



Instituto Tecnológico de La Laguna

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E
INVESTIGACIÓN**

**“Control de Sistemas Mecatrónicos
por el Método de
Inmersión e Invariancia”**

POR

M.C. José Fernando Hernández Castañeda

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Jurado Zamarripa

ISSN:0188-9060



RIITEC: (05)-TDCIE-2018

**Torreón, Coahuila de Zaragoza; México.
Diciembre 2018**



Instituto Tecnológico de La Laguna

Torreón, Coah., 12/Diciembre/2018
Dependencia: DEPI/CPCIE
Oficio: DEPIJ/CPCIE/075/2018
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

C. José Fernando Hernández Castañeda
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Control de Sistemas Mecatrónicos por el Método de Inmersión e Invariancia"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (05)-TDCIE-2018**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN



SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

DR. JOSE IRVING HERNÁNDEZ JÁQUEZ INSTITUTO TECNOLÓGICO
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna División de Estudios de Posgrado
e Investigación



Bldv. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah. Mé.
Tel. 01 (871) 7051313 e-mail: webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx
www.tecnm.mx | www.itlalaguna.edu.mx





SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de La Laguna

Torreón, Coah., 11/Diciembre/2018

DR. JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JACQUEZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Control de Sistemas Mecatrónicos por el Método de Inmersión e Invariancia"

Desarrollado por el **C. José Fernando Hernández Castañeda**, con número de control **D1413004** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

Dr. Víctor Adrian Santibañez Davila
Asesor/Director de Tesis

Dr. Francisco Jurado Zamarripa
Coasesor/Codirector

Dr. Miguel Ángel Llana Leal
Comité Tutorial

Dr. Ricardo E. Campa Cocom
Comité Tutorial

Dr. Víctor Samuel de León Gómez
Comité Tutorial Externo



Blvd. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coah. Mé
Tel. 01 (871) 7051313 e-mail: webmaster@correo.itlalaguna.edu.mx
www.tecnm.mx | www.itlalaguna.edu.mx



**A la memoria de mi madre,
María Leticia.**

Agradecimiento

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis asesores de tesis los profesores, Dr. Francisco Jurado Zamarripa y Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila, por haber confiado en mí para desarrollar este trabajo de tesis. A veces, en los proyectos existen factores inesperados que los prolongan en el tiempo, y que tal vez serían más difíciles de concretar sin su apoyo incondicional. Gracias por su paciencia y enseñanzas dentro y fuera del aula de clases.

Agradezco también a mi familia que siempre ha estado conmigo cuando lo he necesitado, en los buenos y malos momentos.

Gracias a mis compañeros, amigos y todas las personas que han contribuido de forma directa e indirecta en mi formación profesional.

Por último, gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico brindado para estudiar el posgrado.

Muchas gracias a todos.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo general	1
1.1.1. Objetivos específicos	2
2. Preliminares matemáticos y notación	3
2.1. Notación	3
2.2. Espacios de funciones	4
2.3. Estabilidad de Lyapunov y convergencia	5
2.4. Variedades invariantes e inmersión de sistemas	6
3. Inmersión e Invariancia	7
3.1. Características principales	7
3.2. Estabilización vía I&I	8
3.2.1. Interpretación geométrica	9
3.3. I&I y su relación con otras técnicas de control	10
3.4. Teorema de estabilización vía I&I	11
4. Control I&I para robots manipuladores	15
4.1. Modelo dinámico	15
4.2. Propiedades	15
4.2.1. Matriz de inercia	15
4.2.2. Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis	16
4.2.3. Vector de gravedad	17
4.3. Control de posición	18
4.3.1. Control PD con compensación de gravedad	18
4.3.2. Control PD con compensación precalculada de gravedad	20
4.4. Control de movimiento	22
4.4.1. Control par-calculado	23
4.5. Modelo dinámico de un robot manipulador de 2 G.D.L	25
4.6. Resultados de simulación	27
5. Control I&I para una aeronave del tipo PVTOL	29
5.1. Modelo dinámico normalizado	30
5.2. Control vía I&I	31
5.3. Simulación	33
6. Control I&I para una aeronave del tipo PVTOL con prioridad para la altura	37
6.1. Modelo dinámico	37
6.2. Control vía I&I	38
6.3. Simulación	44

7. Control I&I para un quadrotor	51
7.1. Modelo dinámico de un quadrotor y de una aeronave tipo PVTOL	51
7.1.1. Modelo dinámico de un quadrotor	51
7.1.2. Modelo dinámico de la aeronave PVTOL	55
7.1.3. Formulación del problema de control	55
7.2. Diseño del controlador I&I	56
7.2.1. Diseño del sistema dinámico objetivo planar	56
7.2.2. Diseño del sistema objetivo PVTOL	58
7.2.3. Diseño del controlador I&I para un quadrotor	62
7.3. Simulación	65
8. Conclusión	71
A. Artículos publicados	73
Bibliografía	105

Índice de figuras

3.1. Ilustración gráfica del mapeo entre las trayectorias del sistema a controlar y el sistema dinámico objetivo para $p = 2$ y $n = 3$	8
3.2. Ilustración gráfica del enfoque I&I.	9
3.3. Interpretación de la sumersión en los métodos de diseño basados en Lyapunov.	10
4.1. Robot de 2 G.D.L	26
4.2. Trayectoria deseada $\mathbf{q}_d(t)$	27
4.3. Par resultante.	28
4.4. Errores de posición	28
5.1. Vehículo aéreo de despegue y aterrizaje vertical (PVTOL).	29
5.2. Dinámicas de los estados x_1 y x_2	34
5.3. Dinámicas de los estados y_1 y y_2	34
5.4. Dinámicas de los estados θ y ω	35
5.5. Dinámica de la entrada de control u_1	35
5.6. Dinámica de la entrada de control u_2	36
6.1. Sistema aeronave PVTOL.	38
6.2. Movimiento de la aeronave PVTOL en el plano (y,z)	47
6.3. Dinámica de traslación de la aeronave PVTOL.	48
6.4. Dinámica de rotación y entradas de control para la aeronave PVTOL.	48
6.5. Movimiento de la aeronave PVTOL en el plano (y,z) incluyendo perturbaciones.	49
6.6. Dinámica de traslación de la aeronave PVTOL incluyendo perturbaciones.	49
6.7. Dinámica de rotación y entradas de control para la aeronave PVTOL incluyendo perturbaciones.	50
7.1. Diagrama de cuerpo libre del quadrotor.	52
7.2. Vista superior del quadrotor.	53
7.3. Quadrotor visto como una aeronave PVTOL.	55
7.4. Estrategia de control.	56
7.5. Trayectoria del quadrotor en el plano (x, y, z)	66
7.6. Vector de posición $\mathbf{q}_p(t) = [x, y, z]^T$ y vector de posición deseada $\mathbf{q}_d(t) = [x_d, y_d, z_d]^T$	68
7.7. Vector de error de posición $e_p = [e_1, e_2, e_3]^T$	69
7.8. Entradas de control.	70

Índice de tablas

4.1. Parámetros del robot manipulador de 2 G.D.L.	27
6.1. Parámetros del sistema aeronave PVTOL.	45
6.2. Parámetros para los controladores I&I y Saeki.	46
6.3. Parámetros del controlador I&I resintonizado.	46
7.1. Parámetros del sistema	67
7.2. Parámetros del controlador I&I.	67
7.3. Estados iniciales	67

Capítulo 1

Introducción

La teoría de control automático ha experimentado un notable desarrollo en los últimos años, sobre todo en la teoría de control no lineal debido a la necesidad por ampliar el rango de operación del controlador y hacer frente a diversas incertidumbres en los modelos dinámicos de los sistemas no lineales, como la falta de conocimiento de ciertos parámetros o la incapacidad para medir algún estado del sistema. Técnicas de control como el control por interconexión y asignación de amortiguamiento (IDA, de las siglas en inglés *Interconnection and Damping Assignment*), control basado en pasividad (PBC, de las siglas en inglés *Passivity Based Control*), control por *backstepping*, control por modos deslizantes (SMC, de las siglas en inglés *Sliding Mode Control*) y el control de linealización exacta por realimentación, entre otras técnicas, brindan una solución a esta problemática. Conceptos en la geometría diferencial como pasividad, optimalidad y la estabilidad en el sentido de Lyapunov revelan importantes propiedades de los sistemas no lineales en los cuales están basadas todas estas técnicas. Por otro lado, conceptos como inmersión de sistemas y variedades invariantes son la base para el desarrollo de la técnica de control por inmersión e invariancia (I&I, de las siglas en inglés *Immersion and Invariance*), la cual ofrece otra alternativa para solucionar problemas de control de sistemas no lineales sujetos a varios tipos de incertidumbre, incluyendo la falta de conocimiento de los parámetros del sistema, medición parcial de los estados del sistema e incertidumbre en el orden del sistema y estructura. Esta técnica de control es el principal objeto de estudio del presente trabajo de tesis.

En la metodología de control por I&I se propone capturar el comportamiento deseado de la dinámica del sistema a ser controlado introduciendo un sistema dinámico objetivo. El problema de control es luego reducido al diseño de una ley de control la cual garantice que el sistema controlado de forma asintótica se comporte como el sistema objetivo. Más precisamente, la metodología de control por I&I se basa en encontrar una variedad en el espacio de estados la cual pueda ser atractiva e invariante, con una dinámica interna copia de la dinámica deseada en lazo cerrado, para luego diseñar una ley de control que de forma robusta dirija los estados del sistema hacia la variedad o por lo menos lo suficientemente cercanos a ésta.

El presente documento de tesis da muestra del estudio de la metodología de inmersión e invariancia y su aplicación en el control de sistemas mecatrónicos como lo son un robot manipulador, un vehículo espacial y vehículos aéreos no tripulados (UAVs, de las siglas en inglés *Unmanned Aerial Vehicles*) del tipo PVTOL y quadrotor.

1.1. Objetivo general

El objetivo general de la presente investigación consiste en el estudio de la metodología de inmersión e invariancia (I&I, de las siglas en inglés *Immersion and Invariance*) para el diseño de controladores aplicados a sistemas mecatrónicos.

1.1.1. Objetivos específicos

Los objetivos específicos consisten en:

- El estudio de la metodología I&I.
- Propuesta de controladores I&I en el control de sistemas mecatrónicos.
 - I&I en el control de robots manipuladores.
 - I&I en el control de una aeronave PVTOL (De las siglas en inglés *Planar Vertical Take-Off and Landing*).
 - I&I en el control de una aeronave PVTOL con prioridad de altura.
 - I&I en el control de un quadrotor.
- Reportar resultados obtenidos.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos y notación

A continuación se presentan los fundamentos matemáticos y la notación utilizada a lo largo del presente documento.

2.1. Notación

En el presente documento se consideran sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma [3]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la señal de entrada y t denota el tiempo. Las trayectorias de la ecuación anterior se denotan por $\mathbf{x}(t)$ donde $t \in [0, T)$ para $0 < T \leq \infty$ y $\mathbf{x}(t_0)$ son las condiciones iniciales. Por simplicidad siempre se asumirá que $t_0 = 0$, a menos que se indique lo contrario. La transpuesta de una matriz A se denota por A^\top y I representa la matriz identidad. La matriz diagonal de $n \times n$ es representada como $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, donde a_i son los elementos de la diagonal. Un vector columna con elementos x_1, \dots, x_n es representado como $\text{col}(x_1, \dots, x_n)$. El valor absoluto de un escalar y es denotado como $|y|$. La norma p de un vector $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$, para $1 \leq p < \infty$, es definida como [27]

$$\|\mathbf{x}\|_p \triangleq (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Observe que si $n = 1$ luego $\|\mathbf{x}\|_p = |\mathbf{x}|$ para toda $1 \leq p < \infty$. En el presente documento se usa la norma Euclidiana (o norma 2) en cuyo caso el subíndice p no es considerado, *i.e.*, $\|\mathbf{x}\| \triangleq \|\mathbf{x}\|_2$. La norma p inducida de una matriz A , para $1 \leq p < \infty$, está definida como

$$\|A\|_p \triangleq \sup \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}, \mathbf{x} \neq 0$$

donde \sup denota el supremo, *i.e.*, la mínima cota superior. Para $p = 2$ la definición anterior conduce a $\|A\| \triangleq \|A\|_2 = (\lambda_{\max}(A^\top A))^{1/2}$, donde $\lambda_{\max}(A^\top A)$ es el máximo eigenvalor de $A^\top A$.

Denotaremos a la clase de mapeos diferenciables n veces como \mathcal{C}^n [19], *i.e.*, sus derivadas parciales de orden n existen y son continuas. A lo largo del presente documento de tesis emplearemos el término *suave* (*smooth*) para resaltar mapeos que son \mathcal{C}^k [19], para alguna k grande tal que todas las derivadas requeridas estén bien definidas.

Para toda función \mathcal{C}^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y cualquier campo vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L_f V(\mathbf{x})$ denota la *derivada de Lie* de V en \mathbf{x} a lo largo de \mathbf{f} , *i.e.*,

$$L_f V(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t).$$

2.2. Espacios de funciones

Una clase particular de espacios vectoriales son los denominados espacios \mathcal{L}_p^n . A continuación se presentan una serie de conceptos y definiciones sobre espacios de funciones [26].

Una función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua si

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

El espacio \mathcal{L}_2^n consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$\int_0^\infty \mathbf{f}(t)^T \mathbf{f}(t) dt = \int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt < \infty.$$

El espacio \mathcal{L}_∞^n consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que sus normas Euclidianas sean acotadas, *i.e.*

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}(t)\| < \infty.$$

Los símbolos \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_∞ sirven para denotar los espacios \mathcal{L}_2^1 y \mathcal{L}_∞^1 respectivamente.

