



Subsecretaría de Educación Superior
Dirección General de Educación Superior Tecnológica
Instituto Tecnológico de la Laguna

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Teoría de Potencia Eléctrica en Régimen Multisenoidal

POR
Adrián Gallegos Ríos.

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

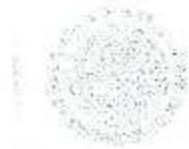
DIRECTOR DE TESIS
Dr. Francisco Sergio Sellschopp Sánchez

CODIRECTOR DE TESIS
M.C. Teodoro Corona Pérez

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (17)-TMCIE-2013
Torreón, Coahuila, México,
Diciembre 2013



Torreón, Coah., 10/Junio/2013
Dependencia: DEPI
Oficio: DEPIJ/378/2013
Asunto: Autorización de
impresión de tesis.

C. ADRIÁN GALLEGOS RÍOS
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA,
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Teoría de Potencia Eléctrica en Régimen Multisenoidal"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (17)-TMCIE-2013**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN



SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
de la Laguna
División de Estudios de Posgrado e Investigación

DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna



Torreón, Coah., 06/Diciembre/2013

DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Teoría de Potencia Eléctrica en Régimen Multisenoidal"

Desarrollado por el **C. Adrián Gallegos Ríos**, con número de control **M08130523** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda a autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. Francisco S. Sellschopp Sánchez
Asesor/Director

M.C. Federico Corona Pérez
Coasesor

DR. VICTOR M. CABRERA MORELOS
Comité Tutorial

M.C. Carlos Tirado Ruiz
Comité Tutorial



A Dios, Mi amigo invisible.

*A mi Madre que es mi mas grande ejemplo de vida,
que gracias a su apoyo incondicional pude concretar este sueño.*

Diciembre del 2013

*La mayoría de mis ideas y creaciones en realidad no fueron mías.
Se las copio a alguien en algún lugar o en algún momento,
pero para ellos eran sólo simples ideas.
YO TUVE EL VALOR DE PROBARLAS , DE EQUIVOCARME,
DE APRENDER Y HACERLAS TANGIBLES.
El secreto es encontrar las conexiones que nadie ha visto.
Leonardo da Vinci*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis y amigo, Dr. Francisco Sergio Sellschopp Sánchez por haber confiado en mi persona, por la paciencia y el tiempo invertido en este trabajo, por los consejos y el apoyo brindado durante estos años, sin lugar a duda un excelente ser humano. A mi Co-Asesor el M.C. Teodoro Corona Pérez por mostrarme el gran mundo de los fenómenos electromagnéticos desde una conceptualización distinta. A los profesores del departamento de Potencia, Dr. Marco Antonio Arjona López, Dr. Concepción Hernández Flores, Dr. Victor Manuel Cabrera Morelos, M.C. Carlos Tirado Ruiz, y M.C. Ricardo Vargas Salas, por compartir sus grandes conocimientos.

Agradezco al Instituto Tecnológico de la Laguna; al CONACyT por apoyarme durante este tiempo al otorgarme una beca. Agradezco especialmente a mi Madre la persona más maravillosa del mundo; mis hermanos, Brisa Jancsh y Juan de Dios que siempre serán parte de mi vida.

Gracias también a mis queridos compañeros de maestría que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos dos años de convivir dentro y fuera del salón de clase.

Gracias a todos.

Resumen

El trabajo de investigación presentado en esta tesis es enfocado a la teoría de potencias eléctricas con distorsión armónica, considerando los principios matemáticos y electromagnéticos fundamentales.

Las principales aportaciones de este trabajo son la formulación teórica de las componentes de potencia eléctrica en sistemas multisenoidales y la realización de pruebas experimentales para la validación de las componentes de potencia. Mediante las pruebas realizadas se pudo relacionar la teoría de potencias con fenómenos físicos, tales como el efecto Joule y la ley de inducción de Faraday. La teoría de potencias eléctricas en régimen multisenoidal es respaldada mediante el teorema de Poynting y la relación que existe entre la teoría de campos y la teoría de circuitos eléctricos. Se presenta también distintos formalismos matemáticos tales como el álgebra geométrica, cálculo tensorial y álgebra de cuaterniones siendo estos formalismos aplicables a la teoría de potencias y se analizan en este trabajo.

Por último se presentan las pruebas realizadas para la validación de la teoría multisenoidal, mediante los resultados obtenidos se pudo encontrar una relación entre la potencia activa y la intensidad de temperatura, así también se pudo conocer la interacción de la ley de Faraday en medios armónicos.

Abstract

The research work presented in this thesis is focused on the electrical power theory with harmonic distortion, considering the fundamental mathematical and electromagnetic principles.

The main contributions of this work are the theoretical formulation of the electric power components in systems multisencoidals and experimental tests for the validation of the power components. Through tests performed can be relate the theory of powers with physical phenomena, such as the Joule effect and the Faraday induction law . The multisencoidal powers theory is based with Peynting theorem and the relationship between fields theory and the electric circuits theory . Also is Present different mathematical formalisms such as geometric algebra, tensor calculus and algebra of quaternions these formalisms are applicable to the electric power theory and they are analysed in this thesis. Firally presented the tests carried out for the validation of the multisencoidal theory, through the results can be find a relationship between the active power and the intensity of temperature, also can know the interaction the Faraday law of harmonics media.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Abstract	V
1. Introducción	1
1.1. Aspectos generales	1
1.2. Objetivo de la tesis	2
1.3. Justificación	2
1.4. Estado del arte	3
1.5. Organización de la tesis	7
2. Física de la teoría de potencia	8
2.1. Introducción	8
2.2. Puente entre la teoría de campos electromagnéticos y la teoría de circuitos eléctricos.	14
2.3. Vector de Poynting en sistemas multisenoidal monofásicos	19
2.4. Conclusiones	23
3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas	24
3.1. Introducción	24

3.2. Teoría de potencia eléctrica clásica	25
3.3. Algebra geométrica	27
3.4. Cálculo tensorial	31
3.5. Algebra de cuaterniones	33
3.6. Conclusiones	35
4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales	37
4.1. Introducción	37
4.2. Formulación matemática de la teoría	39
4.3. Comparación entre otras teorías.	47
4.4. Conclusiones	51
5. Pruebas experimentales	52
5.1. Introducción	52
5.2. Potencia activa multisenoidal y la ley de Joule	54
5.2.1. Resultados de potencia activa y temperatura.	57
5.3. Potencia reactiva multisenoidal y la ley de inducción de Faraday	64
5.3.1. Resultados de potencia reactiva y tensión inducida.	66
5.4. Conclusiones	72
6. Conclusiones y Trabajos Futuros	73
6.1. Conclusiones	73
6.2. Trabajos Futuros	75
6.3. Publicaciones.	75
A. Teoría de potencia eléctrica Constantin I. Budeanu	77
B. Teoría de potencia eléctrica Alexander E. Emanuel.	79
Referencias	82

Índice de figuras

2.1. Equilibrio de potencia en campos electromagnéticos.	9
2.2. Campos electromagnéticos en un medio físico dentro de una superficie S.	11
2.3. Circuito RLC serie.	16
2.4. Circuito RLC paralelo.	18
2.5. Carga no lineal en un medio multisenoidal.	20
3.1. Representación del vector, bivector y trivector.	28
3.2. Circuito No lineal monofásico.	29
3.3. Circuito Trifásico general.	32
5.1. Configuración del sistema de adquisición de potencia instantánea.	53
5.2. Circuito eléctrico multisenoidal con carga resistiva.	54
5.3. Flujo de potencia en un circuito con una carga lineal resistiva.	56
5.4. Sistema de prueba de temperatura en resistencia eléctrica.	57
5.5. Tensión aplicada a la resistencia y Temperatura.	63
5.6. Potencia disipada por la resistencia y temperatura.	64
5.7. Relación Potencia y Tensión en la resistencia.	65
5.8. Bobinas de prueba para la medición de tensión inducida.	66
5.9. Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 1.	67
5.10. Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 2.	68
5.11. Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 3.	69
5.12. Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 4.	69

5.13. Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba δ 70

Índice de tablas

3.1. Producto básico del álgebra de Cuaterniones.	33
4.1. Resultado de potencias según la teoría de Budeanu.	48
4.2. Resultado de potencias según la teoría de Fryze.	48
4.3. Resultado de potencias según la teoría de Depronbrock.	49
4.4. Resultado de potencias según la teoría de Czarnecki.	49
4.5. Resultado de potencias según la teoría de Emanuel.	50
4.6. Resultado de potencias según la teoría Multisenoidal.	50
4.7. Comparación entre las teorías con mayor relevancia.	51
5.1. Prueba experimental Potencia-Temperatura 1	58
5.2. Prueba experimental Potencia-Temperatura 2	58
5.3. Prueba experimental Potencia-Temperatura 3	59
5.4. Prueba experimental Potencia-Temperatura 4	59
5.5. Prueba experimental Potencia-Temperatura 5	60
5.6. Prueba experimental Potencia-Temperatura 6	60
5.7. Prueba experimental Potencia-Temperatura 7	61
5.8. Prueba experimental Potencia-Temperatura 8	61
5.9. Prueba experimental Potencia-Temperatura 10	62
5.10. Prueba experimental Potencia activa y reactiva 1.	67
5.11. Prueba experimental Potencia activa y reactiva 2.	68
5.12. Prueba experimental Potencia activa y reactiva 3.	68

5.13. Prueba experimental Potencia activa y reactiva 4.	69
5.14. Prueba experimental Potencia activa y reactiva 5.	70

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se aborda lo referente a los aspectos generales, objetivo del trabajo de tesis, justificación y el perfil de la tesis. También se presenta el estado del arte de las distintas teorías de potencias eléctricas propuestas por investigadores considerados de relevancia.

1.1. Aspectos generales

La teoría de potencia eléctrica clásica propuesta por Steimentz para sistemas de corriente alterna [1], así como sus componentes de potencia fueron descartadas en el año de 1922 para el cálculo y la medición de potencia eléctrica en sistemas con distorsión de las formas de ondas de tensión y corriente. Desde entonces surgieron los grandes debates acerca de cómo dar solución a este problema y proponer una teoría única para la potencia eléctrica.

En la actualidad los desarrollos científicos en el sector eléctrico son un gran fenómeno. Las fuentes de energía eléctrica renovables como la eólica y la solar entre otras juegan un papel importante hoy en día. Así mismo la proliferación de los dispositivos de electrónica de potencia en sistemas eléctricos se han hecho presentes. Ciertamente estos avances científicos tienen grandes implicaciones en el ahorro de energía, conservación de combustibles fósiles, reducción de contaminación, reducción de costos de energía eléctrica entre otros.

Pero a su vez representan inconvenientes a los sistemas eléctricos mediante las distorsiones de las formas de onda de tensión y corriente. Debido a esto es importante contar con una definición única de la teoría de potencia eléctrica, la cual permita medir y calcular adecuadamente los componentes energéticos que intervienen en los sistemas eléctricos actuales.

Uno de los grandes problemas surge en la medición de energía eléctrica, ya que en la actualidad los medidores eléctricos están construidos con esquemas desde los años 1930 y 1940 no obstante este hecho, estos medidores son capaces realizar mediciones precisas en condiciones no senoidales de energía (kWh) y potencia activa (kW). Los errores surgen en la medición de la potencia reactiva (kvar) y potencia aparente (kVA), estas incertidumbres se derivan de las definiciones de energía inadecuadas que dictan el diseño conceptual de tal instrumentación. Otro fenómeno erróneo se genera en el diseño y cálculo de la compensación de potencia reactiva.

1.2. Objetivo de la tesis

El objetivo de este trabajo de tesis es desarrollar una formulación matemática para la teoría de potencias eléctricas en condiciones generales en sistemas monofásicos, sustentada mediante los principios físicos de la teoría electromagnética.

1.3. Justificación

En los sistemas eléctricos actuales existe un gran número de cargas no lineales, esto debido al gran aumento de los dispositivos que utilizan electrónica de potencia. Debido a este aumento de cargas no lineales, los sistemas eléctricos operan con corrientes y en algunos casos con tensiones no senoidales, por lo que la teoría clásica de potencias eléctricas no proporciona resultados fiables. Debido a esto es necesario contar con una herramienta adecuada para el cálculo de potencias eléctricas en condiciones generales de operación. El presente trabajo de tesis se orienta a proponer una formulación teórica acerca de la teoría

de potencias eléctricas cuya base subyace en la física de los fenómenos electromagnéticos. La necesidad de tener una teoría general para el cálculo de potencias eléctricas justifica del desarrollo de esta tesis.

1.4. Estado del arte

La teoría fundamental de la transmisión de energía describe el transporte de la energía en términos de campos eléctricos y magnéticos. Para los ingenieros estudiosos en sistemas eléctricos de potencia, el manejo de cantidades de potencia se basan en la razón de cambio de la energía con respecto al tiempo en términos de tensión y corriente. En otras palabras se habla de la potencia en términos de tensión y corriente.

La teoría clásica existente de potencias es basada en desarrollos puramente matemáticos y no describe adecuadamente los fenómenos físicos de las potencias eléctricas cuando existe distorsión de la forma de onda de tensión y la corriente. Actualmente existe una gran cantidad de investigadores trabajando en la teoría de potencias eléctricas en condiciones de distorsión de forma de onda ó multisenoidales. En esta sección solo se presentan las teorías más influyentes y consideradas relevantes en la actualidad.

Las definiciones de potencia eléctrica han sido objeto de investigación desde hace 100 años. A finales del siglo XIX C.P. Steinmetz desarrolló una de las más importantes teorías para el análisis de circuitos eléctricos de corriente alterna [1]. Esta teoría define los conceptos de potencia activa, potencia reactiva, potencia aparente y factor de potencia. Para sistemas eléctricos cuyas tensiones y corrientes son puramente senoidales, balanceadas y se encuentran conectadas a cargas lineales, las definiciones de las potencias propuestas por Steinmetz son ampliamente aceptadas. Uno de los grandes defectos de esta teoría radica en que la deducción de estas componentes de potencia, fueron desarrolladas basándose únicamente en desarrollos matemáticos [2]. Por lo tanto no se consideró ninguna interpretación física, como las ecuaciones de Maxwell y el teorema de Poynting,

Steinmetz en su teoría explica porque no toda la potencia eléctrica se transforma en energía utilizable y también demostró que descomponiendo la tensión instantánea mediante identidades trigonométrica y realizando una proyección sobre la corriente, la teoría cumple matemáticamente la ley de Joule, sin embargo si no se realizan estas consideraciones, esta ley no se cumple.

El desacuerdo principal en las teorías de potencias, radica en gran parte a la definición de potencia reactiva la cual Steinmetz la define como la amplitud de la potencia reactiva instantánea. Las bases para asumir la definición de potencia reactiva de Steinmetz son las siguientes: la potencia reactiva instantánea tiene un valor promedio igual a cero, la amplitud de la potencia reactiva instantánea es semejante a la potencia activa y fundamentalmente por la relación que existe entre su valor y el fenómeno que cuantifica la carga y descarga de la energía en forma de campos electromagnéticos, manifestada en el almacenamiento y liberación de energía en inductores y capacitores.

Las aportaciones de Steinmetz han brindado los conceptos de potencias eléctricas para sistemas eléctricos monofásicos y trifásicos balanceados con cargas lineales. Sin embargo estas definiciones fueron descartadas para el cálculo de potencias eléctricas en ambientes multisenoidales en el año de 1920. Después de este suceso, empezaron las nuevas definiciones de potencias encabezada por Budeanu en 1927 [3].

Budeanu fue uno de los primeros científicos en proponer una solución a la teoría de potencias para sistemas multisenoidales. Una de sus grandes aportaciones se refiere al hecho de que la potencia aparente para sistemas eléctricos multisenoidales tiene más de dos componentes y pueden ser representadas en un sistema de tres componentes ortogonales. La primera componente es la componente activa de potencia, la segunda componente es la componente reactiva y la tercera componente asociada por Budeanu a la teoría, fue denominada potencia de distorsión (ver apéndice A). Así mismo deduce que las potencias activas y reactivas contienen componentes de distorsión, esto debido a la forma de onda de la potencia instantánea.

Uno de los grandes defectos a la teoría de Budeanu, surge en la componente de potencia reactiva, la cual no representa ninguna relación con el flujo de potencia que se establece entre la fuente y la carga con un valor promedio igual a cero. Además no da información acerca de cómo mejorar el factor de potencia de la carga [4]-[5]. Así se tiene que el término de potencia reactiva es inadecuado y por consiguiente la potencia de distorsión que es derivada de la potencia reactiva, activa y aparente carece de sentido. Esto evidentemente representa un grave error en la teoría propuesta por Budeanu.

Las discusiones acerca de la teoría de Budeanu han sido revisadas en diverso libros y publicaciones científicas. Unas de las discusiones más influyentes de la teoría de Budeanu es la propuesta por el investigador L.S.Czarnecki quien en su artículo "What is wrong with the Budeanu concept of Reactive and Distortion Power and why it should be abandoned", enfatiza que la potencia reactiva propuesta por Budeanu no poseen atributos que permitan mostrar los fenómenos físicos, de tal manera que no proporciona información útil para los sistemas eléctricos [4].

Las principales contribuciones propuestas por L.S. Czarnecki fueron realizadas en 1984 [5]. Estas contribuciones estaban originalmente destinadas a mejorar las limitaciones del modelo de potencias de Fryze [6]. La intención de esta propuesta era proporcionar información sobre la naturaleza de la carga y la manera de compensar el factor de potencia de la carga. Lo cual es posible mediante un circuito equivalente y suposiciones matemáticas las cuales fueron relacionadas con representaciones físicas.

El desarrollo sobre la teoría de potencias eléctricas propuesta por Czarnecki es basada en la descomposición de la corriente instantánea total, en componentes ortogonales dependientes de los diferentes fenómenos de la potencia. En otras palabras Czarnecki representó los fenómenos de la potencia activa, reactiva y la interacción de la distorsión de la forma de onda, mediante una topología de circuitos eléctricos. El éxito de su teoría y su acep-

tación reside principalmente en la compensación del factor de potencia. Sin embargo esta teoría no es respaldada con la física de los fenómenos electromagnéticos y no es más que una manipulación matemática que relaciona la interacción de las distintas componentes existentes en los sistemas eléctricos actuales.

Por otra parte Czarnecki ha mejorado su teoría para sistemas monofásicos y trifásicos y ha contribuido a grandes debates referentes a la teoría de potencias eléctricas [7]-[8]. Es importante destacar que Czarnecki ha utilizado su teoría para el diseño de filtros activos, análisis de potencia en sistemas polifásicos, compensación de potencia reactiva y diseño de medidores inteligentes de potencia para sistemas eléctricos entre otros.

