w} \in \mathbb{H} : \|\mathbf{w}\| = 1\}$$

Se puede demostrar que  $\mathbb{H}^\circ$  forma un grupo bajo la multiplicación de cuaterniones. Además, dado un cuaternión  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T \in \mathbb{H}^\circ$ , se debe satisfacer la restricción holonómica  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , de modo que las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  ya no son independientes. Se tiene que  $\mathbb{H}^\circ$  es una variedad de dimensión 3 y, de hecho,  $\mathbb{H}^\circ$  forma un grupo de Lie de dimensión 3, que es isomórfico a la hipersfera unitaria  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ , es decir  $\mathbb{H}^\circ \cong S^3$ .

En la literatura se les suele denominar parámetros de Euler a los cuatro parámetros que describen un cuaternión unitario. En esta tesis se denotarán estos parámetros como:  $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , y se usará el símbolo  $\xi$  para referirse a ellos en forma compacta, esto es:

$$\xi = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \in S^4 \subset \mathbb{R}^4$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}^T$ . La restricción holonómica queda entonces

$$\eta^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 1 \tag{3.17}$$

Otra forma de representación de un cuaternión unitario es empleando un ángulo  $\theta$  y un vector unitario  $\mathbf{u} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . En tal caso el cuaternión unitario quedaría definido como

$$\begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{u} \end{bmatrix} \in S^3 \tag{3.18}$$

Es fácil comprobar que si  $\eta = \cos(\frac{\theta}{2})$  y  $\boldsymbol{\varepsilon} = \sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{u}$ , la restricción (3.17) se satisface.

#### Aplicación de los cuaterniones unitarios

Hamilton demostró que los cuaterniones unitarios pueden ser usados para describir rotaciones en el espacio, de manera similar a como los números complejos permiten describir rotaciones en el plano  $x - y$ .

Supóngase que se quiere rotar el vector  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$  un ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$  alrededor del vector unitario  $\mathbf{u} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . El resultado sería un vector  $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$  de la misma magnitud que  $\mathbf{v}_1$ .

Para poder realizar esta operación primero se deben obtener los parámetros de Euler  $\xi \in S^3$  correspondientes al ángulo y eje de rotación usando la expresión (3.18). Luego se usa la siguiente fórmula:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \xi \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \otimes \xi^* \quad (3.19)$$

Si  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\eta = \cos(\frac{\pi}{4})$  y  $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}$ , para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , entonces, aplicando (3.19), se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que corresponde al vector original, después de rotarlo un ángulo  $\theta$  alrededor de  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in S^2$  (ver figura 3.3).

### 3.4. Cuaterniones duales

Un cuaternión dual es un vector de cuatro números duales, aunque también puede ser visto como la composición de dos cuaterniones, uno representando la parte primaria y el otro la parte secundaria del cuaternión dual, es decir si  $\chi$  es un cuaternión dual,

$$\chi = \begin{bmatrix} a + \sigma\alpha \\ b + \sigma\beta \\ c + \sigma\gamma \\ d + \sigma\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^4 \equiv \mathbb{H}^2$$

En esta tesis se usarán la letra  $\xi \in \mathbb{H}$  y  $\zeta \in \mathbb{H}$  para referirse a la parte primaria y secundaria del cuaternión dual  $\chi \in \mathbb{D}^4$ .

Si se usa la notación escalar-vector de los cuaterniones, entonces

$$\chi = \begin{bmatrix} a \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2,$$

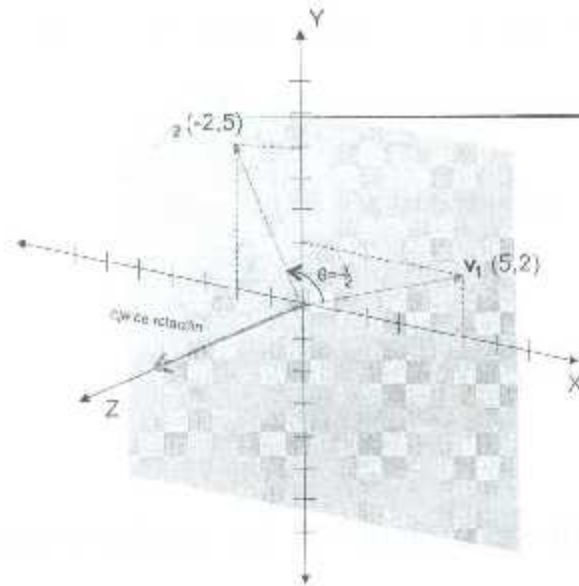


Figura 3.5: Ejemplo del producto de un cuaternión unitario y un vector en  $\mathbb{R}^3$ .

donde  $v = [b \ c \ d]^T$  y  $\nu = [\beta \ \gamma \ \delta]^T$ , de modo que  $\xi = [a \ v^T]^T \in \mathbb{H}$  y  $\zeta = [\alpha \ \nu^T]^T \in \mathbb{H}$

Dados dos cuaterniones duales  $\chi_1 = \xi_1 + \sigma\zeta_1$ ,  $\chi_2 = \xi_2 + \sigma\zeta_2 \in \mathbb{H}^2$  se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &= \xi_1 + \xi_2 + \sigma(\zeta_1 + \zeta_2) \\ \chi_1 \odot \chi_2 &= \xi_1 \otimes \xi_2 + \sigma(\xi_1 \otimes \zeta_2 - \zeta_1 \otimes \xi_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde el símbolo  $\odot$  denota la multiplicación de dos cuaterniones duales, mientras que  $\otimes$  es la multiplicación de cuaterniones ordinarios definida en (3.14).

El conjugado del cuaternión dual  $\xi + \sigma\zeta \in \mathbb{H}^2$  es  $\xi^* + \sigma\zeta^* \in \mathbb{H}^2$ , es decir:

$$\chi^* = \left( \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \nu \end{bmatrix} \right)^* = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}^* + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \nu \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a \\ -v \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ -\nu \end{bmatrix}.$$

El módulo de un cuaternión dual es:

$$\text{mod}(\chi) = \text{sigr}(\chi \odot \chi^*) \sqrt{\chi \odot \chi^*},$$

pero para que el módulo sea real, es necesario que  $\chi \odot \chi^*$  lo sea también, lo cual se cumple si:

$$\xi \otimes \zeta^* + \zeta \otimes \xi^* = 0. \quad (3.21)$$

La inversa de un cuaternión dual  $\chi \in \mathbb{H}^2$  es

$$\chi^{-1} = \frac{\chi^*}{\text{mod}^2(\chi)},$$

lo que permite definir la división de cuaterniones duales:

$$\frac{\chi_1}{\chi_2} = \chi_1 \odot \chi_2^{-1}.$$

### 3.4.1. Otras representaciones de los cuaterniones duales

Los cuaterniones duales forman un espacio vectorial de dimensión 8. En general, un cuaternión dual se puede expresar como una combinación lineal de la forma

$$\chi = a\hat{1} + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k} + \sigma(\alpha\hat{1} + \beta\hat{i} + \gamma\hat{j} + \delta\hat{k})$$

donde  $\hat{1}$ ,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  son los vectores básicos del espacio vectorial de los cuaterniones. En la tabla 3.2 se muestran los 64 productos básicos que definen el álgebra de cuaterniones duales.

Tabla 3.2: Productos básicos de los cuaterniones duales

$\odot$	$\hat{1}$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	$\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{i}$	$\sigma\hat{j}$	$\sigma\hat{k}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$	$\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{i}$	$\sigma\hat{j}$	$\sigma\hat{k}$
$\hat{i}$	$\hat{i}$	$-\hat{1}$	$\hat{k}$	$-\hat{j}$	$\sigma\hat{i}$	$-\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{k}$	$-\sigma\hat{j}$
$\hat{j}$	$\hat{j}$	$-\hat{k}$	$-\hat{1}$	$\hat{i}$	$\sigma\hat{j}$	$-\sigma\hat{k}$	$-\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	$-\hat{1}$	$\sigma\hat{k}$	$\sigma\hat{j}$	$-\sigma\hat{i}$	$-\sigma\hat{1}$
$\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{i}$	$\sigma\hat{j}$	$\sigma\hat{k}$	0	0	0	0
$\sigma\hat{i}$	$\sigma\hat{i}$	$-\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{k}$	$-\sigma\hat{j}$	0	0	0	0
$\sigma\hat{j}$	$\sigma\hat{j}$	$-\sigma\hat{k}$	$-\sigma\hat{1}$	$\sigma\hat{i}$	0	0	0	0
$\sigma\hat{k}$	$\sigma\hat{k}$	$\sigma\hat{j}$	$-\sigma\hat{i}$	$-\sigma\hat{1}$	0	0	0	0

Los cuaterniones duales son una extensión tanto de los cuaterniones como de los números duales. De hecho, si se descartan los vectores básicos  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , el álgebra de

### 3. Números complejos, duales y cuaterniones

cuaterniones se reduce al álgebra de duales; y si se descartan los vectores básicos que tienen  $\sigma$ , se obtiene el álgebra de cuaterniones.

Además de la forma rectangular, un cuaternión dual se puede representar también:

**a) Como un vector de números duales.**

Dado que un cuaternión dual se puede escribir como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a + \sigma\alpha \\ b + \sigma\beta \\ c + \sigma\gamma \\ d + \sigma\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^4$$

los ocho vectores básicos se definen de forma única como [18]:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \sigma\tilde{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \sigma\hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad \sigma\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma \end{bmatrix}$$

**b) Como una matriz compleja dual  $(\mathbb{C} \times \mathbb{D})^{2 \times 2}$**

Esta representación se obtiene “dualizando” la representación matricial de un cuaternión ordinario, dada por [4]:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (a - \sigma\alpha) + i(b + \sigma\beta) & (c + \sigma\gamma) + i(d + \sigma\delta) \\ -(c + \sigma\gamma) - i(d + \sigma\delta) & (a + \sigma\alpha) - i(b + \sigma\beta) \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2 \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{D})^{2 \times 2}. \quad (3.22)$$

Nótese que el determinante de esta matriz es igual a  $\mathbf{x} \odot \mathbf{x}^* = a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + 2\sigma[a\alpha - b\beta + c\gamma + d\delta]$ .

d) Como una matriz de números duales:  $\mathbb{D}^{4 \times 4}$

En este caso se "dualiza" la representación matricial del cuaternión ordinario dado por (3.23)

$$\chi = \begin{bmatrix} a + \sigma\alpha & b + \sigma\beta & -d - \sigma\delta & -c - \sigma\gamma \\ -b - \sigma\beta & a + \sigma\alpha & -c - \sigma\gamma & d + \sigma\delta \\ d + \sigma\delta & c + \sigma\gamma & a + \sigma\alpha & b + \sigma\beta \\ c + \sigma\gamma & -d - \sigma\delta & -b - \sigma\beta & a + \sigma\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{D}^{4 \times 4}, \quad (3.23)$$

c) Como matrices en  $\mathbb{R}^{8 \times 8}$ .

Es posible obtener la representación matricial en  $\mathbb{R}^{8 \times 8}$  de un cuaternión dual sustituyendo en (3.9) la representación matricial en  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$  de un cuaternión ordinario, dada por (3.23). El resultado es:

$$\tilde{\chi} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

donde  $A$  y  $B$  son la representación matricial en  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$  de los cuaterniones primario y secundario del cuaternión dual, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} a & b & -d & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & -c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & c & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & -d & -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\delta & -\gamma & a & b & -d & -c \\ -\beta & \alpha & -\gamma & \delta & -b & a & -c & d \\ \delta & \gamma & \alpha & \beta & d & c & a & b \\ \gamma & -\delta & -\beta & \alpha & c & -d & -b & a \end{bmatrix}$$

### 3.4.2. Cuaterniones duales unitarios

Los *cuaterniones duales unitarios* se definen como el subconjunto de los cuaterniones duales que tienen norma unitaria y se denotan aquí por  $\tilde{\mathbb{H}}^u$ , es decir:

$$\tilde{\mathbb{H}}^u = \{\chi \in \mathbb{H}^2 : \chi \odot \chi^* = 1\}$$

### 3. Números complejos, duales y cuaterniones

Se puede demostrar que  $\tilde{\mathbb{H}}^\circ$  forma un grupo bajo la multiplicación de cuaterniones duales. Además, dado un cuaternión  $\chi = \begin{bmatrix} a \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} \in \tilde{\mathbb{H}}^\circ$ , se deben satisfacer las restricciones holonómicas:

$$a^2 + \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1 \quad (3.24)$$

y

$$a\alpha + \mathbf{v}^T \boldsymbol{\nu} = 0. \quad (3.25)$$

de modo que los ocho elementos del cuaternión dual ya no son independientes; se requieren solamente seis variables (coordenadas) independientes para describir en forma única cada punto en  $\tilde{\mathbb{E}}^\circ$ . Así que  $\tilde{\mathbb{H}}^\circ$  forma un grupo de Lie.

#### Aplicación de los cuaterniones duales unitarios

Los cuaterniones duales unitarios permiten rotar y trasladar vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Supóngase que el vector  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  se quiere rotar alrededor de  $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 1]^T$  un ángulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y luego trasladarlo al punto  $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 4]^T$  (figura 3.6). Para efectuar tal movimiento se emplea la siguiente fórmula [4]:

$$\mathbf{v}_2 = \chi \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \chi^*. \quad (3.26)$$

Empleando  $\chi = \xi + \frac{1}{2}\sigma \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \otimes \xi \right)$  se obtiene  $\chi = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ , que

sustituyendo en (3.26) da



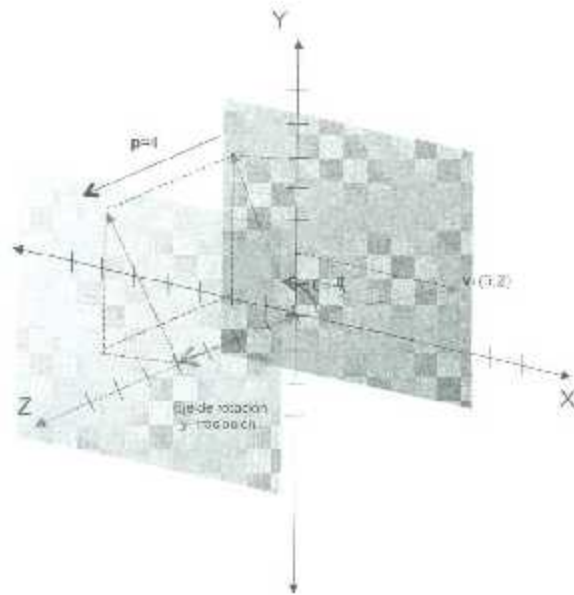


Figura 3.6: Ejemplo del producto de un cuaternión dual unitario y un vector.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_2 &= \left( \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right) \odot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \odot \left( \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right)^* \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Capítulo 4

# Cinemática de cuerpos rígidos

En este capítulo se revisarán primero las parametrizaciones más comunes de la orientación. Luego, tras presentar las coordenadas de Plücker y el principio de transferencia, se verá cómo este principio resulta útil para generar nuevas parametrizaciones de la postura que incluyen no sólo la parte de orientación sino también la parte de la posición.

### 4.1. Parametrizaciones tradicionales de la postura

Considérese un cuerpo rígido que se mueve libremente en el espacio (figura 4.1), el cuerpo tiene un marco coordenado  $\Sigma_b(X_b, Y_b, Z_b)$  que se mueve junto con él y además existe un marco de referencia fijo (inercial)  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$ . Para especificar la posición del cuerpo rígido con respecto al marco inercial, se usa un vector  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  que va del origen de  $\Sigma_0$  al origen de  $\Sigma_b$ . Para la orientación  $\phi \in V^3 \subseteq \mathbb{R}^m$ , donde  $m \geq 3$  indica el número de parámetros usados para describir la variedad de orientación.

Si  $\mathbf{x}$  representa la postura del cuerpo rígido, entonces se puede escribir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \times V^3 \subseteq \mathbb{R}^{3+m}.$$

A continuación se presentan las parametrizaciones más comunes usadas para describir la orientación.

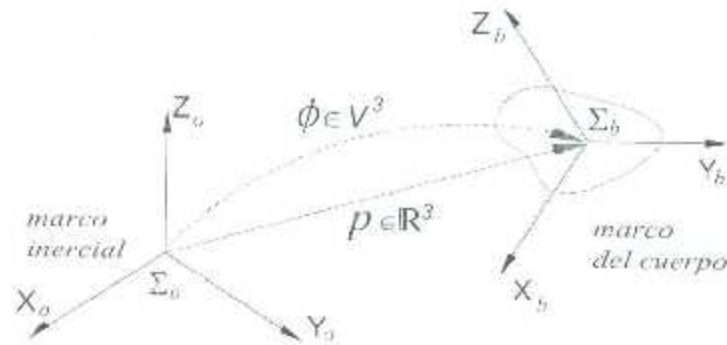


Figura 4.1: Posición y orientación de un cuerpo rígido

#### 4.1.1. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler son tres ángulos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  que indican rotaciones sucesivas alrededor de los ejes coordenados del marco  $\Sigma_b$ , necesarios para hacer que  $\Sigma_0$  coincida con  $\Sigma_b$ . Existen doce posibles sucesiones de rotaciones (también llamadas convenciones) de ángulos de Euler (e.g. XYZ, XYX, YXZ). Si se especifica la convención, entonces la orientación queda definida por:

$$\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

por lo que se trata de una parametrización mínima (que tiene el mínimo número de parámetros); sin embargo, cualquier parametrización mínima de una variedad presenta configuraciones singulares; en este caso significa que una misma orientación puede ser obtenida usando diferentes valores de los ángulos de Euler.

#### 4.1.2. Matrices de rotación

Las matrices de rotación son el método de representación de la orientación más extendido en la actualidad debido a la simplicidad del álgebra de matrices. Las matrices de rotación pertenecen al grupo especial ortogonal de matrices de  $3 \times 3$ ,  $SO(3)$ . Este grupo también conocido como grupo de rotación en  $\mathbb{R}^3$ , describe la orientación relativa entre dos marcos coordenados con origen común en el espacio tridimensional.

Las matrices de rotación son conocidas también como matrices de cosenos directores porque sus nueve elementos son los cosenos de los ángulos directores (o cosenos directores) de cada uno de los ejes del marco  $\Sigma_b$  con respecto al marco  $\Sigma_0$ . Cabe recordar que los ángulos directores de un vector  $\mathbf{p}$  que pasa por el origen de un marco  $\Sigma_{X,Y,Z}$  son los ángulos que forma el vector con cada uno de los ejes coordenados. Si se les llama  $\psi_{v_x}$ ,  $\psi_{v_y}$  y  $\psi_{v_z}$  a los ángulos directores entre el vector  $\mathbf{v}$  y los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente, entonces los tres cosenos directores de  $\mathbf{v}$  son  $\cos(\psi_{v_x})$ ,  $\cos(\psi_{v_y})$  y  $\cos(\psi_{v_z})$  y se puede comprobar que satisfacen

$$\cos^2(\psi_{v_x}) + \cos^2(\psi_{v_y}) + \cos^2(\psi_{v_z}) = 1$$

Siguiendo esta notación, una matriz de rotación  ${}^0R_b$  que da la orientación del marco  $\Sigma_b$  respecto a  $\Sigma_0$  sería

$${}^0R_b = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{x_0x_b}) & \cos(\psi_{y_0x_b}) & \cos(\psi_{z_0x_b}) \\ \cos(\psi_{x_0y_b}) & \cos(\psi_{y_0y_b}) & \cos(\psi_{z_0y_b}) \\ \cos(\psi_{x_0z_b}) & \cos(\psi_{y_0z_b}) & \cos(\psi_{z_0z_b}) \end{bmatrix} \in \text{SO}(3)$$

y se observa que la transpuesta de  ${}^0R_b$  corresponde a la matriz de rotación del marco  $\Sigma_0$  respecto al marco  $\Sigma_b$ , es decir

$${}^bR_0 = ({}^0R_b)^T.$$

Debido a que sólo se necesitan 3 variables independientes para definir la orientación, entonces deben existir seis restricciones holonómicas entre los nueve elementos de una matriz  $R \in \text{SO}(3)$ . Si  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in \mathbb{R}^3$  son las tres columnas de  $R$ , es decir  $R = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \in \text{SO}(3)$  entonces las seis restricciones (conocidas como restricciones de ortogonalidad) son:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 &= 1; & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 &= 0 \\ \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 &= 1; & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_3 &= 0 \\ \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_3 &= 1; & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si se hace uso de la notación propuesta en [21], las tres columnas de la matriz de rotación se pueden apilar en un vector columna:

$$\phi(R) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{V}^3 \subset \mathbb{R}^9 \tag{4.2}$$

el cual es más adecuado para aplicaciones de control.

Las matrices de rotación alrededor de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  de un marco coordenado, se conocen como matrices de rotación elementales y son

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde la variable  $\theta$  corresponde al ángulo de la rotación y el subíndice indica el eje del marco sobre el cual se realiza la rotación correspondiente.

Al describir la postura usando matrices de rotación, se dice que se trabaja con el grupo especial euclidiano  $SE(3) \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3)$

### 4.1.3. Parámetros de Euler

Los parámetros de Euler son cuaterniones  $[\eta \ \boldsymbol{\varepsilon}^T]^T \in \mathbb{H}$  que satisfacen la siguiente restricción:

$$\eta^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 1, \quad (4.3)$$

por lo que son cuaterniones unitarios y pertenecen a la hipersfera de dimensión 3,  $S^3$ . Los parámetros de Euler satisfacen las siguientes relaciones:

$$\eta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{u} \in S^2$  es un vector unitario en la dirección en la cual debe girar el marco  $\Sigma_0$  un ángulo  $\theta$  para que coincida con  $\Sigma_b$ , realizando una sola rotación. Dados los parámetros de

Euler  $\begin{bmatrix} \eta & \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix}^T \in S^3$  la matriz de rotación correspondiente se obtiene usando la siguiente expresión:

$$R(\eta, \boldsymbol{\varepsilon}) = (\eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})I + 2\eta S(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T$$

y, obsérvese que la matriz de rotación obtenida con los parámetros  $\begin{bmatrix} -\eta & -\boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix}^T \in S^3$  es exactamente la misma que la obtenida con  $\begin{bmatrix} \eta & \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix}^T \in S^3$ . Esto significa que dos cuaterniones diferentes dan como resultado la misma orientación.

$$\pm \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \in S^3 \Leftrightarrow R(\eta, \boldsymbol{\varepsilon}) \in SO(3)$$

Un hecho importante es que la multiplicación de parámetros de Euler es equivalente a la multiplicación de matrices de rotación. Si  $\pm \boldsymbol{\xi}_1, \pm \boldsymbol{\xi}_2 \in S^3$  son los parámetros de Euler correspondientes a las matrices de rotación  $R_1$  y  $R_2 \in SO(3)$ , respectivamente, entonces las siguientes relaciones se satisfacen:

$$R_1 R_2 \Leftrightarrow \pm \boldsymbol{\xi}_1 \otimes \boldsymbol{\xi}_2 \quad \text{y} \quad (4.5)$$

$$R_1 \mathbf{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi}_1 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{\xi}_1^* \quad (4.6)$$

Cuando se hace uso de esta representación de la orientación para describir la postura de un cuerpo rígido, es decir  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & \eta & \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \times S^3 \subset \mathbb{R}^7$ , se dice que se trabaja en *espacio de tarea* [27].

