



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Instituto Tecnológico de La Laguna



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO®

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“Contribución al Análisis de Sistemas No Holonómicos de  
Primero y Segundo Orden”**

**POR**

**Alfredo Delgado Spíndola**

**T E S I S**

**PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Ricardo Emmanuel Campa Cocom†  
Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila**

**CODIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Eusebio Bugarin Carlos**

**ISSN: 0188-9060**



**RIITEC: (01)-TDCIE – 2022  
Torreón, Coahuila. México  
Abril 2022**



Instituto Tecnológico de La Laguna

Torreón, Coah., **01/Abril /2022**  
Dependencia: DEPI/CPCIE  
Oficio: DEPI/CPCIE/030/2022  
Asunto: Autorización de impresión  
de tesis.

**M.C. Alfredo Delgado Spindola**  
**C. CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Contribución al análisis de sistemas no holonómicos de primero y segundo orden "**

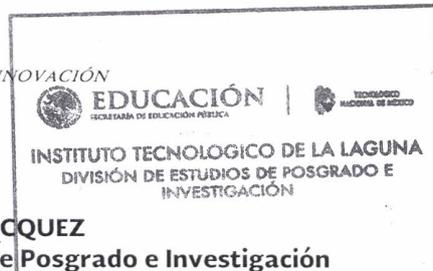
Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (01)-TDCIE-2022**, para que proceda a la impresión del mismo.

**A T E N T A M E N T E**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN



**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación  
del Instituto Tecnológico de la Laguna







Torreón Coah., 29/Marzo/2022

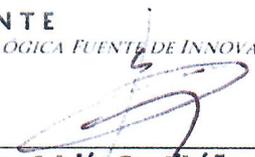
**DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**"Contribución al análisis de sistemas no holonómicos de primero y segundo orden "**

Desarrollado por el **C. Alfredo Delgado Spindola** , con número de control **D1713006** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila**  
Asesor/Director de Tesis

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. Eusebio Bugariñ Carlos**  
Coasesor/Co Director de Tesis Externo

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. Alejandro Enrique Dzul López**  
Comité Tutorial

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. José Alfonso Pámanes García**  
Comité Tutorial

  
\_\_\_\_\_  
**Dr. Juan Sifuentes Mijares**  
Comité Tutorial





En memoria a Ricardo Campa, querido profesor, asesor y amigo.



# Agradecimientos

Al CONACYT y al Tecnológico Nacional de México / I.T. la Laguna por los apoyos dados para que yo pudiera realizar estos estudios.

A los revisores miembros del comité de la tesis: **Dr. Eusebio Bugarin, Dr. Alejandro Dzul, Dr. Alfonso Pámanes** y al **Dr. Juan Sifuentes** por sus comentarios los cuales fueron de gran ayuda para mejorar el contenido del presente trabajo.

A todos mis compañeros del posgrado los cuales hicieron más amena los años que pasaron durante el desarrollo de está tesis.

Al **Dr. Víctor Santibañez**, quien me estuvo apoyando en estos últimos pasos del doctorado para poder obtener mi grado.

A mis hermanos, para los cuales intento ser el mejor ejemplo posible y me ayudan ser una mejor persona, gracias por aguantarme.

Nuevamente a mis padres, **Norma R. Spíndola Félix** y **Ramón A. Delgado González** a los cuales les tengo toda la admiración del mundo y por los quienes soy lo que soy ahorita. Gracias por todo.

A mi novia, quien me ha aguantado y apoyado todo este tiempo y sin quien tal vez ya me hubiera vuelto loco.

Y principalmente, al **Dr. Ricardo Campa**, quien desde el principio confió en mí para poder desarrollar este trabajo de tesis y me dio la oportunidad de seguirme formando como investigador al aceptarme como su tesista, este trabajo es para usted.



## Resumen

Existen sistemas mecánicos que pueden ser descritos por una serie de coordenadas independientes entre sí, como es el caso de los manipuladores seriales. Sin embargo, existen también mecanismos en los cuales sus coordenadas no son independientes (aún en el caso de contar con la cantidad mínima necesaria de ellas) y por lo tanto existen relaciones entre las mismas (restricciones). Si  $\rho$  es el vector de coordenadas usado para describir la configuración de un sistema; es decir, para especificar de manera completa la ubicación de cada punto en el sistema mecánico, entonces una restricción holonómica del mismo es una expresión de la forma  $\alpha(\rho) = 0$ . Una restricción no holonómica de primer orden es una expresión de la forma  $\beta(\rho, \dot{\rho}) = 0$  que no es integrable (i.e., no es posible escribir  $\beta$  como la derivada temporal de una función  $\alpha(\rho)$ ), y una restricción no holonómica de segundo orden es una expresión de la forma  $\gamma(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) = 0$  que tampoco es integrable. De estos tipos de restricciones sólo las holonómicas reducen la dimensión del espacio de configuración; las restricciones no holonómicas de primer orden son restricciones en la velocidad instantánea, y se presentan principalmente en robots móviles con ruedas; las restricciones no holonómicas de segundo orden restringen la aceleración instantánea (o la variación de la cantidad de movimiento) y se presentan en robots móviles acuáticos, vehículos espaciales y manipuladores subactuados. El objetivo principal de este trabajo de tesis es estudiar sistemas no holonómicos en general, desde el punto de vista de su modelado, planificación de movimiento y control automático.

## Abstract

There are mechanical systems that can be described by a series of coordinates which are independent between them, as it is the case of serial manipulators. However, there are also mechanisms in which their coordinates are not independent (even in the case of having the minimum necessary amount of them) and therefore there are relationships between them (restrictions). If  $\rho$  is the vector of coordinates used to describe the configuration of a system; i.e., to fully specify the location of each point in the system, then a holonomic constraint is an expression of the form  $\alpha(\rho) = 0$ . A first order non-holonomic constraint is an expression of the form  $\beta(\rho, \dot{\rho}) = 0$  that can not be integrated (i.e., it is not possible to write  $\beta$  as the time derivative of a function  $\alpha(\rho)$ ), and a second order non-holonomic constraint is an expression of the form  $\gamma(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) = 0$  that is also not integrable. Among these types of constraints, only the holonomic ones reduce the dimension of the configuration space; non-holonomic first order constraints are constraints on instantaneous velocity, and they occur mainly in wheeled mobile robots; second-order non-holonomic constraints restrict instantaneous acceleration (or variation in momentum) and occur in underwater mobile robots, space vehicles, and under-actuated manipulators. The main objective of this thesis work study non-holonomic systems in general, from the point of view of its modeling, movement planification and automatic control.



# Índice general

Índice general	vii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Conceptos básicos	1
Espacio de configuración y coordenadas generalizadas	1
Cuasi-velocidades	2
Grados de libertad y restricciones cinemáticas	3
Cuerpos rígidos y postura	5
1.2 Fundamentos de robótica	5
1.3 Sistemas no holonómicos	7
Generalidades	7
Breve historia del estudio de sistemas no holonómicos	8
1.4 Objetivos	10
<b>2 Fundamentos Matemáticos</b>	<b>13</b>
2.1 Formas diferenciales	13
Operaciones y propiedades de las formas diferenciales	14
2.2 Integrabilidad	15
Teorema de Frobenius	15
<b>3 Clasificación de Sistemas No Holonómicos</b>	<b>19</b>
3.1 Tipos de Sistemas No Holonómicos	19
Sistemas no holonómicos de primer orden	19
Sistemas no holonómicos de segundo orden	20
3.2 Clasificación de sistemas del laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna	20
Sistemas No holonómicos de Primer Orden	20
Sistemas No holonómicos de Segundo Orden	22
<b>4 Modelado Dinámico de Sistemas Mecánicos con Restricciones No Holonómicas</b>	<b>27</b>
4.1 Introducción	27
Lagrangiano de un sistema	27
4.2 Metodologías para modelado de sistemas mecánicos con restricciones no holonómicas	28
Ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección	29
Las ecuaciones de Udwadia-Kalaba	30
Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas	31
<b>5 Aspectos Sobre la Planificación y Control de Movimientos de Sistemas No Holonómicos</b>	<b>35</b>
5.1 Estudio sobre planificación de sistemas no holonómicos	35
Introducción	35
Algoritmos para sistemas nilpotentes	37
Algoritmos para sistemas no nilpotentes	39

5.2	Revisión de la Literatura Sobre Control de Sistemas No Holonómicos . . . . .	41
	Introducción. . . . .	41
	Propiedades de equilibrios en el control de Sistemas No Holonómicos. . . . .	42
	Control de sistemas No Holonómicos específicos. . . . .	44
<b>6</b>	<b>Aplicación de Metodologías de Modelado</b>	<b>45</b>
6.1	Introducción . . . . .	45
6.2	Modelado de un sistema con coordenadas generalizadas mínimas: Robot CICESE . . . . .	45
	Descripción del sistema . . . . .	46
	Aplicación de las metodologías . . . . .	46
	Comparación de resultados . . . . .	48
6.3	Modelado de un sistema con restricciones holonómicas: Mecanismo de 5 barras . . . . .	49
	Descripción del sistema . . . . .	49
	Aplicación de las metodologías . . . . .	50
	Comparación de resultados . . . . .	53
6.4	Modelado de un sistema con restricciones no holonómicas: Segway RMP-100 . . . . .	54
	Descripción del sistema . . . . .	54
	Aplicación de las metodologías . . . . .	55
	Comparación de resultados . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Conclusión</b>	<b>59</b>
7.1	Notas sobre el modelado de sistemas mecánicos con restricciones no holonómicas. . . . .	59
	Uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección . . . . .	59
	Uso de las ecuaciones de Udwadia-Kalaba . . . . .	60
	Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas . . . . .	61
7.2	Aportaciones del trabajo . . . . .	61
7.3	Trabajo Futuro . . . . .	62
	<b>APÉNDICES</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Modelado de la Plataforma RMP-100</b>	<b>63</b>
A.1	Mejoras al modelo de la plataforma RMP-100 . . . . .	63
<b>B</b>	<b>Componentes de los Modelos Obtenidos</b>	<b>67</b>
B.1	Mecanismo de 5 Barras . . . . .	67
B.2	Robot móvil diferencial . . . . .	75
	<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>

# Índice de figuras

1.1	Diagrama de bloques de un sistema de control de robots. . .	6
1.2	Robot móvil con ruedas SEEKUR de la Empresa MobileRobots.	7
1.3	Ejemplo simple de un sistema no holonómico: Rueda girando sin derrape en una superficie plana. . . . .	8
1.4	Heinrich Hertz, físico alemán del siglo XIX, fue el primero en utilizar el término <i>no holonómico</i> , para referirse a estos fenómenos.	8
3.1	Segway RMP-100 del laboratorio de Mecatrónica y Control del TecNM/ITL. . . . .	20
3.2	Diagrama del robot Segway RMP-100 . . . . .	20
3.3	Plataforma Giroscópica de Quanser. . . . .	21
3.4	Diagrama de un robot subactuado serial de 2 g.d.l. en un plano horizontal. . . . .	22
3.5	Pendubot del laboratorio de Mecatrónica y Control del I.T. de la Laguna. . . . .	23
6.1	Robot CICESE del laboratorio de Mecatrónica y Control del ITL.	45
6.2	Diagrama del robot CICESE (Esquema cedido por el M.C. Sergio López Hernández) . . . . .	46
6.3	Evolución temporal de las coordenadas articulares del robot CICESE. . . . .	49
6.4	Diagrama del mecanismo de 5 barras. . . . .	50
6.5	Comportamiento de las articulaciones. . . . .	53
6.6	Diagrama de la plataforma Segway RMP-100 sin péndulo. . .	54
6.7	Diagrama del robot Segway RMP-100. . . . .	54
6.8	Comportamiento de las velocidades independientes. . . . .	58
A.1	Esquema de simulación anterior. . . . .	64
A.2	Esquema de simulación nuevo. . . . .	64
A.3	Medición de las velocidades. . . . .	64
A.4	Diagrama del Segway RMP-100. . . . .	65
A.5	Diagrama del Segway RMP-100 vista superior. . . . .	65

# Índice de tablas

6.1	Parámetros del robot CICESE. . . . .	46
6.2	Parámetros del mecanismo de 5 barras. . . . .	50
6.4	Parámetros del robot Segway RMP-100. . . . .	54



## 1.1. Conceptos básicos

### Espacio de configuración y coordenadas generalizadas

Se le llama *configuración* de un sistema mecánico a la ubicación en el espacio físico de todos los elementos del sistema en un instante de tiempo dado. Y se le llama *espacio de configuración* al conjunto formado por todas las configuraciones posibles que puede tomar el sistema en cualquier tiempo.

Para describir la configuración de un sistema generalmente se emplea un conjunto de parámetros que determinan de manera única la ubicación de todos los puntos del mismo. Para referirse a estos parámetros, en la literatura relacionada se emplea el término *coordenadas generalizadas*; el adjetivo “generalizadas” se usa para resaltar el hecho de que estas coordenadas representan parámetros que describen la configuración del sistema y no coordenadas en el sentido tradicional, que dan la ubicación de un punto en el espacio físico.

Debe notarse entonces que el espacio de configuración proporciona una manera de visualizar un sistema mecánico como si fuera un punto en un espacio de dimensión mayor. Además, una trayectoria (es decir, una curva parametrizada en función de tiempo) en el espacio de configuración de un sistema mecánico describe el movimiento de tal sistema en el espacio físico.

Considérese ahora el caso de un sistema que es descrito por  $m$  coordenadas generalizadas, las cuales se denotan como  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ ; entonces es posible definir un *vector de coordenadas generalizadas*  $\rho$ , tal que

$$\rho = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_m]^T \in \mathbb{R}^m$$

donde  $\mathbb{R}^m$  describe el espacio de configuración del sistema y, por lo tanto, cada elemento del mismo corresponde a una configuración específica.

Para un mismo sistema es posible emplear diferentes conjuntos de coordenadas generalizadas (incluso con un número diferente de coordenadas). Y, en general, dados dos conjuntos de coordenadas generalizadas que describen el mismo sistema, debe ser posible expresar un conjunto en términos del otro (o, lo que es lo mismo, definir una transformación de coordenadas generalizadas).

Además, para describir la configuración de un sistema, es común emplear conjuntos de coordenadas generalizadas en las que cada coordenada es independiente de las otras. De hecho, algunos autores afirman que las coordenadas generalizadas deben ser independientes por definición. Sin embargo, en este trabajo se tomará el enfoque de [1], quien habla de *coordenadas generalizadas independientes* (o *mínimas*) y *coordenadas generalizadas dependientes* (*redundantes*, o *no mínimas*).

Y debe notarse que, siempre que se emplee un conjunto de coordenadas generalizadas dependientes, existirán relaciones matemáticas (comúnmente llamadas *restricciones de configuración*) que establecen esa dependencia entre tales coordenadas.

Así, un sistema formado por  $N$  partículas independientes (libres) en el espacio físico requiere  $m = 3N$  coordenadas generalizadas para describir una configuración específica, y el espacio de configuración de tal sistema será  $\mathbb{R}^{3N}$ . No obstante, si las partículas no se mueven libremente en todo el espacio, o bien, existen relaciones entre ellas (que puedan ser descritas como expresiones matemáticas entre sus coordenadas generalizadas), entonces el espacio de configuración se reduce también.

Por ejemplo, una partícula que está restringida a moverse en el plano definido por la ecuación  $x = y$  tendría como espacio de configuración el siguiente conjunto

$$\left\{ [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \right\};$$

pero debe notarse que al ser un plano, este conjunto representa un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  que es de dimensión 2.

1: En matemáticas, un isomorfismo es un mapeo que conserva la estructura entre dos estructuras del mismo tipo que se puede revertir mediante un mapeo inverso. Por lo tanto dos estructuras matemáticas son isomórficas si existe un isomorfismo entre ellas.

Un subconjunto de un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$  que se puede considerar, al menos localmente, como isomórfico<sup>1</sup> a un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , con  $n < m$ , se dice que es una *variedad* (en inglés “*manifold*”) de dimensión  $n$  en  $\mathbb{R}^m$  (y se emplea la notación  $M^n \subset \mathbb{R}^m$ ). Y cuando el espacio de configuración de un sistema es una variedad, se habla de una *variedad de configuración*. Así, en el ejemplo anterior se tiene una variedad de configuración de dimensión 2 en  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora bien, si se toma la derivada con respecto al tiempo de la coordenada generalizada  $\rho_i$  (con  $i = 1, 2, \dots, m$ ) se obtiene la correspondiente *velocidad generalizada*, denotada por  $\dot{\rho}_i$ ; asimismo, la segunda derivada de  $\rho_i$  da la aceleración generalizada  $\ddot{\rho}_i$ . De este modo se puede definir el vector de velocidades generalizadas

$$\dot{\rho} = [\dot{\rho}_1 \ \dot{\rho}_2 \ \cdots \ \dot{\rho}_m]^T \in T_{\rho}M^n \subset \mathbb{R}^m$$

donde  $T_{\rho}M^n$  es el espacio tangente del punto  $\rho$  en  $M^n$ , que es también una variedad de dimensión  $n$ . Asimismo, el vector de aceleraciones generalizadas es

$$\ddot{\rho} = [\ddot{\rho}_1 \ \ddot{\rho}_2 \ \cdots \ \ddot{\rho}_m]^T \in T_{\dot{\rho}}(T_{\rho}M^n) \subset \mathbb{R}^m.$$

## Cuasi-velocidades

Las velocidades de los puntos de un sistema para cierta configuración y cierto instante de tiempo pueden ser especificados ya sea por las velocidades generalizadas o, de forma más general, por las llamadas *características cinemáticas* o *cuasi-velocidades* (que son una cierta combinación lineal de las velocidades generalizadas) [2]. Un ejemplo de cuasi-velocidades usadas comúnmente sería la proyección de la velocidad angular de un cuerpo rígido a sus principales ejes de inercia utilizando ángulos de

Euler y sus derivadas, es decir:

$$\begin{aligned} p &= \text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi)\dot{\psi} + \text{cos}(\varphi)\dot{\theta}, \\ q &= \text{sen}(\theta)\text{cos}(\varphi)\dot{\psi} - \text{sen}(\varphi)\dot{\theta}, \\ r &= \text{cos}(\theta)\dot{\psi} + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

En este caso, las cuasi-velocidades  $p$ ,  $q$  y  $r$  se distinguen de las velocidades generalizadas  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\theta}$  por el hecho de que no son la derivada con respecto al tiempo de ninguna de las coordenadas generalizadas ( $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\theta$ ). En forma general las cuasi-velocidades pueden ser escritas como

$$v_i = f_i(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}); \quad (1.2)$$

para el caso en el que las cuasi-velocidades de la forma (1.2) son integrales, las coordenadas generalizadas que determinan la configuración del sistema pueden ser encontradas simplemente integrando  $v_i$  con respecto al tiempo. Por otro lado, si las cuasi-velocidades no son integrales, se utilizan las cantidades

$$\pi_i = \int_0^t v_i dt, \quad (1.3)$$

que tienen un cierto parecido a las coordenadas generalizadas, pero ya no son función de la configuración del sistema. Las cantidades  $\pi_i$  son conocidas como cuasi-coordenadas [2].

## Grados de libertad y restricciones cinemáticas

La definición más común sobre el número de *grados de libertad* (o, por simplicidad, *g.d.l.*) de un sistema mecánico es el número de parámetros *independientes* que determinan su configuración. Y como las coordenadas generalizadas son justamente las que describen tal configuración, el número de grados de libertad es también el número *mínimo* de coordenadas generalizadas que se requieren en el sistema.

En el párrafo anterior, es importante resaltar el hecho de que se trata del *mínimo* número de coordenadas generalizadas, ya que, como se explicó anteriormente, es posible emplear un conjunto de coordenadas generalizadas que sea no *mínimo*; en tal caso, el sistema tendría más coordenadas generalizadas que grados de libertad.

Sea  $n$  el número de grados de libertad de un sistema y  $m$  el número de coordenadas generalizadas empleadas para describir su configuración. Si  $m > n$  entonces deben existir  $r = m - n$  restricciones de configuración. Dicho de otra manera, el número de grados de libertad se puede obtener simplemente restando el número de coordenadas generalizadas (dependientes) que se empleen menos el número de restricciones de configuración entre ellas.

Es importante recalcar que lo anterior es válido únicamente para el caso de sistemas holonómicos, donde un movimiento arbitrario del sistema puede ser representado en el espacio de configuración por cierta curva, y viceversa. Sin embargo, esto no es una regla general para el caso de sistemas no holonómicos; en estos sistemas, sólo ciertas curvas en el espacio de configuración corresponden a movimientos del sistema compatibles con las restricciones. Esto es debido a que ahora los diferenciales de las

coordenadas generalizadas que definen los desplazamientos deberán satisfacer ciertas restricciones no holonómicas. En relación con el problema de eliminar las reacciones de restricciones ideales (el principal problema en la obtención de ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos) es común aplicar el concepto de *desplazamientos virtuales*. Las variaciones virtuales de las coordenadas generalizadas son variaciones de las coordenadas que deben satisfacer las restricciones no holonómicas. Desplazamientos del sistema que corresponden a las variaciones virtuales de las coordenadas generalizadas son llamados desplazamientos virtuales. De acuerdo a esto, los desplazamientos virtuales de un sistema pueden considerarse como el posible desplazamiento de un sistema que tiene las mismas restricciones homogéneas independientes del tiempo que el sistema original en un instante de tiempo dado.

De esta manera, en general, el número de desplazamientos virtuales linealmente independientes de un sistema corresponde con su número de grados de libertad [2]. En el caso de los sistemas holonómicos es el número de coordenadas generalizadas mínimas. Pero éste no es el caso para sistemas no holonómicos, en el cual el número de grados de libertad es el número de coordenadas generalizadas menos el número de restricciones no holonómicas.

El número de grados de libertad es una característica de un sistema mecánico y es independiente de las coordenadas utilizadas para describir su configuración. En otras palabras, a pesar de que se puede seleccionar el número y tipo de coordenadas generalizadas en más de una manera, el valor  $n = m - r$  es invariante.

Debe notarse que si el sistema mecánico bajo estudio queda caracterizado por  $p$  partículas moviéndose en un espacio de dimensión  $d$ , entonces el número de coordenadas generalizadas sería  $m = dp$  y, en caso de existir  $r$  restricciones de configuración, el número de grados de libertad quedaría:

$$n = dp - r. \quad (1.4)$$

Las restricciones de configuración se conocen también como *restricciones holonómicas* y un sistema que posee este tipo de restricciones se denomina *sistema holonómico*. En general, una restricción holonómica entre las  $m$  coordenadas generalizadas del vector  $\rho$  es una ecuación de la forma  $\alpha(\rho) = 0$ , y si  $\rho \in \mathbb{R}^m$  es el vector de coordenadas de configuración de un sistema holonómico de  $n$  grados de libertad, entonces las  $r = m - n$  restricciones holonómicas se pueden agrupar en un *vector de restricciones holonómicas* de la forma

$$\alpha(\rho) = [\alpha_1(\rho) \quad \alpha_2(\rho) \quad \cdots \quad \alpha_r(\rho)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r. \quad (1.5)$$

Y debe notarse que si se deriva (1.5) con respecto al tiempo pueden obtenerse también restricciones que involucran a las velocidades y aceleraciones generalizadas:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\rho, \dot{\rho}) &= \mathbf{0}, \\ \ddot{\alpha}(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Pero es importante mencionar que también hay sistemas que no tienen restricciones en el espacio de configuración ( $M^n$ ), pero sí en el espacio

de las velocidades ( $T_\rho M^n$ ) o incluso en el espacio de las aceleraciones ( $T_{\dot{\rho}}(T_\rho M^n)$ ). Tales restricciones se conocen como *restricciones no holonómicas* y los sistemas que las poseen son *sistemas no holonómicos*.

Existen en general dos tipos de restricciones no holonómicas. Una *restricción no holonómica de primer orden* es aquella que se puede expresar en la forma

$$\beta(\rho, \dot{\rho}) = 0, \quad (1.6)$$

pero no es posible integrar (1.6) para obtener una restricción que dependa sólo de  $\rho$  (o, en otras palabras, no es posible escribir  $\beta(\rho, \dot{\rho})$  como la derivada temporal de una función  $\alpha(\rho)$ ). Asimismo, una *restricción no holonómica de segundo orden* es una expresión de la forma

$$\gamma(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}) = 0 \quad (1.7)$$

que no es integrable (no es posible escribir  $\gamma(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho})$  como la derivada temporal de una función  $\beta(\rho, \dot{\rho})$ ).

**Definición 1.1.1** *Un sistema mecánico es no holonómico si éste tiene restricciones no holonómicas [2].*

## Cuerpos rígidos y postura

Un *cuerpo rígido* es, por definición, un objeto físico con la característica de que si se toman dos puntos dentro del mismo, la distancia entre ellos se mantiene constante en todo momento. En otras palabras, un cuerpo rígido es un objeto sólido no deformable. Y aunque se trata de una idealización, este concepto resulta ser muy útil en el estudio de mecánica de sólidos.

Sean  $P_i$  y  $P_j$  dos puntos cualesquiera pertenecientes a un cuerpo rígido, con coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  y  $(x_j, y_j, z_j)$ , respectivamente, respecto a un mismo marco de referencia, y sea  $d_{ij}$  la distancia entre esos dos puntos; es decir,

$$d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad (1.8)$$

entonces, aunque el cuerpo se encuentre en movimiento, al ser rígido se debe cumplir siempre que  $d_{ij}$  es constante.

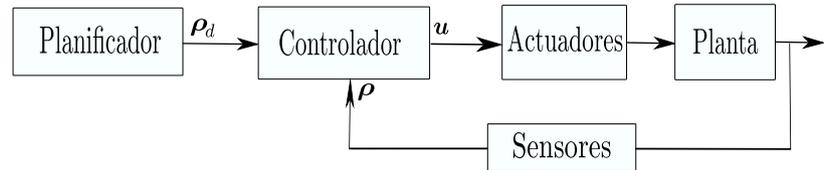
En este documento se denomina *postura* (en inglés “pose”) a la combinación de la posición y orientación de un cuerpo rígido en el espacio. Se tiene entonces que, en general, para un cuerpo rígido que se mueve en un espacio de dimensión  $d$ , el espacio de configuración de la postura es de dimensión  $\frac{d(d+1)}{2}$ , o, lo que es lo mismo, se requieren  $\frac{d(d+1)}{2}$  g.d.l. para determinar la postura de un cuerpo rígido. De éstos,  $d$  g.d.l. determinan la posición y los restantes  $\frac{d(d-1)}{2}$  g.d.l. dan la orientación del cuerpo.

## 1.2. Fundamentos de robótica

En general, un robot es un mecanismo automático, controlado, reprogramable y capaz de posicionar y orientar piezas, útiles o dispositivos

especiales, siguiendo trayectorias definidas por el usuario, para la ejecución de diversas tareas. Su unidad de control incluye un dispositivo de memoria y, ocasionalmente, de percepción del entorno. Normalmente su uso consiste en realizar una tarea de manera cíclica, adaptándose a otra sin cambios permanentes en su estructura [3].

La Figura 1.1 presenta el diagrama esquemático de un sistema de control de robots.



**Figura 1.1:** Diagrama de bloques de un sistema de control de robots.

Generalmente existe un planificador de tareas quien se encarga de definir la tarea deseada y encomendada al robot. La salida del planificador ( $\rho_d$  en la Figura) se usa como referencia deseada en el controlador, cuya función es generar una señal de control  $u$  que garantice que el robot se mueva manteniendo la salida real del robot  $\rho$  lo más cercana posible a la referencia  $\rho_d$ .

Pero es interesante notar que los bloques de la Figura 1.1 representan también los cuatro aspectos que son de interés cuando se trabaja con robots en general:

- *Modelado:* El conocimiento de todos los parámetros físicos del robot y de las relaciones entre ellos. Los modelos matemáticos (cinemático y dinámico) se extraen de las leyes físicas que rigen el movimiento del robot. La cinemática es importante puesto que relaciona las coordenadas articulares con las coordenadas de postura del elemento de interés, así como sus derivadas respecto al tiempo. La dinámica, por otro lado, toma en cuenta las masas y fuerzas que producen un movimiento dado.
- *Planificación de tareas:* Es el proceso de especificar las diferentes tareas para el robot, ya sea en coordenadas articulares o en coordenadas de postura. Esto puede involucrar desde el diseño y aplicación de trayectorias simples a lo largo de rutas precalculadas (lo que se denomina *planificación de trayectorias*) hasta el empleo de complejos algoritmos computacionales que toman decisiones en tiempo real durante la ejecución de una tarea.
- *Control:* Contiene los elementos que permiten asegurar el cumplimiento de las tareas especificadas, a pesar de la existencia de perturbaciones o dinámicas no modeladas. De acuerdo al tipo de variables usadas en el lazo de control se pueden tener controladores en espacio articular o en espacio de postura. Los algoritmos de control de robots pueden ser ejecutados ya sea a bajo nivel (por ejemplo, en controladores electrónicos en los manejadores de los actuadores) o a través de sofisticados programas de alto nivel en una computadora personal.
- *Implementación:* Consiste en aplicación y validación de los aspectos anteriores (que generalmente suponen condiciones ideales) en un robot real, considerando situaciones de carácter práctico que se presentan principalmente en los sensores y actuadores. Aquí

se pueden incluir los efectos de la discretización debida al uso de sistemas digitales, la estimación de estados a partir de las mediciones de los sensores, las no linealidades intrínsecas como la fricción en las articulaciones, y el modo de operación de los actuadores, que determina el tipo de señales que se deben emplear como señales de control.

## 1.3. Sistemas no holonómicos

### Generalidades

De acuerdo con [4], se pueden considerar tres causas que originan la característica de no holonomía entre los sistemas mecánicos:

1. El contacto rodante entre dos cuerpos sin deslizamiento.
2. La conservación del momento angular de ciertos mecanismos.
3. Mecanismos robóticos bajo una operación de control especial.

Algunas ejemplos que se presentan debido a la primera causa son:

- Robots móviles con ruedas y vehículos donde el contacto rodante toma lugar entre las ruedas y una superficie. Además, éste es el ejemplo más común de sistemas no holonómicos (Figura 1.2).
- Manipulación diestra con manos robóticas multidedos, donde la restricción se presenta en el contacto rodante de la punta de los dedos con los objetos.

La segunda situación, en la que las restricciones no holonómicas entran en juego, es cuando en el movimiento de un sistema mecánico que presenta ciertas propiedades de simetría existen cantidades conservadas. Si estas cantidades conservadas, por ejemplo el momento angular, no son integrables, puede ser interpretada como una restricción no holonómica. La conservación del momento angular produce una restricción diferencial que es no integrable.

Sistemas que caen en esta segunda clase son los sistemas multicuerpo que están flotando libremente, i.e., sin tener una base fija, por ejemplo:

- Robots manipuladores montados en estructuras espaciales.
- Robots brincadores, o un mecanismo que pueda imitar las maniobras de un gimnasta o un clavadista (en fase de vuelo).
- Satélites con ruedas de reacción para la estabilización de su postura (orientación).

Finalmente, la tercer causa de comportamiento no holonómico es la operación de un controlador, en particular adoptada en algunas estructuras robóticas. Como ejemplos se pueden mencionar:

- Robots redundantes bajo un control de cinemática inversa particular.
- Sistemas robóticos subacuáticos y embarcaciones donde la propulsión hacia adelante se permite sólo en la dirección de orientación.
- Robots manipuladores subactuados.



Figura 1.2: Robot móvil con ruedas SEEKUR de la Empresa MobileRobots.

El criterio para la verificación de no holonomía (o no integrabilidad) de restricciones puede ser obtenido utilizando el teorema de Frobenius [5]. Además, es importante notar que en el caso de la primera causa (rodamiento de dos cuerpos) las restricciones no holonómicas deben ser consideradas *a priori* cuando se desea calcular las ecuaciones de movimiento, a diferencia de las razones 2 y 3 donde las restricciones surgen como resultado de las ecuaciones de movimiento o del controlador a implementar.

## Breve historia del estudio de sistemas no holonómicos

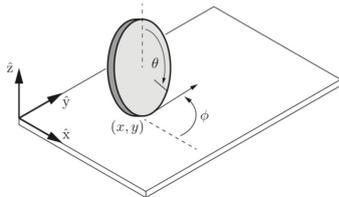
Es importante resaltar la importancia del estudio de sistemas no holonómicos; con este fin, en los siguientes párrafos se hace un resumen sobre sistemas no holonómicos publicado en [6] y [7], sobre la obtención de ecuaciones de movimiento (Modelado), y sobre los trabajos publicados en [8] y [9] respecto al control de este tipo de sistemas.