Por último Alexander E. Emanuel un gran investigador y propulsor de la teoría de potencia eléctrica, basa su teoría en la física de los fenómenos electromagnéticos [9]. Emanuel se basó principalmente en el teorema de Poynting, esto lo llevó a determinar las componentes físicas existentes debido a la interacción de ondas de tensión y corrientes, con el fin de conocer físicamente las componentes de potencia en sistemas eléctricos [10]. También este investigador se basa en estrategias matemáticas para la formulación de su teoría.

Es importante destacar que Emanuel, basado en los fenómenos físicos acierte en conceptos de potencia activa y reactiva para sistemas multisenoidales. Ya que con esto se puede dar significado a la energía útil y la energía no útil que interacciona con la fuente y carga en cualquier sistema eléctrico (ver apéndice B). También es importante mencionar que Emanuel es uno de los principales participantes del estándar "*IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced or Unbalanced Conditions*", el cual proporciona la información y las recomendaciones adecuadas para el cálculo de potencias eléctricas en cualquier condición en la que el sistema eléctrico se encuentre [12].

Pero incluso algunas de las definiciones de Emanuel han sido duramente rechazadas. Una indudablemente es la potencia aparente efectiva, debido a que no cuantifica los fenómenos del sistema, a pesar de que su obtención parte del hecho físico de las pérdidas de potencia en las líneas de sistema.

1.5. Organización de la tesis

El presente documento de tesis contiene seis capítulos, los cuales están estructurados de la siguiente manera:

- En el capítulo 1 se introduce a una perspectiva general del trabajo de investigación realizado mediante aspectos generales, estado del arte y el objetivo de este trabajo.
- En el capítulo 2 se presentan los conceptos de potencia como la razón de cambio del flujo de energía, mediante desarrollos físico-matemáticos de la teoría electromagnética. Así mismo se presenta la relación entre la teoría de campos electromagnéticos y la teoría de circuitos eléctricos. Adicionalmente, se presenta el desarrollo de vector de Poynting para sistemas eléctricos multisenoidales.
- En el capítulo 3 se describen diferentes formalismos matemáticos aplicados a la teoría de la potencia eléctrica, tales como el álgebra geométrica, el cálculo tensorial y el álgebra de cuaterniones.
- En el capítulo 4 se presenta detalladamente la teoría de potencia en régimen multisenoidal, así como su desarrollo matemático y los respaldos físicos de esta teoría.
- En el capítulo 5 se exponen los trabajos experimentales referentes a los fenómenos físicos que interactúan en la potencia eléctrica instantánea, tales como la ley de joule, ley de inducción de Faraday y el vector de Poynting.
- En el capítulo 6 se presentan las conclusiones obtenidas del desarrollo científico de este trabajo de tesis, publicaciones científicas presentadas y trabajos futuros.

Capítulo 2

Física de la teoría de potencia

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos acerca del flujo de energía y la interacción de teoría de campos con la teoría de circuitos. También se presenta el desarrollo matemático del vector de Poynting en sistemas multiconoidal monofásicos y se analizan sus implicaciones. Esta teoría es explicada desde el punto de vista del autor de esta tesis.

2.1. Introducción

La física de los fenómenos electromagnéticos determina el comportamiento de cualquier sistema eléctrico, independientemente de las condiciones a las que esté sometido. Esto mediante las ecuaciones de Maxwell y el lenguaje de las matemáticas.

La interacción de los campos electromagnéticos así como su comportamiento energético deben ser representados mediante las ecuaciones de Maxwell para un entendimiento general. Pero de forma particular puede ser expresado mediante el teorema de Poynting. Este teorema describe el mecanismo físico de la energía eléctrica transportada desde el punto de generación hasta el punto de consumo [13].

John Henry Poynting formuló en 1884 la ecuación más general para describir la transferencia de energía entre una fuente y una carga, de la siguiente manera:

$$\iint_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) dV \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) es el teorema de Poynting y contiene los siguientes términos que cumplen la ley de conservación de la energía en campos electromagnéticos. El primer término del lado derecho es la potencia disipada a causa de que el medio conductor tiene una conductividad diferente de cero, lo cual está dado por la ley de Joule. El segundo término de la ecuación es la rapidez del decremento de la energía almacenada en los campos eléctricos y magnéticos [14].

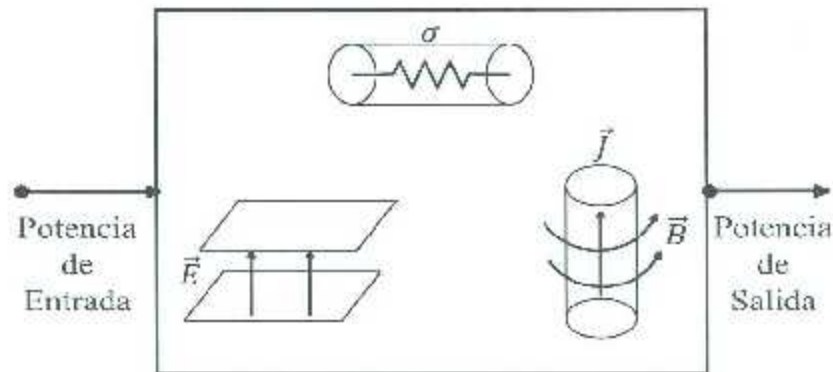


Figura 2.1: Equilibrio de potencia en campos electromagnéticos.

La gran aportación de J.H. Poynting a la física, reside en gran medida a los términos propuestos en su teorema, ya que dichos términos proporcionan la información energética a la que está sujeta cualquier sistema electromagnético. En otras palabras este teorema establece los fenómenos físicos reales que intervienen en la ley de conservación de energía en sistemas electromagnéticos. En la figura (2.1) se ilustra el equilibrio de potencia en campos electromagnéticos debido a las interacciones de campos en distintos elementos.

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.2)$$

A partir del teorema de Poynting en (2.1), se puede deducir el vector de Poynting en (2.2), el cual expresa la cantidad de densidad de potencia en un punto del espacio, donde los campos vectores eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} son conocidos. Las unidades del vector de Poynting son los watts por metro cuadrado $[W/m^2]$.

El vector de Poynting es una herramienta matemática invaluable para el estudio de propagación de energía en antenas o cualquier tipo de equipo eléctrico. Entre sus muchas aplicaciones se encuentran los estudios de blindaje electromagnético, análisis de penetración de ondas electromagnéticas a través de diferentes materiales, sistemas de calor por inducción, diseño complejo de dispositivos usando el vector de Poynting entre otros [15].

Cabe destacar que el vector de Poynting no solo se aplica a estudios de alta frecuencia sino también a estudios de bajas frecuencias. La evidencia de esto puede ser clara en trabajos de investigación, como el análisis de energía a través de motores, propuesto por Joseph Sepian en [16] y el flujo de energía en líneas de transmisión y equipos de potencia [17]. Ciertamente en las últimas décadas el vector de Poynting ha sido utilizado para el entendimiento a la teoría de potencia eléctrica con el fin de comprender los fenómenos que intervienen en esta teoría.

El transporte de energía eléctrica mediante sistemas de transmisión, así como los sistemas de comunicación se lleva a cabo a grandes o cortas distancias. Para llevar a cabo esto, la energía debe ser asociada con campos electromagnéticos. Este transporte de energía debe establecerse en algún medio físico. Se considera una región V caracterizada por una permitividad ϵ , una permeabilidad μ y una conductividad σ encerradas en una superficie S , como se muestra en la figura (2.2). Dentro de esta región existen fuentes eléctricas y magnéticas presentes, así también se presenta la interacción de campos eléctricos y magnéticos los cuales intervienen en la energía.

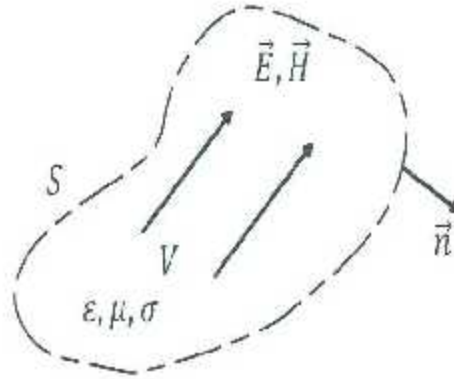


Figura 2.2: Campos electromagnéticos en un medio físico dentro de una superficie \$S\$.

El vector de Poynting fue definido en la ecuación (2.2), este vector puede ser representado mediante campos electromagnéticos en el dominio de la frecuencia, usando campos vectores de forma espacial compleja [18].

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \text{Re}[\vec{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\vec{E}e^{j\omega t} + (\vec{E}e^{j\omega t})^*] \quad (2.3)$$

$$\vec{H}(x, y, z; t) = \text{Re}[\vec{H}(x, y, z)e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\vec{H}e^{j\omega t} + (\vec{H}e^{j\omega t})^*] \quad (2.4)$$

Donde el asterisco (*) indica el conjugado complejo. Sustituyendo (2.3) y (2.4) dentro de (2.2), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2}(\vec{E}e^{j\omega t} + \vec{E}^*e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2}(\vec{H}e^{j\omega t} + \vec{H}^*e^{-j\omega t}) \\ \vec{P} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}[\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H}] + \frac{1}{2}[\vec{E} \times \vec{H}e^{j2\omega t} + \vec{E}^* \times \vec{H}^*e^{-j2\omega t}] \right\} \\ \vec{P} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}[\vec{E} \times \vec{H}^* + (\vec{E} \times \vec{H}^*)^*] + \frac{1}{2}[\vec{E} \times \vec{H}e^{j2\omega t} + (\vec{E} \times \vec{H}^*e^{-j2\omega t})^*] \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Usando las cantidades de (2.3) ó (2.4), la ecuación(2.5) se puede representar como:

$$\vec{P} = \frac{1}{2}[\text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^* + \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}e^{j2\omega t})] \quad (2.6)$$

Debido a que \$\vec{E}\$ y \$\vec{H}\$ no son función del tiempo y la variación del tiempo del segundo término es dos veces la frecuencia del campo vector, la densidad de potencia promedio sobre un periodo es igual a:

$$\vec{P}_{prom} = \vec{S} - \frac{1}{2} Re[\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad (2.7)$$

Ya que $\vec{E} \times \vec{H}^*$ es en general complejo y la parte real representa la densidad de potencia promedio, entonces la parte imaginaria representa la potencia reactiva, la cual tiene una variación del doble de la frecuencia del campo vector.

Siendo las ecuaciones (2.6) y (2.7) la razón de cambio de la energía, entonces es posible obtener la ecuación de conservación de la energía en forma diferencial utilizando la forma compleja de los campos vectores y las ecuaciones de Maxwell.

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{M}_i - j\omega\mu\vec{H} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_i + \vec{J}_c + j\omega\varepsilon\vec{E} = \vec{J}_i + \sigma\vec{E} - j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (2.9)$$

Donde \vec{M}_i es la densidad de corriente magnética de la fuente, \vec{J}_c es la densidad de corriente de conducción y \vec{J}_i es la densidad de corriente eléctrica de la fuente. Realizando el producto punto de \vec{H}^* a la ecuación (2.8) y el conjugado de (2.9) multiplicado por \vec{E} , resulta lo siguiente:

$$\vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \vec{H}^* \cdot \vec{M}_i - j\omega\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^* \quad (2.10)$$

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*) = \vec{E} \cdot \vec{J}_i^* + \sigma\vec{E} \cdot \vec{E}^* - j\omega\varepsilon\vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (2.11)$$

Restando la ecuación (2.10) de la ecuación (2.11) se obtiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} & \vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*) \\ &= \vec{H}^* \cdot \vec{M}_i + \vec{E} \cdot \vec{J}_i^* + \sigma\vec{E} \cdot \vec{E}^* - j\omega\varepsilon\vec{E} \cdot \vec{E}^* - \vec{H}^* \cdot \vec{M}_i + j\omega\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^* \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (2.13)$$

Aplicando la identidad vectorial (2.13) en (2.12) y dividiendo entre 2 toda la expresión se obtiene lo siguiente.

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) = \frac{1}{2} \vec{H}^* \cdot \vec{M}_i + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}_i + \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2 + j2\omega \left(\frac{1}{4} \mu |\vec{H}|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon |\vec{E}|^2 \right) \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) representa la ecuación de la conservación de la energía en forma diferencial para campos en el dominio de la frecuencia. Aplicando la integral de volumen de ambos lados de la ecuación(2.14) y utilizando el teorema de divergencia del lado izquierdo de esta ecuación, se tiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} -\iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) dV &= -\iint_S \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{H}^* \cdot \vec{M}_i + \vec{E} \cdot \vec{J}_i) dV + \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dV \\ &\quad + j2\omega \iiint_V \left(\frac{1}{4} \mu |\vec{H}|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon |\vec{E}|^2 \right) dV \end{aligned} \quad (2.15)$$

En (2.15) se encuentran todos los términos de potencia que intervienen en los fenómenos electromagnéticos, así mismo esta ecuación se puede describir de la siguiente manera.

$$P_s = P_e + P_d + j2\omega(\overline{W_m} - \overline{W_e}) \quad (2.16)$$

donde

$$P_s = -\frac{1}{2} \iiint_V (\vec{H}^* \cdot \vec{M}_i + \vec{E} \cdot \vec{J}_i) dV \quad (2.17)$$

$$P_e = \iint_S \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.18)$$

$$P_d = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dV \quad (2.19)$$

$$\overline{W_m} = \iiint_V \left(\frac{1}{4} \mu |\vec{H}|^2 \right) dV \quad (2.20)$$

$$\overline{W_e} = \iiint_V \left(\frac{1}{4} \varepsilon |\vec{E}|^2 \right) dV \quad (2.21)$$

La potencia compleja de la fuente es representada por la ecuación (2.17), la potencia compleja de suministro en (2.18), la potencia disipada real en (2.19) y las variaciones de energía magnética y eléctrica en (2.20)-(2.21). Todas estas potencias contienen la información física de campos electromagnéticos. A partir de la ecuación (2.16) se pueden conocer todos los términos de potencia que interactúan en cualquier sistema eléctrico [18].

2.2. Puente entre la teoría de campos electromagnéticos y la teoría de circuitos eléctricos.

En general, los campos eléctricos y magnéticos son cantidades vectoriales que tienen magnitud y dirección. Las relaciones y variaciones de los campos eléctricos y magnéticos, cargas y corrientes asociadas a las ondas electromagnéticas se rigen por las leyes físicas, que se conocen como ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell a nivel macroscópico se pueden escribir en términos de la teoría de circuitos y su respectiva formulación de sus ecuaciones. La simplificación de utilizar la teoría de campos a la teoría de circuitos representa una simplicidad de su solución, sin embargo para casos especiales las ecuaciones de campo son más generales y proporcionan mayor información de los fenómenos.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \dot{M}_c \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.22)$$

De acuerdo con la ecuación de Maxwell referente a la ley de Faraday, que se muestra en (2.22) el lado izquierdo representa la suma de las caídas de tensión a lo largo de una trayectoria cerrada C y se puede escribir de la siguiente manera.

$$\sum V = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.23)$$

Así mismo el lado derecho de ecuación (2.22) también debe tener las mismas unidades (volts). Por lo tanto, en ausencia de densidad de corriente magnética de la fuente ($\vec{M}_i = 0$), el lado derecho de (2.22) se puede escribir como:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(L_s i) = -L_s \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.24)$$

Por definición el encañamiento de flujo magnético está directamente relacionado con la corriente eléctrica y un parámetro inductivo ($\psi_m = L_s i$). En esta relación se asume que L_s es constante. Usando las ecuaciones (2.23) y (2.24), se puede describir la ecuación (2.25) considerando ($\vec{M}_i = 0$).

$$\sum V = -\frac{\partial \psi_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(L_s i) = -L_s \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.25)$$

Mediante la ecuación (2.25) se pueden indicar las caídas de tensión a lo largo de una trayectoria cerrada de un circuito, las cuales son iguales a la variación del flujo magnético en tiempo que pasa a través de la superficie encerrada. Esto también es igual a la caída de tensión a través de una inductancia L_s , la cual se utiliza para representar la inductancia parásita del circuito. Esto es mejor conocido como la ley de las tensiones de Kirchhoff que es ampliamente utilizada en la teoría de circuitos. De esta forma se pueden escribir la relación de campos y circuitos de la siguiente manera.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \Leftrightarrow \sum V = -\frac{\partial \psi_m}{\partial t} = -L_s \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2.26)$$

El análisis de circuitos de parámetros concentrados, donde por lo general la longitud de onda es muy grande (o las dimensiones del total del circuito son pequeñas en comparación con la longitud de onda) y la inductancia parásita del circuito es muy pequeña, el valor

del término derecho de la ecuación (2.25) es muy pequeño y por lo general se aproxima a cero. En este caso la caída de tensión a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a cero, y representa una implicación a la teoría de circuitos, ya que demuestra la ley de tensiones de Kirchhoff.

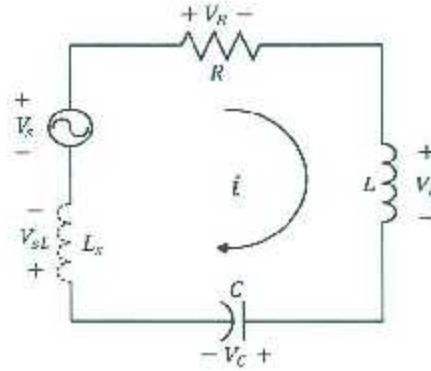


Figura 2.3: Circuito RLC serie.

Consideremos el circuito de la figura (2.3), donde se tiene una fuente de tensión y tres elementos concentrados ideales. Si la inductancia parásita L_s del circuito y el cambio de variación de corriente en el tiempo son pequeños (En caso de las aplicaciones de baja frecuencia), entonces el lado derecho de la siguiente ecuación puede igualarse a cero.

$$-V_s - V_R + V_L + V_C = -L_s \frac{\partial i}{\partial t} = -\dot{V}_{sL} \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27), representa la ley de tensiones de Kirchhoff y se cumple para cualquier circuito serie; a su vez esta ecuación está relacionada con la teoría de campos mediante la ecuación (2.26).

Similarmente se puede encontrar una relación entre la teoría de campos y la ley de corrientes de Kirchhoff, considerando la ecuación de continuidad, la cual se muestra a continuación.

$$\oint_C \vec{J}_{ic} \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{sv} dV = -\frac{\partial Q_v}{\partial t} \quad (2.28)$$

El lado izquierdo de (2.28), se puede escribir en forma de una ecuación de circuito como:

$$\sum i = \oint_C \vec{J}_{sc} \cdot d\vec{S} \quad (2.29)$$

donde $\sum i$ representa la suma de las corrientes que pasan a través de la superficie cerrada S . Usando (2.30) se puede reducir (2.28) a:

$$\sum i = -\frac{\partial Q_e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(C_s V) = -C_s \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.30)$$

Por definición $Q_e = C_s V$ donde C_s es una capacitancia asociada con la tensión y se asume constante.

