

**SEP**

**TecNM**

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TIJUANA**



**“ENCRIPCIÓN POR SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS  
CAÓTICOS”**

**TITULACIÓN INTEGRAL  
TESIS**

**QUE PRESENTA:  
PULIDO LUNA JESUS ROGELIO**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO ELECTRÓNICO**

**TIJUANA, B.C.**

**DICIEMBRE 2018**

SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MEXICO

Instituto Tecnológico de Tijuana

**LIBERACIÓN DE PROYECTO PARA TITULACIÓN INTEGRAL**

Tijuana, Baja California, 27/Noviembre /2018

ASUNTO: Liberación de Proyecto  
Titulación Integral

**LIC. MARCO ANTONIO RODRIGUEZ MORENO**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES**  
**P R E S E N T E**

Por este medio le informo que ha sido liberado el siguiente proyecto para la Titulación Integral:

<b>Nombre del egresado:</b> Pulido Luna Jesús Rogelio
<b>Carrera:</b> Ingeniería Electrónica
<b>No. de control:</b> 13211242
<b>Nombre del proyecto:</b> Encriptación por sincronización de sistemas caóticos
<b>Producto:</b> Tesis Profesional

Agradezco de antemano su valioso apoyo en esta importante actividad para la formación profesional de nuestros egresados.

**A T E N T A M E N T E**

**Excelencia en Educación Tecnológica®**

Por una Juventud Integrada al Desarrollo de México®

M.C. DANIEL ESCOBEDO MITRE  
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE  
INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



Dr. Nohé Ramón Cázarez Castro  
ASESOR

Dra. Corina Plata Ante  
REVISOR

Dr. Jorge Alberto López Rentería  
REVISOR

C.p. Archivo  
DEM/cal\*



Calzada del Tecnológico S/N Esq. Av. Castillo de Chapultepec y calle Cuahtemotzin,  
Fracc. Tomás Aquino C.P. 22414, Tijuana, Baja California. Conmut. (664) 6078400 Ext. 101,  
e-mail: direccion@tectijuana.mx,

[www.tectijuana.edu.mx](http://www.tectijuana.edu.mx)



## RESUMEN

En el siguiente trabajo se hace un análisis de sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , se establecen las características necesarias para que un sistema sea considerado caótico y las propiedades de los sistemas inestables disipativos.

Se propone un método de sincronización de sistemas dinámicos de tipo caótico, el cual es un corrector de posición el cual hace que el sistema esclavo adopte la forma de un sistema maestro dado. Posteriormente se utiliza dicho método de sincronización para la encriptación y desencriptación de una señal de audio, la cual debe ser alterada para que ningún receptor no deseado sea capaz de obtener la información que existe en ella.

**Palabras clave:** Caos, sincronización, encriptación, desencriptación.

---

## ABSTRACT

In the next paper an analysis of dynamical systems in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$  is performed, the necessary characteristics for a system being considered chaotic are presented as well. The properties of unstable dissipative systems are presented too.

A method to synchronize different dynamical systems with chaotic behavior is designed, this method it's a position corrector and forces the slave system to take the form of the master system. Later this synchronization method is used in order to encrypt and decrypt an audio signal, signal that needs to be altered and in case of being intercepted the not wanted receptor cant obtain any information from it.

**Keywords:** Chaos, synchronization, encryption, decryption.

---

DEDICATORIA

*Para mi familia.*

---

## AGRADECIMIENTOS

*A todas las personas que hicieron posible este trabajo.*



## CONTENIDO

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	VII
Contenido	IX
Lista de Figuras	XI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Objetivo general . . . . .	3
1.2. Objetivos específicos . . . . .	3
2. SISTEMAS DINÁMICOS EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$	5
2.1. Sistemas lineales en el plano . . . . .	6
2.1.1. Soluciones vía valores y vectores propios . . . . .	8
2.1.2. Resolviendo un sistema de ecuaciones lineales . . . . .	9
2.2. Dinámica de los sistemas en el plano . . . . .	10
2.2.1. Valores propios reales diferentes . . . . .	11
2.2.2. Valores propios complejos . . . . .	13
2.2.3. Valores propios repetidos . . . . .	18
2.2.4. Estabilidad de Lyapunov . . . . .	19
2.3. Sistemas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
2.4. Comportamiento caótico . . . . .	25
2.4.1. Atractores caóticos . . . . .	26
2.4.2. Sistema de Lorenz . . . . .	27
2.4.3. Teoremas de Shilnikov para sistemas UD . . . . .	33
2.4.4. Sistemas inestables-disipativos . . . . .	34
3. SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS	41
3.1. Ley de control para la sincronización de sistemas Lorenz generalizados . . . . .	41
3.1.1. Sincronización maestro Lorenz – esclavo Lorenz . . . . .	45
3.1.2. Sincronización maestro Chen – esclavo Chen . . . . .	51
3.1.3. Sincronización Maestro Lü – Esclavo Lü . . . . .	56

---

3.2. Ley de control para sistemas UDS . . . . .	62
3.3. Ley de control para la sincronización Maestro Lorenz – Esclavo UDS . . . . .	72
4. ENCRIPCIÓN MEDIANTE SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS	87
4.1. Encriptación mediante maestro Lorenz generalizado – esclavo Lorenz generalizado . . . . .	87
4.1.1. Mestro Lorenz - Esclavo Lorenz . . . . .	87
4.1.2. Maestro Chen - Esclavo Chen . . . . .	92
4.1.3. Maestro Lü - esclavo Lü . . . . .	94
4.2. Encriptación mediante maestro UDS – esclavo UDS . . . .	99
4.3. Encriptación mediante maestro Lorenz – esclavo UDS . .	103
5. CONCLUSIONES	111
Bibliografía	113

LISTA DE FIGURAS

2.1.	Retrato fase para un punto de equilibrio silla. . . . .	12
2.2.	Retrato fase para un punto de equilibrio tipo sumidero. . . .	13
2.3.	Retrato fase para un punto de equilibrio tipo fuente. . . . .	14
2.4.	Retrato fase para un punto de equilibrio de tipo centro. . . .	17
2.5.	Retrato fase para un punto de equilibrio tipo espiral (sumi- dero y fuente). . . . .	18
2.6.	Retrato fase para un punto de equilibrio con valores propios repetidos negativos. . . . .	19
2.7.	Subespacios estable e inestable de una silla en el origen. . . .	22
2.8.	Sumidero en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	22
2.9.	Retrato fase de una espiral-centro. . . . .	23
2.10.	Retrato fase de una espiral-silla. . . . .	23
2.11.	Soluciones típicas en una espiral silla tendiendo al subepa- cio inestable. . . . .	24
2.12.	Atractor de Lorenz, dos soluciones con condiciones iniciales $P1(0, 2, 0)$ y $P2(0, -2, 0)$ . . . . .	30
2.13.	Trayectorias cualitativas alrededor de un punto silla de un UDS Tipo II. . . . .	37
2.14.	Atractor generado usando un UDS Tipo II. . . . .	39
3.1.	Diagrama de Simulink para la simulación del acoplamiento Maestro-Eslavo. . . . .	44
3.2.	Diagrama de Simulink para el subsistema "Controller". . . . .	44
3.3.	Sistema caótico de Lorenz (3.27). . . . .	46
3.4.	Sistema caótico Lorenz (3.27) corregido. . . . .	46
3.5.	Sistema Lorenz - Lorenz sincronizado. . . . .	46
3.6.	Sincronización del sistema de Lorenz en $x_1$ y $y_1$ . . . . .	47
3.7.	Sincronización del sistema de Lorenz en $x_1$ y $y_1$ hasta $t = 50$ . . . . .	47
3.8.	Sincronización del sistema de Lorenz en $x_2$ y $y_2$ . . . . .	48
3.9.	Sincronización del sistema de Lorenz en $x_2$ y $y_2$ hasta $t = 50$ . . . . .	48
3.10.	Sincronización del sistema de Lorenz en $x_3$ y $y_3$ . . . . .	49

---

3.11. Sincronización del sistema de Lorenz en $x_3$ y $y_3$ . . . . .	49
3.12. Error de sincronización Lorenz-Lorenz. . . . .	49
3.13. Comparacion de resultados. . . . .	50
3.14. Comportamiento caótico del sistema maestro de Chen. . . . .	52
3.15. Comportamiento caótico del sistema esclavo (sistema corre- gido) de Chen. . . . .	52
3.16. Sistema Chen - Chen sincronizado. . . . .	52
3.17. Sincronización del sistema de Chen en $x_1$ y $y_1$ . . . . .	53
3.18. Sincronización del sistema de Chen en $x_1$ y $y_1$ con $t = 50$ . . . . .	53
3.19. Sincronización del sistema de Chen en $x_2$ . . . . .	54
3.20. Sincronización del sistema de Chen en $x_2$ y $y_2$ con $t = 50$ . . . . .	54
3.21. Sincronización del sistema de Chen en $x_3$ y $y_3$ . . . . .	55
3.22. Sincronización del sistema de Chen en $x_3$ y $y_3$ con $t = 50$ . . . . .	55
3.23. Error de sincronización Chen-Chen. . . . .	56
3.24. Comportamiento caótico del sistema Maestro de Lü. . . . .	57
3.25. Comportamiento caótico del sistema esclavo (sistema corre- gido) de Lü. . . . .	58
3.26. Sistema Lü - Lü sincronizado. . . . .	58
3.27. Sincronización del sistema de Lü en $x_1$ y $y_1$ . . . . .	59
3.28. Sincronización del sistema de Lü en $x_1$ y $y_1$ con $t = 50$ . . . . .	59
3.29. Sincronización del sistema de Lü en $x_2$ y $y_2$ . . . . .	60
3.30. Sincronización del sistema de Lü en $x_2$ y $y_2$ con $t = 50$ . . . . .	60
3.31. Sincronización del sistema de Lü en $x_3$ y $y_3$ . . . . .	61
3.32. Sincronización del sistema de Lü en $x_3$ y $y_3$ con $t = 50$ . . . . .	61
3.33. Error de sincronización Lü-Lü. . . . .	62
3.34. Diagrama para la simulación de acoplamiento maestro- esclavo usando simulink. . . . .	65
3.35. Diagrama de control para la simulación de acoplamiento maestro-esclavo usando simulink. . . . .	66
3.36. Comportamiento caótico del sistema UDS-II (3.40). . . . .	67
3.37. Comportamiento caótico del sistema esclavo controlado. . . . .	68
3.38. Sistema UDS-II – UDS-II sincronizado. . . . .	68
3.39. Sincronización del sistema UDS tipo II en $\chi_1$ y $\phi_1$ . . . . .	69
3.40. Sincronización del sistema UDS tipo II en $\chi_1$ y $\phi_1$ con $t = 100$ . . . . .	69
3.41. Sincronización del sistema UDS tipo II en $\chi_2$ y $\phi_2$ . . . . .	70

---

3.42. Sincronización del sistema UDS tipo II en $\chi_3$ y $\phi_3$ con $t = 100$ .	70
3.43. Sincronización del sistema UDS tipo II en $\chi_3$ y $\phi_3$ .	71
3.44. Sincronización del sistema UDS tipo II en $\chi_3$ y $\phi_3$ con $t = 100$ .	71
3.45. Error de sincronización UDS-UDS.	72
3.46. Diagrama para la simulación de acoplamiento maestro-esclavo usando simulink.	74
3.47. Diagrama de control para la simulación de acoplamiento maestro-esclavo usando simulink.	75
3.48. Comportamiento caótico del sistema Maestro de Lorenz.	76
3.49. Comportamiento caótico del sistema esclavo o corregido UDS tipo II.	76
3.50. Sistema Lorenz - UDS tipo II sincronizado.	77
3.51. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_1$ y $\phi_1$ .	77
3.52. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_1$ y $\phi_1$ .	78
3.53. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_2$ y $\phi_2$ .	78
3.54. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_2$ y $\phi_2$ .	79
3.55. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_3$ y $\phi_3$ .	79
3.56. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_3$ y $\phi_3$ .	80
3.57. Error de sincronización Lorenz-UDS.	80
3.58. Error de sincronización Lorenz-UDS con $t = 100$ .	81
3.59. Comportamiento caótico del sistema Maestro de Lorenz.	82
3.60. Comportamiento caótico del sistema esclavo UDS tipo II.	82
3.61. Sistema Lorenz - UDS tipo II sincronizado.	83
3.62. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_1$ y $\phi_1$ .	83
3.63. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_1$ y $\phi_1$ .	84
3.64. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_2$ y $\phi_2$ .	84
3.65. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_2$ y $\phi_2$ .	85
3.66. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_3$ y $\phi_3$ .	85
3.67. Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en $x_3$ y $\phi_3$ .	86
3.68. Error de sincronización Lorenz-UDS.	86
4.1. Programa en Simulink para el sistema de encriptación Lorenz - Lorenz.	88
4.2. Bloque de encriptación para el sistema Lorenz - Lorenz.	88
4.3. Bloque de desencriptación para el sistema Lorenz - Lorenz.	89
4.4. Fragmento de audio original.	90

---

4.5. Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz. . . . .	90
4.6. Audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz. . . . .	91
4.7. Audio original, encriptado y desencriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz. . . . .	91
4.8. Error entre el audio original y el audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz. . . . .	92
4.9. Programa en Simulink para el sistema de encriptación Chen - Chen. . . . .	92
4.10. Bloque de encriptación para el sistema Chen - Chen. . . . .	93
4.11. Bloque de desencriptación para el sistema Chen - Chen. . . . .	93
4.12. Fragmento de audio original. . . . .	94
4.13. Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen. . . . .	95
4.14. Audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen. . . . .	95
4.15. Audio original, encriptado y desencriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen. . . . .	96
4.16. Error entre el audio original y el audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen. . . . .	96
4.17. Programa en Simulink para el sistema de encriptación Lü - Lü. . . . .	97
4.18. Bloque de encriptación para el sistema Lü - Lü. . . . .	97
4.19. Bloque de desencriptación para el sistema Lü - Lü. . . . .	98
4.20. Fragmento de audio original. . . . .	98
4.21. Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü. . . . .	99
4.22. Audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü. . . . .	100
4.23. Audio original, encriptado y desencriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü. . . . .	100
4.24. Error entre el audio original y el audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü. . . . .	101

---

4.25. Programa en Simulink para el sistema de encriptación UDS - UDS. . . . .	101
4.26. Bloque de encriptación para el sistema UDS - UDS. . . . .	102
4.27. Bloque de desencriptación para el sistema UDS - UDS. . . . .	102
4.28. Fragmento de audio original. . . . .	103
4.29. Audio encriptado por la sincronización de sistemas master UDS - slave UDS. . . . .	104
4.30. Audio desencriptado por la sincronización de sistemas mas- ter UDS - slave UDS. . . . .	104
4.31. Audio original, encriptado y desencriptado por la sincróni- zación de sistemas master UDS - slave UDS. . . . .	105
4.32. Error entre el audio original y el audio desencriptado por la sincronización de sistemas master UDS - slave UDS. . . . .	105
4.33. Programa en Simulink para el sistema de encriptación Lo- renz - UDS. . . . .	106
4.34. Bloque de encriptación para el sistema Lorenz - UDS. . . . .	106
4.35. Bloque de desencriptación para el sistema Lorenz - UDS. . . . .	107
4.36. Fragmento de audio original. . . . .	108
4.37. Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave UDS. . . . .	108
4.38. Audio desencriptado por la sincronización de sistemas mas- ter Lorenz - slave UDS. . . . .	109
4.39. Audio original, encriptado y desencriptado por la sincróni- zación de sistemas master Lorenz - slave UDS. . . . .	110
4.40. Error entre el audio original y el audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz- slave UDS. . . . .	110

---

# 1

## INTRODUCCIÓN

La criptografía se ha definido, tradicionalmente, como el ámbito de la criptología que se ocupa de las técnicas de cifrado o codificado destinadas a alterar las representaciones lingüísticas de ciertos mensajes con el fin de hacerlos ininteligibles a receptores no autorizados. Estas técnicas se utilizan tanto en el arte como en la ciencia y en la tecnología. La criptografía clásica técnica como objetivo único conseguir la confidencialidad de los mensajes, para lo cual se diseñaban sistemas de cifrado y códigos.

Desde sus inicios la criptografía llegó a ser una herramienta muy usada en el ambiente militar, por ejemplo en la segunda guerra mundial tuvo un papel determinante, gracias a una de las máquinas de cifrado que tuvo gran popularidad, denominada ENIGMA. Al terminar la guerra las agencias de seguridad de las grandes potencias invirtieron muchos recursos para su investigación. La criptografía como la conocemos hoy, surgió con la invención de la computadora [1]

La criptografía actual se inicia en la segunda mitad de la década de los años 70. No es hasta la invención del sistema conocido como DES (Data Encryption Standard) en 1976 que se da a conocer mas ampliamente, principalmente en el mundo industrial y comercial. Posteriormente con el sistema RSA (Rivest, Shamir, Adleman) en 1978, se abre el comienzo de la criptografía en un gran rango de aplicaciones: en transmisiones militares, en transacciones financieras, en comunicación de satélite, en redes de computadoras, en líneas telefónicas, en transmisiones de televisión etcétera.

Un método que ha demostrado ser adecuado para encriptar mensajes es usar una señal caótica como señal portadora de un mensaje que se desea ocultar, este método ha sido expuesto en REF5, pero el problema que representa es el uso del mismo sistema tanto en el emisor y el receptor del mensaje, para abatir esta problemática, es posible diseñar una ley de control para la sincronización de sistemas dinámicos con comportamiento caótico, lo cual permite que dos sistemas caóticos diferentes tengan un comportamiento similar.

Es importante aclarar que un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo, los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, pero también existen modelos económicos y matemáticos entre otros. Dentro de los sistemas dinámicos se encuentran los sistemas caóticos, los cuales deben satisfacer las siguientes tres características:

- (i) Sensibilidad a condiciones iniciales: Esta característica implica que cada vector que mapea un sistema es arbitrariamente aproximado por otros vectores con trayectorias futuras significativamente diferentes.
- (ii) Topológicamente mezclado: Esto significa que el sistema evolucionará con el tiempo, así que una región o conjunto abierto de su espacio eventualmente se sobrepondrá con otra región dada.
- (iii) Densidad de orbitas periódicas: La densidad de órbitas periódicas significa que cada punto del espacio es aproximado arbitrariamente de manera cercana por órbitas periódicas.

A su vez en los sistemas dinámicos existen sistemas inestables y disipativos (entre ellos los conocidos sistemas generadoras de multi enrollamientos, nombrados en la literatura como “multi-scrolls”), los cuales son confundidos comúnmente con sistemas caóticos porque, aunque manifiestan con comportamiento cualitativamente equivalente a un sistema caótico, no cumplen con las tres condiciones necesarias para ser considerados como caóticos. Es demostrado que los sistemas caóticos

son muy eficientes para su uso en la criptografía, la cual es un conjunto de técnicas de cifrado o codificación con las que se pretende alterar el mensaje lingüístico o de datos original con el fin de hacerlo ininteligible para receptores no deseados. Sin embargo, si no se puede garantizar que el sistema dinámico con el que se cifra es efectivamente un sistema caótico, el sistema de cifrado puede estar altamente comprometido.

El estudio de la sincronización entre sistemas acoplados es conocido desde el trabajo de Huygens en 1673. Posteriormente estos conceptos fueron aplicados a diversos sistemas, y fue a principios del siglo XX cuando se descubrió que también pueden observarse en sistemas eléctricos y electromecánicos REF6. La sincronización entre dos sistemas se consigue cuando uno de ellos cambia su trayectoria, bien hacia la seguida por el otro sistema o bien hacia una nueva trayectoria común a ambos [2].

De manera genérica la sincronización caótica puede ser definida como una conformidad en el tiempo de dos o m-s procesos caóticos, caracterizada por una métrica entre algunas variables de estos procesos. El fenómeno de sincronización también puede ser visto como una manifestación de la tendencia a la auto-organización en sistemas complejos [3].

## 1.1 OBJETIVO GENERAL

Encriptar y desencriptar una señal de audio mediante sincronización de sistemas caóticos para volver dicha señal ininteligible para cualquier receptor no deseado.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- (i) Seleccionar sistemas caóticos e inestables disipativos para su estudio y análisis de propiedades.

- (ii) Diseñar un control para la sincronización de sistemas dinámicos de tipo caótico y ejemplificarlo mediante simulación.
- (iii) Diseñar un método de encriptación y desencriptación e implementarlo de manera computacional.

# 2

## SISTEMAS DINÁMICOS EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

En este capítulo se estudiarán los sistemas de ecuaciones diferenciales, los cuales son muy utilizados para modelar sistemas dinámicos de la vida real. Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo, los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, pero también existen modelos económicos y matemáticos entre otros.

Un sistema de ecuaciones diferenciales es una colección de  $n$  ecuaciones diferenciales relacionadas entre sí de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Aquí las funciones  $f_j$  son funciones de valor real de las  $n + 1$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . reales. A menos de que se especifique de otra manera, se asume que las funciones  $f_j$  son funciones de clase  $C^\infty$ . Es decir, que las derivadas parciales de cualquier orden de  $f_j$  existen y son continuas [4]. Para simplificar, se utilizará la notación  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Por lo que el sistema de ecuaciones se escribirá como:

$$\dot{x} = F(t, x),$$

Donde

$$F(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

La solución a este sistema se escribe como  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ , por lo cual

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)),$$

para el cual  $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))^T$ . Un sistema se denomina *autónomo* si ninguna de las funciones  $f_j$  dependen únicamente de  $t$ , solo de los estados  $x$ , en este caso, a un sistema autónomo se denota como

$$\dot{x} = F(x) \tag{2.1}$$

El resto de este capítulo solo se desarrollara alrededor de esta clase de sistemas dinámicos, pero para entender su comportamiento en necesario empezar del momento base, los sistemas lineales en el plano. Esto es, el estudio del comportamiento de los sistemas en altas dimensiones está basado en la dinámica de los sistemas en  $\mathbb{R}^2$ .

*Definición 2.1.* Un punto constante  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se dice ser punto de equilibrio para el sistema (2.1) si  $F(x_0) = 0$ .

A continuación, se dará una caracterización de los puntos de equilibrio de un sistema en el plano según su dinámica.

## 2.1 SISTEMAS LINEALES EN EL PLANO

Muchas de las ecuaciones diferenciales mas importantes que se pueden encontrar en ciencias e ingeniería son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Estas ecuaciones tienen la forma

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}),$$

donde  $x \in \mathbb{R}$  es la variable de estados y  $f$  es una función suave. Ejemplos importantes de este tipo de ecuaciones incluyen la ecuación de Newton

$$m\ddot{x} = f(x),$$

y la ecuación para un circuito eléctrico de tipo RLC

$$LC\ddot{x} + RC\dot{x} + x = v(t).$$

El enfoque del análisis de la dinámica para los modelos en el presente trabajo será dirigido a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, también llamado *Teoría Cualitativa de Sistemas Dinámicos*. Para el caso lineal en el plano, se considera la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes de la forma

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (2.2)$$

Se definen los cambios de variable  $x = x_1$  y  $\dot{x} = x_2$  para reescribir la ecuación (2.2) como un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - ax_2, \end{aligned}$$

o en forma vectorial como

$$\dot{x} = Ax,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = (x_1, x_2)^T. \quad (2.3)$$

*Observación 2.1.1.* El orden de un sistema, mediante los cambios de variables mencionados anteriormente, es equivalente al orden de la ecuación diferencial asociada. Es decir, la dimensión del vector de variables de estado es el orden de la ecuación diferencial asociada mediante el cambio de variables definido

Como lo hemos mencionado anteriormente, el análisis de la dinámica de sistemas empieza en el estudio de comportamiento de las soluciones para sistemas segundo orden, pues será nuestro punto de partida para entender dinámicas de orden superior en los siguientes capítulos. Se considera el sistema

$$\dot{x} = Ax,$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes reales. Es fácil notar que el origen es siempre un punto de equilibrio. Para encontrar otros puntos de equilibrio se debe resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\begin{aligned}ax_1 + bx_2 &= 0 \\cx_1 + dx_2 &= 0\end{aligned}$$

De algebra lineal se sabe que el sistema tiene una solución diferente de cero si y solo si el  $\det A = 0$ . Por lo cual, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales  $\dot{x} = Ax$  tiene

1. Un único punto de equilibrio  $x_0 = (0, 0)^T$  si  $\det A \neq 0$ .
2. Una línea recta de puntos de equilibrio si  $\det A = 0$  (y no es la matriz cero).

### 2.1.1 Soluciones vía valores y vectores propios

Si se desea encontrar las soluciones del sistema lineal diferente a los puntos de equilibrio. Tendremos que asumir que  $V_0$  es un vector diferente de cero para el cual se tiene que  $AV_0 = \lambda V_0$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces la función

$$x(t) = e^{\lambda t} V_0$$

es una solución del sistema. Para demostrar esto se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda e^{\lambda t} V_0 \\&= e^{\lambda t} (\lambda V_0) \\&= e^{\lambda t} (AV_0) \\&= A(e^{\lambda t} V_0) \\&= Ax(t)\end{aligned}$$

por lo que  $x(t)$  es en realidad una solución del sistema de ecuaciones.

*Definición 2.2.* Un vector diferente de cero  $V_0$  es llamado *vector propio* de  $A$  si existe un  $\lambda$  tal que  $AV_0 = \lambda V_0$ . La constante  $\lambda$  es a su vez llamada *valor propio* de  $A$ .

Como es fácil notar, existe una relación importante entre los valores, vectores propios y las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales.

**TEOREMA (2.2.1).** *Asuma que  $V_0$  es un vector propio de la matriz  $A$  con su asociado valor propio  $\lambda$ . Entonces la función  $x(t) = e^{\lambda t} V_0$  es una solución del sistema  $\dot{x} = Ax$ .*

Este teorema nos proporciona demasiada información acerca de las soluciones particulares y es la base para encontrar la solución general. Más aún, más adelante veremos que debido a la forma de las soluciones nos será posible graficar las curvas solución del sistema con facilidad.

### 2.1.2 Resolviendo un sistema de ecuaciones lineales

Si del polinomio característico de  $A$  se encuentran dos raíces reales  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ), es posible generar un par de soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma  $x_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$  donde  $V_i$  es el vector propio asociado a  $\lambda_i$ .

Dados este par de soluciones, es posible encontrar todas las soluciones del sistema, se asume que se tiene dos valores propios reales distintos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  con vectores propios asociados  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente. Entonces  $V_1$  y  $V_2$  son linealmente independientes. Así  $V_1$  y  $V_2$  forman una base para  $\mathbb{R}^2$ , dado un punto  $z_0 \in \mathbb{R}^2$ .

Ahora considere la función  $z(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ , donde  $x_i(t)$  son las soluciones en línea recta previamente definidas. Se pretende que  $z(t)$  es una solución de  $\dot{x} = Ax$ . Para comprobar esto se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \alpha \dot{x}_1(t) + \beta \dot{x}_2(t) \\ &= \alpha Ax_1(t) + \beta Ax_2(t) \\ &= A(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \\ &= Az(t) \end{aligned}$$

Como consecuencia, encontramos la solución única al sistema que satisface  $x(0) = z_0 \in \mathbb{R}^2$ . La colección de este tipo de soluciones es denominada como *solución general* de  $\dot{x} = Ax$ .

**TEOREMA (2.1.2).** *Suponga que  $A$  tiene un par de valores propios  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  con sus vectores propios asociados  $V_1$  y  $V_2$ . Entonces la solución general del sistema lineal  $\dot{x} = Ax$  esta dada por*

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} V_1 + \beta e^{\lambda_2 t} V_2,$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

El teorema anterior es un caso especial del teorema fundamental para sistemas lineales de  $n$  dimensiones. A saber, si  $\dot{x} = Ax$  es un sistema lineal para el cual  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  son soluciones, entonces la función  $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$  es a su vez una solución del sistema.

**TEOREMA (2.1.3).** *Suponga que  $\dot{x} = Ax$  es un sistema lineal con  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  como sus soluciones. Suponga también que los vectores  $y_1(0)$  y  $y_2(0)$  son linealmente independientes. Entonces*

$$x(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

es una solución única del sistema que satisface  $x(0) = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0)$ .

Note que no es necesario tener dos valores propios reales distintos para probar esto. Este hecho se conoce como *principio de linealidad*.

## 2.2 DINÁMICA DE LOS SISTEMAS EN EL PLANO

Dado el principio de linealidad de la sección anterior es posible demostrar una solución general para cualquier sistema de ecuaciones en  $\mathbb{R}^2$ . Todas estas soluciones se representarán de la manera más simple posible y la mayoría todas estas soluciones son encontradas en casos con dimensiones superiores.

## 2.2.1 Valores propios reales diferentes

Considere el sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.5)$$

y suponga que  $A$  tiene dos valores propios  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Suponga de momento que  $\lambda_i \neq 0$ . Entonces existen tres casos a considerar:

1.  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
2.  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
3.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

## 2.2.1.1 Silla

Considere el sistema (2.5) con

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . La solución general se escribe como

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que  $\lambda_1 < 0$ , la línea recta de soluciones de la forma  $\alpha e^{\lambda_1 t} (1, 0)^T$  está sobre el eje  $x_1$  que tiende a  $x_0 = (0, 0)^T$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esta recta es llamada la *variedad estable*. Dado que  $\lambda_2 > 0$ , las soluciones de la forma  $\beta e^{\lambda_2 t} (0, 1)^T$  están sobre el eje  $x_2$  y tiende a alejarse de  $x_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; a esta recta se le denomina *variedad inestable*. Cualquier otra solución (con  $\alpha, \beta \neq 0$ ) tiende a  $\infty$  en la dirección de la recta inestable conforme  $t \rightarrow \infty$ .

En la figura 2.1 se puede ver gráficamente el comportamiento del sistema. El retrato fase es la colección de curvas representativas de las curvas solución en  $\mathbb{R}^2$ . El punto de equilibrio para un sistema de este tipo es denominado *punto silla*.

