



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

**Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico**

Tesis de Maestría

**Estudio del Comportamiento Dinámico del Sistema
Circulatorio para Fines de Control**

presentada por

Ing. Cecilia Guadalupe Díaz Valerio

como requisito para la obtención del grado de
**Maestra en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirector de tesis

Dr. Juan Reyes Reyes

Cuernavaca, Morelos, México. Junio de 2022.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Departamento de Ingeniería Electrónica

Cuernavaca,
Mor.,
No. de Oficio:
Asunto:

16/mayo/2022

DIE/067/2022

Aceptación de documentos de
tesis

DR. CARLOS MANUEL ASTROGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la C. Ing. Cecilia Guadalupe Díaz Valerio, con número de control M20CE074 de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Estudio del Comportamiento Dinámico del Sistema Circulatorio para Fines de Control" y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 5505019

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Juan Reyes Reyes
Doctor en Ciencias en la Especialidad de
Control Automático
Cédula profesional 4214833

REVISOR 1

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctora en Ciencias en Ingeniería
Electrónica
Cédula profesional 9968714

REVISOR 2

Dr. Enrique Quintero Márquez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Química
Cédula profesional 10259407

C.p. Lic. Silvia del Carmen Ortiz Fuentes- jefa del Departamento de Servicios Escolares
Estudiante
HEE/mrsr



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos
Tel. 01 (777) 3627770, ext. 2225, e-mail: die@cenidet.tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx



Ricardo
2022 Flores
Año de
Magón
PRELATOR DE LA REVOLUCIÓN MEXICANA



Cuernavaca, Morelos, **27/mayo/2022**

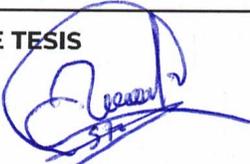
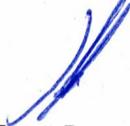
**HUGO ESTRADA ESQUIVEL
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE
INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

Sirva la presente, para informarle que los abajo firmantes, integrantes del comité tutorial de la estudiante Cecilia Guadalupe Díaz Valerio, inscrita al cuarto semestre del programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica en el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (TecNM/CENIDET) con número de matrícula M20CE074, otorgamos nuestro aval para que ella realice una estancia de movilidad en el Instituto Tecnológico de Hermosillo del 01 de junio al 01 de agosto de 2022.

Esta estancia, se realizará en el marco del tema de tesis que Cecilia Guadalupe desarrolla actualmente en CENIDET, bajo la supervisión del Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza.

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y Tecnología al Servicio de México"*

<p>DIRECTOR DE TESIS</p>  <p>Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza</p>	<p>CODIRECTOR DE TESIS</p>  <p>Dr. Juan Reyes Reyes</p>
<p>REVISOR 1</p>  <p>Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo</p>	<p>REVISOR 2</p>  <p>Dr. Enrique Quintero Mármol-Márquez</p>

ccp. Dr. Jarniel García Morales. Presidente del Consejo de Posgrado



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos
Tel. 01 (777) 3627770, ext. 2225, e-mail: die@cenidet.tecnm.mx | cenidet.tecnm.mx





Cuernavaca, Mor.,
No. De Oficio:
Asunto:

24/mayo/2022
SAC/72/2022
Autorización de
impresión de tesis

CECILIA GUADALUPE DÍAZ VALERIO
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado “**Estudio del Comportamiento Dinámico del Sistema Circulatorio para Fines de Control**”, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

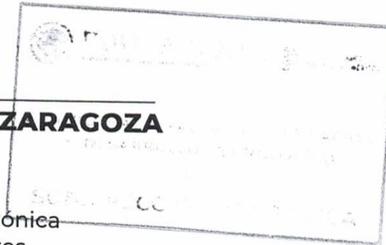
Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
“Educación Tecnológica al Servicio de México”

DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares



CMAZ/CHG



Dedicatoria

Dedico el presente trabajo:

A Dios, por darme la sabiduría, entendimiento y ciencia, para poder salir adelante y apoyarme en todo momento, así como también, por no dejarme sola y guiarme por el camino correcto.

A mis padres Arturo y Guillermina, por el amor, la confianza, los valores, por apoyarme en cada momento a no darme por vencida y ser el mejor ejemplo en mi vida, ya que sin sus consejos no hubiera sido posible este logro mas en mi vida.

A mis hermanas Ángeles y Rosario, por apoyarme en cada momento a no darme por vencida, por esas palabras correctas en el momento adecuado, tengan siempre presente que las amo.

Al gran amor de mi vida Julio, por el apoyo, la paciencia y el amor que siempre me ha dado, por decirme las palabras correctas en el momento adecuado.

Agradecimientos

Agradezco:

A mis asesores, el Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza y el Dr. Juan Reyes Reyes, personas excepcionales, con un talento enorme, capacidad de trabajo y generosidad, por cada una de sus enseñanzas que desde que los conocí siempre me enseñaron cosas nuevas.

A mis revisores, Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo y Enrique Quintero Mármol Márquez, por sus consejos y observaciones realizadas para la realización de este trabajo de investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

A mis profesores, Dr. Astorga, Dr. Juan Reyes, Dra. Gloria, Dr. Carlos Daniel, Dr. Guerrero, Dr. Madrigal, Dr. Quintero, Dr. Manuel Adam, que durante el desarrollo de mi formación académica estuvieron guiándome y apoyándome.

A mis compañeros y amigos del CENIDET, Carlos, Uriel, Fernando, Randy, Emilio, Dulce, Erick, Oscar, David, Semadar, con quienes desde casa derivado de la pandemia por COVID-19 nos toco compartir tareas, vídeo llamadas, desvelos y proyectos, y que regresando a la escuela tuve el gusto de conocerlos y emprender el resto del camino juntos.

Al Dr. Omar, Dra. Eusebia, Dr. Guillermo, que me recibieron con los brazos abiertos para realizar una estancia académica en el TecNM campus Hermosillo, Sonora. Gracias por cada uno de sus conocimientos brindados.

A mis padres, por su cariño, paciencia y por cada uno de los consejos que me han dado a lo largo de mi vida, los cuales sin duda me han servido a crecer como persona. Un agradecimiento muy especial a Julio, por estar siempre conmigo, ayudarme y apoyarme, pero sobre todo te agradezco por todo el amor que siempre me has dado.

A mi maestro y amigo Carlos Alberto, gracias porque desde que nos conocimos tuvimos la oportunidad de trabajar juntos, siempre brindome su ayuda, confianza y amistad.

Finalmente, agradezco al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por brindarme los medios necesarios para culminar con éxito mis estudios de maestría y por cada una de las atenciones brindadas durante mi estancia académica.

Resumen

En este trabajo de investigación se presenta el estudio del sistema cardiovascular con la implementación de un dispositivo de asistencia de ventricular izquierda. Con el fin de facilitar el diseño de observadores de estado y la estimación de los estados del sistema, se analiza cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón.

La tesis presenta el diseño y simulación de observadores dinámicos generalizados para la estimación de los estados del sistema. De igual forma, se presentan observadores funcionales dinámicos generalizados (GDFO, por sus siglas en inglés Generalized Dynamic Functional Observer) para sistemas tipo cuasi-LPV (q-LPV). Se presentan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de este tipo de observador, mediante el uso de desigualdades lineales matriciales (LMI's por sus siglas en inglés Linear Matrix Inequalities), se realiza este observador con el objetivo de poder cerrar el lazo de control del sistema.

Posteriormente, los observadores diseñados se validaron por medio de simulaciones numéricas, utilizando como referencia las señales de presión y parámetros reportados en la literatura.

Después, se propone una representación híbrida del sistema cardiovascular en conjunto con un dispositivo de asistencia ventricular para sistemas cuasi-LPV (Modelo híbrido: sistemas q-LPV conmutados), este tipo de representación tiene como objetivo conocer el comportamiento general del sistema cardiovascular, esto se logra mediante la conmutación de cada una de las fases del ciclo cardíaco, es de mencionar que, cada una de estas fases tiene un tiempo específico de participación durante todo el ciclo cardíaco.

Finamente, se presenta un controlador proporcional-integral con el fin de poder regular la presión aórtica, este tipo de controlador se realiza para cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón.

Abstract

This research work presents the study of the cardiovascular system with the implementation of a left ventricular assist device. In order to facilitate the design of state observers and the estimation of the states of the system, each of the phases of the cardiac cycle of the heart is analyzed.

The thesis presents the design and simulation of generalized dynamic observers for the estimation of system states. Similarly, Generalized Dynamic Functional Observers (GDFO) for quasi-LPV (q-LPV) type systems are presented. The necessary and sufficient conditions for the existence of this type of observer are presented, through the use of linear matrix inequalities (LMI's), this observer is carried out with the objective of being able to close the control loop of the system.

Subsequently, the designed observers were validated through numerical simulations, using the pressure signals and parameters reported in the literature as a reference.

Then, a hybrid representation of the cardiovascular system is proposed in conjunction with a ventricular assist device for quasi-LPV systems (Hybrid model: switched q-LPV systems), this type of representation aims to know the general behavior of the cardiovascular system, this It is achieved by switching each of the phases of the cardiac cycle, it is worth mentioning that each of these phases has a specific time of participation throughout the cardiac cycle.

Finally, a proportional-integral controller is presented in order to be able to regulate the aortic pressure, this type of controller is carried out for each of the phases of the cardiac cycle of the heart.

Índice general

Índice general	VI
Índice de figuras	X
Índice de tablas	XI
Notación y acrónimos	XII
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Justificación	3
1.3 Hipótesis	3
1.4 Objetivos	4
1.4.1 Objetivo general	4
1.4.2 Objetivos específicos	4
1.5 Fisiología del sistema cardiovascular	4
1.5.1 El corazón	4
1.5.2 Válvulas del corazón	5
1.5.3 Circulación sanguínea	6
1.5.4 Presión arterial	8
1.5.5 Compliancia	8
1.6 Dispositivo de asistencia ventricular (<i>VAD</i>)	9
1.7 Estado del arte	10
1.7.1 Modelado del Sistema Cardiovascular incorporando un Dispositivo de Asistencia Ventricular (<i>VAD</i>)	10
1.7.2 Control de un Dispositivo de Asistencia Ventricular (<i>VAD</i>)	12
1.8 Organización del documento	15
2 Modelado del Sistema Cardiovascular con un Dispositivo de Asistencia Ventricular Izquierda	16
2.1 Modelo matemático del sistema cardiovascular	17
2.1.1 Estudio del ventrículo izquierdo	18
2.1.2 Modelos de la circulación sistémica	19
2.1.2.1 Modelos distribuidos	19
2.1.2.2 Modelos Windkessel	20
2.1.2.3 Circulación pulmonar	21

2.1.3	Válvula Mitral y Aórtica	21
2.1.4	Modelo en espacio de estado	22
2.1.5	Modelo general del sistema cardiovascular	22
2.2	Modelado del SCV con el LVAD por cada fase del ciclo cardíaco	25
2.2.1	Fases del ciclo cardíaco	25
2.2.2	Modelo RLC del sistema cardiovascular implantando un LVAD	26
2.2.2.1	Modelo de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo	31
2.2.2.2	Modelo de la Fase de Eyección	32
2.2.2.3	Modelo de la Fase Contracción/Relajación isovolumétrica	34
2.3	Observadores	35
2.3.1	Clasificación de observadores por orden.	36
2.3.2	Clasificación de observadores por su estructura.	37
2.3.2.1	Observador tipo Luenberger	37
2.3.2.2	Observador proporcional (PO)	37
2.3.2.3	Observador Dinámico Generalizado (GDO)	38
2.4	Sistemas lineales de parámetros variables (LPV)	39
2.4.1	Representación de los sistemas LPV	41
2.4.2	Obtención de la formulación LPV	41
2.4.2.1	Linealizando en diferentes puntos de operación	41
2.4.2.2	Modelo politópico a partir de un modelo LPV	42
2.4.3	Sistemas cuasi-LPV (q-LPV)	43
2.4.3.1	Considerando las no linealidades de un modelo no lineal	44
2.4.4	Obtención de las funciones de ponderación	44
2.4.5	Propiedades de los sistemas LPV	45
2.4.5.1	Estabilidad	45
2.4.5.2	Observabilidad	46
2.5	Caso de estudio: Obtención y simulación del modelo cuasi-LPV (q-LPV) del sistema cardiovascular	47
2.5.1	Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo	47
2.5.2	Fase de Eyección	49
2.5.3	Fase de Contracción/Relajación isovolumétrica	52
2.5.4	Simulación 1. Modelo cuasi-LPV de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo	55
2.5.5	Simulación 2. Modelo cuasi-LPV (q-LPV) de la Fase Eyección	56
2.5.6	Simulación 3. Modelo cuasi-LPV (q-LPV) de la Fase Contracción/Relajación Isovolumétrica	56
2.6	Conclusiones del capítulo	61

3 Diseño de observadores aplicados a cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón **62**

3.1	Diseño del observador dinámico generalizado para la estimación de los estados del sistema cardiovascular	63
3.1.1	Planteamiento del problema	63
3.1.2	Parametrización de las matrices del observador	65
3.1.3	Análisis de estabilidad del observador	69

3.2	Diseño del Observador Funcional Dinámico Generalizado (<i>GDFO</i>) para la estimación de una ley de control	70
3.2.1	Planteamiento del problema	71
3.2.2	Parametrización de las matrices del observador	73
3.2.3	Análisis de estabilidad del observador	74
3.3	Determinación de la función lineal	75
3.4	Conclusiones del capítulo	77
4	Estimación de variables del sistema cardiovascular y control de un LVAD	78
4.1	Estimación de los estados del sistema cardiovascular con la implementación de un LVAD	79
4.1.1	Simulación 4. Estimación de los estados del sistema para la fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo	79
4.1.2	Simulación 5. Estimación de los estados del sistema para la Fase de Eyección a partir de un observador dinámico generalizado	89
4.1.3	Simulación 6. Estimación de los estados del sistema para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica a partir de un observador dinámico generalizado	91
4.2	Representación en forma híbrida del sistema cardiovascular	94
4.2.1	Modelo híbrido: sistemas q-LPV conmutados	97
4.2.2	Simulación 7. Simulación del modelo híbrido: sistemas q-LPV conmutados con observador	97
4.3	Estimación de una ley de control a partir de un observador funcional dinámico generalizado	100
4.3.1	Simulación 8. Estimación de una ley de control para la fase de llenado del ventrículo izquierdo	100
4.3.2	Simulación 9. Estimación de una ley de control para la Fase de Eyección	103
4.3.3	Simulación 10. Estimación de una ley de control para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica	106
4.4	Cálculo de un controlador PI para regular la presión aórtica	109
4.4.1	Generalidades de un control PI	109
4.4.2	Extensión al caso LPV	110
4.4.3	Simulación 11. Regulación de la presión aórtica para la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo	111
4.4.4	Simulación 12. Regulación de la presión aórtica para la Fase de Eyección	113
4.4.5	Simulación 13. Regulación de la presión aórtica para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica	114
4.5	Conclusiones del capítulo	116
5	Conclusiones	117
5.1	Conclusiones generales	117
5.2	Ventajas y Limitaciones	118
5.3	Trabajos futuros	119
	Bibliografía	120

Índice de figuras

1.1	Partes del corazón	5
1.2	Válvulas del corazón	6
1.3	Representación idealizada del sistema cardiovascular [Díaz-Valerio et al., 2020]	7
1.4	Representación en circuito cerrado del sistema circulatorio. El color rojo representa la sangre oxigenada y el color azul el flujo de sangre sin oxígeno [Díaz-Valerio et al., 2020]	8
1.5	Clasificación de los VAD	10
2.1	Subsistemas y elementos del sistema cardiovascular	17
2.2	Función de Elastancia	19
2.3	Modelo Windkessel de cuatro elementos	20
2.4	Representación eléctrica de las válvulas	21
2.5	Modelo RLC de parámetros agrupados del sistema cardiovascular	23
2.6	Diagrama de Wiggers	26
2.7	Modelo combinado del SCV y el LVAD	27
2.8	Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo	31
2.9	Fase de Eyección	33
2.10	Fase Contracción/Relajación isovolumétrica	34
2.11	Esquema general de un observador	36
2.12	Diagrama del observador tipo Luenberger	38
2.13	Diagrama del observador proporcional	39
2.14	Diagrama del observador dinámico generalizado	40
2.15	Gráfica de las funciones de ponderación	55
2.16	Comparación del modelo no lineal con el modelo cuasi-LPV. Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo.	58
2.17	Comparación del modelo no lineal con el modelo cuasi-LPV. Fase de Eyección.	59
2.18	Comparación del modelo no lineal con el modelo cuasi-LPV. Fase Contracción/Relajación isovolumétrica.	60
3.1	Diagrama general del observador funcional dinámico generalizado para la estimación de una ley de control	71
3.2	Ubicación de polos mediante una región LMI circular	77
4.1	Estimación de los estados de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo.	88
4.2	Estimación de los estados de la Fase de Eyección.	90
4.3	Estimación de los estados de la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica.	93
4.4	Secuencia de conmutación de los modelos.	94

4.5	Conmutación de cada una de las fases del sistema cardiovascular con el Observador Dinámico Generalizado	99
4.6	Estados de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo a partir de una ley de control por retroalimentación de los estados.	102
4.7	Estados de la Fase de Eyección a partir de una ley de control por retroalimentación de los estados.	105
4.8	Estados de la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica a partir de una ley de control por retroalimentación de los estados.	108
4.9	Esquema de control para un controlador PI	109
4.10	Control de la presión aórtica para la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo . . .	112
4.11	Comparación de la ley de control para la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo .	112
4.12	Control de la presión aórtica para la de Fase de Eyección	114
4.13	Comparación de la ley de control para la Fase de Eyección	114
4.14	Control de la presión aórtica para la de Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica	115
4.15	Comparación de la ley de control para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica	116

Índice de tablas

Tabla 2.1	Apertura y cierre de los diodos	23
Tabla 2.2	Parámetros del circuito RLC [Son et al., 2019d]	29
Tabla 4.1	Tiempos de intervención de cada una de las fases del ciclo cardíaco	97

Notación y acrónimos

Notación

\mathbb{R}	Conjunto de números reales.
\mathbb{R}^n	Conjunto de vectores reales de dimensión n .
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjunto de vectores reales de dimensión $n \times n$.
$A < 0$	Matriz real A simétrica negativa definida.
$A > 0$	Matriz real A simétrica positiva definida.
A^T	Transpuesta de la matriz A .
A^{-1}	Inversa de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$.
$\text{rank}(A)$	Rango de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
$\det(A)$	Determinante de la matriz A .
$\text{ones}_{n \times m}$	Matriz de dimensión $n \times m$, donde todos sus elementos son 1.
A^+	Inversa generalizada de la matriz A , verificando que $AA^+A = A$

Acrónimos

LMI	Desigualdad matricial lineal.
GDFO	Observador funcional dinámico generalizado (<i>Generalized Dynamic Functional Observer</i>).
GDO	Observador dinámico generalizado (<i>Generalized Dynamic Observer</i>).
PI	Proporcional-Integral (<i>Proportional-Integral</i>).
SCV	Sistema cardiovascular.
VAD	Dispositivo de Asistencia Ventricular.
LVAD	Dispositivo de Asistencia Ventricular Izquierda.
mmHg	milímetro de mercurio.

Introducción

El sistema cardiovascular (SCV) es el encargado de conducir el oxígeno y nutrientes al cuerpo, eliminar los desechos de las células y transportar sustancias de una parte a otra en el organismo por medio de la sangre a través de venas y arterias. El corazón actúa como una bomba que impulsa la sangre hacia los órganos, tejidos y células del organismo. La sangre suministra oxígeno y nutrientes a cada célula, además, recoge el CO_2 que constituye un producto de desecho, desde el cuerpo hacia los pulmones.

Para que el corazón logre bombear correctamente la sangre, debe existir coordinación entre estos movimientos. Existen numerosas enfermedades del corazón, mismas que alteran la coordinación de estos movimientos.

También, es bien conocido que el sedentarismo y una dieta con alta densidad calórica, son la causa principal de un índice de masa corporal elevado, que se traduce en el principal factor de riesgo para numerosas enfermedades no transmisibles tales como obesidad, hipertensión, diabetes, enfermedad renal crónica, enfermedad vascular cerebral, enfermedades del sistema cardiovascular y digestivo, entre otras. De acuerdo con la Secretaría de Salud, las enfermedades cardiovasculares son una de las causas más frecuentes de mortandad no solo en México, sino en el mundo. En 2015 se registraron 17.7 millones de muertes por esta causa según la Organización Mundial de Salud [OMS, 2022], cifra que representa el 31 % de todas las muertes registradas en el mundo.

Por otra parte, debido a la falta de donantes de corazón, actualmente ha surgido la idea respecto al esfuerzo mundial por tener un corazón artificial. Esta idea nace desde hace 50 años, pero estos prototipos son de alto costo, por lo tanto, se optó por el desarrollo de dispositivos de asistencia ventricular.

Los dispositivos de asistencia ventricular (*VAD*) se han diseñado para el tratamiento de diversas situaciones que comprometen la vida del paciente siempre en el contexto de una disfunción ventricular grave. Se trata de modelos de aparatos muy diferentes entre sí en cuanto al diseño, modo de funcionamiento, durabilidad, técnica y lugar de implantación o costo.

Este tipo de dispositivos se han desarrollado con el objetivo de tratar o rehabilitar a pacientes con compromiso circulatorio agudo severo o insuficiencia crónica terminal. Hay varios modelos que se diferencian en aspectos como el diseño, tecnología de bomba/accionamiento, durabilidad, técnicas de implantación o costo. Por tal motivo, el análisis aquí será necesariamente parcial y esquemático y solo se dará una visión global.

En este proyecto de investigación se abordará el tema de dispositivos de asistencia ventricular (*VAD*), para los cuales, se analizará el modelo matemático tanto del dispositivo de asistencia ventricular como el del sistema cardiovascular para que en conjunto se diseñe un algoritmo de control basado en observador para la regulación de la presión de un dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*).

1.1. Planteamiento del problema

Las enfermedades cardiovasculares representan la primera causa de muerte en el mundo. En México 162 mil personas mueren a causa de enfermedades cardiovasculares anualmente, 88 mil de ellos por enfermedad isquémica del corazón y 34 mil por enfermedades cerebrovasculares. Sin embargo, a nivel nacional no se cuentan con dispositivos no invasivos para la detección de anomalías del funcionamiento del sistema cardiovascular. Por lo tanto, solo se hace uso de instrumentos que pueden ser invasivos para el paciente, así como también otros instrumentos, que por su complejidad, los mismos pacientes no pueden entender el problema que puedan padecer.

Las enfermedades cardiovasculares son un campo de conocimiento muy amplio, por ello es de gran importancia el estudio y supervisión del comportamiento del corazón basándose en un modelo matemático mediante el cual se lleve a cabo un análisis de mediciones no invasivas que permitan detectar irregularidades en la actividad del corazón con la implementación de un dispositivo de asistencia ventricular.

Un dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*) puede ayudar a bombear sangre del lado izquierdo, del lado derecho o de ambos lados del corazón, según el tipo de insuficiencia cardíaca que se tenga. Estos pueden usarse como tratamiento temporal o a largo plazo para una insuficiencia cardíaca grave. Un (*VAD*) puede usarse solamente por un tiempo breve si el corazón de una persona se vuelve a fortalecer y es capaz de bombear sangre lo suficientemente bien por sí mismo. Los (*VAD*) pueden usarse para ayudar a las personas que están esperando un trasplante de corazón.

Por otro lado, existen una gran cantidad de fallas que pueden provocar que los (*VAD*) no funcionen de manera correcta, algunas de ellas son: la acción de bombeo del dispositivo podría funcionar de forma incorrecta, haciendo que la cantidad de sangre bombeada a través del corazón no sea suficiente y con ello ocasione que el corazón no funcione de manera correcta. Otra falla se puede presentar cuando existe un taponamiento por parte de las mangueras que bombean la sangre. Una falla que es fatal es cuando el rotor de la bomba no funciona correctamente, provocando que la sangre no se pueda bombear.

En la literatura se han propuesto modelos matemáticos representativos para este tipo de (*LVAD*), estas representaciones matemáticas son utilizadas para analizar la relación entre las variables del sistema las cuales son difíciles de observar en la realidad. También, se ha propuesto el uso de observadores para la detección y localización de fallas en los dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) [Siewnicka and Janiszowski, 2018].

1.2. Justificación

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), el estilo de vida se basa en patrones de comportamiento entre las características personales individuales, las interacciones sociales, las condiciones de vida socioeconómicas y padecimientos médicos, entre otros.

Las enfermedades cardiovasculares se consideran como una de las causas más frecuentes de padecimiento médico y tienen como consecuencia el impacto negativo en la vida de una persona. Éstas se manifiestan de varias maneras: la arteriosclerosis (arterias bloqueadas), presión arterial alta, arritmias (ritmos anormales de latidos del corazón), aneurismas (inflamación de la pared arterial con riesgo a romperse), valvulopatías, entre otras.

Por otra parte, el uso de dispositivos de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) es altamente costoso, debido a que los componentes que lo conforman son muy especializados. Por otra parte, estos dispositivos son utilizados con mayor frecuencia, debido a los escasos donantes de un corazón. Por esta razón, es importante conocer el funcionamiento de este tipo de dispositivos para poder contribuir con algoritmos de control que mejoren el funcionamiento de éste. Además, con la realización de este tipo de algoritmos se busca contar con un sistema de control basado en un observador que permita supervisar el comportamiento del (*LVAD*), con la finalidad de detectar las fallas que pueda presentar este tipo de dispositivo una vez que es implantado en un corazón humano. De igual forma, el poder conocer tanto el comportamiento del controlador implementado como el del (*LVAD*) y del sistema cardiovascular con el sistema de supervisión basado en observador, será posible la detección de fallas en estos tres actuadores y con ello generar una posible alerta de falla.

1.3. Hipótesis

Mediante el control de la presión sanguínea basado en observador, se podrá asegurar el funcionamiento correcto de un (*LVAD*), debido a que, al tener conocimiento de los estados del sistema, este regulador presentará una mejor respuesta.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Diseñar un algoritmo de control basado en un observador para un dispositivo de asistencia ventricular con el fin de regular el flujo sanguíneo y la presión.

1.4.2. Objetivos específicos

- Analizar el comportamiento dinámico del sistema cardiovascular, mediante el uso de modelos matemáticos propuestos en la literatura.
- Diseñar un observador dinámico generalizado para estimar las variables no medibles del sistema cardiovascular.
- Diseñar un algoritmo de control para la regulación de la presión a la salida de un LVAD, basado en un observador funcional dinámico generalizado.

1.5. Fisiología del sistema cardiovascular

En medicina regularmente suele emplearse el término de sistema para referirse a una estructura organizada de componentes que mantienen interrelaciones. Estos componentes pueden ser físicos o simbólicos. Cardiovascular, por su parte, es un término vinculado al corazón y al aparato circulatorio.

El sistema cardiovascular es el conjunto de órganos encargados de la circulación de los líquidos corporales, está compuesto por el corazón: músculo hueco situado en el tórax dividido por cuatro cavidades y por los vasos sanguíneos: una red de venas, arterias y capilares que suministran oxígeno desde los pulmones a los tejidos de todo el cuerpo a través de la sangre gracias al bombeo del corazón.

De igual manera, el sistema cardiovascular distribuye oxígeno, hormonas, nutrientes y otras sustancias importantes para las células y los órganos del cuerpo. Cumple una función importante de apoyo al cuerpo a satisfacer las demandas necesarias ante alguna actividad, ejercicio y estrés. También ayuda a mantener la temperatura corporal haciendo los ajustes necesarios cuando se alteran los estados fisiológicos del sistema, entre otras cosas.

1.5.1. El corazón

El corazón es el músculo que bombea la sangre rica en oxígeno y nutrientes a los tejidos del cuerpo a través de los vasos de la sangre. Éste mantiene la sangre en movimiento en el cuerpo de forma

unidireccional, funciona como un circuito cerrado. Los atrios reciben la sangre que vuelve al corazón, los ventrículos bombean la sangre del corazón hacia fuera [Cruz and Calderón, 2016]. Por otra parte, las arterias transportan la sangre oxigenada desde el corazón hacia los tejidos del cuerpo. En los tejidos se extraen los nutrientes y la sangre vuelve al corazón a través de las venas. Por otra parte, el sistema eléctrico del corazón controla la velocidad de los latidos.

El corazón tiene cuatro cavidades (dos aurículas y dos ventrículos). Hay un tabique (septo o septum) entre las dos aurículas y otro entre los dos ventrículos. Las arterias y las venas entran y salen del corazón. Las arterias llevan la sangre hacia afuera del corazón y las venas la llevan hacia adentro (ver Figura 1.1). El flujo de sangre a través de los vasos y las cavidades del corazón es controlado por válvulas. El lado derecho del corazón bombea sangre desoxigenada desde el cuerpo a los pulmones, donde recibe nuevo oxígeno. El lado izquierdo del corazón bombea sangre oxigenada de los pulmones al resto del cuerpo [Company and Education, 2020].

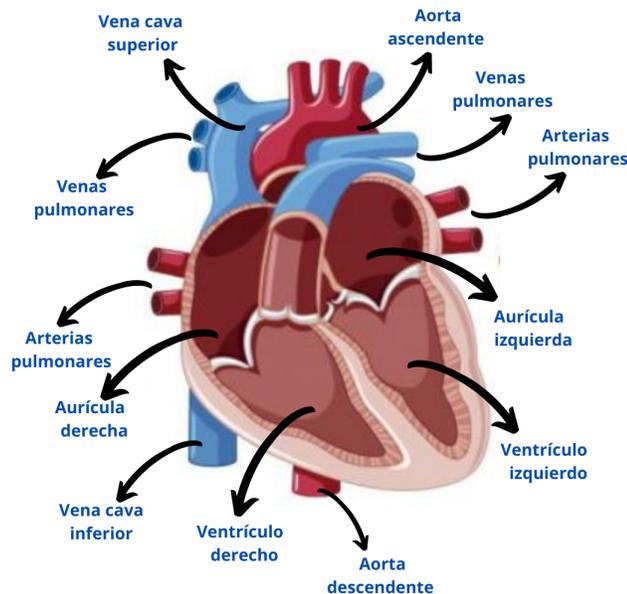


Figura 1.1. Partes del corazón

En un corazón normal no existe comunicación sanguínea entre la parte derecha e izquierda del corazón, debido a que el septum interauricular separa a las aurículas y el septum interventricular separa a los ventrículos.

1.5.2. Válvulas del corazón

El corazón consta de cuatro cavidades: dos aurículas (cavidades superiores) y dos ventrículos (cavidades inferiores). La sangre pasa a través de una válvula antes de salir de cada cavidad del corazón.

Las válvulas evitan el retroceso del flujo de sangre (ver Figura 1.2).

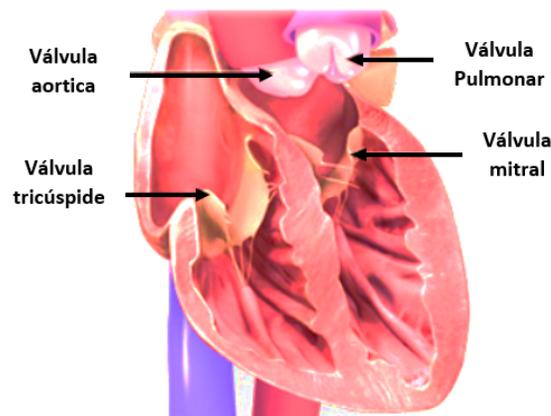


Figura 1.2. Válvulas del corazón

A medida que el músculo del corazón se contrae y se relaja, las válvulas se abren y cierran, dejando entrar el flujo de sangre a los ventrículos y las aurículas en forma alternada. Las cuatro válvulas del corazón son:

Válvula tricúspide: controla el flujo sanguíneo entre la aurícula derecha y el ventrículo derecho.

Válvula pulmonar: controla el flujo sanguíneo del ventrículo derecho a las arterias pulmonares, las cuales transportan la sangre a los pulmones para oxigenarla.

Válvula mitral: permite que la sangre rica en oxígeno proveniente de los pulmones pase de la aurícula izquierda al ventrículo izquierdo.

Válvula aórtica: permite que la sangre rica en oxígeno pase del ventrículo izquierdo a la aorta, la arteria más grande del cuerpo, la cual transporta la sangre al resto del organismo.

1.5.3. Circulación sanguínea

La circulación sanguínea que realiza el corazón se considera como un circuito cerrado, en la cual intervienen todas las partes que conforman al corazón, el sistema arterial y el sistema venoso.

El sistema circulatorio está formado por vasos sanguíneos que transportan sangre desde el corazón y hacia el corazón. Las arterias transportan la sangre desde el corazón al resto del cuerpo, y las venas la transportan desde el cuerpo hasta el corazón (ver Figura 1.3).

El sistema circulatorio lleva oxígeno, nutrientes y hormonas a las células y elimina los productos de desecho, como el dióxido de carbono, entre otros. El recorrido que sigue la sangre siempre va en la misma dirección. La sangre siempre debe circular para mantener la vida. Transporta oxígeno

del aire que respiramos a las células en todo el cuerpo. El bombeo del corazón mantiene en movimiento este flujo sanguíneo a través de las arterias, los capilares y las venas [Guyton et al., 1969] y [Vay and Laska, 2008].

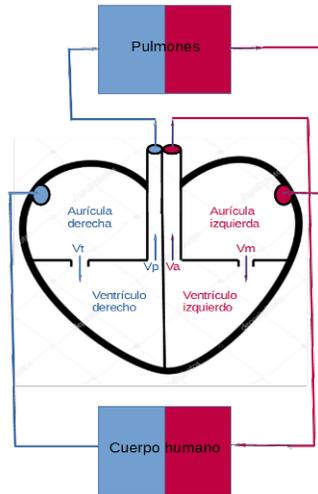


Figura 1.3. Representación idealizada del sistema cardiovascular [Díaz-Valerio et al., 2020]

De manera breve, el circuito hidráulico de la sangre en el sistema cardiovascular se desarrolla de la siguiente forma:

1. La sangre rica en oxígeno proveniente de los pulmones ingresa a la aurícula izquierda del corazón.
2. La sangre pasa al ventrículo izquierdo a través de la válvula mitral (etiquetada como V_m en la Figura 1.3).
3. La sangre rica en oxígeno es expulsada del corazón, a través de la válvula aórtica (etiquetada como V_a en la Figura 1.3), hacia el cuerpo humano, donde gradualmente pierde oxígeno.
4. La sangre pobre en oxígeno regresa al corazón, ingresando a la aurícula derecha.
5. La sangre pasa al ventrículo derecho a través de la válvula tricúspide (etiquetada como V_t en la Figura 1.3).
6. La sangre pobre en oxígeno es expulsada del corazón, a través de la válvula pulmonar (etiquetada como V_p en la Figura 1.3), hacia los pulmones, donde se renueva en oxígeno.
7. Se repite el ciclo.

Lo anterior, de igual manera se observa en la Figura 1.4, donde se tiene la representación de un circuito cerrado del funcionamiento del sistema circulatorio.

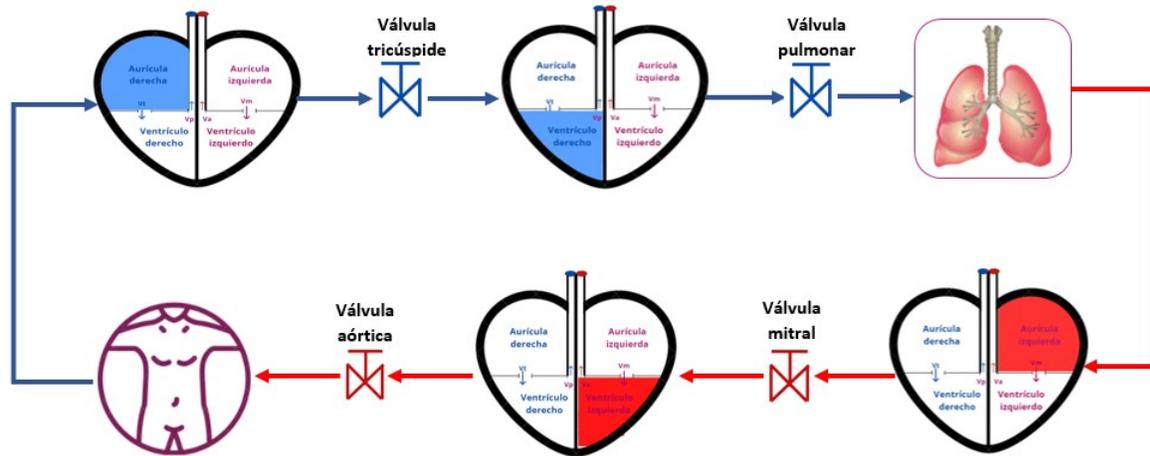


Figura 1.4. Representación en circuito cerrado del sistema circulatorio. El color rojo representa la sangre oxigenada y el color azul el flujo de sangre sin oxígeno [Díaz-Valerio et al., 2020]

1.5.4. Presión arterial

La sangre se impulsa debido a la diferencia de presiones que se ejerce dentro del corazón. Esta fuerza de empuje es el único impulso con que la sangre ha de recorrer todo el circuito vascular para poder retornar al corazón. La presión está determinada por el volumen de sangre que contiene el sistema arterial y por las propiedades de las paredes vasculares, si varía cualquiera de los dos parámetros anteriormente mencionados, la presión se verá modificada. La presión (P) en el sistema cardiovascular se expresa en milímetros de mercurio ($mmHg$). Existen dos tipos de presiones arteriales las cuales son:

- *Presión arterial sistólica (PAS)*, la cual está determinada por el impulso cardíaco generado por las contracciones del ventrículo izquierdo.
- *Presión arterial diastólica (PAD)*, esta presión depende de las resistencias que oponen las arterias al paso de la sangre.

1.5.5. Compliancia

La compliancia C se define como un cambio de volumen por unidad de cambio de presión, además, esta delimita la capacidad de distensión en los tejidos elásticos. Así pues, se puede definir de manera general como la tasación de la propiedad de un órgano hueco el cual le permite el alargamiento o distensión en resistencia al retorno hacia sus dimensiones originales de órgano que se esté tratando.

Por otro lado, usualmente las arterias y venas tienden al estiramiento, esto en respuesta a la presión que es ejercida sobre ellas. Por tanto, la compliancia venosa es de 24 veces mayor que la distensibilidad arterial. La compliancia expresa esta relación existente entre el cambio de volumen y presión, la cual está dada por la Ec. (1.1). En ella se establece que cuando mayor sea la distensibilidad de un vaso, mayor será el volumen.

$$C = \frac{V}{\Delta P} \quad (1.1)$$

donde: C es la compliancia, V volumen del ventrículo y P es la presión ejercida en el ventrículo.

1.6. Dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*)

Un dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*), también conocido como "dispositivo de asistencia circulatoria mecánica", es una bomba mecánica implantable que ayuda al corazón a bombear desde las cámaras inferiores del corazón (los ventrículos) hacia el resto del cuerpo. El dispositivo de asistencia ventricular se utiliza cuando una persona tiene un corazón debilitado o insuficiencia cardíaca y está a la espera de un trasplante de corazón.

La cavidad inferior izquierda se denomina ventrículo izquierdo y es la principal cavidad de bombeo del corazón. La cavidad inferior derecha se denomina ventrículo derecho. El sobreesfuerzo de uno de los ventrículos puede producir insuficiencia cardíaca.

Se habla de insuficiencia cardíaca cuando el corazón está debilitado de manera que no puede llenarse ni bombear la sangre en forma eficiente. La aparición y evolución lenta de la insuficiencia cardíaca se debe a los esfuerzos del corazón mismo por compensar su debilitamiento progresivo. El corazón trata de compensar ese debilitamiento aumentando de tamaño, en un intento de contener más sangre y seguir bombeando la misma cantidad de sangre.

Por tanto, un dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*) se puede colocar en el ventrículo izquierdo, el derecho o ambos. Se utiliza con mayor frecuencia en el ventrículo izquierdo. Cuando se coloca en el ventrículo izquierdo, se denomina dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*).

Un dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*) consta de 4 partes:

- Bomba del corazón: conectada al lado izquierdo del corazón; moviliza la sangre desde el corazón hacia el resto del cuerpo. Esta pesa de 1 a 2 libras (0.5 a 1 Kg). Se coloca dentro o fuera del abdomen.
- Controlador electrónico: similar a un microcontrolador pequeño que controla la forma como trabaja la bomba.
- Baterías: se llevan afuera del cuerpo. Van conectadas a la bomba por un cable que entra en el abdomen.
- Cable de conducción: un cable que transfiere energía e información entre el controlador y la bomba del corazón.