## 4.2. Coordenadas de Plücker y el principio de transferencia

Para localizar una recta en el espacio se necesitan cuatro coordenadas independientes. Existen diferentes parametrizaciones de la postura de una recta, una de ellas fue propuesta por Plücker [22] y consiste en especificar dos vectores: un vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección de la recta y un vector de posición  $\mathbf{p}$  del origen del marco de referencia a un punto de la recta. En la figura 4.2 se muestra una recta y los dos vectores que la caracterizan.

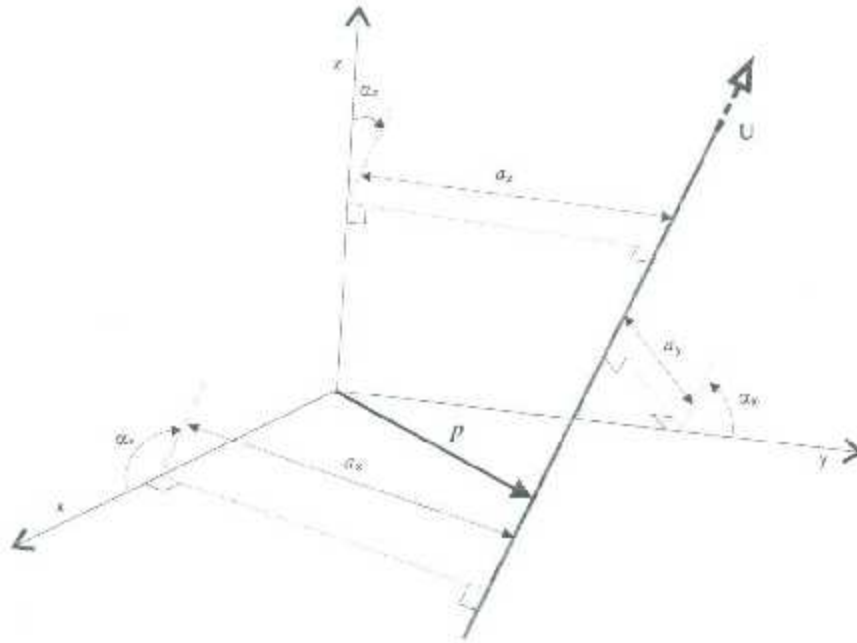


Figura 4.2: Parámetros de una recta en el espacio.

Las coordenadas de Plücker están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ S(\mathbf{p})\mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

y se encuentran sujetas a las siguientes restricciones:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \quad , \quad \mathbf{u}^T S(\mathbf{p})\mathbf{u} = 0.$$

Ahora bien, dado que  $\mathbf{u}$  es un vector unitario sus componentes son los cosenos de los ángulos directores  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  y  $\alpha_z$  mostrados en la figura 4.2, es decir:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

y por lo tanto:

$$S(\mathbf{p})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} p_y \cos(\alpha_z) - p_z \cos(\alpha_y) \\ p_z \cos(\alpha_x) - p_x \cos(\alpha_z) \\ p_x \cos(\alpha_y) - p_y \cos(\alpha_x) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

donde  $p_x, p_y$  y  $p_z$  son las componentes de  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ .

En la figura 4.2 se muestran también los segmentos  $a_x, a_y$  y  $a_z$  que indican la distancia mínima entre la recta y los ejes X, Y y Z, respectivamente. De la misma figura, y de la definición del producto cruz de vectores dada en (2.19), es fácil comprobar que los vectores unitarios en dirección de los segmentos  $a_x, a_y$  y  $a_z$  son, respectivamente:

$$\hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)}; \quad \hat{\mathbf{a}}_y = \frac{\hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)}; \quad \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)}$$

Es importante señalar que estos vectores indican la dirección de la normal común a la recta dada por  $\mathbf{u}$  y cada uno de los ejes del marco. Y como la distancia entre dos rectas es igual a la proyección de cualquier vector que vaya de una recta a la otra en la dirección de la normal común a ambas rectas, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} a_x &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_x = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{i}})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)} = -\frac{\hat{\mathbf{i}}^T S(\mathbf{p})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_x)} = -\frac{p_y \cos(\alpha_z) - p_z \cos(\alpha_y)}{\text{sen}(\alpha_x)} \\ a_y &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_y = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{j}})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)} = -\frac{\hat{\mathbf{j}}^T S(\mathbf{p})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_y)} = -\frac{p_z \cos(\alpha_x) - p_x \cos(\alpha_z)}{\text{sen}(\alpha_y)} \\ a_z &= \mathbf{p}^T \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\mathbf{p}^T S(\hat{\mathbf{k}})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)} = -\frac{\hat{\mathbf{k}}^T S(\mathbf{p})\mathbf{u}}{\text{sen}(\alpha_z)} = -\frac{p_x \cos(\alpha_y) - p_y \cos(\alpha_x)}{\text{sen}(\alpha_z)} \end{aligned}$$

Así que

$$S(\mathbf{p})\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} a_x \text{sen}(\alpha_x) \\ a_y \text{sen}(\alpha_y) \\ a_z \text{sen}(\alpha_z) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

En [22] se explica cómo las coordenadas de Plücker se pueden expresar con un vector de tres números duales  $\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p})\mathbf{u} \in S_D^2 \subset \mathbb{D}^3$ , donde, en general,

$$S_D^n = \{\mathbf{u} + \sigma \mathbf{v} \in \mathbb{D}^{n+1} : \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1, \mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0\}$$

se denomina aquí una hipersfera unitaria dual, que es una variedad de dimensión  $2n$ .

De (4.7) y (4.9) se tiene que

$$\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) + \sigma a_x \text{sen}(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) - \sigma a_y \text{sen}(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) - \sigma a_z \text{sen}(\alpha_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x + \sigma a_x) \\ \cos(\alpha_y + \sigma a_y) \\ \cos(\alpha_z + \sigma a_z) \end{bmatrix}$$



donde se ha usado la definición de una función dual (ver sección 3.2.3).

Por otro lado, si se define  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z]^T \in \mathbb{S}^2$ ,  $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T \in \mathbb{R}^3$  y la función coseno de un vector  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  como  $\cos(\mathbf{v}) = [\cos(v_x) \ \cos(v_y) \ \cos(v_z)]^T$ , entonces es posible escribir

$$\mathbf{u} + \sigma S(\mathbf{p})\mathbf{u} = [I + \sigma S(\mathbf{p})]\mathbf{u} = \cos(\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a}). \quad (4.10)$$

El término  $\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a}$  se conoce como vector de ángulos directores duales. Nótese que la parte primaria de  $\cos(\boldsymbol{\alpha} + \sigma \mathbf{a})$  es el vector de cosenos directores de  $\mathbf{u}$  y por lo tanto definen la dirección de la recta; la parte secundaria determina el desplazamiento de la recta con respecto al origen (si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  entonces la recta pasa por el origen).

Lo que se acaba de hacer es comprobar que la parametrización de la postura de una recta que no pasa por el origen, dada por las coordenadas de Plücker, puede verse como una extensión de la parametrización de una recta que pasa por el origen dada por los cosenos directores. Esto se logra simplemente “dualizando” los ángulos directores, de modo que

$$\alpha_x \longrightarrow \alpha_x + \sigma a_x$$

$$\alpha_y \longrightarrow \alpha_y + \sigma a_y$$

$$\alpha_z \longrightarrow \alpha_z + \sigma a_z$$

En otras palabras, si un vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección de una recta que pasa por el origen, es parametrizado usando

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

entonces un vector unitario en la dirección de una recta que no pasa por el origen es parametrizado por

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_x + \sigma a_x) \\ \cos(\alpha_y + \sigma a_y) \\ \cos(\alpha_z + \sigma a_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_x) \\ \cos(\alpha_y) \\ \cos(\alpha_z) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} a_x \sin(\alpha_x) \\ a_y \sin(\alpha_y) \\ a_z \sin(\alpha_z) \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_D^2 \subset \mathbb{D}^3,$$

con las siguientes restricciones holonómicas:

$$\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1$$

$$a_x \cos(\alpha_x) \sin(\alpha_x) + a_y \cos(\alpha_y) \sin(\alpha_y) + a_z \cos(\alpha_z) \sin(\alpha_z) = 0.$$

Todo lo anterior es una aplicación simple del llamado principio de transferencia que fue establecido inicialmente por Kotelnikov en 1895. En esta tesis se considera la formulación que se encuentra en [22], y se explica a continuación.

En primer lugar, se menciona que: “geométricamente, la relación entre una cantidad real y su correspondiente cantidad dual es esencialmente la relación entre la geometría de líneas que se intersectan (geometría esférica) y la geometría de las líneas alabeadas (geometría espacial).”

Cabe recordar que las líneas (rectas) alabeadas (“skew lines” en inglés) son las rectas que no son paralelas ni se intersectan en el espacio; esto equivale a decir que no pertenecen al mismo plano.

La geometría esférica tiene que ver con el conjunto de líneas rectas que se intersectan en el espacio. La geometría espacial tiene que ver con la situación más general de líneas alabeadas o no intersectantes en el espacio. Ahora bien, para rotaciones alrededor de un punto fijo,  $O$ , todos los ejes de rotación se intersectan en  $O$  y la geometría es esférica; mientras que para desplazamientos en tornillo, es decir, rotaciones y traslaciones sobre líneas alabeadas, la geometría es espacial.

La relación entre la geometría esférica y la geometría espacial está dada por el Principio de Transferencia, el cual establece lo siguiente [22].

“todas las leyes y fórmulas relacionadas a una configuración esférica (que involucra líneas intersectantes y ángulos reales) son también válidas cuando se aplica a una configuración espacial equivalente de líneas alabeadas, si cada ángulo  $\alpha$ , en la formulación esférica se reemplaza por el correspondiente ángulo dual  $\alpha + \nu\alpha$ .”

El principio de transferencia y el álgebra de números duales son así empleados para obtener parametrizaciones de la postura (posición y orientación) de un cuerpo rígido a

partir de parametrizaciones de sólo la orientación. En la siguiente sección se muestran dos ejemplos de esto.

### 4.3. Parametrizaciones con números duales

#### 4.3.1. Matrices especiales ortogonales duales

Considérese nuevamente la figura 4.1 y supóngase que se usa una matriz de rotación para describir la orientación. Como se ha dicho, cada columna de la matriz de rotación corresponda al vector formado por los cosenos directores de cada uno de los ejes del marco  $\Sigma_b$ , con respecto a marco  $\Sigma_0$ . Es decir, si  $\lambda, \mu$  y  $\nu \in \mathbb{R}^3$  son los vectores de ángulos directores de los ejes  $X_b, Y_b$  y  $Z_b$ , entonces la matriz de rotación  $R$ , que da la orientación del marco  $\Sigma_b$  con respecto al marco  $\Sigma_0$  es:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\lambda) & \cos(\mu) & \cos(\nu) \end{bmatrix} \in \text{SO}(3).$$

De acuerdo al principio de transferencia, la matriz resultante al "dualizar" esta matriz de rotación es:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda + \sigma l) & \cos(\mu + \sigma m) & \cos(\nu + \sigma n) \end{bmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{D}),$$

donde  $l, m$  y  $n$  son vectores que van del origen del marco  $\Sigma_0$  a los ejes  $X_b, Y_b$  y  $Z_b$ , respectivamente. Aquí se denomina  $\text{SO}(3, \mathbb{D})$  al conjunto de matrices especiales ortogonales con elementos duales (o simplemente *matrices especiales ortogonales duales*) que se define como:

$$\text{SO}(3, \mathbb{D}) = \{ \bar{R} = R + \sigma R' \in \mathbb{D}^{3 \times 3} : \bar{R}^T \bar{R} = I, \det(\bar{R}) = 1 \}$$

Y debe verificarse que  $\text{SO}(3, \mathbb{D})$  es una variedad de dimensión 6 en  $\mathbb{D}^{3 \times 3}$ . Si  $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}^T$  y  $R' = \begin{bmatrix} r_4 & r_5 & r_6 \end{bmatrix}^T$ , entonces se deben cumplir las seis restricciones de ortogonalidad (4.1), más las siguientes seis restricciones:

$$r_1^T r_4 = 0; \quad r_1^T r_5 = 0 \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_6 &= 0; & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_5 &= 0 \\ \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_6 &= 0; & \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_5 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, empleando la expresión (4.10), es posible reacomodar la ecuación anterior quedando:

$$\bar{R} = [I + \sigma S(\mathbf{p})] \begin{bmatrix} \cos(\lambda) & \cos(\mu) & \cos(\nu) \end{bmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{D}),$$

donde  $\mathbf{p}$  es el vector de posición que va del origen del marco  $\Sigma_0$  al origen del marco  $\Sigma_b$ ; por lo tanto

$$\bar{R} = [I + \sigma S(\mathbf{p})] R \in \text{SO}(3, \mathbb{D}). \quad (4.12)$$

### 4.3.2. Cuaterniones duales unitarios

En la sección se definen los cuaterniones duales unitarios, que tienen la forma

$$\chi = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \nu \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \in S_D^3 \subset \mathbb{D}^4$$

de modo que se deben satisfacer las restricciones

$$\eta^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 1 \quad \text{y} \quad \eta\nu + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{v} = 0 \quad (4.13)$$

la parametrización de los cuaterniones duales unitarios se puede obtener también “dualizando” las expresiones (4.4) es decir

$$\bar{\nu} = \cos\left(\frac{\bar{\theta} + \sigma d}{2}\right) \quad \bar{\mathbf{v}} = \text{sen}\left(\frac{\bar{\theta} + \sigma d}{2}\right) \bar{\mathbf{u}}, \quad (4.14)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}$  es un vector unitario desplazado del origen (es decir, un vector dual unitario) y  $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon d$ , siendo  $\theta$  el ángulo girado alrededor de  $\bar{\mathbf{u}}$  y  $d$  la distancia recorrida en la dirección del mismo eje.

Otra forma de representar un cuaternión dual es la siguiente:

$$\chi = \boldsymbol{\xi} + \varepsilon \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{\xi}, \quad (4.15)$$

donde  $\boldsymbol{\xi} \in S^3$  son los parámetros de Euler que dan la orientación y  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  es el vector que da la posición.

Debido a que un cuerpo en movimiento general requiere de seis coordenadas generalizadas para ser definido, un cuaternión dual unitario no es una representación mínima, pero sí es la más compacta y eficiente representación existente hasta el momento [23].

## 4.4. Cinemática diferencial

Como se explicó en la sección 1.2, la cinemática diferencial proporciona la relación entre el vector de variables articulares  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  y la velocidad lineal y angular de un cuerpo rígido (el elemento de interés del robot); esta relación para el espacio tridimensional queda definida por el jacobiano geométrico:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}.$$

En las subsecciones siguientes se presentan las expresiones del jacobiano de representación  $\mathbf{T}_\phi$  que corresponden a las parametrizaciones de la postura mencionadas en las secciones anteriores.

### 4.4.1. Con ángulos de Euler

Cuando se usan ángulos de Euler para describir la orientación, el jacobiano de representación depende de la secuencia de rotaciones (convención de ángulos de Euler) empleada. Suponga que la orientación de un cuerpo rígido está variando con el tiempo y queda descrita por medio de los ángulos de Euler  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  y  $\gamma(t)$ . Los ejes de rotación correspondientes a cada uno de éstos ángulos de Euler se denotan por  $\mathbf{u}_\alpha$ ,  $\mathbf{u}_\beta$ , y  $\mathbf{u}_\gamma$ , respectivamente. Entonces la velocidad angular del cuerpo en movimiento puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\mathbf{u}_\alpha + \dot{\beta}\mathbf{u}_\beta + \dot{\gamma}\mathbf{u}_\gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha & \mathbf{u}_\beta & \mathbf{u}_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

de manera que

$$\mathbf{T}_\phi(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_\alpha & \boldsymbol{\omega}_\beta & \boldsymbol{\omega}_\gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

las expresiones de  $\omega_\alpha, \omega_\beta$  y  $\omega_\gamma$  en términos de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  dependen de la convención de ángulos de Euler utilizada. Por ejemplo, si se usó la convención  $ZYZ$ , entonces:

$$T_\beta(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\alpha) & \text{sen}(\beta)\text{cos}(\alpha) \\ 0 & \text{cos}(\alpha) & \text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha) \\ 1 & 0 & \text{cos}(\beta) \end{bmatrix}$$

Y se observa que esta matriz es singular cuando  $\beta = n\pi$ . En [39] se encuentran las matrices  $T_\beta$  para las 12 convenciones de ángulos de Euler, todas ellas presentan singularidades para alguna configuración.

El jacobiano de representación es entonces

$$T_A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_\beta(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix}.$$

#### 4.4.2. Con matrices de rotación

Si la orientación de un cuerpo rígido es descrita por una matriz de rotación  $R \in \text{SO}(3)$ , entonces la relación entre  $\omega$  y  $\dot{R}$  está dada por:

$$\dot{R} = S(\omega)R. \quad (4.16)$$

Si  $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$  y  $\dot{R} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & \dot{r}_3 \end{bmatrix}$ , entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{bmatrix} = S(\omega) \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(r_1) \\ S(r_2) \\ S(r_3) \end{bmatrix} \omega, \quad (4.17)$$

donde se ha usado la propiedad (2.13).

Obsérvese que

$$\begin{bmatrix} S(r_1) & S(r_2) & S(r_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(r_1) \\ S(r_2) \\ S(r_3) \end{bmatrix} = -2I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

así que es posible despejar  $\omega$  de la ecuación (4.17) obteniendo:

$$\omega = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(r_1) & S(r_2) & S(r_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{bmatrix}.$$

De modo que si se considera el vector de orientación  $\phi$  definido en 4.2, está claro que el jacobiano de representación es:

$$T_A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_\phi(R) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$$

donde

$$T_\phi(R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(r_1) & S(r_1) & S(r_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Note que  $T_\phi(R)$  no posee singularidades de representación, esto es porque la parametrización dada por  $SO(3)$  describe en forma global la variedad de orientación.

#### 4.4.3. Con parámetros de Euler

La derivada de los parámetros de Euler está dada por la llamada regla de propagación del cuaternión [17]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} E(\eta, \varepsilon) \omega \quad (4.18)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular y

$$E(\eta, \varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon^T \\ \eta I - S(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}. \quad (4.19)$$

Usando la propiedad (2.17) y la restricción de la norma unitaria (4.3), es fácil demostrar que

$$E(\eta, \varepsilon)^T E(\eta, \varepsilon) = I, \quad (4.20)$$

de manera que se puede despejar  $\omega$  de (4.18), obteniéndose:

$$\omega = 2E(\eta, \varepsilon)^T \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix}; \quad (4.21)$$

donde el jacobiano de representación en este caso es entonces

$$T_A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T_\phi(\eta, \varepsilon) \end{bmatrix},$$

donde

$$T_\phi(\eta, \varepsilon) = 2E(\eta, \varepsilon)^T = 2 \begin{bmatrix} -\varepsilon & \eta I + S(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

el cual es de rango completo para todo  $\begin{bmatrix} \eta & \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{S}^3$ . La afirmación anterior significa que esta parametrización también es global; sin embargo, desafortunadamente esta parametrización no tiene la propiedad de unicidad, ya que como se explica en la subsección 4.1.3, si  $\begin{bmatrix} \eta & \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{S}^3$  se reemplaza por  $\begin{bmatrix} -\eta & -\boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{S}^3$  se obtiene exactamente la misma orientación.

#### 4.4.4. Con matrices ortogonales duales

Tomando la derivada de (4.12), se puede comprobar que

$$\dot{R} = S(\boldsymbol{\omega} - \sigma(\mathbf{v} - S(\mathbf{p})\boldsymbol{\omega}))R \quad (4.22)$$

Reescribiendo la ecuación anterior haciendo uso nuevamente de la representación propuesta por Bach y Paicelli para las matrices de rotación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{r}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_2 \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_3 \end{bmatrix} = S(\boldsymbol{\omega} + \sigma(\mathbf{v} + S(\mathbf{p})\boldsymbol{\omega})) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

Utilizando la propiedad (2.13), la ecuación anterior queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{r}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_2 \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S(\hat{\mathbf{r}}_1) \\ S(\hat{\mathbf{r}}_2) \\ S(\hat{\mathbf{r}}_3) \end{bmatrix} [\boldsymbol{\omega} + \sigma(\hat{\mathbf{p}} + S(\mathbf{p})\boldsymbol{\omega})]. \quad (4.23)$$

Finalmente, observando que

$$\begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) \\ S(\mathbf{r}_2) \\ S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} = -2I \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (4.24)$$

y que

$$\boldsymbol{\omega} + \sigma(\mathbf{v} + S(\mathbf{p})\boldsymbol{\omega}) = [I + \sigma S(\mathbf{p})][\boldsymbol{\omega} + \sigma\mathbf{v}]$$

es posible despejar  $\boldsymbol{\omega} + \sigma\mathbf{v}$ :

$$[I - \sigma S(\mathbf{p})][\boldsymbol{\omega} + \sigma\mathbf{v}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{r}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_2 \\ \dot{\hat{\mathbf{r}}}_3 \end{bmatrix}$$



ya que  $[I - \sigma S(\mathbf{p})][I + \sigma S(\mathbf{p})] = I$ , entonces

$$\boldsymbol{\omega} + \sigma \mathbf{v} = \frac{1}{2}[I - \sigma S(\mathbf{p})] \begin{bmatrix} S(\bar{\mathbf{r}}_1) & S(\bar{\mathbf{r}}_2) & S(\bar{\mathbf{r}}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{r}}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{r}}}_3 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La expresión (4.25) permite obtener en un sólo paso la velocidad lineal  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}$  y la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  del cuerpo rígido a partir de los elementos de la matriz especial ortogonal dual y sus derivadas, entonces:

$$\frac{1}{2}[I - \sigma S(\mathbf{p})] \begin{bmatrix} S(\bar{\mathbf{r}}_1) & S(\bar{\mathbf{r}}_2) & S(\bar{\mathbf{r}}_3) \end{bmatrix}$$

es el jacobiano de representación dual que emplea matrices ortogonales duales.