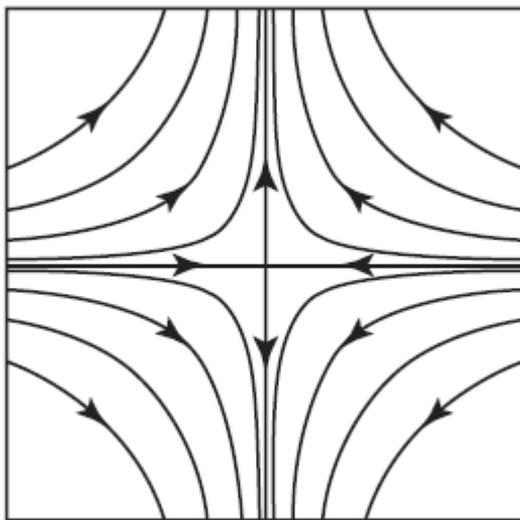


Figura 2.1: Retrato fase para un punto de equilibrio silla.

### 2.2.1.2 Sumidero

Ahora considere el sistema (2.5) con el caso donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

pero con  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Al igual que en el caso anterior es posible encontrar la siguiente solución general:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A diferencia del caso silla, todas las soluciones tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , las curvas solución tienden tangencialmente al eje  $y$ .

Debido a que  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , se denomina a  $\lambda_1$  el valor propio “fuerte” y a  $\lambda_2$  el valor propio “débil”. La razón para denominarlos de esta manera es que las coordenadas  $x_1$  de esta caso tienden de manera mas rápida a 0 que las coordenadas del eje  $x_2$ . El retrato fase para este caso esta en la figura 2.2 y es denominado *sumidero*.

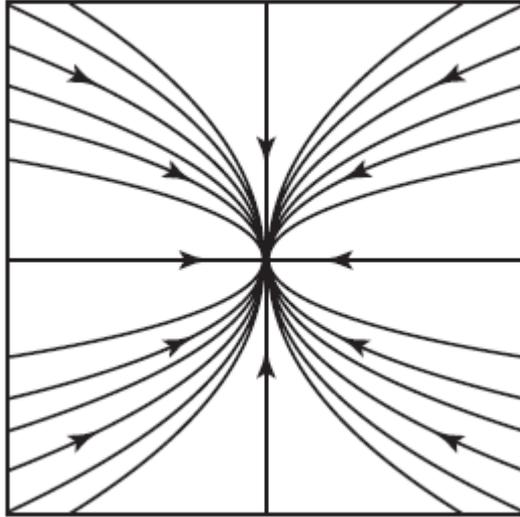


Figura 2.2: Retrato fase para un punto de equilibrio tipo sumidero.

### 2.2.1.3 Fuente

El sistema (2.5) con matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

con  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ , tiene un campo vectorial considerado el “negativo” del caso anterior. La solución general de este caso y el retrato fase se mantienen iguales, la única diferencia es que las soluciones se alejan del origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . El retrato fase para este caso puede apreciarse en la figura 2.3.

### 2.2.2 Valores propios complejos

Es posible que las raíces del polinomio característico sean complejas. De manera análoga con el caso real, estas raíces se denominan *valores propios complejos*. Cuando la matriz  $A$  tiene eigenvalores complejos las

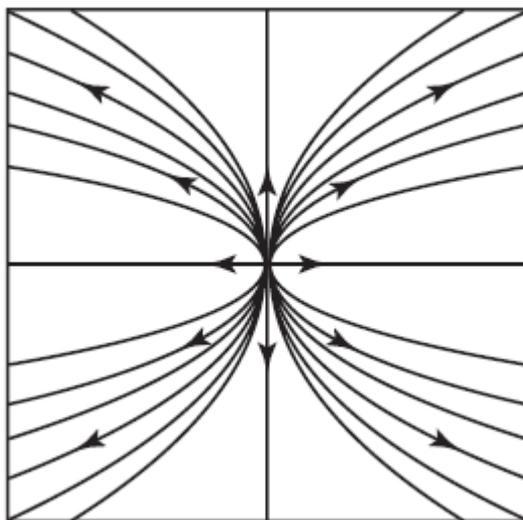


Figura 2.3: Retrato fase para un punto de equilibrio tipo fuente.

soluciones no son líneas rectas. Sin embargo, aun es posible formar una solución general.

### 2.2.2.1 Centros

Considere el sistema (2.5) con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

con  $\beta \neq 0$ . El polinomio característico es  $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ , por lo que los valores propios son números complejos  $\pm i\beta$ . Sin tener que preocuparse por resultados siendo vectores complejos, para encontrar los vectores propios correspondientes a  $\lambda = i\beta$ , resolvemos:

$$\begin{pmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, encontramos el vector propio complejo  $(1, i)^T$ , por lo que la función

$$x(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

es una solución compleja de (2.5).

Generalmente tener una solución compleja para un sistema de ecuaciones diferenciales reales no es muy práctico, pero esto se puede cambiar utilizando la fórmula de Euler  $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t$ . Al usar esto podemos reescribir la solución como

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t + i \sin \beta t \\ i(\cos \beta t + i \sin \beta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta t + i \sin \beta t \\ -\sin \beta t + i \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Si además separamos  $x(t)$  en sus partes reales e imaginarias se tiene

$$x(t) = x_{Re}(t) + ix_{Im}(t),$$

donde

$$x_{Re}(t) = \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix}, x_{Im}(t) = \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Pero ahora tanto  $x_{Re}(t)$  y  $x_{Im}(t)$  son soluciones reales del sistema original. Para demostrar esto se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_{Re}(t) + i\dot{x}_{Im}(t) &= \dot{x}(t) \\ &= Ax(t) \\ &= A(x_{Re}(t) + ix_{Im}(t)) \\ &= Ax_{Re} + iAx_{Im}(t). \end{aligned}$$

Igualando la parte real e imaginaria de esta ecuación se tiene que  $\dot{x}_{Re} = Ax_{Re}$  y  $\dot{x}_{Im} = Ax_{Im}$ , lo cual demuestra que ambas son en realidad soluciones. Además, debido a que

$$x_{Re}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{Im}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la combinación lineal de estas soluciones

$$x(t) = c_1 x_{Re}(t) + c_2 x_{Im}(t),$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias dadas por la solución a cualquier problema de valor inicial. Decimos que esta es la solución general para esta ecuación. Para probar esto, es necesario demostrar que estas son las únicas soluciones a esta ecuación. Asuma que este no es el caso. Suponga que

$$y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

es otra solución. Considere la función compleja  $f(t) = (u(t) + iv(t))e^{i\beta t}$ . Derivando esta expresión y usando el hecho de que  $y(t)$  es una solución de la ecuación, se tiene que  $f'(t) = 0$ . Por lo tanto  $u(t) + iv(t)$  es una constante compleja que multiplica a  $e^{-i\beta t}$ . De aquí concluimos que  $y(t)$  es una combinación lineal de  $x_{Re}(t)$  y  $x_{Im}(t)$ .

Note que cada una de estas soluciones es una función periódica con periodo  $2\pi/\beta$ . En realidad, el retrato fase muestra que todas las soluciones están sobre círculos centrados en el origen. Estos círculos van en la dirección de las manecillas del reloj si  $\beta > 0$ , y en contra de las manecillas del reloj si  $\beta < 0$ . En la figura 2.4 se puede observar el retrato fase denominado como **centros**.

### 2.2.2.2 Espirales

De manera general, considere el sistema (2.5) con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

y  $\alpha, \beta \neq 0$ . La ecuación característica es  $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2$ , por lo que los valores propios son  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . Un vector propio asociado a  $\alpha + i\beta$  está determinado por la ecuación

$$\left( \alpha - (\alpha + i\beta) \right) x + \beta y = 0$$

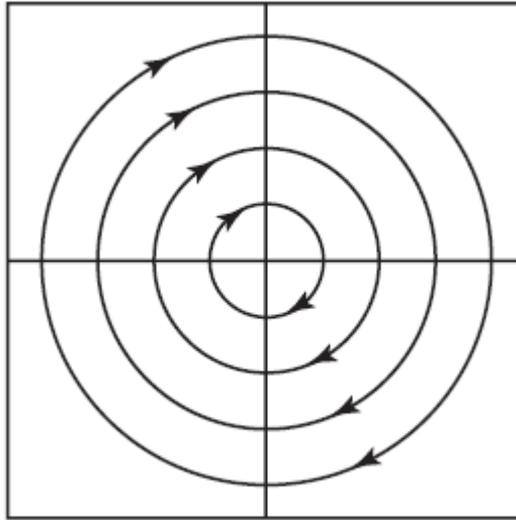


Figura 2.4: Retrato fase para un punto de equilibrio tipo centro.

En consecuencia  $(1, i)^T$  es a su vez un vector propio. Por lo tanto, se tiene que soluciones complejas de la forma

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\
 &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\operatorname{sen}\beta t \end{pmatrix} + i e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix} \\
 &= x_{Re}(t) + i x_{Im}(t).
 \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, tanto  $x_{Re}(t)$  como  $x_{Im}(t)$  son soluciones reales del sistema con condiciones iniciales que son linealmente independientes. Por lo tanto la solución general del sistema es

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\operatorname{sen}\beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Sin el término  $e^{\alpha t}$ , estas soluciones seguirían círculos centrados en el origen al igual que en el caso anterior. El término  $e^{\alpha t}$  convierte estas

soluciones en espirales que pueden ir hacia el origen (cuando  $\alpha < 0$ ) o alejarse de este (cuando  $\alpha > 0$ ).

En estos casos el punto de equilibrio se denomina **sumidero espiral** y **fuelle espiral** respectivamente (ver figura 2.5).

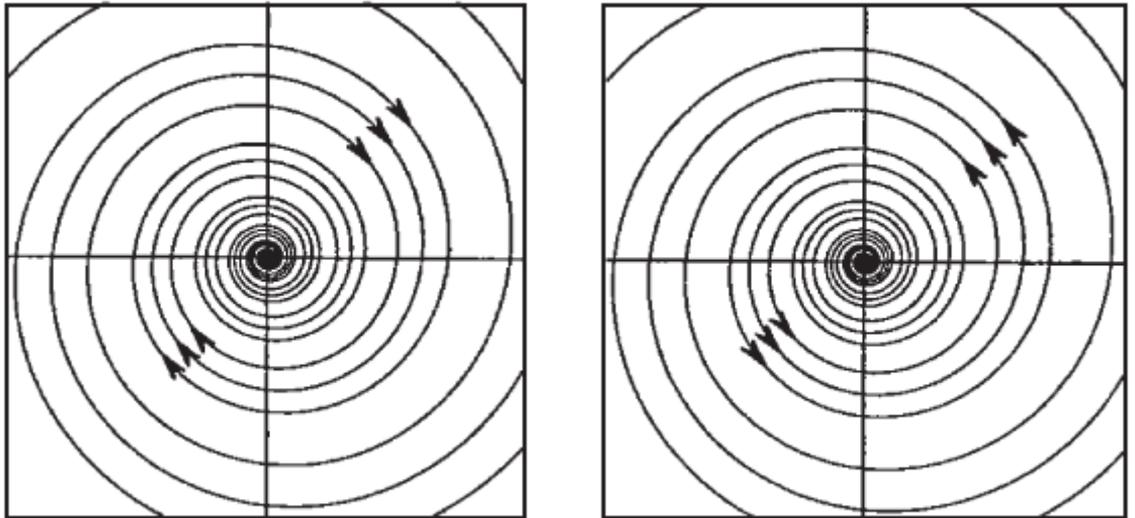


Figura 2.5: Retrato fase para un punto de equilibrio tipo espiral (sumidero y fuente).

### 2.2.3 Valores propios repetidos

El único caso faltante ocurre cuando  $A$  tiene eigenvalores reales repetidos. Un ejemplo simple de este caso es cuando la matriz  $A$  es una matriz diagonal de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En esta caso los valores propios de la matriz  $A$  son ambos  $\lambda$ . Por tanto, cualquier vector diferente de cero es un eigenvector debido a  $AV = \lambda V$  para cada  $V \in \mathbb{R}^2$ .

Así que, las soluciones son de la forma  $x(t) = \alpha e^{\lambda t} V$ . Cada solución yace sobre una línea recta que contiene a  $x = 0$  y tiende hacia el origen (si  $\lambda < 0$ ) o se aleja del origen si (si  $\lambda > 0$ ).

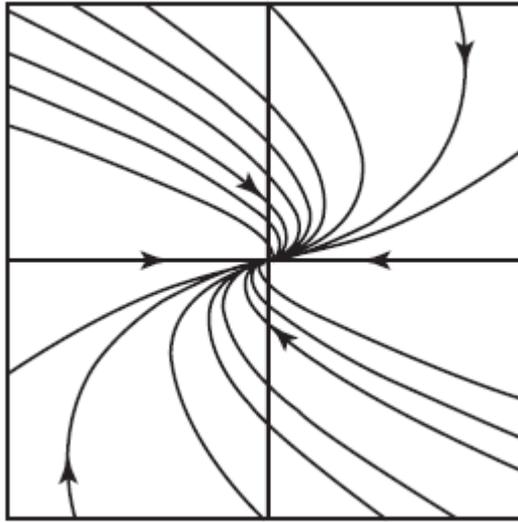


Figura 2.6: Retrato fase para un punto de equilibrio con valores propios repetidos negativos.

#### 2.2.4 Estabilidad de Lyapunov

Antes de continuar con la dinámica en sistemas en el espacio, hablaremos un poco acerca de la estabilidad de puntos de equilibrio caracterizadas en el *sentido de Lyapunov*, matemático e ingeniero ruso que sentó las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.

De forma intuitiva, un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías

del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito, justo como las soluciones generales que se definieron en secciones anteriores. A continuación se formaliza lo anterior.

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.6}$$

y supongamos que  $x_e$  es un punto de equilibrio, es decir  $f(x_e) = 0$ .

*Definición 2.3.* El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema es

- (i) Estable, si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que  $\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$ .
- (ii) Inestable, si no es estable.
- (iii) Asintóticamente estable, si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que  $\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

La Definición anterior tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo  $t \geq 0$ . Esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada.

**TEOREMA (2.3.1).** *Sea el origen  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema (2.6) y  $f$  una función de clase  $C^\infty$  tal que  $f(0) = 0$ ,  $f(x) > 0$  y  $f'(x) \leq 0$ , entonces  $x = 0$  es estable. Más aún, si  $f'(x) < 0$  entonces  $x = 0$  es asintóticamente estable.*

### 2.3 SISTEMAS EN $\mathbb{R}^3$

Como se hizo en la sección anterior, es posible caracterizar a los sistemas en el espacio según sus valores propios e las soluciones a un sistema estarán dadas en términos de los vectores propios asociados a los valores propios. Al espacio generado por los valores propios con parte real negativa se le llama *Subespacio Estable* y se le denota como  $E^s$ ,

mientras que al espacio generado por los valores propios con parte real positiva se le conoce como *Subespacio Inestable*, denotado como  $E^u$ . Si el sistema posee valores propios con parte real igual a cero, al espacio generado por sus vectores propios asociados se le llama *Subespacio Central* y se denota como  $E^c$ . A continuación se dará un breve análisis no exhaustivo de sistemas lineales en  $\mathbb{R}^3$ .

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.7)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  reales. Si por ejemplo,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  y  $\lambda_3 < 0$ , el espacio estable  $E^s$  tiene dimensión 1, mientras que el espacio inestable  $E^u$  es de dimensión 2 (ver figura 2.7), por lo que el origen es un punto tipo silla en los planos  $x_1x_3$  y  $x_2x_3$ .

Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ , el Subespacio estable es  $\mathbb{R}^3$  y el origen será un sumidero (ver figura 2.8).

Suponga ahora que el sistema (2.7) tiene como matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

con  $\beta \neq 0$ . Suponga que  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\lambda < 0$ . Se tiene entonces un subespacio central de dimensión 2 y un subespacio estable de dimensión 1, cuyo retrato fase representa al origen como una espiral-centro (ver figura 2.9).

Si además, consideramos  $\alpha < 0$ ,  $\lambda, \beta > 0$ , se obtiene una espiral-silla (ver figura 2.10), en la cual se tiene un subespacio estable de dimensión 2 correspondiente a valores propios complejos y un subespacio inestable de dimensión 1 correspondiente a un valor propio real. Note en la figura 2.11 las trayectorias solución en la espiral-silla, las cuales tienden en forma oscilatoria hacia el subespacio inestable, representado por el eje  $x_3$ .

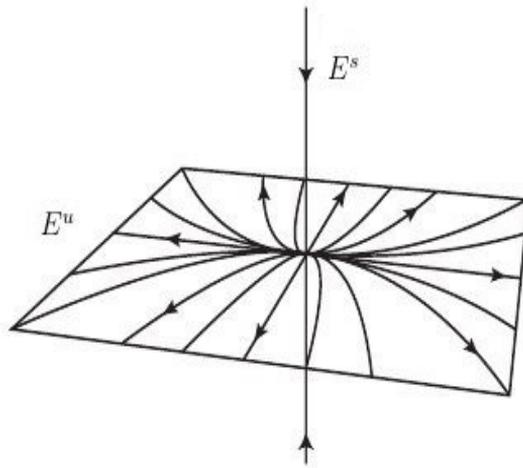


Figura 2.7: Subespacios estable e inestable de una silla en el origen.

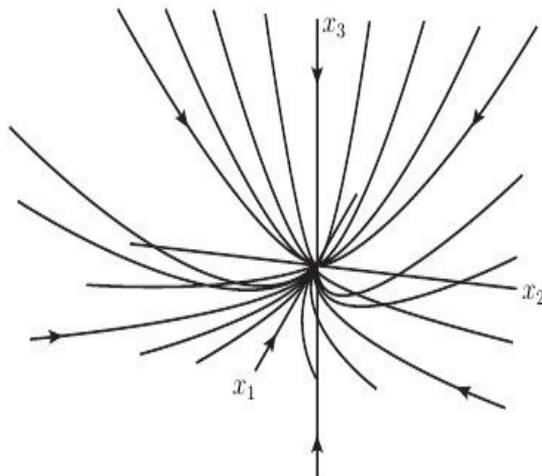


Figura 2.8: Sumidero en  $\mathbb{R}^3$ .

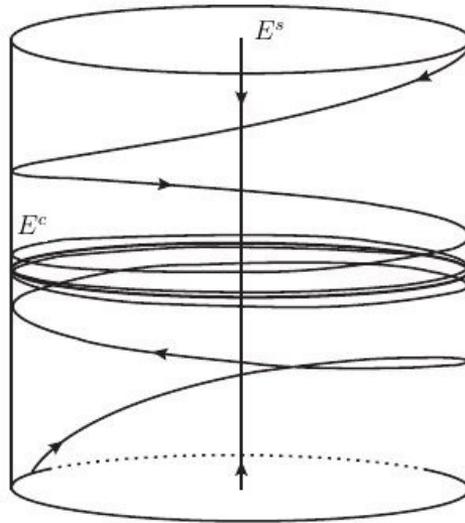


Figura 2.9: Retrato fase de una espiral-centro.

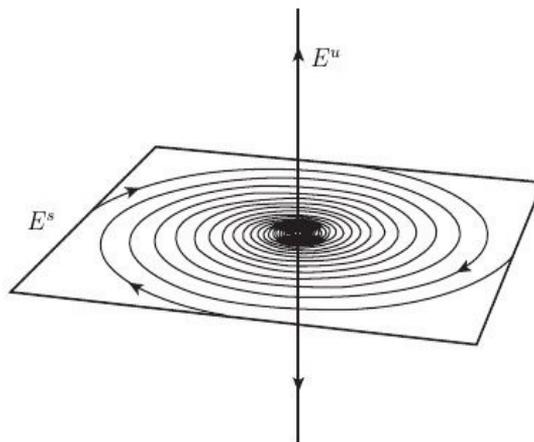


Figura 2.10: Retrato fase de una espiral-silla.

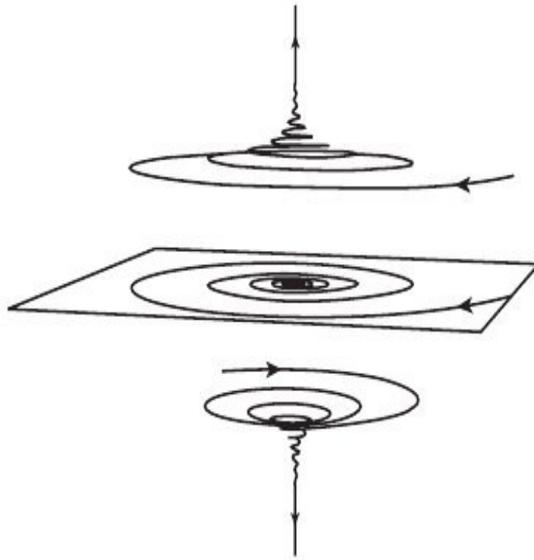


Figura 2.11: Soluciones típicas en una espiral silla tendiendo al subespacio inestable.

## 2.4 COMPORTAMIENTO CAÓTICO

Dentro de los sistemas dinámicos analizados en el capítulo anterior se encuentran también los sistemas caóticos. Según S. Smale y R. Devaney en [5] un sistema dinámico se puede considerar caótico si cumple con las siguientes condiciones:

- (i) Sensibilidad a condiciones iniciales.
- (ii) Transitividad.
- (iii) Densidad de órbitas periódicas.

Pero antes de continuar profundizando en el tema, es necesario definir las condiciones necesarias que debe cumplir un sistema para ser considerado caótico.

*Definición 2.5.* Un sistema dinámico está definido como un espacio de estados  $X$ , un grupo de tiempos  $T$  y una regla  $\phi$  la cual especifica como evolucionan los estados respecto al tiempo, expresado como  $\phi : T \times X \rightarrow X$ , tal que  $\phi = \phi(t, x)$ . La regla  $\phi$  es una función cuyo dominio es  $X \times T$  y su imagen es  $X$ . La función  $\phi$  toma dos entradas,  $\phi = \phi(x, t)$ , donde  $x \in X$  es el estado inicial (en  $t = 0$ , por ejemplo) y  $t \in T$  es el tiempo futuro. En otras palabras  $\phi(x, t)$  entrega el estado en el tiempo  $t$  dada una condición inicial  $x$ .

*Definición 2.5.* La sensibilidad a condiciones iniciales es una característica básica del caos, una propiedad opuesta a la estabilidad. Un sistema dinámico  $\phi : T \times X \rightarrow X$  muestra sensibilidad a condiciones iniciales (es decir,  $\phi$  es sensible) si existe un número  $\delta > 0$  tal que para cada  $x \in X$  y cada vecindad  $V$  de  $x$  se puede encontrar un punto  $y \in V$  y un número  $t \in T, t > 0$  para el cual

$$d(\phi_t x, \phi_t y) > \delta.$$

La sensibilidad a condiciones iniciales está asociada a la transitividad (concepto que se definirá a continuación) topológica y a la abundancia

de órbitas periódicas. Si se tiene caso de que el espacio de estados  $X$  sea un punto aislado, entonces cualquier dinámica del sistema se comportara de manera no sensitiva a condiciones iniciales [6].

*Definición 2.5.* Un sistema dinámico  $\phi : T \times X \rightarrow X$  continuo es llamado transitivo si satisface las siguientes condiciones: para cada par de conjuntos abiertos no vacíos  $U$  y  $V$  en  $X$ , existe un entero no negativo  $n$  tal que

$$\phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

*Definición 2.5.* La densidad de órbitas periódicas indica que hay un punto  $x \in X$  para el cual la órbita  $x$  es densa en  $X$ .

#### 2.4.1 Atractores caóticos

*Definición 2.5.* Considere un sistema  $\phi : T \times X \rightarrow X$ . Un conjunto  $\Lambda$  es denominado *atractor* si:

- (i)  $\Lambda$  es compacto e invariante.
- (ii) Existe un conjunto abierto  $U$  que contiene a  $\Lambda$  tal que para cada  $x \in U$ ,  $\phi(x, t) \in U$  para cada  $t \geq 0$  y  $\bigcap_{t \geq 0} \phi(U, t) = \Lambda$ .
- (iii) Dados dos puntos  $y_1, y_2 \in \Lambda$  y cualquier vecindario abierto  $U_j$  alrededor de  $y_j$  en  $U$ , existe una curva solución que inicia en  $U_1$  y después pasa mediante  $U_2$ .

La condición (iii) mencionada en la definición anterior, puede parecer algo extraña, se incluye para garantizar que se esta considerando un atractor en lugar de una colección de atractores distintos. Cabe destacar que no hay una definición de atractor aceptada universalmente, algunos matemáticos mencionan que en el conjunto  $\Lambda$  solo se deben cumplir las condiciones (i) y (ii) y si se cumple con la condición (iii) se debe llamar *atractor transitivo* (ver [6]).

En la definición 2.5 se presentan las condiciones para que un conjunto  $\Lambda$  sea denominado atractor, pero un atractor no necesariamente es considerado caótico, para esto se deben cumplir condiciones especiales.

*Definición 2.5.* Se denomina *atractor caótico* a un conjunto  $\Lambda$  que cumple con las siguientes condiciones:

- (i)  $\phi$  es sensible a condiciones iniciales.
- (ii) Los puntos periódicos de  $\phi$  son densos en  $\Lambda$ .
- (iii)  $\phi$  es transitiva en  $\Lambda$ .

Al igual que la definición de atractor, no hay una definición universal para los atractores caóticos, algunas definiciones involucran separación exponencial de órbitas, otras exponentes positivos de Lyapunov e incluso algunas no requieren la densidad de puntos periódicos.

#### 2.4.2 Sistema de Lorenz

Hasta el momento solo se han definido las condiciones que se requieren para tener un sistema que se considere caótico. A continuación se establecerá uno de los sistemas caóticos más famosos: el sistema de Lorenz, y se verificará que dicho sistema en realidad cumpla con los requisitos para ser considerado caótico.

En 1963 E. N. Lorenz intentó generar un sistema de ecuaciones diferenciales que explicaran el impredecible comportamiento del clima. La mayoría de modelos viables para explicar el clima involucraban ecuaciones diferenciales parciales, Lorenz buscó un sistema más simple y sencillo de analizar.

El modelo de Lorenz se puede pensar de manera algo inexacta de la siguiente forma: Imagine un planeta cuya "atmósfera" consiste en un fluido constituido de una partícula. Al igual que en la Tierra, dicho fluido se calienta desde abajo (por lo cual tiende a subir) y se enfría desde arriba (lo cual hace que baje nuevamente). Lamentablemente incluso en este planeta tan simplificado, el clima es imposible de predecir, lo cual trae consigo varias dudas acerca de la previsión del clima en la Tierra, la cual cuenta con una mayor cantidad de partículas [5].

Para ser más precisos, Lorenz busco un fluido de dos dimensiones que era calentado por debajo y enfriado por arriba. El movimiento de este fluido se puede describir mediante un sistema de ecuaciones diferenciales que involucran una cantidad casi infinita de variables. Lorenz hizo la tremenda simplificación y asumió que a excepción de tres de dichas variables el resto se mantenían como constantes, en consecuencia se obtiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales que involucran tres parámetros: El número de Prandtl  $\sigma$ , el número de Rayleigh  $r$  y el parámetro  $b$  que esa relacionado al tamaño físico del sistema. El sistema de ecuaciones diferenciales esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{y} &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{z} &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

En este sistema se asume que los tres parametros son positivos, ademas,  $\sigma > b + 1$ . El sistema se denota como  $X' = \mathcal{L}(X)$ .

#### 2.4.2.1 Propiedades elementales del sistema de Lorenz

Para iniciar el análisis del sistema de Lorenz, deben buscarse los puntos de equilibrio del sistema. Mediante álgebra es posible encontrar 3 puntos de equilibrio de manera muy sencilla:

$$\begin{aligned} Q_0 &= (0, 0, 0) \\ Q_1 &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ Q_2 &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \end{aligned}$$

Los dos ultimos puntos de equilibrio solo existen cuando  $r > 1$ , por lo cual se tiene una bifurcación en  $r = 1$ .

En su forma matricial el sistema de Lorenz se representa como

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_1 & x_1 & -b \end{pmatrix} x \tag{2.9}$$

En el origen, los valores propios de la matriz son

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -b \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( -(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1-r)} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( -(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1-r)} \right)\end{aligned}$$

Cabe destacar que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son negativos cuando  $0 \leq r < 1$ . Por lo que el origen es un *sumidero* en este caso particular. El campo vectorial de Lorenz  $\mathcal{L}(X)$  es simétrico. Si establecemos  $S(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, x_3)$ , entonces se tiene que  $S(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(S(X))$ . Lo cual significa que una reflexión en el eje  $x_3$  preserva el campo vectorial. En particular si  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  es una solución de la ecuación de Lorenz, por lo que  $(-x_1(t), -x_2(t), x_3(t))$  también lo es.

Cuando  $x_1 = x_2 = 0$ , se tiene que  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ , por lo que el eje  $x_3$  es invariante. En este eje se tiene que  $\dot{x}_3 = -bx_3$ , por lo que todas las soluciones tienden al origen en este eje.

#### 2.4.2.2 El atractor de Lorenz

Hasta el momento se ha hablado de la dinámica del sistema de Lorenz, un comportamiento bastante interesante por parte de este se presenta con un grupo específico de parámetros, donde el sistema de Lorenz tiene un atractor.

En la sección 2.4.1 se establecieron las definiciones necesarias para considerar a un conjunto un *atractor* y posteriormente un *atractor caótico*, por lo que el análisis que se llevará a cabo a continuación se basa en dichas definiciones.