Los (*VAD*) actualmente disponibles se han clasificado en tres generaciones en función del orden en que han sido desarrollados. Estos se subdividen por modelos, dependiendo de cada generación,

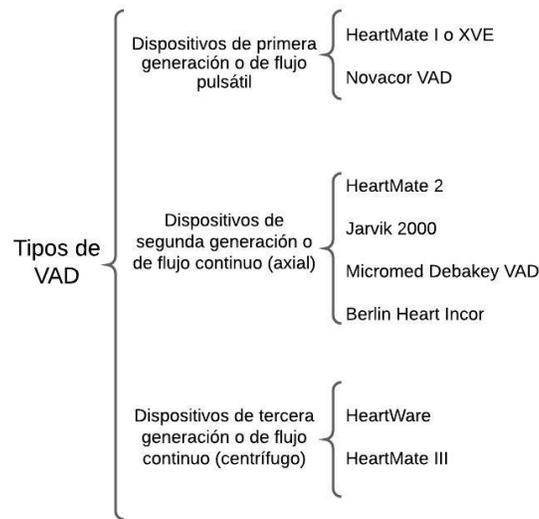


Figura 1.5. Clasificación de los VAD

como se muestra en la Figura 1.5 [Blanchet, 2019].

El implante y uso de un dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*) implica riesgos que podrían incluir [Elescano, 2013]: *i*) coágulos sanguíneos; *ii*) infección; *iii*) mal funcionamiento del dispositivo en relación a la bomba o al control de la misma; *iv*) complicaciones cardíacas; *v*) hemorragias.

1.7. Estado del arte

1.7.1. Modelado del Sistema Cardiovascular incorporando un Dispositivo de Asistencia Ventricular (*VAD*)

Un modelo matemático representa mediante fórmulas matemáticas la relación entre distintas variables, parámetros y restricciones. En [Korakianitis and Shi, 2006] presenta un nuevo modelo de parámetros concentrados para la dinámica cardiovascular que incluye un modelo de la dinámica de las válvulas cardíacas, que está integrado en el modelo general de las cuatro cámaras del corazón y los circuitos de circulación sistémica y pulmonar. Las cámaras del corazón se describen con un modelo de elastancia variable, y las asas sistémicas y pulmonares se describen con modelos de Windkessel modificados. Al modelar la dinámica de la válvula cardíaca, se examinan los diversos factores que influyen en el movimiento de la válvula y se deriva la ecuación diferencial que rige el movimiento de la válvula. El modelo propuesto se utiliza luego en la simulación de ciertas condiciones patológicas saludables como la estenosis de la válvula mitral y la insuficiencia aórtica.

En [Shia et al., 2007] se presenta una comparación de los efectos hemodinámicos de seis formas me-

dianete simulación numérica. Se estudian tres tipos de dispositivos de asistencia ventricular (*VAD*): desplazamiento positivo, impulsor y un diseño de válvula recíproca. De manera similar, se modelan tres modos de bombeo: flujo constante; contrapulsación y copulsión. El sistema cardiovascular se modela utilizando un enfoque desarrollado previamente, utilizando el método de parámetros concentrados al considerar la resistencia al flujo, la elasticidad de los vasos y los efectos inerciales de la sangre en los segmentos individuales del conducto. El modelado dinámico de las bombas de impulsor y de desplazamiento se representa mediante cambios en el caudal de entrada/salida del dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*). La dinámica de la bomba de válvula recíproca se modela con un perfil de desplazamiento específico.

La última generación de (*VAD*) se compone de bombas que son generalmente mucho más pequeñas, más ligeras y más silenciosas que las bombas pulsátiles convencionales. Las bombas rotativas están controladas variando la velocidad del rotor (impulsor). En [Simaan et al., 2009a] se presenta un dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) que puede ayudar a un corazón enfermo a realizar sus funciones. El objetivo principal del controlador que ellos proponen es que el controlador aumente la velocidad de la bomba del (*LVAD*) hasta que la señal de caudal mínimo de la bomba alcance un punto extremo y se mantenga estable.

La representación en espacio de estados, es un modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de cualquier orden en el dominio del tiempo. En [Fragallah et al., 2011] se propone una representación matricial del comportamiento del sistema cardiovascular la cual engloba 5 variables de estado y dos variables de entrada. De igual manera, se propone una representación en espacio de estados pero ahora englobando el (*LVAD*) en el cual la variable de control utilizada es la corriente que circula por la bomba. También, en [Viswajith et al., 2017] se presenta el subsistema biológico que consiste en el ventrículo izquierdo del corazón. Se presenta un modelo matemático para este sistema y se discute cómo se puede modelar la insuficiencia cardíaca congestiva. Posteriormente, se revisa el subsistema mecánico y se presenta un modelo matemático de una bomba genérica utilizada en el (*LVAD*) de flujo continuo. En seguida, se analiza a detalle la relación entre la energía eléctrica proporcionada al motor de la bomba y la velocidad de rotación de la bomba.

En [Díaz-Ledezma, 2012] se presenta un modelo de parámetros agrupados del sistema cardiovascular utilizando un enfoque de sistemas híbridos para incluir un vector de entrada discreto que representa la influencia de las válvulas mitral y aórtica en las diferentes fases del ciclo cardíaco. De igual manera, se presenta la representación matricial de las ecuaciones diferenciales que representan el sistema cardiovascular y la relación entre cada una de ellas para el desarrollo de un observador. En [Simakov et al., 2020] se propone una representación de ecuaciones diferenciales para el (*LVAD*), el cual es comparado con tres bombas utilizando una instalación de circulación simulada y datos conocidos de la bomba HeartMate II. De esta manera, se combina este modelo con un modelo de la hemodinámica en la aorta y el modelo agrupado del corazón izquierdo con dinámica de las válvulas. Este modelo sin bomba está validado con datos conocidos en condiciones normales.

[Son et al., 2019e] investiga cómo la potencia de la bomba del dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) puede afectar los comportamientos dinámicos de la válvula aórtica para dife-

rentes niveles de actividad y diferentes grados de insuficiencia cardíaca. Su objetivo es identificar un valor crítico de la potencia de la bomba (es decir, punto de interrupción) para garantizar que la bomba del (*LVAD*) no asuma la función de bombeo en el sistema cardiovascular y compartir la sangre expulsada con el ventrículo izquierdo para ayudar al corazón a recuperarse. Se muestra la representación matricial de sistema cardiovascular con y sin el (*LVAD*). Posteriormente, realiza la simulación numérica para conocer el comportamiento del mismo.

Posteriormente, en [Son et al., 2019c] se presenta el desarrollo de un controlador de autoajuste de la velocidad de la bomba para satisfacer las demandas fisiológicas de los diferentes niveles de actividad, al tiempo que, se tienen en cuenta las variaciones en la hemodinámica. En primer lugar, se desarrolla un modelo de espacio de estado estocástico utilizando una expansión de caos polinomial generalizado (gPC), que describe las interacciones entre el dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) y el sistema cardiovascular. Además, el modelo puede predecir la variabilidad en el flujo de la bomba para un horizonte de control futuro finito basado en la información disponible actual del flujo de la bomba. La predicción de la varianza se utiliza como criterio de ajuste para actualizar la ganancia del controlador en tiempo real. La eficiencia del algoritmo de control de autoajuste en este trabajo se valida con dos escenarios de casos diferentes, que representan diferentes niveles de actividad para pacientes con insuficiencia cardíaca.

1.7.2. Control de un Dispositivo de Asistencia Ventricular (*VAD*)

La lógica difusa es una metodología que proporciona una manera simple y elegante de obtener una conclusión a partir de información de una entrada vaga, ambigua, imprecisa, con ruido o incompleta. Por tanto, en [Son et al., 2001] se desarrolló un controlador de lógica difusa para un sistema de asistencia ventricular izquierdo turbo dinámico giratorio para optimizar el suministro de flujo sanguíneo sin inducir succión en el ventrículo. El controlador se basa en la pulsatilidad del flujo sanguíneo a través de la bomba y asume que el corazón natural aún puede producir alguna acción de bombeo. Para evitar el uso de transductores de flujo, que no son confiables para uso a largo plazo, el controlador estima el flujo utilizando un modelo del dispositivo de asistencia ventricular *VAD*.

En [Wu et al., 2005a] se presenta el desarrollo de un modelo a través de análisis y soluciones numéricas para aproximar la respuesta del sistema cardiovascular humano, el cual presenta un modelo del sistema que tiene un parámetro crítico variable en el tiempo: la resistencia de los vasos sanguíneos. Además, incluye un esquema de estimación de parámetros que se utiliza para implementar un observador adaptable para estimar la presión aórtica para el control fisiológico.

De acuerdo con [Poyatosa et al., 2019], la presión arterial es la presión que soportan las arterias cuando el corazón bombea sangre; es importante porque si la presión arterial es baja, la sangre no llega a donde debe llegar, y si es muy alta, las arterias se pueden estropear. Desde el punto de vista del control, esta es una tarea bastante complicada debido a los modelos matemáticos que se deberían utilizar, por tanto [Olufsen and Nadim, 2005] propuso un control fisiológico de un (*LVAD*) el cual está relacionado con el control de la presión arterial. En este trabajo, se establece un modelo de espacio de estados del sistema circulatorio humano, en el cual se puede estimar la presión aórtica media. Además, se estudia el error de estimación en presencia de variaciones

de la frecuencia cardíaca, entre la sístole contra la diástole, contractilidad ventricular izquierda, resistencia de los vasos sanguíneos, distensibilidad aórtica.

Un dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*) según [Stern et al., 2011] ayuda a bombear la sangre cuando el corazón no puede bombear suficiente sangre por sí solo. Saca sangre del corazón y la bombea al resto del cuerpo. De esta manera, la mayor parte de la sangre que el corazón bombearía normalmente es en cambio bombeada por el (*VAD*). Por tanto, [Choi et al., 2007] presenta un controlador de índice de pulsatilidad para el dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*), el cual proporciona una perfusión adecuada de acuerdo con las demandas fisiológicas del paciente, evitando condiciones adversas. Utiliza la relación de pulsatilidad del flujo a través de la bomba y la diferencia de presión a través de la bomba como índice de control y ajusta la velocidad de la bomba de acuerdo con la relación de pulsatilidad de referencia en las diferentes condiciones de funcionamiento. De esta manera, el controlador se ajusta a la velocidad de la bomba de acuerdo con la relación de pulsatilidad de referencia y apoya el corazón natural en diversas condiciones de funcionamiento de la bomba. También, en [Son et al., 2019a] se desarrolló un nuevo sistema de control, que involucra dos pasos consecutivos, es decir, el cálculo de un índice de control de pulsatilidad y el ajuste de la velocidad de la bomba para cumplir con el requerimiento de flujo sanguíneo en diferentes condiciones fisiológicas. La estrategia de control puede prevenir la succión, mientras se mantiene el gasto cardíaco deseado. El rendimiento del controlador de retroalimentación se evaluó con simulaciones.

En [Ferreira et al., 2009] se desarrolla un sistema de control para dispositivos rotativos de asistencia ventricular para regular automáticamente la velocidad de bombeo del dispositivo para evitar la succión ventricular. El sistema de control comprende un detector de succión y un controlador de lógica difusa (*FLC*). El detector de succión puede clasificar correctamente los patrones de flujo de la bomba, utilizando un modelo de análisis discriminante (*DA*) que combina varios índices derivados de la señal de flujo de la bomba, para clasificar el estado de la bomba como uno de los siguientes: sin succión (*NS*), succión moderada (*MS*) y succión severa (*SS*). Las puntuaciones discriminantes, que son la salida del detector de succión, se utilizaron como entradas para el (*FLC*). Con base en esta información, el controlador actualiza la velocidad de la bomba, proporcionando al paciente una perfusión de flujo y presión adecuada.

En seguida, en [Bakouri et al., 2015] se propone un nuevo enfoque integrado para modelar y controlar un dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) para lograr una perfusión fisiológica en pacientes con insuficiencia cardíaca (IC). Se desarrolló un modelo matemático sin sensor de un (*LVAD*) para estimar el caudal medio de una bomba. Posteriormente se derivó un algoritmo de control fisiológico avanzado que utiliza el enfoque de control de modo deslizante de colocación de polos (PPSMC) basado en el flujo estimado. Los méritos del enfoque propuesto se han evaluado con diferentes condiciones fisiológicas utilizando un modelo cardiovascular que se desarrolló y validó previamente con datos de dos cerdos sanos.

En [Ruschen et al., 2017] se propone una estrategia de control no pulsátil que amplifica los bucles de control fisiológico nativos restantes que afectan el gasto cardíaco total (CO). La opción de configuración de esta estrategia de control se llama *asistencia*, que se define como la relación promediada en el tiempo del flujo de la bomba y el (CO) total. Al mantener la *asistencia* a un

nivel constante, la carga de trabajo cardíaca se comparte entre el corazón nativo y el dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*), incluso cuando la demanda de flujo sanguíneo está cambiando. La estrategia de control se implementó en una computadora en tiempo real que operaba un (*LVAD*) transvalvular. La asistencia se determina utilizando estimaciones del flujo de la bomba y la tasa de flujo aórtico. Este último se estima con un filtro Kalman extendido basado en las mediciones de presión proporcionadas por sensores de presión ópticos montados en la entrada y salida de la bomba.

Los autores en [Ketelhut et al., 2018] se concentran en mejorar el rendimiento en el control de aprendizaje iterativo óptimo para las normas de los dispositivos de asistencia ventricular izquierda. Para este propósito, el modelo de planta simple utilizado se reemplaza por una versión linealizada por partes de un modelo de sistema cardiovascular no lineal que incluye el dispositivo de asistencia ventricular izquierda. Las simulaciones se llevan a cabo para estudiar la respuesta del controlador a los cambios de precarga y punto de ajuste de volumen diastólico final.

Después, en [Siewnicka and Janiszowski, 2018] se propone un modelo compuesto de un dispositivo de asistencia ventricular (*VAD*). En primer lugar, se modela la forma de onda de la presión de conducción para un funcionamiento inactivo de la unidad de suministro. Después, el flujo sanguíneo se estima en base a la diferencia entre el valor medido de la presión de conducción y el valor modelado para una carrera inactiva. Su objetivo fue modelar la tasa de flujo sanguíneo del dispositivo de asistencia ventricular pulsátil (*VAD*) POLVAD-MEV.

En [Son et al., 2019b] se desarrolla un nuevo sistema de control, que involucra dos pasos consecutivos, es decir, el cálculo de un índice de control de pulsatilidad y el ajuste de la velocidad de la bomba para cumplir con el requerimiento de flujo sanguíneo en diferentes condiciones fisiológicas. La estrategia de control puede prevenir la succión, mientras se mantiene el gasto cardíaco deseado. El rendimiento del controlador de retroalimentación se probó con simulaciones por computadora.

En [Son et al., 2020] se desarrolla un controlador de retroalimentación para ajustar la potencia de bombeo de un dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) sin inducir succión, al tiempo que incorpora variabilidad en la hemodinámica. Para cuantificar eficientemente la variabilidad, se utiliza la teoría del caos polinomial generalizado (gPC) para diseñar un controlador robusto de autoajuste. La eficiencia de este algoritmo de control se ilustra con tres escenarios de casos, cada uno de los cuales representa un cambio específico en la actividad física de los pacientes con insuficiencia cardíaca al tiempo que incorpora variabilidad en hemodinámica. Para cuantificar eficientemente la variabilidad, se utiliza la teoría del caos polinomial generalizado (gPC) para diseñar un controlador robusto de autoajuste.

En la actualidad, existe una gran cantidad de modelos matemáticos representativos del sistema cardiovascular. En [Rapp et al., 2020] se presentan métodos utilizados para evaluar el diseño y las características de rendimiento dinámico de un circuito circulatorio simulado híbrido (hMCL). Una plataforma (hMCL) es un sistema hardware-in-the-loop (HIL) que integra modelos cardiovasculares numéricos simulados en tiempo real con dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) implantables sometidos a prueba. Este enfoque reemplaza los bucles simulados convencionales al combinar hardware físico con sistemas virtuales (modelos simulados) que se comunican a través

de salidas de control y entradas de sensores. Se utilizan métodos experimentales y basados en modelos para evaluar el rendimiento de un hMCL diseñado utilizando actuadores de bobina móvil electromecánicos. De particular interés es la simulación y el control en tiempo real de la presión fisiológica y los caudales experimentados por un dispositivo de asistencia ventricular izquierda (*LVAD*) físico bajo prueba. Para poder evaluar los (*LVAD*) de próxima generación y sus capacidades avanzadas de detección y control, es esencial que el (hMCL) cumpla con los requisitos especificados.

1.8. Organización del documento

En el **Capítulo 1** se mostraron las generalidades de este trabajo de investigación. De igual forma, se presentan algunos conceptos básicos del sistema cardiovascular, para finalizar con una revisión del estado del arte.

En el **Capítulo 2** se presentan los modelos matemáticos del sistema cardiovascular con un dispositivo de asistencia ventricular izquierda correspondientes a cada una de las fases del ciclo cardíaco. Se presenta un estado del arte de los tipos de observadores existentes en la literatura y finalmente, se muestra un panorama general de los sistemas convexos.

En el **Capítulo 3** se presenta el diseño matemático de un Observador Dinámico Generalizado (GDO) y de un Observador Funcional Dinámico Generalizado (GDFO).

En el **Capítulo 4** se presentan las simulaciones de cada uno de los observadores realizados considerando cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón. Además de la implementación de un controlador PI para regular la presión aórtica.

En el **Capítulo 5** presentan las conclusiones.

Modelado del Sistema Cardiovascular con un Dispositivo de Asistencia Ventricular Izquierda

El propósito del siguiente capítulo es presentar el modelo matemático del sistema cardiovascular con un Dispositivo de Asistencia Ventricular Izquierda para con ello conocer el funcionamiento general del sistema. Al mismo tiempo de presentar un análisis para cada una de las fases por las cuales está compuesto el ciclo cardíaco ya que el estudio se realizará para cada una de ellas en el desarrollo de esta tesis. También se presenta la teoría de los sistemas cuasi-lineales de parámetros variables (LPV) ya que cada una de las fases del ciclo cardíaco de representará en este tipo de sistema.

Este capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En la sección 2.1 se presenta el modelo matemático de sistema cardiovascular y cómo se relaciona con cada una de las partes que componen la circulación sanguínea. Este tipo de modelo representa el funcionamiento del sistema cardiovascular por medio de una analogía con elementos electrónicos tales como, resistencias, capacitores, inductores y diodos.

En la sección 2.2 se presenta el modelado del SCV con el LVAD por cada fase del ciclo cardíaco. También se presenta cómo es el funcionamiento de cada una de estas fases.

En la sección 2.3 se presenta una clasificación de los observadores de acuerdo a lo revisado en el estado del arte ya que estos se clasifican según por su estructura o por su orden.

En la sección 2.4 se presenta una generalidad de los sistemas lineales de parámetros variables (LPV) y cómo extrapolarlos de sistemas no lineales a sistemas lineales con enfoque multimodelo. También se presenta el procedimiento matemático para la obtención del mismo.

En la sección 2.5 se presenta un caso de estudio, el cual consiste en la obtención del modelo cuasi-LPV por cada una de las fases por las que compone al ciclo cardíaco.

2.1. Modelo matemático del sistema cardiovascular

Un modelo matemático es un modelo combinado de variables, parámetros, formulas matemáticas y restricciones. Generalmente este tipo de representaciones tienden a tener una representación sencilla de analizar. Cuando se tiene presente un modelo matemático estos suelen ser acompañados de simulaciones numéricas las cuales ayudan a una mejor comprensión de los procesos patológicos y fisiológicos, mediante imágenes médicas y medios no invasivos permitiendo de esta forma la posibilidad de un mejor diagnóstico [Formaggia et al., 2010].

Para realizar un estudio completo de cómo trabaja el sistema cardiovascular se debe realizar un análisis exhaustivo de su funcionamiento empezando desde el ciclo cardíaco hasta su modelado matemático. Por ello, para facilitar el estudio de los sistemas fisiológicos complejos como lo es el sistema cardiovascular, generalmente se divide en sus elementos o subsistemas los cuales son: a) corazón, vasos sanguíneos, sistemas de control, pulmones y la sangre (ver la Fig. 2.1).

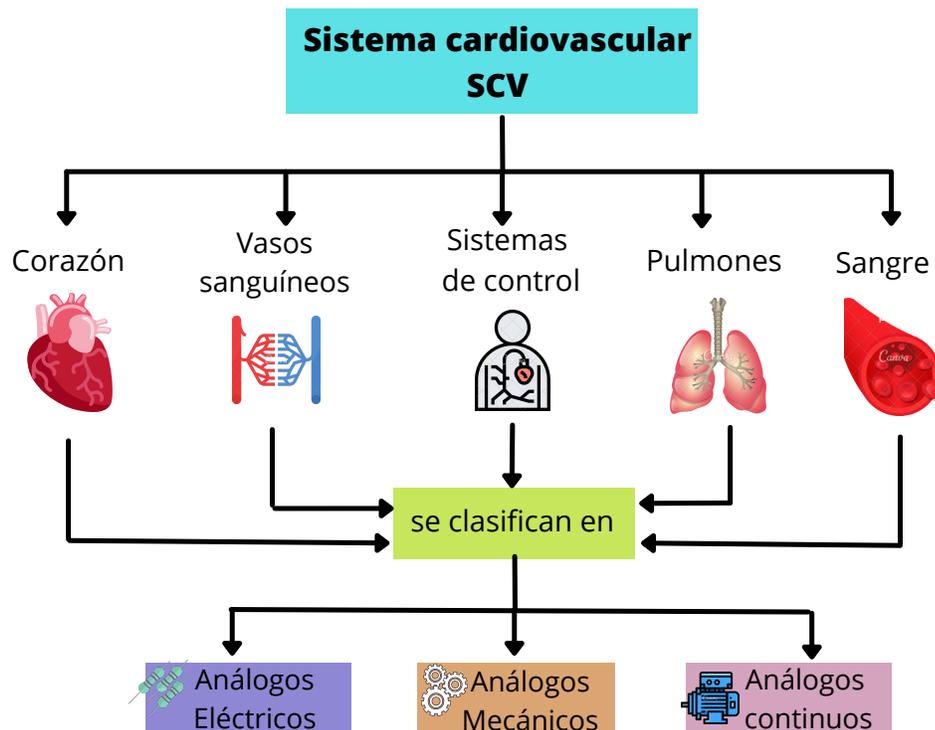


Figura 2.1. Subsistemas y elementos del sistema cardiovascular

Por otra parte, un modelo del sistema cardiovascular debe tener en cuenta tres componentes principales para un correcto análisis:

1. Estudio del ventrículo izquierdo.
2. Modelos de la circulación sistémica.
3. La circulación pulmonar.

2.1.1. Estudio del ventrículo izquierdo

En esta sección se presenta un análisis de cómo funciona el ventrículo izquierdo del corazón para con ello poder comprender cómo se modela el comportamiento de la elastancia del ventrículo izquierdo.

En primera instancia, el ventrículo izquierdo se contrae y relaja impulsado por señales eléctricas del sistema nervioso autónomo. Este proceso de contracción y relajación es el encargado de empujar la sangre desde el corazón hasta la aorta y, por tanto, al resto del cuerpo. El comportamiento del ventrículo izquierdo se puede modelar como una distensibilidad $C(t)$ variable en el tiempo. Esta distensibilidad variable en el tiempo se define como la inversa de la elastancia del ventrículo izquierdo. La *elastancia* es una medida del cambio de presión en el ventrículo izquierdo para un cambio dado en su volumen.

Para este modelo, el comportamiento del ventrículo izquierdo se modela por medio de una capacitancia variable en el tiempo $C(t) = 1/E(t)$ donde $E(t)$ es la elastancia del ventrículo izquierdo. La elastancia $E(t)$ describe la relación entre la presión y el volumen del ventrículo de acuerdo a la expresión [Son et al., 2019e]

$$E(t) = \frac{LVP(t)}{LVV(t) - V_0} \quad (2.1)$$

donde $LVP(t)$ es la presión en el ventrículo izquierdo, $LVV(t)$ es el volumen ventricular izquierdo y V_0 es un volumen de referencia, que corresponde al volumen en el ventrículo a presión cero. En [Simaan et al., 2009b] se propone una ecuación para representar la elastancia del ventrículo izquierdo:

$$E(t) = (E_{max} - E_{min})E_n(t_n) + E_{min} \quad (2.2)$$

los términos E_{max} y E_{min} corresponden a la elastancia ventricular máxima y mínima respectivamente. En particular, E_{max} se entiende como un índice clínico que describe la capacidad de bombeo del corazón. La función $E_n(t_n)$ se aproxima en [Stergiopoulos et al., 1996] de la siguiente manera:

$$E_n(t_n) = 1.55 \cdot \left[\frac{\left(\frac{t_n}{0.7}\right)^{1.9}}{1 + \left(\frac{t_n}{0.7}\right)^{1.9}} \right] \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{t_n}{1.17}\right)^{21.9}} \right] \quad (2.3)$$

El tiempo normalizado t_n esta dado como:

$$t_n = \frac{t}{0.2 + 0.15 \frac{60}{HR}} \quad (2.4)$$

HR representa la frecuencia cardíaca expresada en latidos por minuto (bpm) en este caso se considerará constante. Para esta representación, la Ec. (2.3) se denomina *elastancia variable en el tiempo normalizado* y se puede adaptar a diferentes frecuencias cardíacas y condiciones de estado contráctil modificando los parámetros HR o E_{max} dependiendo de cada ser humano.

En la Fig. 2.2 se muestra un ejemplo de forma de onda para la función de elastancia. Para la

simulación de este ejemplo se toman los valores típicos para un corazón sano, es decir, con una velocidad de 60 latidos por minuto (*bpm*), para este caso se toman los valores máximos de E_{max} y E_{min} , por tanto, $E_{max} = 2.0$ y $E_{min} = 0.06$ (*mmHg/ml*).

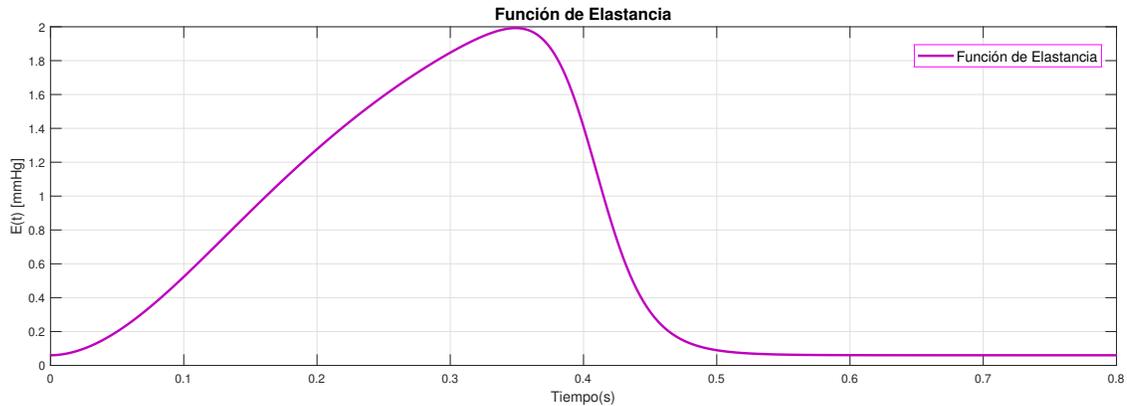


Figura 2.2. Función de Elastancia

Las unidades de la elastancia son:

$$E(t) = \frac{mmHg}{ml} \quad (2.5)$$

2.1.2. Modelos de la circulación sistémica

Los modelos de circulación sistémica siguen dos enfoques principales: a) modelos distribuidos y b) modelos agrupados. El primer enfoque se basa en los principios de la teoría de la dinámica de fluidos para describir la dinámica del flujo sanguíneo en el sistema arterial humano. El segundo enfoque se basa principalmente en simplificaciones y analogías del sistema, tratando de preservar la principal interpretación física de los componentes del sistema de circulación sistémica.

2.1.2.1. Modelos distribuidos

Es de mencionar que, el flujo en el sistema circulatorio es, en general, un flujo pulsátil generado por el bombeo del corazón y complementado con las propiedades elásticas de las paredes arteriales. Se sabe por las propiedades de la sangre, que es un fluido no newtoniano y no constante. Esto implica que, para obtener una representación matemática detallada y completa del flujo en el sistema circulatorio, es necesario utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) y las relaciones constitutivas de sangre apropiadas. De igual forma, como se mencionó anteriormente, se deben tener en cuenta las propiedades elásticas de la pared arterial para modelar su efecto sobre el flujo.

En [Olufsen and Nadim, 2005] se da a conocer el flujo sanguíneo en las arterias el cual se describe como un flujo asimétrico unidimensional de un fluido newtoniano incompresible. La distensibilidad de los vasos sanguíneos no se considera inicialmente. Las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.6)$$

donde,

- u : es la velocidad del flujo
- r : la coordenada radial
- μ : la viscosidad dinámica
- ρ : la densidad de la sangre
- p : la presión

2.1.2.2. Modelos Windkessel

Estos modelos han sido ampliamente adoptados para representar la hemodinámica del sistema arterial, ya que, en la actualidad son los que más se utilizan. Generalmente interpretan el sistema como un circuito eléctrico (RCL). Las resistencias (R) representan la resistencia de las arterias al flujo sanguíneo. Los capacitores (C) modelan las propiedades elásticas o de cumplimiento de la pared arterial. Finalmente, los inductores (L) dan cuenta de la inercia de la masa sanguínea. En estos modelos, el voltaje representa la presión en el sistema y la corriente eléctrica es análoga al flujo sanguíneo.

En este caso, el modelo original de Windkessel incluía solo una resistencia y un capacitor en paralelo, lo que explicaba la resistencia al flujo sanguíneo y la distensibilidad de las arterias sistémicas, respectivamente. Posteriormente, se añadió un tercer elemento, una resistencia en serie, la cual se utiliza para modelar la impedancia característica de la aorta.

Finalmente, se agrega al sistema un cuarto elemento, un inductor, para representar la inercia del volumen de sangre que fluye a través de la aorta ascendente principal.

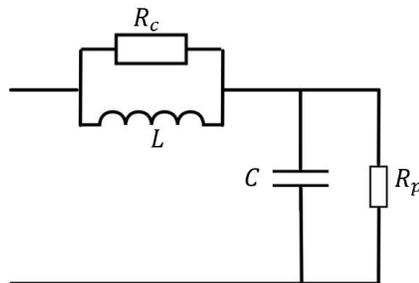


Figura 2.3. Modelo Windkessel de cuatro elementos

En la Fig. 2.3, R_c representa la resistencia característica del aorta, L es la inercia total del sistema arterial, C es la distensibilidad arterial total, y R_p es la resistencia periférica.

2.1.2.3. Circulación pulmonar

El sistema circulatorio consta del corazón, y de las arterias y venas que transportan la sangre por todo el cuerpo. La sangre siempre debe circular para mantener la vida. Transporta oxígeno del aire que respiramos a las células en todo el cuerpo. El bombeo del corazón mantiene en movimiento este flujo sanguíneo a través de las arterias, los capilares y las venas.

De esta manera, en [Grignola and Domingoc, 2021] se da a conocer que, la circulación pulmonar moviliza la sangre entre el corazón y los pulmones. Transporta sangre desoxigenada a los pulmones para absorber oxígeno y liberar dióxido de carbono. La sangre oxigenada luego regresa al corazón. La circulación sistémica moviliza la sangre entre el corazón y el resto del cuerpo. Envía sangre oxigenada a las células y permite el retorno de la sangre desoxigenada al corazón.

2.1.3. Válvula Mitral y Aórtica

Como se mencionó en la sección 1.5.2, las válvulas mitral y aórtica se encuentran entre la aurícula izquierda y el ventrículo izquierdo y entre el ventrículo izquierdo y la aorta, respectivamente. Siguiendo la misma idea de representar el CVS como un circuito eléctrico, las válvulas se pueden representar como diodos.

Un diodo ideal, por lo tanto, representa una válvula ideal con dos estados: abierto o cerrado. Se puede hacer una extensión de este concepto si, en lugar de considerar un diodo ideal, se usa una función que describe la apertura de la válvula para representar el rendimiento del diodo.

Generalmente, dado que el flujo sanguíneo experimenta resistencia al pasar por las válvulas, se coloca un elemento resistivo en serie al diodo para dar cuenta de este fenómeno. La Fig. 2.4 representa la representación eléctrica ideal de la válvula mitral/aórtica y la Ec. (2.7) expresa la representación matemática.

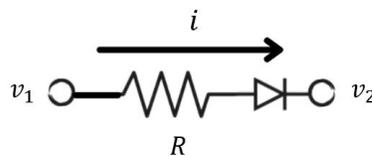


Figura 2.4. Representación eléctrica de las válvulas

$$i = \begin{cases} \frac{v_2 - v_1}{R} & ; \quad v_2 > v_1 \\ 0 & ; \quad v_2 \leq v_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

2.1.4. Modelo en espacio de estado

El modelo de espacio de estados del sistema se puede obtener simplemente aplicando las leyes de voltaje y corriente de Kirchoff al circuito de la Fig. 2.5, considerando los posibles estados de los diodos (válvulas) descritos en la Tabla 2.1. Es importante notar que el sistema no tiene entradas externas.

Recordemos que, el sistema funciona gracias al sistema nervioso autónomo el cual se encarga de la contracción del corazón. Las variables de estado del sistema son la presión del ventrículo izquierdo (LVP), la presión de la aurícula izquierda (LAP), la presión arterial (AP), la presión aórtica (AoP), y caudal total (Q_T). El vector de estado se define como sigue:

$$x(t) = [LVP(t) \quad LAP(t) \quad AP(t) \quad AoP(t) \quad Q_T(t)] \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de estado del sistema estarán dadas por:

$$\dot{x}(t) = A_i(t) x(t) \quad (2.9)$$

donde el subíndice i indica que la matriz dinámica $A(t)$ dependerá de la fase actual del ciclo cardíaco, el cual es analizado por cada fase (ver la Tabla 2.1).

2.1.5. Modelo general del sistema cardiovascular

En [Wu et al., 2005b] se presenta una representación eléctrica del sistema cardiovascular. El modelo se divide en cinco partes principales (ver la Fig. 2.5), de la cual se resaltan los siguientes elementos:

- La circulación sistémica. Esta se representa como un modelo de Windkessel modificado de cuatro elementos (R_C, L_C, R_S, C_S).
- El ventrículo izquierdo, el cual se presenta como una capacitancia variable en el tiempo $C(t)$.
- La circulación pulmonar y la aurícula izquierda del corazón se representan como una sola capacitancia, representada como C_R
- Las válvulas mitral y aórtica se representan como diodos ideales, cada uno con su correspondiente resistencia en serie segun corresponda (D_M, R_M, D_A, R_A).
- En particular, para este tipo de modelo se introduce un cuarto capacitor, el cual es utilizado para tener representada la distensibilidad de la aorta grande C_A .

En el modelo RLC de la Fig. 2.5, se puede observar en color rosado la sección que representa la circulación pulmonar, en azul los componentes que representan la válvula mitral, en verde los componentes que representan el ventrículo izquierdo, en amarillo los componentes que representan la válvula aórtica, en naranja el capacitor que representa la aorta y en color morado los componentes que representan la circulación sistémica.

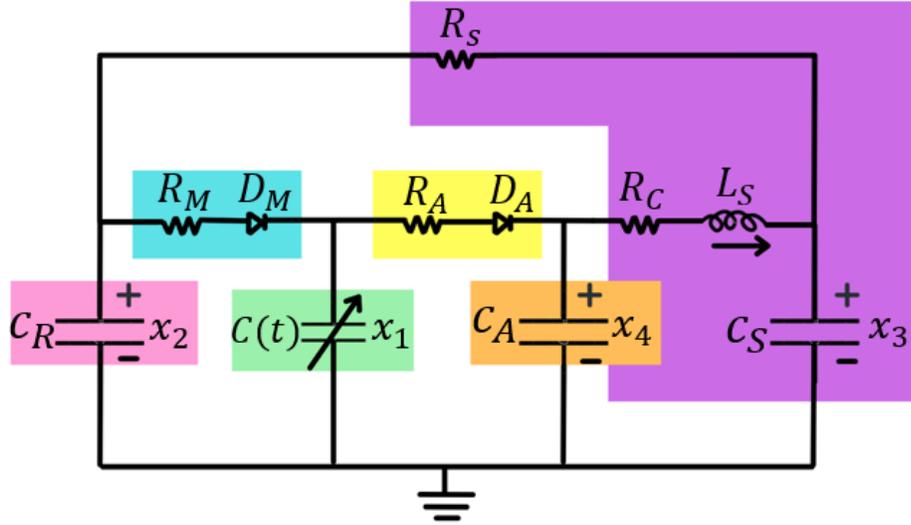


Figura 2.5. Modelo RLC de parámetros agrupados del sistema cardiovascular

Hay que mencionar que, en este modelo los voltajes son análogos a la presión y las corrientes son análogas al flujo sanguíneo. Por ejemplo, la presión del ventrículo izquierdo (LVP) está representada por el voltaje en el capacitor variable en el tiempo $C(t)$.

Por consiguiente, las ecuaciones de estado del sistema se obtienen analizando el circuito RLC para el cual se hace uso las leyes de Kirchhoff y además considerando las combinaciones de los estados de las válvulas mitral y aórtica, las cuales a su vez derivarán en diferentes circuitos. La Tabla 2.1 resume los modos de operación del sistema los cuales están basados en los modos de operación de las válvulas: un 0 representa una válvula cerrada (diodo no conductor) y un 1 representa una válvula abierta (diodo conductor).

D_m	D_a	Fases
1	0	Llenado del ventrículo izquierdo
0	0	Contracción isovolumétrica
0	1	Eyección y/o vaciado del ventrículo izquierdo
0	0	Relajación isovolumétrica

Tabla 2.1. Apertura y cierre de los diodos

Se puede notar que la condición cuando ambas válvulas están abiertas no existe (modo no factible) ya que eso significa un funcionamiento fatal y eso no puede ocurrir en el funcionamiento real del corazón.

En la Ec. (2.10) se tiene la representación en espacio de estados del circuito eléctrico de la Fig. 2.5. Finalmente los parámetros se tienen en la Tabla 2.2.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RsCr} & \frac{1}{RsCr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{RsCs} & -\frac{1}{RsCs} & 0 & \frac{1}{Cs} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{CA} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{Ls} & -\frac{Rc}{Ls} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(t)} \cdot \frac{1}{R_M} (x_2 - x_1) & -\frac{1}{C(t)} \cdot \frac{1}{R_A} (x_1 - x_4) \\ -\frac{1}{C_R} \cdot \frac{1}{R_M} (x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_A} \cdot \frac{1}{R_A} (x_1 - x_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} D_M \\ D_A \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los estados del modelo son:

- $x_1 = LVP =$ Presión ventricular
- $x_2 = LAP =$ Presión de la aurícula izquierda
- $x_3 = AP =$ Presión arterial
- $x_4 = AoP =$ Presión aórtica
- $x_5 = QT =$ Flujo total del SCV

2.2. Modelado del SCV con el LVAD por cada fase del ciclo cardíaco

Existe una conmutación de entre diodos la cual aparece de forma natural en el sistema cardiovascular gracias a la presencia de válvulas que, según su estado (abiertas o cerradas), dividen el ciclo cardíaco en cuatro fases o modos. Por tanto, se realiza el análisis matemático por cada una de estas fases.

2.2.1. Fases del ciclo cardíaco

El ciclo cardíaco se puede analizar centrándose únicamente en el lado izquierdo del corazón [Boron and Boulaep, 2017]. El ciclo cardíaco se divide en cuatro fases, según el estado de las válvulas mitral y aórtica. Pero, en realidad, solo hay tres fases ya que una de ellas se repite. En consecuencia, cuando la presión en la aurícula izquierda (LAP) es más alta que la presión en el ventrículo izquierdo (LVP), se abre la válvula mitral permitiendo que la sangre fluya hacia el ventrículo izquierdo. Esto se conoce como la fase de llenado. En esta fase, la presión en el ventrículo izquierdo aumenta, forzando el cierre de la válvula mitral.

En este punto, ambas válvulas están cerradas y el ventrículo izquierdo se contrae acumulando presión, ocurriendo de esta manera la *contracción isovolumétrica*. La relajación isovolumétrica ocurre cuando la presión en la aorta aumenta por encima de la LVP y la válvula aórtica se cierra. En esta fase el ventrículo izquierdo se relaja.

Por otra parte, la presión en el ventrículo sigue aumentando hasta el punto que es mayor que la presión en la aorta (AoP). En ese momento, la válvula aórtica se abrirá, permitiendo que la sangre fluya hacia el sistema arterial, de esta forma de desarrolla la *fase de eyección*.

Ahora bien, desde su publicación en 1915, los autores en [Boron and Boulaep, 2017] expusieron el diagrama de Wiggers, el cual ha sido una herramienta invaluable para comprender el funcionamiento del corazón. En este tipo de diagrama se relacionan temporalmente los fenómenos auditivos, eléctricos y mecánicos con los cambios en los volúmenes y presiones que ocurren durante cada latido del corazón. En la Fig. 2.6 se muestra el Diagrama de Wiggers, en el cual se muestran las presiones cardíacas izquierdas relevantes en el ciclo cardíaco, así como también, se describen las fases descritas anteriormente.

El resto de la circulación, se denomina circulación sistémica, la cual se realiza en la pared arterial (PA). Esta pared se expande cuando recibe una carga de sangre y luego vuelve, por sus propiedades elásticas a su forma original, empujando la sangre a través del sistema.