Mediante la ecuación (2.30), se establece que la suma de las corrientes que atraviesan una fuente que encierra un circuito es igual a la razón de cambio de la carga eléctrica total encerrada por la superficie o igual a la corriente que fluye a través de un condensador C_s . Esto hace referencia a la ley de las corrientes de Kirchhoff y su forma representa una relación de campos y circuitos, como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\oint_C \vec{J}_{sc} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{cv} dV = -\frac{\partial Q_e}{\partial t} \Leftrightarrow \sum i = -\frac{\partial Q_e}{\partial t} = -C_s \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.31)$$

Para el análisis de circuitos de parámetros concentrados, donde la capacitancia parásita asociada con el circuito es muy pequeña, el lado derecho de (2.30) es muy pequeño y se establece en cero generalmente. En este caso (2.30), indica que las corrientes que salen o entran a una superficie cerrada en un circuito son iguales a cero.

En la figura (2.4) se puede ver una fuente de corriente y tres elementos de parámetros concentrados ideales (una resistencia R , un inductancia L y un capacitor C) que están conectados en un circuito en paralelo. De acuerdo a la ecuación (2.30).

$$-i_s - i_R + i_L + i_C = -C_s \frac{\partial V}{\partial t} = -i_{sc} \quad (2.32)$$

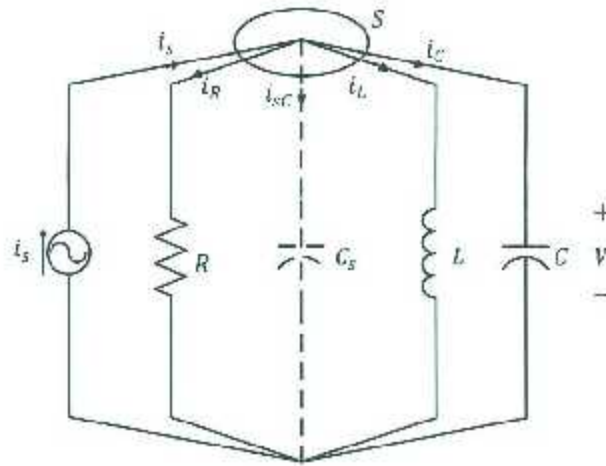


Figura 2.4: Circuito RLC paralelo.

Donde C_s , representa la capacitancia parásita total asociado con el circuito de la figura (2.4). Si la capacitancia parásita C_s del circuito y la razón de cambio de la carga total son pequeñas (en el caso de las aplicaciones de baja frecuencia), el lado derecho de (2.30), es pequeño y puede ser igual a cero. La corriente i_{sC} asociada con la capacitancia parásita C_s también incluye el desplazamiento (dispersión) de corriente que atraviesa la superficie cerrada S de la figura (2.4).

Además de las leyes de Kirchoff en circuitos eléctricos, existe una serie de leyes que se utilizan ampliamente en la teoría de circuitos. Entre estas leyes se encuentra una de las más relevantes, la ley de Ohm: esta ley afirma que para muchos materiales (incluyendo la mayoría de los metales), la relación de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante σ la cual es independiente del campo eléctrico que produce tal corriente. Se dice que los materiales que obedecen la ley de Ohm son materiales óhmicos y por consiguiente, muestran un comportamiento lineal. Sin embargo la ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza sino una relación empírica válida únicamente para ciertos materiales [19].

A pesar de estas implicaciones referentes a la ley de Ohm, sigue siendo una herramienta muy poderosa y es un caso especial en la teoría de campos ya que está dada por la relación constitutiva.

$$J_c = \sigma E \Leftrightarrow \frac{1}{R} V_R = G V_R \quad (2.33)$$

Otra relación importante es asociada a la inductancia, donde la caída de tensión a través de un inductor es igual a la razón de cambio de la corriente respecto al tiempo, donde la inductancia es el parámetro eléctrico que multiplicado por una corriente produce un flujo magnético. La ecuación que relaciona este con la teoría de campos es la siguiente:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Leftrightarrow \psi_m = L i_L \quad (2.34)$$

$$\vec{M}_d = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Leftrightarrow V_L = L \frac{\partial i_L}{\partial t} \quad (2.35)$$

Utilizando un proceso similar para un capacitor, se pueden escribir las relaciones entre campos y circuitos para el capacitor.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Leftrightarrow Q_m = C V_c \quad (2.36)$$

$$J_d = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow i_C = C \frac{\partial V_C}{\partial t} \quad (2.37)$$

Estas relaciones entre campos electromagnéticos, tensiones y corrientes, pueden ser aplicadas a la teoría de potencias. Esto con el objetivo de relacionar los fenómenos físicos de las ecuaciones de Maxwell con la teoría de potencias para circuitos eléctricos.

2.3. Vector de Poynting en sistemas multisenoidal monofásicos

En las dos secciones anteriores se demostró la interacción de las ecuaciones de Maxwell con la teoría de circuitos. También se analizó el teorema de Poynting con el fin de conocer la interacción de la potencia eléctrica y las variaciones energéticas según este teorema.

Despreciando la densidad de corriente magnética y eléctrica de la ecuación (2.16), se puede representar el vector de Poynting por medio de dos términos. El primer término se refiere a la potencia disipada en un medio σ y el segundo término a la variación energética de los campos eléctricos y magnéticos.

$$-\iint_S \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) dS = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \left(\mu |\dot{H}|^2 + \varepsilon |\dot{E}|^2 \right) dV \quad (2.38)$$

Considerando la variación temporal se obtiene:

$$-\iint_S \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) dS = P(t)_a + P(t), \quad (2.39)$$

Mediante la ecuación (2.39), se puede conocer la interacción de las potencias en cualquier sistema independientemente de sus condiciones, ya que se conocen las interacciones físicas reales. Entonces se puede proponer lo siguiente:

Considerando una fuente de tensión multisenoidal aplicada a una carga no lineal (el término multisenoidal se refiere al contenido armónico de la serie de Fourier) como se muestra en la siguiente figura:

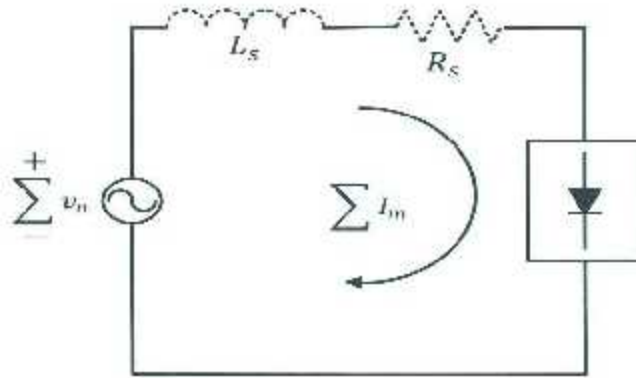


Figura 2.5: Carga no lineal en un medio multisenoidal.

Para cada componente de tensión multisenoidal existirá una componente multisenoidal de campo eléctrico. Ya que la tensión aplicada a la carga es multisenoidal, la respuesta

de corriente será multisenoidal y contribuirá a la existencia de campos magnéticos multisenoidales. Debido a esto el vector de Poynting resulta en diferentes vectores los cuales describirán los fenómenos físicos en sistemas multisenoidales. Este resultado, también se puede encontrar en trabajos tal como en [20].

$$v(t) = \sqrt{2}V_1 \text{sen}(\omega t + \alpha_1) + \sum_{n \neq 1} \sqrt{2}V_n \text{sen}(n\omega t + \alpha_n) = v(t)_1 + v(t)_n \quad (2.40)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I_1 \text{sen}(\omega t + \alpha_1 - \beta_1) + \sum_{n \neq 1} \sqrt{2}I_n \text{sen}(n\omega t + \alpha_n - \beta_n) = i(t)_1 + i(t)_n \quad (2.41)$$

La ecuación (2.40) y (2.41) corresponden a la tensión y corriente multisenoidal las cuales se pueden separar de la componente fundamental y las demás componentes armónicas. Entonces el cálculo de los campos eléctricos y magnéticos se lleva a cabo en términos de las componentes de tensión y corriente respectivamente. Los vectores de Poynting resultantes se calculan a partir de:

$$\vec{P} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_n) \times (\vec{I}_1 + \vec{I}_n) \quad (2.42)$$

El producto cruz de la ecuación (2.42) determina cuatro diferentes vectores de Poynting los cuales son la interacción entre las componentes fundamentales y las componentes diferentes a la fundamental. Esto también se puede ver en [20], donde se definen cuatro vectores de Poynting.

$$\vec{P} = (\vec{E}_1 \times \vec{I}_1) + (\vec{E}_1 \times \vec{I}_n) + (\vec{E}_n \times \vec{I}_1) + (\vec{E}_n \times \vec{I}_n) = \vec{P}_1 + \vec{P}_{1n} + \vec{P}_{n1} + \vec{P}_n \quad (2.43)$$

El vector de Poynting \vec{P}_1 sustenta la potencia activa instantánea $P(t)_a$ y la potencia reactiva instantánea $P(t)_r$ a una frecuencia fundamental.

$$\vec{P}_1 = V_1 I_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \{1 - \cos(2\omega t + 2\alpha_1)\} + V_1 I_1 \text{sen}(\alpha_1 - \beta_1) \text{sen}(2\omega t + 2\alpha_1) \quad (2.44)$$

El vector \vec{P}_{1n} es asociado con la distorsión de corriente en términos de vector de Poynting. Similarmente el vector \vec{P}_{n1} es asociado con distorsión de tensión.

$$\vec{P}_{1n} = 2V_1 \sum_{n \neq 1} I_n \text{sen}[n\omega t + \alpha_n - \beta_n] \text{sen}(\omega t + \alpha_1) \quad (2.45)$$

$$\vec{P}_{\omega 1} = 2I_1 \sum_{n \neq 1} V_n \text{sen}[n\omega t + \alpha_n] \text{sen}(\omega t + \alpha_1 - \beta_1) \quad (2.46)$$

Por último el término del vector \vec{P}_n es denominado vector de Poynting armónico, debido a que representa la transferencia de energía de todos los componentes armónicos y excluye a la componente fundamental en (2.47). Este vector contiene dos términos de potencia que son ortogonales entre sí. El primer término representa la potencia activa instantánea con contenido armónico como lo muestra (2.48).

$$\dot{P}_n = P(t)_{en} + P(t)_{em} \quad (2.47)$$

$$P(t)_{en} = \sum_{n \neq 1} V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n) [1 - 2\cos(n\omega t)] \quad (2.48)$$

El segundo término del vector de Poynting armónico contiene la potencia reactiva instantánea la cual interactúa con armónicos de la misma frecuencia y armónicos de frecuencias distintas.

$$P(t)_{em} = \sum_{n \neq 1} V_n I_n \text{sen}(\alpha_n - \beta_n) \text{sen}(2n\omega t - \alpha_n) + \sum_{n \neq m, n \neq m} 2V_n I_m \text{sen}(m\omega t + \alpha_m) \text{sen}(n\omega t + \alpha_n - \beta_n) \quad (2.49)$$

Las componentes del vector de Poynting son piezas fundamentales para clasificar los fenómenos físicos que intervienen en la teoría de potencias. Cabe destacar que se pueden manipular matemáticamente los componentes del vector de Poynting aquí mostrados para simplificar las interacciones entre las distintas componentes armónicas. De esta manera se puede tener distintas versiones del vector de Poynting, sin embargo los fenómenos físicos de la teoría de campos siguen presentes.

2.4. Conclusiones

En este capítulo se revisaron las leyes que intervienen en la física del flujo energético en sistemas electromagnéticos. Se pudo analizar el vector de Poynting y las ecuaciones de Maxwell como un puente entre la teoría de campos y la teoría de circuitos.

La teoría de campos es la mejor herramienta para encontrarle una interpretación física a los fenómenos que intervienen en la potencia instantánea. Conociendo este comportamiento se pueden aclarar los fenómenos físicos que intervienen en la teoría de potencias en sistemas multisenoidales.

Por lo tanto se concluye que la intervención de los fenómenos electromagnéticos proporcionan la información necesaria para obtener de manera experimental y matemática el valor real de las componentes de potencias y energías que intervienen en sistemas multisenoidales.

Capítulo 3

Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

El análisis de distintos formalismos matemáticos tales como el álgebra de Clifford, cálculo Tensorial y álgebra de Cuaterniones aplicables a la teoría de potencias eléctricas son presentados en este capítulo.

3.1. Introducción

En este capítulo se analizan las ventajas y desventajas de proponer una solución a la teoría de potencias eléctricas, considerando el álgebra de Clifford, el cálculo Tensorial y el álgebra de los Cuaterniones. Estos formalismos matemáticos han sido aplicados a diversos problemas físicos en distintas áreas de la ingeniería, tales como mecánica, robótica, aeronáutica, termodinámica y por supuesto a problemas electromagnéticos modernos.

Existe una gran variedad de métodos matemáticos que han sido propuestos por distintos investigadores para encontrar una representación adecuada en la teoría de potencias. Una de las principales características a estas propuestas se refieren en que dominio trabajar: en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Sin embargo para estos dos casos, se han utilizado distintos formalismos matemáticos, consideraciones físicas y

representaciones geométricas. Al final no se ha llegado a proponer una teoría única para el cálculo de potencias eléctricas en ambientes armónicos.

Actualmente el álgebra de Clifford o álgebra geométrica (AG) ha sido utilizada para desarrollar matemáticamente, entender e interpretar los conceptos en potencias eléctricas con distorsión en [21] [22]. Una de las mayores ventajas del AG es que con ella es posible hacer divisiones entre vectores, planos y volúmenes, etc., lo cual hace fácil la resolución de ecuaciones que involucran objetos geométricos [23]. Estas y otras ventajas presenta el AG para la solución de cálculos de energías en electromagnetismo. Al igual que el AG, el cálculo tensorial ha sido implementado en la teoría de potencias eléctricas mediante el tensor instantáneo de potencia propuesto en [24]. Este enfoque se basa en la definición general de la potencia instantánea en sistemas senoidales y considera que es posible calcular, evaluar y compensar de una manera integral a los sistemas eléctricos en régimen multisenoidal. Finalmente el álgebra de cuaterniones puede ser aplicada a la teoría de potencia convencional debido a que esta álgebra, ha sido utilizada en teoría electromagnética para la representación de las ecuaciones de Maxwell. Teniendo en cuenta la relación de la teoría de campos y teoría de circuitos se puede llegar a formular la teoría de potencias mediante cuaterniones.

3.2. Teoría de potencia eléctrica clásica

Aunque la teoría fundamental de la transmisión de energía describe el transporte de la energía en términos de la interacción de los campos eléctricos y magnéticos, los sistemas de potencia casi siempre se manejan mediante la descripción de la razón de cambio de la energía con respecto al tiempo lo cual es la definición de potencia en términos de tensión y corriente [25]. Para sistemas eléctricos lineales los conceptos de potencia activa, potencia reactiva, potencia aparente, y el factor de potencia son bases fundamentales de la ingeniería eléctrica y han demostrado ser muy útiles para propósitos prácticos.

3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

Considerando un sistema eléctrico con una fuente senoidal de tensión,

$$v(t) = V \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.1)$$

y siendo la corriente eléctrica la respuesta de la tensión aplicada a una carga, tal como se muestra en (3.2),

$$i(t) = I \cos(\omega t + \beta) \quad (3.2)$$

entonces la potencia instantánea liberada hacia la carga es,

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{VI}{2} \cos(\delta) - \frac{VI}{2} \cos(2\omega t + \alpha) \quad (3.3)$$

Donde δ es el desfase angular entre $(\alpha - \beta)$. La potencia instantánea tiene dos componentes, la primera componente es un valor de potencia constante y la segunda parte es una potencia oscilante. La ecuación (3.3) se puede expresar como en (3.4),

$$p(t) = P[1 + \cos(2\omega t + \alpha)] + Q \sin(2\omega t - \alpha) \quad (3.4)$$

Siendo P la potencia promedio o potencia activa. Esta potencia está definida como la potencia útil transferida de la fuente a la carga y se puede calcular mediante la siguiente ecuación,

$$P = \frac{VI}{2} \cos(\alpha - \beta) \quad (3.5)$$

El término Q se refiere a la potencia reactiva. Esta potencia es la magnitud de la potencia de oscilación entre la fuente y la carga con un valor promedio de energía transferida igual a cero.

$$Q = \frac{VI}{2} \sin(\alpha - \beta) \quad (3.6)$$

La potencia aparente en (3.7) es definida como el producto de los valores rms de tensión y corriente. Esta potencia es la máxima potencia que puede ser transferida de la fuente a la carga con un factor de potencia unitario.

$$S = V_{rms} I_{rms} \quad (3.7)$$

El factor de potencia es la relación entre la potencia activa y la potencia aparente, este factor determina el comportamiento de la eficiencia de la transferencia de energía.

$$\gamma = \frac{P}{S} = \cos(\alpha - \beta) \quad (3.8)$$

Estos términos de potencias representan la teoría clásica de potencias y han sido utilizados hasta la actualidad. Sin embargo estos términos no pueden cuantificar experimentalmente o matemáticamente las potencias en sistemas multisenoidales y debido a esto es indispensable una nueva formulación.

3.3. Álgebra geométrica

El álgebra geométrica puede definirse simplemente especificando las reglas de multiplicación de los vectores. Se tiene que V^n existe en n -dimensiones sobre un espacio lineal. El producto geométrico de los vectores $\{\mathbf{a}\}$ y $\{\mathbf{b}\}$ o \mathbf{ab} donde \mathbf{a}, \mathbf{b} pertenece a V^n puede ser descompuesto dentro de un producto interno simétrico

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \quad (3.9)$$

y un producto externo antisimétrico

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \quad (3.10)$$

Por lo tanto, \mathbf{ab} tiene una descomposición canónica.

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (3.11)$$

El producto interno $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un escalar y el producto externo $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es llamado bivector. Geométricamente esto se puede visualizar en la figura (3.1). Considerando $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ como el área dirigida con una magnitud $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$, es igual a usar el producto escalar de un paralelogramo en la figura (3.1), con la dirección al plano en el cual se encuentra el paralelogramo

3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

denominada álgebra geométrica compleja generalizada (AGCG). Entonces \mathbb{C} es el vector espacial complejo y Cl_n el álgebra de Clifford en un espacio real de n -dimensiones V^n . Para una información completa se puede ver en [21]-[23].

