



**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

# **“Control difuso Takagi-Sugeno aplicado a un sistema carro-péndulo”**

POR

**Ing. Wilfredo de la Torre Yañez**

## **TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Miguel Ángel Llama Leal**

**CO-DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Francisco Jurado Zamarripa**

**ISSN: 0188-9060**



**RIITEC: (09)-TMCIE-2013**

Torreón, Coahuila de Zaragoza, México  
Agosto 2013



SEP

SERVICIO NACIONAL DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



Subsecretaría de Educación Superior  
Dirección General de Educación Superior Tecnológica  
Instituto Tecnológico de Tlaxiaco

"2013, Año de la Lealtad Institucional y Centenario del Ejército Mexicano"

Dependencia: DEPI  
Oficio: DEPIJ/248/2013  
Asunto: Autorización de impresión  
de tesis.

Tlaxiaco, Coah., 08/ Agosto /2013

C. WILFREDO DE LA TORRE YAÑEZ  
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.  
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Control difuso Takagi-Sugeno aplicado a un sistema carro-péndulo"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro RIITEC: (09)-TMCIE-2013, para que proceda a la impresión del mismo.

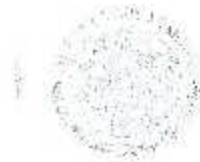
ATENAMENTE

DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA  
Jefe de la División de Estudios  
de Posgrado e Investigación



SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



Subsecretaría de Educación Superior  
Dirección General de Educación Superior Tecnológica  
Instituto Tecnológico de Toluca

“2013, Año de la Lealtad Institucional y Centenario del Ejército Mexicano”

Torreón, Coah., **07/Agosto/2013**

**DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**  
**PRESENTE**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**“Control difuso Takagi-Sugeno aplicado a un sistema carro-péndulo”**

Desarrollado por el C. **WILFREDO DE LA TORRE YAÑEZ**, con número de control **M07130070** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**

DR. Miguel Ángel Llama Leal.  
Asesor/Director

DR. Francisco Jurado Zamarripa.  
Co-Asesor/Cc-Director

DR. Víctor Santibáñez Dávila.  
Comité Tutorial

DR. Alejandro Enrique Dzul López  
Comité Tutorial



*"Si quieres resultados distintos  
no hagas siempre lo mismo".  
Albert Einstein (1879-1955)*

## Dedicatoria

*A mis padres, porque siempre creyeron en mí y me impulsaron a seguir adelante con sus consejos y sus palabras de aliento, porque gracias a ustedes me he convertido en la persona que ahora soy, y en estos momentos cumplo con un objetivo muy importante en mi vida.*

*A mis hermanos, sobrinos, tíos y a mi abuelita, gracias por su apoyo, por estar conmigo y por compartir este logro que significa mucho para mí.*

## Agradecimientos

A mi padre, Sr. Miguel De La Torre Campos, y a mi madre, Sra. Silvia Yañez Navarro, por su cariño y apoyo en cada paso que doy, por alentarme a seguir adelante y siempre dar lo mejor de mí.

A mis hermanos Miguel, Jessica y Nayelli, por estar conmigo siempre, por sus consejos, por enseñarme que las cosas más difíciles de conseguir son las que más se valoran y por apoyarme y ayudarme siempre.

A mi asesor de tesis, Dr. Miguel Ángel Llana Leal, y a mi co-director de tesis, Dr. Francisco Jurado Zamarripa, por ayudarme en el desarrollo de este proyecto, por transmitirme su conocimiento y por el tiempo que dedicaron a mi trabajo.

Al Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila y al Dr. Alejandro Enrique Dzul López por su asesoría y revisión de esta tesis.

Al resto de mis familiares y a todos mis amigos por estar conmigo, por su ayuda y por sus palabras de aliento en estos dos años de maestría.

Gracias a DGEST por apoyar los proyectos de investigación como este y a CONACyT por su programa de becas de posgrado del cual formé parte.



## Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el diseño e implementación de controles difusos Takagi-Sugeno, los cuales han sido aplicados tanto en simulación como en experimentación a un sistema carro-péndulo con el fin de realizar dos tareas: la primera, es la de regulación tanto del carro como del péndulo; y la segunda de regulación del péndulo y seguimiento del carro. Los cálculos de las ganancias de los controladores se hacen mediante la técnica de Desigualdades Lineales Matriciales para garantizar estabilidad asintótica global del sistema en lazo cerrado.

## Abstract

In this thesis both design as implementation of fuzzy controllers Takagi-Sugeno applied as simulation as experimentation to a pendulum on a cart system are presented to perform two tasks, the first one is a regulation task in the pendulum and in the cart, the second one is a regulation task applied to the pendulum and a tracking task applied to the cart. Gains calculation of each controller is made by the Linear Matrix Inequalities technique to guarantee global asymptotic stability of the closed-loop system.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo de la tesis	2
1.2. Estructura de la tesis	3
<b>2. Modelado difuso Takagi-Sugeno</b>	<b>4</b>
2.1. Modelo difuso Takagi-Sugeno (T-S)	4
2.2. Aproximaciones locales en espacios de partición difusa	5
2.3. Compensación paralela distribuida ( <i>Parallel Distributed Compensation, PDC</i> )	6
2.3.1. Desigualdades Lineales Matriciales ( <i>Linear Matrix Inequalities, LMIs</i> )	7
2.3.2. Diseño del controlador difuso vía PDC para regulación	9
2.3.3. Diseño del controlador difuso vía PDC para seguimiento	10
2.4. Observador difuso	13
2.5. Controlador difuso Takagi-Sugeno robusto	14
2.5.1. Modelo difuso con incertidumbres	15
2.5.2. Condiciones de estabilidad robusta	16
2.5.3. Estabilización robusta	17
<b>3. Modelo dinámico del sistema carro-péndulo</b>	<b>19</b>
3.1. Modelo dinámico del sistema carro-péndulo sin fricción	20
3.2. Modelo dinámico del sistema carro-péndulo con fricción	23
<b>4. Diseño de controladores difusos T-S estables</b>	<b>25</b>
4.1. Método de regulación	25
4.1.1. Controlabilidad del sistema	27
4.1.2. Diseño de un controlador estable	28
4.2. Método de seguimiento	29
4.2.1. Controlabilidad del sistema	29
4.2.2. Diseño de un controlador estable	30
4.3. Observadores difusos T-S	30
4.3.1. Observabilidad del sistema	31
4.3.2. Diseño de un observador estable	32
4.4. Controlador difuso T-S robusto	32
4.4.1. Método de regulación	32

4.4.2. Método de seguimiento	34
<b>5. Resultados</b>	<b>36</b>
5.1. Leyes de control utilizadas	36
5.2. Control de válvén	40
5.3. Resultados obtenidos de simulación	41
5.3.1. Regulación	41
5.3.2. Seguimiento	44
5.4. Resultados experimentales	49
5.4.1. Regulación	49
5.4.2. Seguimiento	53
5.5. Comparación entre los controladores difusos T-S	57
5.6. Comparación del controlador difuso T-S robusto con observador contra otros controladores	59
<b>6. Conclusiones</b>	<b>67</b>
6.1. Trabajo futuro	68
<b>A. Programas en MATLAB®</b>	<b>69</b>
A.1. Cálculo de las ganancias $K_i$ y de la matriz $P_C$ del controlador difuso T-S para el caso de regulación	69
A.2. Cálculo de las ganancias $L_i$ y de la matriz $P_O$ del observador difuso T-S	70
A.3. Cálculo de las ganancias $F_i$ y de la matriz $P_C$ del controlador difuso T-S robusto para el caso de regulación	71
<b>B. LMI Control Toolbox de MATLAB®</b>	<b>74</b>
<b>C. Artículo sometido al Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2013</b>	<b>76</b>

# Índice de figuras

3.1. Sistema carro péndulo	20
4.1. Funciones de Membresía del tipo Triangular	27
5.1. Diagrama a bloques del controlador difuso T-S para regulación.	37
5.2. Diagrama a bloques del controlador difuso T-S con observador para regulación.	37
5.3. Diagrama a bloques del controlador difuso T-S robusto con observador para regulación.	38
5.4. Diagrama a bloques del controlador difuso T-S para seguimiento.	39
5.5. Diagrama a bloques del controlador difuso T-S con observador para seguimiento.	39
5.6. Diagrama a bloques del controlador difuso T-S robusto con observador para seguimiento.	40
5.7. Resultados en simulación de regulación aplicando un controlador difuso T-S.	42
5.8. Resultados en simulación de regulación aplicando un controlador difuso T-S con observador.	43
5.9. Resultados en simulación de regulación aplicando un controlador difuso T-S robusto con observador.	44
5.10. Comparación de errores de posición en simulación del péndulo y del carro para el caso de regulación.	45
5.11. Resultados en simulación de seguimiento aplicando un controlador difuso T-S.	46
5.12. Resultados en simulación de seguimiento aplicando un controlador difuso T-S con observador.	47
5.13. Resultados en simulación de seguimiento aplicando un controlador difuso T-S robusto con observador.	48
5.14. Comparación de errores de posición en simulación del péndulo y de carro para el caso de seguimiento.	49
5.15. Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S para el caso de regulación.	50
5.16. Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S con observador para el caso de regulación.	51

5.17. Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S robusto con observador para el caso de regulación. . . . .	52
5.18. Comparación de errores de posición en experimentación del péndulo y del carro para el caso de regulación. . . . .	53
5.19. Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S para el caso de seguimiento. . . . .	54
5.20. Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S con observador para el caso de seguimiento. . . . .	55
5.21. Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S robusto con observador para el caso de regulación. . . . .	56
5.22. Comparación de errores de posición en experimentación del péndulo y del carro para el caso de seguimiento. . . . .	57
5.23. Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra un control LQR [26], [27]. . . . .	60
5.24. Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra un control DA [28]. . . . .	61
5.25. Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra el CDARCE [29]. . . . .	62
5.26. Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra un control ANFIS [30]. . . . .	63
5.27. Resultados en experimentación de regulación del péndulo y seguimiento del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra un control DA [28]. . . . .	65
5.28. Resultados en experimentación de regulación del péndulo y seguimiento del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra un control ANFIS [30]. . . . .	66
B.1. Interfaz LMedit con las desigualdades matriciales. . . . .	74
B.2. Interfaz LMedit con el código generado por las desigualdades matriciales. . . . .	75

## Índice de tablas

3.1. Parámetros de la planta.	24
5.1. Índices de desempeño de los controladores difusos T S para el caso de regulación	58
5.2. Índices de desempeño de los controladores difusos T S para el caso de regulación del péndulo y seguimiento del carro.	59
5.3. Índices de desempeño de distintos controladores para el caso de regulación del péndulo y del carro.	60
5.4. Índices de desempeño de distintos controladores para el caso de regulación del péndulo y seguimiento del carro.	64

# Capítulo 1

## Introducción

La mayoría de los sistemas no lineales pueden ser representados por modelos difusos Takagi-Sugeno, los cuales son considerados como aproximadores universales [1]. En [2], [3], [4], la estabilidad del sistema de control difuso T-S ha sido verificada considerando una función de Lyapunov común, determinada haciendo uso del recurso de Desigualdades Lineales Matriciales (*Linear Matrix Inequalities*, LMIs) y de algoritmos de optimización. Nuevas condiciones de estabilidad relajadas y diseños basados en LMIs para sistemas de control difuso en tiempo continuo y en tiempo discreto han sido presentados en [5], cuya utilidad es demostrada sobre el diseño de un regulador y un observador difusos.

El sistema carro-péndulo es una adecuada plataforma experimental para la demostración de aspectos teóricos y prácticos de la teoría de control, debido a su inherente inestabilidad en lazo abierto con dinámicas altamente no lineales, donde las diferentes dinámicas del péndulo y del carro están conjuntamente acopladas. Existen algunas restricciones en el control del sistema tales como el movimiento del carro, debido a la limitada longitud del riel, y la restricción sobre el máximo valor de la acción de control.

Existen distintos trabajos que abordan el problema de balanceo y estabilización del péndulo invertido sobre un carro, como por ejemplo [6], [7], [8], [9], [10] y [11]. En [6], un control híbrido es usado para balancear y estabilizar el péndulo. El algoritmo de balanceo difuso se obtiene a partir del modelo matemático no lineal exacto del péndulo y un Regulador Lineal Cuadrático (*Linear Quadratic Regulator*, LQR) es empleado para estabilizar el péndulo en la posición deseada. En [7], el método de control de energía se utiliza para llevar y estabilizar el péndulo para una posición vertical con dirección hacia arriba mediante un servo-controlador lineal por realimentación de estados diseñado mediante el Método de Diagramas de Coeficientes (*Coefficient Diagram Method*, CDM). En [8], un controlador híbrido difuso con esquemas de balanceo difuso y asignación de polos vía Compensación Paralela Distribuida (*Parallel Distributed Compensation*, PDC) se adopta para posicionar el péndulo y el carro en los estados deseados. El modelo difuso T-S propuesto para el sistema carro-péndulo, obtenido por linealización mediante series de Taylor alrededor de diferentes puntos de operación, está compuesto por siete reglas difusas y en



el cual se considera fricción. La efectividad del controlador difuso propuesto es validada en simulación. En [9] se presenta un método de diseño de un controlador robusto para el péndulo invertido con incertidumbres en el modelo y restricción a la salida, utilizando la técnica de Optimización de Enjambre de Partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO) y un controlador difuso T-S. Su desempeño es validado mediante simulación. En [10], un control híbrido difuso para el balanceo y estabilización del sistema carro-péndulo ha sido propuesto. El controlador se diseña empleando el recurso de LMIs para sistemas difusos del tipo T-S. El modelo difuso T-S propuesto, compuesto por tres reglas difusas, se obtiene mediante linealización por series de Taylor y para el cual no se consideró la fricción. La efectividad del método se valida a través de simulación y resultados de experimentación en tiempo real. En [11] se propone un diseño de control difuso híbrido de seguimiento para el sistema carro-péndulo, el controlador difuso de seguimiento se diseña basado en una síntesis de la teoría de seguimiento de control lineal multivariable y el modelo difuso T-S. Se selecciona un compensador de estabilización basado en observador. El modelo difuso T-S se obtiene linealizando por series de Taylor. El modelo difuso consiste en tres reglas difusas y tanto las ganancias del controlador como del observador se obtienen por medio del método de ubicación de polos.

En el presente trabajo de tesis se proponen esquemas de control para un sistema carro-péndulo utilizando el recurso del modelado difuso Takagi-Sugeno (T-S) bajo el enfoque de la técnica de aproximaciones locales en espacios de partición difusa [1], la cual consiste en identificar las no linealidades de la planta para luego obtener subsistemas lineales locales que describan el comportamiento general del sistema en regiones de aproximación alrededor de un punto de operación arbitrariamente seleccionado.

Se diseña un controlador por realimentación de estados para cada subsistema local, y mediante desigualdades matriciales se garantiza estabilidad asintótica global del sistema.

El modelo difuso propuesto por Takagi y Sugeno [13] está descrito por reglas difusas del tipo SI-ENTONCES (IF-THEN), las cuales representan la relación entrada salida de un sistema no lineal.

La principal característica de un modelo difuso Takagi- Sugeno [13] es que expresa la dinámica local de cada regla difusa mediante un modelo lineal del sistema.

## 1.1. Objetivo de la tesis

Proponer y diseñar controladores difusos Takagi-Sugeno para tareas de regulación y seguimiento de un sistema carro-péndulo, además de validar la eficiencia de los controladores tanto en simulación como en tiempo real.

## 1.2. Estructura de la tesis

La estructura del presente documento de tesis es descrita a continuación.

En el capítulo 2 se explica en qué consiste el modelado difuso Takagi-Sugeno (T-S), así como la teoría del controlador por compensación paralela distribuida (*Parallel Distributed Compensation*, PDC) y las condiciones necesarias para el aseguramiento de estabilidad asintótica global. También se describe el procedimiento para la inclusión de un observador difuso T-S y la técnica para imprimirle robustez al sistema difuso T-S.

En el capítulo 3 se obtiene el modelo matemático para el sistema carro-péndulo, en el cual se observa que el sistema es no lineal y subactuado, ya que el número de actuadores es menor que el número de grados de libertad que posee el sistema; El sistema tiene dos grados de libertad, i.e. el desplazamiento del carro y el desplazamiento del péndulo, y un actuador a través del cual se aplica una fuerza para la puesta en movimiento (o puesta en acción) del carro.

El diseño de un controlador estable para el sistema carro-péndulo, mediante el recurso de desigualdades lineales matriciales, es resuelto empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB® [12] el cual es presentado en el Capítulo 4.

En el capítulo 5 se exhiben y comentan los resultados obtenidos tanto en simulación, como en experimentación de los esquemas de control propuestos en el presente trabajo para el sistema carro-péndulo, así como la comparación del controlador difuso T-S robusto, aquí propuesto, con esquemas de control reportados previamente en diferentes tesis de investigación.

Las conclusiones del presente estudio se destacan al final del documento.

## Capítulo 2

# Modelado difuso Takagi-Sugeno

El presente capítulo trata sobre la introducción a los sistemas difusos T-S, seguido por los procedimientos de construcción tanto de dichos modelos como de los distintos controladores a implementar en el sistema carro-péndulo [1], [10] y [11]. Debido a que no todos los estados de la planta están disponibles para la medición, también se presenta el desarrollo de observadores difusos T-S.

### 2.1. Modelo difuso Takagi-Sugeno (T-S)

El modelo difuso Takagi-Sugeno (T-S) [13], es descrito mediante reglas difusas del tipo SI-ENTONCES (*IF-THEN*), las cuales representan aproximaciones de entrada-salida locales lineales de un sistema no lineal. La principal característica de un modelo difuso T-S consiste en expresar las dinámicas locales de cada regla a través de un subsistema lineal. El modelo difuso completo del sistema se consigue mediante la interpolación difusa de los modelos lineales del sistema.

La estructura de un modelo difuso T-S para un sistema continuo es descrita de la siguiente forma:

*Regla  $i$  del modelo*

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, r; \end{array} \quad (2.1)$$

donde  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  son variables premisas conocidas que pueden depender de las variables de estado, perturbaciones externas y/o el tiempo;  $M_{ij}$  son los conjuntos difusos,  $r$  es el número de reglas del modelo,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . En el presente trabajo se asume que las variables premisas no están en función de las variables

de entrada  $u(t)$ .

Dado un par  $(x(t), u(t))$ , la salida final del sistema difuso T-S es inferida usando un fuzzificador singleton, una máquina de inferencia producto y un defuzzificador centro promedio como se describen a continuación [14]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $z(t) = (z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t))$  y  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ . El término  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de pertenencia de  $z_j(t)$  en  $M_{ij}$ . Finalmente,

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (2.4)$$

puede ser considerado como el peso normalizado de cada regla SI-ENTONCES.

## 2.2. Aproximaciones locales en espacios de partición difusa

La esencia de esta técnica consiste en aproximar los términos no lineales de la planta escogiendo a criterio términos lineales. Este procedimiento conduce a la reducción del número de reglas del modelo difuso T-S [1]. El número de reglas del modelo está directamente relacionado con la complejidad del análisis y el diseño de las desigualdades lineales

matriciales, es decir, el aumento del número de reglas ocasionará que haya mayor número de desigualdades, lo que complica la prueba de estabilidad.

**Comentario 1.** *Esta técnica conduce a la reducción de reglas por medio de modelos difusos. Sin embargo, el diseño de las leyes de control basadas en el modelo difuso aproximado puede no garantizar la estabilidad del sistema no lineal original bajo dichas leyes de control.*

### 2.3. Compensación paralela distribuida (*Parallel Distributed Compensation, PDC*)

La historia de la compensación paralela distribuida (PDC) empezó con el diseño de un modelo propuesto por Kang y Sugeno [15]. Sin embargo, la estabilidad del sistema de control no fue abordada en el procedimiento de diseño. El procedimiento de diseño fue mejorado y la estabilidad de sistemas de control fue analizada en [16]. El procedimiento de diseño es llamado PDC en [3].

La PDC [3], [4] y [16] ofrece un procedimiento para diseñar controladores difusos a partir del modelo difuso T-S dado. Para realizar la PDC, el sistema a controlar tiene que ser primeramente representado por un modelo difuso T-S. Podemos enfatizar que muchos sistemas reales como sistemas mecánicos y sistemas caóticos, pueden y han sido representados por modelos difusos T-S.

En el diseño de la PDC, cada regla de control es diseñada a partir de las reglas difusas correspondientes al modelo difuso T-S. El diseño del controlador difuso comparte los mismos conjuntos difusos que el modelo difuso en las partes premisas. Para los conjuntos difusos de la forma (2.1), podemos construir el siguiente controlador difuso vía PDC:

*Regla  $i$  de control*

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES } u(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r; \end{array} \quad (2.5)$$

donde  $r$  es el número de reglas y  $K_i$  es la ganancia de realimentación local. El controlador difuso completo está dado por:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t). \quad (2.6)$$

Las reglas difusas de control tienen un controlador lineal (por realimentación de estados en este caso) en las partes del consecuente. Se pueden utilizar otros como por ejemplo controladores de realimentación de la salida (output feedback control) y controladores con

realimentación dinámica de la salida (dynamic output feedback), en lugar de controlador por realimentación de estados.

**Comentario 2.** Aunque el controlador difuso (2.6) es construido usando el diseño de estructura local, las ganancias de realimentación  $K_i$  deben ser determinadas usando condiciones de diseño globales. Las condiciones de diseño globales son necesarias para garantizar la estabilidad global y el desempeño de control.

### 2.3.1. Desigualdades Lineales Matriciales (*Linear Matrix Inequalities, LMIs*)

Las técnicas LMIs han emergido como herramientas poderosas de diseño en áreas que van desde ingeniería de control hasta identificación de sistemas y diseño estructural. Los siguientes tres factores hacen la técnica LMI atractiva [12]:

- Una gran variedad de especificaciones de diseño y de restricciones pueden ser representados como LMIs.
- Una vez que se formulan los términos de las LMIs, el problema puede ser resuelto *exactamente* mediante algoritmos de optimización convexos (Los "solucionadores LMI").
- Mientras la mayoría de los problemas con múltiples restricciones u objetivos carecen de soluciones analíticas en términos de ecuaciones matriciales, por lo general permanecen manejables en el marco LMI. Esto hace al diseño basado en LMIs una valiosa alternativa para métodos clásicos "analíticos".

Está demostrado que distintos tipos de especificaciones de rendimiento de control pueden ser representadas en términos de LMIs [1]. Las especificaciones de rendimiento de control incluyen condiciones de estabilidad, condiciones relajadas de estabilidad, condiciones de tasa de decaimiento, restricciones sobre la entrada y la salida y rechazo a perturbaciones tanto para sistemas de control continuos como discretos [5] y [17].

#### Diseño de un controlador estable mediante LMIs

Recientemente una clase de problemas de optimización llamada desigualdades lineales matriciales (LMIs) han recibido una atención importante [1-8]. Estos problemas de optimización pueden ser resueltos en tiempo polinómico (cuando el tiempo de ejecución de un algoritmo es menor que un cierto valor calculado a partir de variables implicadas usando una fórmula polinómica) y por lo tanto son tratables, por lo menos desde un sentido teórico. Los métodos de punto interior, desarrollados recientemente para estos problemas, se han encontrado extremadamente eficientes en la práctica. Para sistemas de control, la

importancia de la optimización LMI se deriva del hecho de que una amplia variedad de sistemas y problemas de control pueden ser resumidos como problemas LMI [18], excepto por algunos pocos casos especiales, estos problemas no tienen solución analítica, sin embargo, el punto principal es que a través de la estructura LMI pueden ser resueltos numéricamente de forma eficiente en todos los casos. Por eso, resumir un problema de control como un problema LMI es equivalente a encontrar una solución al problema original.

**Definición 1.** [18] Una LMI es una desigualdad matricial de la forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0 \quad (2.7)$$

donde  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  es la variable y las matrices simétricas  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , son dadas. El símbolo de la desigualdad  $\succ 0$  significa que  $F(x)$  es definida positiva.

La LMI (2.7) es una restricción convexa sobre  $x$ , esto es, el conjunto  $\{x | F(x) \succ 0\}$  es convexo. La LMI (2.7) puede representar una amplia variedad de restricciones convexas sobre  $x$ , en particular desigualdades lineales, desigualdades cuadráticas convexas, desigualdades de la norma de una matriz y restricciones que surgen de la teoría de control, tales como Lyapunov y desigualdades matriciales convexas cuadráticas, todas pueden ser expresadas como una sola LMI diagonal  $(F^{(1)}, \dots, F^{(2)}) \succ 0$ .

Por lo general en las LMIs las variables son matrices, por ejemplo, en la desigualdad de Lyapunov

$$A^T P A - P \prec 0 \quad (2.8)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es dada y la matriz  $P = P^T$  es la variable. En este caso la LMI no será escrita explícitamente en la forma  $F(x) \succ 0$ . Además, para salvar la notación esta puede conducir a un cálculo más eficiente [18]. Por supuesto, la desigualdad (2.8) puede ser reescrita rápidamente de la forma (2.7): tomando  $P_0 = 0$ ,  $F_1 = -A^T P_1 A + P_1$ , donde  $P_1, \dots, P_m$  son una base para matrices simétricas  $n \times n$ .

### Solucionadores LMI

Los solucionadores LMI se proporcionan para los siguientes tres problemas genéricos de optimización (aquí  $x$  es el vector de variables de decisión, i.e., de las entradas libres de las matrices variables  $X_1, \dots, X_K$ ):

- Problema de factibilidad (*feasibility problem*)  
 Encontrar  $x \in \mathbb{R}^N$  (o equivalentemente las matrices  $X_1, \dots, X_K$  con estructura predefinida) que satisfaga el sistema LMI  $A(x) \prec B(x)$   
 El correspondiente solucionador es llamado *feasp*

- Minimización del objetivo lineal bajo restricciones LMI  
Minimizar  $c^T x$  sobre  $x \in \mathcal{R}^N$  sujeto a  $A(x) < B(x)$   
El solucionador correspondiente es llamado `mincx`
- Eigenvalores generalizados para el problema de minimización  
Minimizar  $\lambda$  sobre  $x \in \mathcal{R}^N$  sujetos a

$$\begin{aligned} C(x) &= D(x) \\ 0 &= B(x) \\ A(x) - \lambda B(x) & \end{aligned}$$

El correspondiente solucionador es llamado `gevp`

Note que  $A(x) < B(x)$  es una notación abreviada para la estructura general LMI con variables de decisión  $x = (x_1, \dots, x_N)$ .

Los tres solucionadores `feasp`, `mincx` y `gevp` toman como entrada la representación interna LMISYS de un sistema LMI y regresan un valor óptimo  $x^*$  de las variables de decisión. Los correspondientes valores de la matriz de variables  $X_1, \dots, X_K$  son derivadas de  $x^*$  con la función `dec2mat`. Estos solucionadores son implementaciones C-MEX del algoritmo descriptivo tiempo-polinomio del algoritmo descriptivo de Nesterov y Nemirovski.

Para los programas desarrollados en MATLAB<sup>®</sup> se utilizó el solucionador `feasp`, el cual resuelve el problema de factibilidad para el sistema de restricciones LMI. Cuando el problema es factible, la salida tendrá un valor factible del vector de variables de decisión:

Dado un problema de factibilidad LMI  
Encontrar  $x$  tal que  $L(x) < R(x)$   
`feasp` resuelve el programa convexo auxiliar:  
 $t$  sujeto a  $L(x) < R(x) - t * I$

El sistema de LMIs es factible si y sólo si  $t < 0$ .

### 2.3.2. Diseño del controlador difuso vía PDC para regulación

El problema de diseño del control difuso es determinar las ganancias  $K_i$  de los controladores lineales locales que satisfagan las condiciones establecidas en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** [1] El equilibrio del sistema de control difuso continuo en lazo cerrado (2.9) (2.6) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz  $P_c$  común definida positiva tal que

$$G_M^T P_c + P_c G_M < 0, \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{G_M + G_N}{2} \right)^T P_c + P_c \left( \frac{G_M + G_N}{2} \right) \leq 0, \quad (2.10)$$



para  $i < j$  tal que  $h_i \cap h_j \neq \emptyset$  donde  $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ .

Las condiciones (2.9)-(2.10) no son conjuntamente convexas en  $K_i$  y  $P_C$ . Multiplicando las desigualdades por la izquierda y por la derecha por  $P_C^{-1}$  y definiendo una nueva variable  $X = P_C^{-1}$ , las condiciones pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} -X A_i^T - A_i X + X K_i^T B_i^T + B_i K_i X &> 0, \\ -X A_i^T - A_i X - X A_j^T - A_j X + X K_j^T B_i^T + B_i K_j X + X K_j^T B_j^T + B_j K_j X &\geq 0. \end{aligned}$$

Definiendo  $M_i = K_i X$ , de modo que para  $X > 0$  se tenga  $K_i = M_i X^{-1}$ , y sustituyéndola en las desigualdades anteriores resultan las siguientes condiciones LMIs que definen el problema del diseño del controlador difuso estable [1]:

**Problema de diseño.**

Encontrar  $X > 0$  y  $M_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) que satisfagan

$$-X A_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i > 0, \quad (2.11)$$

$$-X A_i^T - A_i X - X A_j^T - A_j X + M_i^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i \geq 0, \quad (2.12)$$

donde

$$X = P_C^{-1}, \quad M_i = K_i X. \quad (2.13)$$

Las condiciones (2.11)-(2.12) son LMIs con respecto a las variables  $X$  y  $M_i$ . Se puede encontrar una matriz  $X$  definida positiva y una matriz  $M_i$  que satisfagan las LMIs o determinar que tales matrices no existen. Las ganancias de realimentación  $K_i$  y una  $P_C$  común pueden obtenerse como

$$P_C = X^{-1}, \quad K_i = M_i X^{-1} \quad (2.14)$$

a partir de las soluciones  $X$  y  $M_i$ .