De acuerdo a las suposiciones hechas, dos puntos con la misma coordenada  $x_2$  en  $\Sigma$  son mapeadas hacia dos nuevos puntos cuyas coordenadas son dadas por  $g(x_2) \in I$  y por lo tanto vuelven a ser las mismas. Resulta que bajo la interacción de  $\phi$  (dinámicas del mapeo de Poincaré), no es

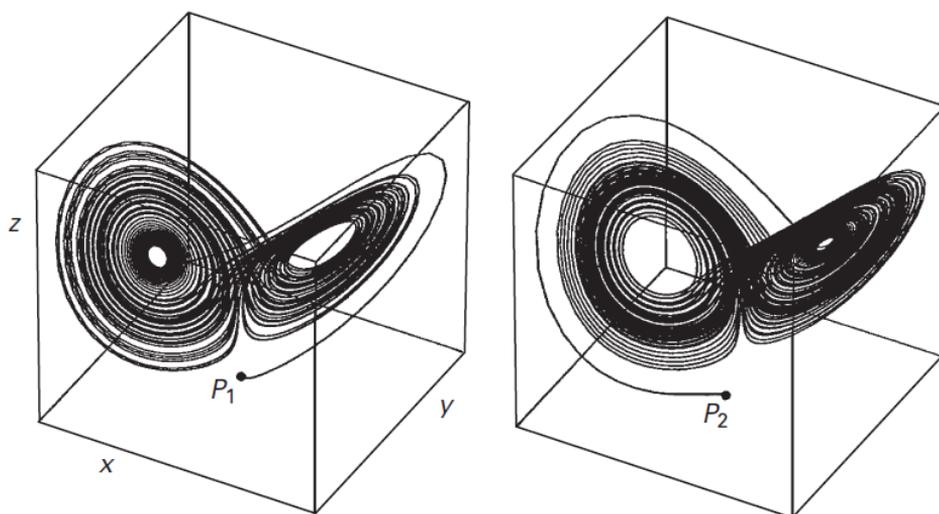


Figura 2.12: Atractor de Lorenz, dos soluciones con condiciones iniciales  $P_1(0, 2, 0)$  y  $P_2(0, -2, 0)$ .

necesario preocuparse por todos los puntos en la línea  $y = \text{constante}$ , en cambio es necesario analizar como las coordenadas  $x_2$  cambia con respecto a las iteraciones de  $g$ . Por lo que resulta obvio que el mapeo de Poincaré  $\phi$  esta completamente determinado por las dinámicas de la función  $g$  definida en el intervalo  $[-x_2^*, x_2^*]$ . Por lo cual se las condiciones necesarias para que el atractor de Lorenz sea considerado caótico se probaran a continuación:

### 1. Sensibilidad a condiciones iniciales

**TEOREMA (2.4.1).** *Considere  $0 < v < x_2^*$  y  $x_0 \in I = [-x_2^*, x_2^*]$ . Dado cualquier  $\epsilon > 0$ , se puede encontrar  $u_0, v_0 \in I$  con  $\|v_0 - x_0\| < \epsilon$  y  $n > 0$  tal que  $\|g^n(u_0) - g^n(v_0)\| \geq 2v$ .*

Si consideramos  $J$  un intervalo de  $2\epsilon$  de longitud centrado en  $x_0$ . Cada iteración de  $g$  expande la longitud de  $J$  por un factor de al menos  $\sqrt{2}$ , por lo que hay una iteración para la cual  $g^n(J)$  contiene al 0 en su interior. Por lo que  $g^{n+1}(J)$  contiene puntos arbitrariamente cercanos a

$\pm x_2^*$ , y entonces hay puntos en  $g^{n+1}(J)$  cuya distancia entre sí es de al menos  $2v$ .

Si interpretamos el significado de la proposición anterior con respecto al atractor  $A$  (de Lorenz), podemos encontrar puntos arbitrariamente cercanos cuyas trayectorias se separan entre sí tanto como pueden. a este comportamiento se le conoce como sensibilidad a condiciones iniciales.

## 2. Puntos periódicos densos

**TEOREMA (2.4.2).** *Consideremos  $P \in A$  y  $U$  una vecindad abierta de  $P$ . Asumiremos que  $U$  nunca cruza la línea  $x_2 = 0$ . Para un  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño, construiremos un rectángulo  $W \subset U$  centrado en  $P$  de ancho  $2\epsilon$  y altura  $\epsilon$ .*

Si se tiene que  $W_1 \subset W$  es un cuadrado mas pequeño centrado en  $P$  con lados de  $\epsilon/2$ , podemos encontrar un punto  $Q_1 \in W_1$  tal que  $\phi^n(Q_1) = Q_2 \in W_1$ , al escoger un subconjunto  $W_1$  si es necesario, podemos asumir que  $n > 4$  y además que  $n$  es tan grande que  $c^n = \epsilon/8$ . Se deduce que la imagen de  $\phi^n(W)$  cruza a través del interior de  $W$  de manera casi vertical y se extiende hasta los límites superiores e inferiores.

Si consideramos las líneas  $x_2 = c$  en  $W$ . Dichas líneas son mapeadas hacia otras línea en  $R$  por  $\phi^n$ . Debido a que la dirección vertical se expande, algunas de las líneas por encima de  $W$  y otras por debajo de  $W$ . Se deduce entonces que la línea  $x_2 = c_0$  debe ser mapeada dentro de sí misma por  $\phi^n$ , y por lo tanto debe existir un punto fijo para  $\sigma^n$  en esta línea. Debido a que esta línea está contenida en  $W$ , se tiene un punto periódico para  $\phi$  en  $W$ . Esto comprueba la existencia de puntos periódicos densos.

## 3. Transitividad

**TEOREMA (2.4.3).** *La función  $g$  es transitiva en  $I$  si, por cada par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$  y vecindades  $U_j$  de  $x_j$ , podemos encontrar  $\tilde{x} \in U_1$  y  $n$  tal que  $g^n(\tilde{x}) \in U_2$ .*

Por lo que se puede destacar que el sistema dinámico de Lorenz cumple con las condiciones necesarias para ser considerado un sistema caótico.

### 2.4.2.3 Sistema de Lorenz generalizado

A través de este capítulo se ha utilizado el sistema clásico de Lorenz para ejemplificar las condiciones necesarias para que un sistema se considere caótico, pero el sistema clásico de Lorenz es un caso especial del sistema generalizado de Lorenz. Al manejar el sistema generalizado de Lorenz es posible estudiar a su vez el sistema clásico de Lorenz, el sistema de Chen, el sistema de Lü y el sistema caótico unificado[7].

Considere el sistema generalizado de Lorenz

$$\dot{x} = Ax + F(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (2.10)$$

Donde  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  y  $A$  es una matriz de parámetros constantes.

Cuatro de los sistemas caóticos más comunes pueden ser obtenidos de 2.10, modificando los parámetros de la matriz  $A$  como se muestra a continuación:

(i) Sistema clásico de Lorenz

$$a_{12} = -a_{11} = a, \quad a_{21} = c, \quad a_{22} = -1 \quad \text{y} \quad a_{33} = -b$$

(ii) Sistema de Chen

$$a_{12} = -a_{11} = a, \quad a_{21} = c - a, \quad a_{22} = c \quad \text{y} \quad a_{33} = -b$$

(iii) Sistema de Lü

$$a_{12} = -a_{11} = a, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = c \quad \text{y} \quad a_{33} = -b$$

(iv) Sistema caótico unificado

$$a_{12} = -a_{11} = 25 + \alpha, \quad a_{21} = 28 - 35\alpha, \quad a_{22} = 29\alpha - 1 \quad \text{y} \quad a_{33} = -\frac{8 + \alpha}{3}$$

Donde  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  y  $\alpha \in [0, 1]$ .

## 2.4.3 Teoremas de Shilnikov para sistemas UD

Existe un enfoque que caracteriza a los sistemas con comportamiento caótico, derivado de su espectro y los eigenespacios generados, que establece la relación entre los valores propios que generan cierto tipo de curvas cerradas llamadas curvas *homoclínicas* y *heteroclínicas*, que dependen del acomodo de los espacios estable e inestable asociados. Tal enfoque es debido a Shilnikov (ver por ejemplo [8, 9]) y a continuación presentamos algunos resultados principales.

Considere el sistema dinámico autónomo de tercer orden

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.11)$$

donde  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es  $p$  veces diferenciable (es decir clase  $C^p$ ) y con  $x_e$  como punto de equilibrio.

**TEOREMA (2.4.4) (MÉTODO HOMOCLÍNICO DE SHILNIKOV).** *Dado un sistema autónomo de tercer orden de la forma 2.11. Suponga lo siguiente:*

- (i) *El punto de equilibrio  $x_e$  es de tipo silla-foco cuyos valores propios satisfacen la desigualdad de Shilnikov:*

$$|\lambda_1| > |\lambda_{2,3}| > 0$$

- (ii) *Existe una órbita homoclínica  $\mathcal{H}$  basada en  $x_e$*

*Entonces, tanto el sistema original como para cualquier perturbación lo suficientemente pequeña de  $f^2$  muestran comportamiento caótico homoclínico.*

Y su respectiva parte para el caso homoclínico.

**TEOREMA (2.4.5) (MÉTODO HETEROCLÍNICO DE SHILNIKOV).** *Dado un sistema de tercer orden de la forma 2.11. Asumamos que  $x_{e1}$  y  $x_{e2}$  son dos puntos distintos de equilibrio. Supoga que:*

- (i) *Ambos puntos de equilibrio  $x_{e1}$  y  $x_{e2}$  son de tipo silla-foco cuyos valores propios satisfacen la desigualdad de Shilnikov:*

$$|\lambda_i| > |\lambda_{1,2i}| > 0, \quad (i = 1, 2)$$

con la siguiente restricción:

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \text{ o } \lambda_{11} \lambda_{12} > 0$$

(ii) Existe un lazo heteroclinico  $\mathcal{H}_1$  que va de  $x_{e1}$  a  $x_{e2}$  que esta formado por dos obitas heteroclinicas  $\mathcal{H}_i$ , ( $i = 1, 2$ ).

Entonces, tanto el sistema original como para cualquier perturbación lo suficientemente pequeña de  $f^2$  muestran comportamiento caotico heteroclínico.

#### 2.4.4 Sistemas inestables-disipativos

Sistemas biológicos, climatológicos, tecnológico, entre otros, generan oscilaciones y muchos de estos han sido modelados matemáticamente por un par de ecuaciones diferenciales de primer orden con parámetros adecuados para asegurar comportamiento oscilatorio. Muchos de los fenómenos naturales no lineales han sido descritos por sistemas con comportamiento caótico.

Una clase de sistemas con comportamiento caótico del tipo de Shilnikov son los llamados sistemas lineales por piezas (sistemas PWLS, por sus siglas en inglés), los cuales están basados en sistemas con diferente dinámica que conmutan de una región a otra en  $\mathbb{R}^3$  (ver por ejemplo[10]). Los sistemas PWLS se caracterizan por poseer más de dos atractores que se enrollan, por lo que también se les conoce como *atractores con multi-enrollamiento*, o *multiscroll attractor* en inglés. En los últimos años se ha dirigido una parte de la investigación en el diseño en este tipo de sistemas, debido a la riqueza de sus comportamientos dinámicos: ciclos limites, órbitas homoclinicas y heteroclinicas, atractores extraños, entre otros.

Una estrategia para diseñarlos ha sido el modificar sistemas que originalmente producen enrollamiento dobles hasta generar multiscrolls, como en los sistemas de Chua y de Lorenz.

Considere el sistema de ecuaciones autónomo no lineal, capaz de mostrar comportamiento caótico:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.12)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f : E \rightarrow A$  de los cuales  $E$  y  $A$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Bajo condiciones bien establecidas en  $f$ , el sistema tiene una solución única iniciando en cada punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  con un intervalo de existencia definido  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Generalmente no es posible resolver de manera analítica este tipo de sistemas, sin embargo una gran cantidad de información cualitativa acerca del comportamiento local en las soluciones puede ser determinado cerca del punto de equilibrio  $x_e$  que satisface  $f(x_e) = 0$ .

*Definición 2.5.* Un punto de equilibrio  $x_e$  del sistema 2.12 es llamado sumidero si todos los valores propios de la matriz  $Df(x)$  (el Jacobiano del sistema) tienen parte real negativa, es llamado fuente si todos los valores propios de  $Df(x)$  tienen parte real positiva y es denominado una silla si  $Df(x)$  tiene al menos un valor propio con parte real positiva y al menos uno con parte real negativa, pero ningún valor propio tiene parte real cero.

Puntos de equilibrio tipo silla que se conectan a un subespacio estable  $W^s$  y un subespacio inestable  $W^u$ , son responsables de extender y doblar, por lo tanto juegan un papel importante en la generación de caos. El extender causa que las trayectorias del sistema sean sensibles a condiciones iniciales mientras que el doblar crea complicadas microestructuras. El punto silla de un sistema caótico en  $\mathbb{R}^3$  puede ser caracterizado en dos tipos de acuerdo a sus valores propios [10].

El teorema de Hartman-Grobman establecen que el comportamiento local de un sistema no lineal, cerca de un punto de equilibrio  $x_e$  esta topológicamente determinado por el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax \quad (2.13)$$

si el sistema lineal tiene un punto de equilibrio silla y la suma de sus valores propios es negativa, entonces se denomina *sistema inestable disipativo* (UDS por sus siglas en ingles). Donde  $A = Df(x_e) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $x \in U = N_\epsilon(x_e) \subset \mathbb{R}^n$ . De acuerdo a lo anterior es posible definir dos tipos de UDS.

*Definición 2.6.* Considere el sistema lineal (2.13) en  $\mathbb{R}^3$  con valores propios  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ , tal que  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ . El sistema se dice ser *UDS tipo I* si uno de los valores propios es real negativo mientras que los otros son complejos conjugados con parte real positiva; el sistema se dice ser *UDS Tipo II* si uno de los valores propios es real positivo mientras que los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa.

Para el resto del análisis siempre que se haga referencia a un UDS, se esta referenciando específicamente un UDS de tipo II.

### 2.6.0.1 UDS Tipo II

En general, para generar atractores UDS tipo II en puntos de equilibrio diferentes al origen, se puede considerar un sistema lineal afín [11]. Consideremos un sistema lineal afín dado por

$$\dot{\chi} = A\chi + B \quad (2.14)$$

donde  $\chi = [\chi_1, \chi_2, \chi_3]^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de estados,  $B = [b_1, b_2, b_3]^T \in \mathbb{R}^3$  es un vector real, y  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  denota un operador lineal dado por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Recordando que si la suma de los valores propios de la matriz  $A$  es negativa entonces es disipativa. El equilibrio del sistema 2.14 es  $\chi_e = -A^{-1}B \in \mathbb{R}^3$  es un punto silla hiperbolico con un subespacio inestable  $W_\chi^u$  de una dimensión, y un subespacio estable  $W^s$  de dos dimensiones. Las trayectorias cualitativas de el punto silla hiperbolico pueden ser vistas en la figura 2.13.



Se tiene el interés en un sistema de conmutación (“SW” por sus siglas en inglés), el cual está constituido por dos sistemas de la forma 2.14,  $S_i, i = 1, 2$  gobernada por una ley de conmutación. Cada sistema  $S_i$  tiene un dominio  $D_i \subset \mathbb{R}^3$ , conteniendo el punto de equilibrio  $\chi_i = -A_i^{-1}B_i$ . Entonces la ley de conmutación gobierna la dinámica del SW la cual cambia el equilibrio de  $\chi_1$  a  $\chi_2$  o viceversa.

*Definición 2.7.* Considere dos sistemas dados por 2.14 en  $\mathbb{R}^3$  con dominio  $D_i \subset \mathbb{R}^3$  y equilibrio  $\chi_i \in D_i$ , para  $i = 1, 2$ . Defina un SW como dos UDS de tipo II como:

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1x + B_1, & \text{si } x \in D_1 \\ A_2x + B_2, & \text{si } x \in D_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

Un enfoque conveniente para construir matrices  $A$  y  $B$  es basado en la forma de la ecuación diferencial ordinaria  $\ddot{x} + \alpha_{33}\dot{x} + \alpha_{32}x + \alpha_{31}x + \beta = 0$ . Por lo que la matriz  $A$  se convierte en:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

y  $B = [b_1, b_2, b_3]^T = (0, 0, \beta)^T$ , el atractor generado con esta clase de matriz se encuentra en la figura 2.14.

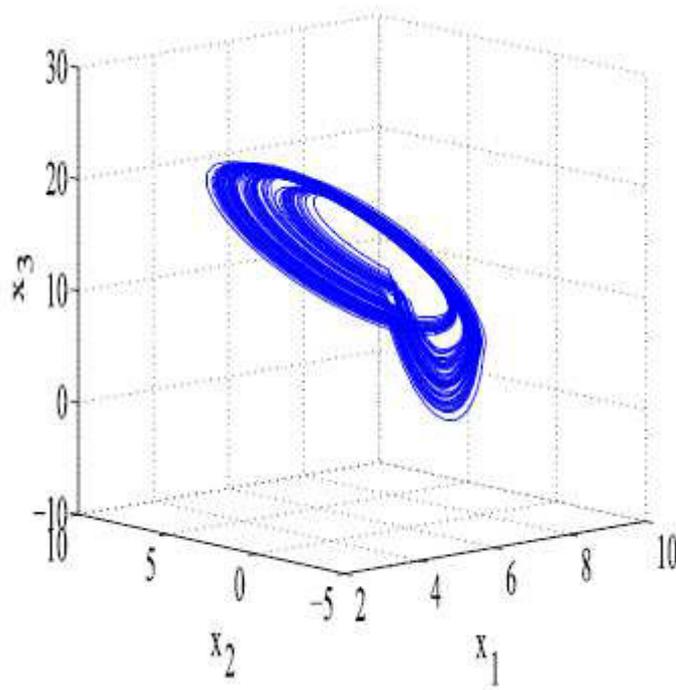


Figura 2.14: Atractor generado usando un UDS Tipo II.



# 3

## SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

Como un tópico de teoría de sistemas dinámicos, la sincronización de sistemas caóticos de tipo generalizado debido a su potencial tanto en la teoría como en la práctica. Diseñar un acoplamiento para lograr sincronización de sistemas no lineales puede ser una tarea desafiante. Esto puede lograrse de maneras diferentes:

- (i) Usar una variable del sistema maestro en el sistema esclavo.
- (ii) Usar un acoplamiento con retroalimentación entre el sistema maestro y el sistema esclavo.
- (iii) Utilizar una estrategia de lazo abierto más lazo cerrado (“*OPCL*” por sus siglas en inglés)

Esta última estrategia ha sido utilizada para la sincronización de dos circuitos tipo Chua entre otros.

### 3.1 LEY DE CONTROL PARA LA SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS LORENZ GENERALIZADOS

Consideremos el sistema maestro

$$\dot{x} = F(x)$$

y el sistema esclavo:

$$\dot{y} = F(y)$$

El acoplamiento mas sencillo es el termino aditivo  $K_j(y_i - x_i)$  en cada ecuación  $j$  del sistema esclavo. Otra estrategia es  $K_j(x_i)(y_i - x_i)$  donde un termino de ganancia variable se encuentra en la ecuación  $i$ . A continuación se buscara acoplar dos sistemas de tipo Lorenz generalizado usando su función de Lyapunov y asegurando un valor negativo en su derivada[12].

Considerando el sistema generalizado de Lorenz:

$$\dot{x} = Ax + f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} x + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (3.18)$$

Del cual se obtiene el siguiente sistema maestro:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_{33}x_3 + x_1x_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Y el sistema esclavo:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + u_1 \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - y_1x_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 &= a_{33}y_3 + y_1y_2 + u_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

El vector de error se define como  $e = y - x$ , por lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 - e_1e_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= a_{33}e_3 + e_1e_2 + u_3 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo que la función de Lyapunov se establece como:

$$L = (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) / 2 \quad (3.22)$$

Y su derivada:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= e_1 [a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + u_1] + e_2 [a_{21}e_1 + a_{22}e_2 - e_1e_3 + u_2] \\ &\quad + e_3 [a_{33}e_3 + e_1e_2 + u_3] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Una elección trivial de  $u$  es:

$$\begin{aligned} u_1 &= -p_1^2 e_1 - [a_{11} e_1 + a_{12} e_2] \\ u_2 &= -p_2^2 e_2 - [a_{21} e_1 + a_{22} e_2 - e_1 e_3] \\ u_3 &= -p_3^2 e_3 - [a_{33} e_3 + e_1 e_2] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si sustituimos (3.24) en (3.23) la derivada de la función de Lyapunov se convierte en

$$\dot{L} = -P_1^2 e_1^2 - P_2^2 e_2^2 - P_3^2 e_3^2 \quad (3.25)$$

Donde  $P = (P_1, P_2, P_3)$  es un punto que se selecciona para que la derivada de la función de Lyapunov (3.25) sea negativa en todo momento.

$$\dot{L} = -P_1^2 e_1^2 - P_2^2 e_2^2 - P_3^2 e_3^2 < 0 \quad (3.26)$$

Mediante (3.24) es posible sincronizar dos sistemas de tipo generalizado Lorenz de manera rápida y con un error mínimo siempre que el punto  $P$  sea adecuado para que (3.25) sea negativa entre mayor magnitud de  $P_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) mas rápido se sincroniza el sistema.

Para la comprobación numérica del controlador propuesto se utilizo el ambiente de Matlab y Simulink, los parámetros del sistema se ingresaron mediante un archivo en Matlab y la simulación se llevo a cabo en Simulink, en la Figura 3.1 se muestra el diagrama de simulación del sistema de acoplamiento maestro-esclavo.

Para el subsistema "Controller" el cual contiene los tres controladores  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ , el diagrama en Simulink es el mostrado en la Figura 3.2.

A continuación se presentaran los resultados numéricos de dichos controladores.

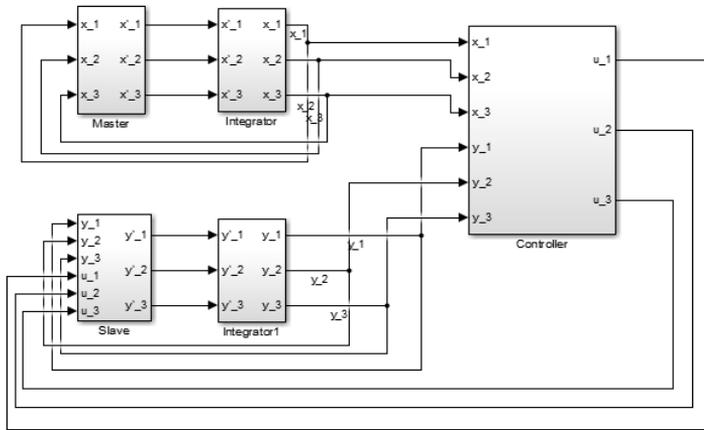


Figura 3.1: Diagrama de Simulink para la simulación del acoplamiento Maestro-Eslavo.

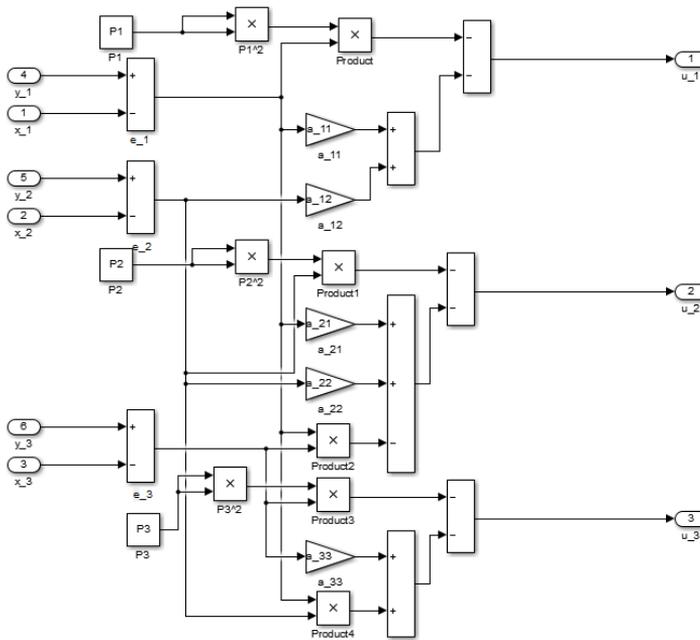


Figura 3.2: Diagrama de Simulink para el subsistema “Controller”.

### 3.1.1 Sincronización maestro Lorenz – esclavo Lorenz

Usando el sistema generalizado de tipo Lorenz con  $a = 16$ ,  $b = 4$  y  $c = 45,6$  como base para los sistemas maestro y esclavo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 16(x_1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= 45,6x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -4x_3 + x_1x_2,\end{aligned}\tag{3.27}$$

mientras que el controlador toma la forma

$$\begin{aligned}u_1 &= -p_1^2 e_1 - 16[e_1 + e_2] \\ u_2 &= -p_2^2 e_2 - [45,6e_1 - e_2 - e_1e_3] \\ u_3 &= -p_2^2 e_2 - [-4e_3 + e_1e_2]\end{aligned}$$

Si tomamos las condiciones iniciales  $x(0) = (2, 3, 5, 18, 4)$  y  $y(0) = (-1, 10, 2, 8, 3)$  se obtiene la sincronización del sistema caótico de Lorenz en  $t = 0,05$ , esto al utilizar el punto  $P = (10, 10, 10)$ . El comportamiento caótico del sistema de Lorenz se puede apreciar en la Figura 3.3 y en la figura 3.4 se muestra el sistema de Lorenz corregido (controlado) como esclavo. En la Figura 3.5 se muestra ambos sistemas, donde es posible ver que el error es prácticamente cero. La sincronización del sistema en  $x_1$  y  $y_1$  se puede ver en las Figuras 3.6 y 3.7. La sincronización del sistema en  $x_2$  y  $y_2$  se puede ver en las Figuras 3.6 y 3.7. La sincronización del sistema en  $x_3$  y  $y_3$  se puede ver en las Figuras 3.6 y 3.7. La Figura 3.12 muestra el error  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , en ella se puede apreciar que el error se vuelve prácticamente 0 en  $t = 0,05$ .

S. Oancea, F. Grosu, A. Lazar e I. Grosu proponen un controlador semejante al presentado en este reporte en [12] sin embargo, los resultados obtenidos por parte de esta investigación muestran una sincronización mas rápida y con un error menor al de [12], esto puede verse en la figura 3.13 donde se muestra la comparación de ambos resultados utilizando las condiciones iniciales  $x(0) = (10, 10, 10)$  y  $y(0) = (-10, -10, -10)$  con  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 30$  y  $P1 = -40$ .

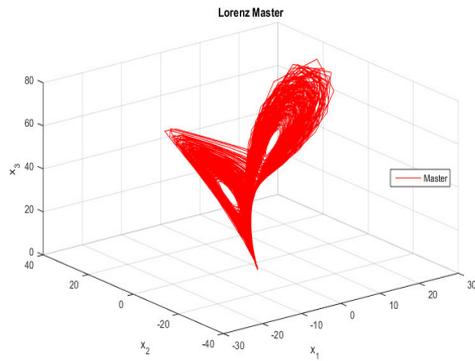


Figura 3.3: Sistema caótico de Lorenz (3.27).

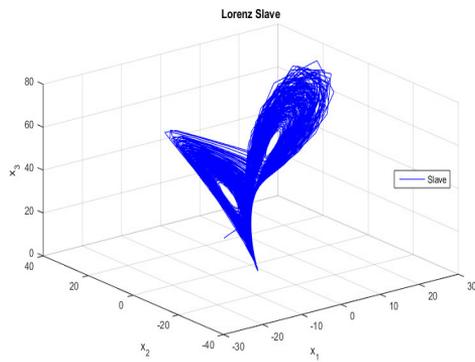


Figura 3.4: Sistema caótico Lorenz (3.27) corregido.

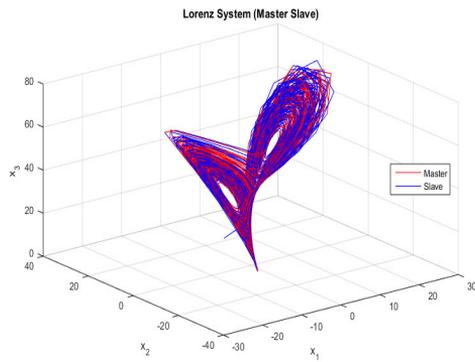


Figura 3.5: Sistema Lorenz - Lorenz sincronizado.

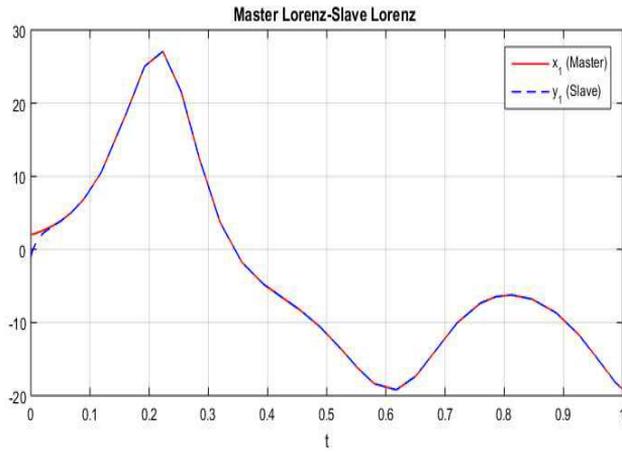


Figura 3.6: Sincronización del sistema de Lorenz en  $x_1$  y  $y_1$ .

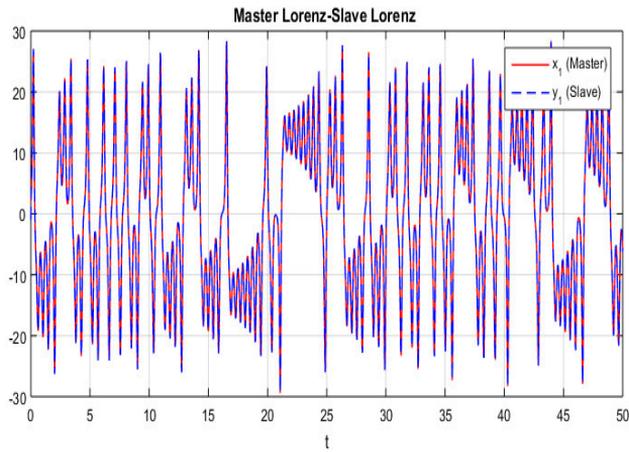


Figura 3.7: Sincronización del sistema de Lorenz en  $x_1$  y  $y_1$  hasta  $t = 50$ .