#### 4.4.5. Con cuaterniones duales unitarios

En [24] se puede encontrar la siguiente relación:

$$2\hat{\chi} \odot \hat{\chi}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} + \sigma(\dot{\mathbf{p}} + S(\mathbf{p})\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^4 \quad (4.26)$$

en la cual, sustituyendo la ecuación (4.15)  $\boldsymbol{\xi} = [\bar{\eta} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T]^T$ , y despreciando  $\boldsymbol{\omega} + \sigma\dot{\mathbf{p}}$ , queda:

$$\boldsymbol{\omega} + \sigma\dot{\mathbf{p}} = 2[I - \sigma S(\mathbf{p})]E(\eta, \boldsymbol{\varepsilon}) \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

De manera similar a (4.25), la expresión (4.27) permite obtener  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  a partir del cuaternión dual unitario dado por:  $\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix}^T$ .

La expresión anterior permite obtener en un sólo paso la velocidad lineal  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}$  y la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  del cuerpo rígido a partir de los elementos del cuaternión dual unitario, entonces:

$$2[I - \sigma S(\mathbf{p})]E(\eta, \boldsymbol{\varepsilon})$$

es el jacobiano de representación dual que emplea cuaterniones duales unitarios.

## 4.5. Comparación entre parametrizaciones

Al representar la postura de un cuerpo rígido, es necesario tomar en cuenta la globalidad y la unicidad de la parametrización empleada, entendiéndose como globalidad a la propiedad de una parametrización de representar cualquier punto del espacio de postura, mientras que la unicidad se refiere la posibilidad de representar de manera única la postura de un cuerpo empleando tales parámetros.

La tabla 4.1 muestra para cada una de las parametrizaciones de la postura consideradas en esta tesis, los parámetros, la variedad a la que pertenecen y si cuentan o no con las propiedades de globalidad y unicidad.

#### 4. Cinemática de cuerpos rígidos

Tabla 4.1: Comparación de las parametrizaciones de postura estudiadas.

	Postura			Globalidad	Unicidad	
Ángulos de Euler		$\mathcal{P}$ $\alpha$ $\beta$ $\gamma$	$\in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$	No	No	
Matriz de rotación		$\mathcal{P}$ $r_1$ $r_2$ $r_3$	$\in \mathbb{R}^3 \times SO(3) \subset \mathbb{R}^{12}$	Sí	Sí	
Parámetros de Euler		$\mathcal{P}$ $\eta$ $\epsilon$	$\subset \mathbb{R}^5 \times S^3 \subset \mathbb{R}^7$	Sí	No	
M. ortogonal dual	$r_1$ $r_2$ $r_3$	$+$ $\sigma$	$r_4$ $r_5$ $r_6$	$\in SO(3, \mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^{18}$	Sí	Sí
Cuaternión dual unitario	$\eta$ $\epsilon$	$+$	$\nu$ $\mathbf{v}$	$\in S^3_{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}^4 \cong \mathbb{R}^8$	Sí	No

## Capítulo 5

# Cinemática de robots manipuladores

En el capítulo anterior se estudiaron diferentes formas de representar la postura de cuerpos rígidos individuales. Algunos robots móviles simples (como carros, barcos, aviones, etc.) pueden ser modelados como un cuerpo rígido que incluye elementos móviles (ruedas, hélices, alerones, etc.), los cuales le proporcionan propulsión y/o dirección al vehículo; sin embargo, los robots más comunes no son los móviles sino los manipuladores y éstos están formados por varios cuerpos rígidos llamados eslabones, unidos entre sí por medio de articulaciones e integrando una cadena cinemática, que va desde la base fija hasta el elemento de interés y puede ser completamente abierta (en el caso de los robots seriales), tener sólo lazos cerrados (como en los robots paralelos) o bien tener una combinación de ambos (robots híbridos).

Por otra parte, en la sección 4.2 se explicó que las coordenadas de Plücker son una parametrización de la postura de una línea recta en el espacio. Ésta es una parametrización no mínima puesto que las coordenadas de Plücker son seis parámetros y dos restricciones.

En 1955 Jaques Denavit y Richard S. Hartenberg [25] presentaron la primera parametrización mínima de la postura de una línea. El punto clave para lograr esto fue el concepto de normal común entre dos líneas rectas.

La idea llevó a Denavit y Hartenberg a proponer un método general para describir sin ambigüedades la postura de los eslabones que integran una cadena cinemática con

articulaciones simples (de un g.d.l.).

La única desventaja del método de Denavit y Hartenberg es que tenía que ser aplicado a cadenas cinemáticas abiertas (es decir, a robots manipuladores seriales); pero, en 1986, W. Khalil y J.F. Kleinfinger [19] propusieron una modificación al método de Denavit y Hartenberg que permitía su aplicación también a robots paralelos e híbridos. Al método propuesto por Khalil y Kleinfinger se le conoce comúnmente como el método Denavit-Hartenberg modificado.

Los cuatro parámetros Denavit-Hartenberg (o simplemente parámetros D-H), ya sea los originales o los modificados, son hasta la fecha el método más común para obtener el modelo cinemático directo (MCD) de robots manipuladores.

En la sección 5.1 se definen los cuatro parámetros D-H tanto los originales como los modificados; luego, en las secciones 5.2 a 5.5 se explica el método para obtener el modelo cinemático inverso de un robot manipulador serial a partir de los parámetros D-H originales, empleando: matrices de rotación, cuaterniones unitarios, matrices especiales ortogonales duales y cuaterniones duales unitarios, respectivamente.

## 5.1. Parámetros Denavit-Hartenberg

### 5.1.1. Convención original

Supóngase que se quiere describir la postura de una línea recta en el espacio con respecto a un marco coordenado  $\Sigma_0$  (ver figura 5.1). Para poder definir los parámetros D-H se debe definir un marco coordenado  $\Sigma_1$  que tenga el eje  $Z_1$  orientado en la dirección de la recta. Luego hay que encontrar la recta normal común entre los ejes  $Z_0$  y  $Z_1$ . El eje  $X_1$  tendrá la dirección de esa normal común y el sentido que va de  $Z_0$  a  $Z_1$ , en otras palabras, si  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{z}_0$  y  $\hat{z}_1$  son vectores unitarios en las direcciones de los ejes  $X_1$ ,  $Z_0$  y  $Z_1$ , respectivamente, entonces se debe cumplir  $\hat{x}_1 = \hat{z}_0 \times \hat{z}_1$ . De esta forma queda definido el marco  $\Sigma_1$ , con origen en la intersección de  $X_1$ ,  $Z_0$  y con  $Y_1$  tal que se que se cumpla la ortogonalidad de mano derecha. Entonces, los cuatro parámetros D-H son  $d$ ,  $\theta$ ,  $a$  y  $\alpha$  y se

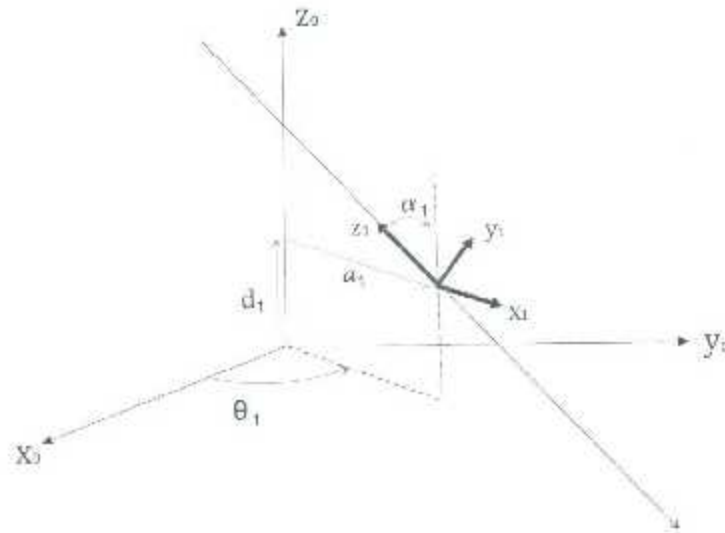


Figura 5.1: Parámetros Denavit-Hartenberg originales de una recta.

definen como:

- $d_1$ : distancia del eje  $X_0$  al eje  $X_1$ , a lo largo del eje  $Z_0$ .
- $\theta_1$ : ángulo del eje  $X_0$  al eje  $X_1$ , alrededor del eje  $Z_0$ .
- $a_1$ : distancia del eje  $Z_0$  al eje  $Z_1$ , a lo largo del eje  $X_1$ .
- $\alpha_1$ : ángulo del eje  $Z_0$  al eje  $Z_1$ , alrededor del eje  $X_1$ .

Para poder aplicar el método de Denavit-Hartenberg original y obtener el modelo cinemático directo de un robot manipulador serial, es necesario colocar un marco coordinado en cada eslabón. Los marcos deben colocarse de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Entre los eslabones  $i-1$  e  $i$  se encuentra la articulación  $i$ . Colocar el eje  $Z_{i-1}$  en la dirección del eje de la articulación  $i$ .
2. Identificar la recta común entre los ejes  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  y colocar el eje  $X_i$  en la dirección de esa normal común, con el sentido dado por  $\hat{X}_i = \hat{Z}_{i-1} \times \hat{Z}_i$ .

- Colocar el eje  $X_3$  (del marco de la base) de manera arbitraria. Colocar el marco  $\Sigma_n$  en el órgano terminal, orientado igual que el marco  $\Sigma_{n-1}$ .

Los parámetros D-H originales que dan la orientación entre los marcos  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$  se definen entonces como:

- $d_i$ : distancia del eje  $X_{i-1}$  al eje  $X_i$ , a lo largo del eje  $Z_{i-1}$ .
- $\theta_i$ : ángulo del eje  $X_{i-1}$  al eje  $X_i$ , alrededor del eje  $Z_{i-1}$ .
- $a_i$ : distancia del eje  $Z_{i-1}$  al eje  $Z_i$ , a lo largo del eje  $X_i$ .
- $\alpha_i$ : ángulo del eje  $Z_{i-1}$  al eje  $Z_i$ , alrededor del eje  $X_i$ .

La transformación entre el marco  $\Sigma_{i-1}$  y el marco  $\Sigma_i$ , empleando los parámetros D-H originales se puede descomponer en la siguiente secuencia.

- Una traslación de  $d_i$  a lo largo  $Z_{i-1}$ :  $P(d_i, Z_{i-1})$ .
- Una rotación de  $\theta_i$  alrededor de  $Z_{i-1}$ :  $R(\theta_i, Z_{i-1})$ .
- Una traslación de  $a_i$  a lo largo  $X_i$ :  $P(a_i, X_i)$ .
- Una rotación de  $\alpha_i$  alrededor de  $X_i$ :  $R(\alpha_i, X_i)$ .

Si  ${}^{i-1}T_i$  representa la postura del marco  $\Sigma_i$  con respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$ , entonces

$${}^{i-1}T_i = P(d_i, Z_{i-1})R(\theta_i, Z_{i-1})P(a_i, X_i)R(\alpha_i, X_i) \quad (5.1)$$

Y, por extensión, la transformación entre el marco  $\Sigma_0$  y el marco  $\Sigma_n$  sería:

$${}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{n-2}T_{n-1} {}^{n-1}T_n$$

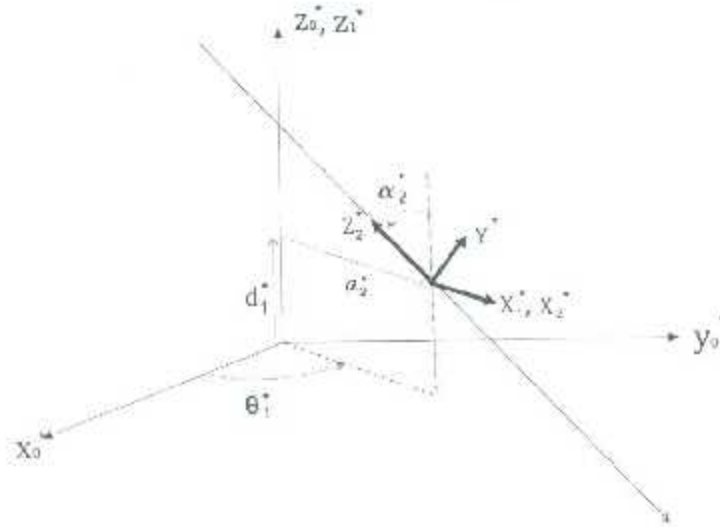


Figura 5.2: Parámetros Denavit-Hartenberg modificados de una recta.

### 5.1.2. Convención modificada

Como se explica en [19], la idea de la modificación hecha al método original propuesto por Denavit y Hartenberg es emplear un nuevo conjunto de parámetros que se pueda aplicar no sólo a manipuladores seriales sino a otro tipo de robots.

Aunque se les suele llamar igual, los cuatro parámetros D-H modificados son en general diferentes a los parámetros D-H originales. Por eso aquí se utilizará la notación  $d^*$ ,  $\theta^*$ ,  $a^*$  y  $\alpha^*$  para los parámetros modificados.

Supóngase nuevamente que se quiere describir la postura de una recta en el espacio, con respecto a un marco  $\Sigma_0$ .

En la figura 5.1 se mostró como definir esa postura en términos de los cuatro parámetros D-H originales, para lo cual se utilizaron sólo dos marcos coordenados. En el caso de los parámetros D-H modificados, la misma postura se especifica usando los parámetros  $d^*$ ,  $\theta^*$ ,  $a^*$  y  $\alpha^*$ , pero para definir estos se necesitan al menos tres marcos coordenados, tal como se muestra en la figura 5.2.

El marco  $\Sigma_0^*$  es arbitrario (y por lo tanto, puede ser igual al marco  $\Sigma_0$  de la figura 5.1). El eje  $Z_2^*$  se coloca en dirección a la recta de interés (y corresponde al eje  $Z_1$  de la figura



5.1). El marco  $\Sigma_1^*$  se coloca de manera que  $Z_1^*$  coincida con  $Z_0^*$  y que  $X_1^*$  coincida con la normal común a  $Z_1^*$  y  $Z_2^*$  (o, en términos de vectores unitarios,  $\hat{x}_1^* = \hat{z}_1^* \times \hat{z}_2^*$ ).

En general, los parámetros D-H modificados entre los marcos  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$ , se definen de la siguiente manera:

- $d_i^*$ : distancia del eje  $X_{i-1}^*$  al eje  $X_i^*$ , a lo largo del eje  $Z_i^*$ .
- $\theta_i^*$ : ángulo del eje  $X_{i-1}^*$  al eje  $X_i^*$ , alrededor del eje  $Z_i^*$ .
- $a_i^*$ : distancia del eje  $Z_{i-1}^*$  al eje  $Z_i^*$ , a lo largo del eje  $X_{i-1}^*$ .
- $\alpha_i^*$ : ángulo del eje  $Z_{i-1}^*$  al eje  $Z_i^*$ , alrededor del eje  $X_{i-1}^*$ .

Y la transformación que da la postura del marco  $\Sigma_i$  con respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$  es dada por:

$${}^{i-1}T_i^* = P(a_i^*, X_{i-1}^*)R(\alpha_i^*, X_{i-1}^*)P(d_i^*, Z_i^*)R(\theta_i^*, Z_i^*) \quad (5.2)$$

Ahora, volviendo al ejemplo de la figura 5.2, se observa que, dado que  $Z_0^* = Z_1^*$  y  $X_1^* = X_2^*$ , entonces los parámetros  $a_1^*$ ,  $\alpha_1^*$ ,  $d_2^*$  y  $\theta_2^*$  son nulos. Los parámetros  $d_1^*$ ,  $\theta_1^*$ ,  $a_2^*$ ,  $\alpha_2^*$ , son los que se muestran en la figura 5.2. Y la transformación entre los marcos  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_2$  sería:

$${}^0T_2^* = {}^0T_1^* {}^1T_2^* = P(0, X_0^*)R(0, X_0^*)P(d_1^*, Z_1^*)R(\theta_1^*, Z_1^*)P(a_2^*, X_1^*)R(\alpha_2^*, X_1^*)P(0, Z_2^*)R(0, Z_2^*) \\ - P(d_1^*, Z_1^*)R(\theta_1^*, Z_1^*)P(a_2^*, X_1^*)R(\alpha_2^*, X_1^*).$$

Y comparando las figuras 5.1 y 5.2 se observa que  $Z_1^* = Z_0$ ,  $X_1^* = X_1$ , y además  $d_1^* = d_1$ ,  $\theta_1^* = \theta_1$ ,  $a_2^* = a_1$  y  $\alpha_2^* = \alpha_1$ , de modo que

$${}^0T_2^* = P(d_1, Z_0)R(\theta_1, Z_0)P(a_1, X_1)R(\alpha_1, X_1).$$

En el caso de un robot manipulador, a cada eslabón  $i$  se le asocia un marco coordenado  $\Sigma_i$  y para simplificar la selección de los parámetros D-H modificados se siguen los siguientes criterios:

1. Entre los eslabones  $i - 1$  e  $i$  se encuentra la articulación  $i$ . Colocar el eje  $Z_i^*$  en la dirección del eje de la articulación  $i$ .
2. Identificar la recta normal común entre los ejes  $Z_i^*$  y  $Z_{i+1}^*$ . Colocar el eje  $X_i^*$  en la dirección de esa normal común y con el sentido dado por  $\hat{x}_i^* = \hat{z}_i^* \times \hat{z}_{i+1}^*$ .
3. El marco  $\Sigma_0^*$  se coloca de manera arbitraria sólo asegurando que  $Z_0^*$  y  $Z_1^*$  sean colineales. El eje  $Z_{n+1}^*$  se coloca en el órgano terminal, orientado igual que el eje  $Z_n^*$ .

Obsérvese que en el método de Khalil-Kleinfinger es necesario especificar no sólo los  $n + 1$  marcos coordenados ( $\Sigma_0^*$  a  $\Sigma_n^*$ ) sino también el eje  $Z_{i+1}^*$ .

Siguiendo estos criterios, usando (5.2) y su composición:

$${}^0T_n^* = {}^0T_1^* {}^1T_2^* \dots {}^{n-2}T_{n-1}^* {}^{n-1}T_n^*$$

se puede verificar que la postura del marco  $\Sigma_n$  con respecto al marco  $\Sigma_0$  puede ser obtenida usando ya sea los parámetros D-H originales o los modificados, ya que  ${}^0T_n^* = {}^0T_n$ .

De hecho, como se menciona en [19], los parámetros  $(d_i^*, \theta_i^*, a_{i+1}^*, \alpha_{i+1}^*)$  de la convención modificada corresponden a los parámetros  $(d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i)$  de la convención original para  $i = 1, 2, \dots, n$ . En las secciones siguientes se proporcionan las fórmulas necesarias para obtener el modelo cinemático directo de un robot (MCD), empleando los parámetros D-H.

## 5.2. MCD con matrices de transformación homogénea

Una matriz de transformación homogénea combina una matriz de rotación y un vector de posición en una matriz de  $4 \times 4$ . Si  ${}^{i-1}\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$  y  ${}^{i-1}R_i \in \text{SO}(3)$  dan respectivamente la posición y orientación del marco  $\Sigma_i$  con respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$ , entonces la matriz de transformación homogénea  ${}^{i-1}T_i$  da la postura relativa entre esos mismos marcos y está dada por

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}\mathbf{p}_i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad (5.3)$$

Las matrices de transformación homogénea forman un grupo de Lie multiplicativo, conocido como grupo especial euclidiano de transformaciones rígidas en  $\mathbb{R}^3$  y denotado como  $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

La composición de matrices de transformación homogénea se realiza de la siguiente manera:

$${}^0T_1{}^1T_2 = \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1R_2 & {}^1\mathbf{p}_2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_1{}^1R_2 & {}^0R_1{}^1\mathbf{p}_2 + {}^0\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3).$$

La regla de composición de matrices de transformación homogénea se puede usar para obtener la postura entre los marcos  $\Sigma_{i-1}$  y  $\Sigma_i$ , usando parámetros D-H.

Si se usan parámetros D-H originales, entonces se emplea 5.1

$$\begin{aligned} {}^{i-1}T_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $C_x$ ,  $S_x$  son  $\cos(x)$  y  $\sin(x)$ , respectivamente. De la ecuación anterior se extrae:

$${}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix} \in SO(3), \quad {}^{i-1}\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} a_i C\theta_i \\ a_i S\theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.5)$$

Si se usan parámetros D-H modificados, entonces se debe aplicar (5.2), lo que resulta en:

$$\begin{aligned} {}^{i-1}T_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i^* & -S\alpha_i^* & 0 \\ 0 & S\alpha_i^* & C\alpha_i^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta_i^* & -S\theta_i^* & 0 & 0 \\ S\theta_i^* & C\theta_i^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_i^* & -S\theta_i^* & 0 & a_i^* \\ C\alpha_i^* S\theta_i^* & C\alpha_i^* C\theta_i^* & -S\alpha_i^* & -d_i^* S\alpha_i^* \\ S\alpha_i^* S\theta_i^* & S\alpha_i^* C\theta_i^* & C\alpha_i^* & d_i^* C\alpha_i^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3), \end{aligned} \quad (5.6)$$

de donde se extrae:

$${}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} C\theta_i^* & -S\theta_i^* & 0 \\ C\alpha_i^*S\theta_i^* & C\alpha_i^*C\theta_i^* & -S\alpha_i^* \\ S\alpha_i^*S\theta_i^* & S\alpha_i^*C\theta_i^* & C\alpha_i^* \end{bmatrix} \in \text{SO}(3), \quad {}^{i-1}\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ -d_iS\alpha_i^* \\ -d_iC\alpha_i^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.7)$$

El método original propuesto por Denavit y Hartenberg emplea la composición de matrices de transformación homogénea para obtener el modelo cinemático directo de un manipulador serial, que sería:

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} {}^0R_n & {}^0\mathbf{p}_n \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1{}^1T_2 \cdots {}^{n-1}T_n \in \text{SE}(3), \quad (5.8)$$

de donde se puede extraer

$${}^0R_n = {}^0R_1{}^1R_2 \cdots {}^{n-1}R_n \quad (5.9)$$

$${}^0\mathbf{p}_n = {}^0R_1{}^1R_2 \cdots {}^{n-2}R_{n-1}{}^{n-1}\mathbf{p}_n = {}^0R_1{}^1R_2 \cdots {}^{n-3}R_{n-2}{}^{n-2}\mathbf{p}_{n-1} + \cdots + {}^0R_1{}^1\mathbf{p}_2 + {}^0\mathbf{p}_1. \quad (5.10)$$

En el caso de utilizar D-H modificados, se sigue un procedimiento similar.

