



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Maestría

Modelado y Control por Pasividad de un Uav Híbrido

presentada por

Ing. Jesús Eduardo Durán Delfín

como requisito para la obtención del grado de
**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Carlos Daniel García Beltrán

Codirectora de tesis

Dra. María Eusebia Guerrero Sánchez

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2022.



Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

12/agosto/2022
SAC/128/2022
Autorización de
impresión de tesis

JESÚS EDUARDO DURÁN DELFÍN
CANDIDATA(O) AL GRADO DE MAESTRA(O) EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

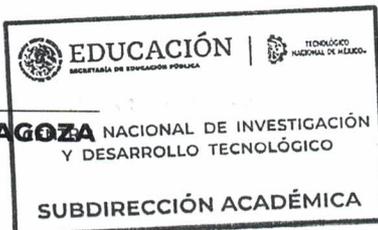
Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Modelado y Control por Pasividad de un UAV Híbrido", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
"Educación Tecnológica al Servicio de México"

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA SUBDIRECTOR ACADÉMICO
CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO TECNOLÓGICO



C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/CHG



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Electrónica

Cuernavaca, **12/agosto/2022**
Mor., **DIE/114/2021**
No. de Oficio: **Aceptación de documentos de**
Asunto: **tesis**

DR. CARLOS MANUEL ASTROGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Jesús Eduardo Durán Delfín, con número de control M20CE075 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Modelado y Control por Pasividad de un UAV Híbrido." y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS


Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 8699605

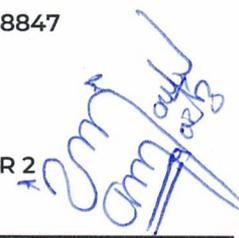
CODIRECTOR DE TESIS


Dra. María Eusebia Guerrero Sánchez
Doctora en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 11088847

REVISOR 1


Dr. Manuel Adam Medina
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 5992003

REVISOR 2


Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 8031070

C.p. Lic. Silvia del Carmen Ortiz Fuentes- jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
HEE/mrsr

A mis padres

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis padres que siempre están conmigo, en cada una de las decisiones que he tomado dándome fuerza y ejemplo para seguir mis metas. Un enorme agradecimiento por todas sus enseñanzas en momentos difíciles alentándome a confiar en mi.

Agradezco a mis asesores y revisores de tesis: al Dr. Carlos Daniel García Beltrán y a la Dra. María Eusebia Guerrero Sánchez, por sus enseñanzas y apoyo en este trabajo de tesis, que sin su ayuda realmente habría sido imposible llegar a Francia. Al Dr. Victor Manuel Alvarado Martínez y al Dr. Manuel Adam Medina por sus conocimientos compartidos que contribuyeron de forma muy importante en el enriquecimiento del presente trabajo.

Agradecimiento especial al Dr. Pedro Castillo García. Por recibirme en el Laboratorio de Heudiasyc de la University of Technology of Compiègne, por hacer de mi estancia en Francia una experiencia agradable y con grandes enseñanzas académicas.

No puedo dejar de agradecer a mis amigos, que contribuyeron de forma especial a la realización de este trabajo. Gracias a Cavita, Peam y a Wigum, por siempre estar, por demostrarme su amistad.

Agradezco al Tecnológico Nacional de México, a los docentes y al personal del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por su disponibilidad en la enseñanza y su ayuda en los trámites escolares. Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT) por proporcionar los recursos económicos necesarios para el desarrollo y culminación de esta investigación.

Abstract

Nowadays, the applications of unmanned aerial vehicles (UAVs), better known as Drones, have been expanding rapidly in a variety of industries, thanks to robust investments and more flexible regulations that allow their use, the two main designs of UAVs are fixed-wing aircraft and rotary-engine helicopters. Each has its own advantages and disadvantages.

This research work aims to design and develop a control law to stabilize a hybrid Vtol in the transition stages of cruise-stationary flight. The control objective is to allow the realization of the two flight regimes of a hybrid Vtol along a trajectory.

The system under consideration is underactuated, because it has six degrees of freedom and only five degrees are actuated. A mathematical model is proposed under the Euler-Lagrange formulation for the system, in which the integrated dynamics of the 2 elements are considered: The airplane and the tricopter.

Finally, a control assignment algorithm is proposed, which allows mapping the generated control inputs to the real inputs of the system, which, are the speeds of each motor and their angular positions.

Keywords: Passivity based control, interconnection and damping assignment, nonlinear control, hybrid Vtol, thrust vector.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Justificación	7
1.3. Objetivos	8
1.3.1. Objetivo General	8
1.3.2. Objetivos Específicos	8
1.4. Estado del Arte	8
1.4.1. Estrategias de control de vehículos aéreos de ala fija	8
1.4.2. Estrategias de control de vehículos aéreos VTOL	9
1.4.3. Estrategias de control de vehículos aéreos híbridos	10
1.4.4. Estrategias de control PBC e IDA-PBC	12
1.5. Aportaciones	14
1.6. Publicaciones	14
1.7. Organización del trabajo	15
2. Modelo matemático del tricóptero	16
2.1. Introducción	16
2.2. Sistema de referencia	17
2.3. Conclusiones	20
3. ESTRATEGIA IDA-PBC	21
3.1. Introducción	21
3.2. Hamiltoniano controlado por puertos	21
3.3. Transformación de Legendre	24
3.4. Desarrollo de la estrategia de control IDA-PBC	24
3.5. Resultados y simulaciones	30
3.6. Conclusiones	38

4. Modelo matemático del VANT de ala fija	39
4.1. Introducción	39
4.2. Ecuaciones de movimiento	39
4.3. Resultados y simulaciones del avión skywalker x8	44
4.4. Conclusiones	54
5. Modelado matemático del VTOL híbrido	55
5.1. Introducción	55
5.2. Sistemas de Referencia	55
5.2.1. Marco de Referencia Inercial	55
5.2.2. Marco del Cuerpo	56
5.2.3. Ángulos de Euler	57
5.2.4. Ejes del Ala y de Estabilidad	59
5.3. Modelado Euler-Lagrange del VTOL	60
5.3.1. Cálculo de las fuerzas y momentos producidos por los motores.	64
5.4. Conclusión	69
6. Pasividad y Moldeo de energía	71
6.1. Introducción	71
6.2. Estabilidad	73
6.3. Control PBC	77
6.3.1. Algoritmo de asignación de control	80
6.3.2. Resultados de simulación del Control PBC	85
6.4. Índices de desempeño	95
6.5. Conclusiones	97
7. Conclusiones	98
7.1. Trabajos futuros	99
Bibliografía	100

Índice de figuras

1.1. Vehículo aéreo Ryan X-13	3
1.2. Helicóptero Flocke-Wulf FW61	4
1.3. Helicóptero Schiebel Camcopter S-100	5
1.4. Focke-Wulf Triebflugel	6
1.5. Boeing-Bell V-22 Osprey	6
2.1. Representación esquemática del tricóptero	17
3.1. Gráfica de la trayectoria en espiral del tricóptero	30
3.2. Gráfica de las posiciones longitudinales del tricóptero	31
3.3. Gráfica de las posiciones angulares del tricóptero	31
3.4. Gráfica de las fuerzas generadas por el controlador para el tricóptero	32
3.5. Gráfica de la trayectoria en forma de lemniscata del tricóptero	33
3.6. Gráfica de la posición longitudinal del tricóptero	33
3.7. Gráfica de la posición angular del tricóptero	34
3.8. Gráfica de las fuerzas generadas por el controlador	34
3.9. Gráfica de la trayectoria para el tricóptero	35
3.10. Gráfica de la posición longitudinal del tricóptero	35
3.11. Gráfica de la posición angular de tricóptero	36
3.12. Gráfica de la trayectoria senoidal para el tricóptero	36
3.13. Gráfica de la posición longitudinal de tricóptero	37
3.14. Gráfica de la posición angular de tricóptero	37
4.1. Avión de ala fija Skywalker x8	40
4.2. Gráfica de la trayectoria en espiral recorrida por del avión skywalker x8	44
4.3. Gráfica de la trayectoria longitudinal recorrida por del avión skywalker x8.	45

4.4. Gráfica de la trayectoria angular recorrida por el avión skywalker x8	45
4.5. Comparación de la trayectoria recorrida por del avión skywalker x8	46
4.6. Comparación de la posición longitudinal recorrida por el avión skywalker	47
4.7. Comparación de la posición angular recorrida por del avión skywalker	48
4.8. Comparación de la trayectoria recorrida por del avión skywalker x8	48
4.9. Comparación de la posición longitudinal del avión skywalker x8	49
4.10. Comparación de la posición angular del avión skywalker x8	50
4.11. Comparación de las fuerzas generadas del avión skywalker x8	50
4.12. Comparación de los momentos generados del avión skywalker x8	51
4.13. Gráfica de la trayectoria recorrida por el Avión skywalker x8	52
4.14. Gráfica de las posiciones longitudinales recorridas por el avión skywalker x8	52
4.15. Gráfica de las posiciones angulares del Avión skywalker x8	53
4.16. Gráfica de las Fuerzas generadas por Avión skywalker x8	53
4.17. Gráfica de los momentos del avión skywalker x8	54
5.1. Convenciones usadas para el VTOL	56
5.2. Rotación del vehículo híbrido	57
5.3. VTOL híbrido diseñado	60
5.4. Diagrama de cuerpo libre	65
5.5. Descomposición de fuerzas del motor 2	66
5.6. Descomposición de fuerzas del motor 3	66
5.7. Descomposición de fuerzas del vector del motor 1	67
5.8. Dirección de los momentos del VTOL producidos por el vector de empuje	68
5.9. Vector de empuje diseñado para el VTOL	69
6.1. Diagrama de bloques del controlador	80
6.2. Diagrama de cuerpo libre para la entrada intermedia	82
6.3. Diagrama de cuerpo libre de motores frontales para la entrada intermedia	82
6.4. Posiciones angulares de cada motor	84
6.5. Trayectoria generada para el Vtol y la recorrida	85

6.6. Gráfica de las posiciones longitudinales recorridas	86
6.7. Gráfica de las posiciones angulares	86
6.8. Gráfica de la trayectoria lemniscata recorrida por el Vtol	
híbrido	87
6.9. Gráfica de la posición longitudinal del Vtol híbrido	88
6.10. Gráfica de la posición angular del Vtol híbrido.	88
6.11. Gráfica de la posición de los motores del Vtol híbrido	89
6.12. Trayectoria 3 generada para el Vtol	90
6.13. Gráfica 2 de las posiciones longitudinales	90
6.14. Gráfica 2 de las posiciones angulares	91
6.15. Gráfica de las posiciones angulares de cada motor	92
6.16. Comparación de las fuerzas generadas por el controlador y	
las alas	92
6.17. Gráfica de la trayectoria senoidal recorrida por el Vtol híbrido	93
6.18. Gráfica de las posiciones longitudinales del Vtol híbrido	94
6.19. Gráfica de las posiciones angulares del Vtol híbrido	94
6.20. Gráfica de las posiciones angulares de los motores del Vtol	
híbrido	95

Índice de cuadros

2.1. Tabla de Parámetros	20
4.1. Tabla de parámetros aerodinámicos	43
6.1. Tabla del índice de desempeño medido con el ITAE	96
6.2. Tabla con las señales de control totales generadas por el controlador	96

NOMENCLATURA

ϕ Ángulo de rotación de balanceo (roll).

θ Ángulo de rotación de cabeceo (pitch).

ψ Ángulo de rotación de guiñada (yaw).

δ_e Deflexión del elevador.

δ_r Deflexión del timón de cola.

I Marco de referencia inercial.

η . Marco de referencia sobre el cuerpo.

X, Y, Z Ejes de desplazamiento en el marco inercial.

B_x, B_y, B_z Ejes en el marco del cuerpo del vehículo.

u, v, w Velocidades tangenciales sobre η .

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ Aceleraciones tangenciales sobre η .

p, q, r Velocidades angulares sobre η .

$\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ Aceleraciones angulares sobre η .

D_u, Y_v, L_w Fuerzas aerodinámicas sobre η .

L_A, M_A, N_A Momentos aerodinámicos sobre η .

F_x, F_y, F_z Momentos producidos por los motores sobre η .

M_x, M_y, M_z Momentos producidos por los motores sobre η .

$I_{x,y,z, zx}$ Coeficientes de inercia del sistema.

$\Omega_{1,2,3}^2$ Velocidad angular de las hélices.

θ_{m1} Ángulo de inclinación del motor 1 entre el eje B_x y B_z .

θ_{m2} Ángulo de inclinación del motor 2 entre el eje B_x y B_z .

θ_{m3} Ángulo de inclinación del motor 3 entre el eje B_x y B_z .

ϕ_{m1} Ángulo de inclinación del motor 1 entre el eje B_y y B_x .

g Fuerza de gravedad.

m Masa total del sistema.

ρ Densidad del aire.

S Superficie alar.

V Velocidad de vuelo en línea recta.

C_L Coeficientes de sustentación.

C_D Coeficientes de arrastre.

C_Y Coeficientes de deslizamiento.

δ Entrada de control del sistema.

b Longitud alar.

c Ancho alar.

Introducción

En la actualidad, las aplicaciones de vehículos aéreos no tripulados (VANTs por sus siglas en español) mejor conocidos como Drones, se han ido expandiendo de manera muy rápida en una gran variedad de industrias, gracias a inversiones robustas y a regulaciones más flexibles que permiten su uso. Los VANTs brindan ventajas sofisticadas en comparación con cualquier otro sistema de navegación, como lo es el monitoreo preciso de aquellas áreas que son de difícil acceso para el hombre, rastreo de actividades ilegales, observación de incendios forestales y vigilancia de cultivos de grandes granjas agrícolas, entre otros. (Brito y cols., 2019)

Los dos diseños principales de los VANTs son los aviones de ala fija y los helicópteros de motor rotativo. Cada uno de ellos tienen sus propias ventajas y desventajas. Los VANTs de ala fija pueden volar a una velocidad más alta, de 40 a 60 kilómetros por hora, incluso sin dejar de tomar fotografías en el proceso, llegando a cubrir 2.5 kilómetros cuadrados por hora (Anderson y Gaston, 2013). Mientras que los de motores rotativos pueden flotar y enfocarse en puntos problemáticos, suspendidos solamente en un punto de operación, sacrificando la velocidad máxima, tienen menor duración de la batería, debido a que a menudo hacen funcionar cuatro o más motores, pero tienen la capacidad de hacer despegues y aterrizajes sin la necesidad de terrenos de gran tamaño para poder realizar dichas actividades.

Teniendo en cuenta estas características, tanto de VANTs de motores rotativos como de ala fija presentan inconvenientes en tareas que involucren ambos comportamientos, por ejemplo, ya que en el monitoreo de parcelas, se recorren largas distancias y al mismo tiempo es necesario supervisar

puntos específicos del plantío (Ahirwar y cols., 2019), un avión de ala fija no es capaz de permanecer en un punto fijo, por otro lado, a un VANT de motores rotativos le ocurre todo lo contrario ya que si puede mantenerse levitando pero su desgaste energético es mucho mayor comparándolo con un avión de ala fija ya que estos son más eficientes, es aquí donde las aeronaves de despegue y aterrizaje vertical (VTOL, por sus siglas en inglés) tienen su aparición, las cuales combinan un helicóptero con su capacidad de despegar y aterrizar en casi cualquier lugar, con la velocidad, alcance, resistencia y capacidad de carga de un avión de ala fija.

Debido a esto, los VANTs del tipo rotores y alas basculantes se han venido desarrollando debido a su excelente rendimiento, debido a que tienen la capacidad de realizar vuelos verticales y la capacidad de vuelos de mayor rango, ya que sus configuraciones permiten el potencial de alterar el aire a través de sus alas facilitando la combinación de despegues verticales y vuelo en crucero a alta velocidad.

Por lo tanto, actualmente, los vehículos aéreos no tripulados híbridos han sido de gran interés para la investigación debido a sus capacidades para combinar el despegue vertical y características de aterrizaje de vehículos multirotor, y el vuelo convencional o despegue y aterrizaje convencional de vehículos de ala fija

1.1. Antecedentes

La idea de un vehículo con la capacidad de despegar y aterrizar de forma vertical y volar con ala fija existe desde principios del siglo XX, cuando comenzó la segunda guerra mundial, pero no fue hasta la guerra fría, cuando se dedicaron numerosos recursos económicos para desarrollar aparatos con capacidad de despegue vertical.

Existieron numerosos aparatos experimentales VTOL, sin embargo, pocos llegaron a alcanzar la fabricación en serie. Entre los desarrollos más notables se encuentra el Ryan X-13 fabricado en 1955 mostrado en la Figura 1.1, cuya principal característica le permitía despegar y aterrizar sobre su cola.

El principal problema de estos dispositivos radica en su dificultad de es-

tabilización, ya que requieren una gran pericia por parte del piloto, además de que la combinación de estos modelos no comparten dinámicas de vuelo.



Figura 1.1: Vehículo aéreo Ryan X-13

Lo que hace que se requieran estrategias que permitan realizar una transición viable entre los dos tipos de vuelo (Sanchez-Rivera y cols., 2020), sin contar que para elevar el vehículo se requiere de pares mecánicos muy elevados, por tanto, los ejes de transmisión y engranajes debían ser muy robustos y por ende pesados, características muy poco adecuadas en aeronaves, es por ello que muchas de estas ideas no llegaron a triunfar.

Aunque el primer vuelo vertical fue realizado en 1907 por el inventor francés Paul Crane, los primeros VTOL realmente viables que sentaron las bases de los helicópteros fueron el Flocke-Wulf Fw 61 alemán Figura 1.2 y el Vought-Sikorsky VS-300 estadounidense. El primero voló en 1936, mientras que, el Vought-Sikorsky lo hizo por primera vez en 1937, cuando la teoría del vuelo estaba suficientemente entendida. Luego, para satisfacer la necesidad de aviones planeadores durante la Segunda Guerra Mundial, varios helicópteros entraron rápidamente en producción gracias a sus prometedoras prestaciones.



Figura 1.2: Helicóptero Flocke-Wulf FW61

Sin embargo, cuanto más mejoraban los helicópteros, más evidente era su principal limitación en comparación con los aviones (Hassanalian y Abdelkefi, 2017). Algunas de las limitaciones de los helicópteros son:

- Una velocidad máxima teórica de 200 km/h.
- Una altitud de servicio relativamente baja en comparación con los aviones.
- Un alcance y resistencia limitado. En el caso de un avión, al estar el alcance limitado por la extensión de las telecomunicaciones, la cantidad decisiva es la resistencia. Por ejemplo, para la misma masa de carga útil (90 kg), el AAI RQ-7 Shadow, basado en una configuración de avión, puede volar 9 horas, mientras que el Schiebel Camcopter S-100 Figura 1.3, su homólogo, sólo puede volar 5 horas.



Figura 1.3: Helicóptero Schiebel Camcopter S-100

Por otro lado, los alemanes fueron los primeros en desarrollar vehículos con la capacidad de inclinar sus motores para generar despegues verticales, de hecho ellos a través de diferentes proyectos fueron los que establecieron la mayoría de métodos para lograr estos objetivos:

- Motores batientes o vectores de empuje.
- Configuraciones con sistemas de sustentación separados.
- Configuraciones “Tail-sitter”

Mientras que, los vehículos diseñados con sistemas de sustentación separados tenían el inconveniente de generar mucho arrastre aerodinámico, y además llevaban consigo una carga de peso extra, lo que resultaba impráctico, debido a que durante vuelos a gran velocidad la sustentación aerodinámica es prácticamente generada por los perfiles alares, un ejemplo de esto fue el Focke-Wulf Triebflugel mostrado en la Figura [1.4](#).



Figura 1.4: Focke-Wulf Triebflugel

Ya en épocas más recientes el primer vehículo operacional con capacidad de inclinar sus motores fue el avión militar Boeing-Bell V-22 Osprey mostrado en la Figura [1.5](#). Sin embargo, su complejidad y sus restricciones de diseño le impedían ser asequible o totalmente fiable, estos inconvenientes, lo hacían poco adecuado para las aplicaciones de los vehículos aéreos no tripulados.



Figura 1.5: Boeing-Bell V-22 Osprey

1.2. Justificación

Los VANTs híbridos se han limitado durante mucho tiempo a aplicaciones muy específicas, por lo que no había gran variedad de estos en el mercado. Sin embargo, desde principios del siglo XXI, su número ha aumentado con gran rapidez y parece que seguirá aumentando en función del desarrollo de nuevas y atractivas aplicaciones.

Debido al coste de desarrollo y al tiempo necesario, ya no parece conveniente seguir diseñando una aeronave por aplicación ya que los vehículos aéreos no tripulados requieren, en función de las capacidades de adaptación, campos de aterrizaje más o menos largos y preparados, mantenerse en puntos específicos de observación o realizar tareas que combinen las dinámicas tanto de aviones de ala fija como helicópteros.

No obstante, estos vehículos además de heredar las ventajas de ambas dinámicas, suelen también heredar sus desventajas y sobre todo los problemas ocasionados en torno a su estabilidad de vuelo, debido a las diferentes fuerzas de sustentación, arrastre y deslizamiento provocadas por los perfiles alares y las dinámicas no lineales de estos.

Entre los distintos tipos de vehículos aéreos no tripulados, los VANTs híbridos tendrán probablemente un futuro brillante, ya que representarán una parte significativa del mercado debido a sus prestaciones aerodinámicas y a su cómoda capacidad. Los modelos actuales presentan, sin embargo, algunos defectos que parecen rectificables, por lo que es un área de oportunidad para la investigación y el desarrollo de estrategias de control que permitan realizar las transiciones de vuelo necesarias para funcionamiento de estos vehículos.

Por lo que en este trabajo, se desarrolla el modelado matemático de un vehículo híbrido con una configuración de motores diferente a la encontrada en la literatura, además, se diseña una estrategia de control basada en pasividad para el modelado matemático de dicho vehículo.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Desarrollar una estrategia de control basada en pasividad que garantice la estabilidad durante la transición entre el vuelo estacionario al vuelo crucero y viceversa para un vehículo aéreo no tripulado híbrido tipo rotor batiente.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Desarrollar un modelo matemático para el VTOL híbrido de ala fija con 3 rotores.
2. Desarrollar una estrategia para el control de vuelo en la etapa de transición estacionaria y vuelo crucero.
3. Implementar la estrategia de control en el modelo obtenido.

1.4. Estado del Arte

1.4.1. Estrategias de control de vehículos aéreos de ala fija

En (Knoebel y cols., 2006) se presenta un modelo aerodinámico y un esquema de control de posición y actitud basado en cuaterniones para controlar un VTOL a través del vuelo estacionario. Las trayectorias deseadas se desarrollan a través de la linealización de retroalimentación de las ecuaciones dinámicas, destinadas al control angular basado en cuaterniones. Finalmente, se utiliza un control por retroalimentación Proporcional Integral Derivativo (PID).

En (Bapst y cols., 2015) se muestra el diseño e implementación de un pequeño vehículo aéreo VTOL. Además, del desarrollo de un modelo de estimación del flujo de aire a través de las superficies de control para la estabilización de rotación del vuelo estacionario en un VTOL, de igual forma en este trabajo se hace uso de un control PID como estrategia de control para corregir la trayectoria del sistema.

En (Mathisen y cols., 2016) se introduce el uso del control predictivo de modelos no lineales restringidos (NMPC, por sus siglas en inglés), para aterrizajes de alta precisión en situaciones de entrada en pérdida de un VANT de ala fija, mediante simulaciones en seis grados de libertad. El algoritmo de control lleva el VANT horizontalmente en la dirección correcta del objetivo de aterrizaje hasta que el ángulo de la línea de visión longitudinal desde el VANT hasta el objetivo de aterrizaje ha alcanzado un límite determinado.

En (Gryte y cols., 2018) se revisan dos medios comunes para establecer tales modelos; herramientas de diseño numérico y pruebas en túnel de viento, presentando fortalezas y problemas potenciales. Como caso de estudio a lo largo del documento, se presenta un modelo aerodinámico de seis grados de libertad del vehículo aéreo no tripulado de ala fija Skywalker X8.

1.4.2. Estrategias de control de vehículos aéreos VTOL

En (Zhao y cols., 2013) se analiza el control de seguimiento de trayectorias para un VTOL utilizando la técnica de retroceso filtrado de comandos. Los cuaterniones se utilizan para representar la posición angular del vehículo para garantizar el seguimiento global sin singularidades. Dado que los cuaterniones tienen su propia álgebra, no se pueden filtrar mediante un filtro de comando basado en vectores; por lo tanto, se desarrolla un filtro de cuaterniones de segundo orden para filtrar el cuaternión y calcular automáticamente su derivada. Este trabajo hace uso de un controlador por retrocesos (backstepping por sus siglas en inglés) para el seguimiento de trayectorias del vehículo, el cual consta de cuatro rotores, como ejemplo para mostrar el rendimiento del controlador propuesto.

En (Guerrero y cols., 2015) se aplica una técnica de control no lineal, que aprovecha la propiedad de pasividad de un sistema cuadrotor, para resolver el problema de seguimiento de trayectoria. La técnica de control basado en pasividad (PBC) es por asignación de interconexión y de amortiguamiento (IDA).

En (Prach y Kayacan, 2018) se presenta la fusión de un controlador convencional y un controlador predictivo aplicado al modelo lineal de un tricóptero de rotor basculante. Mientras que el controlador convencional es responsable del control de posición en el lazo externo, la estrategia ba-

sada en el control predictivo del modelo estabiliza la dinámica angular y la velocidad vertical del cuerpo en el lazo interno. Además, este estudio también cubre el modelado matemático y el análisis de compensación de la dinámica del tricóptero de rotor basculante, los resultados numéricos muestran que el controlador predictivo del modelo propuesto es capaz de proporcionar un rendimiento de seguimiento de trayectorias satisfactorio bajo los límites realistas del actuador.

En (Song y cols., 2016) se muestra el análisis de la estructura mecánica y se presentan tres posibles configuraciones para los rotores del trirotor. Se comparan las tres posibles configuraciones de rotores y se elige la que el rendimiento del control es mejor. Se realizan las simulaciones numéricas para el sistema no lineal del VANT trirotor. A fin de seguir la tendencia de vuelo de alta precisión y maniobra del multi-rotor, se utilizó una estrategia de control por retroceso para diseñar el controlador angular de vuelo del VANT y se obtuvo un buen desempeño de vuelo.

En (Mehndiratta y Kayacan, 2018) se presenta un control predictivo no lineal, como un método de control activo tolerante a fallas, para un tricóptero coaxial en presencia de una falla del actuador, respetando las limitaciones del actuador. Se propone una metodología de control en lazo cerrado en cascada, que erradica la necesidad de diseñar múltiples controladores para operaciones normales y defectuosas. La eficacia de la metodología presentada se ilustra para el seguimiento de una trayectoria en forma de 8 con una pérdida completa de un rotor. Desde los casos de falla secuencial de dos rotores diferentes, se muestra que incluso con un retardo de detección de fallas de 0.5 s, la divergencia de altitud es de 0.41 m, que disminuye suavemente en el lapso de unos segundos. Se logra un tiempo de ejecución de 2.1 milisegundos, lo que es prometedor por su aplicabilidad en tiempo real para aplicaciones aeroespaciales rápidas.

1.4.3. Estrategias de control de vehículos aéreos híbridos

En (Kendoul y cols., 2006) se presenta el diseño de un vehículo aéreo híbrido que consta de dos hélices montadas lateralmente, en el cual la dirección de empuje se puede redirigir inclinando las hélices lateral y longitudinalmente. Se muestra un análisis teórico de este mecanismo y resultados experimentales muestran que esta configuración aerodinámica es prome-

tedora. En este artículo, también se presenta un modelo de la dinámica del birotor completa y se sintetiza un controlador por retroalimentación de estados, realizando también un vuelo autónomo.

En (Papachristos y cols., 2013) se desarrolla una plataforma que combina las ventajas operativas de dos tipos de aeronaves comúnmente distintas, desarrollado con base en la teoría de sistemas híbridos. En particular, se deriva una aproximación de modelado afín por partes de la dinámica no lineal completa y sirve como modelo de control sobre el cual se calcula un modelo híbrido de controlador predictivo (H-MPC, por sus siglas en inglés) que proporciona estabilización global, optimización y satisfacción de restricciones.

En (Theys y cols., 2016) se describe un enfoque de control para la transición entre el despegue vertical y vuelo horizontal controlados por empuje diferencial, lo que permite volar en todas las fases de vuelo abarcando una transición continua entre vuelo estacionario y vuelo de crucero, este artículo hace uso de un controlador de actitud basado en cuaterniones para la posición del vehículo y un controlador PID para mantener la altura de vuelo deseada del vehículo.

En (Summers, 2017) se presenta una estrategia de control de vuelo para un vehículo híbrido que simplifica la transición del vuelo estacionario al vuelo crucero y mantiene la estabilidad del vehículo con variación en el centro de gravedad debido a la adición de carga útil. El trabajo utiliza un control PID para la estabilización del sistema.

En (Sanchez-Rivera y cols., 2020) se presenta la dinámica de vuelo durante la etapa de transición de un VTOL híbrido de tipo ala basculante. Se desarrolla un modelo matemático no lineal que incluye la dinámica completa del VANT, que presenta cambios significativos en las características aerodinámicas, especialmente durante el vuelo de transición. Estos cambios se analizan y caracterizan mediante pruebas de vuelo y simulaciones de la dinámica de fluido computacional (CFD, por sus siglas en inglés). Se verifica la adaptación a la variación de características aerodinámicas provocadas por cambios del ángulo de inclinación del sistema de transición, la altitud se controla por PD.

En (Wang y cols., 2019) se muestra un modelo de dinámica multicuerpo

y un método de control novedoso para el modo transición de un VANT de ala basculante de propulsión distribuida. Se desarrolla un modelo de dinámica de actitudes multicuerpo formulado en forma de tensor invariante para la transición, de modo tal que, la dinámica inducida por el movimiento relativo de las partes (alas y rotores) con respecto al fuselaje se formulan explícitamente en el modelo. El sistema de control está desacoplado en dos partes, el subsistema de posición y el subsistema de actitud. Además, se desarrolla un controlador de seguimiento de actitud basado en la integral robusta del signo del error (RISE, por sus siglas en inglés) para controlar el subsistema angular, lo que garantiza la robustez a las perturbaciones externas.

1.4.4. Estrategias de control PBC e IDA-PBC

En (Ortega y der Schaft, 2000) se muestra el diseño y aplicación de un control basado en pasividad para un sistema no lineal eléctrico tipo resistivo, capacitivo, inductivo (RCL), en que se desarrollan los conceptos de balance y moldeo de energía, de igual manera se exponen las condiciones que garantizan la estabilidad del sistema.

En (Ortega y Mareels, 2000) se desarrolló un control PBC con balance de energía, en esta ocasión, el control se aplica a un sistema Hamiltoniano controlado por puertos, haciendo uso del moldeo de energía y la disipación del mismo.

En (Ortega, der Schaft, y cols., 2002) el principal objetivo es desarrollar una nueva teoría PBC que extienda a una clase más amplia de sistemas el mecanismo de estabilización de equilibrio energético antes mencionado y la invariancia de estructura. Para ello, se deja de hacer uso de Euler-Lagrange y consideran en su lugar modelos hamiltonianos controlados por puertos, que resultan de la modelización en red de sistemas físicos de parámetros fijos que conservan la energía con elementos de almacenamiento independientes, y que contienen estrictamente la clase de modelos Euler-Lagrange.

En (Rodríguez y Ortega, 2002) propone una estructura de controlador general para la regulación asintótica de la posición de sistemas electromecánicos, derivada mediante la metodología de control basado pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento (IDA-PBC). El controlador es aplicable a sistemas electromecánicos arbitrarios totalmente

actuados con materiales magnéticos lineales que consisten en inductancias, imanes permanentes y una coordenada mecánica. La inclusión de acoplamientos virtuales entre el subsistema eléctrico y el mecánico, que se sugiere de forma natural en esta metodología de control, es fundamental para su desarrollo.

Conclusión

Los trabajos relacionados con el modelado matemático de VTOLs híbridos mencionados en esta sección tienen ciertas ventajas. Sin embargo, algunos presentan una serie de restricciones e inconvenientes importantes con respecto al modelo matemático, las cuales se enuncian a continuación:

1. La configuración mecánica de VTOLs con modelos del tricóptero y de ala fija no son utilizados en conjunto. Esto brinda un área de oportunidad para realizar modelos que tomen en cuenta estas dinámicas.
2. Estos modelos proponen vehículos híbridos con motores estáticos apuntando a direcciones convenientes para el modelo.
3. Algunos de los modelos desarrollados se simplifican para el caso de dos dimensiones (Sanchez-Rivera y cols., 2020)
4. No cuentan con un vector de empuje en sus diseños físicos ni matemáticos.

con respecto a las estrategias de control presentadas en esta sección:

1. En los trabajos mencionados anteriormente, no se ha abordado el estudio y/o el diseño de algoritmos de control aplicados al sistema del VTOL híbrido con estas características mecánicas.
2. Los enfoques de control no son robustos a dinámicas no modeladas e incertidumbres paramétricas (Kendoul y cols., 2006)
3. Algunos trabajos presentan estrategias de control para el VTOL híbrido considerando movimientos en las tres dimensiones. No obstante, la mayoría de los trabajos mencionados anteriormente solamente consideran el caso de maniobras planas.