### Ecuaciones de movimiento

Los primeros estudios sobre el tema empezaron con varias versiones del problema de un cuerpo rígido rodando sin derrape sobre una superficie plana (Figura 1.3). La publicación más antigua que aborda el tema es de Euler [10]. Entre los primeros trabajos donde se obtuvieron las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido sobre un plano fue el realizado por G. Slesser [11]; quien utilizó los principios generales de dinámica y una eliminación explícita de las restricciones en las fuerzas de reacción. Posteriormente, en 1872, Ferres [12] mostró explícitamente que las ecuaciones de movimiento de un sistema con restricciones diferenciales no se podían representar utilizando las ecuaciones de Lagrange, al menos no en forma general, siendo éste uno de los primeros trabajos en notar que las herramientas conocidas de la mecánica clásica tenían problemas al ser usadas en sistemas no holonómicos.

Sin embargo, fue hasta 1894 cuando se comprendió de forma general la imposibilidad de aplicar las ecuaciones de Lagrange y los principios variacionales a sistemas no holonómicos debido al trabajo de H. Hertz [13] (Figura 1.4). En dicho trabajo, Hertz menciona que el principio de Hamilton no puede ser utilizado en sistemas no holonómicos; o, propiamente dicho, la aplicación del principio de Hamilton, que matemáticamente es posible, da resultados que son físicamente falsos. Las observaciones de Hertz fueron estudiadas y desarrolladas por H. Poincaré [14], quien obtuvo como resultados una prueba elemental de no holonomicidad de restricciones en el problema de una esfera rodando en un plano y notó que el principio de Hamilton (principio de mínima acción) no puede ser aplicado a sistemas no holonómicos.

Otros trabajos de gran importancia en el siglo XIX fueron los publicados por Lindelöf, P. Appel y C. Neumann [15-17]. Lindelof utilizó las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema no holonómico, sustituyendo las restricciones no holonómicas en la energía cinética, dicho procedimiento fue erróneo. Debido a este resultado, el trabajo de P. Appel, quien se basó en los resultados obtenidos por Lindelof, fue erróneo también. Por otra parte, C. Neumann cometió



**Figura 1.3:** Ejemplo simple de un sistema no holonómico: Rueda girando sin derrape en una superficie plana.



**Figura 1.4:** Heinrich Hertz, físico alemán del siglo XIX, fue el primero en utilizar el término *no holonómico*, para referirse a estos fenómenos.

un error al aplicar el principio de Hamilton a sistemas no holonómicos, el cual corrigió él mismo en un trabajo posterior [18]. Otros trabajos que contienen errores similares fueron publicados por E. Crescini [19], G. Schouten [20], P. Molenbrock [21] y L. Boltzmann [22].

Los errores cometidos crearon en esa época un ímpetu por corregirlos, lo que provocó un mayor desarrollo en el estudio de sistemas no holonómicos. Uno de las consecuencias más relevantes de dichos errores fueron los estudios de S. A. Chaplygin (1897) [23]; quien después de revisar el error de Lindelof a detalle logró obtener una forma correcta de las ecuaciones de movimiento y examinó en detalle el movimiento de un cuerpo giratorio (en particular el movimiento de un disco) en un plano. Además, Chaplygin fue el primero en obtener la forma general de las ecuaciones de movimiento de sistemas no holonómicos en la cual multiplicadores indeterminados se eliminan y los términos de no holonomicidad son señalados explícitamente.

Adicional al trabajo de Chaplygin, aportes importantes a la obtención de las ecuaciones de movimiento utilizando multiplicadores indeterminados, o quasi-velocidades en la forma general, fueron obtenidos por Hamel [24]. Un hecho importante a notar en el trabajo de Hamel fue la aplicación de la teoría de Lie que utilizó para la obtención de las ecuaciones de movimiento. Algunas formas de ecuaciones, que difieren en el método de eliminación de multiplicadores, fueron obtenidos por V. Volterra [25] y P. V. Voronets [26], quienes a diferencia de Hamel no utilizaron el formalismo de la teoría de Lie; por G. Maggi [27] y I. Tzénoff [28], cuyos métodos son utilizados ocasionalmente dependiendo del problema en consideración.

Posteriormente, en su libro [29], Hamel comparó varias formas de las ecuaciones de movimiento de Voronets, Tzénoff y Volterra, probando que todas podían ser obtenidas utilizando su aproximación general. Por otro lado, Voronets debe ser reconocido por aplicar las consideraciones de mecánica de sistemas no holonómicos a sistemas hamiltonianos. Esto hizo posible un avance considerable en cuestiones de reducción de un sistema de  $n$  cuerpos en un plano y en encontrar soluciones parciales al mismo problema [30].

Alrededor de 1913 un nuevo periodo en el estudio de la mecánica de sistemas no holonómicos empezó con los principios geométricos. Algunos de los trabajos más importantes en esta nueva era son los publicados por J. A. Schouten [31], G. Vránceanu [32], E. Cartan [33] y V. Vagner [34]. Sin embargo, hay que hacer notar que hasta la fecha no se ha encontrado aplicación para los métodos de geometría no holonómica en la mecánica de sistemas no holonómicos [6]. A pesar de esto, es importante notar que el estudio del uso de herramientas geométricas para el análisis de sistemas no holonómicos ayudó a desarrollar herramientas importantes que son utilizadas en otras áreas, entre éstas el Teorema de Chow–Rashevskii<sup>2</sup> (el cual es de gran importancia en el área de control).

Como consecuencia del gran número de estudios que se hicieron durante este periodo, se destaca el inicio del estudio del problema de la dinámica de vehículos con ruedas; por ejemplo, están los trabajos de B. Stücker, [35, 36], quien consideró dos modelos de un vehículo motorizado con el eje trasero fijo. Una característica especial de estos trabajos es el análisis de reacciones y la utilización de las ecuaciones de Hamel. Un análisis

2: En geometría sub-riemanniana, el Teorema de Rashevsky-Chow afirma que dos puntos cualesquiera de una variedad sub-riemanniana conexa, junto con una distribución generada a partir de corchetes, están conectados por un camino horizontal dentro de la variedad.

de estabilidad de un vehículo simple de dos ruedas fue realizado por I. Rocard en su libro [37], en donde encontró que el movimiento rectilíneo presenta inestabilidad asintótica (lo cual es una característica de los sistemas no holonómicos). Estudios recientes sobre el estudio de la dinámica de vehículos con ruedas fueron iniciados principalmente por el desarrollo de la robótica [38, 39].

La siguiente etapa en el desarrollo de teorías de sistemas no holonómicos está fuertemente relacionada al libro publicado por Yu. I. Neimark y N. A. Fufaev en 1967 [2], dicho desarrollo fue iniciado con diversas aplicaciones a mecánica de sistemas no holonómicos. Dicho libro, además del análisis de problemas elementales, da una idea general sobre nuevas áreas de investigación y aumenta el cuestionamiento acerca de equilibrios específicos de sistemas no holonómicos.

Algunas aportaciones importantes que deben ser mencionadas son también las ecuaciones de Kane [40], el cual presenta una metodología propia para encontrar las ecuaciones de movimiento para sistemas no holonómicos; dicho trabajo se aplicó al área de robótica en su trabajo posterior [41], y una interpretación geométrica del mismo fue publicada en M. Lesser [42]. Además, múltiples estudios mostraron la relación entre las ecuaciones de Kane, las ecuaciones de Maggi y las ecuaciones de Gibbs-Appel [43-46]. En cuanto a los métodos de Euler-Lagrange y Hamilton para sistemas mecánicos con restricciones no holonómicas pfaffianas, el estudio se ha centrado en la eliminación de los multiplicadores de Lagrange; los trabajos de Van der Schaft [47], Duindam [48] y Ghorbel [49] proponen la eliminación de los multiplicadores utilizando una matriz que sea el espacio nulo de la matriz de restricciones.

## 1.4. Objetivos

Una de las principales motivaciones para realizar el presente trabajo, es que no es muy poco común encontrar documentos en los cuales no queda definido de manera clara o correcta lo que es un sistema no holonómico o las implicaciones que pueden llegar a existir al trabajar con este tipo de sistemas<sup>3</sup>. Esto se debe principalmente a que al menos en el área de robótica y control, los primeros mecanismos con los cuales se empieza a aprender esta teoría son sistemas holonómicos (los cuales pueden ser vistos particular de los sistemas no holonómicos), específicamente los robots manipuladores seriales. Debido a esto, cuando se empieza a trabajar con sistemas no holonómicos se llegan cometer errores, como los que llegaron a cometer los investigadores a finales del siglo XIX, al momento de tratar de aplicar las herramientas de sistemas holonómicos en sistemas no holonómicos. Por lo tanto, el fin del presente trabajo de tesis es resolver algunas de las incógnitas y desarrollar un documento, donde puedan ser consultadas generalidades sobre sistemas no holonómicos.

Mediante este proyecto de tesis doctoral se pretende, en primer lugar, adquirir conocimiento en temas relacionados con el modelado, la planificación de movimiento y el control automático de sistemas no holonómicos (SNH), entre los cuales se encuentran no sólo los robots móviles con ruedas (SNH de primer orden) sino también algunos tipos de

3: En algunos casos, incluso es posible encontrar afirmaciones sin sustento respecto a las propiedades de los sistemas no holonómicos.

robots manipuladores redundantes y subactuados, así como sistemas que presentan ciertas propiedades de simetría (SNH de segundo orden).

Además, se busca la validación experimental de los modelos obtenidos, así como la implementación de los diferentes algoritmos de planificación y control desarrollados para algunos sistemas no holonómicos reales. Para esto se consideran algunos prototipos que ya se encuentran a nuestra disposición en el Laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna.

Por lo tanto, los objetivos específicos de la tesis son los siguientes:

1. Estudiar los fundamentos teóricos del modelado (cinemático y dinámico) de sistemas no holonómicos en general.
2. Revisar, y en su caso proponer, algoritmos que se puedan implementar en sistemas no holonómicos para resolver los problemas de planificación y control.
3. Obtener y validar el modelo, incluyendo aspectos como el modo de operación de los actuadores y la fricción, de algunos sistemas no holonómicos reales.
4. Evaluar experimentalmente algoritmos de control en sistemas no holonómicos.



## 2.1. Formas diferenciales

En geometría diferencial y cálculo tensorial, una forma diferencial es una aproximación al cálculo multivariable, el cual es independiente de las coordenadas [50]. Las formas diferenciales proveen una aproximación unificada para definir integrales sobre curvas, superficies, volúmenes y variedades de dimensión más alta. Por ejemplo, la expresión  $f(x)dx$  del cálculo de una variable es una 1-forma, y puede ser integrada en un intervalo  $[a, b]$  en el dominio de  $f$

$$\int_a^b f(x)dx.$$

De manera similar, la expresión  $f(x, y, z)dx \wedge dy + g(x, y, z)dx \wedge dz + h(x, y, z)dy \wedge dz$  es una 2-forma que tiene una integral de superficie sobre una superficie orientada.

$$\int_s (f(x, y, z)dx \wedge dy + g(x, y, z)dx \wedge dz + h(x, y, z)dy \wedge dz).$$

El símbolo  $\wedge$  denota el producto exterior, o producto cuña, de dos formas diferenciales. Igualmente, una 3-forma  $f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$  representa un elemento de volumen que puede ser integrado sobre una región de espacio. En general una  $p$ -forma es un objeto matemático que puede ser integrado sobre conjuntos  $p$ -dimensionales.

El álgebra de formas diferenciales se organiza de una manera que refleja naturalmente la orientación del dominio de integración. Además, existe la operación  $d$  en formas diferenciales conocida como la derivada exterior. Esta operación extiende la derivada de una función, y está directamente relacionada con la divergencia y la curvatura de un campo vectorial de una manera que hace que el teorema fundamental del cálculo, el teorema de la divergencia, el teorema de Green y el teorema de Stoke sean casos especiales del mismo resultado general.

Algunas de las formas diferenciales vistas desde el punto de cálculo son las siguientes [51]:

- **0-Forma:** Una función escalar  $f$  en el cálculo convencional es una 0-forma del cálculo exterior.
- **1-Forma:** En cálculo vectorial, el gradiente de una función escalar  $f$  es un vector, pero la definición más precisa y general del gradiente es la diferencial 1-forma del cálculo exterior, es decir

$$\omega_{gradf}^1 = df.$$

- **2-Forma:** El rotacional de un vector  $v$  puede ser remplazado por

una 2-forma del cálculo exterior:

$$\omega_{rotv}^2 = d\omega_v^1,$$

el cual está dado por la derivada exterior  $d$  de la 1-forma  $\omega_v^1$  correspondiente al vector  $v$ .

## Operaciones y propiedades de las formas diferenciales

Algunas de las operaciones y propiedades de las formas diferenciales [50] son:

Sean  $\omega$  y  $\pi$  dos 1-formas definidas como

$$\omega = f(x)dx \quad \pi = g(x)dx$$

la suma de estas dos 1-formas está dada por:

$$\omega + \pi = (f(x) + g(x))dx$$

y el resultado es una 1-forma también. La multiplicación de una 1-forma  $\omega$  por cualquier función  $g(x)$  está definida como:

$$g\omega = g f(x)dx.$$

Sin embargo, cuando el producto de dos 1-formas  $\omega$ ,  $\pi$  es considerado, se utiliza el producto exterior (o producto cuña) de  $\omega$  y  $\pi$ , que se denota como

$$\omega \wedge \pi,$$

el cual cumple con las siguientes propiedades:

- **Asociatividad:**  $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ .
- **Anticonmutatividad:** Si  $A$  es una  $p$ -forma y  $B$  es una  $q$ -forma entonces:

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A.$$

- **Distributividad:**  $(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$ .
- Además, el producto de una  $p$ -forma consigo misma es 0, i.e.  $A \wedge A = 0$

Por último, sea  $\bar{\omega}$  una  $p$ -forma dada como

$$\bar{\omega} = c(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

donde el termino  $c(x)$  es un mapeo de clase  $C^1$ , entonces es posible obtener la *derivada exterior* de  $\bar{\omega}$ , denotada  $d\bar{\omega}$  con la siguiente fórmula

$$d\bar{\omega} = dc \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p. \quad (2.1)$$

Además, la derivada exterior tiene las siguientes propiedades:

- Teorema (2.5.1) [50]: la operación  $d$  aplicada dos veces es igual a 0

$$d(d\omega) = 0$$

- La derivada exterior de una  $p$ -forma da como resultado una  $(p + 1)$ -forma.

Para más detalle sobre formas diferenciales y otras herramientas interesantes de la geometría diferencial consulte [52-54].

## 2.2. Integrabilidad

Es importante recordar que la palabra holonomía se refiere a la integrabilidad, por lo tanto, verificar la integrabilidad de ciertas ecuaciones o grupo de ecuaciones es de suma importancia cuando se busca clasificar o identificar sistemas holonómicos o no holonómicos. Con este fin, es posible utilizar las diferentes formas del teorema de Frobenius, el cual se explica a detalle a continuación.

### Teorema de Frobenius

Al mencionar el teorema de Frobenius, uno piensa en su forma más general, la cual establece que dado un conjunto de campos vectoriales suaves  $x_1, \dots, x_d$  en una variedad  $\mathcal{M}$  es posible definir una distribución  $\Delta$ , esto es, un espacio generado por el conjunto de campos vectoriales, la cual está dada por:

$$\Delta = \text{span}\{x_1, \dots, x_d\}, \quad (2.2)$$

además la distribución (2.2) será **involutiva** si para cualquier par de campos vectoriales  $x_j, x_k$  con valores en  $\Delta$ , el producto de Lie  $[x_j, x_k]$  es también un campo vectorial con valores en  $\Delta$ .

**Teorema 2.2.1** *La distribución (2.2) es integrable si y sólo si ésta es involutiva [55].*

Desafortunadamente, este resultado está en términos de campos vectoriales en  $\Delta$ , no en términos de restricciones de la forma (1.6) y (1.7) por lo que esta herramienta no es la adecuada para verificar la integrabilidad de las restricciones de primero y segundo orden.

Una alternativa cuando se busca verificar la integrabilidad de ecuaciones escalares, es decir

$$\beta(\rho, \dot{\rho}) = \omega(\rho)\dot{\rho} = 0 \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

es utilizar herramientas de geometría diferencial, como las formas diferenciales, para aplicar las pruebas de integrabilidad a este tipo de ecuaciones.

### Teorema de Frobenius para restricciones de primer orden

Existe una caracterización del teorema de Frobenius cuando se cuenta con restricciones escalares de la forma (2.3) con tres o más variables [56]. Por lo tanto, suponiendo que se tiene una restricción lineal cinemática definida como:

$$\beta(\rho, \dot{\rho}) = \omega(\rho)\dot{\rho} = \sum_{i=1}^n \omega_i(\rho)\dot{\rho}_i = 0 \quad (2.4)$$

El teorema de Frobenius para este tipo de ecuaciones está dado por:

**Teorema 2.2.2** *La restricción de primer orden (2.4) es holonómica si y sólo si, para cualesquiera  $i, j, k \in [1, n]$  donde  $1 \leq i < j < k \leq n$ , se tiene que  $A_{ijk} = 0$ , con:*

$$A_{ijk} = \omega_i \left( \frac{\partial \omega_k}{\partial \rho_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial \rho_k} \right) + \omega_j \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho_k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial \rho_i} \right) + \omega_k \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial \rho_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho_j} \right) \quad (2.5)$$

Dicho método resulta de gran utilidad, debido a que los sistemas con los que se trabaja en este documento tienen tres o más variables y por lo tanto se puede utilizar esta forma del Teorema de Frobenius en dichos sistemas.

### Teorema de Frobenius para restricciones de segundo orden

Primero, para aplicar el teorema es necesario convertir el conjunto de restricciones de segundo orden (2.6) a las 1-formas (2.7) correspondientes.

En la literatura han sido propuestos diversos métodos para verificar la integrabilidad de restricciones en los sistemas diferenciales, uno de los más importantes es el propuesto por [56], pero dicho método no es práctico cuando se cuenta con restricciones de segundo orden (restricciones que aparecen en la dinámica de sistemas subactuados). Debido a esto, se han propuesto diversos métodos para verificar la integrabilidad de este tipo de restricciones, dos de los trabajos más conocidos son [57, 58]. Una limitante con la que cuentan estos trabajos es la falta de consideraciones prácticas (si se consideran elementos como la fricción no es posible aplicar el método) y que las condiciones propuestas en ambos trabajos son dependientes del modelo. Por lo tanto, a pesar de que las condiciones de estos trabajos son consideradas como necesarias y suficientes, son únicamente suficientes [59].

En [60] se propone una estrategia menos utilizada del teorema de Frobenius, en la cual se utilizan las formas diferenciales para estudiar la integrabilidad. Para poder aplicar el teorema, resulta de gran importancia poder escribir las ecuaciones del modelo dinámico en forma diferencial.

Considere un sistema mecánico subactuado con  $m$  coordenadas generalizadas y  $n$  entradas de control. Además, en un sistema subactuado, las ecuaciones donde no se tiene entrada de control pueden verse como una serie de restricciones de segundo orden que tienen la forma:

$$M_u(\rho)\ddot{\rho} + C_u(\rho, \dot{\rho}) + g_u(\rho) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k \quad (2.6)$$

donde  $\rho \in \mathbb{R}^m$ ,  $M_u(\rho) \in \mathbb{R}^{(m-n) \times m}$ ,  $C_u(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^{(m-n) \times m}$  y  $g_u(\rho) \in \mathbb{R}^{(m-n)}$ <sup>1</sup>. El primer paso para convertir dichas ecuaciones de restricción en forma diferencial es transformarlas en la forma normal de control, es

1: Donde  $M_u(\rho)$ ,  $C_u(\rho, \dot{\rho})$  y  $g_u(\rho)$  son un arreglo de matrices y vectores que contienen ecuaciones del modelo de la parte subactuada del sistema.

decir en ecuaciones diferenciales de primer orden. Sea  $x = [x_1 \ x_2]^T$  y

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_m \end{bmatrix} = \rho, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \vdots \\ \dot{\rho}_m \end{bmatrix} = \dot{\rho}.$$

Entonces  $dx_1 = x_2 dt, M_u(x_1)dx_2 + C_u(x)dt + g_u(x_1)dt = 0 \in \mathbb{R}^m$ , donde

$$M_u(x_1) = \begin{bmatrix} m_{n+1,1} & m_{n+1,2} & \dots & m_{n+1,m} \\ m_{n+2,1} & m_{n+2,2} & \dots & m_{n+2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m,1} & m_{m,2} & \dots & m_{m,m} \end{bmatrix},$$

$$C_u(x) = \begin{bmatrix} c_{n+1,1} & c_{n+1,2} & \dots & c_{n+1,m} \\ c_{n+2,1} & c_{n+2,2} & \dots & c_{n+2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,m} \end{bmatrix}, \quad g_u(x_1) = \begin{bmatrix} g_{n+1} \\ g_{n+2} \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}.$$

Ahora defínase

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx_1, \\ &\vdots \\ \omega_n &= dx_m, \\ \omega_{m+1} &= dx_1 - x_{m+1}dt \\ &\vdots \\ \omega_{2m} &= dx_m - x_{2m}dt \\ \\ \omega_{2m+1} &= m_{n+1,1}dx_{m+1} + \dots + m_{n+1,m}dx_{2m} + c_{n+1,1}dt + \dots \\ &\quad + c_{n+1,m}dt + g_{n+1}dt \\ &\vdots \\ \omega_{3m-n} &= m_{m,1}dx_{m+1} + \dots + m_{m,m}dx_{2m} + c_{m,1}dt + \dots \\ &\quad + c_{m,m}dt + g_mdt \end{aligned} \tag{2.7}$$

Con esto, una secuencia de  $3m - n$  formas diferenciales han sido desarrolladas, donde  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  forman la base para las 1-formas diferenciales y además se tiene un sistema de  $m - n$  formas diferenciales dadas por  $\omega_{2m+1}, \omega_{2m+2}, \dots, \omega_{3m-n}$ .

El teorema de Frobenius para formas diferenciales [60]<sup>2</sup> es

2: O [50] para su aplicación general.

**Teorema 2.2.3** *El sistema (2.6) es integrable si y sólo si la forma diferencial se desvanece idénticamente de la siguiente manera:*

$$d\omega_i \wedge \omega_{2n+1} \wedge \omega_{2n+2} \wedge \dots \wedge \omega_{3n-m} = 0 \quad (2n + 1 \leq i \leq 3n - m), \tag{2.8}$$



## 3.1. Tipos de Sistemas No Holonómicos

Los sistemas no holonómicos pueden ser clasificados dependiendo del tipo de restricciones con las que cuentan, es decir hasta que punto es posible integrar dichas restricciones. Para identificar el nivel de integrabilidad de una restricción, se utiliza el teorema de Frobenius presentado en el capítulo anterior, una vez identificada el tipo de restricción con la que cuenta el sistema es posible clasificar dicho sistema.

### Sistemas no holonómicos de primer orden

Los sistemas no holonómicos de primer orden son aquellos que cuentan con restricciones del tipo (1.6), i.e., restricciones que no pueden ser integradas para quedar definidas únicamente por las coordenadas generalizadas.

Los ejemplos más comunes de sistemas de este tipo son los mecanismos donde existen superficies en contacto que deben girar sin deslizamiento, por ejemplo mecanismos con ruedas. En este tipo de sistemas las restricciones deben de ser consideradas antes de iniciar con el proceso de modelado. Es importante notar que deben utilizarse herramientas más generales para el modelado de este tipo de sistemas, debido a que las herramientas para sistemas holonómicos no pueden ser utilizadas en este tipo de sistemas.

Otro tipo de sistemas no holonómicos de primer orden son aquellos cuyas restricciones aparecen en función de las aceleraciones y como consecuencia del cálculo del modelo dinámico de dicho sistema. En este tipo de sistemas, las restricciones únicamente pueden ser integradas una vez, por lo que no se puede encontrar la restricción en función de las coordenadas generalizadas y se tiene una restricción del tipo (1.6). Un ejemplo de este tipo de sistemas son los sistemas con propiedades de conservación del momento angular, como el sistema giroscópico.

Por último, otro tipo de sistemas no holonómicos de primer orden que existe en el área de control, se presenta cuando al sistema a controlar se le aplica cierto esquema de control cinemático que hace que las ecuaciones del sistema tengan la forma

$$\dot{q} = G(q)u.$$

En el caso que dichas ecuaciones no puedan ser integradas, i.e., no cumplan con el teorema de Frobenius, se tiene un sistema no holonómico de primer orden. Además, en general este tipo de sistemas no cumplen con el teorema de Brockett por lo que no pueden utilizarse técnicas de control clásico.

### Sistemas no holonómicos de segundo orden

En este tipo de sistemas las restricciones aparecen en función de las aceleraciones generalizadas y estas no pueden ser integradas. Los ejemplos más comunes de este tipo de sistemas son algunos casos de sistemas subactuados, principalmente los que no cuentan con vector de gravedad. En la mayoría de los casos, se pueden utilizar herramientas de control de sistemas subactuados; aunque algunos casos de este tipo de sistemas ha llamado la atención de algunos investigadores pues es posible aplicar herramientas de geometría diferencial para el control de sistemas no holonómicos [61]

### 3.2. Clasificación de sistemas del laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna

Con el fin de clasificar algunos mecanismos del laboratorio de Mecatrónica y Control del Departamento de Estudios de Posgrado e Investigación del Tecnológico Nacional de México / I.T. La laguna, dependiendo del tipo de restricciones que tienen, se aplicarán las herramientas de integrabilidad explicadas en la Sección 2.2.

#### Sistemas No holonómicos de Primer Orden

##### Restricción en la plataforma Segway RMP-100

El Segway RMP-100 (Figura 3.1) es un robot interesante ya que no sólo es un robot móvil con ruedas, sino que también es un sistema subactuado; este tipo de sistemas son conocidos en la literatura como péndulo invertido sobre dos ruedas. En el caso de este robot, las restricciones interesantes surgen debido a las dos ruedas con las que cuenta el sistema. En la tesis [62] se detalla la metodología utilizada para obtener el modelo dinámico de ésta plataforma, así como las restricciones que deben de ser consideradas debido a las ruedas. Con el fin de clasificar este sistema, se considera la restricción con las que cuenta el móvil diferencial de no deslizamiento lateral de las ruedas. Dicha restricción está dada por la siguiente ecuación:

$$-\text{sen}(\theta)\dot{x} + \text{cos}(\theta)\dot{y} + 0\dot{\theta} = 0. \tag{3.1}$$

Además, si para este análisis se considera que  $\rho = [x \ y \ \theta]^T$  (Figura 3.2), donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas del robot y  $\theta$  es la orientación del marco del robot respecto a un marco fijo, de (3.1) es posible definir

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\text{sen}(\theta) \\ \omega_2 &= \text{cos}(\theta) \\ \omega_3 &= 0 \end{aligned}$$



Figura 3.1: Segway RMP-100 del laboratorio de Mecatrónica y Control del TecNM/ITL.

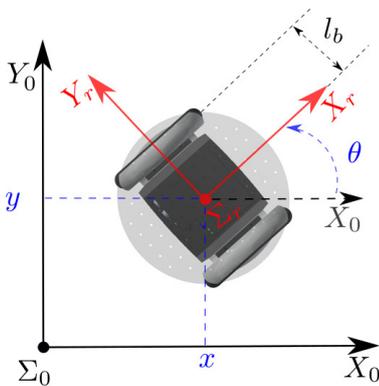


Figura 3.2: Diagrama del robot Segway RMP-100

y ahora, utilizando (2.5), es posible probar si la restricción es integrable o no, i.e.

$$\begin{aligned}
 A_{123} &= -\text{sen}(\theta) \left( \frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(\cos(\theta))}{\partial \theta} \right) + \cos(\theta) \left( \frac{\partial(-\text{sen}(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right) \\
 A_{123} &= -\text{sen}(\theta) (\text{sen}(\theta)) + \cos(\theta) (-\cos(\theta)) \\
 A_{123} &= -\text{sen}(\theta)^2 - \cos(\theta)^2 \\
 A_{123} &= -1 \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la teoría previamente vista, la restricción es no integrable y por lo tanto no holonómica. Además, como se tiene una restricción no holonómica en función de las velocidades generalizadas  $\dot{\rho}$ , la restricción es de primer orden, por lo que el Segway RMP-100 es un sistema no holonómico de primer orden.

### Giroscopio de Quanser

De acuerdo al modelo dinámico del giroscopio, obtenido en la tesis de maestría [63], debido a la conservación del momento angular, el giroscopio de Quanser (Figura 3.3) está sujeto a dos restricciones dadas por:

$$I_x \dot{q}_1 - I_x \text{sen}(q_2) \dot{q}_3 = 0 \tag{3.3}$$

$$-I_x \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 + (J_2 + J_1 \text{sen}(q_2)^2) \dot{q}_3 = 0 \tag{3.4}$$

donde el vector de coordenadas generalizadas puede ser definido como  $\rho = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ , con  $q_i$  como el ángulo de orientación del  $i$ -ésimo cuerpo del giroscopio. Por lo tanto, con el fin de clasificar este sistema, es necesario comprobar si estas restricciones son no holonómicas o no, es decir si son integrables; para esto se comprueba la condición dada en (2.5) para cada una de las restricciones. En lo que concierne a la restricción (3.3), se tiene que

$$\underbrace{I_x}_{\omega_1} \dot{q}_1 + \underbrace{0}_{\omega_2} \dot{q}_2 - \underbrace{I_x \text{sen}(q_2)}_{\omega_3} \dot{q}_3 = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
 A_{123} &= I_x \left( \frac{\partial(-I_x \text{sen}(q_2))}{\partial q_2} - \frac{\partial(0)}{\partial q_3} \right) - I_x \text{sen}(q_2) \left( \frac{\partial(0)}{\partial q_1} - \frac{\partial(I_x)}{\partial q_2} \right) \\
 A_{123} &= I_x (-I_x \cos(q_2)) = -I_x^2 \cos(q_2) \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

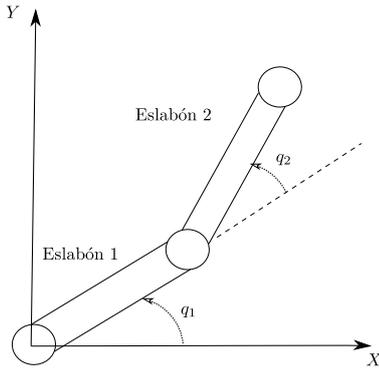
Por lo tanto, la restricción (3.3) no se puede integrar, i.e., es no holonómica.

Ahora, para la restricción (3.4), se tiene que

$$\underbrace{-I_x \text{sen}(q_2)}_{\omega_1} \dot{q}_1 + \underbrace{0}_{\omega_2} \dot{q}_2 + \underbrace{(J_2 + J_1 \text{sen}(q_2)^2)}_{\omega_3} \dot{q}_3 = 0$$



Figura 3.3: Plataforma Giroscópica de Quanser.



**Figura 3.4:** Diagrama de un robot subactuado serial de 2 g.d.l. en un plano horizontal.

así que  $A_{ijk}$  queda definida como:

$$\begin{aligned}
 A_{123} &= (J_2 + J_1 \sin(q_2)^2) \left( \frac{\partial(I_x \sin(q_2))}{\partial q_2} \right) - I_x \sin(q_2) \left( \frac{\partial(J_2 + J_1 \sin(q_2)^2)}{\partial q_2} \right) \\
 A_{123} &= -I_x \sin(q_2) (2J_1 \sin(q_2)) + (J_2 + J_1 \sin(q_2)^2) (I_x \cos(q_2)) \\
 A_{123} &= -2J_1 I_x \sin(q_2)^2 + J_2 I_x \cos(q_2) + J_1 I_x \sin(q_2)^2 \cos(q_2) \\
 A_{123} &= J_1 I_x \sin(q_2)^2 (\cos(q_2) - 2) + J_2 I_x \cos(q_2) \\
 A_{123} &\neq 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por lo tanto, la restricción (3.4) tampoco se puede integrar, i.e., es no holonómica. Debido a que las dos restricciones con las que cuenta el giroscopio son no holonómicas, es posible clasificar al sistema como un mecanismo no holonómico. Es importante notar que, aunque las restricciones aparecen hasta que se calcula el modelo dinámico del sistema, las restricciones con las que cuenta el giroscopio únicamente dependen de las coordenadas generalizadas y sus velocidades, por lo tanto se tienen restricciones no holonómicas de primer orden por lo que el giroscopio de Quanser es un sistema no holonómico de primer orden.