### 5.3. MCD usando parámetros de Euler

A diferencia con lo que ocurre con las matrices de transformación homogénea, en este caso no es posible manejar en forma conjunta la posición y la orientación. De acuerdo con (5.1), la posición del marco  $\Sigma_i$  respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$  empleando cuaterniones y los parámetros D-H originales, estaría dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^{i-1}\mathbf{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \end{bmatrix}$$

donde se ha usado (4.6) y la definición de parámetros de Euler de la sección 4.1.3. Realizando las operaciones de los cuaterniones se llega a que:

$${}^{i-1}\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ a_iC\theta_i \\ a_iS\theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Por otra parte, la orientación del marco  $\Sigma_i$  respecto al marco  $\Sigma_{i-1}$  es

$${}^{i-1}\xi_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \end{bmatrix} \in S^4$$

En caso de que se usen parámetros D-H modificados se tendría:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^{i-1}p_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \\ -d_i S_{\alpha_i} \\ d_i C_{\alpha_i} \end{bmatrix}$$

y

$${}^{i-1}\xi_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \end{bmatrix} \in S^3.$$

La aplicación repetitiva de las expresiones (4.6) y (4.5) permite obtener el MCD (postura del marco  $\Sigma_n$  respecto al  $\Sigma_0$ ) empleando cuaterniones unitarios:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ {}^0p_n \end{bmatrix} = {}^0\xi_{n-1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{n-1}p_n \end{bmatrix} \otimes {}^0\xi_{n-1}^* \otimes {}^0\xi_{n-2} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{n-2}p_{n-1} \end{bmatrix} \otimes {}^0\xi_{n-2}^* \otimes \dots \otimes {}^0\xi_1^* \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ {}^1p_2 \end{bmatrix} \otimes {}^0\xi_1^* - \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0p_1 \end{bmatrix}$$

y

$${}^0\xi_n = {}^0\xi_1 \otimes {}^1\xi_2 \otimes \dots \otimes {}^{n-2}\xi_{n-1} \otimes {}^{n-1}\xi_n.$$

## 5.4. MCD usando matrices ortogonales duales

En este caso, es posible aplicar el principio de transferencia a la matriz de rotación que da la orientación del marco  $\Sigma_i$  con respecto a  $\Sigma_{i-1}$ , y se llega a:

$${}^{i-1}\bar{R}_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} \\ 0 & S_{\theta_i} & C_{\theta_i} \end{bmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{D}), \quad (5.11)$$

donde  $\bar{\theta}_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  son ángulos duales y representan el giro y traslación a lo largo del eje  $Z_{i-1}$  y el eje  $X_{i-1}$ , respectivamente. En términos de los parámetros de Denavit-Hartenberg  $\bar{\theta}_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  quedan:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_i &= \theta_i + \sigma r_i & y \\ \bar{\alpha}_i &= \alpha_i + \sigma d_i.\end{aligned}\tag{5.12}$$

En términos de los parámetros de D-H modificados, la matriz ortogonal dual queda:

$${}^{i-1}\bar{R}_i = \begin{bmatrix} C_{\bar{\theta}_i} & -S_{\bar{\theta}_i} & 0 \\ C_{\bar{\alpha}_i} S_{\bar{\theta}_i} & C_{\bar{\alpha}_i} C_{\bar{\theta}_i} & -S_{\bar{\alpha}_i} \\ S_{\bar{\alpha}_i} S_{\bar{\theta}_i} & S_{\bar{\alpha}_i} C_{\bar{\theta}_i} & C_{\bar{\alpha}_i} \end{bmatrix} \in \text{SO}(3, \mathbb{D}).\tag{5.13}$$

En cualquiera de los dos casos (5.11) y (5.13) se demuestra que

$${}^{i-1}\bar{R}_i = {}^{i-1}R_i + S({}^{i-1}\mathbf{p}_i)^{\wedge} R_i$$

donde  ${}^i\mathbf{p}_{i-1}$  está dado según la convención D-H que se use.

También se puede demostrar que la composición de matrices especiales ortogonales aplica, dando como resultado:

$${}^0\bar{R}_n = {}^0\bar{R}_1 {}^0\bar{R}_2 \cdots {}^0\bar{R}_n = [I + S({}^0\mathbf{p}_n)] {}^0R_n$$

donde  ${}^0R_n$  y  ${}^0\mathbf{p}_n$  se obtienen usando la convención de parámetros D-H seleccionada.

Nótese que en el caso de que se tenga  ${}^0\bar{R}_n \in \text{SO}(3, \mathbb{D})$  y  ${}^0R_n$ ,  ${}^0R'_n$  son sus partes primaria y secundaria, es decir

$${}^0\bar{R}_n = {}^0R_n + \sigma {}^0R'_n$$

entonces es posible determinar el vector de posición  ${}^0\mathbf{p}_n$  usando

$$S({}^0\mathbf{p}_n) = {}^0R'_n {}^0R_n^T.$$

## 5.5. MCD usando cuaterniones duales unitarios

En este caso, es posible aplicar el principio de transferencia a los parámetros de Euler que dan la orientación del marco  $\Sigma_i$  con respecto a  $\Sigma_{i-1}$  y empleando parámetros de

Denavit-Hartenberg originales se llega a:

$${}^{i-1}\bar{\xi}_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\bar{\theta}_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\bar{\alpha}_i}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\bar{\theta}_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\bar{\alpha}_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\bar{\theta}_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\bar{\alpha}_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\bar{\theta}_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\bar{\alpha}_i}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

donde  $\bar{\theta}_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  son ángulos duales y representan el giro y traslación a lo largo del eje  $Z_{i-1}$  y el eje  $X_{i-1}$ , respectivamente.

En términos de los parámetros de D-H modificados, el cuaternión dual unitario queda:

$${}^{i-1}\bar{\xi}_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Al igual que las matrices ortogonales duales, los cuaterniones duales unitarios permiten en una sola expresión representar la postura de un cuerpo rígido [23]:

$${}^{i-1}\bar{\xi}_i = {}^{i-1}\xi_i + \frac{1}{2}\sigma \begin{bmatrix} 0 \\ {}^{i-1}p_i \end{bmatrix} \otimes {}^{i-1}\xi_i.$$

De manera que es posible comprobar que para calcular la postura del efector final de un robot, basta con obtener el producto de los cuaterniones duales que parametrizan la postura del robot, desde el marco fijo, hasta el marco final:

$${}^0\bar{\xi}_n = {}^0\bar{\xi}_1 \odot {}^1\bar{\xi}_2 \odot \dots \odot {}^{n-2}\bar{\xi}_{n-1} \odot {}^{n-1}\bar{\xi}_n = {}^0\xi_n + \frac{1}{2}\sigma \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0p_n \end{bmatrix} \otimes {}^0\xi_n$$

donde el cuaternión primario proporciona la orientación del marco  $\Sigma_n$  respecto al marco  $\Sigma_0$ , y el vector de posición  ${}^0p_n$  puede ser calculado multiplicando la parte secundaria por el conjugado de la parte primaria.

## Capítulo 6

# Control de postura con cuaterniones duales unitarios

En el capítulo 1 se explicó que existen básicamente dos esquemas de control de robots cuando se trata de ejecutar una tarea especificada en términos de una postura deseada:

- Control en espacio articular.
- Control en espacio de postura.

Para los fines de esta tesis, el interés se centra en el llamado esquema de control en espacio de postura, particularmente en el *control de postura usando cuaterniones duales unitarios*.

En este capítulo se explica cómo se especifica el error y el objetivo de control de postura empleando cuaterniones duales unitarios y, posteriormente, se proponen dos controladores en espacio de postura: un controlador cinemático y un controlador dinámico, los cuales también emplean esta valiosa herramienta matemática.

### Antecedentes

Una de las primeras técnicas de control de postura de robots fue propuesta por [26] y es conocida como *control en espacio operacional*. La principal característica de esta técnica es



que la postura se describe como un vector de seis coordenadas generalizadas; esto equivale a usar un conjunto mínimo de parámetros para describir la orientación tal como los ángulos de Euler. Pero, aunque los ángulos de Euler siguen siendo populares, toda parametrización mínima de la orientación tienen la desventaja de presentar *singularidades de representación* (pues describen sólo localmente la variedad de configuración de la orientación) y de ser inconsistentes con la geometría de la tarea [27].

Por otro lado, el uso de matrices de rotación para describir la orientación sigue siendo común en aplicaciones de modelado en robótica, pero resulta impráctica su utilización en tareas de control, principalmente por la dificultad de definir un error de orientación apropiado; otra desventaja es que el manejar los nueve elementos de una matriz de rotación resulta computacionalmente ineficiente. No obstante, una formulación interesante, que resuelve el problema de control de orientación empleando matrices de rotación, fue encontrada en [21].

El uso de parámetros de Euler en control de robots se remonta a Yuan [28], quien los aplicó en una versión particular del controlador de aceleración resuelta [29]. Más recientemente, varios trabajos han sido publicados sobre este tema (ver [27], [30], [31], [32] y [33]).

En el 2008, Han et al. [36] propusieron el primer controlador que emplea cuaterniones duales unitarios; se trata de un controlador cinemático para cuerpos rígidos, el cual demuestra ser asintóticamente estable de forma global, y es computacionalmente eficiente. La ley de control propuesta emplea la definición de un logaritmo dual y el producto de cuaterniones duales se usa para definir el error de postura.

En el 2010, Wang y Yu diseñaron el primer controlador dinámico para cuerpos rígidos que emplea números duales [34]. Por otro lado, en el mismo año Pham et al. [37] propusieron dos esquemas de control cinemático con cuaterniones duales para robots manipuladores: uno basado en la jacobiana pseudoinvertida y otro en la jacobiana transpuesta, sin embargo, en este controlador se definió el error de postura simplemente como la diferencia entre el cuaternión dual unitario deseado y el cuaternión dual unitario del extremo del robot.

Finalmente, en [35] se presenta una función de Lyapunov para el análisis de control de postura con y sin restricciones, empleando cuaterniones duales unitarios.

## 6.1. Error de postura y objetivo de control

### 6.1.1. Error de postura con cuaterniones duales unitarios

Considérese que la postura del elemento de interés del robot es dada por el vector de posición  $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^3$  y los parámetros de Euler  $\bar{\boldsymbol{\xi}}^T = [\bar{\eta} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T]^T \in S^3$ . Asimismo, la postura deseada es definida a través del vector  $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$  y los parámetros de Euler  $\boldsymbol{\xi}_d = [\eta_d \quad \boldsymbol{\varepsilon}_d^T]^T \in S^3$ . El vector del error de posición  $\hat{\mathbf{p}}$  se define simplemente como:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_d - \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3,$$

mientras que el error de orientación puede definirse empleando el álgebra de cuaterniones unitarios como:

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_d \\ \boldsymbol{\varepsilon}_d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \eta\eta_d + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}_d \\ \eta\boldsymbol{\varepsilon}_d - \eta_d\boldsymbol{\varepsilon} + S(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}_d \end{bmatrix} \in S^3. \quad (6.1)$$

Si la postura se expresa por medio de cuaterniones duales unitarios, entonces el cuaternión dual unitario del elemento terminal sería

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\xi} + \sigma\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \nu \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \in S_D^3,$$

mientras que el cuaternión dual unitario deseado se define como

$$\boldsymbol{\chi}_d = \begin{bmatrix} \eta_d \\ \boldsymbol{\varepsilon}_d \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \nu_d \\ \boldsymbol{\lambda}_d \end{bmatrix} \in S_D^3.$$

El error de postura expresado en función de los cuaterniones duales unitarios se establece como:

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\chi}_d \odot \boldsymbol{\chi}^* = \left( \begin{bmatrix} \eta_d \\ \boldsymbol{\varepsilon}_d \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \nu_d \\ \boldsymbol{\lambda}_d \end{bmatrix} \right) \odot \left( \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \nu \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \right) \in S_D^3 \quad (6.2)$$

y al realizar el producto se llega a

$$\tilde{\chi} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\varepsilon} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sigma \begin{bmatrix} -\tilde{\varepsilon}^T \tilde{p} \\ (\tilde{\eta}I + S(\tilde{\varepsilon}))\tilde{p} - 2S(\tilde{\varepsilon})p_d \end{bmatrix} \in S_D^3$$

que se puede reescribir como:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\xi} + \frac{1}{2}\sigma \left( E^+(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})\tilde{p} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2S(\tilde{\varepsilon}) \end{bmatrix} p_d \right),$$

donde  $E^+(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} -\tilde{\varepsilon}^T \\ \tilde{\eta}I + S(\tilde{\varepsilon}) \end{bmatrix}$ .

Si se define la parte secundaria del cuaternión dual unitario de error como

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{2}E^+(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})\tilde{p} - \begin{bmatrix} 0 \\ S(\tilde{\varepsilon}) \end{bmatrix} p_d \quad (6.3)$$

entonces

$$\tilde{\chi} = \tilde{\xi} + \sigma\tilde{\zeta}.$$

donde  $\tilde{\chi} \in S_D^3$ ,  $\tilde{\xi} \in S^3$  y  $\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^4$ .

Por otro lado, premultiplicando (6.3) por  $E^+(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T$  y considerando la propiedad:

$$E^+(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T E^+(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}) = I,$$

se llega a

$$\tilde{p} = 2E^+(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} + 2[\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})p_d. \quad (6.4)$$

### 6.1.2. Objetivo de control

El objetivo de control de posición consiste en lograr que la posición del elemento terminal  $\mathbf{p}(t)$  siga la trayectoria de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$ , esto se logra si:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_d(t); \quad \mathbf{p}, \mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$$

Similarmente, el objetivo de control de orientación consiste en lograr que la orientación del extremo final del manipulador siga la trayectoria de orientación deseada.

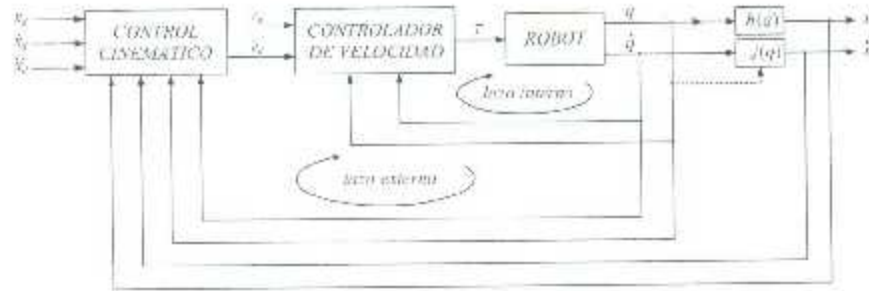


Figura 6.1: Esquema de control cinemático en espacio de postura.

En el caso de los parámetros de Euler, el objetivo de control de orientación se define como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S^3,$$

esto es debido a que los parámetros de Euler son un recubrimiento doble de  $SO(3)$ , por tanto  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  y  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  corresponden físicamente a la misma orientación.

En el caso de los cuaterniones duales unitarios, el objetivo de control de postura es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\chi} = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S_D^3.$$

## 6.2. Control cinemático

Como se explicó en el capítulo 1, un controlador cinemático es básicamente un controlador de postura para robots que entrega como salida las velocidades articulares deseadas en cada articulación; estas velocidades luego se convierten en referencias para un controlador de velocidad con salida de par.

La figura 6.1 muestra el diagrama general de un sistema de control de doble lazo para robots. La dinámica del robot está dada por

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau, \tag{6.5}$$

mientras que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (6.6)$$

da su cinemática diferencial.

El controlador de velocidad de lazo interno es [33]:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{v}}_d + K_v\tilde{\mathbf{v}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}), \quad (6.7)$$

donde  $K_v \in \mathbb{R}^{r \times r}$  es una matriz de ganancias de control definida positiva y  $\tilde{\mathbf{v}}$  es el vector de error de velocidad articular definido como:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_d - \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.8)$$

La referencia para el control de lazo interno  $\mathbf{v}_d$ , y su derivada temporal  $\dot{\mathbf{v}}_d$ , están dadas por el controlador cinemático del lazo externo.

Tomando como inspiración el controlador cinemático en [33] (el cual emplea cuaterniones unitarios), se propone aquí el siguiente:

$$\mathbf{v}_d = J(\mathbf{q})^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{p}_d + 2K_p \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})\mathbf{p}_d \right] \\ \boldsymbol{\omega}_d + K_o\tilde{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

donde  $K_p = k_p I$ ,  $K_o = k_o I$  y cuya derivada temporal resulta ser:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_d = & J(\mathbf{q})^\dagger \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d - 2K_p \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \dot{\tilde{\zeta}} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})\dot{\mathbf{p}}_d \right] \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + K_o\dot{\tilde{\varepsilon}} \end{bmatrix} \\ & + J(\mathbf{q})^\dagger \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d + K_p \left[ J_p(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{v}} - 2K_p \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})\mathbf{p}_d \right] \right] \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + K_o \left[ \frac{1}{2} \tilde{\eta}I + S(\tilde{\varepsilon}) \right] \dot{\tilde{\omega}} - S(\tilde{\varepsilon})\dot{\boldsymbol{\omega}}_d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Ahora bien, sustituyendo (6.9) en (6.8), premultiplicando por  $J(\mathbf{q})$ , y usando (6.6), se llega a

$$J(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} + 2K_p \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})\mathbf{p}_d \right] \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} + K_o\tilde{\varepsilon} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Recordando que es posible particionar el jacobiano geométrico, de modo que

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_p(\mathbf{q}) \\ J_o(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

## 6. Control de postura con cuaterniones duales unitarios

con  $J_p(\mathbf{q})$ ,  $J_o(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ , de (6.10) se llega a las siguientes expresiones:

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = J_p(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{v}} - 2K_p \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}})^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\mathbf{e}})]S(\tilde{\mathbf{e}})\mathbf{p}_d \right] \quad (6.11)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = J_o(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{v}} - K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (6.12)$$

Sustituyendo la ley de control (6.7) en la dinámica del robot (5.6) y usando la derivada de (6.8) se llega a

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} + K_v \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (6.13)$$

Por otro lado, para el análisis de estabilidad se considera que el extremo final se mueve en una región libre de singularidades, es decir,  $J(\mathbf{q})$  es de rango completo durante toda la tarea; además, se supone que el jacobiano se encuentra acotado, esto significa que existen constantes positivas  $k_{Jp}$  y  $k_{Jo}$  tales que, para todo  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , se tiene:

$$\|J_p(\mathbf{q})\| \leq k_{Jp} \quad \text{y} \quad \|J_o(\mathbf{q})\| \leq k_{Jo}. \quad (6.14)$$

La ecuación de malla cerrada en función de las variables de estado:  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \left[ \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \right]^T$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}$  y  $\tilde{\mathbf{v}}$ , a partir de las ecuaciones (4.18) y (6.12) queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}}) \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}})^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\mathbf{e}})]S(\tilde{\mathbf{e}})\mathbf{p}_d \right] + \frac{1}{2}E(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}}) \left[ J_p \tilde{\mathbf{v}} - \right. \\ \left. 2K_p \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}})^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\mathbf{e}})]S(\tilde{\mathbf{e}})\mathbf{p}_d \right] - \begin{bmatrix} 0 \\ S(\dot{\tilde{\mathbf{e}}})\mathbf{p}_d + S(\tilde{\mathbf{e}})\dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} \right] \\ \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{e}}^T [K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - J_o(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{v}}] \\ -\frac{1}{2}[\tilde{\eta}I + S(\tilde{\mathbf{e}})] [K_v \tilde{\boldsymbol{\omega}} - J_o(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{v}}] - S(\tilde{\mathbf{e}})\boldsymbol{\omega}_d \\ -K_v \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

El vector de estados es  $\left[ \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T \quad \tilde{\eta} \quad \tilde{\mathbf{e}}^T \quad \tilde{\mathbf{v}}^T \right] \in D_C$ , donde

$$D_C = S_D^3 \times \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8+n} : \tilde{\eta}^2 + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} = 1, \tilde{\eta} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\boldsymbol{\beta}} = 0 \right\}$$

## 6. Control de postura con cuaterniones duales unitarios

El sistema es no autónomo y tiene dos puntos de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\varepsilon} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = E_{C1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in D_C, \quad y \quad \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\varepsilon} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = E_{C2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ -1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in D_C.$$

Se supone que el equilibrio  $E_{C1}$  es estable, mientras que el equilibrio  $E_{C2}$  es inestable.