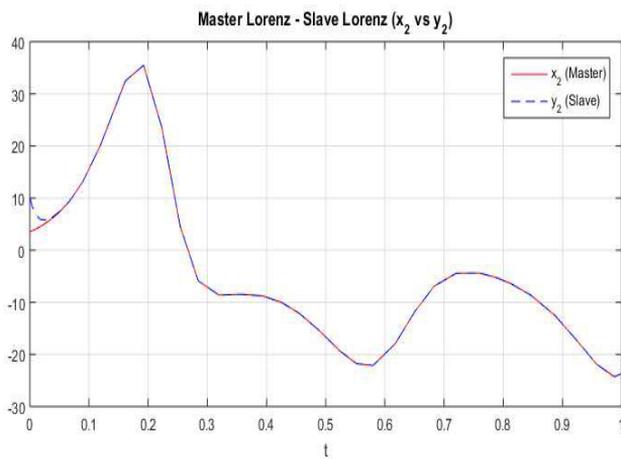


Figura 3.8: Sincronización del sistema de Lorenz en  $x_2$  y  $y_2$ .

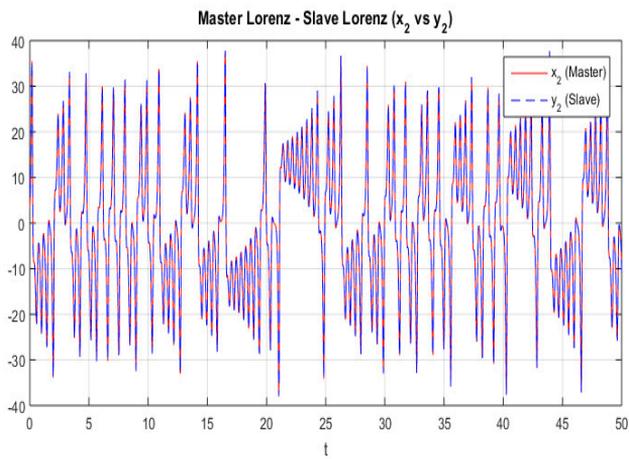


Figura 3.9: Sincronización del sistema de Lorenz en  $x_2$  y  $y_2$  hasta  $t = 50$ .

### 3.1 LEY DE CONTROL PARA LA SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS LORENZ GENERALIZADOS

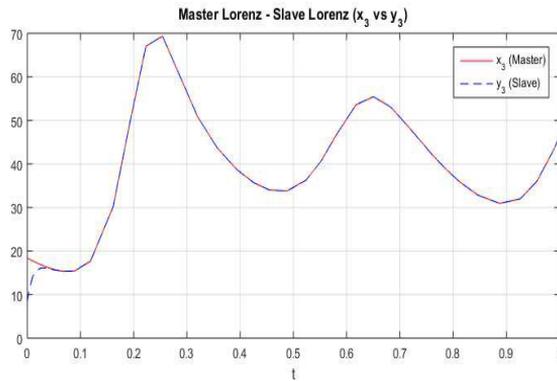


Figura 3.10: Sincronización del sistema de Lorenz en  $x_3$  y  $y_3$ .

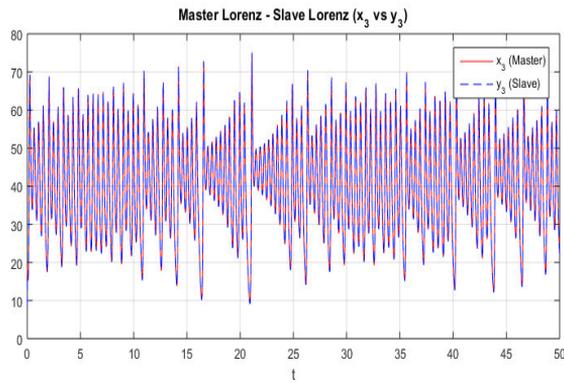


Figura 3.11: Sincronización del sistema de Lorenz en  $x_3$  y  $y_3$ .

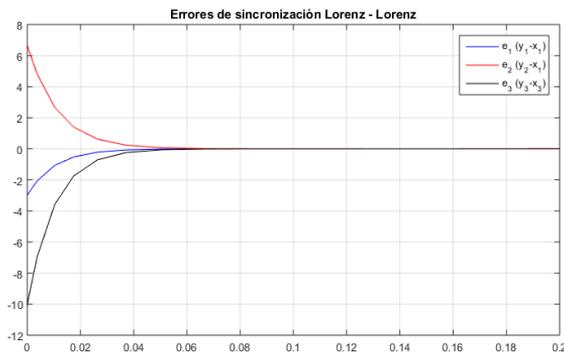


Figura 3.12: Error de sincronización Lorenz-Lorenz.

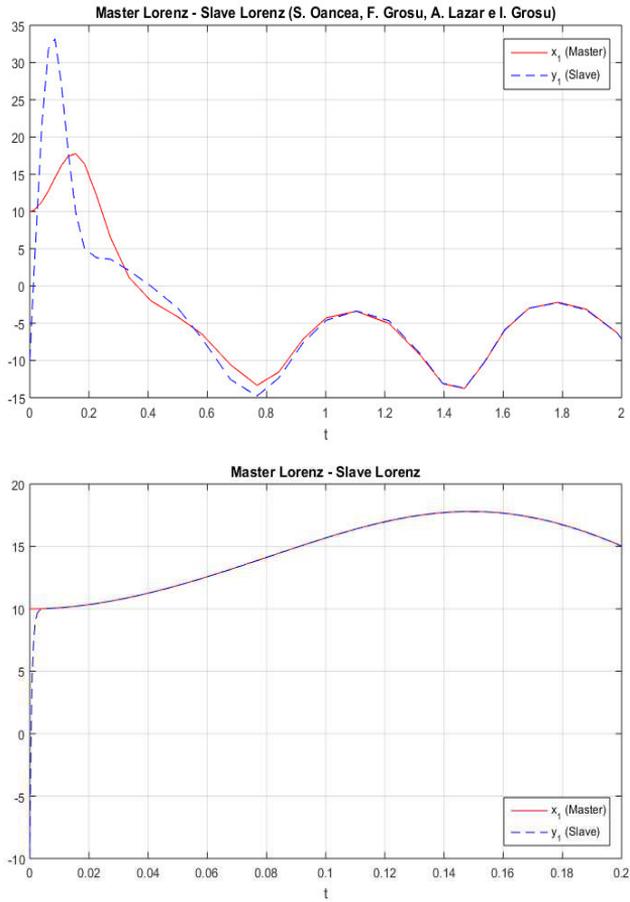


Figura 3.13: Resultados obtenidos mediante el controlador propuesto en [12] ( a) vs resultados obtenidos por el controlador propuesto en esta investigación (b).

### 3.1.2 Sincronización maestro Chen – esclavo Chen

Usando los valores  $a = 35$ ,  $b = 3$  y  $c = 28$  el sistema generalizado de tipo Lorenz se expresará como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 35(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -7x_1 - 28x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_1x_2,\end{aligned}$$

el cual fungirá como base para los sistemas maestro y esclavo, mientras que el controlador tomará la forma:

$$\begin{aligned}u_1 &= -p_1^2 e_1 - [-35e_1 + 35e_2] \\ u_2 &= -p_2^2 e_2 - [-7e_1 + 28e_2 - e_1e_3] \\ u_3 &= -p_2^2 e_2 - [-3e_3 + e_1e_2]\end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales  $x(0) = (3, -5, 4, 35, 6)$  y  $y(0) = (-1, 3, 1, 26, 5)$  se obtiene la sincronización del sistema caótico de Chen en  $t = 0,05$ , esto al utilizar el punto  $P = (10, 10, 10)$ .

El comportamiento caótico del sistema de Chen se puede apreciar en la Figura 3.14 y en la figura 3.15 se observa al sistema de Chen como esclavo corregido (controlado). Además, en la Figura 3.16 se muestra a ambos sistemas, donde es posible ver que el error es prácticamente cero. La sincronización del sistema para  $x_1$  y  $y_1$  puede apreciarse en las Figuras 3.17, 3.18. La sincronización del sistema para  $x_2$  y  $y_2$  puede apreciarse en las Figuras 3.19, 3.20. La sincronización del sistema para  $x_3$  y  $y_3$  puede apreciarse en las Figuras 3.21, 3.22. La Figura 3.23 muestra el error  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , en ella se puede apreciar que el error se vuelve prácticamente 0 en  $t = 0,05$ .

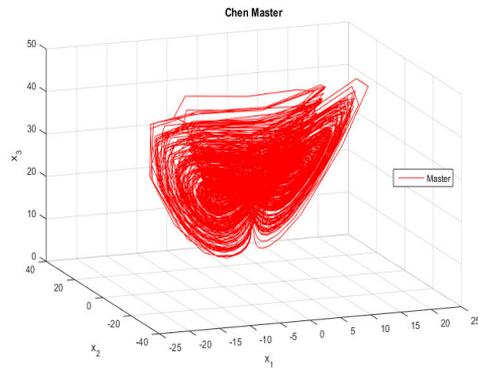


Figura 3.14: Comportamiento caótico del sistema maestro de Chen.

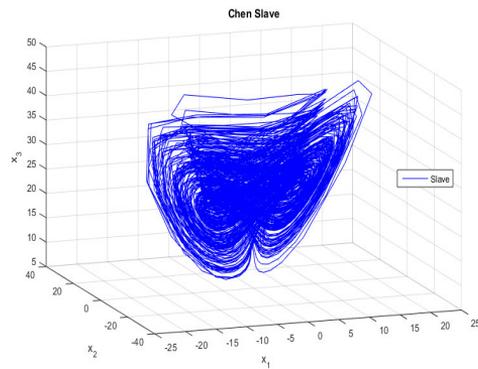


Figura 3.15: Comportamiento caótico del sistema esclavo (sistema corregido) de Chen.

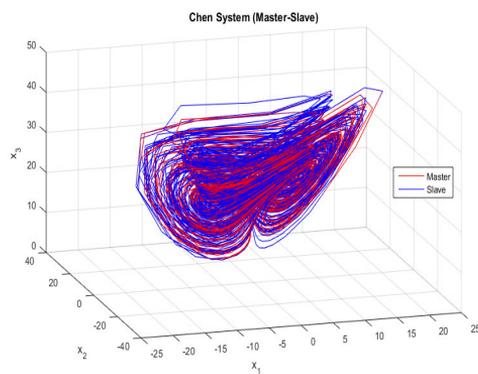


Figura 3.16: Sistema Chen - Chen sincronizado.

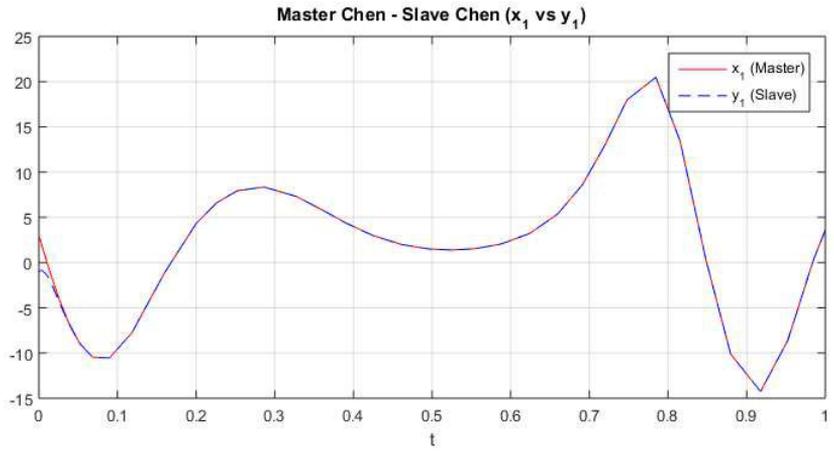


Figura 3.17: Sincronización del sistema de Chen en  $x_1$  y  $y_1$ .

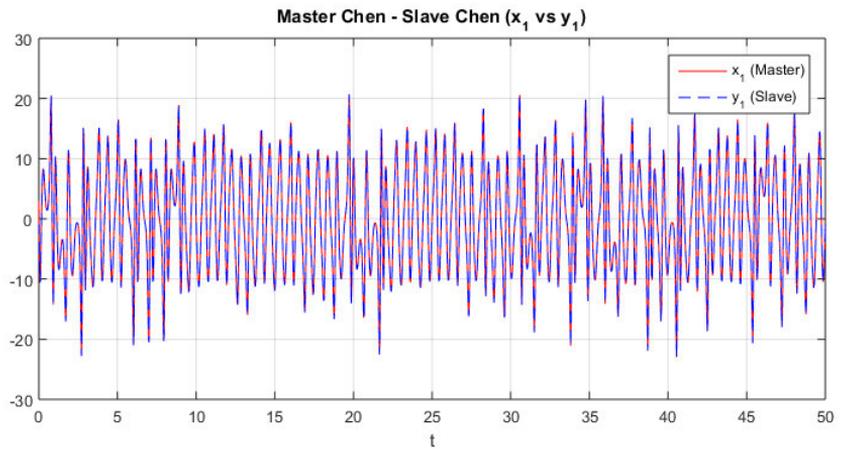


Figura 3.18: Sincronización del sistema de Chen en  $x_1$  y  $y_1$  con  $t = 50$ .

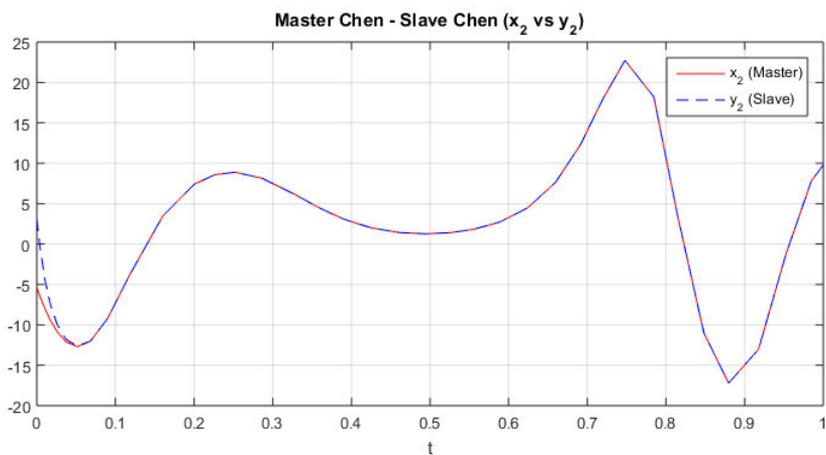


Figura 3.19: Sincronización del sistema de Chen en  $x_2$ .

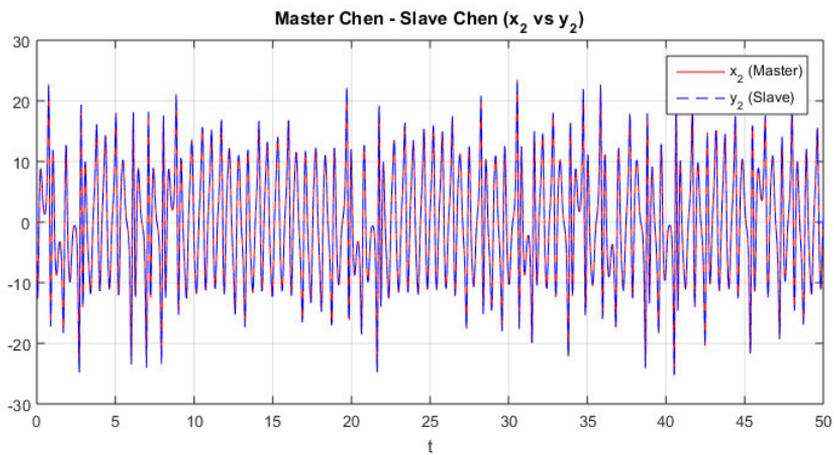


Figura 3.20: Sincronización del sistema de Chen en  $x_2$  y  $y_2$  con  $t = 50$ .

3.1 LEY DE CONTROL PARA LA SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS LORENZ GENERALIZADOS

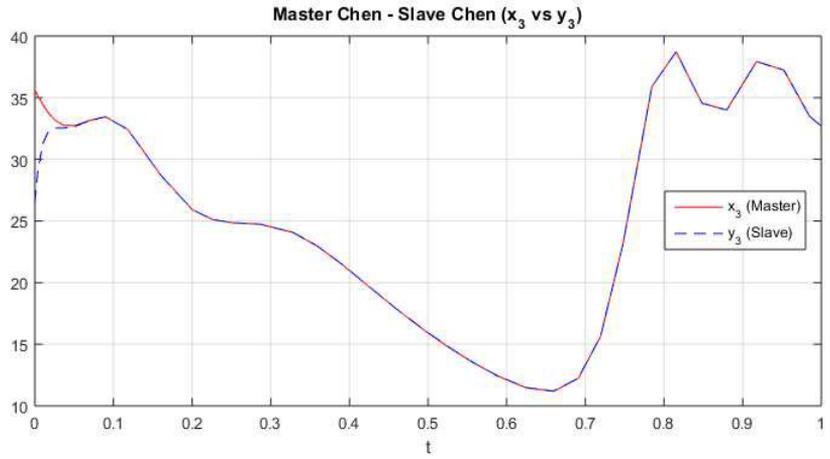


Figura 3.21: Sincronización del sistema de Chen en  $x_3$  y  $y_3$ .

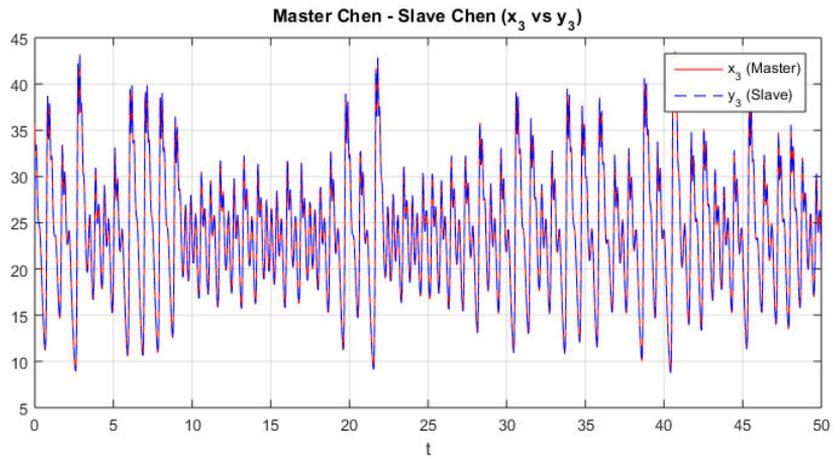


Figura 3.22: Sincronización del sistema de Chen en  $x_3$  y  $y_3$  con  $t = 50$ .

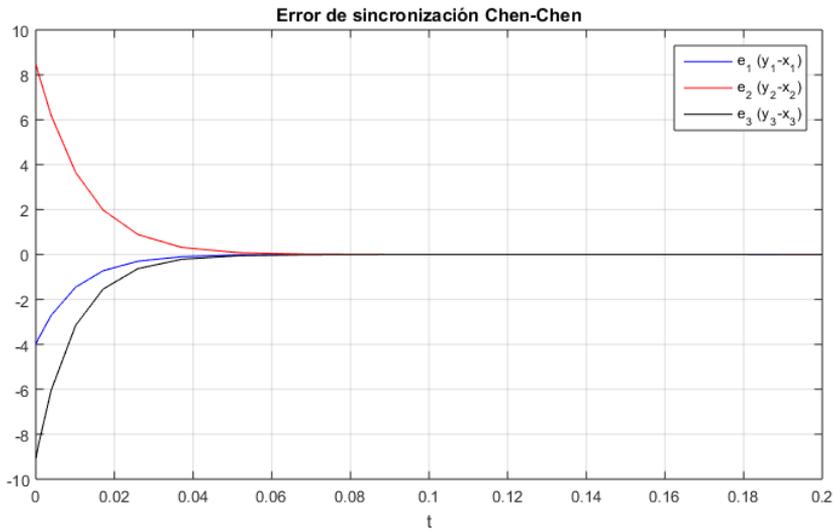


Figura 3.23: Error de sincronización Chen-Chen.

### 3.1.3 Sincronización Maestro Lü – Esclavo Lü

La base para los sistemas maestro y esclavo será el sistema generalizado de tipo Lorenz con  $a = 36$ ,  $b = 3$  y  $c = 20$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 36(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= 20x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_1x_2, \end{aligned}$$

y el controlador se expresa como:

$$\begin{aligned} u_1 &= -p_1^2 e_1 - 36[e_2 - e_1] \\ u_2 &= -[p_2^2 + 20]e_2 \\ u_3 &= -[p_3^2 + 3]e_3 \end{aligned} \tag{3.28}$$

y condiciones iniciales  $x(0) = (-4, 2, -3, 4, 20, 3)$  y  $y(0) = (3, -5, 2, 15, 4)$  se obtiene la sincronización del sistema caótico de Lü en  $t = 0,05$ , esto al utilizar el punto  $P = (10, 10, 10)$ . El sistema caótico de Lü se

observa la figura 3.24, mientras que el sistema caótico corregido de Lü se puede apreciar en la figura 3.25. Además, en la figura 3.26 se muestra la sincronización de ambos sistemas, donde es posible ver que el error es prácticamente cero.

La sincronización del sistema para  $x_1$  y  $y_1$  puede apreciarse en las Figura 3.27 y 3.28. La sincronización del sistema para  $x_2$  y  $y_2$  puede apreciarse en las Figura 3.29 y 3.30. La sincronización del sistema para  $x_3$  y  $y_3$  puede apreciarse en las Figura 3.31 y 3.32. La Figura 3.33 muestra el error  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , en ella se puede apreciar que el error se vuelve prácticamente 0 en  $t = 0,05$ .

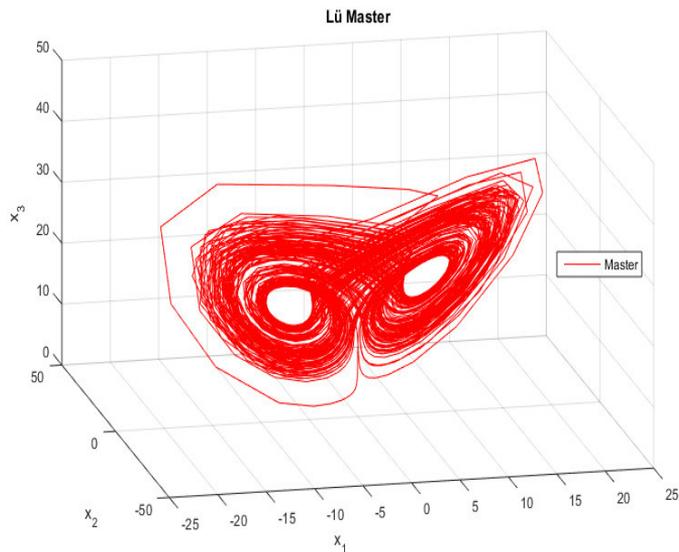


Figura 3.24: Comportamiento caótico del sistema Maestro de Lü.

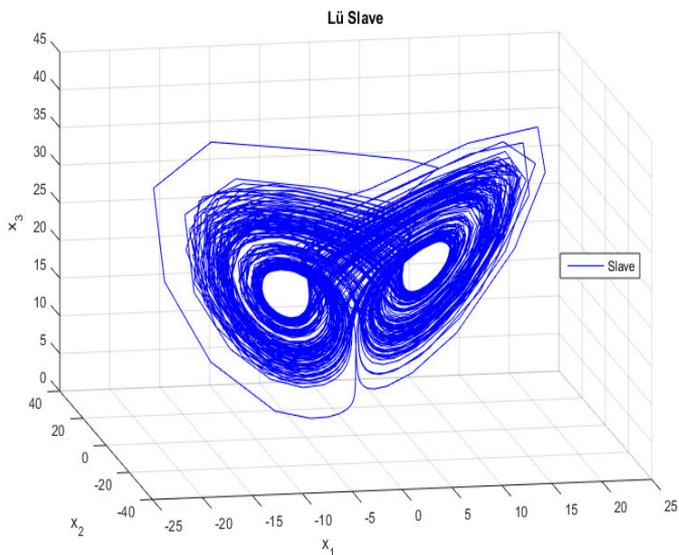


Figura 3.25: Comportamiento caótico del sistema esclavo (sistema corregido) de Lü.

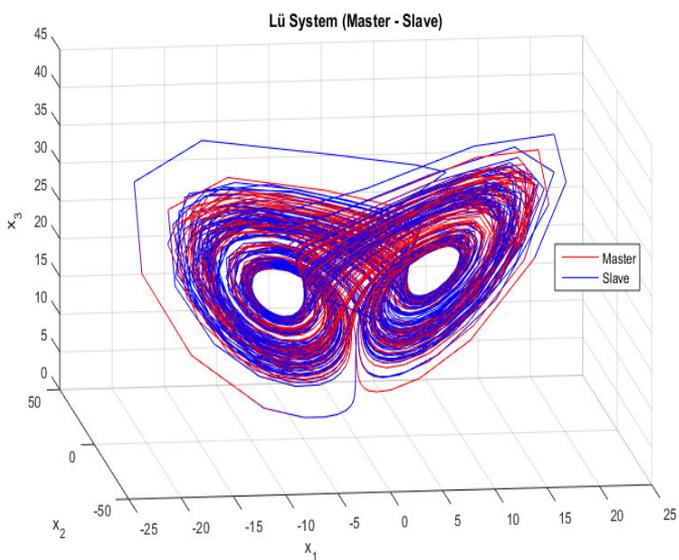


Figura 3.26: Sistema Lü - Lü sincronizado.

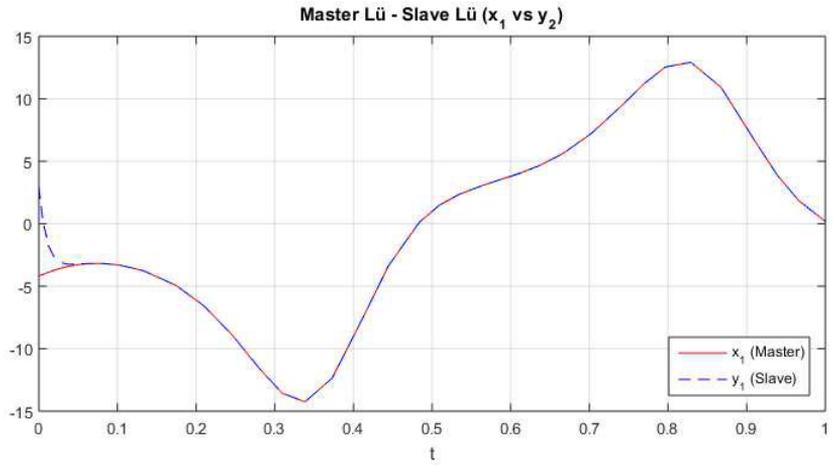


Figura 3.27: Sincronización del sistema de Lü en  $x_1$  y  $y_1$ .

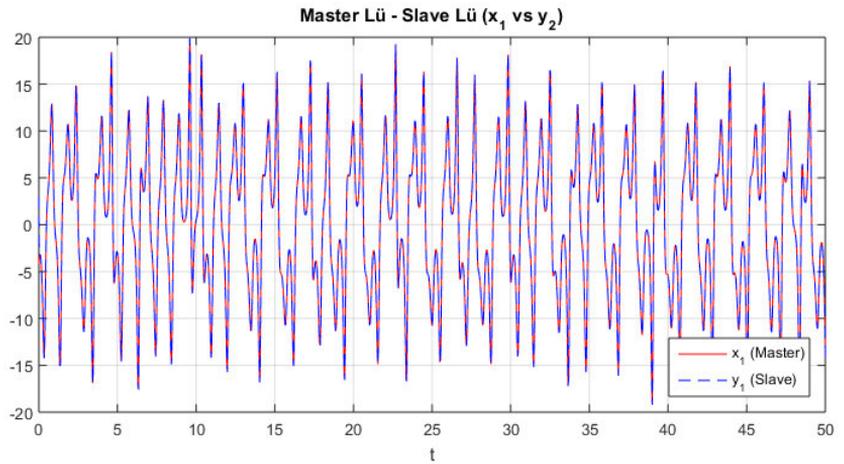


Figura 3.28: Sincronización del sistema de Lü en  $x_1$  y  $y_1$  con  $t = 50$ .

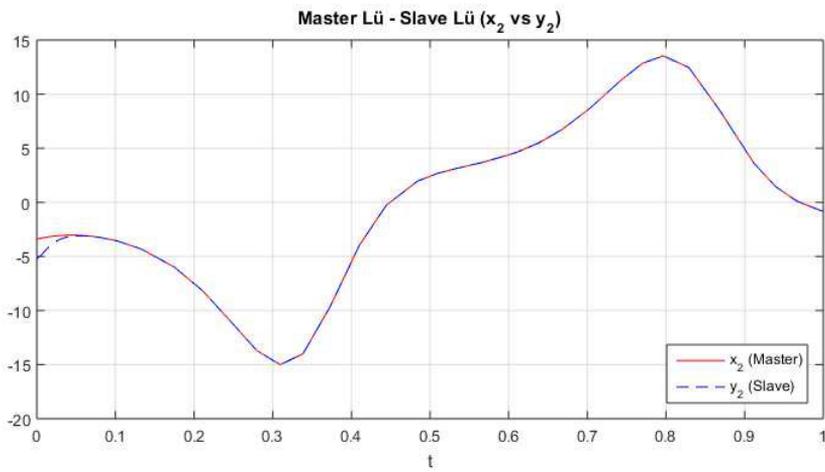


Figura 3.29: Sincronización del sistema de Lü en  $x_2$  y  $y_2$ .