1.5. Aportaciones

Las aportaciones de este trabajo de tesis son:

1. Se diseñó un modelo matemático para un VTOL híbrido con un vector de empuje y dos motores batientes frontales. El modelo dinámico no lineal se obtuvo a través de la formulación Euler-Lagrange, cabe mencionar que en la literatura no se ha encontrado una combinación similar en cuanto a la configuración de los motores, ya que los motores frontales tienen la libertad de moverse en ángulos independientes y no compartiendo la misma inclinación, además de contar con el vector de empuje para la propulsión trasera del vehículo.
2. Se presentó un control basado en pasividad para el VTOL Híbrido. En esta metodología no se requiere resolver ecuaciones diferenciales parciales complejas, lo que simplifica la ley de control, pero si fue necesario desarrollar un algoritmo de asignación de control, ya que el sistema es subactuado, por tanto, se encontró la relación entre las señales de control y los actuadores del sistema.
3. Se propuso un esquema de control IDA-PBC para el modelo del tricóptero. Durante la búsqueda bibliográfica, no se encontró una aplicación de esta estrategia para un modelo similar, por lo que fue necesario aplicar la formulación Euler-Lagrange al tricóptero, y poder desarrollar la estrategia IDA-PBC, obteniendo un control robusto ante perturbaciones.

1.6. Publicaciones

Se realizaron las siguientes publicaciones:

- J.D. Delfín, C.D. García, M.E. Guerrero.. “Pasivity-Based Control Strategy for a Tricopter”. ComRob. Aceptado en agosto 2021. “*Se presentó el modelo matemático de un tricóptero en el formalismo Euler-Lagrange, y se aplicó la estrategia de control IDA-PBC para el mismo*”.
- J.D. Delfín, C.D. García, M.E. Guerrero.. “Control de Seguimiento de Trayectorias en Drones Híbridos”. TecNM/Cenidet. Aceptado en noviembre 2021. “*Se presentó un póster en la jornada académica del TecNM/Cenidet del modelo matemático de un dron híbrido del tipo ala fija con rotores móviles*”.

1.7. Organización del trabajo

En esta sección, se describe como está estructurado este trabajo de investigación. El cual está dividido en 7 capítulos, los cuales se detallan a continuación.

- **Capítulo 1: Introducción.** En este capítulo se presentan los antecedentes más sobresalientes relacionados a este trabajo de tesis, así como la justificación del mismo. De igual manera se proporciona al lector una revisión bibliográfica de los diferentes tópicos mencionados en esta tesis, al igual que las aportaciones de la misma.
- **Capítulo 2: Modelo matemático del tricóptero** En este capítulo se analizan las ecuaciones que conforman la dinámica del VTOL y se describen matemáticamente las fuerzas que actúan en el vehículo.
- **Capítulo 3: Control IDA-PBC.** Este capítulo presenta el desarrollo y aplicación del control IDA-PBC para el modelo del tricóptero, al igual que se muestra el modelo matemático Euler-Lagrange del mismo.
- **Capítulo 4: Modelo matemático del avión de ala fija** En este capítulo se analizan las ecuaciones que conforman la dinámica del VTOL y en conjunto con los coeficientes aerodinámicos del mismo.
- **Capítulo 5: Modelado matemático del VTOL híbrido.** En este capítulo se desarrollan las ecuaciones que conforman la dinámica del VTOL híbrido. De igual manera, se describen matemáticamente las fuerzas que actúan en el vehículo, en conjunto con los coeficientes aerodinámicos del mismo. También se describen los marcos de referencia usados para la cinemática del VTOL.
- **Capítulo 6: Control PBC.** En este capítulo se desarrolla y analiza el diseño de la estrategia PBC y su aplicación para el modelo del VTOL híbrido.
- **Capítulo 7: Conclusiones.** Aquí se presenta de manera general las conclusiones globales de este trabajo de investigación y un breve resumen del mismo, en conjunto de los trabajos publicados y las aportaciones realizadas.

Modelo matemático del tricóptero

2.1. Introducción

En este capítulo se presenta el modelo matemático descrito en (Prach y Kayacan, 2018), el cual se utilizó para comprender el funcionamiento de este tipo de vehículos, y poder acoplar las dinámicas entre los VANTs multirotor y los de ala fija, de igual manera este modelo se usó para aplicar la estrategia de control IDA-PBC mostrada en el capítulo 3.

La principal ventaja de un tricóptero comparado con otras plataformas multirotor es que se requiere menos potencia para hacer funcionar 3 hélices. Los tricópteros son potencialmente más confiables, ya que tienen un controlador de velocidad electrónico y un motor menos, además, tienen un mejor control de guiñada en comparación con otros VANTs multirotor, ya que inclina alguna de sus hélices en lugar de variar el par del motor, lo que esencialmente hace que un tricóptero sea más ágil.

Cuando se trata de aplicaciones de vigilancia, una ventaja del tricóptero es que 3 rotores proporcionarán una gama más amplia de vista para una cámara montada en el cuerpo en comparación con otras plataformas multirotor.

2.2. Sistema de referencia

La notación es usada de acuerdo a la Figura 2.1, una referencia inercial de coordenadas $\gamma = [X, Y, Z]$, se considera con posiciones fijas en la tierra, mientras que $B = [X_b, Y_b, Z_b]$ son las coordenadas fijas al cuerpo, las cuales coinciden con el centro de masa del tricóptero.

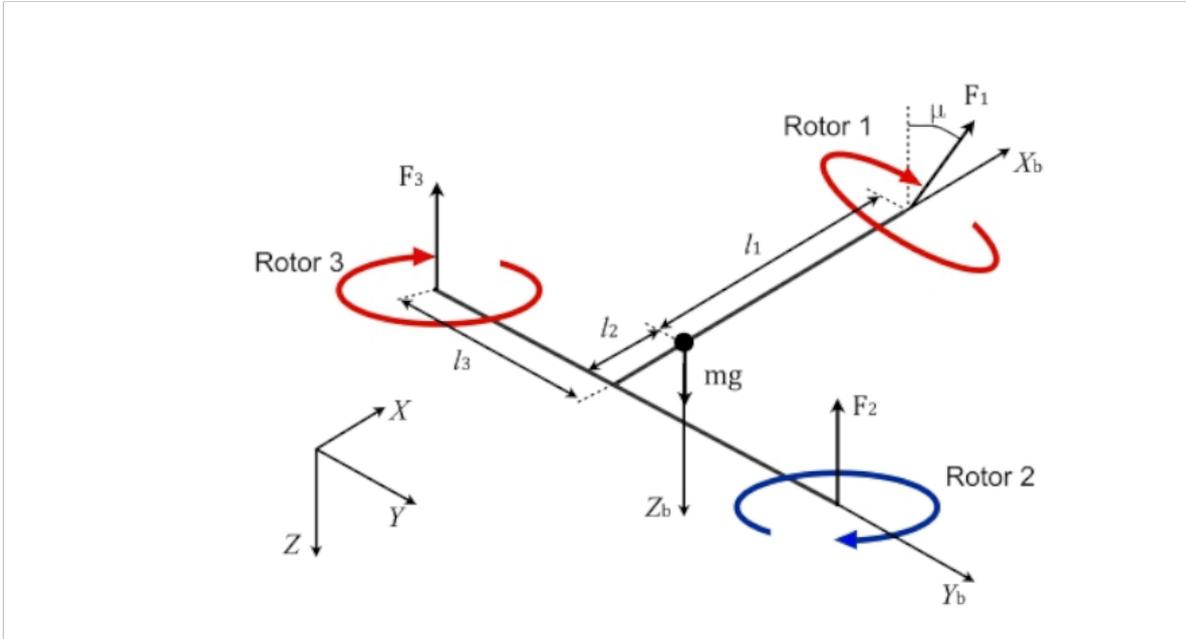


Figura 2.1: Representación esquemática del tricóptero

Bajo el supuesto de cuerpo rígido y con base en la figura anterior, la dinámica del tricóptero se describe mediante las ecuaciones de movimiento no lineales de 6 grados de libertad.

La configuración de variables son $R = [\xi, \eta]^T \in \mathfrak{R}^6$, donde $\xi = [X, Y, Z]^T \in \mathfrak{R}^3$ indican la posición del centro de masa del tricóptero relativo a la referencia inercial γ , $\eta = [\phi, \theta, \psi] \in \mathfrak{R}^3$ representa los ángulos de Euler: balanceo, cabeceo y guiñada, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento traslacional se dan como sigue:

$$\dot{u} = rv - qw - g \sin \theta + \frac{F_x}{m} \quad (2.1)$$

$$\dot{v} = -ru + pw + g \cos \theta \sin \phi + \frac{F_y}{m} \quad (2.2)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos \theta \cos \phi + \frac{F_z}{m} \quad (2.3)$$

donde \dot{u} , \dot{v} , \dot{w} representan la aceleración tangencial en los ejes fijos al cuerpo del tricóptero.

Mientras que las ecuaciones de rotación están dadas como:

$$\dot{p} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}qr + \frac{M_x}{I_{xx}} \quad (2.4)$$

$$\dot{q} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}pr + \frac{M_y}{I_{yy}} \quad (2.5)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}}pq + \frac{M_z}{I_{yy}} \quad (2.6)$$

siendo \dot{p} , \dot{q} , \dot{r} representan la aceleración angular sobre los ejes fijos al cuerpo del tricóptero y I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} las constantes de inercia en cada eje.

De las ecuaciones 2.1 a la 2.6 es posible encontrar términos de fuerzas y momentos los cuales son agrupados en el vector F , estas representan las fuerzas aerodinámicas y momentos generados por los rotores en los ejes X_b , Y_b , Z_b del cuerpo, respectivamente.

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Siguiendo las suposiciones del modelo en (Prach y Kayacan, 2018) que el cambio de altitud es limitado y, por lo tanto, la densidad del aire es constante, la fuerza aerodinámica y el momento producidos por el i -ésimo rotor representado, usando las constantes de fuerza aerodinámica y momento, están representadas por:

$$F_i = K_F \Omega_i^2 \quad (2.8)$$

$$M_i = K_M \Omega_i^2 \quad (2.9)$$

donde K_F y K_M son la fuerza aerodinámica y las constantes de momento, respectivamente. Mientras que Ω_i^2 representa la velocidad angular de cada motor. Los componentes de la fuerza aerodinámica se representan por:

$$F_x = 0 \quad (2.10)$$

$$F_y = F_1 \sin \mu \quad (2.11)$$

$$F_z = -(F_1 \cos \mu) + F_2 + F_3 = -K_F(\Omega_1^2 \cos \mu + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) \quad (2.12)$$

siendo F_1, F_2 y F_3 las fuerzas de empuje proporcionadas por cada uno de los motores, calculadas a partir de la ecuación 2.8 y μ el ángulo de inclinación del motor 1 que se muestra en la Figura [2.1](#).

Por otro lado considerando que los rotores 1 y 3 giran en el sentido de las agujas del reloj y que el rotor 2 gira en el sentido contrario a las agujas del reloj como se puede observar en la Figura [2.1](#). Las componentes del momento aerodinámico están dadas por:

$$M_x = -L_3(F_2 + F_3) = -L_3K_F(\Omega_2^2 - \Omega_3^2) \quad (2.13)$$

$$M_y = -L_2(F_2 + F_3) + L_1F_1 \cos \mu = -L_2K_F(\Omega_2^2 - \Omega_3^2) + L_1K_F\Omega_1^2 \cos \mu \quad (2.14)$$

$$M_z = L_1F_1 \sin \mu - M_1 \cos \mu + M_2 - M_3 = L_1K_F\Omega_1^2 \sin \mu + K_M(-\Omega_1^2 \cos \mu + \Omega_2^2 - \Omega_3^2) \quad (2.15)$$

las cuales contienen los términos L_1, L_2, L_3 que representan las distancias entre los motores con respecto al centro de masa.

Los parámetros considerados en estas ecuaciones se muestran en la siguiente tabla:

Parámetros	Descripción	Unidades
m	Masa del tricóptero	1.1 kg
I_{xx}	Momento de inercia eje X	0.0239 kg/m^2
I_{yy}	Momento de inercia eje Y	0.01271 kg/m^2
I_{zz}	Momento de inercia eje Z	0.01273 kg/m^2
L_1	Distancia 1	0.2483 m
L_2	Distancia 2	0.1241 m
L_3	Distancia 3	0.2150 m
K_F	Constante de fuerza aerodinámica	$1,970 \times 10^{-6} \text{ N}$
K_M	Constante del momento aerodinámico	$2,880 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}$

Cuadro 2.1: Tabla de Parámetros

2.3. Conclusiones

El principal objetivo de este capítulo es familiarizarse con los conceptos que describen el comportamiento dinámico de una aeronave, observar y analizar de donde provienen las fuerzas y momentos involucrados en el vehículo, los marcos de referencia y la notación utilizada en los modelos siguientes, de igual manera se hace hincapié en que este modelo matemático se toma de (Prach y Kayacan, 2018), el cual sirve de base para modelar el VTOL híbrido que será desarrollado en este trabajo de tesis.

ESTRATEGIA IDA-PBC

3.1. Introducción

La asignación de interconexión y amortiguamiento es una metodología de control basada en pasividad aplicada a una clase especial de sistemas mecánicos sub-actuados, que se basa en sistemas descritos por el Modelo Hamiltoniano controlado por puerto (PCH).

Esta metodología consiste en asignar un nuevo modelo PCH en lazo cerrado con la interconexión y asignación de amortiguación (Rodríguez y Ortega, 2002). Varios trabajos de investigación sobre vehículos aéreos han usado esta técnica con éxito para realizar el control de sus dinámicas, ejemplo reciente es: (Guerrero-Sánchez y cols., 2017) donde se presenta el problema del transporte seguro y rápido de paquetes mediante un VANT. Se propone un modelo matemático y una estrategia de control para una clase especial de sistemas mecánicos sub-actuados, compuestos por un cuadrotor que transporta una carga útil suspendida por un cable. La formulación de Euler-Lagrange se utiliza para obtener el modelo dinámico del sistema, donde se considera la dinámica integrada del cuadrotor, cable y carga. Se elige un control IDA-PBC debido a su robustez inherente contra la incertidumbre paramétrica y la dinámica no modelada.

3.2. Hamiltoniano controlado por puertos

Se desarrolla la representación Hamilton de la mecánica analítica a partir del principio de mínima acción, se inicia y se procede, a través de las ecuaciones de movimiento Euler-lagrange y la transformada de Legendre,

para obtener las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas. Es conocido en la literatura que el análisis de los sistemas físicos se realiza dentro de la función de Lagrange y el enfoque de Hamilton, el punto de vista de la red se impone en el modelado y la simulación de sistemas de ingeniería física. Sin embargo, el enfoque de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto combina ambos enfoques, mediante la asociación con la estructura de interconexión del modelo de red a una estructura geométrica dada por una estructura de Dirac. Por tanto, con esta breve descripción, es posible decir que la dinámica Hamiltoniana se define con respecto a esta estructura de Dirac y el Hamiltoniano representa la energía almacenada total.

La realización de la formulación del sistema Hamiltoniano por puerto se lleva a cabo a través de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{q}}L(q, \dot{q}) - \nabla_q L(q, \dot{q}) = u \quad (3.1)$$

donde $\nabla_{\dot{q}}$ y ∇_q representan derivadas parciales con respecto a \dot{q} y q respectivamente, mientras que L es el Lagrangiano del sistema, definido como:

$$L = K - V \quad (3.2)$$

siendo K la energía cinética y V la energía potencial. Además si cumple con la condición de ser regular, es decir que su Hessiano sea diferente de cero, se puede definir la nueva variable:

$$p = \nabla_{\dot{q}}L \quad (3.3)$$

la cual es el momento generalizado, donde se puede aplicar un cambio en las coordenadas (q, \dot{q}) para transformarlas en (q, p) . Por tanto, es posible definir una nueva función escalar, conocida como Hamiltoniano.

$$H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (3.4)$$

La cual representa la energía total del sistema. Esta transformación se conoce como la transformación de Legendre. Entonces, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se convierten en ecuaciones de Hamilton.

$$\dot{q} = \nabla_p H$$

$$\dot{p} = -\nabla_q H + B(q)u \quad (3.5)$$

De esta manera, aplicando la transformación de Legendre se reemplaza el sistema de n ecuaciones de segundo grado por un conjunto de ecuaciones de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden con una estructura simple y simétrica. En sistemas mecánicos simples, la energía potencial generalmente es una función de las posiciones generalizadas $P_o(q)$, mientras que la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades, descrita como $\frac{1}{2}p^T M(q)p$, de tal forma que $H = K + P_o$.

Siendo $B(q)$ la matriz de fuerzas de entradas y $B(q)u$ representa a las fuerzas generalizadas como resultado de la entrada de control $u \in \mathfrak{R}^{n \times m}$. En el caso de que $m = n$ se dice que el sistema es totalmente actuado, mientras que, cuando $m < n$ de los sistemas mecánicos sub-actuados, en este caso n y m representan filas y columnas.

La representación matemática en espacio de estado mostrada en la ecuación (3.5) con los estados (q, p) , se le conoce como un espacio de fase. Una forma general adicional de (q, p) de los sistemas Hamiltonianos con entradas y salidas, tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)]\nabla_x H(x) + B(x)u \\ y &= B^T \nabla_x H(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Siendo $y \in \mathfrak{R}^m$ la salida del sistema, $J = -J^T$ y $R = R^T \geq 0$. El sistema mostrado en (3.6) se llama sistema Hamiltoniano controlado por puertos con la matriz de estructura J , la matriz de disipación R y el Hamiltoniano H .

La finalidad de la estrategia de control IDA-PBC es conservar la estructura PHDS, asignándole al lazo cerrado una función de energía deseada a través de la modificación de las matrices de interconexión y de disipación. Por tanto, la dinámica deseada es un PHDS de la forma:

$$\dot{x} = (J_d(x) - R_d(x))\partial_x H_d \quad (3.7)$$

Siendo $H_d(x)$ la energía total en lazo cerrado y $J = -J^T$, $R = R^T \geq 0$ las matrices de interconexión y amortiguamiento en lazo cerrado.

3.3. Transformación de Legendre

Para transformar las ecuaciones Euler-Lagrange en un Hamiltoniano, tanto para sistemas conservativos y no conservativos, es necesario realizar los siguientes pasos:

1. Con el lagrangiano del sistema se obtienen los momentos generalizados p_i . A través de:

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.8)$$

es necesario encontrar los momentos conjugados a cada coordenada generalizada como funciones de q_i, \dot{q}_i y t . En el caso de que existan o se consideren restricciones holonómicas en forma explícita, el Lagrangiano empleado no debe tener coordenadas dependientes.

2. Teniendo los momentos generalizados del paso uno, es necesario despejar las \dot{q}_i como funciones de q_i, \dot{q}_i y t .
3. Este cambio de variables es nombrado como transformación de Legendre. Por tanto, la nueva función $H = H(q_i, \dot{q}_i, t)$ obtiene el nombre de Hamiltoniano del sistema y es el resultado de la siguiente transformación de Legendre:
4. Se toma el Lagrangiano del sistema sin tomar en consideración las restricciones, y en caso de ser necesario se construye el Hamiltoniano tomando en cuenta las restricciones de este último. En este paso se obtiene una función H la cual depende de q_i, \dot{q}_i, p_i y t , pero es necesario que H sea una función únicamente de q_i, p_i y t .
5. Con los resultados del paso 2 es posible sustituir las \dot{q}_i del Hamiltoniano, una vez realizada la sustitución se obtiene el Hamiltoniano final del sistema.

3.4. Desarrollo de la estrategia de control IDA-PBC

La estrategia de control IDA-PBC se implementa al modelo con energía total

$$H_{am}(q, p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + P_o(q) \quad (3.9)$$

donde $q \in \mathfrak{R}^3$, $p \in \mathfrak{R}^3$, son las posiciones y los momentos generalizados, respectivamente y $H_{am}(q, p)$ es el Hamiltoniano. Las ecuaciones de movimiento se pueden denotar como en (Ortega, 2002)

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_{am} \\ \nabla_p H_{am} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(q) \end{bmatrix} u \quad (3.10)$$

donde $I_n \in \mathfrak{R}_{3 \times 3}$ es una matriz identidad, $\nabla_q H_{am} = \frac{\partial H_{am}}{\partial q}$ y $\nabla_p H_{am} = \frac{\partial H_{am}}{\partial p}$.

La función de energía deseada se propone al sistema como:

$$H_{amd}(q, p) = \frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + P_{od}(q) \quad (3.11)$$

donde $M_d = M_d^T > 0$ representan la matriz inercial deseada en lazo cerrado y P_{od} la función de energía potencial deseada

$$P_{od} = mgz \quad (3.12)$$

Es necesario que la función P_{od} tenga un mínimo en q^* , esto es

$$q^* = \arg \min P_{od}(q) \quad (3.13)$$

La entrada de control en el enfoque IDA-PBC, es descompuesta en dos términos

$$u = u_{es}(q, p) + u_{di}(q, p) \quad (3.14)$$

Siendo u_{es} el moldeo de energía y u_{di} la inyección de amortiguamiento. La dinámica Hamiltoniana controlada por puerto deseada tiene la siguiente forma (Ortega, Spong, y cols., 2002)

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_d(q, p) & -R_d(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_{am} \\ \nabla_p H_{am} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde

$$J_d = -J_d^T = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M^{-1}M_d & J_2(q, p) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$R_d = -R_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & bK_v b^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.17)$$

J_2 es una matriz antisimétrica y $K_v = K_v^T > 0$ debe cumplirse.

La inyección de amortiguamiento se expresa como

$$u_{di}(q, p) = -K_v b^T \nabla_p H_{amd} \quad (3.18)$$

Para obtener el moldeo de energía u_{es} del controlador, se sustituye (3.14) en (3.10) y se iguala con (3.15) resultando:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_{am} \\ \nabla_p H_{am} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(q) \end{bmatrix} u_{es} = [J_d(q, p) \quad -R_d(q, p)] \begin{bmatrix} \nabla_q H_{am} \\ \nabla_p H_{am} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Igualando la ecuación y realizando el despeje de (3.14) el primer renglón de la ecuación se puede igualar directamente. Mientras que en el segundo, el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales da el término del moldeo de la energía dado por

$$u_{es} = b^\perp (\nabla_q H_{am} - M_d M^{-1} \nabla_q H_{amd} + J_2 M_d^{-1} p) \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) puede separarse en las siguientes expresiones:

$$b^\perp \nabla_q (p^T M^{-1} p) - M_d M^{-1} \nabla_q (p^T M_d^{-1} p) + 2J_2 M^{-1} p = 0 \quad (3.21)$$

$$b^\perp \nabla_q P_o - M_d M^{-1} \nabla_q P_{od} = 0 \quad (3.22)$$

siendo b^\perp el anulador por la izquierda de rango completo de $b(q)$.

En el moldeo de energía, se observa que la matriz M es independiente de q , por lo que se puede tomar $J_2 = 0$ y M_d como una matriz constante, siendo

$$M_d = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & m & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Entonces el controlador se reduce a

$$u_{es} = (b^T b)^{-1} b^T (\nabla_q H_{am} - M_d M^{-1} \nabla_q H_{amd}) \quad (3.23)$$

siendo:

$$b^\perp = \begin{bmatrix} \frac{s\phi c\psi - s\psi s\theta c\phi}{c\phi c\psi s\theta + s\psi s\phi} - c\theta c\phi & c\theta c\phi & c\phi c\psi s\theta + s\psi s\phi \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Resolviendo la ecuación (3.22) se obtiene una función diferencial de la energía potencial como:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{s\phi c\psi - s\psi s\theta c\phi}{c\phi c\psi s\theta + s\psi s\phi} - c\theta c\phi \right) \left(-\frac{\partial P_{od}}{\partial x} - \frac{a_5 \partial P_{od}}{I_{yy} \partial \theta} \right) + \\ & (c\theta c\phi) \left(-\frac{\partial P_{od}}{\partial y} - \frac{a_4 \partial P_{od}}{I_{xx} \partial \theta} \right) + \\ & (c\phi c\psi s\theta + s\psi s\phi) \left(-mg - \frac{\partial P_{od}}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

La cual se resuelve obteniendo la energía potencial deseada como:

$$P_{od} = -mgz + \Phi$$

donde Φ es una función diferenciable la cual resulta:

$$\begin{aligned} \Phi = & \left((\theta - \theta_d) - \frac{a_5}{I_{yy}} (x - x_d) \right) + \left(\phi - \phi_d - \frac{a_4}{I_{xx}} (y - y_d) \right) + \\ & \left((z - z_d) - \frac{I_{xx} (S\theta C\psi)(\phi - \phi_d) - S\psi Ln(C\phi)}{a_4 C\theta} \right) \end{aligned}$$

cuyos términos x , y , z representan las posiciones del vehículo en el marco referencial inercial, mientras x_d , y_d , z_d son las posiciones de equilibrio deseadas.

La obtención de Φ depende de la condición dada en (3.13). Donde $\nabla_q P_{od}(q_*) = 0$ y la condición suficiente $\nabla_q^2 P_{od}(q_*) > 0$ se mantendrá si el Hessiano de $\Phi(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ en q_* es positivo. En este caso, se elige $\Phi(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ como una función cuadrática tal que:

$$P_{od} = -mgz + \frac{1}{2} K p x \left((\theta - \theta_d) - \frac{a_5}{I_{yy}} (x - x_d) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} Kpy \left(\phi - \phi_d - \frac{a_4}{I_{xx}} (y - y_d) \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} Kpz \left((z - z_d) - \frac{I_{xx} (S\theta C\psi)(\phi - \phi_d) - C\psi \text{Ln}(C\phi)}{a_4 C\theta} \right)^2
\end{aligned}$$

En la cual $(x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d)$ representan la configuración en equilibrio y Kpx , Kpy , Kpz son las ganancias del controlador, las cuales se usan como términos de sintonización. La ley de control, se determina al obtener el moldeo de energía u_{es} , tomando la forma de:

$$u_{es} = \begin{bmatrix} Kpz\gamma \left(\frac{a_5 I_{xx}}{I_{yy} a_4} \omega \rho + \xi - 1 \right) \\ Kpy \frac{a_4^2}{m I_{xx}} \beta - Kpy \beta + Kpz \frac{I_{xx}}{a_4} \varsigma \gamma \\ Kpx \frac{a_5^2}{m I_{yy}} \alpha - Kpx \alpha + Kpz \frac{I_{xx}}{a_4} \rho \gamma \\ -Kpz \frac{I_{xx}}{a_4} \sigma \gamma \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left((\theta - \theta_d) - \frac{a_5}{I_{yy}} (x - x_d) \right) \\
\beta &= \left((\phi - \phi_d) - \frac{a_4}{I_{xx}} (y - y_d) \right) \\
\gamma &= \left((z - z_d) - \frac{I_{xx} (S\theta C\psi)(\phi - \phi_d) - S\psi \text{Ln}(C\phi)}{a_4 C\theta} \right) \\
\xi &= \left(\frac{(S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi)(C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi)}{C\theta C\phi} \right) \\
\rho &= \left(\frac{S\theta((S\theta C\psi)(\phi - \phi_d) - S\psi \text{Ln}(C\phi))}{C^2\theta} - C\psi(\phi - \phi_d) \right) \\
\sigma &= \left(\frac{(S\theta S\psi)(\phi - \phi_d) + C\psi \text{Ln}(C\phi)}{C\theta} \right) \\
\kappa &= (C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi) \\
\varsigma &= \left(\frac{(C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi)}{C\theta C\phi} \right)
\end{aligned}$$

La inyección de amortiguamiento u_{di} se determina de (3.18).

$$u_{di} = K_v \begin{bmatrix} rI_{yy}\dot{X} - fa_5\dot{\theta} + na_4\dot{\phi} - vI_{xx}\dot{Y} + \dot{Z} \\ va_4\dot{Y} - nmp\dot{h}i \\ fm\dot{\theta} - ra_5\dot{X} \\ \frac{\dot{\psi}}{I_{yy}} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde:

$$r = \frac{m}{mI_{yy} - a_5^2}, \quad f = \frac{I_{yy}}{mI_{yy} - a_5^2},$$

$$v = \frac{m}{a_4^2 - mI_{xx}}, \quad n = \frac{I_{xx}}{a_4^2 - mI_{xx}},$$

siendo r , f , v , n términos utilizados para simplificar las ecuaciones obtenidas de (3.18).

Teniendo los términos del moldeo de energía e inyección de amortiguamiento de las ecuaciones (3.25) y (3.26) es posible obtener la entrada de control completa de la ecuación (3.14) siendo:

$$u = u_{es}(q, p) + u_{di}(q, p) \quad (3.27)$$

Por lo que ya es posible realizar la simulación del modelo matemático en conjunto con la estrategia de control IDA-PBC.

3.5. Resultados y simulaciones

Trayectoria en espiral ascendente para el modelo del tricóptero

A continuación se muestra la simulación del modelo matemático del tricóptero en conjunto con la estrategia de control IDA-PBC, con el objetivo de comparar su desempeño ante la misma trayectoria. 3.1

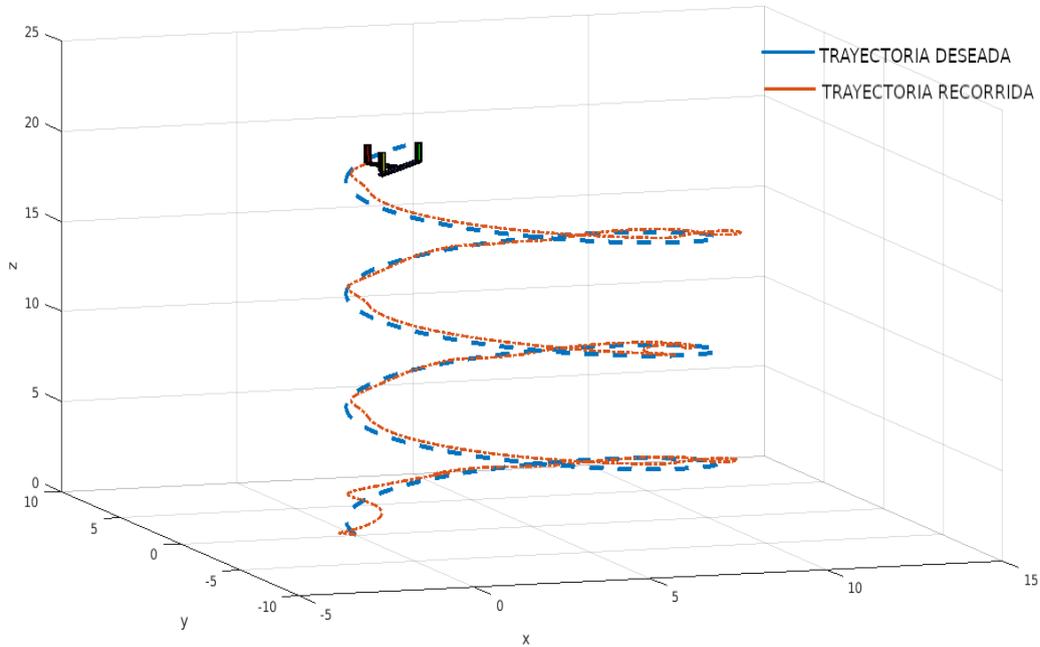


Figura 3.1: Gráfica de la trayectoria en espiral del tricóptero

De igual forma las condiciones iniciales del sistema son $x = 5$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$.

El objetivo de la simulación fue desplazar el tricóptero en la misma trayectoria en espiral ascendente. Se observa la línea punteada en color rojo, siendo esta la trayectoria recorrida, mientras que la línea azul punteada representa la trayectoria deseada para el tricóptero.

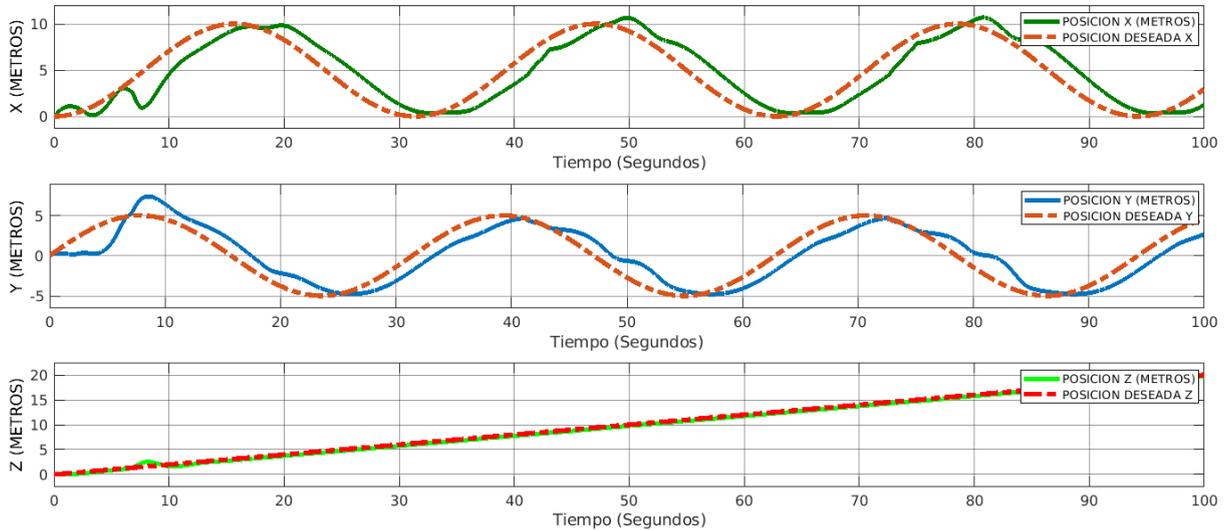


Figura 3.2: Gráfica de las posiciones longitudinales del tricóptero

En la Figura [3.2](#) se pueden apreciar las trayectorias deseadas para cada eje en conjunto con las trayectorias recorridas por el tricóptero, siendo las líneas rojas las trayectorias deseadas.