## Sistemas No holonómicos de Segundo Orden

### Robot subactuado serial de 2 g.d.l. en un plano horizontal

De acuerdo con [57], un mecanismo subactuado en un plano horizontal está sujeto a una restricción no holonómica cuando su segundo eslabón es subactuado. La ecuación de restricción está dada por:

$$m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 + \underbrace{(a_2 S_2 \dot{q}_1^2)}_{c_1} = 0 \tag{3.7}$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  son las coordenadas generalizadas, (ver Figura 3.4)  $m_{21} = a_3 + a_2 C_2$ ,  $m_{22} = a_3$ ,  $C_2 = \cos(q_2)$ ,  $S_2 = \sin(q_2)$  y  $a_1, a_2, a_3$  son constantes relacionadas con los parámetros del robot. Ahora, para revisar la integrabilidad de nuestra restricción, es necesario primero convertir nuestra ecuación de segundo grado en una 1-forma. Con este fin, se tiene que  $x_1 = [x_1 \ x_2]^T = [q_1 \ q_2]^T$  y  $x_2 = [x_3 \ x_4]^T = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$  y la 1-forma diferencial queda dada por:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= dx_1 \\
 \omega_2 &= dx_2 \\
 \omega_3 &= dx_1 - x_3 dt \\
 \omega_4 &= dx_2 - x_4 dt \\
 \omega_5 &= m_{21} dx_3 + m_{22} dx_4 + c_1 dt
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora, es necesario obtener la derivada exterior de (3.8), la cual está dada por

$$d\omega_5 = d(m_{21}) \wedge dx_3 + d(m_{22}) \wedge dx_4 + d(c_1) \wedge dt \tag{3.9}$$

Por lo tanto, para determinar si la restricción (3.7) es no holonómica, se utiliza la condición dada en (2.8), i.e., se calcula si el producto exterior entre las ecuaciones (3.8) y (3.9) es cero. Para esto primero se obtienen las derivadas necesarias:

$$\begin{aligned}
 d(m_{21}) &= \frac{\partial(a_3 + a_2C_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(a_3 + a_2C_2)}{\partial x_2} dx_2 \\
 d(m_{21}) &= \underbrace{-a_2S_2}_{a} dx_2 \\
 d(m_{22}) &= \frac{\partial(a_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(a_3)}{\partial x_2} dx_2 \\
 d(m_{22}) &= 0 \\
 d(c_1) &= \frac{\partial(a_2S_2x_3^2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(a_2S_2x_3^2)}{\partial x_2} dx_2 \\
 d(c_1) &= \underbrace{a_2C_2x_3^2}_{c} dx_2
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Una vez obtenidas las derivadas necesarias es posible calcular el producto exterior de (3.8) y (3.9) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 d\omega_5 \wedge \omega_5 &= (adx_2 \wedge dx_3 + cdx_2 \wedge dt) \wedge (m_{21}dx_3 + m_{22}dx_4 + c_1dt) \\
 &= \cancel{adx_2 \wedge dx_3 \wedge m_{21}dx_3} + \cancel{adx_2 \wedge dx_3 \wedge m_{22}dx_4} \\
 &\quad + \cancel{adx_2 \wedge dx_3 \wedge c_1dt} + \cancel{cdx_2 \wedge dt \wedge m_{21}dx_3} \\
 &\quad + \cancel{cdx_2 \wedge dt \wedge m_{22}dx_4} + \cancel{cdx_2 \wedge dt \wedge c_1dt} \\
 &= am_{22}dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (ac_1 - cm_{21})dx_2 \wedge dx_3 \wedge dt \\
 &\quad - cm_{22}dx_2 \wedge dx_4 \wedge dt
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

De acuerdo al resultado de (3.11), la restricción es no integrable, por lo que la restricción es no holonómica. Además, dicho resultado es consistente con los resultados obtenidos por [57]. Por lo tanto, un robot subactuado de 2 g.d.l. en un plano horizontal, cuyo segundo eslabón es el subactuado, es un sistema no holonómico de segundo orden, debido a que su restricción (3.7) involucra, las coordenadas generalizadas así como las velocidades y las aceleraciones generalizadas.

### Pendubot

El pendubot (Figura 3.5) es un robot de 2 grados de libertad rotacionales, de las cuales la segunda articulación es subactuada. De acuerdo con el modelo dinámico del motor [64], un pendubot está sujeto a una restricción de segundo orden dada por:

$$(\theta_2 + \theta_3C_2)\ddot{q}_1 + \theta_2\ddot{q}_2 + \theta_3S_2\dot{q}_1^2 + \theta_5gC_{1+2} = 0 \tag{3.12}$$

Para obtener la 1-forma de dicha restricción, primero se define que  $x_1 = [x_1 \ x_2]^T = [q_1 \ q_2]^T$  y  $x_2 = [x_3 \ x_4]^T = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$ . Por lo tanto,



Figura 3.5: Pendubot del laboratorio de Mecatrónica y Control del I.T. de la Laguna.

la forma diferencial queda dada por:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= dx_1 \\
\omega_2 &= dx_2 \\
\omega_3 &= dx_1 - x_3 dt \\
\omega_4 &= dx_2 - x_4 dt \\
\omega_5 &= \underbrace{(\theta_2 + \theta_3 C_2)}_{a_1} dx_3 + \underbrace{\theta_2}_{a_2} dx_4 + \underbrace{(\theta_3 S_2 x_3^2 + \theta_5 g C_{1+2})}_{a_3} dt \quad (3.13)
\end{aligned}$$

donde  $\theta_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, 5$ , son parámetros relacionados con el robot. Además, para continuar con el procedimiento, es necesario obtener la derivada exterior de (3.13), la cual está dada por

$$d\omega_5 = d(\theta_2 + \theta_3 C_2) \wedge dx_3 + d(\theta_2) \wedge dx_4 + d(\theta_3 S_2 x_3^2 + \theta_5 g C_{1+2}) \wedge dt \quad (3.14)$$

Entonces, para determinar si la restricción (3.7) es no holonómica, se utiliza la condición (2.8), i.e., se calcula el producto exterior entre las ecuaciones (3.13) y (3.14). Con este fin, primero se deben de obtener las derivadas necesarias, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}
d(\theta_2 + \theta_3 C_2) &= \frac{\partial(\theta_2 + \theta_3 C_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(\theta_2 + \theta_3 C_2)}{\partial x_2} dx_2 \\
&= \underbrace{-\theta_3 S_2}_{a} dx_2 \\
d(\theta_2) &= \frac{\partial(\theta_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(\theta_2)}{\partial x_2} dx_2 \\
&= 0 \\
d(\theta_3 S_2 x_3^2 + \theta_5 g C_{1+2}) &= \frac{\partial(\theta_3 S_2 x_3^2 + \theta_5 g C_{1+2})}{\partial x_1} dx_1 \\
&\quad + \frac{\partial(\theta_3 S_2 x_3^2 + \theta_5 g C_{1+2})}{\partial x_2} dx_2 \\
&= \underbrace{-\theta_5 g S_{1+2}}_{c_1} dx_1 + \underbrace{\theta_3 C_2 x_3^2}_{c_2} dx_2 - \underbrace{\theta_5 g S_{1+2}}_{c_3} dx_2 \quad (3.15)
\end{aligned}$$

entonces la derivada exterior de (3.13) queda dada por:

$$d\omega_5 = a dx_2 \wedge dx_3 + c_1 dx_1 \wedge dt + (c_2 - c_3) dx_2 \wedge dt.$$

Con esto ahora es posible calcular el producto exterior entre (3.13) y (3.14), el cual queda dado por

$$\begin{aligned}
d\omega_5 \wedge \omega_5 &= (a dx_2 \wedge dx_3 + c_1 dx_1 \wedge dt + (c_2 - c_3) dx_2 \wedge dt) \\
&\quad \wedge (a_1 dx_3 + a_2 dx_4 + a_3 dt) \\
&= a dx_2 \wedge dx_3 \wedge a_2 dx_4 + a dx_2 \wedge dx_3 \wedge a_3 dt \\
&\quad + c_1 dx_1 \wedge dt \wedge a_1 dx_3 \\
&\quad + c_1 dx_1 \wedge dt \wedge a_2 dx_4 + (c_2 - c_3) dx_2 \wedge dt \wedge a_1 dx_3 \\
&\quad + (c_2 - c_3) dx_2 \wedge dt \wedge a_2 dx_4 \\
d\omega_5 \wedge \omega_5 &\neq 0 \quad (3.16)
\end{aligned}$$

De (3.16) es posible concluir que la restricción (3.12) es no integrable y por lo tanto el pendubot se puede clasificar como un sistema no holonómico de segundo orden, debido a que la restricción está en función de las coordenadas generalizadas, sus velocidades y sus aceleraciones. Además, el resultado obtenido es consistente con el que se presenta en [65].



## 4.1. Introducción

En este capítulo se explicarán algunas metodologías para el modelado de sistemas con restricciones no holonómicas. Es importante notar que, al menos desde el punto de vista de modelado, los sistemas con restricciones holonómicas pueden ser vistos como un caso particular de los sistemas con restricciones no holonómicas; por lo que las metodologías de modelado para sistemas no holonómicos son una herramienta más general para el modelado de sistemas restringidos y por lo tanto, también pueden ser aplicadas en sistemas holonómicos e incluso en sistemas cuyas coordenadas generalizadas son independientes.

Por otro lado, es importante recordar que se estará trabajando con sistemas mecánicos cuya configuración es descrita por una serie de  $m$  coordenadas generalizadas (o coordenadas no mínimas) las cuales pueden ser agrupadas en un vector de coordenadas generalizadas

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_m]^T \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

pudiendo estar sujetos a una serie de  $r$  restricciones cinemáticas (holonómicas o no holonómicas). Cuando se utilizan coordenadas independientes (coordenadas generalizadas mínimas), es común agruparlas en un vector de coordenadas mínimas dado por:

$$\boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2)$$

Por lo tanto, el número de grados de libertad  $n$  del sistema, estará dado por el número de coordenadas generalizadas menos el número de restricciones  $n = m - r$ . Además, utilizando nuevamente el enfoque de [1], es posible definir dos tipos de modelos dinámicos:

- **Modelos Dinámicos Mínimos:** En los cuales el número de ecuaciones es igual al número de grados de libertad.
- **Modelos Dinámicos No Mínimos:** En los cuales el número de ecuaciones es igual al número de coordenadas generalizadas.

## Lagrangiano de un sistema

La función lagrangiana, o simplemente lagrangiano, es una de las herramientas de apoyo para la obtención del modelo dinámico de sistemas mecánicos más utilizada en formulaciones de modelo dinámico. Para encontrar el lagrangiano de un sistema mecánico con  $N$  cuerpos y descrito por una serie de  $m$  coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m$ , primero es necesario encontrar la energía cinética  $\mathcal{K}_i(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  y la energía potencial  $\mathcal{U}_i(\boldsymbol{\rho})$  de cada  $i$ -ésimo cuerpo (con  $i = 1, 2, \dots, N$ ). Dichas relaciones

están dadas por [66]:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_i(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) &= \frac{1}{2} [m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i^T I_i \boldsymbol{\omega}_i], \\ \mathcal{U}_i(\boldsymbol{\rho}) &= -m_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{g}_0,\end{aligned}$$

donde  $m_i$  e  $I_i$  son, respectivamente, la masa y el tensor de momentos de inercia respecto al marco  $\Sigma_i$  calculado en el centro de masa de cada cuerpo;  $\mathbf{v}_i$  y  $\boldsymbol{\omega}_i$  son los vectores de velocidad lineal y angular del  $i$ -ésimo cuerpo, respectivamente,  $\mathbf{p}_i$  es el vector de posición del  $i$ -ésimo cuerpo y  $\mathbf{g}_0$  es el vector de gravedad; todos los vectores deben estar expresados con respecto a un marco de referencia fijo  $\Sigma_0$ . Además, es importante notar que el vector de velocidad  $\mathbf{v}_i$  debe de ser la derivada temporal del vector de posición  $\mathbf{p}_i$ , i.e.,

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Por otro lado, para el caso de la velocidad angular, ésta puede ser calculada con diferentes técnicas, dependiendo de qué herramientas se utilicen para representar la orientación. Algunas de las herramientas más comunes para representar la orientación de un cuerpo rígido son [67]:

- Ángulos de Euler.
- Matrices de Rotación.
- Cuaterniones.

Una vez obtenidas las energías cinética y potencial de cada cuerpo, es posible calcular la función lagrangiana  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$ , la cual está dada por la suma de la energía cinética total menos la energía potencial total, es decir,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) - \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}) \quad (4.3)$$

donde

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{K}_i(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}), \quad \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \mathcal{U}_i(\boldsymbol{\rho}).$$

## 4.2. Metodologías para modelado de sistemas mecánicos con restricciones no holonómicas

Los primeros métodos a discutir son los llamados clásicos, que también son los más utilizados en la literatura y están basados en los trabajos de Newton, Euler y Lagrange. En un principio estos métodos fueron utilizados para el modelado de sistemas sin restricciones pero con la ayuda de los multiplicadores de Lagrange fue posible obtener el modelo de sistemas con diversos tipos de restricciones (holonómicas y no holonómicas).

## Ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección

El primer paso para obtener el modelo dinámico de un sistema mecánico con restricciones, es obtener el lagrangiano (4.3) de dicho sistema. Una vez calculado el lagrangiano, es necesario obtener las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange del primer tipo, las cuales están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho})}{\partial \dot{\rho}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho})}{\partial \rho} = \tau_\rho + D(\rho)^T \lambda \in \mathbb{R}^m \quad (4.4)$$

donde  $D(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  es la matriz de restricciones pfaffianas y  $\lambda \in \mathbb{R}^r$  el vector de multiplicadores de Lagrange, los cuales en conjunto aseguran el cumplimiento de las restricciones del sistema [68]. La matriz de restricciones pfaffianas cumple con

$$D(\rho)\dot{\rho} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r \quad (4.5)$$

Es importante notar que, las restricciones en (4.5) pueden ser la derivadas de restricciones holonómicas (1.5), restricciones no holonómicas (1.6), o la combinación de ambas<sup>1</sup>. Por otro lado, la ecuación (4.4) puede ser reescrita como

$$M(\rho)\ddot{\rho} + C(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho} + g(\rho) = \tau_\rho + D(\rho)^T \lambda \in \mathbb{R}^m \quad (4.6)$$

donde las dimensiones de las matrices y vectores son<sup>2</sup>:  $M(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $C(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $g(\rho) \in \mathbb{R}^m$ , y  $\tau_\rho \in \mathbb{R}^m$ .

Nótese que, al aplicar (4.6), se obtiene un conjunto de  $m$  ecuaciones dependientes acopladas entre sí por las restricciones y los multiplicadores de Lagrange, donde el vector de fuerzas generalizadas  $\tau_\rho$  están asociadas al vector de coordenadas generalizadas  $\rho$ , i.e., las ecuaciones (4.6) nos dan como resultado un modelo no mínimo y para poder ser utilizadas necesitamos de las ecuaciones (4.5). Para obtener un modelo de mayor utilidad en el área de control, en donde es conveniente trabajar con un modelo en el cual el vector de fuerzas generalizadas esté asociado al vector de coordenadas mínimas (4.2), que en general serán las coordenadas directamente actuadas, se busca obtener un modelo mínimo.

Con este fin, en [49] se propone utilizar una matriz especial,  $A(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , para eliminar los multiplicadores de Lagrange y reducir el número de ecuaciones, dicha matriz cumple con la siguiente propiedad

$$D(\rho)A(\rho) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{r \times n}. \quad (4.7)$$

Además, dicha matriz nos da la relación entre el vector de velocidades generalizadas no mínimas y el vector de velocidades generalizadas mínimas, i.e.

$$\dot{\rho} = A(\rho)\dot{q} \quad (4.8)$$

En el caso de sistemas holonómicos, es posible calcular la matriz  $A(\rho)$  en (4.8) si se conoce la relación<sup>3</sup>  $\rho = f(q)$ , únicamente derivando dicha relación. Ahora, utilizando tal matriz  $A(\rho)$  y su derivada temporal, es posible reducir el sistema (4.6) a un nuevo sistema dado por

$$M_r(\rho)\ddot{q} + C_r(\rho, \dot{q})\dot{q} + g_r(\rho) = \tau_q \in \mathbb{R}^n \quad (4.9)$$

1: Es importante notar que, en el caso de contar con restricciones no lineales en las velocidades, no es posible aplicar esta metodología.

2: Donde  $M(\rho)$  es conocida como la matriz de inercias,  $C(\rho, \dot{\rho})$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $g(\rho)$  es el vector de fuerzas debidas a la gravedad y  $\tau_\rho$  es el vector de fuerzas generalizadas, del modelo no mínimo.

3: Es importante notar que, en general, la existencia de dicha relación no es trivial y el cálculo analítico de la misma puede ser una tarea complicada.

donde

$$\begin{aligned} M_r(\rho) &= A(\rho)^T M(\rho) A(\rho) \\ C_r(\rho, \dot{\rho}) &= A(\rho)^T C(\rho, \dot{\rho}) A(\rho) + A(\rho)^T M(\rho) \dot{A}(\rho, \dot{\rho}) \\ g_r(\rho) &= A(\rho)^T g(\rho) \\ \tau_r &= A(\rho)^T \tau_\rho \end{aligned}$$

4: Donde ahora  $M_r(\rho)$ ,  $C_r(\rho, \dot{\rho})$ ,  $g_r(\rho)$  y  $\tau_r$  son las matrices y vectores del modelo mínimo.

y las dimensiones de las matrices y vectores son<sup>4</sup> :  $M_r(\rho) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C_r(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g_r(\rho) \in \mathbb{R}^n$ , y  $\tau_r \in \mathbb{R}^n$ .

## Las ecuaciones de Udwadia-Kalaba

Las ecuaciones de Udwadia-Kalaba (U-K) son unas de las metodologías más recientes para la obtención del el modelo dinámico de sistemas con restricciones [69-71]. Esta metodología calcula las fuerzas producidas en el sistema debido a las restricciones, para de esta forma poderlas incluir en el modelo dinámico, pero sin el uso de multiplicadores de Lagrange como en las ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección. Con el fin de utilizar las ecuaciones de Udwadia-Kalaba, considere un sistema cuyo comportamiento puede ser descrito por un conjunto de  $m$  coordenadas generalizadas  $\rho \in \mathbb{R}^m$  y un conjunto de  $n$  coordenadas independientes  $q \in \mathbb{R}^n$ . Ahora, primero es necesario obtener el modelo dinámico del sistema libre, i.e., ignorando las restricciones, las ecuaciones de dicho sistema pueden ser escritas como:

$$M(\rho)\ddot{\rho} = f \in \mathbb{R}^m. \quad (4.10)$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse de (4.6), o cualquier otra metodología para sistemas sin restricciones como por ejemplo las ecuaciones de Newton-Euler, considerando  $D(\rho)^T \lambda = \mathbf{0}$  y  $f = \tau_\rho - C(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho} - g(\rho)$ . Ahora, considere que el sistema está sujeto a una serie de  $r$  restricciones cinemáticas, las cuales pueden ser una combinación de restricciones holonómicas (1.5) y/o restricciones no holonómicas (1.6), como en el caso de (4.5); una vez identificadas las restricciones, es necesario calcular la derivada temporal de dichas restricciones para llevarlas a la forma

$$D(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho} = b(\rho, \dot{\rho}) \quad (4.11)$$

donde  $D(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  y  $b(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^r$  son la matriz y el vector de restricciones, respectivamente. Es importante notar que, debido a la forma que tienen las restricciones utilizadas (4.11), es posible incluir restricciones de velocidad incluso aunque no sean lineales (restricciones no pffianas). Estas restricciones implican ciertas fuerzas de reacción  $f_c$  las cuales ahora deberán ser consideradas en las ecuaciones dinámicas del sistema. El modelo dinámico del sistema utilizando las ecuaciones de Udwadia-Kalaba están dadas por

$$M(\rho)\ddot{\rho} = f + f_c \in \mathbb{R}^m; \quad (4.12)$$

de donde ya se conoce  $M(\rho)$  y  $f$ , por lo tanto, el problema se reduce a encontrar las fuerzas de reacción  $f_c$ , las cuales aseguran que las restricciones

(4.11) se cumplan. Dichas fuerzas de reacción están dadas por

$$\mathbf{f}_c = M(\boldsymbol{\rho})^{1/2} \left( DM(\boldsymbol{\rho})^{-1/2} \right)^+ (\mathbf{b} - D\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^m \quad (4.13)$$

donde  $\mathbf{a} = M(\boldsymbol{\rho})^{-1}\mathbf{f}$ . Nótese que  $X^{1/2}$  denota la raíz cuadrada de la matriz  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $X^+$  la inversa generalizada de Moore-Penrose de la matriz  $X$ ; es decir  $X^+ = (X^T X)^{-1} X^T$  cuando  $m > n$  o  $X^+ = X^T (X X^T)^{-1}$  cuando  $m < n$ .

Finalmente, las ecuaciones (4.12) pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\rho})\ddot{\boldsymbol{\rho}} + C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) &= \boldsymbol{\tau}_\rho + \\ M(\boldsymbol{\rho})^{1/2} \left( DM(\boldsymbol{\rho})^{-1/2} \right)^+ (\mathbf{b} - D\mathbf{a}) &\in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es importante notar que el modelo obtenido con (4.14) es un modelo no mínimo.

## Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas

La siguiente formulación es una combinación de dos formulaciones, donde la mayor parte del trabajo está basado en *las ecuaciones generalizadas de Poincaré-Chetaev* [72] o *las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev* (P-C-R) [9], pero utilizando además las ecuaciones de *Hammel-Novoselov* [9] para calcular cierta parte de las ecuaciones. Estas ecuaciones toman ventaja del uso de las llamadas cuasi-velocidades. Con esta formulación, es posible calcular el modelo dinámico de sistemas mecánicos sujetos a un conjunto de  $r = r_h + r_{nh}$  restricciones, las cuales pueden ser un conjunto de  $r_h$  restricciones holonómicas y/o  $r_{nh}$  restricciones no holonómicas, las cuales pueden ser llevadas a la forma pfaffiana (4.5) (restricciones lineales en la velocidad)<sup>5</sup>. Por lo tanto, primero es necesario agrupar las restricciones del sistema en un arreglo de restricciones, i.e.,

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{f}_\beta(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r. \quad (4.15)$$

Después, se elige un conjunto de  $n$  velocidades arbitrarias<sup>6</sup>, las cuales también pueden ser agrupadas de la siguiente forma

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{f}_q(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) \in \mathbb{R}^n. \quad (4.16)$$

Es importante notar que las fuerzas calculadas utilizando esta formulación, serán referidas al conjunto de  $n$  velocidades arbitrarias elegidas y por lo tanto esto deberá ser considerado también cuando se elijan dichas velocidades arbitrarias. Ahora, es posible agrupar el conjunto de velocidades arbitrarias (4.16) y las restricciones del sistema (4.15), obteniendo un arreglo de cuasi-velocidades del sistema  $\mathbf{v}$ , es decir

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_q \\ \mathbf{v}_\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \quad (4.17)$$

Ahora, si se consideran únicamente relaciones lineales entre las velocidades arbitrarias elegidas y restricciones no holonómicas lineales, la relación entre las cuasi-velocidades y las velocidades generalizadas puede ser

5: Aunque las ecuaciones de P-C-R también pueden incluir restricciones no lineales, dichas restricciones no se consideran en el presente trabajo.

6: Generalmente se eligen las velocidades independientes  $\dot{\mathbf{q}}$ , pero estas velocidades arbitrarias puede ser cualquier combinación de las velocidades generalizadas.

reescrita como

$$\mathbf{v} = S(\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (4.18)$$

donde  $S(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Es importante notar que, eligiendo cuidadosamente el conjunto de velocidades arbitrarias (4.16) y el vector de velocidades generalizadas, es posible asegurar que  $S(\boldsymbol{\rho})$  sea no singular; por lo tanto es posible definir las velocidades generalizadas en función de las cuasi-velocidades, i.e.,

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = T(\boldsymbol{\rho})\mathbf{v}, \quad (4.19)$$

donde  $T(\boldsymbol{\rho}) = S(\boldsymbol{\rho})^{-1}$ .

En seguida, considerando que previamente se ha obtenido la función lagrangiana del sistema (4.3), es necesario hacer un cambio de variable utilizando (4.19) con el fin de obtener una nueva función lagrangiana expresada en función de las coordenadas generalizadas y de las cuasi-velocidades, i.e.,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) = \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) - \mathcal{U}(\boldsymbol{\rho}). \quad (4.20)$$

Finalmente, con esta función lagrangiana es posible calcular las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev [72], de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_q} \right) - \bar{A}(\boldsymbol{\rho})^T \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}_{nh} + \bar{A}(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\tau}_\rho \in \mathbb{R}^n; \quad (4.21)$$

o en forma compacta

$$M_v(\boldsymbol{\rho})\dot{\mathbf{v}}_q + C_v(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})\mathbf{v}_q + \mathbf{g}_v(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v}_{nh} + \boldsymbol{\tau}_{v_q} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.22)$$

donde  $M_v(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C_v(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{g}_v(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^n$  y  $\boldsymbol{\tau}_{v_q} \in \mathbb{R}^n$  son la matriz de inercias, la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, el vector de fuerzas debidas a la gravedad y el vector de fuerzas generalizadas, respectivamente, de nuestro sistema en cuasi-velocidades y  $\mathbf{v}_{nh}$  es el vector de las restricciones<sup>7</sup>. En (4.22) la matriz  $\bar{A}(\boldsymbol{\rho})$  está definida como

$$\bar{A}(\boldsymbol{\rho}) = \left[ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \mathbf{v}_q} \right] \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad (4.23)$$

es importante notar que dicha matriz es igual a (4.8), de las ecuaciones de Euler-Lagrange, si las velocidades independientes del sistema se eligen como velocidades arbitrarias, i.e., si  $\mathbf{v}_q = \dot{\mathbf{q}}$  entonces  $\bar{A}(\boldsymbol{\rho}) = A(\boldsymbol{\rho})$ . Por otro lado, para calcular el vector de restricciones  $\mathbf{v}_{nh}$  es necesario utilizar los coeficientes de estructura de las relaciones entre nuestras velocidades generalizadas y las velocidades arbitrarias, i.e., (4.18) y (4.19), dichos coeficientes de estructura son calculados utilizando la siguiente relación

$$E_{(j,k)i} = \sum_{t=1}^m \sum_{s=1}^m \left( \frac{\partial S_{(j,t)}}{\partial \rho_s} - \frac{\partial S_{(j,s)}}{\partial \rho_t} \right) T_{(t,k)} T_{(s,i)}, \quad (4.24)$$

$$k, i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

donde  $S_{(a,b)}$  y  $T_{(a,b)}$  son los elementos renglón  $a$  y columna  $b$  de las matrices (4.18) y (4.19), respectivamente<sup>8</sup>. Además, los coeficientes de estructura satisfacen la siguiente relación  $E_{(j,k)i} = -E_{(j,i)k}$ . A su vez, los coeficientes de estructura calculados en (4.24) son los elementos renglón,

7: Es importante notar que el uso de las ecuaciones de P-C-R (4.22), nos da directamente un modelo dinámico mínimo.

8: La ecuación (4.24) es únicamente válida para cuasi-velocidades lineales, debido a que las restricciones no holonómicas no lineales no son consideradas dentro de este trabajo.

columna de la  $i$ -ésima matriz  $E_{(\cdot, \cdot)i}$  de un conjunto de  $n$  matrices, donde  $E_i(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Con estas matrices, es posible calcular el vector de restricciones, el cual queda dado por

$$\mathbf{v}_{nh} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_q^T E_1^T \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \\ \mathbf{v}_q^T E_2^T \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_q^T E_n^T \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.25)$$

Adicionalmente, con el fin de simplificar el cálculo del modelo dinámico, y de acuerdo con [9] (quienes se basan en las ecuaciones de Hamel-Novoselov (H-N)), es posible calcular el vector de restricciones  $\mathbf{v}_{nh}$  de las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev (4.21) usando una matriz  $W(\rho, \mathbf{v})$  en lugar de los coeficientes de estructura (4.24) originalmente propuestos por Rumyantsev. Dicha matriz está dada por

$$W(\rho, \mathbf{v}) = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \rho} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \rho} \right) \bar{A}(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (4.26)$$

Y por lo tanto, el vector de restricciones  $\mathbf{v}_{nh}$  puede ser calculado utilizando la siguiente relación

$$\mathbf{v}_{nh} = W(\rho, \mathbf{v})^T \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (4.27)$$

Con lo que es posible obtener una versión modificada de las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev, la cual queda como

$$M_v(\rho) \dot{\mathbf{v}}_q + C_v(\rho, \mathbf{v}) \mathbf{v}_q + \mathbf{g}_v(\rho) = W(\rho, \mathbf{v})^T \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \boldsymbol{\tau}_{v_q} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.28)$$

Estas últimas ecuaciones, serán las utilizadas más adelante, en la sección correspondiente a la aplicación de metodologías de modelado. Finalmente, una vez utilizadas las ecuaciones (4.22) o (4.28), las cuasi-velocidades debido a las restricciones (4.15) deben considerarse nulas con el fin de simplificar el modelo<sup>9</sup>.

9: En general, el modelo mínimo (4.28) es equivalente al modelo mínimo (4.9) y es posible llegar de uno a otro utilizando las relaciones (4.18) y (4.19).



# Aspectos Sobre la Planificación y Control de Movimientos de Sistemas No Holonómicos

# 5

## 5.1. Estudio sobre planificación de sistemas no holonómicos

### Introducción

El contenido de esta sección está basado principalmente en el trabajo de F. Jean [73].

Debido a que se aborda el diseño de algoritmos, en general no se trabajará en una variedad si no en un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Por lo tanto, se considera un sistema no holonómico descrito por un conjunto de coordenadas generalizadas  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m] \in \mathbb{R}^m$ . Además, las ecuaciones cinemáticas del sistema no holonómico tienen la forma

$$\dot{x} = X(x)u \in \Omega \quad (5.1)$$

donde  $u \in \mathbb{R}^n$  es el vector de señales de control, y  $X(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  el mapeo entre las entradas de control y las velocidades generalizadas y  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ .

En sistemas no holonómicos, el *problema de planificación de movimientos* trata sobre el diseño de una ley de control que lleve un sistema de un estado inicial  $x_0$  a cierto estado final  $x_d$  [73]. En sistemas no holonómicos, este problema puede ser resuelto de manera exacta para cierta clase de sistemas, y en específico para sistemas nilpotentes; en otro caso, se busca una solución aproximada, esto es, para dado algoritmo cuyas entradas son los puntos inicial y final  $(x_0, x_d)$  y una tolerancia  $e > 0$ , se calcula una ley de control  $u$ , la cual dirija el sistema de  $x_0$  a un punto suficientemente cercano, menor a la tolerancia  $e$ , a  $x_d$ .

**Definición 1.** El *problema de planificación de movimientos* para (5.1) está definido así: para cada par de puntos inicial y final,  $(x_0, x_d) \in \Omega \times \Omega$ , se encuentra una ley de control  $u(\cdot) \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  (es decir una función en un espacio  $L^1$  con valores en el tiempo entre 0 y T en  $\mathbb{R}^n$ ) con  $T > 0$  de tal forma de que la trayectoria de (5.1) empezando en  $x_0$  en  $t = 0$  alcance  $x_d$  en  $t = T$ , es decir,

$$\gamma(T; x_0, u) = x_d$$

donde  $\gamma$  es la trayectoria del sistema. Además, se supone que  $\Omega$  es conexo y que (5.1) satisface la condición de Chow.

**Definición 2.** Se dice que el sistema (5.1) (o los campos vectoriales  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) satisfacen la *condición de Chow* si

$$\text{Lie}(X_1, X_2, \dots, X_n)(x) = T_q M, \quad \forall x \in \Omega,$$

Esta propiedad también es conocida como la condición de rango del álgebra de Lie (LARC por sus siglas en inglés) en teoría de control.

Entonces la existencia de una solución al problema de planificación de movimientos es garantizada por el Teorema de Chow-Rashevsky.

**Teorema Chow-Rashevsky:** Si  $\Omega$  es conexa y (5.1) satisface la condición de Chow, entonces dos puntos cualesquiera en  $\Omega$  pueden ser unidos por una trayectoria de (5.1).