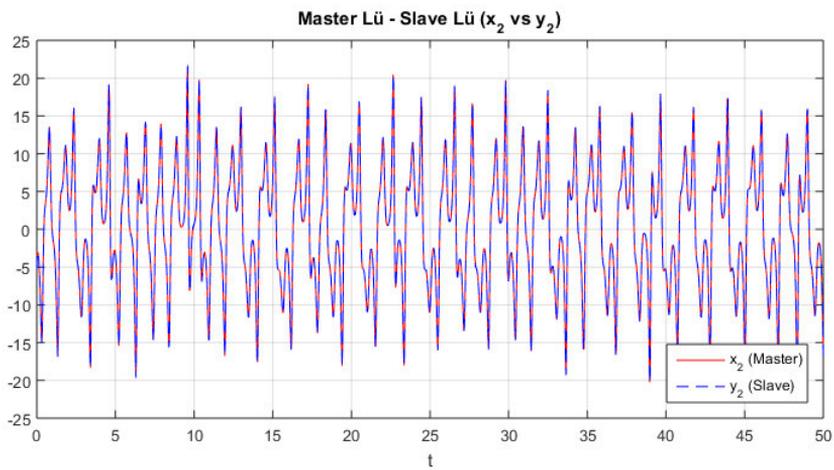


Figura 3.30: Sincronización del sistema de Lü en  $x_2$  y  $y_2$  con  $t = 50$ .

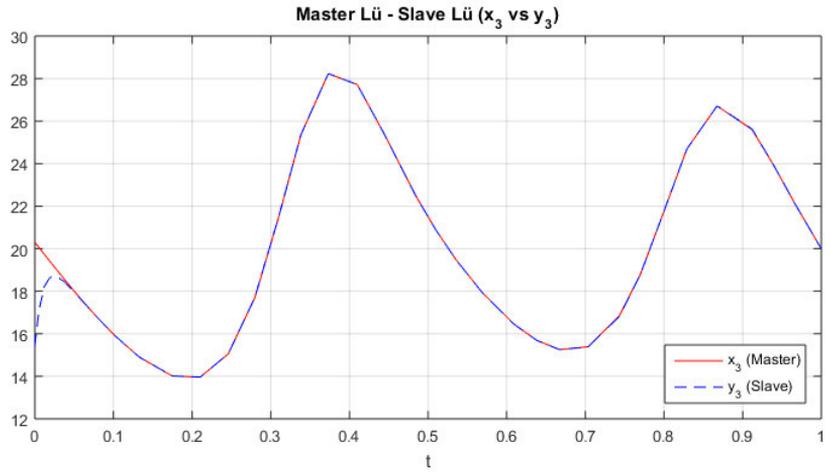


Figura 3.31: Sincronización del sistema de Lü en  $x_3$  y  $y_3$ .

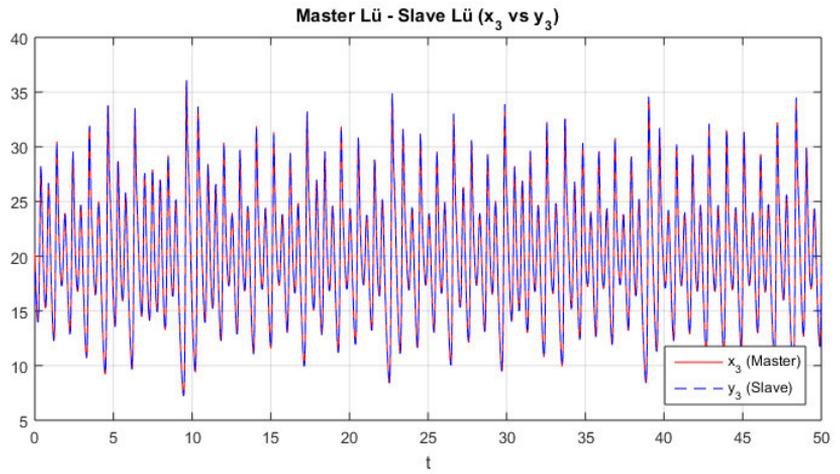


Figura 3.32: Sincronización del sistema de Lü en  $x_3$  y  $y_3$  con  $t = 50$ .

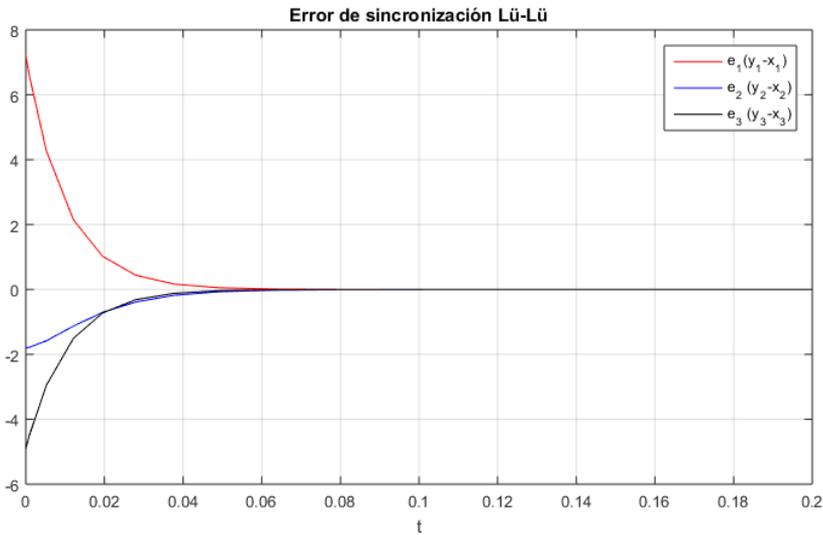


Figura 3.33: Error de sincronización Lü-Lü.

### 3.2 LEY DE CONTROL PARA SISTEMAS UDS

Consideremos el sistema maestro

$$\dot{\chi} = F(\chi)$$

y el sistema esclavo:

$$\dot{\phi} = F(\phi)$$

El acoplamiento más sencillo es el término aditivo  $K_j(\phi_i - \chi_i)$  en cada ecuación  $j$  del sistema esclavo. Otra estrategia es  $K_j(\chi_i)(\phi_i - \chi_i)$  donde un término de ganancia variable se encuentra en la ecuación  $i$ . A continuación se buscará acoplar dos sistemas UDS tipo II usando su función de Lyapunov y asegurando un valor negativo en su derivada. Considere el sistema general de la forma:

$$\dot{\chi} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \chi + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Del cual se obtiene el siguiente sistema maestro:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \alpha_{13}\chi_3 + b_1 \\ \dot{\chi}_2 &= \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \alpha_{23}\chi_3 + b_2 \\ \dot{\chi}_3 &= \alpha_{31}\chi_1 + \alpha_{32}\chi_2 + \alpha_{33}\chi_3 + b_3 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Y el sistema esclavo:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \alpha_{11}\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \alpha_{13}\phi_3 + b_1 + u_1 \\ \dot{\phi}_2 &= \alpha_{21}\phi_1 + \alpha_{22}\phi_2 + \alpha_{23}\phi_3 + b_2 + u_2 \\ \dot{\phi}_3 &= \alpha_{31}\phi_1 + \alpha_{32}\phi_2 + \alpha_{33}\phi_3 + b_3 + u_3 \end{aligned} \quad (3.31)$$

El vector de error se define como  $e = \phi - \chi$ , por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{23}e_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 + u_3 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Se establece la función de Lyapunov como:

$$L = (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) / 2 \quad (3.33)$$

Y su derivada:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= e_1 [\alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3 + u_1] + e_2 [\alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{23}e_3 + u_2] \\ &\quad + e_3 [\alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 + u_3] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Una elección trivial de  $u$  es:

$$\begin{aligned} u_1 &= -p_1^2 e_1 - [\alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3] \\ u_2 &= -p_2^2 e_2 - [\alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{23}e_3] \\ u_3 &= -p_3^2 e_3 - [\alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si sustituimos (3.35) en (3.34) la derivada de la función de Lyapunov se convierte en

$$\dot{L} = -P_1^2 e_1^2 - P_2^2 e_2^2 - P_3^2 e_3^2 \quad (3.36)$$

Donde  $P = (P_1, P_2, P_3)$  es un punto que se selecciona para que la derivada de la función de Lyapunov (3.36) sea negativa en todo momento.

$$\dot{L} = -P_1^2 e_1^2 - P_2^2 e_2^2 - P_3^2 e_3^2 < 0 \quad (3.37)$$

El sistema (3.30) se encuentra en su forma general, para la simulación se usaran los parámetros de [11] como punto de partida. Por lo que el sistema se transforma a

Sistema maestro:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= \chi_2 + b_1 \\ \dot{\chi}_2 &= \chi_3 + b_2 \\ \dot{\chi}_3 &= -\alpha_{31}\chi_1 + -\alpha_{32}\chi_2 + -\alpha_{33}\chi_3 + b_3 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sistema esclavo:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \phi_2 + b_1 + u_1 \\ \dot{\phi}_2 &= \phi_3 + b_2 + u_2 \\ \dot{\phi}_3 &= -\alpha_{31}\phi_1 - \alpha_{32}\phi_2 - \alpha_{33}\phi_3 + b_3 + u_3 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Usando (3.38) y (3.39) se comprobó numéricamente la sincronización utilizando la plataforma Simulink. En la Figura 3.34, se puede observar el diagrama de simulación del sistema y en la Figura 3.35 se puede ver a detalle el controlador utilizado.

En cuanto al sistema UDS tipo II, se utilizaron como condiciones iniciales  $\chi_0 = (2, 0, 0)^T$  y  $\phi_0 = (10, -1, -1)^T$  para el sistema base

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= \chi_2 \\ \dot{\chi}_2 &= \chi_1 \\ \dot{\chi}_3 &= -\alpha_{31}\chi_1 - \alpha_{32}\chi_2 - \alpha_{33}\chi_3 + \beta, \end{aligned} \quad (3.40)$$

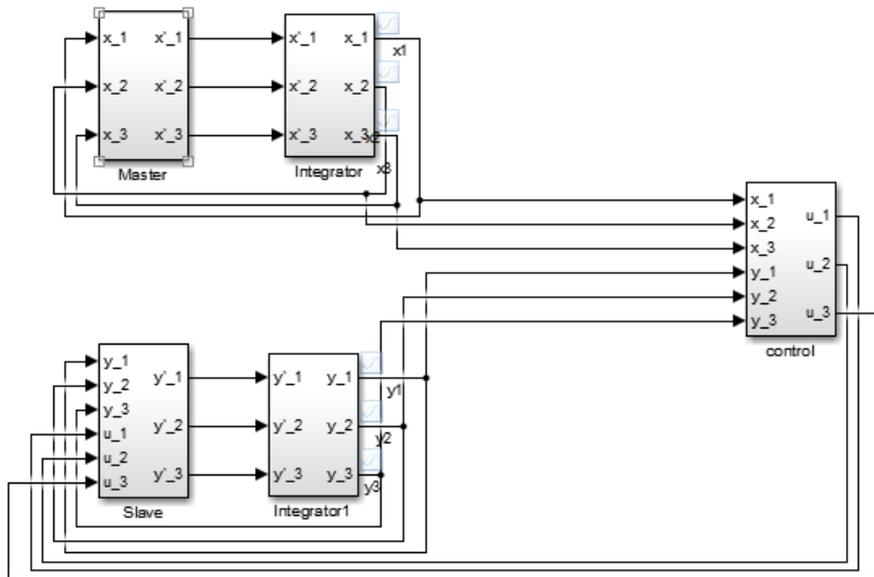


Figura 3.34: Diagrama para la simulación de acoplamiento maestro-esclavo usando simulink.

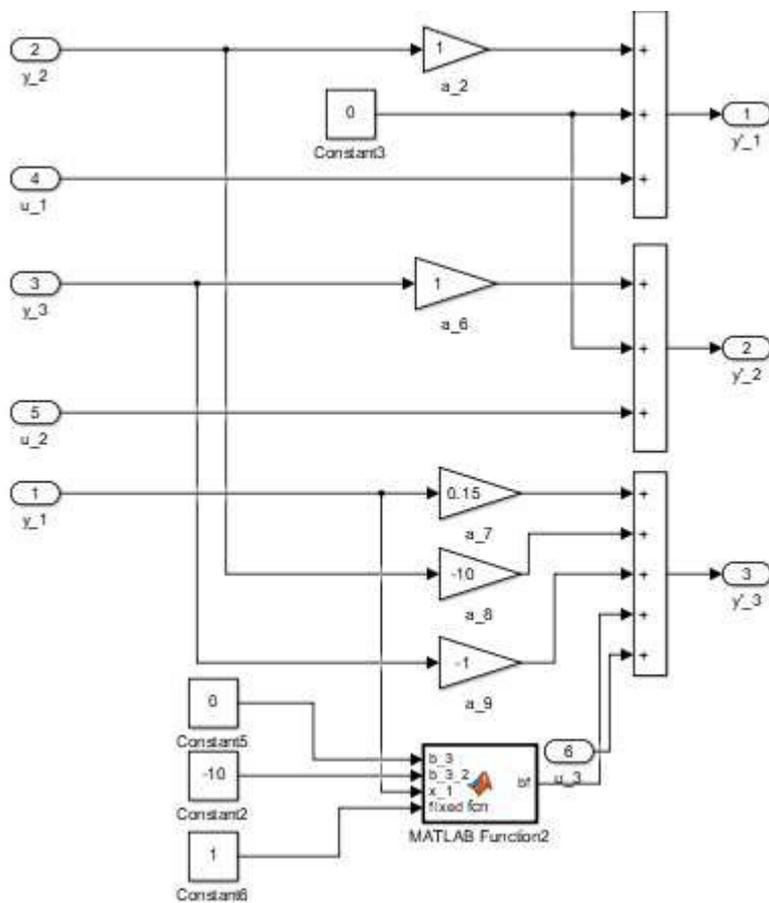


Figura 3.35: Diagrama de control para la simulación de acoplamiento maestro-esclavo usando simulink.

donde  $\alpha_{31} = -0,15$ ,  $\alpha_{32} = 10$ ,  $\alpha_{33} = 1,0$  y  $\beta = -10$ ; además, con el parámetro  $P = (10, 10, 10)$ . El controlador corrector se expresa como:

$$\begin{aligned} u_1 &= -p_1^2 e_1 \\ u_2 &= -p_2^2 e_2 \\ u_3 &= -p_3^2 e_3 - [-0,15e_1 + 10e_2 + e_3] \end{aligned} \quad (3.41)$$

El comportamiento caótico del sistema UDS Tipo II se puede apreciar en la figura 3.36 y el sistema caótico (3.40) corregido o controlado en la figura 3.37. En la figura 3.38 se muestra a ambos sistemas donde es posible ver que el error es prácticamente cero. Los resultados de la sincronización en  $\chi_1$  y  $\phi_1$  se pueden observar en las figuras 3.39, 3.40.

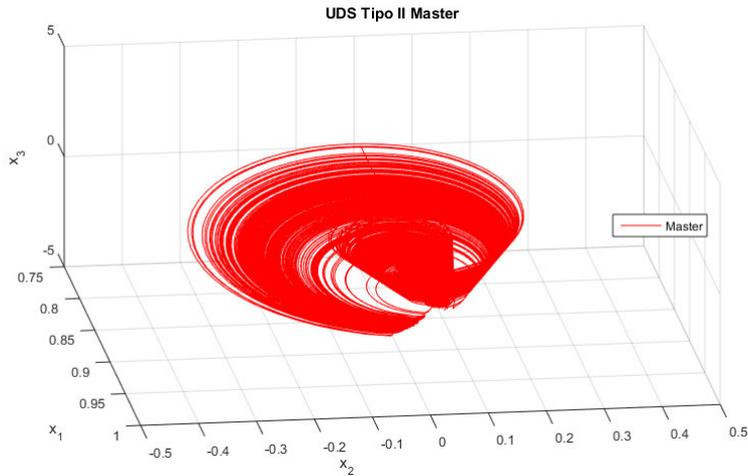


Figura 3.36: Comportamiento caótico del sistema UDS-II (3.40).

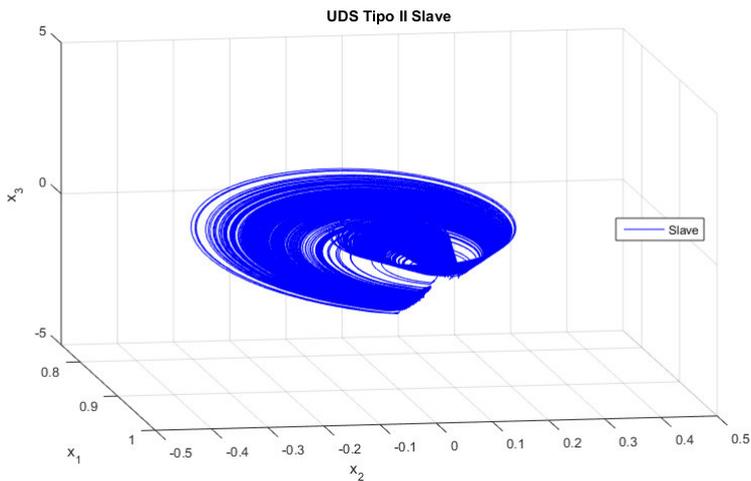


Figura 3.37: Comportamiento caótico del sistema esclavo controlado.

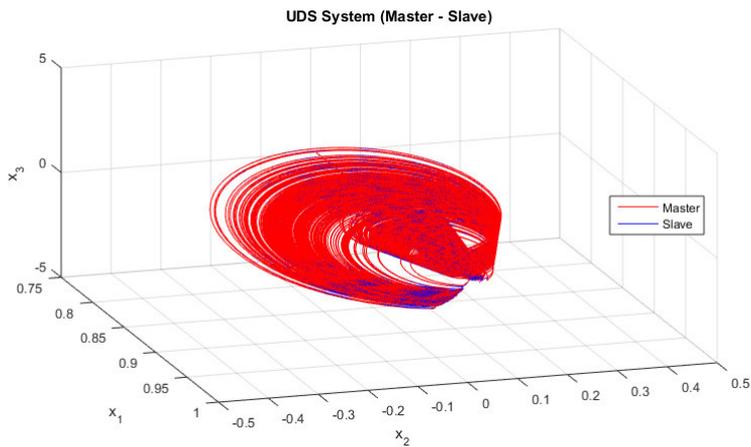


Figura 3.38: Sistema UDS-II – UDS-II sincronizado.

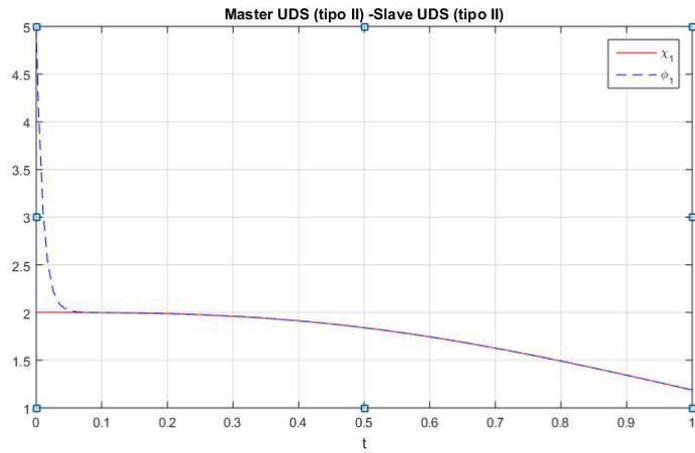


Figura 3.39: Sincronización del sistema UDS tipo II en  $\chi_1$  y  $\phi_1$ .

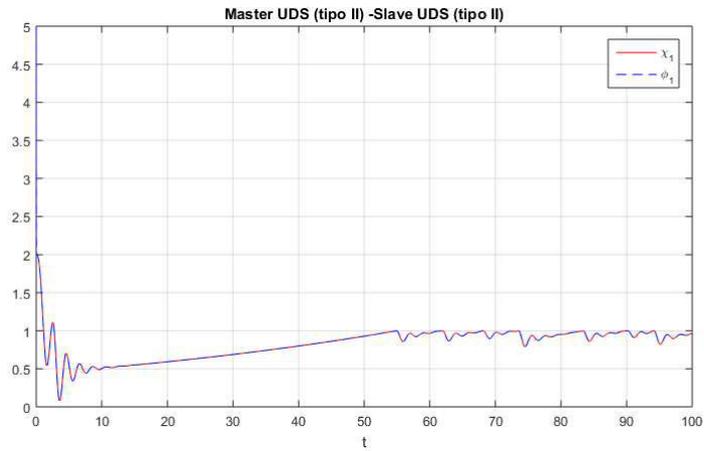


Figura 3.40: Sincronización del sistema UDS tipo II en  $\chi_1$  y  $\phi_1$  con  $t = 100$ .

Los resultados de la sincronización en  $\chi_2$  y  $\phi_2$  se pueden observar en las Figuras 3.41, 3.42.

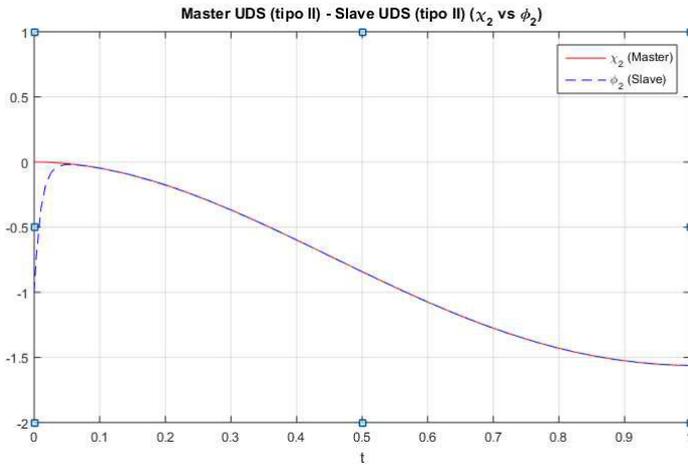


Figura 3.41: Sincronización del sistema UDS tipo II en  $\chi_2$  y  $\phi_2$ .

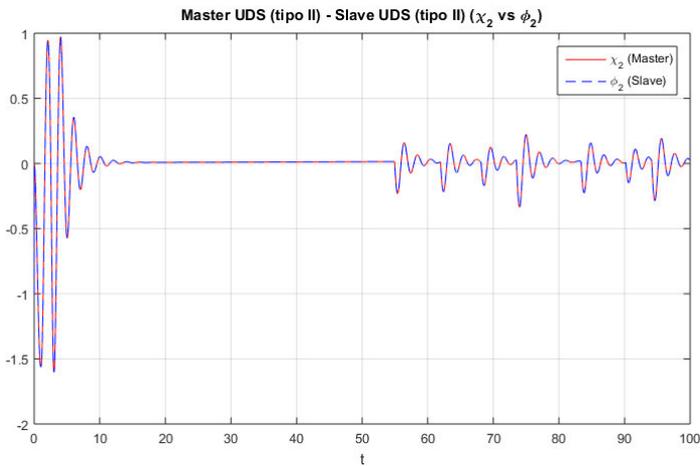


Figura 3.42: Sincronización del sistema UDS tipo II en  $\chi_3$  y  $\phi_3$  con  $t = 100$ .

Los resultados de la sincronización en  $\chi_3$  y  $\phi_3$  se pueden observar en las Figuras 3.43, 3.44.

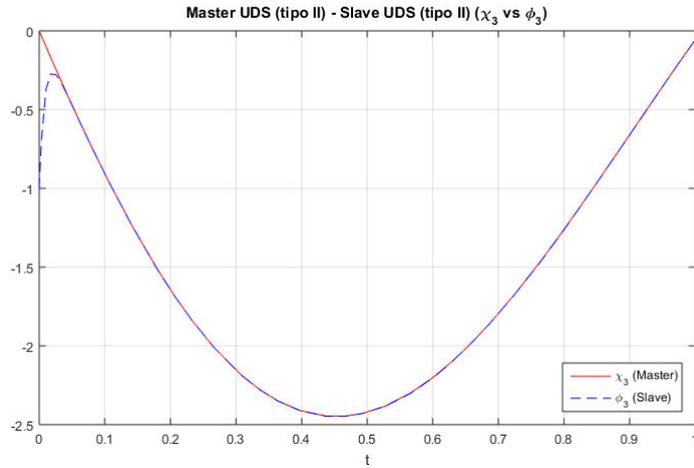


Figura 3.43: Sincronización del sistema UDS tipo II en  $\chi_3$  y  $\phi_3$ .

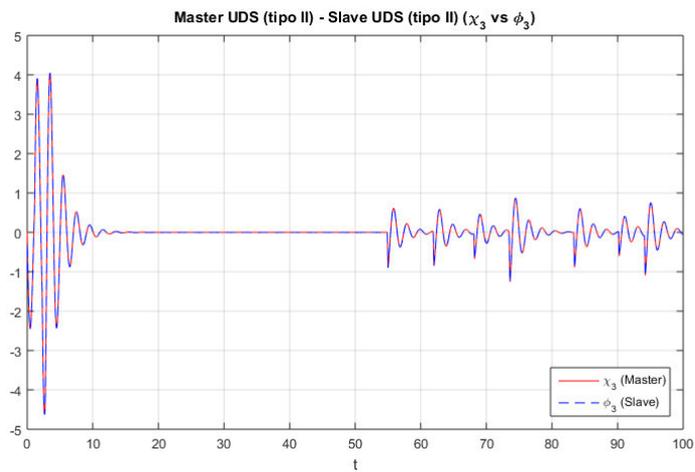


Figura 3.44: Sincronización del sistema UDS tipo II en  $\chi_3$  y  $\phi_3$  con  $t = 100$ .

La Figura 3.45 muestra el error  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , en ella se puede apreciar que el error se vuelve prácticamente 0 en  $t = 0,05$ .

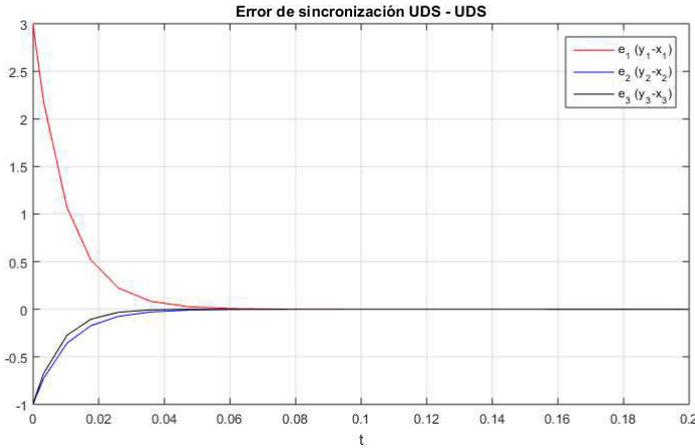


Figura 3.45: Error de sincronización UDS-UDS.

### 3.3 LEY DE CONTROL PARA LA SINCRONIZACIÓN MAESTRO LORENZ – ESCLAVO UDS

Para el ultimo caso de estudio se establecerá el sistema para sincronizar un sistema caótico tipo Lorenz con un sistema UDS de tipo II, considere el sistema de Lorenz como sistema maestro:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\
 \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_1x_3 \\
 \dot{x}_3 &= a_{33}x_3 + x_1x_2
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Y como esclavo un sistema UDS tipo II.

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1 &= \alpha_{11}\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \alpha_{13}\phi_3 + b_1 + u_1 \\
 \dot{\phi}_2 &= \alpha_{21}\phi_1 + \alpha_{22}\phi_2 + \alpha_{23}\phi_3 + b_2 + u_2 \\
 \dot{\phi}_3 &= \alpha_{31}\phi_1 + \alpha_{32}\phi_2 + \alpha_{33}\phi_3 + b_3 + u_3
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Por lo que el vector de error  $e = \phi - x$  es:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \alpha_{11}\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \alpha_{13}\phi_3 + b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 &= \alpha_{21}\phi_1 + \alpha_{22}\phi_2 + \alpha_{23}\phi_3 + b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_1x_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 &= \alpha_{31}\phi_1 + \alpha_{32}\phi_2 + \alpha_{33}\phi_3 + b_3 - a_{33}x_3 - x_1x_2 + u_3 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dado que la función de Lyapunov:

$$L = (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) / 2 \quad (3.45)$$

Y su derivada:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= e_1 [\alpha_{11}\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \alpha_{13}\phi_3 + b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + u_1] \\ &\quad + e_2 [\alpha_{21}\phi_1 + \alpha_{22}\phi_2 + \alpha_{23}\phi_3 + b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_1x_2 + u_2] \\ &\quad + e_3 [\alpha_{31}\phi_1 + \alpha_{32}\phi_2 + \alpha_{33}\phi_3 + b_3 - a_{33}x_3 - x_1x_2 + u_3] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por lo que la elección del control:

$$\begin{aligned} u_1 &= -P_1^2 e_1 - [\alpha_{11}\phi_1 + \alpha_{12}\phi_2 + \alpha_{13}\phi_3 + b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2] \\ u_2 &= -P_2^2 e_2 - [\alpha_{21}\phi_1 + \alpha_{22}\phi_2 + \alpha_{23}\phi_3 + b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_1x_2] \\ u_3 &= -P_3^2 e_3 - [\alpha_{31}\phi_1 + \alpha_{32}\phi_2 + \alpha_{33}\phi_3 + b_3 - a_{33}x_3 - x_1x_2] \end{aligned} \quad (3.47)$$

Al sustituir (3.47) en (3.46) la derivada de la función de Lyapunov se convierte en

$$\dot{L} = -P_1^2 e_1^2 - P_2^2 e_2^2 - P_3^2 e_3^2 \quad (3.48)$$

Una vez mas el sistema UDS se encuentra en su forma canónica, por lo que se usaran los parámetros definidos por E. Campos, R. Femat y G. Chen en [11] como punto de partida. Para hacer la comprobación numérica de este controlador, se utilizo la plataforma de Simulink, en la Figura 3.46, se puede encontrar el diagrama de la simulación del sistema y en la Figura 3.47 se encuentra el controlador a detalle.