### 6.2.1. Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad del equilibrio  $E_{C1}$ , considérese la siguiente función de Lyapunov inspirada en la función definida en [17]:

$$V(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{v}) = 2\tilde{\zeta}^T \tilde{\zeta} + 4\tilde{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} 0 & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta} + \lambda(\tilde{\eta} - 1)^2 - \tilde{\varepsilon}^T [\lambda I - 2S(\mathbf{p}_d)^2] \tilde{\varepsilon} - \frac{1}{2} \tilde{v}^T \tilde{v} \quad (6.16)$$

con  $\lambda$  tal que

$$0 < \lambda < \min \left\{ -\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}k_o J p^2 + 8k_{J_o} k_p \|\mathbf{p}_d\| k_{J_p} - 2k_o k_v k_p)^2 - 4k_{J_o}^2 k_p (8J p^2 k_p \|\mathbf{p}_d\|^2 + 32k_v k_p^2 \|\mathbf{p}_d\|^2)}}{2k_{J_o}^2 k_p}, \right. \\ \left. \frac{k_o(4k_v k_p - k_{J_p}^2)}{4k_{J_o}^2 k_p} - \frac{4k_{J_p} \|\mathbf{p}_d\|}{k_{J_o}}, 2\|\mathbf{p}_d\|^2 \right\}. \quad (6.17)$$

Empleando el teorema de Rayleigh-Ritz, y la desigualdad de Schwartz, se puede demostrar que

$$V(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{v}) \geq \lambda(\tilde{\eta} - 1)^2 + \lambda\|\tilde{\varepsilon}\|^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{v}\|^2 - 2\|\tilde{\zeta}\|^2 - 4\|\tilde{\varepsilon}\|\|\tilde{\zeta}\| \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \right\|,$$

y como  $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \right\| = \|\mathbf{p}_d\|$ , entonces:

$$V(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{v}) \geq \begin{bmatrix} \|\tilde{\zeta}\| \\ \|\tilde{\varepsilon}\| \\ \|\tilde{v}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -2\|\mathbf{p}_d\| & 0 \\ -2\|\mathbf{p}_d\| & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\zeta}\| \\ \|\tilde{\varepsilon}\| \\ \|\tilde{v}\| \end{bmatrix} + \lambda(1 - \tilde{\eta})^2.$$

Derivando la función candidata de Lyapunov (6.16) se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{v}) = 4\tilde{\zeta}^T \dot{\tilde{\zeta}} + 4\dot{\tilde{\varepsilon}}^T \begin{bmatrix} 0 & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta} + 4\tilde{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \dot{\tilde{\zeta}} - 4\dot{\tilde{\varepsilon}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta}$$

$$-4\dot{\bar{\epsilon}}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \bar{\epsilon} - 4\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\dot{\mathbf{p}}_d) \bar{\epsilon} - 2\lambda \dot{\eta} + \bar{\mathbf{v}}^T \dot{\bar{\mathbf{v}}}$$

y sustituyendo  $\dot{\bar{\zeta}}$  de (6.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, \bar{\epsilon}, \bar{\mathbf{v}}) = & \underbrace{4\bar{\zeta}^T E(\dot{\bar{\eta}}, \dot{\bar{\epsilon}})}_1 \left[ E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d \right] - 4\bar{\zeta}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ S(\dot{\bar{\epsilon}}) \mathbf{p}_d + S(\bar{\epsilon}) \dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix}}_3 \\ & + \underbrace{\bar{\zeta}^T E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon}) \left[ -4K_p [E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d] + 2J_p \bar{\mathbf{v}} \right]}_2 \\ & - \underbrace{4\bar{\epsilon}^T \begin{bmatrix} 0 & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \bar{\zeta}}_3 - 4\bar{\epsilon}^T \begin{bmatrix} 0 & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \bar{\zeta} + 4\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\dot{\bar{\eta}}I - S(\dot{\bar{\epsilon}})] \left\{ E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - \right. \\ & \left. S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d \right\} + 2\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\bar{\eta}I + S(\bar{\epsilon})] \left\{ J_p(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}} - 2k_p [E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d] \right\} - \\ & \underbrace{4\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\dot{\bar{\epsilon}}) \mathbf{p}_d}_4 - \underbrace{4\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\bar{\epsilon}) \dot{\mathbf{p}}_d}_4 - \underbrace{4\dot{\bar{\epsilon}}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \bar{\epsilon}}_1 - \underbrace{4\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\dot{\mathbf{p}}_d) \bar{\epsilon}}_1 - 2\lambda \dot{\eta} + \bar{\mathbf{v}}^T \dot{\bar{\mathbf{v}}}. \end{aligned}$$

Empleando la propiedad

$$E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T E(\dot{\bar{\eta}}, \dot{\bar{\epsilon}}) = 0 \quad (6.18)$$

y sustituyendo (6.3) en el término 1, se tiene que éste es igual a:

$$4\mathbf{p}_d^T S(\bar{\epsilon}) [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta}. \quad (6.19)$$

Por otro lado, empleando las restricciones de un cuaternión dual unitario definidas en (4.13), se demuestra que el término 2 es simplemente:

$$-4k_p \bar{\zeta}^T \bar{\zeta}. \quad (6.20)$$

donde se ha usado el hecho de que  $K_p = k_p I$

Reacomodando, la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, \bar{\epsilon}, \bar{\mathbf{v}}) = & \underbrace{4\mathbf{p}_d^T S(\bar{\epsilon}) [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta}}_1 + \underbrace{4\bar{\zeta}^T E(\dot{\bar{\eta}}, \dot{\bar{\epsilon}}) [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d}_2 - 4k_p \bar{\zeta}^T \bar{\zeta} \\ & + \underbrace{\bar{\zeta}^T E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon}) \left[ -4k_p [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d + 2J_p(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}} \right]}_3 + \underbrace{4\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\bar{\eta}I - S(\dot{\bar{\epsilon}})] \left\{ E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - \right. \\ & \left. S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d \right\}}_3 + 2\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\bar{\eta}I + S(\bar{\epsilon})] \left\{ J_p(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{v}} - 2k_p [E(\bar{\eta}, \bar{\epsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - S(\bar{\epsilon})] S(\bar{\epsilon}) \mathbf{p}_d] \right\} - \underbrace{4\bar{\epsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\dot{\bar{\epsilon}}) \mathbf{p}_d}_4 \\ & - \underbrace{4\dot{\bar{\epsilon}}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \bar{\epsilon}}_1 - 2\lambda \dot{\eta} + \bar{\mathbf{v}}^T \dot{\bar{\mathbf{v}}}, \end{aligned}$$



## 6. Control de postura con cuaterniones duales unitarios

Si en el término 2 se sustituye (6.3) y se emplea la propiedad (6.18), se tiene que el término 2 es:

$$4\mathbf{p}_d^T \mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})[\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})][\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})]\mathbf{p}_d \quad (6.21)$$

Desarrollando el producto del término 3, y empleando las propiedades (2.14) y (2.17) y la restricción (4.3) de los cuaterniones unitarios, se tiene que el término 3 es:

$$4k_p \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.22)$$

por lo tanto  $\dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}})$  queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}}) = & \underbrace{4\mathbf{p}_d^T \mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})[\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})][\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})]\mathbf{p}_d}_{\text{1}} - 4k_p \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} + 4k_p \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ & + 2\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T E(\bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})J_p(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}} + \underbrace{4\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)[\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})][\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})]\mathbf{p}_d}_{\text{2}} - \underbrace{4k_p \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)[\dot{\eta}I + \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})]}_{\text{3}} E(\bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \\ & - \underbrace{4k_p \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)[\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})][\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})\mathbf{S}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})]\mathbf{p}_d}_{\text{4}} + \underbrace{2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)[\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})]}_{\text{5}} J_p(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}} - 2\lambda\dot{\eta} + \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Desarrollando el producto del término 2 y 3, y empleando las propiedades (2.14) y (2.17) y la restricción (4.3) de los cuaterniones unitarios, se tiene que el término 2 y 3 son:

$$-4k_p \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \quad \text{y} \quad 4k_p \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.23)$$

respectivamente. Finalmente, si de (6.15) se sustituye  $\eta$  y  $\dot{\mathbf{v}}$ ,  $\dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}})$  es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}}) = & -4k_p \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - 8k_p \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - 2\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T E(\bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})J_p(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}} + 4k_p \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ & - 2\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)[\dot{\eta}I - \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})]J_p(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}} - \lambda[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T K_o \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T J_v(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}}] - \bar{\mathbf{v}}^T K_v \bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

Ahora bien, reacomodando la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}}) = & -\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T [\lambda K_o - 4k_p \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)^2] \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T [\lambda J_o \mathbf{q} + 2\mathbf{S}(\mathbf{p}_d)[\dot{\eta}I + \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)]J_p(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}} - \\ & \bar{\mathbf{v}}^T K_v \bar{\mathbf{v}} - 4k_p \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 8k_p \mathbf{S}(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\zeta}} + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T [2E(\bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})J_p(\mathbf{q})]\bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

y como  $\|\dot{\eta}I + \mathbf{S}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})\| = 1$ , entonces

$$\dot{V}(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \bar{\eta}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{v}}) \leq \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\| \\ \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \\ \|\bar{\mathbf{v}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4k_p & & -4k_p \|\mathbf{p}_d\| & & -k_{J_p} \\ -4k_p \|\mathbf{p}_d\| & \{\frac{1}{2}\lambda\lambda_m\{K_o\} - 4k_p \|\mathbf{p}_d\|^2\} & & -\frac{1}{2}\lambda k_{J_v} - \|\mathbf{p}_d\| k_{J_p} & \\ & -k_{J_p} & -\frac{1}{2}\lambda k_{J_v} - \|\mathbf{p}_d\| k_{J_p} & & \lambda_m\{K_v\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}\| \\ \|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \\ \|\bar{\mathbf{v}}\| \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda(1 - \tilde{\eta})^2.$$

donde si se selecciona un valor que satisfaga (6.17) de  $\lambda$ , la matriz es definida positiva y entonces  $\dot{V}(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\omega})$  es definida negativa, localmente alrededor del equilibrio  $E_{C1}$  en  $D_{C1}$ . Se tienen entonces las condiciones suficientes para concluir que el equilibrio  $E_{C1}$  es asintóticamente estable. Esto implica que partiendo de una condición inicial cerca de  $E_{C1} \in D_{C1}$  se cumple el objetivo de control de postura.

### 6.3. Control dinámico

La ley de control dinámico que se propone:

$$\begin{aligned} \tau = M(\mathbf{q})J(\mathbf{q}) + \left[ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{p}}_d + K_{V_p}\dot{\mathbf{p}} + 2K_{P_p} \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})\mathbf{p}_d \right] \\ \dot{\tilde{\omega}}_d + K_{V_\omega}\tilde{\omega} + K_{P_\omega}\tilde{\varepsilon} \end{array} \right] - \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Sustituyendo la ley de control (6.24) en la dinámica del robot, se llega a:

$$\left[ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{p}} + K_{V_p}\dot{\mathbf{p}} + 2K_{P_p} \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})\mathbf{p}_d \right] \\ \dot{\tilde{\omega}} + K_{V_\omega}\tilde{\omega} + K_{P_\omega}\tilde{\varepsilon} \end{array} \right] = \mathbf{0}. \quad (6.25)$$

Ahora, empleando (4.18), (6.25) y (6.4), la ecuación de malla cerrada completa en términos de las variables de estado:  $\tilde{\zeta}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\tilde{\eta}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$ , y  $\tilde{\omega}$ , es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})\dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})\dot{\mathbf{p}} - \begin{bmatrix} 0 \\ S(\tilde{\varepsilon})\mathbf{p}_d + S(\tilde{\varepsilon})\dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} \\ -K_{V_p}\dot{\mathbf{p}} - 2K_{P_p} \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} + [\tilde{\eta}I - S(\tilde{\varepsilon})]S(\tilde{\varepsilon})\mathbf{p}_d \right] \\ -\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^T \tilde{\omega} \\ \frac{1}{2}[\tilde{\eta}I + S(\tilde{\varepsilon})]\tilde{\omega} - S(\tilde{\varepsilon})\omega_d \\ -K_{V_\omega}\tilde{\omega} - K_{P_\omega}\tilde{\varepsilon} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \tilde{\zeta} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \in D_D, \quad (6.26)$$

donde

$$D_D = S_D^3 \times \mathbb{R}^5 = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\zeta} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{14}; \tilde{\eta}^2 + \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\varepsilon} - 1 = 0, \begin{bmatrix} \tilde{\eta} & \tilde{\varepsilon}^T \end{bmatrix} \tilde{\zeta} = 0 \right\}.$$

El sistema es no autónomo, y tiene dos puntos de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\zeta}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\ \dot{\tilde{\eta}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \end{bmatrix} = E_{D1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in D_D \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\zeta}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \\ \dot{\tilde{\eta}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \end{bmatrix} = E_{D2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in D_D.$$

Se supone que el equilibrio  $E_{D1}$  es estable y que el equilibrio  $E_{D2}$  es inestable.

### 6.3.1. Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad del equilibrio  $E_{D1}$ , considérese la siguiente función de Lyapunov, inspirada en la función definida en [17]:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\zeta}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{p}}^T \tilde{\mathbf{p}} + 2(k_{p_p} + k_{v_p}) \left[ \tilde{\zeta}^T \tilde{\zeta} + 2\tilde{\mathbf{e}}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{S}(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta} - \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}_d)^2 \tilde{\mathbf{e}} \right] + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ & + 2\tilde{\mathbf{p}}^T \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}})^T \tilde{\zeta} - [\tilde{\eta}I - \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{e}})] \mathbf{S}(\mathbf{p}_d) \tilde{\mathbf{e}} \right] - \gamma \left[ (\tilde{\eta} - 1)^2 + \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T K_{p_c}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

con  $K_{p_p} = \text{diag}\{k_p\}$  y  $\gamma$  tal que

$$\begin{aligned} \min & \left\{ 2 \frac{\sqrt{\frac{\lambda_m\{K_{p_c}^{-1}\}}{8}(k_{p_p} + k_{v_p} - 2)(k_{v_p} + k_{v_p} - 2) - \frac{1}{4}\|\mathbf{p}_d\|^4(k_{p_p} + k_{v_p})^2(k_{p_p} + k_{v_p} - 2)^2}}{\lambda_m\{K_{p_c}^{-1}\}(k_{p_p} + k_{v_p} - 2)} \right. \\ & \left. + \frac{\|\mathbf{p}_d\|^2(k_{p_p} + k_{v_p})(k_{p_p} + k_{v_p} + 2)}{k_{p_p} + k_{v_p} - 2} + \frac{\lambda_m\{K_{p_c}^{-1}\}}{2\lambda_m\{K_{v_c}\}} + \frac{\lambda_{\max}\{K_{v_c}\}\lambda_m\{K_{p_c}^{-1}\} + \|\boldsymbol{\omega}_d\|\lambda_m\{K_{p_c}^{-1}\}}{2\lambda_m\{K_{v_c}\}(\lambda_m\{K_{v_c}\} - 8k_{p_p}\|\mathbf{p}_d\|^2)} \right\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Empleando el teorema de Rayleigh-Ritz, y la desigualdad de Schwartz, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} V(\tilde{\zeta}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \geq & \gamma(\tilde{\eta} - 1)^2 - \\ & \begin{bmatrix} \|\tilde{\zeta}\| \\ \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{e}}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2(k_{p_p} + k_{v_p}) & -1 & -2(k_{p_p} - k_{v_p})\|\tilde{\mathbf{p}}_d\| & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\|\tilde{\mathbf{p}}_d\| & 0 \\ -2(k_{v_p} + k_{v_p})\|\tilde{\mathbf{p}}_d\| & -\|\tilde{\mathbf{p}}_d\| & \gamma & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\gamma}{2}\lambda_m\{K_{p_c}^{-1}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\zeta}\| \\ \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{e}}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que, si se cumple (6.28) entonces  $V(\tilde{\zeta}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}})$  es definida positiva.

## 6. Control de postura con cuaterniones duales unitarios

Derivando la función candidata de Lyapunov (6.27) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, \bar{\varepsilon}, \bar{v}) &= \dot{\bar{p}}^T \dot{\bar{p}} + (k_{p_v} + k_{v_p}) \left\{ 4\bar{\zeta}^T \dot{\bar{\zeta}} + 4\bar{\varepsilon}^T \left[ \mathbf{0} \quad S(\mathbf{p}_d) \right] \dot{\bar{\zeta}} + 4\bar{\varepsilon}^T \left[ \mathbf{0} \quad S(\bar{p}_d) \right] \dot{\bar{\zeta}} + \right. \\ &4\bar{\varepsilon}^T \left[ \mathbf{0} \quad S(\mathbf{p}_d) \right] \dot{\bar{\zeta}} - 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \bar{\varepsilon} - 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\bar{p}_d) \bar{\varepsilon} \left. \right\} + 2\dot{\bar{p}}^T \left[ E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} - [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\mathbf{p}_d) \bar{\varepsilon} \right] + \\ &2\dot{\bar{p}}^T \frac{d}{dt} \left[ E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} - [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\mathbf{p}_d) \bar{\varepsilon} \right] - 2\gamma\dot{\eta} + \gamma\bar{\omega}^T K_{p_v}^{-1} \dot{\bar{\omega}} + \bar{\varepsilon}^T \dot{\bar{\omega}} + \bar{\varepsilon}^T \dot{\bar{\omega}} \end{aligned}$$

y sustituyendo únicamente  $\dot{\bar{p}}$  y  $\dot{\bar{\zeta}}$  de (6.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, \bar{\varepsilon}, \bar{v}) &= -k_{v_v} \underbrace{\dot{\bar{p}}^T \dot{\bar{p}}}_{1} - 2k_{p_p} \underbrace{\dot{\bar{p}}^T \left[ E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon}) \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d \right]}_{2} + (k_{v_v} + k_{v_p}) \\ &\underbrace{\left\{ 4\bar{\zeta}^T E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon}) \left[ E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d \right] - 4\bar{\zeta}^T \left[ \begin{array}{c} 0 \\ S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d + S(\bar{\varepsilon}) \dot{\bar{p}}_d \end{array} \right] + 2\bar{\zeta}^T E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon}) \dot{\bar{p}} \right\}}_{3} \\ &+ 4\bar{\varepsilon}^T \left[ \mathbf{0} \quad S(\mathbf{p}_d) \right] \dot{\bar{\zeta}} + 4\bar{\varepsilon}^T \left[ \mathbf{0} \quad S(\bar{p}_d) \right] \dot{\bar{\zeta}} + 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\dot{\bar{\eta}}I - S(\dot{\bar{\varepsilon}})] \left\{ E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} + [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d \right\} + \\ &2\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\dot{\bar{\eta}}I - S(\dot{\bar{\varepsilon}})] \dot{\bar{p}} - 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\dot{\bar{\varepsilon}}) \dot{\bar{p}}_d - 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\bar{\varepsilon}) \dot{\bar{p}}_d - 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \dot{\bar{\varepsilon}} - 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) S(\bar{p}_d) \dot{\bar{\varepsilon}} \left. \right\} + \\ &2\dot{\bar{p}}^T \left[ E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} - [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\mathbf{p}_d) \bar{\varepsilon} \right] - \dot{\bar{p}}^T \underbrace{\frac{d}{dt} \left[ E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} - [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\mathbf{p}_d) \bar{\varepsilon} \right]}_{5} - 2\gamma\dot{\eta} + \gamma\bar{\omega}^T K_{p_v}^{-1} \dot{\bar{\omega}} + \\ &\bar{\varepsilon}^T \dot{\bar{\omega}} - \bar{\varepsilon}^T \dot{\bar{\omega}} \end{aligned}$$

De las ecuaciones (6.19) y (6.21) se tiene que el término 2, es igual a:

$$4\mathbf{p}_d^T S(\bar{\varepsilon}) [\dot{\bar{\eta}}I - S(\dot{\bar{\varepsilon}})] E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} + 4\mathbf{p}_d^T S(\bar{\varepsilon}) [\dot{\bar{\eta}}I - S(\dot{\bar{\varepsilon}})] [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d$$

Por otro lado, de (6.4) se tiene que el término 5 es  $\frac{1}{2}\dot{\bar{p}}$ . Ahora se procede a sustituir  $\dot{\bar{p}}$  tomando en cuenta las reducciones obtenidas en (6.20) y (6.23):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, \bar{\varepsilon}, \bar{v}) &= -k_{v_v} \dot{\bar{p}}^T \dot{\bar{p}} - 2k_{p_p} \dot{\bar{p}}^T [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d + 2k_{v_p} \underbrace{\dot{\bar{p}}^T E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta}}_{1} + (k_{p_v} + k_{v_p}) \\ &\underbrace{\left\{ 4\mathbf{p}_d^T S(\bar{\varepsilon}) [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} + 4\mathbf{p}_d^T S(\bar{\varepsilon}) [\bar{\eta}I - S(\dot{\bar{\varepsilon}})] [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d \right\}}_{3} \\ &+ 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} + 4\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\bar{\eta}I - S(\dot{\bar{\varepsilon}})] [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d + 2\bar{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\bar{\eta}I + \\ &S(\bar{\varepsilon})] \dot{\bar{p}} \left. \right\} - 2k_{v_v} \underbrace{\dot{\bar{p}}^T E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta}}_{1} - 4k_{p_p} \underbrace{\bar{\zeta}^T \bar{\zeta}}_{2} - 4k_{p_p} \mathbf{p}_d^T S(\bar{\varepsilon}) [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] E(\bar{\eta}, \bar{\varepsilon})^T \bar{\zeta} - 2k_{v_p} \dot{\bar{p}}^T [\bar{\eta}I - S(\bar{\varepsilon})] S(\bar{\varepsilon}) \mathbf{p}_d - \end{aligned}$$

$$4k_{p_v} \tilde{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta} + 4k_{p_p} \tilde{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \tilde{\varepsilon} + \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \tilde{\mathbf{p}} - 2\gamma \dot{\tilde{\eta}} + \gamma \tilde{\omega}^T K_{p_o}^{-1} \tilde{\omega} + \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\omega} + \tilde{\varepsilon}^T \dot{\tilde{\omega}}$$

De (6.23) se tiene que el término 3 es

$$-4k_p \tilde{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta}, \quad (6.29)$$

de manera que sustituyendo (6.29) en  $\dot{V}(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\omega})$  y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\zeta}, \tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\omega}) = & -k_{v_p} \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \tilde{\mathbf{p}} - \underbrace{2k_{p_p} \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T [\dot{\tilde{\eta}} I - S(\tilde{\varepsilon})] S(\tilde{\varepsilon}) \mathbf{p}_d + 2(k_{p_v} + k_{v_p}) \tilde{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d) [\dot{\tilde{\eta}} I - S(\tilde{\varepsilon})] \dot{\tilde{\mathbf{p}}}}_{\downarrow} \\ & 4k_{p_p} \tilde{\zeta}^T \tilde{\zeta} - \underbrace{2k_{v_p} \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T [\dot{\tilde{\eta}} I - S(\tilde{\varepsilon})] S(\tilde{\varepsilon}) \mathbf{p}_d - 8k_{p_p} \tilde{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta} + 4k_{p_p} \tilde{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \tilde{\varepsilon} + \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \tilde{\mathbf{p}} - 2\gamma \dot{\tilde{\eta}} +}_{\downarrow} \\ & \gamma \tilde{\omega}^T K_{p_o}^{-1} \tilde{\omega} + \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\omega} + \tilde{\varepsilon}^T \dot{\tilde{\omega}} \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo de las trayectorias del sistema (6.26)  $\dot{\tilde{\eta}}$ ,  $\dot{\tilde{\omega}}$  y  $\dot{\tilde{\omega}}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \dot{\tilde{\eta}}, \tilde{\varepsilon}, \dot{\tilde{\omega}}) = & -(k_{v_p} - 1) \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \tilde{\mathbf{p}} - 4k_{p_p} \left[ \tilde{\zeta}^T \tilde{\zeta} + 2\tilde{\varepsilon}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & S(\mathbf{p}_d) \end{bmatrix} \tilde{\zeta} - \tilde{\varepsilon}^T S(\mathbf{p}_d)^2 \tilde{\varepsilon} \right] - \tilde{\varepsilon}^T K_{p_o} \tilde{\varepsilon} \\ & - \tilde{\varepsilon}^T [K_{v_o} + S(\omega_d)] \dot{\tilde{\omega}} - \dot{\tilde{\omega}}^T \left[ \gamma K_{p_o}^{-1} K_{v_o} - \frac{1}{2} \dot{\tilde{\eta}} I \right] \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Empleando el teorema de Rayleigh Ritz y la desigualdad de Schwartz se puede demostrar que

$$\dot{V}(\tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \dot{\tilde{\eta}}, \tilde{\varepsilon}, \dot{\tilde{\omega}}) \leq -\frac{1}{2} \lambda_m \{K_{p_o}\} (1 - \tilde{\eta}^2) - \begin{bmatrix} \|\tilde{\zeta}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \\ \|\tilde{\varepsilon}\| \\ \|\dot{\tilde{\omega}}\| \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} \|\tilde{\zeta}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \\ \|\tilde{\varepsilon}\| \\ \|\dot{\tilde{\omega}}\| \end{bmatrix},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 4k_{p_p} & 0 & -4k_{p_p} \|\tilde{\mathbf{p}}_d\| & 0 \\ 0 & k_{v_p} - 1 & 0 & 0 \\ -4k_{p_p} \|\tilde{\mathbf{p}}_d\| & 0 & \frac{1}{2} \lambda_m \{K_{p_o}\} - 4k_{p_p} \|\tilde{\mathbf{p}}_d\|^2 & -\frac{1}{2} \lambda_M \{K_{v_o}\} - \frac{1}{2} \|\dot{\tilde{\omega}}_d\| \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \lambda_M \{K_{v_o}\} - \frac{1}{2} \|\dot{\tilde{\omega}}_d\| & \frac{1}{2} \lambda_m \{K_{p_o}^{-1}\} \lambda_m \{K_{v_o}\} - \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

si se cumple (6.28) entonces  $A$  es definida positiva y  $\dot{V}(\tilde{\zeta}, \dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \dot{\tilde{\eta}}, \tilde{\varepsilon}, \dot{\tilde{\omega}})$  es definida negativa localmente alrededor del equilibrio  $E_{D_1}$  en  $D_D$ .