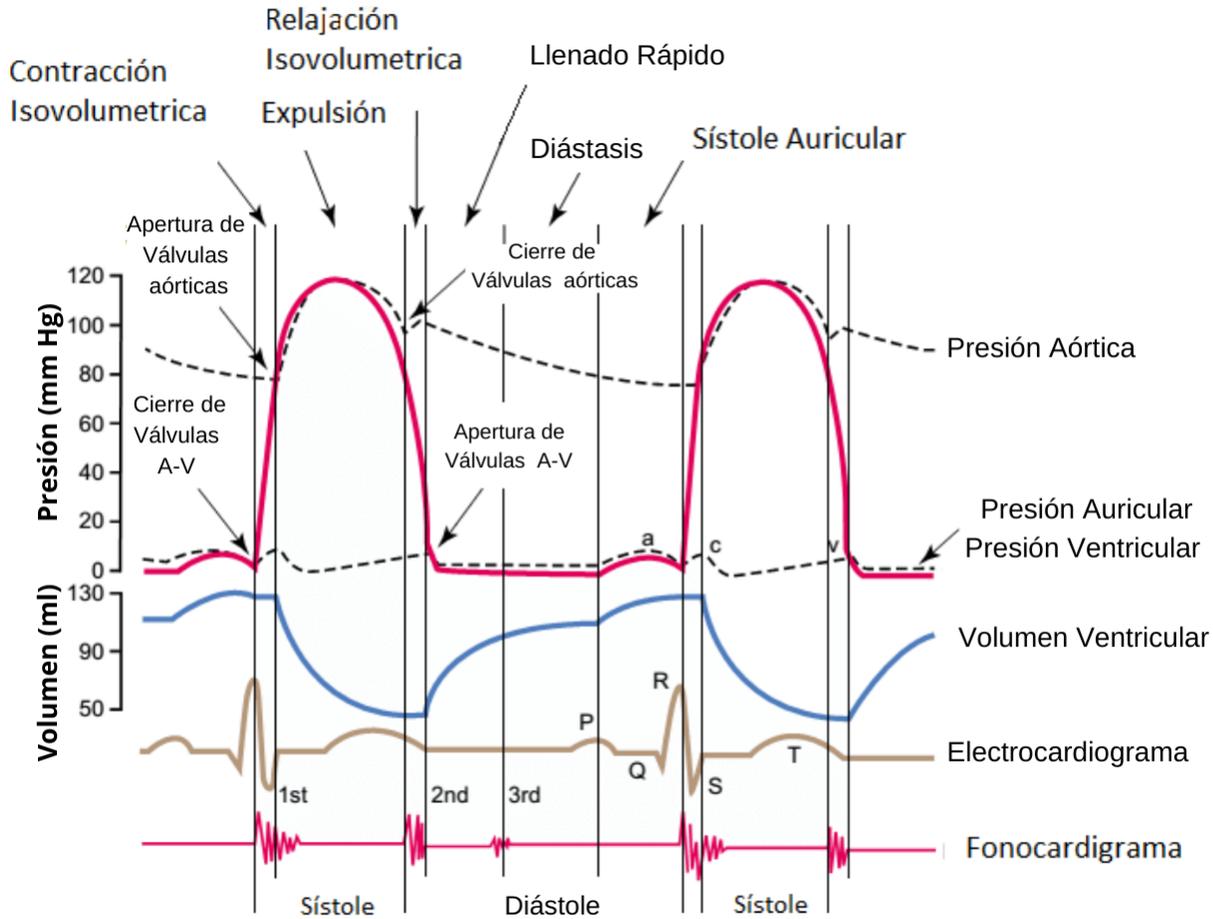


Figura 2.6. Diagrama de Wiggers [Boron and Boulaep, 2017]

2.2.2. Modelo RLC del sistema cardiovascular implantando un LVAD

En la Fig. 2.7 se puede observar el circuito eléctrico correspondiente al sistema cardiovascular en combinación con el Dispositivo de Asistencia Ventricular Izquierdo (LVAD). Se puede observar que se hacen presentes las inductancias representadas como: inductancia en la sangre de la aorta, de entrada y salida respectivamente y la inductancia en la bomba.

En la Ec. (2.11) se tiene la expresión en espacio de estados del circuito eléctrico de la Fig. 2.7. Finalmente la representación matricial se muestra en la Ec. (2.12) y los parámetros en la Tabla 2.2.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \Gamma(Dm, Da) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

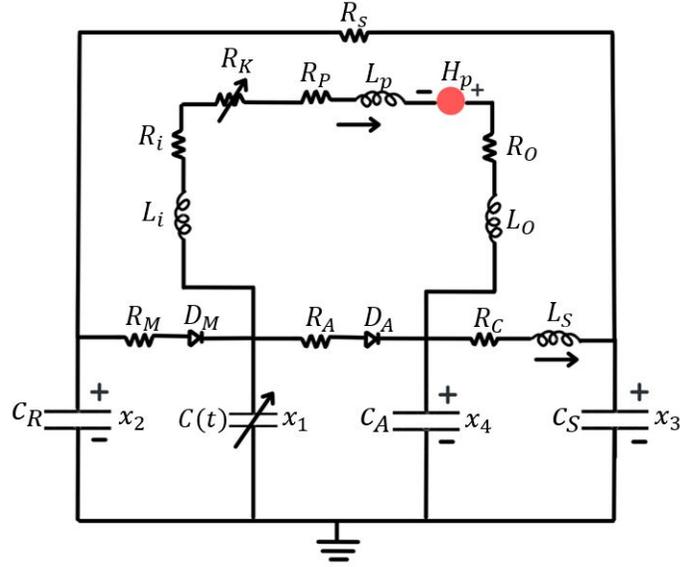


Figura 2.7. Modelo combinado del SCV y el LVAD

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C(t)} \\ 0 & -\frac{1}{RsCr} & \frac{1}{RsCr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{RsCs} & -\frac{1}{RsCs} & 0 & \frac{1}{Cs} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_A} & \frac{1}{C_A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_S} & \frac{1}{L_S} & -\frac{Rc}{L_S} & 0 \\ \frac{1}{L^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 & -\frac{R^*}{L^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \dots \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C(t)} \cdot \frac{1}{R_M} (x_2 - x_1) & -\frac{1}{C(t)} \cdot \frac{1}{R_A} (x_1 - x_4) \\ -\frac{1}{C_R} \cdot \frac{1}{R_M} (x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_A} \cdot \frac{1}{R_A} (x_1 - x_4) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dm \\ Da \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma}{L^* x_6} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$$

Los estados del modelo son:

- $x_1 = LVP =$ Presión ventricular
- $x_2 = LAP =$ Presión de la aurícula izquierda
- $x_3 = AP =$ Presión arterial
- $x_4 = AoP =$ Presión aórtica
- $x_5 = Q_T =$ Flujo total del SCV
- $x_6 = Q_P =$ Flujo total de la bomba del LVAD

Los parámetros para el circuito RLC de la Fig. 2.7 se muestran en la Tabla 2.2. Estos parámetros fueron considerados en [Son et al., 2019d], donde se utilizó el método de filtro extendido de KALMAN junto con métodos invasivos para medir la presión aórtica, el flujo aórtico, la presión de la aurícula izquierda y la presión del ventrículo izquierdo, para con ello estimar los parámetros cardiovasculares. Los resultados se validaron con datos reales de pacientes sometidos a cirugía a corazón abierto.

La inductancia L^* y la resistencia R^* se definen como:

$$L^* = L_i + L_o + L_p \quad (2.13)$$

$$R^* = R_i + R_o + R_p + R_{su} \quad (2.14)$$

Un dispositivo de asistencia ventricular izquierda es una bomba mecánica rotativa conectada con dos cánulas entre el ventrículo izquierdo y la aorta. Este tipo de dispositivos bombean sangre continuamente desde el ventrículo izquierdo hacia la aorta. La diferencia de presión entre el ventrículo izquierdo y la aorta se caracteriza por la siguiente relación:

$$LVP(t) - AoP(t) = R_i Q + L_i \frac{dQ}{dt} + R_o Q + L_o \frac{dQ}{dt} + R_p Q + L_p \frac{dQ}{dt} - H_p + R_{su} Q \quad (2.15)$$

En la expresión anterior, H_p es la ganancia de presión a través de la bomba, LVP es la presión ventricular, AoP representa la presión aórtica y Q es la tasa de flujo sanguíneo a través de la bomba. Los parámetros R_i, R_o, R_p representan el flujo de las resistencias y L_i, L_o, L_p representan los flujos inerciales de la cánula y la bomba respectivamente. El parámetro R_{su} es constante, su valor es 1, este se incluye en el modelo para caracterizar el fenómeno de succión.

Parámetros del circuito	Valor	Significado fisiológico
Resistencia (mmHg / ml)		
R_s	1.0000	Resistencia vascular sistémica
R_M	0.0050	Resistencia de la válvula mitral
R_A	0.0010	Resistencia de la válvula aórtica
R_C	0.0398	Resistencia característica
R_i	0.0677	Resistencia de la bomba de entrada
R_o	0.0677	Resistencia de la bomba de salida
R_p	0.17070	Resistencia a la bomba
Capacitancia (ml/mmHg)		
$C(t)$	Variable en el tiempo	Capacitancia del ventrículo izquierdo
C_R	4.4000	Capacitancia auricular izquierda
C_s	1.3300	Capacitancia sistémica
C_A	0.0800	Capacitancia aórtica
Inductancia (mmHg $\cdot s^2/ml$)		
L_s	0.0005	Inductancia de la sangre en la aorta
L_i	0.0127	Inductancia de entrada
L_o	0.0127	Inductancia de salida
L_p	0.02177	Inductancia de la bomba
Válvulas		
D_M	/	Válvula mitral
D_A	/	Válvula aórtica

Tabla 2.2. Parámetros del circuito RLC [Son et al., 2019d]

La ganancia de presión a través de la bomba H_p se modela usando la relación directa entre la energía eléctrica suministrada al motor de la bomba P_e y la energía hidrodinámica generada por la bomba P_p escalada por la eficiencia de la bomba η como:

$$P_p = \eta P_e \quad (2.16)$$

Además, la potencia eléctrica se puede escribir en términos de la tensión suministrada V y la corriente suministrada $i(t)$ al motor de la bomba, mientras que la potencia hidrodinámica se puede escribir en términos de la altura de la bomba o la ganancia de presión H_p y el caudal de la bomba Q como:

$$P_e = V \cdot i(t) \quad (2.17)$$

$$P_p = \rho g H_p Q$$

Donde ρ es la densidad del fluido de referencia y g es la aceleración de la gravedad ($\rho = 13,600 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

Utilizando la expresión obtenida en (2.17) y sustituyendo en (2.16):

$$\rho g H_p Q = \eta V i(t) \quad (2.18)$$

Resolviendo la ganancia de presión de la bomba H_p ,

$$H_p = \frac{\eta V i(t)}{\rho g Q} \quad (2.19)$$

o

$$H_p = \gamma \frac{i(t)}{Q} \quad (2.20)$$

Donde $\gamma = \frac{\eta V}{\rho g}$, para un LVAD típico, después de aplicar los factores de conversión apropiados y suponiendo que el motor de la bomba suministra un voltaje $V = 12 \text{ volts}$ y que la eficiencia es del 100 % (suponiendo que la mayoría de las pérdidas se explican por las pérdidas de presión inducidas por R_p y L_p), por tanto, se tiene que la constante γ presenta un valor de $\gamma = 89,944 \text{ mmHg}$.

Sustituyendo (2.20) en (2.15) se obtiene la ecuación de estado no lineal que rige el comportamiento del LVAD como:

$$LVP(t) - A_oP(t) = R^*Q + L^* \frac{dQ}{dt} - \gamma \frac{i(t)}{Q} \quad (2.21)$$

2.2.2.1. Modelo de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

Como se describe en la Tabla 2.1, durante la fase de *llenado* la válvula aórtica está cerrada y la válvula mitral está abierta. Es decir, en esta fase se observa que, el diodo D_A no conduce mientras que el diodo D_M permite el flujo de corriente. El circuito eléctrico de la Fig. 2.7 cambia al de la Fig. 2.8.

Para esta fase se tiene que, mientras el ventrículo izquierdo se va llenando de sangre, la circulación sistémica se lleva a cabo por las propiedades elásticas del sistema arterial. En otras palabras, luego de perder energía debido a la resistencia característica opuesta de la pared aórtica (R_C) y afectada por la inercia de la masa sanguínea (L_S), el flujo sanguíneo llega al sistema arterial periférico; es decir, a la capacitancia (C_S). Pero al mismo tiempo, la sangre regresa a la aurícula izquierda (C_R) perdiendo energía en el camino debido a la resistencia de las paredes del sistema arterial (R_s).

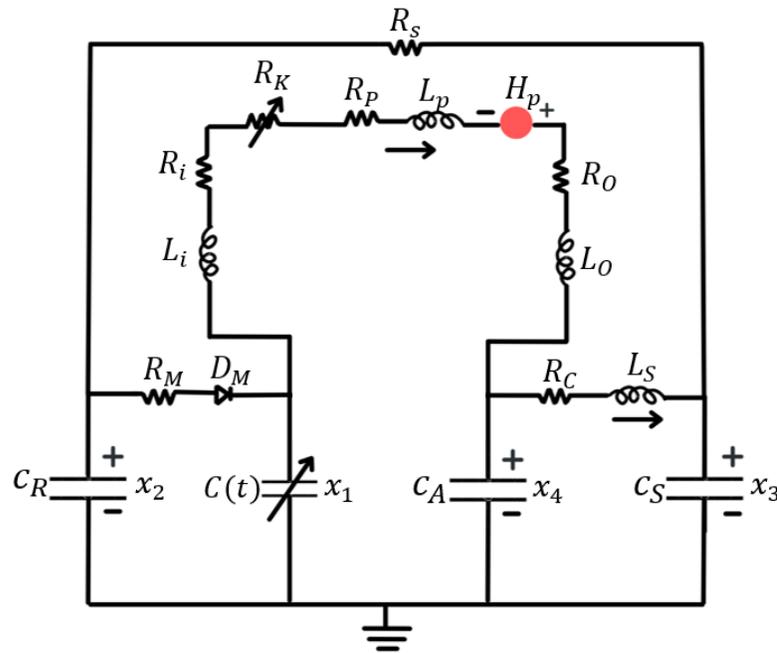


Figura 2.8. Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

La dinámica del circuito de la Fig. 2.8 se obtiene utilizando las leyes de Kirchhoff. En la Ec. (2.22) se observa la representación en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} - \left(\frac{200}{C(t)}\right) & \frac{200}{C(t)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C(t)} \\ -\frac{1}{C_R R_M} & -\frac{1}{R_s C_R} + \frac{1}{C_R R_M} & \frac{1}{R_s C_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_s C_s} & -\frac{1}{R_s C_s} & 0 & \frac{1}{C_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_A} & \frac{1}{C_A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_s} & \frac{1}{L_s} & -\frac{R_C}{L_s} & 0 \\ \frac{1}{L^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 & -\frac{R^*}{L^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma}{L^* x_6} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.22)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$$

que de manera condensada puede escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_L(t)x(t) + B_L(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde $A_L(t)$ y $B_L(t)$ son matrices de parámetros variables.

2.2.2.2. Modelo de la Fase de Eyección

En la fase de *eyección*, la válvula mitral está cerrada es decir D_M no conduce y el ventrículo izquierdo bombea sangre a través de la válvula aórtica abierta es decir D_A está activa. En la Fig. 2.9 se puede observar que no existe una conexión física entre la aurícula izquierda (la cual está representada por el capacitor C_R) y el ventrículo izquierdo (capacitor variable en el tiempo $C(t)$) debido al diodo D_M que no conduce.

En esta fase, cuando $C(t)$ se descarga, es decir, cuando el ventrículo izquierdo expulsa la sangre, el capacitor C_A se carga. A medida que la aorta se llena de sangre, su pared se dilata como consecuencia de la introducción rápida de un volumen alto de sangre en ella. Cuando la aorta se relaja expulsa este volumen de sangre al resto del sistema arterial.

Una vez que se ha descrito el funcionamiento de esta fase, se procede al análisis del circuito eléctrico de la Fig. 2.9 para que de esta manera se pueda obtener la representación en forma matricial la cual se tiene la Ec. (2.24)

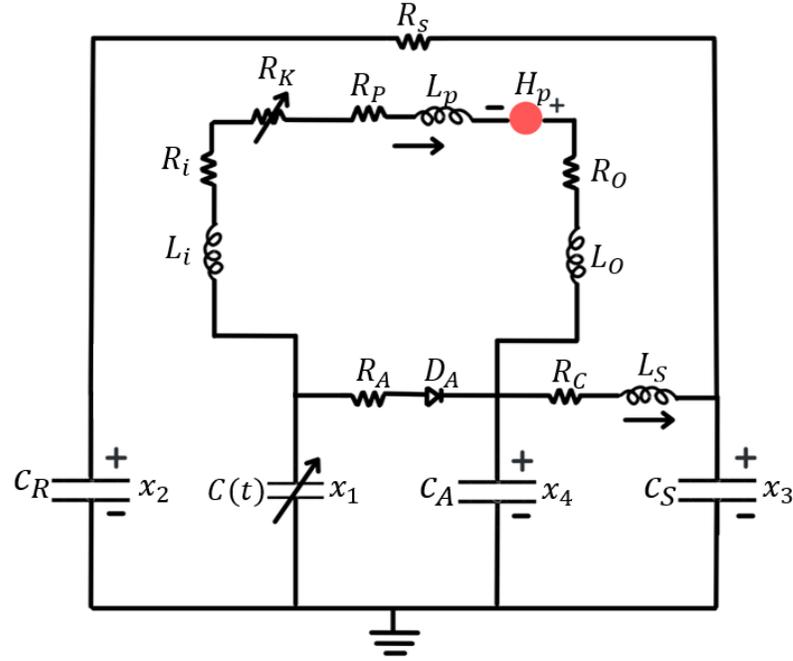


Figura 2.9. Fase de Eyección

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} + \left(\frac{1000}{C(t)}\right) & 0 & 0 & \frac{1000}{C(t)} & 0 & -\frac{1}{C(t)} \\ 0 & -\frac{1}{R_s C_R} & \frac{1}{R_s C_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_s C_s} & -\frac{1}{R_s C_s} & 0 & \frac{1}{C_s} & 0 \\ \frac{1}{C_A R_A} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_A R_A} & -\frac{1}{C_A} & \frac{1}{C_A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_s} & \frac{1}{L_s} & -\frac{R_C}{L_s} & 0 \\ \frac{1}{L^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 & -\frac{R^*}{L^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma}{L^* x_6} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.24)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$$

que de manera condensada puede escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_E(t)x(t) + B_E(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde $A_E(t)$ y $B_E(t)$ son matrices de parámetros variables.

2.2.2.3. Modelo de la Fase Contracción/Relajación isovolumétrica

Como se mencionó anteriormente, la fase Contracción/Relajación isovolumétrica ocurre dos veces como se muestra en la Tabla 2.1. La primera ocurre cuando el ventrículo izquierdo se contrae y la segunda vez cuando se relaja. Estas dos fases tienen una duración corta en comparación con las fases de eyección y llenado (ver Fig. 2.6). Durante esta fase, ambas válvulas están cerradas, lo que significa los diodos D_M y D_A no conducen.

Durante esta fase, la circulación es impulsada por las propiedades elásticas que presenta el sistema arterial. En conclusión, debido a la descarga de los capacitores C_A y C_S , es decir, a la contracción de la aorta y las arterias, la sangre es capaz de completar su viaje de regreso al corazón.

Después de analizar el circuito eléctrico de la Fig. 2.10 se obtiene la representación en su forma matricial como se observa en la Ec. (2.26). La dinámica de este modo es la más simple de las tres, ya que en esta fase los tanto D_M como D_A no conducen, por tanto, el comportamiento de los estos no se hace visible.

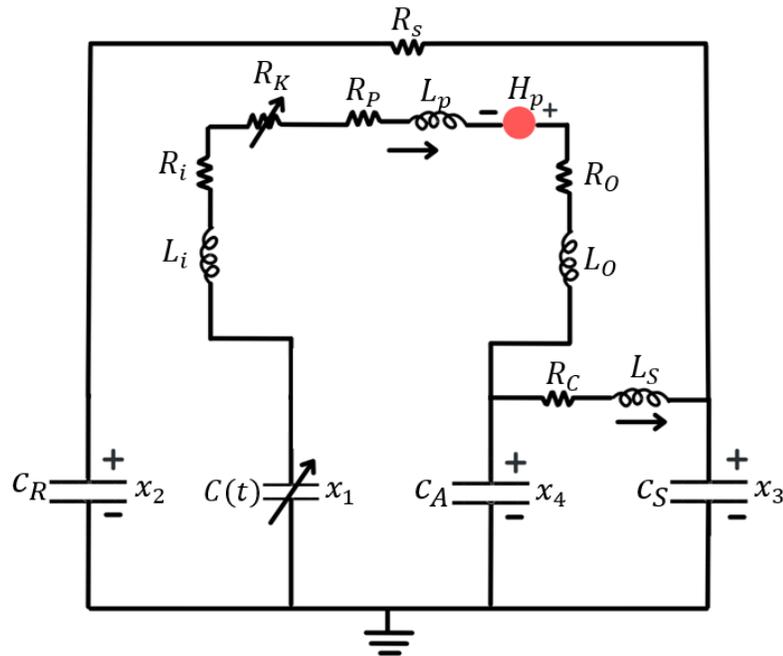


Figura 2.10. Fase Contracción/Relajación isovolumétrica

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C(t)} \\ 0 & -\frac{1}{RsCr} & \frac{1}{RsCr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{RsCs} & -\frac{1}{RsCs} & 0 & \frac{1}{Cs} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{CA} & \frac{1}{CA} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{Ls} & -\frac{Rc}{Ls} & 0 \\ \frac{1}{L^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 & -\frac{R^*}{L^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\gamma}{L^*x_6} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.26)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$$

que de manera condensada puede escrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{CR}(t)x(t) + B_{CR}(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $A_{CR}(t)$ y $B_{CR}(t)$ son matrices de parámetros variables.

2.3. Observadores

Generalmente en el diseño de sistemas de control, no todas las variables de estado se encuentran disponibles para su retroalimentación. Por lo tanto, se hace necesario la estimación de variables de estado cuya medición no está disponible por medio de un sensor.

Un dispositivo (o un programa de computadora) que estima u observa las variables de estado se denomina observador de estado, o simplemente, observador [Ogata, 2010]. Por tanto, un observador de estados estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y de control. En la Fig. 2.11 se tiene un esquema general de un observador.

A los observadores se les considera en ocasiones como sensores virtuales, ya que su estructura permite recibir señales de entrada y de salida de un sistema generando una estimación de las variables de estado.

Existen ocasiones en las que un observador son una herramienta útil, cuando surge la necesidad por conocer todas las variables de estado de un proceso. Algunas de las razones por las cuales no se puede medir una variable son diversas, por ejemplo:

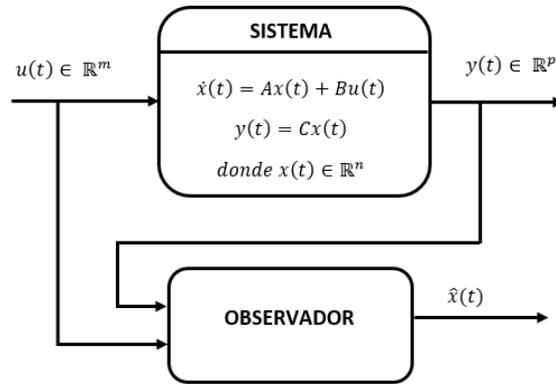


Figura 2.11. Esquema general de un observador

- Los sensores a utilizar son de un costo elevado.
- Los sensores son de difícil acceso.
- Existen algunos que por la forma en que están contruidos generan demasiado ruido, generando que las lecturas sean menos confiables.

En este trabajo de investigación se clasificaron los observadores de la siguiente manera:

1. *Clasificación de observadores por orden.* Dentro de estos observadores están; el observador de orden completo, el observador de orden reducido y el observador de orden mínimo.
2. *Clasificación de observadores por el tipo de estructura.* Dentro de estos observadores se encuentran; el observador tipo Luenberger, el observador proporcional, el observador proporcional integral y el observador generalizado.

2.3.1. Clasificación de observadores por orden.

- Observador de orden completo:
Este tipo de observador, estima todas las variables del sistema, sin importar que algunas están disponibles para una medición directa.
- Observador de orden reducido:
En este tipo de observador se estiman menos de n variables de estado, en donde n es la dimensión del vector de estado.
- Observador de orden mínimo:
Este es un observador de orden reducido con el mínimo orden posible, es decir, si n es la dimensión del vector de estado y p es la dimensión del vector de salidas, el observador de orden mínimo observa $n - p$ variables.

2.3.2. Clasificación de observadores por su estructura.

Considerando el siguiente sistema LTI:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.28}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son las salidas medibles del sistema. A, B, C son matrices reales conocidas de dimensiones apropiadas.

2.3.2.1. Observador tipo Luenberger

La estructura para un observador tipo Luenberger para el sistema dado por la Ec. (2.28) es como se muestra en seguida:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.29}$$

donde $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados estimado, $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ son las salidas estimadas del sistema y L es una matriz desconocida de dimensiones apropiadas.

El problema de diseño del observador tipo Luenberger se enfoca en obtener el valor de la matriz L de tal manera que $\hat{x}(t)$ converja a $x(t)$. Para un mejor entendimiento de la estructura de este tipo de observador, se presenta el diagrama mostrado en la Fig. 2.12.

2.3.2.2. Observador proporcional (PO)

El observador proporcional para el sistema (2.28) es como se muestra a continuación [Darouach et al., 1994]:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Fy(t) + Ju(t) \\ \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)\end{aligned}\tag{2.30}$$

donde $\zeta \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del observador, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $x(t)$. N, F, J, P y Q son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas, las cuales deben determinarse tal que $\hat{x}(t)$ converja a $x(t)$.

Para la obtención de las matrices del observador proporcional de la Ec. 2.30 se estudia la estabilidad de la dinámica del error, definida como:

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (NT + FC - TA)x(t) + (J - TB)u(t)\tag{2.31}$$

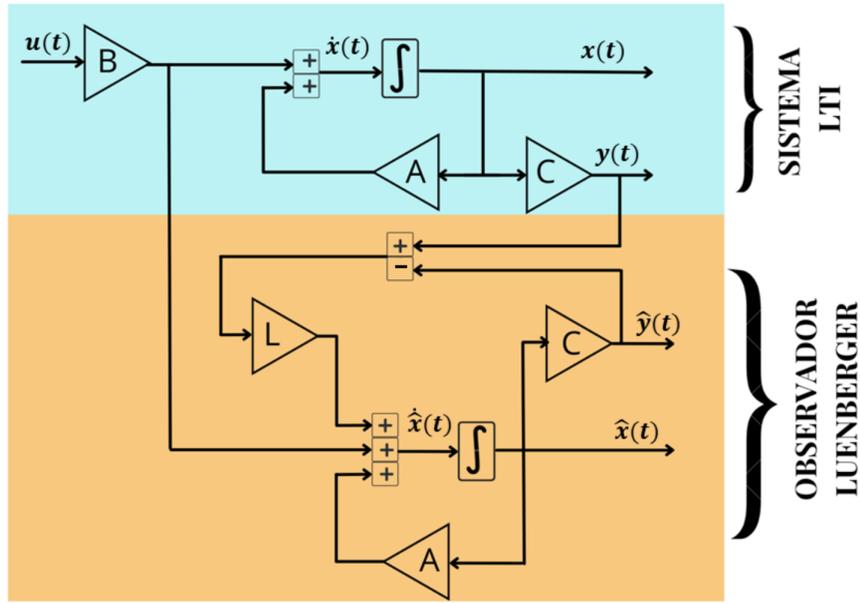


Figura 2.12. Diagrama del observador tipo Luenberger

en donde se observa que se encuentran directamente involucradas las matrices del sistema (2.28). El diagrama de la estructura de este tipo de observador se muestra en la Fig. 2.13 en la cual se puede observar la diferencia que existe en este tipo de observador y el observador tipo Luenberger.

2.3.2.3. Observador Dinámico Generalizado (GDO)

La estructura de un observador dinámico generalizado (GDO) para el sistema de la Ec. (2.28) es como se muestra a continuación [Osorio Gordillo, 2015]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Hv(t) + Fy(t) + Ju(t) \\
 \dot{v}(t) &= S\zeta(t) + Lv(t) + My(t) \\
 \hat{x}(t) &= P\zeta(t) + Qy(t)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estado del observador, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_i}$ es un vector auxiliar y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $x(t)$. $N, J, F, H, S, L, M, P, Q$ son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas.

Este tipo de estructura generalizada del observador permite tener grados de libertad adicionales para cumplir con el objetivo de estimación. De igual forma, estos grados de libertad permiten que esta estructura del observador obtenga mayor robustez ante variaciones paramétricas.

Para la obtención de las matrices del observador se analiza la estabilidad de la dinámica del error transformado y del vector auxiliar, como se muestra:

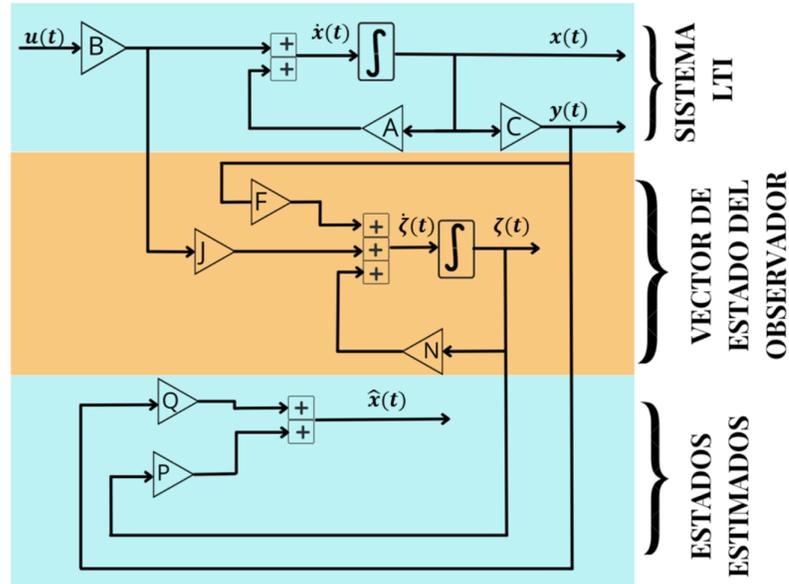


Figura 2.13. Diagrama del observador proporcional

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & H \\ S & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} NTG + TG \\ STG \end{bmatrix} e_f(T) \quad (2.33)$$

El diagrama de la estructura de este tipo de observador se muestra en la Fig. 2.14, en el cual se observan todas aquellas ganancias que proporcionan los grados adicionales de libertad y la complejidad de diseño de este tipo de observador.

2.4. Sistemas lineales de parámetros variables (LPV)

Los sistemas lineales de parámetros variables en el tiempo (LPV por las siglas del inglés Linear Parameter Variant) fueron introducidos por [Shamma, 1988] para poder distinguirlos de los sistemas lineales invariables en el tiempo (LTI, por las siglas del inglés Linear Time Invariant) y de los sistemas lineales variables en el tiempo (LTV, por las siglas del inglés Linear Time Variant) [Mohammadpour and Scherer, 2012].

Los sistemas LPV son sistemas lineales dinámicos cuya descripción matemática contempla parámetros que cambian sus valores a lo largo del tiempo. Estos parámetros son considerados acotados y medibles, los cuales adoptan valores dentro de un subconjunto acotado que a menudo es considerado como un polígono compacto y convexo. Por lo tanto, un sistema LPV es considerado como una familia parametrizada de sistemas lineales que cambian de acuerdo con el punto de operación del sistema no lineal, obteniendo con ello, la aproximación en términos de una interpolación de un conjunto de sistemas lineales a un sistema no lineal.

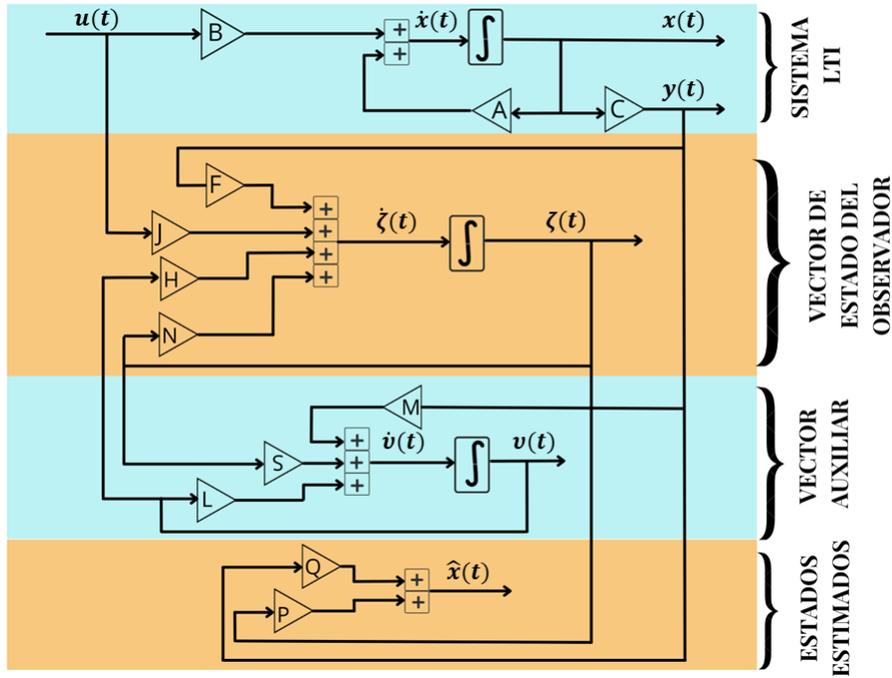


Figura 2.14. Diagrama del observador dinámico generalizado

Los sistemas LPV son descritos comúnmente por ecuaciones de la forma [Briat, 2014]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\varrho(t))x(t) + B(\varrho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

con

$$\varrho(t) = [\varrho_1(t), \dots, \varrho_r(t)]^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^r \quad (2.35)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ son los estados, la entrada y la salida del sistema, respectivamente. $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de r parámetros variables, el cual, puede modificar las propiedades de estabilidad del sistema al ser un parámetro incluido en la matriz $A(\varrho)$ y consecuentemente, puede modificar sustancialmente el comportamiento general de la dinámica del sistema.

Los puntos que conforman la trayectoria admisible pertenecen en todo instante al conjunto compacto $\subset \mathbb{R}^r$ esto es, el vector de parámetros satisface en todo tiempo t la condición:

$$\varrho(t) \in \Omega = \left\{ \varrho(t) : \underline{\varrho}_i \leq \varrho_i \leq \bar{\varrho}_i \quad \forall i = 1, \dots, r \right\} \subset \mathbb{R}^r$$

donde $\underline{\varrho}_i$ y $\bar{\varrho}_i$ son el límite inferior y superior de variación del parámetro ϱ_i , respectivamente. El sistema LPV puede interpretarse como una generalización de un sistema LTI cuando el vector de parámetros, es constante $\varrho(t) = \varrho_0$.

2.4.1. Representación de los sistemas LPV

Un sistema LPV se puede clasificar en diversas familias en función de cómo los parámetros están involucrados en las ecuaciones del sistema. Existen tres formulaciones globales para los sistemas LPV [Briat, 2014]:

- Formulación politópica.
- Formulación para una transformación lineal fraccional (LFT, por las siglas del inglés Linear Fractional Transformation).
- Formulación dependiente de los parámetros.

Para el desarrollo de este tema de tesis se hace uso de los sistemas tipo LPV en su representación tipo politópica. Este tipo de representación es una de más utilizadas en la literatura de sistemas LPV. Como se verá más adelante en este capítulo, el modelo del sistema cardiovascular utilizado como caso de estudio puede adaptarse fácilmente a esta representación.

2.4.2. Obtención de la formulación LPV

Actualmente, en la literatura existen diversos métodos para poder obtener la representación tipo LPV politópica de un sistema:

- Linealizando en diferentes puntos de operación
- Considerando las no linealidades de un modelo no lineal
- A partir de un modelo LTV

2.4.2.1. Linealizando en diferentes puntos de operación

La linealización por medio de la utilización de el Jacobiando es parte de la metodología para formular un modelo tipo LPV. Este tipo de representación es útil para modelos no lineales que pueden ser linealizados alrededor de puntos de equilibrio de interés [Briat, 2014]. Los modelos obtenidos por linealización en conjunto con funciones de interpolación, resultan en un modelo LPV.

De hecho, una familia de modelos linealizados, son una aproximación local de las dinámicas del sistema no lineal alrededor de los puntos de equilibrio de interés. La aproximación del sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio es calculada utilizando series de Taylor.

Considere un modelo no lineal de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x, u) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.36}$$

donde $x(t)$, $u(t)$ y $y(t)$ son los estados, la entrada y la salida. C es una matriz de dimensiones apropiadas, $f(x)$ y $g(x, u)$ son funciones no lineales.

Utilizando m puntos de linealización definidos por x_{eqi} y u_{eqi} , $\forall_i = 1, \dots, m$, se obtiene el siguiente modelo LPV

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \mu_i(t) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.37}$$

donde μ_i son las funciones de ponderación que definen la intervención de cada uno de los modelos locales y cumplen con la condición:

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$$

$A_i = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x(t)} \right|_{x=x_{eqi}}$, $B_i = \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u(t)} \right|_{u=u_{eqi}}$, $\forall_i = 1, \dots, m$, y C es una matriz de dimensiones apropiadas.

2.4.2.2. Modelo politópico a partir de un modelo LPV

Un modelo LPV, con parámetros variables se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\varrho(t))x(t) + B(\varrho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.38}$$

donde $x(t)$, $u(t)$ y $y(t)$ son los estados, la entrada y la salida del sistema, respectivamente. $A(\varrho(t))$ y $B(\varrho(t))$ son matrices que dependen de parámetros variables en el tiempo, y C es una matriz de dimensiones apropiadas.

Ahora, considerando que $A(\varrho(t))$ y $B(\varrho(t))$ varían con respecto a un vector de parámetros medibles $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$, después, se puede determinar el intervalo de variación definiendo de esta manera el valor máximo $\bar{\rho}$ y el valor mínimo ρ . De tal forma que, evaluando la combinación de estos límites en las matrices $A(\varrho(t))$ y $B(\varrho(t))$, se obtienen 2^r modelos locales lineales, generando así el siguiente modelo LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(t) (A_i x(t) + B_i u(t))\tag{2.39}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

donde $x(t)$, $u(t)$ y $y(t)$ son los estados, la entrada y la salida del sistema, respectivamente. A_i y B_i son matrices constantes evaluadas en $\rho(t)$ el cual es igual a una combinación de los límites de variación previamente definidos. La matriz C es una matriz constante de dimensiones apropiadas y $\mu_i(t)$ son las funciones de ponderación.

2.4.3. Sistemas cuasi-LPV (q-LPV)

Por otra parte, cuando los sistemas LPV son obtenidos considerando las no linealidades del modelo, las funciones de ponderación son funciones del estado del sistema, por consiguiente a este tipo particular de sistemas LPV se le conoce como sistemas cuasi-LPV (q-LPV) [Briat, 2014].

Ejemplo

Se tiene el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 9 \cos(x_1(t)) \end{aligned} \tag{2.40}$$

el cual se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \rho(t) x_1(t) \end{aligned}$$

donde $\rho(t) = \frac{9 \cos(x_1(t))}{x_1(t)} \in \mathbb{R}$

Para este sistema se puede observar que la no linealidad puede ser representada con un enfoque cuasi-LPV (q-LPV), por consiguiente, permite representar la ecuación no lineal ahora en un su forma lineal de parámetros variables. Se considera que $\rho(t)$ es un parámetro variable, del cual solo se conocen sus límites de variación superior e inferior, pero no la trayectoria. Cuando se presentan este tipo de situaciones las funciones de ponderación dependen de la variación de $\rho(t)$, el cual a su vez varía de acuerdo a las dinámicas de los estados del sistema.

Por tanto, la forma general de un sistema cuasi-LPV (q-LPV) en su forma politópica es como se muestra en la siguiente ecuación

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\rho(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{2.41}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles, A_i, B_i y C son matrices reales conocidas, $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de r parámetros variables los cuales incluyen la dinámica de las variables de estado y $\mu_i(\rho(t))$ son las funciones de ponderación.

2.4.3.1. Considerando las no linealidades de un modelo no lineal

Considerando un modelo no lineal expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $x(t), u(t)$ y $y(t)$ son los estados, la entrada y la salida del sistema respectivamente. C es una matriz de dimensiones apropiadas, $A(x(t))$ y $B(x(t))$ son matrices que dependen de funciones no lineales con respecto a los estados.

Definiendo las no linealidades de las matrices $A(x(t))$ y $B(x(t))$ como un vector medible $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$ el modelo de la Ec. (2.42) puede quedar expresado en su forma LTV como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\varrho(t))x(t) + B(\varrho(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

El procedimiento para la obtención del modelo LPV es el mismo que el mostrado anteriormente, teniendo presente que ahora el vector $\varrho(t)$ varía con respecto a la dinámica de las variables de estado.