Para la representación multivectorial de las señales periódicas, se tiene que la tensión instantánea se puede representar como se muestra en la ecuación (3.13).

$$v(t) = \sqrt{2} \sum_{p \in \mathbb{L} \cup \mathbb{N}} U_p \text{sen}(p\omega t + \alpha_p) \quad (3.13)$$

Esta tensión es aplicada a una carga no lineal, donde p es el orden de la armónica. La respuesta a esta excitación de tensión es la corriente y tiene un valor instantáneo dado por,

$$i(t) = \sqrt{2} \sum_{q \in \mathbb{L} \cup \mathbb{N}} I_q \text{sen}(q\omega t + \alpha_q) \quad (3.14)$$

Donde q es el orden de la armónica $i(t)$. En la figura (3.2) se muestra el circuito no lineal, el cual es alimentado por una tensión multisenoidal.

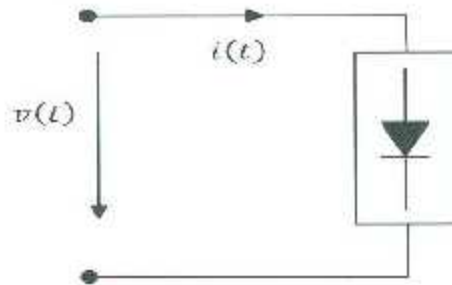


Figura 3.2: Circuito No-lineal monofásico.

Se asume que los elementos armónicos de la tensión N existen y esto tiene correspondencia con las componentes armónicas de las mismas frecuencias. Las componentes L de la fuente de tensión existen sin correspondencia con la corriente, y las componentes M de corriente existen sin la correspondencia de la tensión. Mediante la aplicación de la transformada de Fourier-Clifford [26], la tensión (3.13) y la corriente (3.14) pueden expresarse como una combinación lineal de fasores geométricos armónicos o vectores complejos.

$$\tilde{U} = \sum_p U_p \sigma_p \quad (3.15)$$

$$\tilde{I} = \sum_q I_q e^{j\varphi_q} \sigma_q \quad (3.16)$$

Siendo U_p , I_q valores rms de tensión y corriente correspondientes a los elementos armónicos respectivamente y $\varphi_k = (\alpha_k - \beta_k)$.

En AGCG, el multivector de potencia \tilde{S} es la potencia máxima que suministra la fuente a un factor de potencia unitario [22].

$$\tilde{S} = \tilde{U} \otimes \tilde{I}^* = \{\tilde{U} \cdot \tilde{I}^* \oplus \tilde{U} \wedge \tilde{I}^*\} \quad (3.17)$$

Donde \tilde{I}^* es el conjugado de la corriente. La ecuación (3.17) también se puede representar como:

$$\tilde{S} = \sum_{\substack{p \in N, M \\ q \in N, JM}} \tilde{U}_p g_{pq}^* \quad (3.18)$$

Al desarrollar el producto geométrico de (3.18) se pueden determinar las partes que conforman a la potencia aparente multivectorial. Esta potencia contiene un escalar complejo y un bivector complejo. Claramente la potencia activa o potencia promedio es:

$$|\tilde{P}| = \sum_{p \in N} U_p I_p \cos \varphi_p \quad (3.19)$$

$$|\tilde{Q}| = \sum_{p \in N} U_p I_p \sin \varphi_p \quad (3.20)$$

La potencia reactiva se muestra en (3.20) y no es realmente una cantidad física sino es simplemente el complemento geométrico de la componente activa de potencia [22]. Tenga en cuenta a partir de (3.20) la parte escalar compleja es:

$$(\tilde{P} + j\tilde{Q})\sigma_0 \quad (3.21)$$

El bivector complejo es asociado a la potencia de distorsión multivectorial que viene dada por dos componentes. La primera componente es:

$$\tilde{D}_{Lin} = \sum_{\substack{p < q \\ p, q \in N}} \{(U_p I_q e^{j\omega q} - U_q I_p e^{j\omega p}) e^{j(\alpha_p - \alpha_q)}\} \sigma_{pq} \quad (3.22)$$

$$\tilde{D}_{NoLin} = \sum_{\substack{p \in L, N, q \in M \\ p, l, q \in N}} \{U_q I_p e^{j(\alpha_p - \beta_q)}\} \sigma_{pq} \quad (3.23)$$

La suma de las componentes de las ecuaciones (3.22) y (3.23) proporciona la potencia total de distorsión que contribuye al deterioro de la calidad de la potencia y geométricamente es un bivector complejo.

$$\tilde{D} = \tilde{D}_{Lin} + \tilde{D}_{NoLin} \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) representa la distorsión total de potencia. Esta componente proporciona el nivel de energía de distorsión en el sistema. Mediante la potencia activa y reactiva representadas con un escalar complejo y la potencia de distorsión como un bivector complejo, es posible realizar un análisis de potencia en sistemas monofásicos con distorsión armónica.

3.4. Cálculo tensorial

El tensor instantáneo de potencia es una forma de cálculo e interpretación de la potencia en sistemas polifásicos, bajo las condiciones más generales de cargas asimétricas, no lineales, señales de tensión y corrientes distorsionadas, incluyendo formas de onda no estacionarias.

En [24] se propone un nuevo formalismo matemático (tensor instantáneo de potencia) utilizado para representar analíticamente y geoméricamente los conceptos de potencia en régimen multisenoidal y desbalanceado. En esta teoría las tensiones y las corrientes instantáneas son expresadas como tensores de primer orden y son utilizados para definir el tensor de potencia instantáneo. Este tensor es de segundo orden y es calculado mediante el producto tensorial o producto diádico entre los tensores instantáneos de tensión y de corriente.

3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

$$P_{ij} = V_i \otimes I_j \quad (3.25)$$

Donde, P_{ij} es el tensor instantáneo de potencia y \otimes indica el producto tensorial. Por otra parte, se ha definido una red eléctrica polifásica respecto de la dimensión del espacio vectorial en el que los tensores de tensión y corriente son determinados. En otras palabras, en el espacio R^1 se define el sistema monofásico, en el espacio R^2 el sistema bifásico, en el espacio R^3 el sistema trifásico y en el espacio R^n el sistema polifásico con n -fases y $(n+1)$ conductores.

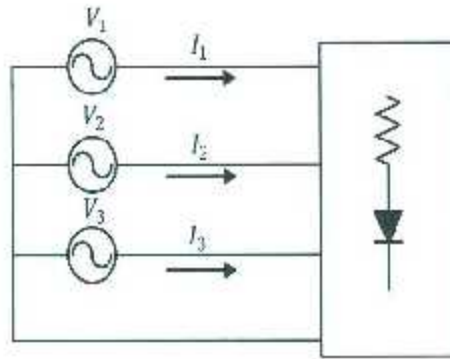


Figura 3.3: Circuito Trifásico general.

En la figura (3.3) se muestra un sistema trifásico en el cual es posible calcular el tensor de potencia instantáneo, independientemente de las condiciones en las que se encuentre el sistema. Es evidente que para sistemas de menor orden de R^3 , el tensor de potencia no proporciona suficiente información útil acerca del comportamiento del sistema.

Los tensores de primer orden de tensión y corriente para un sistema trifásico son expresados por:

$$V_i = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad I_j = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$P_{ij} = V_i \otimes I_j = \begin{bmatrix} V_1 I_1 & V_1 I_2 & V_1 I_3 \\ V_2 I_1 & V_2 I_2 & V_2 I_3 \\ V_3 I_1 & V_3 I_2 & V_3 I_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

El tensor de potencia instantáneo en (3.27), es un tensor de segundo orden instantáneo, el cual proporciona información cada instante del tiempo, así las potencias se pueden conocer en función del tiempo tal como en (3.4). Este tipo de información puede ser utilizada en análisis transitorio y muestra principalmente el desbalance del sistema y la interacción entre la carga y la fuente, independientemente de sus condiciones. Cabe destacar que la matriz resultante es la representación del tensor, pero no es el tensor, del mismo modo que un vector no son sus componentes, ya que estas pueden cambiar en una transformación de coordenadas, aunque el siga siendo el mismo.

3.5. Algebra de cuaterniones

El descubrimiento de los cuaterniones por W.R. Hamilton, en 1843 permitió la generalización de los números complejos. La importancia de los cuaterniones unitarios (cuaterniones con norma igual a uno), radica en que estos permiten caracterizar el espacio de configuración de la orientación de un cuerpo en el espacio, de la misma forma que los números complejos unitarios lo hacen para la orientación en el plano [27].

Un cuaternion es básicamente un número compuesto por cuatro reales $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ que tiene la forma general:

$$q = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H} \quad (3.28)$$

Donde $1, i, j, k$ son los elementos base del espacio de los cuaterniones (denotado por \mathbb{H} en honor a Hamilton) que deben satisfacer los productos básicos definidos en la tabla (3.1), donde \otimes se usa para representar la multiplicación de los cuaterniones.

Tabla 3.1: Producto básico del álgebra de Cuaterniones.

\otimes	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

En la tabla (3.1) se define el álgebra de cuaterniones, que es asociativa pero no conmutativa. Un cuaternion se puede expresar también como un vector.

$$[a \ b \ c \ d]^T \in \mathbb{H} \quad (3.29)$$

O como un arreglo de un escalar y un vector.

$$[a \ v^T]^T \in \mathbb{H} \quad (3.30)$$

Los cuaterniones en la actualidad tiene un gran impacto en la ingeniería, principalmente en robótica, pero una de las mayores aplicaciones de los cuaterniones inicialmente fue al electromagnetismo, donde se trabajaron con las ecuaciones de Maxwell. Los cuaterniones demostraron grandes aportaciones en la física electromagnética. Debido al gran impacto de los cuaterniones en electromagnetismo, se puede relacionar la teoría de campos con la teoría de potencias y así encontrar una representación de potencias eléctricas en cuaterniones adecuada a los principios electromagnéticos fundamentales.

Así como en el plano complejo se pueden definir corrientes y tensiones, en cuaterniones se pueden definir tensiones y corrientes en un plano ij . Entonces la tensión en cuaternion v_q se expresa de la siguiente manera:

$$v_q = V \cos(\beta)i + V \sin(\beta)j \quad (3.31)$$

La corriente en cuaternion i_q se expresa de la siguiente manera:

$$i_q = I \cos(\alpha)i + I \sin(\alpha)j \quad (3.32)$$

Mediante los números complejos se puede calcular la potencia compleja, tan solo conociendo los fasores de tensión y corriente. Similarmente en cuaterniones se puede calcular esta potencia mediante el producto de cuaterniones entre el cuaternion de tensión y el conjugado del cuaternion de corriente, como se muestra en (3.33):

$$S_q = v_q \otimes \tilde{i}_q \quad (3.33)$$

3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

Obteniendo cuaternion de potencia compleja se puede determinar la potencia activa y reactiva del sistema, tal como en (3.34).

$$S_q = VI[\cos(\beta - \alpha) - \sin(\beta - \alpha)k] \quad (3.34)$$

En la ecuación (3.34) existen dos componentes, la primera componente es la parte escalar del cuaternion y corresponde a la potencia activa, la segunda componente corresponde a la potencia reactiva y es perpendicular a las componentes de los cuaterniones de tensión y de corriente.

La representación de los cuaterniones también se puede realizar en forma matricial de tal manera que las potencias pueden expresarse como:

$$S_q = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + Q \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

donde la potencia activa P es $VI\cos(\beta - \alpha)$ y la potencia reactiva Q es $VI\sin(\beta - \alpha)$. Este tipo representación de potencias puede llegar a aplicarse a sistemas monofásicos lineales, trifásicos balanceados y desbalanceados, pero aun no es implementada a la aplicación al cálculo de potencias en ambientes armónicos. El principal reto del álgebra de cuaterniones es demostrar su aplicación a sistemas eléctricos distorsionados, si esto no es posible este formalismo se podría descartar ya que no proporcionaría diferente información que lo que se puede conocer mediante simples números complejos.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se introdujo brevemente al estado del arte de distintas herramientas matemáticas enfocadas a la teoría de potencias eléctricas. También se mencionan los alcances y las limitaciones de cada uno de estos formalismos. Actualmente se encuentra trabajando en diversas teorías de potencias eléctricas mediante diferentes formalismos matemáticos con el fin de determinar una teoría general. El álgebra de Clifford, el cálculo Tensorial y el álgebra de cuaterniones son unas de estas teorías y se presentan de manera

3. Formalismos matemáticos a la teoría de potencias eléctricas

muy general en este capítulo.

Se concluye que el álgebra geométrica puede ser una buena herramienta matemática para proponer una teoría potencias eléctricas en sistemas eléctricos con contenido armónico. Esto es debido a que el álgebra geométrica está basada en fundamentos matemáticos rigurosos y tiene gran aplicación en la física electromagnética. Sin embargo esta matemática debe validar los términos físicos que propone a la teoría de potencia, ya que se pueden tener distintas versiones según los criterios de los autores que manipulen el álgebra geométrica.

Actualmente el cálculo tensorial es aplicado a sistemas trifásicos y polifásicos con el fin de conocer principalmente desequilibrios en el sistema. Pero también el cálculo tensorial puede ser aplicado a la teoría de potencias en ambientes armónicos en sistemas monofásicos, considerando ciertas modificaciones en su formulación. No obstante, la manipulación matemática del cálculo tensorial influirá de manera significativa al resultado esperado de la teoría de potencias.

Finalmente el álgebra de cuaterniones no contribuye significativamente a la teoría de potencias actualmente, ya que la misma información puede ser adquirida mediante números complejos como se ha realizado desde la teoría de Steinmetz. Sin embargo es necesario llevar todo este trabajo al área de la experimentación y comprobar los valores reales de potencia que refutaran o comprobaran estas teorías así como los resultados obtenidos en este capítulo.

Capítulo 4

Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

En este capítulo se presenta el desarrollo matemático y consideraciones físicas que intervienen en la teoría de potencia eléctrica en régimen multisenoidal. También se analiza su resultado y se comparan con las principales teorías más relevantes hasta la actualidad.

4.1. Introducción

La teoría de potencia eléctrica en régimen multisenoidal se basa en dos grandes áreas. La primera área corresponde a la física de los fenómenos electromagnéticos que interviene en el flujo de potencia, esto dado por el Vector de Poynting. La segunda área reside en la manipulación matemática de la serie trigonométrica de Fourier y el estudio de diferentes formalismos matemáticos. El término multisenoidal hace referencia las múltiples señales que componen la serie de Fourier.

La teoría es basada en el dominio del tiempo y descompone la potencia instantánea en dos componentes de potencia tal como se realiza mediante el vector de Poynting en (2.1). La primera componente corresponde a la potencia consumida por la carga y la segunda componente proporciona la información de la variación energética de los campos eléctricos

y magnéticos en el sistema. Esta teoría establece que no existe interacción entre las componentes de potencia al contrario del modelo tradicional en el dominio de la frecuencia, que afirma que las componentes interactúan entre sí y son ortogonales entre ellas.

Las definiciones de Steinmetz de las potencias activas, reactiva, aparente para circuitos lineales con una fuente de excitación senoidal fueron definidas en 1897 [1]. Él observó que estas componentes estaban en cuadratura, entonces $S^2 = P^2 + Q^2$. Debido a esta observación, los primeros investigadores de la teoría de potencias, entre ellos, Budeanu [3], Shepard [28] y otros extendieron esta definición para circuitos no lineales. Budeanu encontró arbitrariamente un término extra a la suma, llamado potencia de distorsión D y lo agregó como una nueva componente ortogonal $S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$. Sin embargo esto fue solamente una manipulación para que se cumpliera la ortogonalidad entre las componentes propuesta por Budeanu.

La controversia o polémica de las definiciones de los términos que intervienen en la teoría de potencias lleva alrededor de 100 años en discusión [29]-[30]. Sin embargo no se ha llegado a determinar una teoría única, pero se continúa trabajando en ello.

En la actualidad se encuentra el estándar IEEE 1459-2010 [12] el cual proporciona la información necesaria para el cálculo de potencia eléctrica bajo cualquier condición. Pero aun este estándar es solo una recomendación de cómo medir o calcular las potencia eléctricas y no representa una teoría única para el cálculo de potencia eléctrica en general.

En la literatura existen modelos teóricos en el dominio del tiempo para sistemas no lineales, los cuales fueron propuestos por Page [31] y Fillipski en [32] principalmente. Sin embargo estas propuestas carecen de sentido físico y principalmente sus ventajas se atribuyen a herramientas matemáticas. Entonces es necesario contar con un equilibrio entre la matemática y la física, de tal manera que la matemática obedezca a la física y se pueda justificar cada uno de los términos energéticos.

4.2. Formulación matemática de la teoría

Considerando una fuente monofásica de tensión multisenoidal periódica y variante en el tiempo, aplicada a una carga lineal o no lineal la tensión se puede representar mediante una serie de Fourier tal como en (4.1).

$$v(t) = V_0 + \sum_k V_k \cos(k\omega t - \beta_k) \quad (4.1)$$

La respuesta de la excitación de tensión aplicada a la carga, es la corriente. Esta corriente (4.2) será también multisenoidal y su respuesta dependerá fundamentalmente de la fuente y la carga.

$$i(t) = I_0 + \sum_n I_n \cos(n\omega t - \delta_n) \quad (4.2)$$

La Potencia es la energía (o trabajo) por unidad de tiempo. Esta potencia indica que tan rápido se está gastando la energía.

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (4.3)$$

Por definición la potencia instantánea es el producto de la tensión instantánea y la corriente instantánea, así la potencia instantánea multisenoidal se deduce a partir de (4.3)

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t) \left(I_0 + \sum_n I_n \cos(n\omega t - \delta_n) \right) \quad (4.4)$$

La potencia instantánea multisenoidal mostrada en (4.4), se puede expresar como el producto instantáneo de las componentes de directa, fundamental y de orden multisenoidal mayor a la fundamental de tensión y corriente de la siguiente manera.

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

$$p(t) = v(t)i(t) = \left(V_0 + v(t)_1 + v(t)_m \right) \left(i_0 + i(t)_1 + i(t)_m \right) \quad (4.5)$$

Donde $v(t)_1$ y $i(t)_1$ son los términos de tensión y corriente instantánea a la frecuencia fundamental respectivamente y son mostrados en las ecuaciones (4.6) y (4.7).

$$v(t)_1 = V_1 \cos(\omega t + \beta_1) \quad (4.6)$$

$$i(t)_1 = I_1 \cos(\omega t + \delta_1) \quad (4.7)$$

Las tensiones y corrientes multisenoidales mayores a la componente fundamental son representadas por medio de $v(t)_m$ y $i(t)_m$ respectivamente.

$$v(t)_k = \left(\sum_{k \neq 1} V_k \cos(k\omega t - \beta_k) \right) \quad (4.8)$$

$$i(t)_a = \left(\sum_{n \neq 1} I_n \cos(n\omega t - \delta_n) \right) \quad (4.9)$$

La ecuación (4.5) se puede expresar en la suma de nueve términos de potencia los cuales interactúan entre las componentes de directa, fundamental y componentes multisenoidales.

$$p(t) = P_0 + p(t)_{01} - p(t)_{0m} + p(t)_{10} - p(t)_{11} + p(t)_{1m} + p(t)_{m0} - p(t)_{m1} + p(t)_{mm} \quad (4.10)$$

El primer término de la potencia instantánea es la potencia de directa, este término es debido a las componentes de directa de tensión y corriente.

$$P_0 = V_0 I_0 \quad (4.11)$$

El término de potencia $p(t)_{01}$ corresponde al producto de la componente de tensión de directa y la componente fundamental de la corriente, tal como se muestra en (4.12).