Lema 1. *Considere una función continua $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Suponga que la función f satisface las siguientes hipótesis*

- $\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}} = \frac{d}{dt} \mathbf{f} \in \mathcal{L}_\infty^n$.
- $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_2^n$;

luego, necesariamente, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Lema 2. *Considere las funciones continuas y diferenciables $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Defínase la función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por*

$$V(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, h) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T P(t) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + h(t) \geq 0$$

donde $P(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ es una matriz simétrica definida positiva para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Si la derivada de V con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, h) &= \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, h)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, h)}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, h)}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{dt} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, h)}{\partial h} \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

satisface

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, h) = - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \leq 0$$

donde $Q = Q^T > 0$, luego

- $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^n$, $\mathbf{z} \in \mathcal{L}_\infty^m$ y $h \in \mathcal{L}_\infty$.
- $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n$.

Si además $\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$.

2.3. Estabilidad de Lyapunov y convergencia

A continuación se describen una serie de definiciones, lemas y teoremas relacionados con la estabilidad en el sentido de Lyapunov para sistemas dinámicos y convergencia de funciones [27].

Definición 1. Una función continua $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es definida positiva (semidefinida) si $V(0) = 0$ y $V(\mathbf{x}) > 0$ ($V \geq 0$) para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; se dice que es definida (semidefinida) negativa si $-V(\cdot)$ es definida (semidefinida) positiva.

Definición 2. Una matriz P real se dice que es definida positiva (semidefinida) si esta es simétrica y la función $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ es definida positiva (o semidefinida positiva). Observe que $P = P^T$ es positiva definida (o semidefinida positiva) si y sólo si todos los eigenvalores de P son positivos (no negativos).

Definición 3. Una función continua $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice que es de clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\gamma(0) = 0$; se dice que esta es de clase \mathcal{K}_∞ si además esta es desacotada, i.e., $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty$.

Definición 4. Una función continua $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice que es de clase \mathcal{KL} si para cada t , la función $\beta(s, t)$ es de clase \mathcal{K} y para cada s la función $\beta(s, t)$ es decreciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$.

Definición 5. Una función continua definida positiva $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es radialmente desacotada (o propia) si existe una función $\alpha(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ tal que $V(\mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lema 3. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida positiva (y radialmente desacotada), luego existen funciones $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ tales que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|).$$

Usando las definiciones anteriores la estabilidad en el sentido de Lyapunov puede ser formulada como sigue.

Teorema 1. Considere el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq t_0$, con un punto de equilibrio $\mathbf{x} = 0$, y se supone que existe una función $V(\mathbf{x}, t)$, \mathcal{C}^1 tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -\kappa(\|\mathbf{x}\|),$$

donde $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ son funciones de clase \mathcal{K}_∞ y $\kappa(\cdot)$ es una función definida positiva. Luego $\mathbf{x} = 0$ es globalmente estable. Si además la función $\kappa(\cdot)$ es de clase \mathcal{K} , luego $\mathbf{x} = 0$ es globalmente asintóticamente estable (GAS).

Definición 6. Una función $V(\mathbf{x}, t)$ satisfaciendo las condiciones del Teorema 1 es denominada una función de Lyapunov para el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Los siguientes teoremas debidos a LaSalle son usados para probar convergencia asintótica para un equilibrio incluso aún cuando la función $\kappa(\cdot)$ es únicamente semidefinida positiva.

Teorema 2. Considere el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto positivamente invariante, i.e., $\mathbf{x}(0) \in \Omega \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{C}^1 tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Sea M el más grande conjunto invariante en E . Luego toda trayectoria comenzando en Ω alcanzará a M conforme t tiende a infinito.

Teorema 3. Considere el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq t_0$, con un punto de equilibrio $\mathbf{x} = 0$, donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es localmente Lipschitz uniformemente en t , y suponga que existe una función $V(\mathbf{x}, t)$, \mathcal{C}^1 tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0,$$

donde $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ son funciones de clase \mathcal{K}_∞ y $W(\cdot)$ es una función \mathcal{C}^0 . Luego $\mathbf{x} = 0$ es globalmente estable y, más aún,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}(t)) = 0$$

2.4. Variedades invariantes e inmersión de sistemas

En esta sección se introduce la definición de variedad invariante [41] e inmersión de un sistema [8]. Considere el sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

con estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y salida $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Definición 7. La variedad $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0\}$, con $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ suave, se dice que es (positivamente) invariante para $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si $\mathbf{s}(\mathbf{x}(0)) = 0$ implica $\mathbf{s}(\mathbf{x}(t)) = 0$, para todo $t \geq 0$. Considere ahora el sistema (objetivo)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\xi}), \quad (2.2)$$

con estados $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p$ ($p < n$) y salida $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^m$.

Definición 8. El sistema (2.2) se dice que está inmerso dentro del sistema (2.1) si existe un mapeo suave $\boldsymbol{\pi} : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ satisfaciendo $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}(0))$ y $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\xi}_1) \neq \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\xi}_2) \Rightarrow \mathbf{h}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}_1)) \neq \mathbf{h}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}_2))$ y tal que

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$$

y

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\xi})$$

para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p$.

Por lo tanto, en términos generales, un sistema Σ_1 se dice que está inmerso dentro de un sistema Σ_2 si el mapeo entrada-salida de Σ_2 es una restricción del mapeo entrada-salida de Σ_1 , i.e., cualquier respuesta de salida generada por Σ_2 es además una respuesta de salida de Σ_1 para un conjunto limitado de condiciones iniciales, vea e.g., [8, 23].

Capítulo 3

Inmersión e Invariancia

El control vía I&I es un método para diseñar controladores no lineales y adaptables para sistemas no lineales. Este método fue propuesto en [4], donde se introducen formalmente la metodología y los teoremas utilizados para aplicar esta técnica de control. Los autores utilizan desde una nueva perspectiva las nociones de variedad invariante e inmersión del sistema, las cuales son herramientas clásicas del control geométrico no lineal y la teoría de regulación no lineal. La idea básica del enfoque de control vía I&I es alcanzar el objetivo de control mediante la inmersión de la dinámica de la planta dentro de un sistema dinámico objetivo (posiblemente de menor orden) que capture el comportamiento deseado. Las principales características de esta metodología se enlistan a continuación.

3.1. Características principales

- El método reduce el problema de diseño del controlador en otros subproblemas los cuales, en algunas ocasiones, pueden ser más fáciles de resolver.
- El método difiere de muchas metodologías sobre el diseño de controladores porque no requiere, en principio, del conocimiento de una función de Lyapunov.
- Es muy adecuado en situaciones donde se conoce un controlador de estabilización para el modelo nominal de orden reducido y nos gustaría hacerlo robusto con respecto a la dinámica de alto orden. Esto se logra mediante el diseño de una ley de control que sumerja asintóticamente la dinámica completa del sistema dentro del sistema de orden reducido.
- En problemas de control adaptable la metodología lleva a esquemas de estabilización que contrarrestan el efecto de parámetros inciertos adoptando una perspectiva robusta. Esto está en contraste con algunos de los diseños adaptables existentes que (dependiendo de ciertas condiciones de emparejamiento) tratan estos términos como perturbaciones a ser rechazadas. El método I&I no invoca la equivalencia cierta ni requiere de una parametrización lineal. Además, el método provee un procedimiento para sumar términos cruzados entre los parámetros estimados y los estados de la planta en la función de Lyapunov.
- El método proporciona un marco natural para la formulación y solución de problemas de diseño de observadores y estabilización robusta por realimentación de salida, con observación de estados y estimación de parámetros tratados en un entorno unificado.
- Permite la formulación y solución de problemas de diseño de controladores no lineales proporcional-integral para una clase de sistemas de bajo orden toscamente definidos.

3.2. Estabilización vía I&I

Para introducir las nociones de la metodología I&I se ilustra el enfoque con el problema básico de estabilización de un punto de equilibrio de un sistema no lineal mediante realimentación de estados. El problema de estabilización por realimentación es escogido por facilidad de introducción al tema, pero el enfoque es aplicable a una amplia clase de problemas de control incluyendo seguimiento, estimación de parámetros, estimación de estados y estabilización por realimentación de la salida. Considere el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (3.1)$$

con estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. El problema consiste en encontrar, mientras sea posible, una ley de control por realimentación de estados $\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que el sistema en lazo cerrado tenga un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en el origen. Este problema puede ser abordado considerando el problema de encontrar un sistema dinámico objetivo de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.2)$$

con $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p$ y con $p < n$, el cual tiene un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en el origen, una función suave $\mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$, y una ley de control $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ tal que

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}(0)) = \mathbf{x}(0) \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\pi}(0) = 0 \quad (3.4)$$

y además

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}))\mathbf{v}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{\partial \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.5)$$

Si las condiciones anteriores se cumplen, entonces cualquier trayectoria $\mathbf{x}(t)$ del sistema en lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

es la imagen a través del mapeo $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$ de una trayectoria $\boldsymbol{\xi}(t)$ del sistema dinámico objetivo (3.2) como se ilustra en la figura 3.1. De (3.4) y del hecho de que el equilibrio cero del sistema objetivo es asintóticamente estable, esto implica que $\mathbf{x}(t)$ converja al origen. Luego el problema de estabilización del equilibrio cero del sistema (3.1) se puede estructurar como el problema de resolver la ecuación diferencial parcial (3.5) con las condiciones de acotamiento (3.3) y (3.4).

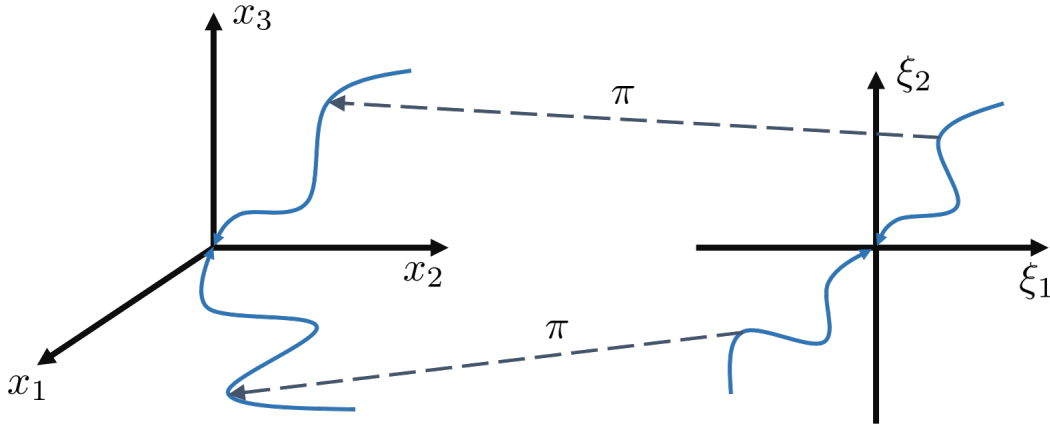


Figura 3.1: Ilustración gráfica del mapeo entre las trayectorias del sistema a controlar y el sistema dinámico objetivo para $p = 2$ y $n = 3$.

3.2.1. Interpretación geométrica

Una interpretación geométrica de las ecuaciones (3.3)-(3.5) es dada a continuación. Considere el sistema en lazo cerrado (3.6) y la siguiente variedad en el espacio de estados de dimensión n , definida como

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p\} \quad (3.7)$$

y tal que (3.3) y (3.4) se satisfagan. De (3.5) la variedad \mathcal{V} es invariante¹ con (3.2) como dinámica interna, por lo que todas las trayectorias $\mathbf{x}(t)$ que empiezan dentro de la variedad permanecen ahí y convergen asintóticamente al punto $\boldsymbol{\pi}(0)$, el cual por la ecuación (3.4) es el origen. Además, la condición (3.3) garantiza que el estado inicial del sistema (3.6) se encuentre en la variedad \mathcal{V} . La formulación anterior no es práctica por dos razones. Primero, de (3.3) y (3.5), el mapeo $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$ y el control $\mathbf{v}(\cdot)$ dependen, en general, de las condiciones iniciales. Segundo, puede ser imposible encontrar, para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, un mapeo $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$ tal que las condiciones (3.3), (3.4) y (3.5) sean satisfechas. Estos obstáculos pueden ser removidos mediante la determinación de una solución solo para (3.4) y (3.5) modificando la ley de control $\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ de manera tal que para todas las condiciones iniciales las trayectorias del sistema (3.6) permanecen acotadas y convergen asintóticamente a la variedad $\mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$, *i.e.*, la variedad \mathcal{V} se vuelve atractiva.

La atractividad de la variedad \mathcal{V} puede expresarse en términos de la distancia

$$|\zeta| = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{V}), \quad (3.8)$$

la cual debe ser llevada a cero. Observe además que la variedad \mathcal{V} no está definida únicamente. Esto provee un grado de libertad adicional en el diseño del control.

Una ilustración gráfica del enfoque I&I para $p = 2$ y $n = 3$ es mostrada en la figura 3.2. Observe que $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$ mapea una trayectoria en el espacio $\boldsymbol{\xi}$ a una trayectoria en el espacio \mathbf{x} , la cual está restringida a la variedad \mathcal{V} que contiene al origen. Además, todas las trayectorias que empiezan fuera de \mathcal{V} , *i.e.*, con $\zeta \neq 0$ convergen al origen.