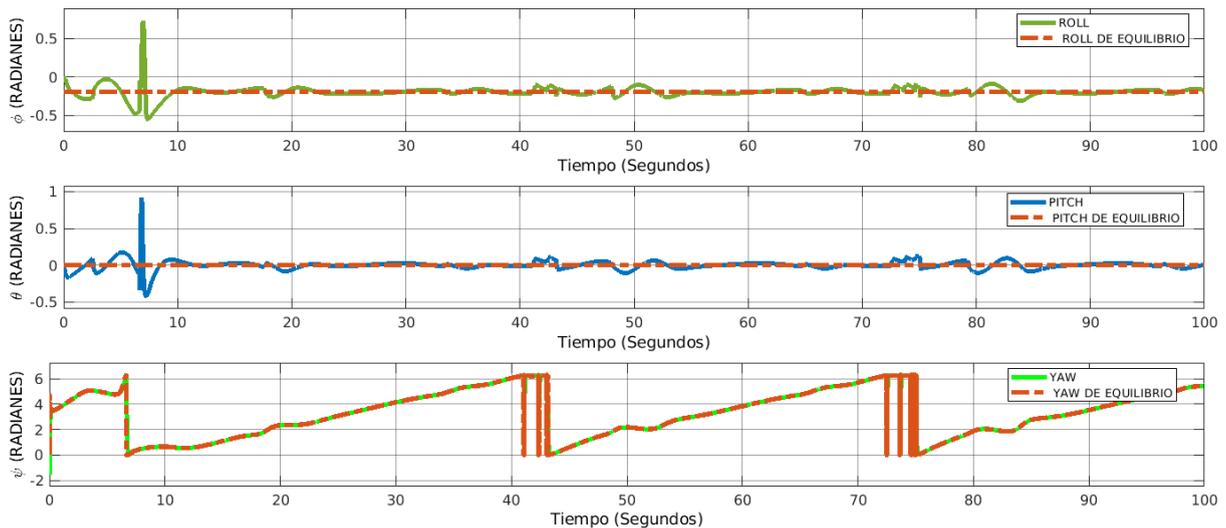


Figura 3.3: Gráfica de las posiciones angulares del tricóptero

Por otro lado, en la Figura [3.3](#) se pueden observar las posiciones angulares con respecto a las posiciones angulares de equilibrio del tricóptero, ya que este es un sistema subactuado y el control IDA-PBC entrega 4 salidas virtuales, al final se obtienen momentos deseados generados por la demanda de los ángulos de equilibrio y las trayectorias deseadas, es por eso que esta gráfica compara los ángulos generados por la acción de control y los ángulos de equilibrio del tricóptero.

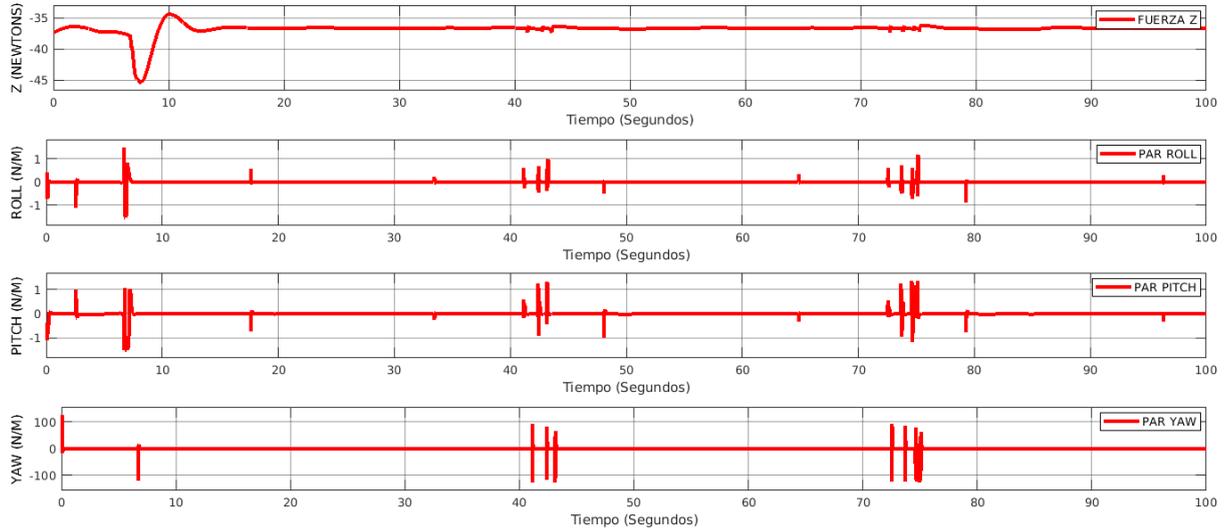


Figura 3.4: Gráfica de las fuerzas generadas por el controlador para el tricóptero

Por último se muestra en la Figura 3.4 la gráfica de la fuerza en el eje Z generada por el controlador y los momentos angulares ϕ , θ y ψ de cada eje, para llegar a las trayectorias propuestas.

Trayectoria en forma de lemniscata para el modelo del tricóptero

Repitiendo el proceso ahora con el modelo matemático del tricóptero, se realizó la simulación en conjunto con la estrategia IDA-PBC, en la que de igual forma se buscó realizar la trayectoria en forma de lemniscata, misma que se puede observar en la Figura 3.5.

Las condiciones iniciales para esta simulación fueron todas iguales a 0 para x , y , z , ϕ , θ y ψ respectivamente, se puede observar en la Figura 3.5, la línea punteada azul como la trayectoria recorrida, mientras que la roja representa la trayectoria deseada.

Siendo mostradas las trayectorias recorridas en el espacio tridimensional, podemos dar paso a observar las gráficas de la Figura 3.6, en las que se comparan de manera más detallada las trayectorias expresadas en metros de las posiciones generadas por la acción de control, con respecto a las deseadas por la trayectoria propuesta.

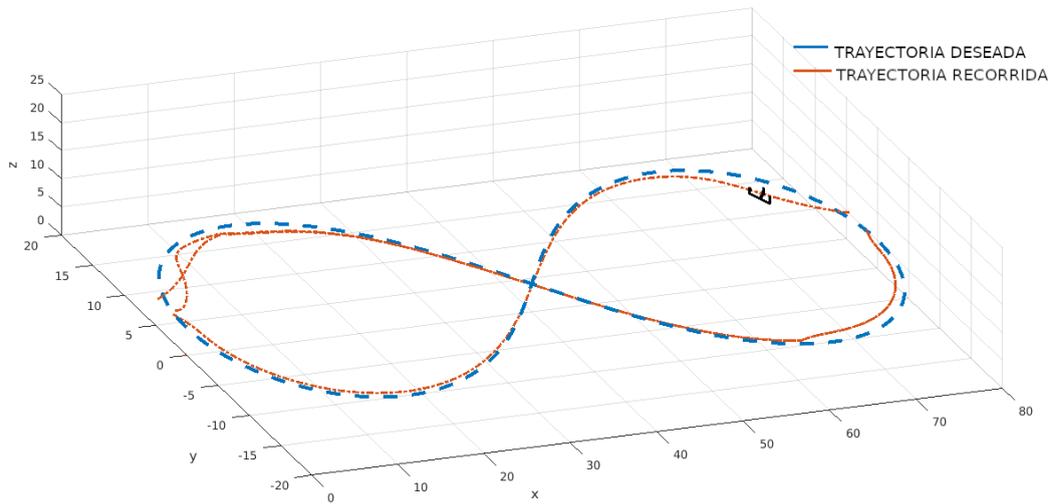


Figura 3.5: Gráfica de la trayectoria en forma de lemniscata del tricóptero

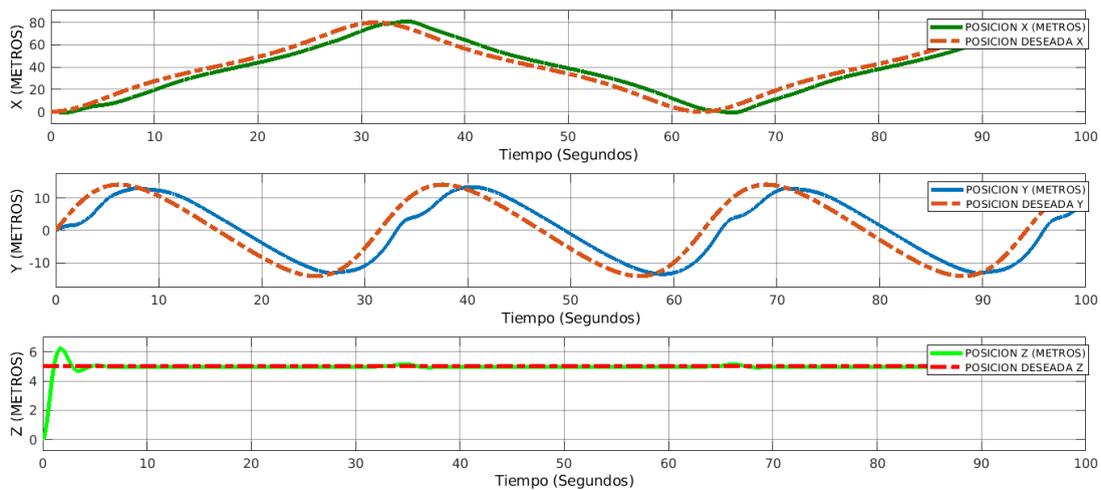


Figura 3.6: Gráfica de la posición longitudinal del tricóptero

Mientras que en la Figura [3.7](#) se aprecian las trayectorias angulares generadas por la acción de control para alcanzar las trayectorias deseadas, al igual que en la simulación anterior del tricóptero se grafican con respecto a los ángulos de equilibrio, ya que al realizar la acción de asignación de control se generan momentos deseados que van directamente al modelo, sobrescribiendo el ángulo de equilibrio por el ángulo necesario para llegar a la posición deseada, esto se puede apreciar en los pequeños picos que se generan cuando una nueva trayectoria en alguno de los ejes es requerida, comparándolos con la Figura [3.6](#) en la que coinciden en tiempo con

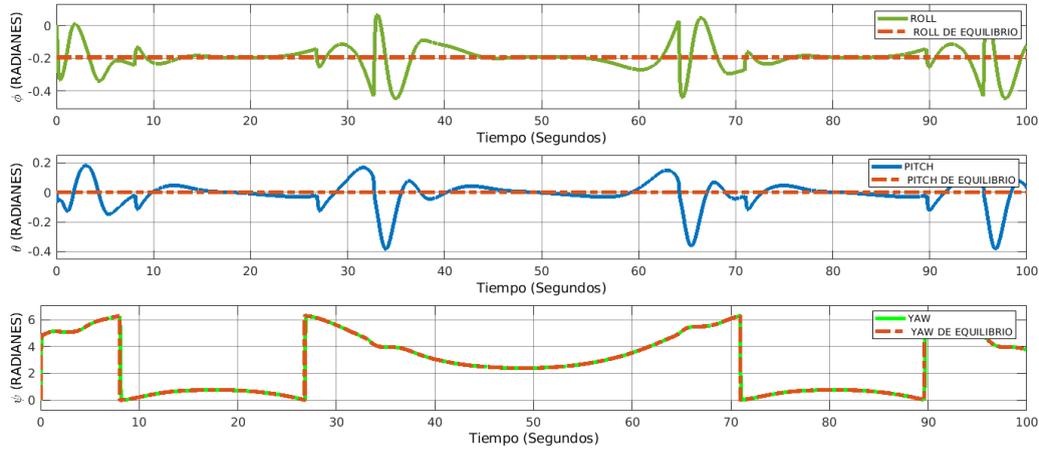


Figura 3.7: Gráfica de la posición angular del tricóptero

las trayectorias requeridas, una vez alcanzadas el controlador genera los momentos necesarios para regresar a las condiciones de equilibrio.

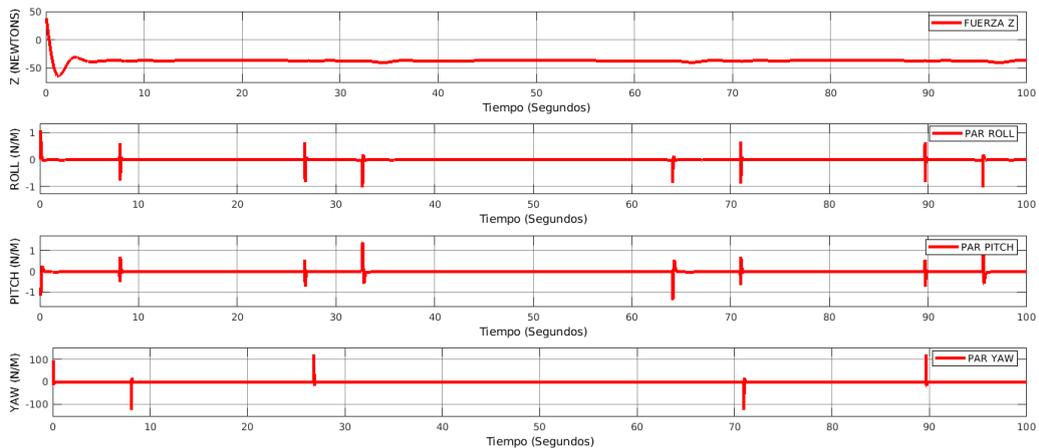


Figura 3.8: Gráfica de las fuerzas generadas por el controlador

Por último es posible observar las gráficas en la Figura 3.8 de las fuerzas generadas por el controlador para realizar la trayectoria propuesta en forma de lemniscata, dichas fuerzas son la fuerza de empuje en el eje z y los momentos aerodinámicos para las posiciones angulares ϕ , θ y ψ respectivamente.

Trayectoria Despegue-Traslación-Aterrizaje para el modelo del tricóptero

Por otra parte, se realizó la prueba, en la que se marcó una trayectoria de ascenso, dicha trayectoria solo es posible que sea realizada por un

Vtol convencional y no por una aeronave de ala fija, ya que es un ascenso completamente vertical, seguido por un desplazamiento en el $x = 250$ m.

Las condiciones iniciales del sistema son $x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$

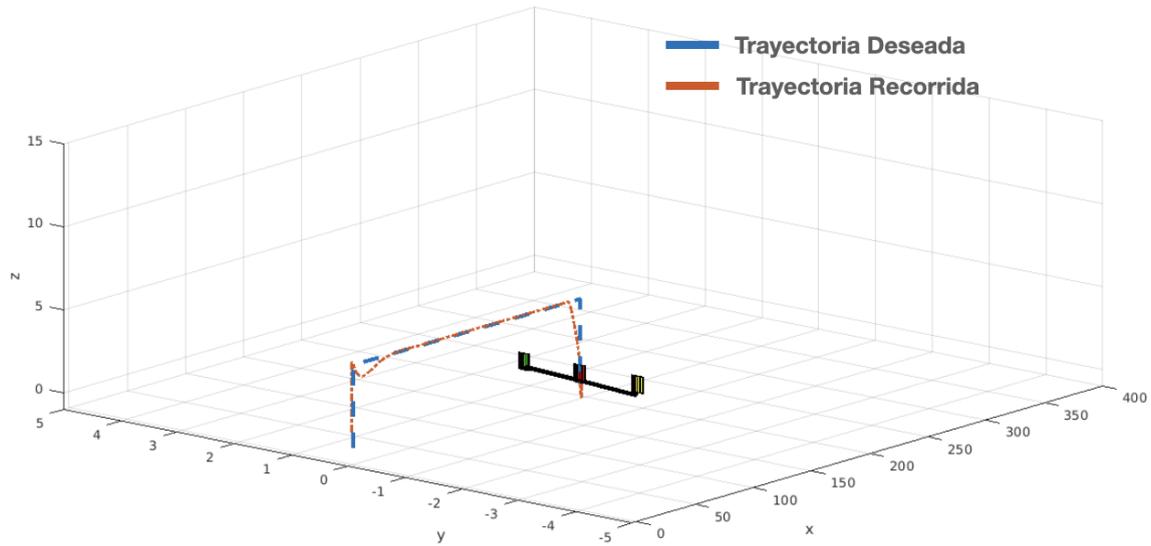


Figura 3.9: Gráfica de la trayectoria para el tricóptero

Podemos observar en la figura [3.10](#) el desempeño longitudinal del tricóptero a lo largo de la trayectoria.

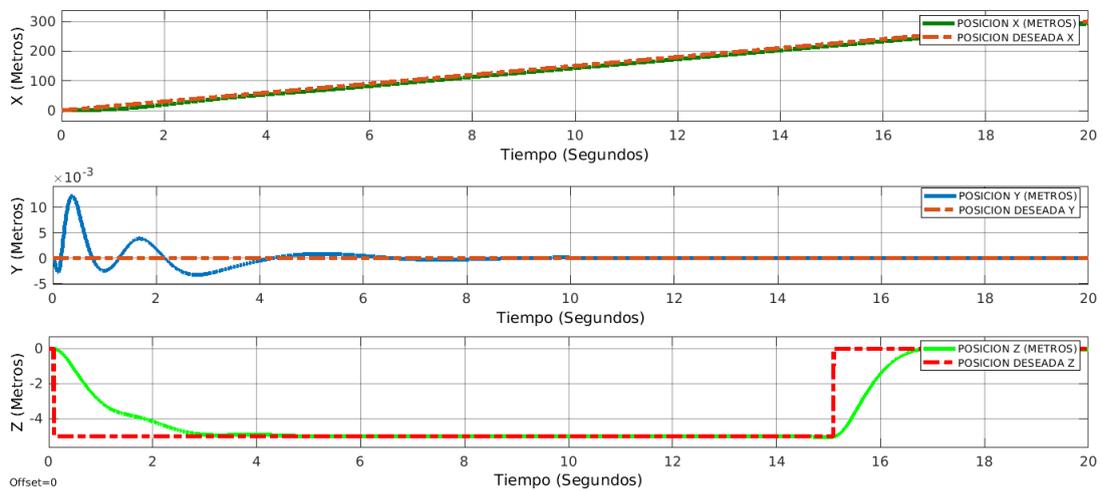


Figura 3.10: Gráfica de la posición longitudinal del tricóptero

Mientras que en la figura 3.11 podemos observar el desempeño de la posición angular del tricóptero con respecto a las posiciones angulares de equilibrio.

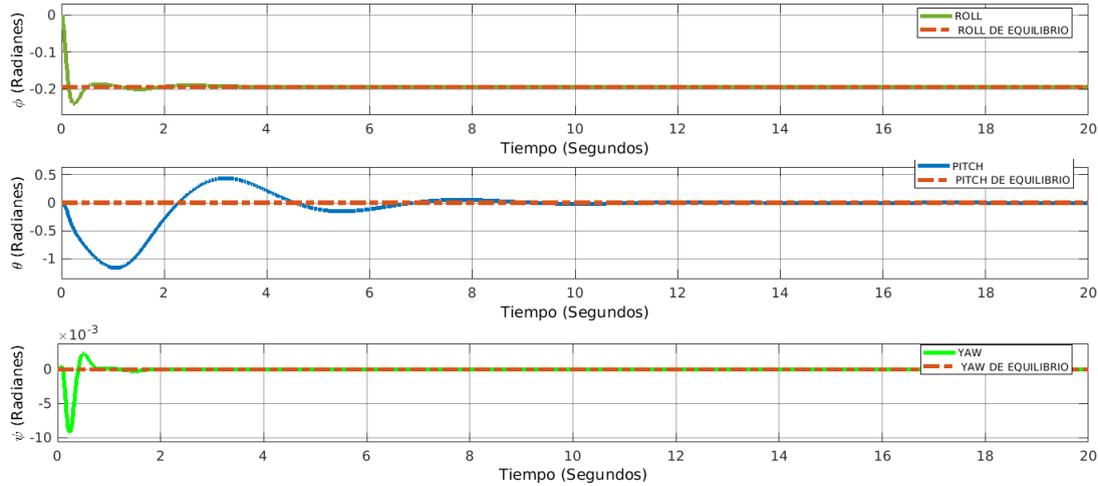


Figura 3.11: Gráfica de la posición angular de tricóptero

Trayectoria senoidal para el modelo del tricóptero

Se repitió la prueba anterior, pero ahora con el modelo del tricóptero, se utilizó la misma trayectoria con la misma amplitud y misma frecuencia que en el modelo del Vtol híbrido para poder comparar su desempeño.

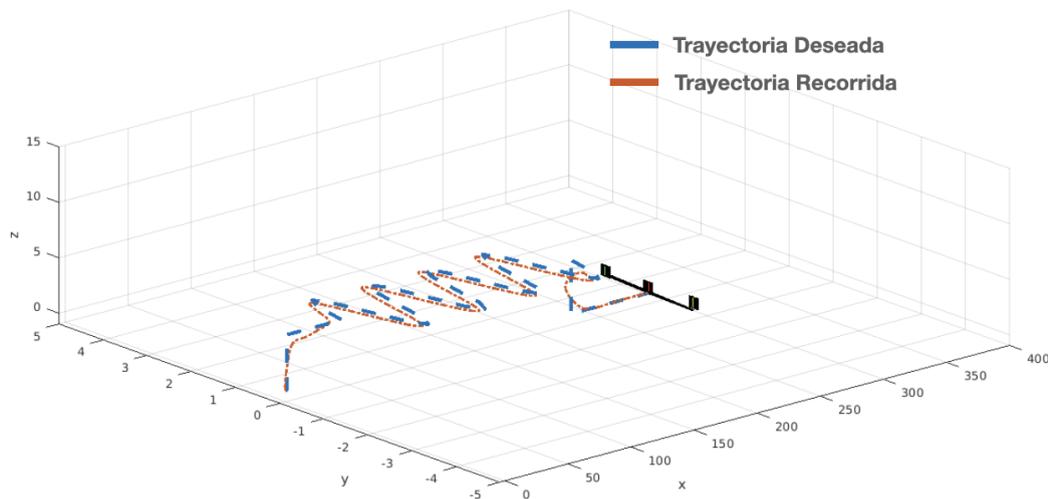


Figura 3.12: Gráfica de la trayectoria senoidal para el tricóptero

De igual manera, las condiciones iniciales fueron 0 para todas las posiciones longitudinales y angulares. Buscando comparar el desempeño de cada uno de los modelos y sus respectivas trayectorias.

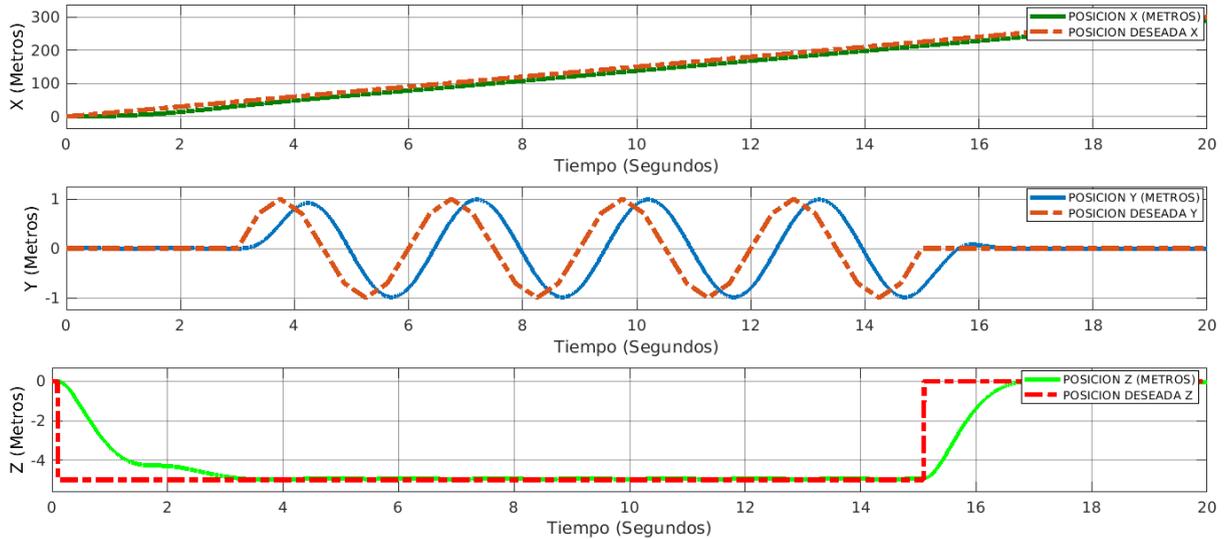


Figura 3.13: Gráfica de la posición longitudinal de tricóptero

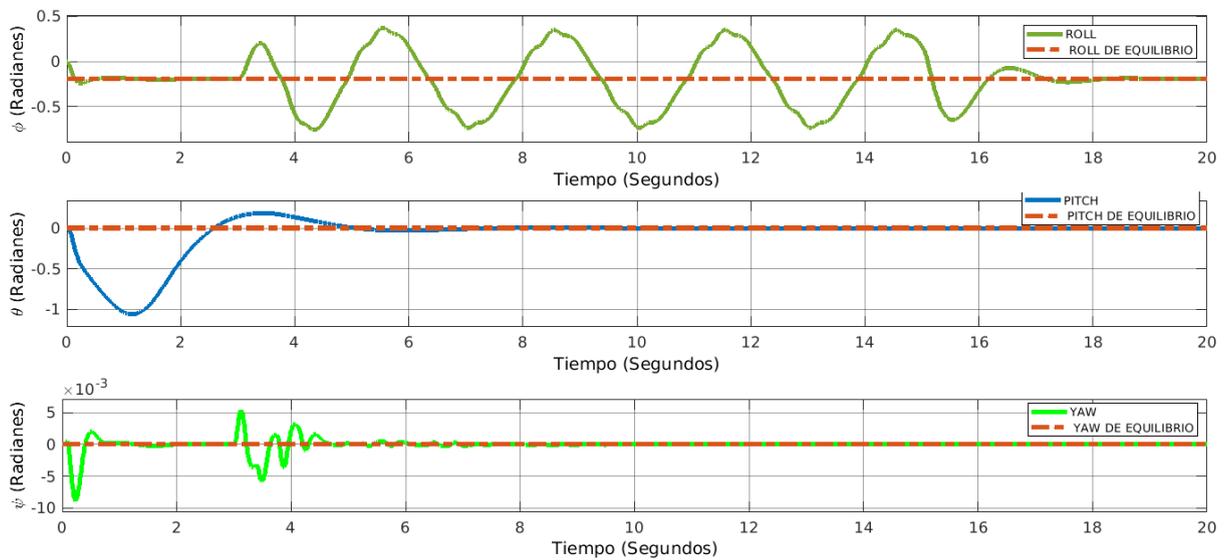


Figura 3.14: Gráfica de la posición angular de tricóptero

Tanto en la figura [3.13](#) y [3.14](#) se puede observar el comportamiento del vehículo a lo largo de la trayectoria preestablecida.

3.6. Conclusiones

En este capítulo, se ha desarrollado un controlador no lineal basado en pasividad para un vehículo aéreo no tripulado tipo tricóptero, cuyas ecuaciones de movimiento fueron expuestas en el capítulo 2 de este trabajo de tesis. El algoritmo IDA-PBC requiere sin embargo transformar el modelo matemático formulado bajo las ecuaciones de Euler-Lagrange al formulismo Hamiltoniano obteniendo así la ecuación (3.9), este controlador es usado con el objetivo de utilizar las propiedades pasivas de un VTOL, aprovechando de igual manera que es un controlador ampliamente documentado en la literatura, la cual nos dice que es robusto ante incertidumbres paramétricas y dinámicas no modeladas, por otro lado se realizaron una serie de pruebas en simulación de distintas trayectorias de vuelo, en las que se combinaron comportamientos tanto de vehículos de ala fija como vehículos multirrotores, siendo un ejemplo de estas la trayectoria en espiral ascendente y la trayectoria en forma de lemniscata mostradas en las Figuras 3.1 y 3.6, en estas imágenes podemos observar el comportamiento del vehículo a lo largo de la simulación de vuelo comparándolas con los puntos deseados a recorrer mismos que a diferencia de las trayectorias de despegue, sufren al inicio del vuelo teniendo comportamientos fuera de las trayectorias deseadas, esto debido al desbalance generado por la falta de un motor, permitiendo que el vehículo se salga de la trayectoria hasta que el controlador estabilice el motor batiente del tricóptero, por lo que en la mayoría de los casos simulados el controlador estabiliza el VTOL en los primeros 5 segundos de vuelo.

Modelo matemático del VANT de ala fija

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta el modelo matemático de un avión de ala fija desarrollado en (Gryte y cols., 2018), el cual sirve como base para el desarrollo del modelado del VTOL híbrido presentado en este trabajo de tesis, ya que es necesario acoplar y comprender el funcionamiento de estas dinámicas de movimiento para el correcto funcionamiento de nuestro sistema híbrido.

Es bien conocido que un VANT de ala fija presenta distintas dinámicas comparadas con un VANT multirotor, ya que posee una eficiencia mayor de energía, lo que le permite vuelos de mayor duración y velocidades mayores, aunque con la debilidad de requerir espacios amplios para el despegue y el aterrizaje.

La configuración de la aeronave se muestra en la Figura 4.1 y se hace uso del sistema de referencia explicado en el capítulo 5, en conjunto con las direcciones y los ángulos correspondientes para cada una de las rotaciones.

4.2. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones matemáticas que describen la dinámica de la posición en los ejes de navegación del Skywalker x8 a partir de los componentes aero-

dinámicos, utilizando ángulos de Euler. Son expresadas en este capítulo las cuales incluyen las ecuaciones para calcular las derivadas de las posiciones longitudinales y angulares, en función de las componentes de la velocidad angular y la actitud.

La notación es usada de acuerdo a una referencia inercial de coordenadas $\gamma = [x, y, z]$, la cual se considera con posiciones fijas en la tierra, mientras que $\eta = [u, v, w]$ son las coordenadas fijas al cuerpo, las cuales coinciden con el centro de masa del avión de ala fija.



Figura 4.1: Avión de ala fija Skywalker x8

La velocidad de cambio de las posiciones en los ejes de navegación se expresan como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

donde $S\theta = \sin \theta$ y $C\theta = \cos \theta$ usando la notación corta de senos y cosenos y u, v, w , representan las velocidades tangenciales con respecto al cuerpo del vehículo.

Mientras que la velocidad angular expresada en ángulos de Euler está dada por la siguiente relación matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

siendo p, q, r las velocidades angulares en los ejes del cuerpo del vehículo.

Las ecuaciones dinámicas que permiten obtener la posición en función de las componentes de la masa de la aeronave, velocidad angular y lineal, además de las componentes de las fuerzas aerodinámicas, expresadas en ejes cuerpo; por el otro, el cálculo de la posición angular a partir de las mismas, los momentos de las fuerzas aerodinámicas del Skywalker x8 en ejes cuerpo y una serie de parámetros mecánicos (Γ) que dependen de los momentos y constantes de inercia del vehículo.

La posición en ejes cuerpo esta dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde F_x, F_y, F_z representan las fuerzas aerodinámicas en ejes cuerpo del avión de ala fija generadas por los perfiles alares, también denominadas como reacciones de arrastre, deslizamiento lateral y levante respectivamente..

Dichos perfiles alares son descritos con los siguientes coeficientes aerodinámicos.

$$F_x = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \quad (4.4)$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_Y \quad (4.5)$$

$$F_z = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (4.6)$$

donde ρ es la densidad del aire, S es la superficie alar, V denota la velocidad de vuelo en línea recta y C_D, C_Y y C_L son los coeficientes aerodinámicos. (Gryte y cols., 2018)

Estos coeficientes aerodinámicos son desarrollados en el capítulo 5 a partir de la ecuación 5.15 a la 5.17.