2.4.4. Obtención de las funciones de ponderación

El comportamiento de un sistema LPV politópico está regido por funciones de ponderación $\mu_i(\varrho(t))$, donde cada función pertenece al siguiente conjunto convexo:

$$\Phi = \left\{ \mu_i(\varrho(t)) = \mu_i(\underline{\varrho}, \bar{\varrho}, \varrho(t)) : \mu_i(\varrho(t)) \geq 0; \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) = 1 \right\} \quad (2.44)$$

donde $\underline{\varrho}$ es un vector con los límites inferiores de cada parámetro y $\bar{\varrho}$ es un vector con los límites superiores

$$\underline{\varrho} = [\underline{\varrho}_1, \underline{\varrho}_2, \dots, \underline{\varrho}_r]^T, \quad \bar{\varrho} = [\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \dots, \bar{\varrho}_r]^T \quad (2.45)$$

A continuación, se muestra cómo pueden ser obtenidas las funciones de ponderación [Osorio Gordillo, 2011]:

$$\mu_i(\varrho(t)) = \varphi \left\{ \text{diag} \left\{ \left[\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, \dots, \frac{1}{\delta_r} \right] \right\} \cdot \text{diag} \{ \alpha(i) \} \cdot [f(\alpha(i), \underline{\varrho}, \bar{\varrho}) - \varrho] \right\} \quad (2.46)$$

donde φ es el producto de todos los elementos del vector $v = [v_1, v_2, \dots, v_s]^T$

$$\varphi(v) = v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_s = \prod_{i=1}^s v_i \quad (2.47)$$

$$\delta_1 = \bar{\varrho}_i - \underline{\varrho}_i$$

$\alpha(i)$ es un vector binario auxiliar, que asigna -1 al límite inferior y 1 al límite superior

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= [-1 \ -1 \ -1 \dots \ -1 \ -1], \\ \alpha(2) &= [1 \ -1 \ -1 \dots \ -1 \ -1], \\ \alpha(1) &= [-1 \ 1 \ -1 \dots \ -1 \ -1], \\ &\vdots \\ \alpha(2^k - 1) &= [-1 \ 1 \ 1 \dots \ 1 \ 1], \\ \alpha(2^k) &= [1 \ 1 \ 1 \dots \ 1 \ 1], \end{aligned} \quad (2.48)$$

y $f(\alpha(i), \underline{\varrho}, \bar{\varrho})$ tiene la siguiente expresión:

$$f(\alpha(i), \underline{\varrho}, \bar{\varrho}) = \frac{1}{2} [\underline{\varrho} + \bar{\varrho} + \text{diag}\{\alpha(i)\} \cdot [\underline{\varrho} - \bar{\varrho}]] \quad (2.49)$$

De esta manera, se obtienen las m funciones de ponderación que determinan la presencia de cada uno de los modelos locales, dependiendo de la variación del parámetro.

2.4.5. Propiedades de los sistemas LPV

Considere un sistema LPV como el que se muestra en la Ec. (2.50), para el cual se definen algunas propiedades a tener en cuenta:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\rho(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.50)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles, A_i, B_i y C son matrices reales conocidas, $\rho(t) \in \mathbb{R}^r$ es el vector de r parámetros variables los cuales incluyen la dinámica de las variables de estado y $\mu_i(\rho(t))$ son las funciones de ponderación.

2.4.5.1. Estabilidad

Considere una función cuadrática como:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) > 0 \quad (2.51)$$

donde P es una matriz simétrica positiva definida. Cuya derivada está expresada como:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\rho(t)) x^T(t) (A_i^T P + P A_i) x(t) \quad (2.52)$$

Analizando las propiedades de la función de Lyapunov (2.51), se tiene que, una de ellas es que su derivada debe ser negativa definida. Por lo tanto, para que se pueda cumplir con esta propiedad, es necesario asegurar que la siguiente LMI (por sus siglas en inglés Linear Matrix Inequality) se verifique en cada vértice del polígono [Briat, 2014]

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall_i = 1, \dots, m \quad (2.53)$$

Si el par de ecuaciones (2.51) y (2.53) se satisfacen con una matriz $P = P^T > 0$, entonces se asegura la estabilidad para el sistema LPV de la Ec. (2.50).

2.4.5.2. Observabilidad

La propiedad de observabilidad determina la capacidad de estimar los estados del sistema a través de las mediciones de salida y entrada [Ogata, 2010]. Por consiguiente, la matriz de observabilidad para el sistema de la Ec. (2.50) está dada por la condición mostrada en la Ec. (2.54). Los sistemas cuasi-LPV son sistemas no lineales, por tanto, parece sencillo aplicar los criterios de observabilidad para sistemas no lineales. Sin embargo, dado que generalmente los observadores están diseñados de tal manera que, cada regla tiene una ganancia local, se requiere entonces que los modelos locales sean observables en lugar del sistema no lineal completo [Lendek et al., 2011].

Para el diseño se supone implícitamente que los modelos locales, es decir, los pares $(A_i, C), \forall_i = 1, \dots, m$, son observables.

$$rango = \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^2 \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad \forall_i = 1, \dots, m \quad (2.54)$$

donde n es la dimensión del vector de estados del sistema.

2.5. Caso de estudio: Obtención y simulación del modelo cuasi-LPV (q-LPV) del sistema cardiovascular

Una vez que se ha estudiado cada una de las fases del ciclo cardíaco y analizado la obtención de modelos tipo cuasi-LPV (q-LPV), se procede a obtener cada uno de ellos, para que de esta manera cada modelo no lineal pueda ser transformado a un modelo lineal y con ello aplicar técnicas lineales.

2.5.1. Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

Analizando la Ec. (2.22), se consideran 3 no linealidades las cuales son:

- No linealidad 1

$$-\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad (2.55)$$

- No linealidad 2

$$\frac{1}{C(t)} \quad (2.56)$$

- No linealidad 3

$$\frac{\gamma}{L^*x_6(t)} \quad (2.57)$$

Definiendo $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$ como el vector de $r = 3$ parámetros variables que incluyen la no linealidad, por tanto, queda expresado como:

$$\varrho_1(t) = -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad \varrho_2(t) = \frac{1}{C(t)} \quad \varrho_3(t) = \frac{\gamma}{L^*x_6(t)}$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.58)$$

$$\mu_2(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.59)$$

$$\mu_3(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.60)$$

$$\mu_4(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.61)$$

$$\mu_5(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.62)$$

$$\mu_6(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.63)$$

$$\mu_7(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.64)$$

$$\mu_8(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.65)$$

donde $\bar{\varrho}_i$ y $\underline{\varrho}_i$ son el límite superior e inferior de $\varrho_i(t)$, respectivamente. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\varrho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) = 1 \quad (2.66)$$

donde $k = 2^r$ es número de combinaciones posibles de los límites de los parámetros variables.

Se puede notar de acuerdo a la Ec.(2.23), que las matrices

$$A_L(t) = A_L(\varrho(t)) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) A_{Li}$$

y

$$B_L(t) = B_L(\varrho(t)) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) B_{Li}$$

incluyen las no linealidades, por esta razón son modificadas para cada modelo local.

Por lo tanto, el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\varrho_1 - (200 \cdot \varrho_2) & 200 \cdot \varrho_2 & 0 & 0 & 0 & -\varrho_2 \\ -\frac{1}{C_R R_M} & -\frac{1}{R_s C_R} + \frac{1}{C_R R_M} & \frac{1}{R_s C_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_s C_s} & -\frac{1}{R_s C_s} & 0 & \frac{1}{C_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_A} & \frac{1}{C_A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_s} & \frac{1}{L_s} & -\frac{R_C}{L_s} & 0 \\ \frac{1}{L^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 & -\frac{R^*}{L^*} \end{bmatrix}}_{A_L(\varrho(t))} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varrho_3 \end{bmatrix}}_{B_L(\varrho(t))} u(t) \\
 & \tag{2.67}
 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$$

puede ser expresado como una suma ponderada de sistemas lineales:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_{L_i} x(t) + B_{L_i} u(t)) \tag{2.68}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Se puede notar que en la Ec. (2.67) se observa de color azul las no linealidades presentes en esta fase, las cuales están representadas como ϱ_1 , ϱ_2 y ϱ_3 , el valor que tomará cada una de las matrices A_L y B_L dependerá de cada una de las funciones de ponderación, por tanto, el valor de estas matrices se muestran de la Ec. (.0.1) a la Ec.(.0.12) (ver anexos).

La gráfica correspondiente a las funciones de ponderación se observa en la Fig. 2.15, en la cual se puede observar que cada una de las funciones de ponderación se encuentra dentro de los límites establecidos. De igual forma, las gráficas correspondientes de los resultados se observan en la Fig. 2.16, en la cual se puede observar que presentan la misma respuesta cuando se realiza la comparación del sistema no lineal contra el modelo cuasi-LPV.

2.5.2. Fase de Eyección

Analizando la Ec. (2.24), se consideran 3 no linealidades las cuales son:

- No linealidad 1

$$-\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad (2.69)$$

- No linealidad 2

$$\frac{1}{C(t)} \quad (2.70)$$

- No linealidad 3

$$\frac{\gamma}{L^*x_6(t)} \quad (2.71)$$

Definiendo $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$ como el vector de $r = 3$ parámetros variables que incluyen la no linealidad, por tanto, queda expresado como:

$$\varrho_1(t) = -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad \varrho_2(t) = \frac{1}{C(t)} \quad \varrho_3(t) = \frac{\gamma}{L^*x_6(t)}$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.72)$$

$$\mu_2(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.73)$$

$$\mu_3(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.74)$$

$$\mu_4(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.75)$$

$$\mu_5(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.76)$$

$$\mu_6(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.77)$$

$$\mu_7(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.78)$$

$$\mu_8(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.79)$$

donde $\bar{\varrho}_i$ y $\underline{\varrho}_i$ son el límite superior e inferior de $\varrho_i(t)$, respectivamente. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\varrho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) = 1 \quad (2.80)$$

donde $k = 2^r$ es número de combinaciones posibles de los límites de los parámetros variables.

Se puede notar de acuerdo a la Ec.(2.25) que las matrices

$$A_E(t) = A_E(\varrho(t)) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) A_{Ei}$$

y

$$B_E(t) = B_E(\varrho(t)) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) B_{Ei}$$

incluyen las no linealidades, por esta razón son modificadas para cada modelo local.

Por lo tanto, el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\varrho_1 + (1000 \cdot \varrho_2) & 0 & 0 & 1000 \cdot \varrho_2 & 0 & -\varrho_2 \\ 0 & -\frac{1}{R_s C_R} & \frac{1}{R_s C_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_s C_s} & -\frac{1}{R_s C_s} & 0 & \frac{1}{C_s} & 0 \\ \frac{1}{C_A R_A} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_A R_A} & -\frac{1}{C_A} & \frac{1}{C_A} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_s} & \frac{1}{L_s} & -\frac{R_C}{L_s} & 0 \\ \frac{1}{L^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 & -\frac{R^*}{L^*} \end{bmatrix}}_{A_E(\varrho(t))} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varrho_3 \end{bmatrix}}_{B_E(\varrho(t))} u(t) \quad (2.81)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$$

puede ser expresado como una suma ponderada de sistemas lineales:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_{Ei} x(t) + B_{Ei} u(t)) \quad (2.82)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

En la Ec. (2.81) se observa de color azul las no linealidades presentes en esta fase, las cuales están representadas como ϱ_1 , ϱ_2 y ϱ_3 , el valor que tomara cada una de las matrices A_E y B_E dependerá de cada una de las funciones de ponderación, por tanto, el valor de estas matrices se muestran de la Ec. (.0.13) a la Ec.(.0.24) (ver anexos).

La gráfica correspondiente a las funciones de ponderación se observa en la Fig. 2.15, en la cual se puede observar que cada una de las funciones de ponderación se encuentra dentro de los límites establecidos. De igual forma, las gráficas correspondientes de los resultados se muestran en la Fig. 2.17, en la cual se puede observar que presentan la misma respuesta tanto el modelo no lineal como el modelo cuasi-LPV (q-LPV).

2.5.3. Fase de Contracción/Relajación isovolumétrica

Analizando la Ec. (2.26) se consideran 3 no linealidades las cuales son:

- No linealidad 1

$$-\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad (2.83)$$

- No linealidad 2

$$\frac{1}{C(t)} \quad (2.84)$$

- No linealidad 3

$$\frac{\gamma}{L^*x_6(t)} \quad (2.85)$$

Definiendo $\varrho(t) \in \mathbb{R}^r$ como el vector de $r = 3$ parámetros variables que incluyen la no linealidad:

$$\varrho_1(t) = -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \quad \varrho_2(t) = \frac{1}{C(t)} \quad \varrho_3(t) = \frac{\gamma}{L^*x_6(t)}$$

Las funciones de ponderación se encuentran definidas como:

$$\mu_1(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.86)$$

$$\mu_2(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.87)$$

$$\mu_3(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.88)$$

$$\mu_4(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.89)$$

$$\mu_5(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_2}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.90)$$

$$\mu_6(\varrho(t)) = \frac{\varrho_1(t) - \underline{\varrho}_1}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.91)$$

$$\mu_7(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_3}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.92)$$

$$\mu_8(\varrho(t)) = \frac{\bar{\varrho}_1 - \varrho_1(t)}{\bar{\varrho}_1 - \underline{\varrho}_1} \cdot \frac{\bar{\varrho}_2 - \varrho_2(t)}{\bar{\varrho}_2 - \underline{\varrho}_2} \cdot \frac{\bar{\varrho}_3 - \varrho_3(t)}{\bar{\varrho}_3 - \underline{\varrho}_3} \quad (2.93)$$

donde $\bar{\varrho}_i$ y $\underline{\varrho}_i$ son el límite superior e inferior de $\varrho_i(t)$, respectivamente. Cada función de ponderación debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$0 \leq \mu_i(\varrho(t)) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) = 1 \quad (2.94)$$

donde $k = 2^r$ es número de combinaciones posibles de los límites de los parámetros variables.

Se puede notar de acuerdo a la Ec.(2.27) que las matrices

$$A_{CR}(t) = A_{CR}(\varrho(t)) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) A_{CRi}$$

y

$$B_{CR}(t) = B_{CR}(\varrho(t)) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) B_{CRi}$$

incluyen las no linealidades, por esta razón son modificadas para cada modelo local.

Por lo tanto, el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\varrho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varrho_2 \\ 0 & -\frac{1}{RsCr} & \frac{1}{RsCr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{RsCs} & -\frac{1}{RsCs} & 0 & \frac{1}{Cs} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{CA} & \frac{1}{CA} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{Ls} & -\frac{Rc}{Ls} & 0 \\ \frac{1}{L^*} & 0 & 0 & -\frac{1}{L^*} & 0 & -\frac{R^*}{L^*} \end{bmatrix}}_{A_{CR}(\varrho(t))} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varrho_3 \end{bmatrix}}_{B_{CR}(\varrho(t))} u(t) \quad (2.95)
 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$$

puede ser expresado como una suma ponderada de sistemas lineales:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_{CRi}x(t) + B_{CRi}u(t)) \quad (2.96)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

En la Ec. (2.95) se observa de color azul las no linealidades presentes en esta fase, las cuales están representadas como ϱ_1 , ϱ_2 y ϱ_3 , el valor que tomara cada una de las matrices A_E y B_E dependerá de cada una de las funciones de ponderación, por tanto, el valor de estas matrices se muestran de la Ec. (.0.25) a la Ec.(.0.36) (ver anexos).

Finalmente, se tiene la última fase del ciclo cardíaco, la gráfica correspondiente a las funciones de ponderación se observa en la Fig. 2.15, en la cual se puede observar que cada una de las funciones de ponderación se encuentra dentro de los límites establecidos. De igual forma, las gráficas correspondientes de los resultados se observan en la Fig. 2.18, en la cual se puede observar que presentan la misma respuesta cuando se realiza la comparación del sistema no lineal contra el modelo cuasi-LPV (q-LPV).

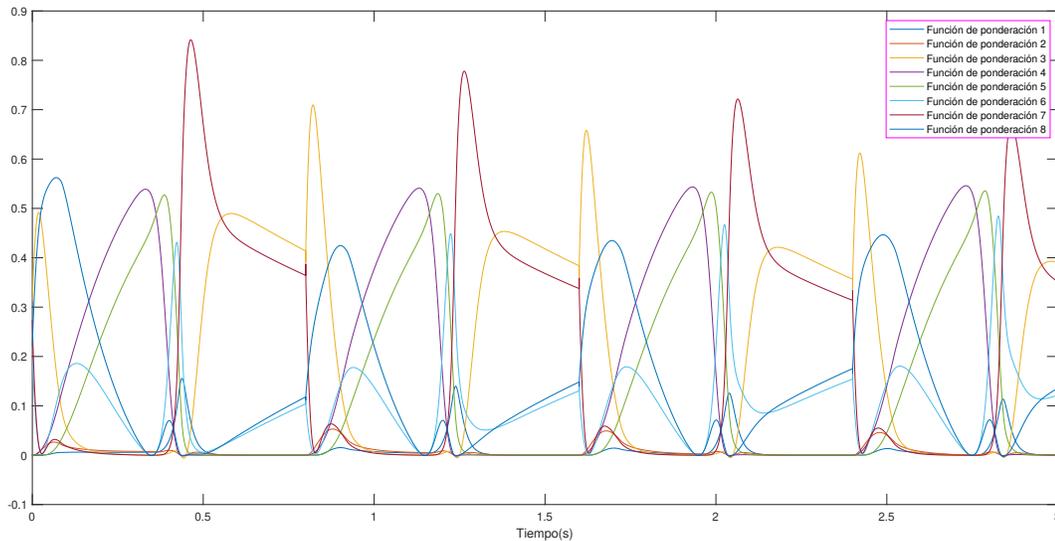


Figura 2.15. Gráfica de las funciones de ponderación

2.5.4. Simulación 1. Modelo cuasi-LPV de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que el sistema cuasi-LPV (q-LPV) desarrollado en la sección 2.5.1 presenta la misma dinámica que el modelo no lineal correspondiente a la fase de llenado del ventrículo izquierdo.

Para llevar a cabo esta simulación se tomaron en cuenta ciertas consideraciones. Los parámetros utilizados fueron extraídos de la literatura [Son et al., 2019d], mostrados en la Tabla 2.2.

Para la realización de esta simulación se utilizó un paso de integración fijo de 0.001s, la simulación tuvo una duración de un minuto lo cual es equivalente a un ciclo cardíaco el cual tiene una duración de 0.8s. La simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, para esta simulación las condiciones iniciales fueron $x(0) = [11 \ 10 \ 74 \ 75 \ 0 \ 10]^T$. Se consideró una señal de entrada la cual es correspondiente a la corriente de la bomba del dispositivo de asistencia ventricular izquierda.

En la Fig. 2.16 se muestra la comparación de cada uno de los estados del sistema correspondientes a la fase de llenado del ventrículo izquierdo del sistema no lineal y el sistema cuasi-LPV. En la cual se aprecia que el modelo cuasi-LPV presenta la misma dinámica que el sistema no lineal para cada uno de los estados del sistema.

En esta simulación se realizó la validación del modelo cuasi-LPV (q-LPV) trabajado para el desarrollo de este trabajo de investigación. Se muestra el comportamiento de cada uno de los estados del sistema. Con la realización de esta simulación se pudo entender de una mejor manera como es el comportamiento dinámico de cada uno de los estados correspondientes a la fase de llenado del

ventrículo izquierdo, esta representación es útil siempre y cuando el modelo no lineal se encuentre dentro de los límites con los que se formó la representación cuasi-LPV (q-LPV).

2.5.5. Simulación 2. Modelo cuasi-LPV (q-LPV) de la Fase Eyección

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que el sistema cuasi-LPV (q-LPV) desarrollado en la sección 2.5.2 presenta la misma dinámica que el modelo no lineal correspondiente a la fase eyección.

De igual forma que en la simulación 1, para llevar a cabo esta simulación se tomaron en cuenta ciertas consideraciones. Los parámetros utilizados fueron extraídos de la literatura [Son et al., 2019d], mostrados en la Tabla 2.2.

Para la realización de esta simulación se utilizó la misma configuración que la Simulación 1.

En la Fig. 2.17 se muestra la comparación de cada uno de los estados del sistema correspondientes a la fase eyección del sistema no lineal y el sistema cuasi-LPV. En esta simulación se aprecia que el modelo cuasi-LPV presenta la misma dinámica que el sistema no lineal para cada uno de los estados del sistema.

Finalmente, con la realización de esta simulación se realizó la validación del modelo cuasi-LPV trabajado para el desarrollo de este trabajo de investigación. Se muestra el comportamiento de cada uno de los estados del sistema. Con la realización de esta simulación se pudo entender de una mejor manera el comportamiento dinámico de cada uno de los estados correspondientes a la fase eyección. Esta representación es útil siempre y cuando el modelo no lineal se encuentre dentro de los límites con los que se formó la representación cuasi-LPV (q-LPV).

2.5.6. Simulación 3. Modelo cuasi-LPV (q-LPV) de la Fase Contracción/Relajación Isovolumétrica

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que el sistema cuasi-LPV (q-LPV) desarrollado en la sección 2.5.3 presenta la misma dinámica que el modelo no lineal correspondiente a la fase contracción/relajación isovolumétrica.

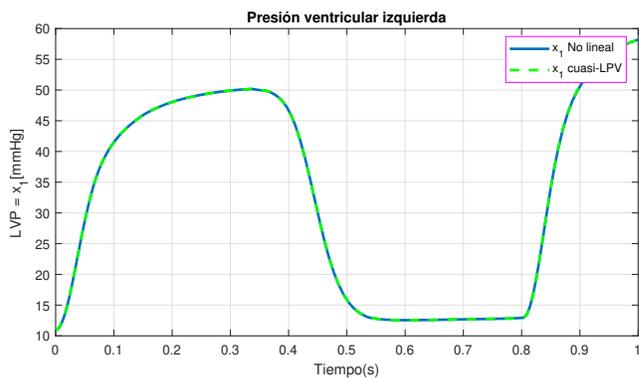
De igual forma que en la simulación 1 y 2, para llevar a cabo esta simulación se tomaron en cuenta ciertas consideraciones. Los parámetros utilizados fueron extraídos de la literatura [Son et al., 2019d], mostrados en la Tabla 2.2.

Para la realización de esta simulación se utilizó la misma configuración que la Simulación 1 y 2.

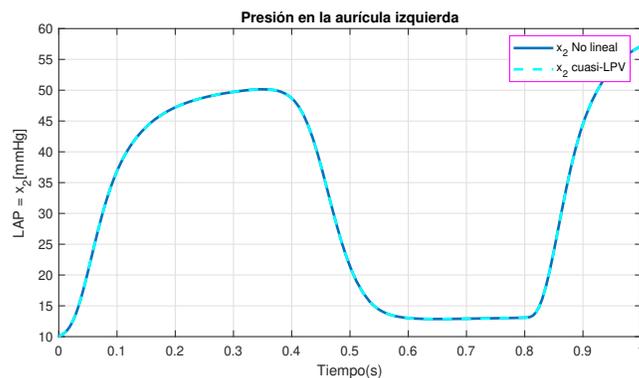
En la Fig. 2.18 se muestra la comparación de cada uno de los estados del sistema correspondientes a la fase contracción/relajación isovolumétrica del sistema no lineal y el sistema cuasi-LPV. En esta simulación se aprecia que el modelo cuasi-LPV (q-LPV) presenta la misma dinámica que el

sistema no lineal para cada uno de los estados del sistema.

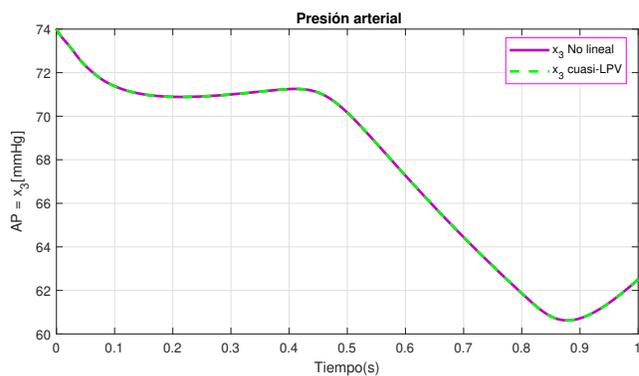
Finalmente, con la realización de esta simulación se realizó la validación del modelo cuasi-LPV trabajado para el desarrollo de este trabajo de investigación. Se muestra el comportamiento de cada uno de los estados del sistema. Con la realización de esta simulación se pudo entender de una mejor manera el comportamiento dinámico de cada uno de los estados correspondientes a la fase contracción/relajación isovolumétrica. Esta representación es útil siempre y cuando el modelo no lineal se encuentre dentro de los límites con los que se formó la representación cuasi-LPV (q-LPV).



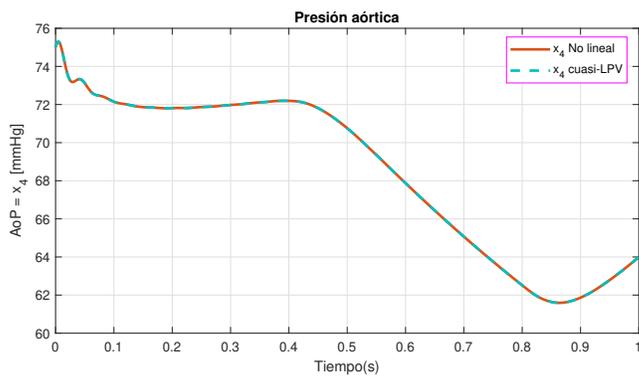
(a) Presión ventricular izquierda



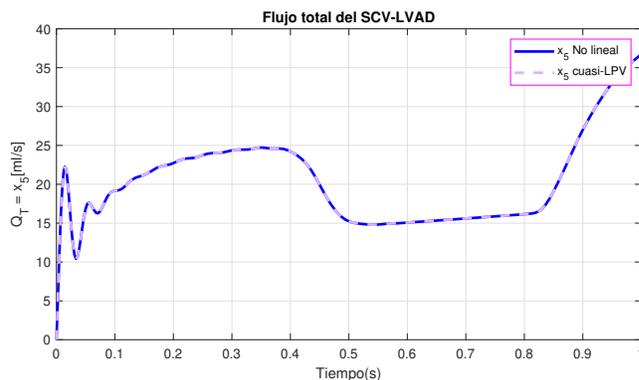
Presión en la aurícula izquierda



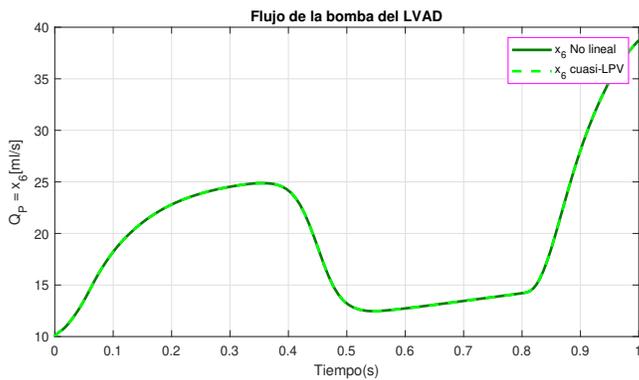
(b) Presión arterial



Presión aórtica

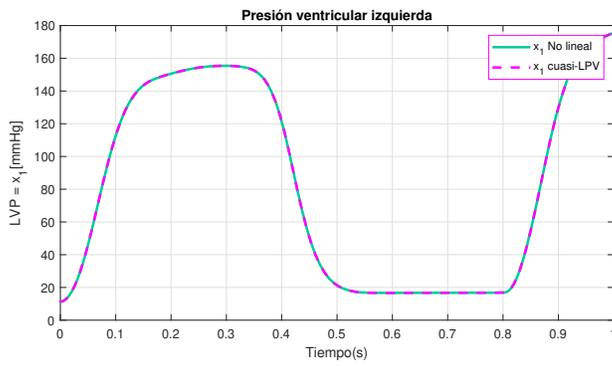


(c) Flujo total del SCV-LVAD

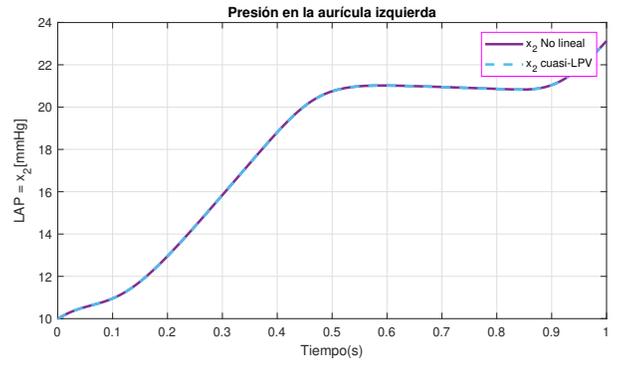


Flujo de la bomba del LVAD

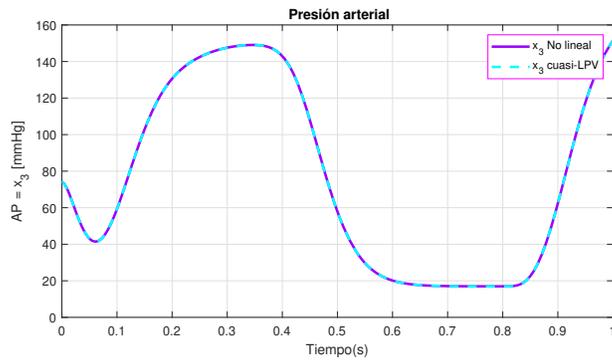
Figura 2.16. Comparación del modelo no lineal con el modelo cuasi-LPV. Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo.



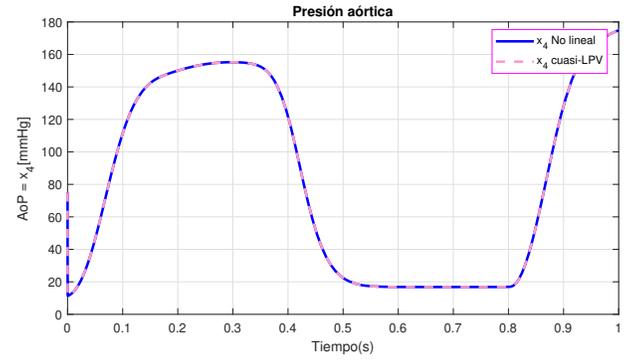
(a) Presión ventricular izquierda



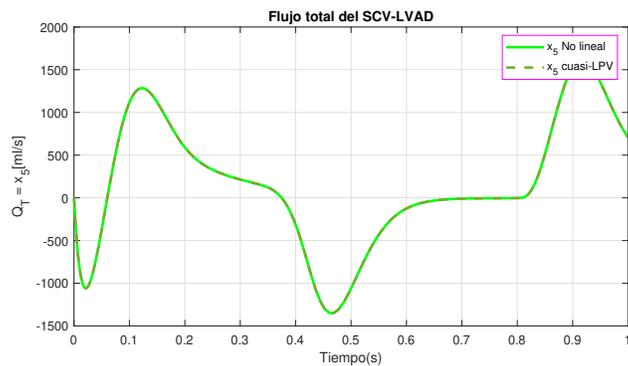
Presión en la aurícula izquierda



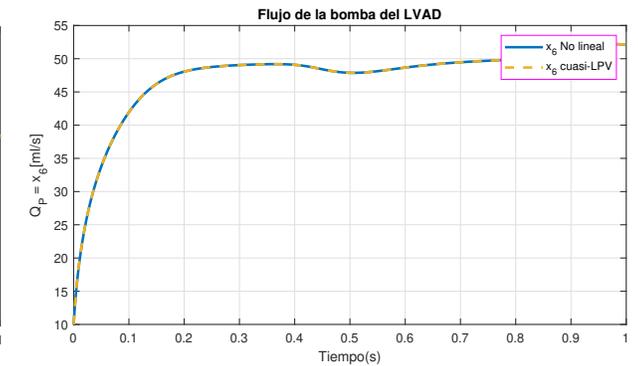
(b) Presión arterial



Presión aórtica

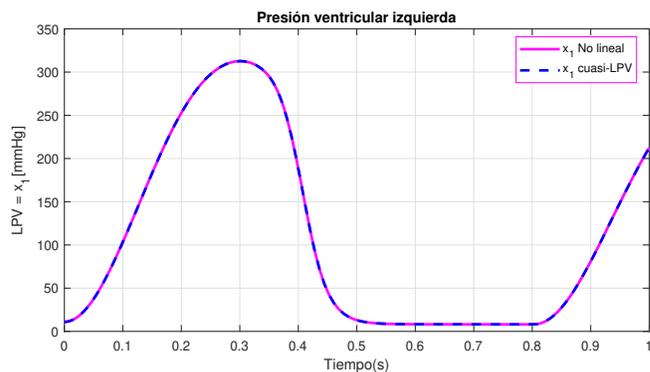


(c) Flujo total del SCV-LVAD

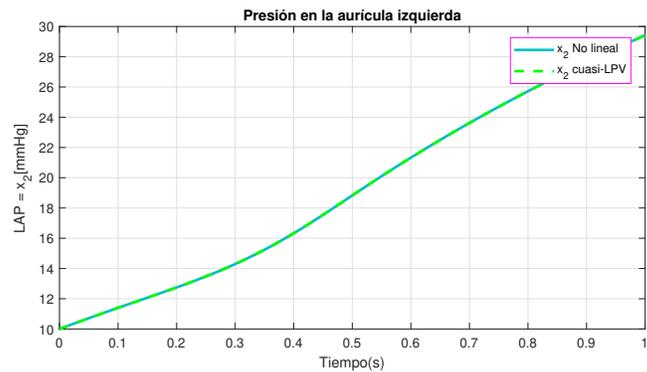


Flujo de la bomba del LVAD

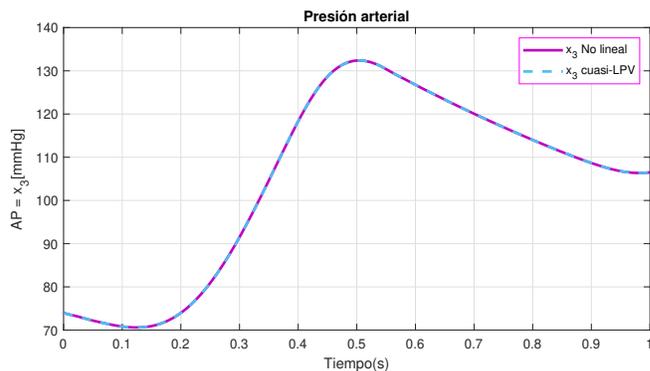
Figura 2.17. Comparación del modelo no lineal con el modelo cuasi-LPV. Fase de Eyección.



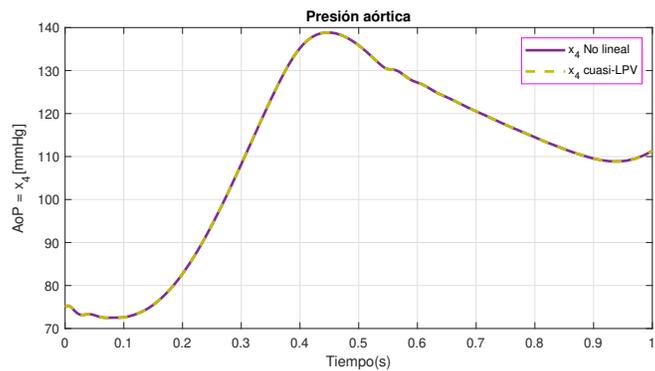
(a) Presión ventricular izquierda



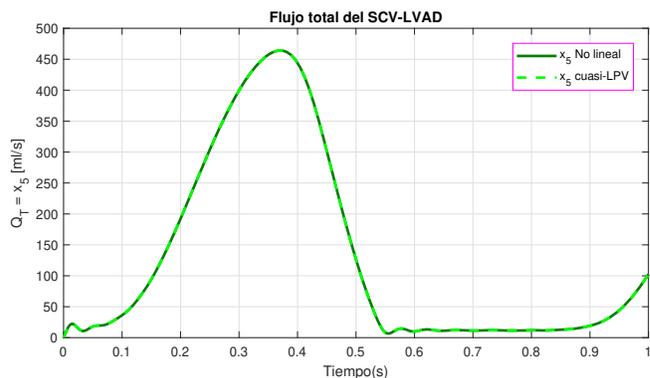
Presión en la aurícula izquierda



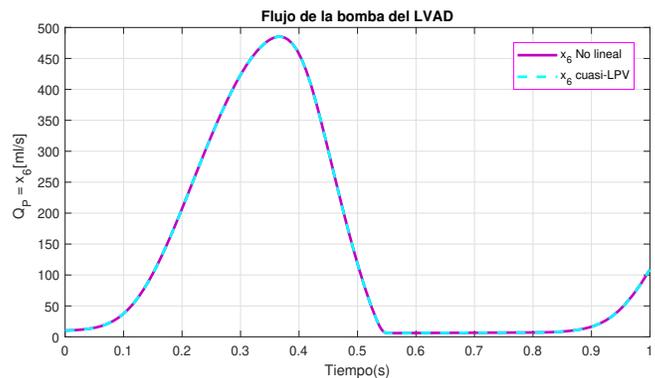
(b) Presión arterial



Presión aórtica



(c) Flujo total del SCV-LVAD



Flujo de la bomba del LVAD

Figura 2.18. Comparación del modelo no lineal con el modelo cuasi-LPV. Fase Contracción/Relajación isovolumétrica.

2.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentaron algunos de los modelos matemáticos del sistema cardiovascular existentes en la literatura. De igual forma, se analizaron los dispositivos de asistencia ventricular, los cuales hoy en día se utilizan con mayor frecuencia debido a la falta de donantes de corazón. Por medio de una revisión del estado del arte, se tiene que, el enfoque de este trabajo de tesis se inclina hacia el uso de un modelo matemático análogo eléctrico para el cual se considera la existencia de un dispositivo de asistencia ventricular izquierda.

Se presentaron las fases del ciclo cardíaco del corazón y la conmutación de cada una de ellas, de ahí se parte de la idea de formar cuatro modelos matemáticos (uno por cada fase de conmutación de los diodos), de los cuales fue analizado cada uno de ellos ya que la fase completa de un ciclo cardíaco del corazón depende del tiempo de participación de cada uno de estos modelos. Cada uno de estos modelos fue presentado en forma de circuito eléctrico (RLC) el cual incluye al dispositivo de asistencia ventricular izquierda. Las cuatro fases del ciclo cardíaco son: a) Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo, b) Fase de Eyección, c) Fase de Contracción isovolumétrica y d) Fase de Relajación isovolumétrica.

Posteriormente, se presentaron conceptos básicos sobre sistemas en su forma cuasi-LPV (q-LPV) y como es que se realiza este tipo de representación; para que, con base en esa información se realizó la transformación de cada uno de los modelos en su forma no lineal a una representación cuasi-LPV.

Finalmente, se presentó la simulación y comparación del modelo no lineal contra la representación cuasi-LPV (q-LPV), una por cada fase del ciclo cardíaco.

Diseño de observadores aplicados a cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón

En este capítulo se presenta el diseño del observador dinámico generalizado (GDO, por sus siglas en inglés *Generalized Dynamic Observer*) utilizado para la estimación de los estados que no se encuentran disponibles para su medición. De igual forma, se presenta el diseño del observador funcional dinámico generalizado (GDFO, por sus siglas en inglés *Generalized Dynamic Functional Observer*). Así como las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de este tipo de observadores.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 3.1 se presenta el diseño del GDO para la estimación de las variables de estado no medidas $x(t)$. Así como también, se muestran las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de este tipo de observador. De igual forma, se muestra la parametrización y análisis de estabilidad del observador la cual esta basado en la solución de LMI's.

En la sección 3.2 se presenta el diseño del GDFO para la estimación de una función lineal. Se presentan las condiciones suficientes y necesarias para la existencia de este observador. Se muestra la parametrización del observador y el análisis de estabilidad basada en LMI's. También, se proporciona un algoritmo donde se presentan los pasos a seguir para diseñar el GDFO.

En la sección 3.3 se presenta el cálculo de la ganancia L que establezca al sistema cardiovascular en combinación con el dispositivo de asistencia ventricular.

Es importante notar que la estructura del observador GDO está relacionada a la estimación de variables de estado del sistema para sistemas cuasi-LPV (q-LPV). Para el caso del observador GDFO este, está orientado a la estimación de una función lineal. Para este caso de estudio la función estimada por el GDFO será considerada como una ley de control la cual permitirá cerrar el lazo de control.

3.1. Diseño del observador dinámico generalizado para la estimación de los estados del sistema cardiovascular

En esta sección se presenta el diseño del observador dinámico generalizado (GDO, por sus siglas en inglés *Generalized Dynamic Observer*) para un sistema bajo la representación tipo cuasi-LPV. Por consiguiente, se presentan las condiciones necesarias y suficientes para el diseño de este tipo de observador.

3.1.1. Planteamiento del problema

Considere un sistema no lineal bajo el marco de la representación q-LPV:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables de salida medidas $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son matrices conocidas, $\mu_i(\varrho(t))$ son las $k = 2^r$ funciones de ponderación, siendo r el número de no linealidades en el sistema.