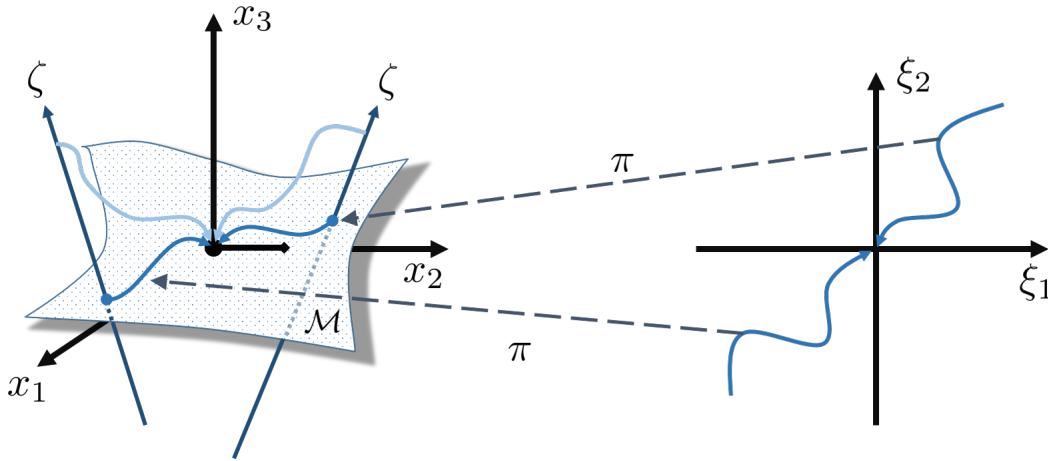


Figura 3.2: Ilustración gráfica del enfoque I&I.

¹Una variedad $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante si $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{V}$, para todo $t \geq 0$, vea definición 7.

3.3. I&I y su relación con otras técnicas de control

El concepto de invariancia ha sido ampliamente usado en la teoría de control. El desarrollo de la teoría de control geométrico lineal y no lineal (vea, [42, 32, 19]) ha mostrado que los sub-espacios invariantes y su contraparte, las distribuciones invariantes, juegan un rol fundamental en la solución de muchos problemas de diseño. Las variedades lentas y rápidas, que naturalmente surgen de los sistemas perturbados singularmente, han sido utilizados para estabilización [28] y análisis de sistemas de adaptación lenta [35]. La noción de variedades invariantes es además crucial en el diseño de leyes de control de estabilización para clases de sistemas no lineales. Más precisamente, la teoría de variedad central [9] ha sido instrumento en el diseño de leyes de control para sistemas con aproximación lineal no controlable, vea [1], mientras que el concepto de dinámica cero y la estrechamente relacionada variedad cero han sido explotados en varios métodos de estabilización local y global, incluyendo *passivity-based control* [34], *backstepping* [29], y *forwarding* [37].

La noción de inmersión tiene además una larga tradición en la teoría de control. Su idea básica es “transformar” el sistema bajo consideración en un sistema con propiedades especificadas previamente. Por ejemplo, el problema clásico de sumergir un sistema genérico no lineal dentro de un sistema lineal y controlable por medio de realimentación estática o dinámica ha sido extensamente estudiada, vea [32, 19] para mayor detalle. La observación de estados tradicionalmente comenzó siendo formulada en términos de inmersión del sistema, vea [24]. Más recientemente, la inmersión ha sido usada por la teoría de regulación no lineal para derivar condiciones necesarias y suficientes para regulación robusta. En particular, en [8, 20] se muestra que la regulación robusta se puede lograr siempre que el exosistema pueda ser inmerso dentro de un sistema lineal y observable. Finalmente, en [31] se muestra que un sistema dinámico (posiblemente de dimensión infinita) tiene un equilibrio estable si este puede ser sumergido dentro de otro sistema dinámico con equilibrio estable por medio del así llamado *stability preserving mapping*, mapeo que preserva la estabilidad.

Métodos de diseño basados en Lyapunov son de alguna forma duales al enfoque (informalmente) descrito anteriormente. De hecho, en el diseño de Lyapunov se busca una función $V(\mathbf{x})$, la cual es definida positiva (y propia, si se busca la estabilidad global) y tal que el sistema $\dot{V} = \alpha(V)$, para alguna función $\alpha(\cdot)$, tenga un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en cero. Observe que la función $V : \mathbf{x} \rightarrow I$, donde I es un intervalo del eje real, es una *sumersión* y las dinámicas objetivo, es decir las dinámicas de la función de Lyapunov, son de una dimensión, vea Figura 3.3.

La reformulación de I&I del problema de estabilización esta implícito en el control por modos deslizantes (*sliding mode control*), donde las dinámicas objetivo son las dinámicas del sistema sobre la variedad deslizante, la cual se vuelve atractiva mediante una ley de control discontinua mientras que $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ es el así llamado control equivalente [40].

Un procedimiento similar a I&I es propuesto en [25], con la diferencia fundamental de que p (dimensión

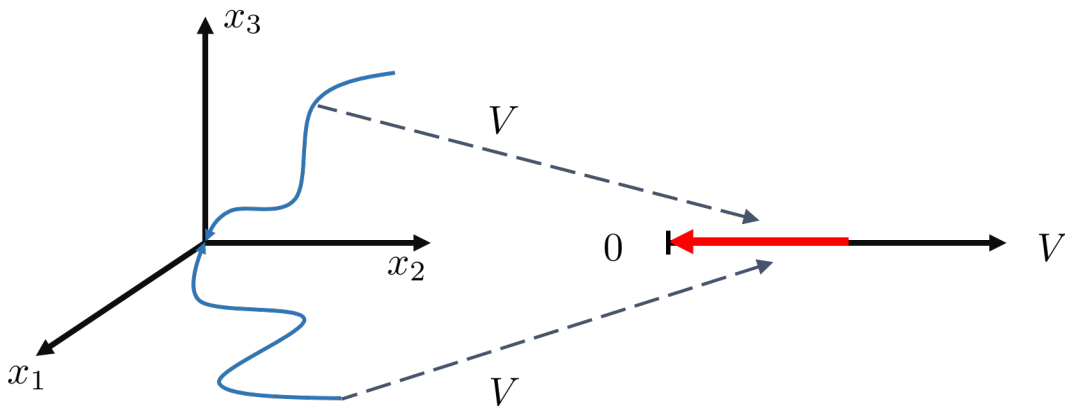


Figura 3.3: Interpretación de la sumersión en los métodos de diseño basados en Lyapunov.

del sistema dinámico objetivo) es igual a n (dimensión de la planta) y por consecuencia el mapeo $\pi(\cdot)$ no es una inmersión sino un cambio de coordenadas.

La estabilización vía I&I esta además relacionada con el método de estabilización basado en pasividad [7, 34] y en la teoría de disipatividad [7]. En el control basado en pasividad la estabilización es conseguida encontrando una salida para la cual el sistema sea pasivo con alguna función de almacenamiento adecuada, *e.g.*, con un mínimo en el equilibrio a ser estabilizado. Si el sistema no es pasivo en lazo abierto es necesario encontrar una señal de salida de grado relativo uno cuya dinámica cero sea de fase mínima. Como se demuestra en [7], bajo adecuadas suposiciones existen condiciones necesarias y suficientes para que el sistema a ser realimentado sea equivalente a un sistema pasivo. Como se explicó anteriormente, en I&I la ley de control estabilizadora es obtenida comenzando por la selección de un sistema dinámico objetivo $\dot{\xi} = \alpha(\xi)$, luego se calcula el mapeo $\mathbf{x} = \pi(\xi)$, se define la variedad \mathcal{V} , y finalmente se diseña una ley de control que conduzca la distancia $|\zeta|$ desde la variedad hacia cero. Es claro que el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ con salida ζ es de fase mínima y su dinámica cero es precisamente la dinámica del sistema objetivo. Si el grado relativo de ζ es uno, luego el sistema será por realimentación equivalente a un sistema pasivo.

3.4. Teorema de estabilización vía I&I

En esta sección se presenta el teorema fundamental de I&I, en el cual se enuncian las condiciones suficientes para la construcción de una ley de control globalmente asintóticamente estabilizadora para sistemas no lineales, en general, con entrada de control afín, mediante realimentación de estados. Observe que consideraciones similares se puede dar para sistemas con entrada de control no afín y problemas de seguimiento, mientras que versiones locales siguen el *mutatis mutandis*.

Teorema 4. *Considere el sistema*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.9)$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ y un punto de equilibrio $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ a ser estabilizado. Asuma que existen mapeos suaves $\alpha : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, $\mathbf{c} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{v} : \mathbb{R}^{n \times s} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $p < n$, $s \triangleq n - p$, y tales que se mantengan las siguientes condiciones:

(A1) Sistema objetivo

El sistema

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi) \quad (3.10)$$

es el sistema objetivo con $\xi \in \mathbb{R}^p$ que posee un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\xi^* \in \mathbb{R}^p$ y además $\mathbf{x}^* = \pi(\xi^*)$.

(A2) Condición de inmersión

Para todo $\xi \in \mathbb{R}^p$, se cumple la siguiente ecuación

$$\mathbf{f}(\pi(\xi)) + \mathbf{g}(\pi(\xi))\mathbf{c}(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (3.11)$$

(A3) Variedad implícita

Se define el siguiente conjunto identidad

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \phi(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^p\}. \quad (3.12)$$

(A4) Atractividad de la variedad y acotamiento de las soluciones

Todas las trayectorias del sistema

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{z})), \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (3.14)$$

están acotadas y (3.13) posee un equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable en $z = 0$. Luego \mathbf{x}^* es un equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})). \quad (3.15)$$

La prueba de este teorema puede estudiarse en [3]. Los resultados del teorema 4 son interpretados de la siguiente manera: Dado el sistema (3.9) y el sistema dinámico objetivo (3.10), el objetivo es encontrar una variedad \mathcal{V} , descrita implícitamente por $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \phi(\mathbf{x}) = 0\}$, y en forma parametrizada por $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p\}$, la cual pueda hacerse invariante y asintóticamente estable tal que la restricción en lazo cerrado del sistema para \mathcal{V} sea descrita por $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$.

Cabe resaltar que el control \mathbf{u} que haga la variedad invariante no será único, ya que esta está únicamente definido solo sobre \mathcal{V} , *i.e.*, $\mathbf{v}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}), 0) = \mathbf{c}(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}))$. De todos los posibles controles se deberá seleccionar aquel que lleve la coordenada z , fuera de la variedad, a cero y mantenga acotadas las trayectorias del sistema, *i.e.*, tal que **(A4)** sea satisfecha.

A continuación se dan en forma ordenada algunas observaciones referentes a las suposiciones **(A1)**-**(A4)** del teorema 4.

1. En la mayoría de las aplicaciones del teorema 4 el sistema dinámico objetivo será definido *a priori*, por lo que la condición **(A1)** se satisface de manera automática.

2. Si el objetivo de control consiste en describir una trayectoria dada, luego el teorema 4 tiene que ser reformulado en términos del error de seguimiento y el sistema dinámico objetivo debería generar la trayectoria de referencia.

3. Dado el sistema dinámico objetivo (3.10), la ecuación (3.11) de la condición **(A2)** define una ecuación diferencial parcial en la función desconocida $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$, donde $\mathbf{c}(\cdot)$ es un parámetro libre. En general, encontrar una solución para esta ecuación es una tarea difícil. A pesar de esto, una adecuada selección de la dinámica objetivo siguiendo las consideraciones físicas y teóricas del sistema, permitirá simplificar esta tarea. En algunos casos es posible entrelazar los pasos de la dinámica objetivo (3.10) y la generación de la variedad (3.12) viendo la ecuación (3.11) como una ecuación algebraica relacionando $\boldsymbol{\alpha}(\cdot)$ con $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$, y sus derivadas parciales, y seleccionando luego expresiones adecuadas para $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$ que aseguren las propiedades de estabilidad deseadas de la dinámica objetivo.

4. La suposición **(A3)** establece que la imagen del mapeo $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$ puede ser expresada como el conjunto de nivel cero de una función $\phi(\cdot)$ suave. En términos generales, esta es una condición sobre la invertibilidad del mapeo que se traduce en un restricción de rango sobre $\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$. En el caso lineal, donde $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = T\boldsymbol{\xi}$ con alguna matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ constante, se tiene $\phi(\mathbf{x}) = T^\perp \mathbf{x}$, donde $T^\perp T = 0$, y **(A3)** se mantiene si y solo si T es de rango pleno. En general, si $\boldsymbol{\pi} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una inmersión inyectiva y propia² luego la imagen de $\boldsymbol{\pi}(\cdot)$ es una subvariedad de \mathbb{R}^n . Por lo tanto **(A3)** requiere que tal subvariedad pueda ser descrita (globalmente) como el conjunto de nivel zero de la función $\phi(\cdot)$. Finalmente, observe que si existe una partición de $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2)$, con $x_1 \in \mathbb{R}^p$ y $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$, y una correspondiente partición de $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = \text{col}(\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}))$ tal que $\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi})$ es un difeomorfismo global, luego la función $\phi(\mathbf{x}) = x_2 - \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\pi}_1^{-1}(x_1))$ será tal que **(A3)** se sostiene.

5. En muchos casos de interés práctico, para tener convergencia asintótica de $\mathbf{x}(t)$ hacia \mathbf{x}^* es suficiente con requerir que el sistema (3.13) posea un equilibrio uniformemente globalmente estable en $z = 0$ y que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))(\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), z(t)) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), 0)) = 0, \quad (3.16)$$

i.e., no necesariamente se requiere alcanzar la variedad. Este hecho, el cual distingue el presente enfoque de otros, tal como modos deslizantes, es un instrumento para el desarrollo de la teoría de control adaptable y de realimentación a la salida.