Velocidad de cambio de la velocidad angular:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr \\ \Gamma_5 pr - \Gamma_6(p^2 - r^2) \\ \Gamma_7 pq - \Gamma_1 q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_3 L + \Gamma_4 N \\ \frac{1}{I_{yy}} M \\ \Gamma_4 L + \Gamma_8 N \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde L , M y N , representan elementos de los momentos aerodinámicos y fuerzas de control. Estos momentos se descomponen en lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix}$$

en el cual los coeficientes C_l , C_m , y C_n representan las reacciones aerodinámicas que producen fuerzas de rotación en cada eje del vehículo mostrados en las ecuaciones (5.19-5.21) del capítulo 5. (Gryte y cols., 2018)

De igual manera los parámetros mecánicos Γ son el resultado de las siguientes ecuaciones, en donde I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , I_{xz} son las constantes de inercia del avión de ala fija, expresados en las ecuaciones (4.8-4.16).

$$\Gamma = I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2 \quad (4.8)$$

$$\Gamma_1 = I_{xz}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) \quad (4.9)$$

$$\Gamma_2 = I_{zz}(I_{zz} - I_{yy}) + I_{xz}^2 \quad (4.10)$$

$$\Gamma_3 = \frac{I_{zz}}{\Gamma} \quad (4.11)$$

$$\Gamma_4 = \frac{I_{xz}}{\Gamma} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_5 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \quad (4.13)$$

$$\Gamma_6 = \frac{I_{xz}}{I_{yy}} \quad (4.14)$$

$$\Gamma_7 = I_{xx}(I_{xx} - I_{yy}) + I_{xz}^2 \quad (4.15)$$

$$\Gamma_8 = \frac{I_{xx}}{\Gamma} \quad (4.16)$$

Mientras que el vector general de Fuerzas aerodinámicas se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{gravitatoria} + \vec{F}_{aerodinamica} + \vec{F}_{propulsiva} = m \vec{a} \quad (4.17)$$

Los parámetros considerados en estas ecuaciones se obtuvieron a través de pruebas de túnel de viento y se consideran adimensionales, mismos que se muestran en la siguiente tabla:

Parámetros	Valor	Parámetros	Valor
B	2.1000	C_{Y0}	$3,2049x10^{-18}$
c	0.3571	C_{YB}	-0.1949
S_{alar}	0.75000	C_{Yp}	-0.1172
R	5.8800	C_{Yr}	0.0959
I_{xz}	0.9343	C_{Ysa}	-0.0696
e	0.9935	C_{l0}	$1,1518x10^{-18}$
a_0	0.2670	C_{lB}	-0.0765
C_{L0}	0.0254	C_{lp}	-0.4018
C_{La}	4.0191	C_{lr}	0.0250
C_{Lq}	3.8954	C_{lsa}	0.2987
C_{Lse}	0.5872	C_{m0}	0.0180
C_{D0}	0.0101	C_{ma}	-0.2524
C_{DB1}	$-2,0864x10^{-7}$	C_{mfp}	-0.2168
C_{DB2}	0.0671	C_{mq}	-1.3047
C_{Dq}	0	C_{mse}	-0.4857
C_{Dse}	0.8461	C_{n0}	$-2,2667x10^{-7}$
C_{nB}	0.0403	C_{np}	-0.0247
C_{nr}	-0.1252	C_{nsa}	0.0076

Cuadro 4.1: Tabla de parámetros aerodinámicos

4.3. Resultados y simulaciones del avión skywalker x8

Trayectoria en espiral ascendente para el modelo del avión skywalker x8

Se procedió a simular el modelo matemático del avión de ala fija mostrado en este capítulo, de igual manera se utilizó la estrategia de control PID para realizar las trayectorias de vuelo propuestas, en la que se buscaron los parámetros de calibración correspondientes, para la correcta realización de la trayectoria mostrada en la Figura 4.2

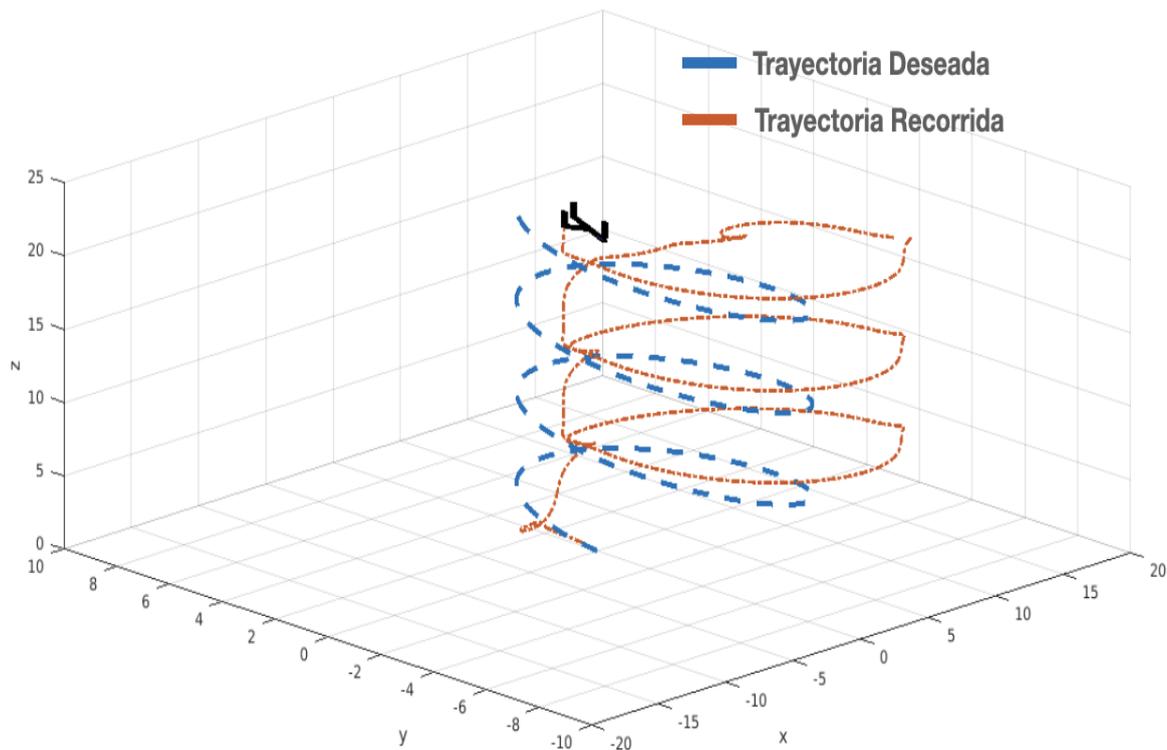


Figura 4.2: Gráfica de la trayectoria en espiral recorrida por del avión skywalker x8

Las condiciones iniciales del sistema son $x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$. El objetivo de la simulación fue desplazar el avión en una espiral ascendente. Se observa la línea punteada en color rojo, siendo esta la trayectoria deseada propuesta, mientras que la línea azul punteada representa la trayectoria recorrida por el avión.

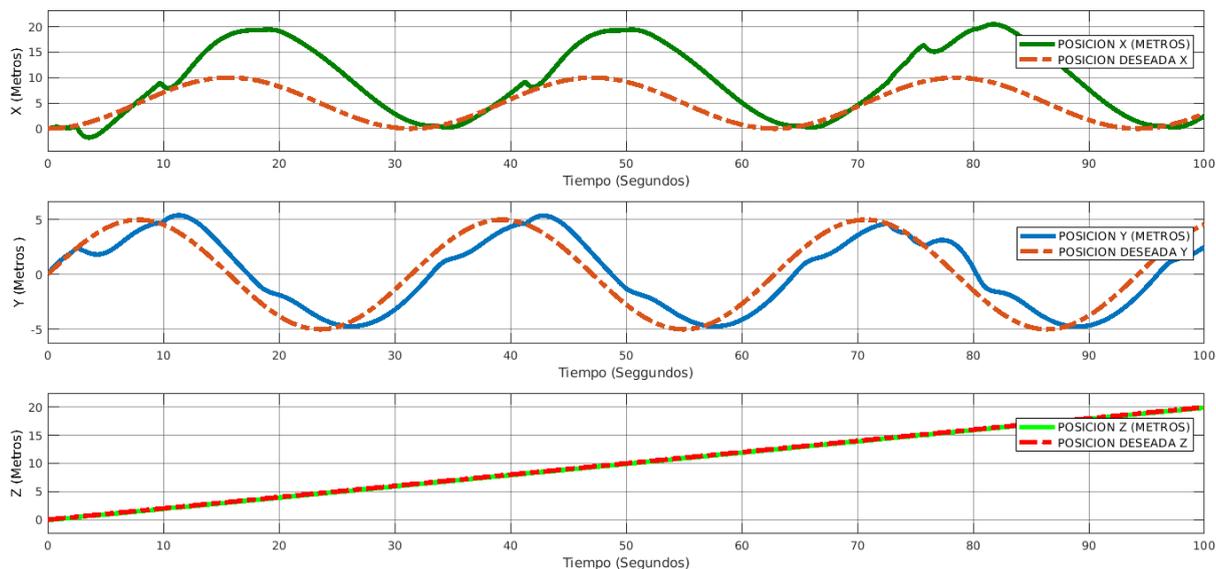


Figura 4.3: Gráfica de la trayectoria longitudinal recorrida por del avión skywalker x8.

Podemos observar que debido a las características del modelo, de no poder mantenerse en una sola posición en el aire, es necesario mantener una velocidad constante, lo que dificulta la rotación del avión en curvas muy cerradas, observando como en el eje x no es posible seguir por completo la trayectoria deseada ya que presenta un retraso con respecto a esta.

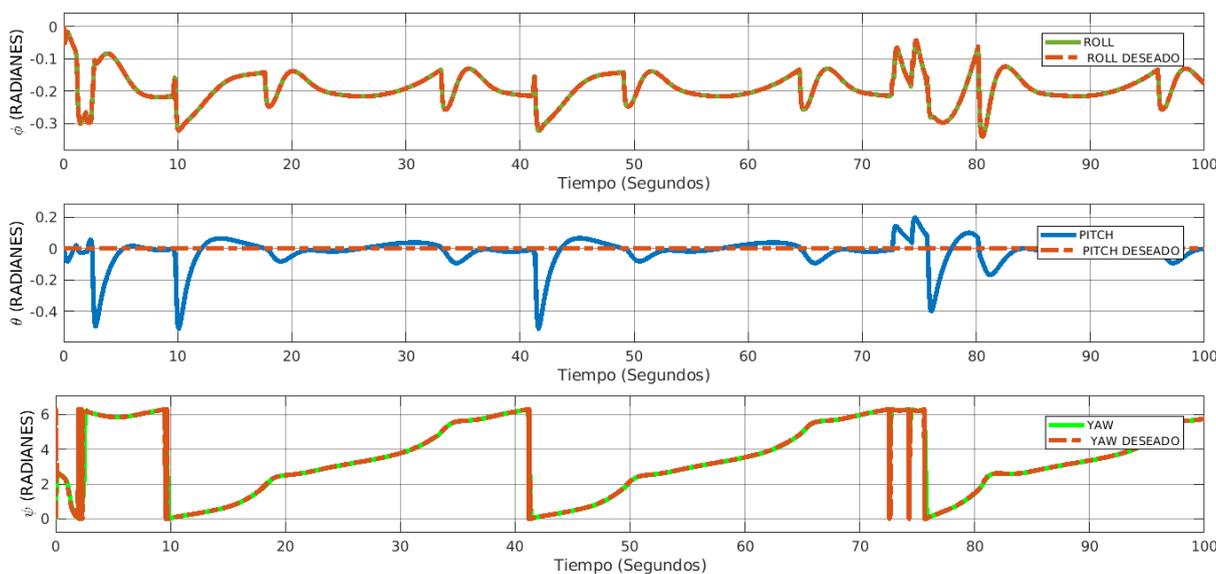


Figura 4.4: Gráfica de la trayectoria angular recorrida por el avión skywalker x8

Mientras que en la figura [4.4](#) podemos apreciar la rotación en roll nece-

saría enviada por el controlador PID, dicha rotación nos permite generar un deslizamiento en el eje y buscando llegar a las referencias deseadas, y las inclinaciones en el pitch para mantener la altitud en ascenso del avión.

Trayectoria en forma de lemniscata para el modelo del avión skywalker x8

De igual manera se realizó otra prueba al simular el modelo matemático del avión en conjunto con la misma estrategia de control PID de la trayectoria pasada en el cual las ganancias de calibración se mantuvieron iguales, en esta prueba se propuso una trayectoria en forma de lemniscata, para poder observar su respuesta, dicha trayectoria puede ser observada en la figura [4.5](#).

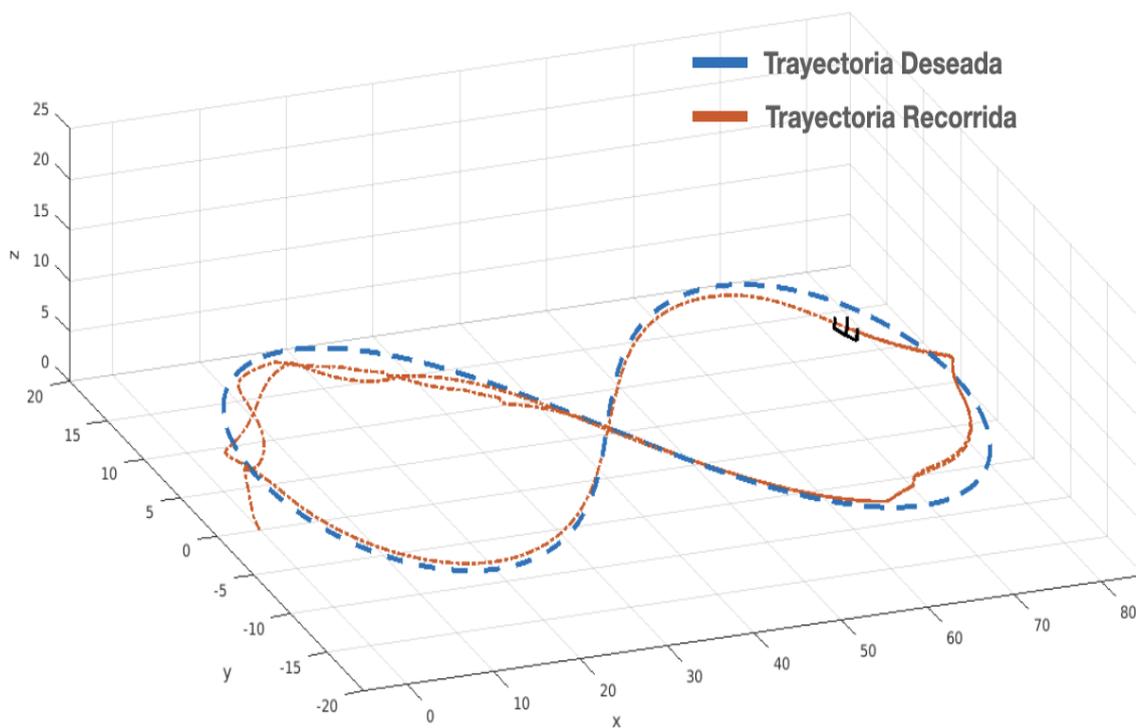


Figura 4.5: Comparación de la trayectoria recorrida por del avión skywalker x8

Las condiciones iniciales del sistema son $x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$.

El objetivo de la simulación fue desplazar el avión en una trayectoria en forma de lemniscata. Se observa la línea punteada en color rojo, siendo esta la trayectoria propuesta, mientras que la línea azul punteada representa la trayectoria recorrida por el avión.

Se puede observar en la Figura 4.6 las posiciones recorridas por el avión para seguir la trayectoria planeada previamente, podemos comparar la posición deseada en x y y con respecto a las posiciones reales recorridas por el avión, al igual que con la primera prueba al avión le cuesta seguir la trayectoria en el eje y , esto debido a la dinámica del avión, ya que para rotar necesita generar una inclinación en roll (ϕ) y esto a su vez propicia una pérdida en la fuerza de sustentación ya que al vehículo no le llega el aire de manera directa, lo que posteriormente necesitara ser corregido por el pitch (θ) haciendo una dinámica mas lenta en la rotación del avión.

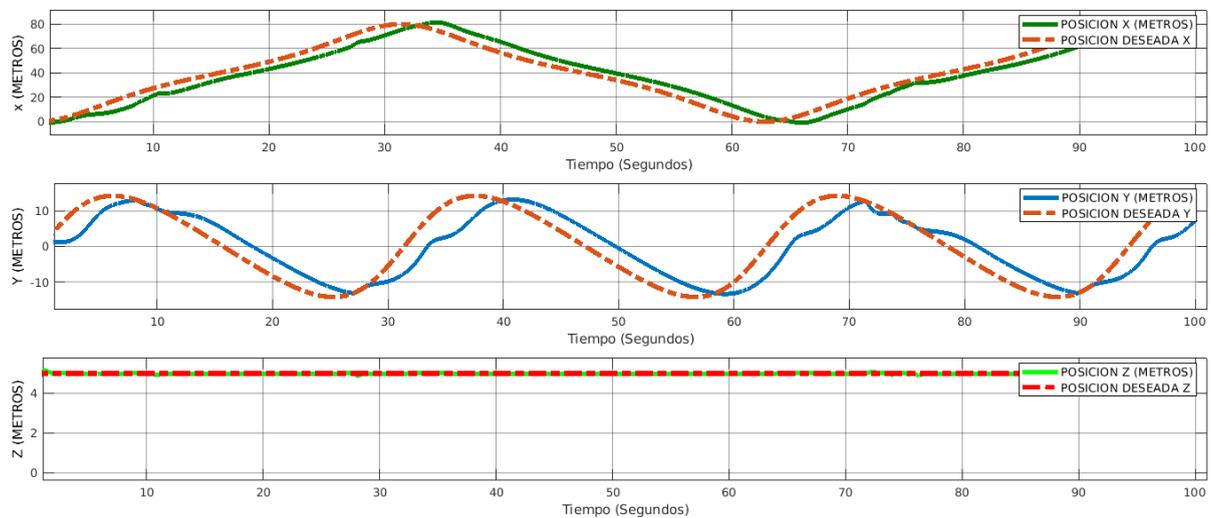


Figura 4.6: Comparación de la posición longitudinal recorrida por el avión skywalker

Mientras que en la Figura 4.7 podemos observar la trayectoria angular recorrida por el avión para seguir cada una de las referencias marcadas, como se mencionó para generar esa rotación en yaw (ψ) y mover al avión a través de los ejes x y y es necesario balancear al ala fija en roll (ϕ) esta inclinación se puede observar en la gráfica 4.7 misma en la que podemos ver como el yaw se modifica gracias a estas inclinaciones, cabe resaltar que los ángulos de euler al ser funciones discontinuas se generan esos picos al rotar el vehículo 360° grados.

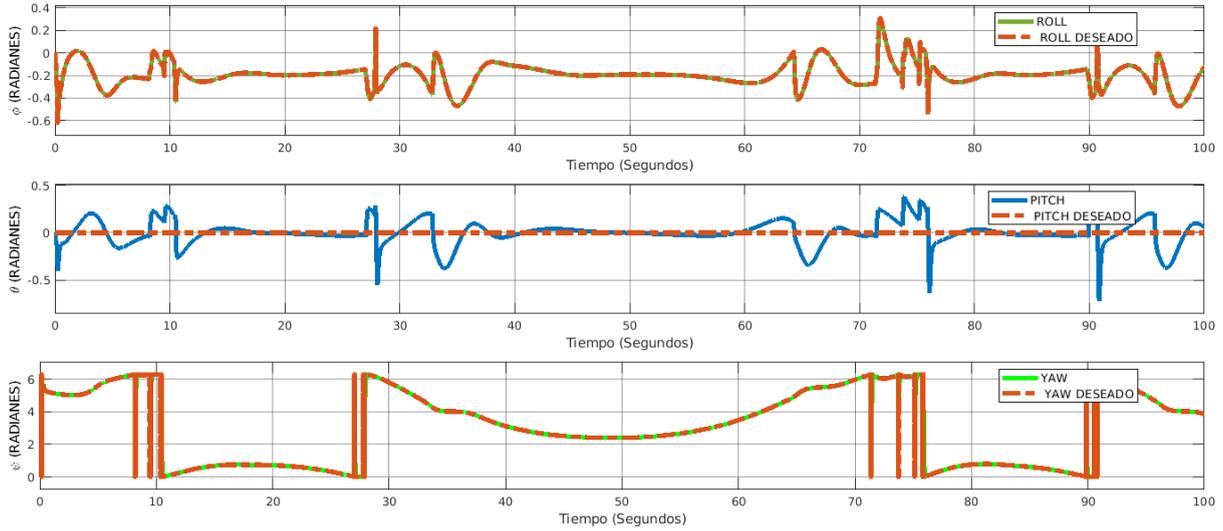


Figura 4.7: Comparación de la posición angular recorrida por del avión skywalker

Trayectoria Despegue-Traslación-Aterrizaje para el modelo del avión skywalker x8 con controlador PID

En contra parte de la simulación realizada en la subsección anterior, se realizó de nueva cuenta la trayectoria de despegue, traslación y aterrizaje ahora para el modelo del avión x8, misma que puede ser observada en la Figura [4.8](#)

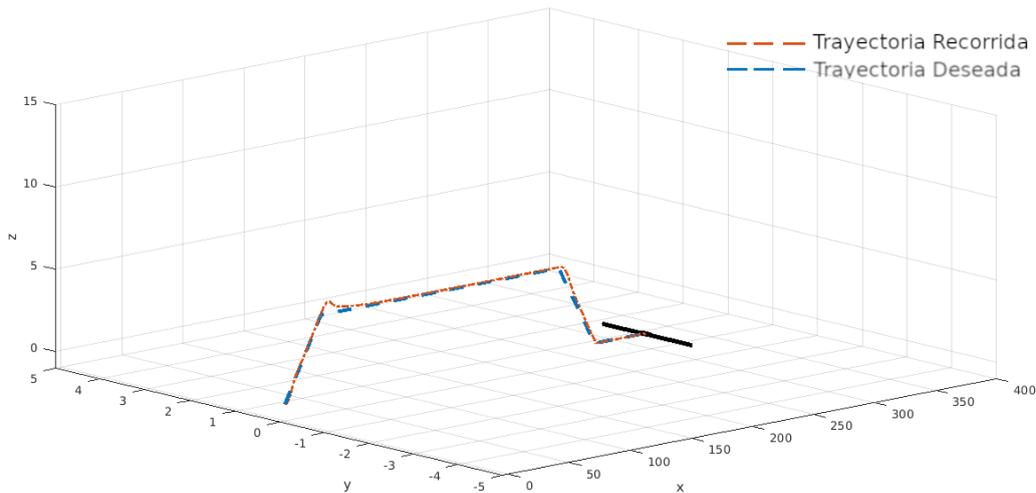


Figura 4.8: Comparación de la trayectoria recorrida por del avión skywalker x8

Las condiciones iniciales para esta simulación, fueron $x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$ y $\psi = 0^\circ$ respectivamente para cada uno de los ejes y posiciones angulares.

En la Figura 4.9 se pueden apreciar las gráficas correspondientes a las posiciones longitudinales requeridas para la trayectoria. La principal diferencia en la dinámica con respecto a los dos modelos anteriores, radica en que los aviones no pueden mantener una posición fija en el aire debido a que su fuerza de sustentación está directamente ligada a la velocidad a la que viaja y a sus coeficientes aerodinámicos es por esto que en la gráfica de la Figura 4.9 se hace hincapié y se compara con la distancia deseada, puesto que no es posible seguir la trayectoria marcada, ya que para mantenerse en el aire es necesario seguir moviéndose, de igual manera se puede observar que para llegar a la altura especificada la aeronave necesita recorrer una distancia de 30 metros en lo que alcanza la velocidad crucero.

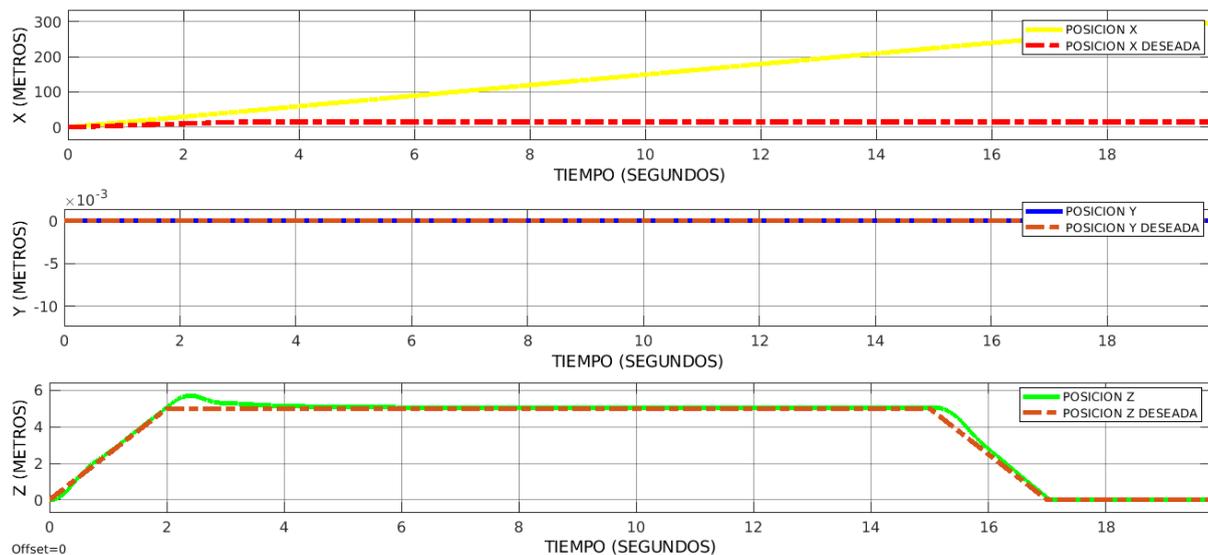


Figura 4.9: Comparación de la posición longitudinal del avión skywalker x8

De igual forma se grafican las respuestas angulares del sistema, mismas que se pueden observar en la Figura 4.10, es posible observar como el ángulo pitch (θ) es modificado por el controlador para alcanzar la altura deseada, generando mayor fuerza de sustentación, permitiendo al avión ascender.

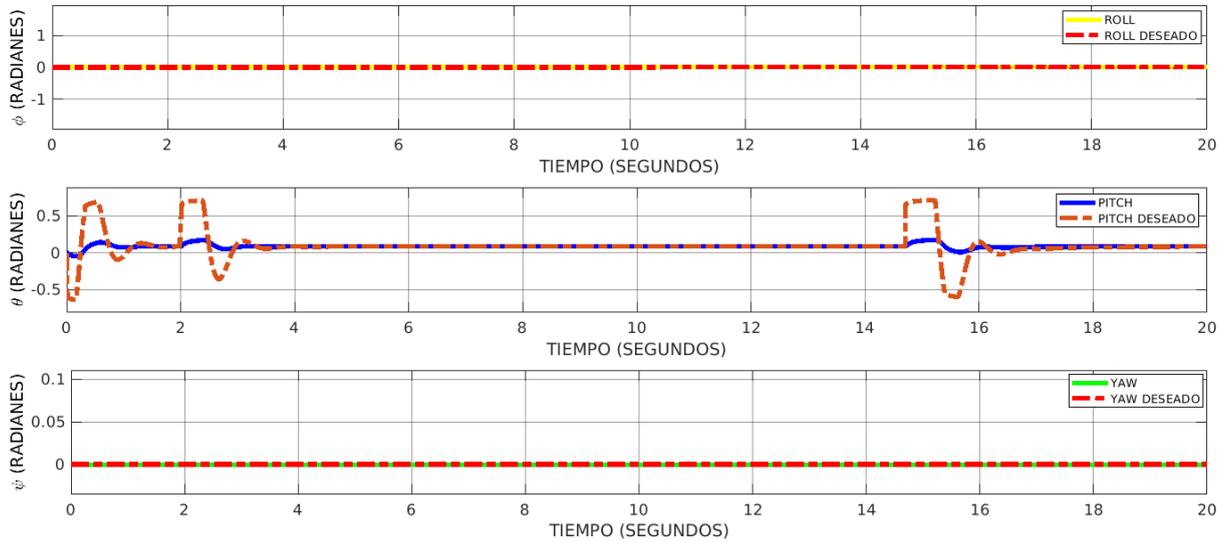


Figura 4.10: Comparación de la posición angular del avión skywalker x8

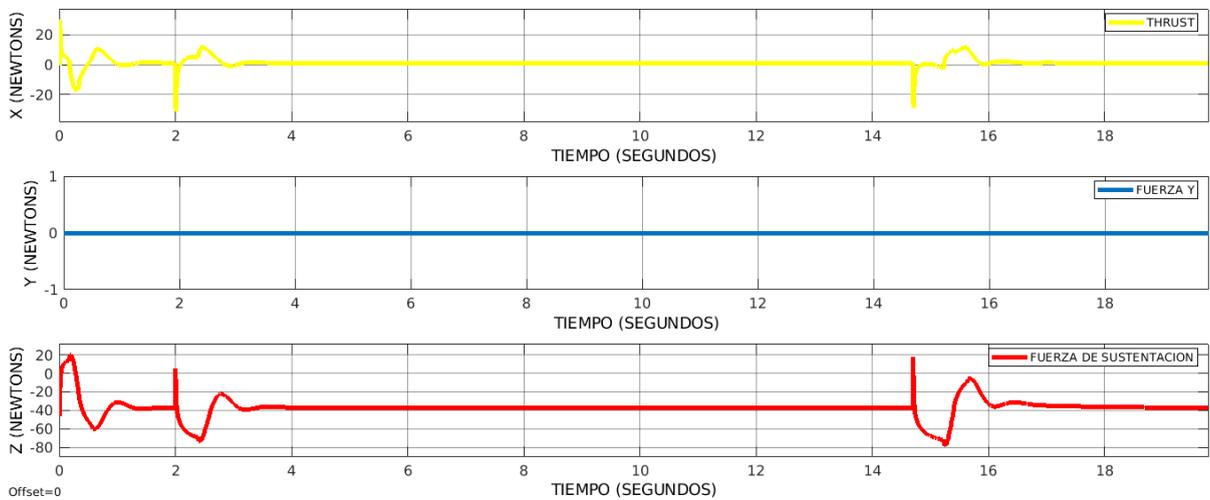


Figura 4.11: Comparación de las fuerzas generadas del avión skywalker x8

En la Figura [4.11](#) podemos observar 3 fuerzas de las cuales 2 son generadas por la superficie alar del avión, siendo estas la fuerza en el eje “Y” y la fuerza de sustentación, mientras que el empuje es generado por la acción de control, el cual permite al vehículo llegar a la velocidad crucero que genera la fuerza de sustentación para mantener el vehículo en el aire, de igual manera es posible observar como la fuerza de sustentación llega a 40 newtons que equivalen al peso de la aeronave.

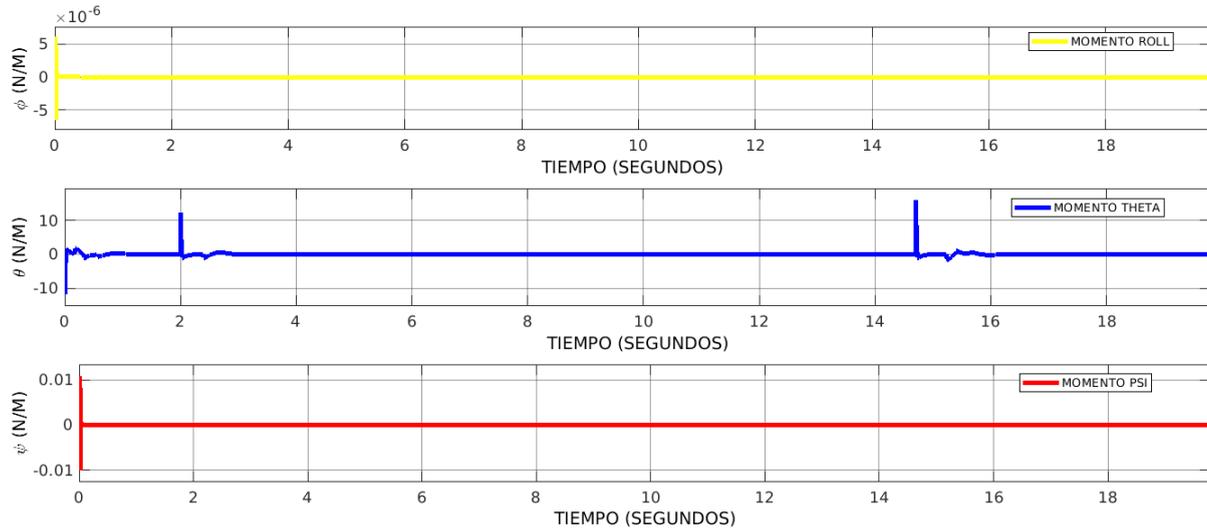


Figura 4.12: Comparación de los momentos generados del avión skywalker x8

Y para finalizar tenemos las gráficas de los torques generados por la superficie alar de la aeronave, ya que el controlador genera los movimientos angulares respectivos de los alerones y elevadores, que permiten a la aeronave rotar y generar a través de los coeficientes aerodinámicos los momentos necesarios para la rotación del avión.

Trayectoria senoidal para el modelo del avión skywalker x8 con controlador PID

Se repitió la prueba anterior, pero ahora con el modelo del avión skywalker x8, se utilizó la misma trayectoria con la misma amplitud y misma frecuencia que en el modelo del tricóptero para poder comparar su desempeño [4.13](#), el objetivo de esta trayectoria es observar las limitantes de los aviones para realizar rotaciones sobre su propio eje, ya que a diferencia de los VTOL este tipo de rotaciones involucra el movimiento combinado de más de una rotación, en el caso de los aviones es necesario balancearlo en (ϕ) y después con ayuda del controlador aumentar el ángulo de ataque a través del pitch θ para mantener la fuerza de sustentación del avión y evitar que entre en pérdida.

Las condiciones iniciales para esta simulación, fueron $x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$ y $\psi = 0^\circ$ respectivamente para cada uno de los ejes y posiciones angulares.

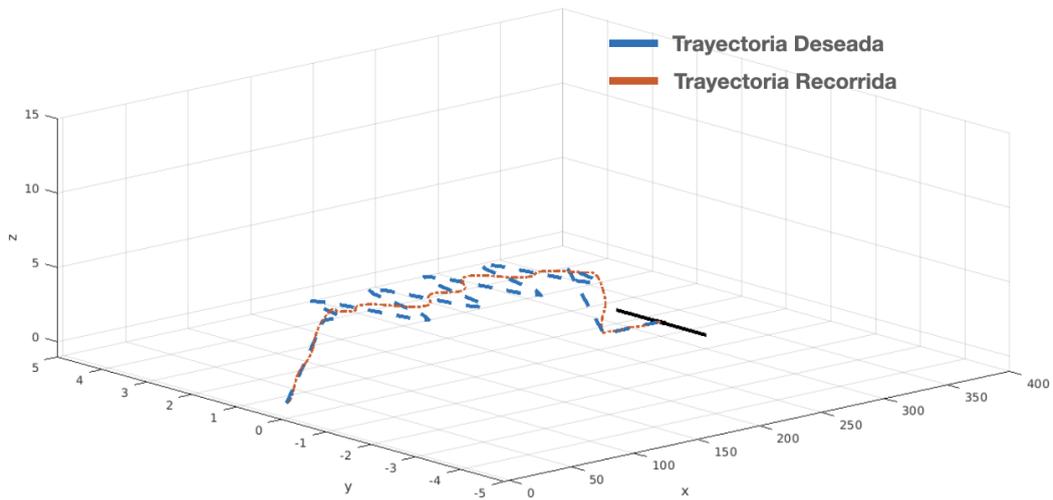


Figura 4.13: Gráfica de la trayectoria recorrida por el Avión skywalker x8

Claramente, es posible observar en la Figura 4.14 que el modelo del avión no puede seguir una trayectoria con esa velocidad, esto debido a las dinámicas acopladas de rotación que el modelo presenta, ya que para poder mover el avión a una posición deseada es necesario rotar la aeronave tanto en el eje “ z ” como en el eje “ x ”, siendo estos el ROLL y el YAW respectivamente, esto se traduce en una respuesta lenta, ya que a su vez no se debe perder la velocidad crucero para mantener la sustentación de la aeronave.