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

$$p(t)_{01} = V_0 I_1 \cos(\omega t + \delta_1) \quad (4.12)$$

La ecuación (4.12) puede ser expresada en dos componentes ortogonales entre sí, mediante identidades trigonométricas y procedimientos algebraicos. Esto con el fin de relacionar estas componentes con cantidades de potencia física.

$$p(t)_{01} = V_0 I_1 \cos \delta_1 \cos \omega t - V_0 I_1 \sin \delta_1 \sin \omega t \quad (4.13)$$

La componente de potencia $p(t)_{10}$ corresponde al producto de la componente fundamental de tensión y la componente de directa de corriente, tal como se muestra en (4.14).

$$p(t)_{10} = V_1 I_0 \cos(\omega t - \beta_1) \quad (4.14)$$

Simplificando la ecuación (4.14) se tiene lo siguiente.

$$p(t)_{01} = V_1 I_0 \cos \beta_1 \cos \omega t - V_1 I_0 \sin \beta_1 \sin \omega t \quad (4.15)$$

Para la componente de potencia a la frecuencia fundamental $p(t)_1$ se tiene el producto de tensión y corriente fundamental. Esto es lo mismo que se realiza en la teoría de potencia clásica y se puede ver en (4.16).

$$p(t)_1 = V_1 I_1 \cos(\omega t - \beta_1) \cos(\omega t + \delta_1) \quad (4.16)$$

La descomposición de la potencia fundamental en dos términos ortogonales es la siguiente:

$$p(t)_1 = \frac{V_1 I_1}{2} \cos(\beta_1 - \delta_1) [1 + \cos(2\omega t + 2\beta_1)] + \frac{V_1 I_1}{2} \sin(\beta_1 - \delta_1) \sin(2\omega t + 2\beta_1) \quad (4.17)$$

El primer término de la potencia instantánea fundamental es la potencia activa instantánea la cual cuantifica el trabajo realizado por la potencia instantánea fundamental. El segundo término es la potencia reactiva instantánea a la frecuencia fundamental donde la amplitud de esta potencia se denomina potencia reactiva en [33] y en gran parte de la

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

literatura. La potencia reactiva cuantifica las variaciones energéticas del campo eléctrico y magnético que interactúa en el sistema.

El producto entre la componente de tensión de directa y la componente multisenoidal de corriente lleva en nombre de potencia $p(t)_{0m}$ y es mostrada en la ecuación (4.18). Así también esta ecuación se puede descomponer en dos componentes ortogonales.

$$p(t)_{0m} = \sum_{n \neq 1} V_0 I_n \cos(n\omega t + \delta_n) \quad (4.18)$$

$$p(t)_{0m} = \sum_{n \neq 1} V_0 I_n \cos \delta_n \cos n\omega t - \sum_{n \neq 1} V_0 I_n \sin \delta_n \sin n\omega t \quad (4.19)$$

La potencia que existe entre la tensión multisenoidal y la componente de corriente de directa es mostrada en la ecuación (4.20) y su descomposición ortogonal en (4.21).

$$p(t)_{m0} = \sum_{k \neq 1} V_k I_0 \cos(k\omega t + \beta_k) \quad (4.20)$$

$$p(t)_{m0} = \sum_{k \neq 1} V_k I_0 \cos \beta_k \cos k\omega t - \sum_{k \neq 1} V_k I_0 \sin \beta_k \sin k\omega t \quad (4.21)$$

El término de potencia que involucra la tensión a frecuencia fundamental y la corriente multisenoidal es un término más complejo ya que interactúan distintas frecuencias con la frecuencia fundamental.

$$p(t)_{1m} = \sum_{n \neq 1} V_1 I_n \cos(\omega t + \beta_1) \cos(n\omega t + \delta_n) \quad (4.22)$$

Su descomposición ortogonal es de la siguiente manera:

$$p(t)_{1m} = \sum_{n \neq 1} \frac{V_1 I_n}{2} \{ \cos(\beta_1 - \delta_n) \cos[(1-n)\omega t + 2\beta_1] + \sin(\beta_1 + \delta_n) \sin[(1-n)\omega t + 2\beta_1] \} - \sum_{n \neq 1} \frac{V_1 I_n}{2} \{ \cos(\beta_1 - \delta_n) \cos[(1+n)\omega t + 2\beta_1] - \sin(\beta_1 + \delta_n) \sin[(1+n)\omega t + 2\beta_1] \} \quad (4.23)$$

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

De manera similar, la potencia instantánea $p(t)_{m1}$ puede encontrarse entre el producto de la corriente fundamental y la tensión multisenoidal, como en (4.25).

$$\begin{aligned}
 p(t)_{m1} = & \sum_{k \neq 1} \frac{V_k I_1}{2} \{ \cos(\beta_k + \delta_1) \cos[(1-k)\omega t + 2\beta_k] + \text{sen}(\beta_k + \delta_1) \text{sen}[(1-k)\omega t + 2\beta_k] \} + \\
 & \sum_{k \neq 1} \frac{V_k I_1}{2} \{ \cos(\beta_k - \delta_1) \cos[(1+k)\omega t + 2\beta_k] + \text{sen}(\beta_k - \delta_1) \text{sen}[(1+k)\omega t + 2\beta_k] \}
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

El producto entre la tensión y la corriente multisenoidal determina la potencia instantánea multisenoidal, la cual es una potencia que incluye la interacción de todos los componentes armónicos, diferentes de la frecuencia fundamental y de la componente de directa. Esta potencia incluye términos multisenoidales de potencia activa y potencia reactiva instantánea.

$$\begin{aligned}
 p(t)_{m1} = & \sum_{m \neq 1} \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(\beta_m + \delta_m) [1 + \cos(2m\omega t - 2\beta_m)] - \text{sen}(\beta_m + \delta_m) \text{sen}(2m\omega t + 2\beta_m) \} \\
 & \sum_{\substack{k \neq 1, n \neq 1 \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k - \delta_n) \cos[(k-n)\omega t - 2\beta_k] + \text{sen}(\beta_k - \delta_n) \text{sen}[(k+n)\omega t + 2\beta_k] \} \\
 & \sum_{\substack{k \neq 1, n \neq 1 \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k + \delta_n) \cos[(k-n)\omega t - 2\beta_k] + \text{sen}(\beta_k + \delta_n) \text{sen}[(k-n)\omega t + 2\beta_k] \}
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

Los términos de la ecuación (4.10) se pueden simplificar considerando que existe simetría de media onda en la tensión y corriente, así la componente de directa no existe. Es importante mencionar que una de las características de los sistemas eléctricos es que en la mayoría de los casos existe simetría de media onda y el contenido armónicos en números impares típicamente.

Considerando lo anterior, la potencia instantánea puede ser expresada en dos términos como se muestra en la siguiente ecuación.

$$p(t) = p(t)_a + p(t)_r \quad (4.26)$$

El primer término de la parte derecha de la ecuación (4.26) corresponde a la potencia activa instantánea y se muestra en la ecuación (4.27).

$$p(t)_a = \sum_m \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(\beta_m - \delta_m) [1 + \cos(2m\omega t + 2\beta_m)] \} - \sum_{\substack{k, n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k - \delta_n) [\cos((k-n)\omega t + 2\beta_k)] \} - \sum_{\substack{k, n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k + \delta_n) [\cos((k-n)\omega t + 2\beta_k)] \} \quad (4.27)$$

Aplicando el teorema del valor medio de forma integral a la ecuación (4.26) se puede determinar la potencia activa multisenoidal la cual incluye la frecuencia fundamental y los términos armónicos mayores a la fundamental.

$$P_M = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (4.28)$$

$$P_M = \sum_m \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(\beta_m - \delta_m) \} \quad (4.29)$$

Esta potencia P_M es relacionada con el vector de Poynting en la ecuación (2.19). Para el cálculo de potencia activa en régimen multisenoidal no existe gran discrepancia en su cálculo y su medición. Incluso la mayoría de los investigadores concuerdan con el sentido físico de esta potencia y su expresión matemática.

La potencia reactiva instantánea para sistemas multisenoidales es mostrada en la ecuación (4.30).

$$\begin{aligned}
 p(t)_r = & \sum_m \frac{V_m I_m}{2} \{ \text{sen}(\beta_m - \delta_m) \text{sen}(2m\omega t - 2\beta_m) \} + \\
 & \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \text{sen}(\beta_k - \delta_n) [\text{sen}((k+n)\omega t + 2\beta_k)] \} - \\
 & \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \text{sen}(\beta_k - \delta_n) [\text{sen}((k-n)\omega t - 2\beta_k)] \}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

La potencia reactiva instantánea multisenoidal de la ecuación (4.30) contiene tres términos: El primer término contiene las componentes de tensión y corrientes a la misma frecuencia, el segundo término tiene una frecuencia de la suma de la componentes armónicas $(k+n)$ y la frecuencia del tercer término es la resta de los componentes armónicos de tensión y corriente $(k-n)$.

La principal problemática referente a la teoría de potencia eléctrica en régimen multisenoidal radica en la definición de la potencia reactiva y es común encontrar en la literatura que la potencia reactiva se calcula mediante la amplitud del primer término de la ecuación (4.30), en [35]-[40]. Sin embargo esto no es correcto, debido a que no se consideran todas las componentes de la potencia reactiva instantánea, además esta potencia carece de sentido físico debido a que no representa congruencia con la variación energética de los campos eléctricos y magnéticos propuesta por el vector de Poynting. Por último no representa el valor máximo de la potencia reactiva instantánea con un valor promedio igual a cero, propuesto en la teoría clásica de Steinmetz [1], incluso no permite realizar una estimación para la compensación del factor de potencia.

Para poder dar un sentido físico a la potencia reactiva se considera el segundo término del teorema de Poynting en (2.1), este teorema considera la variación energética de los campos eléctricos y magnéticos. Los términos de potencia referentes al teorema de Poynting se encuentran en la ecuación (2.16).

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

Considerando la variación de campos energéticos en el tiempo, se tiene que estos campos varían temporalmente y su magnitud es dada por la suma de señales eléctricas a distintas frecuencias, distintos ángulos de desplazamiento y distintas amplitudes.

La propuesta de esta teoría para la solución del cálculo de potencia reactiva es determinar el valor máximo de la potencia reactiva instantánea propuesta en (4.30). Esto se justifica si se considera la variación energética de los campos según el vector de Poynting. A pesar que la variación de la magnitud de los campos es temporal es evidente que el valor máximo de esa variación es la denominada potencia reactiva. Además esto concuerda con la definición propuesta por Steinmetz y Fortescue para la potencia reactiva en la teoría clásica de potencia [36].

La potencia aparente multisenoidal se determina mediante el producto de los valores rms de tensión y corriente en (4.31).

$$S_M = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_k V_k^2} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_n I_n^2} \quad (4.31)$$

Es importante mencionar que no existe diferencia numérica significativa para el cálculo y medición de potencia aparente con distorsión armónica, por lo tanto la mayoría de los investigadores coinciden con este cálculo. La única diferencia es la conceptualización física y los arreglos matemáticos utilizados para el cálculo de la potencia aparente, pero al final los resultados son los mismos.

Mediante la potencia aparente se puede calcular el factor de potencia multisenoidal, el cual es la relación que existe entre la potencia activa y la potencia aparente.

$$F.P. = \frac{P_M}{S_M} = \frac{\sum_m \frac{V_m I_m}{2} \cos(\beta_m - \delta_m)}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_k V_k^2} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_n I_n^2}} \quad (4.32)$$

La interpretación del factor de potencia en (4.32) es la de un indicador del incremento de pérdidas de transmisión y distribución debido a las particularidades de la carga. Sin embargo para realizar una compensación o estimar el tamaño de las máquinas eléctricas debido a este factor de potencia se tiene que realizar un riguroso estudio acerca del contenido armónico.

4.3. Comparación entre otras teorías.

Una manera que poner a prueba la teoría propuesta en este trabajo con otros investigadores es mediante ejemplos numéricos. Iniciemos con definir tensiones y corriente medidas aplicadas a las terminales de una carga monofásica con los siguientes valores de tensión y corrientes instantáneas.

$$v(t) = \sqrt{2}[100\text{sen}(\omega t) + 15\text{sen}(3\omega t + 10) - 20\text{sen}(7\omega t + 110)]$$

$$i(t) = \sqrt{2}[60\text{sen}(\omega t - 30) - 60\text{sen}(3\omega t + 105) + 30\text{sen}(7\omega t + 204)]$$

Los valores rms de cada componente multisenoidal son:

$$V_1 = 100V; V_3 = 15V; V_7 = 20V;$$

$$I_1 = 60A; I_3 = 60A; I_7 = 30A;$$

Los resultados numéricos de las componentes de potencia se muestran en las siguientes tablas individuales (4.1) a (4.6) para cada teoría y al final se comparan todas la teorías en una tabla general (4.7). Se consideran cinco de los principales investigadores en la teoría de potencias eléctricas así como la teoría propuesta en este trabajo de investigación.

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

- Teoría de potencia propuesta por Budeanu.

La teoría de Budeanu contiene cuatro términos de potencia y es una de las teorías más controversiales y utilizadas desde su propuesta.

Tabla 4.1: Resultado de potencias según la teoría de Budeanu.

S	9277	VA
P	5076	W
Q_B	1505	var
D_B	7618	var

- Teoría de potencia propuesta por Fryze.

La teoría de Fryze es una teoría basada en descomposiciones ortogonales de corrientes y ha sido utilizada como base para el desarrollo de muchas otras teorías entre las que se encuentra la teoría de Czarnecki.

Tabla 4.2: Resultado de potencias según la teoría de Fryze.

S	9277	VA
P	5076	W
Q_F	7765	var

- Teoría de potencia propuesta por Depronbrock.

La teoría de Depronbrock propone ocho componentes de potencia que interactúan entre ellas. Así también esta teoría ha sido tomada como referencia para desarrollar nuevas propuestas de potencia, debido a sus consideraciones entre la carga y la fuente.

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

Tabla 4.3: Resultado de potencias según la teoría de Depronbrock.

S	9277	VA
P	5076	W
P_{al}	4777	W
P_{oH}	299	W
D_C	1731	var
D_R	6909	var
Q_1	3000	var
Q_c	750	var

- Teoría de potencia propuesta por Czarnecki.

Czarnecki propone su teoría basado en los trabajos de Fryze y Depronbrock, además utilizar topología de circuitos para representar las componentes de potencia.

Tabla 4.4: Resultado de potencias según la teoría de Czarnecki.

S	9277	VA
P	5076	W
D_s	1806	var
Q_r	7552	var

- Teoría de potencia propuesta por Emanuel.

La teoría propuesta por Emanuel contiene diez términos de potencia los cuales según este autor tienen en su mayoría significado físico. Emanuel considera que el contenido de distorsión armónica no afecta a la componente reactiva y por consiguiente solo considera la potencia reactiva fundamental.

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

Tabla 4.5: Resultado de potencias según la teoría de Emanuel.

S	9277	VA
S_N	7075	VA
S_I	6000	VA
S_H	1677	VA
P_I	5196	W
P_H	-120.29	W
Q_I	3000	var
D_I	6708	var
D_V	1500	var
D_H	1677	var

- Teoría de potencia Multisenoidal.

Esta teoría considera solo tres componentes de potencia. Las cuales son asociada mediante variables físicas de la teoría de campos electromagnéticos.

Tabla 4.6: Resultado de potencias según la teoría Multisenoidal.

S_M	9277	VA
P_M	5076	W
Q_M	8785	var

Los resultados mostrados en las tablas (4.1)-(4.6), muestran que el cálculo de la potencia activa y aparente para todos los investigadores es numéricamente igual. Sin embargo el valor de potencia reactiva y potencia de distorsión no son iguales. Así mismo los términos que intervienen en la teoría son diferentes para cada autor.

En la tabla (4.7) se pueden comparar todas las teorías propuestas y cada uno de sus términos. En esta tabla se hace evidente la diferencia en el término de potencia reactiva y también es claro que no para todas las teorías la potencia de distorsión es relevante.

4. Teoría de potencias eléctricas en sistemas multisenoidales

Tabla 4.7: Comparación entre las teorías con mayor relevancia.

Budeanu	Fryze	Depronbrock	Czarnecki	Fmanuel	Multisenoidal
$S = 9277$	$S = 9277$	$S = 9277$	$S = 9277$	$S = 9277$	$S_M = 9277$
$P = 5076$	$P = 5076$	$P_{aI} = 4777$	$P = 5076$	$S_N = 7075$	$P_M = 5076$
$Q_R = 1505$	$Q_P = 7765$	$P_{aH} = 299$	$D_s = 1806$	$S_1 = 6000$	$Q_{sM} = 9785$
$D_B = 7618$		$D_C = 1731$	$Q_r = 7552$	$P_1 = 5196$	
		$D_R = 6909$		$P_H = -120.3$	
		$Q_1 = 3000$		$Q_1 = 3000$	
		$Q_c = 750$		$D_I = 6708$	
				$D_V = 1500$	
				$D_B = 1677$	

4.4. Conclusiones

Las propiedades de la potencia son especificadas en términos de varios componentes tal como la potencia activa, reactiva y aparente. En el caso de los sistemas monofásicos con cargas lineales y excitadas con tensiones senoidales, estas componentes son bien definidas y utilizadas en la práctica. Sin embargo el incremento de cargas no lineales, cargas de electrónica de potencia, variadores de velocidad y fundidoras de arco eléctrico entre otras, han generado ondas de tensión y corriente distorsionadas o multisenoidales. Como resultado de esto, las componentes de potencia clásica no proporcionan la información necesaria acerca de la variación energética en sistema.

En este capítulo se propuso una teoría para el cálculo potencias en régimen multisenoidal. Esta teoría es desarrollada matemáticamente y respaldada por el teorema de Poynting. También se presentó un ejemplo numérico. Los resultados presentados en la comparación con otros investigadores, nos arrojan información congruente en los términos de potencia activa y potencia aparente. Sin embargo el valor de potencia reactiva es diferente para todos los investigadores.