Por tanto, para que exista un observador para este tipo de sistema, primero se debe verificar la condición de observabilidad. La observabilidad es una prueba para conocer si a partir de los estados y salidas disponibles del sistema se pueden estimar los estados no medibles del sistema. Esta condición se muestra a continuación:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{pmatrix} = n, \quad \forall_i = 1, \dots, k.\tag{3.2}$$

Lema 1. Sean dadas las matrices \mathcal{B} y \mathcal{Q}_i . Para las cuales las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Existe una matriz \mathcal{X} la cual satisface

$$\mathcal{B}\mathcal{X} + \mathcal{B}\mathcal{X}^T + \mathcal{Q} < 0\tag{3.3}$$

2. La siguiente condición se cumple

$$\mathcal{B}^\perp Q \mathcal{B} < 0 \quad (3.4)$$

Suponiendo que las afirmaciones anteriores se cumplen y que $\mathcal{B}^\perp \mathcal{B} > 0$. Entonces la matriz \mathcal{X} en el enunciado 1 está dada por:

$$\mathcal{X} = -\sigma \mathcal{B}^T + \sqrt{\sigma} \mathcal{L} \Omega_i^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

donde \mathcal{L} es una matriz de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios tal que $\|\mathcal{L}\| < 1$ y $\sigma > 0$ es un escalar que satisface

$$\Omega_i = \sigma \mathcal{B} \mathcal{B}^T - Q_i > 0 \quad (3.6)$$

Ahora bien, si se cumple la condición de observabilidad entonces existe un GDO como se muestra a continuación:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t) + J_i u(t)) \quad (3.7)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (S_i \zeta(t) + G_i v(t) + M_i y(t)) \quad (3.8)$$

$$\hat{x}(t) = P \zeta(t) + Q y(t) \quad (3.9)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estado del observador funcional, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_i}$ es un vector auxiliar y $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $x(t)$. Las matrices $N_i, J_i, F_i, H_i, S_i, G_i, M_i, P, Q$ son matrices conocidas de dimensiones apropiadas tal que $\hat{x}(t)$ converja asintóticamente a $x(t)$.

Siendo $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$ una matriz para definir el vector de error transformado

$$e(t) = \zeta(t) - T x(t) \quad (3.10)$$

La derivada del error transformado es:

$$\dot{e}(t) = \dot{\zeta}(t) - T \dot{x}(t) \quad (3.11)$$

de modo que la dinámica del error de estimación puede ser expresada como:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (N_i e(t) + H_i v(t) + (N_i T + F_i C - T A_i) x(t) + (J_i - T B_i) u(t)) \quad (3.12)$$

Utilizando la definición de $e(t)$ en las Ecs. (3.8) y (3.9) estas se pueden reescribir como:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (S_i e(t) + (S_i T + M_i C) x(t) + G_i v(t)) \quad (3.13)$$

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (Pe(t) + (PT + QC)x(t)) \quad (3.14)$$

Si las siguientes consideraciones son verificadas:

- a. $N_i T + F_i C - T A_i = 0$
- b. $J_i = T B_i$
- c. $S_i T + M_i C = 0$
- d. $PT + QC = I_n$

entonces la dinámica del error de observación, formada por las Ecs. (3.12) y (3.13) puede ser escrita como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}_{\varphi(t)} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & G_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\varphi(t)} \quad (3.15)$$

Considerando la Ec. (3.14) se obtiene

$$\hat{x}(t) - x(t) = Pe(t) \quad (3.16)$$

En este caso, si la matriz \mathbb{A}_i es estable $\forall i = 1, \dots, k$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} Pe(t) = 0$

3.1.2. Parametrización de las matrices del observador

Antes de desarrollar la solución al problema de diseño del *GDO*, se presenta la parametrización de las matrices que se utilizarán para el desarrollo del observador con base en las soluciones algebraicas previas (a) -(d) considerando las condiciones mostradas en la sección 3.1.1.

Lema 2: Partiendo de las condiciones (a-b) se tiene la parametrización de las matrices. Considerando una matriz arbitraria $E \in \mathbb{R}^{qo \times n}$ de rango fila completo, tal que, $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ es de rango

columna completo y además una matriz $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$.

Tomando en cuenta las condiciones (c-d) de la sección 3.1.1 estas pueden ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Para que, la Ec. (3.17) tenga una solución es necesario que se cumpla:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} T \\ C \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix} = n \quad (3.18)$$

Si esta condición se cumple, existen dos matrices de dimensiones $T \in \mathbb{R}^{qo \times n}$ y $K \in \mathbb{R}^{qo \times p}$ tal que:

$$T + KC = E \quad (3.19)$$

la cual se puede reescribir como:

$$[T \quad K] \Omega = E \quad (3.20)$$

si $\text{rank}(\Omega) = \text{rank} \begin{bmatrix} \Omega \\ E \end{bmatrix}$, entonces la solución general de la Ec. (3.20) está dada como:

$$[T \quad K] = E\Omega^+ - Z(I_{n+p} - \Omega\Omega^+) \quad (3.21)$$

la cual se puede expresar como:

$$T = T_1 - ZT_2 \quad (3.22)$$

$$K = K_1 - ZK_2 \quad (3.23)$$

donde:

$$T_1 = E\Omega^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad T_2 = (I_{n+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = E\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad K_2 = (I_{n+p} - \Omega\Omega^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$$

y Z son matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas.

Considerado la matriz T de la Ec. (3.22), la condición a) puede ser escrita como:

$$N_i E + \bar{K}_i C = T A_i \quad (3.24)$$

donde $\bar{K} = F_i - N_i K$. La Ec. (3.24) puede ser reescrita como:

$$[N_i \quad \bar{K}_i] \Sigma = T A_i \quad (3.25)$$

La solución general de la Ec. (3.25), considerando la parametrización de la matriz T es escrita como:

$$N_i = N_{1,i} - ZN_{2,i} - Y_{1,i}N_3 \quad (3.26)$$

$$\bar{K}_i = \bar{K}_{1,i} - Z\bar{K}_{2,i} - Y_{1,i}\bar{K}_3 \quad (3.27)$$

donde:

$$N_{1,i} = T_1 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_{2,i} = T_2 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{q_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = (I_{q_0+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{1,i} = T_1 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad \bar{K}_{2,i} = T_2 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_3 = (I_{q_0+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$$

donde $Y_{1,i}$ es una matriz arbitraria con dimensiones apropiadas.

De la Ec. (3.24) se puede determinar la matriz F_i como, $F_i = \bar{K}_i + N_i K$, la cual se puede reescribir como:

$$F_i = \bar{K}_{1,i} + N_{1,i} K - Z(\bar{K}_{2,i} + N_{2,i} K) - Y_{1,i}(\bar{K}_3 + N_3 K) \quad (3.28)$$

$$F_i = F_{1,i} - ZF_{2,i} - Y_{1,i}F_3 \quad (3.29)$$

donde:

$$F_{1,i} = T_1 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix} \quad F_{2,i} = T_2 A_i \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix}$$

$$F_3 = (I_{q_0+p} - \Sigma \Sigma^+) \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix}$$

Por otro lado, a partir de la Ec. (3.20) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{qo} & -K \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \Sigma \quad (3.30)$$

Reemplazando la Ec. (3.30) en (3.17) se tiene:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{qo} & -K \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

la solución general de la Ec. (3.31) está dada por:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \Sigma^+ - \begin{bmatrix} Y_{2,i} \\ Y_3 \end{bmatrix} (I_{qo+p} - \Sigma \Sigma^+) \right) \cdot \begin{bmatrix} I_{qo} & -K \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Donde se utiliza la inversa de la matriz como: $\begin{bmatrix} I_{qo} & K \\ 0 & I_p \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{qo} & -K \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$. Las matrices $Y_{2,i}$ y Y_3 son matrices arbitrarias con dimensiones apropiadas.

Entonces, las matrices S_i , M_i , P y Q se pueden escribir como:

$$S_i = -Y_{2,i} N_3 \quad (3.33)$$

$$M_i = -Y_{2,i} F_3 \quad (3.34)$$

$$P = P_1 - Y_3 N_3 \quad (3.35)$$

$$Q = Q_1 - Y_3 F_3 \quad (3.36)$$

donde $P_1 = \Sigma^+ \begin{bmatrix} I_{qo} \\ 0 \end{bmatrix}$ y $Q_1 = \Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix}$.

Ahora, utilizando las Ecs. (3.26) y (3.33) la dinámica del error dada por la Ec. (3.15) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \left((\mathbb{A}_i - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right) \quad (3.37)$$

donde $\mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} N_{1,i} - Z N_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I_{qo} \end{bmatrix}$ y $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_{1,i} & H_i \\ Y_{2,i} & G_i \end{bmatrix}$. Es de mencionar que, hasta este punto las matrices $N_{1,i}$, $N_{2,i}$ y N_3 son matrices conocidas, mientras que Z , $Y_{1,i}$, $Y_{2,i}$, H_i y G_i son matrices desconocidas a determinar.

3.1.3. Análisis de estabilidad del observador

En esta sección se presentan las condiciones de estabilidad del observador en forma de desigualdades matriciales lineales LMI's partiendo de una función candidata de Lyapunov. El cual tiene por objetivo encontrar las matrices Z y \mathbb{Y}_i tal que el sistema (3.37) sea asintóticamente estable.

Teorema 1: Existe una matriz de parámetros \mathbb{Y}_i tal que, el sistema dado por la Ec. (3.37) es asintóticamente estable si y solo si existe una matriz $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} > 0$ tal que la siguiente LMI es verificada:

$$N_3^{T\perp} \left[N_{1,i}^T X_1 - N_{2,i}^T W^T + X_1 N_{1,i} - W N_{2,i} \right] N_3^{T\perp T} < 0 \quad (3.38)$$

donde $Z = X_1^{-1}W$. Utilizando el lema de eliminación propuesto en [Skelton et al., 1998] la matriz \mathbb{Y}_i es parametrizada como:

$$\mathbb{Y}_i = X^{-1} \left(-\sigma \mathcal{B}^T + \sqrt{\sigma} \mathcal{L} \Gamma_i^{\frac{1}{2}} \right)^T \quad (3.39)$$

donde \mathcal{L} es una matriz de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios tal que $\|\mathcal{L}\| < 1$ y $\sigma > 0$ es un escalar que satisface

$$\Gamma_i = \sigma \mathcal{B} \mathcal{B}^T - \mathcal{Q}_i > 0 \quad (3.40)$$

donde

$$\mathcal{Q}_i = \begin{bmatrix} (N_{1,i} - Z N_{2,i})^T X_1 + X_1 (N_{1,i} - Z N_{2,i}) & (*) \\ X_2^T (N_{1,i} - Z N_{2,i}) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -N_3^T & 0 \\ 0 & I_{qo} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Demostración: Considerando la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\varphi(t)) = \varphi(t)^T X \varphi(t) > 0 \quad (3.42)$$

con $X = X^T = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} > 0$. Su derivada a lo largo de la trayectoria del sistema (3.37) está dada como:

$$\dot{V}(\sigma(t)) = \sigma(t)^T \left[(\mathbb{A}_{i1} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2)^T X + X (\mathbb{A}_{i1} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \right] \sigma(t) < 0 \quad (3.43)$$

La estabilidad asintótica del sistema (3.37) está garantizada solo si $\dot{V}(t) < 0$. Esto conduce a la siguiente LMI:

$$\mathbb{A}_{i1}^T X - \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T X + X \mathbb{A}_{i1} - X \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (3.44)$$

que puede reescribirse como:

$$\mathcal{Q}_i + \mathcal{B} \mathcal{X}_i + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i)^T < 0 \quad (3.45)$$

donde $\mathcal{B} = -\mathbb{A}_2^T$, $\mathcal{Q}_i = \mathbb{A}_i^T X + X \mathbb{A}_i$ y $\mathcal{X}_i = \mathbb{Y}_i^T X$.

De acuerdo al **Lema 1** existe una matriz \mathcal{X}_i que satisface la desigualdad (3.45) si se cumple con la siguiente condición:

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{Q}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (3.46)$$

con $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} -N_3^{T\perp} & 0 \end{bmatrix}$ y \mathcal{Q}_i definida en la Ec. (3.41). Considerando las matrices \mathcal{B} y \mathcal{Q}_i se obtiene la desigualdad observada en (3.38). Si la condición (3.46) es verificada, entonces la matriz \mathbb{Y}_i se obtiene como se mostró en (3.39).

Algoritmo 1.

El siguiente algoritmo resume el diseño del observador para obtener las matrices correspondientes.

1. Elegir una matriz $E \in \mathbb{R}^{qo \times n}$ tal que la matriz $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ sea de rango columna completo.
2. Calcular las matrices $N_{1,i}$, $N_{2,i}$, N_3 , T_1 , T_2 , K_1 , K_2 , Q_1 , P_1 definidas en la sección 4.1.2.
3. Resolver la LMI (3.38) para encontrar X y Z .
4. Elegir una matriz \mathcal{L} , tal que $\|\mathcal{L}\| < 1$ y $\sigma > 0$ y determinar la matriz \mathbb{Y}_i de la Ec. (3.39).
5. Calcular el resto de las matrices del observador dinámico generalizado, N_i , H_i , G_i , S_i , M_i , J_i , P , Q considerando la matriz $Y_3 = 0$.

3.2. Diseño del Observador Funcional Dinámico Generalizado (*GDFO*) para la estimación de una ley de control

En esta sección se presenta el diseño del Observador Funcional Dinámico Generalizado (*GDFO*) para un sistema con representación tipo cuasi-LPV (q-LPV). De igual forma, se muestran las condiciones necesarias y suficientes para diseñar este tipo de observador, el cual es aplicado al sistema cardiovascular en combinación con un dispositivo de asistencia ventricular izquierdo, con el objetivo de encontrar una ley de control adecuada para que con ella se pueda cerrar el lazo de control

del sistema.

Por lo tanto, la estimación de una función es utilizada para dos objetivos principales. El primer objetivo es estimar los estados no medibles del sistema. Por lo tanto, este observador podría considerarse como un observador de orden reducido, siempre que se satisfaga la propiedad de observabilidad funcional. El segundo objetivo de la estimación de funciones es, estimar una ley de control a partir de los estados, pero esto sin necesidad de estimar los estados de forma independiente. De igual forma, el diseño y las condiciones de existencia del observador propuesto se proporcionaron a través de un análisis de estabilidad basado en Lyapunov.

Este tipo de observadores presenta grandes ventajas algunas de ellas son:

- Un sistema que no es completamente observable puede ser funcionalmente observable.
- El orden necesario para diseñar el (*GDFO*) no necesariamente debe ser del mismo orden del sistema.
- Para el caso del control realimentado basta con un (*GDFO*) para calcular la ley de control y no es necesario el diseño de dos sistemas: el observador más el control por retroalimentación de estados.

En la Fig. 3.1 se muestra un esquema de como se estimará dicha ley de control. También se puede apreciar cómo el observador hace la función de controlador y proporciona la ley de control que regula al sistema cardiovascular en combinación con el dispositivo de asistencia ventricular izquierdo.

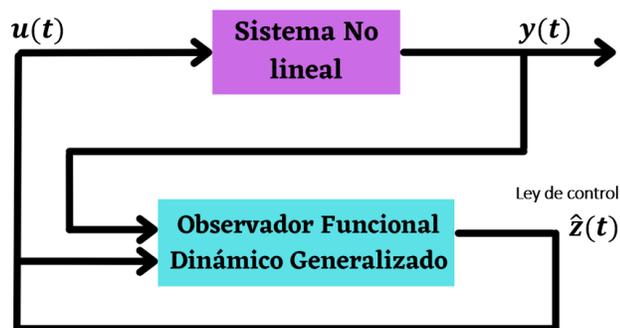


Figura 3.1. Diagrama general del observador funcional dinámico generalizado para la estimación de una ley de control

3.2.1. Planteamiento del problema

Considere un sistema no lineal bajo el marco de la representación q-LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.47)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$z(t) = Lx(t)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ representa las variables de salida medidas y $z(t) \in \mathbb{R}^q$ es la función lineal que se desea estimar. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son matrices conocidas, $\mu_i(\varrho(t))$ son las $k = 2^r$, siendo r el número de no linealidades en el sistema.

Para poder realizar el diseño del observador funcional, se asume que el sistema cuasi-LPV cumple con la propiedad de observabilidad funcional.

La observabilidad funcional permite comprobar si la función lineal de los estados puede ser estimada, a partir de la información disponible de la entrada y salida del sistema [Darouach and Fernando, 2020], la cual esta dada como se muestra en las Ecs. (3.48) y (3.49):

$$\text{rank} \begin{bmatrix} LA_i \\ CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sL - LA_i \\ CA_i \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} \quad \text{donde } s \in \mathbb{C} \quad (3.49)$$

Ahora bien, si se cumple la condición de observabilidad, entonces, considere el observador funcional dinámico generalizado para el sistema de la Ec. (3.47):

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t) + J_i u(t)) \quad (3.50)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (S_i \zeta(t) + G_i v(t) + M_i y(t)) \quad (3.51)$$

$$\hat{z}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (P_i \zeta(t) + Q_i y(t)) \quad (3.52)$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$ representa el vector de estado del observador funcional, $v(t) \in \mathbb{R}^{q_i}$ es un vector auxiliar y $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación de $z(t)$. Las matrices N_i , J_i , F_i , H_i , S_i , G_i , M_i , P_i , Q_i son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas las cuales son determinadas tal que \hat{z} converja asintóticamente a $z(t)$.

Dado que existe una matriz $T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ y considerando el error transformado $e(t) = \zeta(t) - Tx(t)$, entonces la derivada del error transformado está dado como:

$$\dot{e}(t) = \dot{\zeta}(t) - T\dot{x}(t) \quad (3.53)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (N_i e(t) + H_i v(t) + (N_i T + F_i C - T A_i) x(t)) + (J_i - T B_i) u(t) \quad (3.54)$$

Utilizando la definición de $e(t)$, las Ecs. (3.51) y (3.52) se pueden reescribir como:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (S_i e(t) + (S_i T + M_i C) x(t) + G_i v(t)) \quad (3.55)$$

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (P_i e(t) + (P_i T + Q_i C) x(t)) \quad (3.56)$$

Si las siguientes consideraciones son verificadas:

1. $N_i T + F_i C - T A_i = 0$
2. $J_i = T B_i$
3. $S_i T + M_i C = 0$
4. $P T + Q C = L$

entonces la dinámica del error de observación, formada por (3.54) y (3.55) puede ser escrita como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\varphi}(t)} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & G_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\varphi(t)} \quad (3.57)$$

Considerando la Ec. (3.56) se obtiene

$$\hat{z}(t) - z(t) = P e(t) \quad (3.58)$$

En este caso si la matriz \mathbb{A}_i es estable $\forall i = 1, \dots, m$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} P e(t) = 0$.

3.2.2. Parametrización de las matrices del observador

La parametrización de las matrices del observador GDFO no se muestra debido a que es similar a la presentada en la sección 4.1.2. Por tanto, utilizando las matrices N_i y S_i presentadas en el **Lema 2** de la sección 4.1.2, la dinámica del error del observador (3.57) se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \left((\mathbb{A}_i - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \right) \quad (3.59)$$

$$\text{donde } \mathbb{A}_i = \begin{bmatrix} N_{1,i} - ZN_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I_{qo} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_{1,i} & H_i \\ Y_{2,i} & G_i \end{bmatrix}$$

3.2.3. Análisis de estabilidad del observador

Después de analizar las matrices que parametrizan al observador, se procede a realizar el análisis de estabilidad del observador. Por tanto, en esta sección se presentan las condiciones necesarias de estabilidad en forma de desigualdades matriciales lineales partiendo de una función candidata de Lyapunov. El objetivo de la solución de las desigualdades es encontrar las matrices Z y \mathbb{Y}_i tal que el sistema (3.59) sea asintóticamente estable.

Teorema 2: Existe una matriz de parámetros \mathbb{Y}_i tal que, el sistema de la ecuación (3.59) es asintóticamente estable si y solo si existen una matriz $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} > 0$ tal que la siguiente LMI es verificada:

$$N_3^{T\perp} \left[N_{1,i}^T X_1 - N_{2,i}^T W^T + X_1 N_{1,i} - W N_{2,i} \right] N_3^{T\perp T} < 0 \quad (3.60)$$

donde $Z = X_1^{-1}W$, utilizando el lema de eliminación propuesto en [Skelton et al., 1998] la matriz \mathbb{Y}_i es parametrizada como:

$$\mathbb{Y}_i = X^{-1} \left(-\sigma \mathcal{B}^T + \sqrt{\sigma} \mathcal{L} \Gamma_i^{\frac{1}{2}} \right)^T \quad (3.61)$$

donde \mathcal{L} es una matriz de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios tal que $\|\mathcal{L}\| < 1$ y $\sigma > 0$ es un escalar que satisface

$$\Gamma_i = \sigma \mathcal{B} \mathcal{B}^T - Q_i > 0 \quad (3.62)$$

donde

$$Q_i = \begin{bmatrix} (N_{1,i} - ZN_{2,i})^T X_1 + X_1 (N_{1,i} - ZN_{2,i}) & (*) \\ X_2^T (N_{1,i} - ZN_{2,i}) & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -N_3^T & 0 \\ 0 & I_{qo} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

A su vez, todo se resume en la solución del siguiente algoritmo:

Algoritmo 2:

1. Elegir una matriz $E \in \mathbb{R}^{qo \times n}$ tal que la matriz $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$ sea de rango columna completo.
2. Calcular las matrices $N_{1,i}$, $N_{2,i}$, N_3 , T_1 , T_2 , K_1 , K_2 , Q_1 , P_1 definidas en la sección 4.1.2.

3. Resolver la LMI (3.60) para encontrar X y Z .
4. Elegir una matriz \mathcal{L} , tal que $\|\mathcal{L}\| < 1$ y $\sigma > 0$ y determinar la matriz \mathbb{Y}_i de la Ec. (3.61).
5. Calcular el resto de las matrices del observador funcional dinámico generalizado, $N_i, H_i, G_i, S_i, M_i, J_i, P, Q$ considerando la matriz $Y_3 = 0$.

3.3. Determinación de la función lineal

En esta sección se muestra la obtención de la función lineal del observador el cual permitirá regular al sistema cardiovascular en combinación con el dispositivo de asistencia ventricular.

Considerando el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.64)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.65)$$

y una ley de control por retroalimentación de estados de la forma:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3.66)$$

sustituyendo (3.66) en (3.64) se obtiene la siguiente expresión en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_i - B_i K) x(t) \quad (3.67)$$

Para determinar el valor de K tal que $(A_i - B_i K), \forall i = 1, \dots, k$ sean estables, se hace uso del análisis de estabilidad basado en Lyapunov.

Proponiendo una función candidata de Lyapunov

$$V(t) = x(t)^T P x(t) > 0 \quad (3.68)$$

con $P = P^T > 0$. Cuya derivada está dada por:

$$\dot{V}(t) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0 \quad (3.69)$$

Ahora, sustituyendo la Ec. (3.67) en la Ec. (3.69) se tiene:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho) \left(x(t)^T \left((A_i - B_i K)^T P + P (A_i - B_i K) \right) x(t) \right) \quad (3.70)$$

que es equivalente a

$$A_i^T P - K^T B_i^T P + P A_i - P B_i K < 0 \quad (3.71)$$

Debido a que la bilinealidad en la desigualdad se premultiplica y posmultiplica por P^{-1} , la desigualdad queda de la siguiente manera:

$$P^{-1}(A_i^T P - K^T B_i^T P + P A_i - B_i K)P^{-1} < 0 \quad (3.72)$$

si se agrupa $R = P^{-1}$, entonces se obtiene:

$$R A_i^T - R K^T B_i^T + A_i R - B_i K R < 0 \quad (3.73)$$

Por lo tanto, si ahora se agrupa $S = K R$, se obtiene la siguiente desigualdad matricial:

$$R A_i^T - S^T B_i^T + A_i R - B_i S < 0 \quad (3.74)$$

Por consiguiente, al resolver la LMI (3.74) se podrá encontrar una matriz K que permitirá estabilizar los i modelos locales, y de esta forma se podrá estabilizar el modelo interpolado. Sin embargo, uno de los inconvenientes del modelo SCV-LVAD es que la matriz K además de estabilizar el sistema, se debe tener en cuenta la forma en que se realiza la estabilización del sistema.

Se conoce que, el comportamiento de la ley de control en cuestión está determinada por la colocación de polos del término $(A_i - B_i K)$, por tanto, para poder determinar la colocación de polos en los i modelos se propone una región LMI, la cual está determinada como \mathcal{D} . Esta región \mathcal{D} está determinada por un centro en $(-q, 0)$ y un radio r . Estos valores determinan la región \mathcal{D} en la cual son ubicados los valores propios de cada término $(A_i - B_i K)$.

La desigualdad 3.74 expresada en función de la región \mathcal{D} puede reescribirse como:

$$\begin{pmatrix} -rR & \theta_i^T + qR \\ \theta_i + qR & -rR \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

donde $\theta = A_i R - B_i S$, $R = P^{-1}$ y $S = K R$.

Una vez que se obtiene la matriz K la cual tiene los polos de los i términos $(A_i - B_i K)$ colocados en una región circular determinada, como se muestra en la Figura 3.2. Se considera que $L = -K$.

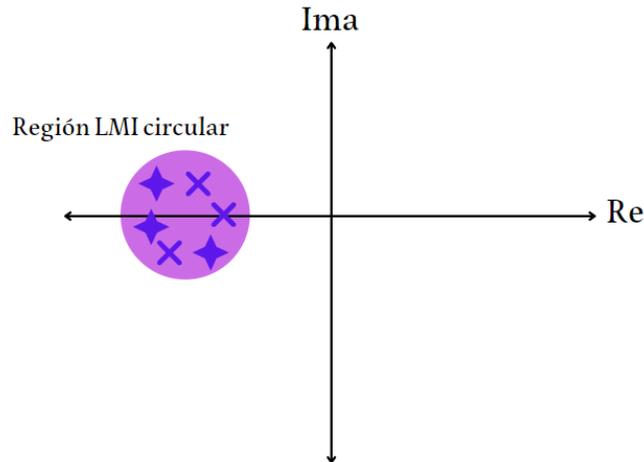


Figura 3.2. Ubicación de polos mediante una región LMI circular

3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el diseño de un observador dinámico generalizado para la estimación de los estados no disponibles a la salida del sistema. De igual forma, se presenta el diseño de un observador funcional dinámico generalizado. Este último se realiza para estimar una función de tal manera que esta pueda estabilizar al sistema. Para este tipo de observadores se presentaron las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de cada uno de ellos. La estabilidad de estos dos observadores se comprobó mediante la solución de LMIs mediante una función candidata de Lyapunov.

Finalmente, se presentó como se determina la función lineal para el caso del observador funcional dinámico generalizado. Se analizó esta función con el fin de cerrar el lazo de control por medio de ella.

Estimación de variables del sistema cardiovascular y control de un LVAD

En este capítulo se presentan los resultados que se obtuvieron al realizar la simulación del GDO, el cual fue utilizado para estimar los estados del sistema cardiovascular, así como también, los resultados de simulación del GDFO el cual fue utilizado para la estimación de una ley de control de tal forma que está establezca al sistema cardiovascular en lazo cerrado. De igual manera, se presentan los resultados de la simulación del sistema cardiovascular en su forma conmutada. Finalmente se presentan los resultados de un controlador PI, utilizado para regular la presión aórtica en cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 4.1 se presenta el resultado de la simulación del GFO para la estimación de variables no medidas del sistema cardiovascular con la implementación de un LVAD para cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón.

En la sección 4.2 se presentan los resultados de la simulación del sistema en una representación de forma conmutada, esta conmutación está dada por los estados de los diodos dependiendo de cada una de las fases del ciclo cardíaco.

En la sección 4.3 se presenta el resultado de la simulación del GDFO utilizado para la estimación de una ley de control de tal forma que esta pueda estabilizar al sistema en lazo cerrado.

En la sección 4.4 se presenta el resultado de la simulación del controlador PI, el cual se implementa para regular la presión aórtica. Este controlador es realizado para cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón.

4.1. Estimación de los estados del sistema cardiovascular con la implementación de un LVAD

En esta sección se presenta la implementación de un observador dinámico generalizado para cada una de las fases del sistema cardiovascular en combinación con un LVAD con el fin de estimar cada uno de los estados del sistema $x(t)$.

4.1.1. Simulación 4. Estimación de los estados del sistema para la fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto funcionamiento del GDO para estimar los estados del sistema correspondiente a la fase de llenado ventricular.

En esta simulación se considera un sistema cuasi-LPV (q-LPV), el cual está dado por la siguiente representación:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{Li}x(t) + B_{Li}u(t)) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Por consiguiente, una vez analizado el proceso para el diseño del observador dinámico generalizado, se procede al diseño del mismo. Primero, se realiza el diseño para la fase de llenado ventricular.

Para la realización del observador de siguen los pasos mostrados en el **Algoritmo 1** de la sección [3.1.3](#)

Primero, se elige una matriz $E = I_{6 \times 6}$, tal que $\text{rank} \begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix} = 6$

Considerando las matrices $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0.1 & \dots & 0.1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.1 & \dots & 0.1 \end{bmatrix}_{14 \times 12}$ $\sigma = 15$ para resolver las LMI's del **Teorema 1** se obtuvieron las siguientes matrices para el observador:

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1.1339 & 0.3980 & 0.1821 & 0.5196 & 0.0036 & 0.1064 \\ 0.0302 & -0.0457 & -0.0026 & 0.0181 & -0.0001 & 0.0023 \\ -0.0002 & 0.0008 & -0.0026 & 0.0001 & 0.0004 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0.0002 & 0.0001 & -0.0062 & 0.0063 \\ -0.0000 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0237 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0055 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} -1.1007 & 0.3980 & 0.1821 & 0.5196 & 0.0036 & 0.1064 \\ 0.0302 & -0.0457 & -0.0026 & 0.0181 & -0.0001 & 0.0023 \\ -0.0002 & 0.0008 & -0.0006 & 0.0001 & 0.0004 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0.0002 & 0.0001 & -0.0062 & 0.0063 \\ -0.0000 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0237 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0055 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} -714.6956 & 12.0000 & 182.0508 & 519.6447 & 3.6227 & 107.3378 \\ 30.2073 & -45.6818 & -2.6156 & 18.0901 & -0.0563 & 2.3098 \\ -0.2171 & 0.7519 & -0.6234 & 0.0887 & 0.3784 & 2.3098 \\ -0.3420 & 0 & 0.2051 & 0.1369 & -6.2466 & 6.3120 \\ 0 & 0 & -999.9999 & 999.9999 & -23.7375 & 0 \\ 10.5885 & 0 & 0.0001 & -10.5887 & 0 & -5.4586 \end{bmatrix}$$

$$N_4 = \begin{bmatrix} -1.1007 & 0.3980 & 0.1821 & 0.5196 & 0.0036 & 0.1064 \\ 0.0302 & -0.0457 & -0.0026 & 0.0181 & -0.0001 & 0.0023 \\ -0.0002 & 0.0008 & -0.0006 & 0.0001 & 0.0004 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0.0002 & 0.0001 & -0.0062 & 0.0063 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0237 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0055 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_5 = \begin{bmatrix} -1.1339 & 0.3980 & 0.1821 & 0.5196 & 0.0036 & 0.1064 \\ 0.0302 & -0.0457 & -0.0026 & 0.0181 & -0.0001 & 0.0023 \\ -0.0002 & 0.0008 & -0.0026 & 0.0001 & 0.0004 & 0 \\ -0.0003 & 0 & 0.0002 & 0.0001 & -0.0062 & 0.0063 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0237 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0055 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_6 = \begin{bmatrix} -747.9256 & 12.0000 & 182.0508 & 519.6447 & 3.6227 & 107.3378 \\ 30.2073 & -45.6818 & -2.6156 & 18.0901 & -0.0563 & 2.3098 \\ -0.2171 & 0.7519 & -0.6234 & 0.0887 & 0.3784 & 2.3098 \\ -0.3420 & 0 & 0.2051 & 0.1369 & -6.2466 & 6.3120 \\ 0 & 0 & -999.9999 & 999.9999 & -23.7375 & 0 \\ 10.5885 & 0 & 0.0001 & -10.5887 & 0 & -5.4586 \end{bmatrix}$$

$$N_7 = \begin{bmatrix} -747.9256 & 12.0000 & 182.0508 & 519.6447 & 3.6227 & 107.3378 \\ 30.2073 & -45.6818 & -2.6156 & 18.0901 & -0.0563 & 2.3098 \\ -0.2171 & 0.7519 & -0.6234 & 0.0887 & 0.3784 & 2.3098 \\ -0.3420 & 0 & 0.2051 & 0.1369 & -6.2466 & 6.3120 \\ 0 & 0 & -999.9999 & 999.9999 & -23.7375 & 0 \\ 10.5885 & 0 & 0.0001 & -10.5887 & 0 & -5.4586 \end{bmatrix}$$

$$N_8 = \begin{bmatrix} -714.6956 & 12.0000 & 182.0508 & 519.6447 & 3.6227 & 107.3378 \\ 30.2073 & -45.6818 & -2.6156 & 18.0901 & -0.0563 & 2.3098 \\ -0.2171 & 0.7519 & -0.6234 & 0.0887 & 0.3784 & 2.3098 \\ -0.3420 & 0 & 0.2051 & 0.1369 & -6.2466 & 6.3120 \\ 0 & 0 & -999.9999 & 999.9999 & -23.7375 & 0 \\ 10.5885 & 0 & 0.0001 & -10.5887 & 0 & -5.4586 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -377.3528 & -379.9237 & -379.9243 & -379.9243 & -379.9240 & -379.9233 \\ -18.3890 & -15.7989 & -18.3888 & -18.3947 & -18.3893 & -18.3893 \\ 55.6222 & 55.6231 & 58.9362 & 55.6263 & 55.6225 & 55.6275 \\ -45.3903 & -45.3953 & -45.3862 & -42.0827 & -45.3903 & -45.3850 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3993 & 2.0936 \\ 1.4706 & 1.4700 & 1.4749 & 1.4749 & 1.4700 & 4.7752 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -378.0683 & -380.6391 & -380.6398 & -380.6398 & -380.6394 & -380.6388 \\ -18.3897 & -15.7997 & -18.3895 & -18.3954 & -18.3900 & -18.3900 \\ 55.6222 & 55.6230 & 58.9362 & 55.6262 & 55.6225 & 55.6275 \\ -45.3903 & -45.3953 & -45.3862 & -42.0827 & -45.3903 & -45.3850 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3993 & 2.0936 \\ 1.4706 & 1.4700 & 1.4749 & 1.4749 & 1.4700 & 4.7752 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -378.9085 & -381.4793 & -381.4800 & -381.4800 & -381.4796 & -381.4790 \\ -18.4536 & -15.8635 & -18.4534 & -18.4593 & -18.4539 & -18.4539 \\ 55.6095 & 55.6104 & 58.9235 & 55.6136 & 55.6099 & 55.6148 \\ -45.3569 & -45.3620 & -45.3529 & -42.0493 & -45.3570 & -45.3516 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3993 & 2.0936 \\ 1.4706 & 1.4700 & 1.4749 & 1.4749 & 1.4700 & 4.7752 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} -378.0683 & -380.6391 & -380.6398 & -380.6398 & -380.6394 & -380.6388 \\ -18.3897 & -15.7997 & -18.3895 & -18.3954 & -18.3900 & -18.3900 \\ 55.6222 & 55.6230 & 58.9362 & 55.6262 & 55.6225 & 55.6275 \\ -45.3903 & -45.3953 & -45.3862 & -42.0827 & -45.3903 & -45.3850 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3993 & 2.0936 \\ 1.4706 & 1.4700 & 1.4749 & 1.4749 & 1.4700 & 4.7752 \end{bmatrix}$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} -377.3528 & -379.9237 & -379.9243 & -379.9243 & -379.9240 & -379.9233 \\ -18.3890 & -15.7989 & -18.3888 & -18.3947 & -18.3893 & -18.3893 \\ 55.6222 & 55.6231 & 58.9362 & 55.6263 & 55.6225 & 55.6275 \\ -45.3903 & -45.3953 & -45.3862 & -42.0827 & -45.3903 & -45.3850 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3993 & 2.0936 \\ 1.4706 & 1.4700 & 1.4749 & 1.4749 & 1.4700 & 4.7752 \end{bmatrix}$$

$$H_6 = \begin{bmatrix} -378.1930 & -380.7638 & -380.7645 & -380.7645 & -380.7641 & -380.7635 \\ -18.4528 & -15.8627 & -18.4526 & -18.4585 & -18.4531 & -18.4531 \\ 55.6096 & 55.6104 & 58.9236 & 55.6136 & 55.6099 & 55.6149 \\ -45.3569 & -45.3620 & -45.3528 & -42.0493 & -45.3569 & -45.3516 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3992 & 2.0936 \\ 1.4861 & 1.4700 & 1.4905 & 1.4905 & 1.4855 & 4.7908 \end{bmatrix}$$

$$H_7 = \begin{bmatrix} -378.1930 & -380.7638 & -380.7645 & -380.7645 & -380.7641 & -380.7635 \\ -18.4528 & -15.8627 & -18.4526 & -18.4585 & -18.4531 & -18.4531 \\ 55.6096 & 55.6104 & 58.9236 & 55.6136 & 55.6099 & 55.6149 \\ -45.3569 & -45.3620 & -45.3528 & -42.0493 & -45.3569 & -45.3516 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3992 & 2.0936 \\ 1.4861 & 1.4700 & 1.4905 & 1.4905 & 1.4855 & 4.7908 \end{bmatrix}$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} -378.9085 & -381.4793 & -381.4800 & -381.4800 & -381.4796 & -381.4790 \\ -18.4536 & -15.8635 & -18.4534 & -18.4593 & -18.4539 & -18.4539 \\ 55.6095 & 55.6104 & 58.9235 & 55.6136 & 55.6099 & 55.6148 \\ -45.3569 & -45.3620 & -45.3529 & -42.0493 & -45.3570 & -45.3516 \\ 2.0936 & 2.0936 & 2.0935 & 2.0932 & 5.3992 & 2.0936 \\ 1.4861 & 1.4700 & 1.4905 & 1.4905 & 1.4855 & 4.7908 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0.0098 & -3.7076 \\ 0.0003 & 0.0971 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ -0.0009 & -0.0002 \\ -0.0028 & 0.0006 \\ 0.0001 & 0.0350 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_2 = \begin{bmatrix} -0.0095 & -3.5976 \\ 0.0003 & 0.0971 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ -0.0009 & -0.0002 \\ -0.0028 & 0.0006 \\ 0.0001 & 0.0350 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -0.0060 & -2.3476 \\ 0.0003 & 0.0971 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ -0.0009 & -0.0002 \\ -0.0028 & 0.0006 \\ 0.0001 & 0.0350 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_4 = \begin{bmatrix} -0.0095 & -3.5976 \\ 0.0003 & 0.0971 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ -0.0009 & -0.0002 \\ -0.0028 & 0.0006 \\ 0.0001 & 0.0350 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} -0.0098 & -3.7076 \\ 0.0003 & 0.0971 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ -0.0009 & -0.0002 \\ -0.0028 & 0.0006 \\ 0.0001 & 0.0350 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_{6,7} = \begin{bmatrix} -0.0063 & -2.4576 \\ 0.0003 & 0.0971 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ -0.0009 & -0.0002 \\ -0.0028 & 0.0006 \\ 0.0001 & 0.0350 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_8 = \begin{bmatrix} -0.0060 & -2.3476 \\ 0.0003 & 0.0971 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ -0.0009 & -0.0002 \\ -0.0028 & 0.0006 \\ 0.0001 & 0.0350 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$J_{1,2,3,7} = \begin{bmatrix} -8.2747 \\ -0.1798 \\ -0.0026 \\ -0.0040 \\ 0 \\ 0.1249 \end{bmatrix} \times 10^5 \quad J_{4,5,6,8} = \begin{bmatrix} -9.7940 \\ -0.2128 \\ -0.0030 \\ -0.0048 \\ 0 \\ 0.1478 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$S_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0002 & 0.0025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6528 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6526 \end{bmatrix} \quad M_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \begin{bmatrix} 0.5364 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5364 \\ 0.5960 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5364 \\ 0.5364 & 0.5960 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$G_{1,2} = \begin{bmatrix} -2.2607 & 0.3101 & 0.3108 & 0.3108 & 0.3104 & 0.3098 \\ 0.0730 & -2.5171 & 0.0728 & 0.0787 & 0.0733 & 0.0733 \\ -17.2452 & -17.2461 & -20.5593 & -17.2493 & -17.2456 & -17.2506 \\ 6.6916 & 6.6967 & 6.6876 & 3.3840 & 6.6916 & 6.6863 \\ -0.6816 & -0.6816 & -0.6815 & -0.6812 & -3.9873 & -0.6816 \\ -1.5876 & -1.5870 & -1.5920 & -1.5920 & -1.5870 & -4.8923 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -2.2659 & 0.3049 & 0.3056 & 0.3056 & 0.3052 & 0.3046 \\ 0.1701 & -2.4200 & 0.1699 & 0.1758 & 0.1704 & 0.1704 \\ -17.2330 & -17.2339 & -20.5470 & -17.2371 & -17.2333 & -17.2383 \\ 6.6581 & 6.6632 & 6.6541 & 3.35005 & 6.6582 & 6.6528 \\ -0.6816 & -0.6816 & -0.6815 & -0.6812 & -3.9872 & -0.6816 \\ -1.6032 & -1.6026 & -1.6075 & -1.6075 & -1.6026 & -4.9078 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} -2.2609 & 0.3102 & 0.3109 & 0.3108 & 0.3105 & 0.3098 \\ 0.0730 & -2.5171 & 0.0728 & 0.0787 & 0.0733 & 0.0733 \\ -17.2452 & -17.2461 & -20.5593 & -17.2493 & -17.2456 & -17.2506 \\ 6.6916 & 6.6967 & 6.6876 & 3.3840 & 6.6916 & 6.6863 \\ -0.6816 & -0.6816 & -0.6815 & -0.6812 & -3.9873 & -0.6816 \\ -1.5876 & -1.5870 & -1.5920 & -1.5920 & -1.5870 & -4.8923 \end{bmatrix}$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} -2.26078 & 0.3102 & 0.3108 & 0.3108 & 0.3104 & 0.3098 \\ 0.0730 & -2.5171 & 0.0728 & 0.0787 & 0.0733 & 0.0733 \\ -17.2452 & -17.2461 & -20.5593 & -17.2493 & -17.2456 & -17.2506 \\ 6.6916 & 6.6967 & 6.6876 & 3.3840 & 6.6916 & 6.6863 \\ -0.6816 & -0.6816 & -0.6815 & -0.6812 & -3.9873 & -0.6816 \\ -1.5876 & -1.5870 & -1.5920 & -1.5920 & -1.5870 & -4.8925 \end{bmatrix}$$

$$G_6 = \begin{bmatrix} -2.2660 & 0.3048 & 0.3055 & 0.3055 & 0.3051 & 0.3045 \\ 0.1701 & -2.4200 & 0.1699 & 0.1758 & 0.1704 & 0.1704 \\ -17.2330 & -17.2339 & -20.5470 & -17.2371 & -17.2333 & -17.2383 \\ 6.6581 & 6.6632 & 6.6541 & 3.3505 & 6.6582 & 6.6528 \\ -0.6816 & -0.6816 & -0.6815 & -0.6812 & -3.9872 & -0.6816 \\ -1.6032 & -1.6026 & -1.6075 & 1.6075 & 1.6026 & -4.9078 \end{bmatrix}$$

$$G_7 = \begin{bmatrix} -2.2661 & 0.3048 & 0.3055 & 0.3055 & 0.3051 & 0.3044 \\ 0.1701 & -2.4201 & 0.1699 & 0.1758 & 0.1704 & 0.1704 \\ -17.2330 & -17.2339 & -20.5470 & -17.2371 & -17.2333 & -17.2383 \\ 6.6581 & 6.6632 & 6.6540 & 3.3505 & 6.6581 & 6.6528 \\ -0.6816 & -0.6816 & -0.6815 & -0.6812 & -3.9872 & -0.6816 \\ -1.6032 & -1.6026 & -1.6075 & 1.6075 & 1.6026 & -4.9079 \end{bmatrix}$$

$$G_8 = \begin{bmatrix} -2.2658 & 0.3049 & 0.3056 & 0.3055 & 0.3052 & 0.3044 \\ 0.1701 & -2.4200 & 0.1699 & 0.1758 & 0.1704 & 0.1704 \\ -17.2331 & -17.2339 & -20.5471 & -17.2371 & -17.2333 & -17.2382 \\ 6.6581 & 6.6632 & 6.6541 & 3.3505 & 6.6583 & 6.6528 \\ -0.6816 & -0.6816 & -0.6815 & -0.6812 & -3.9872 & -0.6816 \\ -1.6031 & -1.6024 & -1.6075 & 1.6075 & 1.6026 & -4.9078 \end{bmatrix}$$