### 2.3.3. Diseño del controlador difuso vía PDC para seguimiento

La señal de referencia, señal a seguir por la salida de la planta no lineal  $y(t)$ , será llamada  $y_r(t)$  y el error de seguimiento  $e(t)$  será entonces definido como:

$$e(t) = y_r(t) - y(t).$$

Considerando el modelo de un servo-compensador como en [19]:

$$\dot{\hat{x}}_c(t) = A_{c,sc} \hat{x}_c(t) + B_{c,sc} e(t) \quad (2.15)$$

donde  $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$  son los estados del compensador,  $e(t) \in \mathbb{R}^q$  son los errores de seguimiento en el sistema, y

$$A_c = \text{bloque-diag}\{A_{c_1} A_{c_2} \cdots A_{c_r}\}$$

$$B_c = \text{bloque-diag}\{B_{c_1} B_{c_2} \cdots B_{c_r}\}$$

donde  $A_{c_i}$  es la matriz que acompaña al polinomio característico de la señal de referencia, i.e.  $\phi(s) = s^l + \alpha_l s^{l-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$ , tal que

$$A_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & I_{l-1} & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{l-1} \end{bmatrix}; \quad B_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Controlador difuso

Combinando el modelo de la planta (2.1) y el modelo del compensador (2.15), se obtiene el siguiente sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -B_p C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} y_r(t) \quad (2.16)$$

el cual puede ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -B_i C_i & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} y_r(t) \quad (2.17)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t)$$

Por conveniencia, el sistema difuso aumentado (2.17) puede ser reescrito como

$$\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} y_r(t) \quad (2.18)$$

$$y_a(t) = C_a x_a(t) \quad (2.19)$$

donde

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$A_a = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -B_i C_i & A_c \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_a^i \quad (2.21)$$

$$B_a = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) B_a^i \quad (2.22)$$

$$C_a = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i \ 0] = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_a^i \quad (2.23)$$

El controlador difuso es diseñado vía PDC, donde cada regla de control está diseñada a partir de su correspondiente regla del modelo difuso T S. Estas reglas comparten los mismos conjuntos difusos con el modelo difuso en las partes premisas [2]. Por lo tanto, todos los pesos de las reglas del controlador pueden ser tomadas directamente del modelo difuso conocida. Para el modelo local (2.16), las reglas del controlador están dadas como se muestra a continuación:

*Regla i del control*

$$\begin{aligned} &\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_r(t) \text{ es } M_{i_r}, \\ &\text{ENTONCES } u(t) = - \begin{bmatrix} K_v & K_{cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por lo tanto la salida final del controlador es

$$\begin{aligned} u(t) &= - \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \begin{bmatrix} K_v & K_{cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ &= - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} K_v & K_{cs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \\ &= - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_v^i x(t) = - K_v x(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $h_i(z(t))$  está dado por (2.4) y  $K_v$  es la matriz de ganancias de realimentación.

Sustituyendo (2.25) en (2.18), el sistema en lazo cerrado está dado por

$$\dot{x}_a(t) = \tilde{A}_a^i(\cdot) x_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} y(t) \quad (2.26)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A}_a^i &= A_a^i - B_a^i K_v^i \\ &= \begin{bmatrix} A_v & 0 \\ -B_c C_v & A_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_v \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_v & K_{cs} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_v - B_v K_v & -B_v K_{cs} \\ -B_c C_v & A_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

El teorema de estabilidad para el sistema difuso es motivado del método directo de Lyapunov [11].

La matriz  $\tilde{A}_a^i = A_a^i - B_a^i K_v^i$  es de la forma  $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ , por lo tanto se emplea

## 2.4. Observador difuso

En aplicaciones prácticas, los estados del sistema no siempre están disponibles para la medición. Bajo dichas circunstancias, surge la incógnita de si será posible determinar los estados de la respuesta del sistema para alguna determinada entrada en un periodo de tiempo. Para sistemas lineales, un observador lineal provee una respuesta positiva si el sistema es observable. De igual manera, un método sistemático en el diseño del regulador y observador difuso juega un papel importante para el control de sistemas difusos. En la teoría de sistemas lineales, uno de los resultados más importantes en el diseño de observadores es el tan conocido *principio de separación*, el cual establece que el diseño del controlador y el observador pueden llevarse a cabo separadamente sin comprometer la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Como en todo diseño del observador, los observadores difusos [20] están obligados a satisfacer que  $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , donde  $\hat{x}(t)$  representa al vector de estados estimados por el observador difuso. Como en el caso del diseño del controlador, la técnica PID puede ser empleada para establecer la siguiente estructura para el observador difuso:

### Regla $i$ del observador

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) - B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \end{array} \quad (2.28)$$

donde  $L_i \in \mathbb{R}^{n \times y}$  son las ganancias del observador,  $y(t)$  y  $\hat{y}(t)$  son la salida del sistema difuso y del observador difuso, respectivamente. El observador difuso tiene las leyes del observador lineal en sus partes del consecuente.

El estado final estimado por el observador difuso está dado por

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \} \quad (2.29)$$

y la salida final del observador difuso dada como

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t). \quad (2.30)$$

El diseño de observador difuso es para determinar las ganancias locales  $L_i$  en las partes del consecuente.

Sustituyendo (2.3) y (2.30) en (2.29) resulta

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i \hat{x}(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) B_i u(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) L_i C_j (x(t) - \hat{x}(t)), \quad (2.31)$$

En la presencia del observador difuso el controlador PDC difuso, en lugar de (2.6), adquiere la siguiente forma:

*Regla i de control*

$$\begin{aligned} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_r(t) \text{ es } M_{ir}, \\ \text{ENTONCES } u(t) = -K_i \hat{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Luego, el controlador difuso general está dado por

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i \hat{x}(t). \quad (2.33)$$

Considerando el observador difuso (2.29)–(2.30) y el controlador difuso (2.33), así como (2.2)–(2.3), y denotando  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  se obtiene la siguiente representación:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [(A_i - B_i K_j) x(t) - B_i K_j \hat{x}(t)] \quad (2.34)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - L_i C_j) \tilde{x}(t). \quad (2.35)$$

Apoyándose del principio de separación se probará estabilidad asintótica global en el observador del sistema difuso T-S empleando el siguiente teorema:

**Teorema 2.** [11] *La ecuación (2.35) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz  $P_{\mathcal{O}}$  simétrica definida positiva tal que*

$$\begin{aligned} H_{ii}^T P_{\mathcal{O}} + P_{\mathcal{O}} H_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \left( \frac{H_{ij} - H_{ji}}{2} \right)^T P_{\mathcal{O}} - P_{\mathcal{O}} \left( \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2} \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

para  $i < j \leq r$  tal que  $h_i \cap h_j \neq \emptyset$ , con  $H_{ij} = A_i - L_i C_j$ .

Las desigualdades matriciales anteriores pueden ser resueltas vía LMIs.

## 2.5. Controlador difuso Takagi-Sugeno robusto

Esta sección trata con el problema de control difuso robusto [21]–[22]. En general, existen un número infinito de controladores si la planta es estabilizable. La selección de un controlador en particular en este grupo de controladores disponibles es comúnmente

decidido por ciertas especificaciones de rendimiento de control. La técnica basada en LMIs asegura no solamente la estabilización sino también, por ejemplo, buena velocidad de respuesta, evita la saturación del actuador y restricciones de error de salida. Ahora se presenta un tratamiento sistemático dado por un avanzado e importante problema de rendimiento de control, el diseño de sistemas de control difuso robusto. El problema de robustez es dictada por aplicaciones de control en los cuales siempre existen incertidumbres asociadas con la planta, los actuadores y sensores en un sistema de control. El control robusto está enfocado a estas incertidumbres y tiene como objetivo el deducir el mejor diseño posible bajo dichas circunstancias.

Condiciones de estabilidad robusta para esta clase de sistemas se obtienen aplicando las condiciones relajadas de estabilidad descritas en la sección 1.3.1. En esta sección se explica el método de diseño que selecciona el controlador difuso robusto y que además maximiza las normas de los bloques de incertidumbres fuera de la clase de estabilización de los controladores PDC.

### 2.5.1. Modelo difuso con incertidumbres

El primer paso para abordar la robustez en el control de sistemas difusos consiste en introducir una clase de sistemas difusos con incertidumbres. Para este propósito se introducen bloques al modelo difuso T-S para llegar al siguiente modelo difuso con incertidumbres [1]:

*Regla i del modelo*

$$\begin{aligned} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_r(t) \text{ es } M_{ir}, \\ \text{ENTONCES } \dot{x}(t) = (A_i + D_{a1}\Delta_{a1}(t)E_{a1})x(t) + (B_i + D_{b1}\Delta_{b1}(t)E_{b1})u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde los bloques de incertidumbres satisfacen

$$\|\Delta_{a1}\| \leq \frac{1}{\gamma_{a1}}, \quad (2.38)$$

$$\Delta_{a1} = \Delta_{a1}^T(t), \quad (2.39)$$

$$\|\Delta_{b1}\| \leq \frac{1}{\gamma_{b1}}, \quad (2.40)$$

$$\Delta_{b1} = \Delta_{b1}^T(t) \quad (2.41)$$

para toda  $i$ . El modelo difuso completo es representado como

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + D_{a1}\Delta_{a1}(t)E_{a1})x(t) + (B_i + D_{b1}\Delta_{b1}(t)E_{b1})u(t) \}. \quad (2.42)$$

Luego, el modelo difuso (2.37) o (2.42) contiene incertidumbres en la parte consiguiente.

### 2.5.2. Condiciones de estabilidad robusta

El siguiente teorema establece las condiciones de estabilidad robusta para el modelo difuso (2.37) o (2.42) con un controlador difuso PDC (2.6).

**Teorema 3.** [1] El sistema difuso (2.37) o (2.42) es estabilizado por medio del controlador PDC (2.6) si existe una matriz  $P_R$  común, definida positiva, y una matriz semidefinida positiva  $Q_0$  que satisfagan

$$S_{ii} + (s - 1)Q_1 < 0, \quad (2.43)$$

$$T_{ij} - 2Q_2 < 0 \quad i < j \text{ tal que } h_i \cap h_j \neq \emptyset \quad (2.44)$$

donde  $s > 1$ ,

$$S_{ii} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (A_i - B_i F_i)^T P_R \\ + F_i^T (A_i - B_i F_i) \end{pmatrix} & P_R D_{ia} & P_R D_{ib} & E_{ia}^T & -F_i^T F_{im}^T \\ D_{ia}^T P_R & -I & 0 & 0 & 0 \\ D_{ib}^T P_R & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{ia} & 0 & 0 & -\gamma_{ia}^2 I & 0 \\ -E_{ib} F_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{ib}^2 I \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} (A_i - B_i F_i)^T P_R \\ + P_{ij} (A_i - B_i F_i) \\ + (A_j - B_j F_j)^T P_R \\ + P_{ij} (A_j - B_j F_j) \end{pmatrix} & P_R D_{ia} & P_R D_{ik} & P_R D_{ij} & P_R D_{il} & F_{ia}^T & -F_i^T E_{ia}^T & E_{ia}^T & -F_i^T F_{im}^T \\ D_{ia}^T P_R & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ik}^T P_R & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ij}^T P_R & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{il}^T P_R & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ia} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{ia}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ -E_{ik} F_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{ik}^2 I & 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{ij}^2 I & 0 \\ -E_{il} F_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{il}^2 I \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

$$Q_1 = \text{bloque-diag} (Q_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad (2.47)$$

$$Q_2 = \text{bloque-diag} (Q_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0). \quad (2.48)$$

### 2.5.3. Estabilización robusta

Definimos un problema de estabilización robusta para seleccionar un controlador difuso PDC para maximizar la norma de los bloques de incertidumbres, o equivalentemente para minimizar  $\gamma_{oi}$  y  $\gamma_{ui}$  en (2.42). La clase de controladores PDC (2.6) satisfacen las condiciones de estabilidad robusta de (2.43) y (2.44). El siguiente teorema proporciona una solución al problema de estabilización.

**Teorema 4.** [1] *Las ganancias de realimentación  $F_i$  que estabilizan el modelo difuso (2.37) y maximizan las normas de los bloques de incertidumbres (esto es, minimizan  $\gamma_{oi}$  y  $\gamma_{ui}$ ) pueden ser obtenidas resolviendo las siguientes LMIs, donde  $\alpha_i, \beta_i > 0$  son parámetros de diseño:*

$$\underset{\gamma_{oi}, \gamma_{ui}, X, M_1, \dots, M_r, Y_0}{\text{minimizar}} \quad \sum_{i=1}^r \{ \alpha_i \gamma_{oi} + \beta_i \gamma_{ui} \}$$

sujeto a

$$X > 0, \quad Y_0 \geq 0, \quad \tilde{S}_{\alpha} + (s-1)Y_1 < 0, \quad (2.49)$$

$$\hat{T}_{ij} - 2Y_2 < 0, \quad i < j \text{ tal que } h_i \cap h_j \neq \emptyset \quad (2.50)$$

donde  $s > 1$ ,

$$\tilde{S}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} XA_i^T + A_iX \\ -B_iM_i - M_i^T B_i^T \end{array} \right) & D_{oi} & D_{ui} & XE_{oi}^T & -M_i^T E_{oi} \\ D_{oi}^T & -I & 0 & 0 & 0 \\ D_{ui}^T & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{oi}X & 0 & 0 & -\gamma_{oi}^2 I & 0 \\ -E_{oi}M_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{ui}^2 I \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$



$$\tilde{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} XA_i^T + A_iX \\ -B_iM_j - M_j^T B_i^T \\ +XA_j^T + A_jX \\ -B_jM_i - M_i^T B_j \end{pmatrix} & D_{a1} & D_{b1} & D_{c1} & D_{d1} & XE_{a1}^T & -M_j^T E_{b1}^T & XE_{c1}^T & -M_i^T E_{d1}^T \\ D_{a2}^T & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{b2}^T & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{c2}^T & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{d2}^T & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{a2}X & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{a2}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ -E_{b2}M_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{b2}^2 I & 0 & 0 \\ E_{c2}X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{c2}^2 I & 0 \\ -E_{d2}M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{d2}^2 I \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$Y_1 = \text{bloque-diag}(Y_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad (2.53)$$

$$Y_2 = \text{bloque-diag}(Y_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (2.54)$$

donde

$$Y_0 = XQ_0X. \quad (2.55)$$

Las ganancias de realimentación son calculadas como

$$F_X = X^{-1} \quad F_i = M_i X^{-1} \quad (2.56)$$

y la ley de control para un controlador difuso T-S robusto con observador queda de la siguiente manera

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \hat{x}(t). \quad (2.57)$$

## Capítulo 3

# Modelo dinámico del sistema carro-péndulo

El sistema carro-péndulo o péndulo invertido es de los sistemas más difíciles de controlar en el campo de ingeniería de control. Debido a su importancia en el campo de ingeniería de control, ha sido escogido como plataforma experimental para comprobar las diferentes técnicas de controladores lineales y no lineales. El sistema consta de un riel sobre el cual está montado un carro que se mueve horizontalmente a lo largo de dicho eje; el carro tiene en uno de sus extremos una varilla la cual gira libremente, tal como se muestra en la figura 3.1. Es un sistema subactuado debido a que únicamente se tiene un actuador: el motor del carro.

El interés en el estudio de este tipo de sistema radica en que, salvando las particularidades de cada caso, su modelo matemático presenta una formulación basada en ecuaciones diferenciales, que guarda cierta analogía con procesos reales de mayor complejidad, como por ejemplo: el generador sincrónico conectado a un bus infinito, el sistema de control de vuelo para aeronaves, cohetes y misiles de combate. Por tanto, su estudio sirve como una primera aproximación a los problemas que plantean sistemas de mayor complejidad.

En el control del péndulo invertido se presentan básicamente dos problemas: el problema de la estabilidad local en torno a la posición de equilibrio, que es análogo al problema del malabarista que pretende mantener un palo en la punta de un dedo; y el problema de levantar el péndulo desde su posición de reposo hasta la posición en la que se mantiene erguido hacia arriba. Este último problema se conoce con su denominación inglesa de problema del *swing-up*.

El primero de los problemas, el de estabilización local, puede resolverse satisfactoriamente mediante la linealización en torno a la posición de equilibrio. Sin embargo, la ley de control así obtenida tiene un carácter exclusivamente local. Para perturbaciones de una cierta magnitud el control del péndulo se pierde.

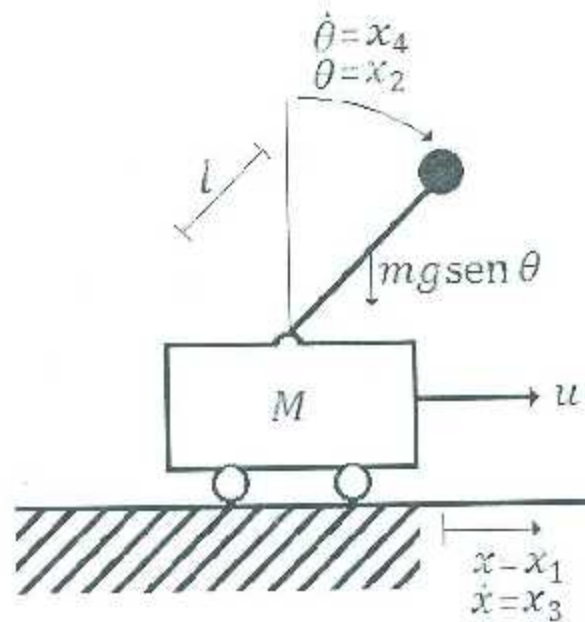


Figura 3.1: Sistema carro-péndulo.

### 3.1. Modelo dinámico del sistema carro-péndulo sin fricción

Un modelo dinámico de un sistema mecánico consiste en una ecuación diferencial ordinaria vectorial en las variables generalizadas  $q$ , generalmente de segundo orden, pudiéndose expresar como:

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  son respectivamente, las posiciones, velocidades y aceleraciones generalizadas.  $\tau$  denota el vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones por medio de los actuadores. El modelo dinámico (3.1) recibe el nombre de modelo dinámico articular. Estos conceptos son tomados de [23].

El modelo dinámico del sistema carro-péndulo se puede obtener a partir de las ecuaciones de movimiento de Lagrange, como se sugiere en [23] para el modelado de robots manipuladores. El sistema carro-péndulo puede ser considerado como un robot de dos grados de libertad, cuya primera articulación (el carro) tiene un movimiento prismático, mientras que su segunda articulación (péndulo) tiene un movimiento rotativo. De esta manera, también es equivalente la notación  $q_1 = x$  y  $\dot{q}_1 = \dot{x}$  para el desplazamiento y velocidad del carro, y  $q_2 = \theta$  y  $\dot{q}_2 = \dot{\theta}$  para el desplazamiento y velocidad del péndulo.

A continuación se muestra la metodología para la obtención del modelo dinámico uti-

lizando las ecuaciones de Lagrange.

### Cálculo de la energía cinética total

La energía cinética de un eslabón está dada por

$$\mathcal{K}_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \quad (3.2)$$

donde  $q$  y  $\dot{q}$  son la posición y la velocidad de las articulaciones,  $m_i$  es la masa,  $v_i$  es la velocidad del centro de masa,  $I_i$  es el momento de inercia y  $\omega_i$  es la velocidad angular del eslabón  $i$ . De esta manera, las energías cinéticas de los eslabones del carro-péndulo son

$$\mathcal{K}_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (3.3)$$

$$\mathcal{K}_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (3.4)$$

por lo que la energía cinética total es

$$\mathcal{K}_T(q, \dot{q}) = \mathcal{K}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_2(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (3.5)$$

### Cálculo de la energía potencial total

La energía potencial de un eslabón se define por

$$\mathcal{U}(q, \dot{q}) = m_i g h_i \quad (3.6)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $m$  es la masa y  $h$  es la altura del centro de masa del eslabón con respecto al plano de referencia. Así, las energías potenciales son

$$\mathcal{U}_1(q, \dot{q}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathcal{U}_2(q, \dot{q}) = m g l [\cos \theta - 1] \quad (3.8)$$

Y la energía potencial total es

$$\mathcal{U}_T(q, \dot{q}) = \mathcal{U}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{U}_2(q, \dot{q}) = m g l [\cos \theta - 1] \quad (3.9)$$

### Cálculo del Lagrangiano

El lagrangiano se define como la resta a la energía cinética total de la energía potencial total; esto es

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}_T(q, \dot{q}) - \mathcal{U}_T(q, \dot{q}) \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - m g l [\cos \theta - 1] \quad (3.11)$$

### Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.

Las ecuaciones del modelo dinámico del sistema se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_i} \right] - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_i} = \tau_i \quad (3.12)$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}} &= M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}} \right] &= M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} &= 0 \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}} &= m\dot{x}l \cos \theta + ml^2\dot{\theta} + I\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\theta}} \right] &= m\dot{x}l \cos \theta - m\dot{x}\dot{\theta}l \sin \theta + ml^2\ddot{\theta} + I\ddot{\theta} \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta} &= -m\dot{x}\dot{\theta}l \sin \theta + mgl \sin \theta \end{aligned}$$

se obtiene el modelo dinámico del carro-péndulo, dado por

$$\begin{aligned} \ddot{x}(M + m) + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta &= \tau_1 \\ m\dot{x}l \cos \theta - ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + I\ddot{\theta} &= \tau_2 \end{aligned}$$

y como el péndulo no tiene actuador, entonces  $\tau_2 = 0$ .

Finalmente, el modelo dinámico del sistema carro-péndulo se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \cos \theta \\ \gamma \cos \theta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde para simplificar la notación, se consideran las siguientes variables auxiliares:

$$\alpha = m + M \quad (3.14)$$

$$\beta = ml^2 + I \quad (3.15)$$

$$\gamma = ml \quad (3.16)$$

$$\delta = -mgl \quad (3.17)$$

El modelo anterior conserva la estructura general de un sistema robótico, cuya ecuación de modelo dinámico es

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.18)$$

### 3.2. Modelo dinámico del sistema carro-péndulo con fricción

A partir del modelo dinámico del carro-péndulo (3.13), se obtiene el modelo no lineal despejando las derivadas de mayor orden, lo cual produce el siguiente resultado

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} \beta & -\gamma \cos \theta \\ -\gamma \cos \theta & \alpha \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \gamma \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \delta \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \bar{0} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.19)$$

donde

$$\Delta = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2 \cos^2 \theta} \quad (3.20)$$

Ahora se utilizará la nomenclatura de variables de estado, considérense los estados del sistema carro-péndulo como

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \theta \\ x_3 &= \dot{x} \\ x_4 &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

y además la única entrada de control se define como  $u = \tau_1$ . De esta manera, la ecuación de estados del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \Delta [\gamma\beta x_2^2 \sin x_2 + \gamma\delta \sin x_2 \cos x_2] \\ \Delta [-\gamma^2 x_2^2 \sin x_2 \cos x_2 - \alpha\delta \sin x_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\beta \\ -\Delta\gamma \cos x_2 \end{bmatrix} u \quad (3.21)$$

En este modelo matemático no se consideran los efectos de fricción que sí existen en la planta real, el desarrollo completo del modelo matemático del sistema carro-péndulo se muestra en [27], el cual considera la fricción viscosa del carro y del péndulo y también la fricción de Dahl. La ecuación en variables de estados está definida en la ecuación (3.22).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \Delta [\gamma\beta x_2^2 \sin x_2 - \beta f_{va} x_3 - \beta \sigma_{da} x_5 + \gamma\delta \sin x_2 \cos x_2 + \gamma f_{v\theta} x_4 \cos x_2] \\ \Delta [-\gamma^2 x_2^2 \sin x_2 \cos x_2 - \gamma f_{v\theta} x_3 \cos x_2 + \gamma \sigma_{d\theta} x_5 \cos x_2 - \alpha\delta \sin x_2 - \alpha f_{v\theta} x_4] \\ -\frac{\sigma_{dx}}{J_{ex}} |x_3| x_5 + x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\beta \\ -\Delta\gamma \cos x_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.22)$$

donde  $x_5 = z$  es el estado que se agrega para la fricción de Dahl,  $\sigma_{dx}$  corresponde al coeficiente de fricción de Dahl,  $f_{va}$  indica los coeficientes de fricción viscosa y  $f_{v\theta}$  corresponde

a los coeficientes de la fricción de Coulomb.

Para el desarrollo del controlador se toman en cuenta las fricciones viscosas pero no la fricción de Coulomb, así como se muestra en las referencias [10], [11] y [24], aunque en estos trabajos mencionan que las fricciones son despreciables y a fin de cuentas consideran un modelo simplificado, la ecuación de estado que se utilizó para realizar el cálculo del controlador se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \Delta(\gamma\beta x_4^2 \sin x_2 - \beta f_{vr} x_3 + \gamma\delta \sin x_2 \cos x_2 + \gamma f_{vp} x_4 \cos x_2) \\ \Delta(-\gamma^2 x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 + \gamma f_{vr} x_3 \cos x_2 - \alpha\delta \sin x_2 - \alpha f_{v0} x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\beta \\ -\Delta\gamma \cos x_2 \end{bmatrix} u \quad (3.23)$$

donde los valores de los parámetros se muestran en la tabla 3.1, los cuales corresponden a la plataforma experimental del laboratorio de posgrado del Instituto Tecnológico de la Laguna desarrollada en [26] y [27].

Tabla 3.1: Parámetros de la planta.

Masa de carro	$M$	2.278 [Kg]
Masa del péndulo	$m$	0.266 [kg]
Longitud al centro de masa	$l$	0.2958 [m]
Momento de Inercia	$I$	0.00532 [kg · m <sup>2</sup> ]
Fricción viscosa del carro	$f_{vr}$	6.33 [Nms/rad]
Fricción viscosa del péndulo	$f_{vp}$	0.003 [Nms/rad]
Longitud total de la barra	$L$	0.42 [m]

Asimismo, las constantes  $\alpha = m + M = 2.544$ ,  $\beta = ml^2 + I = 0.0286$ ,  $\gamma = ml = 0.0787$ ,  $\delta = -m \cdot g \cdot l = -0.7719$  y

$$\Delta = \frac{1}{\alpha\beta - \gamma^2 \cos x_2^2}.$$

## Capítulo 4

# Disño de controladores difusos T-S estables

Se pretende construir un modelo difuso de dos reglas por el método de aproximaciones locales en espacios de partición difusa. Por supuesto, el modelo obtenido es sólo una aproximación del sistema original. Sin embargo, será probado que el controlador difuso diseñado funciona bien cuando se aplica al sistema original no lineal del péndulo.

### 4.1. Método de regulación

Separando en variables de estado la ecuación (3.23), y considerando el vector de estados  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ , se tiene:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \Delta(-\beta f_{ax}) & \Delta(\gamma\beta x_4 \text{sen}(x_2) + \gamma f_{ax} \cos(x_2)) \\ 0 & 0 & \Delta(\gamma \cos(x_2) f_{ax}) & \Delta(\gamma^2 x_4 \text{sen}(x_2) \cos(x_2) - \alpha f_{ax}) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\beta \\ -\Delta\gamma \cos(x_2) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\gamma\delta \text{sen}(x_2) \cos(x_2) \\ -\Delta c\delta \text{sen}(x_2) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Arbitrariamente se seleccionan los puntos de trabajo para los cuales el sistema será aproximado, en este trabajo se consideran dos puntos, el primero para cuando la posición del péndulo está cerca de 0, i.e.  $x_2(t) = 0$ , y el segundo para cuando el péndulo está cerca de  $\pm \frac{\pi}{2}$ , i.e.  $|x_2(t)| = \frac{\pi}{2}$ . La posición y velocidad de carro, así como la velocidad del péndulo se considerarán cero, i.e.  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$  y  $x_4 = 0$ .

Cuando  $x_2 \approx 0$ , las ecuaciones no lineales de la planta pueden ser simplificadas como



se muestran en la ecuación (4.2), estableciendo primero las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} \cos(x_2) &\approx 1 \\ \operatorname{sen}(x_2) \cos(x_2) &\approx 0.5 \operatorname{sen}(2x_2) \approx x_2 \\ \operatorname{sen}(x_2) &\approx x_2 \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Delta_1 \gamma \delta & -\Delta_1 \beta f_{va} & \Delta_1 \gamma f_{vt} \\ 0 & -\Delta_1 \alpha \delta & \Delta_1 \gamma f_{va} & -\Delta_1 \alpha f_{vt} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \beta \\ -\Delta_1 \gamma \end{bmatrix} u \quad (4.2)$$

con un valor de  $\Delta_1 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2)$ .

Para el punto de trabajo donde  $|x_2| \approx \frac{\pi}{8}$ , se llega a la ecuación (4.3), y en este caso las aproximaciones quedan como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \cos(x_2) &= \Gamma \approx \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \operatorname{sen}(x_2) \cos(x_2) &= 0.5 \operatorname{sen}(2x_2) \approx 0.5 \left(\frac{\operatorname{sen}(2x_2)}{2x_2} \cdot 2x_2\right) \approx \xi_1 x_2 \\ \operatorname{sen}(x_2) &\approx \frac{\operatorname{sen}(x_2)}{x_2} (x_2) \approx \xi_2 x_2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\operatorname{sen}(2x_2)}{2x_2} \\ \xi_2 &= \frac{\operatorname{sen}(x_2)}{x_2} \end{aligned}$$

y serán evaluadas en el punto donde se está haciendo la aproximación, i.e.  $x_2(t) = \frac{\pi}{8}$ . Por lo tanto, la ecuación (4.1) alrededor del punto  $x_2(t) = \frac{\pi}{8}$  está dada como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Delta_2 \gamma \delta \xi_1 & -\Delta_2 \beta f_{va} & \Delta_2 \gamma \Gamma f_{vt} \\ 0 & -\Delta_2 \alpha \delta \xi_2 & \Delta_2 \gamma \Gamma f_{va} & -\Delta_2 \alpha f_{vt} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma \Gamma \end{bmatrix} u \quad (4.3)$$

y con un valor de  $\Delta_2 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2 \Gamma^2)$ .

Se han seleccionado dos puntos de trabajo por lo cual se tendrán dos reglas difusas del tipo SI-ENTONCES:

**Regla 1 del modelo**

$$\begin{aligned} \text{SI } x_2(t) &\approx 0 \\ \text{ENTONCES } \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_1 u(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Regla 2 del modelo

$$\begin{aligned} &\text{SI } |x_2(t)| \approx \left| \frac{\pi}{8} \right| \\ &\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + \beta_2 u(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Delta_1 \gamma \delta & -\Delta_1 \beta f_{\text{ext}} & \Delta_1 \gamma f_{\text{ext}} \\ 0 & -\Delta_1 \alpha \delta & \Delta_1 \gamma f_{\text{ext}} & -\Delta_1 \alpha f_{\text{ext}} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \beta \\ -\Delta_1 \gamma \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Delta_2 \gamma \delta \xi_1 & -\Delta_2 \beta f_{\text{ext}} & \Delta_2 \gamma \Gamma f_{\text{ext}} \\ 0 & -\Delta_2 \alpha \delta \xi_2 & \Delta_2 \gamma \Gamma f_{\text{ext}} & -\Delta_2 \alpha f_{\text{ext}} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma \Gamma \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

**Comentario 3.** Note que el sistema difuso es un modelo aproximado. Por lo tanto se pueden definir funciones de membresía del tipo triangular, como se muestra en la figura 4.1, donde  $\mu_1(x_2(t)) = (\pi/8 - |x_2(t)|)/(\pi/8)$  y  $\mu_2(x_2(t)) = 1 - \mu_1(x_2(t))$  para las reglas difusas 1 y 2, respectivamente.