Capítulo 5

Pruebas experimentales

En el presente capítulo se presentarán los resultados obtenidos de la experimentación para validar y analizar las componentes de potencias propuestas en la teoría de potencia en régimen multisenoidal. Primeramente se presenta la potencia activa multisenoidal en relación con la ley de Joule y se analizan sus resultados. Posteriormente se analiza el término de potencia reactiva multisenoidal en relación con la ley de inducción de Faraday.

5.1. Introducción

Los conceptos de potencia activa y potencia reactiva son puestos a prueba en este capítulo mediante pruebas experimentales.

Las pruebas experimentales se realizaron con un sistema de adquisición de muestreo básico entre una computadora y una tarjeta DAQ NI USB-6008 utilizando el entorno de LabVIEW. Las mediciones de las señales de tensión y corriente son medidas mediante transductores de efecto Hall para tensión LV 25-NP y corriente LTS 25-NP respectivamente. Se utilizó una fuente programable de alimentación de tensión Agilent-6813B (AC Power Sources / Power Analyzers) para la generación de formas de onda de tensión multisenoidal. La configuración del sistema de adquisición se muestra en la siguiente figura.

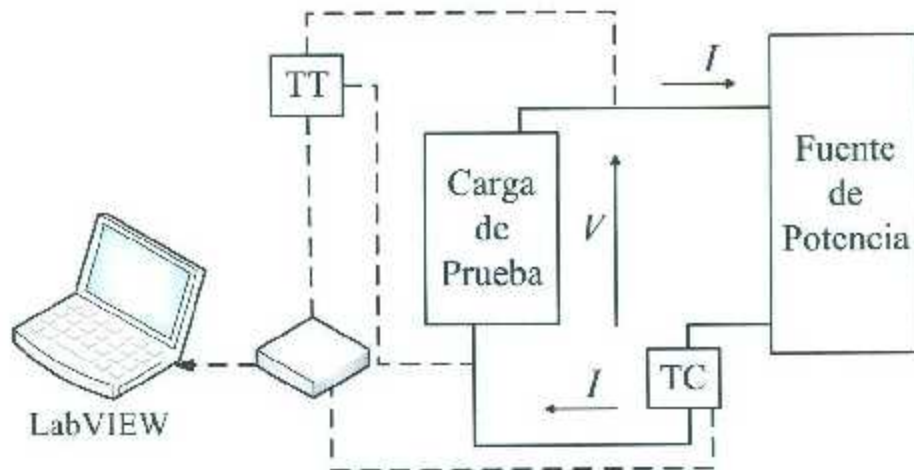


Figura 5.1: Configuración del sistema de adquisición de potencia instantánea.

En la figura (5.1) la corriente que sale y regresa de la fuente es representada por I y la tensión V es la tensión que proporciona la fuente a la carga. Los términos TT y TC son transductores de tensión y corriente respectivamente, estos transductores son utilizados para sensar las señales de tensión y corriente. Las señales de los transductores son adquiridas mediante la tarjeta DAQ NI USB-6008 y enviadas a la computadora para su procesamiento en LabVIEW.

El análisis espectral de las señales de tensión y corriente se realizó utilizando una transformada rápida de Fourier (FFT) en el entorno de LabVIEW. Mediante el análisis de las señales de tensión y corriente se pudo determinar la potencia instantánea, potencia activa y reactiva. Así también se pudo determinar los valores rms de tensión y corriente para el cálculo de potencia aparente.

Las pruebas realizadas en este trabajo consideran la aplicación de señales distorsionadas a cargas resistivas e inductivas. El principal objetivo de estas pruebas es calcular y medir adecuadamente los términos de potencias activa, reactiva y aparente de la teoría multiespectral, así como también relacionar estos términos con fenómenos físicos.

5.2. Potencia activa multisenoidal y la ley de Joule

Para establecer una relación física entre la componente de potencia activa multisenoidal y la ley de Joule es necesario conocer lo que establece la ley de Joule.

La ley de Joule afirma que cuando una corriente pasa por una resistencia, la energía convertida en calor es igual a la cantidad de carga que circula por la diferencia de potencial en la resistencia. La cantidad de calor por unidad de tiempo o potencia consumida es igual al cuadrado de la intensidad por la resistencia [37].

$$Q \propto I^2 R t \quad (5.1)$$

Donde $I^2 R$ es la potencia disipada P en un elemento resistivo.

Considere un circuito eléctrico puramente resistivo, con una tensión excitatriz multisenoidal como el que se muestra en la figura (5.2). La tensión aplicada a la carga es (5.2) y tiene una respuesta de corriente multisenoidal tal como en (5.3).

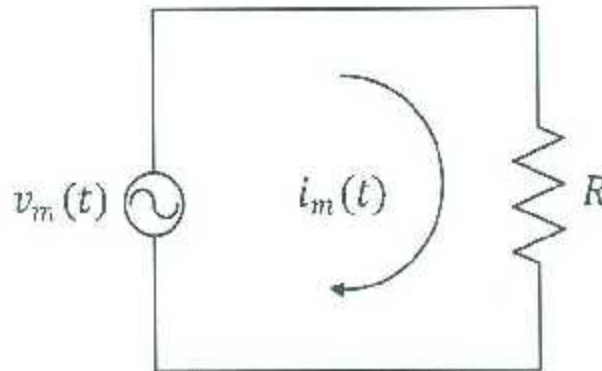


Figura 5.2: Circuito eléctrico multisenoidal con carga resistiva.

$$v(t)_m = \sum_m V_m \cos(m\omega t + \beta_m) \quad (5.2)$$

$$i(t)_m = \sum_m \frac{V_m}{R} \cos(m\omega t - \beta_m) \quad (5.3)$$

Para calcular la potencia instantánea consumida por la carga resistiva, se desarrolla el producto instantáneo entre la tensión y la corriente como en (5.4).

$$\begin{aligned}
 p(t)_m = & \sum_m \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(\beta_m - \delta_m) [1 + \cos(2m\omega t + 2\beta_m)] \} + \\
 & \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k - \beta_n) [\cos((k+n)\omega t + 2\beta_k)] \} + \\
 & \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k + \beta_n) [\cos((k-n)\omega t + 2\beta_k)] \}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la ecuación (5.4), se puede determinar la potencia activa P o potencia consumida por la carga resistiva .

$$P = \sum_m \frac{V_m I_m}{2} \cos(\beta_m - \delta_m) \tag{5.5}$$

Para comprobar que la ley de Joule cumple con la potencia activa P , se desarrolla el cuadrado de la corriente instantánea por la resistencia y se calcula la potencia instantánea según la ley de Joule en (5.6).

$$p(t)_m = i(t)_m^2 R = \left(\sum_m \frac{V_m}{R} \cos(m\omega t - \beta_m) \right)^2 R \tag{5.6}$$

Al desarrollar el producto entre el cuadrado de la corriente y resistencia se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 p(t)_m = & \sum_m \frac{V_m^2}{2R} \{ \cos(\beta_m - \beta_m) [1 + \cos(2m\omega t - 2\beta_m)] \} + \\
 & \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k V_n}{2R} \{ \cos(\beta_k - \beta_n) [\cos((k+n)\omega t + 2\beta_k)] \} + \\
 & \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k V_n}{2R} \{ \cos(\beta_k + \beta_n) [\cos((k-n)\omega t - 2\beta_k)] \}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Puesto que la tensión V_m es igual al cociente de la corriente I_m entre R y así mismo para V_n es igual al cociente de I_n entre R se tiene que la ecuación (5.8) es igual a la solución de la ecuación (5.4).

$$\begin{aligned}
p(t)_m = & \sum_m \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(\beta_m - \beta_m) [1 - \cos(2m\omega t + 2\beta_m)] \} + \\
& \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k - \beta_n) [\cos((k-n)\omega t + 2\beta_k)] \} + \\
& \sum_{\substack{k,n \\ k \neq n}} \frac{V_k I_n}{2} \{ \cos(\beta_k - \beta_n) [\cos((k+n)\omega t + 2\beta_k)] \}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la ecuación (5.8) se deduce que la potencia activa es la misma a la calculada en (5.5). Esta potencia activa es consumida por la carga resistiva y convertida en calor.

El flujo de potencia para un elemento resistivo es el mostrado en la figura (5.3), donde P es la potencia disipada por la resistencia y convertida en calor y $p(t)_{os}$ es la potencia de oscilación que existe entre la fuente y la resistencia.

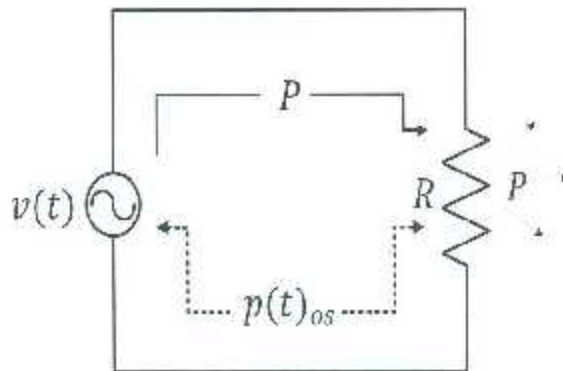


Figura 5.3: Flujo de potencia en un circuito con una carga lineal resistiva.

Para cuantificar y encontrar una relación física entre la potencia consumida por la resistencia y el calor disipado por la misma se plantea lo siguiente:

Considere una resistencia eléctrica en un sistema aislado, la cual puede ser alimentada por tensiones senoidales o multisenoidales. Esta resistencia consume cierta potencia que se transforma en calor. El sistema de prueba se muestra en la figura (5.4).

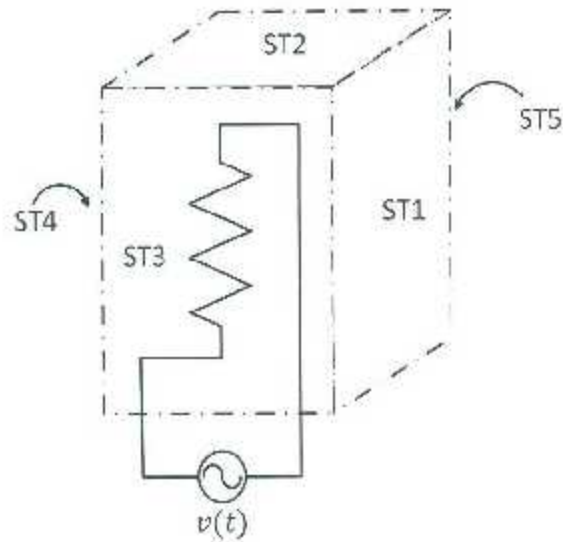


Figura 5.4: Sistema de prueba de temperatura en resistencia eléctrica.

Los términos ST1, ST2, ST3, ST4 Y ST5 de la figura (5.4), son sensores de temperatura colocados en el sistema donde se encuentra la carga resistiva con el fin de capturar información de temperaturas a diferentes potencia y con diferentes señales de tensión. La señal de los sensores es adquirida mediante la tarjeta DAQ NI USB-6008 en el entorno LabVIEW.

Es importante resaltar que los fenómenos térmicos son fenómenos lentos en comparación con los fenómenos electromagnéticos. Debido a esto se considera que la temperatura en los sensores es inicialmente diferente en todos hasta a llegar a saturar el medio del sistema donde se encuentra la resistencia. Finalmente cuando las temperaturas en los sensores se encuentren al mismo nivel se considerara que el medio está saturado, entonces el calor en todo el medio tiene la misma intensidad y es generado por el mismo nivel de potencia.

5.2.1. Resultados de potencia activa y temperatura.

Se realizaron varias pruebas experimentales para conocer la interacción de la potencia activa en medios multisenoidales con relación física a la intensidad de temperatura.

Mediante la información de las pruebas realizadas se determinó la relación entre potencia activa o potencia disipada y la temperatura.

Las pruebas se realizaron considerando una frecuencia fundamental de 60Hz , los valores de tensión y corriente son dados en valores máximos y no existe ángulo de desplazamiento entre la tensión y la corriente.

A continuación se muestran las tablas (5.1) a (5.5) que corresponden a los resultados obtenidos en las pruebas de potencia activa y temperatura para un circuito eléctrico resistivo alimentado por tensiones sinusoidales puras.

Tabla 5.1: Prueba experimental Potencia-Temperatura 1

Tensión	16.710 V
Corriente	1.075 A
P medida	8.9700 W
P calculada	8.9816 W
ST1	59.83°C
ST2	59.48°C
ST3	59.73°C
ST4	59.55°C
ST5	59.83°C

Tabla 5.2: Prueba experimental Potencia-Temperatura 2

Tensión	20.11 V
Corriente	1.273 A
P medida	12.8326 W
P calculada	12.8001 W
ST1	74.10°C
ST2	74.03°C
ST3	73.98°C
ST4	74.01°C
ST5	73.93°C

Tabla 5.3: Prueba experimental Potencia-Temperatura 3

Tensión	23,401 V
Corriente	1,5025 A
P medida	17,5850 W
P calculada	17,5801 W
ST1	87,11°C
ST2	87,04°C
ST3	87,05°C
ST4	86,92°C
ST5	87,25°C

Para el cálculo y medición de potencia activa en sistemas senoidales, el valor de la potencia activa no representa cambios considerando la teoría clásica de potencias y su relación entre la intensidad de temperatura se analiza en estas pruebas experimentales.

Tabla 5.4: Prueba experimental Potencia-Temperatura 4

Tensión	26,76 V
Corriente	1,698 A
P medida	22,7892 W
P calculada	22,7192 W
ST1	103,34°C
ST2	103,83°C
ST3	103,43°C
ST4	103,03°C
ST5	103,48°C

Tabla 5.5: Prueba experimental Potencia-Temperatura 5

Tensión	30.13 V
Corriente	1.8923 A
P medida	28.4701 W
P calculada	28.4830 W
ST1	119.20°C
ST2	119.35°C
ST3	119.13°C
ST4	119.34°C
ST5	119.23°C

Para realizar una comparativa entre un circuito resistivo sin contenido armónico y uno con contenido armónico es importante implementar deformación en la forma de onda de tensión aplicada a la carga. Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos en las pruebas de potencia activa y temperatura para un circuito eléctrico resistivo alimentado por tensiones multisenoidales. Para realizar esta prueba se presenta la tensión a frecuencia fundamental y la tensión con tres veces la frecuencia fundamental de 60Hz.

Tabla 5.6: Prueba experimental Potencia-Temperatura 6

Tensión 1	16.701V
Corriente 1	1.049 A
Tensión 3	10.025V
Corriente 3	0.618 A
P medida	11.8580 W
P calculada	11.8593 W
P1	8.75960 W
P3	3.0987 W
ST1	66.06°C
ST2	65.98°C
ST3	66.01°C
ST4	65.99°C
ST5	66.21°C

Tabla 5.7: Prueba experimental Potencia-Temperatura 7

Tensión 1	20.06V
Corriente 1	1.2683 A
Tensión 3	12.02V
Corriente 3	0.7589 A
P medida	17.2984 W
P calculada	17.2820 W
P1	12.7210 W
P3	4.5609 W
ST1	85.23°C
ST2	85.26°C
ST3	84.97°C
ST4	85.72°C
ST5	85.71°C

Los términos $P1$ y $P3$ son potencia activas a frecuencia fundamental y a tres veces la frecuencia fundamental. El término $P3$ existe debido a que la tensión aplicada a la resistencia contiene el tercer armónico, así mismo la corriente tiene tercer armónico.

Tabla 5.8: Prueba experimental Potencia-Temperatura 8

Tensión 1	23.45V
Corriente 1	1.485 A
Tensión 3	14.04V
Corriente 3	0.891 A
P medida	23.5809 W
P calculada	23.6927 W
P1	17.4116 W
P3	6.2548 W
ST1	106.13°C
ST2	106.80°C
ST3	106.37°C
ST4	106.40°C
ST5	106.15°C

Tabla 5.9: Prueba experimental Potencia-Temperatura 10

Tensión 1	26.83V
Corriente 1	1.685 A
Tensión 3	16.08V
Corriente 3	1.014 A
P medida	30.6553 W
P calculada	30.7568 W
P1	22.6042 W
P3	8.1525 W
ST1	128.07°C
ST2	128.15°C
ST3	128.25°C
ST4	128.23°C
ST5	128.01°C

En las tablas (5.6) a (5.9) se muestran los resultados de potencia y temperaturas considerando la interacción de una componente más a la tensión de la fuente, esta componente es de tercer armónico y se manifiesta en el incremento de potencia activa y por consiguiente en incremento de la intensidad de temperatura.

En la figura (5.5) se muestran las curvas de tensión-temperatura para formas de onda de tensión con contenido armónico y sin contenido armónico. En esta figura se puede observar que para la tensión que tiene contenido armónico se tiene mayor temperatura. Esto es cierto ya que al tener una nueva componente de tensión en este caso la componente de tercer armónico, se incrementa el nivel de corriente y esto contribuye con el incremento de la temperatura según la ley de Joule.

Para la figura (5.6) se tiene que la relación entre la potencia disipada y temperatura tiende a ser lineal. Cabe destacar que para todas las pruebas realizadas en este trabajo de investigación, la relación entre la potencia disipada y la temperatura es proporcional entre ellas independientemente si existe contenido armónico o no en el sistema.

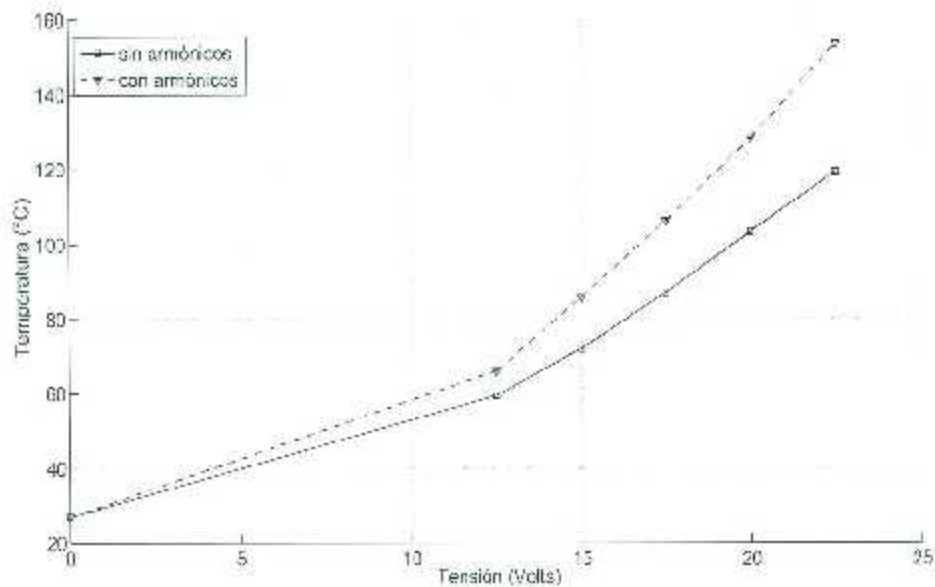


Figura 5.5: Tensión aplicada a la resistencia y Temperatura.