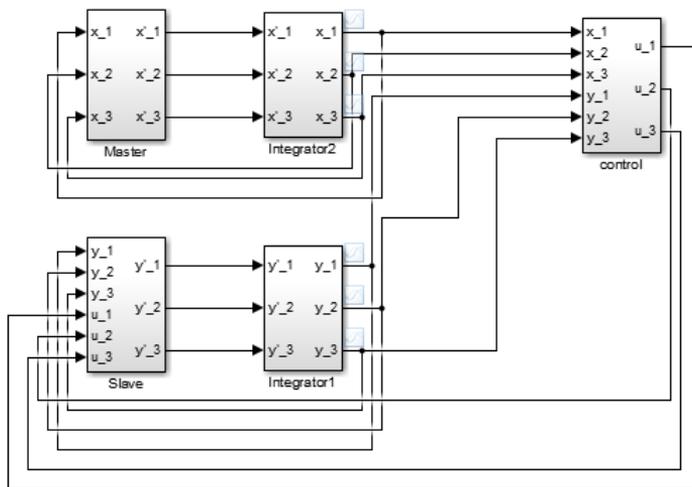


Figura 3.46: Diagrama para la simulación de acoplamiento maestro-esclavo usando simulink.

Para mostrar la sincronización se utilizará al sistema tipo Lorenz

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 16(x_1 + x_2) \\
 \dot{x}_2 &= 45,6x_1 - x_2 - x_1x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -4x_3 + x_1x_2,
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

y como esclavo, al sistema UDS tipo II con corrección  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1 &= \phi_2 + u_1 \\
 \dot{\phi}_2 &= \phi_1 + u_2 \\
 \dot{\phi}_3 &= 0,15\phi_1 - 10\phi_2 - \phi_3 + 10 + u_3,
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Se utilizaron los parámetros del sistema maestro de la subsección 3.1.1 y del sistema esclavo de la sección 3.2. La ley de control de corrección queda expresada como

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -P_1^2 e_1 - [\phi_2 - 16(x_1 + x_2)] \\
 u_2 &= -P_2^2 e_2 - [\phi_1 - 45,6x_1 + x_2 + x_1x_3] \\
 u_3 &= -P_3^2 e_3 - [0,15\phi_1 - 10\phi_2 - \phi_3 + 10 + 4x_3 - x_1x_2]
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

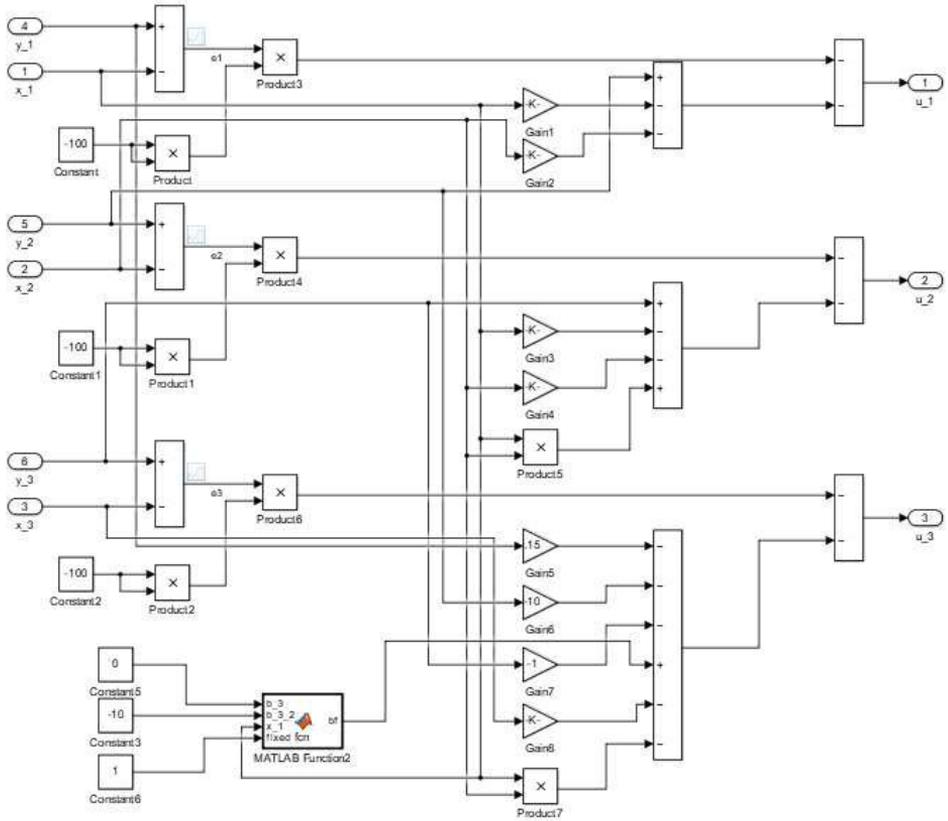


Figura 3.47: Diagrama de control para la simulación de acoplamiento maestro-esclavo usando simulink.

Tomaremos el parámetro  $P = (10, 10, 10)$ . El comportamiento caótico del sistema de Lorenz y el del UDS tipo II corregido (controlado) se pueden apreciar en las figuras 3.48 y 3.49, respectivamente, mientras que la figura 3.50, muestra ambos sistemas, donde es posible ver que el error con la  $P$  dada es bastante grande, debido a que el controlador no puede corregirlo. Los resultados de la sincronización para  $x_1$  y  $\phi_1$  pueden observarse en las Figuras 3.51 y 3.52.

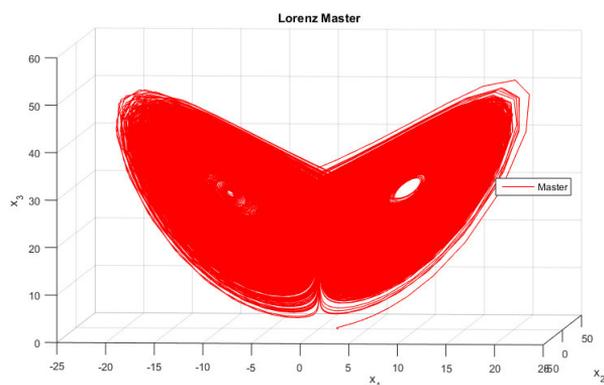


Figura 3.48: Comportamiento caótico del sistema Maestro de Lorenz.

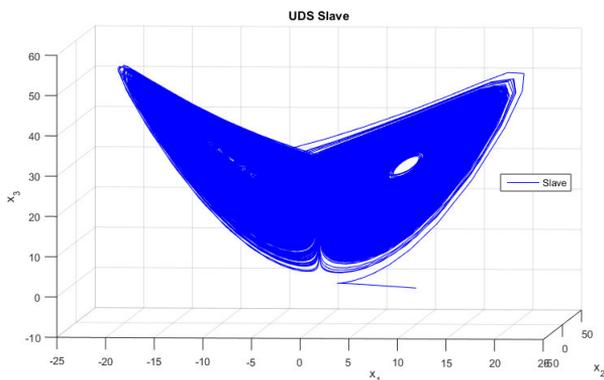


Figura 3.49: Comportamiento caótico del sistema esclavo o corregido UDS tipo II.

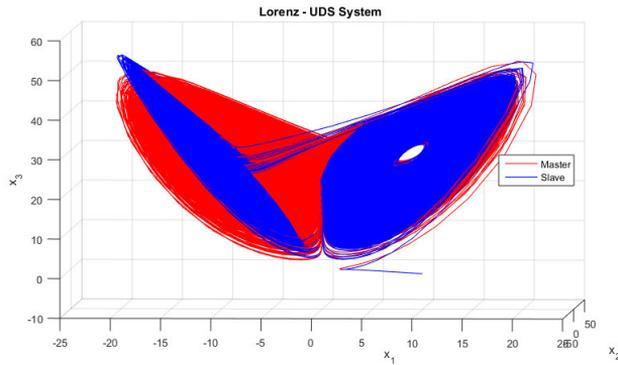


Figura 3.50: Sistema Lorenz - UDS tipo II sincronizado.

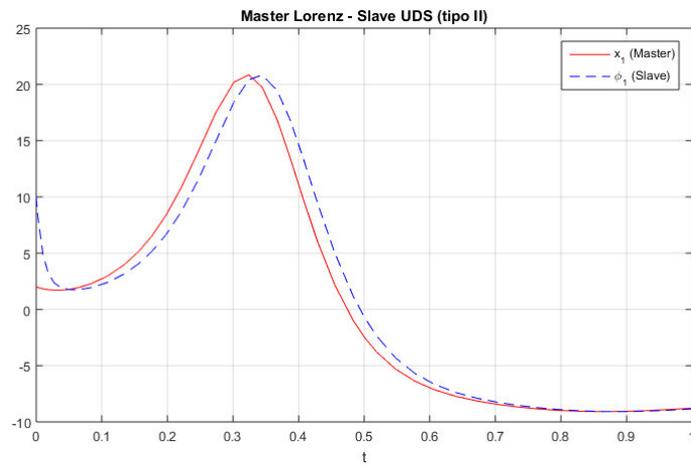


Figura 3.51: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_1$  y  $\phi_1$ .

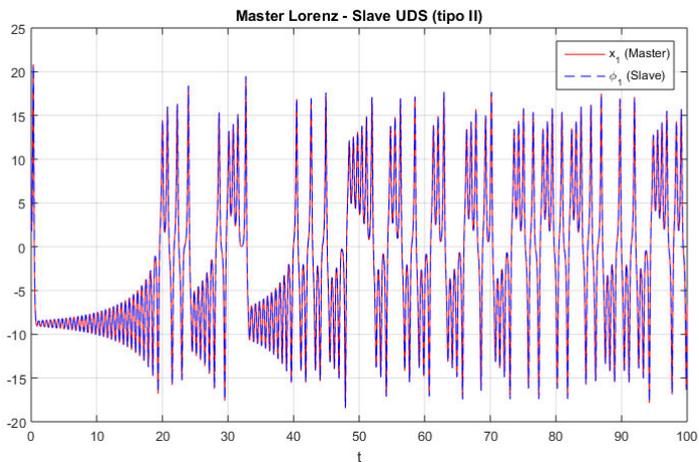


Figura 3.52: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_1$  y  $\phi_1$ .

Los resultados de la sincronización para  $x_2$  y  $\phi_2$  pueden observarse en las figuras 3.53 y 3.54.

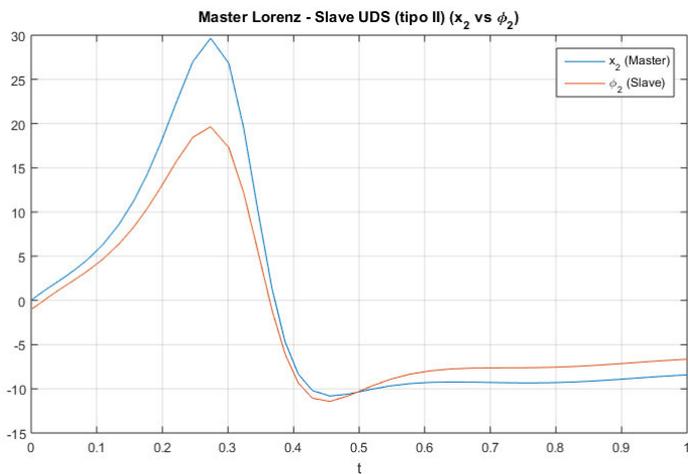


Figura 3.53: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_2$  y  $\phi_2$ .

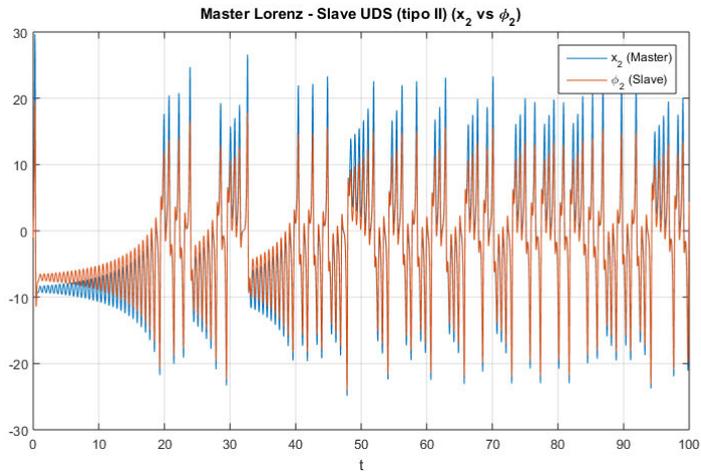


Figura 3.54: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_2$  y  $\phi_2$ .

Los resultados de la sincronización para  $x_3$  y  $\phi_3$  pueden observarse en las figuras 3.55 y 3.56.

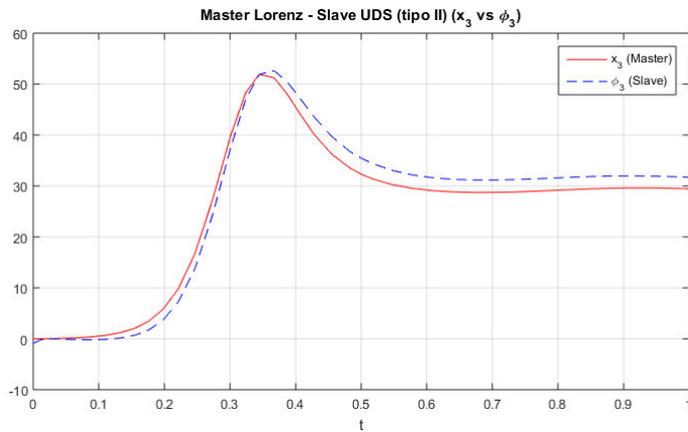


Figura 3.55: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_3$  y  $\phi_3$ .

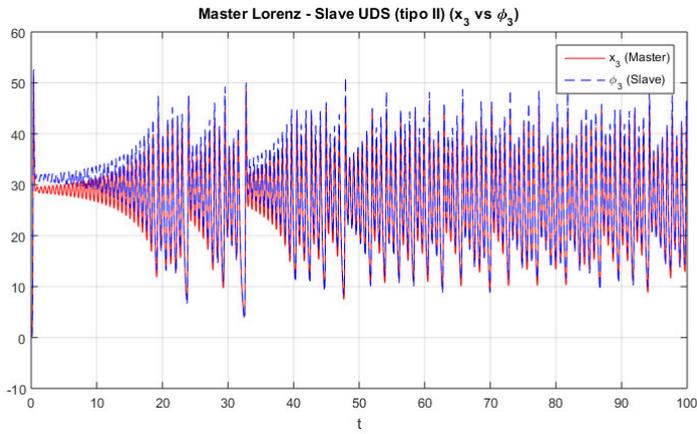


Figura 3.56: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_3$  y  $\phi_3$ .

La figura 3.57 y 3.58 muestra el error  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , en ella se puede apreciar que aunque se sincronizan de manera correcta, el controlador no es capaz de corregir el error.

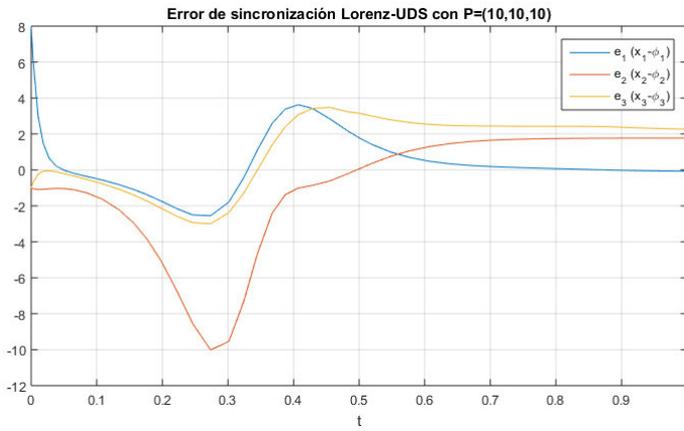


Figura 3.57: Error de sincronización Lorenz-UDS.

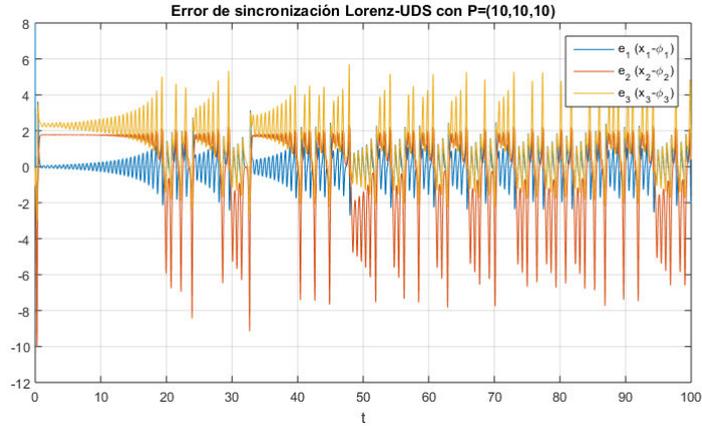


Figura 3.58: Error de sincronización Lorenz-UDS con  $t = 100$ .

Los resultados de la sincronización para  $x_1$  y  $\phi_1$  pueden observarse en las figuras 3.62 y 3.63 esta vez con  $P = (100, 100, 100)$  para asegurar mejor estabilidad. El comportamiento caótico del sistema de Lorenz se puede apreciar en la figura 3.59.

El comportamiento caótico del sistema UDS tipo II se corrige mejor respecto del sistema esclavo (sistema de Lorenz) cuando los parámetros  $P = (p_1, p_2, p_3)$  son muy grandes (ver figura 3.60).

En la figura 3.61, se muestran ambos sistemas, donde es posible ver que el error con la  $P$  adecuada es prácticamente cero.

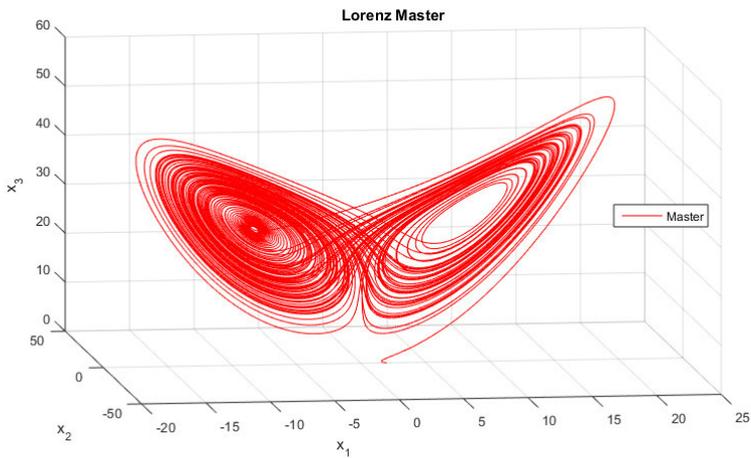


Figura 3.59: Comportamiento caótico del sistema Maestro de Lorenz.

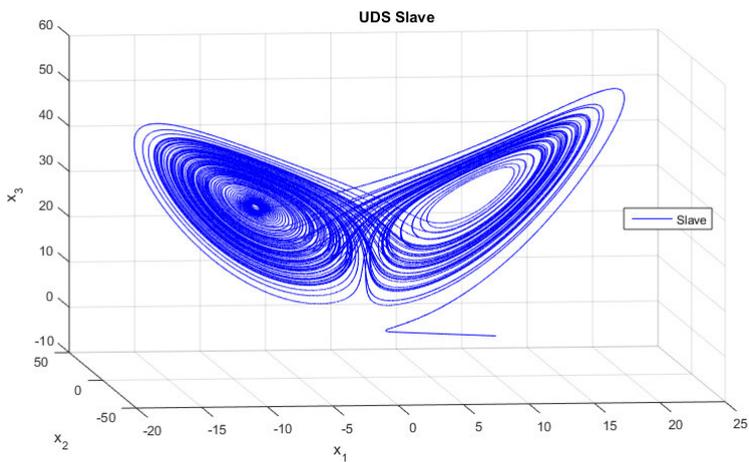


Figura 3.60: Comportamiento caótico del sistema esclavo UDS tipo II.

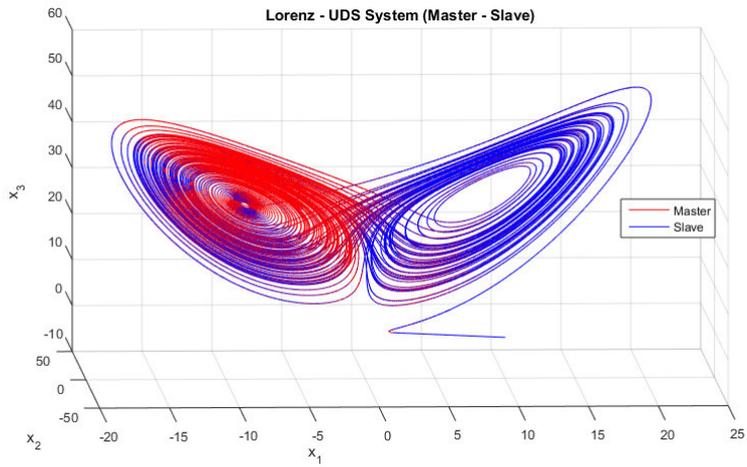


Figura 3.61: Sistema Lorenz - UDS tipo II sincronizado.

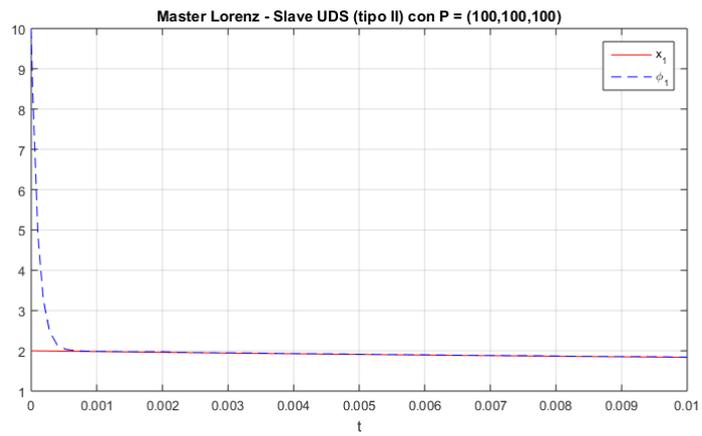


Figura 3.62: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_1$  y  $\phi_1$ .

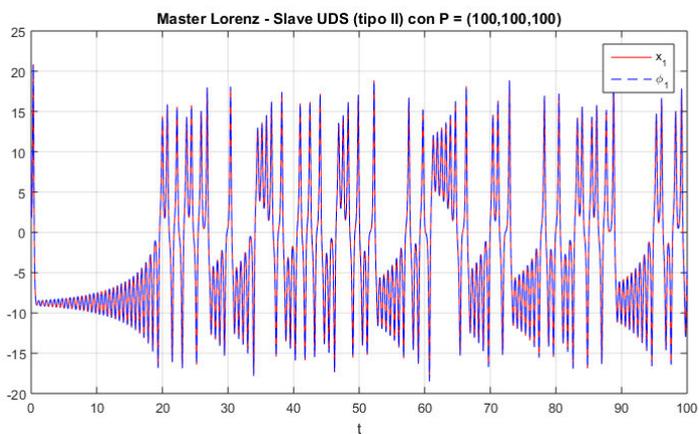


Figura 3.63: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_1$  y  $\phi_1$ .

Los resultados de la sincronización para  $x_2$  y  $\phi_2$  pueden observarse en las Figuras 3.64 y 3.65.

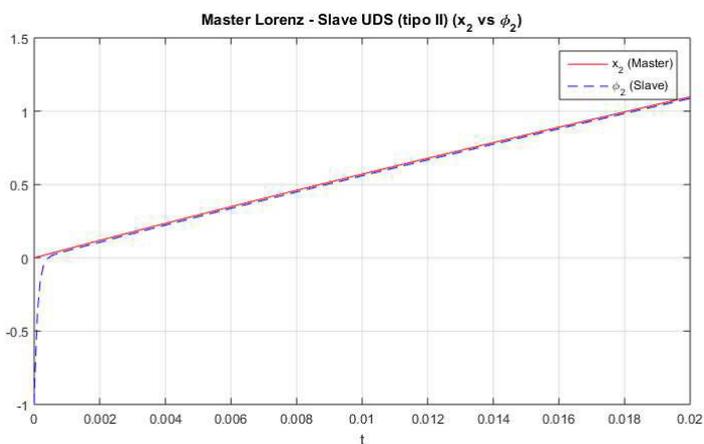


Figura 3.64: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_2$  y  $\phi_2$ .

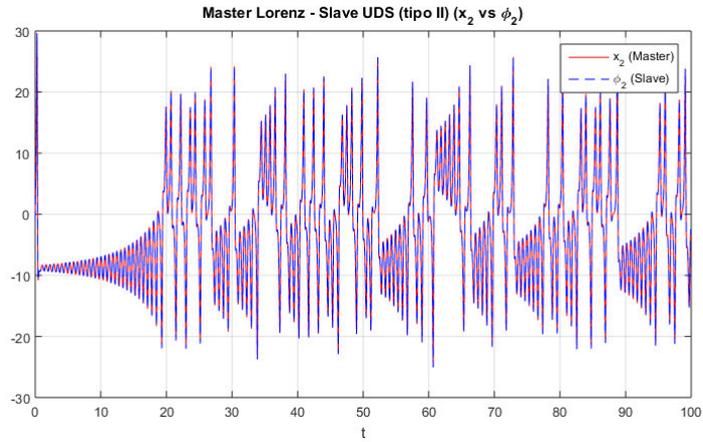


Figura 3.65: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_2$  y  $\phi_2$ .

Los resultados de la sincronización para  $x_3$  y  $\phi_3$  pueden observarse en las Figuras 3.66 y 3.67.

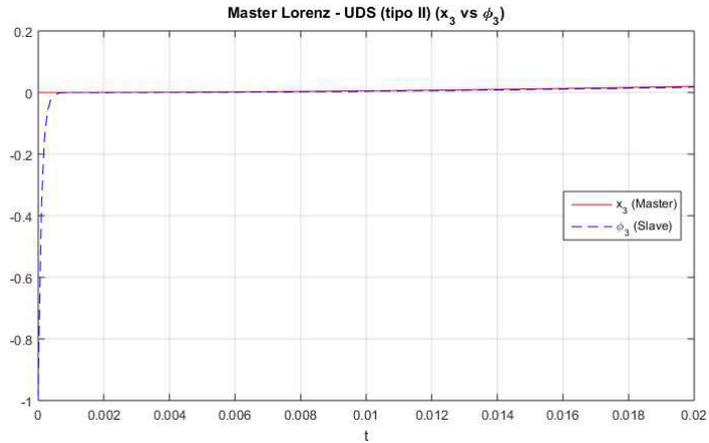


Figura 3.66: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_3$  y  $\phi_3$ .

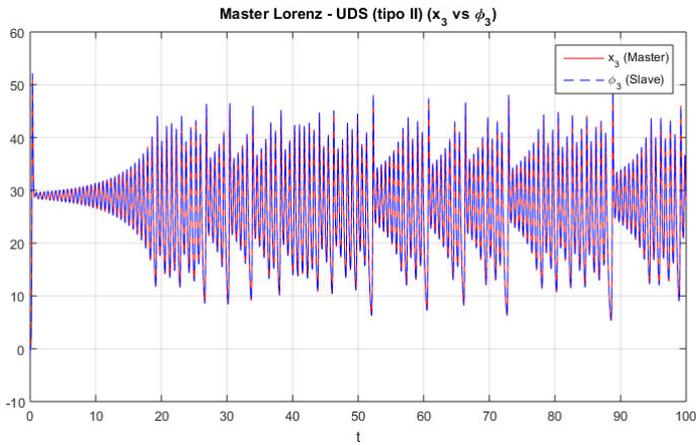


Figura 3.67: Sincronización del sistema Lorenz - UDS tipo II en  $x_3$  y  $\phi_3$ .

La Figura 3.68 muestra el error  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ , en ella se puede apreciar que con un valor superior de  $P$  la sincronización es exitosa con un error mínimo.

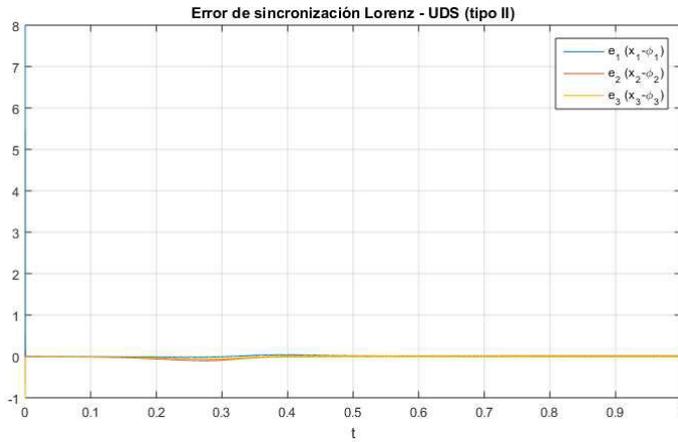


Figura 3.68: Error de sincronización Lorenz-UDS.

# 4

## ENCRIPCIÓN MEDIANTE SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS CAÓTICOS

Teniendo el diseño para la sincronización de sistemas caóticos presentado en el capítulo 3, es posible utilizar dicha sincronización para darle un aplicación en la vida real, como lo es la encriptación de mensajes. Para este trabajo, se encriptará un mensaje de audio y se comparará tanto el mensaje original como el mensaje descriptado.

A continuación se muestran los resultados de la simulaciones de encriptación, en las cuales se uso un fragmento de audio de la novena sinfonía de Beethoven “*Ode to Joy*”.