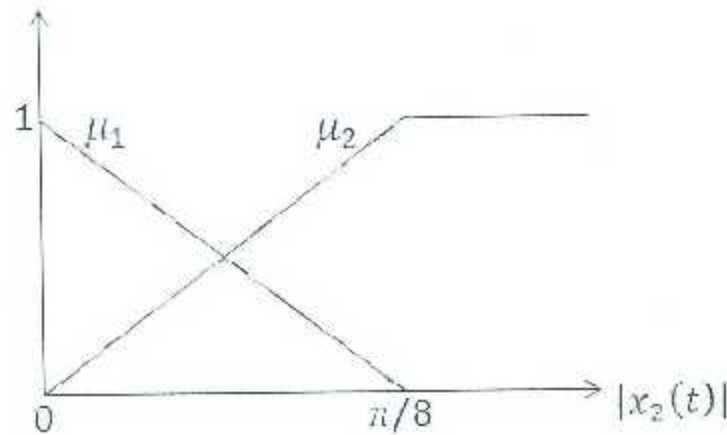


Figura 4.1: Funciones de Membresía del tipo Triangular.

#### 4.1.1. Controlabilidad del sistema

Antes de realizar los cálculos de las matrices de ganancia, es necesario verificar la prueba de controlabilidad [25].

Para estar en capacidad de determinar la controlabilidad, o bien, en forma alterna, para diseñar mediante la realimentación del estado para una determinada planta bajo cualquier representación o selección de las variables de estado, se puede deducir una matriz que debe

tener una propiedad particular si todas las variables de estado se van a controlar por la entrada de la planta,  $u$ . A continuación se expresa el requerimiento para controlabilidad, que incluye la forma, propiedad y nombre de esta matriz.

Una planta de  $n$ -ésimo orden cuya ecuación de estado es

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

es completamente controlable si la matriz

$$C_M = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (4.8)$$

es de rango  $n$ , donde  $C_M$  es la *matriz de controlabilidad*.

Evalúando los pares  $(A_1, B_1)$  y  $(A_2, B_2)$ , (4.6)-(4.7) de los modelos (4.4) y (4.5) con los parámetros de la tabla 3.1, se obtienen las siguientes matrices de controlabilidad para los subsistemas locales

$$C_{M1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4296 & -1.1727 & 4.2801 \\ 0 & -1.1823 & 3.3509 & -44.0429 \\ 0.4296 & -1.1727 & 4.2801 & -14.8546 \\ -1.1823 & 3.3509 & -44.0429 & 135.9509 \end{bmatrix}$$

$$C_{M2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4239 & -1.1408 & 3.9440 \\ 0 & -1.0776 & 3.0132 & -38.6892 \\ 0.4239 & -1.1408 & 3.9440 & -13.1497 \\ -1.0776 & 3.0132 & -38.6892 & 116.7524 \end{bmatrix}$$

las cuales son de rango pleno, por lo que luego el sistema es controlable.

#### 4.1.2. Diseño de un controlador estable

Para probar estabilidad se tiene que determinar una matriz de realimentación de ganancias  $K$ , para el sistema difuso en tiempo continuo, usando las condiciones de estabilidad del Teorema 1 [1].

Luego, resolviendo el problema de diseño del controlador difuso estable empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB<sup>®</sup>, se determinó la existencia de una matriz simétrica  $P_C$  común definida positiva dada como

$$P_C = \begin{bmatrix} 0.0771 & 0.2080 & 0.0566 & 0.0492 \\ 0.2080 & 2.0638 & 0.3356 & 0.3850 \\ 0.0566 & 0.3356 & 0.1713 & 0.1306 \\ 0.0492 & 0.3550 & 0.1306 & 0.1378 \end{bmatrix}$$

con matrices de ganancia para el controlador difuso (2.6) dadas por

$$K_1 = [-3.3689 \ -71.7805 \ -11.6402 \ -6.6550],$$

$$K_2 = [-3.5938 \ -76.5912 \ -11.9095 \ -7.0683]. \quad (4.9)$$

## 4.2. Método de seguimiento

En esta sección se procede a diseñar el controlador difuso T-S para seguimiento. Para el modelado difuso se utilizarán las mismas reglas que en el caso de regulación, (4.4) y (4.5), cuyas matrices en variables de estado se describen en (4.6)-(4.7).

El objetivo del control de seguimiento es que la posición del carro, i.e.  $x_1(t)$ , siga asintóticamente una señal de referencia senoidal  $y_r(t) = 0.1 \sin(0.2\pi t)$ . La transformada de Laplace de la señal de referencia es  $Y_r(s) = 0.0628/(s^2 + 0.3948)$ , por consiguiente el polinomio característico de la señal es  $\phi(s) = s^2 + 0.3948$ . Luego, el modelo del compensador de  $y_r(t)$  es dado por (2.15)

$$\dot{\bar{x}}_c(t) = A_c \bar{x}_c(t) + B_c e(t)$$

donde

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3948 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$e(t) = y_r(t) - x_1(t).$$

Con el modelo del servo-compensador se procede a aumentar el sistema como se muestra en la ecuación (2.16). Ya con el sistema aumentado, se puede calcular la matriz de ganancias  $K_a^i$  (2.25); las matrices aumentadas se muestran a continuación:

$$A_a^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \gamma \delta & -\Delta_1 \beta f_{vx} & \Delta_1 \gamma f_{vy} & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_1 \alpha \delta & \Delta_1 \gamma f_{vx} & -\Delta_1 \alpha f_{vy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.3948 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \beta \\ -\Delta_1 \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$A_a^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \gamma \delta \xi_1 & -\Delta_2 \beta f_{vx} & \Delta_2 \gamma f_{vy} & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_2 \alpha \delta \xi_2 & \Delta_2 \gamma f_{vx} & -\Delta_2 \alpha f_{vy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.3948 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

### 4.2.1. Controlabilidad del sistema

Antes de calcular las matrices  $K_a^i$  y  $P_c$  se deberá verificar la propiedad de controlabilidad del sistema mediante (4.8)

$$C_{M1} = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0.0004 & -0.0012 & 0.0043 & -0.0149 & 0.0811 \\ 0 & -0.0012 & 0.0034 & -0.0440 & 0.1360 & -1.4263 \\ 0.0004 & -0.0012 & 0.0043 & -0.0149 & 0.0811 & -0.3496 \\ -0.0012 & 0.0034 & -0.0440 & 0.1360 & -1.4263 & 4.7815 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0004 & 0.0012 & -0.0041 \\ 0 & 0 & -0.0004 & 0.0012 & -0.0041 & 0.0149 \end{bmatrix},$$

$$C_{M3} = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0.0004 & -0.0011 & 0.0039 & -0.0131 & 0.0670 \\ 0 & -0.0011 & 0.0030 & -0.0387 & 0.1168 & -1.2004 \\ 0.0004 & -0.0011 & 0.0039 & -0.0131 & 0.0670 & -0.2783 \\ -0.0011 & 0.0030 & -0.0387 & 0.1168 & -1.2004 & 3.9048 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0034 & 0.0011 & -0.0038 \\ 0 & 0 & -0.0004 & 0.0011 & -0.0038 & 0.0127 \end{bmatrix}$$

las cuales son de rango pleno, i.e.  $n = 6$  como las matrices  $A_a^i$ , por lo tanto los subsistemas lineales locales para seguimiento son controlables y por ende el sistema en general también lo es.

### 4.2.2. Diseño de un controlador estable

Resolviendo el problema de diseño del controlador difuso estable (2.11)-(2.12) empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB<sup>®</sup>, se determinó la existencia de una matriz simétrica  $P_C$  común definida positiva dada como

$$P_C = \begin{bmatrix} 0.0230 & 0.0603 & 0.0161 & 0.0128 & 0.0010 & -0.0125 \\ 0.0603 & 0.2205 & 0.0474 & 0.0414 & 0.0050 & -0.0322 \\ 0.0161 & 0.0474 & 0.0162 & 0.0123 & 0.0012 & -0.0110 \\ 0.0128 & 0.0414 & 0.0123 & 0.0113 & 0.0010 & -0.0080 \\ 0.0010 & 0.0050 & 0.0012 & 0.0010 & 0.0015 & -0.0004 \\ -0.0125 & -0.0322 & -0.0110 & -0.0080 & -0.0004 & 0.0110 \end{bmatrix}$$

con matrices de ganancia (2.25) para el controlador difuso  $K_a^* = -[K_1 \ K_2]$  dadas por

$$K_1 = [-19.4855 \ -108.5209 \ -21.2657 \ -14.1041], \quad K_{c1} = [-1.8752 \ 9.6473], \\ K_2 = [-20.8014 \ -115.8115 \ -22.1939 \ -15.0287], \quad K_{c2} = [-2.0085 \ 10.2388].$$

## 4.3. Observadores difusos T-S

En el sistema real se tienen dos estados no medibles, la velocidad del carro, i.e.  $x_3(t)$ , y la velocidad del péndulo, i.e.  $x_4(t)$ , por lo que es necesario el diseño de un observador difuso para la estimación de los mismos. Invocando el principio de separación, el problema de estabilidad del observador difuso puede ser resuelto atendiendo el Teorema 2 visto en el capítulo 2.

Considerando para las reglas del observador difuso la misma variable premisa del modelo difuso T-S (2.4)-(4.5), i.e.  $x_2(t)$ , éstas son establecidas como sigue:

*Regla 1 del observador*

$$\text{SI } x_2(t) \approx 0 \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_1 \hat{x}(t) + B_1 u(t) + J_1 (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_1 \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

*Regla 2 del observador*

$$\begin{aligned} & \text{SI } x_2(t) \approx \left| \frac{\pi}{8} \right| \\ & \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_2 \hat{x}(t) + B_2 u(t) + L_2 (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_2 \hat{x}(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde las matrices  $A_i$  y  $B_i$  son las mismas que se utilizaron para el método de regulación (4.6)-(4.7), y las matrices  $C_i$  multiplican a las salidas de sistema, en este caso, las salidas serán los estados disponibles para la medición  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , entonces

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

### 4.3.1. Observabilidad del sistema

Para determinar la observabilidad para sistemas bajo cualquier representación o selección de las variables de estado, se puede deducir una matriz que debe de tener una propiedad particular si todas las variables de estado se van a observar a la salida [25]. A continuación se presentan los requisitos de observabilidad, que incluyen la forma, propiedad y nombre de esta matriz.

Una planta de orden  $n$  cuyas ecuaciones de estado y de salida son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

es completamente observable si la matriz

$$O_M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango  $n$ , donde  $O_M$  se llama *matriz de observabilidad*.

Las matrices  $O_M$  calculadas para ambos subsistemas locales fueron las siguientes:

$$O_{M1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & -0.9126 & -2.7197 & 0.0035 \\ 0 & 29.5051 & 7.4837 & -0.1147 \\ 0 & 2.5865 & 7.4231 & -0.9226 \\ 0 & -10.2128 & -21.2113 & 29.5448 \end{bmatrix}$$

$$O_{M2} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0.8105 & -2.6831 & 0.0032 \\ 0 & 28.3662 & 6.8211 & -0.1131 \\ 0 & 2.2665 & 7.2212 & -0.8196 \\ 0 & -8.7380 & -19.0735 & 28.4010 \end{bmatrix}$$

las cuales son de rango pleno, por lo tanto se tiene que los pares  $(A_i, C_i)$  son observables.

### 4.3.2. Diseño de un observador estable

Ubicando los polos de lazo cerrado en  $[-25 \pm 10i \quad -25 \pm 10i \quad -27 \pm 10i \quad -27 \pm 10i]$  para obtener una convergencia de los estados estimados a los reales de una forma subamortiguada y rápida, y utilizando el comando *place* de MATLAB<sup>®</sup>, las matrices de ganancia para el observador resultan como

$$L_1 = \begin{bmatrix} 47.9553 & -0.3448 \\ 6.3538 & 53.2103 \\ 607.3659 & 4.8545 \\ 311.3413 & 835.2024 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 48.0082 & -0.4105 \\ 5.6934 & 53.1955 \\ 609.7503 & 3.1926 \\ 283.0115 & 833.1834 \end{bmatrix},$$

para las cuales, atendiendo al Teorema 2 y resolviendo vía LMIs, resulta

$$P_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2.1778 & 0.1923 & -0.1677 & -0.0102 \\ 0.1923 & 0.6646 & -0.0012 & -0.0431 \\ -0.1677 & -0.0012 & 3.0175 & -0.0002 \\ -0.0102 & -0.0431 & -0.0002 & 0.0037 \end{bmatrix}$$

la cual es una matriz simétrica definida positiva.

## 4.4. Controlador difuso T-S robusto

### 4.4.1. Método de regulación

Se utilizará el modelo no lineal del sistema carro-péndulo (3.23), la posición del péndulo, i.e.  $x_2(t)$ , es la variable premisa, de la cual se tomará su valor absoluto para las reglas difusas y empleando el recurso de aproximación local en espacios de partición difusa se llega al siguiente modelo difuso T-S con incertidumbres para el sistema carro-péndulo:

*Regla 1 del modelo*

$$\begin{array}{l} \text{SI } x_2(t) \text{ es } \approx 0 \\ \text{ENTONCES } \dot{x}(t) = (A_1 + D_{a1}\Delta_{a1}(t)E_{a1})x(t) + (B_1 + D_{b1}\Delta_{b1}(t)E_{b1})u(t) \end{array} \quad (4.15)$$

*Regla 2 del modelo*

$$\begin{array}{l} \text{SI } x_2(t) \text{ es } \approx \frac{\pi}{8} \\ \text{ENTONCES } \dot{x}(t) = (A_2 + D_{a2}\Delta_{a2}(t)E_{a2})x(t) + (B_2 + D_{b2}\Delta_{b2}(t)E_{b2})u(t) \end{array} \quad (4.16)$$

donde las matrices  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  están dadas por (4.6)–(4.7), y las incertidumbres paramétricas se asignan mediante las siguientes matrices y parámetros:

$$\begin{aligned}
 D_{a1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_1 \beta f_{vz} \\ \Delta_1 \gamma f_{va} \end{bmatrix}, \quad D_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_2 \beta f_{vz} \\ \Delta_2 \gamma f_{va} \end{bmatrix} \\
 D_{b1} &= D_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 E_{a1} &= E_{a2} = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \\
 E_{b1} &= \begin{bmatrix} \Delta_1 \beta \\ -\Delta_1 \gamma \end{bmatrix}, \quad E_{b2} = \begin{bmatrix} \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma \end{bmatrix} \\
 \Delta_{a1}(t) &= \left[ \frac{1}{\gamma_{a1}} \operatorname{sen}(t) \right], \quad \Delta_{a2}(t) = \left[ \frac{1}{\gamma_{a2}} \operatorname{sen}(t) \right] \\
 \Delta_{b1}(t) &= \left[ \frac{1}{\gamma_{b1}} \operatorname{sen}(t) \right], \quad \Delta_{b2}(t) = \left[ \frac{1}{\gamma_{b2}} \operatorname{sen}(t) \right] \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

con  $\Gamma = \cos(\pi/8)$ ,  $\gamma_{a1} = \gamma_{a2} = \gamma_{b1} = \gamma_{b2} = 10$ ,  $\Delta_1 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2)$ ,  $\Delta_2 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2\Gamma^2)$  y las funciones de membresía  $\mu_1(x_2(t)) = (\pi/8 - x_2(t))/(\pi/8)$  y  $\mu_2(x_2(t)) = 1 - \mu_1(x_2(t))$ , para las reglas difusas 1 y 2 respectivamente (véase figura 4.1).

$\Delta_{a_i}(t)$  son funciones que cumplen con (2.38)–(2.41) [9], las matrices  $D_{a_i}$  contienen los términos de la fricción viscosa del carro que son los elementos a los cuales se va a añadir incertidumbre,  $E_{a_i}$  se asigna para dar dimensiones al producto  $D_{a_i}\Delta_{a_i}E_{a_i}$  y así pueda sumarse a la matriz  $A_i$  (2.37),  $D_{b_i}$  se asigna para dimensionar el producto  $D_{b_i}\Delta_{b_i}E_{b_i}$  para sumarse a  $B_i$  y añadir incertidumbres a la señal de control, mientras que  $E_{b_i}$  contiene los parámetros de esas incertidumbres. Por último  $\gamma_{a_i}$  y  $\gamma_{b_i}$  son los valores que asignan el rango de incertidumbre, en este caso se escogió de 10, lo que da un margen de  $\pm 0.1$  del valor que se tenía calculado originalmente.

Implementando las desigualdades lineales matriciales del Teorema 4 con un valor para  $\varepsilon = 2 > 1$  y resolviendo el problema de diseño del controlador difuso robusto estable empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB<sup>®</sup> se determinó la existencia de una matriz simétrica  $P_{\mathcal{R}}$  común definida positiva dada como

$$P_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0.0000106 & 0.0001 & 0.0000305 & 0.000028 \\ 0.0001550 & 109.6329 & 18.5907738 & 20.393902 \\ 0.0000305 & 18.5907 & 3.1564865 & 3.458199 \\ 0.0000289 & 20.3939 & 3.4581996 & 3.793799 \end{bmatrix}$$

con matrices de ganancia

$$K_1 = [-0.00124 \ -953.4265 \ -161.6099 \ -177.3404]$$



$$E_2 = [-0.00186 \quad -1422.5864 \quad -240.9994 \quad -264.3756].$$

**Comentario 4.** La controlabilidad del sistema quedó comprobada en la sección 4.1 debido a que las matrices  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son las mismas que se utilizaron para el caso de regulación sin incertidumbres.

#### 4.4.2. Método de seguimiento

Para el caso de seguimiento se utilizará la teoría del modelado difuso T-S con incertidumbres con la teoría del control difuso de seguimiento T-S.

Se utilizará un modelo aumentado de la forma (2.18), por lo tanto las reglas del modelo difuso T-S robusto para seguimiento toman la siguiente forma:

##### Regla 1 del modelo

SI  $x_2(t)$  es  $\approx 0$

$$\text{ENTONCES } \dot{x}_a(t) = (A_a^1 + D_{a1}\Delta_{a1}(t)E_{a1})x(t) + (B_a^1 + D_{b1}\Delta_{b1}(t)E_{b1})u(t) \quad (4.18)$$

##### Regla 2 del modelo

SI  $x_2(t)$  es  $\approx \frac{\pi}{2}$

$$\text{ENTONCES } \dot{x}_a(t) = (A_a^2 + D_{a2}\Delta_{a2}(t)E_{a2})x(t) + (B_a^2 + D_{b2}\Delta_{b2}(t)E_{b2})u(t) \quad (4.19)$$

Con el modelo del servo-compensador, para que la salida siga una señal de referencia  $y_r(t) = 0.1 \sin(0.2\pi t)$ , se procede a aumentar el sistema como se muestra en la ecuación (2.16); las matrices aumentadas se muestran a continuación:

$$A_w^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \gamma \delta & -\Delta_1 \beta f_{vx} & \Delta_1 \gamma f_{vt} & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_1 \alpha \delta & \Delta_1 \gamma f_{vx} & -\Delta_1 \alpha f_{vt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.3948 & 0 \end{bmatrix}, B_w^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \beta \\ \Delta_1 \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$A_w^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \gamma \delta \xi_1 & -\Delta_2 \beta f_{vx} & \Delta_2 \gamma f_{vt} & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_2 \alpha \delta \xi_2 & \Delta_2 \gamma f_{vx} & -\Delta_2 \alpha f_{vt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0.3948 & 0 \end{bmatrix}, B_w^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma f_{vt} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

y las incertidumbres paramétricas se asignan mediante las siguientes matrices y parámetros:

$$D_{a1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_1 \beta f_{vx} \\ \Delta_1 \gamma f_{vx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_2 \beta f_{vx} \\ \Delta_2 \gamma f_{vx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D_{y1} - D_{y2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 E_{a2} - E_{a1} &= [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \\
 E_{b1} &= \begin{bmatrix} \Delta_1 \beta \\ -\Delta_1 \gamma \end{bmatrix}, \quad E_{b2} = \begin{bmatrix} \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma \Gamma \end{bmatrix} \\
 \Delta_{c1}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{a1}} \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta_{c2}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{a2}} \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix} \\
 \Delta_{y1}(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{b1}} \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta_{y2}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{b2}} \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

con  $\Gamma = \cos(\pi/8)$ ,  $\gamma_{a1} = \gamma_{a2} = \gamma_{b1} = \gamma_{b2} = 10$ ,  $\Delta_1 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2)$ ,  $\Delta_2 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2\Gamma^2)$ . Las cuales corresponden a las matrices de la ecuación (4.17) aumentadas. Las funciones de membresía  $\mu_1(x_2(t)) = (\pi/8 - x_2(t))/(\pi/8)$  y  $\mu_2(x_2(t)) = 1 - \mu_1(x_2(t))$ , para las reglas difusas 1 y 2 respectivamente (véase figura 4.1).

Implementando las desigualdades matriciales del Teorema 4, utilizando las matrices  $A_a^1, A_a^2, B_a^1$  y  $B_a^2$ , y resolviendo el problema de diseño del controlador difuso T-S robusto estable empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB<sup>®</sup>, se determinó la existencia de una matriz simétrica  $P_K$  común definida positiva dada como

$$P_K = \begin{bmatrix} 0.000050250 & 0.00044 & 0.000095 & 0.000081 & 0.000007467 & -0.000000000 \\ 0.000448540 & 78.05922 & 13.160875 & 14.547298 & 0.000062384 & 0.000037696 \\ 0.000095253 & 13.16087 & 2.223674 & 2.452430 & 0.000013321 & 0.000007486 \\ 0.000081199 & 14.54729 & 2.452430 & 2.711213 & 0.000011710 & 0.000007076 \\ 0.000007467 & 0.00006 & 0.000013 & 0.000011 & 0.000002948 & 0.000000000 \\ -0.000000000 & 0.00003 & 0.000007 & 0.000007 & 0.000000000 & 0.000007467 \end{bmatrix}$$

con matrices de ganancia

$$\begin{aligned}
 F_1 &= [-0.00367321 \ -725.02502 \ -122.09471 \ -135.13451], \\
 F_2 &= [-0.00370942 \ -739.54154 \ -124.52753 \ -137.84322], \\
 F_{c1} &= [-0.000508881 \ -0.000322926], \\
 F_{c2} &= [ \ 0.000513693 \ -0.000327362].
 \end{aligned}$$

**Comentario 5.** La controlabilidad del sistema quedó comprobada en la sección 4.1 ya que las matrices  $A_a^1, A_a^2, B_a^1$  y  $B_a^2$  son las mismas que se utilizaron para el caso de seguimiento sin incertidumbres.

# Capítulo 5

## Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos para los controladores diseñados en el capítulo anterior. Primero se presentan las leyes de control implementadas y después los resultados obtenidos tanto en simulación como en experimentación.

### 5.1. Leyes de control utilizadas

Fue necesaria la implementación de un controlador PID en el carro más una compensación de la fricción de Coulomb para mejorar la respuesta del sistema y a su vez garantizar que el carro no se acerque a los límites del riel.

#### Control difuso T-S para regulación

Ahora se procede a definir el controlador difuso T-S con el PID más la compensación de fricción. Primero se implementa un control PID más compensación de fricción de la siguiente manera:

$$u_{(PID)} = k_p \tilde{x}_1 + k_d \tilde{x}_2 + k_i \int \tilde{x}_1 dt + \sigma x_3 \quad (5.1)$$

donde  $\tilde{x}_1$  es el error de posición del carro,  $\tilde{x}_2$  es el error de velocidad del carro,  $k_p$ ,  $k_d$  y  $k_i$  son las ganancias proporcional, derivativa e integral respectivamente, por último  $\sigma$  es la ganancia que multiplica al estado estirado de fricción de Dahl  $x_3 = z$ . Por lo tanto, la ley de control propuesta está dada por la siguiente expresión:

$$u(t) = u_{TS}(x_1, x_2, x_3, x_4) + u_{PID}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_3) \quad (5.2)$$

En la figura 5.1 se muestra el diagrama a bloques de la ley de control y la planta no lineal.

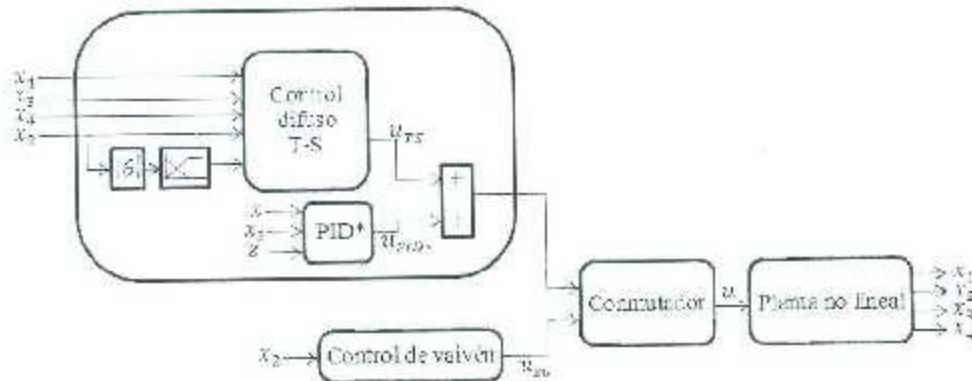


Figura 5.1: Diagrama a bloques del controlador difuso T-S para regulación.

### Control difuso T-S con observador para regulación

El controlador difuso T-S con observador con el PID más la compensación de fricción se define como:

$$\hat{u}(t) = u_{TSO}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}) + u_{PID}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \quad (5.3)$$

donde:

$$u_{PID} = k_p \hat{x}_1 + k_d \hat{x}_2 + k_i \int \hat{x}_1 dt + \sigma \hat{x}_3 \quad (5.4)$$

para el cual  $\hat{x}$  es el error de posición del carro,  $\hat{x}_2$  es el error de velocidad del carro en el cual se utilizará el estimado de la velocidad  $\hat{x}_3$  en lugar de la velocidad real  $x_3$ .  $k_p$ ,  $k_d$ ,  $k_i$  y  $\sigma$  tienen la misma definición que en el caso anterior.

En la figura 5.2 se muestra el diagrama a bloques de la ley de control y la planta no lineal.

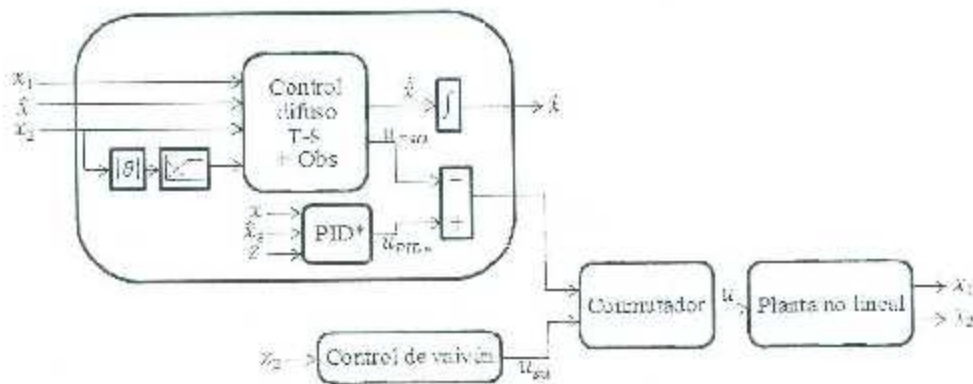


Figura 5.2: Diagrama a bloques del controlador difuso T-S con observador para regulación.

### Control difuso T-S robusto con observador para regulación

Por último, para el caso de regulación se tiene el siguiente controlador difuso T-S robusto con observador más PID con una compensación de fricción (véase figura 5.3), definido por la siguiente ecuación:

$$u(t) = u_{TSR}(\hat{x}_1, x_2, \hat{x}) + u_{PID*}(\hat{x}_1, \hat{x}_3, x_3) \quad (5.5)$$

donde

$$u_{PID*} = k_p \hat{x}_1 + k_d \hat{x}_3 + k_i \int \hat{x}_1 dt + \sigma x_3 \quad (5.6)$$

donde el controlador  $u_{PID*}$  es el mismo que en el caso del controlador con observador no robusto pero con ganancias ajustadas en diferentes valores, además, de que las ganancias del controlador  $u_{TSR}$  también son diferentes.

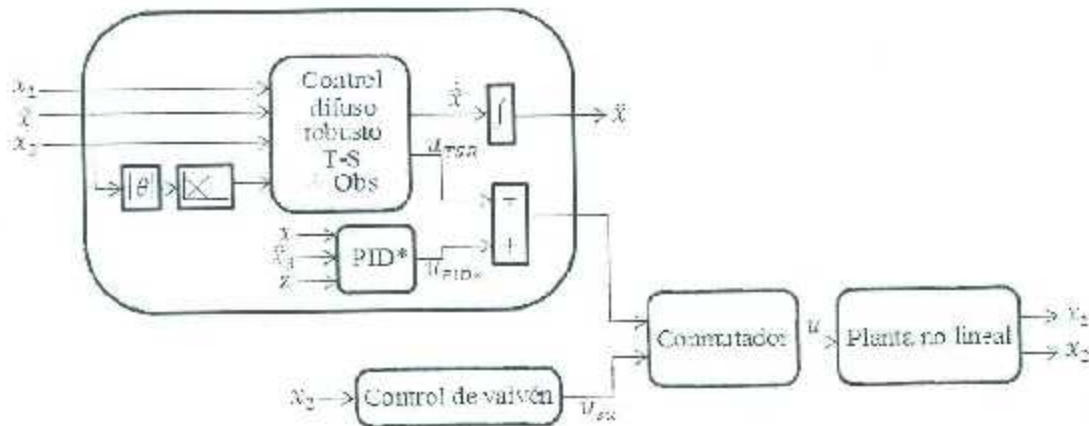


Figura 5.3: Diagrama a bloques del controlador difuso T-S robusto con observador para regulación.