## 6. Control de postura con cuaterniones duales unitarios

---

Se tienen entonces las condiciones suficientes para concluir que el equilibrio  $E_{D1}$  es asintóticamente estable. Esto implica que partiendo de una condición inicial cerca de  $E_{D1} \in D_D$  se cumple el objetivo de control de postura.

## Capítulo 7

### Evaluación de controladores

En este capítulo se evalúa la aplicación de los controladores propuestos en el capítulo 6, mediante simulaciones numéricas con el robot Mitsubishi PA10-7CE. Este robot tiene 7 g.d.l por lo que es redundante para tareas de control de postura. Sin embargo, para evitar definir una tarea secundaria y asegurar una solución única al problema de seguimiento de la postura deseada, se decidió considerar que la articulación No.3 esté bloqueada y por lo tanto sólo se tienen sólo 6 g.d.l.

Las características principales del robot PA10-7CE, así como el modelo cinemático empleando cuaterniones duales y su jacobiano geométrico, se presentan en el apéndice. Para las simulaciones se empleó el el paquete Simulink de Matlab. En la figura 7.1 se muestra el diagrama que ilustra como la simulación fue efectuada.

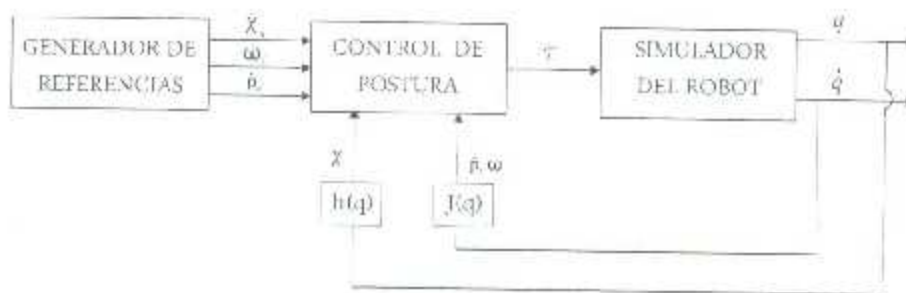


Figura 7.1: Diagrama de bloques del proceso de simulación.

Tabla 7.1: Parámetros de las trayectorias empleados en las simulaciones.

Parámetro	Valor	Unidad
$a$	0.01	rad
$b$	2.50	rad
$c$	0.10	-
$d$	0.40	rad
$\alpha$	0.75	rad/s
$\beta$	1.00	rad/s
$\gamma$	1.00	1/s
$\rho$	0.150	m

## 7.1. Movimiento deseado

La trayectoria de orientación deseada es similar a la que se usa en [17]; esta trayectoria emplea un cuaternión para representar la orientación; el ángulo y eje característicos deseados  $\theta_d(t) \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{u}_d(t) \in S^2$  están dados por:

$$\theta_d(t) = d + \pi [1 + a \sin(\alpha t)] \quad (7.1)$$

$$\mathbf{u}_d(t) = \begin{bmatrix} c \cos(b \sin(\beta t)) \\ c \sin(b \sin(\beta t)) \\ \sqrt{1 - c^2} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

mientras que la trayectoria de posición está dada por:

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} \rho \sin(\gamma t) \\ 0.2 \\ 0.7 \end{bmatrix}.$$

donde los valores de los parámetros empleados en la simulación son los que se presentan en la tabla 7.1.

El cuaternión dual unitario deseado  $\chi_d$  está dado por:

$$\chi_d = \boldsymbol{\xi}_d + \sigma \boldsymbol{\zeta}_d = \boldsymbol{\xi}_d + \sigma \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_d \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{\xi}_d.$$



aplicando expresiones similares a las de (4.4),  $\xi_d$  está dado por:

$$\xi_d = \begin{bmatrix} \eta_d(t) \\ \varepsilon_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \end{bmatrix} \mathbf{u}_d(t) - \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \\ c \cos(b \sin(\beta t)) \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \\ c \sin(b \sin(\beta t)) \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \\ \sqrt{1-c^2} \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

mientras que  $\zeta$  se obtiene como:

$$\begin{aligned} \zeta_d(t) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_d \end{bmatrix} \otimes \xi_d - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \operatorname{sen}(\gamma t) \\ 0.2 \\ 0.7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \\ c \cos(b \sin(\beta t)) \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \\ c \sin(b \sin(\beta t)) \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \\ \sqrt{1-c^2} \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.35\sqrt{1-c^2} - 0.5c\rho \cos(\beta \sin(\beta t)) \sin(\gamma t) - 0.1c \sin(\beta \sin(\beta t)) \sin\left(\frac{\theta_d}{2}\right) \\ 0.5\rho \cos\left(\frac{\theta_d}{2}\right) \sin(\gamma t) + (0.1\sqrt{1-c^2} - 0.35c \sin(\beta \sin(\beta t))) \sin\left(\frac{\theta_d}{2}\right) \\ 0.1 \cos\left(\frac{\theta_d}{2}\right) + (0.35c \cos(\beta \sin(\beta t)) - 0.5\sqrt{1-c^2}\rho \sin(\gamma t)) \sin\left(\frac{\theta_d}{2}\right) \\ 0.35 \cos\left(\frac{\theta_d}{2}\right) - c(-0.1 \cos(\beta \sin(\beta t)) + 0.5\rho \sin(\gamma t) \sin(\beta \sin(\beta t))) \sin\left(\frac{\theta_d}{2}\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La derivada de (7.3) es:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_d(t) &= -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \dot{\theta}_d(t) \\ \dot{\varepsilon}_d(t) &= \sin\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \dot{\mathbf{u}}_d(t) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta_d(t)}{2}\right) \dot{\theta}_d(t) \mathbf{u}_d(t), \end{aligned}$$

donde se debe sustituir  $\dot{\theta}_d(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_d(t)$ , que se obtienen al derivar (7.1) y (7.2); las expresiones correspondientes se omiten por su complejidad y se recomienda obtenerlas en forma recursiva.

Dados los parámetros de Euler descados y sus derivadas, es posible obtener la velocidad angular descada  $\omega_d(t)$ , una expresión similar a (4.21):

$$\omega_d(t) = 2 \{ \dot{\eta}_d(t) \varepsilon_d(t) - \dot{\eta}_d(t) \varepsilon_d(t) + S(\varepsilon_d(t)) \dot{\varepsilon}_d(t) \},$$

en tanto que la velocidad lineal es:

$$\dot{\mathbf{p}}_d(t) = \begin{bmatrix} \rho \gamma \cos(\gamma t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 7.2. Resultados de simulación

En esta sección se presentan los resultados de la simulación del controlador cinemático y el controlador dinámico presentados en el capítulo anterior, aplicados al robot PA10-7CE con 6 g.d.l. En las simulaciones se consideró el siguiente vector de variables articulares :

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7] \in \mathbb{R}^6.$$

Para ambos controladores se utilizaron las mismas trayectorias de movimiento deseadas y las mismas condiciones iniciales del robot. Para la articulación que se mantiene fija, se utilizó un valor constante  $q_3 = 0.3$  rad. Para las otras seis articulaciones se consideraron los siguientes valores iniciales.

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} 1.0600 \\ -0.4525 \\ 2.3158 \\ -1.2952 \\ 2.5881 \\ 1.9118 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

A partir de las condiciones iniciales de las variables articulares, y usando el modelo cinemático directo que se encuentra en el apéndice, se llega al siguiente cuaternión dual para la configuración inicial:

$$\bar{\xi}(0) = \begin{bmatrix} 0.6289 \\ 0.3991 \\ 0.4968 \\ -0.4455 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sigma \left\{ \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0495 \\ 0.2018 \\ 0.5896 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0.6289 \\ 0.3991 \\ 0.4968 \\ -0.4455 \end{bmatrix} \right\} = \xi(0) + \sigma\zeta(0) \in \mathbb{S}_\rho^d.$$

Obsérvese que a partir un cuaternión dual unitario de la forma

$$\chi = \xi + \sigma\zeta = \xi + \frac{1}{2}\sigma \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \otimes \xi$$

es posible extraer el vector  $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{E}$  empleando la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = 2\zeta \otimes \xi^*. \quad (7.5)$$

Así que, usando la fórmula (7.5) se puede extraer la posición inicial del robot PA10

$$\mathbf{p}(0) = \begin{bmatrix} 0.0495 \\ 0.2018 \\ 0.5896 \end{bmatrix}.$$

De (7.4) se tiene que la velocidad lineal y angular inicial del órgano terminal es:

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{p}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para cada controlador se realizaron pruebas de seguimiento. Las ganancias fueron sintonizadas manualmente a manera de reducir el tiempo de convergencia del error a cero y respetando los límites del par y de las velocidades articulares del robot real.

### 7.2.1. Control cinemático

La ley de control del lazo externo (6.9) es:

$$\mathbf{v}_d = J(\mathbf{q})^\dagger \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d + 2K_p \left[ E(\bar{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \bar{\boldsymbol{\zeta}} + [\bar{\boldsymbol{\eta}} I - S(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})] S(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{p}_d \right] \\ \boldsymbol{\omega}_d + K_v \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

mientras que la ley de control del lazo interno (6.7) es:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{v}}_d + K_v \mathbf{v}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}), \quad (7.7)$$

la matriz  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y los vectores  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^6$  y  $g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$  del modelo dinámico, así como el jacobiano geométrico  $J_o(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , son conocidos (ver apéndice A). Tras una fase de sintonización se llegó a la siguiente selección de ganancias para el lazo de control externo:  $K_p = \text{diag}\{75, 75, 31\} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y  $K_v = \text{diag}\{22\} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , y para el lazo de control interno se empleó:  $K_v = \text{diag}\{1.7, 1.5, 0.4, 14, 12, 14\} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ .

La figura 7.2 muestra la evolución temporal del error de postura del órgano terminal del robot manipulador PA10-7CE, dado por  $\|\bar{\mathbf{p}}\|$  para la posición, y  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$  y  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  para la orientación. Se observa una respuesta suave, sin sobreimpulsos. En la figura 7.3 se observa la evolución del error de velocidad lineal y angular, los cuales, como se puede apreciar, convergen a cero en aproximadamente 4 segundos.

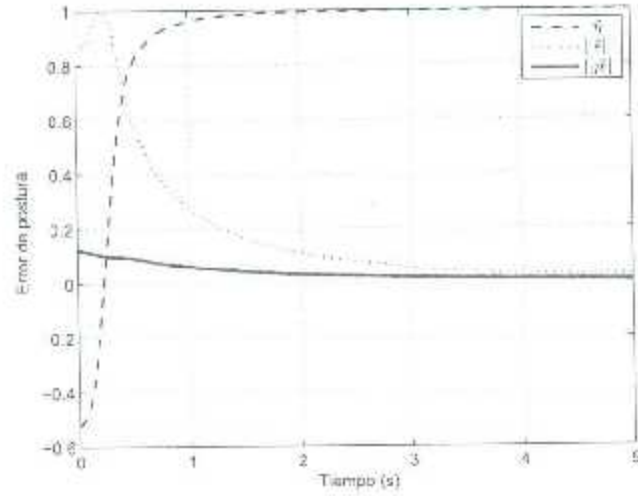


Figura 7.2: Control cinemático: errores de postura.

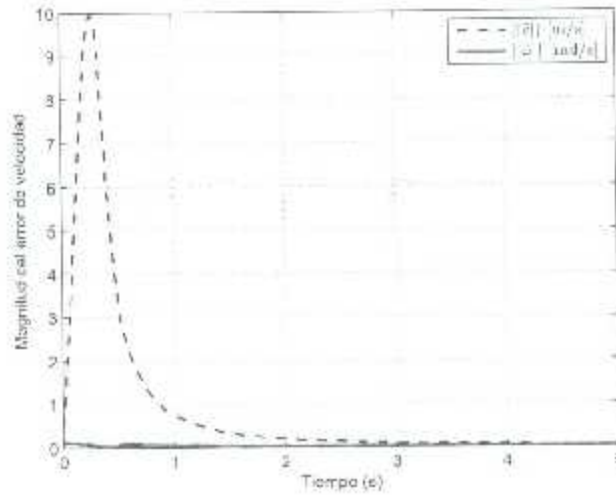


Figura 7.3: Control cinemático: errores de velocidad lineal y angular.

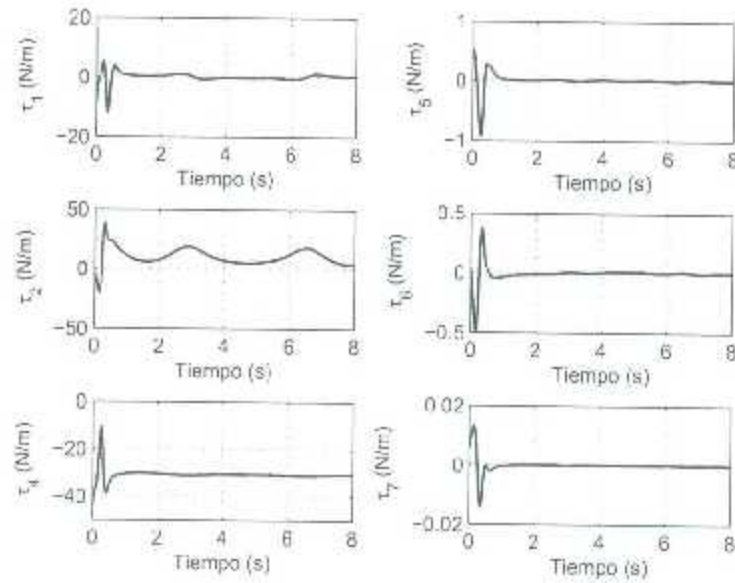


Figura 7.4: Control cinemático: pares articulares aplicados.

En la figura 7.4 se muestran las gráficas de los pares proporcionados a los motores de cada eslabón, los cuales, como se puede observar, no exceden las consignas máximas de par permitidas en el PA10-7CE, las cuales según [41], en Nm son:

$$\tau = \begin{bmatrix} 232 & 232 & 100 & 14.5 & 14.5 & 14.5 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6 \quad (7.8)$$

En la figura 7.5 se muestran las gráficas de las velocidades alcanzadas en las articulaciones de cada eslabón, que tampoco exceden los límites de velocidad de cada motor.

### 7.2.2. Control dinámico

La ley de control está dada por:

$$\tau = M(\mathbf{q})J(\mathbf{q}) \left[ \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_d + K_{V_p} \dot{\mathbf{p}} + 2K_{P_p} \left[ E(\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon})^T \tilde{\zeta} - \tilde{\eta} I - S(\tilde{\varepsilon}) S(\tilde{\varepsilon}) \mathbf{p}_d \right] \\ \dot{\omega}_d + K_{V_\omega} \dot{\omega} + K_{P_\omega} \tilde{\varepsilon} \end{bmatrix} - J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + g(\mathbf{q}).$$

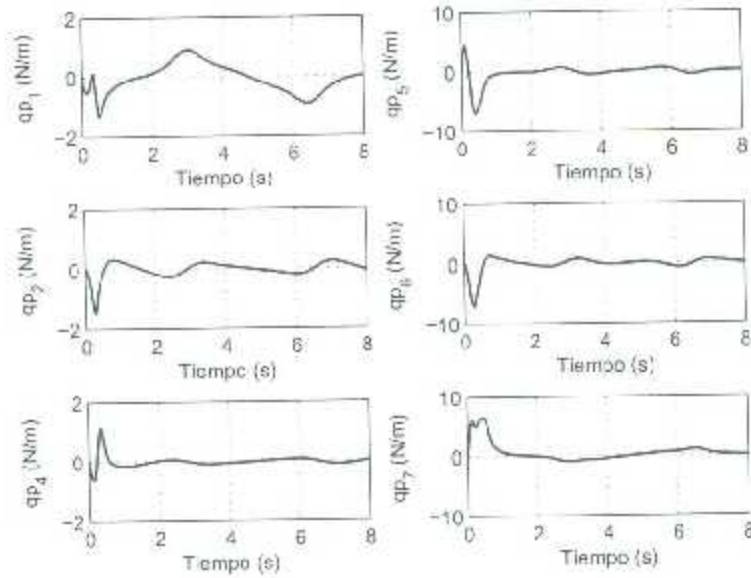


Figura 7.5: Control cinemático: velocidades articulares.

la matriz  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$  y el vector  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$  y  $g(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$  del modelo dinámico, así como el jacobiano geométrico  $J_o(\mathbf{q})^{6 \times 6}$  son conocidos y se proporcionan en el apéndice.

Tras una fase de sintonización, se llegó a la siguiente selección de ganancias:  $K_{V_{\tilde{\mathbf{p}}}} = K_{V_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}} = \text{diag}\{40\}$ ,  $K_{P_{\tilde{\mathbf{p}}}} = \text{diag}\{100\}$  y  $K_{P_{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}} = \text{diag}\{300\}$ .

La figura 7.6 muestra la evolución temporal de los errores de postura del órgano terminal dados por  $\|\tilde{\mathbf{p}}\|$  para la posición y por  $\|\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\|$  para la orientación del robot manipulador PA10-7CE. Se observa una respuesta suave, sin sobreimpulsos.

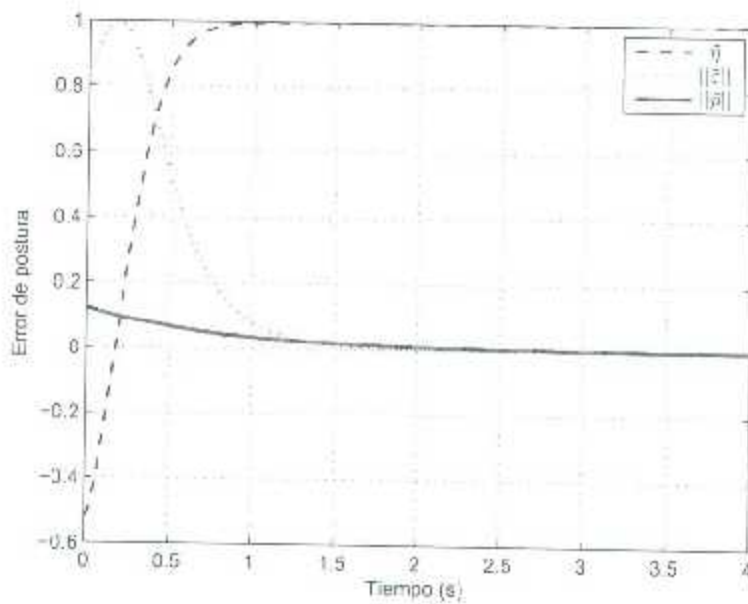


Figura 7.6: Control dinámico: errores de postura.

En la figura 7.7 se observa la evolución de los errores de velocidad lineal y angular, los cuales, como se puede apreciar, convergen a cero en aproximadamente 2 segundos.

En la figura 7.8 se muestran las gráficas de los pares proporcionados a los motores de cada eslabón, los cuales, como se puede observar, no exceden los pares máximos del robot especificados en (7.8).

## Conclusiones

Se han presentado en este capítulo los resultados de una serie de simulaciones numéricas que permiten evaluar el desempeño de los controladores introducidos en el capítulo 6. Las simulaciones se han hecho empleando el Simulink/Matlab. En las simulaciones de ambos controladores se empleó el modelo del robot PA10 [42].

En cada controlador se consideró el caso ideal de un robot sin fricción, en que se observa la convergencia a cero del error de postura (y por tanto el cumplimiento del objetivo de control) para ambos controladores.

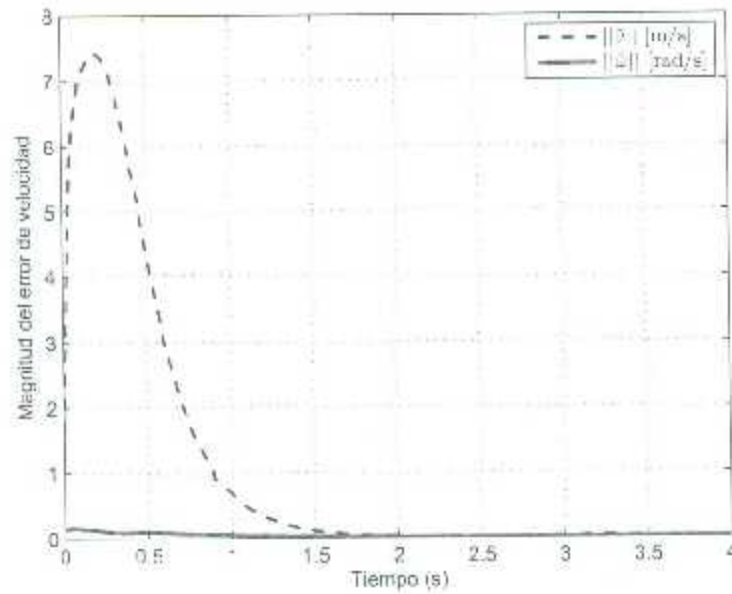


Figura 7.7: Control dinámico: errores de velocidad lineal y angular.

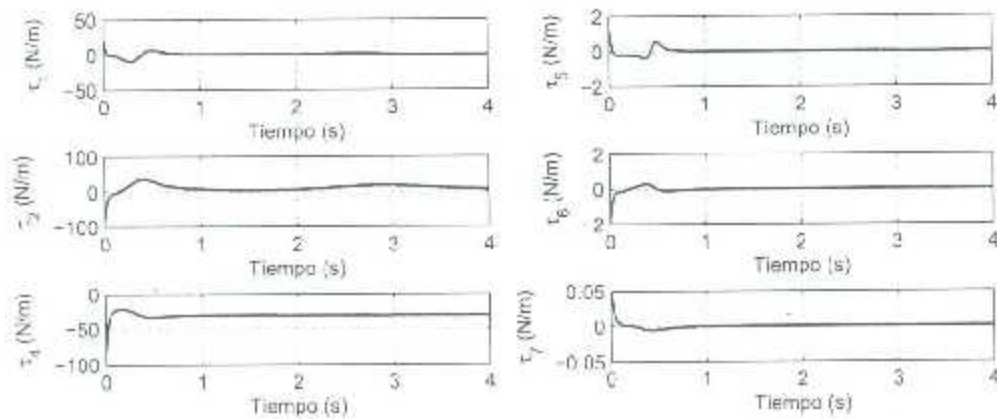


Figura 7.8: Control dinámico: pares articulares aplicados.