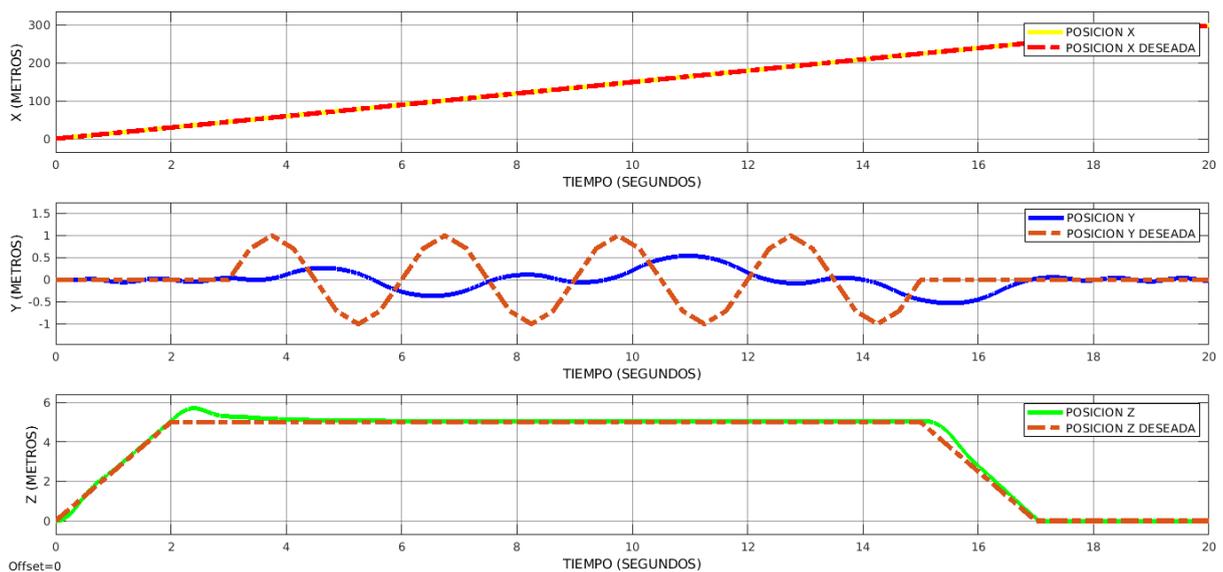


Figura 4.14: Gráfica de las posiciones longitudinales recorridas por el avión skywalker x8

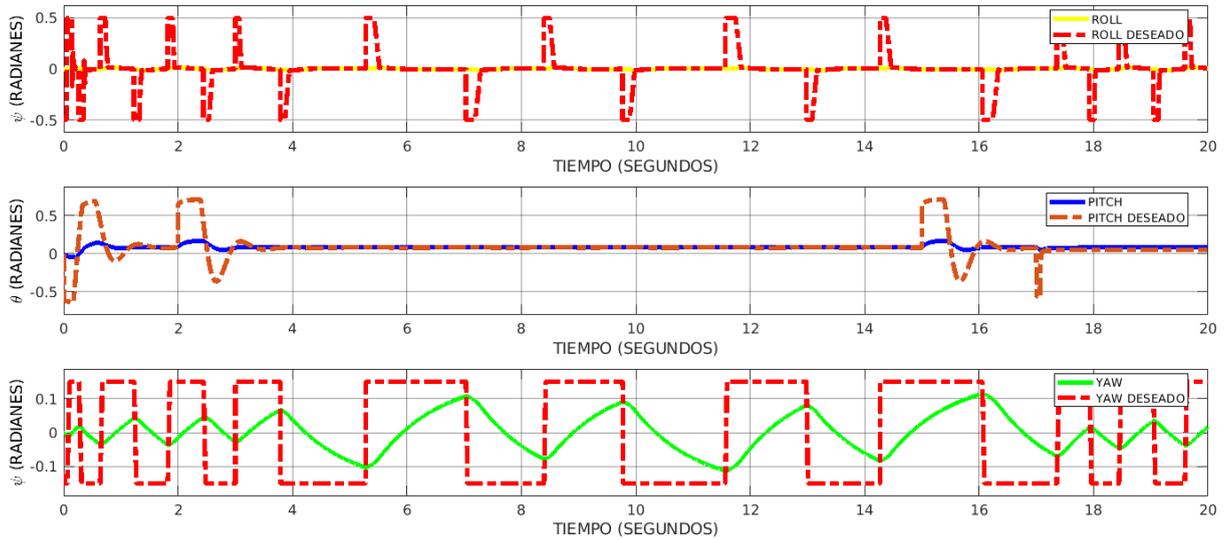


Figura 4.15: Gráfica de las posiciones angulares del Avión skywalker x8

En la Figura 4.15 podemos observar las posiciones angulares en cada eje que genera el controlador para llegar a las posiciones demandadas por la trayectoria propuesta, se nota claramente que la respuesta en yaw no se acerca al yaw deseado es por eso que el avión no puede seguir el serpenteo generado por la trayectoria senoidal propuesta ya que esta dinámica es lenta en comparación con el tricóptero.

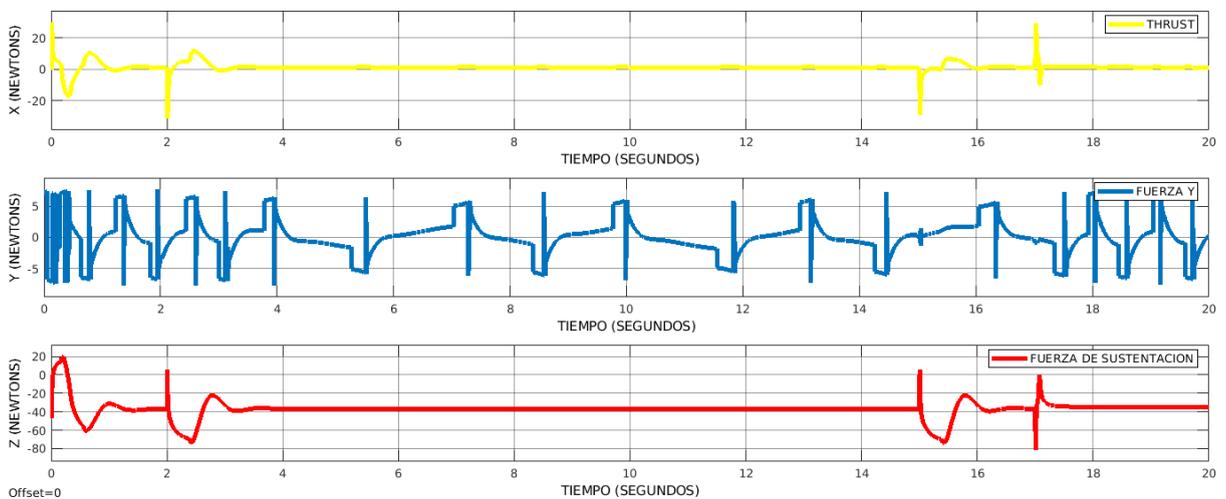


Figura 4.16: Gráfica de las Fuerzas generadas por Avión skywalker x8

Por otro lado, en las Figuras 4.16 y 4.17 podemos apreciar las fuerzas y momentos generados por los coeficientes aerodinámicos, que permiten llevar a la aeronave a las posiciones solicitadas, cabe recalcar que la única fuerza no generada por los coeficientes alares es el thrust y las demás

fuerzas son el resultado de mover los alerones y elevadores de la aeronave, los cuales incrementan o disminuyen la magnitud de los coeficientes.

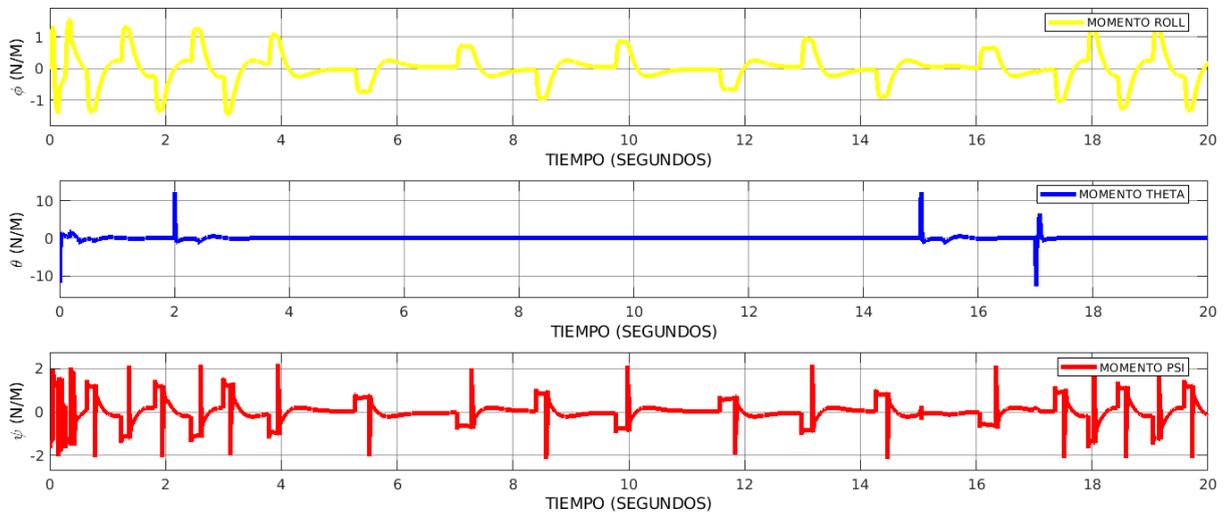


Figura 4.17: Gráfica de los momentos del avión skywalker x8

4.4. Conclusiones

Este capítulo tiene la finalidad de obtener resultados en simulación de una aeronave de ala fija para comparar las dinámicas de este con el tricóptero y con el VTOL híbrido en los capítulos siguientes.

Además las simulaciones presentadas en este capítulo permiten observar el comportamiento dinámico de un vehículo del tipo ala fija ante ciertas trayectorias, en las cuales es posible analizar ciertos patrones de funcionamiento, pudiendo ser comparados con las trayectorias realizadas por el vehículo del tipo tricóptero presentado en el capítulo 3.

De igual manera, el comportamiento del avión de ala fija muestra desventajas claras con respecto a los vehículos multirrotor, estas desventajas ya han sido señaladas en la literatura, las cuales podemos observar en las simulaciones “senoidales” y “despegue-traslación-aterriaje”, ya que para poder despegar necesita una gran distancia para generar las fuerzas de sustentación a diferencia de un VTOL que su fuerza de sustentación proviene principalmente de sus motores, por otra parte es notoria su dificultad para realizar giros bruscos ya que no puede seguir adecuadamente la trayectoria senoidal.

Modelado matemático del VTOL híbrido

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan las bases del modelado matemático del VTOL híbrido. Es importante mencionar, que las fuerzas y momentos aerodinámicos que intervienen en la sustentación y desplazamiento de los VANTs multirotor y ala fija son muy distintas. En el caso de los VANTs multirotor, la sustentación se da por medio del equilibrio entre la gravedad y las fuerzas de empujes generados por las hélices y el avance se origina por la descomposición de fuerzas de empuje hacia el eje Z y los ejes X y Y . Por otro lado, la sustentación en los VANTs de ala fija provienen de la aerodinámica de las alas, creando caminos de alta presión y baja presión.

5.2. Sistemas de Referencia

Como primer paso para desarrollar el modelo dinámico del VTOL híbrido, se explican a continuación los sistemas de referencia para estimar la posición y orientación del vehículo con respecto a un sistema de coordenadas de referencia inercial.

5.2.1. Marco de Referencia Inercial

El VTOL híbrido se considera como un cuerpo sólido rígido, el cual está caracterizado por un sistema de coordenadas ligado a él y con origen en su

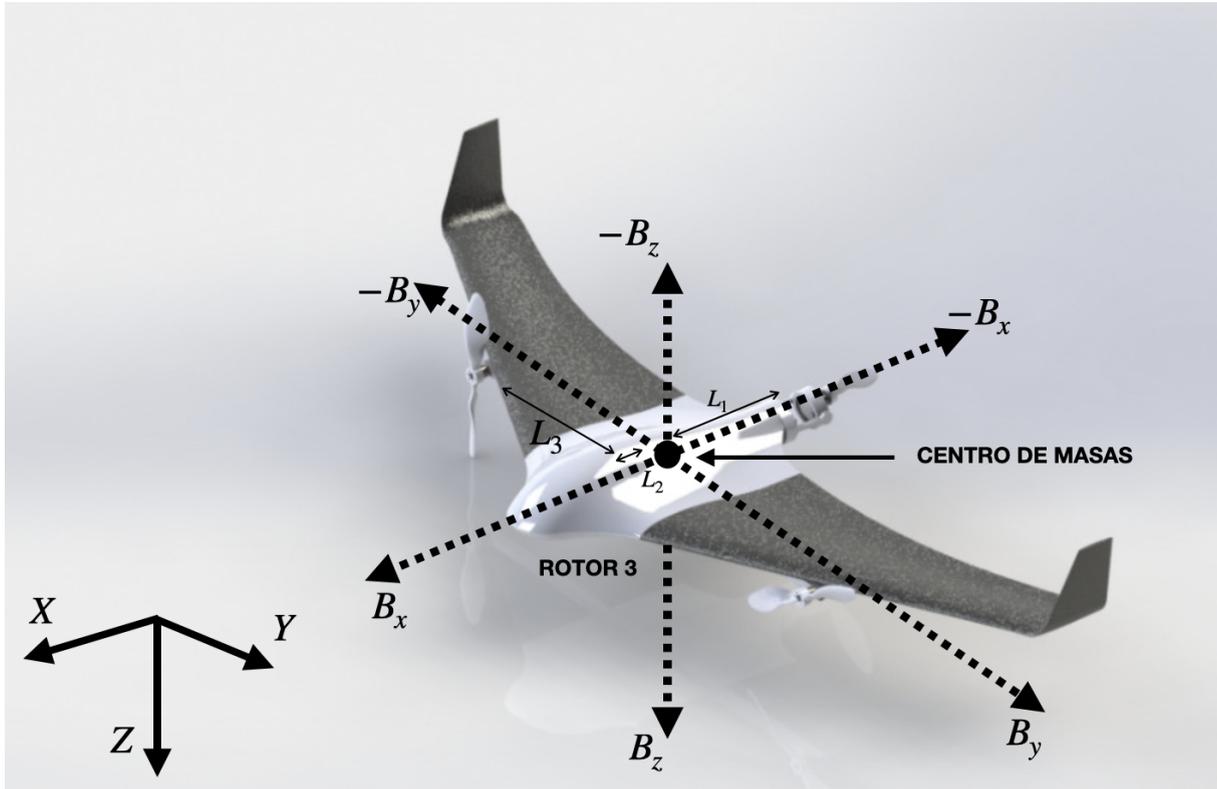


Figura 5.1: Convenciones usadas para el VTOL

centro de masa. Este sistema se define considerando $\eta = \{B_x, B_y, B_z, O_B\}$ como el sistema de coordenadas fijo al VTOL híbrido, mientras que el sistema de coordenadas inercial $I = \{X, Y, Z, O_I\}$ se considerará fijo con respecto a la tierra.

El origen O_I se puede colocar arbitrariamente para satisfacer las necesidades, al igual que los ejes pueden apuntar a cualquier dirección de forma perpendicular siguiendo la regla de la mano derecha, la configuración usada en este trabajo se muestra en la Figura [5.1](#)

5.2.2. Marco del Cuerpo

El marco del cuerpo no es un sistema inercial, y esta fijo al vehículo en movimiento, la orientación del marco del cuerpo es la siguiente:

- El origen O_B se encuentra ubicado en el centro de masas del sistema.
- El eje B_x apunta hacia la nariz del vehículo híbrido.

- El eje B_y se encuentra apuntando en dirección izquierda del eje B_x del vehículo tal y como se ve en la Figura 5.1.
- Mientras que el eje B_z se encuentra apuntando hacia abajo siguiendo con la convención de la mano derecha.

5.2.3. Ángulos de Euler

La rotación de un cuerpo rígido puede ser obtenida utilizando diversos métodos como: los ángulos de Euler o los cuaterniones. A partir de 12 definiciones independientes de los ángulos de Euler se puede representar la orientación relativa de dos sistemas de coordenadas. Los más populares son la convención “ x ”, la convención “ y ” y la convención “ xyz ”. Esta convención se utiliza mucho para vehículos aéreos y son comúnmente denominados como ángulos de Tait-Bryan.

Los ángulos de Tait-Bryan son tres ángulos usados para describir una rotación general en el espacio Euclídeo tridimensional a través de tres rotaciones sucesivas en torno de ejes del sistema móvil en el cual están definidos. Así, en este trabajo se usarán los ángulos de Tait-Bryan para describir la orientación del VTOL híbrido, como se puede ver en la Figura 5.2.

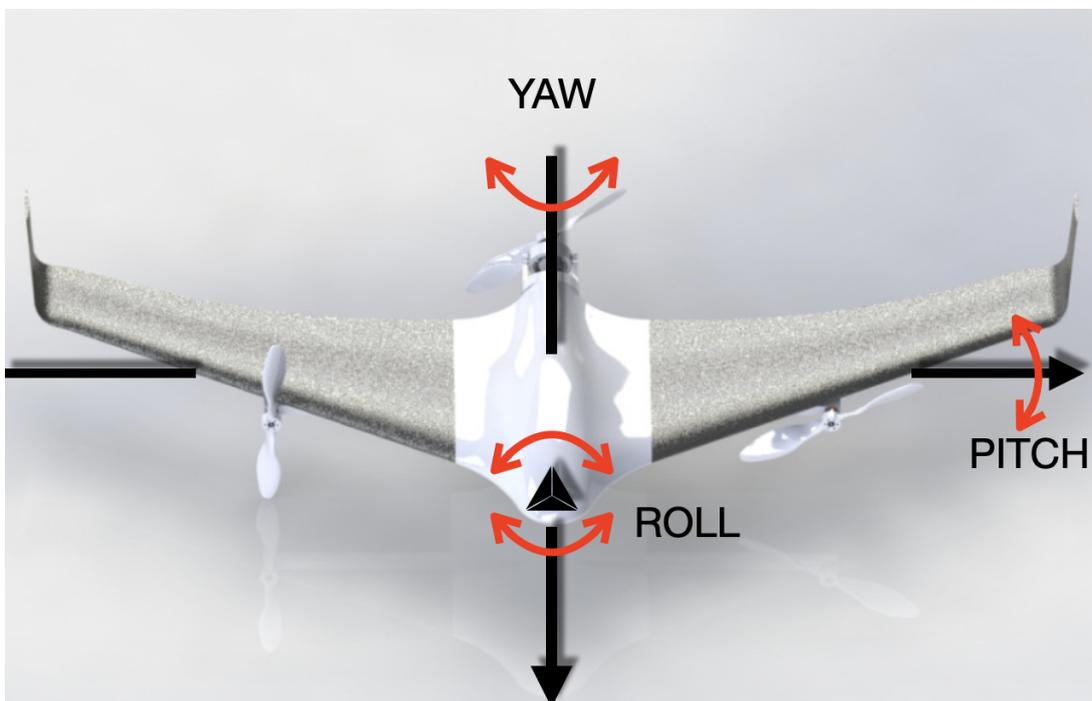


Figura 5.2: Rotación del vehículo híbrido

La convención utilizada en este trabajo se presenta a continuación:

- Ángulo Yaw (guiñada): definido con el símbolo ψ , el cual es el ángulo resultante entre el eje X del marco inercial y el eje X proyectado del cuerpo del vehículo, usando la rotación de la mano derecha en dirección del eje inercial Z.
- Ángulo Pitch (cabeceo): definido con el símbolo θ , usando la rotación apuntando la mano derecha hacia el eje inercial Y.
- Ángulo Roll (balanceo): definido con el símbolo ϕ , de igual manera es el ángulo resultante entre el eje Y inercial y el eje Y del cuerpo, usando la convención de la mano derecha.

La configuración de rotación de un cuerpo rígido en el espacio se realiza a través de tres rotaciones continuas:

$$\mathbf{R}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{R}(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \theta & 0 \\ \sin \psi & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La matriz completa de rotación η . con respecto a I , comúnmente llamada Matriz Coseno Directa, viene dada por:

$$R_I = \mathbf{R}(z, \psi) \mathbf{R}(y, \theta) \mathbf{R}(x, \phi)$$

$$R_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \theta & 0 \\ \sin \psi & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

donde $S\theta = \sin \theta$ y $C\theta = \cos \theta$ usando la notación corta de senos y cosenos.

A partir de la ecuación (5.5) generada por las tres rotaciones sucesivas y su propiedad de ortogonalidad, relacionando la derivada de la matriz ortogonal con una matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\omega)$, se puede obtener las ecuaciones cinemáticas de rotación del vehículo que establecen las relaciones entre las velocidades angulares.

donde la matriz antisimétrica $\mathbf{S}(\omega)$ se expresa como:

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

por tanto, la velocidad angular usando la notación de Euler está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

5.2.4. Ejes del Ala y de Estabilidad

En caso de que el eje B_x del marco del cuerpo cabecee con un ángulo de ataque α , el marco del eje del cuerpo se denomina eje de estabilidad. El marco de estabilidad genera las fuerzas aerodinámicas y reduce al modelo a su forma más simple.

Mientras que cuando el marco del cuerpo enfrente al viento, este generará un ángulo de deslizamiento entre la dirección proveniente del viento y el eje B_x del cuerpo, el cual se denota como β , mostrado en la Figura [5.3](#)

La definición de las velocidades de los ejes del cuerpo son:

$$\begin{aligned} u &= V \cos \alpha \cos \beta \\ v &= V \sin \beta \\ w &= V \sin \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (5.8)$$

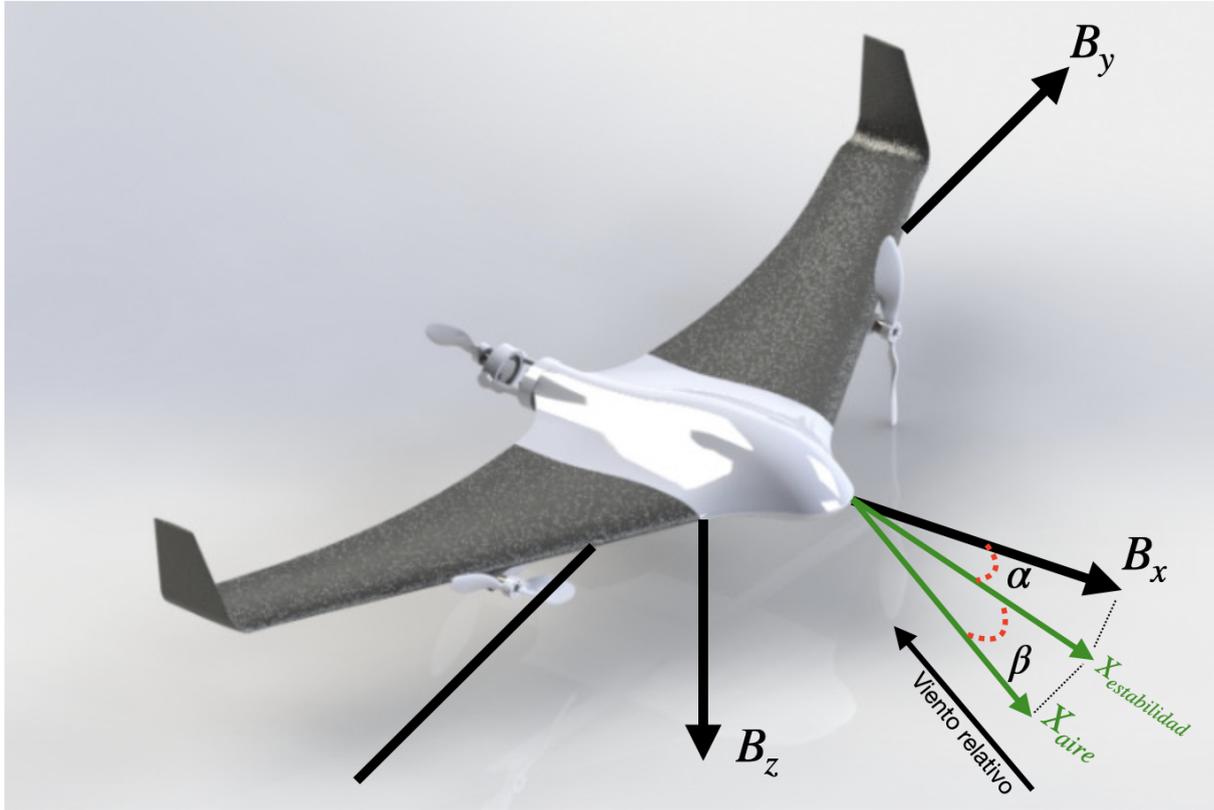


Figura 5.3: VTOL híbrido diseñado

La velocidad V , el ángulo de ataque α y el ángulo de deslizamiento β pueden ser expresados en términos de las velocidades de los ejes del cuerpo.

$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{w}{u} \quad (5.9)$$

$$\alpha = \sin \frac{v}{V}$$

5.3. Modelado Euler-Lagrange del VTOL

El sistema se modela considerando seis grados de libertad, el cual incluye tres componentes de posición inercial del centro de masa total del sistema, así como los tres ángulos de Euler para la rotación del mismo.

Aplicando la formulación de Euler-Lagrange, se obtienen las ecuaciones que modelan el movimiento total del sistema, en forma matricial:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = BF_m + C_i(\dot{q}) \quad (5.10)$$

donde: $M(q) \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de coriolis y centrífuga, $G(q) \in \mathfrak{R}^6$ es el vector de fuerzas gravitacionales, la matriz $B \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ se determina por $F_m \in \mathfrak{R}^6$, que es la entrada del sistema y $C_i(\dot{q})$ es el vector de fuerzas disipativas.

Por tanto, la parte dinámica del modelo se divide en dos conjuntos de ecuaciones, el primer conjunto de ecuaciones define la dinámica de traslación del sistema:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -mr & mq \\ mr & 0 & -mp \\ -mq & mp & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} = C_i + F_m \quad (5.11)$$

donde F_m es un vector el cual contiene las fuerzas de empuje generadas por los motores representadas como:

$$F_m = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

las cuales provienen de cada eje de desplazamiento con respecto a las direcciones del cuerpo, mientras que el vector C_i representa las reacciones aerodinámicas que son las que se oponen al movimiento, es decir las fuerzas disipativas generadas por el viento.

$$C_i = \begin{bmatrix} -D_u \\ Y \\ -L_w \end{bmatrix}$$

las cuales son las reacciones de arrastre, deslizamiento lateral y levante, respectivamente, los cuales se calculan utilizando (5.12-5.14).

$$D_u = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \quad (5.12)$$

$$Y = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_Y \quad (5.13)$$

$$C_w = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (5.14)$$

donde ρ es la densidad del aire, S es la superficie alar, V denota la velocidad de vuelo en línea recta y C_D , C_Y y C_L son los coeficientes aerodinámicos, estos coeficientes se obtuvieron del análisis realizado en (Gryte y cols., 2018), los cuales son en general no lineales debido a las superficies multidimensionales. Aun así, para simplificar el análisis, a menudo son parametrizados en términos más lineales. Estos coeficientes se denotan en las ecuaciones (5.15-5.17) como:

$$C_D(\alpha, q\delta_e) \approx C_{D_p} + \frac{C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha}{\pi eAR} + C_{D_q} \frac{c}{2V} q + C_{D_{\delta_e}} \delta_e \quad (5.15)$$

$$C_Y(\alpha, q\delta_e) \approx C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_p} \frac{b}{2V} p + C_{Y_r} \frac{b}{2V} r + C_{Y_{\delta_\alpha}} \delta_\alpha + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \quad (5.16)$$

$$C_L(\alpha, q\delta_e) \approx C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_q} \frac{c}{2V} q + C_{L_{\delta_e}} \delta_e \quad (5.17)$$

El segundo conjunto de ecuaciones muestra la dinámica rotacional del sistema.

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_{xz}q & -I_{yy}r & I_{zz}q \\ I_{yy}r + I_{xz}p & 0 & -I_{yy}r - I_{xz}p \\ -I_{xx}p & I_{yp} & I_{xz}q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

El vector columna que contiene a L_A , M_A y N_A , representa elementos de los momentos aerodinámicos y fuerzas de control. Este vector se descompone en lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix}$$

En el cual los coeficientes C_l , C_m , y C_n representan las reacciones aerodinámicas que producen fuerzas de rotación en cada eje del vehículo mostrados en las ecuaciones (5.19-5.21). Estos coeficientes de igual manera se obtuvieron a través de pruebas de túnel de viento y pueden ser encontrados en (Gryte y cols., 2018)

$$C_l(\beta, p, \delta_e, \delta_\alpha, \delta_r) \approx C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_p} \frac{b}{2V} p + C_{l_r} \frac{b}{2V} r + C_{l_{\delta_\alpha}} \delta_\alpha + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \quad (5.19)$$

$$C_m(\beta, p, \delta_e, \delta_\alpha, \delta_r) \approx C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} \frac{b}{2V} q + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \quad (5.20)$$

$$C_n(\beta, p, \delta_e, \delta_\alpha, \delta_r) \approx C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{b}{2V} p + C_{n_r} \frac{b}{2V} r + C_{n_{\delta_\alpha}} \delta_\alpha + C_{n_{\delta_r}} \delta_r \quad (5.21)$$

Mientras que el vector M_i representa los torques generados por los motores con respecto a las direcciones del cuerpo, representado como:

$$M_i = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Teniendo dichos parámetros descritos, es posible reescribir las ecuaciones (5.11) y (5.18) agrupándolas en una sola ecuación matricial de la forma (5.10), obteniendo así:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -mr & mq & 0 & 0 & 0 \\ mr & 0 & -mp & 0 & 0 & 0 \\ -mq & mp & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz}q & -I_y r & I_z q \\ 0 & 0 & 0 & I_y r + I_{xz}p & 0 & -I_z q - I_z p \\ 0 & 0 & 0 & -I_x q & I_y p & I_{xz}q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D_u \\ Y \\ -L_w \\ L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Las matrices se expresan a continuación:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -mr & mq & 0 & 0 & 0 \\ mr & 0 & -mp & 0 & 0 & 0 \\ -mq & mp & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{xz}q & -I_yr & I_zq \\ 0 & 0 & 0 & I_yr + I_{xz}p & 0 & -I_zq - I_zp \\ 0 & 0 & 0 & -I_xq & I_yp & I_{xz}q \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_i(\dot{q}) = \begin{bmatrix} -D_u \\ Y \\ -L_w \\ L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix}$$

$$F_m = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

5.3.1. Cálculo de las fuerzas y momentos producidos por los motores.

El modelo matemático definido por la ecuación (5.22) está sujeto a las siguientes suposiciones que simplifican el modelo.

1. La tierra se encuentra rotando sobre un eje fijo en el espacio inercial.
2. La aceleración centrípeta asociada con la rotación de la tierra no se toma en cuenta.
3. Las condiciones atmosféricas son ideales y no se consideran en el modelo.
4. El viento se considera como una perturbación.
5. El vehículo se modela como una aeronave rígida.

Estas suposiciones se hacen para simplificar el modelado y poder representar el comportamiento dinámico del mismo. Se puede omitir cualquiera de estas suposiciones según se requiera.

Los componentes de la fuerza aerodinámica y el momento generado por los rotores en X , Y y direcciones del cuerpo Z , se modelaron tomando como referencia la Figura 5.4.

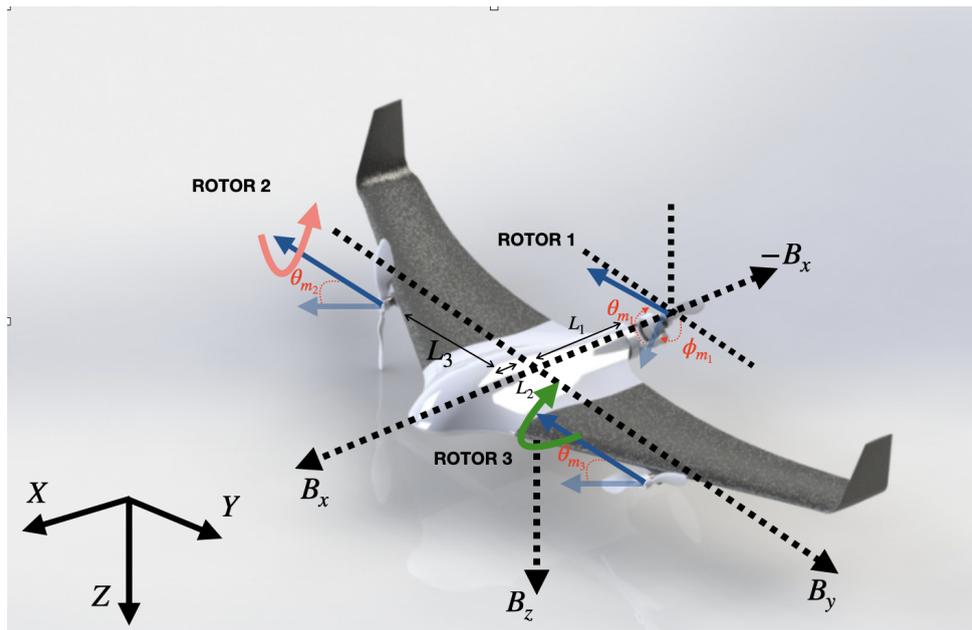


Figura 5.4: Diagrama de cuerpo libre

Como se mencionó previamente, este vehículo tiene 3 rotores con la capacidad de inclinarse y descomponer su fuerza de empuje en mas de un eje coordenado, observando la Figura 5.5 y la Figura 5.6 los rotores 2 y 3 tienen un grado de libertad respectivamente, mientras que el rotor 1 como se muestra en la Figura 5.7 cuenta con 2 grados de libertad.