### 4.1 ENCRIPCIÓN MEDIANTE MAESTRO LORENZ GENERALIZADO – ESCLAVO LORENZ GENERALIZADO

Para la encriptación de sistemas tipo Lorenz generalizado, se simulará el encriptado para los sistemas:

- (i) Master Lorenz - slave Lorenz
- (ii) Master Chen - slave Chen
- (iii) Master Lü - Slave Lü

#### 4.1.1 *Mestro Lorenz - Esclavo Lorenz*

Como se menciono anteriormente para la simulación de la encriptación de una señal de audio se utilizara el software de Mathworks: Simulink,

en el se llevara a cabo la suma de la señal de audio a codificar con una de las componentes en el espacio del sistema de Lorenz, en este caso con  $x_1$ . En la figura 4.1, se encuentra el programa a bloques utilizado.

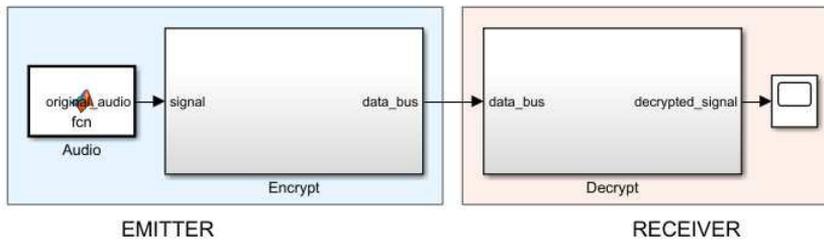


Figura 4.1: Programa en Simulink para el sistema de encriptación Lorenz - Lorenz.

A su vez, dentro del bloque “*Encrypt*”, se encuentra la suma de la señal de audio con la señal  $x_1$  del sistema de Lorenz como puede verse en la figura 4.2. El bloque “*Master*” contiene las ecuaciones del sistema de Lorenz expuestas en la sección 3.1.

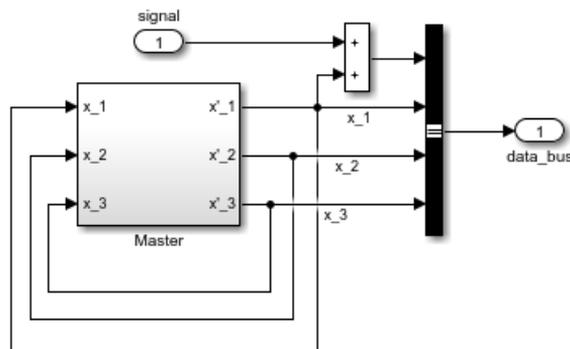


Figura 4.2: Bloque de encriptación para el sistema Lorenz - Lorenz.

Por su parte, el bloque “*Decrypt*” que puede ser observado en la figura 4.3 contiene el descryptado de la señal de audio mediante una resta

con la señal  $y_1$  del sistema esclavo de Lorenz. El bloque “*Slave*” contiene las ecuaciones del sistema de Lorenz esclavo de la sección 3.1 y el bloque “*Controller*” tiene el controlador diseñado en la sección previamente mencionada.

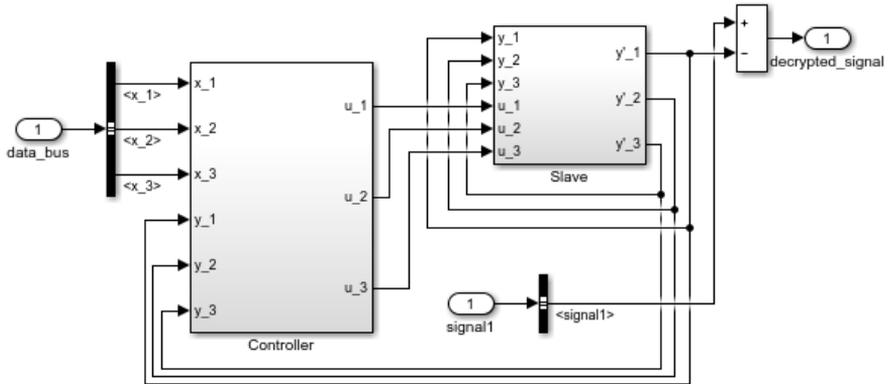


Figura 4.3: Bloque de descriptación para el sistema Lorenz - Lorenz.

En la figura 4.4 se puede apreciar el fragmento de audio original, esto es antes de cualquier manipulación que altere sus propiedades.

Una vez que el mensaje se procesa y se encripta, el audio se altera, es posible ver este cambio en la figura 4.5

En este punto el mensaje es ininteligible para cualquier receptor no deseado, sin embargo es necesario descriptarlo para que el receptor deseado sea capaz de procesar la información, el audio descriptado puede verse en la figura 4.6, mientras que la señal original, la encriptada y la descriptada pueden verse en una sola gráfica en la figura 4.7.

En la figura 4.8 es posible apreciar que el error entre el audio original y el audio descriptado tiende asintóticamente a cero, y se vuelve tan pequeño que es posible despreciar dicho error rápidamente.

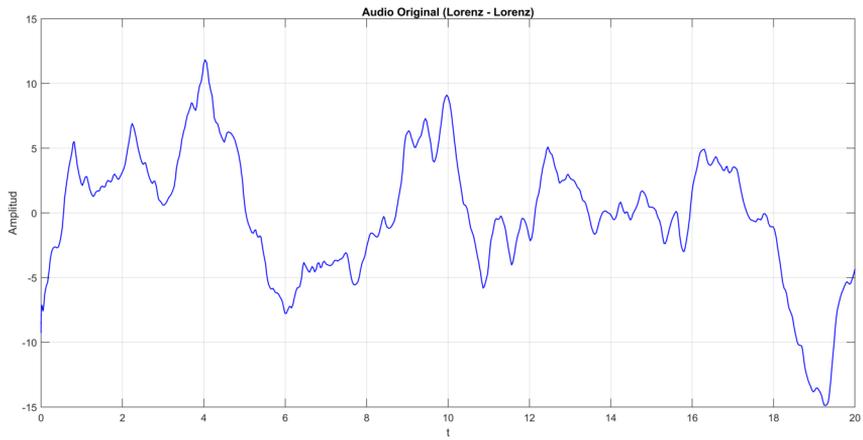


Figura 4.4: Fragmento de audio original.

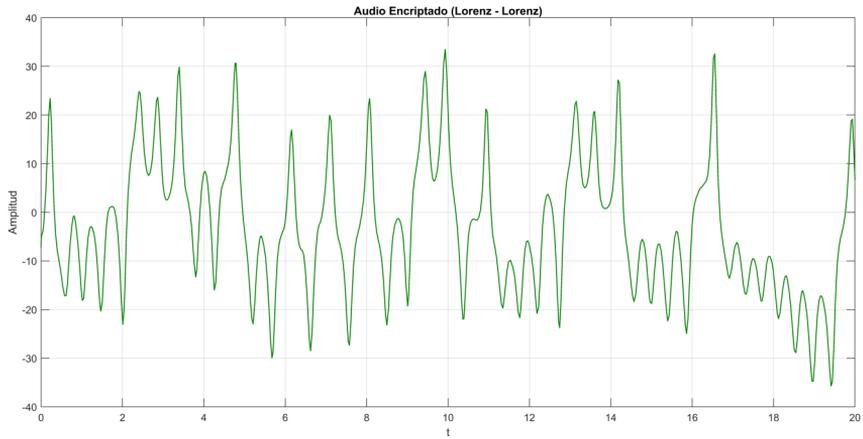


Figura 4.5: Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz.

#### 4.1 ENCRYPTACIÓN MEDIANTE MAESTRO LORENZ GENERALIZADO – ESCLAVO LORENZ GENERALIZADO

---

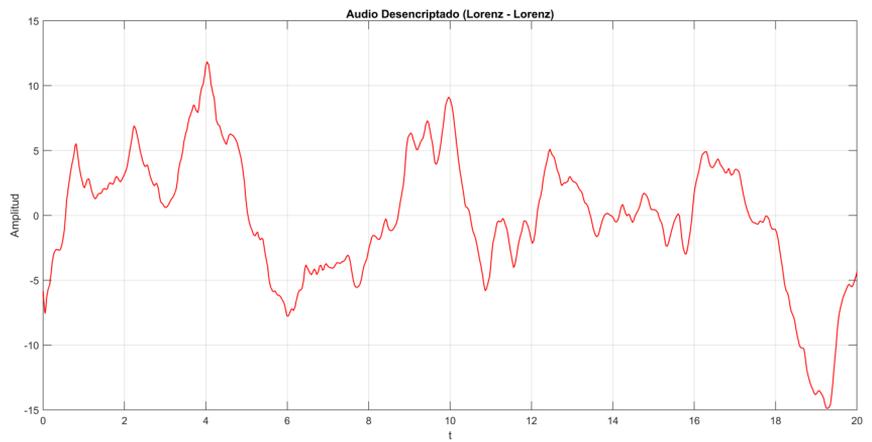


Figura 4.6: Audio descriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz.

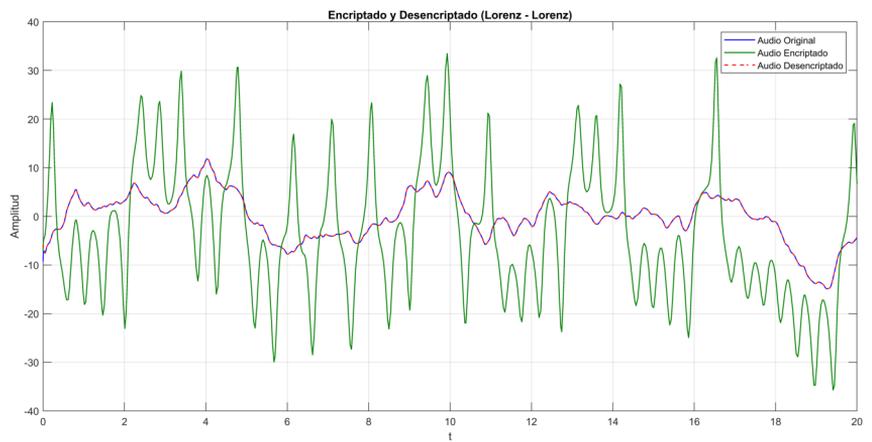


Figura 4.7: Audio original, encriptado y descriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz.

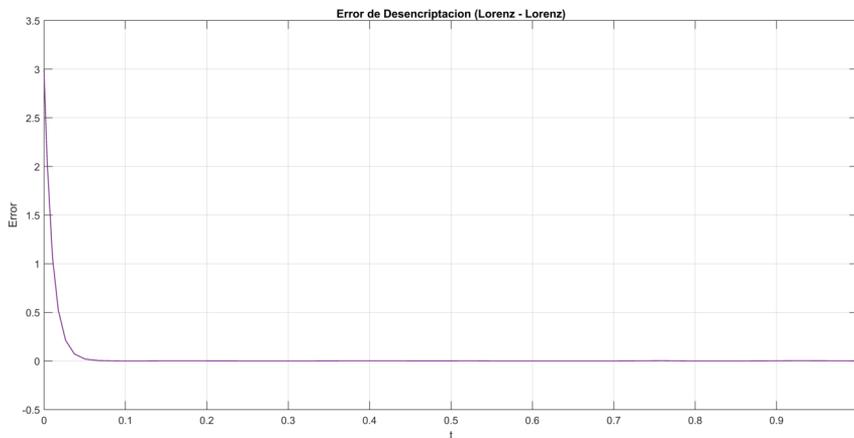


Figura 4.8: Error entre el audio original y el audio descriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave Lorenz.

#### 4.1.2 Maestro Chen - Esclavo Chen

Para el sistema de Chen, se utiliza el mismo sistema a bloques que para el sistema de Lorenz, por lo cual los bloques y su funcionamiento son similares. En la figura 4.9, se encuentra el programa a bloques utilizado.

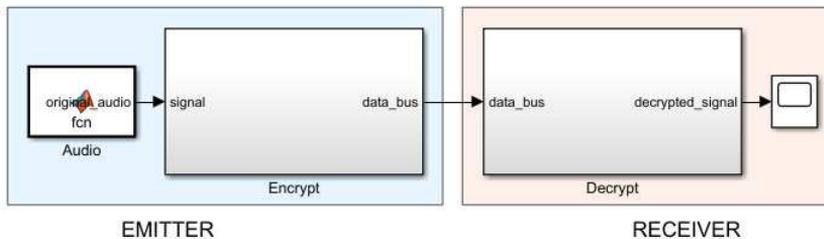


Figura 4.9: Programa en Simulink para el sistema de encriptación Chen - Chen.

A su vez, dentro del bloque “*Encrypt*”, se encuentra la suma de la señal de audio con la señal  $x_1$  del sistema de Chen como puede verse en la

figura 4.10. El bloque “*Master*” contiene las ecuaciones del sistema de Chen expuestas en la sección 3.1.

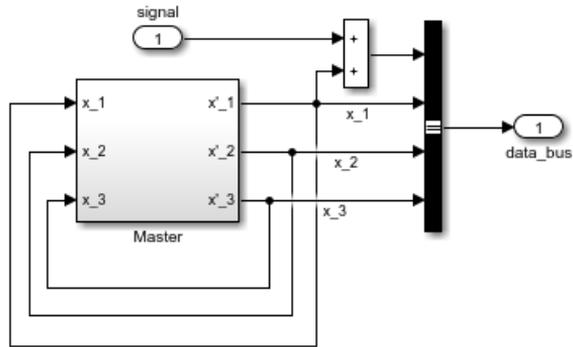


Figura 4.10: Bloque de encriptación para el sistema Chen - Chen.

Por su parte, el bloque “*Decrypt*” que puede ser observado en la figura 4.11 contiene el descifrado de la señal de audio mediante una resta con la señal  $y_1$  del sistema esclavo de Chen. El bloque “*Slave*” contiene las ecuaciones del sistema de Chen esclavo de la sección 3.1 y el bloque “*Controller*” tiene el controlador diseñado.

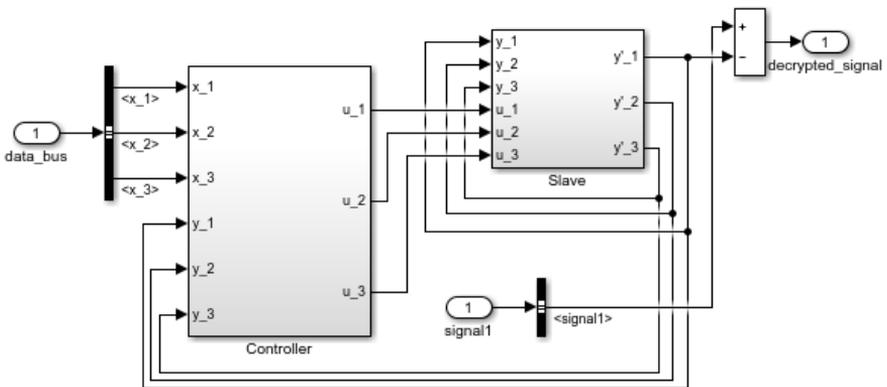


Figura 4.11: Bloque de descifrado para el sistema Chen - Chen.

En la figura 4.12 se puede apreciar el fragmento de audio original, esto es antes de cualquier manipulación que altere sus propiedades.

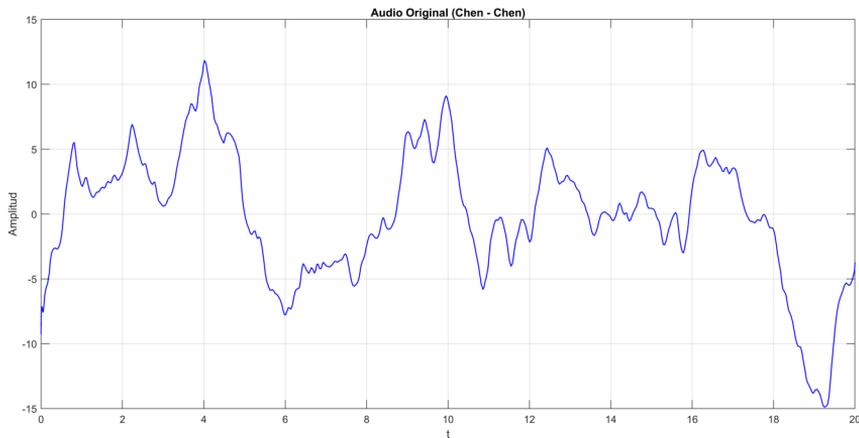


Figura 4.12: Fragmento de audio original.

Una vez que el mensaje se procesa y se encripta, el audio se altera, es posible ver este cambio en la figura 4.13

En este punto el mensaje es ininteligible para cualquier receptor no deseado, sin embargo es necesario desencriptarlo para que el receptor deseado sea capaz de procesar la información, el audio desencriptado puede verse en la figura 4.14, mientras que la señal original, la encriptada y la desencriptada pueden verse en una sola gráfica en la figura 4.15.

En la figura 4.16 es posible apreciar que el error entre el audio original y el audio desencriptado tiende asintóticamente a cero, y se vuelve tan pequeño que es posible despreciar dicho error rápidamente.

#### 4.1.3 Maestro Lü - esclavo Lü

Para el sistema de Lü, se utiliza el mismo sistema a bloques que para el sistema de Lorenz y el de Chen, por lo cual los bloques y su funcio-

#### 4.1 ENCRIPCIÓN MEDIANTE MAESTRO LORENZ GENERALIZADO – ESCLAVO LORENZ GENERALIZADO

---

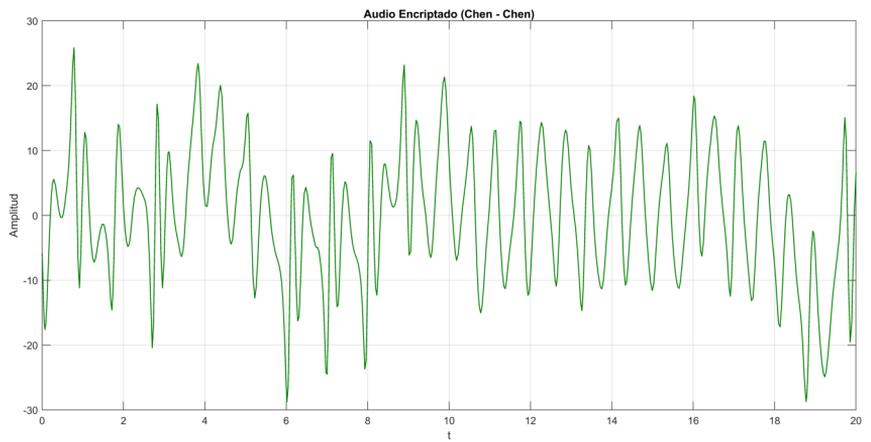


Figura 4.13: Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen.

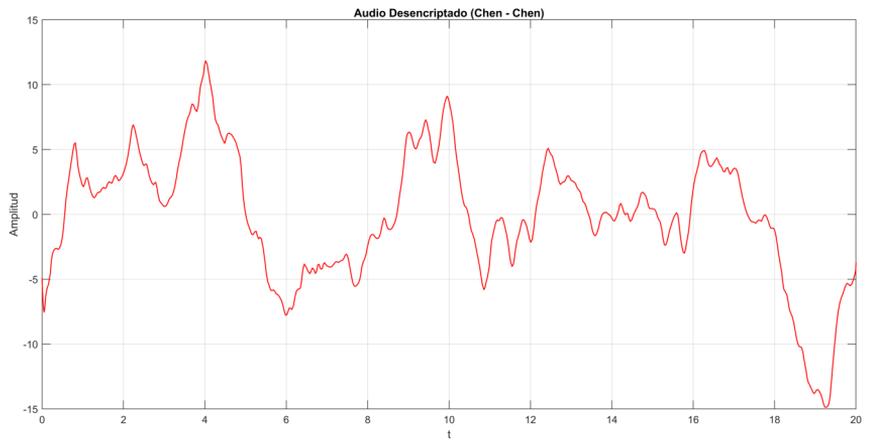


Figura 4.14: Audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen.

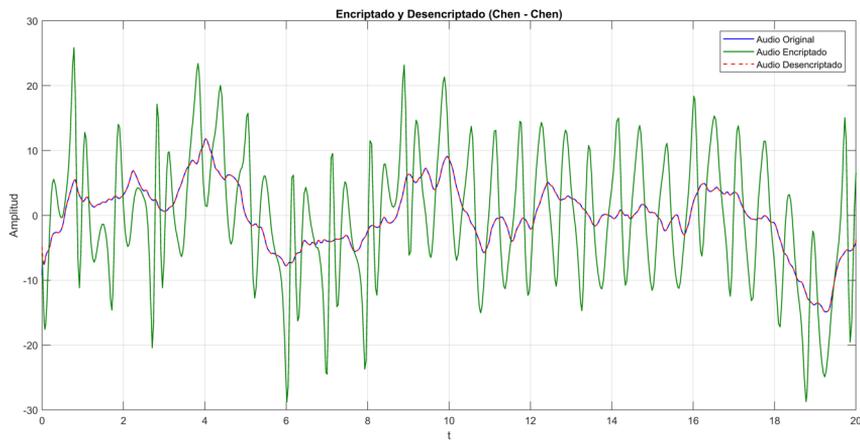


Figura 4.15: Audio original, encriptado y desencriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen.

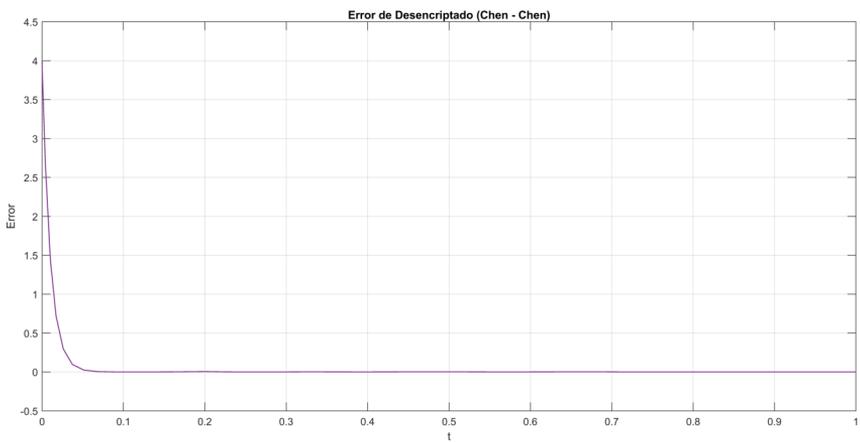


Figura 4.16: Error entre el audio original y el audio desencriptado por la sincronización de sistemas master Chen - slave Chen.

namiento son similares. En la figura 4.17, se encuentra el programa a bloques utilizado.

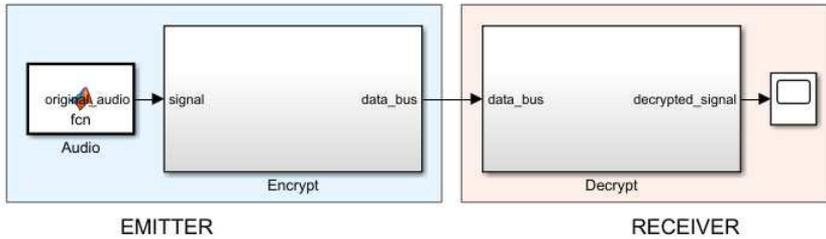


Figura 4.17: Programa en Simulink para el sistema de encriptación Lü - Lü.

A su vez, dentro del bloque “*Encrypt*”, se encuentra la suma de la señal de audio con la señal  $x_1$  del sistema de Lü como puede verse en la figura 4.18. El bloque “*Master*” contiene las ecuaciones del sistema de Lü expuestas en la sección 3.1.

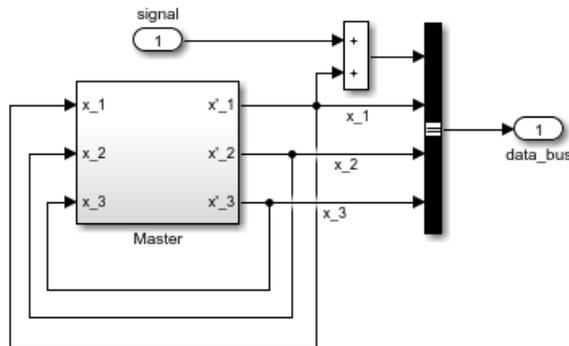


Figura 4.18: Bloque de encriptación para el sistema Lü - Lü.

Por su parte, el bloque “*Decrypt*” que puede ser observado en la figura 4.19 contiene el descifrado de la señal de audio mediante una resta con la señal  $y_1$  del sistema esclavo de Lü. El bloque “*Slave*” contiene las ecuaciones del sistema de Lü esclavo de la sección 3.1 y el bloque “*Controller*” tiene el controlador diseñado.

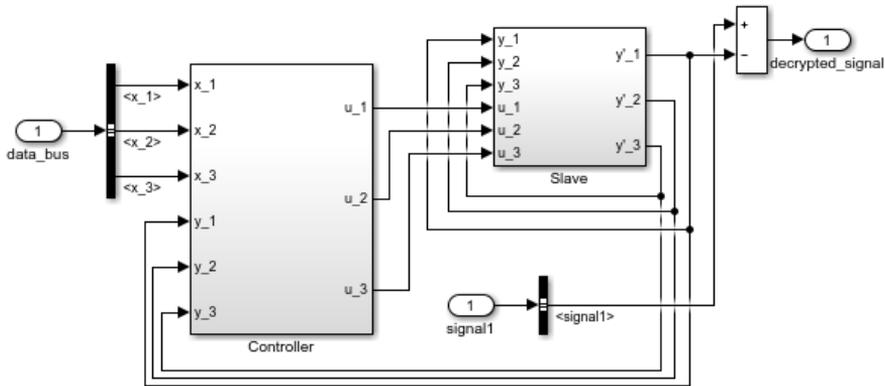


Figura 4.19: Bloque de descriptación para el sistema Lü - Lü.

En la figura 4.20 se puede apreciar el fragmento de audio original, esto es antes de cualquier manipulación que altere sus propiedades.

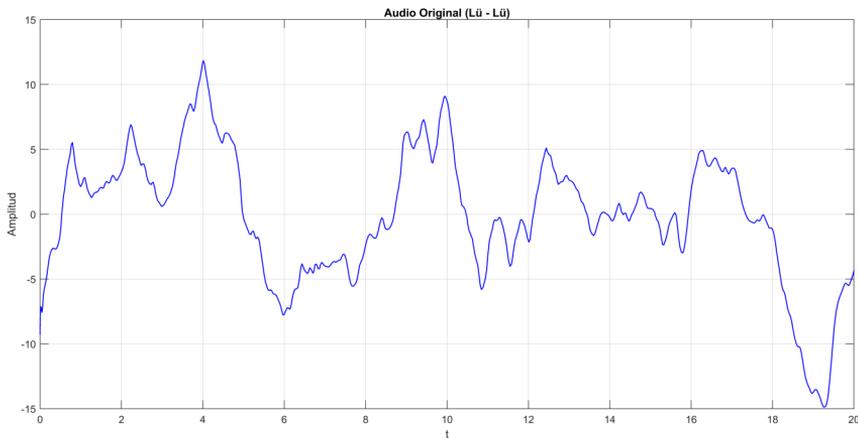


Figura 4.20: Fragmento de audio original.

Una vez que el mensaje se procesa y se encripta, el audio se altera, es posible ver este cambio en la figura 4.21

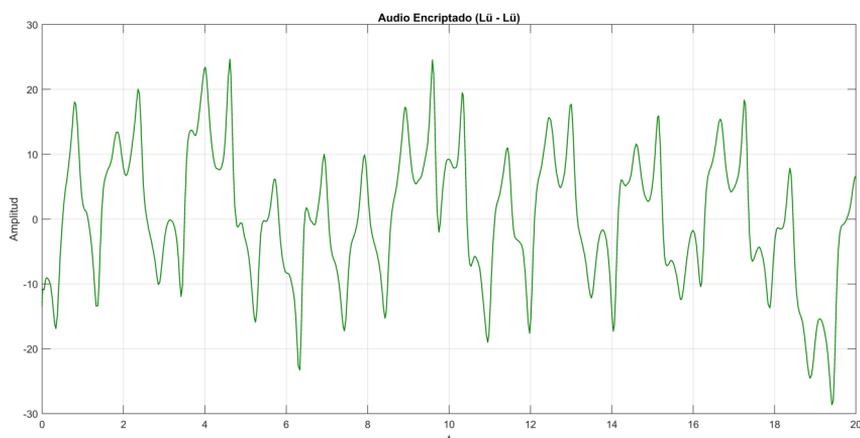


Figura 4.21: Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü.

En este punto el mensaje es ininteligible para cualquier receptor no deseado, sin embargo es necesario desencriptarlo para que el receptor deseado sea capaz de procesar la información, el audio desencriptado puede verse en la figura 4.22, mientras que la señal original, la encriptada y la desencriptada pueden verse en una sola gráfica en la figura 4.23.

En la figura 4.24 es posible apreciar que el error entre el audio original y el audio desencriptado tiende asintóticamente a cero, y se vuelve tan pequeño que es posible despreciar dicho error rápidamente.

## 4.2 ENCRIPCIÓN MEDIANTE MAESTRO UDS – ESCLAVO UDS

Para el sistema UDS, se utiliza un sistema a bloques similar al de los casos anteriores, por lo cual los bloques y su funcionamiento son similares. En la figura 4.25, se encuentra el programa a bloques utilizado.

A su vez, dentro del bloque “*Encrypt*”, se encuentra la suma de la señal de audio con la señal  $\chi_1$  del sistema de UDS como puede verse en la

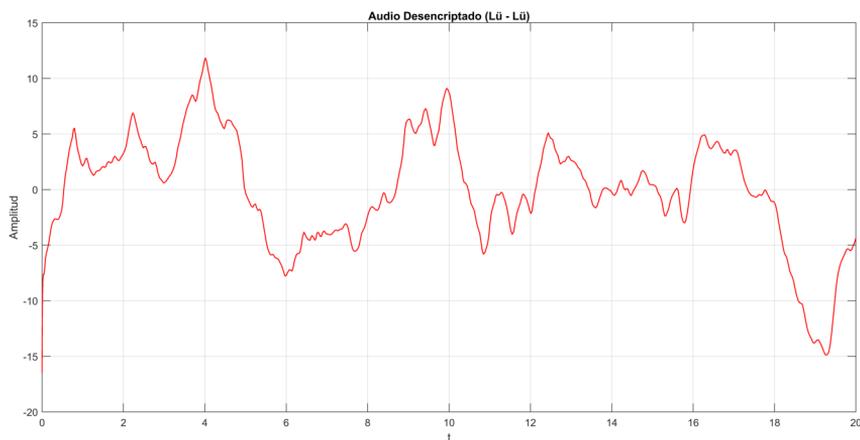


Figura 4.22: Audio descriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü.