### Control difuso T-S para seguimiento

Para el caso de regulación del péndulo y seguimiento del carro se tiene que aumentar el sistema, las leyes de control que se emplearán tendrán la misma estructura pero el controlador difuso T-S dependerá, además de los estados de la planta, de los estados del servo-compensador:

$$u(t) = u_{TS}(\hat{x}_1, x_2, x_3, \hat{x}_4, x_5, x_6) + u_{PID*}(\hat{x}_1, \hat{x}_3, x_3) \quad (5.7)$$

donde

$$u_{PID*} = k_p \hat{x}_1 + k_d \hat{x}_3 + k_i \int \hat{x}_1 dt + \sigma x_3 \quad (5.8)$$

La figura 5.4 muestra el diagrama a bloques de la ley de control y la planta no lineal.

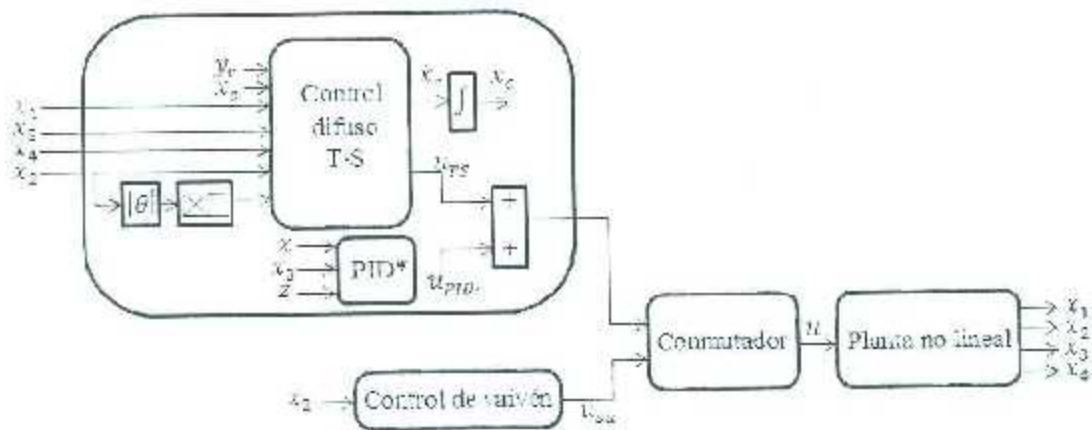


Figura 5.4: Diagrama a bloques del controlador difuso T-S para seguimiento.

### Control difuso T-S con observador para seguimiento

Las leyes de control que se emplearán tendrán la misma estructura que para el caso de regulación añadiendo los estados del servo-compensador.

$$u(t) = u_{ISO}(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_3, \hat{x}_5) + u_{PID^*}(\hat{x}_1, \hat{x}_3, \hat{x}_5), \quad (5.9)$$

donde

$$u_{PID^*} = k_p \hat{x}_1 + k_d \hat{x}_3 + k_i \int \hat{x}_1 dt + a x_5 \quad (5.10)$$

tal y como se muestra en la figura 5.5.

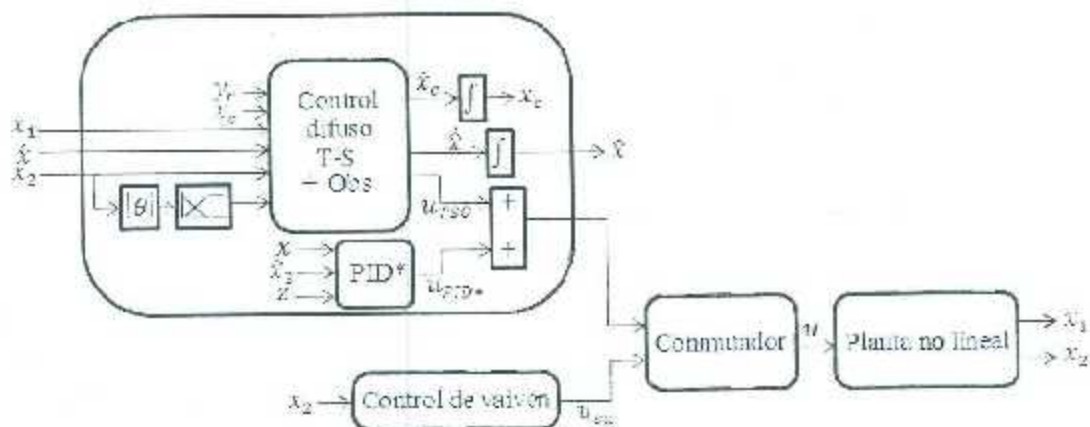


Figura 5.5: Diagrama a bloques del controlador difuso T-S con observador para seguimiento.

### Control difuso T-S robusto con observador para seguimiento

El controlador difuso T-S robusto con observador diseñado para una tarea de seguimiento se muestra a continuación:

$$u(t) = v_{TSR}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}, \hat{x}_{e1}, \hat{x}_{e2}) + u_{PID}(\hat{x}_1, \hat{x}_3, \hat{x}_3), \quad (5.11)$$

dónde

$$u_{PID} = k_p \hat{x}_1 + k_d \hat{x}_3 + k_i \int \hat{x}_1 dt + \sigma x_3 \quad (5.12)$$

En la figura 5.6 se presenta el diagrama a bloques de la ley de control y la planta no lineal.

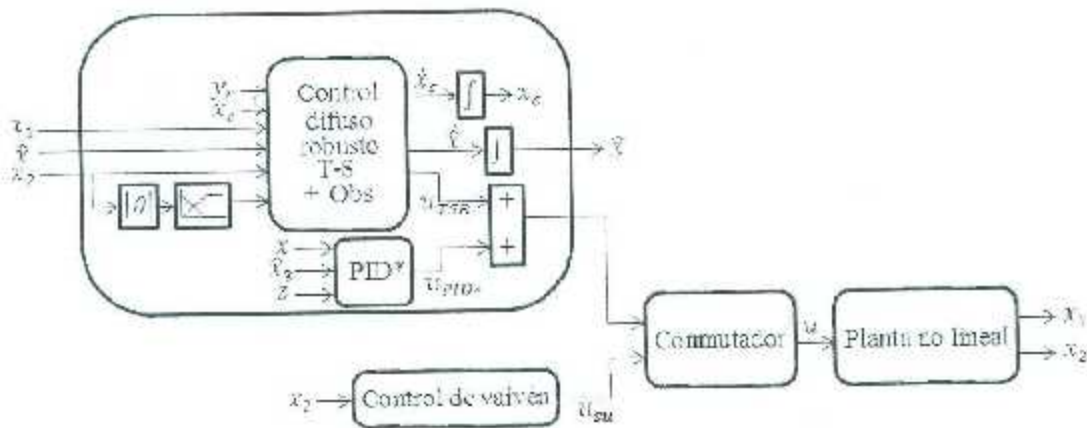


Figura 5.6: Diagrama a bloques del controlador difuso T-S robusto con observador para seguimiento.

## 5.2. Control de vaivén

Para llevar al péndulo de su posición de reposo a la posición vertical hacia arriba se utilizó un control de vaivén o *swing-up*, como se sugiere en [26] y [27], el cual hace oscilar al péndulo con movimientos relativamente cortos del carro. El control de vaivén tiene como objetivo llevar al péndulo desde la posición vertical hacia abajo a un punto cercano al equilibrio inestable y llegar con una velocidad mínima. Las oscilaciones en el péndulo son producidas mediante desplazamientos constantes del carro en ambos sentidos, lo cual se logra asignando pares constantes positivo y negativo, o bien aplicar su equivalente en voltajes constantes positivo o negativo al motor del carro según el siguiente algoritmo de

control:

$$\begin{aligned} \text{Si } (\theta + \pi) > 0 \text{ entonces } u &= V_1 \\ \text{Si } (\theta - \pi) < 0 \text{ entonces } u &= -V_2 \\ \text{Si } (\theta + \pi) = 0 \text{ entonces } u &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Se toma como posición inicial del péndulo  $\theta = -180$  grados, considerando que  $\theta$  se incrementa en sentido horario, y que una señal de control  $u$  positiva desplaza el carro en su posición  $x$  hacia la derecha.

Para la simulación se utilizaron los siguientes valores para  $V_1$  y  $V_2$

$$V_1 = 29.5 \text{ [N]}$$

$$V_2 = 26 \text{ [N]}$$

En el experimento se cambiaron esos valores por unos más pequeños ( $V_1 = 23.2 \text{ [N]}$  y  $V_2 = 21 \text{ [N]}$ ) ya que la velocidad que alcanzaba el péndulo y el carro eran muy grandes y esto ocasionaba que el carro se acercara a los límites del riel, lo cual no es recomendable porque pudiera causar un accidente.

## 5.3. Resultados obtenidos de simulación

### 5.3.1. Regulación

En las figuras 5.7-5.9 se muestran los resultados obtenidos en simulación para el caso de regulación.

Para el caso del controlador difuso T-S sin observador (véase figura 5.7) se aprecia un pequeño error tanto en la posición del carro como del péndulo, ambos oscilan alrededor de cero con amplitudes pequeñas, además, también se aprecia que la señal de control tiende a disminuir hasta un valor cercano a cero.

Se utilizó un compensador de la fricción de Coulomb y un control PD, cuyas ganancias fueron sintonizadas como  $\sigma = 7990$ ,  $k_p = -8$  y  $k_v = -2$ .

La figura 5.8 muestra el resultado en simulación implementando un controlador difuso T-S con observador, en la cual se aprecia que tanto el péndulo como el carro llegan a cero, sin embargo, tienen pequeñas oscilaciones alrededor del cero. En la gráfica de la señal de control se aprecia cómo la señal de control tiende a cero conforme pasa el tiempo.

Se utilizó un compensador de la fricción de Coulomb y un control PD cuyas ganancias ya sintonizadas quedaron definidas con los siguientes valores:  $k_p = -6$  y  $k_v = -2$ , para el



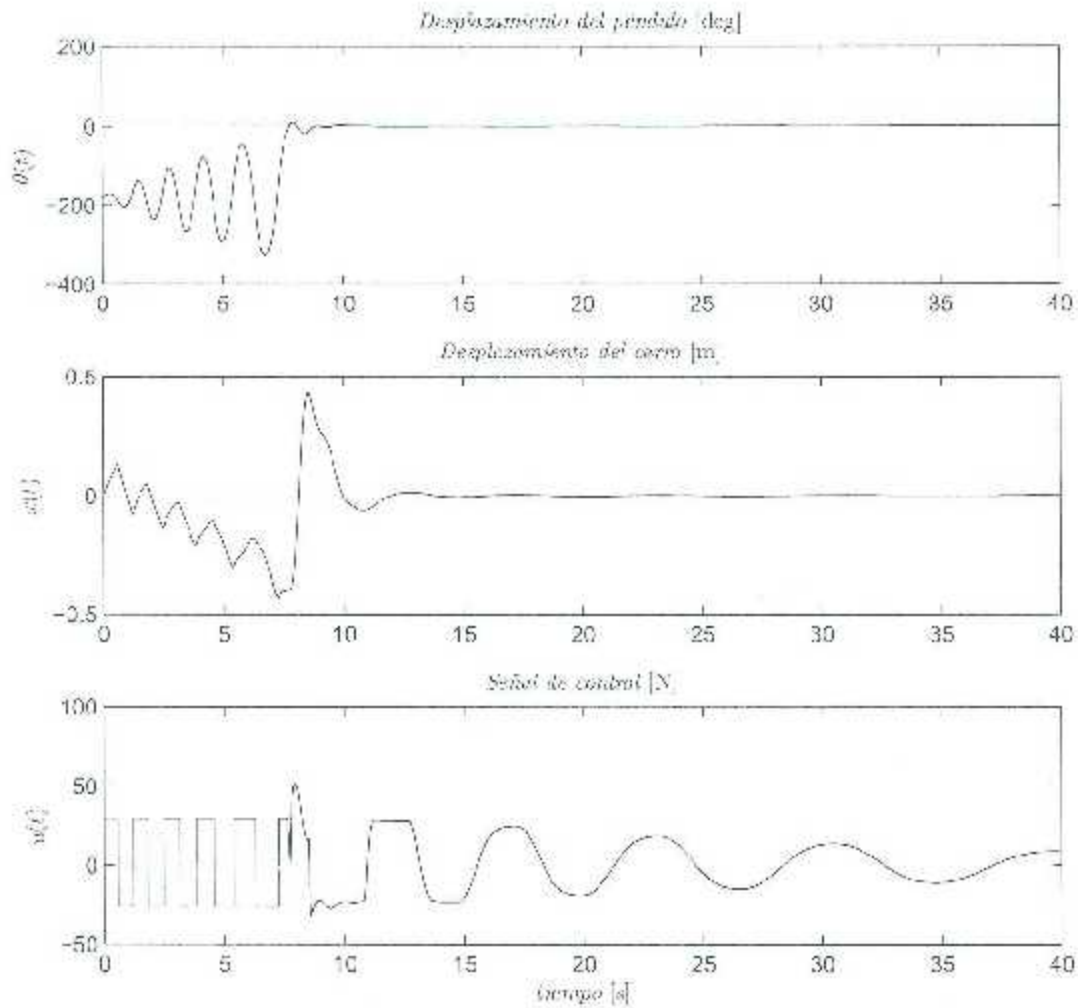


Figura 5.7: Resultados en simulación de regulación aplicando un controlador difuso T-S.

caso del control PD, y  $\sigma = 8000$  para la compensación de la fricción.

En la figura 5.9 se muestran los resultados obtenidos por el controlador difuso T-S robusto con observador, su desempeño es similar a los anteriores, el carro y el péndulo oscilan alrededor del cero a pequeñas amplitudes. La señal de control no llega a cero pero se mantiene en un valor bajo a comparación de la fuerza aplicada al carro en los otros controladores. En este caso, además de la compensación de fricción  $\sigma = 8000$ , se implementó una ganancia  $k_f = -5.5$  para mejorar la respuesta del sistema.

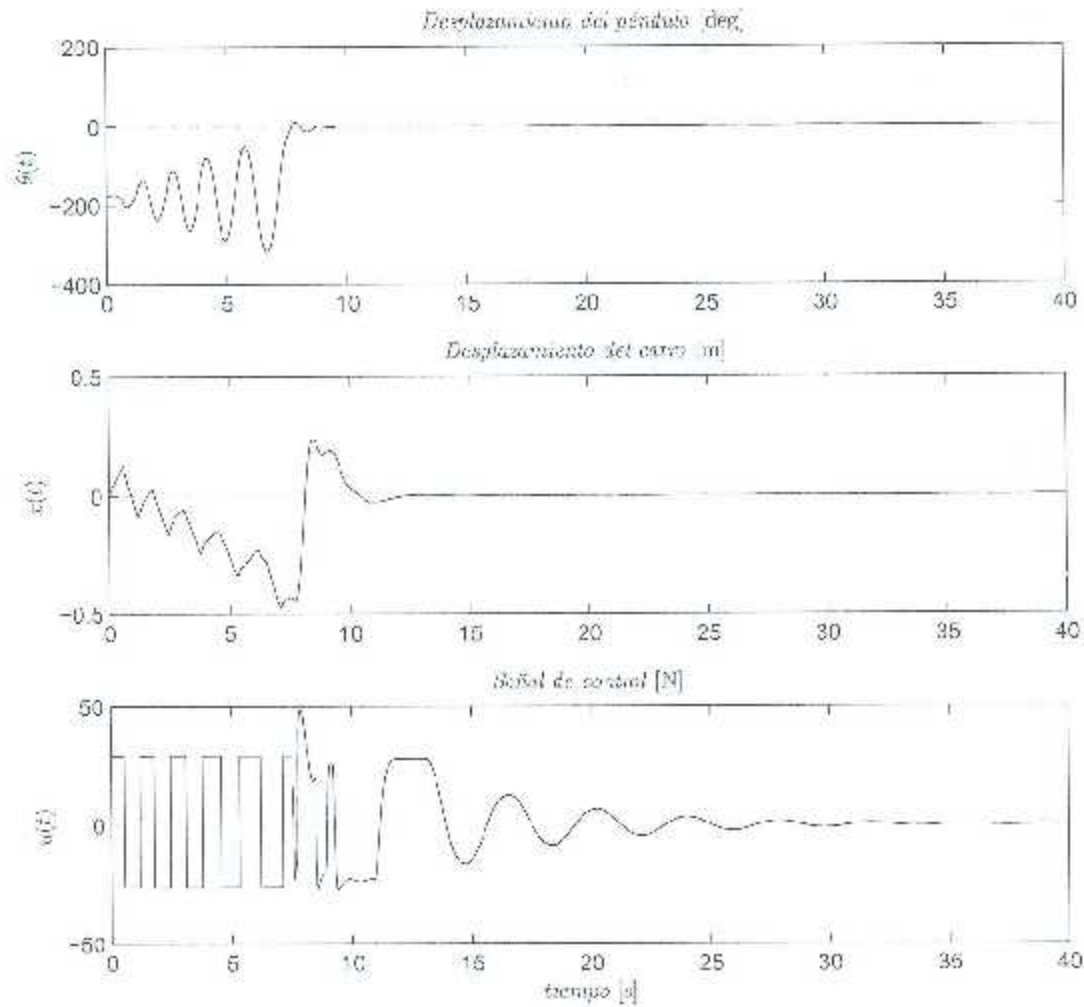


Figura 5.8: Resultados en simulación de regulación aplicando un controlador difuso T-S con observador.

Por último, en la figura 5.10 se presentan los errores obtenidos de los distintos controladores en simulación para el caso de regulación. En la primer figura se muestra el error de posición del péndulo, en el cual se aprecia que el controlador robusto es el que funciona mejor, para el caso de la posición del carro, el controlador robusto es el que logra llevar el carro a cero más rápido.

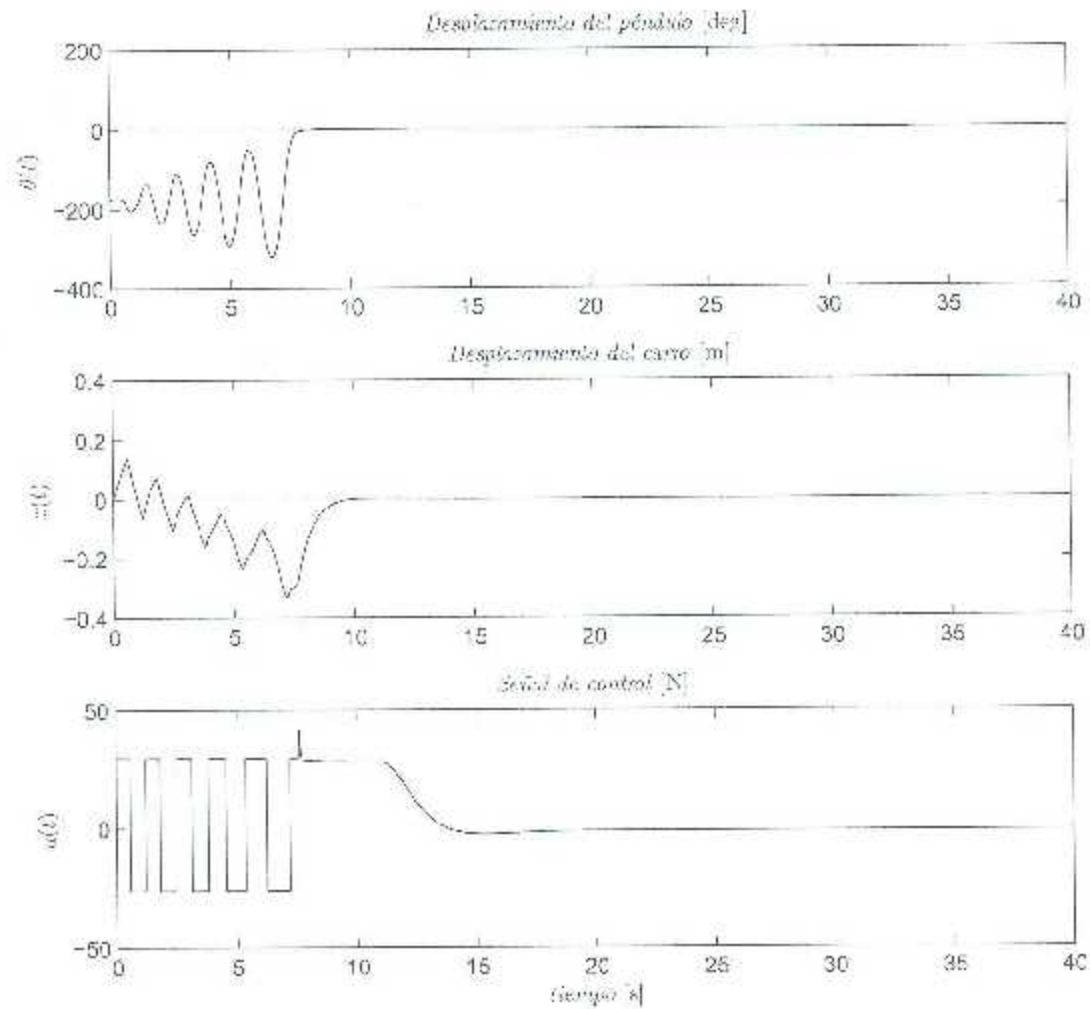


Figura 5.9: Resultados en simulación de regulación aplicando un controlador difuso T-S robusto con observador.

### 5.3.2. Seguimiento

En las figuras 5.11-5.13 se muestran los resultados de seguimiento de cada controlador obtenidos mediante simulación. Para los tres controladores el péndulo se comporta de manera similar, llega a cero y se mantiene alrededor de dicho valor.

En la figura 5.11 se muestra cómo la señal de referencia es seguida por el carro prácticamente sin error poco después de los 20 segundos, el par de control se mantiene en

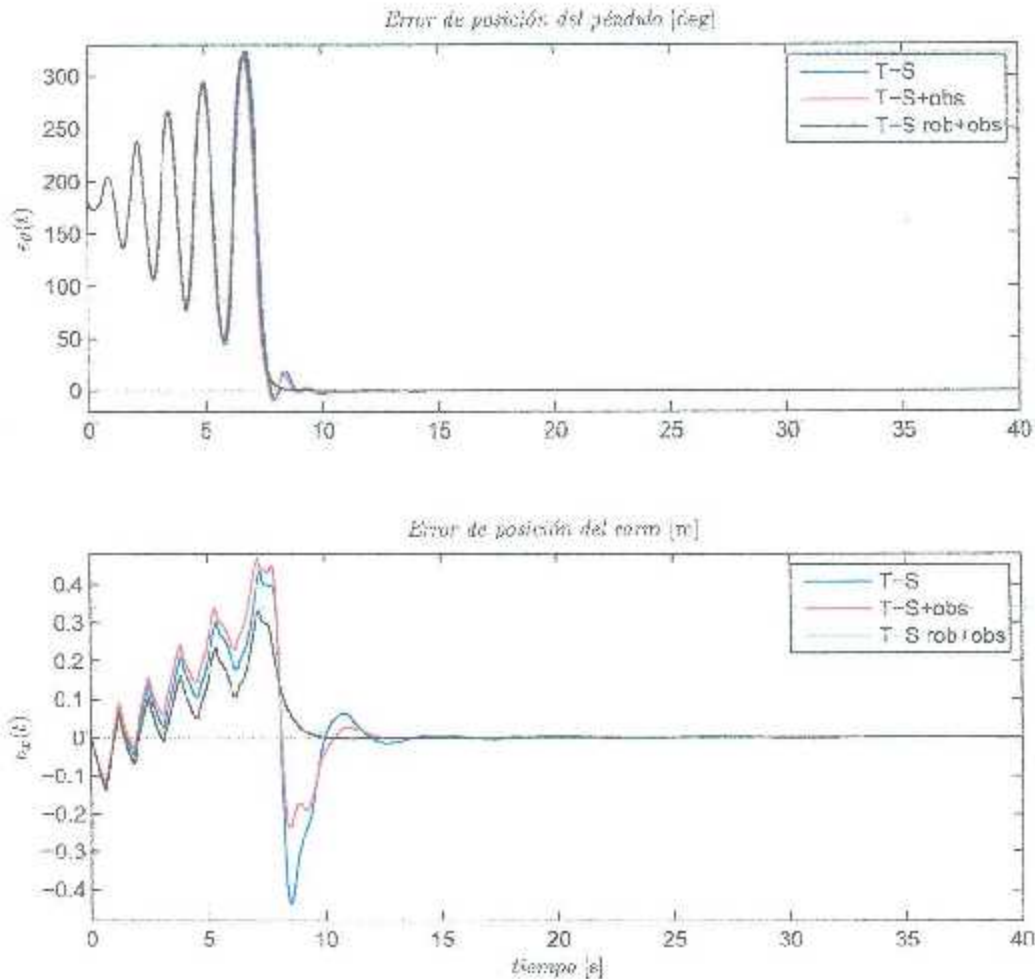


Figura 5.10: Comparación de errores de posición en simulación del péndulo y del carro para el caso de regulación.

rangos no muy altos y solamente presenta un pico con un valor de aproximadamente -45 N cuando hace el intercambio de controlador.

Se utilizó un compensador de la fricción de Coulomb con ganancia  $\sigma = 8000$  y un control PID con ganancias  $k_p = -10$  y  $k_v = -3$ .

En el caso de controlador T-S con observador, figura 5.12, se aprecia que el carro alcanza la señal de referencia prácticamente sin error en poco más de 20 segundos, que es casi el mismo tiempo que le toma al controlador difuso T-S sin observador. La señal de control y el desplazamiento del péndulo también es similar al que presenta el controlador

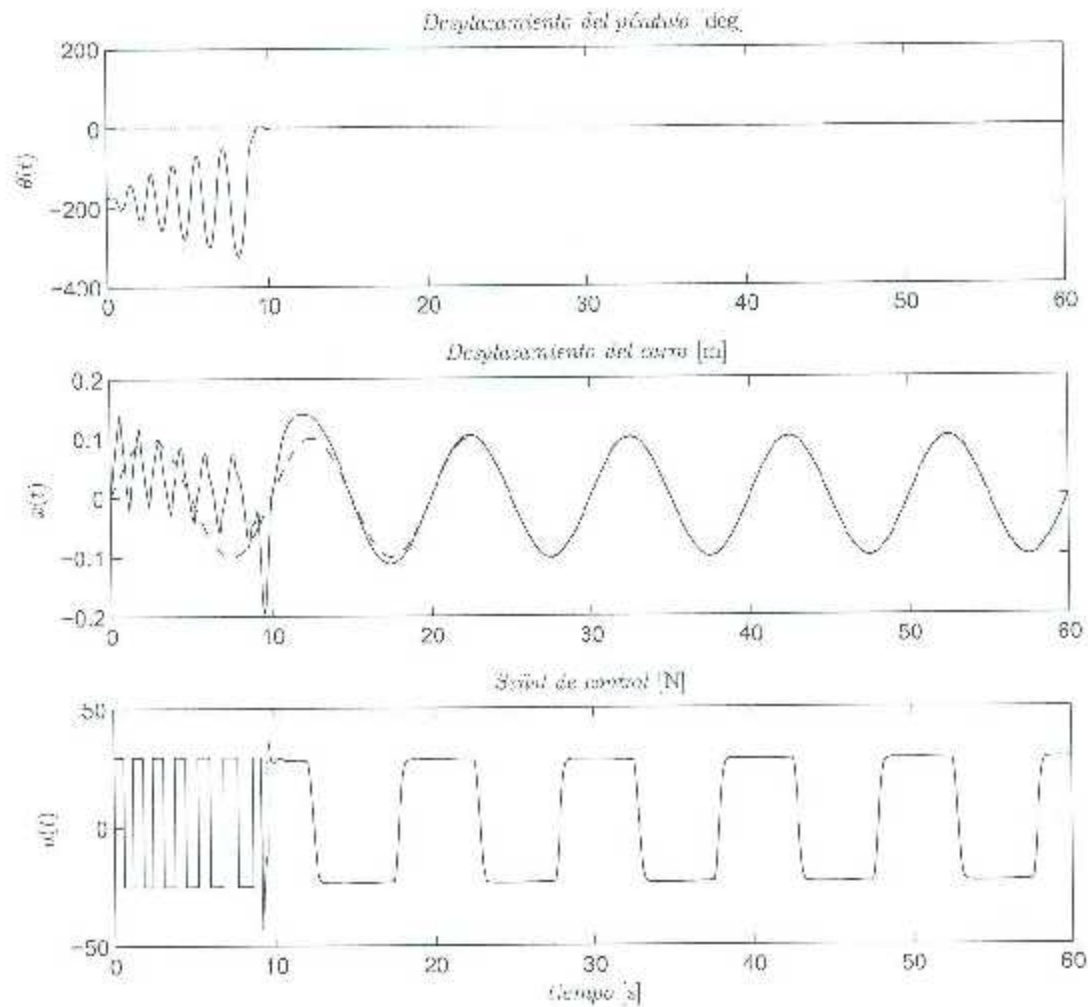


Figura 5.11: Resultados en simulación de seguimiento aplicando un controlador difuso T-S.

sin observador. En este caso  $\sigma = 8000$ ,  $k_p = -8$  y  $k_v = -3$

La figura 5.13 muestra como el carro presenta un pequeño desfase con respecto a la señal de referencia, el péndulo tiene el mismo comportamiento que en los casos anteriores. Fue necesario utilizar un control PD además de la compensación de la fricción, las ganancias de controlador PD fueron cambiadas buscando una mejor respuesta pero no se consiguió, también se implementó una ganancia integral pero el rendimiento no mejoró. En simulación no se logró eliminar ese desfase, para la compensación de fricción se

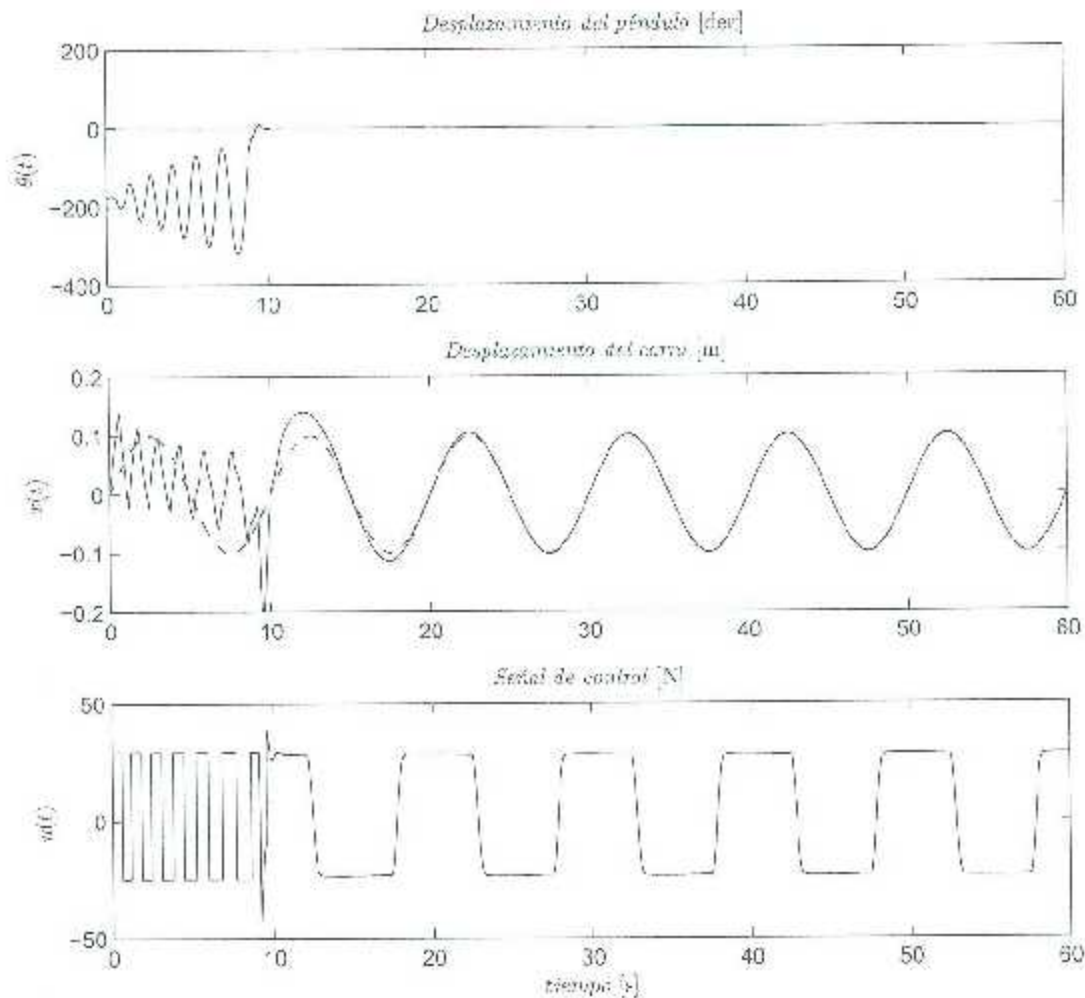


Figura 5.12: Resultados en simulación de seguimiento aplicando un controlador difuso T-S con observador.

utilizó un valor  $\sigma = 8000$  y para el PD  $k_p = -60$  y  $k_v = -16$ .