Además, es importante mencionar que la presencia de restricciones de estado adicionales no afectan la existencia de soluciones, siempre y cuando el espacio admisible siga siendo conexo. Esto es importante para aplicaciones en el área de robótica, ya que permite saber si nuestro sistema con condiciones iniciales  $x_0$  puede ser llevado a un estado deseado  $x_d$  utilizando una ley de control  $u$ . Defínase el modelo de un sistema como (5.1) y cuyo espacio de configuración es  $\Omega$ . Cuando el robot se mueve entre obstáculos, se representa el espacio de configuración en el cual existen colisiones como un subconjunto cerrado dado  $O$  de  $\Omega$ . Si el conjunto libre de colisiones  $\Omega \setminus O$  permanece conexo, el problema de planificación de movimientos en ese conjunto tiene solución, lo que significa que es posible dirigir el robot de una configuración a otra evadiendo los obstáculos. En este caso, el problema de planificación de movimientos es dividido en dos pasos [74]:

- Se encuentra una curva en el espacio libre  $\Omega \setminus O$  que conecte  $x_0$  con  $x_d$  (en general esta curva no es una trayectoria del sistema (5.1));
- Posteriormente, se aproxima la curva por una trayectoria lo suficientemente cercana y admisible de (5.1) que además esté contenida en el espacio libre.

El primer paso es independiente del sistema de control, solo depende de la topología de  $\Omega$  y de los obstáculos. Es un problema de algoritmos de geometría bien entendido y modelado [75, 76]. El segundo paso puede ser considerado como un problema de planificación de movimientos sin restricciones de estado, siempre que se use un método de planificación de movimientos con un buen comportamiento local.

**Definición 3.** Se dice que un sistema (5.1) es *nilpotente* si los campos vectoriales  $X_1, X_2, \dots, X_m$  generan un álgebra de Lie nilpotente. Definase  $\mathfrak{g}$  como un álgebra de Lie, entonces  $\mathfrak{g}$  es nilpotente si la serie central descendente termina haciéndose cero para algún  $m \in \mathbb{N}$

$$[X_1, [X_2, [\dots [X_{m-1}, X_m] \dots]] = 0 \\ \forall X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{g}.$$

El sistema (5.1) es *nilpotentizable* si es equivalente por retroalimentación a un sistema nilpotente. Los sistemas nilpotentizables son la clase más amplia de sistemas no holonómicos para los cuales la solución exacta al problema de planificación de movimientos es conocida. Sin embargo la mayoría de los sistemas no holonómicos son no nilpotentes y no nilpotentizables.

Dado un campo vectorial con elementos  $(X_1, \dots, X_m)$ , se define la longitud de un producto de Lie de manera recursiva como

$$l(X_i) = 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$l([A, B]) = l(A) + l(B),$$

donde  $A$  y  $B$  son a su vez productos de Lie. Esta función de longitud induce una ordenación parcial en un conjunto de productos de Lie. Un álgebra de Lie es nilpotente si existe un entero  $r$  tal que todos los productos de Lie de longitud superior a  $r$  son cero.  $r$  se llama *grado de nilpotencia*.

## Algoritmos para sistemas nilpotentes

### Sistemas encadenados.

Para entender el uso de señales senoidales de control, primero se considerará el caso particular de un sistema encadenado, el cual es un sistema no holonómico en  $\mathbb{R}^n$  y tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 &= x_3 u_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= x_{m-1} u_1.\end{aligned}\tag{5.2}$$

De forma equivalente,  $\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x)$ , dicho sistema es nilpotente.

La estructura de (5.2) sugiere controlar el sistema un componente después del otro. El punto crucial de esta estrategia de control es asegurar que si un componente  $x_k$  se encuentra en movimiento durante un periodo  $[0, T]$ , entonces ninguno de los componentes  $x_i$  con  $i < k$  deberá moverse, esto es  $x_i(0) = x_i(T)$ . El uso de controles senoidales con frecuencias enteras es adecuado para este tipo de estrategias debido a sus propiedades:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\omega t) dt = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{Z}\tag{5.3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \mathbb{Z} \text{ y } \omega \neq 0, \\ 1 & \text{si } \omega = 0. \end{cases}\tag{5.4}$$

Considere entonces un control dado por  $u(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , de la forma

$$u_1(t) = a \text{sen}(\omega_1 t), \quad u_2(t) = b \cos(\omega_2 t).\tag{5.5}$$

Debido a la estructura de (5.2), para cada  $i \geq 3$  la dinámica de  $\dot{x}_i$  es una combinación lineal de las señales de control donde las frecuencias son

$$\omega_2 + N\omega_1, \quad \text{donde } N \in \mathbb{Z}, |N| \leq i - 2\tag{5.6}$$

Supóngase que se quiere mover el elemento  $x_k$  a un valor deseado sin mover los elementos  $x_i$ , para cada  $i < k$ . Las relaciones (5.3) y (5.4) implican que se deberá elegir  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de forma de que el término de coseno deberá tener frecuencia nula (i.e. término constante) aparezca en la dinámica del elemento  $\dot{x}_k$ . Además, ningún componente  $x_i$  con

$i < k$  deberá tener esta condición, para asegurar que  $x_i(0) = x_i(2\pi)$ . Por ejemplo, una elección simple que garantiza las dos propiedades es elegir  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = k - 2$ .

El argumento anterior se traduce en un algoritmo completo (Algoritmo 1) que da una solución exacta al problema de planificación de movimientos para el sistema (5.2).

---

**Algoritmo 1** Método de dirección para sistemas encadenados.

---

- 1: mover  $x_1$  y  $x_2$  a su posición final (en línea recta por ejemplo);
- 2: para cada  $k \geq 1$  mover  $x_{k+2}$  de su valor presente  $x_0$  a su valor final  $x_d$  utilizando

$$\mathbf{u}(t) = (a \operatorname{sen}(t), b \cos(kt)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

donde se debe verificar que los parámetros  $a$  y  $b$  cumplan con

$$x_d - x_0 = \frac{(a/2)^k b}{k!} 2\pi$$


---

**Entradas polinomiales.**

Supóngase que un sistema nilpotente  $\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m X_i(\mathbf{x})$  es polinomial y se encuentra en forma triangular, es decir,

$$\dot{x}_j = \sum_i u_i f_{ij}(x_1, \dots, x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, m,$$

donde cada función  $f_{ij}$  es polinomial. Los sistemas encadenados y sistemas en forma canónica satisfacen esta suposición.

Esta estructura permite calcular fácilmente las trayectorias: dada una función de control  $\mathbf{u}(t)$ , las coordenadas  $x_j(t)$  pueden ser calculadas integrando una tras otra. Se eligen las señales de control como funciones polinomiales parametrizadas, por ejemplo,

$$u_i(t) = \sum_{k=0}^N a_{ik} t^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.7)$$

con los parámetros  $a = (a_{10}, \dots, a_{n0}, \dots, a_{1N}, \dots, a_{nN}) \in \mathbb{R}^{(N+1)n}$ , donde  $N$  es un entero suficientemente grande. Con este controlador cada coordenada  $x_j(t)$  es una función polinomial de  $t$ , del parámetro  $a$ , y de los valores iniciales  $x_i(0), \dots, x_j(0)$ .

Por lo tanto, con el fin de obtener un control de la forma (5.7) que dirija al sistema de una configuración inicial  $\mathbf{x}_0$  a una configuración final  $\mathbf{x}_d$ , es necesario resolver el sistema algebraico

$$P_j(a, \mathbf{x}_0) - x_j(T) = 0 \quad j = 1, \dots, m,$$

donde la incógnita son los parámetros  $a \in \mathbb{R}^{N+1}m$ . Desafortunadamente, el tamaño y el grado del sistema algebraico se incrementa exponencialmente con respecto a la dimensión  $n$  y al grado de nilpotencia  $r$ , y no existe un método general y eficiente para resolverlo. Sin embargo este método puede ser útil cuando  $m$  o  $r$  son pequeños<sup>1</sup>.

1: Aparentemente cuando  $n \leq 5$  o  $r = 2$ , de acuerdo a [73].

**Control constante a tramos.**

Considérese un sistema nilpotente de paso  $r$  sobre  $\mathbb{R}^n$  definido por el campo vectorial analítico  $(X_1, \dots, X_m)$ . Se fija un punto inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

y una vecindad abierta  $U$  de este punto. Sea  $x_d$  el punto objetivo y  $\bar{q} = \bar{q}(x_d)$ , con  $q = [x, y, z]^T$ , dada una función de control  $u$ , se denota como  $S^u(t)$  al flujo de los campos vectoriales dependientes del tiempo  $\sum_i u_i X_i$ . El principio de este método es producir de manera separada y secuencial, para  $i = 1, \dots, \tilde{n}$  funciones de control  $u^i$  definidas de  $[0, T]$  tal que  $S_i^u(T)$  sea igual a  $\exp(\bar{q}_i X_{I_i})$  con  $j > i$ . Es posible lograr esto utilizando la fórmula de Campbell-Hausdorff [77].

También es posible producir un control a tramos tal que  $S_i^u(T)$  sea exactamente igual a  $\exp(q_i X_{I_i})$  utilizando el método propuesto en [78].

## Algoritmos para sistemas no nilpotentes

Cuando el sistema no holonómico no es nilpotentizable, se buscan soluciones aproximadas al problema de planificación de movimientos en lugar de soluciones exactas. En este documento se presentan dos aproximaciones para este tipo de sistemas.

### Dirección por aproximación.

Dado un punto inicial  $x_0$  y un punto  $x_d$ , se resuelve primero el problema de planificación de movimientos para una aproximación nilpotente de (5.1) en  $x_d$ , mediante el uso de uno de los métodos descritos anteriormente; enseguida se aplica la señal de control  $u$  a (5.1) e itera el procedimiento desde el punto actual. Utilizando  $\gamma(t; p, u)$ , con  $t \in [0, T]$ , para denotar la trayectoria de la aproximación nilpotente asociada con el control  $u$  y empezando en el punto  $p$ , una versión local de este algoritmo se presenta a continuación, donde  $d$  es una distancia subriemanniana asociada al sistema (5.1) y  $e$  es un número constante real positivo.

---

#### Algoritmo 2 Algoritmo de dirección local.

---

**Se requiere:**  $x_0, x_d, e$ .

$k:=0$ ;

$x^k := x_0$

**Mientras**  $d(x^k, x_d) > e$  **Hacer**

Calcular  $u^k$  tal que  $x_d = \gamma(T; x^k, u^k)$ ;

Set  $x^{k+1} = \gamma(T; x^k, u^k)$ ;

$k:=k+1$ ;

---

El bucle "Mientras", en el Algoritmo 2 define un mapeo *AppSteer* :  $(x^k, x_d) \mapsto \gamma(T; x^k, u^k)$ , el cual converge de forma local debido a que *AppSteer* es *localmente contractivo* con respecto a la distancia  $d$ , i.e. for  $x_d \in \Omega$  existe  $\epsilon(x_d) > 0$  y  $c(x_d) \in (0, 1)$  tal que

$$d(x_d, \text{AppSteer}(x, x_d)) \leq c(x_d)d(x_d, x) \quad (5.8)$$

para  $x \in \Omega$  y  $d(x_d, x) < \epsilon(x_d)$ .

Suponga ahora que se tiene un mapeo *contractivo localmente uniforme* *AppSteer* en un conjunto compacto conexo  $K \subset \Omega$ , i.e. que existe  $\epsilon_k > 0$  y  $c_k \in (0, 1)$  tal que

$$d(x_d, \text{AppSteer}(x, x_d)) \leq c_k d(x_d, x) \quad (5.9)$$

para  $x, x_d \in K$  y  $d(x_d, x) < \epsilon_k$ . En este caso el Algoritmo 2 puede ser transformado en uno global (en  $K$ ), por ejemplo, utilizando la siguiente

idea. Se elije un camino  $\Gamma \subset K$  que conecte  $x_0$  a  $x_d$  y se elige una secuencia finita de objetivos intermedios  $\{x_0^d = x_0, x_1^d, \dots, x_j^d = x_d\}$  en  $\Gamma$ , tal que  $d(x_{i-1}^d, x_i^d) < \epsilon_k/2, i = 0, \dots, j$ . Entonces, queda claro que la aplicación iterativa del mapeo contractivo localmente uniforme AppSteer desde el estado presente hasta el siguiente subobjetivo produce una secuencia  $x^i$  que converge a  $x_d$ .

Para convertir la idea anterior a un algoritmo prácticamente eficiente, dos inconvenientes deben de ser resueltos satisfactoriamente:

- construir un mapeo AppSteer que sea contractivo localmente uniforme.
- diseñar un algoritmo globalmente convergente que no use explícitamente la distancia crítica  $\epsilon_k$ ; el conocimiento de este último no está disponible en la práctica.

#### Metodo de dirección local.

Ahora el objetivo es diseñar un mapeo AppSteer que sea contractivo localmente uniforme, de tal forma que el Algoritmo 2 sea localmente convergente. El primer paso es la construcción de una aproximación continua nilpotente, lo que a su vez requiere de la construcción de un sistema variable continuo de coordenadas privilegiadas.

#### Construcción de la aproximación nilpotente $\mathcal{A}$

Sean  $x = (x_1, \dots, x_n)$  las coordenadas canónicas en  $\mathbb{R}^n$ , para cada punto  $p \in \Omega$ , se construye una aproximación nilpotente  $\mathcal{A}(p)$  de  $(X_1, \dots, X_m)$  de la siguiente manera.

- (i) Se toma  $\{X_{I_j} : I_j \in \mathcal{H}^r\}$ .
- (ii) Se calcula un cambio de coordenadas afín  $x \mapsto y = (y_1, \dots, y_n)$  tal que las nuevas coordenadas cumplan con  $\partial_{y_j} = X_{I_j}(p), j = 1, \dots, n$ .
- (iii) Construir un sistema de coordenadas privilegiadas  $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n)$  utilizando la siguiente formula iterativa, para  $j = 1, \dots, n$

$$\tilde{z}_j = y_j - \sum_{k=2}^{w_j-1} h_k(y_1, \dots, y_{j-1}) \quad (5.10)$$

donde, para  $k = 2, \dots, w_{j-1}$ ,

$$h_k(y_1, \dots, y_{j-1}) = \sum_{|\alpha|=k, w(\alpha) < w_j} X_{I_1}^{\alpha_1} \dots X_{I_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} \cdot (y_j - \sum_{q=2}^{k-1} h_q) \Big|_{y=0} \frac{y_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} - \frac{y_{j-1}^{\alpha_{j-1}}}{\alpha_{j-1}!}, \quad (5.11)$$

con  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

- (iv) Para  $i = 1, \dots, m$ , se calcula la expansión de Taylor de  $X_i(\tilde{z})$  en 0, y se expresa cada campo vectorial como una suma de campos vectoriales que son homogéneos con respecto al grado de peso, definido por la secuencia  $(w_j)_{j=1, \dots, n}$ :

$$X_i(\tilde{Z}) = X_i^{(-1)}(\tilde{z}) + X_i^{(0)}(\tilde{z}) + \dots,$$

y se utiliza  $X_i^{(k)}(\tilde{z})$  para denotar la suma de todos los términos del grado de peso igual a  $k$

- (v) Se definen los campos vectoriales  $\hat{X}_1^p, \dots, \hat{X}_m^p \in \Omega$  como  $\hat{X}_i^p = \tilde{z} * X_i^{(-1)}$  para  $i = 1, \dots, m$ . Y el conjunto  $\mathcal{A}(p) = (\hat{X}_1^p, \dots, \hat{X}_m^p)$ .
- (vi) Para  $j = 1, \dots, n$  se identifican los polinomios homogéneos  $\Psi_j$  de grado de peso igual a  $w_j$  tal que, en el sistema de coordenadas privilegiadas  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , definido por

$$z_j = \tilde{z}_j + \Psi_j(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{j-1}), j = 1, \dots, n$$

la familia  $(p) = (\hat{X}_1^p, \dots, \hat{X}_m^p)$  está en la forma canónica.

- (vii) Se define  $\Phi(p, \cdot)$  como el mapeo  $x \mapsto z$ .

Las salidas de este algoritmo son los mapeos  $\Phi$  y  $\mathcal{A}$ , que son respectivamente un sistema variante continuo de coordenadas privilegiadas y una aproximación continua nilpotente de  $(X_1, \dots, X_m)$  sobre  $\Omega$ .

Una vez que se ha elegido la aproximación nilpotente, se debe elegir una forma de controlarla.

**Definición 3.** Una ley de dirección para  $\mathcal{A}$  es un mapeo, el cual, para cada par  $(x, p) \in \Gamma$  asocia un control  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$ ; de aquí en adelante llamada control de dirección, tal que la trayectoria  $\gamma(\cdot; x, u)$  del sistema aproximado,

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i \hat{X}_i^p(x), \quad (5.12)$$

definido de  $[0, T]$ , y satisface  $\gamma(T; x, u) = p$ . En otras palabras,  $u(\cdot)$  dirige al sistema (5.12) de  $x$  a  $p$ .

Una forma de diseñar un mapeo Appsteer contractivo uniformemente local es extendiendo el método de control constante a tramos para el caso en el cual el sistema es no nilpotente. La dificultad en este caso es que el algebra de  $\text{Lie}(X_1, \dots, X_m)$  no es de dimensión finita, lo que implica que:

- (i) El procedimiento para construir controladores constantes a tramos no es finito.
- (ii) La expresión en el método está compuesta por un número infinito de términos.

El proceso de aproximación consiste en mantener únicamente los factores generados por los corchetes de un orden no mayor a  $r$  en estas fórmulas.

## 5.2. Revisión de la Literatura Sobre Control de Sistemas No Holonómicos

El contenido de esta sección está basado en los trabajos [8] y [9].

### Introducción.

A pesar de que los sistemas no holonómicos han sido estudiados en mecánica clásica por más de 150 años, no fue sino hasta alrededor de 1980 cuando el estudio de problemas de control de este tipo de sistemas atrajo la atención de los investigadores. Los SNH utilizan herramientas del control de sistemas no lineales; dichos sistemas no pueden ser transformados en

una forma lineal, por lo tanto no es posible utilizar la teoría clásica de control lineal en ellos. Ejemplos de sistemas de control no holonómicos han sido estudiados principalmente en el área de la manipulación de robots, robots móviles, vehículos con ruedas y robótica espacial. Ejemplos específicos de este tipo de sistemas incluyen el filo de un cuchillo que se desliza sobre un plano [79, 80], el estudio de ruedas girando en un plano [81] y esferas rodando en un plano sin derrape ([82-84]). Respecto al estudio de control de robots móviles y vehículos con ruedas, se ha hecho una mayor investigación, y resultados de estos trabajos se pueden encontrar en [85-91], mientras que trabajos de control de sistemas no holonómicos en la manipulación robótica son descritos en [84, 92, 93]. Otros ejemplos de sistemas de control no holonómicos se dan cuando el mecanismo presenta algunas propiedades de simetría, uno de los casos más estudiados es cuando hay un momento angular, es decir, que alguna función del momento angular se conserva. Algunos ejemplos de este tipo de sistemas son los vehículos espaciales de múltiples cuerpos actuados [94-96] y los vehículos espaciales simétricos subactuados [97-99].

Sistemas de control no holonómicos pueden también surgir también como un resultado de la imposición de restricciones en el diseño del controlador; es decir, cuando se desea elegir un controlador en el cual ciertas restricciones en el movimiento son impuestas. Si dichas restricciones impuestas son no integrables entonces se obtiene un sistema no holonómico [100].

### Propiedades de equilibrios en el control de Sistemas No Holonómicos.

Desde el punto de vista de control, los sistemas no holonómicos de interés no son solamente aquellos que cumplen con la Definición 1.1.1, sino que además tienen ciertas propiedades adicionales que se mencionan a continuación. Con este fin, supóngase nuevamente que se tiene un sistema no holonómico cuyas ecuaciones están dadas por:

$$\dot{x} = X(x)u \quad (5.13)$$

donde, el sistema (5.13) además cumple con las siguientes propiedades:

- Es no integrable de acuerdo al Teorema 2.2.1.
- No cumple con el Teorema de Brockett [101].

Además, es importante notar que no todos los sistemas no holonómicos presentan estas propiedades y que éstas dependen del sistema en sí y del modelo que se esté utilizando para representar a dicho sistema<sup>2</sup>.

Para el sistema (5.13), suponiendo que no existe una ley de control ( $u = 0$ ), existe una variedad (*manifold*) de equilibrios que contiene al origen, y cada equilibrio es no-hiperbólico, es decir, la linealización de la dinámica en un equilibrio siempre tiene eigenvalores igual a cero. En otras palabras, ningún controlador de sistemas no holonómicos tiene un equilibrio aislado y por lo tanto ningún equilibrio puede ser estabilizado asintóticamente de forma local. Por lo tanto, las herramientas de control lineal no pueden ser utilizadas ni siquiera de forma local. Las condiciones necesarias para la existencia de una ley de control suave, independiente del tiempo y que dependa de los estados están dadas por el Teorema

2: Un ejemplo común son los robots móviles con ruedas omnidireccionales, los cuales si bien son no holonómicos, en general las ecuaciones de la forma (5.13) son integrables y cumplen con el Teorema de Brockett.

de Brockett [101]. Debido a esto existen algunas alternativas para el control de este tipo de sistemas, las más importantes se mencionan a continuación.

### **Control discontinuo invariante en el tiempo.**

Este tipo de controladores pueden ser clasificados en controladores continuos por partes y controladores por modos deslizantes. En [102], Sussman demostró la existencia de leyes de control continuo por partes para un tipo de sistema no lineal controlable, en [103] se presentó una fórmula para la obtención de una ley de control basada en funciones de Lyapunov y en [104] se muestran ejemplos de controladores para sistemas específicos. En cuanto al diseño de controladores por modos deslizantes, dos de los primeros trabajos se encuentran [105] y [106] en sistemas no holonómicos específicos, por lo que una metodología general para la aplicación general a sistemas no holonómicos aún no se encuentra disponible. Es conocido que el "chattering" en los controladores por modos deslizantes es un fenómeno no deseable, por lo que en [107] se propone una función suavizante para el diseño de un controlador por modos deslizantes aplicado a un robot móvil. Es importante mencionar que el control de la cinemática de sistemas no holonómicos, utilizando controladores discontinuos, puede ser difícil de implementar, por lo que el uso de controladores discontinuos es mayor cuando se controla la dinámica del sistema.

### **Control variante en el tiempo.**

El uso de controladores variantes en el tiempo se originó del trabajo de Samson en robots móviles [91] y [108]. En [109-111] se usaron métodos del promedio de funciones tipo saturación para la construcción de leyes de control para sistemas en forma encadenada [112]. Un método general es el conocido como método de Pomet, [113, 114], que genera una ley de control periódica y suave. La mayor desventaja que presenta este tipo de controladores es que las velocidades de convergencia son necesariamente no exponenciales [109]. La mayoría de los controladores de este tipo han sido orientados al área de robótica móvil [91, 108, 111, 115] aunque también existen trabajos en donde se diseñan controladores para vehículos espaciales [99, 116, 117].

### **Control híbrido.**

Estas metodologías combinan características de control continuo en el tiempo con características de eventos discretos o de tiempo discreto. Controladores que combinan tiempo con eventos discretos fueron propuestos por Bloch [79] y Kolmanovsky [118, 119] para la clase de sistemas no holonómicos de Chaplygin, dicha aproximación fue utilizada por Krishnan [97], [120] para la estabilización en altitud de vehículos espaciales. Por otro lado, controladores híbridos, que combinan características de tiempo continuo y de tiempo discreto, han sido desarrollados por un mayor número de investigadores, Sordalen [121] desarrolló un controlador para la estabilización de sistemas no holonómicos cinemáticos en forma encadenada y Canudas de Wit [122] extendió el trabajo a la dinámica.

Sontag [123, 124] propuso controladores aplicables a una mayor clase de sistemas cinemáticos. En [89] se da una introducción al control híbrido de robots móviles. Finalmente, es importante recalcar que la planificación y el control en móviles puede verse como una misma tarea.

## Control de sistemas No Holonómicos específicos.

### Control de sistemas giroscópicos.

El sistema giroscópico es un mecanismo con restricciones no holonómicas debido a sus propiedades de simetría y conservación del momento angular. En [125, 126] se explica desde el modelo dinámico hasta algunos controladores aplicados a este sistema. La gran mayoría de los estudios más recientes, sobre este tipo de sistemas, se centra en controladores que sirven para el control de orientación en mecanismos espaciales, en donde se utilizan diferentes configuraciones para giroscopios con uno o dos cardanes [127-131]. Otro tipo de configuración utilizada y estudiada, se da cuando se juntan más de un mecanismo y se hacen arreglos de giroscopios agrupados [132-136]. Por último, y tal vez más interesante, existen algunos trabajos recientes con mecanismos giroscópicos con estructura similar a la del giroscopio de Quanser (mejor conocido como *control moment gyroscope* (CMG) por sus siglas en inglés). En [137], los autores proponen un controlador no lineal para un CMG para lidiar con la pérdida de controlabilidad debido a la restricción no holonómica con la que cuenta el mecanismo, además de compensar la fricción del sistema y hacer el análisis de estabilidad del controlador propuesto. En [138], se propone un controlador de seguimiento de velocidad angular novedoso para el sistema con doble cardán, basado en un observador de estado en cascada extendido, el cual es robusto a perturbaciones, como dinámicas no modeladas e incertidumbres en el modelo. Por otro lado, [139] evalúa diversos algoritmos de control aplicados al CMG con un solo cardán y, [140] propone un algoritmo simple para evitar singularidades.

### Control de sistemas no holonómicos subactuados.

Por otro, lado el número de artículos sobre manipuladores subactuados no holonómicos es muy reducido. Los primeros trabajos fueron iniciados por el investigador italiano G. Oriolo [57, 141, 142], pero no logró el impacto esperado, ya que fuera de su grupo de colaboradores es difícil encontrar publicaciones relacionadas, salvo la publicada por H. Arai et al [143], y no fue hasta años recientes que P. Xiong et al volvieron a realizar estudios sobre manipuladores subactuados, dándole un enfoque hacia el área de sistemas no holonómicos de segundo orden [144].

Finalmente, es importante notar que, aunque existen ciertos sistemas subactuados que pueden ser clasificados como no holonómicos, para sistemas mecánicos no holonómicos subactuados la no holonomía de ciertas ecuaciones no da propiedades interesantes al sistema y por lo tanto dichos sistemas pueden ser controlados con la amplia teoría conocida diseñada para sistemas subactuados.

## 6.1. Introducción

Con el fin de mostrar una comparación de los métodos de modelado estudiados en el Capítulo 4, en este capítulo se utilizan dichas metodologías para calcular las ecuaciones del modelo dinámico de diversos sistemas mecánicos, los métodos a utilizar son:

- Ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección [49].

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\tau}_\rho + D(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m \quad (6.1)$$

- Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas [145] y [9]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}_q} \right) - \bar{A}(\boldsymbol{\rho})^T \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{v}_{nh} + \bar{A}(\boldsymbol{\rho})^T \boldsymbol{\tau}_\rho \in \mathbb{R}^n; \quad (6.2)$$

- Ecuaciones de Udwadia-Kalaba [71]

$$M(\boldsymbol{\rho})\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_c \in \mathbb{R}^m. \quad (6.3)$$

Mientras que los mecanismos a modelar son:

- Robot serial de 2 g.d.l (mecanismo con coordenadas independientes).
- Mecanismo de 5 barras (mecanismo con restricciones holonómicas).
- Robot móvil diferencial (mecanismo con restricciones no holonómicas)

Además, debido a que los modelos obtenidos son difíciles de comparar de forma analítica, se realizaron simulaciones en Simulink/MatLab de cada modelo obtenido para comparar el comportamiento de los mismos y mostrar su equivalencia.

## 6.2. Modelado de un sistema con coordenadas generalizadas mínimas: Robot CICESE

Como primer ejemplo de aplicación, se modelará un sistema en el cual es posible describir su configuración utilizando únicamente coordenadas mínimas, y por lo tanto, podrían ser considerados como sistemas sin restricciones. El ejemplo más común de este tipo de sistemas son los robots manipuladores seriales en los cuales, eligiendo las coordenadas articulares como las coordenadas generalizadas, las coordenadas que describen la configuración del sistema son independientes<sup>1</sup>.

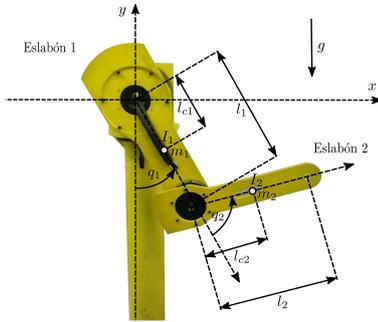
1: Las restricciones holonómicas entre las coordenadas de un robot manipulador serial, surgen cuando se utilizan coordenadas operacionales, i.e., cuando se utilizan las coordenadas espaciales  $x, y, z$  para describir la configuración de los elementos el robot.



Figura 6.1: Robot CICESE del laboratorio de Mecatrónica y Control del ITL.

## Descripción del sistema

El sistema a modelar es un robot manipulador serial planar de dos grados de libertad, con articulaciones rotacionales, conocido como robot CICESE (Figura 6.1), el cual se encuentra en el laboratorio de Mecatrónica y Control de la División de Estudios de Posgrado e Investigación (DEPI) del Instituto Tecnológico de la Laguna (ITL). Como se explicó previamente, en el caso de robots manipuladores seriales se pueden elegir diversos conjuntos de coordenadas generalizadas, pero para que éstas sean independientes una de la otra, se deben elegir los ángulos de cada uno de los eslabones como coordenadas mínimas (coordenadas articulares), i.e.,  $q_1$  y  $q_2$  (ver Figura 6.2). Por lo tanto, el vector de coordenadas generalizadas, las cuales son mínimas, está dado por



**Figura 6.2:** Diagrama del robot CICESE (Esquema cedido por el M.C. Sergio López Hernández)

$$q = \rho = [q_1 \quad q_2]^T \in \mathbb{R}^2$$

Además, el lagrangiano del sistema está dado por [146]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = & \frac{\dot{q}_1^2}{2} (I_1 + I_2 + l_1^2 m_2 + l_{c_1}^2 m_1 + l_{c_2}^2 m_2) + \frac{\dot{q}_2^2}{2} (I_2 + l_{c_2}^2 m_2) \\ & + I_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + g m_2 [l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1)] \\ & + l_{c_2}^2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_1 l_{c_2} m_2 \dot{q}_1^2 \cos(q_2) + l_1 l_{c_2} m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) \\ & + g l_{c_1} m_1 \cos(q_1). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Finalmente, los parámetros del robot pueden ser identificados en la Figura 6.2 y los valores numéricos en la Tabla 6.1

**Tabla 6.1:** Parámetros del robot CICESE.

Parámetro	Descripción	Valor
$l_1$	longitud del eslabón 1	0.26[m]
$l_2$	longitud del eslabón 2	0.26[m]
$l_{c_1}$	distancia al centro de masa del eslabón 1	0.0983[m]
$l_{c_2}$	distancia al centro de masa del eslabón 2	0.0229[m]
$m_1$	masa del eslabón 1	6.5225[Kg]
$m_2$	masa del eslabón 2	2.0458[Kg]
$I_1$	momento de inercia del eslabón 1	0.1213 [Kg m <sup>2</sup> ]
$I_2$	momento de inercia del eslabón 2	0.0116[Kg m <sup>2</sup> ]
$g$	aceleración de la gravedad	9.81[m/s <sup>2</sup> ]

## Aplicación de las metodologías

### Ecuaciones de E-L y matriz de proyección

En el caso de las ecuaciones de Euler-Lagrange + proyección, debido a que se han elegido coordenadas independientes, la matriz de restricciones es nula, i.e.,  $D(\rho) = O$  y por lo tanto no es necesario calcular la matriz de

proyección  $A(\rho)$ . Por lo tanto, las ecuaciones (6.1) pueden ser reescritas como:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}_q \in \mathbb{R}^n \quad (6.5)$$

Finalmente, utilizando (6.5) y el lagrangiano (6.4), las ecuaciones dinámicas del sistema están dadas por:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_q \in \mathbb{R}^2 \quad (6.6)$$

donde

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

y los elementos son:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_2 l_1^2 + 2m_2 \cos(q_2) l_1 l_{c_2} + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_1 + I_2 \\ m_{12} &= m_{21} = m_2 l_{c_2}^2 + l_1 m_2 \cos(q_2) l_{c_2} + I_2 \\ m_{22} &= m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \\ c_{11} &= -l_1 l_{c_2} m_2 \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ c_{12} &= -l_1 l_{c_2} m_2 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ c_{21} &= l_1 l_{c_2} m_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ c_{22} &= 0 \\ g_1 &= g m_2 (l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin(q_1)) + g l_{c_1} m_1 \sin(q_1) \\ g_2 &= g l_{c_2} m_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Es importante notar que, debido a que se eligieron coordenadas independientes para modelar el sistema, el modelo dinámico obtenido (6.6) es un modelo mínimo.

### Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas

Para el modelado con cuasi-velocidades, las velocidades arbitrarias elegidas son las velocidades generalizadas, i.e.,

$$\mathbf{v}_q = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$$

y no existen cuasi-velocidades debido a las restricciones, i.e.,

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0},$$

por lo tanto, se tiene que las matrices auxiliares (4.18) y (4.19) son la identidad, i.e.,  $S(\rho) = I$  y  $T(\rho) = I$ . Además, debido a esto, el vector de restricciones también es cero,  $v_{nh} = 0$ . Finalmente, la relación entre las coordenadas mínimas y las generalizadas está dada por una matriz identidad  $\bar{A}(\rho) = I$ . Por lo tanto, las ecuaciones para un sistema mecánico con cuasi-velocidades, modelado con coordenadas mínimas, están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}_q} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \mathbf{v})}{\partial \rho} = \boldsymbol{\tau}_\rho \in \mathbb{R}^n. \quad (6.7)$$

Finalmente, utilizando (6.7), se obtiene el modelo dinámico mínimo del robot CICESE, el cual está dado por:

$$M_v(\rho)\dot{\nu} + C_v(\rho, \nu)\nu + g_v(\rho) = \tau_v \in \mathbb{R}^2 \quad (6.8)$$

donde

$$M_v(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad C_v(\rho, \nu) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad g_v(q) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

y los elementos son:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_2 l_1^2 + 2m_2 \cos(q_2) l_1 l_{c_2} + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_1 + I_2 \\ m_{12} &= m_{21} = m_2 l_{c_2}^2 + l_1 m_2 \cos(q_2) l_{c_2} + I_2 \\ m_{22} &= m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \\ c_{11} &= -l_1 l_{c_2} m_2 \sin(q_2) v_2 \\ c_{12} &= -l_1 l_{c_2} m_2 \sin(q_2) (v_1 + v_2) \\ c_{21} &= l_1 l_{c_2} m_2 \sin(q_2) v_2 \\ c_{22} &= 0 \\ g_1 &= g m_2 (l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin(q_1)) + g l_{c_1} m_1 \sin(q_1) \\ g_2 &= g l_{c_2} m_2 \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Es importante notar que, cuando se eligen las velocidades mínimas como las quasi-velocidades independientes, i.e.  $\nu_q = \dot{q}$ , es posible transformar el modelo mínimo (6.8) en (6.6) y viceversa<sup>2</sup>.

2: Además, con esto se ejemplifica que las ecuaciones de E-L para sistemas sin restricciones son un caso particular de las ecuaciones de P-C-R.

### Ecuaciones de Udwadia-Kalaba

En el caso de las ecuaciones de Udwadia-Kalaba, es importante recordar que dichas ecuaciones son una metodología para encontrar las fuerzas de reacción debido a las restricciones en un sistema. Así, debido a que se modeló el sistema con coordenadas mínimas, no hay restricciones, por lo que las ecuaciones de Udwadia-Kalaba no son necesarias. Si se quisieran utilizar estas ecuaciones, es posible notar que las matrices de restricción son igual a cero, i.e.,  $D(\rho) = O$  y por lo tanto, las fuerzas de reacción debido a las restricciones también son iguales a cero  $f_c(\rho, \dot{\rho}) = \mathbf{0}$ . Por lo tanto, de (6.3) el modelo estaría dado por

$$M(\rho)\ddot{\rho} = f \in \mathbb{R}^2.$$

Pero para llegar a estas ecuaciones se utiliza (6.6), con lo que se ejemplifica que las ecuaciones de Udwadia-Kalaba no son requeridas en sistemas sin restricciones<sup>3</sup>.

3: Sistemas modelados con coordenadas mínimas.

### Comparación de resultados

En este caso, debido a que las ecuaciones de Udwadia-Kalaba no se utilizan, se compararán únicamente los modelos dinámicos obtenidos con las ecuaciones de Euler-Lagrange + proyección (E-L) (6.6) y con las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas (Qv) (6.8). Además, en esta simulación no se aplicaron fuerzas externas, i.e.,  $\tau =$

$[0, 0]^T$ , y únicamente se dejó que el vector de gravedad moviera los eslabones del robot. En la Figura 6.3 es posible observar cómo la respuesta en simulación, para una misma entrada y mismas condiciones iniciales, es la misma para los dos modelos obtenidos. Por lo tanto, es posible concluir que ambos modelos obtenidos son equivalentes.

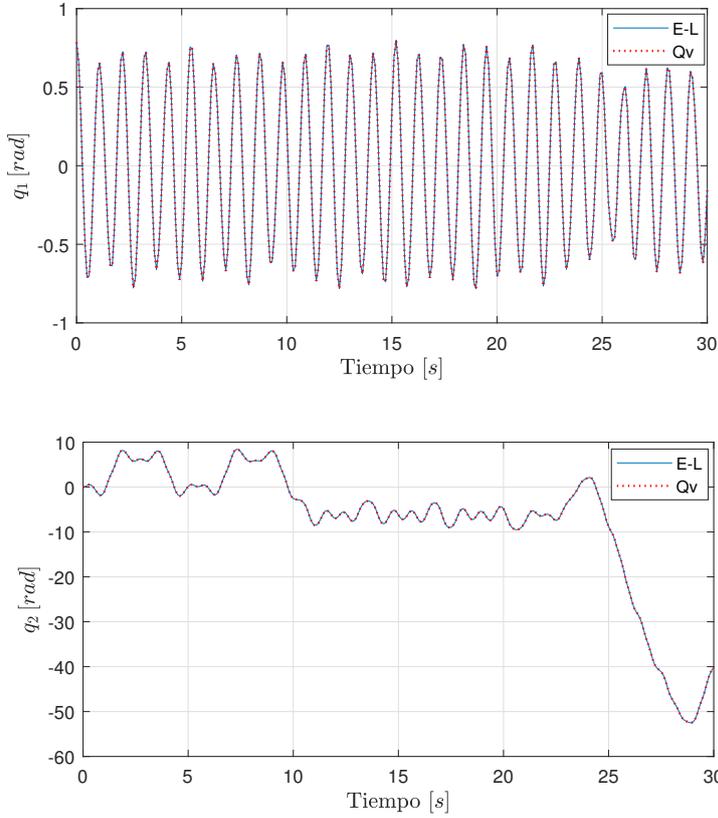


Figura 6.3: Evolución temporal de las coordenadas articulares del robot CICESE.

### 6.3. Modelado de un sistema con restricciones holonómicas: Mecanismo de 5 barras

#### Descripción del sistema

Como ejemplo de aplicación para un sistema con restricciones holonómicas, se tomará un sistema paralelo, en particular, un mecanismo de 5 barras (ver Figura 6.4), el cual se encuentra en el laboratorio de Mecatrónica y Control de la DEPI del ITL. Este sistema cuenta con 2 coordenadas actuadas y dos subactuadas, las cuales pueden ser agrupadas en un vector de coordenadas generalizadas y dicho vector está dado por

$$\rho = [q_1 \quad q_2 \quad \beta_1 \quad \beta_2]^T \in \mathbb{R}^{m=4}.$$

Por otro lado, el vector de coordenadas mínimas (las cuales son las coordenadas actuadas), está dado por

$$q = [q_1 \quad q_2]^T \in \mathbb{R}^{n=2}$$

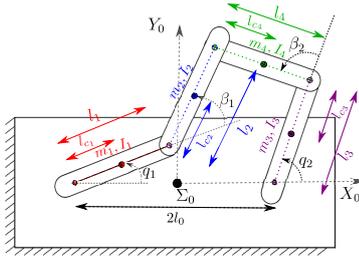


Figura 6.4: Diagrama del mecanismo de 5 barras.

Además, en este caso el lagrangiano del sistema [147], está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}) = & \frac{\dot{q}_1^2}{2} (I_1 + I_2 + l_1^2 m_2 + l_{c_1}^2 m_1 + l_{c_2}^2 m_2) + I_2 \dot{\beta}_1 \dot{q}_1 \\ & + \frac{\dot{q}_2^2}{2} (I_3 + I_4 + l_3^2 m_4 + l_{c_3}^2 m_3 + l_{c_4}^2 m_4) + I_4 \dot{\beta}_2 \dot{q}_2 \\ & + \frac{\dot{\beta}_1^2}{2} (I_2 + l_{c_2}^2 m_2) + \frac{\dot{\beta}_2^2}{2} (I_4 + l_{c_4}^2 m_4) + \dot{\beta}_1 l_{c_2}^2 m_2 \dot{q}_1 \\ & + \dot{\beta}_2 l_{c_4}^2 m_4 \dot{q}_2 + \dot{\beta}_2 l_3 l_{c_4} m_4 \dot{q}_2 C_{(\beta_2)} + l_1 l_{c_2} m_2 \dot{q}_1^2 C_{(\beta_1)} \\ & + l_3 l_{c_4} m_4 \dot{q}_2^2 C_{(\beta_2)} + \dot{\beta}_1 l_1 l_{c_2} m_2 \dot{q}_1 C_{(\beta_1)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Los parámetros del robot pueden ser identificados en la Figura 6.4 y los valores numéricos en la Tabla 6.2. Por último, debido a que se tienen  $m = 4$  coordenadas no mínimas y sólo  $n = 2$  coordenadas mínimas, esto implica que se deberán considerar  $r = m - n = 2$  restricciones de configuración (holonómicas). Dichas restricciones están dadas por:

$$\alpha(\rho) = \begin{bmatrix} l_1 C_{(q_1)} + l_2 C_{q_1+\beta_1} - l_3 C_{(q_2)} - l_4 C_{(q_2+\beta_2)} - 2l_0 \\ l_1 S_{(q_1)} + l_2 S_{(q_1+\beta_1)} - l_3 S_{(q_2)} - l_4 S_{(q_2+\beta_2)} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Tabla 6.2: Parámetros del mecanismo de 5 barras.

Parámetro	Descripción	Valor
$m_1$	masa del eslabón 1	0.126[Kg]
$m_2$	masa del eslabón 2	0.085[Kg]
$m_3$	masa del eslabón 3	0.121[Kg]
$m_4$	masa del eslabón 4	0.063[Kg]
$l_1$	longitud del eslabón 1	0.127[m]
$l_2$	longitud del eslabón 2	0.127[m]
$l_3$	longitud del eslabón 3	0.127[m]
$l_4$	longitud del eslabón 4	0.127[m]
$l_{c_1}$	distancia al centro de masa del eslabón 1	0.047[m]
$l_{c_2}$	distancia al centro de masa del eslabón 2	0.069[m]
$l_{c_3}$	distancia al centro de masa del eslabón 3	0.045[m]
$l_{c_4}$	distancia al centro de masa del eslabón 4	0.062[m]
$I_1$	momento de inercia del eslabón 1	0.0.0170[Kgm <sup>2</sup> ]
$I_2$	momento de inercia del eslabón 2	0.0.0001[Kgm <sup>2</sup> ]
$I_3$	momento de inercia del eslabón 3	0.0.0140[Kgm <sup>2</sup> ]
$I_4$	momento de inercia del eslabón 4	0.0.0001[Kgm <sup>2</sup> ]

## Aplicación de las metodologías

### Ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección

En el caso de las ecuaciones de Euler-Lagrange + proyección, de (6.10) es posible calcular la matriz pfaffiana de restricciones, la cual queda definida como

$$D(\rho) = \frac{\partial \alpha(\rho)}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

donde

$$\begin{aligned} d_{11} &= -(l_1 S_{(q_1)} + l_2 S_{(q_1+\beta_1)}), & d_{13} &= -l_2 S_{(q_1+\beta_1)}, \\ d_{12} &= l_3 S_{(q_2)} + l_4 S_{(q_2+\beta_2)}, & d_{14} &= l_4 S_{(q_2+\beta_2)}, \\ d_{21} &= l_1 C_{(q_1)} + l_2 C_{(q_1+\beta_1)}, & d_{23} &= -l_2 C_{(q_1+\beta_1)}, \\ d_{22} &= -(l_3 C_{(q_2)} + l_4 C_{(q_2+\beta_2)}), & d_{24} &= -l_4 C_{(q_2+\beta_2)}. \end{aligned}$$

Además, para este sistema y los vectores de coordenadas elegidos, la matriz de proyección  $A(\rho)$ , con la que se eliminará a la matriz (6.11), está dada por:

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{l_1 S_{(\beta_{q_2})} - l_2 S_{(q_\beta)}}{l_2 S_{(q_\beta)}} & -\frac{l_3 S_{(\beta_2)}}{l_2 S_{(q_\beta)}} \\ \frac{l_1 S_{(\beta_1)}}{l_4 S_{(q_\beta)}} & -\frac{l_3 S_{(\beta_{q_1})} - l_4 S_{(q_\beta)}}{l_4 S_{(q_\beta)}} \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

con  $\beta_{q_2} = q_2 + \beta_2 - q_1$ ,  $\beta_{q_1} = q_1 + \beta_1 - q_2$  y  $q_\beta = q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2$ ; observe que  $S_{(q_\beta)} \neq 0$ .

Entonces utilizando (6.1), es posible calcular el modelo no mínimo del sistema, el cual está dado por

$$M(\rho)\ddot{\rho} + C(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho} = \tau_\rho + D(\rho)^T \lambda \in \mathbb{R}^4. \quad (6.13)$$

Finalmente, es posible obtener el modelo mínimo del sistema, el cual queda dado por

$$M_r(\rho)\ddot{q} + C_r(\rho, \dot{q})\dot{q} + g_r(\rho) = \tau_q \in \mathbb{R}^2 \quad (6.14)$$

donde los elementos de (6.14) son calculados utilizando (4.9), la matriz de proyección (6.12) y el modelo no mínimo (6.13)<sup>4</sup>.

4: Los elementos de las matrices (6.13) pueden ser consultados en el el Apéndice B.

### Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas

Para el modelado con cuasi-velocidades del mecanismo de 5 barras, se eligen las velocidades de las coordenadas actuadas como las velocidades arbitrarias, i.e.,

$$v_q = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \quad (6.15)$$

y de (6.11), es posible calcular las cuasi-velocidades debidas a las restricciones, las cuales están dadas por

$$v_\beta = D(\rho)\dot{\rho}. \quad (6.16)$$

De las ecuaciones (6.15) y (6.16), la relación entre las velocidades generalizadas no mínimas y las cuasi-velocidades está dada por

$$v = S(\rho)\dot{\rho}. \quad (6.17)$$

Además, en este caso  $S(\rho)$  es no singular, por lo que,

$$\dot{\rho} = T(\rho)v \quad (6.18)$$

donde  $T(\rho) = S(\rho)^{-1}$ , y cuyos elementos están definidos en (B.4). Además, de (4.23) es posible calcular la matriz auxiliar, la cual queda definida en (B.5). En el caso del mecanismo de 5 barras, la matriz (4.26) es una matriz nula, i.e.  $W(\rho, v) = O$ , por lo que el vector de restricciones (4.27) es nulo, i.e.,

$$v_{nh} = 0$$

Finalmente, con esta información es posible aplicar las ecuaciones de Poincare-Chetaev-Rumyantsev modificadas (6.2), con lo que se obtiene un modelo mínimo, el cual está dado por <sup>5</sup> :

5: Además, substituyendo los valores de las cuasi-velocidades nulas, i.e.,

$$v_\beta = 0 = [v_3 \quad v_4]^T = [0 \quad 0]^T,$$

es posible simplificar las ecuaciones del modelo (6.19).

$$M_v(\rho)\dot{v}_q + C_v(\rho, v)v_q = \tau_{v_q} \in \mathbb{R}^2. \quad (6.19)$$

### Ecuaciones de Udwadia-Kalaba

Para el caso de las ecuaciones de Udwadia-Kalaba se utiliza el modelo sin restricciones de (6.13), con  $D(\rho)^T \lambda = 0$ , esto con el fin de obtener las información del sistema independiente antes de calcular las fuerzas de reacción. Posteriormente, es necesario encontrar las restricciones del sistema a partir de (6.10), dichas restricciones están dadas por

$$D(\rho)\ddot{\rho} = b \quad (6.20)$$

donde  $D(\rho)$  está definida por (6.11) y  $b$  en (B.9). Ahora, con el fin de obtener las fuerzas de reacción, se utiliza la matriz de inercias del sistema sin restricciones, la cual está definida en (B.1). Por lo tanto, las fuerzas de reacción debidas a las restricciones están dadas por

$$f_c = M(\rho)^{1/2} \left( D(\rho)M(\rho)^{-1/2} \right)^+ (b - D(\rho)a) \in \mathbb{R}^4 \quad (6.21)$$

6: Los elementos de dicha matriz están dados en el apéndice (ecuación (B.1)).

donde  $a = M(\rho)^{-1}(\tau_\rho - C(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho})$ . Ahora, de (6.13) se obtiene la matriz de inercias del sistema sin considerar las restricciones, la cual está dada por <sup>6</sup>

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{31} & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & m_{44} \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

7: Con el fin de calcular dicha matriz, se utiliza la función `sqrtn(X)` de MatLab.

Nótese que (6.22) es una matriz no diagonal, y por lo tanto, el cálculo de la raíz cuadrada de dicha matriz no es una tarea trivial <sup>7</sup>. Además, la complejidad de la matriz resultante  $M(q)^{1/2}$  se eleva.

Finalmente, una vez que se han calculado las fuerzas de reacción, es posible considerarlas en el sistema sin restricciones con el fin de obtener el modelo completo. En este caso, el modelo completo del sistema queda dado por:

$$M(\rho)\ddot{\rho} = f + f_c \in \mathbb{R}^4. \quad (6.23)$$

donde (6.23) es un modelo no mínimo. Es importante notar que en este caso el vector de fuerzas de reacción  $f_c$  se calcula de forma numérica a partir de las otras matrices, esto debido a que el modelo analítico resulta ser demasiado complejo.

### Comparación de resultados

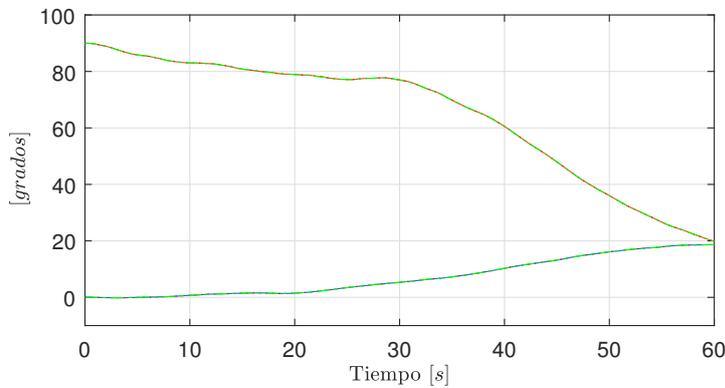
Ahora, con el fin de poder comparar los modelos obtenidos, se simula la respuesta de estos modelos obtenidos en Simulink/Matlab. Para este experimento las condiciones iniciales de los tres modelos fueron las mismas. Además, la entrada al sistema corresponde a valores aleatorios obtenidos usando la función *Uniform Random Number* (Los parámetros de  $\tau_1$  son: mínimo = -0.00003, máximo = 0.00003, semilla =0 y tiempo de muestreo 0.1. Mientras que los parámetros de  $\tau_2$  son: mínimo = -0.00008, máximo =0.00008, semilla =3 y tiempo de muestreo 0.1). En la Figura 6.5 es posible observar cómo cada conjunto de ecuaciones tiene el mismo comportamiento para la entrada propuesta, sin importar que se tengan diferentes números de ecuaciones en los modelos. Por último, la Tabla 6.3 muestra una comparación de los tiempos requeridos por los modelos mínimos y los no mínimos para completar cada simulación en particular<sup>8</sup>. Note que los modelos mínimos tienen un tiempo de simulación menor.

Tabla 6.3: Tabla de comparación.

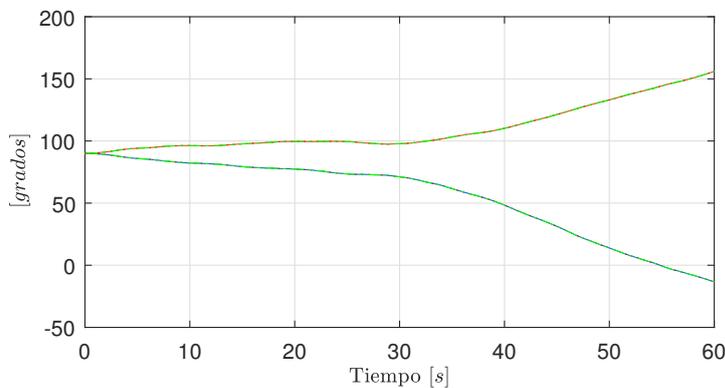
Modelo	T.S. [s]
Mínimo	0.2771
No mínimo	0.3780

T.S.= Tiempo requerido para realizar la simulación.

8: La computadora usada tiene un procesador Ryzen 5 3600, 3.59 GHz y 32 GB de memoria RAM.



(a) Articulaciones actuadas



(b) Articulaciones no actuadas

Figura 6.5: Comportamiento de las articulaciones.

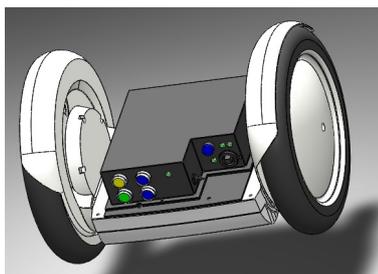


Figura 6.6: Diagrama de la plataforma Segway RMP-100 sin péndulo.

### 6.4. Modelado de un sistema con restricciones no holonómicas: Segway RMP-100

#### Descripción del sistema

Por último, como ejemplo de aplicación para el modelado de un sistema con restricciones no holonómicas, se considera un robot móvil con ruedas diferencial, en particular se elige el robot Segway RMP-100, pero ignorando la base pendular con la que cuenta (ver Figura 6.6, i.e., del modelo completo de la plataforma se considera  $\alpha = 0$ ). Dicho robot se encuentra en el laboratorio de Mecatrónica y Control de la DEPI del IITL. Para este sistema, el vector de coordenadas generalizadas no mínimas está dado por

$$\rho = [x \quad y \quad \theta \quad \phi_l \quad \phi_r]^T \in \mathbb{R}^{m=5}, \tag{6.24}$$

donde  $x, y, \theta$  dan la postura del marco  $\Sigma_r$ , unido al robot en un plano horizontal, relativo a un marco inercial  $\Sigma_0$ . Además,  $\phi_l$  y  $\phi_r$  son los ángulos de rotación, alrededor del eje  $Y_r$ , de la rueda izquierda y la rueda derecha respectivamente. Por otro lado, el vector de coordenadas generalizadas mínimas es elegido como

$$q = [\phi_l \quad \phi_r]^T \in \mathbb{R}^{n=2}. \tag{6.25}$$

Para este sistema, la función lagrangiana está dado por [148]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}) = & \frac{I_{w_y}}{2} (\dot{\phi}_l^2 + \dot{\phi}_r^2) + I_{w_x} \dot{\theta}^2 + m_w (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ & + \frac{m_b}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + l_b^2 m_w \dot{\theta}^2 + \frac{I_{b_z} \dot{\theta}^2}{2}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Los parámetros del robot pueden ser identificados en la Figura 6.7 y los valores numéricos de dichos parámetros así como su descripción en la Tabla 6.4.

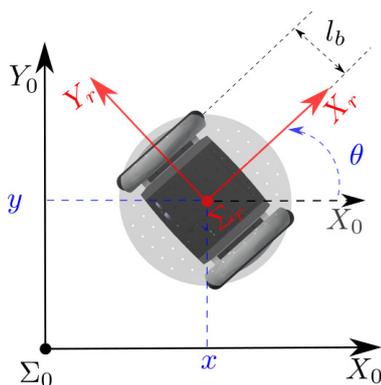


Figura 6.7: Diagrama del robot Segway RMP-100.

Tabla 6.4: Parámetros del robot Segway RMP-100.

Parámetro	Descripción	Valor
$l_b$	distancia media entre ruedas 1	0.234[m]
$r$	radio de las ruedas	0.2[m]
$m_b$	masa de la base del robot 3	26.4818[Kg]
$m_w$	masa de las ruedas 4	2.35[Kg]
$I_{b_z}$	m.i. de la base respecto al eje z	0.615[Kgm <sup>2</sup> ]
$I_{w_x}$	m.i. de la rueda respecto al eje x	0.127[Kgm <sup>2</sup> ]
$I_{w_y}$	m.i. de la rueda respecto al eje y	0.127[Kgm <sup>2</sup> ]

m.i.= momento de inercia.

Por último, es importante notar que debido a que se tienen  $m = 5$  coordenadas generalizadas no mínimas y sólo  $n = 2$  coordenadas generalizadas mínimas, se deben de considerar  $r = m - n = 3$  restricciones entre ellas. En este caso, las restricciones son no holonómicas y, de acuerdo con [149], las tres restricciones bajo las que está el sistema tienen

la forma  $D(\rho)\rho = 0$ , donde la matriz de restricciones está dada por

$$D(\rho) = \begin{bmatrix} -S_\theta & C_\theta & 0 & 0 & 0 \\ C_\theta & S_\theta & l_b & 0 & -r \\ C_\theta & S_\theta & -l_b & -r & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

donde  $C_\theta = \cos(\theta)$  y  $S_\theta = \sin(\theta)$ .

## Aplicación de las metodologías

### Ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección

Para el caso de las ecuaciones de Euler-Lagrange + proyección, la matriz de restricciones (6.27) ya está en forma pfaffiana por lo que no es necesario hacer ninguna modificación. Utilizando (6.1) se puede obtener el modelo no mínimo, el cual tiene la siguiente forma:

$$M(\rho)\ddot{\rho} = \tau_\rho + D(\rho)\lambda \in \mathbb{R}^5, \quad (6.28)$$

con

$$M(\rho) = \begin{bmatrix} 2m_w + m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m_w + m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_w l_b^2 + I_{b_z} + 2I_{w_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{w_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{w_y} \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

donde, la matriz de inercias  $M(\rho)$  es constante y por lo tanto no existe la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis <sup>9</sup>.

9: Además, la matriz  $M(\rho)$  de (6.28) es diagonal por lo que el cálculo de la raíz cuadrada, necesaria para las ecuaciones de U-K, se facilita.

Ahora, con el fin de eliminar los multiplicadores de Lagrange y reducir el sistema no mínimo (6.28) a uno mínimo, es necesario obtener la matriz de proyección  $A(\rho)$ . En este caso, dicha matriz puede ser obtenida calculando el modelo cinemático de configuración del robot móvil con ruedas [149]. Por lo tanto, la matriz de proyección para el sistema es

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{r \cos(\theta)}{2} & \frac{r \cos(\theta)}{2} \\ \frac{r \sin(\theta)}{2} & \frac{r \sin(\theta)}{2} \\ -\frac{r}{2l_b} & \frac{r}{2l_b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Finalmente, con la matriz de proyección (6.30) es posible eliminar las restricciones en el modelo no mínimo (6.28) para obtener el modelo mínimo, el cual está dado por:

$$M_r(\rho)\ddot{q} = \tau_q \in \mathbb{R}^2, \quad (6.31)$$

donde los elementos de (6.31) son calculados utilizando (4.9) <sup>10</sup>.

10: Además, dicha matriz puede ser encontrada en el Apéndice B.2

### Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas

Para aplicar estas ecuaciones en el Segway RMP-100, como velocidades arbitrarias, se eligen las velocidades de las coordenadas actuadas ( la derivada temporal de las coordenadas mínimas (6.25)), i.e.,

$$\mathbf{v}_q = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T \quad (6.32)$$

y utilizando directamente (6.27), es posible calcular las cuasi-velocidades debidas a las restricciones, las cuales están dadas por

$$\mathbf{v}_\beta = D(\rho)\dot{\rho}. \quad (6.33)$$

Ahora, con el fin de facilitar los cálculos subsecuentes, se reacomoda el vector de coordenadas generalizadas<sup>11</sup>, el cual ahora queda definido como

$$\rho = [\phi_l \quad \phi_r \quad x \quad y \quad \theta]^T \in \mathbb{R}^{m=5}, \quad (6.34)$$

Entonces, de (6.32), (6.33) y el nuevo vector de coordenadas generalizadas (6.34), la relación entre cuasi-velocidades y las velocidades generalizadas está dada por,

$$\mathbf{v} = S(\rho)\dot{\rho} \quad (6.35)$$

y, debido a que (B.11) es no singular, es posible obtener la relación inversa, i.e.,

$$\dot{\rho} = T(\rho)\mathbf{v}, \quad (6.36)$$

donde los componentes de las matrices en (6.35) y (6.36) pueden ser encontrados en el apéndice en las ecuaciones (B.11) y (B.12). Por otro lado, la matriz auxiliar (4.23) está dada por

$$\bar{A}(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{r \cos(\theta)}{2} & \frac{r \cos(\theta)}{2} \\ \frac{r \sin(\theta)}{2} & \frac{r \sin(\theta)}{2} \\ -\frac{r}{2l_b} & \frac{r}{2l_b} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

y la matriz de restricciones  $W(\rho, \mathbf{v})$  está definida en (B.13), la cual es utilizada para calcular el vector  $\mathbf{v}_{nh}$ , el cual está dado por:

$$\mathbf{v}_{nh} = \begin{bmatrix} \frac{r^2(v_1 + nu_2)(2m_w + m_b)(v_3)}{4l_b} \\ -\frac{r^2(v_1 + nu_2)(2m_w + m_b)(v_3)}{4l_b} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Ahora, utilizando (6.36) para hacer un cambio de variable en el lagrangiano del sistema (6.27), es posible aplicar las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas (6.2), con lo que se obtiene el modelo dinámico del sistema:

$$M_v(\rho)\dot{\mathbf{v}}_q + \mathbf{v}_{nh} = \boldsymbol{\tau}_{v_q} \in \mathbb{R}^2 \quad (6.39)$$

11: Esto con el fin de simplificar el cálculo de la inversa de la matriz en (6.35)

Finalmente, substituyendo los valores de las cuasi-velocidades nulas, i.e.,

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} = [v_3 \quad v_4 \quad v_5]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

en (6.39), se llega al modelo simplificado

$$M_v(\boldsymbol{\rho})\dot{\mathbf{v}}_q + \mathbf{v}_{nh} = \boldsymbol{\tau}_{v_q} \in \mathbb{R}^2.$$

donde los elementos de la matriz  $M_v(\boldsymbol{\rho})$  se pueden consultar en el Apéndice B.2.