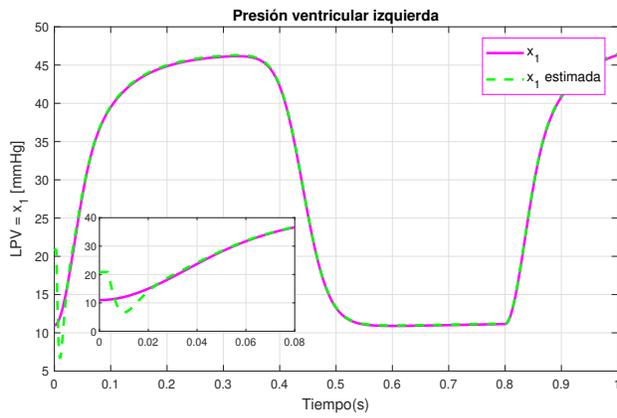
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.0074 & -1.4322 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.0004 & 0.0326 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0001 & 0.0531 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0295 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0910 & 33.0990 \\ -0.0014 & 0.7192 \\ 0.0001 & 0.0102 \\ 0.0001 & 0.0161 \\ 0.7500 & 0 \\ 0 & 0.7503 \end{bmatrix}$$

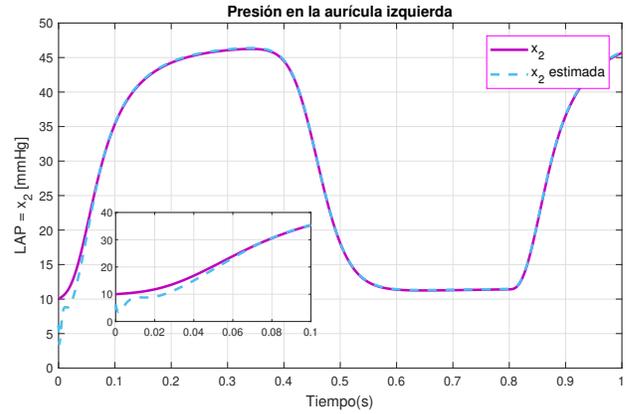
Para la realización de la simulación se hicieron las siguientes consideraciones: a) se utilizó un paso de integración fijo de 0.01s, b) la simulación tuvo una duración de 0.8s lo cual es equivalente a un ciclo cardíaco, c) la simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, d) finalmente, las condiciones de simulación fueron $x(0) = [11 \ 10 \ 74 \ 75 \ 0 \ 10]^T$ y para el GDO $\zeta(0) = [21 \ 6 \ 67 \ 65 \ 15 \ 20]^T$, $v(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

En la Fig. 4.1, se observan las gráficas de las estimaciones de los seis estados por los cuales está compuesto el sistema. De igual forma, se observa que cada uno de los estados converge al estado real. Se realiza la comparación de cada uno de los estados con el sistema no lineal de la Ec. (2.22).

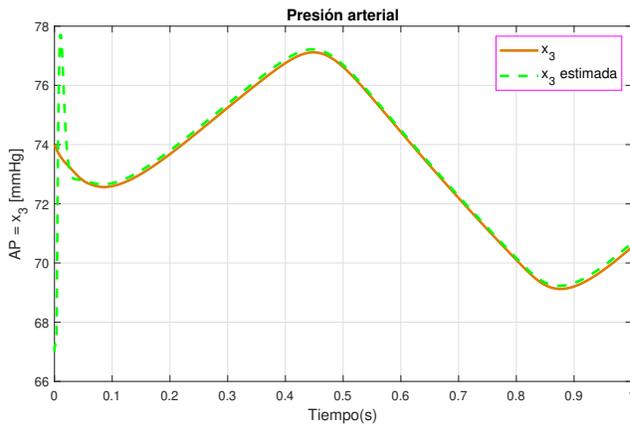
Con los resultados de simulación se ha probado el desempeño del GDO para estimar las señales no medidas del sistema cardiovascular en combinación con un dispositivo de asistencia ventricular para la fase de llenado.



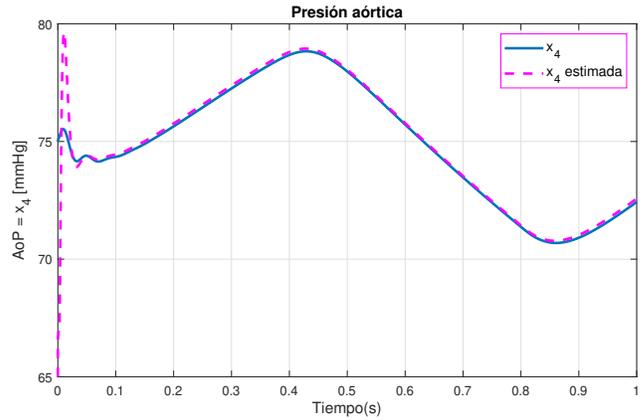
(a) Presión ventricular izquierda



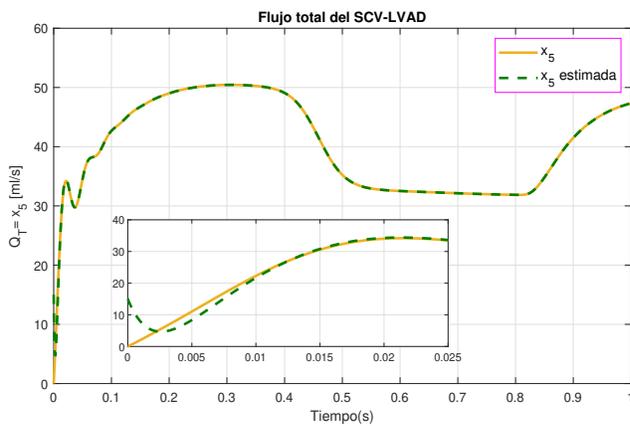
Presión en la aurícula izquierda



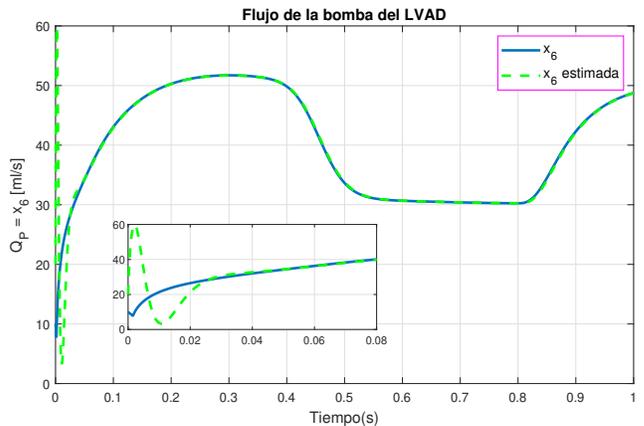
(b) Presión arterial



Presión aórtica



(c) Flujo total del SCV-LVAD



Flujo de la bomba del LVAD

Figura 4.1. Estimación de los estados de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo.

4.1.2. Simulación 5. Estimación de los estados del sistema para la Fase de Eyección a partir de un observador dinámico generalizado

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto funcionamiento del GDO para estimar los estados del sistema correspondiente a la fase de eyección.

En esta simulación se considera un sistema cuasi-LPV, el cual está dado por la siguiente representación:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{Ei}x(t) + B_{Ei}u(t)) \quad (4.2)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Por consiguiente, una vez analizado el proceso para el diseño del observador dinámico generalizado, se procede al diseño del mismo. Por tanto, se realiza el diseño para la fase de eyección.

Para la realización del observador de siguen los pasos mostrados en el **Algoritmo 1** de la sección [3.1.3](#)

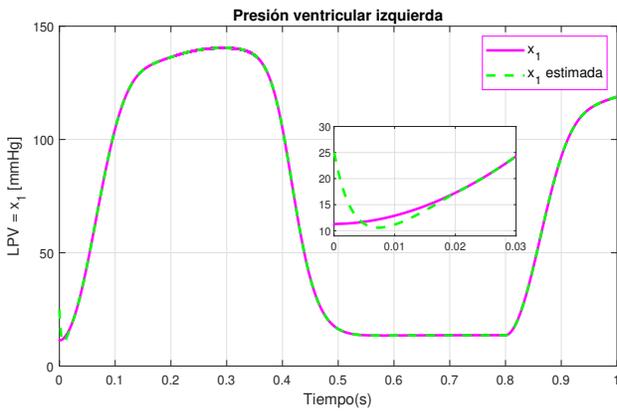
Primero, se elige una matriz $E = I_{6 \times 6}$, tal que $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} \right) = 6$

Considerando las matrices $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0.1 & \dots & 0.1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.1 & \dots & 0.1 \end{bmatrix}_{14 \times 12}$ y $\sigma = 18$ para resolver las LMI's del **Teorema**

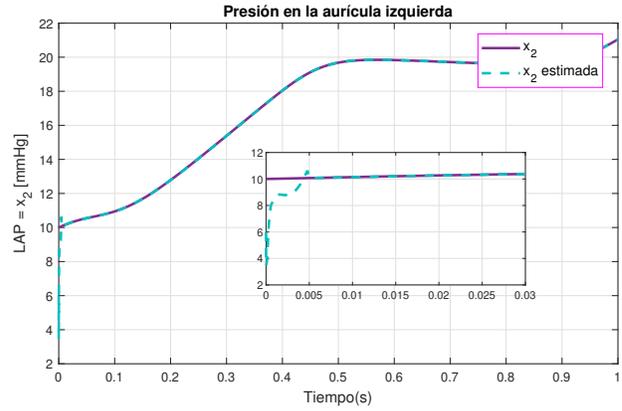
1 se obtuvieron las siguientes matrices para el observador, las cuales se tiene en el Anexo B.

Una vez que se tienen las matrices del GDO se procede a realizar la simulación, para la cual: a) se utilizó un paso de integración fijo de 0.01, b) la simulación tuvo una duración de 0.8 segundos lo cual es equivalente a un ciclo cardíaco, c) la simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, d) finalmente, las condiciones iniciales fueron $x(0) = [11 \ 10 \ 74 \ 75 \ 0 \ 10]^T$ y para el GDO $\zeta(0) = [25 \ 6 \ 85 \ 60 \ 15 \ 20]^T, v(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

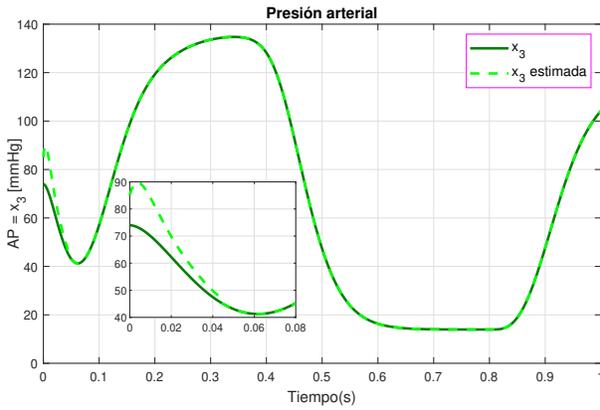
En la Fig. [4.2](#), se observan las gráficas de las estimaciones de los 6 estados por los cuales está compuesto el sistema. También se observa cómo cada uno de los estados converge al estado real. Finalmente, se realiza la comparación de cada uno de los estados estimados con el sistema no lineal de la Ec. [\(2.24\)](#).



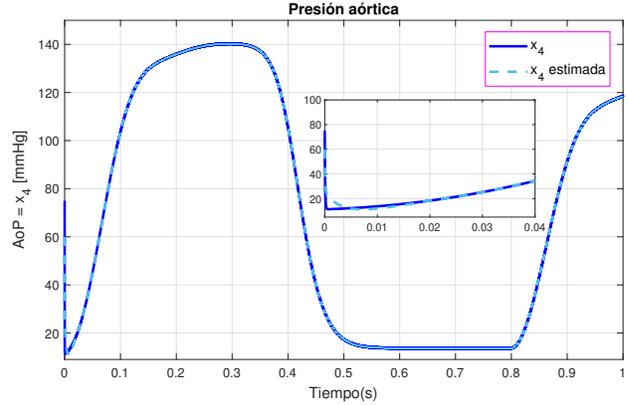
(a) Presión ventricular izquierda



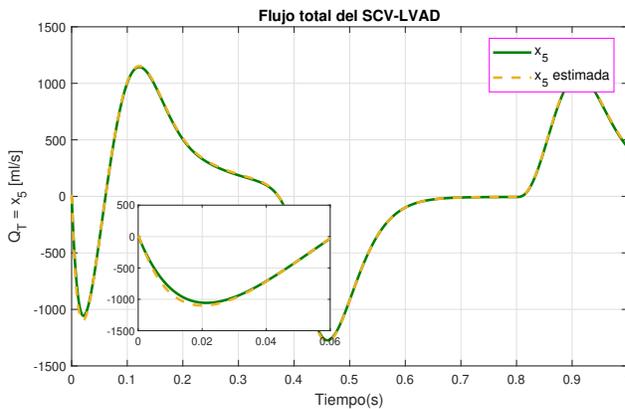
Presión en la aurícula izquierda



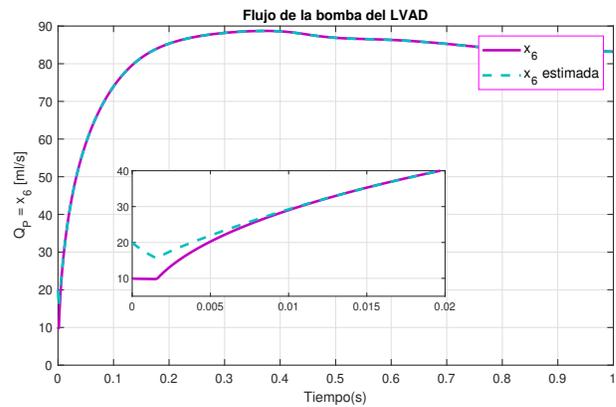
(b) Presión arterial



Presión aórtica



(c) Flujo total del SCV-LVAD



Flujo de la bomba del LVAD

Figura 4.2. Estimación de los estados de la Fase de Eyección.

Con esta simulación se ha evaluado el desempeño del GDO para estimar las señales no medidas del sistema cardiovascular en combinación con un dispositivo de asistencia ventricular para la fase de eyección.

4.1.3. Simulación 6. Estimación de los estados del sistema para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica a partir de un observador dinámico generalizado

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es evaluar el funcionamiento del GDO para estimar los estados del sistema correspondiente a la fase de contracción/relajación isovolumétrica.

En esta simulación se considera el sistema dado por la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{CRi}x(t) + B_{CRi}u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por consiguiente, una vez analizado el proceso para el diseño del observador dinámico generalizado, se procede a adaptar el diseño para la fase de contracción/relajación isovolumétrica.

Para la realización del observador se siguen los pasos mostrados en el **Algoritmo 1** de la sección 3.1.3

Primero, se elige una matriz $E = I_{6 \times 6}$, tal que $rank \left(\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} \right) = 6$

Considerando las matrices $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0.1 & \dots & 0.1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.1 & \dots & 0.1 \end{bmatrix}_{14 \times 12}$ y $\sigma = 18$ para resolver las LMI's del **Teorema 1**

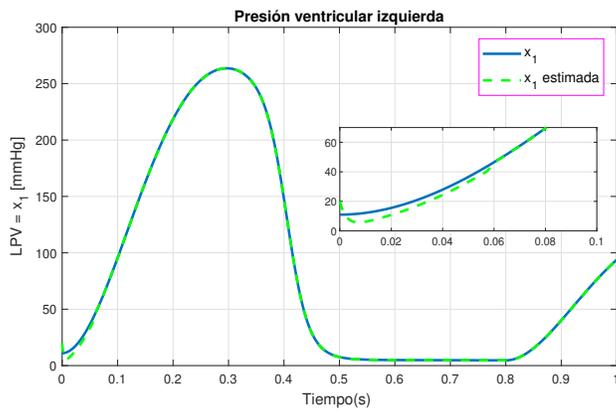
se obtuvieron las siguientes matrices para el observador, las cuales se tiene en el Anexo B.

Una vez que se tienen las matrices del GDO se procede a realizar la simulación, para la cual se tomaron en cuenta las siguientes consideraciones: a) se utilizó un paso de integración fijo de 0.01, b) la simulación tuvo una duración de 0.8S lo cual es equivalente a un ciclo cardíaco, c) la simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, d) finalmente, las condiciones iniciales de simulación fueron $x(0) = [11 \ 10 \ 74 \ 75 \ 0 \ 10]^T$ y para el GDO $\zeta(0) = [20 \ 7 \ 65 \ 80 \ 15 \ 21]^T$, $v(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

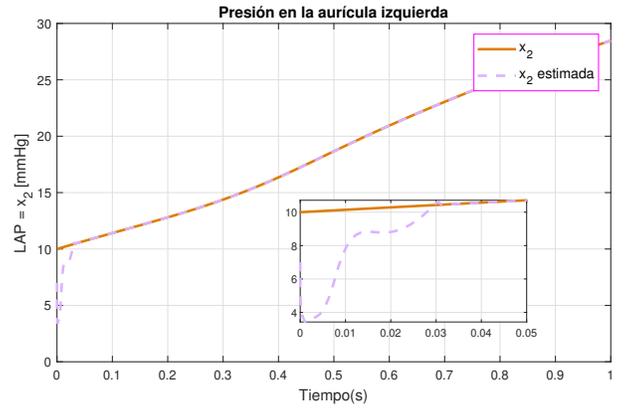
En la Fig. 4.3, se observan las gráficas de las estimaciones de los 6 estados por los cuales está compuesto el sistema. También, se observa cómo cada uno de los estados converge al estado real.

Finalmente, se realiza la comparación de cada uno de los estados estimados con los estados del sistema no lineal de la Ec. (2.26).

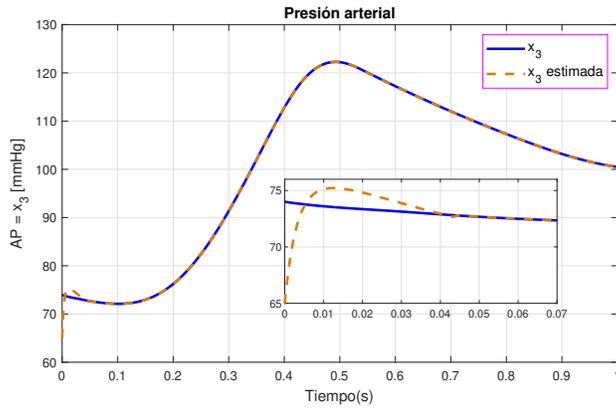
Con los resultados de simulación se ha evaluado el desempeño del GDO para estimar las señales no medidas del sistema cardiovascular en combinación con un dispositivo de asistencia ventricular para la fase de contracción/relajación isovolumétrica.



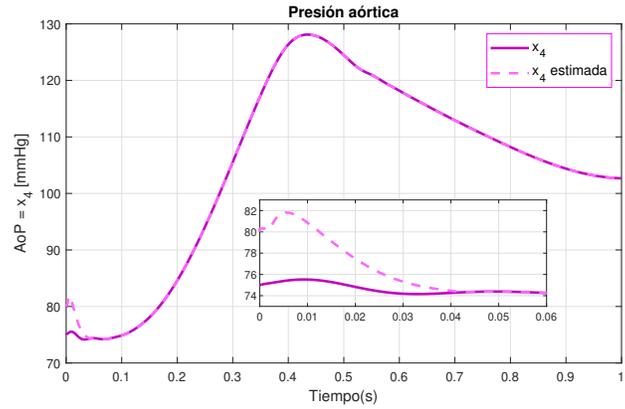
(a) Presión ventricular izquierda



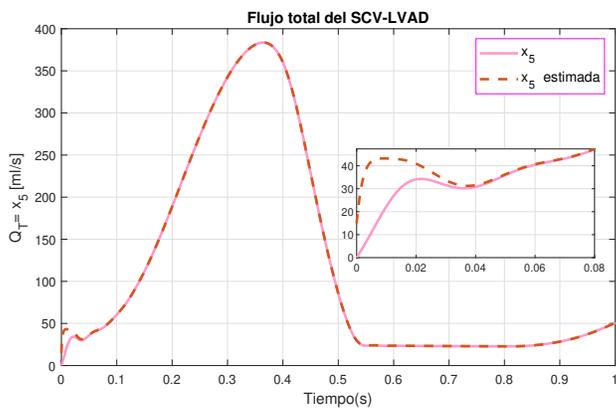
Presión en la aurícula izquierda



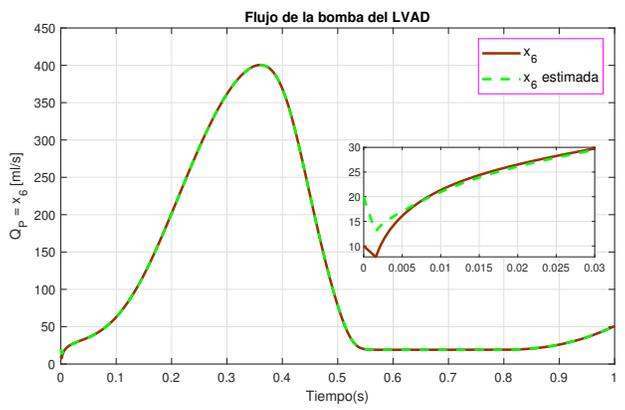
(b) Presión arterial



Presión aórtica



(c) Flujo total del SCV-LVAD



Flujo de la bomba del LVAD

Figura 4.3. Estimación de los estados de la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica.

4.2. Representación en forma híbrida del sistema cardiovascular

En esta sección se presenta una propuesta de representación del sistema cardiovascular tomando en cuenta el esquema de conmutación compuesto por los 4 modos de operación de los diodos mostrados en la Tabla 2.1. El criterio de conmutación determina cual es el modelo a utilizar que representa cada fase activa. En este caso, se consideran los estados de los diodos como una conmutación del sistema, por tanto, cada una de la fases del ciclo cardíaco de las Ecs. (2.68), (2.82), (2.96) es ahora representado en forma conmutada como se muestra en la Fig. 4.4. En esta figura, cada modelo M_1 a M_4 representa una de las cuatro fases del ciclo cardíaco descritas anteriormente.

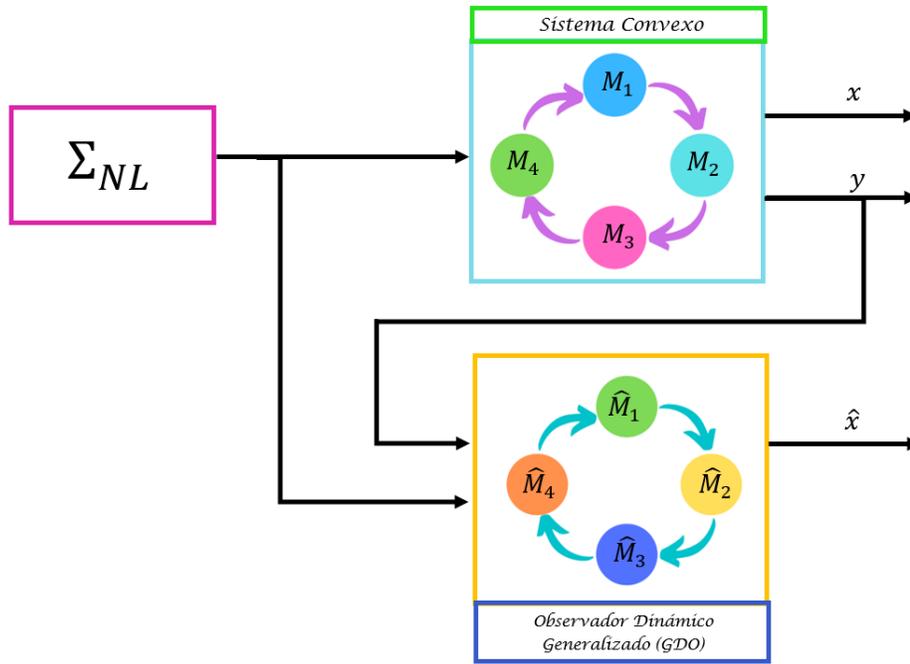


Figura 4.4. Secuencia de conmutación de los modelos.

M_1 =Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_i^1 x(t) + B_i^1 u(t)) \quad (4.4)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

El modelo (4.4), es el mismo modelo representado por la Ec. (2.68), al cual el subíndice L de las matrices A_{Li} y B_{Li} ha sido reemplazado por el superíndice 1, para indicar que el modelo representa la fase 1, es decir, al modelo M_1 en la Fig. 4.4.

De forma condensada, la ecuación de espacio de estados del modelo M_1 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\dot{x} = A^1(\varrho)x + B^1(\varrho)u \quad (4.5)$$

donde

$$A^1(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))A_i^1$$

y

$$B^1(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))B_i^1$$

M_2 = **Fase Contracción isovolumétrica**

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \left(A_i^2 x(t) + B_i^2 u(t) \right) \quad (4.6)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

De igual forma, el modelo (4.6), es el mismo modelo representado por la Ec. (2.96), al cual el subíndice CRi de las matrices A_{CRi} y B_{CRi} ha sido reemplazado por el superíndice 2, para indicar que el modelo representa la fase 2, es decir, al modelo M_2 en la Fig. 4.4.

De forma condensada, la ecuación de espacio de estados del modelo M_2 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\dot{x} = A^2(\varrho)x + B^2(\varrho)u \quad (4.7)$$

donde

$$A^2(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))A_i^2$$

y

$$B^2(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))B_i^2$$

M_3 = **Fase de Eyección**

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \left(A_i^3 x(t) + B_i^3 u(t) \right) \quad (4.8)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Ahora, el modelo (4.8), es el mismo modelo representado por la Ec. (2.82), al cual el subíndice E de las matrices A_E y B_E ha sido reemplazado por el superíndice 3, para indicar que el modelo

representa la fase 3, es decir, al modelo M_3 en la Fig. 4.4.

De forma condensada, la ecuación de espacio de estados del modelo M_3 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\dot{x} = A^3(\varrho)x + B^3(\varrho)u \quad (4.9)$$

donde

$$A^3(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))A_i^3$$

y

$$B^3(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))B_i^3$$

M_4 = **Fase Relajación isovolumétrica**

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (A_i^4 x(t) + B_i^4 u(t)) \quad (4.10)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Finalmente, el modelo (4.10), es el mismo modelo representado por la Ec. (2.96), al cual el subíndice CRi de las matrices A_{CRi} y B_{CRi} ha sido reemplazado por el superíndice 4, para indicar que el modelo representa la fase 4, es decir, al modelo M_4 en la Fig. 4.4. Cabe remarcar que los modelos M_2 y M_4 son los mismos. Sin embargo, cada uno de ellos representa una fase diferente en el espacio de tiempo que dura un ciclo cardíaco: M_2 representa la fase de *contracción isovolumétrica* y M_4 representa la fase de *relajación isovolumétrica*.

De forma condensada, la ecuación de espacio de estados del modelo M_4 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\dot{x} = A^4(\varrho)x + B^4(\varrho)u \quad (4.11)$$

donde

$$A^4(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))A_i^4$$

y

$$B^4(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t))B_i^4$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^p$ es el vector de estados, u es la entrada y y es la salida, respectivamente.

4.2.1. Modelo híbrido: sistemas q-LPV conmutados

La secuencia de conmutación entre los modelos M_1 a M_4 , puede ser representada como un solo modelo híbrido de sistemas q-LPV conmutados como se muestra a continuación:

$$\dot{x} = A^{\sigma(t)}(\varrho)x + B^{\sigma(t)}(\varrho)u \quad (4.12)$$

o bien

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m \mu_i(\varrho) \left(A_i^{\sigma(t)} x + B_i^{\sigma(t)} u \right) \quad (4.13)$$

A la función $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \Lambda$ se le denomina ley de conmutación. Esta función sólo adquiere los valores contenidos en el conjunto de números enteros $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$ a lo largo del tiempo y de forma cíclica. Cada número corresponde al modelo matemático que se encuentra activo: M_1 , M_2 , M_3 o M_4 .

El tiempo de intervención de cada una de las fases del ciclo cardíaco es de suma importancia, estos tiempos se dividen en 2 etapas, la primera es la **diástole** durante esta etapa ocurren 2 fases a) *llenado del ventrículo izquierdo* y b) *contracción isovolumétrica*, la segunda es la **sístole** durante esta etapa ocurren las 2 fases finales las cuales son c) *eyección* y d) *relajación isovolumétrica*, el tiempo de participación de cada una de ellas se muestra en la Tabla 4.1

Fases	Tiempo de intervención (segundos)
$M_1 =$ Llenado del ventrículo izquierdo	0.4
$M_2 =$ Contracción isovolumétrica	0.05
$M_3 =$ Eyección o Vaciado del ventrículo izquierdo	0.2
$M_4 =$ Relajación isovolumétrica	0.08

Tabla 4.1. Tiempos de intervención de cada una de las fases del ciclo cardíaco

4.2.2. Simulación 7. Simulación del modelo híbrido: sistemas q-LPV conmutados con observador

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar el correcto desempeño de la conmutación entre las cuatro fases del ciclo cardíaco del sistema cardiovascular, representados por la Ec. (4.12). También se presenta la implementación de un observador dinámico generalizado híbrido, compuesto por cuatro observadores conmutados, cada observador fue diseñado para cada una de las fases del ciclo cardíaco en la sección 4.1. El observador híbrido se muestra esquemáticamente en la Fig. 4.4. Cada uno de los subsistemas \hat{M}_i , $i = 1, \dots, 4$ representa cada uno de los cuatro observadores de tipo dinámico generalizado, diseñados de manera independiente para cada fase.

Una vez que se conocen los tiempos de intervención de cada una de las fases se procedió a la simulación representada esquemáticamente en la Fig. 4.4, en conjunto con el observador dinámico generalizado. Para la realización de esta simulación se tomaron en cuenta las siguientes consideraciones: a) se utilizó un paso de integración fijo de 0.01, b) la simulación tuvo una duración de 0.8s lo cual es equivalente a un ciclo cardíaco, c) la simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, d) finalmente, las condiciones de simulación fueron $x(0) = [11, 10, 74, 75, 0, 10]^T$.

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 4.5 en la cual se observa el correcto funcionamiento del observador dinámico generalizado, ya que este estima de manera adecuada cada uno de los estados del sistema cardiovascular-LVAD, cuando conmutan cada una de las fases del ciclo cardíaco dependiendo del tiempo de operación de cada una de ellas, según lo mostrado en la Tabla 4.1.

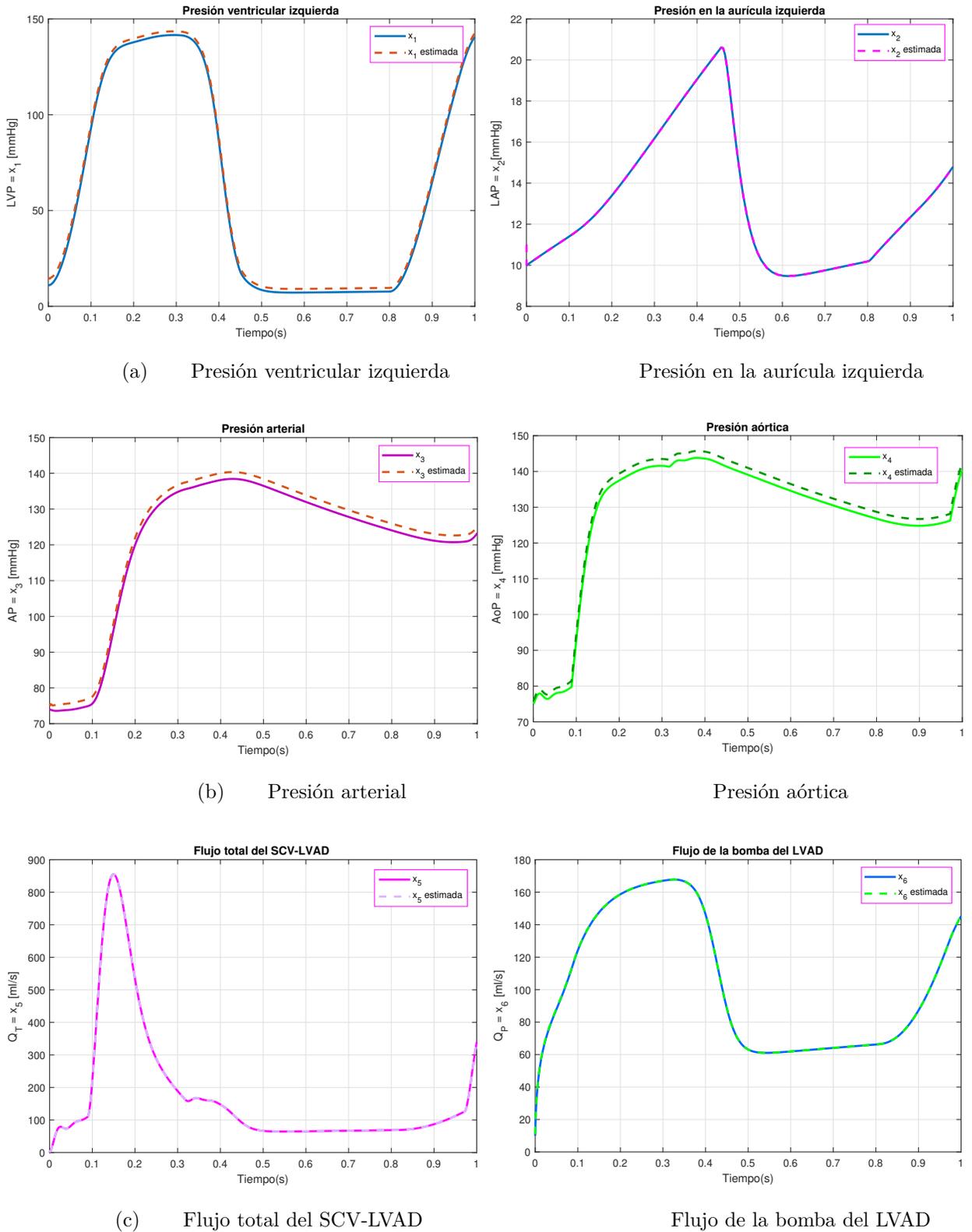


Figura 4.5. Conmutación de cada una de las fases del sistema cardiovascular con el Observador Dinámico Generalizado

4.3. Estimación de una ley de control a partir de un observador funcional dinámico generalizado

En esta sección se presentan las simulaciones para la estimación de una ley de control para cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón, esto para demostrar que el GDFO es capaz de estimar una ley de control para estabilizar al sistema. Esta ley de control se realizó para cada una de las fases del ciclo cardíaco con el objetivo principal de que el sistema en lazo cerrado sea estable.

4.3.1. Simulación 8. Estimación de una ley de control para la fase de llenado del ventrículo izquierdo

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que el GDFO es capaz de estimar una ley de control para estabilizar al sistema. Esta ley de control se realiza para la fase de llenado del ventrículo izquierdo con el objetivo principal de que el sistema en lazo cerrado sea estable.

Para la realización de esta simulación se consideró la siguiente representación del sistema en su forma cuasi-LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{Li}x(t) + B_{Li}u(t)) \quad (4.14)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Las matrices por las cuales se compone esta fase se muestran de la ecuación .0.1 a la Ec. .0.12 (ver Anexos), mientras que los parámetros se están dados en la Tabla 2.2.

Para este sistema, se considera un observador funcional dinámico generalizado de la forma:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (N_i\zeta(t) + H_iv(t) + F_iy(t) + J_iu(t)) \quad (4.15)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (S_i\zeta(t) + G_iv(t) + M_iy(t)) \quad (4.16)$$

$$\hat{z}(t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) (P_i\zeta(t) + Q_iy(t)) \quad (4.17)$$

Este observador tiene por objetivo principal estimar una ley de control por retroalimentación de estados $u = Lx$ tal que estabilice al sistema en su fase de llenado del ventrículo izquierdo. Para este caso, la matriz L se determina de tal forma que todos los polos del sistema cuasi-LPV (q-LPV) en lazo cerrado se encuentren dentro del semiplano izquierdo, garantizando con ello la estabilidad.

Definiendo una región LMI arbitraria ubicada con centro en $q = 0.9$ y un radio igual a $r = 300$, la ganancia L se obtiene de la LMI (3.74), teniendo como resultado:

$$L = [-12.5966 \quad 12.7253 \quad -0.0239 \quad -0.0044 \quad 0.0002 \quad -0.0663] \quad (4.18)$$

Para la parametrización de las matrices del observador se toman en consideración las obtenidas en la sección 4.1.1, de igual manera, se considera el **Teorema 3** y el **Algoritmo 2** de la sección 3.2.3, por lo tanto, las únicas matrices a tomar diferentes son P y Q , ya que para el cálculo de estas matrices implica tener en cuenta la matriz de ganancias L de la retroalimentación de estados. Una vez realizado lo anterior, estas quedan expresadas como:

$$P = [-12.5966 \quad 12.7253 \quad -0.0239 \quad -0.0044 \quad 0.0001 \quad -0.0331] \quad (4.19)$$

$$Q = [-1.1646 \quad -407.8325] \quad (4.20)$$

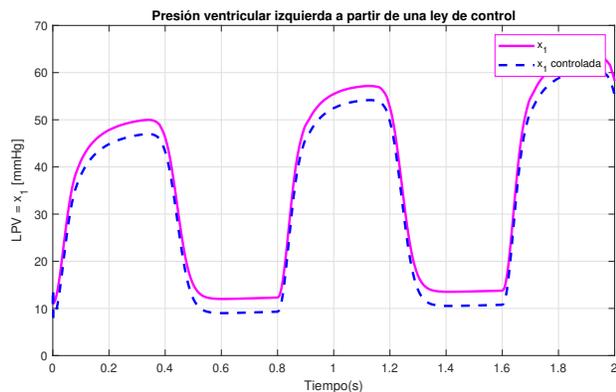
Para realizar la simulación se tomaron en cuenta ciertas consideraciones, a) se utilizó un paso de integración fijo de $h = 0.01$, b) la simulación tuvo una duración de $2s$, lo cual es equivalente al análisis de 2 ciclos cardíacos. La simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, para la cual, las condiciones iniciales de simulación fueron para el GDFO $\zeta(0) = [11, 11.5, 75, 76, 1, 12]^T$, $\nu(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ y para el sistema $x(0) = [11, 10, 74, 75, 0, 10]^T$.