6. En el teorema 4 una ley de control estabilizadora se obtiene comenzando por la selección de un sistema dinámico objetivo. Desde otra perspectiva: dado el mapeo $\mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$, por lo tanto el mapeo $z = \phi(\mathbf{x})$, encuentre (de ser posible) una ley de control que haga la variedad $z = 0$ invariante y asintóticamente

²Una inmersión es un mapeo $\boldsymbol{\pi}(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $p < n$. Esta es inyectiva si $\text{rango}(\boldsymbol{\pi}) = p$ y es propia si la imagen inversa de cualquier conjunto compacto es también compacto.

estable y un vector campo $\dot{\xi} = \alpha(\xi)$ con un equilibrio ξ^* globalmente asintóticamente estable tal que (3.11) se mantenga. De conseguirse este objetivo luego el sistema (3.9) con salida $z = \phi(x)$ es (globalmente) de fase mínima y su dinámica cero, *i.e.* la dinámica sobre la variedad \mathcal{V} de salida cero, están dadas por (3.10). En este sentido, el resultado del teorema 4 puede considerarse dual a los métodos clásicos de estabilización basados en la construcción de salidas pasivas o de fase mínima.

La siguiente definición es usada a lo largo del documento para proveer declaraciones concisas.

Definición 9. [3] *Un sistema descrito por las ecuaciones de la forma (3.9) con dinámica objetivo (3.10) se dice que es (localmente) I&I estabilizable si las suposiciones (A1)-(A4) del teorema 4 se cumplen (localmente).*

Capítulo 4

Control I&I para robots manipuladores

En el presente capítulo se aborda el diseño de controladores para robots manipuladores vía I&I empleando el modelo dinámico ideal de un robot manipulador de n G.D.L., en el cual se desprecia la fricción y otros factores externos que influyen en el comportamiento del robot manipulador. La idea fundamental del diseño consiste en seleccionar una dinámica objetivo, de menor orden que el orden del sistema dinámico del robot, que dependa de los errores de posición de cada una de las articulaciones para luego utilizar de forma conveniente una variedad que permita llevar los estados del sistema a la misma y hacerla invariante, de tal forma que una vez dentro de la variedad el sistema completo imite el comportamiento deseado del sistema dinámico objetivo, vea [10].

4.1. Modelo dinámico

El modelo dinámico para robots manipuladores de n G.D.L, esta descrito por la siguiente ecuación

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1)$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares externos. Los vectores $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ representan las posiciones, velocidades y aceleraciones de las variables articulares del robot manipulador, respectivamente. El sistema (4.1) puede representarse en términos del vector de estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(t) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

4.2. Propiedades

En esta sección se expondrán algunas de las propiedades básicas del modelo dinámico para robots manipuladores de n G.D.L caracterizado mediante (4.1). Estas propiedades se describen a continuación.

4.2.1. Matriz de inercia

La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ juega un papel importante tanto en el modelado dinámico como en el diseño de controladores para robots. En el primer caso, la matriz de inercia se encuentra estrechamente relacionada con la energía cinética $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ mientras que en el segundo, se emplean algunas de sus propiedades para el estudio de estabilidad de sistemas de control de robots. Entre dichas propiedades se encuentran las enunciadas enseguida.

Propiedad 1. *Matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.*

La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos son funciones solamente de \mathbf{q} . La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ satisface las siguientes propiedades:

1. *Existe una constante real positiva α tal que*

$$M(\mathbf{q}) \geq \alpha I \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

donde I denota la matriz identidad de orden $n \times n$. La matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe y es definida positiva.

2. *Para el caso de robots provistos únicamente con articulaciones rotacionales existe una constante $\beta > 0$ tal que*

$$\lambda_{\text{máx}}\{M(\mathbf{q})\} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

Una manera sencilla de calcular β esta dada por

$$\beta \geq n \left[\max_{i,j,q} |M_{ij}(\mathbf{q})| \right]$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota al ij -ésimo elemento de la matriz $M(\mathbf{q})$.

3. *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales existe una constante $k_M > 0$ tal que*

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|$$

para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Una manera sencilla de calcular k_M es

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right].$$

4. *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ tal que*

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k'_M \|\mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

4.2.2. Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis

La importancia de las propiedades de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se hace patente en el estudio de estabilidad de los sistemas de control de robots. Las principales propiedades de dicha matriz se citan a continuación.

Propiedad 2. *Matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.*

La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Además, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisface las siguientes propiedades

1. *La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único.*
2. *$C(\mathbf{q}, 0) = 0$ para todo vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.*
3. *Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y escalar α se tiene*

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x},$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{y} + \alpha C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}.$$

4. El vector $C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$ puede expresarse en la forma:

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T C_1(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T C_2(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T C_n(\mathbf{q})\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

donde $C_k(\mathbf{q})$ son matrices simétricas de dimensión n para todo $k = 1, 2, \dots, n$. De hecho, el ij -ésimo elemento $C_{kij}(\mathbf{q})$ de la matriz $C_k(\mathbf{q})$ corresponde al símbolo de Christoffel $C_{jik}(\mathbf{q})$.

5. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{c_1} > 0$ tal que:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{c_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

6. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales existen constantes $k_{c_1} > 0$ y $k_{c_2} > 0$ tales que

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{c_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{c_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\|$$

para todo vector $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

7. La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está relacionada con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ por la expresión

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

donde $\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica. En forma análoga, la matriz $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica y también resulta cierto que

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T.$$

Independientemente de la manera en que se obtenga $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ésta siempre satisfecerá

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n.$$

4.2.3. Vector de gravedad

El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está presente en robots que no han sido diseñados, desde un punto de vista mecánico, con compensación de pares de gravedad, e.g., sin contrapesos o resortes, o para robots destinados a desplazarse fuera del plano horizontal. Algunas de sus propiedades más importantes se citan a continuación.

Propiedad 3. Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.

El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ de $n \times 1$ depende sólo de las posiciones articulares \mathbf{q} . El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está acotado si \mathbf{q} también lo está. Adicionalmente, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ tiene las siguientes propiedades:

1. El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ pueden relacionarse mediante

$$\int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0))$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$.

2. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante finita $k_{\mathcal{U}}$ tal que

$$\int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt + \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \geq k_{\mathcal{U}}$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$ y donde $k_{\mathcal{U}} = \min_{\mathbf{q}} \{\mathcal{U}(\mathbf{q})\}$.

3. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz, i.e., existe una constante $k_g > 0$ tal que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Una forma sencilla de calcular k_g esta dada como

$$k_g \geq n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_j} \right| \right].$$

Además, k_g satisface

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \geq \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\}.$$

4. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k'$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

4.3. Control de posición

El problema de control de posición de robots manipuladores puede formularse en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica (4.1) de un robot de n G.D.L. Dada una posición articular deseada \mathbf{q}_d , que se supone constante, se trata de determinar una función vectorial $\boldsymbol{\tau}$ de tal forma que las posiciones \mathbf{q} asociadas a las coordenadas articulares del robot lleguen asintóticamente a \mathbf{q}_d . En términos más formales, el *objetivo de control de posición pura*, o simplemente control de posición, consiste en determinar $\boldsymbol{\tau}$ de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$$

donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante.

El modelo dinámico (4.1) puede representarse en espacio de estados definiendo el vector de error de posición articular $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones deseadas constantes de las variables articulares del robot manipulador, el modelo (4.1) puede expresarse en términos del vector de estado $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$.

4.3.1. Control PD con compensación de gravedad

A continuación se presenta el estudio en la obtención de una ley de control para el sistema (4.3) aplicando la metodología I&I. Esta ley de control tiene la misma estructura que la ley de control PD más compensación de gravedad para robots manipuladores, con la diferencia fundamental de que las ganancias del controlador obtenido vía I&I resultan ser diferentes.

Aplicando la metodología I&I para el control del sistema (4.3), se comienza por seleccionar el sistema dinámico objetivo.

(A1) Sistema dinámico objetivo

Considere el sistema

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K\boldsymbol{\xi} \quad (4.4)$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ y $K > 0$ es una matriz diagonal de diseño de coeficientes constantes $K = \text{diag} \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. El sistema (4.4) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\boldsymbol{\xi}^* = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(A2) Condición de inmersión

La condición de inmersión requiere de la selección de un mapeo entre los estados del sistema dinámico del robot manipulador y los estados del sistema objetivo, este mapeo es definido como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

de donde se selecciona $\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$, debido a que se desea que el comportamiento de las trayectorias del vector de errores articulares sea el mismo que el definido por el sistema (4.4), *i.e.* que las trayectorias tengan un comportamiento exponencial decreciente. Sustituyendo el mapeo conocido $\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi})$ en (4.3) como se describe en (3.11) se obtiene

$$\boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) = K\boldsymbol{\xi}$$

con lo que el mapeo $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ queda definido completamente como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ K\boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}.$$

(A3) Variedad implícita

Se define el siguiente conjunto identidad

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{q}} = K\boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n\}$$

de donde se satisface que el orden del sistema dinámico objetivo (4.4) es menor que el orden del sistema (4.3). Ahora, una función $\phi(\mathbf{x})$ que cumple con el conjunto identidad definido anteriormente puede ser

$$\phi(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}} - K\tilde{\mathbf{q}} = 0,$$

con lo que queda definida por completo la variedad \mathcal{V} .

(A4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones

Se define la coordenada

$$\mathbf{z} \triangleq \phi(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}} - K\tilde{\mathbf{q}}$$

donde la derivada de \mathbf{z} a lo largo de las trayectorias del sistema (4.3) queda definida como

$$\dot{\mathbf{z}} = M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] + K\dot{\mathbf{q}}. \quad (4.5)$$

Luego, es seleccionada una entrada de control $\boldsymbol{\tau}$ tal que el subsistema (4.5) tenga un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en el origen, *i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = 0$$

y que las trayectorias del sistema resultante estén acotadas. Para esto, observe que si $\boldsymbol{\tau}$ es seleccionada de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\tau} = -\Gamma\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.6)$$

donde $\Gamma > 0$ es una matriz diagonal de diseño de coeficientes constantes $\Gamma = \text{diag} \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, con esta elección el sistema (4.3) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{z} - K\tilde{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-\Gamma\mathbf{z} - C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})] \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-\Gamma\mathbf{z} - C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})] + K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}.$$

Ahora, observe que el subsistema dinámico

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{z} - K\tilde{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-\Gamma\mathbf{z} - C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})] + K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

debido a que \mathbf{q}_d es constante, representa una ecuación diferencial autónoma cuyo único equilibrio es el origen. Teniendo en cuenta que el Teorema 4 exige probar estabilidad asintótica (global) de la coordenada \mathbf{z} , se utiliza el subsistema (4.7) y se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T M(\mathbf{q})[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \Gamma K \tilde{\mathbf{q}}$$

donde $V(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) > 0$ es una función definida positiva y la derivada temporal $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z})$ a lo largo de las trayectorias del subsistema (4.7) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = & \frac{1}{2}[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \dot{M}(\mathbf{q})[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] \\ & + [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T M(\mathbf{q}) [M(\mathbf{q})^{-1} [-\Gamma\mathbf{z} - C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})] + K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]] \\ & - [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T M(\mathbf{q}) K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] - \tilde{\mathbf{q}}^T \Gamma K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]. \end{aligned}$$

Simplificando se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = & \frac{1}{2}[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \dot{M}(\mathbf{q})[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] - [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \Gamma \mathbf{z} \\ & - [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] - \tilde{\mathbf{q}}^T \Gamma K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]. \end{aligned}$$

Utilizando la Propiedad 2 y desarrollando términos finalmente se obtiene

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = -[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \Gamma [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}],$$

con lo que se concluye que el subsistema (4.7) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen. Resta ahora solo demostrar que las trayectorias de $\dot{\mathbf{q}}(t)$ están acotadas. Para esto observe que debido a la conclusión anterior se tiene $\tilde{\mathbf{q}}(t), \mathbf{z}(t) \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$. Utilizando luego la definición $\mathbf{z}(t) = \dot{\mathbf{q}} - K\tilde{\mathbf{q}}$ se concluye que $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, lo que cumple con la condición (A4) del Teorema 4. De la ley de control (4.6), si se sustituye la coordenada \mathbf{z} según su definición se obtiene

$$\boldsymbol{\tau} = \Gamma K \tilde{\mathbf{q}} - \Gamma \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}),$$

ley de control que tiene la estructura de la conocida ley de control PD más compensación de gravedad, con la diferencia fundamental de que las ganancias proporcional y derivativa son definidas de diferente manera según el enfoque que le imprime la metodología I&I.

4.3.2. Control PD con compensación precalculada de gravedad

A continuación se presenta el estudio en la obtención de una ley de control para el sistema (4.3) aplicando la metodología I&I. Esta ley de control tiene la misma estructura que la ley de control PD más compensación de precalculada gravedad para robots manipuladores, con la diferencia fundamental de que las ganancias del controlador obtenido vía I&I resultan ser diferentes.

Aplicando la metodología I&I para el control del sistema (4.3) se comienza por seleccionar el sistema dinámico objetivo.