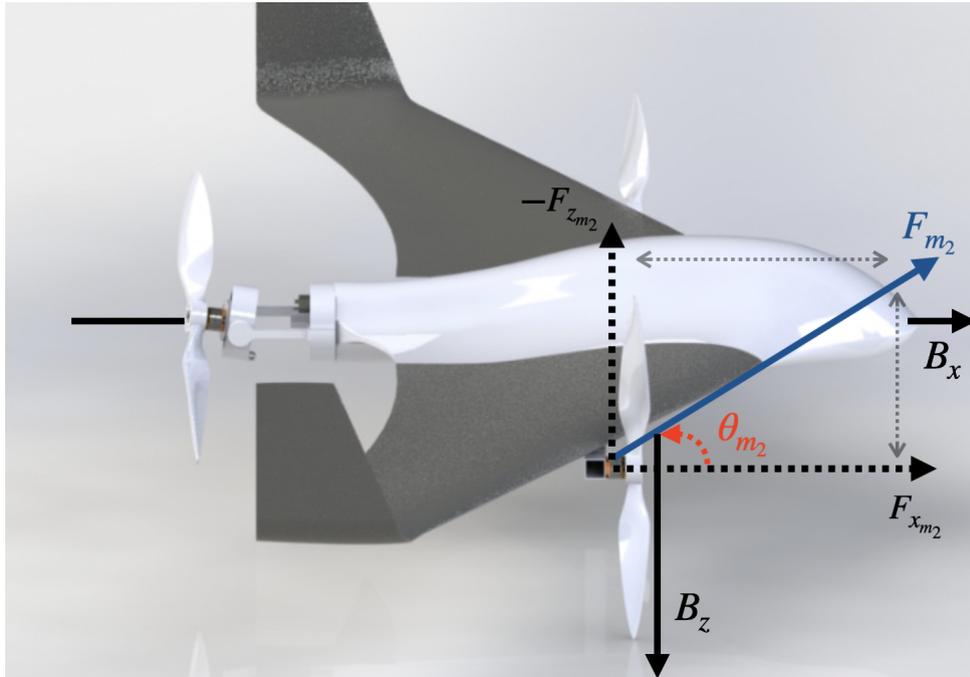


Figura 5.5: Descomposición de fuerzas del motor 2

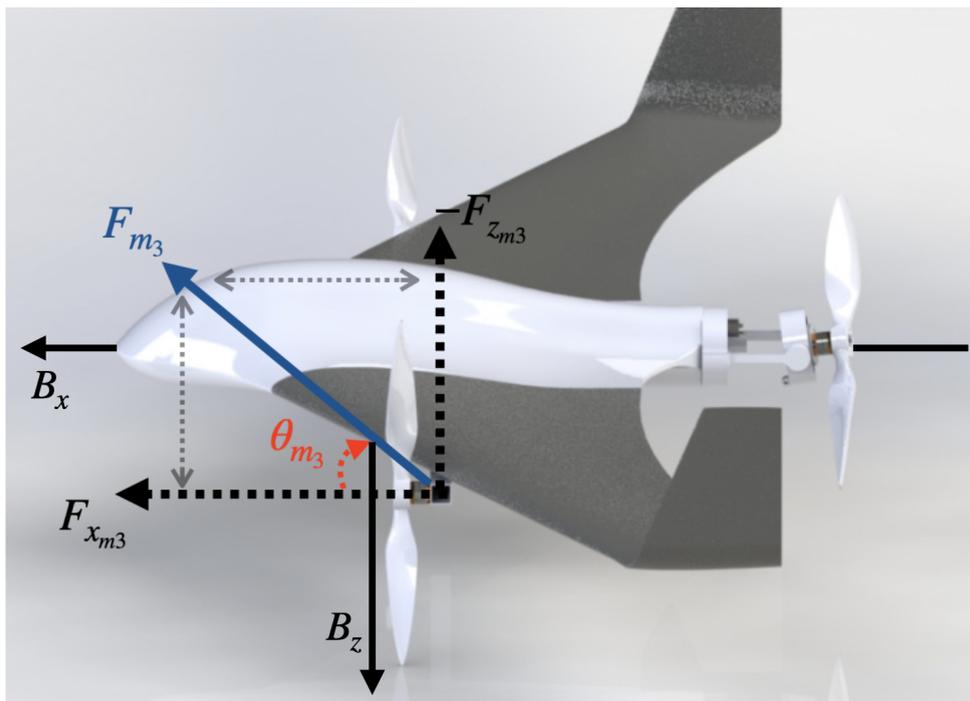


Figura 5.6: Descomposición de fuerzas del motor 3

Observando la Figura [5.7](#) se puede apreciar la dirección de la fuerza generada por el motor trasero, el cual a diferencia de los frontales, cambia su orientación debido a la posición en la que se encuentra, esto se puede

apreciar a través de los vectores mostrados en la imagen, ya que la dirección real del vehículo producirá una fuerza en la dirección contraria con ángulos opuestos por el vértice.

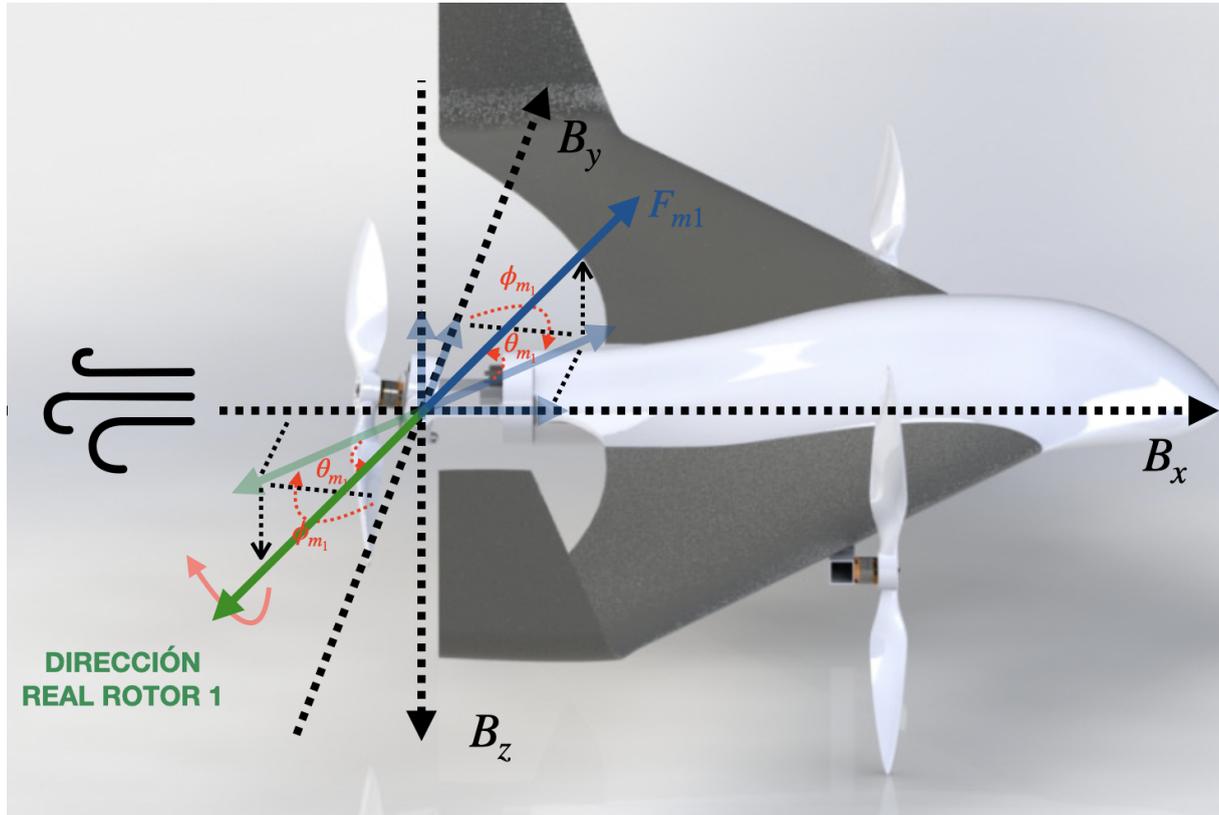


Figura 5.7: Descomposición de fuerzas del vector del motor 1

De igual forma, suponiendo que el cambio de altitud es limitado y, por lo tanto, la densidad del aire es constante, la fuerza aerodinámica y el momento producidos por el i -ésimo rotor representado, usando las constantes de fuerza aerodinámica y momento tomadas de (Prach y Kayacan, 2018), están representadas por:

$$F_{mi} = K_F \Omega_i^2$$

$$M_{mi} = K_M \Omega_i^2$$

donde K_F y K_M son la constante de fuerza aerodinámica y momento, respectivamente, y Ω_i^2 representa la velocidad angular de cada motor.

Por tanto, realizando el análisis trigonométrico, las fuerzas resultantes para cada eje toman la forma que se muestran a continuación:

$$F_x = K_F \Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \sin \phi_{m1} + K_F \Omega_2^2 \cos \theta_{m2} + K_F \Omega_3^2 \cos \theta_{m3}$$

$$F_y = K_F \Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \cos \phi_{m1} \quad (5.23)$$

$$F_z = -(K_F \Omega_1^2 \sin \theta_{m1} + K_F \Omega_2^2 \sin \theta_{m2} + K_F \Omega_3^2 \sin \theta_{m3})$$

Por lo que, considerando que los rotores 1 y 3 giran en el sentido de las manecillas del reloj y que el rotor 2 gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj, así como los sentidos de rotación de cada eje, mostrados en la Figura 5.8 los momentos aerodinámicos están dados por las siguientes ecuaciones:

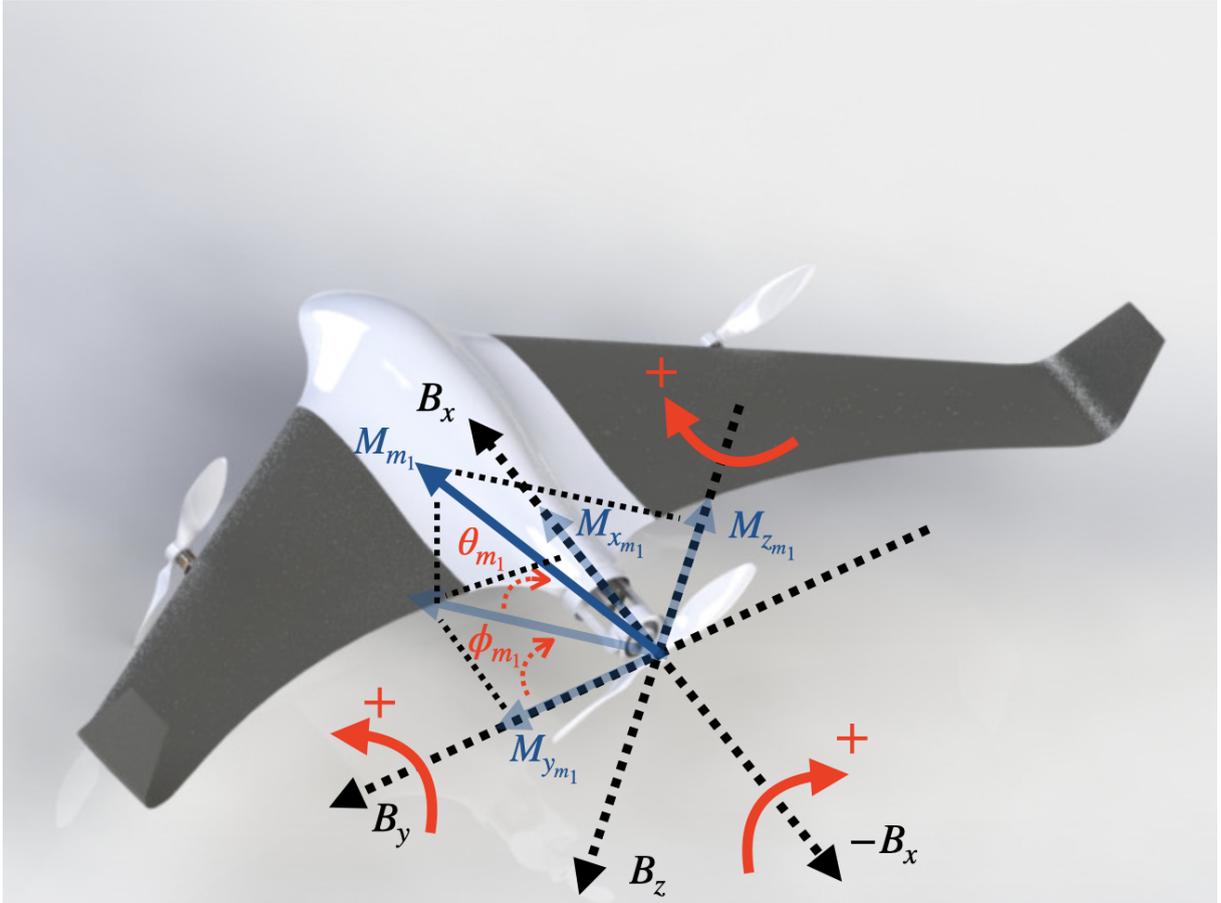


Figura 5.8: Dirección de los momentos del VTOL producidos por el vector de empuje

$$M_x = L_3(K_F \Omega_2^2 \sin \theta_{m2} - K_F \Omega_3^2 \sin \theta_{m3}) - K_M \Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \sin \phi_{m1}$$

$$M_y = L_2(K_F\Omega_2^2 \sin \theta_{m2} + K_F\Omega_3^2 \sin \theta_{m3}) - L_1(K_F\Omega_1^2 \sin \theta_{m1} + K_M\Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \cos \phi_{m1}) \quad (5.24)$$

$$M_z = L_3(K_F\Omega_2^2 \cos \theta_{m2} - K_F\Omega_3^2 \cos \theta_{m3}) + K_M\Omega_1^2 \sin \theta_{m1} - K_M\Omega_3^2 \sin \theta_{m3} + K_M\Omega_2^2 \sin \theta_{m2} + L1(K_F\Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \cos \phi_{m1})$$

5.4. Conclusión

Esta sección introdujo el diseño de un modelo dinámico basado en el formalismo de Euler-Lagrange, usando como referencia para los coeficientes alares e inerciales el modelo matemático presentado en (Gryte y cols., 2018) y tomando como referencia la distribución de los motores del modelo de un tricóptero, el cual es desarrollado en (Prach y Kayacan, 2018)



Figura 5.9: Vector de empuje diseñado para el VTOL

El modelo matemático propuesto introdujo el diseño de un modelo dinámico basado en el formalismo de Euler-Lagrange, se diseñó agregando un grado de libertad a los dos motores frontales, dotándolos de la capacidad de ser batientes, permitiendo generar fuerzas de empuje tanto en el eje

z como en el eje x, de igual manera se le dotó de un vector de empuje para el motor trasero del VTOL, siendo estas modificaciones las representadas en la Figura 5.9, por tanto, el modelo toma en cuenta la interacción entre la dinámica del vehículo, el vector de empuje y los dos motores batientes, generando un nuevo modelo matemático completamente distinto a los mencionados anteriormente.

Pasividad y Moldeo de energía

6.1. Introducción

La pasividad es una propiedad que presentan la mayoría de los sistemas dinámicos. En términos de energía, un sistema pasivo es aquel cuya energía total almacenada no es mayor que la energía que se le suministra. La diferencia entre estas energías es la energía disipada. Además, si la energía total almacenada se puede representar como una función de almacenamiento que sea candidata a una función de Lyapunov, entonces, con base en esta función, se puede analizar la estabilidad de los sistemas pasivos.

Se introdujo el término control basado en pasividad en (Ortega y Spong, 1989) para definir una metodología de diseño de un controlador que logre la estabilidad por pasivación. Más precisamente, el objetivo del control es pasivizar el sistema con una función de almacenamiento que tiene un mínimo en el punto de equilibrio deseado. (Un segundo requisito que asegura la estabilidad asintótica es la detectabilidad de la salida pasiva). (Blankenstein, 2000)

La idea ha tenido mucho éxito para los sistemas mecánicos simples que pueden estabilizarse dando forma solo a la energía potencial. (Ortega, van der Schaft, y cols., 2002)

Se propone un sistema con entrada $u \in \mathfrak{R}^n$ y salida $y \in \mathfrak{R}^n$ que satisfice la Ecuación de Balance de Energía (6.1).

$$H[x(t)] - H[x(0)] = \int_0^t u^T(s)y(s)ds - d(t) \quad (6.1)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados, $H(x)$ es la función de energía total y $d(t)$ es una función no negativa que captura los efectos disipativos.

El punto donde la energía de lazo abierto es mínima, no es usualmente de interés práctico, y el control se introduce para operar al sistema alrededor de un punto de equilibrio diferente de cero, llamado x_* . En la formulación del PBC, el problema de la estabilización toma el siguiente camino.

Se selecciona una acción de control $u = \rho(x) + v$, tal que la dinámica en lazo cerrado satisfaga la nueva ecuación de balance de energía.

$$H_d[x(t)] - H_d[x(0)] = \int_0^t v^T(s)z(s)ds - d_d(t) \quad (6.2)$$

donde $H_d(x)$ es la función de energía total deseada, la cual tiene un mínimo en x_* , z es la nueva salida pasiva y $d_d(t)$ es el término de amortiguamiento deseado. El moldeo de la energía se refiere a asignar una función de energía con un mínimo en los valores deseados, mientras que la inyección de amortiguamiento es la modificación de $d_d(t)$.

Para los sistemas mecánicos el problema se reduce a encontrar una función $\rho(x)$, tal que la energía suministrada por el controlador pueda expresarse como una función del estado. De la ecuación (6.1) se puede obtener una función $\rho(x)$ tal que:

$$-\int_0^T \rho^T[x(s)]y(s)ds = H_a[x(t)] + k \quad (6.3)$$

para alguna función $H_a(x)$ y alguna constante k , entonces la ley de control $u = \rho(x) + v$ asegurará que la salida y sea pasiva con una nueva función de energía.

$$H_d(x, \dot{x}) = H(x, \dot{x}) + H_a(x) \quad (6.4)$$

Si además $H_d(x)$ tiene un mínimo en el punto de equilibrio deseado x_* entonces será estable. Note que la energía del lazo cerrado es igual a la diferencia entre las energías almacenada y suministrada.

6.2. Estabilidad

En la literatura existen numerosos estudios sobre la estabilidad, siendo la más conocida, la teoría de estabilidad planteada por el matemático Aleksandr Mijáilovich Lyapunov, esta teoría tiene como principal objetivo estudiar la evolución del comportamiento a través del tiempo de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales tal que:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) \in \mathfrak{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (6.5)$$

en el cual el vector $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ representa a los estados del sistema dinámico presentado y $x(0) \in \mathfrak{R}^n$ es llamada la condición inicial, mientras que la función $f(x(t))$ es una función continua en t y $x(t)$, debe ser tal que:

- La ecuación (6.5) tiene una solución única en el intervalo inicial $[0, \infty]$, correspondiente a cada condición inicial de $x(0)$.
- Si $x(t)$ es la solución del sistema diferencial correspondiente a la condición inicial $x(0)$, entonces $x(t)$ depende de una manera continua del estado inicial $x(0)$.

Si la función $f(x(t))$ no depende explícitamente del tiempo, matemáticamente expresado como:

$$f(t, x(t)) = f(x(t)) \quad (6.6)$$

la ecuación se denomina autónoma.

Por otro lado si:

$$f(t, x(t)) = A(t)x(t) + u(t) \quad (6.7)$$

con $A(t)$ una matriz cuadrada de dimensión n y siendo $A(t)$ y $u(t)$ funciones únicamente de t o constantes, entonces (6.5) es lineal, en caso de no ser así, se considera no lineal.

Los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov son: equilibrio, estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial. Mismos que serán desarrollados a continuación.

- **Equilibrio:** Un vector constante de $x_e \in \mathfrak{R}^n$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema si (6.5):

$$f(t, x_e) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (6.8)$$

como consecuencias inmediatas de la definición inicial $x(0) \in \mathfrak{R}^n$ es justamente un equilibrio $x(0) = x_e \in \mathfrak{R}^n$ entonces se satisface:

$$x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0$$

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

- **Estabilidad:** El origen $x(t) = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es un equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de (6.5) si para cada número $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (6.9)$$

En esta definición la constante $\delta (\leq \epsilon)$ no es única. Si existe una constante δ que satisfaga la condición de la definición, entonces cualquier $a\delta$ con $a \leq 1$ también la satisface.

- **Estabilidad asintótica:** El origen $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable de (6.5) si:

El origen es estable.

El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \quad (6.10)$$

- **Estabilidad asintótica global:**

El origen de $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global de (6.5) si:

El origen es estable.

El origen es atractivo globalmente, es decir:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad \forall x(0) \in \mathfrak{R}^n \quad (6.11)$$

De esta definición es posible deducir que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es asintóticamente estable, de lo contrario es falso.

■ **Estabilidad exponencial global:**

El origen $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es un equilibrio exponencialmente estable en forma global de (6.5) si existen constantes positivas α y β tales que:

$$\|x(0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| < e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \forall x(0) \in \mathfrak{R}^n \quad (6.12)$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, un equilibrio exponencialmente estable en forma global es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

■ **Inestabilidad:**

El origen $x = 0 \in \mathfrak{R}^n$ es un equilibrio inestable de (6.5) si este no es estable. El concepto de equilibrio (origen) inestable es equivalente a anunciar que existe al menos un $\epsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\delta > 0$, tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (6.13)$$

Si existe al menos un $\epsilon > 0$, el cual se desea que acote la norma de solución $\|x(t)\|$ y no existe ninguna condición inicial $x(0) \neq 0 \in \mathfrak{R}^n$ cuya solución $x(t)$ lo satisfaga ($\|x(0)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$), entonces el origen es inestable.

■ **Definición 7:** Sea $H : D \rightarrow \mathfrak{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathfrak{R}^n$ que contiene a x^* entonces:

- $H(x)$ es una función definida positiva si $H(x^*) = 0$ y $H(x) > 0$ en $D - x^*$.
- $H(x)$ es una función semidefinida positiva si $H(x^*) = 0$ y $H(x) \geq 0$ en D .
- $H(x)$ es una función definida negativa si $-H(x^*)$ es definida positiva.
- $H(x)$ es una función semidefinida negativa si $-H(x^*)$ es semidefinida positiva.

- **Definición 8:** Una función $H(x)$ definida positiva con $\dot{H}(x)$ semidefinida negativa se llama función de Lyapunov para x^* , si además cumple que $\dot{H}(x)$ es definida negativa, se llama función de Lyapunov estricta con relación a x^* .

Para estudiar la estabilidad de los sistemas no lineales de una determinada región a partir de las funciones de Lyapunov, se tiene el teorema siguiente, comúnmente llamado como el método directo de Lyapunov.

Teorema 1: Si existe una función $H(x)$ para un punto de equilibrio x^* estable. Además si esta función es Lyapunov estricta, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable. (Cousin y cols., 2022)

Si el sistema (6.5) define un operador pasivo de la forma $\Sigma : u \rightarrow y$ con una función de almacenamiento $H(x)$, la cual es acotada por abajo entonces el controlador:

$$u = -\theta(y) \tag{6.14}$$

con $\theta(0) = 0$ y $y = \theta(y) > 0$ para todo $y \neq 0$, estabiliza asintóticamente el origen $x = 0$, más allá si la función de energía $H(x)$ es propia, entonces el origen es asintóticamente estable de forma global.

La propiedad de pasividad es definida como aquel sistema en el que el rango de incremento de almacenaje no es mayor a la tasa de suministro de energía. Esto quiere decir que cualquier incremento en el almacenaje en un sistema pasivo es debido solo a fuentes externas. La relación entre pasividad y estabilidad de Lyapunov puede establecerse empleando la función de almacenamiento $V(x)$ como una función de Lyapunov. La estabilidad en los sistemas pasivos esta ligada a las entradas o salidas acotadas. (Cousin y cols., 2022)

Teorema 2:

1. Si el sistema es pasivo con una función de almacenamiento $V(x)$ definida positiva, entonces el origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es estable.
2. Si el sistema es estrictamente pasivo en la salida, entonces \mathcal{L}_2 estable con ganancia finita.

3. Si el sistema es estrictamente pasivo en la salida con una función de almacenamiento $V(x)$ definida positiva, y observable al estado cero, entonces el origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es asintóticamente estable.
4. Si el sistema es pasivo estricto de estado con una función de almacenamiento $V(x)$ definida positiva, entonces el origen de $\dot{x} = f(x, 0)$ es asintóticamente estable.

6.3. Control PBC

Se toma el modelo matemático del capítulo 5 desarrollado en la ecuación (5.22) como un sistema totalmente actuado, para facilitar el diseño del controlador basado en pasividad, por lo tanto, se procede con el diseño del controlador, tomando la metodología mostrada en (Guerrero-Sanchez y cols., 2017). La energía total del sistema se define como:

$$H(\zeta, \dot{\zeta}) = \frac{1}{2}q^T M(q)q + V(q) \quad (6.15)$$

siendo $M(q)$ la matriz de inercias del sistema, mientras que $V(q)$ representa la energía potencial.

$$V(q) = mgz \quad (6.16)$$

En la estrategia de control basado en pasividad, la entrada de control δ se descompone en dos términos, siendo el primero el moldeo de energía comúnmente llamado δ_{es} , el segundo término representa la inyección de amortiguamiento, δ_{di} .

$$\delta = \delta_{es} + \delta_{di} \quad (6.17)$$

es necesaria una δ_{es} tal que:

$$-\int_0^T \delta_{es}^T[x(t)]y(t)dt = H_a[x(t)] + k \quad (6.18)$$

Para toda $H_a(x)$ y una constante k , de esta forma el término de moldeo energético δ_{es} asegurará que para toda entrada δ_{es} habrá una salida y única que sea pasiva, expresada matemáticamente como $\delta_{es} \rightarrow y$ con la siguiente forma para la función de energía deseada.

$$H_d(x, \dot{x}) = H(x, \dot{x}) + H_a(x) \quad (6.19)$$

donde $H_a(x)$ representa la energía suministrada por el controlador. Por lo que se requiere que la función H_d tenga un mínimo aislado llamado x_* , es decir:

$$x_* = \arg \min H_d(x, \dot{x}) \quad (6.20)$$

Siendo las salidas pasivas del sistema las velocidades generalizadas $y = \dot{x}$. Por tanto, el moldeo de energía queda expresado de la siguiente manera:

$$\delta_{es} = \nabla_x H(x, \dot{x}) - K_p(x - x_*) \quad (6.21)$$

Por lo que δ_{es} estabiliza x_* con la función de Lyapunov de la diferencia entre la energía potencial almacenada y la suministrada. $\nabla_x H(x, \dot{x})$ es utilizada para representar la diferencia parcial $\frac{\partial H(x, \dot{x})}{\partial x}$, siendo x el vector de estados del sistema.

Sustituyendo (6.21) y las salidas pasivas $y = \dot{x}$ en (6.18), resulta:

$$H_a = - \int_0^t [\nabla_x H(x, \dot{x}) - K_p(x - x_*)] \dot{x} dt \quad (6.22)$$

Operando las ecuaciones se obtiene:

$$H_a(x) = -V(x) + \frac{1}{2}(x - x_*)K_p(x - x_*) \quad (6.23)$$

Siendo $K_p = K_p > 0$ los parámetros de diseño del controlador, o sea las ganancias de este. Sustituyendo (6.15) y (6.22) en (6.19) se obtiene:

$$H_d(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^T M(x)\dot{x} + \frac{1}{2}(x - x_*)K_p(x - x_*) \quad (6.24)$$

Por lo que el controlador se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\delta_{es} = \nabla_x H(x, \dot{x}) - \nabla_x H_d(x, \dot{x}) \quad (6.25)$$

Resolviendo obtenemos:

$$\delta_{es} = \nabla_x V(x) - K_p(x - x_*) \quad (6.26)$$

Mientras que el término de inyección de amortiguamiento está dado por:

$$\delta_{di} = -K_v \dot{x} \quad (6.27)$$

donde $K_v = K_v^T > 0$ contiene los parámetros de diseño del controlador, es decir, las ganancias. Por tanto, aplicando la metodología al sistema, el vector de estados representado por $\zeta = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$, la matriz de inercias $M(\zeta)$ y la función de energía potencial $V(q) = mgz$ son utilizadas. Con el método previamente descrito se desarrolla el control.

Para el término δ_{es} , se define la energía total del sistema:

$$H(\zeta, \dot{\zeta}) = \frac{1}{2} \dot{\zeta}^T M(\zeta) \dot{\zeta} + V(\zeta) \quad (6.28)$$

Reemplazando los valores de la energía potencial en (6.26) resulta:

$$\delta_{es} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - K_p \begin{bmatrix} x - x_* \\ y - y_* \\ z - z_* \\ \phi - \phi_* \\ \theta - \theta_* \\ \psi - \psi_* \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Para la inyección de amortiguamiento se tiene:

$$\delta_{di} = -K_v \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

La entrada completa del controlador se obtiene al sustituir (6.29) y (6.30) en (6.17)

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - K_p \begin{bmatrix} x - x_* \\ y - y_* \\ z - z_* \\ \phi - \phi_* \\ \theta - \theta_* \\ \psi - \psi_* \end{bmatrix} - K_v \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Las ganancias del controlador K_p y K_v se pueden obtener a través de diferentes procesos de optimización.

El controlador obtenido en la ecuación (6.31) entrega 6 entradas virtuales definidas como:

$$\delta = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Pero el sistema real cuenta con 7 entradas reales, para poder transformar estas entradas virtuales se requiere realizar un algoritmo de asignación de control, el cual se detalla en la siguiente sección.

6.3.1. Algoritmo de asignación de control

El esquema de control propuesto para un Vtol híbrido tiene una estructura basada en el controlador PBC, el cual supone que el sistema es completamente actuado.

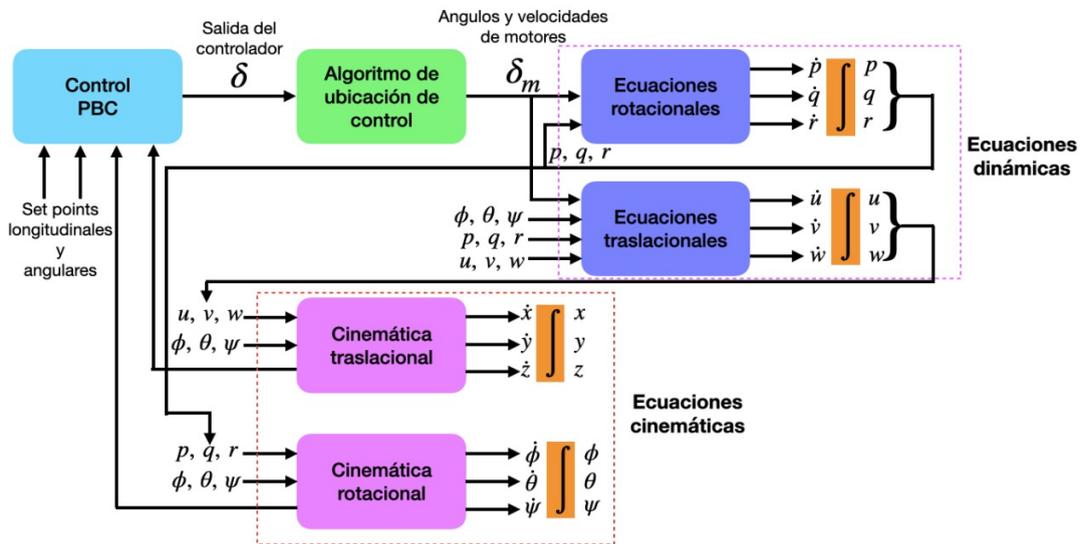


Figura 6.1: Diagrama de bloques del controlador

Debido a que el control PBC en realidad lo proporcionan las entradas manipuladas al Vtol, las cuales son las RPM de los 3 rotores $\Omega_{m1}, \Omega_{m2}, \Omega_{m3}$ y los ángulos de inclinación $\theta_{m1}, \theta_{m2}, \theta_{m3}, \phi_{m1}$, es necesario implementar un algoritmo de asignación de control que representa la relación entre la entrada convencional δ y la entrada manipulada δ_m . El diagrama de la

arquitectura del controlador propuesta se muestra en la Figura [6.1](#).

Considerando la estructura de las fuerzas y momentos aerodinámicos en la dinámica de traslación y rotación, el vector de las entradas de control convencionales δ se define de la siguiente manera:

$$\delta = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

La entrada colectiva F_z está directamente relacionada con el control de altitud, las entradas de los torques M_y y M_x se utilizan para el control de cabeceo y balanceo, que proporcionan los puntos de ajuste para el control de la posición angular, mientras que la entrada M_z está directamente relacionada con el control del movimiento de guiñada, finalmente, F_x y F_y sirven para controlar las posiciones longitudinales deseadas.

Por tanto, para un Vtol híbrido, sea δ_m el vector de entradas manipuladas definido por:

$$\delta_m = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \theta_{m1} \\ \phi_{m1} \\ \theta_{m2} \\ \theta_{m2} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

En el cual Ω_m^2 representa las velocidades angulares de cada motor, mientras que θ_{mi} representa las posiciones angulares alrededor del eje y con respecto al cuerpo del Vtol de cada uno de los motores y a su vez ϕ_{m1} la rotación con respecto al eje del cuerpo z del vector de empuje.

Es posible encontrar una entrada intermedia que nos permita calcular nuestra entrada manipulada, para esto haremos uso de entidades trigonométricas a partir de la representación de cuerpo libre mostrada en la Figura [6.2](#).