En la Fig. 4.6 se muestran las gráficas correspondientes a la fase de llenado del ventrículo izquierdo, en la cual se presenta un acercamiento de la comparación de cada uno de los estados del sistema, tanto en lazo abierto como en lazo cerrado.

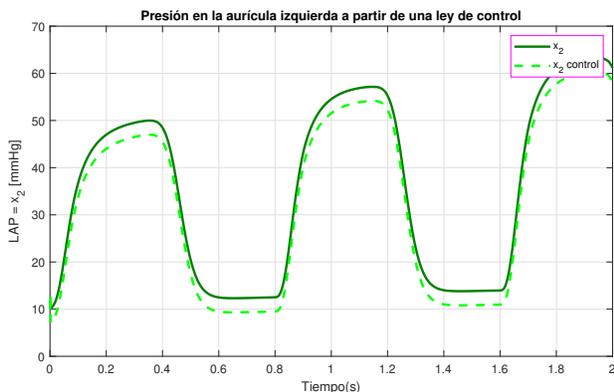
En la Fig. 4.6a se muestra la presión ventricular izquierda y la presión en la aurícula izquierda. Se pudo observar la dinámica de las presiones desde el primer instante de tiempo y que al aplicarle una retroalimentación de los estados al sistema por medio de un GDFO este minimiza a la presión ejercida en ambos casos.

Por otra parte, en la Fig. 4.6b se tiene a la presión arterial y a la presión aórtica. Se muestra la dinámica que cada una de ellas presenta desde el primer instante de tiempo, en la cual al cerrar el lazo de control por medio de un GDFO, este minimiza la presión que se ejerce en ambos casos.

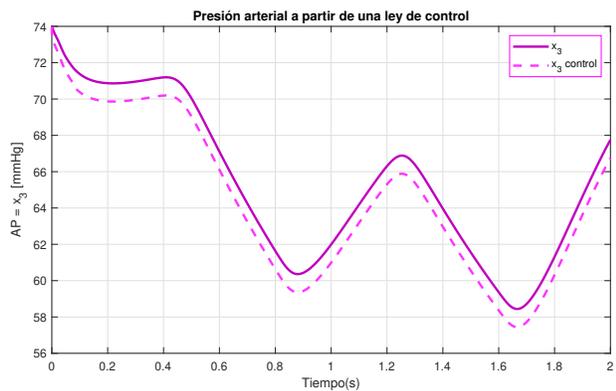
Finalmente, en la Fig. 4.6c se tienen los flujos tanto del SCV-LVAD como el de la bomba del LVAD, en esta se tiene que como consecuencia de que las presiones tienden a minimizar los flujos. De igual forma, estos flujos tienden a minimizar cuando se cierra el lazo.



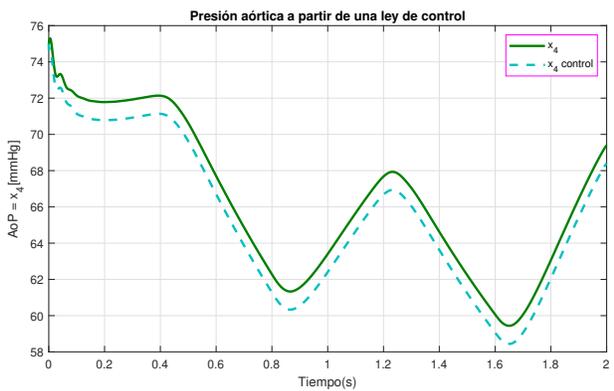
(a) Presión ventricular izquierda



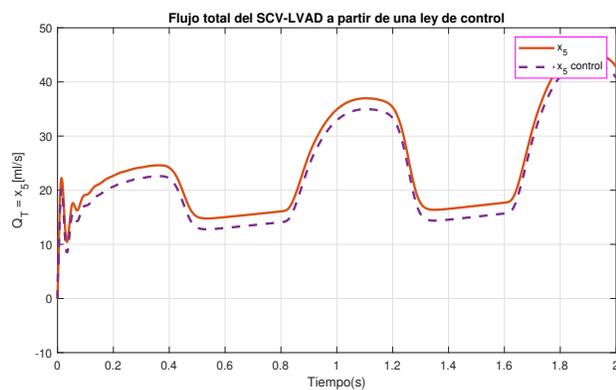
Presión en la aurícula izquierda



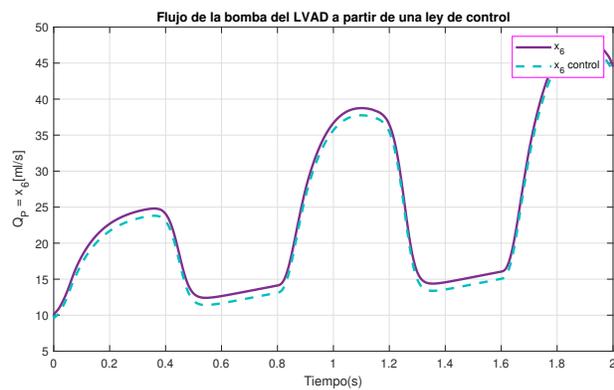
(b) Presión arterial



Presión aórtica



(c) Flujo total del SCV-LVAD



Flujo de la bomba del LVAD

Figura 4.6. Estados de la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo a partir de una ley de control por retroalimentación de los estados.

4.3.2. Simulación 9. Estimación de una ley de control para la Fase de Eyección

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que el GDFO es capaz de estimar una ley de control para estabilizar al sistema. Esta ley de control se realiza para la Fase de Eyección con el objetivo de que el sistema en lazo cerrado sea estable.

Para la realización de esta simulación se consideró la siguiente representación del sistema en su forma cuasi-LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{Ei}x(t) + B_{Ei}u(t)) \quad (4.21)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Las matrices por las cuales se compone esta fase se muestran de la Ec. .0.13 a la Ec. .0.24, mientras que los parámetros se están dados en la Tabla 2.2.

Al igual que en la simulación anterior, se considera un observador de la forma (4.15), (4.16) y (4.17). El objetivo principal del diseño de este observador funcional es estimar una ley de control $u = Lx$ tal que estabilice al sistema de la fase de eyección. Para este caso la matriz L se determina mediante una retroalimentación de estados. Esta ganancia es determinada de tal forma que todos los polos del sistema cuasi-LPV (q-LPV) en lazo cerrado se encuentren dentro del semiplano izquierdo. Definiendo una región LMI arbitraria ubicada con centro en $q = 0.6$ y un radio igual a $r = 200$, la ganancia L se obtiene de la LMI (3.74), teniendo como resultado:

$$L = [98.5156 \quad -0.0989 \quad 3.4660 \quad -101.8859 \quad -0.0642 \quad 0.0982] \quad (4.22)$$

Para la parametrización de las matrices del observador se toman en consideración las obtenidas en la sección 4.1.2. De igual manera, se considera el **Teorema 3** y el **Algoritmo 2** de la sección 3.2.3, por lo tanto, las únicas matrices a tomar diferentes son P y Q ya que para el cálculo de estas matrices implica tener en cuenta la matriz de ganancias L de la retroalimentación de estados. Una vez realizado lo anterior, estas quedan expresadas como:

$$P = [98.5156 \quad -0.0989 \quad 3.4660 \quad -101.8859 \quad -0.03210.0491] \quad (4.23)$$

$$Q = [4.7864 \quad -0.1069] \times 10^3 \quad (4.24)$$

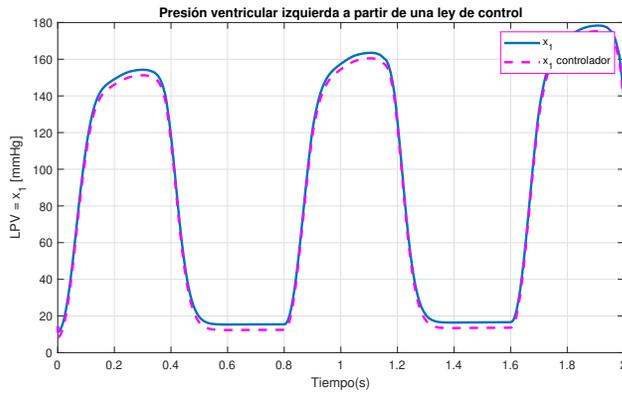
Para realizar la simulación se tomaron en cuenta ciertas consideraciones, a) se utilizó un paso de integración fijo de $h = 0.01$, b) la simulación tuvo una duración de 2s lo cual es equivalente al análisis de 2 ciclos cardíacos. La simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, para la cual, las condiciones iniciales de simulación fueron para el GDFO $\zeta(0) = [12, 11, 75.5, 76, 1, 12]^T$, $\nu(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ y para el sistema $x(0) = [11, 10, 74, 75, 0, 10]^T$.

En la Fig. 4.6 se muestran las gráficas correspondientes a la fase de eyección, en la cual se presenta un acercamiento de la comparación de cada uno de los estados del sistema, tanto en lazo abierto como en lazo cerrado.

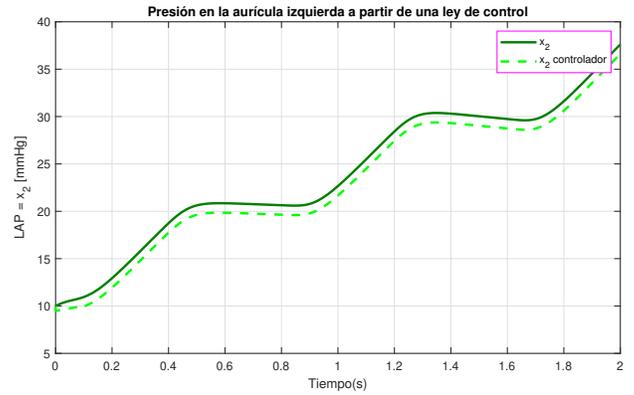
En la Fig. 4.7a se muestra la presión ventricular izquierda y la presión en la aurícula izquierda. Se puede observar la dinámica de las presiones desde el primer instante de tiempo. Al cerrar el lazo de control mediante una retroalimentación de estados aplicando un GDFO, se tiene que este minimiza a la presión ejercida en ambos casos, generando una mejor respuesta que el sistema en lazo abierto.

Por otra parte, en la Fig. 4.7b se muestra a la presión arterial y a la presión aórtica, en la cual se observa la dinámica que cada una de ellas presenta desde el primer instante de tiempo. Al cerrar el lazo de control por medio de un GDFO, este minimiza la presión que se ejerce en ambos casos obteniendo con ello una mejor respuesta al sistema en lazo cerrado.

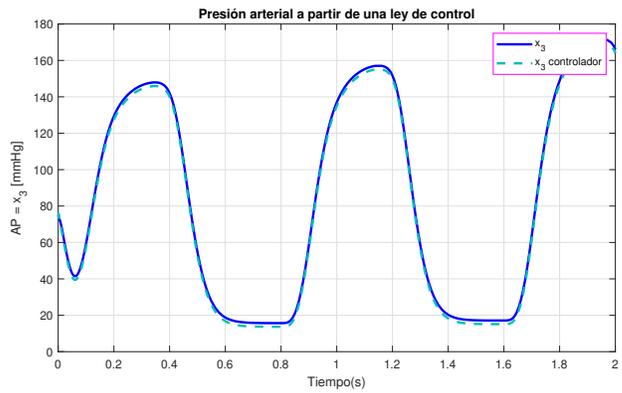
Finalmente, en la Fig. 4.7c se muestran los flujos tanto del SCV-LVAD como el de la bomba del LVAD. En este caso, se tiene que como consecuencia de que las presiones tienden a minimizar los flujos de igual forma tienden a minimizar cuando se cierra el lazo de control.



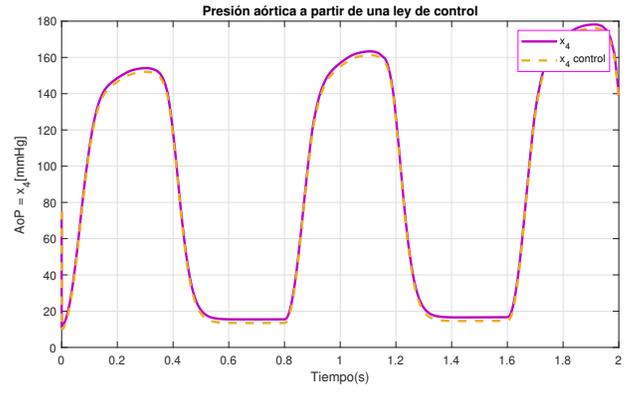
(a) Presión ventricular izquierda



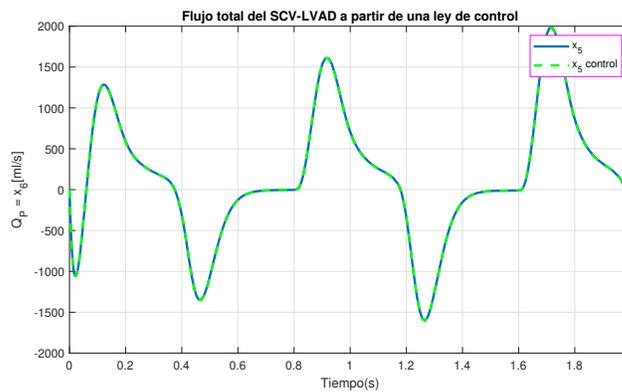
Presión en la aurícula izquierda



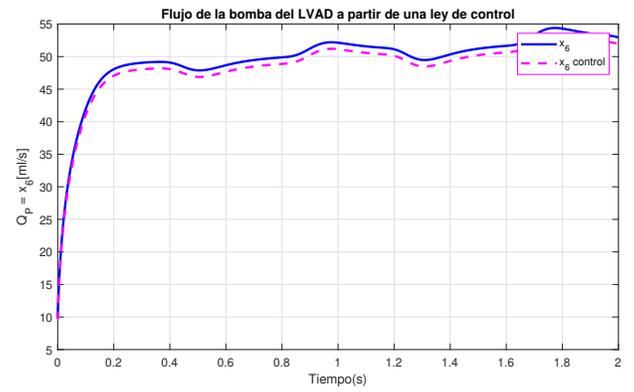
(b) Presión arterial



Presión aórtica



(c) Flujo total del SCV-LVAD



Flujo de la bomba del LVAD

Figura 4.7. Estados de la Fase de Eyección a partir de una ley de control por retroalimentación de los estados.

4.3.3. Simulación 10. Estimación de una ley de control para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que el GDFO es capaz de estimar una ley de control para estabilizar al sistema. Esta ley de control se realiza para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica con el objetivo principal de que el sistema en lazo cerrado sea estable.

Para la realización de esta simulación se consideró la siguiente representación del sistema en su forma cuasi-LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\rho(t)) (A_{CRi}x(t) + B_{CRi}u(t)) \quad (4.25)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Las matrices por las cuales se compone esta fase se muestran de la Ec. .0.25 a la Ec. .0.36, mientras que los parámetros están dados en la Tabla 2.2.

De igual forma que en la simulación anterior, se considera un observador de la forma (4.15), (4.16) y (4.17). El objetivo principal del diseño de un observador funcional es estimar un ley de control $u = Lx$ tal que estabilice al sistema de la fase de contracción/relajación isovolumétrica. Para este caso, la matriz L se determina mediante una retroalimentación de estados. Esta ganancia es determinada de tal forma que todos los polos del sistema cuasi-LPV en lazo cerrado se encuentren dentro del semiplano izquierdo. Definiendo una región LMI arbitraria ubicada con centro en $q = 0.5$ y un radio igual a $r = 400$, la ganancia L se obtiene de la LMI (3.74), teniendo como resultado:

$$L = [-0.0001 \quad -0.0000 \quad 0.0016 \quad -0.0015 \quad 0.0001 \quad -0.0000] \quad (4.26)$$

Para la parametrización de las matrices del observador se toman en consideración las obtenidas en la sección 4.1.3, de igual manera, se considera el **Teorema 3** y el **Algoritmo 2** de la sección 3.2.3, por lo tanto, las únicas matrices a tomar diferentes son P y Q ya que para el cálculo de estas matrices implica tener en cuenta la matriz de ganancias L de la retroalimentación de estados, una vez realizado lo anterior, estas quedan expresadas como:

$$P = [-0.0001 \quad 0 \quad 0.0016 \quad -0.0015 \quad 0 \quad 0] \quad (4.27)$$

$$Q = [0.0740 \quad -0.1838] \quad (4.28)$$

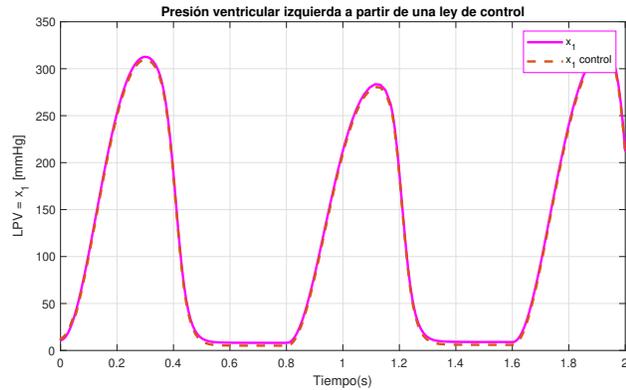
Para realizar la simulación se tomaron en cuenta ciertas consideraciones, a) se utilizó un paso de integración fijo de $h = 0.01$, b) la simulación tuvo una duración de 2s lo cual es equivalente al análisis de 2 ciclos cardíacos. La simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b, para la cual, las condiciones iniciales de simulación fueron: para el GDFO $\zeta(0) = [11.5, 11, 75, 76.5, 1, 12]^T$, $\nu(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ y para el sistema $x(0) = [11, 10, 74, 75, 0, 10]^T$.

En la Fig. 4.6 se muestran las gráficas correspondientes a la fase de la fase de contracción/relajación isovolumétrica, en la cual se presenta un acercamiento de la comparación de cada uno de los estados del sistema, tanto en lazo abierto como en lazo cerrado.

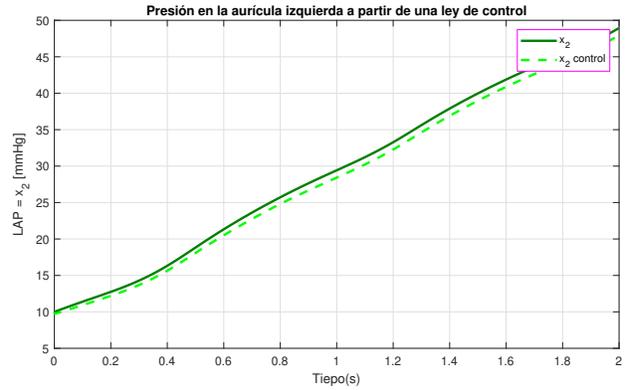
En la Fig. 4.8a se muestra la presión ventricular izquierda y la presión en la aurícula izquierda, en la cual se puede observar la dinámica de las presiones desde el primer instante de tiempo. Al cerrar el lazo de control mediante una retroalimentación de estados mediante un GDFO se tiene que este minimiza a la presión ejercida en ambos casos, generando una mejor respuesta que el sistema en lazo abierto.

Por otra parte, en la Fig. 4.8b se muestra a la presión arterial y a la presión aórtica, en la cual se observa la dinámica de cada una de ellas desde el primer instante de tiempo. Así mismo, al cerrar el lazo de control por medio de un GDFO, este minimiza la presión que se ejerce en ambos casos obteniendo con ello una mejor respuesta al sistema en lazo cerrado.

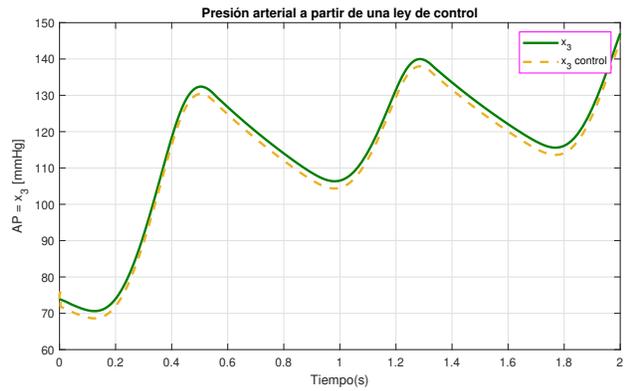
Finalmente, en la Fig. 4.8c se muestran los flujos tanto del SCV-LVAD como el de la bomba del LVAD, en esta se tiene que como consecuencia de que las presiones tienden a minimizar los flujos de igual forma tienden a minimizar cuando se cierra el lazo de control.



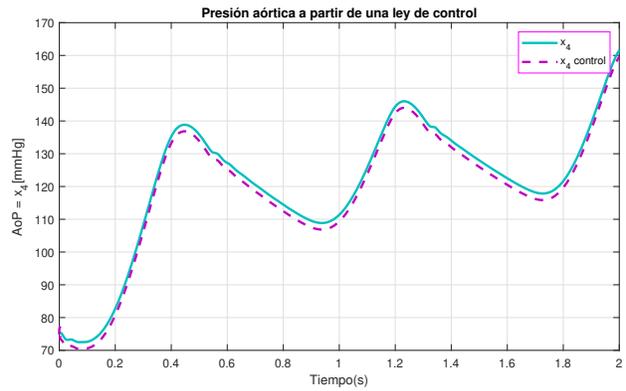
(a) Presión ventricular izquierda



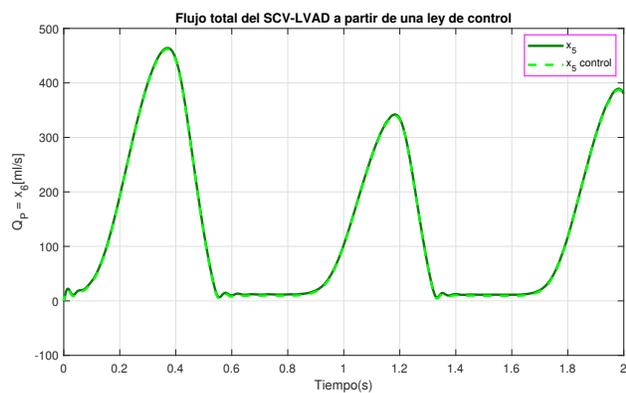
Presión en la aurícula izquierda



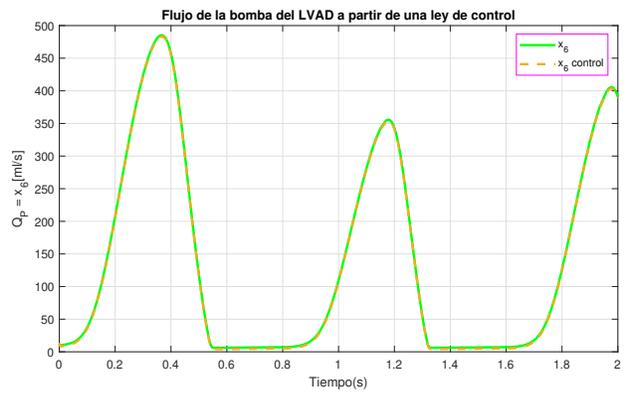
(b) Presión arterial



Presión aórtica



(c) Flujo total del SCV-LVAD



Flujo de la bomba del LVAD

Figura 4.8. Estados de la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica a partir de una ley de control por retroalimentación de los estados.

4.4. Cálculo de un controlador PI para regular la presión aórtica

En esta sección se presenta el diseño de un controlador proporcional-integral (PI) para un sistema bajo la representación cuasi-LPV. El cual es realizado para cada una de las fases del sistema cardiovascular con el fin de regular la presión aórtica.

La Fig. 4.9 muestra un diagrama para la regulación de la presión aórtica, en el cual, en el recuadro de color verde representa el controlador PI, en seguida, el recuadro de color azul al sistema cardiovascular, finalizando con el recuadro de color naranja en el cual de engloba tanto al sistema cardiovascular como la implementación de un GDFO.

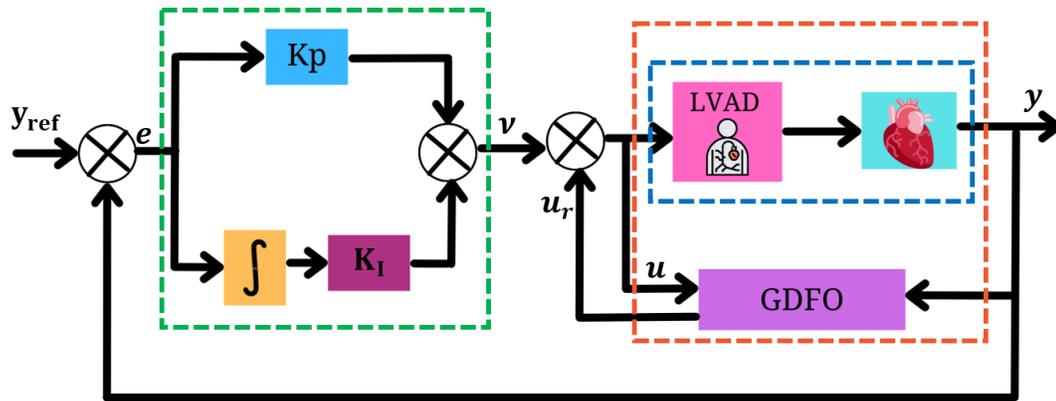


Figura 4.9. Esquema de control para un controlador PI

Donde $u_r = -K_r x$, K_r es la ganancia de la retroalimentación de estados y $u = u_r + v$

4.4.1. Generalidades de un control PI

Considere en primer lugar, un sistema LTI cuya representación es:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.29)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Se propone utilizar un controlador PI de la siguiente forma:

$$v = K_P e(t) + K_I \int e(t) dt \quad (4.30)$$

donde $e(t) = y - y_{ref}$ es el error, es decir, la diferencia entre la referencia y_{ref} y la salida $y(t)$

$$e(t) = y - y_{ref} = Cx - y_{ref} \quad (4.31)$$

Derivando la ecuación del error se tiene:

$$\dot{e}(t) = C\dot{x} - \dot{y}_{ref} \quad (4.32)$$

Pero a su vez \dot{x} es igual a la Ec. (4.29), por lo tanto considerando que y_{ref} es constante o que su derivada es cercana a cero y sustituyendo la Ec. (4.29) en (4.32) se tiene:

$$\dot{e}(t) = C(Ax + Bu) = CAx + CBu \quad (4.33)$$

La derivada del control PI esta dada como:

$$\dot{\nu} = K_p \dot{e}(t) + K_I e(t) \quad (4.34)$$

Ahora, sustituyendo a \dot{e} de la Ec. (4.33) en la derivada del control PI de la Ec. (4.34), se tiene:

$$\dot{\nu} = K_p(CAx + CBu) + K_I e(t) \quad (4.35)$$

La entrada de control con una retroalimentación de estados esta dada como:

$$u(t) = -K_r x + \nu \quad (4.36)$$

al sustituirla en la Ec. (4.29) queda como:

$$\dot{x} = (A - BK_r)x + B\nu \quad (4.37)$$

Finalmente, sustituyendo a (4.36) y (4.31) en la Ec. (4.37), se tiene:

$$\dot{\nu} = K_p CAx + K_p CB(-K_r x + \nu) + K_I(Cx - y_{ref}) \quad (4.38)$$

4.4.2. Extensión al caso LPV

Si consideramos ahora que el sistema dado por la Ec. (4.29) es LPV, es decir:

$$\dot{x}(t) = A(\varrho)x(t) + B(\varrho)u(t) \quad (4.39)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

En este caso, las Ecs. (4.37) y (4.38), se expresan como:

$$\dot{x} = (A(\varrho) - B(\varrho)K_r)x + B(\varrho)\nu \quad (4.40)$$

$$\dot{\nu} = K_p CA(\varrho)x + K_p CB(\varrho)(-K_r x + \nu) + K_I(Cx - y_{ref}) \quad (4.41)$$

De manera condensada, las Ecs. (4.40) y (4.41) pueden escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(\varrho) - B(\varrho)K_r & B(\varrho) \\ K_P C A(\varrho) + K_I C - K_P C B(\varrho)K_r & K_P C B(\varrho) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ K_I \end{pmatrix} y_{ref} \quad (4.42)$$

En el caso que:

$$A(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) A_i \quad y \quad B(\varrho) = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) B_i$$

entonces, la Ec. (4.42) se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \mu_i(\varrho(t)) \begin{bmatrix} A_i - B_i K_r & B_i \\ K_P C A_i + K_I C - K_P C B_i K_r & K_P C B_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ K_I \end{pmatrix} y_{ref} \quad (4.43)$$

Una vez que se ha analizado el control PI (Proporcional-Integral) se procede a la realización del mismo, para cada una de las fases por las que se compone el sistema cardiovascular.

4.4.3. Simulación 11. Regulación de la presión aórtica para la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que un controlador PI es capaz de controlar la presión aórtica para la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo.

En esta simulación se consideró la siguiente representación del sistema en su forma cuasi-LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{Li}x(t) + B_{Li}u(t)) \quad (4.44)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Para sintonizar los polos de la matriz (4.43), se desea que estos se encuentren en $-1.3, -3.02, -2.51, -1.6, -4.03, -3.6$ para garantizar la estabilidad del sistema. Por tanto, al resolver esta matriz, se tiene que las ganancias del control quedan de la forma:

- Ganancia K_P

$$K_P = [25.20 \quad 1.90 \quad 10.20 \quad 0.90]$$

- Ganancia K_I

$$K_I = [-0.42 \quad 0.03]$$

Una vez determinadas las ganancias del controlador, además, de considerar al sistema en lazo cerrado mediante la implementación de un observador funcional dinámico generalizado como se

mostró en la sección 4.3, se procede a la simulación de este controlador. Para realizar la simulación se tomaron en cuenta ciertas consideraciones, a) se utilizó un paso de integración fijo de $h = 0.01$, b) la simulación tuvo una duración de $1s$ lo cual es equivalente al análisis de un ciclo cardíaco. La simulación se realizó en Simulink de Matlab R2018b.

En la Fig. 4.10 se muestra la gráfica correspondiente al control de la presión aórtica para la fase de llenado del ventrículo izquierdo, en la cual se observa la comparación entre la referencia y el comportamiento de la presión aórtica cuando es alimentada por la ley de control que genera el control PI. Se analiza esta presión a causa de que esta es la que ejerce la válvula aórtica, misma que se encuentra dentro del ventrículo izquierdo [Li et al., 2018]. De igual manera, porque con la medición de esta presión se puede proporcionar una mejor predicción de riesgo cardiovascular [Zócalo et al., 2020]. Para nuestro estudio, esta presión está relacionada con el estado x_4 del sistema. En la Figura 4.11 se muestra la ley de control obtenida por el PI.

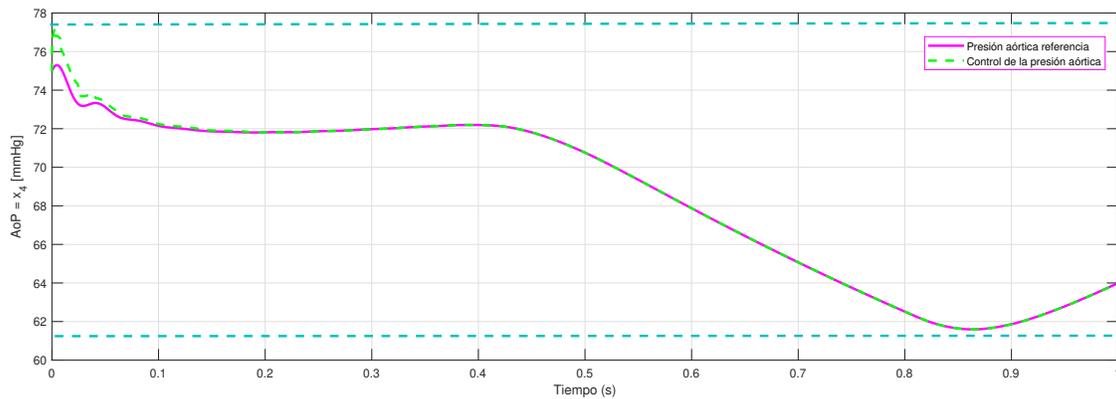


Figura 4.10. Control de la presión aórtica para la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

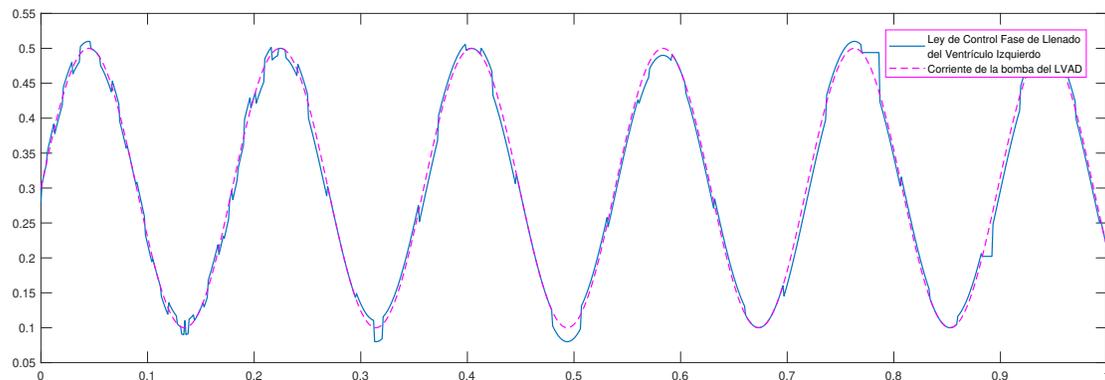


Figura 4.11. Comparación de la ley de control para la Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

4.4.4. Simulación 12. Regulación de la presión aórtica para la Fase de Eyección

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que un controlador PI es capaz de controlar la presión aórtica para la Fase de Eyección.

En esta simulación se considero la siguiente representación del sistema en su forma cuasi-LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{Ei}x(t) + B_{Ei}u(t)) \quad (4.45)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Para sintonizar los polos de la matriz (4.43), se desea que estos se encuentren en $-1.6, -2.02, -4.51, -2.6, -3.6, -4.02$ para garantizar la estabilidad del sistema. Por tanto, al resolver esta matriz, se tiene que las ganancias del control quedan de la forma:

- Ganancia K_P

$$K_P = [20.10 \quad 1.20 \quad 9.10 \quad 0.50]$$

- Ganancia K_I

$$K_I = [-0.22 \quad 0.03]$$

Una vez determinadas las ganancias del controlador, además, de considerar al sistema en lazo cerrado mediante la implementación de un observador funcional dinámico generalizado como se mostró en la sección 4.3, se procede a la simulación de este controlador. Para realizar la simulación se tomaron en cuenta las mismas consideraciones que en la fase anterior.

En la Figura 4.12 se muestra la gráfica correspondiente al control de la presión aórtica para la fase de eyección en la cual se observa la comparación entre la referencia y el comportamiento de la presión aórtica cuando es alimentada por la ley de control que genera el control PI. Se analiza esta presión a causa de que esta es la ejerce la válvula aórtica, misma que se encuentra dentro del ventrículo izquierdo [Li et al., 2018]. De igual manera, porque con la medición de esta presión se puede proporcionar una mejor predicción de riesgo cardiovascular [Zócalo et al., 2020]. Para nuestro estudio, esta presión está relacionada con el estado x_4 del sistema. En la Figura 4.13 se muestra la ley de control obtenida por el PI.

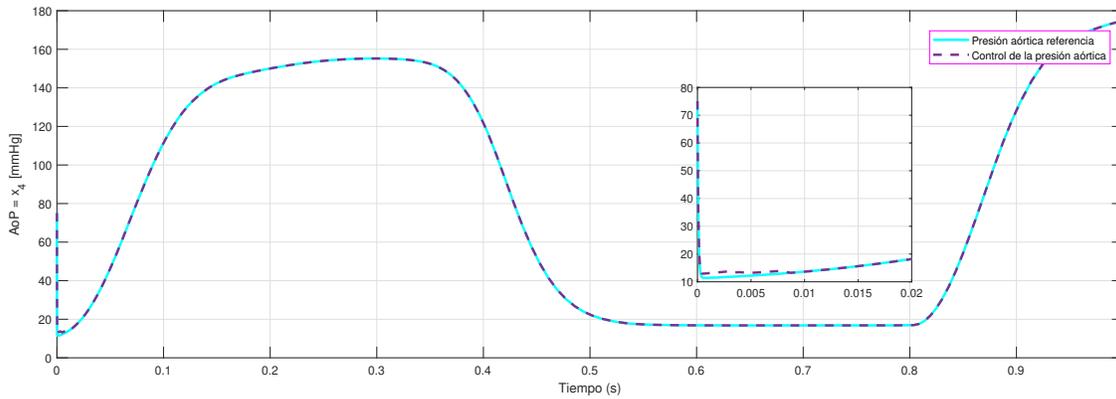


Figura 4.12. Control de la presión aórtica para la de Fase de Eyección

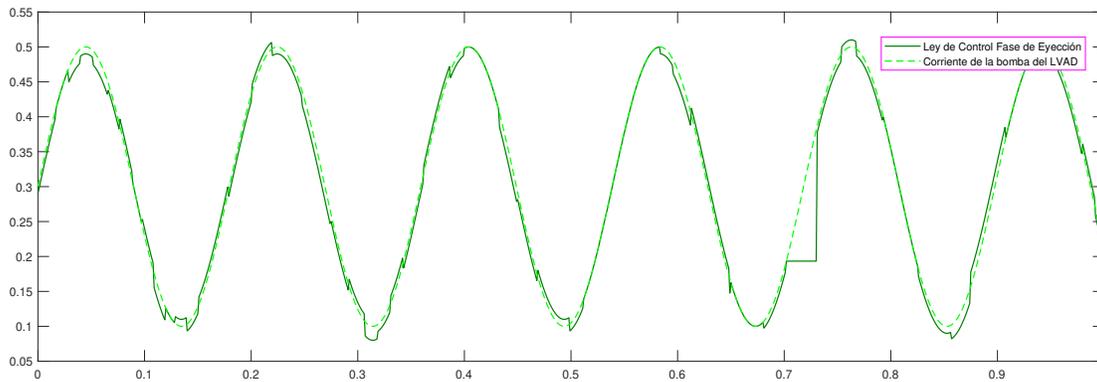


Figura 4.13. Comparación de la ley de control para la Fase de Eyección

4.4.5. Simulación 13. Regulación de la presión aórtica para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica

Objetivo de la simulación: El objetivo de esta simulación es demostrar que un controlador PI es capaz de controlar la presión aórtica para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica.

En esta simulación se considero la siguiente representación del sistema en su forma cuasi-LPV:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(\varrho(t)) (A_{CRi}x(t) + B_{CRi}u(t)) \quad (4.46)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Para sintonizar los polos de la matriz (4.43), se desea que estos se encuentren en $-3.03, -1.02, -2.7, -2.5, -1.06, -4.53$ para garantizar la estabilidad del sistema. Por tanto, al resolver esta matriz, se tiene que las ganancias del control quedan de la forma:

- Ganancia K_P

$$K_P = [21.50 \quad 1.30 \quad 10.05 \quad 1.02]$$

- Ganancia K_I

$$K_I = [-0.32 \quad 0.06]$$

Una vez determinadas las ganancias del controlador, además, de considerar al sistema en lazo cerrado mediante la implementación de un observador funcional dinámico generalizado como se mostró en la sección 4.3, se procede a la simulación de este controlador. Para realizar la simulación se tomaron en cuenta las mismas consideraciones que en la fase anterior.

En la Figura 4.14 se muestra la gráfica correspondiente al control de la presión aórtica para la fase de contracción/relajación isovolumétrica, en la cual se observa la comparación entre la referencia y el comportamiento de la presión aórtica cuando es alimentada por la ley de control que genera el control PI. Se analiza esta presión a causa de que esta es la que ejerce la válvula aórtica, misma que se encuentra dentro del ventrículo izquierdo [Li et al., 2018]. De igual manera, porque con la medición de esta presión se puede proporcionar una mejor predicción de riesgo cardiovascular [Zócalo et al., 2020]. Para nuestro estudio, esta presión está relacionada con el estado x_4 del sistema. En la Figura 4.15 se muestra la ley de control obtenida por el PI.