(A1) *Sistema dinámico objetivo*

Considere el sistema

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K\boldsymbol{\xi} \quad (4.8)$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ y $K > 0$ es una matriz diagonal de diseño de coeficientes constantes $K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. El sistema (4.8) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\boldsymbol{\xi}^* = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(A2) Condición de inmersión

La condición de inmersión requiere de la selección de un mapeo entre los estados del sistema dinámico del robot manipulador y los estados del sistema objetivo, este mapeo es definido como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

de donde se selecciona $\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$, debido a que se desea que el comportamiento de las trayectorias del vector de errores articulares sea el mismo que el definido por el sistema (4.8), *i.e.* que las trayectorias tengan un comportamiento exponencial decreciente. Sustituyendo el mapeo conocido $\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi})$ en (4.3) como se describe en (3.11) se obtiene

$$\boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) = K\boldsymbol{\xi},$$

con lo que el mapeo $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ queda definido completamente como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ K\boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}.$$

(A3) Variedad implícita

Se define el siguiente conjunto identidad

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} | \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} | \tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{q}} = K\boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n\}$$

de donde se satisface que el orden del sistema dinámico objetivo (4.8) es menor que el orden del sistema (4.3). Ahora, una función $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ que cumple con el conjunto identidad definido anteriormente puede ser

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}} - K\tilde{\mathbf{q}} = 0$$

con lo que queda definida por completo la variedad \mathcal{V} .

(A4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones

Se define la siguiente coordenada

$$\mathbf{z} \triangleq \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}} - K\tilde{\mathbf{q}}$$

donde la derivada de \mathbf{z} a lo largo de las trayectorias del sistema (4.3) queda definida como

$$\dot{\mathbf{z}} = M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] + K\dot{\mathbf{q}}. \quad (4.9)$$

Ahora, habrá de seleccionarse una entrada de control $\boldsymbol{\tau}$ tal que el subsistema (4.9) tenga un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en el origen, *i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = 0$$

y que las trayectorias del sistema resultante estén acotadas. Seleccionando $\boldsymbol{\tau}$ como

$$\boldsymbol{\tau} = -\Gamma\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) \quad (4.10)$$

con $\Gamma > 0$ una matriz diagonal de diseño $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ con coeficientes constantes. Con esta elección el sistema (4.3) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{z} - K\tilde{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-\Gamma\mathbf{z} - C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-\Gamma\mathbf{z} - C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] + K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] \end{bmatrix}.$$

Ahora, del subsistema dinámico

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{z} - K\tilde{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [-\Gamma\mathbf{z} - C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})(\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q})] + K[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

se observa que (4.11) es un sistema no lineal autónomo, el cual tiene un equilibrio en el origen $[\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{z}^T]^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Sin embargo, aparte del origen pueden existir otros equilibrios los cuales pueden ser tantos como soluciones de $\tilde{\mathbf{q}}$ tenga la ecuación

$$\Gamma K \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \quad (4.12)$$

Aunque aquí no se demostrará, si ΓK se escoge suficientemente grande entonces $\tilde{\mathbf{q}} = 0 \in \mathbb{R}^n$ será la única solución. Esta condición surge de la aplicación del teorema de contracción de mapas [26] a la ecuación (4.12), donde se concluye que si $\lambda_{\min} \{\Gamma K\} > k_g$ entonces la única solución será $\tilde{\mathbf{q}} = 0 \in \mathbb{R}^n$, por consiguiente el origen del sistema (4.11) será el único equilibrio. Suponga que se selecciona $\lambda_{\min} \{\Gamma K\} > k_g$, entonces se define la siguiente función candidata de Lyapunov para analizar la estabilidad del origen del sistema (4.11) como

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T M(\mathbf{q})[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$$

con $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ dada por

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \Gamma K \tilde{\mathbf{q}} + \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)^T \tilde{\mathbf{q}}$$

donde $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$ es una función definida positiva de forma global. Así $V(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z})$ es una función definida positiva en forma global cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (4.11) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2}[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \dot{M}(\mathbf{q})[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] \\ &\quad - [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \Gamma \\ &\quad - [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}})[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] \\ &\quad + [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T [\mathbf{g}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})] \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \Gamma K [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}] + [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})} \\ &\quad - [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_d). \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de antisimetría de $\dot{M}(\mathbf{q})$ y $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ (Propiedad 2) y el hecho de que $\frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})}{\partial (\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}})$, finalmente se obtiene

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = -[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \Gamma - \tilde{\mathbf{q}}^T \Gamma K [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]$$

o equivalentemente

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z}) = -[\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}]^T \Gamma [\mathbf{z} + K\tilde{\mathbf{q}}],$$

con lo que se concluye que el sistema (4.11) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen. Resta ahora demostrar que las trayectorias de $\dot{\mathbf{q}}(t)$ están acotadas. Para esto, observe que debido a la conclusión anterior $\tilde{\mathbf{q}}(t), \mathbf{z}(t) \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ y utilizando la definición de $\mathbf{z}(t) = \dot{\mathbf{q}} - K\tilde{\mathbf{q}}$ se concluye además que $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, lo que cumple con la condición (A4) del Teorema 4.

4.4. Control de movimiento

El objetivo de control de movimiento consiste en encontrar una ley de control por realimentación de estados τ tal que dado un conjunto de funciones vectoriales acotadas $\mathbf{q}_d(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t)$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$, las trayectorias de $\mathbf{q}(t)$ sigan con precisión las trayectorias de $\mathbf{q}_d(t)$, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}] = 0. \quad (4.13)$$

Si el objetivo de control se verifica, significará que las articulaciones del robot manipulador siguen asintóticamente la trayectoria de movimiento deseado.

4.4.1. Control par-calculado

A continuación se describe el diseño de una ley de control por realimentación de estados que cumple el objetivo de control anteriormente expuesto utilizando la metodología I&I.

Se define el vector de errores articulares como

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{q}_d y $\dot{\mathbf{q}}_d$ representan la posición y velocidad deseada de las variables articulares respectivamente. El modelo dinámico (4.1) puede representarse en términos del vector de estado \mathbf{e} como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)^{-1}[\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2)(\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\ddot{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{R}^n$ es la aceleración deseada de las variables articulares de robot manipulador.

Proposición 1. *El sistema del robot manipulador (4.14) es globalmente I&I estabilizable con dinámica objetivo*

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K\boldsymbol{\xi}$$

y ley de control

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)[\dot{\mathbf{q}}_d + \Gamma\mathbf{z} + K\mathbf{e}_2] + C(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2)[\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2] + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)$$

con $\mathbf{z} = \mathbf{e}_2 + K\mathbf{e}_1$, donde K y Γ son matrices de diseño del controlador.

Prueba 1. *Aplicando la formulación propuesta en el Teorema 4, se comienza por seleccionar la dinámica objetivo.*

(A1) Sistema dinámico objetivo.

El enfoque clásico de la teoría de control no lineal es transformar un sistema no lineal en uno lineal, con esto en mente se define el siguiente sistema dinámico objetivo

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K\boldsymbol{\xi} \quad (4.15)$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ y $K > 0$ es una matriz diagonal de coeficientes constantes $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ y el sistema (4.15) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

(A2) Condición de inmersión.

Se define el siguiente mapeo

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

donde el mapeo $\boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$ es seleccionado debido a que se desea que la coordenada \mathbf{e}_1 , que es el vector asociado al error de posición articular, se comporte como el sistema dinámico objetivo (4.15), i.e., que presente un comportamiento exponencial decreciente, por lo que solo resta encontrar el mapeo $\boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi})$ aplicando la formulación descrita en (3.11).

Sustituyendo (4.16) en (4.14) tenemos

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}_2(\boldsymbol{\xi}) = \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q}_d - \boldsymbol{\xi})^{-1}[c(\boldsymbol{\xi}) - C(\mathbf{q}_d - \boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}))[\dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi})] - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \boldsymbol{\xi})] \quad (4.18)$$

donde se observa de la primera ecuación que $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ es conocida, por lo que sustituyendo (4.15) en (4.17) resulta

$$-K\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}_2(\boldsymbol{\xi}) = \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q}_d - \boldsymbol{\xi})^{-1}[c(\boldsymbol{\xi}) - C(\mathbf{q}_d - \boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}))[\dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi})] - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \boldsymbol{\xi})] \quad (4.20)$$

De la ecuación (4.19) se observa que

$$\boldsymbol{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) = -K\boldsymbol{\xi},$$

por lo que ahora el mapeo $\pi(\boldsymbol{\xi})$ es definido por completo como

$$\pi(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ -K\boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

cumpliendo con la condición descrita en (A2) del Teorema 4.

(A3) Variedad implícita.

Acorde a la identidad (3.12) se define la siguiente variedad implícita

$$\mathcal{V} \triangleq \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{2n} | \phi(\mathbf{e}) = 0\} = \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{2n} | \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_2 = -K\boldsymbol{\xi} \ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n\}, \quad (4.22)$$

donde se satisface que $n < 2n$, i.e. el orden del sistema dinámico objetivo (4.15) es menor que el orden del sistema (4.14).

Luego, si \mathbf{e} es descrita por los siguientes componentes

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^n \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

la siguiente ecuación cumple con las condiciones descritas en la definición (4.22)

$$\phi(\mathbf{e}) = \mathbf{e}_2 - \pi_2(\pi_1^{-1}(\mathbf{e}_1)) = 0. \quad (4.24)$$

Sustituyendo el mapeo inverso $\pi_1^{-1}(\cdot)$ obtenido de (4.21) en (4.24) se tiene

$$\phi(\mathbf{e}) = \mathbf{e}_2 - \pi_2(\mathbf{e}_1) = 0.$$

Luego, sustituyendo $\pi_2(\cdot)$ de (4.21) se tiene

$$\phi(\mathbf{e}) = \mathbf{e}_2 + K\mathbf{e}_1 = 0 \quad (4.25)$$

con lo que queda definida la variedad \mathcal{V} de forma explícita.

(A4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones.

La dinámica fuera de la variedad se obtiene a partir de la siguiente definición

$$\mathbf{z} \triangleq \phi(\mathbf{e})$$

con $\phi(\mathbf{e})$ como se obtuvo de (4.25), donde la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (4.14) resulta como

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{e}}_2 + K\dot{\mathbf{e}}_1. \quad (4.26)$$

Sustituyendo (4.14) en (4.26) obtenemos

$$\dot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - M(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)^{-1}[\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2)(\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)] + K\mathbf{e}_2. \quad (4.27)$$

Luego, es seleccionada una entrada de control $\boldsymbol{\tau}$ tal que el subsistema (4.27) tenga un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = 0,$$

y que las trayectorias del sistema resultante estén acotadas. Para este fin, se selecciona de todos los posibles controladores que estabilicen el sistema (4.27) la siguiente ley de control

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)[\ddot{\mathbf{q}}_d + \Gamma\mathbf{z} + K\mathbf{e}_2] + C(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2)[\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{e}_2] + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1) \quad (4.28)$$

donde Γ es una matriz de diseño, diagonal y de coeficientes constantes $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Esta elección surge al igualar la parte derecha de la ecuación (4.27) con $-\Gamma\mathbf{z}$ y debido a que $M(\mathbf{q}_d - \mathbf{e}_1)$ es una matriz simétrica definida positiva y por lo tanto invertible, es posible despejar la entrada de control $\boldsymbol{\tau}$, lo que conduce a la siguiente dinámica

$$\dot{\mathbf{z}} = -\Gamma\mathbf{z} \quad (4.29)$$

donde se observa por las propiedades de la matriz de diseño Γ , que el sistema (4.29) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen.

Ahora bien, al sustituir (4.28) en (4.14) se obtiene el siguiente subsistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= -K\mathbf{e}_2 - \Gamma\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} &= -\Gamma\mathbf{z}\end{aligned}\tag{4.30}$$

en función de las coordenadas (\mathbf{e}, \mathbf{z}) , donde es fácil observar que las trayectorias de $\mathbf{z}(t)$ están acotadas y tienden a cero de forma exponencial, por lo que la dinámica de la coordenada $\mathbf{e}_2(t)$ en algún momento en el tiempo solo dependerá del término $-K\mathbf{e}_2$, el cual debido a las propiedades de diseño de la matriz K permitirá que las trayectorias de $\mathbf{e}_2(t)$ estén acotadas y, más aún, tiendan a cero, por lo que también las trayectorias de $\mathbf{e}_1(t)$ se mantendrán acotadas debido a su dependencia directa con la coordenada \mathbf{e}_2 , con lo que la condición (A4) del Teorema 4 es satisfecha y con lo que se completa la prueba de la proposición 1.