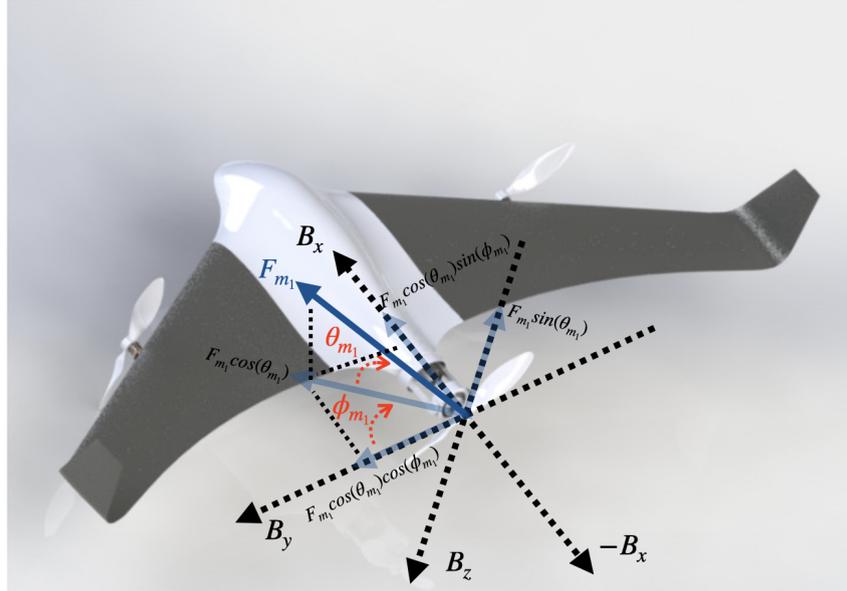


Figura 6.2: Diagrama de cuerpo libre para la entrada intermedia

de igual manera, se analiza la descomposición de fuerzas para los motores frontales como se muestra en la Figura 6.3, cabe recalcar que ambos motores pueden moverse de manera independiente sin tener que compartir el mismo ángulo de inclinación, por lo que únicamente comparten la referencia con la que se mide el ángulo.

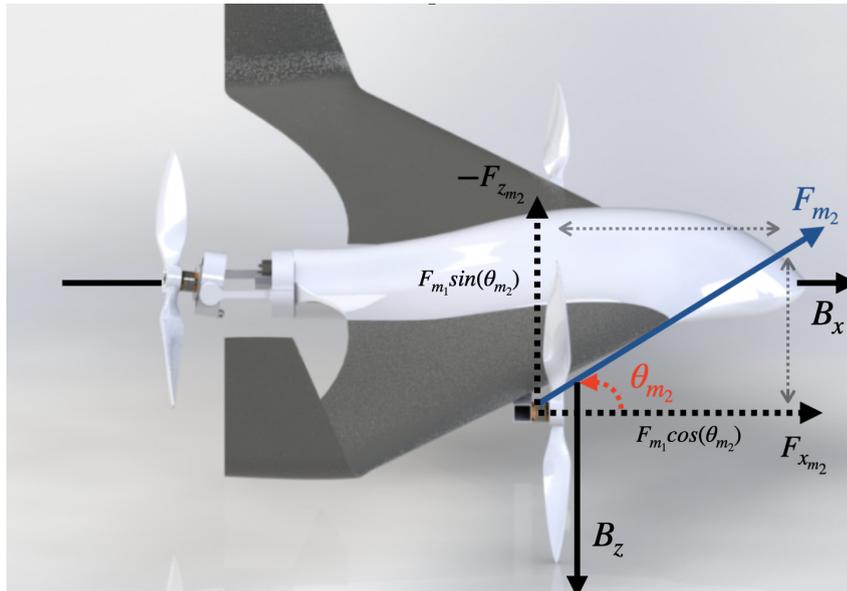


Figura 6.3: Diagrama de cuerpo libre de motores frontales para la entrada intermedia

Por tanto, sea u una entrada de control intermedia dada por:

$$u = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \sin \theta_{m1} \\ \Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \cos \phi_{m1} \\ \Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \sin \phi_{m1} \\ \Omega_2^2 \sin \theta_{m2} \\ \Omega_2^2 \cos \theta_{m1} \\ \Omega_3^2 \sin \theta_{m3} \\ \Omega_3^2 \cos \theta_{m3} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

La relación entre (6.33) y (6.35) es proporcionada por la matriz de mezcla M de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_F & 0 & K_F & 0 & K_F \\ 0 & K_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_F & 0 & 0 & -K_F & 0 & -K_F & 0 \\ 0 & 0 & K_M & L_3 K_F & 0 & -L_3 K_F & 0 \\ -L_1 K_F & -L_1 K_M & 0 & L_2 K_F & 0 & L_2 K_F & 0 \\ K_M & +L_1 K_F & 0 & K_M & L_3 K_F & -K_M & -L_3 K_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \sin \theta_{m1} \\ \Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \cos \phi_{m1} \\ \Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \sin \phi_{m1} \\ \Omega_2^2 \sin \theta_{m2} \\ \Omega_2^2 \cos \theta_{m1} \\ \Omega_3^2 \sin \theta_{m3} \\ \Omega_3^2 \cos \theta_{m3} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Una condición importante para implementar un algoritmo de asignación de control es la invertibilidad de la matriz de mezcla (6.36).

Finalmente, los componentes de la entrada de control manipulada (6.34) se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$\theta_{m1} = \arctan \frac{\Omega_1^2 \sin \theta_{m1}}{\Omega_1^2 \cos \theta_{m1}} \quad (6.37)$$

$$\phi_{m1} = \arctan \frac{\Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \sin \phi_{m1}}{\Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \cos \phi_{m1}} \quad (6.38)$$

$$\theta_{m2} = \arctan \frac{\Omega_2^2 \sin \theta_{m2}}{\Omega_2^2 \cos \theta_{m2}} \quad (6.39)$$

$$\theta_{m3} = \arctan \frac{\Omega_3^2 \sin \theta_{m3}}{\Omega_3^2 \cos \theta_{m3}} \quad (6.40)$$

$$\Omega_1^2 \cos \theta_{m1} = \sqrt{(\Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \cos \phi_{m1})^2 + (\Omega_1^2 \cos \theta_{m1} \sin \phi_{m1})^2} \quad (6.41)$$

$$\Omega_1^2 = \sqrt{(\Omega_1^2 \cos \theta_{m1})^2 + (\Omega_1^2 \sin \theta_{m1})^2} \quad (6.42)$$

$$\Omega_2^2 = \sqrt{(\Omega_2^2 \cos \theta_{m2})^2 + (\Omega_2^2 \sin \theta_{m2})^2} \quad (6.43)$$

$$\Omega_3^2 = \sqrt{(\Omega_3^2 \cos \theta_{m3})^2 + (\Omega_3^2 \sin \theta_{m3})^2} \quad (6.44)$$

Por lo que las ecuaciones (6.37-6.44) resultan de realizar los despejes trigonométricos de las descomposiciones de fuerzas en los que fueron modelados cada uno de los motores y el vector de empuje, por lo que en la Figura 6.4 es posible observar las direcciones reales de cada motor.

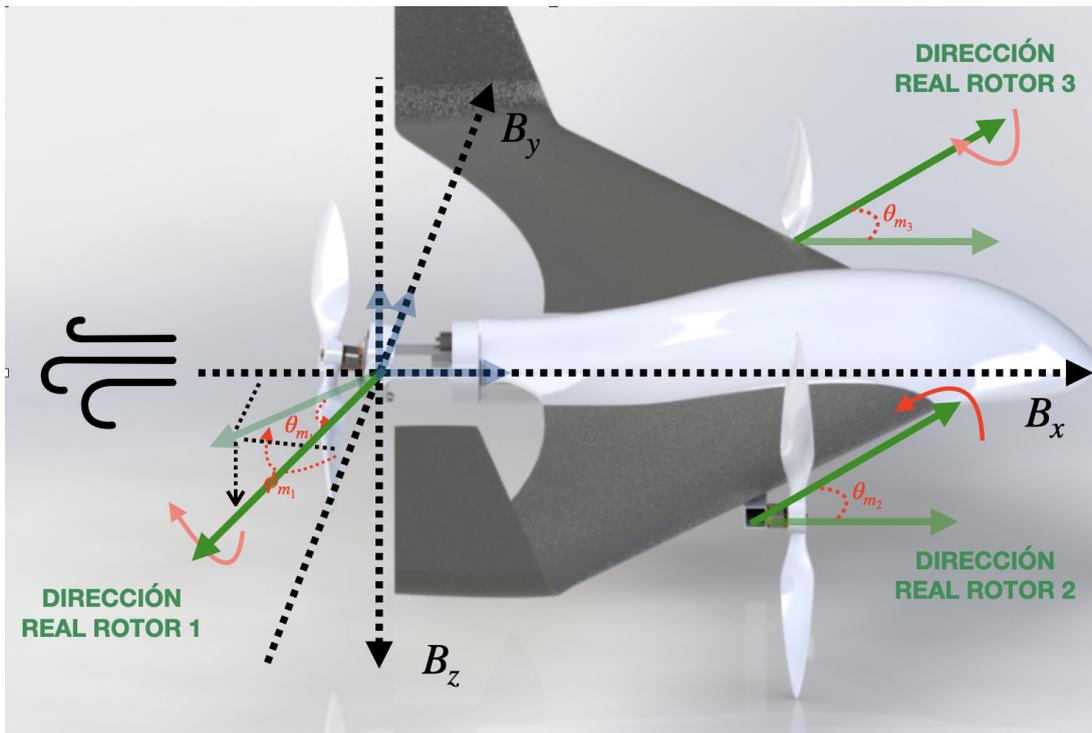


Figura 6.4: Posiciones angulares de cada motor

6.3.2. Resultados de simulación del Control PBC

Trayectoria en espiral ascendente para el modelo del Vtol híbrido

Se procedió a simular el modelo matemático en conjunto con la estrategia de control PBC y el algoritmo de asignación de control, en la que se sintonizaron los parámetros de calibración de manera manual, para la correcta ejecución de la trayectoria mostrada en la Figura [6.5](#)

Las condiciones iniciales del sistema son $x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$. El objetivo de la simulación fue desplazar el Vtol híbrido en una espiral ascendente. Se observa la línea punteada en color rojo, siendo esta la trayectoria deseada propuesta, mientras que la línea azul punteada representa la trayectoria recorrida por el Vtol híbrido.

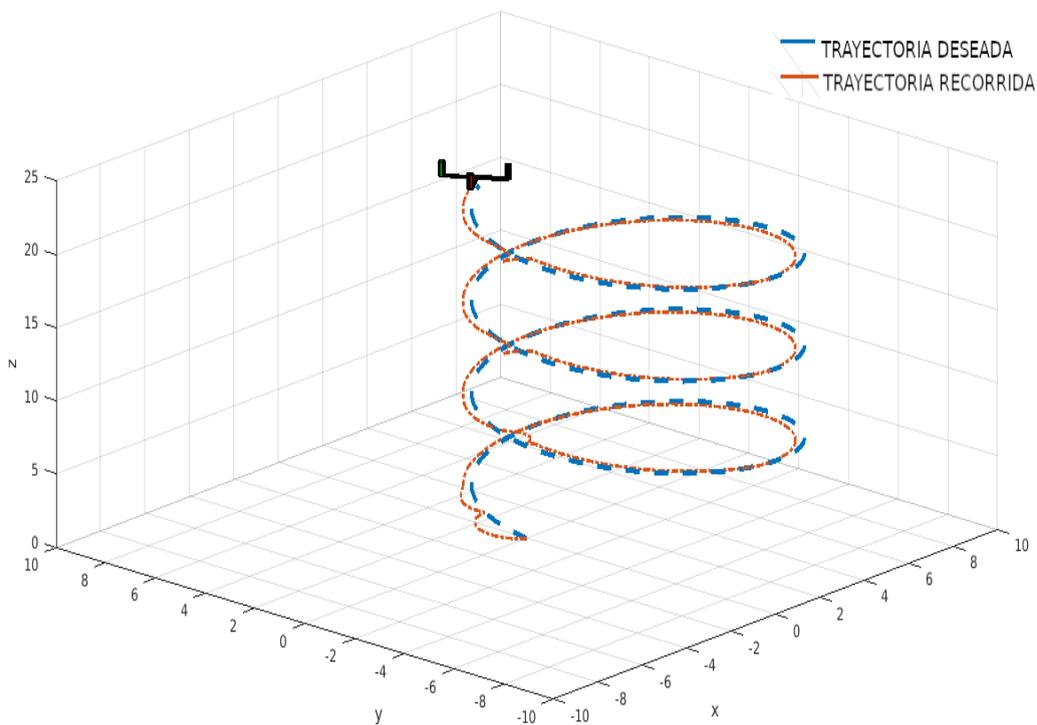


Figura 6.5: Trayectoria generada para el Vtol y la recorrida

En la Figura [6.6](#) se pueden apreciar las gráficas correspondientes a las posiciones traslacionales que fueron alcanzadas por el Vtol híbrido, para poder llegar a las coordenadas requeridas por la trayectoria propuesta,

siendo comparadas con la trayectoria deseada mostrada por la línea roja punteada.

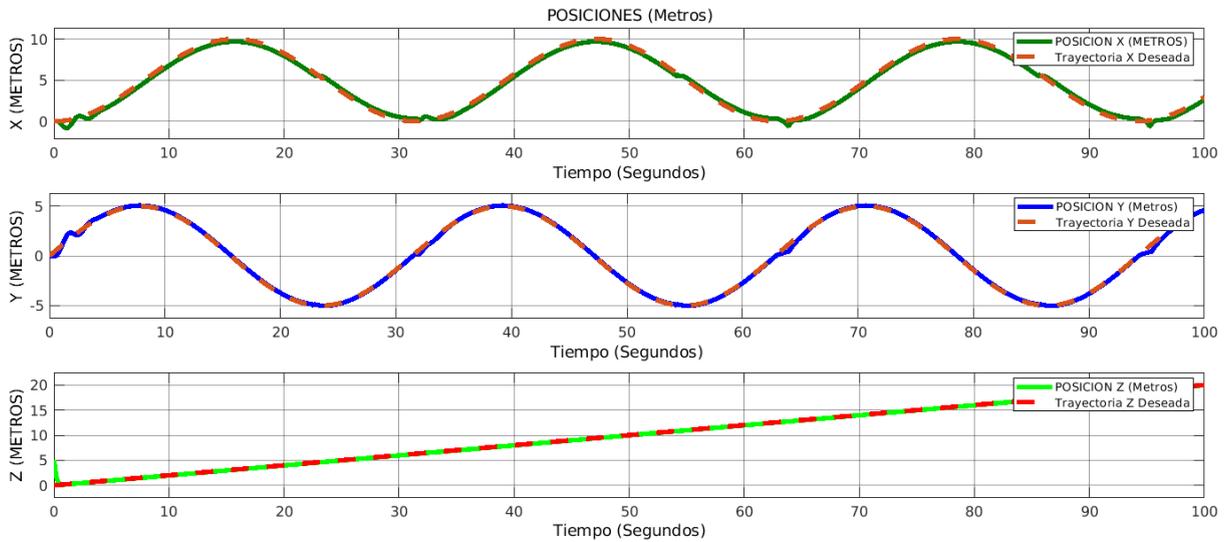


Figura 6.6: Gráfica de las posiciones longitudinales recorridas

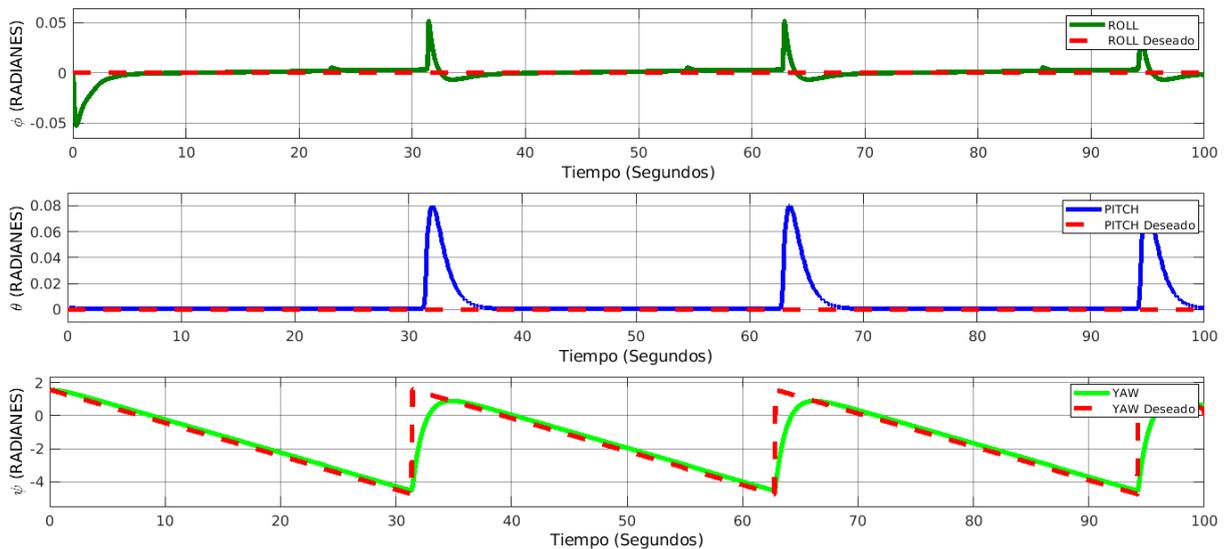


Figura 6.7: Gráfica de las posiciones angulares

Mientras que en la Figura [6.7](#) se puede observar como el Vtol híbrido se mantiene en las posiciones angulares deseadas, siendo estas $\phi = 0$ y $\theta = 0$ ya que representan el alabeo y el cabeceo respectivamente, puesto que una aeronave si quiere mantener el rumbo y que sus parámetros aerodinámicos se mantengan estables, la aeronave debe estar alineada con las direcciones de viento.

Trayectoria en forma de lemniscata el modelo del Vtol híbrido

De igual manera se realizó otra prueba al simular el modelo matemático del Vtol en conjunto con la estrategia de control PBC, en la se propuso una trayectoria en forma de lemniscata, para poder observar su respuesta.

Para la simulación que se muestra en la Figura [6.8](#), las condiciones iniciales fueron $x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0$ m, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$ y $\psi = 0^\circ$. El objetivo de la simulación fue desplazar el Vtol híbrido en dicha trayectoria. Se observa la línea punteada en color rojo, siendo esta la trayectoria deseada propuesta, mientras que la línea azul punteada representa la trayectoria recorrida por el Vtol híbrido.

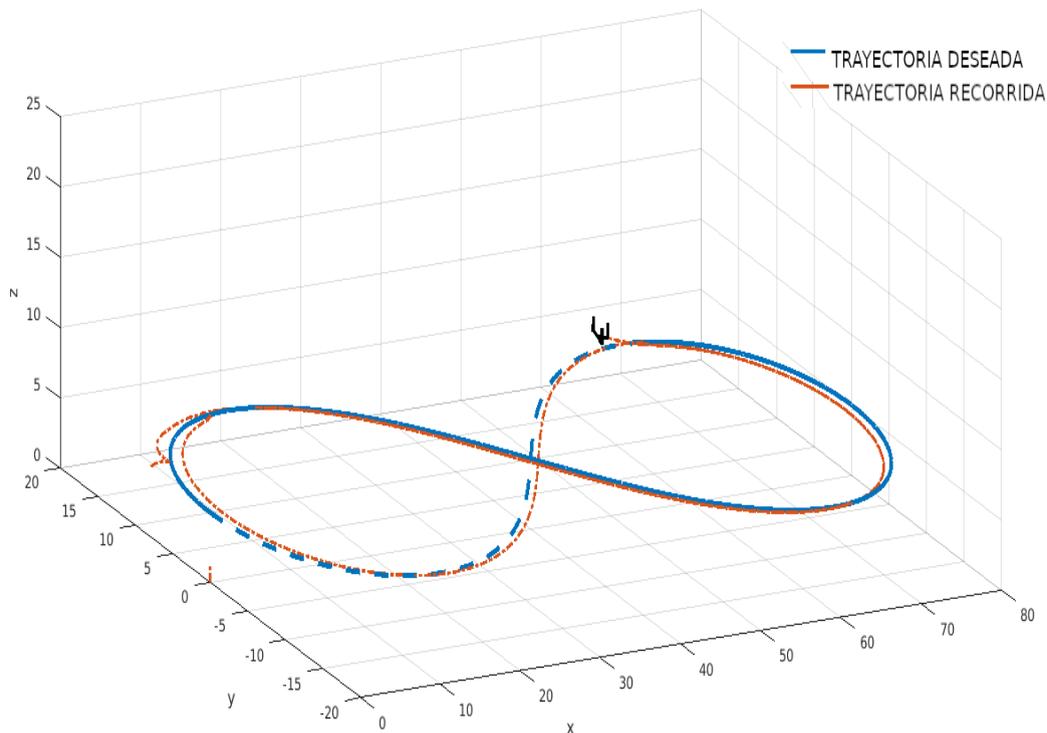


Figura 6.8: Gráfica de la trayectoria lemniscata recorrida por el Vtol híbrido

En la Figura [6.9](#) podemos apreciar las gráficas comparando las trayectorias deseadas y las recorridas por el Vtol híbrido, en las que podemos observar su desempeño a través del tiempo.

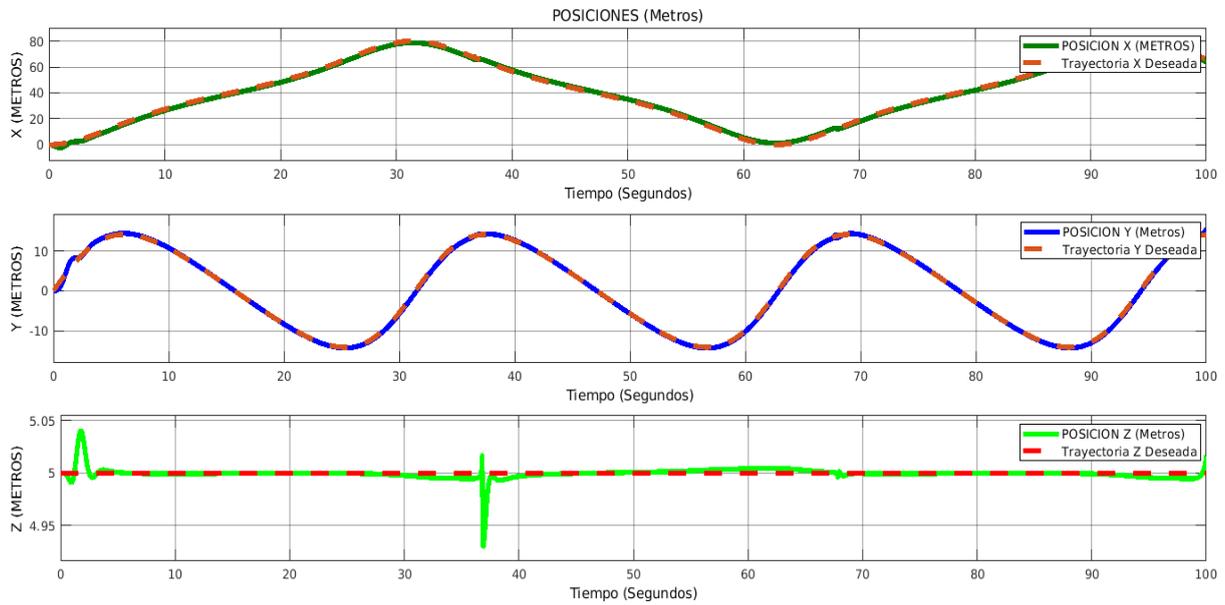


Figura 6.9: Gráfica de la posición longitudinal del Vtol híbrido

Mientras que en la Figura [6.10](#) podemos observar las posiciones angulares generadas por la acción de control en la que podemos apreciar como se mantienen en 0° tanto pitch como en el roll, a diferencia del tricóptero que necesita rotar para alcanzar las posiciones deseadas, esto es posible gracias a los motores batientes del Vtol híbrido, ya que los que se mueven al final son estos para generar las distintas fuerzas de traslación y no la aeronave.

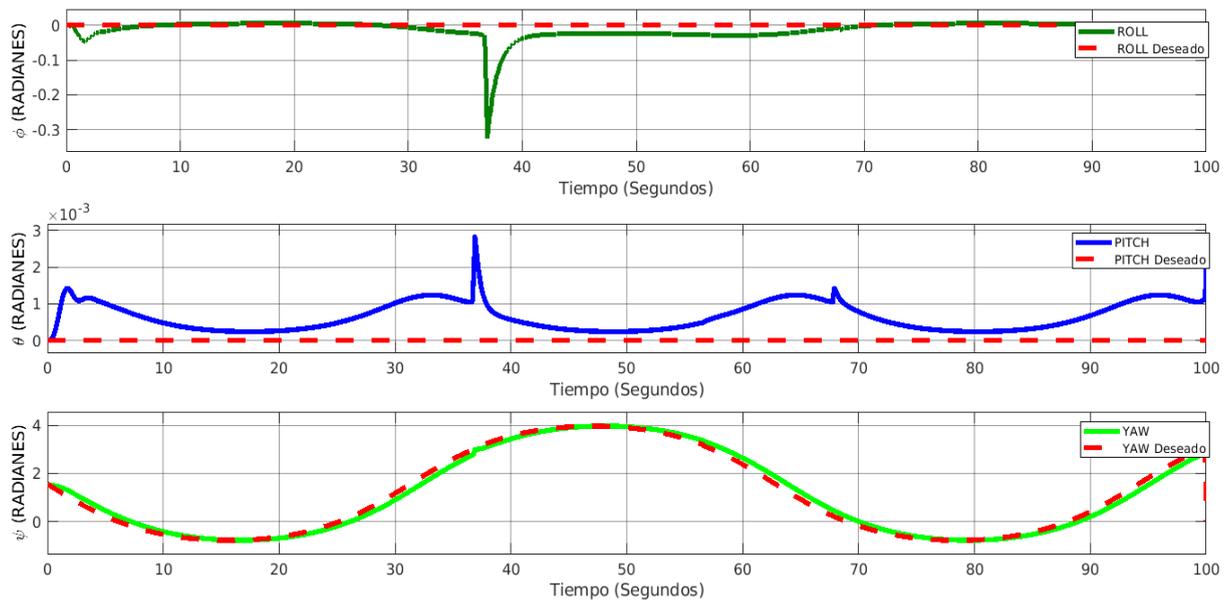


Figura 6.10: Gráfica de la posición angular del Vtol híbrido.

Y por último, en la Figura 6.11 se pueden observar los ángulos que se generan en los motores por la acción de control PBC, mismos que están expresados en radianes, representando su inclinación con respecto al vehículo.

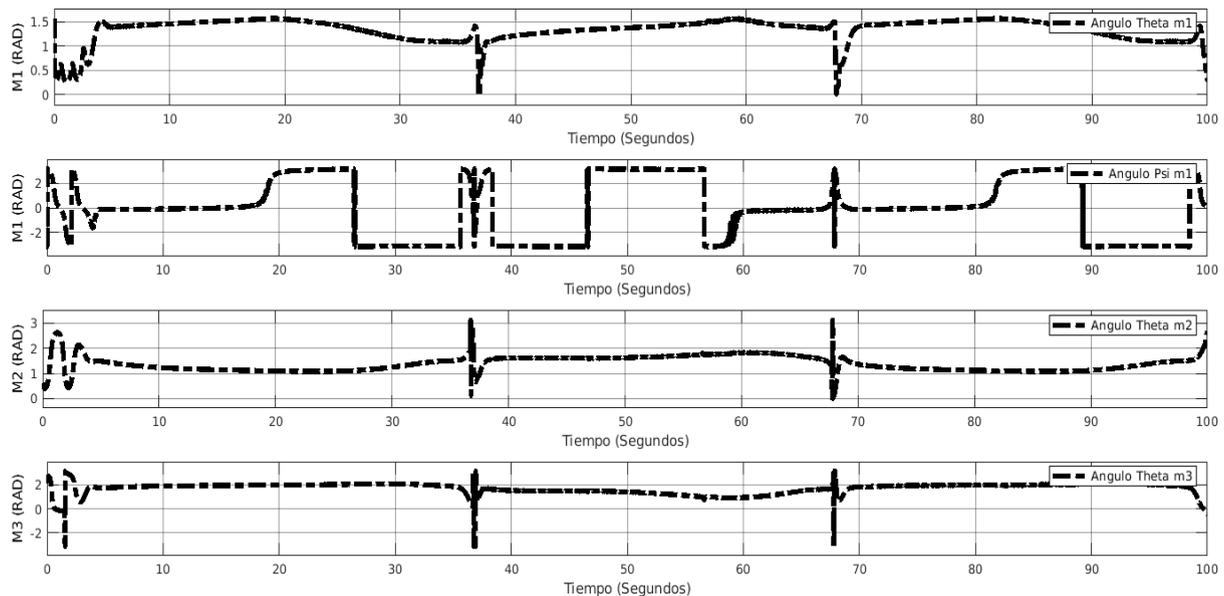


Figura 6.11: Gráfica de la posición de los motores del Vtol híbrido

Trayectoria Despegue-Traslación-Aterrizaje para el modelo del Vtol híbrido

Por otra parte, se realizó una tercera prueba, en la que se marcó una trayectoria de ascenso, dicha trayectoria solo es posible que sea realizada por un vtol convencional y no por una aeronave de ala fija, ya que es un ascenso completamente vertical, seguido por un desplazamiento en el $x = 45$ m. en el que se espera que el Vtol se desplace como una aeronave de ala fija, y por último que esta realice un descenso vertical de nueva cuenta como un Vtol convencional, buscando así realizar la transición entre dos distintos modos de vuelo.

Teniendo en cuenta los requerimientos de la simulación, se puede observar la trayectoria recorrida por el Vtol híbrido en la figura 6.12, las condiciones iniciales del sistema son $x = 0m$, $y = 0m$, $z = 0m$, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$.

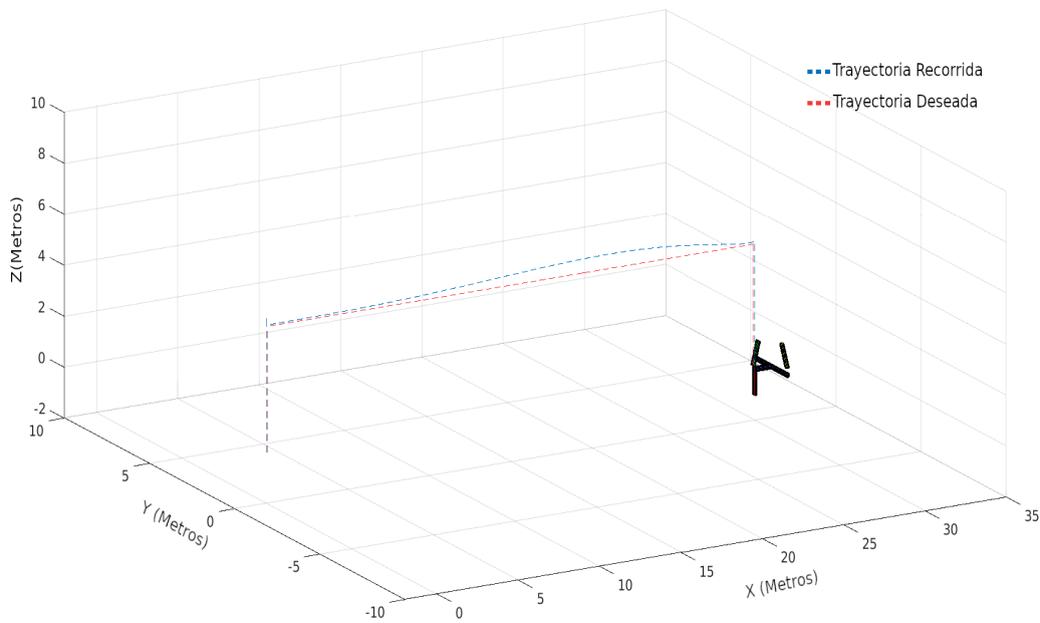


Figura 6.12: Trayectoria 3 generada para el Vtol

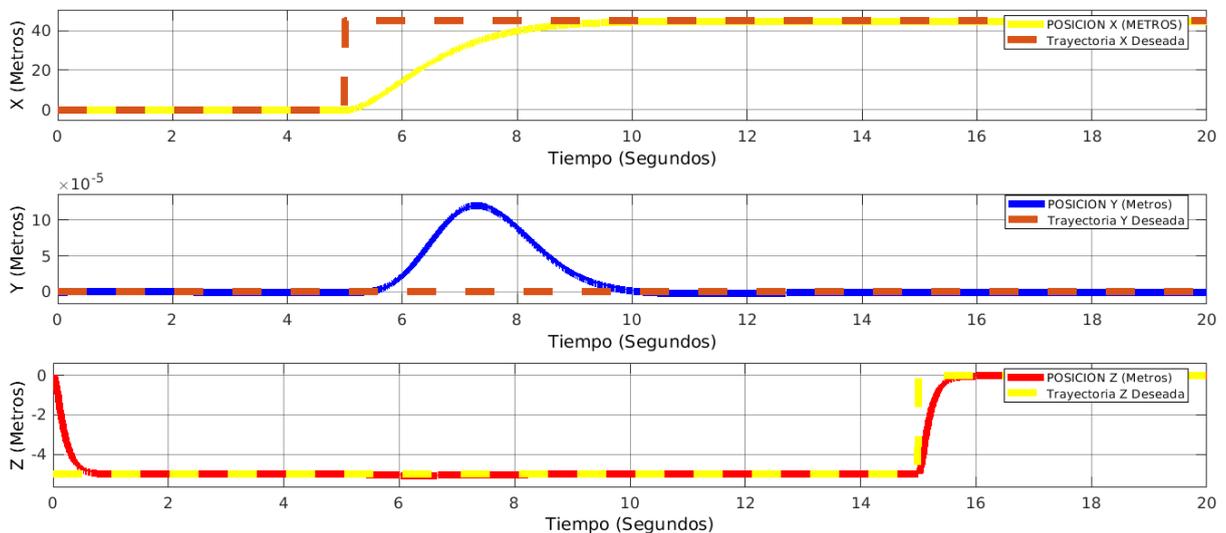


Figura 6.13: Gráfica 2 de las posiciones longitudinales

Es posible observar en la siguiente Figura [6.13](#) como la aeronave asciende los 5m marcados por la trayectoria sin desplazarse por ninguno de los ejes x y y , para posteriormente recorrer los 30m deseados, por último realiza el descenso, se puede observar como al moverse a través del eje x se genera un pequeño ascenso en el eje z debido a los coeficientes de levante

producidos por las alas al acelerar y alcanzar la posición deseada de los 45m, que es rápidamente compensado por el controlador.