### Ecuaciones de Udwadia-Kalaba

Por último, para utilizar las ecuaciones de movimiento Udwadia-Kalaba, primero es necesario obtener las ecuaciones de restricción, las cuales están dadas por  $D(\boldsymbol{\rho})\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{b}$ , donde  $D(\boldsymbol{\rho})$  está definida en (6.27) y el vector  $\mathbf{b}$  está definido por.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} (\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta)) \\ -\dot{\theta} (\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta)) \\ -\dot{\theta} (\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta)) \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

Es importante notar que el vector de coordenadas generalizadas está dado por (6.24). A continuación, del modelo no mínimo obtenido previamente (6.28), se obtienen las ecuaciones del sistema sin restricción, i.e.  $D(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{O}$  (donde la matriz nula  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ). Ahora, de la matriz (6.29), la cual en este caso es diagonal<sup>12</sup>, se obtiene su raíz cuadrada la cual está dada por:

12: Para el cálculo de la raíz cuadrada de una matriz diagonal, sólo es necesario sacar la raíz cuadrada de cada uno de sus elementos.

$$M(\boldsymbol{\rho})^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{2m_w + m_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2m_w + m_b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2m_w l_b^2 + I_{b_z} + 2I_{w_x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{I_{w_y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{I_{w_y}} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Una vez calculada esta matriz, es posible obtener las fuerzas de reacción debidas a las restricciones  $\mathbf{f}_c$ , las cuales están dadas por

$$\mathbf{f}_c = M(\boldsymbol{\rho})^{1/2} \left( D(\boldsymbol{\rho})M(\boldsymbol{\rho})^{-1/2} \right)^+ (\mathbf{b} - D(\boldsymbol{\rho})\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^5. \quad (6.42)$$

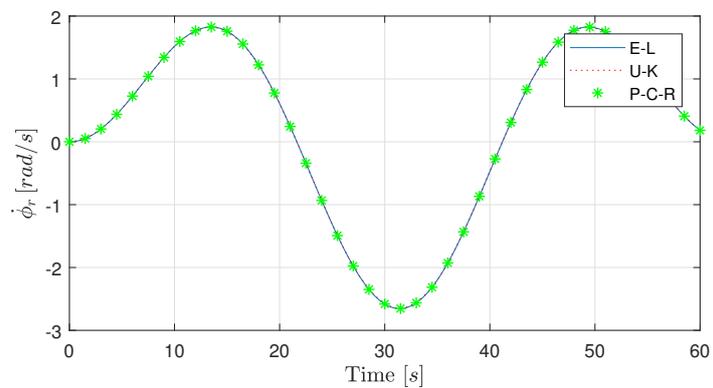
donde nuevamente  $(X)^+$  es la inversa generalizada de Moore-Penrose de una matriz  $X$ . Finalmente, utilizando (6.42) es posible obtener el modelo no mínimo del sistema, el cual está dado por

$$M(\boldsymbol{\rho})\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_c \in \mathbb{R}^5, \quad (6.43)$$

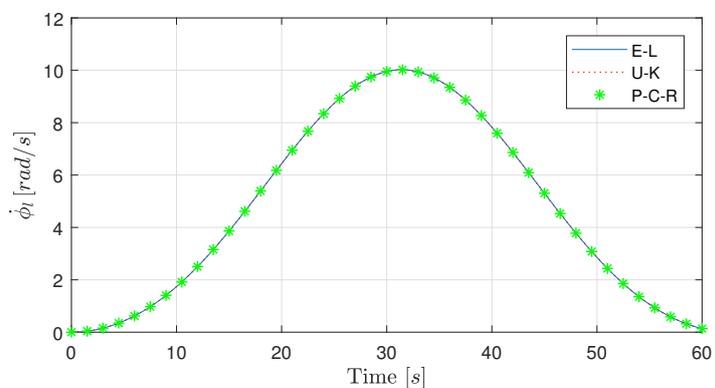
donde  $\mathbf{f} = M(\boldsymbol{\rho})^{-1}\boldsymbol{\tau}_\rho$ .

## Comparación de resultados

Nuevamente, con el fin de poder comparar los modelos obtenidos con las tres metodologías, se simula la respuesta de estos modelos utilizando Simulink/Matlab. Para este experimento las condiciones iniciales de los tres modelos fueron las mismas, y las entradas de control son señales sinusoidales con diferentes amplitudes. En la Figura 6.8 es posible observar cómo cada conjunto de ecuaciones tiene el mismo comportamiento para la entrada propuesta, sin importar que se tengan diferentes números de ecuaciones en los modelos. Por último, la Tabla 6.3 muestra una comparación de los tiempos requeridos por los modelos mínimos y los no mínimos para completar cada simulación en particular. Note que los modelos mínimos tienen un tiempo de simulación menor.



(a) Velocidad de la rueda derecha



(b) Velocidad de la rueda izquierda

**Figura 6.8:** Comportamiento de las velocidades independientes.

**Tabla 6.5:** Tabla de comparación.

Modelo	T.S. [s]
Mínimo	0.2198
No mínimo	0.7907

T.S.= Tiempo requerido para realizar la simulación.

## 7.1. Notas sobre el modelado de sistemas mecánicos con restricciones no holonómicas.

El presente trabajo ha tratado ampliamente el estudio sobre el modelado de sistemas con restricciones no holonómicas. Por lo tanto, en esta sección se detallan algunas conclusiones importantes al respecto; dando énfasis en las ventajas y desventajas de cada una de las metodologías abordadas.

### Uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange + matriz de proyección

Para el uso de esta metodología, algunas de las consideraciones más importantes son:

- Debido a que es una de las metodologías más conocidas y aplicadas para el modelado de sistemas sin restricciones, resulta más sencillo aprender unos pasos extras para modelar sistemas con restricciones que aprender nuevas metodologías.
- Como es posible apreciar en esta sección, con esta metodología es posible obtener los dos tipos de modelos considerados en esta tesis, lo cual puede ser ventajoso en ciertas situaciones.
- Una desventaja importante es que, al menos en los trabajos estudiados, no existe una metodología general para encontrar la relación (4.8). Aunque dicha relación puede ser encontrada en los siguientes dos casos:
  - Cuando se tienen sistemas holonómicos, es posible encontrar dicha relación si se conoce  $\rho = f(q)$  (aunque esta última puede resultar muy difícil de calcular de forma analítica).
  - Cuando el sistema bajo estudio es un robot móvil con ruedas, si se eligen las coordenadas generalizadas mínimas y no mínimas apropiadamente, dicha relación está dada por el modelo cinemático de configuración [150].
- Otra desventaja que presenta esta metodología es, que sólo es posible considerar restricciones pfaffianas, y aunque no se consideraron restricciones no lineales en el presente trabajo de tesis, es deseable conocer herramientas que funcionen en un mayor número de sistemas.
- Por último, una ventaja importante de esta metodología es, que es posible obtener dos modelos: el modelo mínimo y no mínimo. Lo cual en situaciones particulares podría ser de utilidad.

Si bien esta metodología es la más limitada (debido al tipo de restricciones que puede considerar), existe una gran variedad de sistemas mecánicos,

utilizados en el área de robótica y control, los cuales cumplen con las características necesarias para poder utilizarla, por lo cual sigue siendo una herramienta importante.

## Uso de las ecuaciones de Udwadia-Kalaba

Para el uso de esta metodología, algunas de las consideraciones más importantes son:

- No es propiamente una metodología de modelado, si no una metodología para encontrar las fuerzas producidas debido a las restricciones con las que cuenta el sistema. Debido a esto, es importante remarcar que es necesario conocer previamente alguna otra metodología de modelado para sistemas sin restricciones.
- Debido a lo anterior, no es posible aplicar esta herramienta a sistemas no restringidos (lo que limita el número de sistemas en la cual se puede aplicar).
- Una de las ventajas más importantes es que, debido a la forma en la que se consideran las restricciones (4.11), se pueden considerar restricciones no lineales en las velocidades.
- Para su aplicación no es necesario elegir coordenadas mínimas, por lo que tampoco es necesario calcular las relaciones entre éstas y las coordenadas no mínimas.
- Por otro lado, una de las desventajas importantes, es que el modelo dinámico obtenido es no mínimo, lo cual podría ser no deseado en algunos casos, y la relación entre este modelo no mínimo y un posible modelo mínimo no es conocida. Y aunque existen metodologías de control que utilizan estas ecuaciones como [151] y [152], por citar algunas, es más común diseñar controladores considerando únicamente las fuerzas aplicadas a las variables de interés, i.e., usando el modelo dinámico mínimo del sistema.
- Para aplicar esta metodología es necesario primero conocer otra metodología de modelado de sistemas sin restricciones.
- En general, los modelos no mínimos requieren de un costo computacional mayor para su simulación.
- Por último, es importante notar que la desventaja más notoria del uso de estas ecuaciones surge de la necesidad de calcular la raíz cuadrada de la matriz de inercia (una tarea que puede llegar a ser muy complicada cuando la matriz es no diagonal [153]). En el caso de sistemas con matrices de inercia no diagonales, las expresiones de los elementos en  $M(\rho)^{1/2}$  aumentan considerablemente en tamaño, complicando así los cálculos analíticos restantes y su uso para el diseño de controladores.

En los diversos trabajos publicados sobre esta metodología, sugieren que la misma es la metodología con más ventajas para obtener el modelo dinámico de sistemas con restricciones, y aunque esto es cierto, debido la forma en la que se incluyen las restricciones existen sistemas en los que resulta poco atractivo aplicar esta metodología (una vez más, debido al cálculo de la raíz cuadrada de la matriz de inercias) y por lo tanto se reduce la ventaja de usar estas ecuaciones.

## Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas

Algunas de las ventajas más importantes al utilizar este método son:

- El cálculo del modelo mínimo es directo y sin la necesidad de calcular otro modelo previamente
- El uso de cuasi-velocidades nos permite obtener modelos en los cuales el vector de fuerzas puede ser referido a una combinación de velocidades generalizadas, en lugar de sólo a las velocidades mínimas.
- El uso de la matriz  $W(\rho, \nu)$ , permite ignorar el cálculo de los coeficientes de estructura. Cálculo que puede tener un alto costo computacional.
- Esta metodología nos da directamente una forma de conocer la relación entre las velocidades generalizadas no mínimas y las cuasi-velocidades (en donde las velocidades generalizadas mínimas pueden ser un caso particular de cuasi-velocidades).

Por otro lado, las desventajas son las siguientes:

- Dependiendo de las cuasi-velocidades elegidas, los modelos mínimos calculados con esta metodología pueden llegar a ser más complejos que los obtenidos con las ecuaciones de Euler-Lagrange + proyección.
- La elección de velocidades generalizadas y cuasi-velocidades puede ser una tarea no trivial, la cual requiere de cierta experiencia para utilizar la mejor combinación de estas velocidades.
- Debido a lo anterior, la elección de diferentes arreglos de las mismas velocidades generalizadas mínimas y cuasi-velocidades pueden complicar los cálculos requeridos para aplicar esta metodología <sup>1</sup>.
- Una de las desventajas notorias es que, debido al uso de cuasi-velocidades (principalmente a las cuasi-velocidades debido a las restricciones), la ecuación del lagrangiano del sistema es más grande que el que se utiliza en las ecuaciones de E-L, y por lo tanto, se complican los cálculos analíticos necesarios, aunque no tan considerablemente como en las ecuaciones de U-K cuando se tienen matrices no diagonales.

1: Esto debido a que la matriz  $S(\rho)$  y su inversa dependen del orden en el que se acomodan dichas velocidades.

Es importante notar que en estas ecuaciones, debido a como se calcula el vector  $\nu_{nh}$ , se elimina la desventaja de calcular los coeficientes de estructura y por lo tanto, las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas resultan en una metodología general y más balanceada<sup>2</sup> para la obtención de modelos dinámicos de sistemas con restricciones.

2: En relación a las ventajas y desventajas que presenta.

## 7.2. Aportaciones del trabajo

- Se propuso el uso de herramientas matemáticas para verificar la integrabilidad de restricciones, con lo cual es posible saber si las mismas son holonómicas o no holonómicas, y esto a su vez nos permite clasificar diversos sistemas.
- Las herramientas previamente mencionadas se aplicaron con el fin de clasificar las restricciones de ciertos sistemas con los que se cuenta en el laboratorio de Mecatrónica y Control del Instituto Tecnológico de la Laguna.

- Se realizó un estudio de nuevas metodologías para el modelado de sistemas con restricciones holonómicas y no holonómicas (las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas y las ecuaciones de Udwardia-Kalaba), las cuales además fueron aplicadas a diversos sistemas mecánicos con los que se cuenta en el laboratorio de Mecatrónica y Control.
- Además, en el presente trabajo se incluye una revisión crítica de diversos trabajos sobre planificación y control de una clase de sistemas no holonómicos.
- Se continuó el estudio general en la plataforma Segway RMP-100, logrando con esto la corrección de diversos errores que existían en el modelo matemático. Además, se realizó la propuesta de un controlador de regulación para las tres coordenadas independientes con las que cuenta esta plataforma y los resultados obtenidos permitieron publicar el primer artículo en revista de este trabajo de tesis sobre la misma plataforma.

Por último, a continuación se presentan los trabajos publicados como resultado del trabajo de la presente tesis:

- A. Delgado, R. Campa y E. Bugarin. "Avance en el Modelado de un Robot Móvil Diferencial con Base Pendular". Congreso Mexicano de Robótica (ComRob 2018), Septiembre 2018, Ensenada B.C.
- A. Delgado-Spíndola, R. Campa y E. Bugarin. "Aplicación de las Ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev al Modelado Dinámico de Mecanismo Robóticos". VII Congreso Internacional de Robótica y Computación, Mayo 2020, La Paz, B.C.S.
- A. Delgado-Spíndola, R. Campa, E. Bugarin y I. Soto. "Design and Real-Time Implementation of a nonlinear regulation controller for the RMP-100 Segway TWIP". *Mechatronics* 79 (2021): 102668.
- A. Delgado-Spíndola, V. Santibañez, E. Bugarin y J.A. Rojas-Quintero "Comparison of three methodologies for the modelling of mechanical systems with constraints from the control systems point of view". 9th International Conference on Systems and Control (ICSC'2021), Noviembre 2021, Caen, Francia.

### 7.3. Trabajo Futuro

- Estudio de estructuras simplécticas en sistemas no holonómicos.
- Estudio de la aplicación de los símbolos de los Christoffel para el cálculo de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, para sistemas con restricciones no holonómicas.
- Mejora del modelo de la plataforma Segway RMP-100 (identificación de los parámetros del controlador interno de velocidad).
- Publicación de los resultados obtenidos sobre modelado, en una revista indexada.
- Comparación de las metodologías estudiadas para el diseño de controladores en robótica.
- Publicación de un artículo sobre modelado y diseño de controladores utilizando diversas metodologías.

# Modelado de la Plataforma

## RMP-100



### A.1. Mejoras al modelo de la plataforma RMP-100

Dentro de los objetivos de la tesis, se planteó la obtención del modelo dinámico de los sistemas robóticos con los que se desea trabajar. Uno de estos sistemas es el Segway RMP-100, el cual también puede ser considerado como un robot móvil tipo diferencial si se desmontan la placa superior y los paneles laterales (ver Figura A.4). No obstante, el centro de masa de un robot móvil diferencial debe de encontrarse a lo largo del eje que conecta ambas ruedas, pero en el caso del prototipo mencionado, el centro de masa no se encuentra sobre ese eje. Esto hace que el robot móvil cuente con una pequeña masa pendular, la cual produce que la dinámica del robot móvil sea diferente a la usual. Con tal de contar con un modelo dinámico más exacto, tanto de la plataforma completa como del robot móvil diferencial con masa pendular, se realizó lo siguiente:

- Se determinó con mayor exactitud la ubicación del centro de masa de la base del robot.
- Se creó un modelo de Simulink para poder realizar la comparación de resultados experimentales con las simulaciones; en este modelo se separó el controlador de la planta y se tomó en cuenta la discretización de las señales de control.
- Se corrigió un error en el modelo (ver Figura A.3) donde los pares estaban referidos contra la vertical ( $\tau_\phi$ ), en lugar de estar respecto a la base ( $\tau_\psi$ ).

Además, se decidió modificar el vector de variables mínimas. Una de las ventajas de utilizar este nuevo modelo es que se logra reducir el número de operaciones a realizar en la simulación de los controladores; en la Figura A.1 se muestra el esquema de simulación que se tiene que construir para utilizar el vector de variables mínimas anterior, el cual está dado por

$$\mathbf{q} = [x_r \quad \theta \quad \alpha]^T.$$

Uno de los principales inconvenientes de este esquema es que se requiere del uso de matrices que transformen las velocidades o pares del robot a los de las ruedas y viceversa, esto con el fin de poder implementar el control interno de velocidad y para incorporar las fricciones de cada rueda al modelo

Para reducir el uso de estas matrices se elige un nuevo vector de variables mínimas, el cual será definido como

$$\mathbf{q} = [\phi_r \quad \phi_l \quad \alpha]^T$$

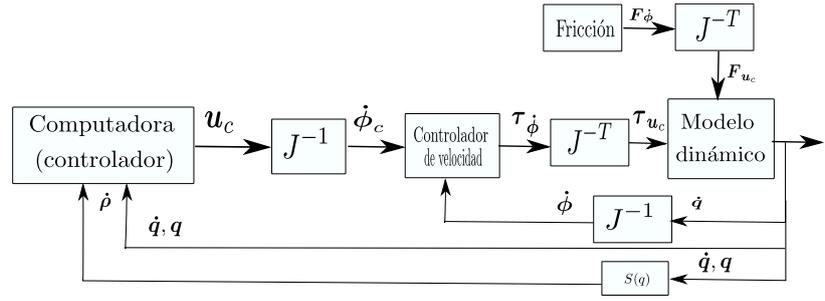


Figura A.1: Esquema de simulación anterior.

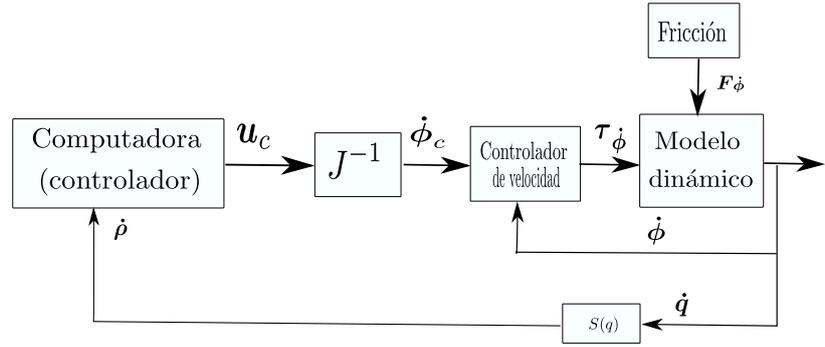


Figura A.2: Esquema de simulación nuevo.

donde las nuevas variables mínimas están dadas por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}}_{\dot{\phi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{L}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_{u_c}. \quad (A.1)$$

En la Figura A.2 se muestra el nuevo esquema utilizado para las simulaciones utilizando el nuevo vector de variables mínimas. Una de las principales ventajas de utilizar estas nuevas variables es que se elimina el uso excesivo de las matrices de transformación, esto debido a que la mayor parte de las ecuaciones están en función de las mismas variables. Además, con el uso de estas variables el vector de variables no mínimas se conforma por el vector de variables de postura y el vector de variables mínimas, es decir:

$$\dot{\rho} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\phi}_r \quad \dot{\phi}_l \quad \dot{\alpha}]^T.$$

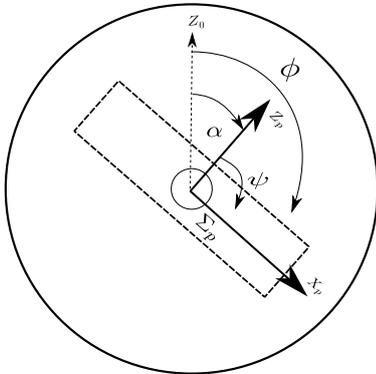


Figura A.3: Medición de las velocidades.

Durante el análisis de los datos entregados por la plataforma, se encontró un error que tiene que ver con la forma con la que se miden las velocidades de cada rueda. Esto, debido a que en el modelo las velocidades de giro de cada rueda ( $\dot{\phi}_r$  y  $\dot{\phi}_l$ ) se mide, con respecto al eje  $Z_0$  del marco inercial  $\Sigma_0$ , pero los sensores de la plataforma miden otras velocidades ( $\dot{\psi}_r$  y  $\dot{\psi}_l$ ), las cuales son medidas con respecto al eje  $Z_p$  del marco del péndulo  $\Sigma_p$ . En la Figura A.3 se puede apreciar respecto a que eje son medidas cada una de las velocidades importantes del robot. Por lo tanto, la velocidad de cada rueda respecto a la vertical ( $\dot{\phi}_i$ ) está dada por

$$\dot{\phi}_i = \dot{\alpha} + \dot{\phi}_i$$

donde  $\dot{\alpha}$  es la medición de la velocidad de giro del péndulo y la  $\dot{\phi}_i$  es la medición de la velocidad de las ruedas a partir de los encoders.

Tomando en cuenta la Figura A.4, es posible considerar al péndulo invertido sobre dos ruedas (PIR) como un sistema mecánico con tres cuerpos rígidos: el péndulo  $p$  y las ruedas izquierda y derecha,  $w_l$  y  $w_r$ , respectivamente. Note que el marco  $\Sigma_0(X_0, Y_0, Z_0)$  es un marco fijo en el mundo (el marco inercial); el marco  $\Sigma_r(X_r, Y_r, Z_r)$  está fijo en la distancia media a lo largo del eje de las ruedas, con el eje  $X_r$  apuntando en la dirección de avance y el plano  $X_r - Y_r$  siempre paralelo al plano  $X_0 - Y_0$ ; y el marco  $\Sigma_p(X_p, Y_p, Z_p)$  está fijo al centro de masa del péndulo donde el ángulo  $\alpha$  da la rotación relativa entre los marcos  $\Sigma_p$  y  $\Sigma_r$  alrededor del eje  $Y_r$ , i.e., la inclinación del péndulo; además nótese que  $\phi_l$  y  $\phi_r$  son el desplazamiento angular de las ruedas izquierda y derecha, respectivamente, alrededor del eje  $Y_r$ .

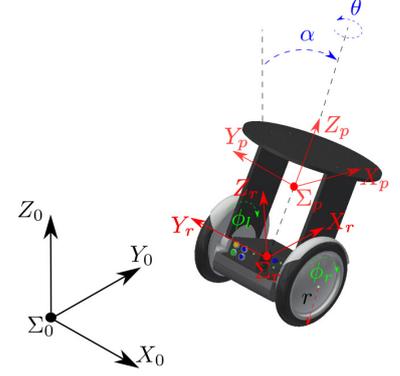


Figura A.4: Diagrama del Segway RMP-100.

Por otro lado, considerando la Figura A.5, las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $\theta$  indican la posición y orientación relativa del marco  $\Sigma_r$  respecto a el marco  $\Sigma_0$ .

Entonces, para calcular el modelo dinámico se utiliza la metodología propuesta en [154]; de tal manera que el vector de coordenadas generalizadas está dado por  $\rho = [x \ y \ \theta \ \alpha \ \phi_l \ \phi_r]^T \in \mathbb{R}^{m=6}$  y el vector de coordenadas mínimas por  $q = [x_r \ \theta \ \alpha]^T \in \mathbb{R}^{n=3}$ , donde  $x_r$  es la distancia recorrida por el robot a lo largo de  $X_r$ . Esta metodología conduce al siguiente modelo del sistema, que está sujeto a  $r = m - n$  restricciones

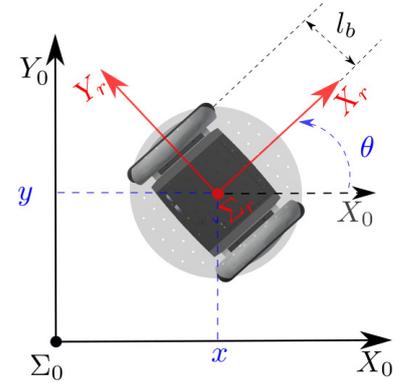


Figura A.5: Diagrama del Segway RMP-100 vista superior.

$$M(\rho)\ddot{\rho} + C(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho} + g(\rho) = \tau_\rho + A(\rho)^T \lambda \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.2})$$

donde  $M(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz definida positiva conocida como la matriz de inercias,  $C(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $g(\rho) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de fuerzas debidas a la gravedad,  $\tau_\rho \in \mathbb{R}^m$  es el vector de fuerzas aplicadas,  $A(\rho) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  es conocida como la matriz de restricciones pffianas y  $\lambda \in \mathbb{R}^{r \times r}$  es la matriz de multiplicadores de Lagrange.  $A(\rho)$  y  $\lambda$  pueden ser eliminados, reduciendo el sistema, con el uso de la siguiente propiedad  $A(\rho)R(\rho) = \mathbf{0}$ , donde  $\dot{\rho} = R(\rho)\dot{q}$ . Para el PIR bajo estudio, está dada por

$$\dot{\rho} = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta & 0 & 0 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{L}{r} & \frac{L}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, multiplicando (A.2) por  $R(\rho)^T$ , se obtienen las ecuaciones reducidas, las cuales están dadas por

$$M_r(\rho)\ddot{q} + C_r(\rho, \dot{q})\dot{q} + g_r(\rho) = \tau_r, \quad (\text{A.3})$$

donde la matriz de inercias es

$$M_r(\rho) = \begin{bmatrix} m_{r11} & 0 & m_{r13} \\ 0 & m_{r22} & 0 \\ m_{r13} & 0 & m_{r33} \end{bmatrix}$$

con

$$m_{r11} = \frac{1}{r^2}(I_{ly} + I_{ry}) + m_l + m_p + m_r$$

$$m_{r13} = m_p l_p C_\alpha$$

$$m_{r22} = I_{lz} + I_{pz} + I_{rz} + L^2(m_l + m_r) + (m_p l_p^2 - I_{pz}) S_\alpha^2 + \frac{L^2}{r^2}(I_{ly} + I_{ry})$$

$$m_{r33} = m_p l_p^2 + I_{py}.$$

La matriz de Coriolis reducida está dada por

$$C_r(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_2 \dot{\alpha} \\ 0 & c_1 \dot{\alpha} & c_1 \dot{\theta} \\ 0 & -c_1 \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

con  $c_1 = (m_p l_p^2 - I_{pz}) C_\alpha S_\alpha$  y  $c_2 = m_p l_p S_\alpha$ .

El vector de gravedad reducido está dado por

$$g_r(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g m_p l_p S_\alpha \end{bmatrix}^T.$$

Además,

$$\tau_r(\rho) = \begin{bmatrix} F_{x_r} & \tau_\theta & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Un mayor detalle de cómo se calcula (A.3) puede ser encontrado en [155].

Ahora, suponiendo que ambas ruedas son idénticas, es posible definir  $I_{wy} = I_{ly} = I_{ry}$ ,  $I_{wz} = I_{lz} = I_{rz}$  y  $m_w = m_l = m_r$ . Y por lo tanto, utilizando las siguientes constantes

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \left( \frac{I_{wy} + m_w r^2}{m_p r^2} \right), & \epsilon &= \frac{2I_{wz} + I_{pz} + 2m_w L^2 + 2\frac{L^2}{r^2} I_{wy}}{m_p l_p^2}, \\ \gamma &= 1 + \frac{I_{py}}{m_p l_p^2}, & \delta &= 1 - \frac{I_{pz}}{m_p l_p^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

se puede describir el modelo no lineal (A.3) como

$$\begin{aligned} F_{x_r} &= m_p l_p \left[ \frac{1}{l_p} (\beta + 1) \ddot{x}_r + C_\alpha \ddot{\alpha} - S_\alpha \dot{\alpha}^2 \right] \\ \tau_\theta &= m_p l_p^2 \left[ (\delta S_\alpha^2 + \epsilon) \ddot{\theta} + 2\delta C_\alpha S_\alpha \dot{\alpha} \dot{\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$0 = \frac{1}{l_p} C_\alpha \ddot{x}_r + \gamma \ddot{\alpha} - \delta C_\alpha S_\alpha \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l_p} S_\alpha. \quad (\text{A.6})$$

Este modelo es el utilizado en [156].

# Componentes de los Modelos Obtenidos

# B

En la presente sección se incluyen los componentes de los modelos obtenidos en la Sección 6.

## B.1. Mecanismo de 5 Barras

### Euler-Lagrange + proyección

Las matrices del modelo no mínimo (6.13) están dadas por

$$M(\rho) = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ m_{13} & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

con

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_2 l_1^2 + 2m_2 \cos(\beta_1) l_1 l_{c_2} + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_{c_2}^2 + I_1 + I_2, \\ m_{13} &= m_2 l_{c_2}^2 + l_1 m_2 \cos(\beta_1) l_{c_2} + I_2, \\ m_{22} &= m_4 l_3^2 + 2m_4 \cos(\beta_2) l_3 l_{c_4} + m_3 l_{c_3}^2 + m_4 l_{c_4}^2 + I_3 + I_4, \\ m_{24} &= m_4 l_{c_4}^2 + l_3 m_4 \cos(\beta_2) l_{c_4} + I_4, \\ m_{33} &= m_2 l_{c_2}^2 + I_2, \\ m_{44} &= m_4 l_{c_4}^2 + I_4. \end{aligned}$$

$$C(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{24} \\ c_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

con

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\dot{\beta}_1 l_1 l_{c_2} m_2 \sin(\beta_1), \\ c_{13} &= -l_1 l_{c_2} m_2 \sin(\beta_1) (\dot{\beta}_1 + \dot{q}_1), \\ c_{22} &= -\dot{\beta}_2 l_3 l_{c_4} m_4 \sin(\beta_2), \\ c_{24} &= -l_3 l_{c_4} m_4 \sin(\beta_2) (\dot{\beta}_2 + \dot{q}_2), \\ c_{31} &= l_1 l_{c_2} m_2 \dot{q}_1 \sin(\beta_1), \\ c_{42} &= l_3 l_{c_4} m_4 \dot{q}_2 \sin(\beta_2). \end{aligned}$$

### Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificado

Para el caso de el modelado con cuasi-velocidades, las matrices auxiliares están dadas por:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l_2S(\theta_1) - l_1S(q_1) & l_4S(\theta_2) + l_3S(q_2) & -l_2S(\theta_1) & l_4S(\theta_2) \\ l_2C(\theta_1) + l_1C(q_1) & -l_4C(\theta_2) - l_3C(q_2) & l_2C(\theta_1) & -l_4C(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

La matriz inversa es de (B.3) está dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{ta-l_1S(\beta_2-q_{1-2})}{l_1S(\beta_1)} & -\frac{l_3S(\beta_2)}{tb} & -\frac{C(\beta_2+q_2)}{tb} & -\frac{S(\beta_2+q_2)}{tb} \\ \frac{l_1S(\beta_1)}{tb} & -\frac{tb+l_3S(\beta_1+q_{1-2})}{tb} & -\frac{C(\beta_1+q_1)}{tb} & -\frac{S(\beta_1+q_1)}{tb} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

y la matriz auxiliar por

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{ta-l_1S(\beta_2-q_{1-2})}{l_1S(\beta_1)} & -\frac{l_3S(\beta_2)}{tb} \\ \frac{l_1S(\beta_1)}{tb} & -\frac{tb+l_3S(\beta_1+q_{1-2})}{tb} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

donde  $\theta_2 = \beta_2 + q_2$ ,  $\theta_1 = \beta_1 + q_1$ ,  $ta = l_2S(\beta_1 - \beta_2 + q_{1-2})$  y  $tb = l_4S(\beta_1 - \beta_2 + q_{1-2})$  son variables auxiliares. Además, en este caso la matriz auxiliar para las restricciones es igual a 0.

$$W(\rho, \dot{\rho}) = O, \quad (\text{B.6})$$

donde  $O$  es una matriz nula.