## Capítulo 8

### Comentarios y conclusiones

Los números duales son una extensión de los números reales similar a la de los números complejos. Los cuaterniones son a su vez una extensión de los números complejos. Históricamente, los complejos unitarios y los cuaterniones unitarios (que tienen norma igual a uno), se han utilizado para describir rotaciones en el plano (2D) y en el espacio (3D), respectivamente.

Las matrices de rotación son otra forma de representación de la orientación. En esta tesis se ha explicado cómo los números duales, que por sí solos se usan para describir traslaciones, se puedan combinar ya sea con los cuaterniones unitarios, a las matrices de rotación para obtener una parametrización más general de la postura (es decir, la posición y orientación) de un sólido.

Esa propiedad de los números duales de extender las parametrizaciones de la orientación pura a parametrizaciones de la postura completa, se basa en el principio de transferencia mencionado en el capítulo 4. En el caso del modelado y control de robots, como se explicó en los capítulos 5 y 6, los números duales permiten llegar a expresiones más compactas (y por lo tanto más eficientes computacionalmente) lo que es conveniente, sobre todo en aplicaciones de control en tiempo real.

## 8.1. Contribuciones y trabajo futuro

De los objetivos planteados al inicio de la tesis (ver sección 1.4) se puede decir que todos se cumplieron parcialmente. Quizás sólo faltó tiempo para profundizar en el tema del modelado dinámico de cuerpos rígidos y robots en general.

Las aportaciones más relevantes de este trabajo son:

- Estudio de las propiedades y operaciones de los números duales para su aplicación en el modelado cinemático y control de robots.
- Descripción de un procedimiento sistemático para la obtención del modelo cinemático de un robot serial con números duales.
- Obtención del modelo cinemático del PA10-7CE con cuaterniones duales unitarios.
- Propuesta y análisis de estabilidad de dos controladores en espacio de postura que emplean cuaterniones duales unitarios: un controlador cinemático y un controlador dinámico.
- Implementación, via simulaciones, de los controladores propuestos en el robot PA10-7CE operado con sólo 5 g.d.l.
- Resultados parciales de este trabajo de tesis fueron reportados en el artículo "Sobre el uso de números duales en cinemática de cuerpos rígidos" [42] por J. Bernal y R. Campa, que fue presentado en el Congreso Nacional 2012 de la Asociación de México de Control Automático, llevado a cabo en Ciudad del Carmen, Campeche, en octubre de 2012.

En cuanto a los puntos de esta tesis que quedaron pendientes, y que se dejan como trabajo futuro, se consideran los siguientes:

- Un estudio más detallado y formal del problema de modelado dinámico de cuerpos rígidos y robots en general.

- La evaluación experimental de los algoritmos propuestos en un robot manipulador real.
- El estudio y prueba de estabilidad de controladores en espacio de postura incluyendo modelos dinámicos de fricción.
- La reformulación de controladores en espacio de tarea en términos de otras variables de estado, (e.g. usar  $\eta$  y  $\dot{\epsilon}$  para la derivada de la orientación, en vez de  $\omega$ )
- El estudio del problema de planificación de trayectorias empleando cuaterniones duales unitarios.
- Aplicación del modelado con números duales a otro tipo de sistemas (por ejemplo eléctricos, magnéticos, térmicos, etc.).

### 8.2. Comentarios personales

El estudio de este tema de tesis me ha abierto una puerta al conocimiento del mundo de los números hipercomplejos y sus aplicaciones. Dentro de la familia de los números complejos generalizados, tanto los números duales como los números complejos ordinarios, son empleados para el modelado de sólidos, como se explica en esta tesis. Respecto a los números dobles, se sabe que se emplean en la teoría de la relatividad para el modelado del espacio-tiempo; sin embargo, sería interesante estudiar si es posible emplearlos al modelado de sólidos, al igual que los números complejos y duales se usan en la actualidad.

Sin duda alguna, el modelado de la orientación es muy interesante. Al profundizar en el estudio de este tema me han surgido algunas preguntas que me motivan a seguir aprendiendo más. Por ejemplo, me intriga saber si existirá una parametrización tan simple como el cuaternion (en cantidad de elementos que la forman), pero que además de ser global posea unicidad, o si existirá un marco coordinado respecto al cual el orden en que se efectúan las rotaciones de un cuerpo rígido no importa.

Respecto al modelado dinámico, aunque ya existen algunos trabajos reportados en la literatura sobre su aplicación en los métodos de Newton-Euler y Euler-Lagrange, falta no sólo formalizar muchas cosas, sino estudiar la aplicación empleando otros métodos para modelado dinámico.

El conocimiento de los cuaterniones y números duales, y mi perfil como ingeniera en Mecatrónica, me lleva pensar en la posible aplicación de los cuaterniones en el análisis de circuitos trifásicos, ya que si los números complejos se emplean con total eficacia en circuitos monofásicos, entonces quizás se puedan emplear los cuaterniones también en esta rama de la ingeniería. Por otra parte, también resulta fascinante la posible aplicación de los números duales en el electromagnetismo, lo cual, hasta donde tengo conocimiento, no se ha realizado hasta el momento.

Realmente esta tesis ha cambiado mi modo de percibir el mundo, me ha dejado más llena de dudas que cuando comencé la maestría. Para finalizar, mencionaré la fascinación que siento al pensar en la aplicación del modelado dinámico (tal y como se usa en Mecánica) en otras áreas de la ingeniería como: hidráulica, eléctrica, termodinámica y química. Debido a la analogía que existe entre los diversos sistemas encontrados en la naturaleza, debería ser posible en todos estos sistemas aplicar tal analogía.

## Referencias

- [1] Graña, M., G. Jerónimo, A. Pacetti, A. P. Jancsa y A. Petrovich. *Los Números: De los Naturales a los Complejos*. Instituto Nacional de Educación Tecnológica de Argentina, 2009.
- [2] Knott, A. P. "The history of vectors and matrices". *Mathematics in School*, Vol. 7, No. 5, pp. 32-34, 1978.
- [3] Baez, J. C., "The octonions". *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 39, No. 2, pp. 145-205, 2002.
- [4] Funda, J. "A computational analysis of line-oriented screw transformations in robotics". Technical report, University of Pennsylvania, 1988.
- [5] Baylis, W. E. (Ed.) *Clifford (Geometric) Algebras: with Applications in Physics, Mathematics, and Engineering*. Birkhäuser, 1996.
- [6] Yaglom, I. M. *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis*. Springer-Verlag, 1979.
- [7] Catoni, F., D. Boccaletti, R. Canasta, V. Catoni y P. Zampetti. *Geometry of Minkowski Space-Time*. Springer, 2011.
- [8] Barrientos, A., L. F. Peñin, C. Balaguer y R. Aracil. *Fundamentos de Robótica*. McGraw-Hill, 1999.
- [9] Kelly, R. y V. Santibáñez. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Prentice Hall, 2003.

- 
- [10] Bugarín E., A. Gutiérrez y A. Y. Aguilar-Bustos. "Modelado cinemático de un robot móvil omnidireccional no estándar". *Memorias del XV Congreso Latinoamericano de Control Automático*, Lima, Perú, octubre 2012.
- [11] McCarthy, J. M. y G. Soh *Geometric Design of Linkages*. Springer Science, 2011.
- [12] Brodsky, V. y M. Shoham. "Dual Numbers Representation of Rigid Body Dynamics", *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol.34, No.5, pp. 693-718, 1999.
- [13] Lanchos, C. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Dover Publications, 1985.
- [14] Sciavicco, L. y B. Siciliano. *The Variational Principles of Mechanics*. Springer-Verlag, 2000.
- [15] Fu, K. S., R. C. González y C. S. G. Lee. *Robotica: Control, Detección, Visión e Inteligencia*. McGraw-Hill/Interamericana, 1988.
- [16] Campa, R., E. Torres, F. Salas y V. Santibáñez. "On modeling and parameter estimation of brushless DC servoactuators for position control tasks". *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea, July 2008.
- [17] Campa, R. *Control de robots manipuladores en espacio de tarea*. Tesis doctoral. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Ensenada, B.C., 2005.
- [18] Brodsky, V. y M. Shoham. "On Properties of the Dual Quaternions", *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 4, No. 2, pp. 142-146, 2011.
- [19] Khalil, W. y J. Kleinfinger. "A new geometric notation for open and closed-loop robots". *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, April, 1986.
- [20] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.

- 
- [21] Bach, R. y R. Paielli. "Linearization of attitude control error dynamics". *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 38, pp. 1521-1525, 1993.
- [22] Rooney, J. "William Kingdon Clifford (1845-1879)". In: Ceccarelli, M. (ed). *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Sciences: Their Contributions and Legacies*, pp. 79-116, Springer, 2007.
- [23] Ramírez, J., E. A. Merchán, E. Lugo, R. Rodríguez, R. Ponce y G. Urriolagoitia. "Desarrollo de una nueva solución compacta a la cinemática de manipuladores robóticos basada en cuaterniones duales". *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Vol. 8, No. 4, pp. 334-344, 2011.
- [24] Da-Peng, H., W. Qing y L. Ze-Xiang. "Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions". *International Journal of Automation and Computing*. Vol. 5, pp. 319-324, 2008.
- [25] Denavit, J. y R. S. Hartenberg. "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices". *Journal of Applied Mechanism*. Vol. 22, pp. 215-221, 1955.
- [26] Khatib, O. 1987. "A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation". *IEEE Journal of Robotics and Automation*. Vol. 3, pp. 43-53, 1987.
- [27] Natale, C. *Interaction Control of Robot Manipulators: Six Degrees-of-freedom Tasks*. Springer, 2003.
- [28] Yuan, J. S. C. "Closed-loop manipulator control using quaternion feedback". *IEEE Journal of Robotics and Automation*. Vol. 4, pp. 434-440, 1988.
- [29] Luh, J. Y. S, M. W. Walker y R. P. C. Paul. "Resolved-acceleration control of mechanical manipulators". *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 25, pp. 486-474, 1980.

- 
- [30] Caccavale, F., B. Siciliano y L. Villani. "The role of Euler parameters in robot control". *Asian Journal of Control*. Vol. 1, pp. 25–34. 1999.
- [31] Lin, S. K. "Robot control in Cartesian space". En: G.W. Zobrit, C.Y. Ho (eds.), *Progress in Robotics and Intelligent Systems*. pp. 85–124. Ablex. 1995.
- [32] Xian, B., M. S. de Queiroz, D. Dawson e I. Walker. "Task-space tracking control of robot manipulators via quaternion feedback". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. Vol 20, pp. 160–167. 2004.
- [33] Campa, R., K. Camarillo y L. Arias. "Kinematic modeling and control of robot manipulators via unit quaternions: Application to a spherical wrist ". Proceedings of the *45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, December 2006.
- [34] Wang, X. "Feedback linearization regulator with coupled attitude and translation dynamics based on unit dual quaternion". Proceedings of the *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, Changsha, China, September 2010.
- [35] Lee, U. y Mesbahi, M. "Dual quaternions, rigid body mechanics, and powered-descent guidance". Proceedings of the *51st IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii. December 2012.
- [36] Han, D., Q. Wei, Z. Li, W. Sun. "Control of oriented mechanical systems: A method based on dual quaternion". Proceedings of the *17th IFAC World Congress* . Seoul, Korea, July 2008.
- [37] Pham, H., V. Perdereau, B. Vilhena, P. Fraisse. "Position and orientation control of robot manipulators using dual quaternion feedback". *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) IEEE/RSJ*. Taipei, Taiwan, pp. 658-663, October 2010.
- [38] Adorno, B., P. Fraisse y S. Druon. "Dual position control strategies using the cooperative dual task-space framework". Proceedings of the *International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Taipei, Taiwan, October 2010.



- 
- [39] Campa, R. y H. de la Torre. "On the representations of orientation for pose control tasks in robotics". *Memorias del VIII Congreso Mexicano de Robótica*, México, D.F., octubre 2010.
- [40] Whitney, D. E. "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses". *IEEE Transactions on Man Machine Systems*. Vol. 10, No. 2, pp. 47-53. 1969.
- [41] Ramírez, C. *Modelado dinámico y control en modo par del robot Mitsubishi PA10-7CE*. Tesis de maestría. Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., 2008.
- [42] Bernal, J. y R. Campa. "Sobre el uso de números duales en cinemática de cuerpos rígidos". *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2012*, Cd. del Carmen, Campeche, octubre 2012.
- [43] Salinas, A. *Análisis e implementación de esquemas de control de interacción activa para robots manipuladores. Aplicación al robot Mitsubishi PA10*. Tesis de maestría. Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah., diciembre 2011.

## Apéndice A

### El robot PA10-7CE de 6 g.d.l.

El Brazo Inteligente Portátil de Propósito General (“Portable General-Purpose Intelligent Arm” PA10), mejor conocido como “PA10”, es un robot manipulador industrial de arquitectura abierta desarrollado por Mitsubishi Heavy Industries.

Existen dos versiones del robot Mitsubishi PA10: el PA10-6C y el PA10-7C, donde el dígito del sufijo indica el número de grados de libertad del brazo y la “C” indica que estos modelos son para cuarto limpio (“clean room”), lo que significa que su estructura está sellada. Los modelos con el sufijo “CE” son la versión mejorada de los “C”.

El Laboratorio de Mecatrónica y Control del IITL cuenta con el robot PA10-7CE cuyo modelo ha sido obtenido en trabajos previos [41], [42].

En esta tesis, con tal de evitar el tema de diseño de tareas secundarias que aseguren una solución única en el control de movimiento de robots redundantes, se decidió trabajar sólo con seis articulaciones del robot PA10-7CE. Para esto simplemente se consideró que la articulación número 3 se mantiene bloqueada.

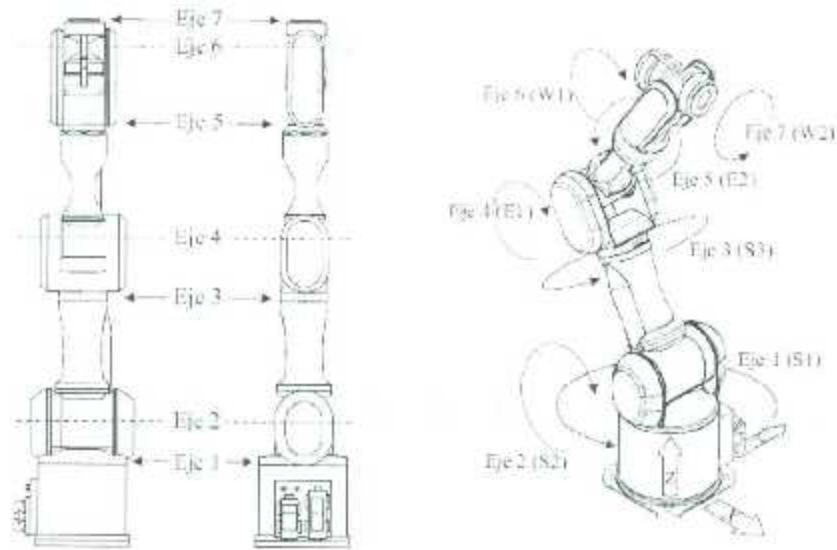


Figura A.1: Robot PA10-7CE (estructura mecánica).

## A.1. Modelo cinemático usando cuaterniones duales unitarios

Se obtuvo el modelo cinemático directo del robot PA10-7CE completo, empleando cuaterniones duales unitarios y los parámetros de D-H originales. Este procedimiento es descrito en la sección 5.5. En la figura A.1 se muestra la estructura mecánica del PA10-7CE y sus siete articulaciones (o ejes). En la figura A.2 se pueden apreciar los ocho marcos coordenados asociados a los eslabones del robot (incluyendo la base). La tabla A.1 indica los parámetros D-H originales obtenidos a partir de esos marcos.

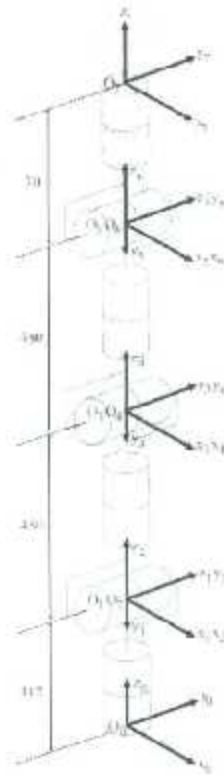


Figura A.2: Marcos de coordenadas para los parámetros Denavit-Hartenberg originales.

Tabla A.1: Parámetros Denavit-Hartenberg del PA10-7CE de 6 g.d.l.

$i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$-\pi/2$	$L_1 = 317 \text{ mm}$	$q_1$
2	0	$\pi/2$	0	$q_2$
3	0	$-\pi/2$	$L_2 = 450 \text{ mm}$	$q_3$
4	0	$\pi/2$	0	$q_4$
5	0	$-\pi/2$	$L_3 = 480 \text{ mm}$	$q_5$
6	0	$\pi/2$	0	$q_6$
7	0	0	$L_4 = 70 \text{ mm}$	$q_7$

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 5.5 se puede obtener el cuaternión dual unitario que da la postura relativa del marco  $\sum_i$  respecto al  $\sum_{i-1}$ ; luego, usando la

multiplicación de cuaterniones duales, se obtiene el modelo cinemático directo que da la postura del órgano terminal con respecto al marco de la base.

A continuación se dan los cuaterniones duales unitarios relativos  ${}^{i-1}\chi_i$ :

$${}^0\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{C}(\theta_1) \\ -\hat{C}(\theta_1) \\ -\hat{S}(\theta_1) \\ \hat{S}(\theta_1) \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma \begin{bmatrix} -d_1\hat{S}(\theta_1) \\ -d_1\hat{S}(\theta_1) \\ d_1\hat{C}(\theta_1) \\ d_1\frac{\hat{C}(\theta_1)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad {}^1\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{C}(\theta_2) \\ \hat{C}(\theta_2) \\ \hat{S}(\theta_2) \\ \hat{S}(\theta_2) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^2\chi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{C}(\theta_3) \\ -\hat{C}(\theta_3) \\ -\hat{S}(\theta_3) \\ \hat{S}(\theta_3) \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma \begin{bmatrix} -d_3\hat{S}(\theta_3) \\ -d_3\hat{S}(\theta_3) \\ d_3\hat{C}(\theta_3) \\ d_3\hat{C}(\theta_3) \end{bmatrix}; \quad {}^3\chi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{C}(\theta_4) \\ \hat{C}(\theta_4) \\ \hat{S}(\theta_4) \\ \hat{S}(\theta_4) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^4\chi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{C}(\theta_5) \\ -\hat{C}(\theta_5) \\ -\hat{S}(\theta_5) \\ \hat{S}(\theta_5) \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma \begin{bmatrix} -d_5\hat{S}(\theta_5) \\ -d_5\hat{S}(\theta_5) \\ d_5\hat{C}(\theta_5) \\ d_5\hat{C}(\theta_5) \end{bmatrix}; \quad {}^5\chi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{C}(\theta_6) \\ \hat{C}(\theta_6) \\ \hat{S}(\theta_6) \\ \hat{S}(\theta_6) \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$${}^6\chi_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{C}(\theta_7) \\ 0 \\ 0 \\ \hat{S}(\theta_7) \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sigma \begin{bmatrix} -d_7\hat{S}(\theta_7) \\ 0 \\ 0 \\ -d_7\hat{C}(\theta_7) \end{bmatrix};$$

donde se usa la notación  $\hat{C}(\cdot) = \cos(\cdot)$ ,  $\hat{S}(\cdot) = \sin(\cdot)$ .