4.5. Modelo dinámico de un robot manipulador de 2 G.D.L

El modelo dinámico de un brazo robot manipulador del tipo serial de 2 G.D.L es descrito en la presente sección. El brazo manipulador consiste de 2 eslabones rígidos de longitudes l_1 y l_2 y masas m_1 y m_2 , respectivamente. Los desplazamientos del robot se realizan en el plano vertical x - y a través de uniones del tipo revolución como se muestra en la Figura 4.1. La distancia entre los ejes de giro y los centros de masa es denotada por l_{c1} y l_{c2} . I_1 e I_2 corresponden a los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masas y que es perpendicular al plano x - y . Los grados de libertad son asociados a los ángulos q_1 , el cual es medido desde la posición vertical hacia abajo, y q_2 , medido a partir de la extensión del eslabón 1 hasta el eslabón 2, siendo ambos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

El modelo dinámico del robot manipulador mostrado en la figura 4.1 es obtenido en [26], utilizando las ecuaciones de movimiento de Lagrange; este modelo es mostrado a continuación.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ &\quad + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2)\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 \\ &\quad + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ &\quad + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2)\end{aligned}\tag{4.32}$$

Obedeciendo a la notación definida en (4.1) para un robot manipulador de n G.D.L, las matrices $M(\mathbf{q})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ quedan estructuradas de la siguiente manera

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

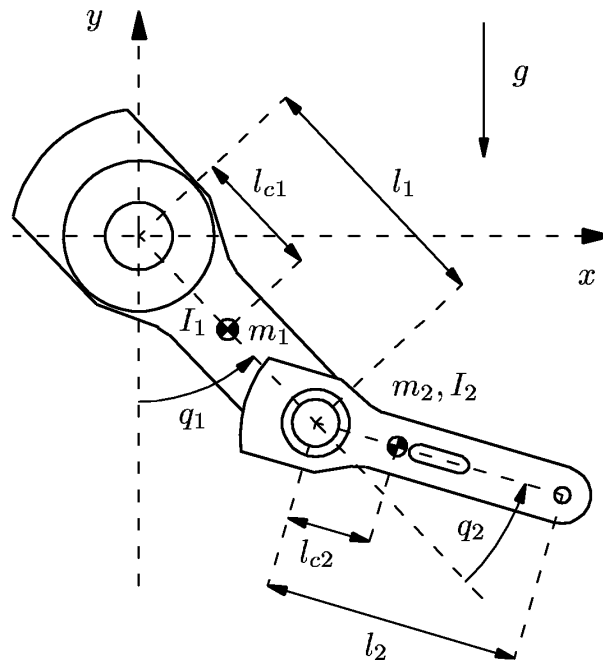


Figura 4.1: Robot de 2 G.D.L

con

$$M_{11}(\mathbf{q}) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(\mathbf{q}) = m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2$$

$$M_{21}(\mathbf{q}) = m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2$$

$$M_{22}(\mathbf{q}) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

$$C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$$

$$g_1(\mathbf{q}) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2)$$

$$g_2(\mathbf{q}) = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

4.6. Resultados de simulación

Con el fin de ilustrar el desempeño del controlador (4.28), se llevó a cabo la implementación en simulación del mismo utilizando el modelo dinámico correspondiente al robot manipulador de 2 G.D.L con articulaciones rotacionales como el mostrado en la figura 4.1. La trayectoria de posición deseada para los eslabones del robot manipulador se muestra en la figura 4.2. Los actuadores del robot manipulador están limitados a los valores admisibles

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 150 \text{ N} \cdot \text{m} \\ \pm 15 \text{ N} \cdot \text{m} \end{bmatrix}.$$

Los valores de los parámetros del robot manipulador se muestran en la tabla 4.1. Las ganancias utilizadas en el controlador están dadas por

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Los resultados obtenidos en simulación utilizando la ley de control I&I (4.28) son mostrados en las figuras 4.3–4.4.

Tabla 4.1: Parámetros del robot manipulador de 2 G.D.L.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.450	mts
Longitud eslabón 2	l_2	0.450	mts
Distancia a centro de masa(Eslabón 1)	l_{c1}	0.091	mts
Distancia a centro de masa(Eslabón 2)	l_{c2}	0.048	mts
Masa eslabón 1	m_1	23.902	kg
Masa eslabón 2	m_2	3.880	kg
Inercia eslabón 1	I_1	1.266	kg · m ²
Inercia eslabón 2	I_2	0.093	kg · m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/seg ²

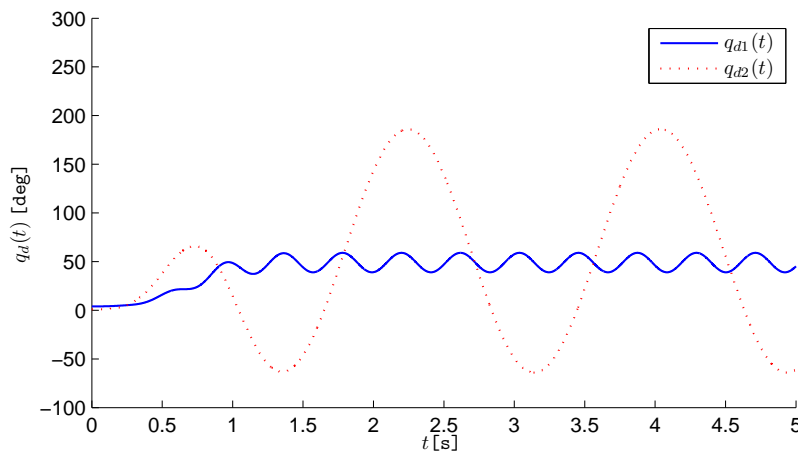


Figura 4.2: Trayectoria deseada $q_d(t)$.

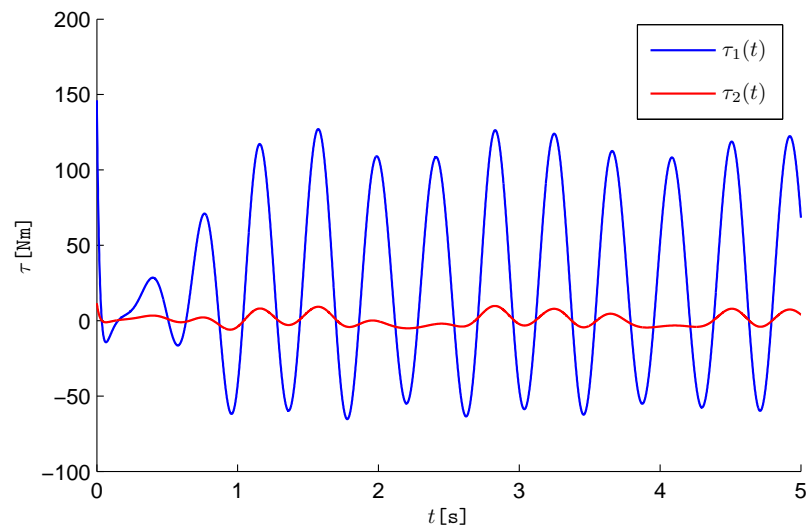


Figura 4.3: Par resultante.

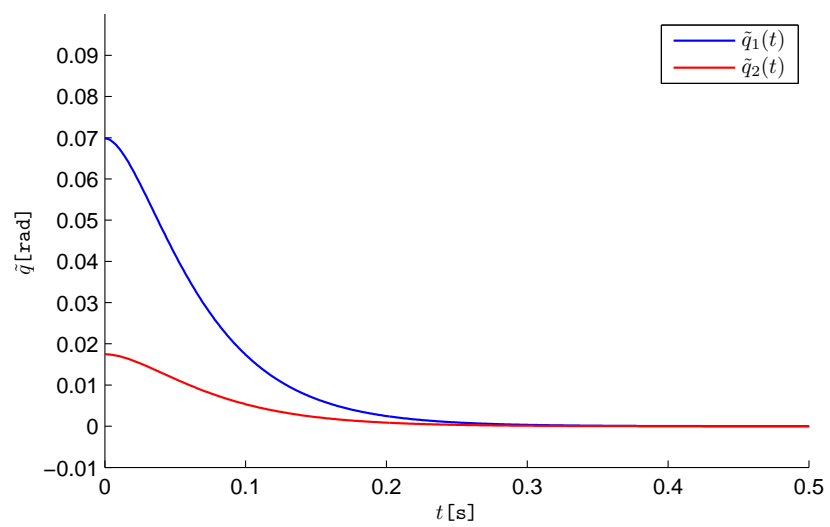


Figura 4.4: Errores de posición

Capítulo 5

Control I&I para una aeronave del tipo PVTOL

En este capítulo el control de estabilización para el despegue y aterrizaje vertical de una aeronave es abordado utilizando la metodología de inmersión e invariancia. El control de estabilización para el despegue y aterrizaje vertical plano (**PVTOL** de las siglas en inglés *Planar Vertical Take-Off and Landing*) de una aeronave representa un problema interesante para el control de sistemas no lineales, debido entre otras cosas a que este tipo de sistemas es de fase no mínima, lo que significa que su dinámica de ceros es inestable y además se trata de un sistema sub-actuado ya que cuenta con tres grados de libertad con tan solo dos entradas de control. Este problema es claramente motivado por la necesidad de estabilizar una aeronave que es capaz de despegar verticalmente como un helicóptero y algunos otros tipos especiales de aeroplanos. El **PVTOL** es un modelo matemático de un objeto que vuela y se desenvuelve en un plano vertical, el cual tiene tres grados de libertad (x, y, ϕ) correspondientes a la posición y orientación en el plano. El **PVTOL** esta compuesto por dos propulsores que producen la fuerza y el momento sobre la máquina voladora o aeronave. En el presente capítulo se aborda el diseño de una ley de control por I&I para el problema de estabilización del sistema **PVTOL**, vea [17].

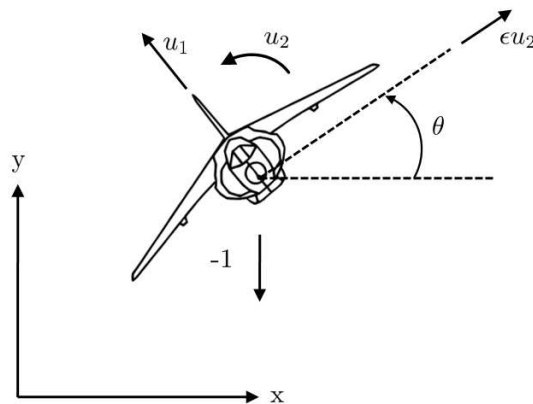


Figura 5.1: Vehículo aéreo de despegue y aterrizaje vertical (PVTOL).

5.1. Modelo dinámico normalizado

La dinámica completa de una aeronave considerando la flexibilidad de las alas y el fuselaje, efectos aero-elásticos, la dinámica interna de la maquinaria, la superficie de control de los actuadores y la multitud de variables cambiantes son algo complejas y algunas veces imposibles de manejar para propósitos prácticos de control. Una primera aproximación muy utilizada consiste en considerar a la aeronave como un cuerpo rígido sobre el cual actúan un grupo de fuerzas y momentos. El modelo dinámico del sistema aeronave **PVTOL** puede ser obtenido utilizando las ecuaciones de Lagrange o las leyes de Newton. Luego, las ecuaciones que describen el modelo dinámico del sistema **PVTOL** de forma normalizada se muestran a continuación [16]

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\sin(\theta)u_1 + \epsilon \cos(\theta)u_2 \\ \ddot{y} &= \cos(\theta)u_1 + \epsilon \sin(\theta)u_2 - 1 \\ \ddot{\theta} &= u_2\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde x representa el desplazamiento horizontal, y el desplazamiento vertical y θ es el ángulo con respecto a la horizontal; u_1 es la entrada de control que representa el empuje total suministrado directamente por debajo de la aeronave y u_2 es la entrada de control que genera el momento de alabeo (roll) alrededor del centro de masa de la aeronave, el coeficiente ϵ es un coeficiente pequeño i.e. $\epsilon \ll 1$ dado por el acoplamiento entre el momento de alabeo y la aceleración lateral de la aeronave y donde -1 representa la acción de la fuerza de gravedad. La figura 5.1 muestra la representación esquemática del sistema PVTOL. Por lo general el coeficiente ϵ se puede despreciar debido a que es muy pequeño y no siempre bien conocido, por lo que es posible suponer que $\epsilon = 0$, entonces el sistema se transforma en

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\sin(\theta)u_1, \\ \ddot{y} &= \cos(\theta)u_1 - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Este sistema puede presentar problemas de desempeño debido a la dinámica no modelada al ignorar el efecto del parámetro ϵ , afortunadamente varios autores han demostrado que mediante un apropiado cambio de coordenadas podemos obtener la representación del sistema sin el término debido a ϵ [33, 38, 36]. Por ejemplo, en [33] se aplica el siguiente cambio de coordenadas

$$z = x - \epsilon \sin(\theta),\tag{5.3}$$

$$w = y + \epsilon(\cos(\theta) - 1).\tag{5.4}$$

El sistema dinámico considerando este cambio de coordenadas se transforma en

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= -\sin(\theta)\bar{u}_1, \\ \ddot{w} &= \cos(\theta)\bar{u}_1 - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2,\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde $\bar{u}_1 = u_1 - \epsilon\dot{\theta}^2$. Observe ahora que la estructura del sistema (5.5) tiene la misma forma que el sistema (5.1) con $\epsilon = 0$, por lo que ahora el sistema (5.2) puede ser utilizado sin ningún problema para propósitos de control.

5.2. Control vía I&I

En esta sección se aborda el diseño de control de posición para el sistema aeronave PVTOL utilizando la metodología I&I. El objetivo de control es encontrar leyes de control u_1 y u_2 tales que establezcan el origen del sistema (5.2). Para este fin, se hace una representación en espacio de estados del sistema (5.2) como sigue

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.6)$$

$$\dot{x}_2 = -\text{sen}(\theta)u_1 \quad (5.7)$$

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (5.8)$$

$$\dot{y}_2 = \cos(\theta)u_1 - 1 \quad (5.9)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (5.10)$$

$$\dot{\omega} = u_2 \quad (5.11)$$

donde x_1 y x_2 representan la posición y velocidad de la aeronave a través del eje horizontal, respectivamente. Los estados y_1 y y_2 representan la posición y velocidad de la aeronave a través del eje vertical, respectivamente. Finalmente, θ representa el ángulo de alabeo y la velocidad angular de alabeo esta representada por ω . La filosofía tras el diseño del controlador para el sistema PVTOL mediante la metodología I&I consiste en seleccionar el sistema dinámico objetivo de acuerdo a la naturaleza del movimiento, *i.e.* el sistema (5.2) puede dividirse en dos subsistemas, uno de los cuales describe el movimiento traslacional y el otro el movimiento rotacional, entonces la idea fundamental en el diseño del controlador es seleccionar el sistema dinámico objetivo como el subsistema que describe solo el movimiento de traslación con características deseadas de estabilidad y luego cuidar que las trayectorias del sistema que describe el movimiento rotacional estén acotadas. Con esto en mente, se aplica el Teorema 4 al sistema (5.6)-(5.11) y se comienza por la selección del sistema dinámico objetivo.