Por último, en la figura 5.14 se presentan los errores obtenidos de los distintos controladores. En la primera figura se muestra el error de posición del péndulo, los tres controladores se comportan de manera muy similar, logran llevar el péndulo a la posición deseada en el mismo tiempo prácticamente. Para el caso de la posición del carro, el controlador robusto es el único que no logró llevar el error cerca de cero, como se mencionó en la figura anterior

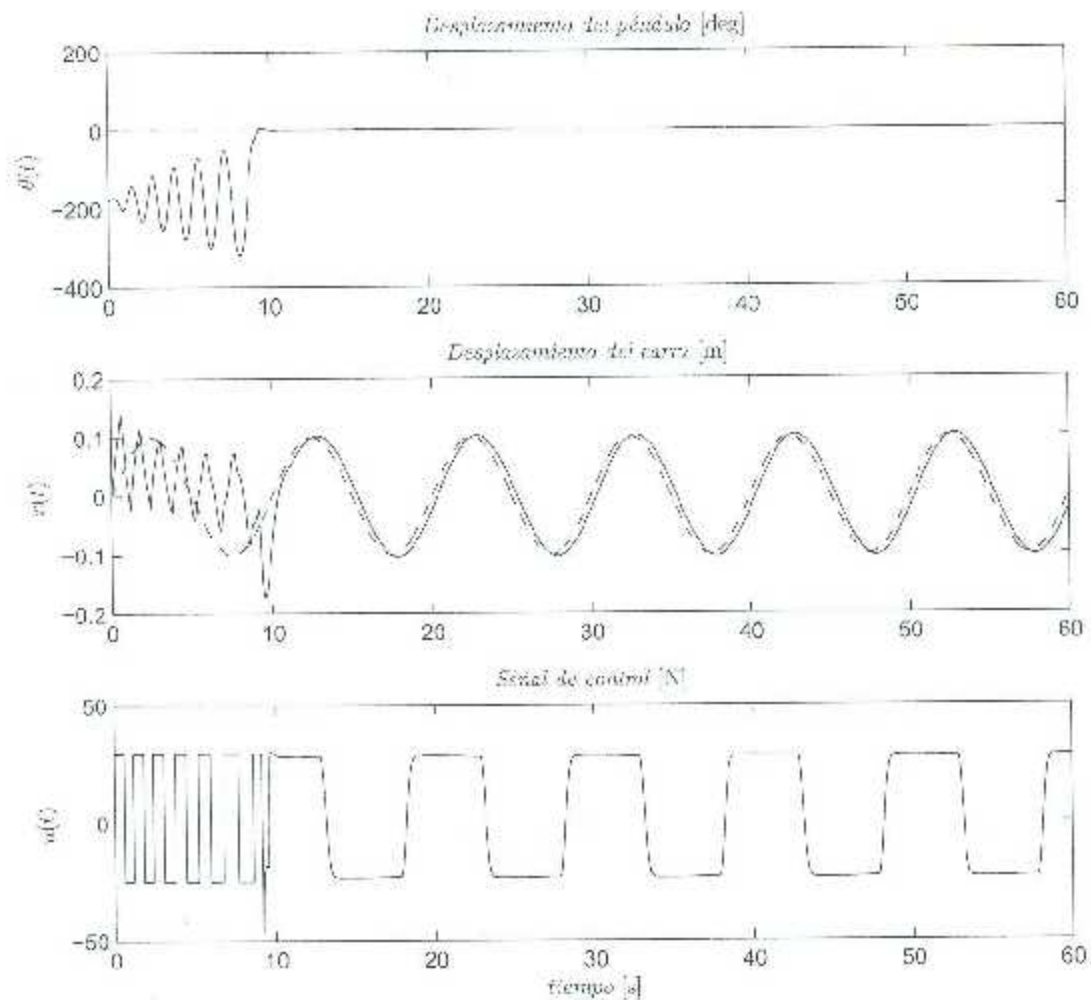


Figura 5.13: Resultados en simulación de seguimiento aplicando un controlador difuso T-S robusto con observador.

el carro tiene un pequeño desfase con respecto a la señal de referencia, habrá que ver experimentalmente si el controlador robusto sigue siendo el único que no logra seguir la señal con un error pequeño.

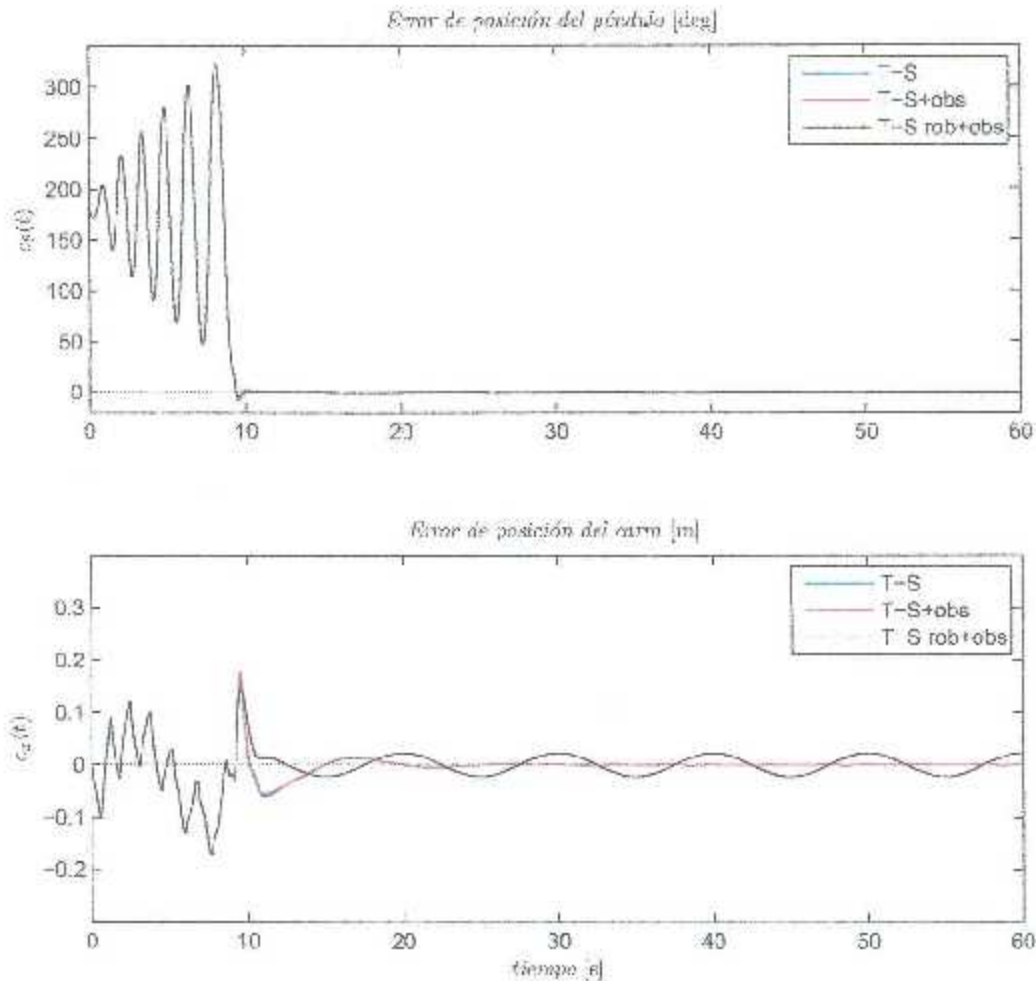


Figura 5.14: Comparación de errores de posición en simulación del péndulo y del carro para el caso de seguimiento.

## 5.4. Resultados experimentales

### 5.4.1. Regulación

En las figuras 5.15-5.17 se muestran los resultados obtenidos en tiempo real para el caso de regulación, los tres controladores logran mantener al péndulo alrededor de la posición vertical hacia arriba y al carro cerca del centro del riel, es decir, alrededor del cero.

Para el caso del controlador difuso T-S sin observador, figura 5.15, se aprecia que tanto la posición del carro como la del péndulo presentan oscilaciones alrededor del cero, y la



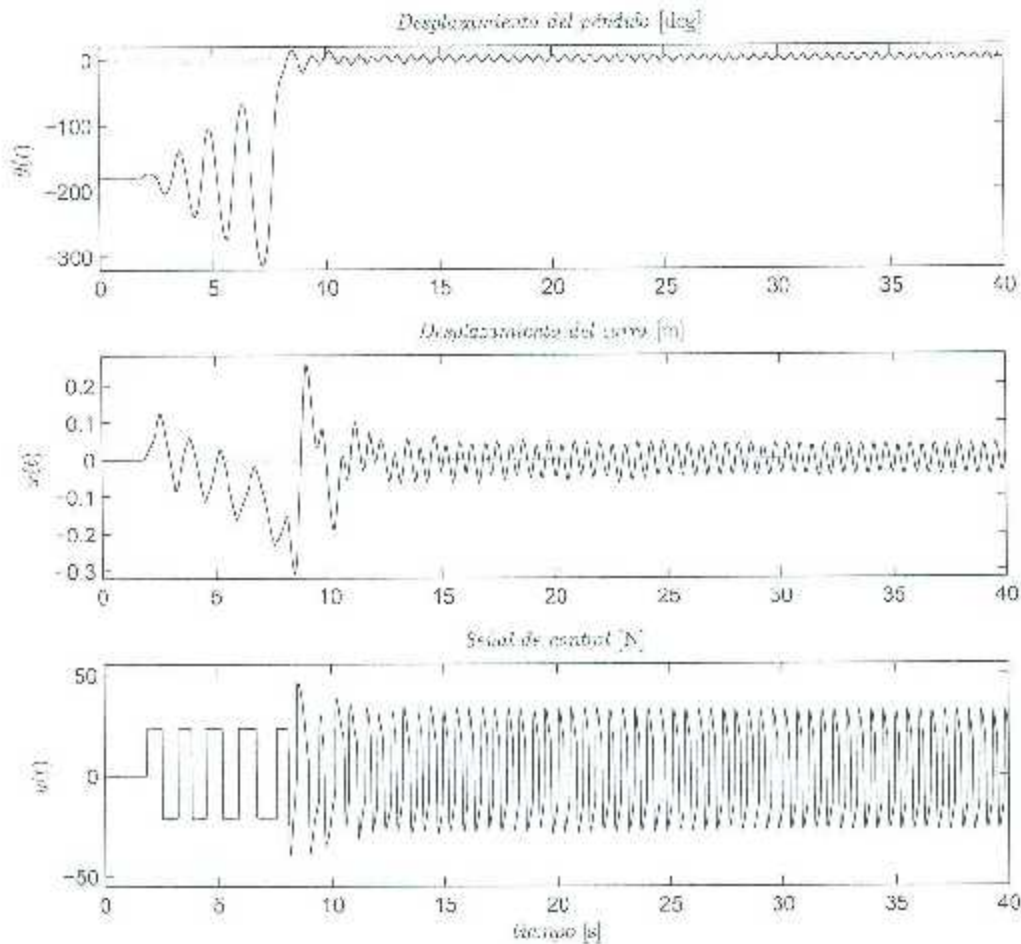


Figura 5.15: Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S para el caso de regulación.

señal de control se mantiene oscilando entre 35 y  $-30$  N. Se hicieron experimentos con distintos valores para el controlador PD y para la compensación de fricción, buscando un mejor desempeño, y el resultado presentado fue el mejor que se obtuvo. La ganancia del compensador de fricción fue sintonizada con  $\sigma = 6800$ , mientras que para el PD fue de  $k_p = -18$  y  $k_v = -4$ .

La figura 5.16 muestra la respuesta obtenida utilizando un controlador difuso T-S más observador. El péndulo y el carro también oscilan alrededor del cero, se puede notar una mejoría en comparación con el resultado anterior en tiempo real, ya que las oscilaciones son de menor amplitud, este cambio también se puede apreciar en la gráfica de la señal

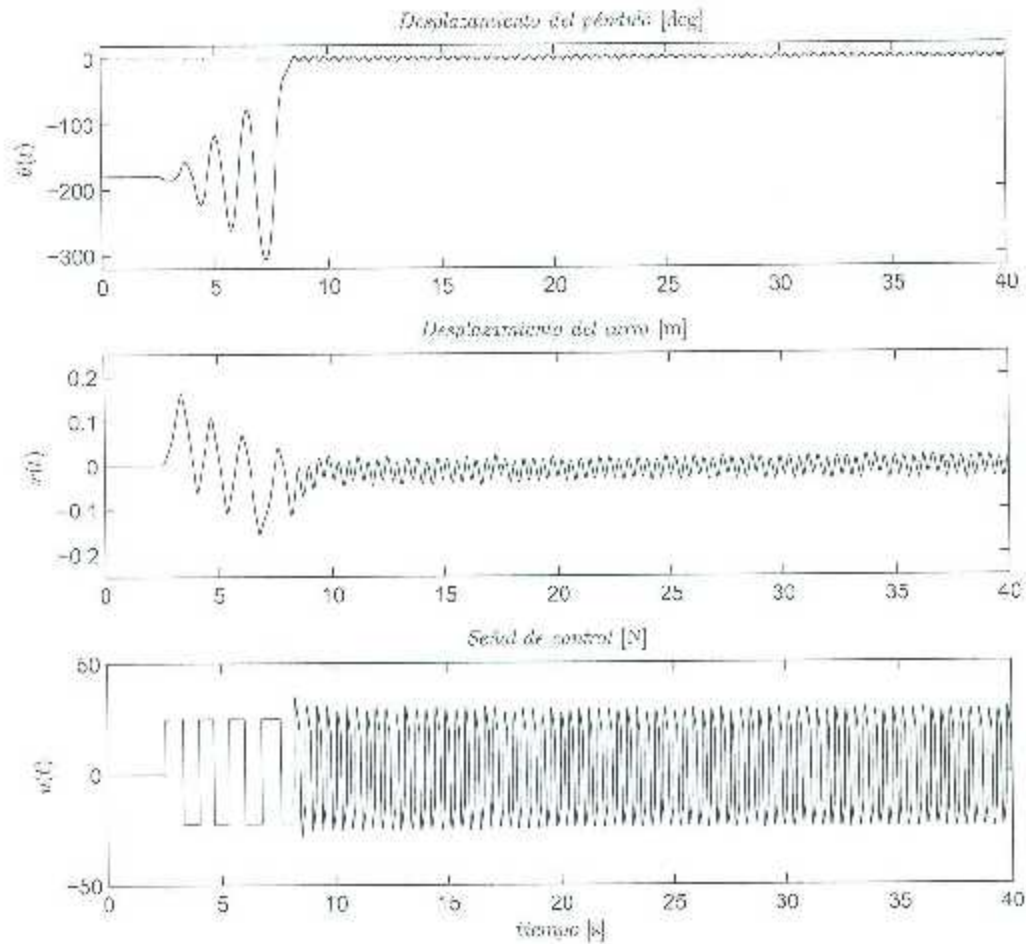


Figura 5.16: Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S con observador para el caso de regulación.

de control, ya que redujo su amplitud considerablemente, oscila entre 30 y  $-25$  N. Para este caso sí se utilizó un control PID además de la compensación de fricción, cuando no se utilizaba el controlador PID el carro permanecía fuera del centro del riel, las ganancias del PID utilizadas fueron las siguientes:  $k_p = -30$ ,  $k_v = -12$  y  $k_i = -2$ , y para la compensación de fricción se utilizó un valor de  $\sigma = 0700$ .

Los resultados obtenidos por el controlador difuso T-S robusto con observador son mostrados en la figura 5.17, el desempeño que presenta es el mejor de los tres, es el único controlador que logra mantener al péndulo en cero, esto lo hace en menos de 30 segundos. El carro no llega a cero, pero se mantiene a una distancia de aproximadamente  $-1$  cm. La

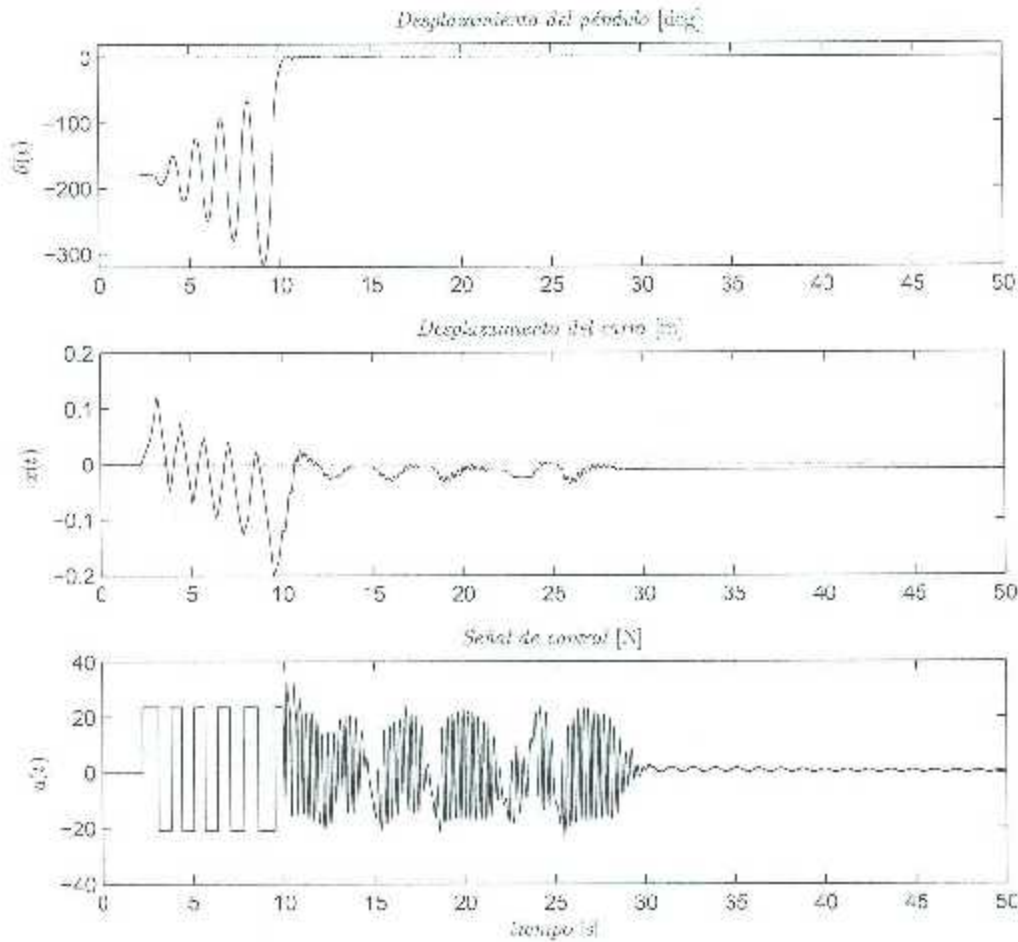


Figura 5.17: Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S robusto con observador para el caso de regulación.

señal de control no presenta valores altos como en los otros casos y cuando se estabiliza el péndulo y el carro se aprecia como tiene valores cercanos a cero. En este caso se utilizaron las siguientes ganancias para el controlador PID más compensación de fricción:  $\sigma = 7000$ ,  $k_p = -80$ ,  $k_v = -20$  y  $k_i = -0.5$ .

Por último, para el caso de regulación, en la figura 5.18 se presentan los errores obtenidos de los distintos controladores. En la primera figura se muestra la posición del péndulo, en la cual se aprecia que el controlador robusto es el que funciona mejor ya que proporciona un error cero en estado estable. Para el caso de la posición del carro, el controlador robusto es el que logra llevar el carro más cerca al cero, además de que es el único que se

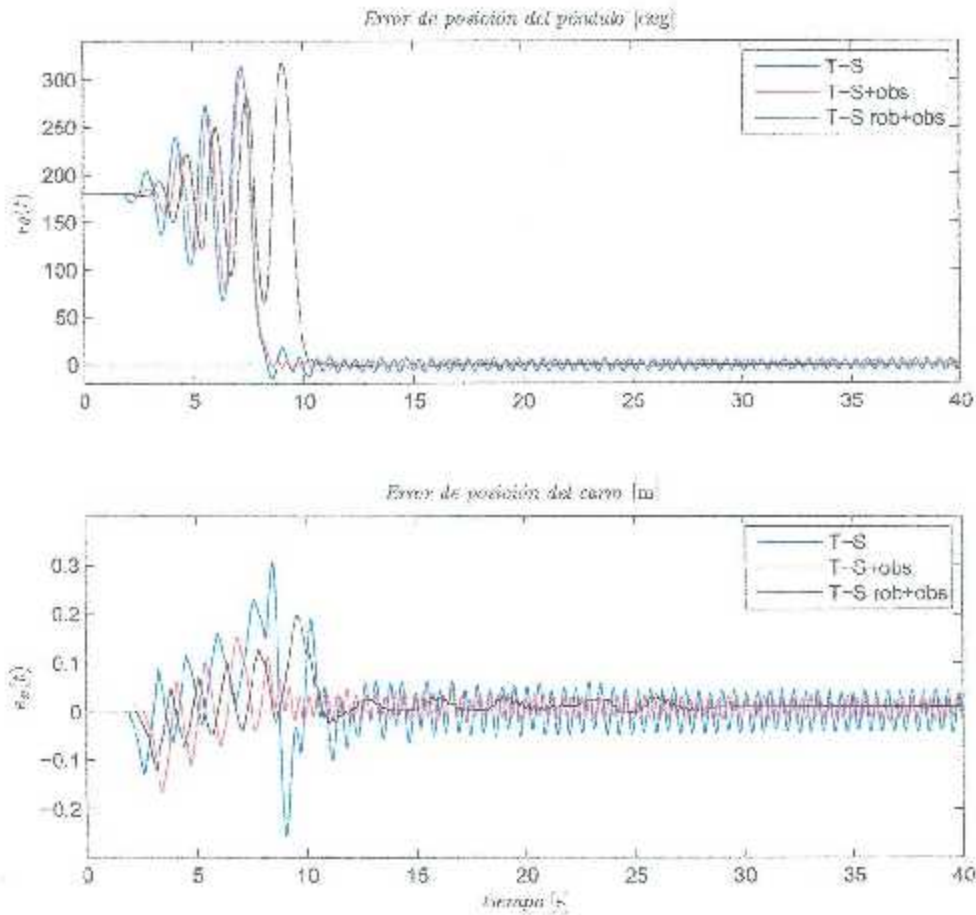


Figura 5.18: Comparación de errores de posición en experimentación del péndulo y del carro para el caso de regulación.

estabiliza y deja de oscilar.

### 5.4.2. Seguimiento

En las figuras 5.19-5.21 se muestran los resultados de seguimiento obtenidos en tiempo real.

La respuesta del sistema al implementarse un controlador difuso T-S para la tarea de seguimiento es mostrada en la figura 5.19, en la cual se aprecia cómo el péndulo oscila alrededor de cero y el carro oscila alrededor de la señal de referencia, las amplitudes de ambas señales son altas, esto se aprecia en la señal de control que se mantiene oscilando

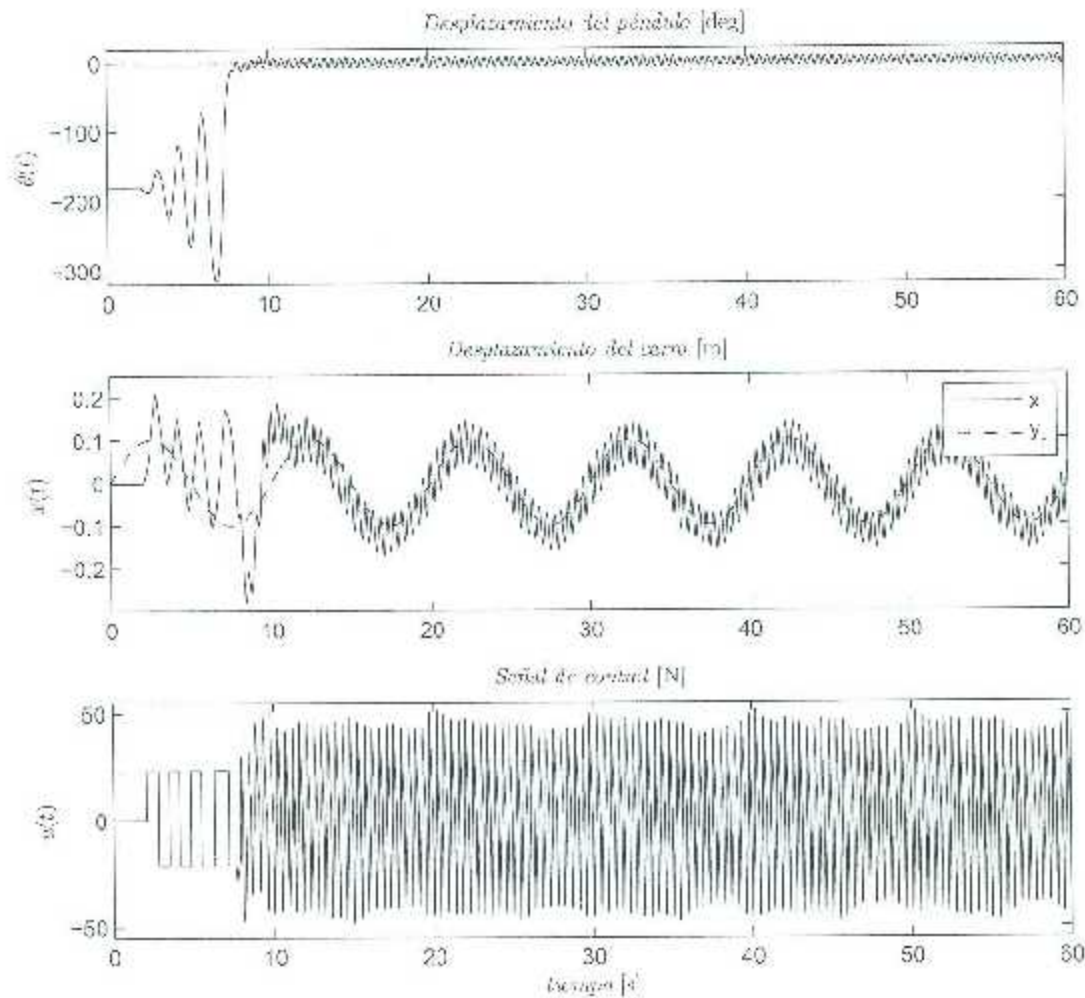


Figura 5.19: Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S para el caso de seguimiento.

entre valores de  $\pm 50$  N. Para mejorar la respuesta se utilizó un control PD, cuando no se utilizaba el carro parecía seguir la señal de referencia pero alrededor de -10 cm en vez de en el centro del riel, las ganancias del control PD fueron de  $k_v = -10$  y  $k_p = -2$  y se utilizó una compensación de fricción de  $\sigma = 6800$ .