Por último, las matrices mínimas del modelo obtenido, utilizando las ecuaciones de Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificadas, están dadas por:

$$M_v(\rho) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

con

$$\begin{aligned} \bar{t}_a m_{11} = & I_1 l_2^2 l_4^2 + I_2 l_1^2 l_4^2 + I_4 l_1^2 l_2^2 - I_1 l_2^2 l_4^2 C(\bar{\theta}_1) \\ & + l_1^2 l_2^2 l_4^2 m_2 + l_2^2 l_4^2 l_{c_1}^2 m_1 + l_1^2 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 + l_1^2 l_2^2 l_{c_4}^2 m_4 \\ & - I_4 l_1^2 l_2^2 C(2\beta_1) - I_2 l_1^2 l_4^2 C(2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) \\ & - l_1^2 l_2^2 l_4^2 m_2 C(\bar{\theta}_1) \\ & - l_2^2 l_4^2 l_{c_1}^2 m_1 C(\bar{\theta}_1) - l_1^2 l_2 l_4^2 l_{c_2} m_2 \\ & - l_1^2 l_2^2 l_{c_4}^2 m_4 C(2\beta_1) - l_1^2 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 C(2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) \\ & + l_1^2 l_2 l_4^2 l_{c_2} m_2 C(\bar{\theta}_1) - l_1^2 l_2 l_4^2 l_{c_2} m_2 C(2\beta_1) \\ & + l_1^2 l_2 l_4^2 l_{c_2} m_2 C(2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2), \\ \frac{\bar{t}_b}{l_1 l_3} m_{12} = & 2I_4 l_2^2 C_{\bar{\theta}_{11}} + 2I_2 l_4^2 C_{\bar{\theta}_{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2I_4l_2^2C(q_{1-2}) + 2l_4^2l_{c_2}^2m_2C_{\bar{\theta}_{12}} \\
& + 2l_2^2l_{c_4}^2m_4C_{\bar{\theta}_{11}} - 2l_4^2l_{c_2}^2m_2C(q_{1-2}) \\
& - 2l_2^2l_{c_4}^2m_4C(q_{1-2}) + l_2l_4^2l_{c_2}m_2C_{\bar{\theta}_{11}} \\
& - l_2l_4^2l_{c_2}m_2C_{\bar{\theta}_{12}} - l_2^2l_4l_{c_4}m_4C_{\bar{\theta}_{11}} \\
& + l_2^2l_4l_{c_4}m_4C_{\bar{\theta}_{12}} + l_2l_4^2l_{c_2}m_2C(q_{1-2}) \\
& + l_2^2l_4l_{c_4}m_4C(q_{1-2}) - l_2l_4^2l_{c_2}m_2C(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) \\
& - l_2^2l_4l_{c_4}m_4C(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) - 2I_2l_4^2C(q_{1-2}), \\
\bar{t}_c m_{22} = & I_2l_3^2l_4^2 + I_3l_2^2l_4^2 + I_4l_2^2l_3^2 - I_3l_2^2l_4^2C(\bar{\theta}_1) \\
& + l_2^2l_3^2l_4^2m_4 + l_3^2l_4^2l_{c_2}^2m_2 + l_2^2l_4^2l_{c_3}^2m_3 + l_2^2l_3^2l_{c_4}^2m_4 \\
& - I_2l_3^2l_4^2C(2\beta_2) - I_4l_2^2l_3^2C(2\beta_1 + 2q_{1-2}) \\
& - l_2^2l_3^2l_4^2m_4C(\bar{\theta}_1) - l_2^2l_4^2l_{c_3}^2m_3C(\bar{\theta}_1) \\
& - l_3^2l_4^2l_{c_2}^2m_2C(2\beta_2) - l_2^2l_3^2l_{c_4}^2m_4C(2\beta_1 + 2q_{1-2}) \\
& + l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}m_4C(\bar{\theta}_1) - l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}m_4C(2\beta_2) \\
& + l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}m_4C(2\beta_1 + 2q_{1-2}) - l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}m_4,
\end{aligned}$$

$$C_v(\rho, v) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

donde los elementos de dicha matriz pueden ser calculados utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_1 c_{11} = & 2I_4l_1^3l_2^3v_1S_{\bar{\theta}_3} - 6I_4l_1^3l_2^3v_1S_{\bar{\theta}_2} \\
& - 6I_2l_1^3l_4^3v_1S_{\bar{\theta}_7} - 2I_2l_1^3l_4^3v_1S_{\bar{\theta}_5} \\
& - 6I_4l_1^3l_2^3v_1S(\beta_2 - q_{1-2}) + 2I_2l_1^3l_4^3v_1S(\beta_1 - 4\beta_2 + 4q_{1-2}) \\
& + 6I_2l_1^3l_4^3v_1S(\beta_1) + 2I_4l_1^3l_2^3v_1S_{\bar{\theta}_6} \\
& - 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_2S(2\beta_1 + \beta_2) + 4I_4l_1^2l_2^3l_3v_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_2S_{\bar{\theta}_9} - 2I_4l_1^2l_2^3l_4v_1S(4\beta_1 - 2\beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 2I_2l_1^2l_2l_4^3v_1S_{\bar{\theta}_4} - 6l_1^3l_2^3l_{c_4}^2m_4v_1S(\beta_2 - q_{1-2}) \\
& - 6l_1^3l_2^3l_{c_4}^2m_4v_1S_{\bar{\theta}_2} - 6l_1^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S_{\bar{\theta}_7} \\
& - 2l_1^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S_{\bar{\theta}_5} + 2l_1^3l_2^3l_{c_4}^2m_4v_1S_{\bar{\theta}_3} \\
& + 2l_1^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S(\beta_1 - 4\beta_2 + 4q_{1-2}) - 2I_2l_1^2l_2l_4^3v_1S(2\beta_1) \\
& + 4I_4l_1^2l_2^3l_4v_1S(2\beta_1) + 4I_2l_1^2l_2l_4^3v_1S(2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) \\
& - 2I_4l_1^2l_2^3l_4v_1S(2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) + 4I_2l_1^3l_2l_4^2v_1S_{\bar{\theta}_6} \\
& + 4I_2l_1^2l_3l_4^3v_2S_{\bar{\theta}_{10}} + 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_2S_{\bar{\theta}_8} \\
& + 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_2S(2\beta_1 - \beta_2) + 6l_1^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S(\beta_1) \\
& - 8I_2l_1^3l_2l_4^2v_1S(\beta_2 - q_{1-2}) - 4I_2l_1^2l_3l_4^3v_2S(\beta_1 + q_{1-2}) \\
& - 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_2S_{\bar{\theta}_{13}} - 4I_2l_1^3l_2l_4^2v_1S_{\bar{\theta}_2} \\
& - 4I_4l_1^3l_2^2l_4v_1S_{\bar{\theta}_7} - 4I_4l_1^3l_2^2l_4v_1S_{\bar{\theta}_5} \\
& + 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_2S(\beta_1\bar{\theta}_{\beta q}) - 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_2S(\beta_1 - 4\beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& + 2l_1^3l_2^3l_{c_4}^2m_4v_1S_{\bar{\theta}_6} + 8I_4l_1^3l_2^2l_4v_1S(\beta_1) \\
& + 4I_4l_1^2l_2^3l_3v_2S(\beta_2) + 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_2S(\beta_2 - 2q_1 + 2q_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2l_1^2 l_2^2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S (4\beta_1 - 2\beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 4l_1^2 l_2^3 l_3 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S (2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 2l_1^2 l_2^3 l_3 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S_{\bar{\theta}_9} + 2l_1^2 l_2 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_4} \\
& - 2l_1^2 l_2^2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_4} - 2l_1^2 l_2^3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_1 S (4\beta_1 - 2\beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 2l_1^2 l_2^2 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_1 S (2\beta_1) + 6l_1^2 l_2^2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S (2\beta_1) \\
& + 4l_1^2 l_2^3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_1 S (2\beta_1) + 4l_1^2 l_2 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_1 S (2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) \\
& - 6l_1^2 l_2^2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S (2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) - 2l_1^3 l_2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_5} \\
& + 2l_1^3 l_2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_7} - 2l_1^2 l_2^3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_1 S (2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) \\
& - 2l_1^3 l_2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S (\beta_1 - 4\beta_2 + 4q_{1-2}) + 4l_1^3 l_2 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_6} \\
& - 2l_1^3 l_2^2 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_6} + 4l_1^2 l_3 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S_{\bar{\theta}_{10}} \\
& + 2l_1^2 l_3 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S_{\bar{\theta}_8} + 4l_2 l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 v_2 S (\beta_2) \\
& + 4l_2 l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 v_2 S (\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) + 2l_1^2 l_2^3 l_3 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S (2\beta_1 - \beta_2) \\
& - 4l_2 l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 v_2 S (2\beta_1 + \beta_2) + 4l_2 l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 v_2 S (2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 2l_1^3 l_2 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_1 S (\beta_1) - 8l_1^3 l_2 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_1 S (\beta_2 - q_{1-2}) \\
& + 2l_1^3 l_2^2 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_1 S (\beta_2 - q_{1-2}) - 4l_1^2 l_3 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (\beta_1 + q_{1-2}) \\
& - 2l_1^2 l_3 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S_{\bar{\theta}_{13}} - 4l_1^3 l_2 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_2} \\
& - 2l_1^3 l_2^2 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_2} + 2l_1^3 l_2^2 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_1 S_{\bar{\theta}_3} \\
& + 2l_1^2 l_3 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (\beta_1 \bar{\theta}_{\beta q}) - 4l_1^3 l_2^2 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_1 S_{\bar{\theta}_7} \\
& - 4l_1^3 l_2^2 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_1 S_{\bar{\theta}_5} - 2l_1^2 l_3 l_4^3 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (\beta_1 - 4\beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& + 4l_4 l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 v_2 S_{\bar{\theta}_{10}} + 4l_4 l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 v_2 S_{\bar{\theta}_8} \\
& + 8l_1^3 l_2^2 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_1 S (\beta_1) + 4l_1^2 l_2^3 l_3 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S (\beta_2) \\
& + 2l_1^2 l_2^3 l_3 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S (\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) - 4l_4 l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 v_2 S (\beta_1 + q_{1-2}) \\
& - 4l_4 l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 v_2 S_{\bar{\theta}_{13}} - 2l_1^2 l_2^3 l_3 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S (2\beta_1 + \beta_2) \\
& + 4l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (\beta_2) + 4l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) \\
& - 2l_1^2 l_2^2 l_3 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_2 S (\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) + 2l_1^2 l_2 l_3 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_2 S_{\bar{\theta}_8} \\
& - 4l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (2\beta_1 + \beta_2) + 2l_1^2 l_2^2 l_3 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_2 S (2\beta_1 + \beta_2) \\
& + 4l_1^2 l_2 l_3 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) - 2l_1^2 l_2^2 l_3 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_2 S_{\bar{\theta}_9} \\
& - 2l_1^2 l_2 l_3 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_2 S_{\bar{\theta}_{13}} - 2l_1^2 l_2 l_3 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_2 S (\beta_1 \bar{\theta}_{\beta q}) \\
& + 2l_1^2 l_2 l_3 l_4^3 l_{c_2} m_2 v_2 S (\beta_1 - 4\beta_2 + 3q_{1-2}) + 4l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S_{\bar{\theta}_{10}} \\
& + 4l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S_{\bar{\theta}_8} + 2l_1^2 l_2^2 l_3 l_4^2 l_{c_2} m_2 v_2 S (2\beta_1 - \beta_2) \\
& - 4l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S (\beta_1 + q_{1-2}) - 4l_1^2 l_2^2 l_3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S_{\bar{\theta}_{13}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{c}_2 c_{12}}{l_1 l_3 v_2} & = 2l_4 l_2^3 l_3 S (\beta_2 + q_{1-2}) - 2l_4 l_2^3 l_3 S (2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 4l_4 l_2^3 l_3 S (\beta_2 - q_{1-2}) - 2l_2 l_2 l_4^3 S (2\beta_{1-2} + q_{1-2}) + 4l_4 l_2^3 l_3 S_{\bar{\theta}_2} \\
& + 4l_2 l_3 l_4^3 S_{\bar{\theta}_7} - 2l_4 l_2^3 l_4 S (2\beta_{1-2} + q_{1-2}) \\
& - 2l_2 l_3 l_4^3 S (\beta_1 - 4\beta_2 + 2q_{1-2}) - 4l_2 l_3 l_4^3 S (\beta_1) - 2l_2 l_2 l_4^3 S_{\bar{\theta}_{11}} \\
& + 4l_2 l_2 l_4^3 S_{\bar{\theta}_{12}} - 2l_2 l_3 l_4^3 S (\beta_1 + 2q_{1-2}) + 4l_4 l_2^3 l_4 S_{\bar{\theta}_{11}} \\
& - 2l_4 l_2^3 l_4 S_{\bar{\theta}_{12}} + 2l_2 l_3 l_4^3 S (\beta_1 - 2\beta_2) + 2l_2 l_3 l_4^3 S (\beta_1 + 2\beta_2) \\
& + 2l_2 l_2 l_4^3 S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) + 2l_4 l_2^3 l_3 S (2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& + 2l_2 l_2 l_4^3 S_{\bar{\theta}_{15}} - 2l_4 l_2^3 l_3 S (4\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& + 2l_4 l_2^3 l_4 S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - 2l_4 l_2^3 l_4 S (\beta_1 \bar{\theta}_{\beta q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4I_2l_2l_4^3S(q_{1-2}) - 4I_4l_2^3l_4S(q_{1-2}) - 2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4S(2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 8I_4l_2^2l_3l_4S(\beta_1) + 4I_4l_2^2l_3l_4S(\beta_1 - 2\beta_2) + 4I_4l_2^2l_3l_4S(\beta_1 + 2\beta_2) \\
& + 4I_2l_2l_3l_4^2S(2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) + 2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4S(\beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 4l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4S(\beta_2 - q_{1-2}) - 2l_2l_4^3l_{c_2}^2m_2S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) \\
& + 3l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) + 4l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2S\bar{\theta}_7 \\
& + 4l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4S\bar{\theta}_2 - 2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2S(\beta_1 - 4\beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 2l_2^3l_4l_{c_4}^2m_4S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) + 3l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) \\
& - 4I_2l_2l_3l_4^2S(2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) - 4l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2S(\beta_1) \\
& - 2l_2l_4^3l_{c_2}^2m_2S\bar{\theta}_{11} + 3l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S\bar{\theta}_{11} \\
& + 4l_2l_4^3l_{c_2}^2m_2S\bar{\theta}_{12} - 3l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S\bar{\theta}_{12} \\
& - 2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2S(\beta_1 + 2q_{1-2}) + 4l_2^3l_4l_{c_4}^2m_4S\bar{\theta}_{11} \\
& - 3l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S\bar{\theta}_{11} - 2l_2^3l_4l_{c_4}^2m_4S\bar{\theta}_{12} \\
& + 3l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S\bar{\theta}_{12} + 8I_2l_2l_3l_4^2S(\beta_2 - q_{1-2}) \\
& + 2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2S(\beta_1 - 2\beta_2) + 2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2S(\beta_1 + 2\beta_2) \\
& + 2l_2l_4^3l_{c_2}^2m_2S(2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S(2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) \\
& + 2l_2l_4^3l_{c_2}^2m_2S\bar{\theta}_{15} - l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S\bar{\theta}_{15} \\
& - l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S(4\beta_1\bar{\theta}_{\beta q}) + 2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4S(2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& - l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S(4\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - 2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4S(4\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& + 2l_2^3l_4l_{c_4}^2m_4S(2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S(2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) \\
& - 2l_2^3l_4l_{c_4}^2m_4S(4\beta_1\bar{\theta}_{\beta q}) + l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S\bar{\theta}_{15} \\
& + l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S(4\beta_1\bar{\theta}_{\beta q}) - l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S(4\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) \\
& - 4l_2l_4^3l_{c_2}^2m_2S(q_{1-2}) + 3l_2^2l_4^3l_{c_2}m_2S(q_{1-2}) - 4l_2^3l_4l_{c_4}^2m_4S(q_{1-2}) \\
& + 3l_2^3l_4^2l_{c_4}m_4S(q_{1-2}) - 8l_2^2l_3l_4l_{c_4}^2m_4S(\beta_1) + 4l_2^2l_3l_4l_{c_4}^2m_4S(\beta_1 - 2\beta_2) \\
& + 4l_2^2l_3l_4l_{c_4}^2m_4S(\beta_1 + 2\beta_2) + 4l_2l_3l_4^2l_{c_2}^2m_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& - 2l_2^2l_3l_4^2l_{c_2}m_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) - 2l_2^2l_3l_4^2l_{c_2}m_2S(4\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& - 4l_2l_3l_4^3l_{c_2}m_2S\bar{\theta}_7 + 2l_2l_3l_4^3l_{c_2}m_2S(\beta_1 - 4\beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 4l_2l_3l_4^2l_{c_2}^2m_2S(2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) + 2l_2^2l_3l_4^2l_{c_2}m_2S(2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 4l_2l_3l_4^3l_{c_2}m_2S(\beta_1) + 2l_2l_3l_4^3l_{c_2}m_2S(\beta_1 + 2q_{1-2}) \\
& + 8l_2l_3l_4^2l_{c_2}^2m_2S(\beta_2 - q_{1-2}) + 2l_2^2l_3l_4^2l_{c_2}m_2S(\beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 4l_2^2l_3l_4^2l_{c_2}m_2S(\beta_2 - q_{1-2}) + 2l_2l_3l_4^3l_{c_2}m_2S(\beta_1 - 2\beta_2) \\
& + 2l_2l_3l_4^3l_{c_2}m_2S(\beta_1 + 2\beta_2) + 4l_2^2l_3l_4^2l_{c_2}m_2S\bar{\theta}_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{3c21} = & 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_1S(2\beta_1 + \beta_2) + 2I_2l_1l_3^2l_4^3v_2S(\beta_1 - 2\beta_2) \\
& + 2I_2l_1l_3^2l_4^3v_2S(\beta_1 + 2\beta_2) - 4I_4l_1^2l_2^3l_3v_1S(2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_1S(4\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) + 2I_4l_1l_2^3l_3^2v_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& - 2I_4l_1l_2^3l_3^2v_2S(4\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) - 4I_2l_1^2l_3l_4^3v_1S\bar{\theta}_{10} \\
& - 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_1S\bar{\theta}_8 - 2I_4l_1l_2^3l_3^2v_2S(2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_1S(2\beta_1 - \beta_2) + 4I_2l_1^2l_3l_4^3v_1S(\beta_1 + q_{1-2}) \\
& + 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_1S(\bar{\theta}_{13}) + 2I_4l_1l_2^3l_3^2v_2S(\beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 4I_4l_1l_2^3l_3^2v_2S(\beta_2 - q_{1-2}) + 4I_4l_1l_2^3l_3^2v_2S(2\beta_1 - \beta_2 + q_{1-2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4I_2l_1l_3^2l_4^3v_2S_{\bar{\theta}_7} - 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_1S \left( \beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) \\
& - 2I_2l_1l_3^2l_4^3v_2S (\beta_1 - 4\beta_2 + 2q_{1-2}) + 2I_2l_1^2l_3l_4^3v_1S (\beta_1 - 4\beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& - 4I_2l_1l_3^2l_4^3v_2S (\beta_1) - 4I_4l_1^2l_2^3l_3v_1S (\beta_2) - 2I_2l_1l_3^2l_4^3v_2S (\beta_1 + 2q_{1-2}) \\
& - 2I_4l_1^2l_2^3l_3v_1S (\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) - 4I_1^2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4v_1S (2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 2l_1^2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4v_1S (4\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) - 2I_4l_1l_2^3l_3l_4v_1S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) \\
& - 2l_1l_2^3l_3^2l_{c_4}^2m_4v_2S (4\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) - 2I_2l_1l_2l_3l_4^3v_1S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) \\
& + 2I_2l_1l_2l_3l_4^3v_1S_{\bar{\theta}_{15}} + 2l_1l_2^3l_3^2l_{c_4}^2m_4v_2S (2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& - 2I_4l_1l_2^3l_3l_4v_1S \left( 4\beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) + 4I_2l_1l_2l_3^2l_4^2v_2S (2\beta_1 - \beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 4I_4l_1l_2^2l_3^2l_4v_2S_{\bar{\theta}_7} - 4I_4l_1^2l_2^2l_3l_4v_1S \left( \beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) \\
& + 4I_2l_1l_2l_3l_4^3v_1S (q_{1-2}) + 4I_4l_1l_2^3l_3l_4v_1S (q_{1-2}) - 4l_1^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S_{\bar{\theta}_{10}} \\
& - 2l_1^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S_{\bar{\theta}_8} - 2l_1l_2^3l_3^2l_{c_4}^2m_4v_2S (2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 8I_2l_1^2l_2l_3l_4^2v_1S (\beta_2) - 4I_4l_1l_2^2l_3^2l_4v_2S (\beta_1) \\
& - 4I_4l_1l_2^2l_3^2l_4v_2S (\beta_1 + 2q_{1-2}) - 2l_1^2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4v_1S (2\beta_1 - \beta_2) \\
& + 4I_2l_1^2l_2l_3l_4^2v_1S (2\beta_1 + \beta_2) + 4I_4l_1l_2^2l_3^2l_4v_2S (\beta_1 + 2\beta_2) \\
& + 4l_1^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S (\beta_1 + q_{1-2}) + 2l_1^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S (\bar{\theta}_{13}) \\
& + 2l_1l_2^3l_3^2l_{c_4}^2m_4v_2S (\beta_2 + q_{1-2}) + 4l_1l_2^3l_3^2l_{c_4}^2m_4v_2S (\beta_2 - q_{1-2}) \\
& + 4l_1l_2^3l_3^2l_{c_4}^2m_4v_2S (2\beta_1 - \beta_2 + q_{1-2}) + 4l_1l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S_{\bar{\theta}_7} \\
& - 2l_1^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S \left( \beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) - 2l_1l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S (\beta_1 - 4\beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 2l_1^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S (\beta_1 - 4\beta_2 + 3q_{1-2}) + 2I_2l_1l_2l_3l_4^3v_1S (2\beta_{1-2} + q_{1-2}) \\
& + 2I_4l_1l_2^3l_3l_4v_1S (2\beta_{1-2} + q_{1-2}) - 4I_2l_1l_2l_3^2l_4^2v_2S (2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 4I_4l_1^2l_2^2l_3l_4v_1S_{\bar{\theta}_8} - 4I_2l_1^2l_2l_3l_4^2v_1S (2\beta_1 - \beta_2) \\
& - 4l_1l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S (\beta_1) - 4l_1^2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4v_1S (\beta_2) \\
& - 2l_1l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S (\beta_1 + 2q_{1-2}) - 2l_1^2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4v_1S (\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) \\
& - 2I_2l_1l_2l_3l_4^3v_1S_{\bar{\theta}_{11}} + 4I_2l_1l_2l_3l_4^3v_1S_{\bar{\theta}_{12}} \\
& + 4I_4l_1l_2^3l_3l_4v_1S_{\bar{\theta}_{11}} - 2I_4l_1l_2^3l_3l_4v_1S_{\bar{\theta}_{12}} \\
& + 4I_2l_1l_2l_3^2l_4^2v_2S (\beta_2 + q_{1-2}) + 4I_2l_1l_2l_3^2l_4^2v_2S (\beta_2 - q_{1-2}) \\
& + 8I_4l_1^2l_2^2l_3l_4v_1S (\beta_1 + q_{1-2}) + 2l_1l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S (\beta_1 - 2\beta_2) \\
& + 2l_1l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S (\beta_1 + 2\beta_2) + 2l_1^2l_2^3l_3l_{c_4}^2m_4v_1S (2\beta_1 + \beta_2) \\
& + 2l_1^2l_2^3l_3l_4l_{c_4}m_4v_1S (2\beta_1 + \beta_2) - 2l_1l_2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) \\
& + l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S_{\bar{\theta}_{15}} \\
& + 2l_1l_2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S_{\bar{\theta}_{15}} + 4l_1^2l_2^3l_3l_4l_{c_4}m_4v_1S (2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S \left( 4\beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) - 2l_1^2l_2^3l_3l_4l_{c_4}m_4v_1S (4\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S (4\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - 2l_1l_2^3l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) \\
& + l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S (2\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - 2l_1l_2^3l_3^2l_4l_{c_4}m_4v_2S (2\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& - 2l_1l_2^3l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S \left( 4\beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) + l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S_{\bar{\theta}_{15}} \\
& + l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S \left( 4\beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) + 2l_1l_2^3l_3^2l_4l_{c_4}m_4v_2S (4\beta_1 - \beta_2 + 3q_{1-2}) \\
& + l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S (4\beta_{1-2} + 3q_{1-2}) - 2l_1l_2^2l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S (\beta_1 - 4\beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 4l_1l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}^2m_4v_2S_{\bar{\theta}_7} + 4l_1l_2l_3^2l_4^2l_{c_2}^2m_2v_2S (2\beta_1 - \beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 2l_1^2l_2^2l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S \left( \beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) - 4l_1^2l_2^2l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S \left( \beta_1\bar{\theta}_{\beta q} \right) \\
& + 2l_1^2l_2^2l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S (\beta_1 - 4\beta_2 + 3q_{1-2}) + 4l_1l_2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S (q_{1-2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}m_2v_1S(q_{1-2}) + 4l_1l_2^3l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S(q_{1-2}) \\
& -3l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S(q_{1-2}) - 8l_1^2l_2l_3l_4^2l_{c_2}^2m_2v_1S(\beta_2) \\
& -4l_1l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}^2m_4v_2S(\beta_1) - 4l_1l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}^2m_4v_2S(\beta_1 + 2q_{1-2}) \\
& + 2l_1l_2^2l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S(\beta_1 + 2q_{1-2}) - 2l_1l_2^3l_3^2l_4l_{c_4}m_4v_2S(2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 2l_1^2l_2^3l_3l_4l_{c_4}m_4v_1S(2\beta_1 - \beta_2) + 4l_1^2l_2l_3l_4^2l_{c_2}^2m_2v_1S(2\beta_1 + \beta_2) \\
& + 4l_1l_2^2l_3^2l_4l_{c_4}^2m_4v_2S(\beta_1 + 2\beta_2) + 2l_1l_2^2l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S(\beta_1 - 2\beta_2) \\
& - 2l_1l_2^2l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S(\beta_1 + 2\beta_2) + 2l_1l_2^3l_3^2l_4l_{c_4}m_4v_2S(\beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 2l_1l_2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) - 3l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}m_2v_1S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) \\
& + 2l_1l_2^3l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) - 3l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S(2\beta_{1-2} + q_{1-2}) \\
& - 4l_1l_2l_3^2l_4^2l_{c_2}^2m_2v_2S(2\beta_1 + \beta_2 + q_{1-2}) - 4l_1^2l_2^2l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S\bar{\theta}_8 \\
& - 4l_1^2l_2^2l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S\bar{\theta}_{10} + 2l_1^2l_2^2l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S\bar{\theta}_8 \\
& - 4l_1^2l_2l_3l_4^2l_{c_2}^2m_2v_1S(2\beta_1 - \beta_2) - 4l_1^2l_2^3l_3l_4l_{c_4}m_4v_1S(\beta_2) \\
& - 2l_1l_2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S\bar{\theta}_{11} + 3l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}m_2v_1S\bar{\theta}_{11} \\
& + 4l_1l_2l_3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_1S\bar{\theta}_{12} - 3l_1l_2^2l_3l_4^3l_{c_2}m_2v_1S\bar{\theta}_{12} \\
& + 4l_1l_2^3l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S\bar{\theta}_{11} - 3l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S\bar{\theta}_{11} \\
& - 2l_1l_2^3l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S\bar{\theta}_{12} + 3l_1l_2^3l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S\bar{\theta}_{12} \\
& + 2l_1^2l_2^3l_3l_4l_{c_4}m_4v_1S(\beta_2 - 2q_1 + 2q_2) + 4l_1l_2l_3^2l_4^2l_{c_2}^2m_2v_2S(\beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 4l_1l_2l_3^2l_4^2l_{c_2}^2m_2v_2S(\beta_2 - q_{1-2}) + 8l_1^2l_2^2l_3l_4l_{c_4}^2m_4v_1S(\beta_1 + q_{1-2}) \\
& - 4l_1^2l_2^2l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S(\beta_1 + q_{1-2}) + 2l_1^2l_2^2l_3l_4^2l_{c_4}m_4v_1S(\bar{\theta}_{13}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\bar{c}_{3c22} = & 6l_4l_2^3l_3^3v_2S(\beta_2) - 2l_4l_2^3l_3^3v_2S(2\beta_1 + \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 6l_2l_3^3l_4^3v_2S(\beta_1 + q_{1-2}) + 6l_4l_2^3l_3^3v_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 2l_4l_2^3l_3^3v_2S(4\beta_1 - \beta_2 + 4q_{1-2}) + 6l_2l_3^3l_4^3v_2S\bar{\theta}_{10} \\
& + 2l_2l_3^3l_4^3v_2S(\beta_1 + 2\beta_2 + q_{1-2}) - 2l_2l_3^3l_4^3v_2S(\beta_1 - 4\beta_2 + q_{1-2}) \\
& + 4l_2l_2l_3^3l_4^2v_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) + 2l_2l_2l_3^2l_4^3v_2S\bar{\theta}_{14} \\
& - 2l_4l_2^3l_3^2l_4v_2S(4\beta_1 - 2\beta_2 + 4q_{1-2}) - 6l_3^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S(\beta_1 + q_{1-2}) \\
& - 2l_2^3l_3^3l_{c_4}^2m_4v_2S(2\beta_1 + \beta_2 + 2q_{1-2}) + 4l_2l_2l_3^2l_4^3v_2S(2\beta_2) \\
& - 2l_4l_2^3l_3^2l_4v_2S(2\beta_2) - 2l_2l_2l_3^2l_4^3v_2S(2\beta_1 + 2q_{1-2}) \\
& + 4l_4l_2^3l_3^2l_4v_2S(2\beta_1 + 2q_{1-2}) + 4l_4l_2^2l_3^3l_4v_2S\bar{\theta}_{10} \\
& + 4l_4l_2^2l_3^3l_4v_2S(\beta_1 + 2\beta_2 + q_{1-2}) + 6l_2^3l_3^3l_{c_4}^2m_4v_2S(\beta_2) \\
& - 8l_4l_2^2l_3^3l_4v_2S(\beta_1 + q_{1-2}) + 6l_2^3l_3^3l_{c_4}^2m_4v_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& - 2l_2^3l_3^3l_{c_4}^2m_4v_2S(4\beta_1 - \beta_2 + 4q_{1-2}) - 4l_2l_2l_3^3l_4^2v_2S(2\beta_1 + \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 6l_3^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S\bar{\theta}_{10} + 2l_3^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S(\beta_1 + 2\beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 2l_3^3l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S(\beta_1 - 4\beta_2 + q_{1-2}) + 8l_2l_2l_3^3l_4^2v_2S(\beta_2) \\
& + 4l_2l_3^3l_4^2l_{c_2}^2m_2v_2S(2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) + 2l_2l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S\bar{\theta}_{14} \\
& + 2l_2^3l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S\bar{\theta}_{14} - 2l_2^3l_3^2l_4l_{c_4}^2m_4v_2S(4\beta_1 - 2\beta_2 + 4q_{1-2}) \\
& + 2l_2^3l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S(4\beta_1 - 2\beta_2 + 4q_{1-2}) + 4l_2l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S(2\beta_2) \\
& - 2l_2^3l_3^2l_4l_{c_4}^2m_4v_2S(2\beta_2) + 6l_2^3l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S(2\beta_2) \\
& - 2l_2l_3^2l_4^3l_{c_2}^2m_2v_2S(2\beta_1 + 2q_{1-2}) + 4l_2^3l_3^2l_4l_{c_4}^2m_4v_2S(2\beta_1 + 2q_{1-2}) \\
& - 6l_2^3l_3^2l_4^2l_{c_4}m_4v_2S(2\beta_1 + 2q_{1-2}) - 2l_2^3l_3^3l_4l_{c_4}m_4v_2S(2\beta_1 + \beta_2 + 2q_{1-2}) \\
& + 4l_2^2l_3^3l_4l_{c_4}^2m_4v_2S\bar{\theta}_{10} + 4l_2^2l_3^3l_4l_{c_4}^2m_4v_2S(\beta_1 + 2\beta_2 + q_{1-2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2l_2^2 l_3^3 l_4^2 l_{c_4} m_4 v_2 S_{\bar{\theta}_{10}} - 2l_2^2 l_3^3 l_4^2 l_{c_4} m_4 v_2 S (\beta_1 + 2\beta_2 + q_{1-2}) \\
& - 2l_2^2 l_3^3 l_4^2 l_{c_4} m_4 v_2 S (\beta_1 - 4\beta_2 + q_{1-2}) + 2l_2^3 l_3^3 l_4 l_{c_4} m_4 v_2 S (\beta_2) \\
& - 8l_2^2 l_3^3 l_4 l_{c_4}^2 m_4 v_2 S (\beta_1 + q_{1-2}) + 2l_2^2 l_3^3 l_4^2 l_{c_4} m_4 v_2 S (\beta_1 + q_{1-2}) \\
& - 2l_2^3 l_3^3 l_4 l_{c_4} m_4 v_2 S (2\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}) + 2l_2^3 l_3^3 l_4 l_{c_4} m_4 v_2 S (4\beta_1 - \beta_2 + 4q_{1-2}) \\
& - 4l_2 l_3^3 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (2\beta_1 + \beta_2 + 2q_{1-2}) + 8l_2 l_3^3 l_4^2 l_{c_2}^2 m_2 v_2 S (\beta_2).
\end{aligned}$$

Además, se utilizan las siguientes variables auxiliares para simplificar las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
q_{1-2} &= q_1 - q_2, \\
\beta_{1-2} &= \beta_1 - \beta_2, \\
\bar{\theta}_{\beta q} &= -2\beta_2 + 3q_{1-2}, \\
\bar{c}_1 &= -\left(l_2^3 l_4^3 (C(4\beta_{1-2} + 4q_{1-2}) - 4C(\bar{\theta}_1) + 3)\right), \\
\bar{c}_2 &= \left(l_2^3 l_4^3 (C(4\beta_{1-2} + 4q_{1-2}) - 4C(\bar{\theta}_1) + 3)\right), \\
\bar{c}_3 &= \left(l_2^3 l_4^3 (C(4\beta_1 - 4\beta_2 + 4q_{1-2}) - 4C(2\beta_1 - 2\beta_2 + 2q_{1-2}) + 3)\right), \\
\bar{t}_a &= -\left(l_2^2 l_4^2 (\cos(\bar{\theta}_1) - 1)\right), \\
\bar{t}_b &= -\left(2l_2^2 l_4^2 (\cos(\bar{\theta}_1) - 1)\right), \\
\bar{t}_c &= -\left(l_2^2 l_4^2 (C(\bar{\theta}_1) - 1)\right), \\
\bar{\theta}_1 &= 2\beta_{1-2} + 2q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_2 &= 2b_1 - b_2 + q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_3 &= 4\beta_1 - \beta_2 + q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_4 &= 2\beta_1 - 4\beta_2 + 4q_1 - 4q_2, \\
\bar{\theta}_5 &= \beta_1 + 2\beta_2 - 2q_1 + 2q_2, \\
\bar{\theta}_6 &= 2\beta_1 + \beta_2 - q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_7 &= \beta_1 - 2\beta_2 + 2q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_8 &= \beta_1 + 2\beta_2 - q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_9 &= 4\beta_1 - \beta_2 + 2q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_{10} &= \beta_1 - 2\beta_2 + q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_{11} &= 2\beta_1 + q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_{12} &= 2\beta_2 - q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_{13} &= \beta_1 - q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_{14} &= 2\beta_1 - 4\beta_2 + 2q_{1-2}, \\
\bar{\theta}_{15} &= 2\beta_1 - 4\beta_2 + 3q_{1-2}
\end{aligned}$$