(C1) *Sistema objetivo.*

El sistema dinámico objetivo es seleccionado acorde a la filosofía de control como un sistema de cuarto orden que representa solo el movimiento de traslación deseado sobre el marco x - y del sistema y se define como

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5.12)$$

$$\dot{\xi}_2 = -k_1\xi_1 - k_2\xi_2 \quad (5.13)$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_4 \quad (5.14)$$

$$\dot{\xi}_4 = -k_3\xi_3 - k_4\xi_4 \quad (5.15)$$

donde $k_j > 0$ con $j = \{1, \dots, 4\}$ son parámetros de diseño y el sistema tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen y se define la siguiente función $\pi(\cdot)$

$$\begin{bmatrix} \text{Traslación} \\ \\ \\ \text{Rotación} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \pi(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_3(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_4(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_5(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_6(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \xi_3 \\ \pi_4(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_5(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_6(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

donde se han seleccionado $\pi_1(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1$ y $\pi_3(\boldsymbol{\xi}) = \xi_3$ debido a que se desea que las posiciones de movimientos horizontal y vertical de la aeronave se comporten como lo describen las trayectorias del sistema dinámico objetivo (5.12)-(5.15).

(C2) *Condición de inmersión.*

Las funciones restantes para el mapeo $\pi(\cdot)$ son obtenidas de la condición de inmersión (3.11) como

$$\xi_2 = \pi_2(\boldsymbol{\xi}), \quad (5.16)$$

$$-k_1\xi_1 - k_2\xi_2 = -\text{sen}(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))c_1(\boldsymbol{\xi}), \quad (5.17)$$

$$\xi_4 = \pi_4(\boldsymbol{\xi}), \quad (5.18)$$

$$-k_3\xi_3 - k_4\xi_4 = \text{cos}(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))c_1(\boldsymbol{\xi}) - 1, \quad (5.19)$$

$$\dot{\pi}_5(\boldsymbol{\xi}) = \pi_6(\boldsymbol{\xi}), \quad (5.20)$$

$$\dot{\pi}_6(\boldsymbol{\xi}) = c_2(\boldsymbol{\xi}). \quad (5.21)$$

De (5.16) y (5.18) se obtienen los mapeos $\pi_2(\boldsymbol{\xi})$ y $\pi_4(\boldsymbol{\xi})$. Ahora bien, de las ecuaciones (5.17) y (5.19) se puede obtener el mapeo $\pi_5(\boldsymbol{\xi})$ resolviendo este sistema de ecuaciones algebraicas para obtener $c_1(\boldsymbol{\xi})$ como

$$c_1(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{(-k_1\xi_1 - k_2\xi_2)^2 + (-k_3\xi_3 - k_4\xi_4 + 1)^2}, \quad (5.22)$$

entrada que solo producirá un empuje positivo a la aeronave, lo que concuerda con la naturaleza del actuador. Luego, con esta elección para la entrada de control $u_1 = c_1(\boldsymbol{\xi})$ se puede obtener el mapeo $\pi_5(\boldsymbol{\xi})$ como

$$\pi_5(\boldsymbol{\xi}) = \arctan\left(\frac{k_1\xi_1 + k_2\xi_2}{1 - k_3\xi_3 - k_4\xi_4}\right). \quad (5.23)$$

Finalmente, $\pi_6(\boldsymbol{\xi})$ es obtenida utilizando la ecuación (5.20) que resulta en

$$\pi_6(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})\dot{\beta}(\boldsymbol{\xi}) - (\beta(\boldsymbol{\xi}) + 1)\dot{\mu}(\boldsymbol{\xi})}{(\beta(\boldsymbol{\xi}) + 1)^2 + \mu^2(\boldsymbol{\xi})} \quad (5.24)$$

con

$$\begin{aligned} \mu(\boldsymbol{\xi}) &= -k_1\xi_1 - k_2\xi_2, \\ \beta(\boldsymbol{\xi}) &= -k_3\xi_3 - k_4\xi_4, \\ \dot{\mu}(\boldsymbol{\xi}) &= k_1k_2\xi_1 + (k_2^2 - k_1)\xi_2, \\ \dot{\beta}(\boldsymbol{\xi}) &= k_3k_4\xi_3 + (k_4^2 - k_3)\xi_4, \end{aligned}$$

con esto queda definido por completo el mapeo $\pi(\boldsymbol{\xi})$.

(C3) *Variedad implícita.*

La variedad es definida de acuerdo con (3.12) como

$$\mathcal{V} = \left\{ (\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_r) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_r) = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_5(\mathbf{X}_t) \\ \dot{\pi}_5(\mathbf{X}_t) \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

con

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}.$$

(C4) *Atractividad de la variedad y acotamiento de soluciones*

Se define la coordenada de la variedad como

$$\mathbf{z} \triangleq \varphi(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_r) = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_5(\mathbf{X}_t) \\ \dot{\pi}_5(\mathbf{X}_t) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

donde la dinámica fuera de la variedad queda descrita por

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\pi}_5(\mathbf{X}_t) \\ \ddot{\pi}_5(\mathbf{X}_t) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

y a lo largo de las trayectorias del sistema (5.6)-(5.11) resulta

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \omega \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\pi}_5(\mathbf{X}_t) \\ \ddot{\pi}_5(\mathbf{X}_t) \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Utilizando ahora (5.25), el sistema se transforma en

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (5.28)$$

$$\dot{z}_2 = u_2 - \ddot{\pi}_5(\mathbf{X}_t). \quad (5.29)$$

Seleccionando la entrada de control u_2 como

$$u_2 = \ddot{\pi}_5(\mathbf{X}_t) - \gamma_1 z_1 - \gamma z_2 \quad (5.30)$$

el subsistema se transforma en

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (5.31)$$

$$\dot{z}_2 = -\gamma_1 z_1 - \gamma z_2; \quad (5.32)$$

el cual tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen.

5.3. Simulación

Se llevaron a cabo simulaciones del controlador diseñado en la sección anterior con el fin de validar el desempeño del controlador propuesto. Se utilizaron los siguientes parámetros para el controlador

$$k_1 = 0.02,$$

$$k_2 = 0.15,$$

$$k_3 = 0.02,$$

$$k_4 = 0.15,$$

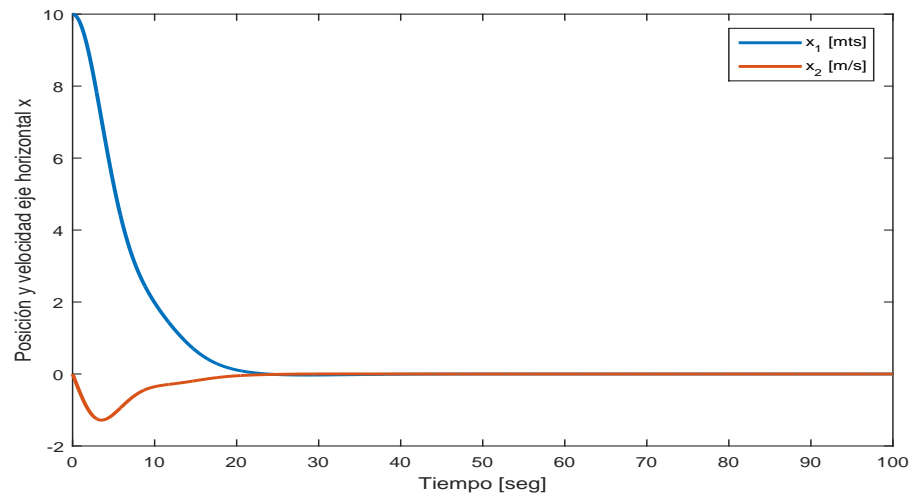
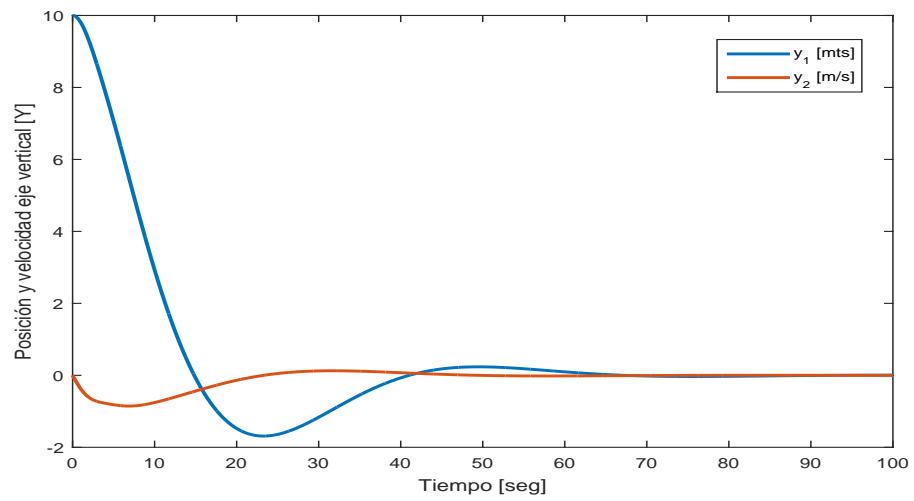
$$\gamma_1 = 1,$$

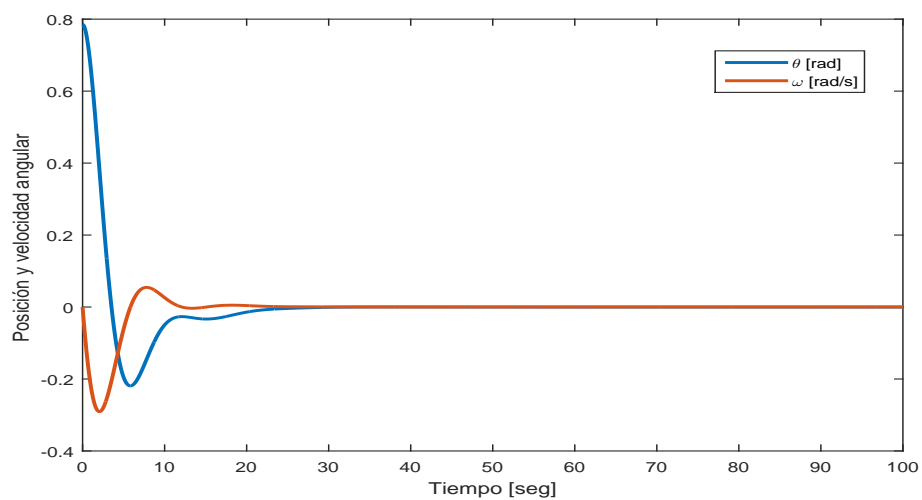
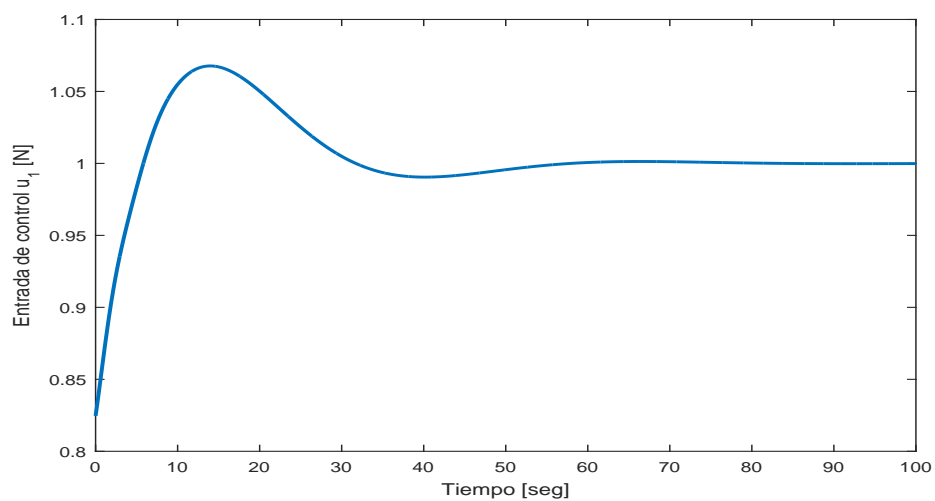
$$\gamma_2 = 1,$$

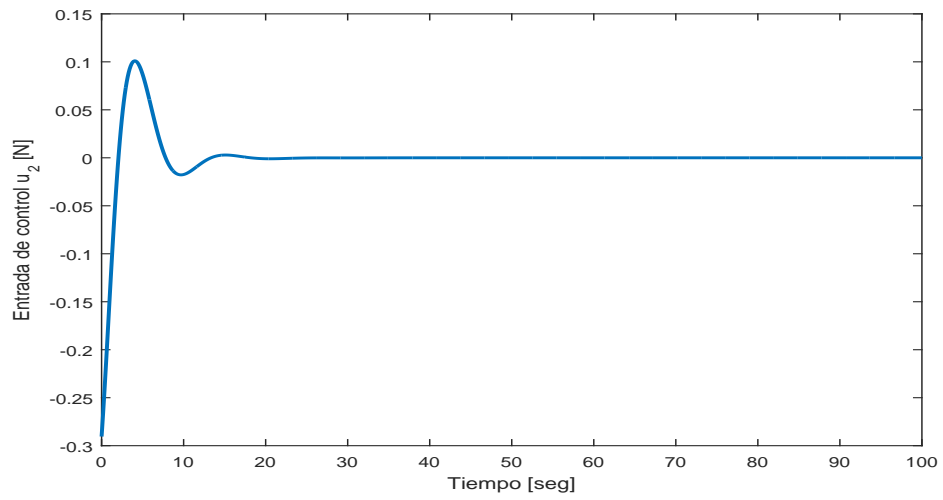
y las siguientes condiciones iniciales

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El tiempo de la simulación fue de 100 segundos y la velocidad de muestreo 1000 Hz. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 5.2-5.6.