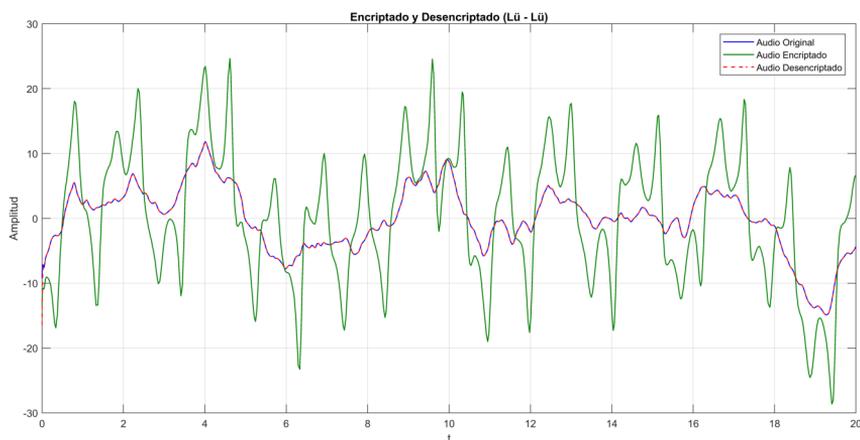


Figura 4.23: Audio original, encriptado y descriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü.

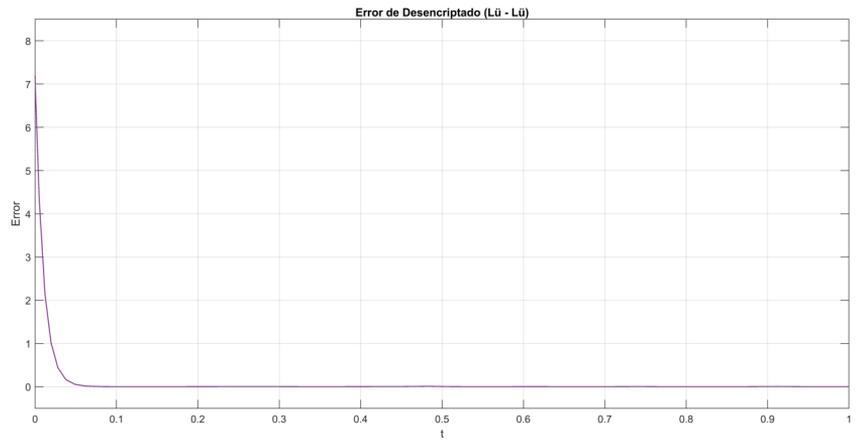


Figura 4.24: Error entre el audio original y el audio descriptado por la sincronización de sistemas master Lü - slave Lü.

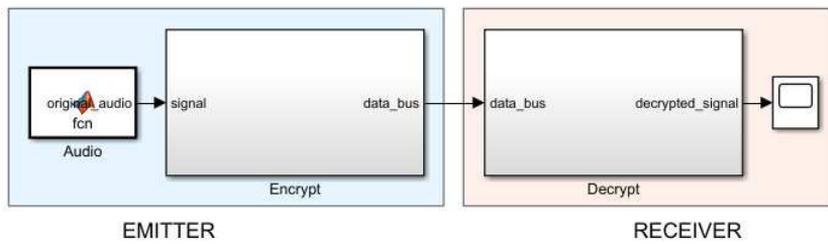


Figura 4.25: Programa en Simulink para el sistema de encriptación UDS - UDS.

figura 4.26. El bloque “Master” contiene las ecuaciones del sistema de UDS expuestas en la sección 3.2.

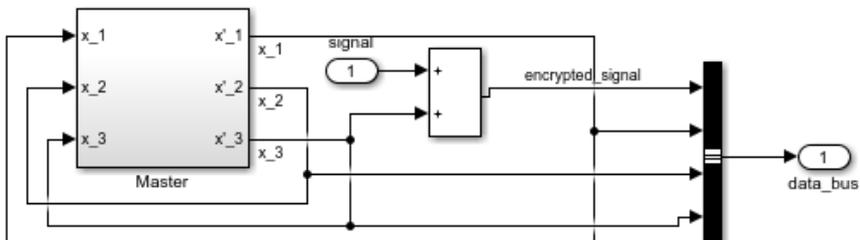


Figura 4.26: Bloque de encriptación para el sistema UDS - UDS.

Por su parte, el bloque “Decrypt” que puede ser observado en la figura 4.27 contiene el descryptado de la señal de audio mediante una resta con la señal  $\phi_1$  del sistema esclavo UDS. El bloque “Slave” contiene las ecuaciones del sistema UDS esclavo de la sección 3.2 y el bloque “Controller” tiene el controlador diseñado.

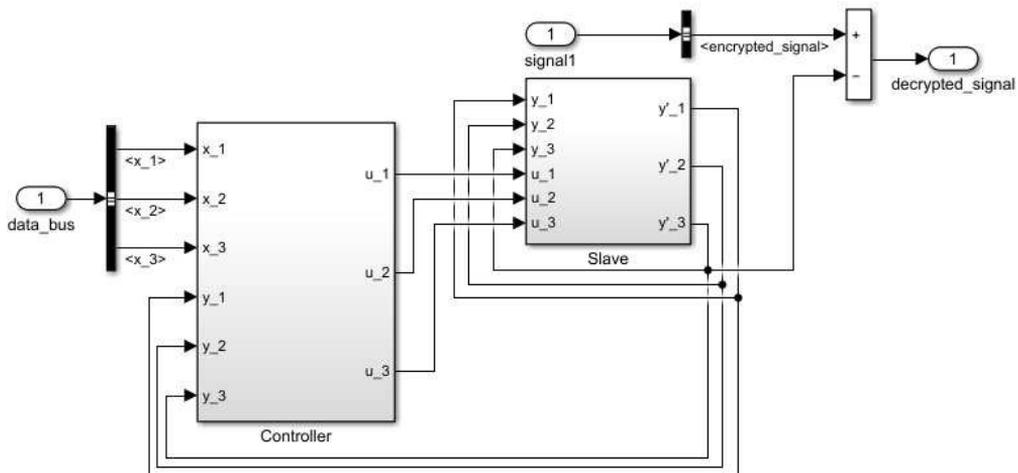


Figura 4.27: Bloque de descryptación para el sistema UDS - UDS.

En la figura 4.28 se puede apreciar el fragmento de audio original, esto es antes de cualquier manipulación que altere sus propiedades.

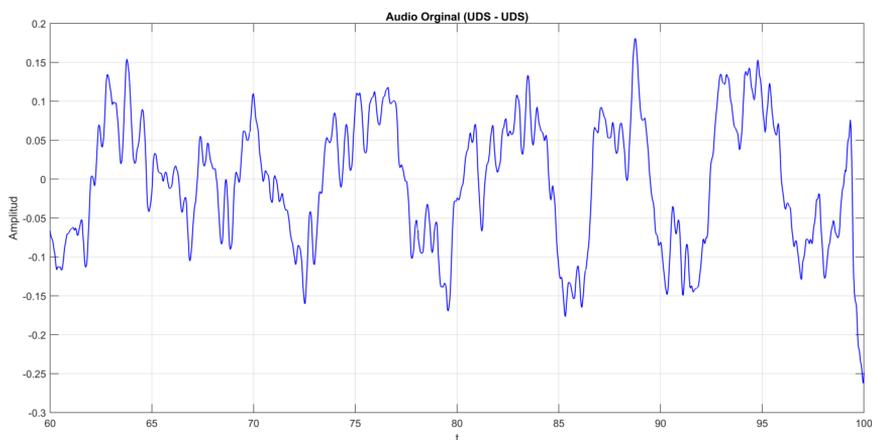


Figura 4.28: Fragmento de audio original.

Una vez que el mensaje se procesa y se encripta, el audio se altera, es posible ver este cambio en la figura 4.29

En este punto el mensaje es ininteligible para cualquier receptor no deseado, sin embargo es necesario desencriptarlo para que el receptor deseado sea capaz de procesar la información, el audio desencriptado puede verse en la figura 4.30, mientras que la señal original, la encriptada y la desencriptada pueden verse en una sola gráfica en la figura 4.31.

En la figura 4.32 es posible apreciar que el error entre el audio original y el audio desencriptado tiende asintóticamente a cero, y se vuelve tan pequeño que es posible despreciar dicho error rápidamente.

### 4.3 ENCRIPCIÓN MEDIANTE MAESTRO LORENZ – ESCLAVO UDS

Para el sistema Lorenz - UDS, se utiliza un sistema combinado entre Lorenz - Lorenz y UDS - UDS, por lo cual los bloques y su funcionamiento

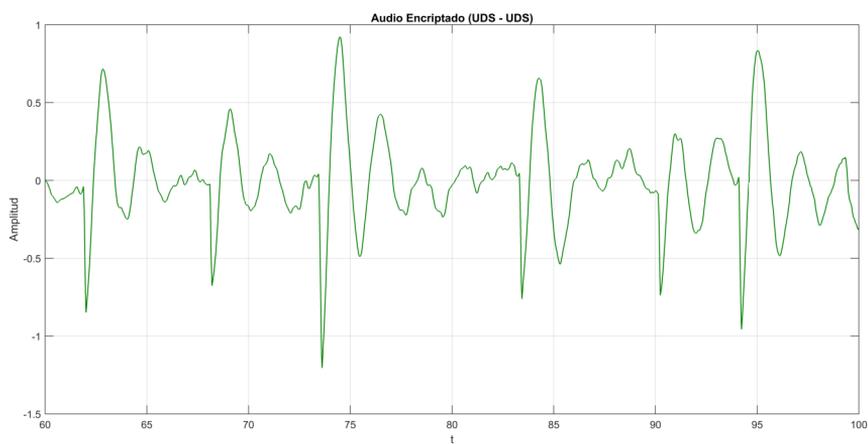


Figura 4.29: Audio encriptado por la sincronización de sistemas master UDS - slave UDS.

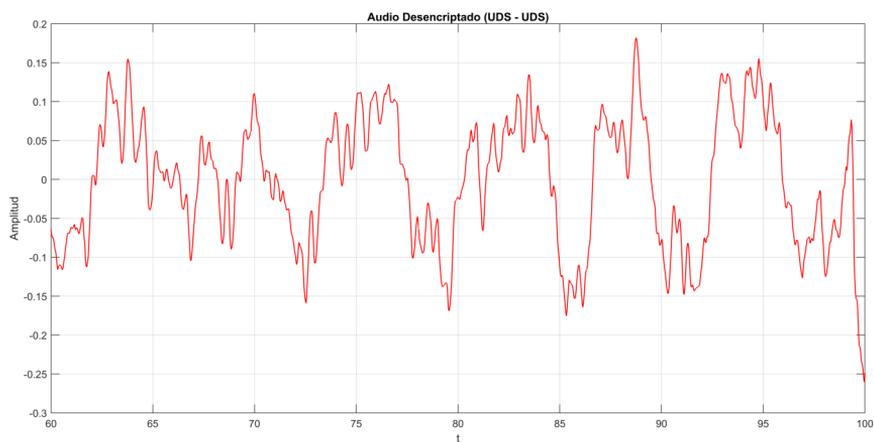


Figura 4.30: Audio desencriptado por la sincronización de sistemas master UDS - slave UDS.

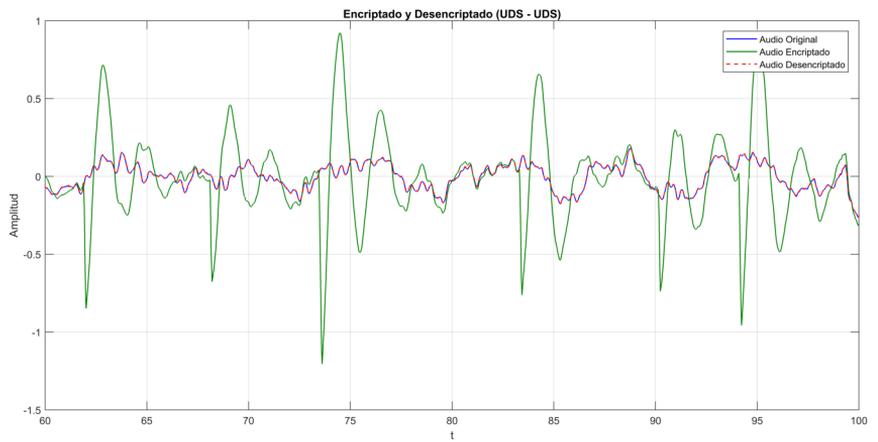


Figura 4.31: Audio original, encriptado y desencriptado por la sincronización de sistemas master UDS - slave UDS.

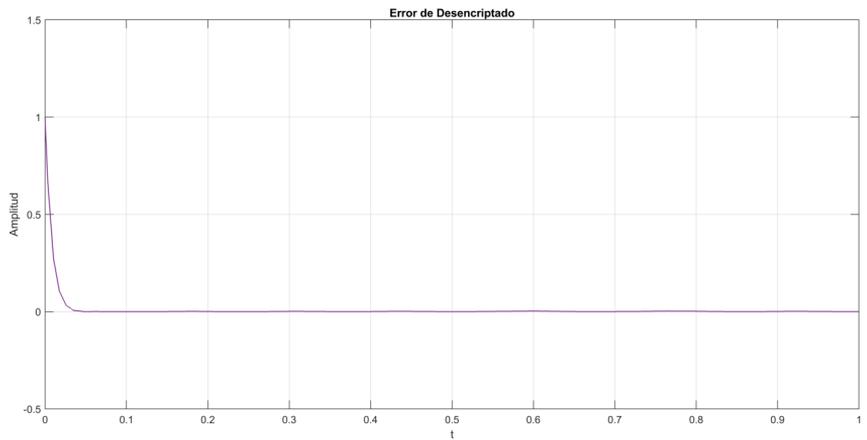


Figura 4.32: Error entre el audio original y el audio desencriptado por la sincronización de sistemas master UDS - slave UDS.

son similares. En la figura 4.33, se encuentra el programa a bloques utilizado.

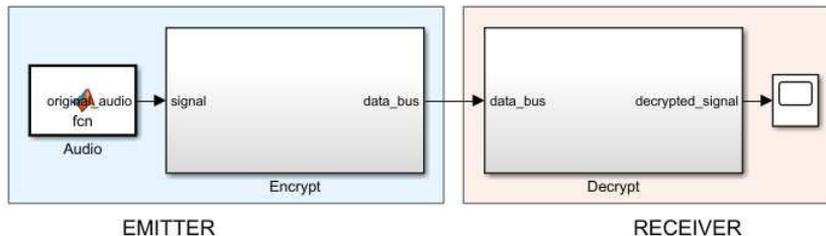


Figura 4.33: Programa en Simulink para el sistema de encriptación Lorenz - UDS.

A su vez, dentro del bloque “Encrypt”, se encuentra la suma de la señal de audio con la señal  $x_1$  del sistema de Lorenz como puede verse en la figura 4.34. El bloque “Master” contiene las ecuaciones del sistema de Lorenz expuestas en la sección 3.3.

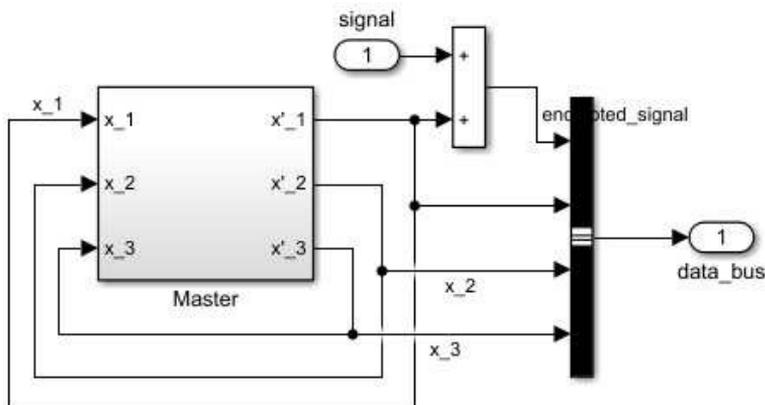


Figura 4.34: Bloque de encriptación para el sistema Lorenz - UDS.

Por su parte, el bloque “Decrypt” que puede ser observado en la figura 4.35 contiene el descryptado de la señal de audio mediante una resta con la señal  $\phi_1$  del sistema esclavo UDS. El bloque “Slave” contiene

las ecuaciones del sistema UDS esclavo de la sección 3.3 y el bloque “*Controller*” tiene el controlador diseñado.

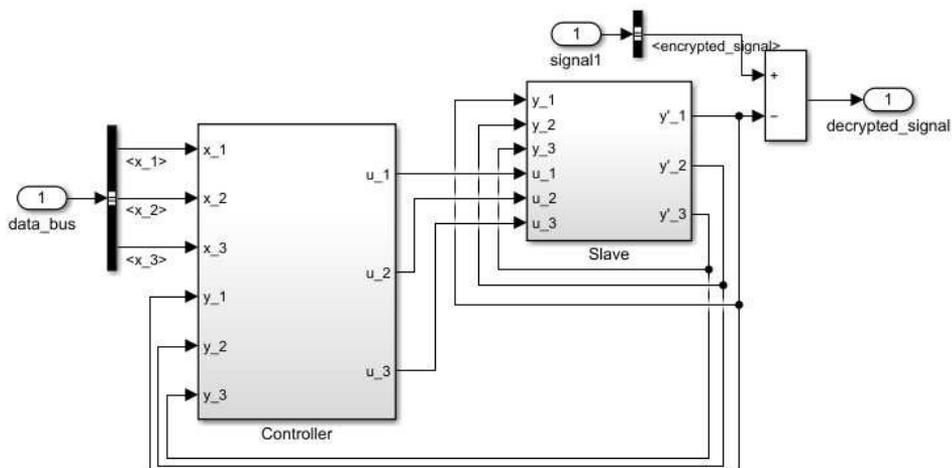


Figura 4.35: Bloque de descryptación para el sistema Lorenz - UDS.

En el capítulo 3, se diseñaron los controles para tres tipos de sincronización, los cuales serán usados para encriptar audio posteriormente

- (i) Sistema tipo Lorenz - Sistema tipo Lorenz.
- (ii) Sistema UDS tipo II - Sistema UDS tipo II.
- (iii) Sistema tipo Lorenz - Sistema UDS tipo II.

En la figura 4.36 se puede apreciar el fragmento de audio original, esto es antes de cualquier manipulación que altere sus propiedades.

Una vez que el mensaje se procesa y se encripta, el audio se altera, es posible ver este cambio en la figura 4.37

En este punto el mensaje es ininteligible para cualquier receptor no deseado, sin embargo es necesario descryptarlo para que el receptor deseado sea capaz de procesar la información, el audio descryptado

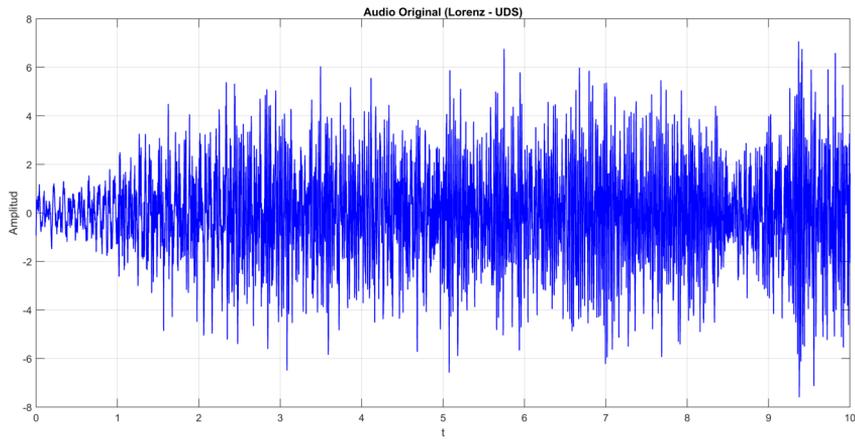


Figura 4.36: Fragmento de audio original.

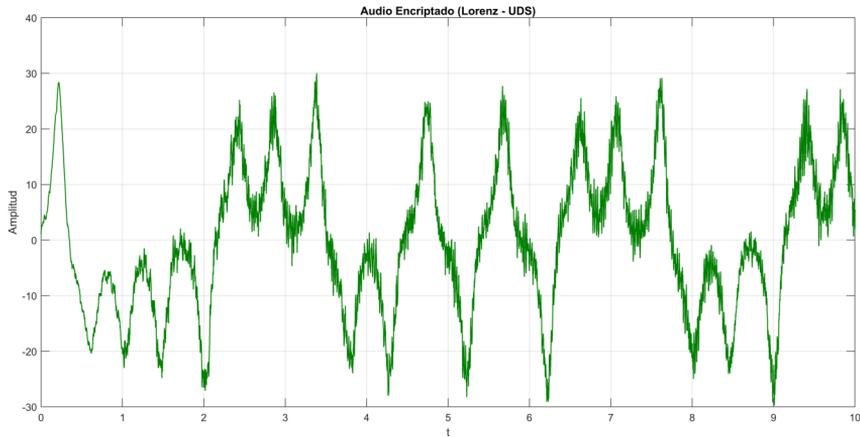


Figura 4.37: Audio encriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave UDS.

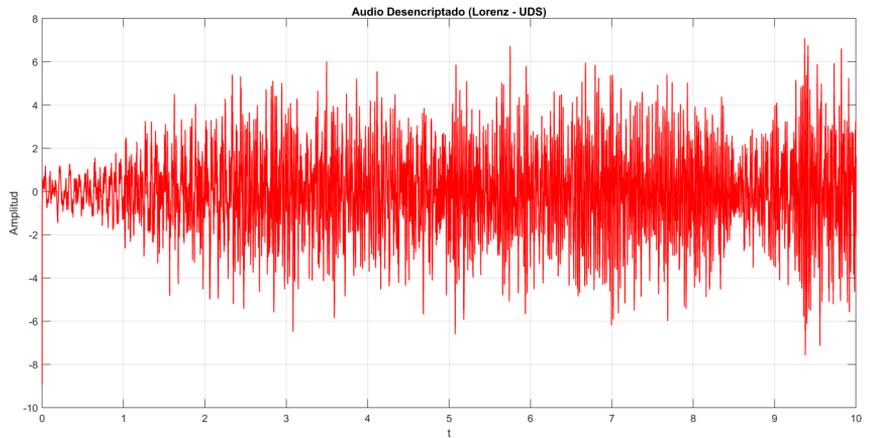


Figura 4.38: Audio descriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave UDS.

puede verse en la figura 4.38, mientras que la señal original, la encriptada y la descriptada pueden verse en una sola gráfica en la figura 4.39.

En la figura 4.40 es posible apreciar que el error entre el audio original y el audio descriptado tiende asintóticamente a cero, y se vuelve tan pequeño que es posible despreciar dicho error rápidamente.

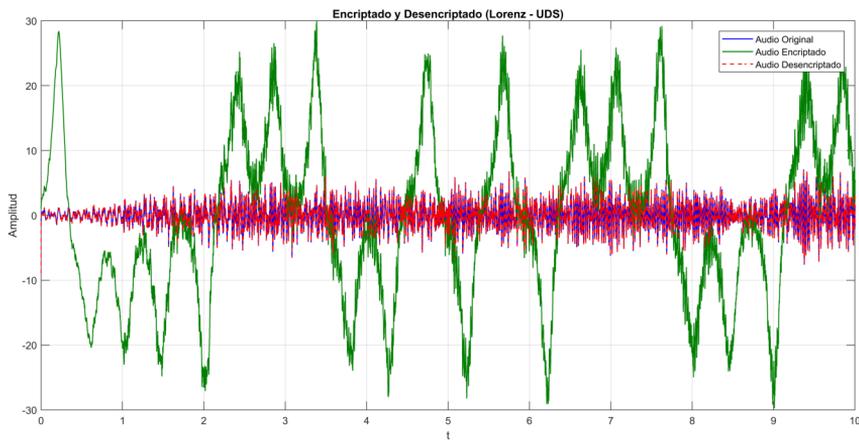


Figura 4.39: Audio original, encriptado y descriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz - slave UDS.

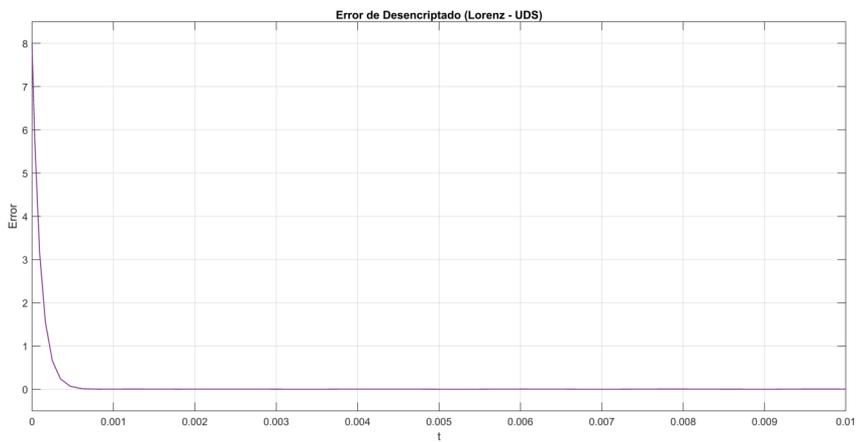


Figura 4.40: Error entre el audio original y el audio descriptado por la sincronización de sistemas master Lorenz- slave UDS.

# 5

## CONCLUSIONES

Se diseñó un método de encriptación y desencriptación mediante la sincronización de sistemas dinámicos con comportamiento caótico. Para esto fue necesario crear una ley de control la cual funciona como un corrector de posición, la cual provee una sincronización rápida y con error mínimo.

Tal controlador es un corrector de posición de soluciones en el retrato fase del sistema esclavo con respecto al sistema maestro mediante el sistema de errores, cuya estabilidad se verifica vía una función de Lyapunov para diseñar el controlador. Es decir, el controlador provee una dinámica al sistema esclavo parecida al sistema maestro con el objetivo de sincronizarlos. Lo cual llevo al análisis de las características mas importantes de los sistemas dinámicos con comportamiento caótico además de un estudio de sus propiedades elementales.

Gracias a la sincronización diseñada, es posible encriptar una señal (en este caso de audio) para ser transmitida, y en caso de ser interceptada, asegurar la ininteligibilidad del mensaje, además de esto la integridad de la señal transmitida no se ve comprometida debido a la rápida sincronización de los sistemas caóticos, lo cual permite un error mínimo, prácticamente despreciable..

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Cipher A Deavours and Louis Kruh. *Machine Cryptography and modern cryptanalysis*. Artech House, Inc., 1985.
- [2] Luis Antonio Aguirre. A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos, part 11: Modellng and control. 1996.
- [3] Iacyel Gomes da Silva. *Aspectos de Sincronización en un sistema caótico*. PhD thesis, Universitat de les Illes Balears, 2006.
- [4] Robert Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Westview press, 2008.
- [5] Stephen Smale, Morris W Hirsch, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60. Elsevier, 2003.
- [6] Dominic William Jordan and Peter Smith. *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction to dynamical systems*, volume 2. Oxford University Press, USA, 1999.
- [7] Xiaofeng Wu, Guanrong Chen, and Jianping Cai. Chaos synchronization of the master–slave generalized lorenz systems via linear state error feedback control. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 229(1):52–80, 2007.
- [8] Stephen Wiggins. *Global bifurcations and chaos: analytical methods*, volume 73. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Christopher P Silva. Shil’nikov’s theorem—a tutorial. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10):675–682, 1993.

- [10] Eric Campos-Cantón, Ricardo Femat, and Guanrong Chen. Attractors generated from switching unstable dissipative systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(3):033121, 2012.
- [11] E Campos-Cantón, JG Barajas-Ramírez, G Solis-Perales, and R Femat. Multiscroll attractors by switching systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 20(1):013116, 2010.
- [12] Servilia Oancea, Florin Grosu, Anca Lazar, and Ioan Grosu. Master–slave synchronization of lorenz systems using a single controller. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(5):2575–2580, 2009.
- [13] Jonathan Katz, Alfred J Menezes, Paul C Van Oorschot, and Scott A Vanstone. *Handbook of applied cryptography*. CRC press, 1996.
- [14] B Schneier. *Applied cryptography*, ohn wiley & sons inc. New York, New York, Sa,, 4, 1996.
- [15] Douglas R Stinson. *Cryptography: theory and practice*. CRC press, 2005.
- [16] Branislav Jovic. Chaotic signals and their use in secure communications. In *Synchronization Techniques for Chaotic Communication Systems*, pages 31–47. Springer, 2011.
- [17] II Blekhman, Polina S Landa, and Michael G Rosenblum. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems. *Applied Mechanics Reviews*, 48(11):733–752, 1995.
- [18] Francisco Balibrea Gallego. Caos y atractores extraños. dos problemas no lineales en matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2(1):99–116, 1999.
- [19] Marian Gidea and Constantin P Niculescu. *Chaotic dynamical systems: An introduction*. Universitaria Press Craiova, 2002.
- [20] LEONO Chua, Motomasa Komuro, and Takashi Matsumoto. The double scroll family. *IEEE transactions on circuits and systems*, 33(11):1072–1118, 1986.

- [21] A Mees and P Chapman. Homoclinic and heteroclinic orbits in the double scroll attractor. *IEEE transactions on circuits and systems*, 34(9):1115–1120, 1987.