En el caso de controlador difuso T-S con observador, figura 5.20, se nota una mejora en comparación con el controlador anterior, las oscilaciones son más pequeñas tanto en el

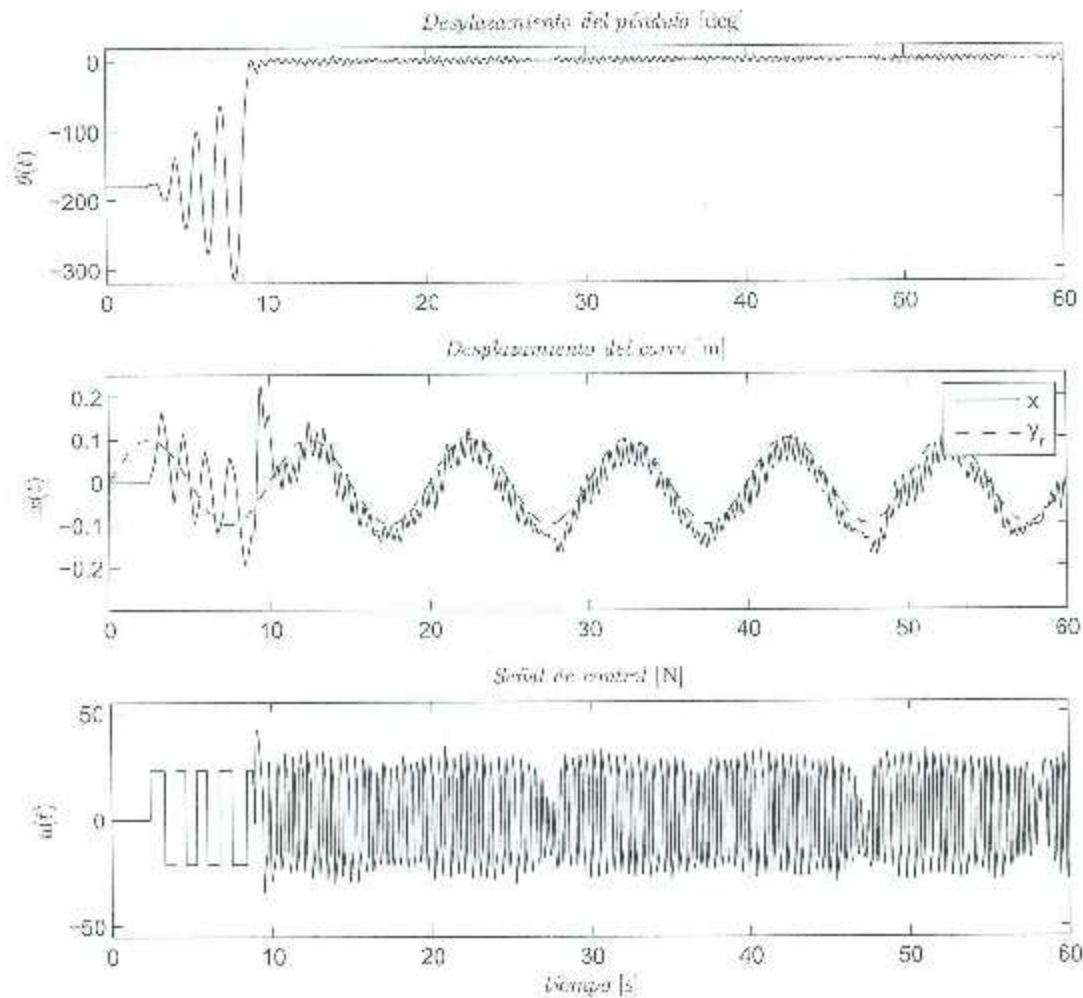


Figura 5.20: Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-S con observador para el caso de seguimiento.

péndulo como en el desplazamiento del carro y también en la fuerza aplicada al carro. Se implementó un PD con ganancias  $k_p = -10$  y  $k_v = -6$  y también una compensación a la fricción de Coulomb con un valor de  $\alpha = 5000$ .

La figura 5.21 muestra como el péndulo y el carro presentan oscilaciones aun más pequeñas que en los casos anteriores, para una respuesta en tiempo real, empleando un controlador difuso T-S robusto con observador. En las gráficas de los errores se aprecia

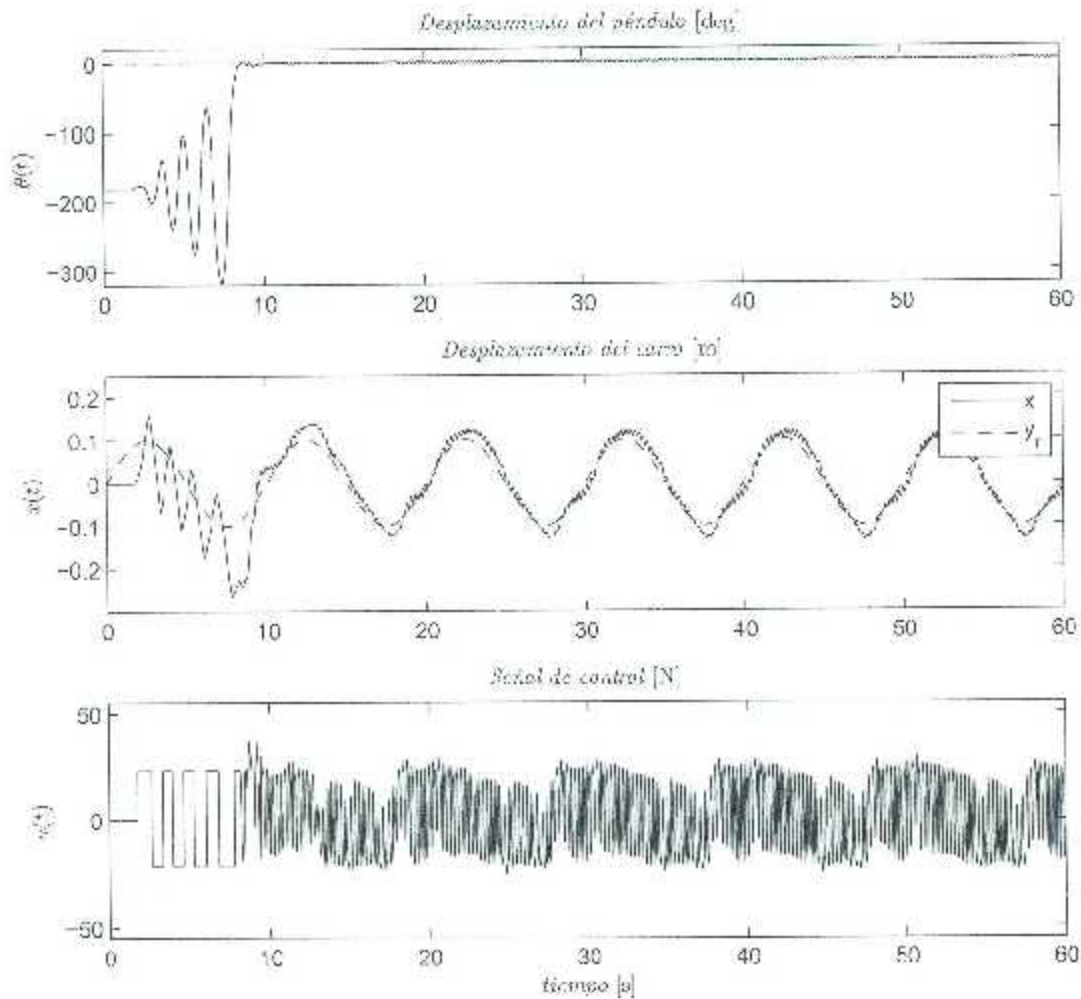


Figura 5.21: Resultados en experimentación aplicando un controlador difuso T-5 robusto con observador para el caso de seguimiento.

mejor la comparación. El controlador tiene una compensación de fricción de  $\sigma = 6900$  y un control PID con ganancias:  $k_p = -50$ ,  $k_v = -12$  y  $k_i = -4$ .

En la figura 5.22 se pueden apreciar los errores obtenidos con los distintos controladores para la tarea de seguimiento. En la primera figura se muestra el error de posición del péndulo, se puede apreciar que el controlador que produce el error más pequeño es el controlador difuso robusto. Para el caso de la posición del carro, el controlador robusto es

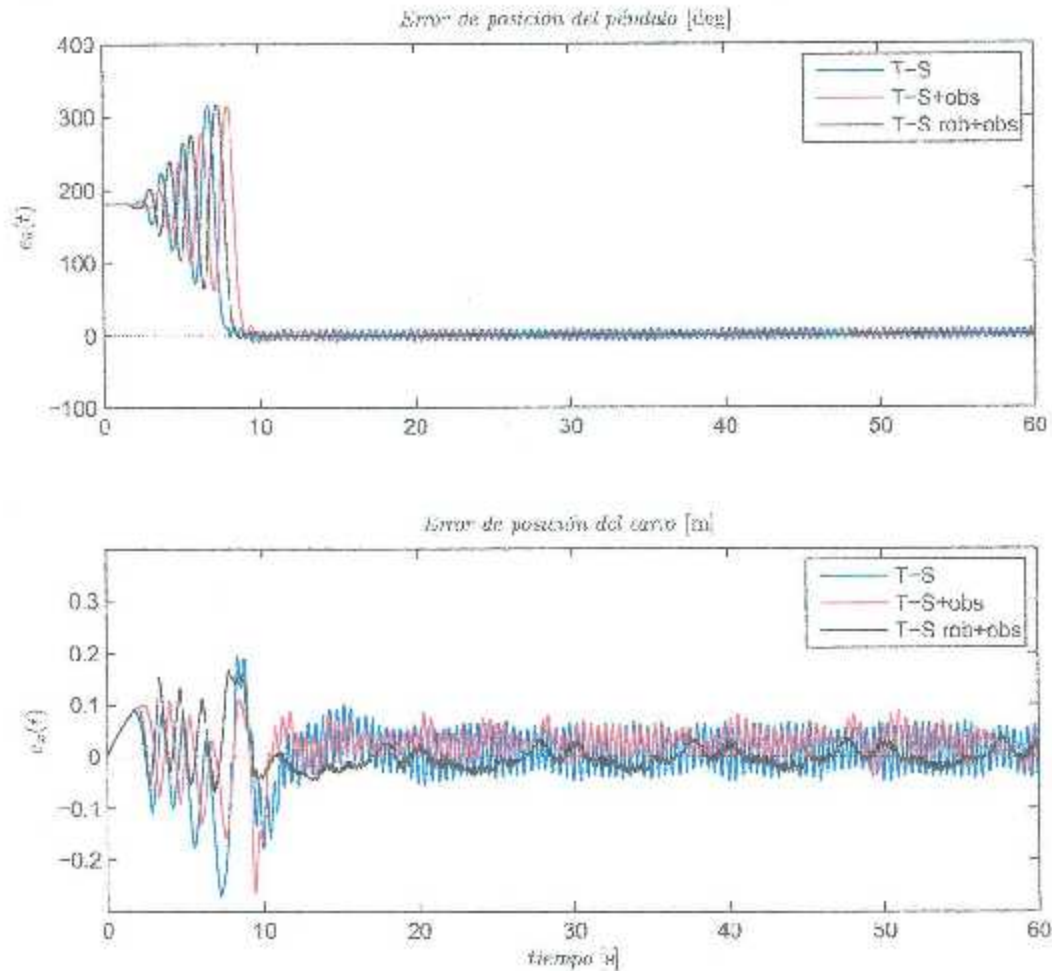


Figura 5.22: Comparación de errores de posición en experimentación del péndulo y del carro para el caso de seguimiento.

el que presenta el error más pequeño,  $\pm 3$  cm; el controlador difuso T-S más observador presenta un error de  $+8$  y  $-2$  cm; por último el controlador difuso T-S sin incertidumbres y sin observador es el que presenta el error más grande, de  $+7$  y  $-4$  cm.

## 5.5. Comparación entre los controladores difusos T-S

Para tener una mejor apreciación del rendimiento que presentan los diferentes controladores, y para que sea más notoria la mejoría que presenta el controlador difuso T-S robusto con observador con respecto al que no es robusto y al que no es robusto que tiene



observador, se procede a calcular el promedio de la raíz cuadrática media del error en estado estable del péndulo y del carro (basada en la norma  $\mathcal{L}_2$  del error en estado estable), los cuáles están dados por:

$$\mathcal{L}_2 [e_x] = \sqrt{\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \|z_p\|^2 dt} \quad (5.14)$$

$$\mathcal{L}_2 [e_c] = \sqrt{\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \|e_c\|^2 dt} \quad (5.15)$$

donde  $T$  representa el tiempo total de experimentación, 40 seg. para el caso de regulación y 60 seg. para el caso de seguimiento, y  $t_0$  el tiempo inicial de interés (c. cual fue tomado de 15 seg. en todos los experimentos); y

$$\mathcal{L}_2 [u] = \sqrt{\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \|u\|^2 dt} \quad (5.16)$$

es la entrada de control promedio (cantidad de esfuerzo de control).

La tabla 5.1 presenta la norma  $\mathcal{L}_2$  del error de posición, tanto del péndulo como del carro, así como del esfuerzo de la señal de control para el caso de regulación, en la cual se puede apreciar cómo el controlador difuso T-S presenta los errores más grandes, al agregarle el observador difuso mejora un poco la respuesta, pero de los tres, el controlador difuso T-S robusto con observador es el que presenta los mejores resultados al ser el único que logró bajar la norma  $\mathcal{L}_2$  por debajo de 1 grado con un par de control mucho menor en comparación al que utilizaron los otros dos controladores.

Tabla 5.1: Índices de desempeño de los controladores difusos T-S para el caso de regulación.

Controlador	$\mathcal{L}_2 [z_p]$ grados	$\mathcal{L}_2 [e_c]$ m.	$\mathcal{L}_2 [u]$ N
T-S	3.9567	0.0305	23.0171
T-S con observador	2.3505	0.0182	20.8131
T-S robusto con observador	0.4830	0.0137	9.8950

La tabla 5.2 presenta las mismas normas pero ahora obtenida del caso de seguimiento; el controlador difuso T-S robusto con observador es el que presenta los mejores resultados, logró bajar la norma del error del péndulo por debajo de 1 grado, la norma del carro de los controladores difusos T-S y T-S con observador son casi del doble de la que presenta el controlador difuso T-S robusto con observador, y por último, el esfuerzo de la señal de control también es menor.

Tabla 5.2: Índices de desempeño de los controladores difusos T-S para el caso de regulación del péndulo y seguimiento del carro.

Controlador	$\mathcal{L}_2 [e_p]$ grados	$\mathcal{L}_2 [e_c]$ m	$\mathcal{L}_2 [u]$ N
T-S	4.5893	0.0366	27.0061
T-S con observador	2.5650	0.0355	20.7189
T-S robusto con observador	0.8608	0.0167	15.4481

## 5.6. Comparación del controlador difuso T-S robusto con observador contra otros controladores

En esta sección se comparan los resultados obtenidos por el controlador difuso T-S robusto con observador con otros controladores propuestos e implementados en tesis anteriores sobre el mismo sistema carro-péndulo, aunque la comparación se hace en el mismo sistema, para el desarrollo de esta tesis se volvieron a medir los parámetros para un mejor cálculo de las ganancias, los parámetros utilizados con anterioridad fueron los siguientes:  $M = 2.024$  kg,  $m = 0.338$  kg,  $l = 0.33$  y  $I = 0.015$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>, los parámetros que se midieron se encuentran en la tabla 3.1.

En las figuras 5.23-5.28 se muestran las gráficas de las comparaciones hechas con diferentes controladores aplicados al mismo sistema. Se compara el controlador difuso T-S robusto con observador (CDTSRO) propuesto, primeramente con un controlador LQR [26] y [27], después con un controlador difuso adaptable (DA) [28] seguido de un controlador difuso adaptable con realimentación completa de estados (CDARCE) [29] y por último con un controlador neuro-difuso (ANFIS) [30].

La tabla 5.3 muestra los índices de desempeño de los distintos controladores para el caso de regulación del carro y del péndulo. Se seleccionó un tiempo inicial  $t_0 = 18$  seg y un tiempo final  $T = 50$  seg. En la tabla se puede apreciar que el controlador LQR es el que presenta las normas  $\mathcal{L}_2$  más grandes para el error de posición del péndulo y del carro, así como para el caso del esfuerzo de control.

En las figuras 5.23-5.26 se presentan las gráficas con las comparaciones para el caso de regulación del péndulo y del carro. La figura 5.23 presenta la comparación entre el CDTSRO y el controlador LQR, en la cual se puede ver una notable mejoría entre el controlador propuesto y el controlador lineal LQR, lo cual ya había quedado evidenciado en la tabla 5.3. Después, en la figura 5.24 se muestra ahora la comparación del controlador propuesto con el controlador DA, ambos controladores logran posicionar tanto el carro como el péndulo cerca del cero, para hacer comparaciones es mejor ver la tabla 5.3, donde se puede ver que el controlador propuesto tiene un error tanto en la posición del péndulo

Tabla 5.3: Índices de desempeño de distintos controladores para el caso de regulación del péndulo y del carro.

Controlador	$\mathcal{L}_2 [e_\theta]$ grados	$\mathcal{L}_2 [e_x]$ m	$\mathcal{L}_2 [u]$ N
LQR	3.8340	0.0824	22.3204
DA	0.3213	0.0048	9.7495
CDARCE	0.4090	0.0367	11.9953
ANFIS	0.0965	0.0083	6.9082
CDTSRO	0.4426	0.0124	7.8298

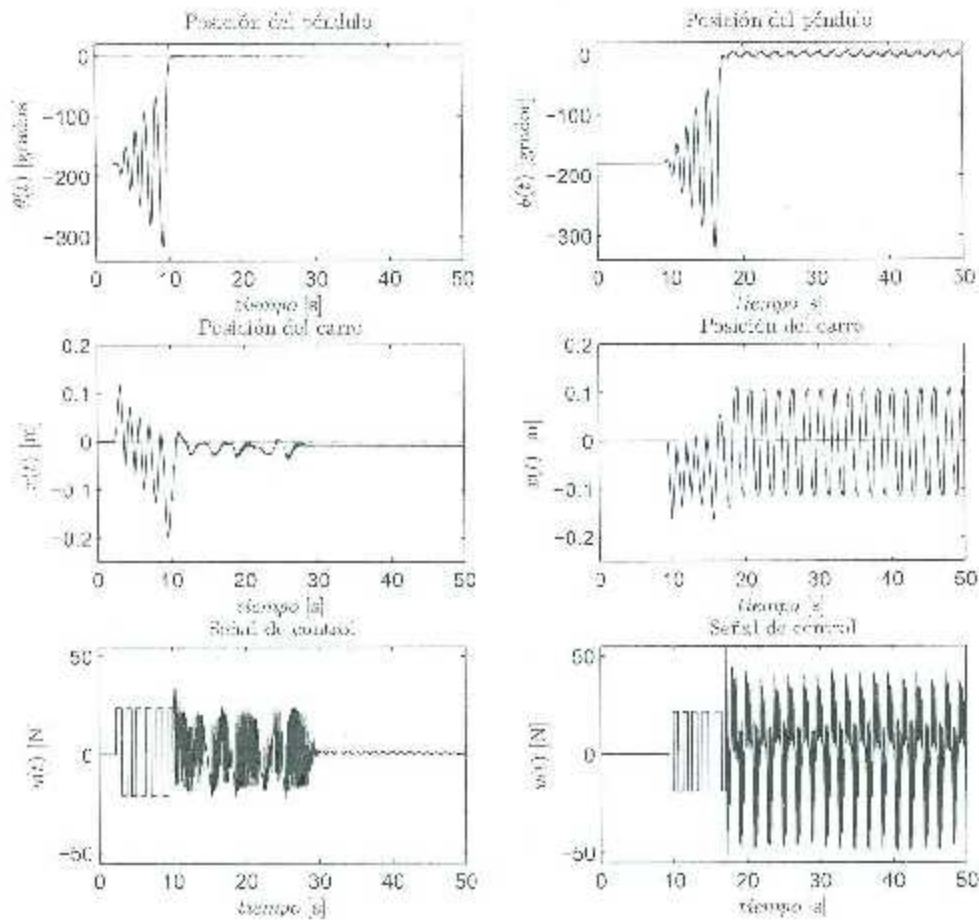


Figura 5.23: Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra un control LQR [26][27].

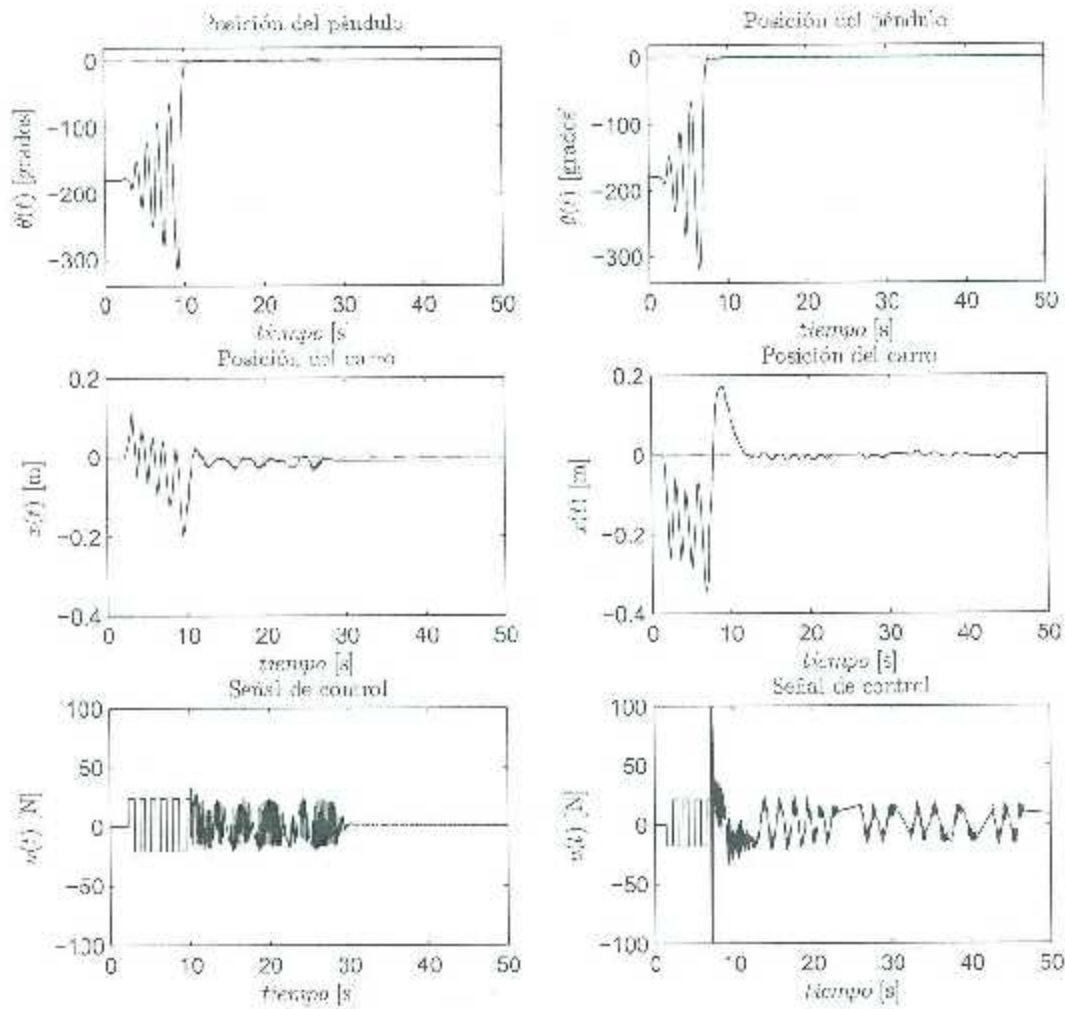


Figura 5.24: Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro; columna izquierda muestra el CDTORO, columna derecha muestra un control DA [28].

como en la del carro un poco más grande, de 0.12 grados y 0.7 cm aproximadamente, mientras que la norma del esfuerzo de control es más pequeña en el controlador propuesto, cerca de 2 N menor. En la figura 5.25 se muestra la comparación entre el controlador propuesto y el CDARCE, el segundo presenta un error en estado estable en la posición del carro algo considerable, en la tabla 5.3 se puede apreciar que la norma  $\mathcal{L}_2$  es de 3.6 cm, sólo el LQR tiene un valor más alto, para el caso del error de la posición del péndulo se aprecia que los errores están muy cercanos y que ambos son menores a 0.5 grados, en las

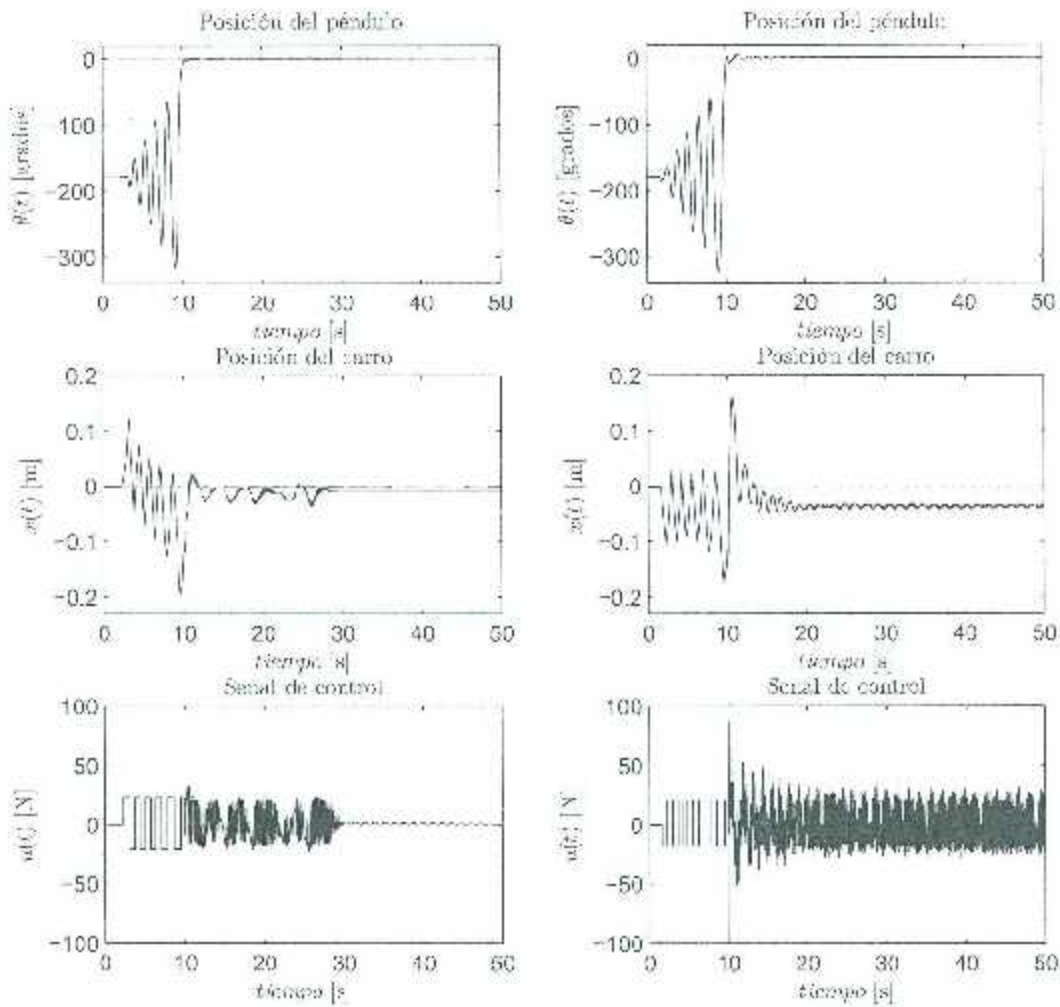


Figura 5.25: Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro: columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra el CDARCE [29].

gráficas se aprecia una señal de control más ruidosa, además de que tiene amplitudes altas. Por último, para el caso de regulación, la figura 5.26 presenta las gráficas del controlador propuesto y del controlador ANFIS, ambos logran llevar tanto el carro como el péndulo a una posición cercana al cero con un esfuerzos en la señal de control no tan altos como en los otros controladores. Revisando la tabla 5.3 se puede apreciar que el controlador ANFIS presenta una mejor respuesta, ya que los valores obtenidos de las normas  $\mathcal{L}_2$  para los tres casos son ligeramente más pequeñas.

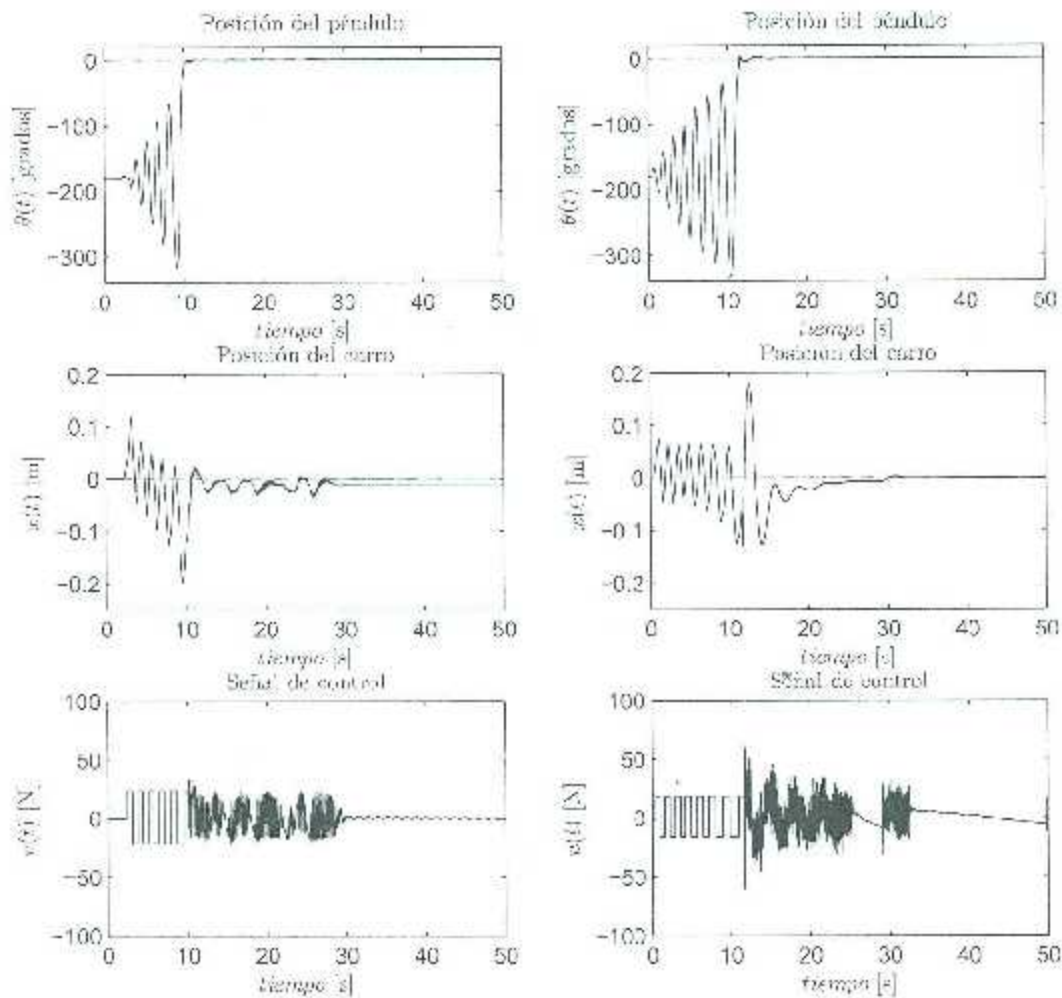


Figura 5.25: Resultados en experimentación de regulación del péndulo y del carro; columna izquierda muestra el CDTSRO, columna derecha muestra un control ANFIS [30].