## Udwadia-Kalaba

Finalmente, para el caso de las ecuaciones de Udwadia-Kalaba, falta definir el vector de las ecuaciones de restricción, i.e, de  $D(\rho)\ddot{\rho} = \mathbf{b}$ , dicho vector está dado por está dado

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2]^T \quad (\text{B.9})$$

y los elementos de  $\mathbf{b}$  son

$$b(1) = \dot{q}_1 (\dot{q}_1 (l_2 \cos(\beta_1 + q_1) + l_1 \cos(q_1)) + \dot{\beta}_1 l_2 \cos(\beta_1 + q_1))$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{q}_2 (\dot{q}_2 (l_4 \cos(\beta_2 + q_2) + l_3 \cos(q_2)) + \dot{\beta}_2 l_4 \cos(\beta_2 + q_2)) \\
& + \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 l_2 \cos(\beta_1 + q_1) + l_2 \dot{q}_1 \cos(\beta_1 + q_1)) \\
& - \dot{\beta}_2 (\dot{\beta}_2 l_4 \cos(\beta_2 + q_2) + l_4 \dot{q}_2 \cos(\beta_2 + q_2)) \\
b(2) = & \dot{q}_1 (\dot{q}_1 (l_2 \sin(\beta_1 + q_1) + l_1 \sin(q_1)) + \dot{\beta}_1 l_2 \sin(\beta_1 + q_1)) \\
& - \dot{q}_2 (\dot{q}_2 (l_4 \sin(\beta_2 + q_2) + l_3 \sin(q_2)) + \dot{\beta}_2 l_4 \sin(\beta_2 + q_2)) \\
& + \dot{\beta}_1 (\dot{\beta}_1 l_2 \sin(\beta_1 + q_1) + l_2 \dot{q}_1 \sin(\beta_1 + q_1)) \\
& - \dot{\beta}_2 (\dot{\beta}_2 l_4 \sin(\beta_2 + q_2) + l_4 \dot{q}_2 \sin(\beta_2 + q_2)) .
\end{aligned}$$

## B.2. Robot móvil diferencial

### Euler-Lagrange + proyección

La matriz de inercias mínima del sistema está dada por:

$$M_r(\rho) = \begin{bmatrix} m_{r11} & m_{r12} \\ m_{r12} & m_{r22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

y sus elementos están dados por

$$\begin{aligned}
m_{r11} &= \frac{4I_{w_y} l_b^2 + I_{b_z} r^2 + 2I_{w_x} r^2 + 4l_b^2 m_w r^2 + l_b^2 m_b r^2}{4l_b^2}, \\
m_{r12} &= -\frac{r^2 (-m_b l_b^2 + I_{b_z} + 2I_{w_x})}{4l_b^2}, \\
m_{r22} &= \frac{4I_{w_y} l_b^2 + I_{b_z} r^2 + 2I_{w_x} r^2 + 4l_b^2 m_w r^2 + l_b^2 m_b r^2}{4l_b^2}.
\end{aligned}$$

### Poincaré-Chetaev-Rumyantsev modificado

Las matrices faltantes de la aplicación de estas ecuaciones en el robot móvil diferencial son:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ r & 0 & -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & l_b \\ 0 & r & -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & -l_b \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

y su inversa es

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r \cos(\theta)}{2} & \frac{r \cos(\theta)}{2} & -\sin(\theta) & -\frac{\cos(\theta)}{2} & -\frac{\cos(\theta)}{2} \\ \frac{r \sin(\theta)}{2} & \frac{r \sin(\theta)}{2} & \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{2} & -\frac{\sin(\theta)}{2} \\ -\frac{r}{2l_b} & \frac{r}{2l_b} & 0 & \frac{1}{2l_b} & -\frac{1}{2l_b} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{r \sin(\theta)(\dot{\phi}_l \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\theta))}{2} & \frac{r \sin(\theta)(\dot{\phi}_l \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\theta))}{2} \\ \frac{r \cos(\theta)(\dot{\phi}_l \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\theta))}{2} & \frac{r \cos(\theta)(\dot{\phi}_l \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\theta))}{2} \\ \frac{r \cos(\theta)(\dot{\phi}_l \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\theta))}{2} & \frac{r \cos(\theta)(\dot{\phi}_l \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\theta))}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

La matriz de inercias mínima del sistema está dada por:

$$M_v(\rho) = \begin{bmatrix} m_{v11} & m_{v12} \\ m_{v12} & m_{v22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

y sus elementos están dados por

$$m_{v11} = \frac{4I_{w_y} l_b^2 + I_{b_z} r^2 + 2I_{w_x} r^2 + 4l_b^2 m_w r^2 + l_b^2 m_b r^2}{4l_b^2},$$

$$m_{v12} = - \frac{r^2 (-m_b l_b^2 + I_{b_z} + 2I_{w_x})}{4l_b^2},$$

$$m_{v22} = \frac{4I_{w_y} l_b^2 + I_{b_z} r^2 + 2I_{w_x} r^2 + 4l_b^2 m_w r^2 + l_b^2 m_b r^2}{4l_b^2}.$$

### Ecuaciones de Udwadia-Kalaba

Para el caso de las ecuaciones de Udwadia-Kalaba falta definir el vector de las ecuaciones de restricción, i.e, de  $D(\rho)\ddot{\rho} = \mathbf{b}$  de las restricciones (6.27), dicho vector está dado por está dado

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} (\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta)) \\ \dot{\theta} (\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta)) \\ \dot{\theta} (\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta)) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

# Bibliografía

- [1] Haim Baruh. *Analytical dynamics*. McGraw-Hill, 1999.
- [2] Juru Isaakovich Neimark y Nikola\_ Alekseevich Fufaev. *Dynamics of nonholonomic systems*. Vol. 33. American Mathematical Soc., 1967.
- [3] A. Barrientos et al. *Fundamentos de Robótica*. McGraw-Hill, 1999.
- [4] A. De Luca y G. Oriolo. "MODELING AND CONTROL OF NONHOLONOMIC MECHANICAL SYSTEMS". En: *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems*. Ed. por J. Angeles y A. Kecskemethy. Springer-Verlag, 1995. Cap. 7, págs. 277-342.
- [5] Georg Frobenius. "Ueber das Pfaffsche Problem." En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 82 (1877), págs. 230-315.
- [6] Alexey V Borisov, Ivan S Mamaev e Ivan A Bizyaev. "Historical and critical review of the development of nonholonomic mechanics: The classical period". En: *Regular and Chaotic Dynamics* 21.4 (2016), págs. 455-476.
- [7] Manuel de León. "A historical review on nonholomic mechanics". En: *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 106.1 (2012), págs. 191-224.
- [8] Ilya Kolmanovsky y N Harris McClamroch. "Developments in nonholonomic control problems". En: *IEEE control systems* 15.6 (1995), págs. 20-36.
- [9] Sh Kh Soltakhanov, Mikhail Yushkov y S Zegzhda. *Mechanics of non-holonomic systems: A new class of control systems*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [10] Leonhard Euler. "De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexilium, methodus nova et facilis". En: *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* 7 (1735), págs. 99-122.
- [11] GM Slessor. "Notes on rigid dynamics". En: *QJ Math* 4 (1861), págs. 65-77.
- [12] NM Ferres. "Extension of Lagrange's Equations". En: *QJ Math* 12 (1872), págs. 230-315.
- [13] Heinrich Hertz. *Die Prinzipien der Mechanik*. Vol. 3. JA Barth, 1894.
- [14] Henri Poincaré. "Les idées de Hertz sur la mécanique". En: *Revue générale des sciences* 8 (1897), págs. 734-743.
- [15] Ernst Leonard Lindelöf. *Sur le mouvement d'un corps de révolution roulant sur un plan horizontal*. ex Officina typographica Societatis litterariae fennicae, 1897.
- [16] Paul Appell. *Traité de mécanique rationnelle*. Vol. 2. Gauthier-Villars, 1896.
- [17] C Neumann. "Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der schwere". En: *Mathematische Annalen* 27.4 (1886), págs. 478-501.
- [18] C Neumann. "Beiträge zur analytischen Mechanik: 1". En: *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe* 51 (1899), pág. 371.
- [19] E Crescini. "Sur moto di una sfera che rotola su di un piano fisso". En: *Rendiconti Accad. dei Lincei* 5 (1889), págs. 204-209.
- [20] G Schouten. "Over de rollende beweging van een omwentelingalichaam op een vlak". En: *Verlangen der Koninkl. Akad. van Wet. Amsterdam. Proc* 5 (1899), págs. 1-10.
- [21] P Molenbrock. "Over de zuiver rollende beweging van een lichaam over een willekeurig oppervlak". En: *Nieuw Archief voor Wiskunde* 17 (1890), págs. 130-157.
- [22] Ludwig Boltzmann. "Ueber die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systeme." En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 98 (1885), págs. 68-94.
- [23] SA Chaplygin. "On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane". En: *Regular and Chaotic Dynamics* 7.2 (2002), págs. 119-130.

- [24] G Hamel. "Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik". En: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 16.1 (1904), págs. 1-57.
- [25] Vito Volterra. "Sopra una classe di equazioni dinamiche". En: *Atti Accad. Sci. Torino* 33 (1898), págs. 451-475.
- [26] PV Voronets. "Sur les equations du mouvement pour les systemes non holonomes". En: *Matematicheskii Sbornik* 22.4 (1901), págs. 659-686.
- [27] GA Maggi. "Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica applicabili ai sistemi anolonomi". En: *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Fis. Mat. Nat., X* (1901), págs. 287-291.
- [28] Iv Isénoff. "Sur les équations générales du mouvement des systemes matériels non holonomes". En: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1920), págs. 245-264.
- [29] Georg Hamel. *Theoretische Mechanik: eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik*. Vol. 2. Springer-Verlag, 1978.
- [30] P Woronetz. "Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften". En: *Mathematische Annalen* 63.3 (1907), págs. 387-412.
- [31] Jan A Schouten. *On non-holonomic connexions*. North Holland, 1928.
- [32] Gheorghe Vranceanu. "Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques". En: (1936).
- [33] ÉLIE Cartan. "Lessons on integral invariants". En: *A. Hermann* (1922).
- [34] V Vagner. "Geometrical interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems". En: *Proc. Seminar on Vector and Tensor Analysis*. Vol. 5. 1941, págs. 301-327.
- [35] Bernd Stückler. "Über die Differentialgleichungen für die Bewegung eines idealisierten Kraftwagens". En: *Archive of Applied Mechanics* 20.5 (1952), págs. 337-356.
- [36] B Stückler. "Über die Berechnung der an rollenden Fahrzeugen wirkenden Haftreibungen". En: *Ingenieur-Archiv* 23.4 (1955), págs. 279-287.
- [37] Yves Rocard. *L'Instabilité en mécanique: Automobiles. Avions. Parts suspendus*. Vol. 1. Masson et Cie., Éditeurs, 1954.
- [38] Alexey V Borisov et al. "Qualitative analysis of the dynamics of a wheeled vehicle". En: *Regular and Chaotic Dynamics* 20.6 (2015), págs. 739-751.
- [39] Alejandro Bravo-Doddoli y Luis C García-Naranjo. "The dynamics of an articulated n-trailer vehicle". En: *Regular and Chaotic Dynamics* 20.5 (2015), págs. 497-517.
- [40] T. R. Kane. "Dynamics of Nonholonomic Systems". En: *Journal of Applied Mechanics* 28 (1961), págs. 574-578.
- [41] Thomas R. Kane y David A. Levinson. "The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics". En: *The International Journal of Robotics Research* 2 (1983), págs. 3-21.
- [42] Martin Lesser. "A geometrical interpretation of Kane's equations". En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 436. 1896. The Royal Society. 1992, págs. 69-87.
- [43] Marco Borri, Carlo Bottasso y Paolo Mantegazza. "Equivalence of Kane's and Maggi's equations". En: *Meccanica* 25.4 (1990), págs. 272-274.
- [44] Edward A Desloge. "A comparison of Kane's equations of motion and the Gibbs-Appell equations of motion". En: *American Journal of Physics* 54.5 (1986), págs. 470-472.
- [45] DL Mingori. "Lagrange's equations, Hamilton's equations, and Kane's equations: Interrelations, energy integrals, and a variational principle". En: *Journal of Applied Mechanics* 62.2 (1995), págs. 505-510.
- [46] I Sharf, GMT D'eleuterio y PC Hughes. "On the dynamics of Gibbs, Appell, and Kane". En: *European Journal of Mechanics Solids* 11 (1992), págs. 145-155.
- [47] AJ Van der Schaft y BM Maschke. "On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems". En: *Reports on mathematical physics* 34.2 (1994), págs. 225-233.

- [48] Vincent Duindam et al. *Modeling and control of complex physical systems: the port-Hamiltonian approach*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [49] F. H. Ghorbel et al. "Modeling and Set Point Control of Closed-Chain Mechanisms: Theory and Experiment". En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8 (2000), págs. 801-815.
- [50] Henri Cartan. *Differential forms*. Courier Corporation, 2006.
- [51] Troy L Story. *Introduction to differential geometry with applications to Navier-Stokes dynamics*. iUniverse, 2005.
- [52] Andrew McInerney. *First steps in differential geometry*. Springer, 2015.
- [53] John M Lee. "Smooth manifolds". En: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013, págs. 1-31.
- [54] David Lovelock y Hanno Rund. *Tensors, differential forms, and variational principles*. Courier Corporation, 1989.
- [55] Alberto Isidori, ED Sontag y M Thoma. *Nonlinear control systems*. Vol. 3. Springer, 1995.
- [56] Richard M Murray, Zexiang Li y S Shankar Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press, 2017.
- [57] G. Oriolo e Y. Nakamura. "Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: Underactuated manipulators". En: *IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, UK, 1991.
- [58] KY Wichlund, OJ Sordalen y Olav Egeland. "Control properties of underactuated vehicles". En: *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*. Vol. 2. IEEE. 1995, págs. 2009-2014.
- [59] Tzyh-Jong Tarn, Mingjun Zhang y Andrea Serrani. "New integrability conditions for classifying holonomic and nonholonomic systems". En: *Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization*. Springer, 2003, págs. 317-331.
- [60] Tzyh-Jong Tarn, Mingjun Zhang y Andrea Serrani. "New integrability conditions for differential constraints". En: *Systems & control letters* 49.5 (2003), págs. 335-345.
- [61] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer-Verlag, 2003.
- [62] A. Delgado. *Implementación de algoritmos de planificación y control en la plataforma Segway RMP-100*, 2017.
- [63] Montoya J. *Evaluación de esquemas adaptables de control aplicados a un giroscopio de 2 grados de libertad*. 2017.
- [64] Isaac Gandarilla et al. "Joint position regulation of a class of underactuated mechanical systems affected by LuGre dynamic friction via the IDA-PBC method". En: *International Journal of Control* (2020), págs. 1-24.
- [65] Mingjun Zhang y Tzyh-Jong Tarn. "Hybrid control of the Pendubot". En: *IEEE/ASME transactions on mechatronics* 7.1 (2002), págs. 79-86.
- [66] B. Siciliano et al. *Robotics: Modeling, Planning and Control*. Springer, 2009.
- [67] R. Campa. "Control de Robots Manipuladores en Espacio de Tarea". Tesis doct. Ensenada, B.C., México: CICESE, 2005.
- [68] Patricia Mellodge y Pushkin Kachroo. *Model abstraction in dynamical systems: Application to mobile robot control*. Springer, 2008.
- [69] Firdaus E Udwardia. "Fundamental principles of Lagrangian dynamics: mechanical systems with non-ideal, holonomic, and nonholonomic constraints". En: *Journal of mathematical analysis and applications* 251.1 (2000), págs. 341-355.
- [70] Firdaus E Udwardia y Robert E Kalaba. "On the foundations of analytical dynamics". En: *International Journal of non-linear mechanics* 37.6 (2002), págs. 1079-1090.
- [71] Firdaus E Udwardia y Robert E Kalaba. "What is the general form of the explicit equations of motion for constrained mechanical systems?" En: *Journal of Applied Mechanics* 69.3 (2002), págs. 335-339.
- [72] VV Rumyantsev. "On the Poincaré and Chetayev equations". En: *Journal of applied mathematics and mechanics* 62.4 (1998), págs. 495-502.

- [73] Frédéric Jean. *Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning*. Springer, 2014.
- [74] Jean-Paul Laumond, S Sekhvat y F Lamiroux. "Guidelines in nonholonomic motion planning for mobile robots". En: *Robot motion planning and control*. Springer, 1998, págs. 1-53.
- [75] Jacob T Schwartz y Micha Sharir. "On the "piano movers" problem. II. General techniques for computing topological properties of real algebraic manifolds". En: *Advances in applied Mathematics* 4.3 (1983), págs. 298-351.
- [76] John Canny. *The complexity of robot motion planning*. MIT press, 1988.
- [77] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, 1972.
- [78] Frédéric Jean y Pierre-Vincent Koseleff. "Elementary approximation of exponentials of Lie polynomials". En: *International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error-Correcting Codes*. Springer. 1997, págs. 174-188.
- [79] Anthony M Bloch, Mahmut Reyhanoglu y N Harris McClamroch. "Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems". En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 37.11 (1992), págs. 1746-1757.
- [80] Anthony M Bloch y N Harris McClamroch. "Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints". En: *Decision and Control, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on*. IEEE. 1989, págs. 201-205.
- [81] AM Bloch y Mahmut Reyhanoglu. "Controllability and stabilizability properties of a nonholonomic control system". En: *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*. IEEE. 1990, págs. 1312-1314.
- [82] Anthony M Bloch y Peter E Crouch. "Nonholonomic control systems on Riemannian manifolds". En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 33.1 (1995), págs. 126-148.
- [83] RW Brockett y Liyi Dai. "Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability". En: *Nonholonomic motion planning*. Springer, 1993, págs. 1-21.
- [84] Zexiang Li y John Canny. "Motion of two rigid bodies with rolling constraint". En: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 6.1 (1990), págs. 62-72.
- [85] Jerome Barraquand y J-C Latombe. "On nonholonomic mobile robots and optimal maneuvering". En: *Intelligent Control, 1989. Proceedings., IEEE International Symposium on*. IEEE. 1989, págs. 340-347.
- [86] Jérôme Barraquand y Jean-Claude Latombe. "Nonholonomic multibody mobile robots: Controllability and motion planning in the presence of obstacles". En: *Algorithmica* 10.2-4 (1993), págs. 121.
- [87] L Bushnell, D Tilbury y S Sastry. "Steering three input chained form nonholonomic systems using sinusoids". En: *Proceedings of the European Control Conference*. 1993, págs. 1432-1437.
- [88] C Canudas de Wit y OJ Sørtdalen. "Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints". En: *Modeling, identification and control* 13.1 (1992), págs. 3-14.
- [89] Canudas de Wit et al. "Nonlinear control design for mobile robots". En: *Recent trends in mobile robots*. World Scientific, 1993, págs. 121-156.
- [90] J-P Laumond et al. "A motion planner for nonholonomic mobile robots". En: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 10.5 (1994), págs. 577-593.
- [91] Claude Samson. "Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots". En: *The International journal of robotics research* 12.1 (1993), págs. 55-64.
- [92] Arlene BA Cole, John Edmond Hauser y Sosale Shankara Sastry. "Kinematics and control of multifingered hands with rolling contact". En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 34.4 (1989), págs. 398-404.
- [93] Richard M Murray. "Grasping and manipulation using multifingered robot hands". En: *Proc. Symp. in Applied Mathematics*, 1990. Vol. 41. AMS. 1990, págs. 91-128.
- [94] CK Chen y N Sreenath. "Control of coupled spatial two-body systems with nonholonomic constraints". En: *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. IEEE. 1993, págs. 949-954.

- [95] Naveed M Hussain y Thomas R Kane. "Three-dimensional reorientation of a system of interconnected rigid bodies". En: *Journal of the Astronautical Sciences* 42 (1994), págs. 1-25.
- [96] Patrick J McNally y N Harris McClamroch. "Space station attitude disturbance arising from internal motions". En: *American Control Conference, 1993*. IEEE. 1993, págs. 2489-2493.
- [97] Hariharan Krishnan, Mahmut Reyhanoglu y Harris McClamroch. "Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two control torques: A nonlinear control approach based on the spacecraft attitude dynamics". En: *Automatica* 30.6 (1994), págs. 1023-1027.
- [98] OJ Sordalen, O Egeland y C Canudas de Wit. "Attitude stabilization with a nonholonomic constraint". En: *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on*. IEEE. 1992, págs. 1610-1611.
- [99] Gregory C Walsh, Richard Montgomery y Shankar S Sastry. "Orientation control of the dynamic satellite". En: *American Control Conference, 1994*. Vol. 1. IEEE. 1994, págs. 138-142.
- [100] J Baillieul. "Kinematically redundant robots with flexible components". En: *IEEE Control Systems Magazine* 13.1 (1993), págs. 15-21.
- [101] R. W. Brockett. En: ed. por Peter J. Hilton y Gail S. Young. New York, NY: Springer New York, 1982. Cap. Control Theory and Singular Riemannian Geometry, págs. 11-27.
- [102] Héctor J. Sussmann. "Subanalytic sets and feedback control". En: *J. Differential Equations* 31.1 (1979), págs. 31-52.
- [103] GA Lafferriere y Eduardo D Sontag. "Remarks on control lyapunov functions for discontinuous stabilizing feedback". En: *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. IEEE. 1993, págs. 306-308.
- [104] Canudas Canudas de Wit y OJ Sordalen. "Examples of piecewise smooth stabilization of driftless NL systems with less inputs than states". En: *Proc. Symp. on Nonlinear Control System Design, Bordeaux, France (IFAC, 1992)*. 2016, págs. 57-61.
- [105] Anthony Bloch y Sergey Drakunov. "Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes". En: *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*. Vol. 3. IEEE. 1994, págs. 2961-2963.
- [106] Jurgen Guldner y Vadim I Utkin. "Stabilization of non-holonomic mobile robots using Lyapunov functions for navigation and sliding mode control". En: *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*. Vol. 3. IEEE. 1994, págs. 2967-2972.
- [107] Jiirgen Guldner y Vadim I Utkin. "On the navigation of mobile robots in narrow passages: A general framework based on sliding mode theory". En: (1993).
- [108] Claude Samson. "Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart". En: *Advanced robot control*. Springer, 1991, págs. 125-151.
- [109] Richard M Murray. "Control of nonholonomic systems using chained forms". En: *Fields Institute Communications* 1 (1993), págs. 219-245.
- [110] Andrew R Teel, Richard M Murray y Gregory C Walsh. "Non-holonomic control systems: from steering to stabilization with sinusoids". En: *International Journal of Control* 62.4 (1995), págs. 849-870.
- [111] Gregory Charles Walsh y Linda Grace Bushnell. "Stabilization of multiple input chained form control systems". En: *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. IEEE. 1993, págs. 959-964.
- [112] Richard M. Murray y S. Shankar Sastry. "Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids". En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1993), págs. 700-716.
- [113] Jean-Michel Coron y Jean-Baptiste Pomet. "A remark on the design of time-varying stabilizing feedback laws for controllable systems without drift". En: *IFAC Symposia Series*. PERGAMON PRESS. 1993, págs. 397-397.
- [114] Jean-Baptiste Pomet. "Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift". En: *Systems & control letters* 18.2 (1992), págs. 147-158.
- [115] Robert T M'Closkey y Richard M Murray. "Experiments in exponential stabilization of a mobile robot towing a trailer". En: *American Control Conference, 1994*. Vol. 1. IEEE. 1994, págs. 988-993.

- [116] Pascal Morin et al. "Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls". En: *Systems & Control Letters* 25.5 (1995), págs. 375-385.
- [117] Ilya Kolmanovsky y N Harris McClamroch. "Feedback reorientation of planar multibody systems in space using joint actuation". En: *American Control Conference, Proceedings of the 1995*. Vol. 4. IEEE. 1995, págs. 2810-2814.
- [118] LV Kolmanovksy, Mahmut Reyhanoglu y N Harris McClamroch. "Discontinuous feedback stabilization of nonholonomic systems in extended power form". En: *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*. Vol. 4. IEEE. 1994, págs. 3469-3474.
- [119] Ilya Kolmanovsky, Mahmut Reyhanoglu y N Harris McClamroch. "Switched mode feedback control laws for nonholonomic systems in extended power form". En: *Systems & Control Letters* 27.1 (1996), págs. 29-36.
- [120] Hariharan Krishnan, N Harris McClamroch y Mahmut Reyhanoglu. "Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two momentum wheel actuators". En: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 18.2 (1995), págs. 256-263.
- [121] OJ Sordalen y KY Wichlund. "Exponential stabilization of a car with n trailers". En: *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. IEEE. 1993, págs. 978-983.
- [122] Canudes Canudas de Wit, Harry Berghuis y Henk Nijmeijer. "Practical stabilization of nonlinear systems in chained form". En: *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*. Vol. 4. IEEE. 1994, págs. 3475-3480.
- [123] Eduardo D Sontag. "Universal nonsingular controls". En: *Systems & Control Letters* 19.3 (1992), págs. 221-224.
- [124] Eduardo Sontag. "Gradient techniques for systems with no drift: A classical idea revisited". En: *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. IEEE. 1993, págs. 2706-2711.
- [125] Mahmut Reyhanoglu y Jasper van de Loo. "State feedback tracking of a nonholonomic control moment gyroscope". En: *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*. IEEE. 2006, págs. 6156-6161.
- [126] Mahmut Reyhanoglu y Jasper Van De Loo. "Rest-to-rest maneuvering of a nonholonomic control moment gyroscope". En: *Industrial Electronics, 2006 IEEE International Symposium on*. Vol. 1. IEEE. 2006, págs. 160-165.
- [127] David J Richie, Vaios J Lappas y George Prassinis. "A practical small satellite variable-speed control moment gyroscope for combined energy storage and attitude control". En: *Acta Astronautica* 65.11-12 (2009), págs. 1745-1764.
- [128] Shiqiang Zheng y Bangcheng Han. "Investigations of an integrated angular velocity measurement and attitude control system for spacecraft using magnetically suspended double-gimbal CMGs". En: *Advances in Space Research* 51.12 (2013), págs. 2216-2228.
- [129] Ichiro Jikuya, Kenta Fujii y Katsuhiko Yamada. "Attitude maneuver of spacecraft with a variable-speed double-gimbal control moment gyro". En: *Advances in Space Research* 58.7 (2016), págs. 1303-1317.
- [130] Yasuyuki Nanamori y Masaki Takahashi. "Steering law of control moment gyros using optimization of initial gimbal angles for satellite attitude control". En: *Journal of System Design and Dynamics* 5.1 (2011), págs. 30-41.
- [131] Zhang Jingrui, Jin Jin y Liu Zaozhen. "An improved installation for control moment gyros and its applications on reconfiguration and singular escape". En: *Acta Astronautica* 85 (2013), págs. 93-99.
- [132] Ozan Tekinalp y Emre Yavuzoglu. "A new steering law for redundant control moment gyroscope clusters". En: *Aerospace science and technology* 9.7 (2005), págs. 626-634.
- [133] Henzeh Leeghim et al. "Singularity avoidance of control moment gyros by predicted singularity robustness: ground experiment". En: *IEEE Transactions on control systems Technology* 17.4 (2009), págs. 884-891.
- [134] Haruhisa Kurokawa. "Survey of theory and steering laws of single-gimbal control moment gyros". En: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 30.5 (2007), págs. 1331-1340.

- [135] Timothy Sands, Jae Jun Kim y Brij N Agrawal. "Nonredundant single-gimbaled control moment gyroscopes". En: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 35.2 (2012), págs. 578-587.
- [136] Alexandre N Pechev. "Feedback-based steering law for control moment gyros". En: *Journal of guidance, control, and dynamics* 30.3 (2007), págs. 848-855.
- [137] Shota Washizu et al. "Nonlinear control for first-order nonholonomic system with hardware restriction and disturbance". En: *Control Conference (ASCC), 2015 10th Asian*. IEEE. 2015, págs. 1-6.
- [138] Haitao Li, Shiqiang Zheng y Xin Ning. "Precise control for gimbal system of double gimbal control moment gyro based on cascade extended state observer". En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 64.6 (2017), págs. 4653-4661.
- [139] Frederick A Leve. "Evaluation of steering algorithm optimality for single-gimbal control moment gyroscopes". En: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22.3 (2014), págs. 1130-1134.
- [140] Jay McMahan y Hanspeter Schaub. "Simplified singularity avoidance using variable-speed control moment gyroscope null motion". En: *Journal of guidance, control, and dynamics* 32.6 (2009), págs. 1938-1943.
- [141] Alessandro De Luca, Raffaella Mattone y Giuseppe Oriolo. "Control of underactuated mechanical systems: Application to the planar 2R robot". En: *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*. Vol. 2. IEEE. 1996, págs. 1455-1460.
- [142] Alessandro De Luca, Raffaella Mattone y Giuseppe Oriolo. "Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator". En: *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal* 10.4 (2000), págs. 181-198.
- [143] Hirohiko Arai, Kazuo Tanie y Naoji Shiroma. "Nonholonomic control of a three-DOF planar underactuated manipulator". En: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 14.5 (1998), págs. 681-695.
- [144] Peiyin Xiong, Xuzhi Lai y Min Wu. "A stable control for second-order nonholonomic planar underactuated mechanical system: energy attenuation approach". En: *International Journal of Control* (2017), págs. 1-10.
- [145] VV Rumyantsev. "The general equations of analytical dynamics". En: *Journal of applied mathematics and mechanics* 60.6 (1996), págs. 899-909.
- [146] Rafael Kelly, Victor Santibáñez y Antonio Loría. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [147] I. Medina. "Modelado y Control de Robots Paralelos en Espacio de Postura". Tesis de maestría. Torreón, Coah, México: Instituto Tecnológico de la Laguna, 2018.
- [148] Israel Soto. "Modelado y Control de Robots con Restricciones Holonomicas y no Holonomicas". Tesis doct. Torreón, Coah., México: Instituto Tecnológico de la Laguna, 2014.
- [149] G. Campion, G. Bastin y B. D'Andrea-Novel. "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots". En: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 12.1 (1996), págs. 47-62. DOI: [10.1109/70.481750](https://doi.org/10.1109/70.481750).
- [150] Carlos Canudas de Wit, Bruno Siciliano y Georges Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer, 1996.
- [151] Hao Sun et al. "Application of the Udwadia-Kalaba approach to tracking control of mobile robots". En: *Nonlinear Dynamics* 83.1-2 (2016), págs. 389-400.
- [152] Wesley T Stackhouse et al. "Adaptive control design using the Udwadia-Kalaba formulation for hovering over an asteroid with unknown gravitational parameters". En: *AIAA Scitech 2020 Forum*. 2020, págs. 0843.
- [153] Alessandro Fumagalli y Pierangelo Masarati. "Efficient application of Gauss' principle to generic mechanical systems". En: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 223.2 (2009), págs. 121-131.
- [154] Zhijun Li, Chenguang Yang y Liping Fan. *Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems*. Springer, 2013.

- [155] I. Soto et al. "Implementación de algoritmos de control en tiempo real en la plataforma robótica Segway RMP-100". En: *Memorias del Congreso Internacional de Robótica y Computación 2016*. Cabo San Lucas, B.C.S, México, 2016, págs. 149-154.
- [156] Alfredo Delgado-Spíndola et al. "Design and Real-Time Implementation of a nonlinear regulation controller for the RMP-100 Segway TWIP". En: *Mechatronics* 79 (2021), pág. 102668.