La relación entre potencia y tensión en la resistencia es mostrada en la figura (5.7). Esta figura muestra que en las tensiones donde no se tiene contenido armónico el nivel de potencia es menor por consiguiente la temperatura es menor. Entonces el contenido armónico en un circuito eléctrico incrementa el nivel de potencia en dicho circuito y a su vez en pérdidas energéticas.

En general los resultados obtenidos en estas pruebas destacan que existe incremento de potencia para sistemas donde existe contenido armónico. Los incrementos de potencia se reflejan principalmente en pérdidas de energía y esto se cuantifica mediante la intensidad de temperatura. Por otra parte las pruebas también destacan que existe una relación lineal entre la potencia disipada y la temperatura, independientemente del sistema que se analice. Esto concuerda con la ley de Joule mediante la proporcionalidad de incremento de calor al incrementar la potencia del circuito.

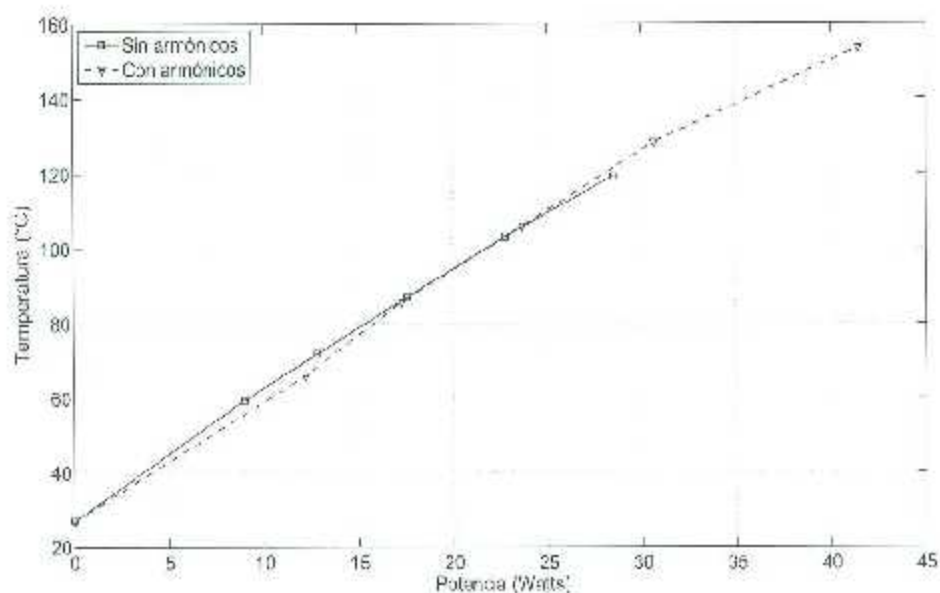


Figura 5.6: Potencia disipada por la resistencia y temperatura.

5.3. Potencia reactiva multisenoidal y la ley de inducción de Faraday

La cuantificación de potencia reactiva es asociada a la variación energética de los campos eléctricos y magnéticos que interactúan en el sistema eléctrico [2]-[40]. Para poder cuantificar la potencia reactiva se considerará un sistema de pruebas magnético. Esto con el fin de cuantificar la variación de campo magnético y así poder determinar la potencia reactiva que interviene en el sistema.

La variación de campo magnético se asociará a la ley de inducción de Faraday, para analizar esta variación de campo se realizó el diseño de bobinas eléctricas, las cuales fueron pieza fundamental para la realización de estas pruebas.

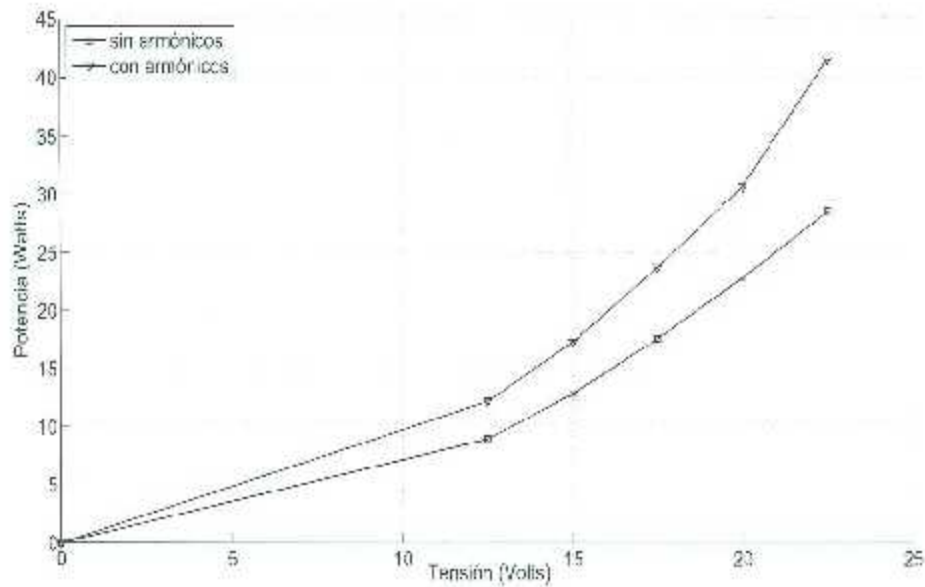


Figura 5.7: Relación Potencia y Tensión en la resistencia.

De acuerdo con los experimentos de Faraday, un campo magnético estático no produce flujo de corriente, pero un campo variable en el tiempo produce una tensión inducida en un circuito cerrado, el cual provoca un flujo de corriente [14]. Faraday descubrió que la tensión inducida, en un circuito cerrado es igual a la rapidez de cambio del encadenamiento de flujo magnético por el circuito como se expresa en la siguiente ecuación.

$$V_{in} = -\frac{d\lambda}{dt} = -N\frac{d\psi}{dt} \quad (5.9)$$

donde N es el número de vueltas en el circuito y ψ el flujo a través de cada una de ellas. El signo negativo indica que la tensión inducida es contraria al flujo que la produce, esto de acuerdo con la ley de Lenz [37].

Para conocer la densidad de campo magnético es necesario remplazar ψ por la integral de superficie de B en el área de la superficie del circuito delimitado por una trayectoria cerrada. Conociendo el campo magnético se puede determinar la razón de cambio de dicho

campo y determinar la potencia reactiva.

Se consideran dos bobinas para realizar las pruebas de potencia reactiva, la bobina primaria tiene 1050 vueltas, una longitud de $13 \times 10^{-2} m$ y una área transversal de $8.55 \times 10^{-4} m^2$ y la bobina secundaria primaria tiene 2500 vueltas, una longitud de $13 \times 10^{-2} m$ y una área transversal de $6.84 \times 10^{-4} m^2$. La figura (5.8) muestra las bobinas tomadas en cuenta para las pruebas de potencia reactiva.

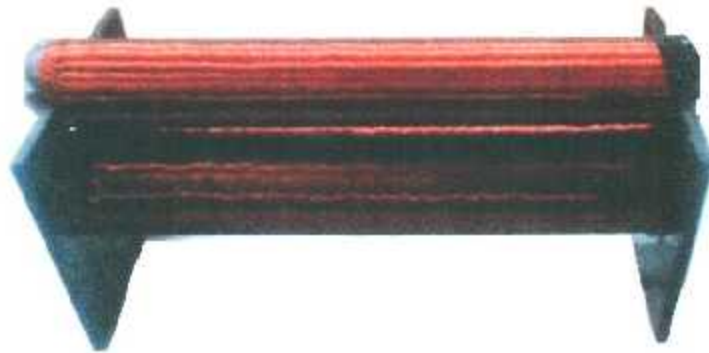


Figura 5.8: Bobinas de prueba para la medición de tensión inducida.

5.3.1. Resultados de potencia reactiva y tensión inducida.

Las pruebas experimentales para la medición de potencia reactiva en medios senoidales y multisenoidales se relacionan mediante la ley de Faraday, ya que mediante la tensión inducida se puede determinar el campo magnético y su variación temporal. Esta variación temporal determinará la potencia reactiva tal como se muestra en la ecuación (2.20).

Las pruebas se realizaron considerando una frecuencia fundamental de $60 Hz$, los valores de tensión y corriente son dados en valores máximos y el ángulo de desplazamiento será determinado por el valor de la relación de la resistencia de la bobina y el valor de la inductancia.

5. Pruebas experimentales

A continuación se muestran las tablas (5.10) a (5.14) que corresponden a los resultados obtenidos en las pruebas de potencia reactiva para un circuito eléctrico con una carga *RL* alimentado por tensiones sinusoidales puras.

Los resultados de temperaturas en la bobina primaria fueron adquiridos mediante el termómetro visual de infrarrojos Fluke-VT02.

Tabla 5.10: Prueba experimental Potencia activa y reactiva 1.

Tensión	13.426V
Corriente	1.5403 A
P medida	9.5050 W
P calculada	9.5871 W
Q medida	4.0860 var
Q calculada	4.1231 var
S calculada	10.3472 VA
TFI	68.9°C

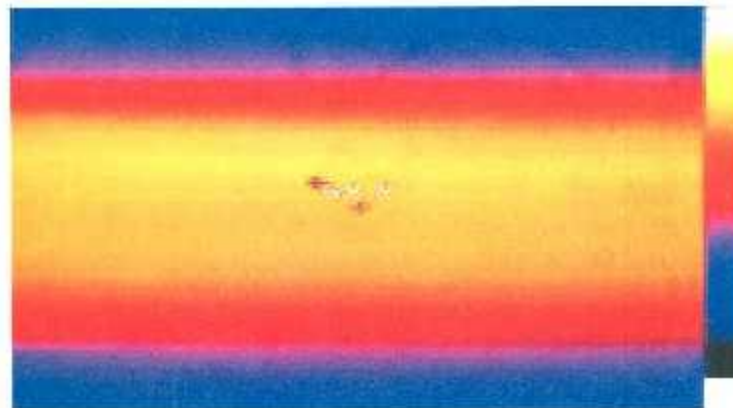


Figura 5.9: Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 1.

Tabla 5.11: Prueba experimental Potencia activa y reactiva 2.

Tensión	16.469 V
Corriente	1.8223 A
P medida	13.5250 W
P calculada	13.6241 W
Q medida	5.6120 var
Q calculada	5.5123 var
S calculada	14.643 VA
TF1	82.70°C

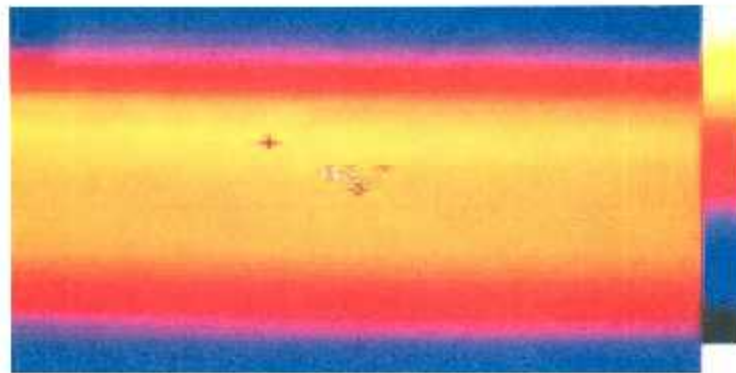


Figura 5.10: Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 2.

Tabla 5.12: Prueba experimental Potencia activa y reactiva 3.

Tensión	19.522 V
Corriente	2.047 A
P medida	18.2010 W
P calculada	18.640 W
Q medida	7.2042 var
Q calculada	7.317 var
S calculada	19.574 VA
TF1	98.6°C



Figura 5.11: Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 3.

Tabla 5.13: Prueba experimental Potencia activa y reactiva 4.

Tensión	22.633 V
Corriente	2.3180 A
P medida	24.552 W
P calculada	25.023 W
Q medida	9.236 var
Q calculada	9.465 var
S calculada	26.232 VA
TFI	115.30°C

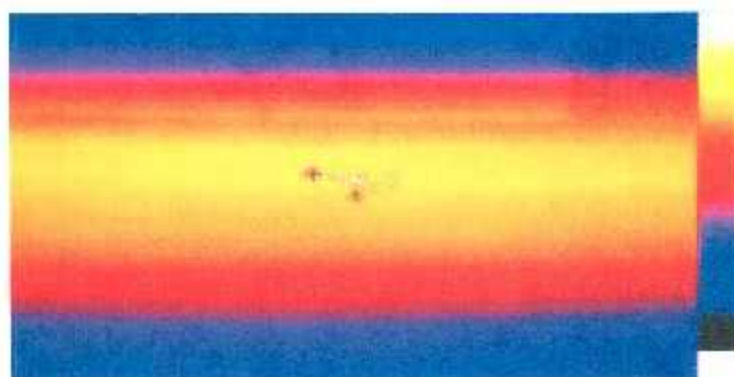


Figura 5.12: Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 4.

Tabla 5.14: Prueba experimental Potencia activa y reactiva 5.

Tensión	25.417 V
Corriente	2.5106 A
P medida	30.002 W
P calculada	31.143 W
Q medida	10.8620 var
Q calculada	10.9756 var
S calculada	31.907 VA
TFI	132.2°C

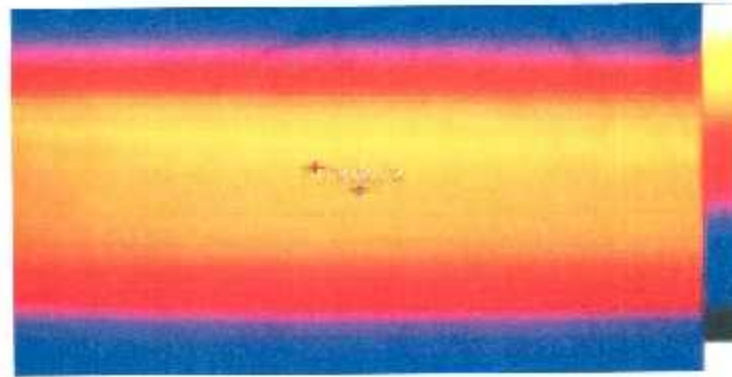


Figura 5.13: Intensidad de temperatura máxima en bobina prueba 5.

Los resultados obtenidos en las tablas anteriores muestran que los valores de los términos de potencias activa y reactiva concuerdan entre sus valores calculados y medidos para sistemas senoidales. Para las pruebas de potencias en términos multisenoidales, la potencia activa cumple los términos de medición y cálculo de la misma y puede ser asociada físicamente con la intensidad de temperatura según la ley de Joule. Para el caso de la potencia reactiva en términos multisenoidales el cálculo es propuesto en el capítulo 4 y su medición es relacionada mediante campos magnéticos considerando la ley de inducción de Faraday.

Los resultados de las pruebas experimentales para la medición y cálculo de potencia reactiva en sistemas multisenoidales corresponde con el valor máximo de la potencia reactiva instantánea multisenoidal y con la amplitud de la variación de campo magnético. Sin embargo, es necesario realizar un gran número de pruebas para determinar este concepto y descartar las demás definiciones de los investigadores de la teoría de potencias en ambientes armónicos.

Resultados del cálculo de potencia reactiva en sistemas multisenoidales.

- Las componentes armónicas de tensión aplicadas a la carga RL desplazan angularmente los valores de la corriente. Entonces la potencia instantánea tiene dos componentes, la componente activa y la componente reactiva instantánea. Para calcular y medir la potencia reactiva solo se considera el valor máximo de la potencia reactiva instantánea.
- La componente de directa de los sistemas multisenoidales no existe en la potencia reactiva, debido a que las pruebas de medición están basadas en la ley de inducción de Faraday y para esta ley ningún campo magnético estático puede inducir tensión y solo se consideran campos variantes en el tiempo.
- Una de las características importantes de la componente de directa es que no se induce en la tensión secundaria debido a su campo magnético estático, sin embargo la componente de directa de la bobina primaria se refleja en la tensión inducida del secundario mediante mayor contenido armónico y este fenómeno es mucho mayor si en la bobina secundaria existe material ferromagnético de alta permeabilidad.
- El contenido armónico en la potencia activa incrementa las pérdidas y el aumento de temperatura en elementos resistivos, por otra parte la potencia reactiva solo se ve alterada en distorsión de la forma de onda de la potencia reactiva instantánea. Los incrementos de potencia reactiva dependen de los ángulos de desplazamiento de las componentes armónicas así como la frecuencia de cada armónico debido a que estas componentes determinarán la potencia reactiva instantánea.

5.4. Conclusiones

En este capítulo se presentó la validación de la potencia activa en sistemas senoidales y multisenoidales mediante la relación de la ley de Joule. La relación de proporcionalidad entre la potencia y temperatura en el circuito de prueba fue evidente ya que independientemente si existiera o no contenido armónico, la potencia medida siempre coincidió con un cierto nivel de temperatura. También se demostró que al existir contenido armónico los valores de potencia, tensión y pérdidas aumentan.

Para el cálculo y la medición de potencia reactiva en sistemas senoidales los resultados de las pruebas afirman que se puede medir la potencia reactiva en relación con la ley de Faraday y el cálculo de esta potencia corresponde a lo medido. Para la potencia reactiva en sistemas multisenoidales el valor máximo concuerda con la ley de Faraday, pero los resultados no concuerdan con las demás teorías propuestas por los investigadores, debido a esto es indispensable realizar un mayor número de pruebas y diferentes experimentos para corroborar esta definición. Entonces el cálculo de potencia reactiva multisenoidal queda abierto para su validación experimental según la propuesta teórica realizada en esta tesis.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

6.1. Conclusiones

En esta tesis se presentó una formulación teórica como solución a la teoría de potencias eléctricas en ambientes multisenoidales. Esta teoría fue basada en un riguroso análisis físico y matemático para el desarrollo de su propuesta.

El análisis físico del teorema de Poynting, la relación de la teoría de campos electromagnéticos y la teoría de circuitos eléctricos, fueron piezas fundamentales para proporcionar información acerca de los términos de potencia y su interpretación física. Para el análisis matemático se estudió una gran variedad de formalismos sin embargo en este trabajo solo se consideran tres formalismos matemáticos debido a su impacto e implicaciones a la teoría de potencias. Para estos formalismos se concluye que el álgebra geométrica puede ser una buena herramienta matemática para proponer una teoría de potencias eléctricas, sin embargo esta matemática debe validar los términos físicos que propone la teoría de potencia, ya que se pueden tener distintas versiones según los criterios de los autores que manipulen el álgebra geométrica. El cálculo tensorial es aplicado mediante el tensor instantáneo a sistemas trifásicos y polifásicos para condiciones de carga balanceada y desbalanceada, pero también el cálculo tensorial puede ser aplicado a la teoría de potencias en ambientes

armónicos en sistemas monofásicos, considerando ciertas modificaciones en su formulación esto con el fin de ser aplicado a sistemas monofásicos multisenoidales. Por último la álgebra de cuaterniones fue utilizada en este trabajo y se pudo aplicar a la formulación de las componentes de potencia activa y reactiva para sistemas senoidales. Sin embargo es necesario llevar todo este trabajo al área de la experimentación y comprobar los valores reales de los términos de potencias que objetarán o comprobarán la aplicación de estos formalismos matemáticos.