Ahora se presentará la comparación de resultados para el caso de seguimiento, para realizar la tarea primero se mandan tanto el carro como el péndulo al cero, y después de 20 segundos el carro tiene que seguir una trayectoria deseada que fue seleccionada como una onda senoidal de 0.25 m de amplitud y frecuencia de 0.2 hz. Debido a la falta de datos experimentales en los controladores LQR y CDARC5, este último experimento se comparará únicamente con el controlador DA y el controlador ANFIS. La tabla 5.4 muestra los índices

de desempeño de cada uno de los controladores para la tarea de regulación del péndulo y seguimiento en el carro para un tiempo inicial  $t_0 = 20$  seg. y un tiempo final  $T = 50$ , en la tabla se aprecia como los controladores presentan valores para las normas  $\mathcal{L}_2$  muy cercanos.

Tabla 5.4: Índices de desempeño de distintos controladores para el caso de regulación del péndulo y seguimiento del carro.

Controlador	$\mathcal{L}_2 [e_p]$ grados	$\mathcal{L}_2 [e_c]$ m	$\mathcal{L}_2 [u]$ N
DA	1.7005	0.1223	19.0074
ANFIS	2.0998	0.0680	19.8947
CDTSRO	2.3137	0.0786	20.9110

En las figuras 5.27-5.28 se muestran las gráficas de los controladores al realizar la tarea de regulación del péndulo y después de 20 segundos seguimiento del carro. En la gráfica 5.27 se puede ver que tanto el CDTSRO como el controlador DA no logran seguir la señal de referencia con error cero, para el caso del CDTSRO se aprecia que cuando la señal de referencia alcanza sus valores máximos de  $\pm 0.25$  m el carro se desplaza un poco más de esa distancia, mientras que en el controlador DA se ve un pequeño desfase, además de que también se desplaza una distancia mayor a  $\pm 0.25$  m que es la amplitud de la señal de referencia. La figura 5.28 muestra la comparación entre el CDTSRO y el controlador ANFIS. Con el controlador ANFIS, el carro se desplaza una distancia mayor cuando pasa por los puntos  $\pm 0.25$  m, sin embargo en las subidas y en las bajadas se acerca más a la señal de referencia, es decir, no presenta ese pequeño desfase que presentaron los otros controladores. Es mejor recurrir a la tabla de los índices de desempeño 5.4 para visualizar el comportamiento de los controladores y saber qué controlador se acercó más a la señal de referencia. Como se mencionó con anterioridad, los tres controladores presentan comportamientos muy similares; para el caso de la norma  $\mathcal{L}_2$  de la señal de error de posición del péndulo se tiene que el mejor fue el controlador DA, para el caso de la norma  $\mathcal{L}_2$  de error de posición del carro el controlador ANFIS presenta el valor más bajo, y por último, al comparar el esfuerzo de control se tiene que los tres presentan valores muy cercanos, el DA tiene un valor de 19.0074, casi 2 N menor que el CDTSRO propuesto en esta tesis.

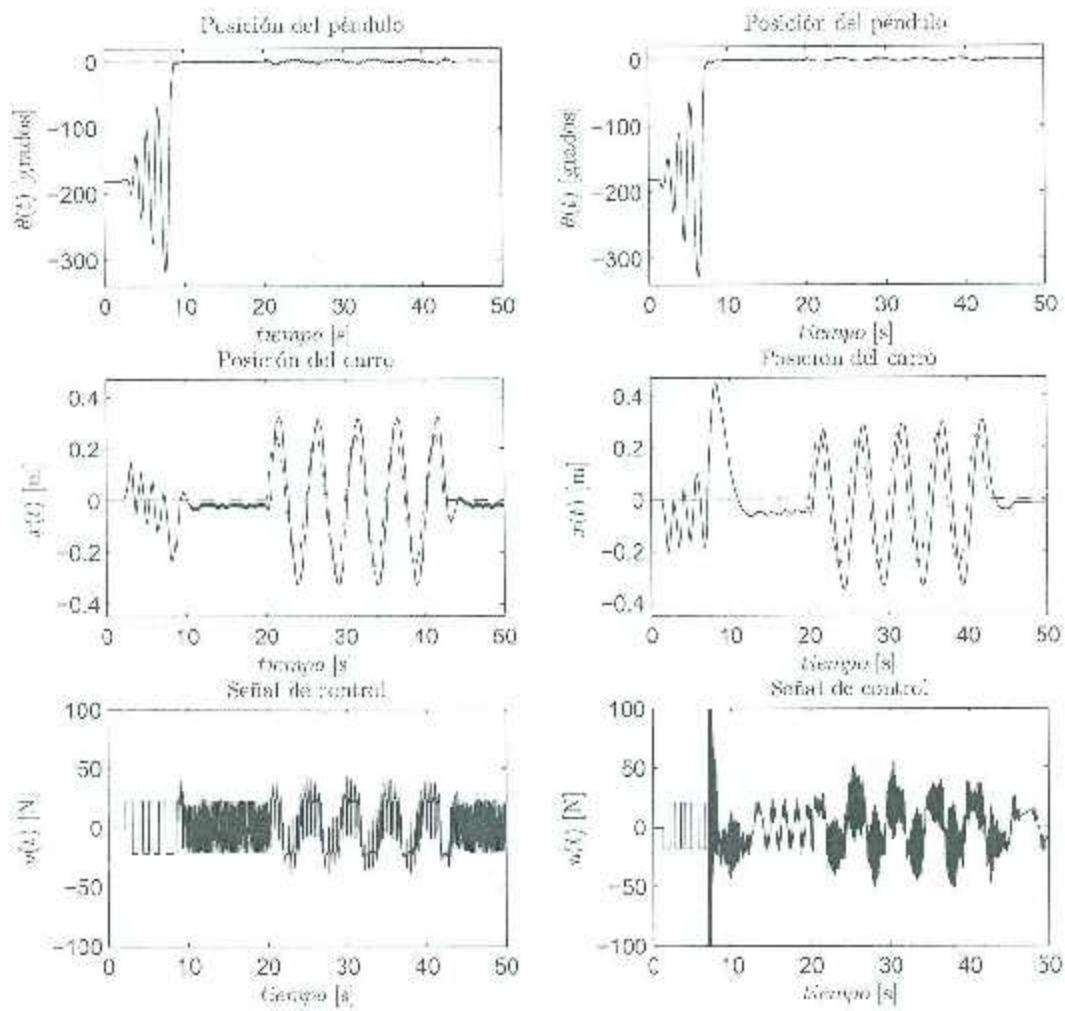


Figura 5.27: Resultados en experimentación de regulación del péndulo y seguimiento del carro; columna izquierda muestra el CDTSR0, columna derecha muestra un control DA [28].



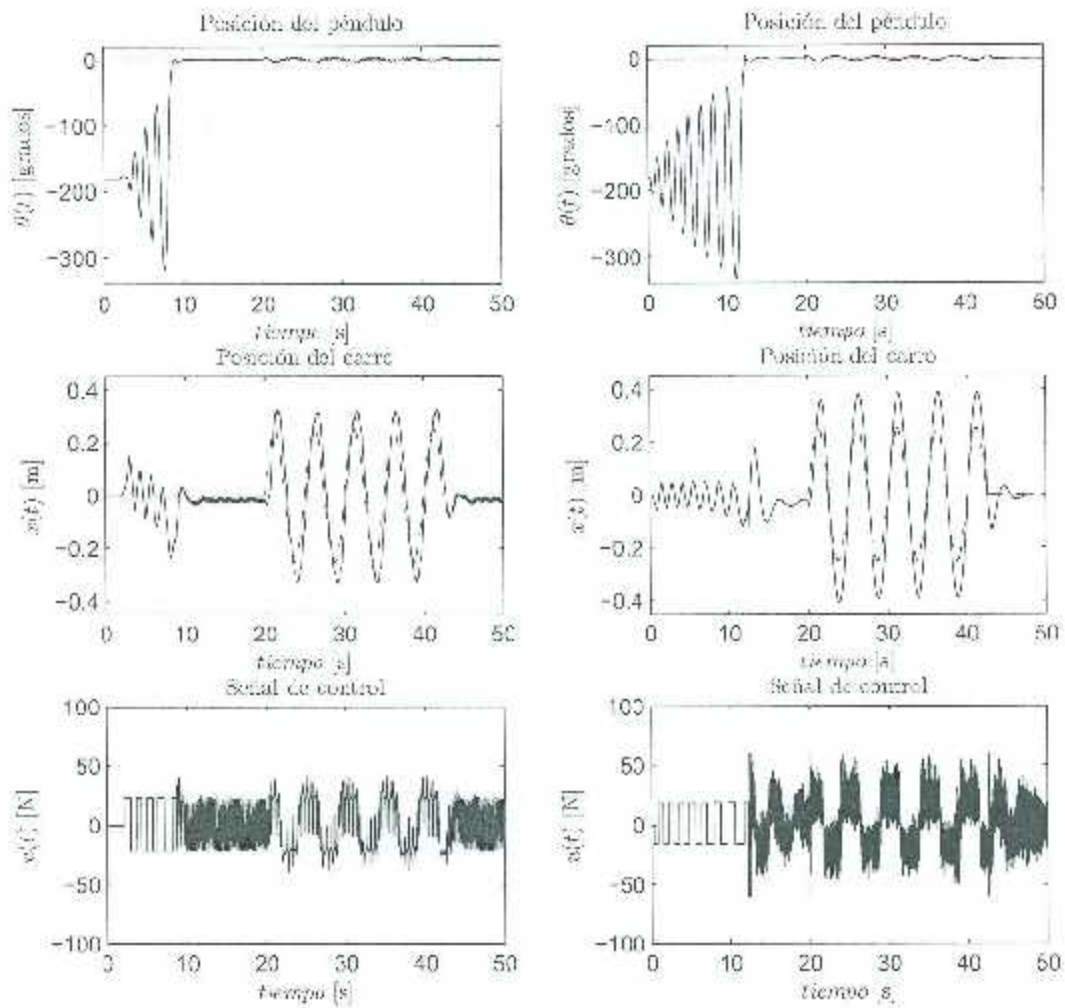


Figura 5.28: Resultados en experimentación de regulación del péndulo y seguimiento de carro; columna izquierda muestra el CDTsRO, columna derecha muestra un control ANFIS [30].

## Capítulo 6

### Conclusiones

En el presente trabajo se presentaron los resultados de regulación y de seguimiento para el sistema carro péndulo utilizando la teoría de control difuso Takagi-Sugeno y un control de *swing-up* para llevar el péndulo a la posición vertical hacia arriba.

Se propusieron tres controladores:

- Controlador difuso T-S
- Controlador difuso T-S con observador
- Controlador difuso T-S robusto con observador

Los cuales fueron diseñados aplicando la técnica de aproximación local en espacios de partición difusa, y en la cual se ha considerado y se ha añadido incertidumbre a la fricción viscosa.

Las ganancias de los tres controladores son resueltas mediante el LMI Control Toolbox de MATLAB<sup>®</sup> y se ha comprobado estabilidad asintótica global del sistema en lazo cerrado mediante desigualdades tipo Lyapunov.

Se diseñaron controladores difusos Takagi-Sugeno de tan sólo dos reglas difusas, a diferencia de otros trabajos que existen en la literatura que empleaban tres o más. Otra diferencia con los trabajos que hay en la literatura es que para el modelo se consideró la fricción viscosa tanto del carro como del péndulo.

Partiendo del modelo difuso T-S del sistema carro péndulo se diseñó tanto el controlador como el observador, ambos difusos, y partiendo del modelo difuso T-S robusto se calcularon las ganancias del controlador.

Los resultados obtenidos por los tres controladores fueron comparados entre sí tanto en simulación como en tiempo real. En simulación los tres controladores se comportaron de manera muy similar, siendo el controlador difuso robusto T-S con observador el que

logró que los estados llegaran a la posición deseada más rápido y con un menor esfuerzo de control, esto para el caso de regulación.

En cuanto al caso de seguimiento el controlador difuso T-S y el controlador difuso T-S con observador tuvieron prácticamente el mismo comportamiento, pero el controlador robusto presentó un desfasamiento con respecto a la señal de referencia.

Para el caso de regulación en tiempo real, el controlador difuso robusto T-S con observador fue el que presentó la mejor respuesta, ya que fue el único que logró estabilizar tanto el péndulo en la posición vertical hacia arriba como el carro en una posición cercana al cero, los otros dos controladores presentaron oscilaciones alrededor del cero tanto del péndulo como del carro, y para el caso de seguimiento en tiempo real los tres presentaron oscilaciones, pero el controlador robusto fue el que disminuyó la amplitud de esas oscilaciones en mayor cantidad.

## 6.1. Trabajo futuro

Como trabajo futuro se propone explorar el diseño y la implementación de un controlador difuso T-S óptimo tanto para regulación como para seguimiento, además de que con el controlador difuso T-S óptimo y el controlador difuso T-S robusto se puede diseñar un controlador difuso T-S óptimo-robusto [1].

Se propone también el implementar y explorar el desempeño de un controlador difuso T-S adaptable.

En este estudio se utilizó la técnica de ubicación de polos para obtener las ganancias del observador, las ganancias del observador también pueden ser obtenidas mediante LMI implementando un sistema aumentado como se muestra en [1].

## Apéndice A

### Programas en MATLAB<sup>®</sup>

En las secciones siguientes se incluyen los programas utilizados en MATLAB<sup>®</sup> para el cálculo de las ganancias tanto del controlador como para el observador. Solamente se describen los programas para el caso de regulación, para el caso de seguimiento es necesario aumentar las matrices como se vio en la sección 2.3.3.

#### A.1. Cálculo de las ganancias $K_f$ y de la matriz $P_c$ del controlador difuso T-S para el caso de regulación

```
clc; clear all; format short;
%% Matrices A1 y B1 numéricas
% M=2.054; % [kg] Masa del carro
% m=0.358; % [kg] Masa del pendulo
M=2.278; % [kg] Masa del carro
m=0.268; % [kg] Masa del pendulo
l=0.2958; % [m] longitud al centro de masa
I=0.02632; % [kg m^2] Momento de Inercia
g=9.81; % [m/s^2]
fv=0.005; % [Nms/rad] Inercia/Voz viscosa del pendulo
fvx=0.83; % [Nms/rad] coeficiente de inercia/Voz viscosa del carro
% Constantes
a=M;
b=m*l*(1+I);
g=m*l;
c=cos(pi/8);
d=-m*g*c;
Delta1=l/(c*b-g);
Delta2=l/(c*b-g*c);
%% Matrices:
a1=cos(2*(pi/8))/(2*(pi/8));
a2=sin(pi/8)/(pi/8);
A1=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 Delta1*g*d -Delta1*g*fvx Delta1*g*fvt; 0 Delta1*g*d Delta1*g*d Delta1*g*d -Delta1*g*fvt];
A2=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 Delta2*g*d*d1 -Delta2*g*fvx Delta2*g*fvt+g; 0 -Delta2*g*d*d2 Delta2*g*d+fvx -Delta2*g*fvt];
b1=[0; 0; Delta1*b; -Delta1*g];
b2=[0; 0; Delta2*b; -Delta2*g+g];
%% Código obtenido del LMI Toolbox
setlmis([]);
x=lmivar(1,[4 1]);
M1=lmivar(2,[1 4]);
M2=lmivar(2,[1 4]);
```

```

lmi1ern([-1 1 1 X],1,-A1','s'); % LMI #1: -X>A1'-A1*X
lmi1ern([-1 1 1 -M1],.5*1,B1','s'); % LMI #1: M1>=B1' (NON SYMMETRIC?)
lmi1ern([-1 1 1 M1],.5*B1,1,'s'); % LMI #1: B1>=M1 (NON SYMMETRIC?)

lmi2ern([-2 1 1 X],1,-A2','s'); % LMI #2: -X>A2'-A2*X
lmi2ern([-2 1 1 -M2],.5*1,B2','s'); % LMI #2: M2>=B2' (NON SYMMETRIC?)
lmi2ern([-2 1 1 M2],.5*B2,1,'s'); % LMI #2: B2>=M2 (NON SYMMETRIC?)

lmi3ern([-3 1 1 A1,1,-A1','s'); % LMI #3: -X>A1'-A1*X
lmi3ern([-3 1 1 A1],1,-A2','s'); % LMI #3: -X>A2'-A2*X
lmi3ern([-3 1 1 -M2],.5*1,B1','s'); % LMI #3: M1>=B1' (NON SYMMETRIC?)
lmi3ern([-3 1 1 M2],.5*B1,1,'s'); % LMI #3: B1>=M2 (NON SYMMETRIC?)
lmi3ern([-3 1 1 -M1],.5*1,B2','s'); % LMI #3: M1>=B2' (NON SYMMETRIC?)
lmi3ern([-3 1 1 M1],.5*B2,1,'s'); % LMI #3: B2>=M1 (NON SYMMETRIC?)

lmi4ern([-4 1 1 X],1,1); % LMI #4: X

lmiys=getlmis;
%% Resolver la LMI, la respuesta es buena si minS=0
[umin,Xfeas]=feasp(Lmiys);
%% Ahora se extraen las variables del denominador de LTP (xfeas)
% Asegurarse de utilizar el mismo identificador que en lmi4ern
Xfinal = doc2mat(lmiysa, Xfeas,X)
polcaX=cis(Xfinal)';
Mifinal= doc2mat(lmiysc,Xfeas,M1)
M2final= doc2mat(lmiysc,Xfeas,M2)
%% Garantiza y Matriz P
P=inv(Xfinal)
polcaX=polca(P)';
X1=Mifinal*inv(Xfinal)
X2=M2final*inv(Xfinal)

```

## A.2. Cálculo de las ganancias $L_i$ y de la matriz $P_O$ del observador difuso T-S

```

cli; clear all; format short
%% Matrices A1 y B1 numéricas
M=2.278; % [kg] Masa del carro
m=0.280; % [kg] Masa del péndulo
l=0.2455; % [m] Longitud al centro de masa
I=0.00532; % [kg m^2] Momento de Inercia
g=9.81; % [m/s^2]
rvs=0.03; % [Nms/rad] fricción viscosa del péndulo
fvs=6.35; % [Nms/rad] coeficiente de fricción viscosa del carro
% Constantes
a=M;
b=m*l^2-I;
g=m*l;
C=cos(pi/8);
d=-m*g*r1;
Delta1=1/(a+b*g/g);
Delta2=1/(a+b-g*p+G);
%% Matrices A1 y B1
z1=sin(2*(pi/8))/(2*(pi/8));
z2=sin(pi/8)/(pi/8);
A1=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 Delta1*g*d -Delta1*b*rvs Delta1*g*rvs ; 0 -Delta1*a*d Delta1*g*fvs -Delta1*a*rvs];
A2=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 Delta2*g*d*z1 -Delta2*b*rvs Delta2*g*rvs+G; 0 -Delta2*a*d*x2 Delta2*g*G*fvs -Delta2*a*rvs];
C1=[1 0 0 0; 0 1 0 0];
C2=C1;

```

```

%% Polos deseados
Pol=[-25+10i -25-10i -27+10i -27-10i];
%% Ganancias
L1=place(A1',C1',Pol);
L2=place(A2',C2',Pol);
L=L1';
L2=L2';
%% Matrices I
% Gi para i=1,2,...,2
G11=A1-L1*C1;
G22=A2-L2*C2;
% Gi para i<j<=2
% para j=2
G12=0.5*(A1-L1*C2-A2-L2*C1);
%% Código obtenido del LMI edit de Matlab
eclmib(0);
P=lmivar(1,[4 1]);

Initerm([1 1 P],G11',1,'s'); % LMI #0: G11'+P+P*G11
Initerm([2 1 1 P],G22',1,'s'); % LMI #0: G22'+P+P*G22

Initerm([3 1 1 P],G12',1,'s'); % LMI #0: 0.5*C12'+P+P*0.5*C12

Initerm([4 1 1 P],0,1); % LMI #10: P
linsys=gsatmia;
%% Resolver la LMI, la respuesta es buena si tmin<=0
[tmin,ofeas]=fscsp(linsys);
%% Ahora se extraen las variables del solucionador de LMI (pfeas)
% Asegurarse de utilizar el mismo identificador que en lmiedit
Pfinal = dec2mat(linsys,pfeas,P)
pfeas=sgd(pfeas);

```

### A.3. Cálculo de las ganancias $F_i$ y de la matriz $P_C$ del controlador difuso T-S robusto para el caso de regulación

```

clc; clear all; format long;
%% Matrices A1 y B1 numéricas
M=2.278; % [kg] Masa del carro
m=0.266; % [kg] Masa del péndulo
l=0.2658; % [m] longitud al centro de masa
I=0.00532; % [kg m^2] Momento de inercia
g=9.81; % [m/s^2]
fvc=0.003; % [Nms/rad] fricción viscosa del péndulo
fvc=6.33; % [Nms/rad] coeficiente de fricción viscosa del carro
% Constantes
a=m*M;
b=m*l+I;
p=m*l;
C=cos(pi/8);
d=-m*g*p;
Delta1=1/(a+b-g*g);
Delta2=1/(a+b-g*g+g*g);
%% Matrices
z1=sin(2*(pi/8))/(2*(pi/8));
z2=sin(pi/8)/(pi/8);
A1=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 Delta1*g*d -Delta1*b*fvc Delta1*g*fvc; 0 -Delta1*a*d Delta1*g*fvc -Delta1*a*fvc];
A2=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 Delta2*g*d*z1 -Delta2*b*fvc Delta2*g*fvc+z2; 0 -Delta2*a*d*z2 Delta2*g*fvc+z2 -Delta2*a*fvc];
B1=[0; 0; Delta1*b; -Delta1*g];
B2=[0; 0; Delta2*b; -Delta2*g];

```

```

Da1=[0; 0; -Delta1*k*fvx; Delta1*g*fvv ];
Da2=[0; 0; -Delta2*k*fvx; Delta2*g*fvv];
Db1=[0 0; 0 0; 1 0; 0 1];
Db2=[0 0; 0 0; 1 0; 0 1];
Ea1=[0 0 1 0];
Ea2=[0 0 1 0];
Fh1=[Delta1*b; -Delta1*g ];
Fh2=[Delta2*b; -Delta2*g*G];
ga1=10;
ga2=10;
gb1=10;
gb2=10;
%%
set(handles,'');
X=imvar(1,[4 1]);
M1=imvar(2,[4 1]);
M2=imvar(2,[4 1]);
Y0=imvar(1,[4 1]);

% LMI #1: X
lmiterm([1 1 1 X],1,1);

% LMI #2: Y0
lmiterm([2 1 1 Y0],1,1);

% LMI #3: X+A1'+A1*X
lmiterm([3 1 1 X],1,A1','*e');
% LMI #3: -B1*B1-M1'*B1'
lmiterm([3 1 1 M1],B1,-1,'*e');
% LMI #3: Y0
lmiterm([3 1 1 Y0],1,1);
% LMI #3: Da1'
lmiterm([3 2 1 0],Da1');
% LMI #3: -1
lmiterm([3 2 2 0],-1);
% LMI #3: Db1'
lmiterm([3 3 1 0],Db1');
% LMI #3: zeros(2,1)
lmiterm([3 3 2 0],zeros(2,1));
% LMI #3: -eye(2)
lmiterm([3 3 3 0],-eye(2));
% LMI #3: Ea1'*e'
lmiterm([3 4 1 X],Ea1','*e');
% LMI #3: zeros(1,2)
lmiterm([3 4 3 0],zeros(1,2));
% LMI #3: -ga1*ga1
lmiterm([3 4 4 0],-ga1*ga1);
% LMI #3: Eb1*M1
lmiterm([3 5 1 M1],Eb1,1);
% LMI #3: zeros(2,1)
lmiterm([3 5 2 0],zeros(2,1));
% LMI #3: zeros(2)
lmiterm([3 5 3 0],zeros(2));
% LMI #3: zeros(2,1)
lmiterm([3 5 4 0],zeros(2,1));
% LMI #3: -gb1*gb1+eye(2)
lmiterm([3 5 5 0],-gb1*gb1+eye(2));

% LMI #4: X+A2'+A2*X
lmiterm([4 1 1 X],1,A2','*e');
% LMI #4: -B2*B2-M2'*B2'
lmiterm([4 1 1 M2],B2,-1,'*e');
% LMI #4: Y0
lmiterm([4 1 1 Y0],1,1);
% LMI #4: Da2'
lmiterm([4 2 1 0],Da2');
% LMI #4: -1
lmiterm([4 2 2 0],-1);
% LMI #4: Db2'
lmiterm([4 3 1 0],Db2');
% LMI #4: zeros(2,1)
lmiterm([4 3 2 0],zeros(2,1));
% LMI #4: -eye(2)
lmiterm([4 3 3 0],-eye(2));
% LMI #4: Ea2'*e'
lmiterm([4 4 1 X],Ea2,1);
% LMI #4: zeros(1,2)
lmiterm([4 4 3 0],zeros(1,2));
% LMI #4: -ga2*ga2
lmiterm([4 4 4 0],-ga2*ga2);
% LMI #4: -Eb2*M2
lmiterm([4 5 1 M2],Eb2,-1);
% LMI #4: zeros(2,1)
lmiterm([4 5 2 0],zeros(2,1));
% LMI #4: zeros(2)
lmiterm([4 5 3 0],zeros(2));
% LMI #4: zeros(2,1)
lmiterm([4 5 4 0],zeros(2,1));
% LMI #4: -gb2*gb2+eye(2)
lmiterm([4 5 5 0],-gb2*gb2+eye(2));

% LMI #5: X+A1'+A1*X
lmiterm([5 1 1 X],1,A1','*e');
% LMI #5: -B1*B1-M1'*B1'
lmiterm([5 1 1 M1],B1,-1,'*e');
% LMI #5: X+A2'+A2*X
lmiterm([5 1 1 X],1,A2','*e');
% LMI #5: -B2*B1-M1'*B2'
lmiterm([5 1 1 M2],B2,-1,'*e');
% LMI #5: -2*Y0 (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([5 1 1 Y0],2*Y0,-1,'*e');
% LMI #5: Da1'
lmiterm([5 2 1 0],Da1');
% LMI #5: -1
lmiterm([5 2 2 0],-1);
% LMI #5: Db1'
lmiterm([5 3 1 0],Db1');

```

```

lmiterm([5 3 0 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 3 2 0],-eye(2));
lmiterm([5 4 1 0],[Da2]);
lmiterm([5 4 3 0],zeros(1,2));
lmiterm([5 4 4 0],-1);
lmiterm([5 5 1 0],[Db2]);
lmiterm([5 5 2 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 5 3 0],zeros(2,2));
lmiterm([5 5 4 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 6 0 0],-eye(2));
lmiterm([5 6 1 1],[Ea1,1]);
lmiterm([5 6 2 0],zeros(1,2));
lmiterm([5 6 3 0],zeros(1,2));
lmiterm([5 6 5 0],[-ga1*ga1]);
lmiterm([5 7 1 2],[Eb1,-1]);
lmiterm([5 7 2 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 7 3 0],zeros(2,2));
lmiterm([5 7 4 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 7 5 0],zeros(2,2));
lmiterm([5 7 6 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 7 7 0],[-gb1*gb1*eye(2)]);
lmiterm([5 8 1 1],[Ea2,1]);
lmiterm([5 8 3 0],zeros(1,2));
lmiterm([5 8 4 0],zeros(1,2));
lmiterm([5 8 7 0],zeros(1,2));
lmiterm([5 8 8 0],[-ga2*ga2]);
lmiterm([5 8 1 1],[Eb2,-1]);
lmiterm([5 9 2 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 9 3 0],zeros(2,2));
lmiterm([5 9 4 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 9 5 0],zeros(2,2));
lmiterm([5 9 6 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 9 7 0],zeros(2,2));
lmiterm([5 9 8 0],zeros(2,1));
lmiterm([5 9 9 0],[-gb1*gb1*eye(2)]);

% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: -eye(2)
% LMI #6: Da2
% LMI #6: zeros(1,2)
% LMI #6: -1
% LMI #6: Db2
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: zeros(2,2)
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: -eye(2)
% LMI #6: Ea1*x
% LMI #6: zeros(1,2)
% LMI #6: zeros(1,2)
% LMI #6: -ga1*ga1
% LMI #6: -Eb1*M2
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: zeros(2,2)
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: zeros(2,2)
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: -gb1*gb1*eye(2)
% LMI #6: Ea2*x
% LMI #6: zeros(1,2)
% LMI #6: zeros(1,2)
% LMI #6: zeros(1,2)
% LMI #6: -ga2*ga2
% LMI #6: Eb2*M1
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: zeros(2,2)
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: zeros(2,2)
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: zeros(2,2)
% LMI #6: zeros(2,1)
% LMI #6: gb1*gb1*eye(2)

intsys=pc2lms;
%% Resolver la LMI, la respuesta es buena si intsv=0
[svin,Xfocv]=focsv(intsys);
%% Ahora se extraen las variables (el solucionador de LMI's (focsv)
% asegurarse de utilizar el mismo identificador que en lmsdat .
Xfocv = dec2mat(intsys, Xfocv,X);
polosf=eig(Xfocv);
Mfocv= dec2mat(intsys,Xfocv,M);
Kfocv= dec2mat(intsys,Xfocv,K);
Yfocv= dec2mat(intsys,Xfocv,Y);
polosf=eig(Yfocv);
D0=Xfocv*Yfocv+Xfocv;
polosf0=eig(D0);
%% Denominador y Matriz P
P=inv(Xfocv);
polosp=eig(P);
K1=Mfocv*inv(Yfocv);
K2=Mfocv*inv(Yfocv);

```



## Apéndice B

# LMI Control Toolbox de MATLAB®

En la figura B.1 se muestra la ventana principal del editor LMI. En primer lugar se asigna un nombre al sistema de desigualdades, en este caso se utilizó el de "lmisys". Después se tienen que describir las variables matriciales, en esta parte se tienen tres columnas, en la primera se asigna el nombre de las variables que se van a resolver, en la columna donde dice tipo se tienen tres opciones,  $S$  se utiliza en matrices simétricas cuadradas y  $R$  para matrices rectangulares. Por último se especifica la estructura que va a tener la matriz, en esta columna no se colocan las dimensiones de las matrices, aunque así pareciera, el primer término que se encuentra entre corchetes indica el número de componentes que tiene la diagonal principal y el segundo término determina el número de diagonales que se van a tener.