Habiendo observado el comportamiento longitudinal, se puede dar paso a observar la respuesta angular en la Figura 6.14, en la cual podemos observar como el Vtol híbrido sigue las posiciones deseadas para aprovechar al máximo sus parámetros aerodinámicos, siendo estos $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$ y $\psi = 0^\circ$, al igual que en la gráfica anterior se puede apreciar un pequeño pico en el ángulo de cabeceo generado por la aceleración de la aeronave al moverse a través del eje x , que a su vez es compensado por el controlador.

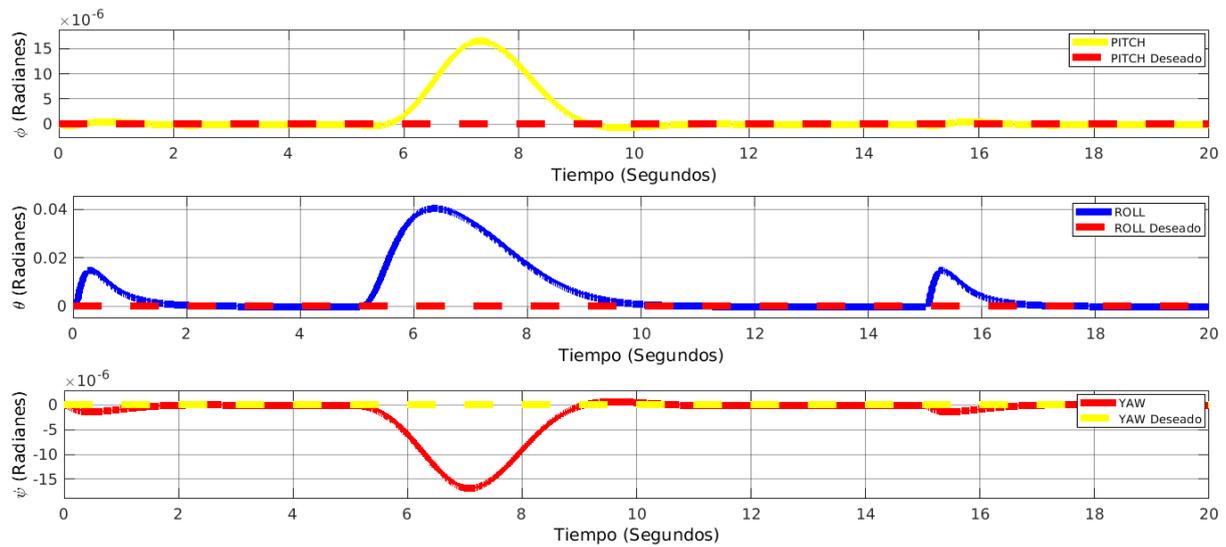


Figura 6.14: Gráfica 2 de las posiciones angulares

Teniendo ya las gráficas de las respuestas traslacionales y angulares, es momento de observar en Figura 6.15 el resultado del algoritmo de asignación de control en la cual podemos apreciar los ángulos generados para nuestros motores y como estos actúan dependiendo de las necesidades a la que el vehículo se encuentre, es posible ver como en el ascenso los motores se mantienen en una posición vertical de 90° en la que ejercen la fuerza de sustentación del Vtol, mientras que se inclinan para realizar el movimiento a través del eje x , para posteriormente regresar a 90° en el cual se realiza el aterrizaje del Vtol.

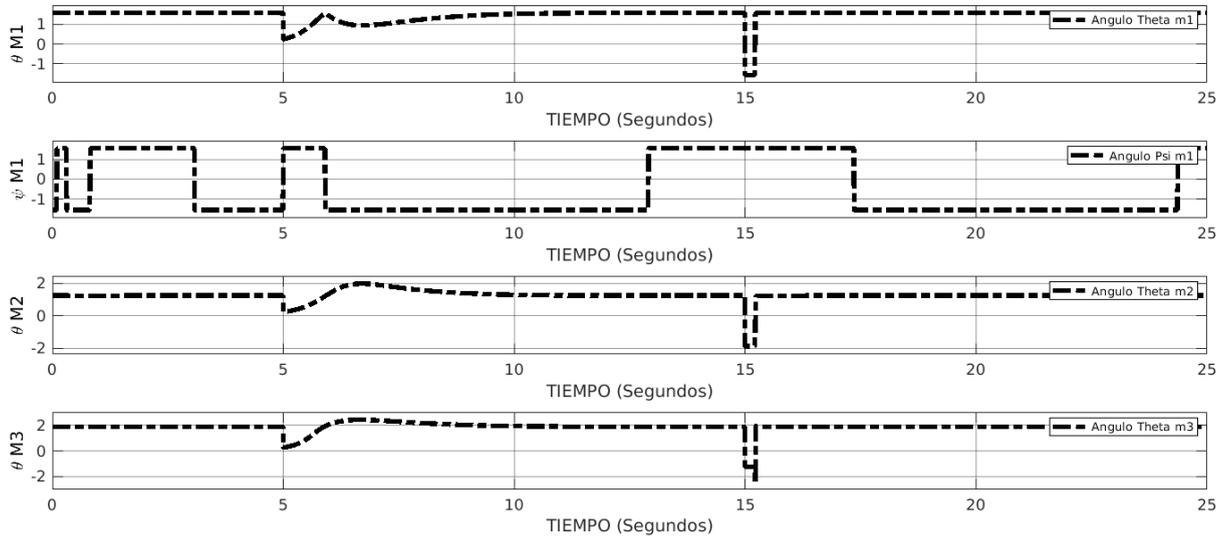


Figura 6.15: Gráfica de las posiciones angulares de cada motor

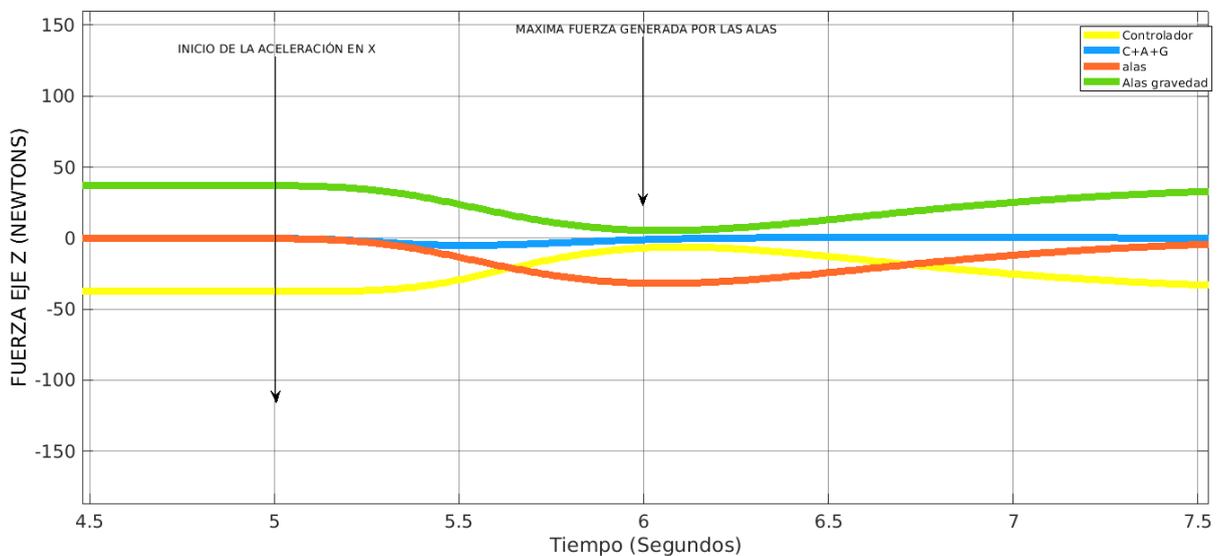


Figura 6.16: Comparación de las fuerzas generadas por el controlador y las alas

Por último, se pueden apreciar en la Figura [6.16](#) las fuerzas producidas por las alas (color rojo) y el controlador (color amarillo) en las etapas de transición de vuelo, en la que a mayor velocidad de desplazamiento en los ejes “X” y “Y” mayor es la fuerza de sustentación de las alas y menor será la fuerza generada por el controlador para la sustentación del mismo, las fuerzas alares como las del controlador son negativas debido al marco de referencia que se tomó para el modelado del Vtol en el cual las posiciones de ascenso son negativas.

Trayectoria senoidal para el modelo del Vtol híbrido

Para finalizar se muestra la última simulación propuesta, la cual es una trayectoria longitudinal con un movimiento en el eje “Y” con una función senoidal.

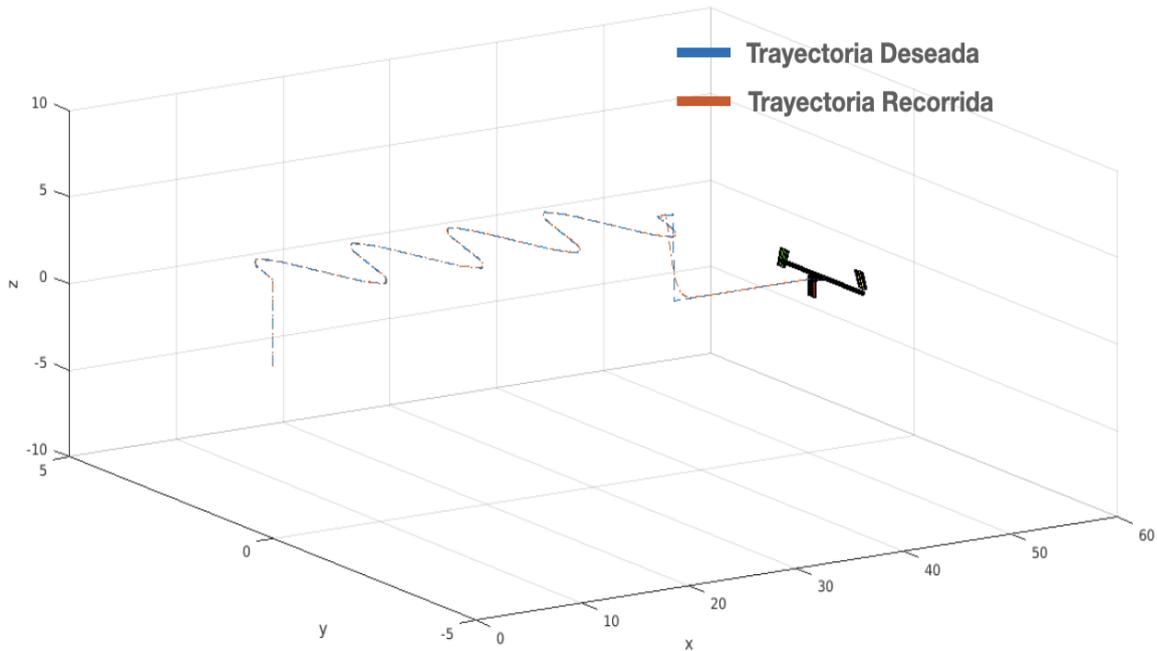


Figura 6.17: Gráfica de la trayectoria senoidal recorrida por el Vtol híbrido

Las condiciones iniciales del sistema son $x = 0\text{m}$, $y = 0\text{m}$, $z = 0\text{m}$, $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$.

En la Figura [6.18](#) podemos observar la amplitud y periodo deseado para la trayectoria, al igual que podemos observar la respuesta del sistema con respecto a la trayectoria deseada en el marco longitudinal, en la cual es posible observar el margen de error entre ambas trayectorias tanto la deseada como la recorrida por el vehículo en la simulación. De igual manera es posible observar la trayectoria de ascenso y descenso que se llevó a cabo en esta prueba de vuelo.

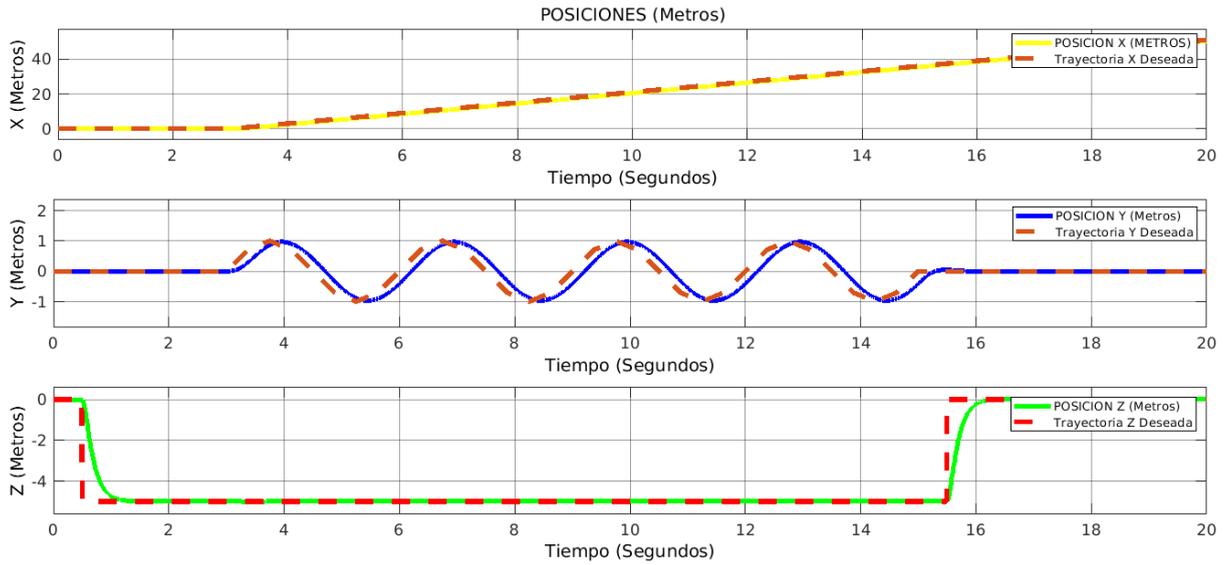


Figura 6.18: Gráfica de las posiciones longitudinales del Vtol híbrido

Mientras que en la Figura 6.19 podemos observar la respuesta angular que tiene el sistema con respecto a los ángulos deseados, en los que prácticamente se mantienen en 0 grados.

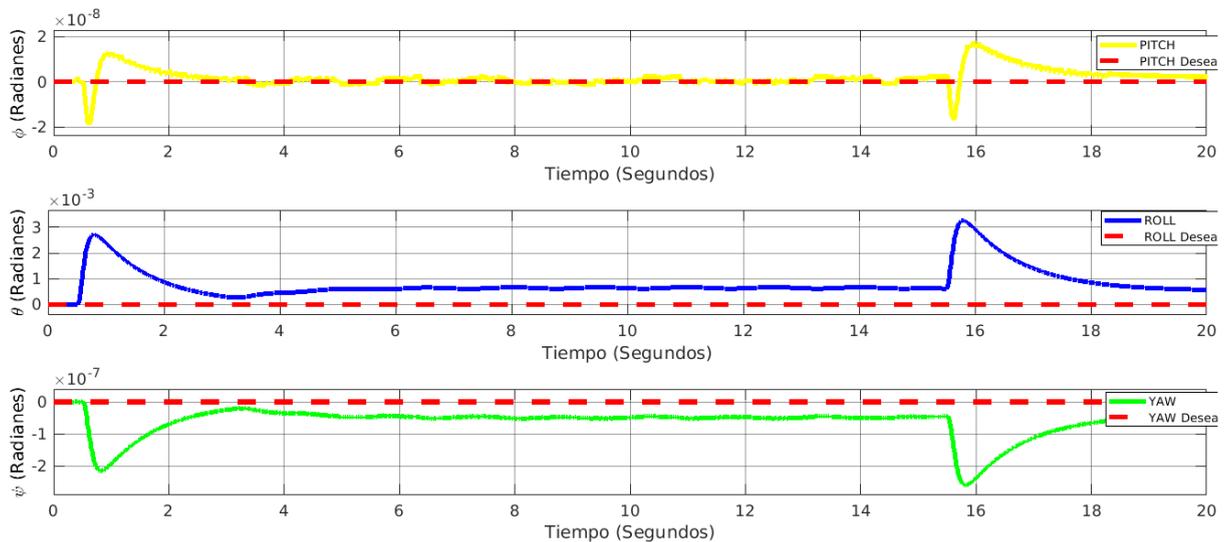


Figura 6.19: Gráfica de las posiciones angulares del Vtol híbrido

Por ultimo en la Figura 6.20 podemos apreciar las posiciones angulares en la que se encuentran los motores del Vtol híbrido, los cuales permiten que la aeronave se mantenga sin inclinación alguna, al ser estos últimos los que se mueven para generar las fuerzas requeridas por el controlador.

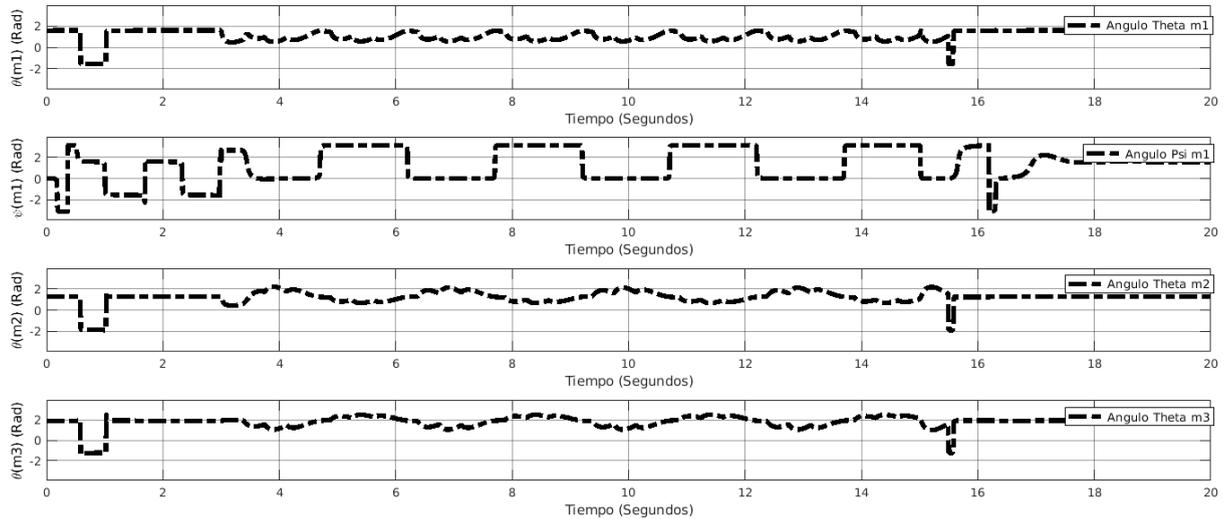


Figura 6.20: Gráfica de las posiciones angulares de los motores del Vtol híbrido

6.4. Índices de desempeño

A continuación se presenta una tabla la cual mediante el índice de desempeño ITAE, nos proporciona información sobre el desempeño de cada una de las trayectorias realizadas por los 3 modelos presentados en este documento, en el que se puede apreciar y comparar el comportamiento de los resultados de los diferentes modelos, dependiendo de de las trayectorias a realizar, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$\int_0^t t|e(t)|dt \quad (6.45)$$

donde t es el tiempo y $|e|$ el error absoluto.

Las trayectorias comparadas son:

- Trayectoria en espiral ascendente.
- Trayectoria en forma de lemniscata.
- Trayectoria despegue-aterrizaje.
- Trayectoria en forma senoidal.

La tabla [6.1](#) muestra los resultados de desempeño.

EJE X	EJE Y	EJE Z	Roll	Pitch	Yaw	TRAYECTORIA
1635	471.7	202.7	14.69	31.17	18.3	ESPIRAL VTOL HÍBRIDO
5719	1015	10.1	70	3	81	LEMNISCATA VTOL HÍBRIDO
830	0.001	20.5	0.002	0.03	0.0005	VTOL H. DESPEGUE
1230	20	8.75	12.3	0.56	0.0005	VTOL SENOIDAL
3735	4071.7	602	47.2	130.17	81.3	ESPIRAL AVIÓN
9830	4720	15.7	190	44	89	LEMNISCATA AVIÓN
503	0.002	12	0.004	0.06	0.0005	AVIÓN DESPEGUE
1830	180	7.1	21.2	2.78	8	AVIÓN SENOIDAL
6944	6841	1223	143.1	151	177	TRICÓPTERO ESPIRAL
30370	20960	228.5	265.5	303.7	99.87	TRICÓPTERO LEMNISCATA
1503	0.0031	63.88	0.0365	6.022	0.0008	TRICÓPTERO DESPEGUE
2254	64	79.81	42.44	3.155	0.0166	TRICÓPTERO SENOIDAL

Cuadro 6.1: Tabla del índice de desempeño medido con el ITAE

Y por último se muestra una tabla con las integrales de cada señal de control obtenidas en cada simulación, lo cual nos permite observar de manera numérica las fuerzas necesarias que necesita el controlador, para alcanzar las trayectorias definidas.

Fuerzas	Pares	TRAYECTORIA
39059.9 N	142 N/M	ESPIRAL VTOL HÍBRIDO
5794.7 N	266.7 N/M	LEMNISCATA VTOL HÍBRIDO
3725 N	0.001 N/M	VTOL H. DESPEGUE
3472 N	20.5 N/M	VTOL SENOIDAL
2735 N	407.7 N/M	ESPIRAL AVIÓN
4830 N	206.2 N/M	LEMNISCATA AVIÓN
1203 N	0.04 N/M	AVIÓN DESPEGUE
1830 N	40.5 N/M	AVIÓN SENOIDAL
3672 N	37.78 N/M	TRICÓPTERO ESPIRAL
3696 N	12.87 N/M	TRICÓPTERO LEMNISCATA
226.7 N	0.2548 N/M	TRICÓPTERO DESPEGUE
232.2 N	1.709 N/M	TRICÓPTERO SENOIDAL

Cuadro 6.2: Tabla con las señales de control totales generadas por el controlador

Estas tablas nos permiten analizar el desempeño de cada modelo ante cada trayectoria planteada en este trabajo de tesis, siendo notorio como el

desempeño de cada aeronave se ve afectado en trayectorias en las que por restricciones físicas no pueden seguir de manera óptima, ejemplo de esto se puede notar en la trayectoria senoidal realizada por el avión, el cual al tener una dinámica lenta no le es posible seguir el serpenteo de la trayectoria en comparación con el VTOL híbrido e incluso el tricóptero, en cambio en la tabla [6.2](#) podemos observar como el avión es el que menor fuerza necesita del controlador.

6.5. Conclusiones

Las simulaciones presentadas en este capítulo, permiten identificar ciertos patrones y comparar el funcionamiento del Vtol híbrido con respecto a los modelos base que ayudaron a modelar este sistema, es posible observar como este último puede comportarse de ambas maneras permitiendo seguir trayectorias que solamente los VANTs de motores rotativos pueden realizar, mientras que también es capaz de generar a través de las alas los coeficientes de sustentación, demandando menos fuerza por parte del controlador PBC.

Por otra parte, gracias a los grados de libertad con los que fueron diseñados sus motores, permiten al Vtol híbrido mantenerse en posiciones angulares cercanas al 0, en contraparte con los modelos del tricóptero y del ala fija que necesitan rotar para llegar a las posiciones deseadas esto se puede observar en las simulaciones de las trayectorias en espiral ascendente.

De igual manera, el vector de empuje permite a la aeronave ir a velocidades de traslación más bajas sin comprometer su altura, algo que el modelo del avión no puede realizar debido a que depende rigurosamente de los coeficientes de sustentación, como es posible observar en las pruebas “senoidales” y “despegue-traslación-aterrizaje”.

Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un modelo matemático y un controlador no lineal basado en pasividad para un VANT híbrido tipo Vtol skywalker x8, modificado con un vector de empuje y motores basculantes. El modelo matemático se presentó en la formulación de Euler-Lagrange, teniendo en cuenta los parámetros aerodinámicos y la descomposición de fuerzas generadas por el vector de empuje diseñado y los motores basculantes.

Se diseñó e implementó el algoritmo de control PBC, el cual tuvo un resultado satisfactorio en el control de todos los estados del sistema, teniendo un buen comportamiento en las regulaciones de posición traslacional y rotacional, además de permitir con resultados favorables la transición de vuelo crucero a estacionario y viceversa en la trayectoria de vuelo propuesta.

Después se realizó un algoritmo de asignación de control que permitiera relacionar las señales virtuales de control generadas por el PBC con las entradas reales del sistema, las cuales son las velocidades angulares de cada motor y los ángulos de inclinación de los mismos.

Se diseñó también una estrategia de control basada en IDA-PBC para el modelo del tricóptero, mostrando resultados satisfactorios para controlar la diferencia de momentos producidos por el número de motores con los que cuenta este vehículo, el cual es impar, y mantiene rotando al vehículo en el eje z.

Se publicó un artículo en el Congreso Nacional de Robótica realizado

por el Instituto Tecnológico de Tijuana y un póster académico en el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico de la Ciudad de Cuernavaca.

La principal aportación en este trabajo de investigación, está en proponer un nuevo modelo matemático para un tipo especial de aeronaves capaces de realizar despegues y aterrizajes verticales, gracias a los motores basculantes con los que cuenta, los cuales fueron modelados de tal forma que todos sus ángulos sean distintos y no de la forma tradicional en la que ambos comparten la misma inclinación, haciendo que el modelo propuesto sea distinto a los encontrados en la literatura, además en proponer una metodología para obtener un esquema PBC, una ventaja importante de este algoritmo, es que se puede aplicar a los sistemas sub-actuados con matriz de inercia dependiente de las coordenadas no actuadas del sistema, y generar un algoritmo capaz de relacionar las fuerzas generadas por el controlador con los actuadores reales del sistema.

Y aunque en el análisis de fuerzas necesarias para controlar la aeronave sea mayor como se puede observar en la Tabla [6.2](#), tiene un mejor desempeño en trayectorias que involucren desempeños mixtos ver Tabla [6.1](#) donde los VTOL convencionales ni los aviones de ala fija pueden realizar de manera óptima.

7.1. Trabajos futuros

Diferentes temáticas pueden seguirse investigando a partir de este trabajo, principalmente las siguientes:

- Mejorar el algoritmo de control mediante un control no lineal robusto frente a perturbaciones del viento, ya que la estrategia de control PBC no es robusta ante parámetros desconocidos.
- Mejorar el modelo no lineal del Vtol, tomando en cuenta los efectos aerodinámicos cuando la aeronave entra en pérdida y profundizar en los coeficientes de deslizamiento de esta aeronave.
- Instrumentar un prototipo de ala fija, para poder comprobar físicamente los resultados obtenidos en simulación en este trabajo de tesis.
- Escribir artículos científicos (congreso o revista).

Bibliografía

- Ahirwar, S., Swarnkar, R., Bhukya, S., y Namwade, G. (2019). Application of drone in agriculture. *International Journal of Current Microbiology and Applied Sciences*, 8, 2500-2505. doi: 10.20546/ijcmas.2019.801.264
- Anderson, K., y Gaston, K. J. (2013). Lightweight unmanned aerial vehicles will revolutionize spatial ecology. *Frontiers in Ecology and the Environment*, 11, 138-146. doi: 10.1890/120150
- Bapst, R., Ritz, R., Meier, L., y Pollefeys, M. (2015). Design and implementation of an unmanned tail-sitter. En *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* (p. 1885-1890). doi: 10.1109/IROS.2015.7353624
- Blankenstein, g. (2000). The matching conditions of controlled lagragians and interconnection assignment passivity based control. *LSS Int. Rep.*.
- Brito, R. C., Saque, N., Loureiro, J. F., Favarim, F., y Todt, E. (2019). A comparative approach on the use of unmanned aerial vehicles kind of fixed-wing and rotative wing applied to the precision agriculture scenario. *Proceedings - International Computer Software and Applications Conference*, 2, 522-526. doi: 10.1109/COMPSAC.2019.10259
- Cousin, C. A., Deptula, P., Rouse, C. A., y Dixon, W. E. (2022). A switched lyapunov-passivity approach to motorized fes cycling using adaptive admittance control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 30(2), 740-754. doi: 10.1109/TCST.2021.3076934
- Gryte, K., Hann, R., Alam, M., Roháč, J., Johansen, T. A., y Fossen, T. I. (2018). Aerodynamic modeling of the skywalker x8 fixed-wing unmanned aerial vehicle. En *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)* (p. 826-835). doi: 10.1109/ICUAS.2018.8453370
- Guerrero, M. E., Mercado, D. A., Lozano, R., y Garcia, C. D. (2015). Idapbc methodology for a quadrotor uav transporting a cable-suspended

- payload. *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2015*, 470-476. doi: 10.1109/ICUAS.2015.7152325
- Guerrero-Sanchez, M. E., Abaunza, H., Castillo, P., Lozano, R., Garcia-Beltran, C., y Rodriguez-Palacios, A. (2017). Passivity-based control for a micro air vehicle using unit quaternions. *Applied Sciences*, 7(1). Descargado de <https://www.mdpi.com/2076-3417/7/1/13> doi: 10.3390/app7010013
- Guerrero-Sánchez, M. E., Mercado-Ravell, D. A., Lozano, R., y García-Beltrán, C. D. (2017). Swing-attenuation for a quadrotor transporting a cable-suspended payload. *ISA Transactions*, 68, 433-449. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057817301635> doi: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.01.027>
- Hassanalian, M., y Abdelkefi, A. (2017). Classifications, applications, and design challenges of drones: A review. *Progress in Aerospace Sciences*, 91, 99-131. doi: 10.1016/j.paerosci.2017.04.003
- Kendoul, F., Fantoni, I., y Lozano, R. (2006). Modeling and control of a small autonomous aircraft having two tilting rotors. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(6), 1297-1302. doi: 10.1109/TRO.2006.882956
- Knoebel, N., Osborne, S., Snyder, D., Mclain, T., Beard, R., y Eldredge, A. (2006). Preliminary modeling, control, and trajectory design for miniature autonomous tailsitters. En *Aiaa guidance, navigation, and control conference and exhibit*. Descargado de <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2006-6713> doi: 10.2514/6.2006-6713
- Mathisen, S. H., Gryte, K., Johansen, T., y Fossen, T. I. (2016). Non-linear model predictive control for longitudinal and lateral guidance of a small fixed-wing uav in precision deep stall landing. En *Aiaa infotech @ aerospace*. Descargado de <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2016-0512> doi: 10.2514/6.2016-0512
- Mehndiratta, M., y Kayacan, E. (2018). Reconfigurable fault-tolerant nmpc for y6 coaxial tricopter with complete loss of one rotor. En *2018 ieee conference on control technology and applications (ccta)* (p. 774-780). doi: 10.1109/CCTA.2018.8511444
- Ortega, R., y der Schaft, A. V. (2000). Energy shaping revisited. *Proceedings - IEEE International Conference on Control Applications*.
- Ortega, R., der Schaft, A. V., Maschke, B., y Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38, 585-596. doi: 10.1016/S0005-1098(01)00278-3

- Ortega, R., y Mareels, I. (2000). Energy-balancing passivity-based control. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Ortega, R., Spong, M., Gomez-Estern, F., y Blankenstein, G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8), 1218-1233. doi: 10.1109/TAC.2002.800770
- Ortega, R., y Spong, M. W. (1989). Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25(6), 877-888. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000510988990054X> doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(89\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0005-1098(89)90054-X)
- Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B., y Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4), 585-596. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109801002783> doi: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00278-3](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00278-3)
- Papachristos, C., Alexis, K., y Tzes, A. (2013). Hybrid model predictive flight mode conversion control of unmanned quad-tiltrotors. En *2013 european control conference (ecc)* (p. 1793-1798). doi: 10.23919/ECC.2013.6669816
- Prach, A., y Kayacan, E. (2018). An mpc-based position controller for a tilt-rotor tricopter vtol uav. *Optimal Control Applications and Methods*, 39(1), 343-356. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/oca.2350> doi: <https://doi.org/10.1002/oca.2350>
- Rodriguez, H., y Ortega, R. (2002). Stabilization of electromechanical systems via interconnection and damping assignment. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1), 157-162. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667015386973> (15th IFAC World Congress) doi: <https://doi.org/10.3182/20020721-6-ES-1901.00276>
- Rodríguez, H., y Ortega, R. (2002). Stabilization of electromechanical systems via interconnection and damping assignment. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 15, 157-162. doi: 10.3182/20020721-6-es-1901.00276
- R. Ortega, B. M. y. G. E., A. van der Schaft. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled

- hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4), 585-596.
- Sanchez-Rivera, L. M., Lozano, R., y Arias-Montano, A. (2020). Transition flight dynamics of a dual tilt-wing uav. En *2020 international conference on unmanned aircraft systems (icuas)* (p. 862-866). doi: 10.1109/ICUAS48674.2020.9214061
- Song, Z., Li, K., Cai, Z., Wang, Y., y Liu, N. (2016). Modeling and maneuvering control for tricopter based on the back-stepping method. En *2016 ieee chinese guidance, navigation and control conference (cgnc)* (p. 889-894). doi: 10.1109/CGNCC.2016.7828903
- Summers, A. (2017). Modeling and control of a fixed wing tilt-rotor tri-copter. *MSc Thesis, Washington*.
- Theys, B., De Vos, G., y De Schutter, J. (2016). A control approach for transitioning vtol uavs with continuously varying transition angle and controlled by differential thrust. En *2016 international conference on unmanned aircraft systems (icuas)* (p. 118-125). doi: 10.1109/ICUAS.2016.7502519
- Wang, Y., Zhou, Y., y Lin, C. (2019). Modeling and control for the mode transition of a novel tilt-wing uav. *Aerospace Science and Technology*, 91, 593-606. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963818324684> doi: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.05.046>
- Zhao, S., Dong, W., y Farrell, J. A. (2013). Quaternion-based trajectory tracking control of vtol-uavs using command filtered backstepping. , 1018-1023.