Los resultados numéricos de la teoría de potencias eléctricas multisenoidal en comparación con las demás teorías propuestas por investigadores de relevancia, proporcionan información congruente en los términos de potencia activa y potencia aparente. Sin embargo el valor de potencia reactiva es diferente para todos los investigadores.

Por otra parte los resultados de las pruebas experimentales para validación de la potencia activa en sistemas senoidales y multisenoidales determinaron la existencia de una proporcionalidad entre la potencia disipada y la temperatura independientemente si existe o no contenido armónico. Para el cálculo y la medición de potencia reactiva en sistemas senoidales los resultados de las pruebas afirman que se puede medir la potencia reactiva en relación con la ley de Faraday y el cálculo de esta potencia corresponde a lo medido. Para la potencia reactiva en sistemas multisenoidales la validación experimental queda abierta ya que es necesario realizar un número mayor de pruebas y también validar la potencia reactiva en medios capacitivos con relación de campos eléctricos. Para la medición de potencia reactiva multisenoidal el valor máximo de la variación de campo magnético puede ser respaldado mediante la ley de inducción de Faraday sin embargo es necesario realizar más pruebas para validar esto.

6.2. Trabajos Futuros

Como trabajos futuros:

- Determinar el valor máximo de la potencia reactiva instantánea mediante el filtro de Kalman.
- Análisis de los valores rms de la potencia reactiva instantánea en ambientes multisenooidales.
- Validación experimental de la teoría de potencias en régimen multisenooidal generalizada.
- Realizar nuevas investigaciones experimentales de los resultados de la teoría de potencias en régimen multisenooidal.

6.3. Publicaciones

Como parte de este trabajo de tesis se realizaron las siguientes contribuciones científicas:

- A. Gallegos Ríos, F.S. Sellschopp Sánchez, M.A. Arjona L., R. Vargas Salas "Modelado de un Transformador Trifásico de Tres Piernas con Diferentes Saturaciones Mutuas" Congreso Internacional 2012 en 25a RVP/AL2012, Acapulco, Guerrero, México, Julio 2012.
- A. Gallegos Ríos, C. Hernández, F.S. Sellschopp Sánchez, M. A. Arjona L. "Solución de la Ecuación de Poisson para Campos Electroestáticos en 2D usando el Método de Elementos Finitos" Congreso Internacional 2012 en 25a RVP/AL2012, Acapulco, Guerrero, México, Julio 2012.
- A. Gallegos Ríos, F.S. Sellschopp Sánchez "Implementación de Distintos Formalismos Matemáticos a la Teoría de Potencias Eléctricas" Congreso nacional de ingeniería electromecánica y de sistemas (XIV CNIES) México D.F., Noviembre 2013.

6. Conclusiones y Trabajos Futuros

- A. Gallegos Ríos, F.S. Sellschopp Sánchez, M.A. Arjona L. "*Impacto de Sags de Tensión en Diferentes Conexiones de Transformadores Trifásicos*" Congreso Nacional 2013 CONAEE, Lerdo, Durango, México, Marzo 2013.
- A. Gallegos Ríos, G. Avila Elisondo, V. Cabrera Morales, F.S. Sellschopp Sánchez, "*Análisis Transitorio en Devanados De Transformadores*" Congreso Nacional 2013 CONAEE, Lerdo, Durango, México, Marzo 2013.
- A. Gallegos Ríos, F.S. Sellschopp Sánchez "*Análisis de Diversas Técnicas para el Cálculo de Potencias Eléctricas en Ambientes Armónicos*" Congreso Nacional 2012 CONAEE, Lerdo, Durango, México, Marzo 2012.
- A. Gallegos Ríos, F.S. Sellschopp Sánchez "*Aplicabilidad del Algebra de Clifford en la Teoría de Potencia Eléctricas en Régimen Multisenoidal*" Encuentro Regional 2013 CHESLAG, Torreón, Coahuila, México, Mayo 2013.

Apéndice A

Teoría de potencia eléctrica Constantin

I. Budeanu

Constantin I. Budeanu detalla su teoría en su famoso libro *Reactive and Fictive Powers*. Esta teoría puede ser explicada mediante lo siguiente:

Se puede descomponer una corriente armónica en dos componentes ortogonales tal como en la siguiente ecuación.

$$I_h^2 = (I_h \cos \theta_h)^2 + (I_h \sin \theta_h)^2 \quad (\text{A.1})$$

donde θ_h es el ángulo de desplazamiento entre la tensión armónica V_h y la corriente armónica I_h . De la ecuación (A.1) se puede calcular el cuadrado de la potencia aparente.

$$S^2 = V^2 I^2 = \sum_{h=1}^{\nu} V_h^2 \left[\sum_{h=1}^{\nu} (I_h \cos \theta_h)^2 \right] + \sum_{h=1}^{\nu} V_h^2 \left[\sum_{h=1}^{\nu} (I_h \sin \theta_h)^2 \right] \quad (\text{A.2})$$

Aplicando la siguiente identidad de Lagrange a la ecuación (A.2).

$$\sum_{h=1}^{\nu} A_h^2 \sum_{h=1}^{\nu} B_h^2 = \left(\sum_{h=1}^{\nu} A_h B_h \right)^2 + \sum_{m=1}^{\nu-1} \sum_{n=m+1}^{\nu} (A_m B_n - A_n B_m)^2 \quad (\text{A.3})$$

Se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \left(\sum_{h=1}^{\nu} V_h I_h \cos \theta_h \right)^2 - \left(\sum_{h=1}^{\nu} V_h I_h \cos \theta_h \right)^2 \\
 &+ \sum_{m=1}^{\nu-1} \sum_{n=m+1}^{\nu} (V_m I_n \cos \theta_m - V_n I_m \cos \theta_n)^2 + \sum_{m=1}^{\nu-1} \sum_{n=m+1}^{\nu} (V_m I_n \sin \theta_m - V_n I_m \sin \theta_n)^2 \\
 &= \left(\sum_{h=1}^{\nu} V_h I_h \cos \theta_h \right)^2 + \left(\sum_{h=1}^{\nu} V_h I_h \sin \theta_h \right)^2 \\
 &+ \sum_{m=1}^{\nu-1} \sum_{n=m+1}^{\nu} [(V_m I_n)^2 + (V_n I_m)^2 - 2V_m V_n I_m I_n \cos(\theta_m - \theta_n)]
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

De la expresión (A.4), Budeanu separa la potencia aparente en tres términos ortogonales entre sí y los define de la siguiente manera.

$$S^2 = P^2 + Q_B^2 + D_B^2 \tag{A.5}$$

El primer término corresponde a la potencia activa total.

$$P = \sum_{h=1}^{\nu} V_h I_h \cos \theta_h \tag{A.6}$$

El segundo término Budeanu lo llamó potencia reactiva:

$$Q_B = \sum_{h=1}^{\nu} V_h I_h \sin \theta_h \tag{A.7}$$

el último término fue denominado potencia de distorsión.

$$D_B = \sqrt{\sum_{m=1}^{\nu-1} \sum_{n=m+1}^{\nu} [(V_m I_n)^2 + (V_n I_m)^2 - 2V_m V_n I_m I_n \cos(\theta_m - \theta_n)]} \tag{A.8}$$

Budeanu fue el primer científico en proponer que la potencia aparente está compuesta por más de dos componentes y fue capaz de proponer un sistema tridimensional para los términos de potencias propuestos en su teoría.

Apéndice B

Teoría de potencia eléctrica Alexander E. Emanuel.

Emanuel define los valores rms de tensión y corriente en términos separados haciendo distinción de la componente fundamental con respecto a las componentes diferentes de la fundamental, esto se muestra en (B.1) y (B.2).

$$V^2 = V_1^2 + V_H^2 \quad (\text{B.1})$$

$$I^2 = I_1^2 + I_H^2 \quad (\text{B.2})$$

donde V_H^2 y I_H^2 son términos armónicos tal como se muestra en (B.3) y (B.4).

$$V_H^2 = \sum_{h \neq 1} V_h^2 \quad (\text{B.3})$$

$$I_H^2 = \sum_{h \neq 1} I_h^2 \quad (\text{B.4})$$

La potencia aparente es calculada mediante el producto de los valores rms de tensión y corriente.

$$S^2 = V_2 I_2 = (V_1^2 + V_H^2)(I_1^2 + I_H^2) \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}
 S^2 &= V^2 I^2 = (V_1^2 - V_H^2)(I_1^2 + I_H^2) \\
 &= (V_1 I_1)^2 + (V_1 I_H)^2 + (V_H I_1)^2 + (V_H I_H)^2 \\
 &= S_1^2 + D_I^2 + D_V^2 + S_H^2
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

El primer término es la potencia aparente fundamental a una frecuencia de 60Hz.

$$S_1 = (V_1 I_1) = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} \tag{B.7}$$

Los tres términos restantes forman la potencia aparente a frecuencia no fundamental.

$$S_N = \sqrt{D_I^2 + D_V^2 + S_H^2} \tag{B.8}$$

donde

$$D_I = V_1 I_H = V_1 \sqrt{\sum_{h \neq 1} I_h^2} \tag{B.9}$$

es la componente de potencia de distorsión debida a la interacción de corriente armónica y la tensión a frecuencia fundamental.

$$D_V = V_H I_1 = I_1 \sqrt{\sum_{h \neq 1} V_h^2} \tag{B.10}$$

La ecuación (B.10) muestra la potencia de distorsión debida a la interacción de la tensión armónica y la componente de corriente fundamental.

El último término es la potencia aparente armónica.

$$S_H = \sqrt{P_H^2 + Q_H^2} \tag{B.11}$$

donde

$$P_H = \sum_{h \neq 1} P_h = \sum_{h \neq 1} V_h I_h \cos \theta_h \tag{B.12}$$

y el término D_H es la potencia de distorsión armónica.

$$D_H = \sqrt{D_{H1}^2 + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{n-m-1}^n [(V_m I_n)^2 + (V_n I_m)^2 - 2V_m V_n I_m I_n \cos(\theta_m - \theta_n)]} \tag{B.13}$$

donde D_{PI} es:

$$D_{PI} = \left(\sum_{k \neq 1}^n V_k I_k \sin \theta_k \right)^2 \quad (\text{B.14})$$

Las componentes propuestas por Emanuel en su teoría han sido justificadas físicamente en su mayoría mediante el teorema de Poynting, sin embargo existen términos que no han sido justificados.

Referencias

- [1] C.P.Steinmetz, *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena*,1st ed. New York:McGraw-Hill, 1987.[Online].Available:<http://openlibrary.org>
- [2] J.Cohen,F.de León, *Physical Time Domain Representation of Powers in Linear and Nonlinear Electrical Circuits*,IEEE Transactions on Power Delivery,Vol.14,No.4, pp. 1240-1249,Oct. 1999.
- [3] C.I.Budeanu,*Puissance Reactives et Fictives*,Instytut Romain de l'Energie,Bucharest, Romania,1927.
- [4] L.S.Czarnecki,*What is wrong with the Budeanu concept of Reactive and Distortion Power and why it should be abandoned*,IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol.36,No3,September 1987, pp. 834-837.
- [5] L.S. Czarnecki, *Considerations on the Reactive Power in Nonsinusoidal Situations*,IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol.34,No.3,Sept.1984,pp.399-404.
- [6] S. Fryze, *Effective, Wattless and Apparent Power in Circuits with Nonsinusoidal Waveforms of Current and Voltage*,Elektrotechnische Zeitschrift, No.25, June 23,1932,pp.596-599,625-627,700-702.
- [7] L.S. Czarnecki, *Could Power Properties of Three-Phase Systems be Described in Terms of the Poynting Vector?*,IEEE Transactions on Power Delivery,Vol.21,No.1, pp. 339-344,Jan. 2006.

-
- [8] L.S. Czarnecki, *Physical Interpretation of the Reactive Power in Terms of the CPC Power Theory*, Electrical Power Quality and Utilisation, Journal, Vol 8, No.1, Jan. 2006.
- [9] A.E.Emanuel, *Power in Nonsinusoidal Situations a Review of Definitions and Physical Meaning*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.5, No.5, pp. 1377-1389. Jul. 1990.
- [10] A.E.Emanuel, *Poynting Vector and the Physical Meaning on Nonactive Powers*, IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol.54, No.4, Aug.2005, pp.1457-1462.
- [11] A.E.Emanuel, *On the Assessment of Harmonic Pollution*, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 10, No. 3, July 1995, pp. 1693-1698.
- [12] IEEE Std 1459-2010 *IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced or Unbalanced Conditions*, IEEE Press, 2010.
- [13] J.H. Poynting, *On the transfer of energy in electromagnetic field*, Philosoph. Trans. Roy. Soc. London, Vol. 175, pp.343-361, 1884
- [14] M.N.O Sadiku, *Elementos del Electromagnetismo*. Alfaomega, Oxford University Press, 2009. Chap10 pag. 435-442.
- [15] A.E.Emanuel, *About the Rejection of Poynting Vector in Power Systems Analysis*, Electrical Power Quality and Utilisation, Journal, Vol. 8, No. 1, 2007.
- [16] J.Slepian, *The flow of Power in Electrical Machines*, The Electrical Journal, Vol.16, No. 6, June 1919, pp. 303-311.
- [17] J.Slepian, *Energy Flow in Electrical Systems-The Vi Energy Postulate*, AIEE Transactions, Vol.61, No. 1, Dec. 1942, pp. 835-841.
- [18] C.A.Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley and Sons, 1989, Chap1 pag. 3-19.
- [19] R.A.Serway, *Física*, Crawl Hill, 3 Edición, 2000, Chap4 pag. 202-208.

-
- [20] Z.Cakareski,A.E.Emanuel *Powering Vector and the Quality of Electric Energy*,ETEP,Vol.11,No.6, pp. 375-382,Dec. 2001.
- [21] M.Castilla,J.C.Bravo,M.Ordoñez*Clifford Theory: A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power*,IEEE Transactions on Circuit and Systems, Vol. 50, No.10, pp.3358-3367, Nov. 2008.
- [22] M.Castilla,J.C.Bravo,M.Ordoñez*The Geometric algebra as a Power Theory Analysis Tool*,International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation, Lagón, Poland 2008.
- [23] D.Hestenes*Geometric computing with Clifford algebras: theoretical foundations and applications in computer vision and robotics*,Springer-Verlag, London , UK. 2001.
- [24] A.J. Ustariz, E.A. Cano and H.E. Tavares*Tensor Analysis of the Instantaneous Power in Electrical Networks*, Electric Power Systems Research, vol. 80, no 7, pp.788-798, Jul. 2010.
- [25] W.D.Stevenson *Doran Analysis de sistemas electricos de potencia*, Segunda edición.,McGraw-Hill,Inc.,1985
- [26] D.Hestenes,G.Sobczyk *Clifford algebra to: Geometric calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*,Boston,MA: Birkha, 2002.
- [27] W.R.Hamilton*On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions*,Proceeding of the Royal Irish Academy, Vol. 2, pp. 424-434.
- [28] W. Shepard, P. Zane, *Energy flow and Power factor in Nonsinusoidal Circuits*,Cambridge University Press, 1979.
- [29] IEEE Working Group on Nonsinusoidal Situations:*Effects on Meter Performance and Definitions of Power Practical Definitions for Powers in Systems with Nonsinusoidal Waveforms and Unbalanced Loads: A discussion*,IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.11, No.1, January 1996, pp. 79-101.

-
- [30] L.S.Czarnecki, *Comments on Active Power Flow and Energy Accounts in Electrical Systems with Nonsinusoidal Waveforms and Asymmetry*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.11, No. 3, July 1996, pp. 1244-1250.
- [31] C.H. Page, *Reactive Power in Nonsinusoidal Situations*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol.IM-29, No.4, December 1980, pp.420-4323.
- [32] P. Fillipski, *A New Approach to Reactive Current and Reactive Power Measurement in Nonsinusoidal Systems*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. IM-29, No. 4, December 1980, pp. 423-426.
- [33] J.D. Glover, M. S. Sarma, T. J. Overbye *Power System Analysis and Design*, Fifth edition, CENGAGE Learning, 2012. pp.47-57
- [34] W.G Morsi, M.E. El-Hawary, *Definig Power Components in Nonsinusoidal Unbalanced Polyphase Systems: The Issues*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.22, No.4, pp.2428-2438, Oct. 2007.
- [35] J. Arrillaga, B. C. Smith, *Power System Harmonic Analysis*, John Wiley and Sons, 1997, pp 26-31.
- [36] C.L. Fortescue, *Power, Reactive Volt-Amperes and Power Factor*, Transactions A.I.E.E., sep. 1933.
- [37] R.P. Feynman, *The feynman Lecture on Physics*, Addison Weley, New York, 1964, Vol II, Chap. 22 pag. 1-11.
- [38] F.de León, J. Cohen, *AC Power Theory From Poynting Theorem: Accurate Identification of Instantaneous Power Components in Nonlinear-Switched Circuits*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.25, No.4, pp. 2104-2112, Oct. 2010.
- [39] R. Penrose, *The Road to Reality a Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London, 2004, Chap.11 pag. 198-211.

-
- [40] W.G.Morsi, M.E. El-Hawary, *Defining Power Components in Nonsinusoidal Unbalanced Polyphase Systems: The Issues*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.22, No.4, pp.2428-2438, Oct.2007.
- [41] J.L. Willems, *Reflections on Apparent Power and Power Factor in Nonsinusoidal and Polyphase Situations*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.19, No.2, pp. 835-840, Apr. 2004.
- [42] M.E.Balci, M.H. Hocaoglu, *A Power Resolution for Nonsinusoidal and Unbalanced Systems-Part 1:Literature Overview and Motivation*, ILECO 7th, Bursa, Turkey, Dec.2011.
- [43] M.A.Slonim, J.D.Van Wyk, *Power Components in a System with sinusoidal and nonsinusoidal Voltage and Currents*, IEE PROCEEDINGS, Vol.135, No.2, pp.79-84, Mar.1988.
- [44] D.L.Milanez, A.E.Emanuel *The Instantaneous-Space-Phasor a Powerful Diagnosis Tool*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol.52, No.1, pp. 143-148, Feb. 2003.