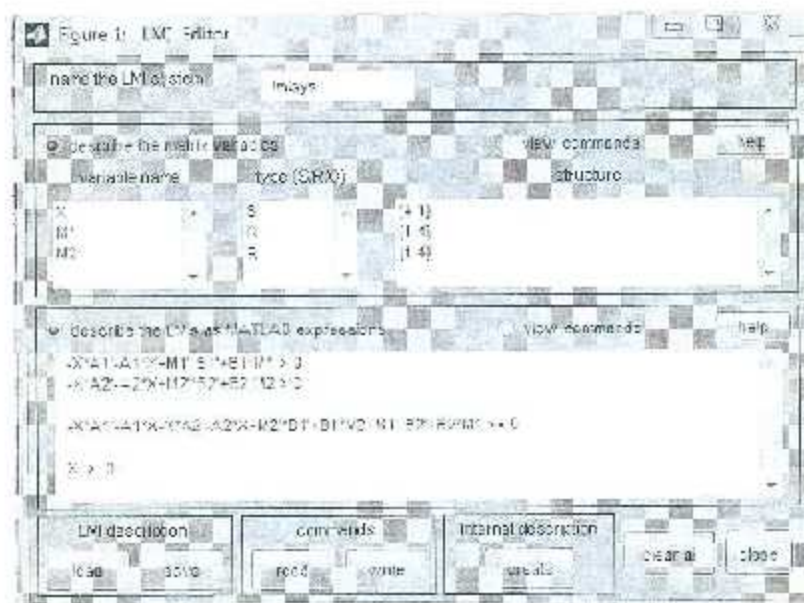


Figura B.1: Interfaz LMledit; con las desigualdades matriciales.

En el siguiente espacio se escriben las desigualdades matriciales; para este ejemplo se utilizarán las vistas en el capítulo 2 (2.11) y (2.12). Para el caso del carro-péndulo se tienen dos reglas, por lo tanto  $r = 2$ ; entonces para la desigualdad (2.11), donde  $i < r$ , se tendrán dos desigualdades, y para el caso de la ecuación (2.12), donde  $i < j \leq r$ , se tendrá una desigualdad; ya por último se define que  $X \succ 0$ , es decir que será definida positiva.

Una vez que se dan de alta todos los datos necesarios hay que dar un click para seleccionar donde dice "view commands" para poder ver los comandos generados por el editor, los cuales serán utilizados para resolver las desigualdades de forma numérica en un programa de MATLAB®. La Figura B.2 muestra los comandos generados.



Figura B.2: Interfaz LM edit con el código generado por las desigualdades matriciales.

# Control Difuso Takagi-Sugeno Robusto Aplicado a un Sistema Carro-Péndulo

<sup>1</sup>Willfredo De La Torre, <sup>2</sup>Miguel A. Llama, <sup>1</sup>Francisco Jurado, <sup>2</sup>Ramón García Hernández

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de la Laguna

Blvd. Revolución y Calzada Cuauhtémoc, Apdo. Postal 49, Adm. 1, Torreón, Coah., 27001, México  
Tel: +52 (871) 705 13 31 Ext. 125 Fax: +52 (871) 705 13 26

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Carmen, Cd. del Carmen, Campeche, México  
{wdela,mllama,fjurado}@itl.laguna.edu.mx, rgchernandez@pamparo.unacar.mx

**Resumen**—En el presente artículo, partiendo de un modelo no lineal para el sistema carro-péndulo, el cual considera fricción viscosa, se propone un modelo difuso Takagi-Sugeno (T-S) para el sistema en cuestión. Teniendo presente que el diseño del controlador difuso T-S se basa en el modelo difuso T-S propuesto, se propone además un modelo difuso T-S con incertidumbres (robusto). Cada uno de los modelos difusos, constituidos por dos reglas difusas, son diseñados empleando la técnica de aproximación local en espacios de partición difusa. Para cada uno de los modelos difusos T-S se propone un compensador paralelo distribuido (PDC) de realimentación de estados para los cuales las ganancias son calculadas mediante el recurso de Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs), garantizando estabilidad global en lazo cerrado. Por otra parte, debido a que la velocidad tanto del carro como del péndulo no son medibles y obedeciendo al principio de separación de la teoría de sistemas lineales, se propone un observador difuso T-S al sistema de control difuso T-S robusto. Para llevar el péndulo a la posición vertical hacia arriba se emplea la bien conocida técnica del vaivén (*swing-up*). El desempeño de los esquemas de control propuestos se validan vía implementación en tiempo real.

**Palabras clave:** Compensación Paralela Distribuida, control difuso Takagi-Sugeno robusto, desigualdades lineales matriciales, observador difuso Takagi-Sugeno, sistema carro-péndulo.

## 1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los sistemas no lineales pueden ser representados por modelos difusos T-S, los cuales son considerados como aproximadores universales (Jaraka y Wang, 2001). En (H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin, 1995), (H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin, 1995), (H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin, 1996), la estabilidad del sistema de control difuso T-S ha sido verificada considerando una función de Lyapunov común, determinada haciendo uso del recurso de Desigualdades Lineales Matriciales (*Linear Matrix Inequalities*, LMIs) y algoritmos de optimización. Nuevas condiciones de estabilidad relajadas y diseños basados en LMIs para sistemas de control difuso en tiempo continuo y en tiempo discreto han sido presentados en (K. Tanaka, T. Ikeda, y H. O. Wang, 1998), cuya utilidad es demostrada sobre el diseño de un regulador y un observador difusos.

El sistema carro-péndulo es una adecuada plataforma experimental para la demostración de aspectos teóricos y prácticos de la teoría de control, debido a su inherente inestabilidad en lazo abierto con dinámicas altamente no lineales, donde las diferentes dinámicas del péndulo y del carro están conjuntamente acopladas. Existen algunas restricciones en el control del sistema tales como el movimiento del carro, debido a la limitada longitud del riel, y la restricción sobre el máximo de la acción de control.

Existen distintos trabajos que abordan el problema de balanceo y estabilización del péndulo invertido sobre un carro, como por ejemplo (E. Asa et al., 2008), (C. W. Tao et al., 2008) y (Trihastuti A., Achmad J., Mohammad N., 2011). En (E. Asa et al., 2008) el método de control de energía se utiliza para llevar y estabilizar el péndulo para una posición vertical con dirección hacia arriba mediante un servo-controlador lineal por realimentación de estados diseñado mediante el Método de Diagramas de Coeficientes (*Coefficient Diagram Method*, CDM). En (C. W. Tao et al., 2008), un controlador híbrido difuso con esquemas de balanceo difuso y asignación de polos vía Compensación Paralela Distribuida (*Parallel Distributed Compensation*, PDC) se adopta para posicionar el péndulo y el carro en los estados deseados. El modelo difuso T-S propuesto para el sistema carro-péndulo, obtenido por linealización mediante series de Taylor alrededor de diferentes puntos de operación, está compuesto por siete reglas difusas en el cual se considera fricción. La efectividad del controlador difuso propuesto es validada en simulación. En (Trihastuti A., Achmad J., Mohammad N., 2011) un control híbrido difuso para el balanceo y estabilización del sistema carro-péndulo ha sido propuesto. El controlador se diseñó empleando el recurso de LMIs para sistemas difusos del tipo T-S. El modelo difuso T-S propuesto, compuesto por tres reglas difusas, se obtiene mediante linealización por series de Taylor y para el cual no se consideró la fricción. La efectividad del método se valida a través de simulación y resultados de experimentación en tiempo real.

En el presente trabajo, empleando la técnica de aproximaciones locales en espacios de partición difusa, se proponen un modelo difuso T-S así como un modelo difuso T-S

robusto para un sistema carro-péndulo, ambos constituidos por dos reglas difusas, en los cuales se considera la fricción viscosa. Se propone para cada modelo difuso T-S un PDC de realimentación de estados cuyas ganancias son determinadas empleando el recurso de LMI's en el aseguramiento de estabilidad global en lazo cerrado. Además, se propone un observador difuso paralelo distribuido, considerando el principio de separación de la teoría de sistemas lineales, para la estimación de las velocidades del carro y del péndulo. El observador difuso en cuestión se agrega al sistema de control difuso T-S robusto. Para llevar el péndulo a la posición vertical hacia arriba se emplea la técnica del *swing-up*. El desempeño de ambos controladores difusos es comparado tanto en simulación como en experimentación. Se reportan únicamente los resultados en tiempo real.

## II. MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA CARRO-PÉNDULO

El modelo matemático, en representación en espacio de estados, para el sistema carro-péndulo considerando la fricción viscosa es descrito como (García, 2006):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \Delta[\gamma\beta x_2^2 \sin x_2 - \beta f_{v,c} x_3 + \\ &\quad + \gamma\delta \sin x_2 \cos x_2 + \gamma f_{v,p} x_3 \cos x_2 + \beta u(t)], \\ \dot{x}_4 &= \Delta[-\gamma^2 x_3^2 \sin x_2 \cos x_2 - \alpha\delta \sin x_2 - \\ &\quad + \gamma f_{v,c} x_3 \cos x_2 - \alpha f_{v,p} x_4 - \gamma \cos x_2 \omega(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x_1$  representa la posición del carro o distancia respecto al centro del riel (m),  $x_2$  representa el ángulo del péndulo con respecto a la vertical (rad),  $x_3$  es la velocidad del carro (m/s),  $x_4$  es la velocidad angular del péndulo (rad/s),  $g$  es la constante de gravedad ( $m/s^2$ ),  $m$  es la masa del péndulo (kg),  $M$  es la masa del carro (kg),  $l$  es la distancia desde el eje de rotación al centro de masa del sistema carro-péndulo (m),  $I$  es el momento de inercia del sistema carro-péndulo con respecto al centro de masa ( $kg \cdot m^2$ ),  $u(t)$  es la fuerza  $F$  aplicada al carro (N),  $f_{v,c}$  y  $f_{v,p}$  representan la fuerza de fricción viscosa del carro y del péndulo respectivamente ( $N \cdot m \cdot s/rad$ ),  $\alpha = ml + M$ ,  $\beta = ml^2 + I$ ,  $\gamma = ml$ ,  $\delta = -mgl$  y  $\Delta = 1/(m\delta - \gamma^2 \cos^2 x_2)$ .

## III. MONTEADO DIFUSO T-S

### III-A. Modelo difuso T-S

El modelo difuso T-S (Takagi y Sugeno, 1985) es descrito mediante reglas difusas del tipo SI-ENTONCES (*IF-THEN*), las cuales representan aproximaciones de entrada-salida locales lineales de un sistema no lineal. La principal característica de un modelo difuso T-S consiste en expresar las dinámicas locales de cada regla a través de un sub-sistema lineal. El modelo difuso completo del sistema se consigue mediante la interpolación difusa de los modelos lineales del sistema.

La estructura de un modelo difuso T-S para un sistema continuo es descrita de la siguiente forma:

### Regla $i$ del modelo

$$\begin{aligned} \text{SI} \quad & z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES} \quad & \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  son variables premisas conocidas que pueden depender de las variables de estado, perturbaciones externas y/o el tiempo;  $M_{ij}$  son los conjuntos difusos,  $r$  es el número de reglas del modelo,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  es el vector de salida,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C_i \in \mathbb{R}^{r \times n}$ . En el presente trabajo se supone que las variables premisas no están en función de las variables de entrada  $u(t)$ .

Dado un par  $\{x(t), u(t)\}$ , la salida final del sistema difuso T-S es inferida usando un *fuzzificador singleton*, una máquina de inferencia producto y un desfuzzificador promedio de centros (L. X. Wang, 1997):

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (3)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \quad (4)$$

donde  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t))$  y  $h_i(z(t)) = w_i(z(t)) / \sum_{i=1}^r w_i(z(t))$  puede ser considerado como el peso normalizado de cada regla SI-ENTONCES,  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$  y el término  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de pertenencia de  $z_j(t)$  en  $M_{ij}$ .

### III-B. Recurso PDC

Para diseñar un controlador difuso para el modelo difuso T-S (2) se emplea la conocida técnica PDC. El recurso PDC ofrece un procedimiento para diseñar un controlador difuso a partir de un modelo difuso T-S dado. Para realizar la PDC, un sistema no lineal deberá primero representarse por un modelo difuso T-S. En el diseño PDC cada  $i$ -ésima regla de control es diseñada a partir de la correspondiente  $i$ -ésima regla del modelo difuso T-S, i.e., el controlador difuso diseñado comparte los mismos conjuntos difusos con el modelo difuso en las partes premisas. El siguiente controlador difuso vía PDC es sugerido:

### Regla $i$ de control

$$\begin{aligned} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES } u(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $r$  es el número de reglas y  $K_i$  es la ganancia de realimentación local. El controlador difuso completo está dado por:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t), \quad (6)$$

Note que el controlador (6), en general, es no lineal.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Delta_2 \delta \xi_1 & -\Delta_2 \beta f_{ax} & \Delta_2 \gamma \Gamma f_{ax} \\ 0 & -\Delta_2 \alpha \xi_2 & \Delta_2 \gamma \Gamma f_{ax} & -\Delta_2 \alpha f_{ax} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \beta \\ -\Delta_1 \gamma \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma \Gamma \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con  $\Gamma = \cos(\frac{\pi}{8})$ .

$$\Delta_1 = \frac{1}{\alpha \beta - \gamma^2}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{\alpha \beta - \gamma^2 \Gamma^2}$$

$$\xi_1 = \frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{\alpha}, \quad \xi_2 = \frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{\alpha}$$

y funciones de membresía  $\mu_1(x_2(t)) = (\frac{\pi}{8} - x_2(t))/(\frac{\pi}{8})$  y  $\mu_2(x_2(t)) = 1 - \mu_1(x_2(t))$  para las reglas difusas 1 y 2, respectivamente.

#### IV-B. Diseño del controlador difuso Takagi-Sugeno vía PDC

Evaluando las matrices para cada subsistema lineal local del modelo difuso T-S (19)-(20) para el carro-péndulo considerando los parámetros del sistema no lineal (1) dados por  $M = 2,278$  kg,  $m = 0,266$  kg,  $l = 0,2958$  m,  $I = 0,03532$  kg·m<sup>2</sup>,  $f_{ax} = 0,003$  N·m/s/rad,  $f_{ax} = 6,33$  N·m/s/rad y asumiendo que el par  $\{A_i, B_i\}$  es controlable, se procede con el diseño del controlador difuso estable. El problema de diseño del control difuso (6) es determinar las ganancias  $K_i$  de los controladores lineales locales que satisfagan las condiciones establecidas en el siguiente teorema:

**Teorema 1:** (Tanaka y Wang, 2001) El equilibrio del sistema de control difuso continuo en lazo cerrado (3)-(6) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz  $P_C$  común definida positiva tal que

$$G_j^T P_C - P_C G_{ij} < 0, \quad (21)$$

$$\left( \frac{G_{is} + G_{jt}}{2} \right)^T P_C + P_C \left( \frac{G_{is} + G_{jt}}{2} \right) \leq 0, \quad (22)$$

para  $i < j$ , tal que  $h_1 \cap h_2 \neq \emptyset$ , con  $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ .

Las condiciones (21) y (22) no son conjuntamente convexas en  $K_i$  y  $P_C$ . Multiplicando las desigualdades por la izquierda y por la derecha por  $P_C^{-1}$ , definiendo una nueva variable  $X = P_C^{-1}$  y definiendo  $M_i = K_i X$ , de modo que para  $X > 0$  se tenga  $K_i = M_i X^{-1}$  resultan las siguientes condiciones LMI que definen el problema del diseño del controlador difuso estable (Tanaka y Wang, 2001):

$$-X A_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T - B_i M_i > 0, \quad (23)$$

$$-X A_i^T - A_i X - X A_j^T - A_j X + M_i^T B_i^T + B_i M_i + M_j^T B_j^T + B_j M_j \geq 0, \quad (24)$$

Las ganancias de realimentación  $K_i$  y una  $P_C$  común pueden obtenerse como

$$P_C = X^{-1}, \quad K_i = M_i X^{-1} \quad (25)$$

a partir de las soluciones  $X$  y  $M_i$ .

Luego, resolviendo el problema de diseño del controlador difuso estable empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB<sup>®</sup> se determinó la existencia de una matriz  $P_C$  simétrica común definida positiva así como las matrices de ganancia  $K_1$  y  $K_2$ , las cuales no se incluyen por falta de espacio.

#### IV-C. Modelo difuso T-S robusto para un sistema carro-péndulo

Tomando en cuenta las mismas consideraciones de diseño del controlador difuso T-S (CDTS) propuesto previamente, se sugiere ahora el siguiente modelo difuso T-S con incertidumbres para el sistema carro-péndulo:

##### Regla 1 del modelo robusto

**SI**  $x_2(t)$  es  $\approx 0$

**ENTONCES**  $\dot{x}(t) = (A_{11} + D_{a1} \Delta_{a1}(t) E_{a1})x(t) + (B_1 + D_{b1} \Delta_{b1}(t) E_{b1})u(t)$  (26)

##### Regla 2 del modelo robusto

**SI**  $x_2(t) \approx \frac{\pi}{8}$

**ENTONCES**  $\dot{x}(t) = (A_{22} + D_{a2} \Delta_{a2}(t) E_{a2})x(t) + (B_2 + D_{b2} \Delta_{b2}(t) E_{b2})u(t)$  (27)

dónde las matrices de incertidumbres están dadas como:

$$D_{a1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_1 \beta f_{ax} \\ \Delta_1 \gamma f_{ax} \end{bmatrix}, D_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_2 \beta f_{ax} \\ \Delta_2 \gamma \Gamma f_{ax} \end{bmatrix},$$

$$D_{b1} = D_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{b1} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \beta \\ \Delta_1 \gamma \end{bmatrix}, E_{b2} = \begin{bmatrix} \Delta_2 \beta \\ -\Delta_2 \gamma \Gamma \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{a1}(t) = \Delta_{a2}(t) = \Delta_{b1}(t) = \Delta_{b2}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \gamma \end{bmatrix},$$

con  $E_{a1} = E_{a2} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ ,  $\gamma_{a1} = \gamma_{a2} = \gamma_{b1} = \gamma_{b2} = \gamma_1 = \gamma_2$ .

#### IV-D. Diseño del controlador difuso Takagi-Sugeno robusto vía PDC

Evaluando las matrices para cada subsistema lineal local del modelo difuso T-S robusto (26)-(27), se procede con el diseño del controlador difuso T-S robusto. El problema de diseño del controlador difuso robusto es determinar las

ganancias  $F_i$  de los controladores lineales locales que satisfagan las condiciones establecidas en el siguiente teorema:

**Teorema 2:** (Tanaka y Wang, 2001) Las ganancias de realimentación  $F_i$  que estabilizan el modelo difuso (7) y maximizan las normas de los bloques de incertidumbres (i.e., minimizan  $\gamma_{\alpha i}$  y  $\gamma_{\beta i}$ ) pueden ser obtenidas resolviendo las siguientes LMIs, donde  $\alpha_i, \beta_i > 0$  son parámetros de diseño:

$$\text{minimizar}_{\gamma_{\alpha i}, \gamma_{\beta i}, X, M_i, \dots, P_{\mathcal{K}}} \sum_{i=1}^r \{\alpha_i \gamma_{\alpha i} + \beta_i \gamma_{\beta i}\}$$

sujeto a

$$X > 0, Y_0 \geq 0, \bar{S}_{\mathcal{K}} + (s-1)Y_1 < 0, \\ \bar{T}_{ij} - 2Y_2 < 0, \quad i < j \text{ tal que } h_i \cap h_j \neq \emptyset$$

donde  $s > 1$ ,  $Y_1 = \text{bloque-diag}(Y_0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $Y_0 = XQ_0X$ ,  $Q_0 \geq 0$ ,  $Y_2 = \text{bloque-diag}(Y_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,

$$\bar{S}_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} XA_i^T + A_iX \\ -B_i^T M_i - M_i^T B_i \end{array} \right) & D_{\alpha i} & D_{\beta i} & XE_{\alpha i}^T & M_i E_{\beta i}^T \\ D_{\alpha i}^T & -I & 0 & 0 & 0 \\ D_{\beta i}^T & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{\alpha i} X & 0 & 0 & -\gamma_{\alpha i}^2 I & 0 \\ -E_{\beta i} M_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\beta i}^2 I \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} XA_i^T + A_iX \\ -B_i^T M_i - M_i^T B_i \\ +XA_j^T + A_jX \\ -B_j^T M_j - M_j^T B_j \end{array} \right) & D_{\alpha i} & D_{\beta i} & D_{\alpha j} & E_{\beta j} & XE_{\alpha i}^T & -M_i^T E_{\beta i}^T & XE_{\alpha j}^T & -M_j^T E_{\beta j}^T \\ D_{\alpha i}^T & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{\beta i}^T & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{\alpha j}^T & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{\beta j}^T & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{\alpha i} X & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{\alpha i}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ -E_{\beta i} M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\beta i}^2 I & 0 & 0 \\ E_{\alpha j} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\alpha j}^2 I & 0 \\ E_{\beta j} M_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{\beta j}^2 I \end{bmatrix}$$

Luego, invocando el teorema 1 y resolviendo el problema de diseño del controlador difuso estable (23)-(25) se obtienen, empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB<sup>®</sup>, una matriz  $P_{\mathcal{K}}$  común simétrica definida positiva así como las ganancias de realimentación  $F_1$  y  $F_2$  para el controlador difuso T-S robusto, las cuales no se incluyen debido a la falta de espacio.

#### IV-E. Diseño del observador difuso

En el sistema real se tienen dos estados no medibles, la velocidad del carro, i.e.  $x_3(t)$ , y la velocidad del péndulo, i.e.  $x_2(t)$ , por lo que es necesario el diseño de un observador difuso para la estimación de los mismos. Considerando para las reglas del observador difuso la misma variable premisa del modelo difuso T-S (19)-(20), i.e.  $x_2(t)$ , estas son establecidas como se describe a continuación.

#### Regla 1 del observador

$$\text{SI } x_2(t) \approx 0 \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_1 \hat{x}(t) + B_1 u(t) + \\ \quad + L_1 (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_1 \hat{x}(t) \end{cases} \quad (28)$$

#### Regla 2 del observador

$$\text{SI } \hat{x}_2(t) \approx \frac{\pi}{8} \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_2 \hat{x}(t) + B_2 u(t) + \\ \quad + L_2 (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_2 \hat{x}(t) \end{cases} \quad (29)$$

Utilizando el principio de separación, el problema de estabilidad del observador difuso es resuelto atendiendo el siguiente teorema:

**Teorema 3:** (Tibbastui, A., Achmad, J., Mohammad, N., 2011) La ecuación (18) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz  $P_{\mathcal{O}}$  común definida positiva tal que

$$H_{\mathcal{O}}^T P_{\mathcal{O}} + P_{\mathcal{O}} H_{\mathcal{O}} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \left( \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2} \right)^T P_{\mathcal{O}} + P_{\mathcal{O}} \left( \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2} \right) < 0,$$

para  $i < j \leq r$  tal que  $h_i \cap h_j \neq \emptyset$ , con  $H_{\mathcal{O}} = A_{\mathcal{O}} - L_{\mathcal{O}} C_{\mathcal{O}}$ .

Suponiendo el par  $(A_i, C_i)$  observable y ubicando los polos de lazo cerrado en  $[-25 - 10i \quad -25 - 10i \quad -27 + 10i \quad -27 - 10i]$  se obtuvieron las ganancias  $L_1$  y  $L_2$  del observador difuso.

Luego, una matriz  $P_{\mathcal{O}}$  común simétrica definida positiva se obtuvo resolviendo las desigualdades del teorema anterior

## Bibliografía

- [1] KAZUO TANAKA, HUA O. WANG, *"Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach"*, John Wiley & sons, Inc., 2001, ISBN 0-471-22459-6 (Electronic).
- [2] HUA O. WANG, KAZUO TANAKA AND MICHAEL F. GRIFFIN, *"An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues"*, IEEE Trans. on Fuzzy Sys., Vol. 4, pp 14-23, 1996.
- [3] H. O. WANG, K. TANAKA AND M. GRIFFIN, *"Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model"*, IEEE, pp 531-538, 1995.
- [4] HUA O. WANG, K. TANAKA AND M. F. GRIFFIN, *"An Analytical Framework of Fuzzy Modeling and Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues"*, Proc. 1995 American Control Conference, Seattle, 1995, pp 2272-2276.
- [5] K. TANAKA, T. IKEDA, AND H. O. WANG, *"Design of Fuzzy Control Systems Based on Relaxed LMI Stability Conditions"*, 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Vol. 1, pp. 598-603, 1996.
- [6] N. MUSKINJA AND B. TOVORNIK., *"Swing-Up and Stabilization of a Real Inverted Pendulum"*, IEEE Transactions Industrial Electronics, Vol. 53, pp. 631-639, 2006.
- [7] E. ASA, T. BENJANARASUTH, J. NGAMWIWIT AND N. KOMINE., *"Hybrid Controller for Swinging Up and Stabilizing the Inverted Pendulum on Cart."* Proc. Int. Conf. Control, Automation and System, pp. 2504-2507, 2008.
- [8] C. W. TAG, J. S. TAUR, T. W. HSIEH AND C. L. TSAL., *"Design of a Fuzzy Controller With Fuzzy Swing-Up and Parallel Distributed Pole Assignment Schemes for an Inverted Pendulum and Cart System"*, IEEE Transactions Control System Technology, Vol. 16, pp. 1277-1288, 2008.
- [9] GWO-RUEY YU AND SHUN-MIN WANG., *"Robust Fuzzy Control for Inverted Pendulum with Model Uncertainty and Output Constraint via LMI Stability Analysis"*, Proceedings of 2012 International Conference on Fuzzy Theory and Its Applications, National Chung Hsing University, Taichung, Taiwan, Nov. 16-18, 2012.

- [10] TRIFASTUTI A., ACHMAD J., MOHAMMAD N., "Hybrid Fuzzy Control for Swinging up and Stabilizing of the Pendulum-Cart System", 978-1-4244-8728-8/11 ©2011 IEEE.
- [11] TRIFASTUTI A., ACHMAD J., MOHAMMAD N., "Swinging Up and Tracking Controller Design for a Pendulum-Cart System Using Hybrid Fuzzy Control", European Journal of Science Research, ISSN 1450-216X Vol.62 No.2, pp. 182-197, 2011.
- [12] GAHINET P., NEMIROVSKI A., LAUB A., CHILALI M., "LMI Control Toolbox For Use with MATLAB", LMI Control Toolbox User's Guide, ©COPYRIGHT 1995 by The MathWorks, Inc.
- [13] T. TAKAGI AND M. SUGENO, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", IEEE Trans. Syst. Man, Cyber., Vol. 15, pp 116-132, 1985.
- [14] L. X. WANG, "A Course in Fuzzy Systems and Control", Proc. 1995 Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [15] M. SUGENO AND G. T. KANG, "Fuzzy Modeling and Control of a Multilayer Incinerator", Fuzzy Sets Syst.No. 18, pp 329-346, 1986.
- [16] K. TANAKA AND M. SUGENO, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", Fuzzy Sets Syst., Vol. 45, No.2, pp 135-156, 1992.
- [17] K. TANAKA, T. IKEDA, AND H. O. WANG, "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers", IEEE Trans. Fuzzy Syst., Vol. 6, No. 2, pp. 253-265, 1998.
- [18] BOYD ET AL., "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [19] E. J. DAVISON, "Linear Systems", M. K. Masten (Ed.), Modern Control Systems, IEEE Inc., New Jersey, pp. 93-132, 1995.
- [20] K. TANAKA Y M. SANO, "On the Concept of Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers", Proceedings of Third IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 2, June 1994, pp. 767-772.
- [21] K. TANAKA, T. TANIGUCHI Y H. O. WANG, "Robust and Optimal Fuzzy Control: A Linear Matrix Inequality Approach", International Federation of Automatic Control (IFAC) World Congress, Beijing, July 1999, pp. 213-218.
- [22] K. TANAKA, M. NISHIMURA Y H. O. WANG, "Multi-Objective Fuzzy Control of High Rise/High Speed Elevators Using LMIs", American Control Conference, 1998, pp. 3450-3451.
- [23] KELLY R., SANTIBAÑEZ V., "Control de Movimiento de Robots Manipuladores", Pearson Educación S. A., Madrid, 2003.



- [23] C. W. TAO, JINSHUOH S. TAUR, TZUEN WUU HSIEH AND C. L. TSAI, "Design of a Fuzzy Controller With Fuzzy Swing-Up and Parallel Distributed Pole Assignment Schemes for an Inverted Pendulum and Cart System", IEEE Trans. on Control Sys. Tech., Vol. 16, pp 1277-1288, 2008.
- [25] NORMAN S. NISE, "Sistemas de Control para Ingeniería", Compañía editorial continental, tercera edición en inglés (primera edición en español), 2004.
- [26] MARTÍNEZ Z. MOISÉS A., "Desarrollo de un Sistema para Simulación y Control en Tiempo Real de un Péndulo Invertido", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, 2006.
- [27] GARCÍA P. JESÚS, "Implementación y Control de un Sistema Péndulo Invertido", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, 2006.
- [28] CENTENO C. HUGO, "Control Difuso Adaptable de Sistemas Mecatrónicos: Aplicación Experimental a un Carro-Péndulo y a un Robot Manipulador de 2 GDL", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, 2008.
- [29] FRANCISCO RUVALCABA GRANADOS, "Control difuso adaptable con realimentación completa de estados de un sistema carro péndulo: aplicación experimental", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, 2010.
- [30] VÍCTOR SAMUEL DE LEÓN GÓMEZ, "Control Neurodifuso Aplicado a un Carro-Péndulo", Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, 2010.