El cuaternión dual unitario del marco  $\Sigma_7$  respecto al marco  $\Sigma_0$  se obtuvo efectuando la multiplicación:

$${}^0\chi_7 = {}^0\chi_1 \odot {}^1\chi_2 \odot {}^2\chi_3 \odot {}^3\chi_4 \odot {}^4\chi_5 \odot {}^5\chi_6 \odot {}^6\chi_7,$$

y tras realizar las operaciones en Mathematica, se obtuvieron las ocho componentes de

${}^0\chi_7$ , es decir:

$${}^0\chi_7 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix},$$



$$\begin{aligned}
 & + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 16\hat{S}(\theta_1) \\
 & (\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}'(\theta_3 - \theta_7)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_4)\hat{C}'(\theta_5)\hat{C}'(\theta_7)\hat{S}(\theta_2 + \theta_6) - \hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 - \theta_6)\hat{S}(\theta_7)) \\
 & - \hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)(\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}'(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}'(\theta_4)\hat{C}'(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 + \theta_7)) - \hat{C}(\theta_2)(\hat{C}'(\theta_3)\hat{C}'(\theta_6)\hat{C}'(\theta_3 + \theta_7) \\
 & )\hat{S}(\theta_4) + \hat{S}(\theta_3)(-\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}'(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}'(\theta_6)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}'(\theta_5 - \theta_7))))))
 \end{aligned}$$

$c =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}(4\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_4)(\hat{C}'(\theta_3)\hat{C}'(\theta_7)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 - \theta_6) - \hat{C}'(\theta_2)\hat{C}'(\theta_5)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}'(\theta_3 - \theta_7) - \hat{S}(\theta_3)\hat{S}'(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 \\
 & + \theta_6)\hat{S}(\theta_7) + \hat{C}'(\theta_5)\hat{C}'(\theta_6)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}'(\theta_3 + \theta_7)) - \hat{S}'(\theta_4)(\hat{C}'(\theta_2)\hat{C}'(\theta_6)\hat{S}(\theta_3 - \theta_5 - \theta_7) + \hat{S}(\theta_2)\hat{S}'(\theta_6)\hat{S}(\theta_3 \\
 & - \theta_5 - \theta_7))) + 1/4\hat{C}(\theta_4)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \\
 & + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 & - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 \\
 & - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\
 & - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 \\
 & - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 \\
 & - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}'(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 \\
 & + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 \\
 & + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 \\
 & + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}'(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 \\
 & + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}'(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)),
 \end{aligned}$$

$d =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{8}(\hat{C}(\theta_2)(\hat{S}(\theta_3)(\hat{C}'(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}'(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}'(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}'(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 & - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}'(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}'(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}'(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}'(\theta_4 - \theta_5 \\
 & - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}'(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) - 8\hat{S}(\theta_1)(\hat{S}'(\theta_4)\hat{S}'(\theta_6)\hat{S}'(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}'(\theta_4)\hat{C}'(\theta_6)\hat{S}'(\theta_5 + \theta_7))) \\
 & + 2\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}'(\theta_4)(\hat{S}(\theta_5)(\hat{C}'(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}'(\theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}'(\theta_6 + \theta_7)) - 4\hat{C}'(\theta_6)\hat{S}'(\theta_1)\hat{S}'(\theta_7)) + \hat{C}'(\theta_5)((-2 \\
 & + \sqrt{2})\hat{C}'(\theta_1)\hat{C}'(\theta_7)\hat{S}'(\theta_6) + \hat{C}'(\theta_6)(4\hat{C}'(\theta_7)\hat{S}'(\theta_1) + (2 + \sqrt{2})\hat{C}'(\theta_1)\hat{S}'(\theta_7)))) + \hat{S}'(\theta_4)(-4\hat{C}'(\theta_5 - \theta_7) \\
 & \hat{S}'(\theta_1)\hat{S}'(\theta_6) + \hat{C}'(\theta_1)(-2\hat{C}'(\theta_5)\hat{C}'(\theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}'(\theta_5)\hat{C}'(\theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}'(\theta_5)\hat{S}'(\theta_6 - \theta_7) + 2\hat{S}'(\theta_5)\hat{S}'(\theta_6 \\
 & - \theta_7)))) + \hat{S}(\theta_2)(8\hat{S}'(\theta_1)(\hat{C}'(\theta_3)(-\hat{C}'(\theta_5)\hat{C}'(\theta_7)\hat{S}'(\theta_4 + \theta_6) + \hat{S}'(\theta_5)\hat{S}'(\theta_4 - \theta_6)\hat{S}'(\theta_7)) + \hat{S}'(\theta_3)(\hat{C}'(\theta_4) \\
 & \hat{S}'(\theta_6)\hat{S}'(\theta_5 - \theta_7) - \hat{C}'(\theta_6)\hat{S}'(\theta_4)\hat{S}'(\theta_5 + \theta_7))) + \hat{C}'(\theta_1)(\hat{C}'(\theta_3)(-2\hat{C}'(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}'(\theta_4 \\
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) \\
 &+ \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) + \hat{S}(\theta_3)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 \\
 &- \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7 \\
 &)- 2\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)))
 \end{aligned}$$

$\alpha =$

$$\begin{aligned}
 &(\frac{1}{32}(-\hat{S}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{S}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) \\
 &+ \hat{C}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2)(-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) \\
 &- \hat{C}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)))))(\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \\
 &- \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 &- \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 \\
 &- \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\
 &- \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 \\
 &- \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 \\
 &+ \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 \\
 &- \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 \\
 &+ \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 \\
 &- \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 \\
 &+ \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 \\
 &- \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) + 16\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_5 - \theta_6) \\
 &\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_2 + \theta_6) + \hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 - \theta_6)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)(\hat{S}(\theta_4) \\
 &\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 + \theta_7)) - \hat{C}(\theta_2)(\hat{C}(\theta_3)\hat{C}(\theta_6)\hat{C}(\theta_5 + \theta_7)\hat{S}(\theta_4) + \hat{S}(\theta_3)(-\hat{C}(\theta_4) \\
 &\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7)))) - 2(d_1 + d_7\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_2)((d_5 \\
 &+ d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) - d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2)(d_3 - \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6))) \\
 &(\hat{C}(\theta_2)(\hat{S}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 \\
 &- \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 \\
 &+ \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) - 8\hat{S}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 + \theta_7))) \\
 &+ 2\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_4)(\hat{S}(\theta_5)(\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}(\theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_6 + \theta_7)) - 4\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_1)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{C}(\theta_5)((-2 \\
 &+ \sqrt{2})\hat{C}(\theta_1)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_6) + \hat{C}(\theta_6)(4\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_2) + (2 + \sqrt{2})\hat{C}(\theta_1)\hat{S}(\theta_7)))) + \hat{S}(\theta_2)(-4\hat{C}(\theta_5 - \theta_7)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \hat{S}(\theta_1)\hat{S}(\theta_6)+\hat{C}(\theta_1)(-2\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6+\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6-\theta_7)+2\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6 \\
 & +\theta_7))))+\hat{S}(\theta_2)(8\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(-\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_4-\theta_6)+\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4-\theta_6)\hat{S}(\theta_7))+\hat{S}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_4) \\
 & \hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_5-\theta_7)-\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5+\theta_7))))+\hat{C}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(-2\hat{C}(\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+2\hat{C}(\theta_4 \\
 & +\theta_5-\theta_6-\theta_7)-2\hat{C}(\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)-2\hat{C}(\theta_4+\theta_5+\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{C}(\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 \\
 & +\theta_5-\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7))+\hat{S}(\theta_3)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_4-\theta_5 \\
 & -\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7) \\
 & -2\hat{S}(\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_4-\theta_5+\theta_6 \\
 & +\theta_7))))-4(\hat{C}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)+\hat{S}(\theta_3)((d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4)+d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) \\
 & +\hat{S}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)(d_3+\hat{C}(\theta_4)(d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))-d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6))-\hat{C}(\theta_2)(-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) \\
 & +\hat{C}(\theta_3)((d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4)+d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))))(4\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_4)(\hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 \\
 & -\theta_5)-\hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_7)-\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2+\theta_6)\hat{S}(\theta_7))+\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3 \\
 & +\theta_7))-\hat{S}(\theta_4)(\hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_5-\theta_7)+\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_5+\theta_7)))+1/4\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 \\
 & -\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7) \\
 & +\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5 \\
 & -\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3 \\
 & -\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 \\
 & +\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6-\theta_7) \\
 & +\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6 \\
 & +\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6 \\
 & +\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6 \\
 & +\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6 \\
 & +\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6 \\
 & +\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7))))
 \end{aligned}$$

$\beta =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{32}((- \hat{S}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)+\hat{S}(\theta_3)((d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4)+d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) + \hat{C}(\theta_1) \\
 & (\hat{S}(\theta_2)(d_3+\hat{C}(\theta_4)(d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))-d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6))+\hat{C}(\theta_2)(-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)+\hat{C}(\theta_3)(( \\
 & d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4)+d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)))))(\hat{C}(\theta_1)(2\hat{C}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)-2\hat{C}(\theta_2 \\
 & +\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+2\hat{C}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)-2\hat{C}(\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+2\hat{C}(\theta_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 \\
 & + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 \\
 & - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 \\
 & + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 \\
 & - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 \\
 & + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) \\
 & + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 \\
 & + \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \\
 & - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 \\
 & - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7)) - 16\hat{S}(\theta_2)(\hat{C}(\theta_3 - \theta_7)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_4 - \theta_6) \\
 & - \hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4 + \theta_6)\hat{S}(\theta_3 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3 - \theta_5 + \theta_7) - \hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3 \\
 & + \theta_5 + \theta_7))) + 2(\hat{C}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_6) + \hat{S}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) \\
 & + \hat{S}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2)(-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) \\
 & + \hat{C}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)))))(\hat{C}(\theta_2)(\hat{S}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 & - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_3 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_3 \\
 & - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) \\
 & - 8\hat{S}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5 + \theta_7))) + 2\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_4)(\hat{S}(\theta_5)(\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}(\theta_6 \\
 & - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_6 + \theta_7)) - 4\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_1)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{C}(\theta_5)((-2 + \sqrt{2})\hat{C}(\theta_1)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_6) + \hat{C}(\theta_6)(4\hat{C}(\theta_7) \\
 & \hat{S}(\theta_1) + (2 + \sqrt{2})\hat{C}(\theta_1)\hat{S}(\theta_7)))) + \hat{S}(\theta_4)(-4\hat{C}(\theta_5 - \theta_7)\hat{S}(\theta_1)\hat{S}(\theta_6) + \hat{C}(\theta_1)(-2\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_5 - \theta_7) \\
 & + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6 - \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6 + \theta_7)))) + \hat{S}(\theta_2)(8\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(-\hat{C}(\theta_5) \\
 & \hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_4 + \theta_6) + \hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4 - \theta_6)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{S}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) - \hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5 \\
 & + \theta_7))) + \hat{C}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(-2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) \\
 & - 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_6 - \theta_5 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_6 \\
 & - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) + \hat{S}(\theta_3)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_3 - \theta_4 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 \\
 & - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_3 - \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 \\
 & - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_3 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)))) - 4(d_1 + d_7\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) \\
 & - \hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_2)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) - d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 - d_7\hat{C}(\theta_6)) \\
 & - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6))) + 4\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_4)(\hat{C}(\theta_3)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_2 - \theta_6) - \hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3 \\
 & - \theta_7) - \hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 + \theta_5)\hat{S}(\theta_7) + \hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3 + \theta_7)) - \hat{S}(\theta_4)(\hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\theta_5 - \theta_7) + \hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3 - \theta_5 + \theta_7))) + 1/4\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 \\
 & + \theta_4 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_5 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \\
 & + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 & - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 \\
 & - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 \\
 & - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) \\
 & + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 & + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\
 & + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 \\
 & + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 \\
 & - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 \\
 & + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)))
 \end{aligned}$$

$\gamma =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{32}((d_1 + d_7\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)) - \hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_2)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)) \\
 & + \hat{C}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)))(\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 & - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 \\
 & - \theta_5 - \theta_5 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 \\
 & - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) \\
 & - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \\
 & - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_5 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 \\
 & - \theta_5 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
 & + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 \\
 & - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 \\
 & + \theta_5 - \theta_5 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_5 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 \\
 & - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 \\
 & - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \\
 & \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) - 16\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_5 - \theta_7)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_2 \\
 & + \theta_6) + \hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 - \theta_6)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)(\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_7)) - \hat{C}(\theta_2)(\hat{C}(\theta_3)\hat{C}(\theta_6)\hat{C}(\theta_5 + \theta_7)\hat{S}(\theta_4) + \hat{S}(\theta_3)(-\hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5 \\
& + \theta_7)))) + (\hat{C}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) - \hat{S}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_5) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) \\
& + \hat{S}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2)(-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) \\
& + \hat{C}(\theta_3)((d_5 - d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)))))(\hat{C}(\theta_1)(2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \\
& - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \\
& + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) \\
& - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) \\
& + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) \\
& + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) \\
& - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 \\
& + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 \\
& - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\
& - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 \\
& + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) \\
& + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) - 16\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3 - \theta_7) \\
& \hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4 - \theta_6) - \hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4 + \theta_6)\hat{S}(\theta_3 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_3 - \theta_5 + \theta_7) \\
& - \hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3 - \theta_6 + \theta_7)) - 2(-\hat{S}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) + \hat{S}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) \\
& + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) + \hat{C}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2) \\
& (-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)))))(\hat{C}(\theta_2)(\hat{S}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_1) \\
& (\sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 \\
& + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 \\
& + \theta_7)) - 8\hat{S}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 + \theta_7))) + 2\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_4)(\hat{S}(\theta_5)(\hat{C}(\theta_1) \\
& (\sqrt{2}\hat{C}(\theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_6 + \theta_7)) - 4\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_7)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{C}(\theta_5)((-2 + \sqrt{2})\hat{C}(\theta_1)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_6) + \hat{C}(\theta_6) \\
& (4\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_1) + (2 + \sqrt{2})\hat{C}(\theta_1)\hat{S}(\theta_7)))) + \hat{S}(\theta_4)(-4\hat{C}(\theta_5 - \theta_7)\hat{S}(\theta_1)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_1)(-2\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6) \\
& - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6 - \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6 + \theta_7)))) + \hat{S}(\theta_2)(8\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)( \\
& - \hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_4 + \theta_6) - \hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4 - \theta_6)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{S}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) - \hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5 \\
& + \theta_7))) + \hat{C}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(-2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 \\
& - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 \\
& - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7)) + \hat{S}(\theta_3)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7)
\end{aligned}$$

$$+ \sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_3 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{S}(\theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7))))))$$

$\delta =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{35} ( -(\hat{C}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) - \hat{S}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) - \hat{S}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2)(-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) + \hat{C}(\theta_3)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))))))(\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + 16\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3)(\hat{C}(\theta_5 - \theta_7)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_2 + \theta_6) + \hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 - \theta_6)\hat{S}(\theta_7)) + \hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)(\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 + \theta_7)) - \hat{C}(\theta_2)(\hat{C}(\theta_3)\hat{C}(\theta_6)\hat{C}(\theta_5 + \theta_7)\hat{S}(\theta_4) + \hat{S}(\theta_4)(-\hat{C}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 - \theta_7) + \hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_5 + \theta_7)))))) - (d_1 + d_7\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) - \hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_2)((d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4) + d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)) + \hat{C}(\theta_2)(d_3 + \hat{C}(\theta_4)(d_5 + d_7\hat{C}(\theta_6)) - d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6))) (\hat{C}(\theta_1)(2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6 - \theta_7) + 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) - 2\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 - \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) + \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) - \sqrt{2}\hat{C}(\theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 + \theta_7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)-\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6 \\
& +\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5 \\
& +\theta_6+\theta_7)-\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)-\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2+\theta_3+\theta_4 \\
& -\theta_5+\theta_6+\theta_7)-\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3 \\
& -\theta_4+\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{C}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7))-16\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_3-\theta_7)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4-\theta_6) \\
& -\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4+\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_7)+\hat{C}(\theta_2)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_5+\theta_7)-\hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_5 \\
& +\theta_6-\theta_7))+4(-\hat{S}(\theta_1)(d_7\hat{C}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)+\hat{S}(\theta_3)((d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4)+d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))) \\
& +\hat{C}(\theta_1)(\hat{S}(\theta_2)(d_3+\hat{C}(\theta_6)(d_5+d_7\hat{C}(\theta_6)))-d_7\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_4)\hat{S}(\theta_6))+\hat{C}(\theta_2)(-d_7\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6) \\
& +\hat{C}(\theta_3)((d_5+d_7\hat{C}(\theta_6))\hat{S}(\theta_4)+d_7\hat{C}(\theta_4)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6))))(4\hat{S}(\theta_1)(\hat{C}(\theta_4)(\hat{C}(\theta_3)\hat{C}(\theta_7)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2 \\
& -\theta_3)-\hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_5)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_7)-\hat{S}(\theta_3)\hat{S}(\theta_5)\hat{S}(\theta_2+\theta_6)\hat{S}(\theta_7)+\hat{C}(\theta_5)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_3+\theta_7)) \\
& -\hat{S}(\theta_4)(\hat{C}(\theta_2)\hat{C}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_5-\theta_7)-\hat{S}(\theta_2)\hat{S}(\theta_6)\hat{S}(\theta_3-\theta_5+\theta_7)))+1/4\hat{C}(\theta_1)(\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3 \\
& -\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7) \\
& +\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5 \\
& -\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3 \\
& -\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2 \\
& +\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6-\theta_7)-\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6-\theta_7) \\
& +\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6-\theta_7)+\sqrt{2}\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6-\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6 \\
& -\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4-\theta_5-\theta_6 \\
& +\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6-\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6 \\
& +\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5-\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6 \\
& +\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4-\theta_5+\theta_6+\theta_7)-2\hat{S}(\theta_2-\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7) \\
& +2\hat{S}(\theta_2+\theta_3-\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2-\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7)+2\hat{S}(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7)))).
\end{aligned}$$

En el caso del robot PA10-7CE de 6 g.d.l., basta con hacer  $q_3$  constante en las expresiones anteriores, para obtener el modelo correspondiente.

Como se mencionó en la sección 1.2, independientemente de la parametrización que se use para describir la postura, la relación entre las velocidades lineal  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  y angular  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ , con el vector de variables articulares  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  (dada por el jacobiano geométrico), es la misma.

En el caso del robot PA10-7CE de 6 g.d.l. se obtiene el siguiente jacobiano geométrico

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \\ J_{51} & J_{52} & J_{53} & J_{54} & J_{55} & J_{56} \\ J_{61} & J_{62} & J_{63} & J_{64} & J_{65} & J_{66} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

cuyos elementos son los siguientes:

$$J_{11} = -L_4 \dot{C}(\theta_1) \dot{S}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5) - \dot{S}(\theta_2) (L_3 \dot{C}(\theta_3) \dot{S}(\theta_3) - L_4 \dot{C}(\theta_5) \dot{S}(\theta_2 + \theta_3) - L_4 \dot{C}(\theta_2) \dot{C}(\theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5) + \dot{S}(\theta_2) (L_2 + L_3 \dot{C}(\theta_3) - L_4 \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_3) \dot{S}(\theta_5)))$$

$$J_{12} = \dot{C}(\theta_1) (-\dot{S}(\theta_2) ((L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) \dot{S}(\theta_3) + L_2 \dot{C}(\theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5)) + \dot{C}(\theta_2) (L_2 + \dot{C}(\theta_3) (L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) - L_4 \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_3) \dot{S}(\theta_5)))$$

$$J_{13} = \dot{C}(\theta_1) (-\dot{S}(\theta_2) ((L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) \dot{S}(\theta_3) + L_2 \dot{C}(\theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5)) + \dot{C}(\theta_2) (\dot{C}(\theta_3) (L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) - L_4 \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_3) \dot{S}(\theta_5)))$$

$$J_{14} = -L_4 (\dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_1) + \dot{C}(\theta_1) \dot{C}(\theta_2 + \theta_3) \dot{S}(\theta_4)) \dot{S}(\theta_5)$$

$$J_{15} = -L_4 (\dot{C}(\theta_5) \dot{S}(\theta_1) \dot{S}(\theta_4) + \dot{C}(\theta_1) (-\dot{C}(\theta_2 + \theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{C}(\theta_5) + \dot{S}(\theta_2 + \theta_3) \dot{S}(\theta_3)))$$

$$J_{16} = 0$$

$$J_{21} = -L_4 \dot{S}(\theta_1) \dot{S}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5) - \dot{C}(\theta_1) ((L_2 - L_3 \dot{C}(\theta_3)) \dot{S}(\theta_2) - L_3 \dot{C}(\theta_2) \dot{S}(\theta_3) + L_4 \dot{C}(\theta_5) \dot{S}(\theta_2 + \theta_3) - L_4 \dot{C}(\theta_2 + \theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5))$$

$$J_{22} = \dot{S}(\theta_1) (-\dot{S}(\theta_2) ((L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) \dot{S}(\theta_3) + L_2 \dot{C}(\theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5)) - \dot{C}(\theta_2) (L_2 + \dot{C}(\theta_3) (L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) - L_4 \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_3) \dot{S}(\theta_5)))$$

$$J_{23} = \dot{S}(\theta_1) (-\dot{S}(\theta_2) ((L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) \dot{S}(\theta_3) + L_2 \dot{C}(\theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_5)) + \dot{C}(\theta_2) (\dot{C}(\theta_3) (L_3 + L_4 \dot{C}(\theta_5)) - L_4 \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_3) \dot{S}(\theta_5)))$$

$$J_{24} = L_4 (\dot{C}(\theta_1) \dot{C}(\theta_4) - \dot{C}(\theta_2 + \theta_3) \dot{S}(\theta_1) \dot{S}(\theta_4)) \dot{S}(\theta_5)$$

$$J_{25} = L_4 \dot{C}(\theta_5) (\dot{C}(\theta_2) \dot{C}(\theta_3) \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_1) - \dot{C}(\theta_4) \dot{S}(\theta_1) \dot{S}(\theta_2) \dot{S}(\theta_3) - \dot{C}(\theta_1) \dot{S}(\theta_4)) - L_4 \dot{S}(\theta_1) \dot{S}(\theta_2 + \theta_3) \dot{S}(\theta_5)$$

$$J_{26} = 0$$

$$J_{31} = 0$$

$$J_{32} = -(L_2 + L_3 \hat{C}(\theta_3)) \hat{S}(\theta_2) - L_3 \hat{C}(\theta_2) \hat{S}(\theta_3) - L_4 (\hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_2 + \theta_3) + \hat{C}(\theta_2 + \theta_3) \hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5)).$$

$$J_{33} = -L_3 \hat{C}(\theta_3) \hat{S}(\theta_2) - L_3 \hat{C}(\theta_2) \hat{S}(\theta_3) - L_4 (\hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_2 + \theta_3) + \hat{C}(\theta_2 + \theta_3) \hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5)).$$

$$J_{34} = L_4 \hat{S}(\theta_2 + \theta_3) \hat{S}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5).$$

$$J_{35} = -L_4 (\hat{C}(\theta_3) (\hat{C}(\theta_4) \hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_2) + \hat{C}(\theta_2) \hat{S}(\theta_5)) + \hat{S}(\theta_3) (\hat{C}(\theta_2) \hat{C}(\theta_4) \hat{C}(\theta_5) - \hat{S}(\theta_2) \hat{S}(\theta_5))).$$

$$J_{36} = 0.$$

$$J_{41} = 0.$$

$$J_{42} = -\hat{S}(\theta_1).$$

$$J_{43} = -\hat{S}(\theta_1).$$

$$J_{44} = \hat{C}(\theta_1) \hat{S}(\theta_2 + \theta_3).$$

$$J_{45} = -\hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_1) - \hat{C}(\theta_1) \hat{C}(\theta_2 + \theta_3) \hat{S}(\theta_4).$$

$$J_{46} = -\hat{S}(\theta_1) \hat{S}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5) + \hat{C}(\theta_1) (\hat{C}(\theta_3) (\hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_2) - \hat{C}(\theta_2) \hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5)) + \hat{S}(\theta_3) (\hat{C}(\theta_2) \hat{C}(\theta_5) - \hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_2) \hat{S}(\theta_5))).$$

$$J_{51} = 0.$$

$$J_{52} = \hat{C}(\theta_1).$$

$$J_{53} = \hat{C}(\theta_1).$$

$$J_{54} = \hat{S}(\theta_1) \hat{S}(\theta_2 + \theta_3).$$

$$J_{55} = \hat{C}(\theta_1) \hat{C}(\theta_4) - \hat{C}(\theta_2 + \theta_3) \hat{S}(\theta_1) \hat{S}(\theta_4).$$

$$J_{56} = \hat{C}(\theta_2) \hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_1) \hat{S}(\theta_3) + (-\hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_1) \hat{S}(\theta_2) \hat{S}(\theta_3) + \hat{C}(\theta_1) \hat{S}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5) - \hat{C}(\theta_3) \hat{S}(\theta_1) (\hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_2) - \hat{C}(\theta_2) \hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5))).$$

$$J_{61} = 1.$$

$$J_{62} = 0.$$

$$J_{63} = 0.$$

$$J_{64} = \hat{C}(\theta_2 - \theta_3).$$

$$J_{65} = \hat{S}(\theta_2 + \theta_3) \hat{S}(\theta_4).$$

$$J_{66} = -\hat{S}(\theta_2) (\hat{C}(\theta_5) \hat{S}(\theta_3) + \hat{C}(\theta_3) \hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_5)) + \hat{C}(\theta_2) (\hat{C}(\theta_3) \hat{C}(\theta_5) - \hat{C}(\theta_4) \hat{S}(\theta_3) \hat{S}(\theta_5)).$$



## A.2. Modelo dinámico

Para las simulaciones del capítulo (7) es necesario contar con el modelo dinámico del robot PA10-7CE de 6 g.d.l. Este modelo fue tomado de [42], donde se empleó para realizar experimentos de control de fuerza.

Por razones de espacio no se incluye ese modelo dinámico aquí, pero puede encontrarse en [42].