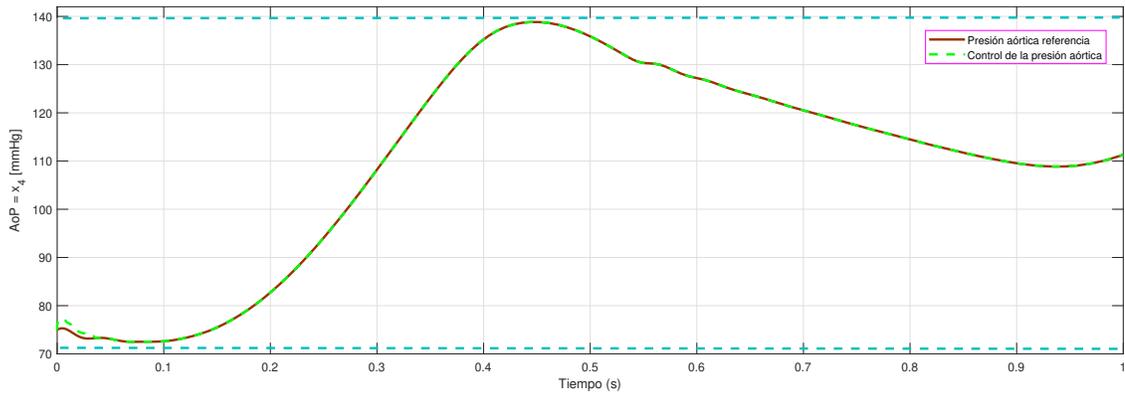


Figura 4.14. Control de la presión aórtica para la de Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica

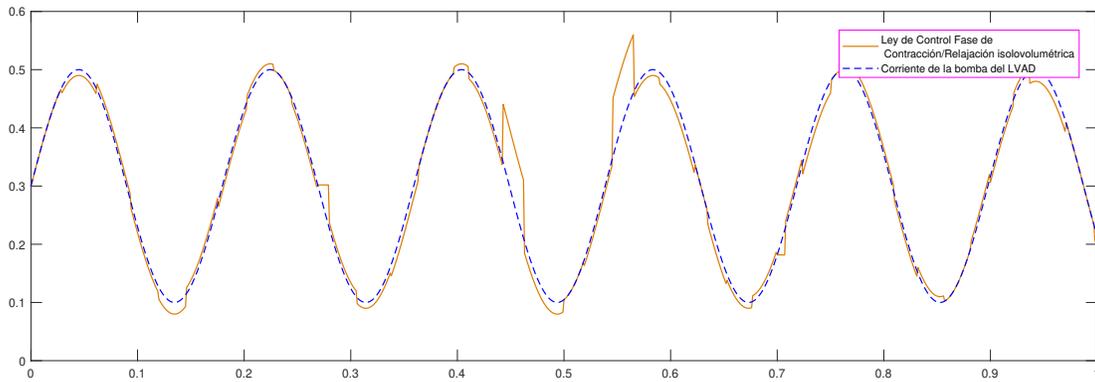


Figura 4.15. Comparación de la ley de control para la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica

4.5. Conclusiones del capítulo

En la sección 4.1 se implementó el observador dinámico generalizado presentado en la sección del Capítulo 3. Por medio de una simulación se comprobó su funcionamiento y se presentó la simulación correspondiente a cada una de las fases del ciclo cardíaco.

En la sección 4.2 se presentó una representación en forma conmutada del SCV-LVAD, esta conmutación se origina de cada una de las fases del ciclo cardíaco. Se presentaron los resultados de simulación que se obtuvieron, en esta simulación se realizó la comparación del sistema no lineal correspondiente a cada una de las fases del ciclo cardíaco contra la respuesta del observador dinámico generalizado presentado en la sección 4.1, de igual forma es de mencionar que, cada una de las fases por las que se compone el ciclo cardíaco presenta un tiempo específico de participación y cuando se conjuntan cada una de ellas forman el ciclo completo de cada uno de los estados del sistema, consideración que fue de suma importancia para la realización de la simulación.

En la sección 4.3 se implementó un observador funcional dinámico generalizado presentado en la sección del Capítulo 3. Con la realización de este observador se cierra el lazo de control del sistema, generando con ello la estabilidad del sistema. Se realizó este tipo de observador para cada una de las fases del ciclo cardíaco.

En la sección 4.4 se implementó un controlador tipo proporcional-integral (PI) para cada una de las fases del ciclo cardíaco, la implementación de este tipo de controlador se logró controlar la presión aórtica, la cual es importante para personas que utilizan dispositivos de asistencia ventricular.

Conclusiones

5.1. Conclusiones generales

Al realizar una búsqueda bibliográfica sobre las principales causas de mortalidad se encontró que una de ellas es a causa de enfermedades cardiovasculares. De acuerdo con la organización mundial de la salud y a datos estadísticos este tipo de enfermedades representan el 20 % de mortalidad en personas de todo tipo de edad. Por tanto, las enfermedades cardiovasculares son un problema común a nivel mundial tanto en países desarrollados como en vías de desarrollo. En ocasiones existen personas con posibilidades de una alargamiento de vida, esto se logra mediante la posibilidad de un trasplante de corazón, sin embargo, actualmente encontrar una donación de este órgano es complicado, por ello surgen los conocidos *Dispositivos de asistencia ventricular* estos con el fin de poder ayudar a pacientes con un corazón dañado a mejorar su funcionamiento y con ello garantizar un mejor estilo de vida a personas con este tipo de padecimientos.

En este trabajo de tesis se presentó la representación no lineal del sistema cardiovascular en combinación un dispositivo de asistencia ventricular izquierda. Posteriormente, se realizó la representación de este modelo en su forma q-LPV. Este tipo de representación tiene como objetivo representar el modelo no lineal del sistema cardiovascular en combinación con el LVAD de una manera sencilla. Esto se puede realizar siempre y cuando este se encuentre dentro de los límites que corresponden a este tipo de representación.

En la literatura existen diversos tipos de observadores, los cuales son clasificados por el orden o por la estructura que los conforman. En el presente trabajo de investigación se muestra una clasificación de algunos tipos de observadores de estado. En este tema de tesis se propuso utilizar un observador funcional dinámico generalizado, este tipo de observadores tiene una función peculiar la cual es, estimar funciones lineales del sistema, dando como ventaja el aumento de grados de libertad esto para compensar incertidumbres que se puedan presentar.

En este trabajo de investigación se muestra el diseño del observador dinámico generalizado (GDO). Para este tipo de observador se presentan las condiciones suficientes y necesarias para la existencia

del mismo. Este tipo de observador se desarrollo con el fin de poder estimar aquellas variables desconocidas a partir de las variables conocidas.

De igual forma, en este trabajo de investigación se presenta el diseño del observador funcional dinámico generalizado (GDFO) para sistemas en su representación cuasi-LPV. El cual debe de cumplir las condiciones necesarias y suficientes para su existencia. Para el caso de este tipo de observadores la estabilidad está determinada mediante desigualdades lineales matriciales (LMI's). Se utiliza el lema de eliminación esto con el fin de asegurar que las LMI's obtengan una solución factible.

Por consiguiente, la estructura presentada en este trabajo de investigación presenta una estructura general en comparación con otros tipos de observadores, esta estructura presenta ventajas tales como, el aumento de la precisión en estado estable y la mejora de robustez de estimación ante errores o incertidumbres de modelado.

Así como también, con el diseño de GDFO se estima una ley de control, la cual permite cerrar el lazo de control del sistema, con el fin de poder estabilizar al mismo.

Por otro lado, se propone el desarrollo de un controlador PI por cada una de las fases del ciclo cardíaco, esto con el fin de controlar la presión aórtica. Para ello, se realizaron múltiples simulaciones esto con el fin de poder analizar la respuesta de cada uno de los observadores realizados, así como la respuesta del control PI para el control de la presión aórtica.

Finalmente, se concluye que se cumplieron con cada uno de los objetivos planteados para este tema de investigación. Además, se mostró que el observador funcional dinámico generalizado es capaz de estimar una ley de control adecuada para con ellos estabilizar al sistema.

5.2. Ventajas y Limitaciones

Este trabajo de investigación presenta las siguientes ventajas:

- Se analiza cada una de las fases del ciclo cardíaco por las cuales se compone el corazón generando con ello que se pueda analizar el comportamiento de cada una de ellas.
- Se propone una representación tipo q-LPV del sistema no lineal del corazón para que con ellos el sistema sea sencillo de manejar.
- Se diseña un observador dinámico generalizado para la estimación de aquellas variables que no se pueden medir por medio de métodos no invasivos.
- Se realiza un observador funcional dinámico generalizado con el fin de poder cerrar el lazo de control y con ellos garantizar la estabilidad del sistema.
- Se propone el una representación modelo híbrido: sistemas q-LPV conmutados con el fin de analizar todo el ciclo cardiaco del corazón.

Este trabajo de investigación presenta las siguientes limitaciones:

- Al ser un modelo con seis estados se complica el análisis en la presentación tipo q-LPV.

5.3. Trabajos futuros

Se propone como trabajos a futuros:

A partir de la representación *Modelo híbrido: sistemas q-LPV conmutados* presentado en este trabajo de investigación, se puede analizar este tipo de representación pero ahora mediante la implementación de un observador funcional dinámico generalizado donde de igual forma se integre un controlador para la presión aórtica.

Otro trabajo futuro es la detección y localización de fallas que se presenten durante la conmutación de cada una de las fases del ciclo cardíaco del corazón.

Finalmente, se podría diseñar el prototipo de un dispositivo de asistencia ventricular izquierda para con ello realizar diversas simulaciones que puedan ser de interés, aplicando técnicas de control.

Referencias.

.

Bibliografía

- [Bakouri et al., 2015] Bakouri, M., Savkin, A., and Alomari, A. (2015). Nonlinear modelling and control of left ventricular assist device. *IET Digital Library*, 8:613 – 615.
- [Blanchet, 2019] Blanchet, M. J. (2019). Dispositivos de asistencia ventricular en insuficiencia cardíaca avanzada. *Silver House, Insuf Card*, 14(2):70–82.
- [Boron and Boulaep, 2017] Boron, W. and Boulaep, E. (2017). *Fisiología médica*. Springer Science & Business Media.
- [Briat, 2014] Briat, C. (2014). Linear parameter-varying and time-delay systems. *Analysis, Observation, Filtering & Control*, 3:335–394.
- [Choi et al., 2007] Choi, S., Boston, J. R., and Antaki, J. F. (2007). Hemodynamic controller for left ventricular assist device based on pulsatility ratio. *International Center for Artificial Organs and Transplantation*, 31(2):114–125.
- [Company and Education, 2020] Company, T. S. and Education, P. (2020). ¿Cómo funciona el corazón? *LLC. Township Line Road, Yardley, PA*, (2):197–200.
- [Cruz and Calderón, 2016] Cruz, O. and Calderón, M. (2016). El corazón y sus ruidos cardíacos normales y agregados, una somera revisión del tema. *Facultad Médica de la UNAM*, 59(2):49–55.
- [Darouach and Fernando, 2020] Darouach, M. and Fernando, T. (2020). On the existence and design of functional observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65:2751–2759.
- [Darouach et al., 1994] Darouach, M., Zasadzinski, M., and Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3):606–609.
- [Díaz-Ledezma, 2012] Díaz-Ledezma, F. (2012). *Detection of Cardiovascular Anomalies: An Observer-Based Approach*. King Abdullah University of Science and Technology.
- [Díaz-Valerio et al., 2020] Díaz-Valerio, C., González-Cruz, M., Astorga-Zaragoza, C., Osorio-Gordillo, G. L., Daza-Merino, C., Reyes-Reyes, J., and Guerrero-Ramírez, G. (2020). Design and construction of a hydraulic circuit emulator of the circulatory system. *Pistas Educativas*, 42(137):830–846.

- [Elescano, 2013] Elescano, C. (2013). Uso de un dispositivo de asistencia ventricular como tratamiento definitivo en pacientes con insuficiencia cardiaca en estado terminal. Una nueva era en el tratamiento de la insuficiencia cardiaca. *Conarec*, 29(122):356–370.
- [Faragallah et al., 2011] Faragallah, G., Wang, Y., and Divo, E. (2011). A new current-based control model of the combined cardiovascular and rotary left ventricular assist device. *American Control Conference on O’Farrell Street, San Francisco, CA, USA*, pages 4775–4780.
- [Ferreira et al., 2009] Ferreira, A., Boston, J. R., and Antaki, J. F. (2009). A control system for rotary blood pumps based on suction detection. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 3:656–665.
- [Formaggia et al., 2010] Formaggia, L., Quarteroni, A., and Veneziani, A. (2010). *Cardiovascular Mathematics: Modeling and Simulation of the Circulatory System*. Springer Science & Business Media.
- [Grignola and Domingoc, 2021] Grignola, J. and Domingoc, E. (2021). Basic concepts in pulmonary circulation. *Elsevier*, 3(1):3–10.
- [Guyton et al., 1969] Guyton, Treviño, Vela, H., and Folch, R. (1969). Fisiología humana. *Interamericana*, (2):123–135.
- [Ketelhut et al., 2018] Ketelhut, M., Stemmler, S., Hein, M., Korner, D., and Abel, D. (2018). Iterative learning control of a left ventricular assist device: Nonlinear model integration. *IFAC (International Federation of Automatic Control) Hosting by Elsevier*, page 152–157.
- [Korakianitis and Shi, 2006] Korakianitis, T. and Shi, Y. (2006). Numerical simulation of cardiovascular dynamics with healthy and diseased heart valves. *Journal of Biomechanics*, 39:1964–1982.
- [Lendek et al., 2011] Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R., and Schutter, B. D. (2011). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Springer.
- [Li et al., 2018] Li, W.-F., Huang, Y.-Q., and Feng, Y.-Q. (2018). Association between central haemodynamics and risk of all-cause mortality and cardiovascular disease: a systematic review and meta-analysis. *Journal of Human Hypertension*, 33:531–541.
- [Mohammadpour and Scherer, 2012] Mohammadpour, J. and Scherer, C. W. (2012). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*.
- [Ogata, 2010] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna, Quinta edición*. Pearson Educación.
- [Olufsen and Nadim, 2005] Olufsen, M. S. and Nadim, A. (2005). On deriving lumped models for blood flow and pressure in the systemic arteries. *Elsevier Science Ltd*, 1(1):1786–1789.
- [OMS, 2022] OMS (2022). Enfermedades cardiovasculares. url: [http://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-\(cvds\)](http://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-(cvds)) .

- [Osorio Gordillo, 2011] Osorio Gordillo, G. L. (2011). *Observadores para sistemas singulares LPV*. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- [Osorio Gordillo, 2015] Osorio Gordillo, G. L. (2015). *Observateurs des systèmes singuliers incertains: application au contrôle et au diagnostic*. PhD thesis, Université de Lorraine.
- [Poyatosa et al., 2019] Poyatosa, B. P., Alonso, F. E., Chiclana, A. P., Barbadillo, A. C., and Calvillo, R. S.-P. (2019). Importancia de la toma de la presión arterial: a propósito de un caso clínico. Hipertensión arterial secundaria. *SEMERGEN-Medicina de Familia*, 37(10):576–579.
- [Rapp et al., 2020] Rapp, S. E., Pawar, R. S., Gohean, R. J., Larson, E., , and Longoria, R. G. (2020). Evaluating a hardware-in-the-loop system intended for testing ventricular-assist device control and sensing algorithms. *2020 American Control Conference (ACC)*, pages 1341–1346.
- [Ruschen et al., 2017] Ruschen, D., Opitz, S., Korn, L., Leonhardt, S., and Walter, M. (2017). Robust assistance control of left ventricular assist devices. *European Medical and Biological Engineering Confernce*, pages 294–297.
- [Shamma, 1988] Shamma, J. S. (1988). *Analysis and design of gain scheduled control systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Shia et al., 2007] Shia, Y., Korakianitisa, T., and Bowlesb, C. (2007). Numerical simulation of cardiovascular dynamics with different types of VAD assistance. *Journal of Biomechanics*, 40(27):2919–2933.
- [Siewnicka and Janiszowski, 2018] Siewnicka, A. and Janiszowski, K. (2018). A model for estimating the blood flow of the POLVAD pulsatile ventricular assist device. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55(11):2552–2559.
- [Simaan et al., 2009a] Simaan, M. A., Fellow, Ferreira, A., Chen, S., Antaki, J. F., and Galati, D. G. (2009a). A dynamical state space representation and performance analysis of a Feedback-Controlled rotary left ventricular assist device. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(1):15–28.
- [Simaan et al., 2009b] Simaan, M. A., Ferreira, A., Chen, S., Antaki, J. F., and Galati, D. G. (2009b). A dynamical state space representation and performance analysis of a feedback-controlled rotary left ventricular assist device. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(1):15–28.
- [Simakov et al., 2020] Simakov, S., Timofeev, A., Gamilov, T., Kopylov, P., Telyshev, D., and Vassilevski, Y. (2020). Analysis of operating modes for left ventricle assist devices via integrated models of blood circulation. *Mathematics*, pages 1–18.
- [Skelton et al., 1998] Skelton, R., Tetsuya, I., and Karolos, M. G. (1998). *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*.
- [Son et al., 2001] Son, J., Du, D., and Du, Y. (2001). A sensorless approach to control of a turbodynamic left ventricular assist system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3:473–482.

- [Son et al., 2019a] Son, J., Du, D., and Du, Y. (2019a). Feedback control of rotary blood pump for preventing left ventricular suction. *2019 American Control Conference (ACC), Philadelphia, PA, USA*, pages 5426–5431.
- [Son et al., 2019b] Son, J., Du, D., and Du, Y. (2019b). Feedback control of rotary blood pump for preventing left ventricular suction. *2019 American Control Conference (ACC), Philadelphia, PA, USA*, pages 5426–5431.
- [Son et al., 2019c] Son, J., Du, D., and Du, Y. (2019c). Stochastic modeling and control of circulatory system with a left ventricular assist device. *2019 American Control Conference (ACC)*, pages 5408–5413.
- [Son et al., 2019d] Son, J., Du, D., and Du, Y. (2019d). Stochastic modeling and dynamic analysis of the cardiovascular system with rotary left ventricular assist devices. *Hindawi, Mathematical Problems in Engineering*, pages 1–19.
- [Son et al., 2019e] Son, J., Du, D., and Du, Y. (2019e). Stochastic modeling and dynamic analysis of the cardiovascular system with rotary left ventricular assist devices. *Hindawi, Mathematical Problems in Engineering*, pages 1–19.
- [Son et al., 2020] Son, J., Du, D., and Du, Y. (2020). Modelling and control of a failing heart managed by a left ventricular assist device. *Biocibernética e Ingeniería Biomédica*, pages 559–573.
- [Stergiopoulos et al., 1996] Stergiopoulos, N., Meister, J.-J., and Westerhof, N. (1996). Determinants of stroke volume and systolic and diastolic aortic pressure. *Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 270(6):PH2050–H2059.
- [Stern et al., 2011] Stern, D. R., Kazam, J., Edwards, P., Maybaum, S., Bello, R. A., D’Alessandro, D. A., and Goldstein, D. J. (2011). Increased incidence of gastrointestinal bleeding following implantation of the HeartMate II LVAD. *Cardiac Surgery*, 25:352–356.
- [Vay and Laska, 2008] Vay, L. and Laska, D. (2008). *Anatomía y Fisiología Humana*. Paidotribo.
- [Viswajith et al., 2017] Viswajith, S., Vasudevan, F., Marwan, R., and Simaan (2017). A system of systems approach to patient treatment with the left ventricular assist device. *12th System of Systems Engineering Conference (SoSE)*, pages 1–6.
- [Wu et al., 2005a] Wu, Y., Allaire, P., Tao, G., and Olsen, D. (2005a). Modeling, estimation and control of cardiovascular systems with a left ventricular assist device. *American Control Conference*, 6(1):8–10.
- [Wu et al., 2005b] Wu, Y., Allaire, P., Tao, G., and Olsen, D. (2005b). Modeling, estimation and control of cardiovascular systems with a left ventricular assist device. *American Control Conference*, 6(1):8–10.
- [Zócalo et al., 2020] Zócalo, Y., Bia, D., Farro, I., Torrado, J., Farro, F., Armentano, R. L., and Lluberas, R. (2020). Presión aórtica central y parámetros de reflexión de onda. *Revista Uruguaya de Cardiología*, 27(1):418–430.

Publicaciones

Se realizo la Publicación de artículo en el la Semana Nacional de Control Automático 2020.

Pistas Educativas, No. 137, noviembre 2020, México, Tecnológico Nacional de México en Celaya

DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN EMULADOR DEL CIRCUITO HIDRÁULICO DEL SISTEMA CIRCULATORIO

*DESIGN AND CONSTRUCTION OF A HYDRAULIC CIRCUIT
EMULATOR OF THE CIRCULATORY SYSTEM*

Cecilia Guadalupe Díaz Valerio

Universidad Tecnológica de Tehuacán, México
cecilia.diaz@alumno.uttehuacan.edu.mx

María Nayelí González Cruz

Universidad Tecnológica de Tehuacán, México
maria.nayeli@uttehuacan.edu.mx

Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Tecnológico Nacional de México / CENIDET, México
carlos.az@cenidet.tecnm.mx

Gloria Lilia Osorio Gordillo

Tecnológico Nacional de México / CENIDET, México
gloria.og@cenidet.tecnm.mx

Carlos Alberto Daza Merino

Universidad Tecnológica de Tehuacán, México
carlos.daza@uttehuacan.edu.mx

Juan Reyes Reyes

Tecnológico Nacional de México / CENIDET, México
juan.rr@cenidet.tecnm.mx

Recepción: 20/octubre/2020

Aceptación: 27/noviembre/2020

Resumen

Este artículo presenta el diseño e implementación de un emulador de la función hidráulica del sistema cardiovascular. El emulador consiste en 6 tanques interconectados (representando las aurículas, ventrículos, el cuerpo y pulmones), 4

Se realizó la Publicación de artículo en el la 6ta Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada.

Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada
Vol. 4, Núm. 1, Enero - Junio 2021.

ISSN en trámite

Modelado Hidráulico del Sistema Circulatorio para Propósitos Didácticos

Cecilia-G. Díaz-Valerio* Carlos-M. Astorga-Zaragoza*
Juan Reyes-Reyes* María-N. González-Cruz**
Carlos-A. Daza-Merino** Aldo-R. Sartorius-Castellanos***

* *Tecnológico Nacional de México/Centro Nacional de Investigación y
Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos.*

** *Universidad Tecnológica de Tehuacán, Puebla.*

*** *Instituto Tecnológico de Minatitlán, Veracruz.*

Abstract: In this paper the design, implementation and modeling of an emulator of the hydraulics of the circulatory system is presented. The emulator consists of six interconnected tanks (representing the atria, ventricles, the body and lungs), four valves (representing the mitral, tricuspid, aortic and pulmonary valves) and two pumps for transportation of the liquid (representing blood) from body towards the heart and from heart towards the lungs. A microcontroller-based electronic system is implemented to synchronize the driving pumps and the valves. Finally, a simple mathematical model is developed in order to show how this emulator can be useful for the analysis and design of control algorithms. The main contribution of this development is the possibility for multi-purpose applications in different areas such as exhibitions for children, explanation of heart functioning and diseases, training of medical assistants and students, mechatronics training, control engineering practice and so on.

Keywords: Modelado, sistema circulatorio, sistema cardiovascular, corazón, hidráulica.

Anexo A

En esta sección se presentan las matrices del sistema cuasi-LPV para cada una de las fases del ciclo cardiaco, las cuales son obtenidas directamente de modelo de las Ecs. (2.68), (2.82), (2.96).

Fase de Llenado del Ventrículo Izquierdo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.4322 & 0.3980 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.1)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.3990 & 0.3980 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.2)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0130 & 0.0120 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.3)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -0.3990 & 0.3980 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.4)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -0.4322 & 0.3980 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.5)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -0.0462 & 0.0120 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.6)$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -0.0462 & 0.0120 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.7)$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} -0.0130 & 0.0120 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0.0455 & -0.0457 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.8)$$

$$B_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad (.0.9)$$

$$B_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad (.0.10)$$

$$B_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad B_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad (.0.11)$$

$$B_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad (.0.12)$$

Fase de Eyección

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2024 & 0 & 0 & 0.1990 & 0 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.0.13)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.1991 & 0 & 0 & 0.1990 & 0 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.0.14)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0061 & 0 & 0 & 0.0060 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.0.15)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -0.1991 & 0 & 0 & 0.1990 & 0 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.0.16)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -0.2024 & 0 & 0 & 0.1990 & 0 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.0.17)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -0.0094 & 0 & 0 & 0.0060 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.018)$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -0.0094 & 0 & 0 & 0.0060 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.019)$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} -0.0061 & 0 & 0 & 0.0060 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 1.2500 & 0 & 0 & -1.2500 & -0.0013 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.2000 & 0.2000 & -0.0080 & 0 \\ 0.0021 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & -0.0006 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad (.020)$$

$$B_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad (.021)$$

$$B_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad (.022)$$

$$B_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad B_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad (.023)$$

$$B_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad (.024)$$

Fase Contracción/Relajación isovolúmica

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0342 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.25)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.26)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.27)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.0.28)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -0.0342 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0020 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.029)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -0.0342 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.030)$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -0.0342 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.031)$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & -0.0002 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0008 & -0.0008 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 & 0.0125 \\ 0 & 0 & -2.0000 & 2.0000 & -0.0796 & 0 \\ 0.0212 & 0 & 0 & -0.0212 & 0 & -0.0065 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (.032)$$

$$B_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad (.033)$$

$$B_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \quad B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \quad (.034)$$

$$B_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \qquad B_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \qquad (.0.35)$$

$$B_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 25000]^T \qquad B_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2959]^T \qquad (.0.36)$$

Anexo B

A continuación, se muestran las matrices del observador dinámico generalizado, correspondientes a la Fase de Eyección.

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0 & 9.7094 & -9.7097 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0 & 9.7094 & -9.7097 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0 & 9.7094 & -9.7117 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$N_4 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0 & 9.7094 & -9.7097 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$N_5 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0 & 9.7094 & -9.7097 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$N_6 = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0 & 9.7094 & -9.7117 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$N_7 = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0 & 9.7094 & -9.7117 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$N_8 = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0 & 9.7094 & -9.7117 & 0.1932 & -0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0002 & -0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0007 & 0.0007 & 0 & 0 \\ 0.0125 & 0 & -0.0075 & -0.0050 & -0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009 & 0.0009 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$H_{1,2,4,5} = \begin{bmatrix} -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 \\ -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 \\ 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 \\ -0.4533 & -0.4533 & -0.4533 & -0.4533 & -0.4533 & -0.4533 \\ -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 \\ 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$H_{3,6,7,8} = \begin{bmatrix} -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 & -0.2823 \\ -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 & -0.6554 \\ 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 & 1.6051 \\ -0.4534 & -0.4534 & -0.4534 & -0.4534 & -0.4534 & -0.4534 \\ -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 & -0.0146 \\ 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 & 0.0014 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 3.4375 & -0.1226 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 3.4536 & -0.1229 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 4.3913 & -0.1439 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_4 = \begin{bmatrix} 3.4536 & -0.1229 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} 3.4375 & -0.1226 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_6 = \begin{bmatrix} 4.3752 & -0.1435 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_7 = \begin{bmatrix} 4.3752 & -0.1435 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_8 = \begin{bmatrix} 4.3913 & -0.1439 \\ 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 \\ 6.0688 & -0.1355 \\ -0.0003 & 0 \\ 0.0052 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$J_{1,2,3,7} = \begin{bmatrix} 2.7075 \\ -0.0002 \\ -0.0011 \\ -0.0041 \\ 0 \\ 0.0125 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad J_{4,5,6,8} = \begin{bmatrix} 3.2046 \\ -0.0003 \\ -0.0013 \\ -0.0049 \\ 0 \\ 0.0148 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$S_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0251 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0252 \end{bmatrix} \quad M_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \begin{bmatrix} 0.5364 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5364 \\ 0.5960 & 0.5960 \\ 0.5964 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5364 \\ 0.5364 & 0.5964 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$G_{1,2,4,5} = \begin{bmatrix} -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 \\ 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 \\ -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 \\ 0.4512 & 0.4512 & 0.4512 & 0.4512 & 0.4512 & 0.4512 \\ 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 \\ -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$G_{3,6,7,8} = \begin{bmatrix} -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 & -0.0038 \\ 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 & 0.6554 \\ -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 & -1.6051 \\ 0.4513 & 0.4513 & 0.4513 & 0.4513 & 0.4513 & 0.4513 \\ 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 & 0.0146 \\ -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 & -0.0014 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4.8547 & 0.1083 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0037 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0005 \end{bmatrix} \times 10^2 \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4.8547 & -0.1083 \\ 0.0001 & 0.1000 \\ -0.0004 & 0.0100 \\ -0.0037 & 0.0002 \\ 0.0008 & 0 \\ 0 & 0.0007 \end{bmatrix}$$

Ahora, se muestran las matrices del observador dinámico generalizado, correspondientes la Fase de Contracción/Relajación Isovolumétrica.

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0.0646 & 0 & 0.0149 & 0.0155 & 0.0003 & 0.0037 \\ 0.0007 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0001 & 0 & -0.0001 \\ 0.0011 & 0.0008 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0004 & -0.0002 \\ 0.0006 & 0 & 0.0001 & -0.0007 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0202 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0019 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_{2,3} = \begin{bmatrix} -0.0314 & 0 & 0.0149 & 0.0155 & 0.0003 & 0.0046 \\ 0.0007 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0001 & 0 & -0.0001 \\ 0.0011 & 0.0008 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0004 & -0.0002 \\ 0.0006 & 0 & 0.0001 & -0.0007 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0202 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0019 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_4 = \begin{bmatrix} -0.0314 & 0 & 0.0149 & 0.0155 & 0.0003 & 0.0037 \\ 0.0007 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0001 & 0 & -0.0001 \\ 0.0011 & 0.0008 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0004 & -0.0002 \\ 0.0006 & 0 & 0.0001 & -0.0007 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0202 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0019 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_{5,6} = \begin{bmatrix} -0.0646 & 0 & 0.0149 & 0.0155 & 0.0003 & 0.0046 \\ 0.0007 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0001 & 0 & -0.0001 \\ 0.0011 & 0.0008 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0004 & -0.0002 \\ 0.0006 & 0 & 0.0001 & -0.0007 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0202 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0019 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_7 = \begin{bmatrix} -0.0646 & 0 & 0.0149 & 0.0155 & 0.0003 & 0.0046 \\ 0.0007 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0001 & 0 & -0.0001 \\ 0.0011 & 0.0008 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0004 & -0.0002 \\ 0.0006 & 0 & 0.0001 & -0.0007 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0202 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0019 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_8 = \begin{bmatrix} -0.0314 & 0 & 0.0149 & 0.0155 & 0.0003 & 0.0046 \\ 0.0007 & -0.0002 & -0.0005 & 0.0001 & 0 & -0.0001 \\ 0.0011 & 0.0008 & -0.0009 & -0.0009 & 0.0004 & -0.0002 \\ 0.0006 & 0 & 0.0001 & -0.0007 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 & -0.0202 & 0 \\ 0.0106 & 0 & 0 & -0.0106 & 0 & -0.0019 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -215.8177 & -219.0990 & -219.1814 & -219.1254 & -219.0556 & -219.0567 \\ 35.9494 & 36.2021 & 36.0158 & 35.9722 & 35.9903 & 35.9899 \\ 155.6920 & 155.8061 & 156.1316 & 155.8371 & 155.7795 & 155.7793 \\ -50.6340 & -50.5980 & -50.5268 & -50.3350 & -50.5815 & -50.5817 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4210 & -0.4214 & -0.4211 & -0.4211 & -0.4209 & -0.1822 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -239.5950 & -242.8763 & -242.9587 & -242.9027 & -242.8329 & 242.8340 \\ 36.2548 & 36.5075 & 36.3211 & 36.2776 & 36.2957 & 36.2953 \\ 156.3582 & 156.4723 & 156.7977 & 156.5033 & 156.4457 & 156.4455 \\ -50.2375 & -50.2016 & -50.1304 & -49.9386 & -50.1850 & -50.1852 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4203 & -0.4206 & -0.4204 & -0.4204 & -0.4201 & -0.1815 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -239.6741 & -242.9554 & -243.0378 & -242.9818 & -242.9120 & -242.9131 \\ 36.2551 & 36.5077 & 36.3214 & 36.2778 & 36.2960 & 36.2956 \\ 156.3587 & 156.4728 & 156.7983 & 156.5039 & 156.4462 & 156.4460 \\ -50.2372 & -50.2013 & -50.1301 & -49.9383 & -50.1847 & -50.1849 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4027 & -0.4030 & -0.4027 & -0.4028 & -0.4025 & -0.1639 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} -239.5950 & -242.8763 & -242.9587 & -242.9027 & -242.8329 & -242.8340 \\ 36.2548 & 36.5075 & 36.3211 & 36.2776 & 36.2957 & 36.2953 \\ 156.3582 & 156.4723 & 156.7977 & 156.5033 & 156.4457 & 156.4455 \\ -50.2375 & -50.2016 & -50.1304 & -49.9386 & -50.1850 & -50.1852 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4203 & -0.4206 & -0.4204 & -0.4204 & -0.4201 & -0.1815 \end{bmatrix}$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} -215.8177 & -219.0990 & -219.1814 & -219.1254 & -219.0556 & -219.0567 \\ 35.9494 & 36.2021 & 36.0158 & 35.9722 & 35.9903 & 35.9899 \\ 155.6920 & 155.8061 & 156.1316 & 155.8371 & 155.7795 & 155.7793 \\ -50.6340 & -50.5980 & -50.5268 & -50.3350 & -50.5815 & -50.5817 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4210 & -0.4214 & -0.4211 & -0.4211 & -0.4209 & -0.1822 \end{bmatrix}$$

$$H_6 = \begin{bmatrix} -215.8968 & -219.1781 & -219.2605 & -219.2045 & -219.1347 & -219.1358 \\ 35.9497 & 36.2024 & 36.0161 & 35.9725 & 35.9906 & 35.9902 \\ 155.6925 & 155.8066 & 156.1321 & 155.8377 & 155.7800 & 155.7798 \\ -50.6336 & -50.5977 & -50.5265 & -50.3347 & -50.5811 & -50.5813 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4034 & -0.4038 & -0.4035 & -0.4035 & -0.4032 & -0.1646 \end{bmatrix}$$

$$H_7 = \begin{bmatrix} -215.8968 & -219.1781 & -219.2605 & -219.2045 & -219.1347 & -219.1358 \\ 35.9497 & 36.2024 & 36.0161 & 35.9725 & 35.9906 & 35.9902 \\ 155.6925 & 155.8066 & 156.1321 & 155.8377 & 155.7800 & 155.7798 \\ -50.6336 & -50.5977 & -50.5265 & -50.3347 & -50.5811 & -50.5813 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4034 & -0.4038 & -0.4035 & -0.4035 & -0.4032 & -0.1646 \end{bmatrix}$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} -239.6741 & -242.9554 & -243.0378 & -242.9818 & -242.9120 & -242.9131 \\ 36.2551 & 36.5077 & 36.3214 & 36.2778 & 36.2960 & 36.2956 \\ 156.3587 & 156.4728 & 156.7983 & 156.5039 & 156.4462 & 156.4460 \\ -50.2372 & -50.2013 & -50.1301 & -49.9383 & -50.1847 & -50.1849 \\ 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 3.8342 & 4.0728 & 3.8342 \\ -0.4027 & -0.4030 & -0.4027 & -0.4028 & -0.4025 & -0.1639 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0.0370 & -88.2770 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.2098 & -40.6853 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0.2098 & -39.2378 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 0.2098 & -40.6853 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} -0.0370 & -88.2770 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$F_6 = \begin{bmatrix} -0.0370 & -86.8295 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$F_7 = \begin{bmatrix} -0.0370 & -86.8295 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$F_8 = \begin{bmatrix} 0.2098 & -39.2378 \\ -0.0176 & 0.8652 \\ 0.5664 & 1.4057 \\ -9.3675 & 10.1437 \\ -29.5641 & 23.5465 \\ 0.0782 & 13.2038 \end{bmatrix}$$

$$J_{1,2,3,7} = \begin{bmatrix} -3.5805 \\ 0.0816 \\ 0.1327 \\ 0.0738 \\ 0 \\ 1.2500 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$J_{4,5,6,8} = \begin{bmatrix} -4.2379 \\ 0.0965 \\ 0.1570 \\ 0.0873 \\ 0 \\ 1.4795 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$S_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1193 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1193 \end{bmatrix} \quad M_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \begin{bmatrix} 0.5364 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5364 \\ 0.5960 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5960 \\ 0.5960 & 0.5364 \\ 0.5364 & 0.5960 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 12.8547 & 13.4045 & 13.4081 & 13.4056 & 13.4046 & 13.4048 \\ -27.4079 & -27.9390 & -27.4099 & -27.4230 & -27.4077 & -27.4078 \\ -16.0020 & -16.0076 & -16.5397 & -16.0099 & -16.0054 & -16.0053 \\ -33.4434 & -33.4598 & -33.4490 & -33.9768 & -33.4445 & -33.4444 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2259 & -0.2261 & -0.2259 & -0.2260 & -0.2260 & -0.7421 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 14.4077 & 14.9574 & 14.9610 & 14.9586 & 14.9576 & 14.9577 \\ -27.4474 & -27.9785 & -27.4494 & -27.4625 & -27.4472 & -27.4473 \\ -16.0689 & -16.0745 & -16.6066 & -16.0768 & -16.0723 & -16.0722 \\ -33.4921 & -33.5085 & -33.4977 & -34.0255 & -33.4931 & -33.4931 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2265 & -0.2268 & -0.2266 & -0.2267 & -0.2267 & -0.7428 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 14.4129 & 14.9627 & 14.9663 & 14.9638 & 14.9628 & 14.9630 \\ -27.4472 & -27.9784 & -27.4493 & -27.4624 & -27.4471 & -27.4472 \\ -16.0685 & -16.0741 & -16.6062 & -16.0764 & -16.0719 & -16.0718 \\ -33.4919 & -33.5082 & -33.4974 & -34.0252 & -33.4929 & -33.4929 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2773 & -0.2775 & -0.2773 & -0.2774 & -0.2774 & -0.7935 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 14.4077 & 14.9574 & 14.9610 & 14.9586 & 14.9576 & 14.9577 \\ -27.4474 & -27.9785 & -27.4494 & -27.4625 & -27.4472 & -27.4473 \\ -16.0689 & -16.0745 & -16.6066 & -16.0768 & -16.0723 & -16.0722 \\ -33.4921 & -33.5085 & -33.4977 & -34.0255 & -33.4931 & -33.4931 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2265 & -0.2268 & -0.2266 & -0.2267 & -0.2267 & -0.7428 \end{bmatrix}$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} 12.8547 & 13.4045 & 13.4081 & 13.4056 & 13.4046 & 13.4048 \\ -27.4079 & -27.9390 & -27.4099 & -27.4230 & -27.4077 & -27.4078 \\ -16.0020 & -16.0076 & -16.5397 & -16.0099 & -16.0054 & -16.0053 \\ -33.4434 & -33.4598 & -33.4490 & -33.9768 & -33.4445 & -33.4444 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2259 & -0.2261 & -0.2259 & -0.2260 & -0.2260 & -0.7421 \end{bmatrix}$$

$$G_6 = \begin{bmatrix} 12.8600 & 13.4097 & 13.4133 & 13.4109 & 13.4099 & 13.4100 \\ -27.4077 & -27.9389 & -27.4098 & -27.4229 & -27.4076 & -27.4077 \\ -16.0016 & -16.0072 & -16.5394 & -16.0095 & -16.0050 & -16.0049 \\ -33.4432 & -33.4595 & -33.4487 & -33.9765 & -33.4442 & -33.4442 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2766 & -0.2769 & -0.2766 & -0.2767 & -0.2768 & -0.7928 \end{bmatrix}$$

$$G_7 = \begin{bmatrix} 12.8600 & 13.4097 & 13.4133 & 13.4109 & 13.4099 & 13.4100 \\ -27.4077 & -27.9389 & -27.4098 & -27.4229 & -27.4076 & -27.4077 \\ -16.0016 & -16.0072 & -16.5394 & -16.0095 & -16.0050 & -16.0049 \\ -33.4432 & -33.4595 & -33.4487 & -33.9765 & -33.4442 & -33.4442 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2766 & -0.2769 & -0.2766 & -0.2767 & -0.2768 & -0.7928 \end{bmatrix}$$

$$G_8 = \begin{bmatrix} 14.4129 & 14.9627 & 14.9663 & 14.9638 & 14.9628 & 14.9630 \\ -27.4472 & -27.9784 & -27.4493 & -27.4624 & -27.4471 & -27.4472 \\ -16.0685 & -16.0741 & -16.6062 & -16.0764 & -16.0719 & -16.0718 \\ -33.4919 & -33.5082 & -33.4974 & -34.0252 & -33.4929 & -33.4929 \\ -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.4273 & -0.9434 & -0.4273 \\ -0.2773 & -0.2775 & -0.2773 & -0.2774 & -0.2774 & -0.7935 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.0074 & -1.4322 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.0004 & 0.0326 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0001 & 0.0531 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.0295 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5000 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0074 & 1.4322 \\ -0.0004 & -0.0326 \\ -0.0001 & -0.0531 \\ 0.0007 & -0.0295 \\ 0.7500 & 0 \\ 0 & 0.7500 \end{bmatrix}$$