Figura 5.2: Dinámicas de los estados x_1 y x_2 .Figura 5.3: Dinámicas de los estados y_1 y y_2 .

Figura 5.4: Dinámicas de los estados θ y ω .Figura 5.5: Dinámica de la entrada de control u_1 .

Figura 5.6: Dinámica de la entrada de control u_2 .

Capítulo 6

Control I&I para una aeronave del tipo PVTOL con prioridad para la altura

A continuación se aborda el diseño de control de posición con prioridad de altura para una aeronave tipo PVTOL utilizando la técnica de inmersión e invariancia. El controlador diseñado da prioridad a estabilizar primero la altura antes que al desplazamiento lateral de la aeronave PVTOL, esto lleva a que disminuya drásticamente la cantidad de fuerza de empuje requerida por la aeronave y además se generan maniobras de alabeo menos agresivas. La idea fundamental para el desarrollo del controlador por I&I consiste en separar el modelo dinámico del sistema PVTOL en dos subsistemas de acuerdo a la naturaleza de su movimiento, el primer subsistema describe el movimiento traslacional y el segundo subsistema describe el movimiento rotacional de la aeronave, luego, el sistema dinámico objetivo es seleccionado como la estructura deseada para el subsistema dinámico de movimiento traslacional mientras que la dinámica rotacional se define como la dinámica fuera de la variedad y es utilizada para volver atractiva e invariante la variedad. Se prueba además que el esquema de control propuesto es globalmente asintóticamente estable y finalmente, resultados en simulación validan el desempeño del controlador, vea [18].

6.1. Modelo dinámico

El modelo dinámico del sistema aeronave PVTOL se muestra a continuación [15, 16],

$$\begin{aligned}m\ddot{y} &= -\sin(\phi)\bar{u}_t + \epsilon \cos(\phi)u_m, \\m\ddot{z} &= \cos(\phi)\bar{u}_t + \epsilon \sin(\phi)u_m - mg, \\J\ddot{\phi} &= u_m,\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde m representa la masa de la aeronave, J es el momento de inercia y g representa la aceleración de la gravedad. Se considera que la aeronave se mueve en el plano vertical (\bar{Y}, \bar{Z}) y puede girar alrededor de su centro de masa un ángulo ϕ como se muestra en la Figura 6.1. Las entradas de control al sistema son la fuerza de empuje \bar{u}_t que surge directamente por debajo de la aeronave y el momento de alabeo u_m que hace girar la aeronave. Finalmente, ϵ representa un coeficiente pequeño de acoplamiento entre el momento de alabeo y la fuerza lateral ϵu_m producida por el movimiento de las alas; este fenómeno hace que el sistema sea de fase no mínima. En general, el coeficiente de acoplamiento ϵ es muy pequeño y no siempre bien conocido, por lo que este coeficiente es usualmente rechazado considerado como $\epsilon = 0$. Sin embargo, como se muestra en [33, 36], con un apropiado cambio de coordenadas el sistema (6.1) puede

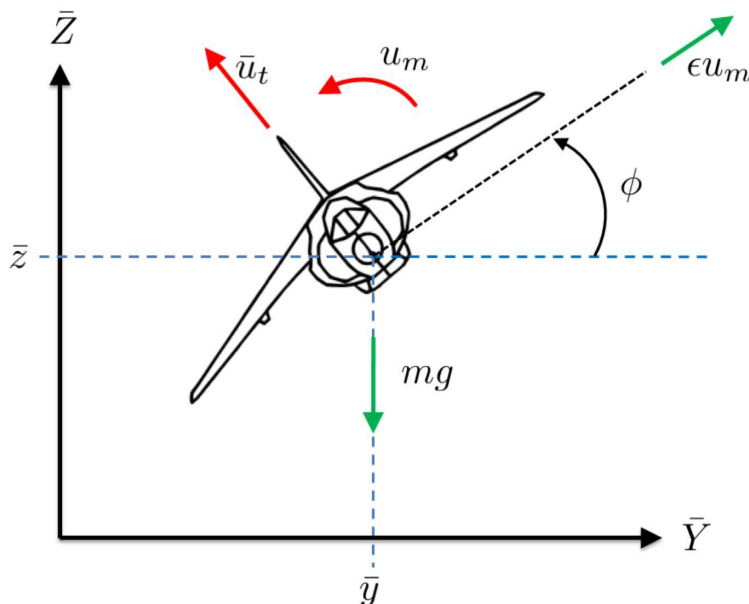


Figura 6.1: Sistema aeronave PVTOL.

ser simplificado. Luego, utilizando el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} - \frac{\epsilon J}{m} \sin \phi, \\ z &= \bar{z} + \frac{\epsilon J}{m} \cos \phi, \\ u_t &= \bar{u}_t - \epsilon J \dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

el sistema aeronave PVTOL (6.1) se convierte en

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -\sin(\phi)u_t, \\ m\ddot{z} &= \cos(\phi)u_t - mg, \\ J\ddot{\phi} &= u_m, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde y , z representan la posición de la aeronave en el plano (x, y) y u_t es la nueva entrada para el sistema. Observe que el sistema (6.3) tiene la misma estructura que el sistema (6.1) cuando $\epsilon = 0$, pero ahora el sistema en lazo abierto ya no es un sistema de fase no mínima, para una discusión detallada sobre sistemas de fase no mínima vea [6, 21]. Ahora, podemos diseñar un controlador para el sistema (6.3) y luego aplicar el cambio de coordenadas (6.2) para poder controlar el sistema (6.1).

6.2. Control vía I&I

El objetivo principal de control consiste en llevar la aeronave desde una posición inicial (y_0, z_0) hasta una posición constante deseada en el plano (\bar{Y}, \bar{Z}) y mantenerla flotando con un ángulo de alabeo $\phi = 0$ y velocidad cero. Definiendo las siguientes coordenadas del error

$$\begin{aligned} e_y &\triangleq y - y_d, \\ e_z &\triangleq z - z_d, \end{aligned} \quad (6.4)$$

con posiciones deseadas constantes $y_d, z_d \in \mathbb{R}$, el problema de control de estabilización (posición) puede ser formulado como sigue. Para el sistema (6.3), encontrar, si es posible, funciones para las entradas de control $u_t, u_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0.$$

Se debe observar que, dependiendo de las características de la aeronave la entrada de control de empuje puede estar limitada; por ejemplo, como en el avión Harrier el cual solo permite entradas de control de empuje positivas $u_t > 0$.

Para resolver el problema de control utilizaremos la metodología I&I para diseñar un controlador que lleve y estabilice el sistema (6.3) en una posición deseada pre-especificada, para luego utilizar el cambio de coordenadas (6.2) y poder controlar el sistema (6.1). Con este fin, utilizando las coordenadas del error (6.4) el sistema (6.3) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= y_2, \\ m\dot{y}_2 &= -\sin(\phi)u_t, \\ \dot{e}_z &= z_2, \\ m\dot{z}_2 &= \cos(\phi)u_t - mg, \\ \dot{\phi} &= w, \\ J\dot{w} &= u_m; \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde y_2 y z_2 representan las velocidades lineales de las coordenadas de posición traslacional (y, z) , respectivamente; mientras que w representa la velocidad angular para el ángulo de alabeo ϕ . El origen del sistema (6.5) es estabilizado utilizando la metodología I&I, la idea fundamental para el desarrollo del controlador consiste en sumergir el sistema (6.5) de seis dimensiones dentro de un sistema de cuatro dimensiones con propiedades deseadas de estabilidad. La siguiente proposición establece el resultado principal de estabilización para una aeronave PVTOL utilizando la metodología de I&I.

Proposición 2. *El sistema aeronave PVTOL (6.5) es estabilizable vía I&I usando el siguiente sistema dinámico objetivo*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ m\dot{\xi}_2 &= -k_{v_y}\Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ m\dot{\xi}_4 &= \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4), \end{aligned} \tag{6.6}$$

con la función $\Psi(\xi_3) = k_{p_y} \operatorname{sech}(k\xi_3)$; las siguientes ganancias de diseño $k_{p_y}, k_{v_y}, k_{p_z}, k_{v_z}, k > 0$ y la siguiente ley de control de empuje

$$u_t(\mathbf{x}) = \sqrt{u_y^2 + (u_z + mg)^2}, \tag{6.7}$$

donde

$$u_y = -k_{v_y}\Psi(e_z)e_y - (k_{v_y} + m\Psi(e_z))y_2, \tag{6.8}$$

$$u_z = \delta \tanh(-k_{p_z}e_z - k_{v_z}z_2); \tag{6.9}$$

y la siguiente ley de control para el momento de alabeo

$$u_m(\mathbf{x}) = J(-k_{p_\phi}(\phi - \Phi) - k_{v_\phi}(w - \dot{\Phi}) + \ddot{\Phi}), \tag{6.10}$$

donde

$$\Phi = \arctan\left(\frac{-u_y}{u_z + mg}\right). \tag{6.11}$$

Luego, seleccionando k_{p_y} , k_{v_y} , y δ como

$$k_{v_y} > \frac{k_{p_y}}{4},$$

y

$$mg > \delta > 0,$$

el sistema (6.5), en lazo cerrado con (6.7) y (6.10), tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en el origen.

Prueba 2. Para demostrar la proposición anterior procederemos a verificar las hipótesis (A1)-(A4) del Teorema 4. En la primera suposición necesitamos probar que el sistema dinámico objetivo (6.6) tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $\xi = 0 \in \mathbb{R}^4$. Para este propósito se utilizará la teoría de estabilidad de Lyapunov.

(A1) Estabilidad del sistema dinámico

El sistema dinámico objetivo (6.6) puede ser dividido en dos subsistemas para facilitar el análisis de estabilidad; el subsistema objetivo para el movimiento traslacional lateral (movimiento horizontal) y el subsistema objetivo para el movimiento traslacional vertical (movimiento vertical).

Estabilidad del subsistema de movimiento horizontal

El subsistema de movimiento traslacional lateral se representa como

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ m\dot{\xi}_2 &= -k_{v_y}\Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2, \end{aligned} \quad (6.12)$$

el cual tiene un único equilibrio en $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 0$. Definiendo $h = k_{v_y}\xi_1 + m\xi_2$ el subsistema (6.12) se transforma en

$$\begin{aligned} m\dot{\xi}_2 &= -\Psi(\xi_3)h - k_{v_y}\xi_2, \\ \dot{h} &= -\Psi(\xi_3)h. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Seleccionando la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1(\xi) = \frac{m}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{2}h^2, \quad (6.14)$$

la cual es positiva definida, tenemos que su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (6.12) esta dada por

$$\dot{V}_1(\xi) = - \begin{bmatrix} \xi_2 \\ h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{v_y} & \frac{1}{2}\Psi(\xi_3) \\ \frac{1}{2}\Psi(\xi_3) & \Psi(\xi_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ h \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

la cual con $k_{v_y} > \frac{k_{p_y}}{4}$ es una función definida negativa. Usando la teoría de Lyapunov podemos concluir que el origen del subsistema dinámico objetivo (6.12) es globalmente asintóticamente estable.

Estabilidad del subsistema de movimiento vertical

El subsistema de movimiento traslacional vertical esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ m\dot{\xi}_4 &= \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Este subsistema tiene un único equilibrio en $\xi_3 = 0$ y $\xi_4 = 0$. Seleccionando $s = -k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4$, el subsistema (6.16) se transforma en

$$\begin{aligned} m\dot{\xi}_4 &= \delta \tanh(s), \\ m\dot{s} &= -k_{p_z}m\xi_4 - k_{v_z}\delta \tanh(s). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Proponiendo la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_2(\boldsymbol{\xi}) = \frac{k_{p_z} m^2}{2} \xi_4^2 + m \int_0^s \delta \tanh(\tau) d\tau, \quad (6.18)$$

la cual es una función definida positiva, tenemos que su derivada a lo largo de las trayectorias de (6.17) esta dada por

$$\dot{V}_2(\boldsymbol{\xi}) = -k_{v_z} \delta^2 \tanh^2(s) \quad (6.19)$$

la cual es una función semidefinida negativa. Observando de (6.19) y (6.17) que la solución trivial $\xi_4 = 0$ y $s = 0$, la cual pertenece al conjunto $S = \{\xi_4 \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} | \dot{V}_2(\xi_4, s) = 0\} = \{\xi_4 \in \mathbb{R}, s = 0\}$, es la única solución que permanece en S entonces es fácil probar estabilidad asintótica global del punto de equilibrio vía el principio de invariancia de Lasalle [27], el cual completa la prueba de la suposición (A1). La siguiente suposición es la condición de inmersión donde es necesario encontrar un mapeo $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ usando el sistema (6.5).

(A2) Condición de inmersión

Por conveniencia, se introduce el siguiente vector de estados

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} e_y \\ y_2 \\ e_z \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{x}_r = \begin{bmatrix} \phi \\ w \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

donde $\boldsymbol{x} = \text{col}(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_r)$, con $\boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^4$ es el vector que contiene solo los estados de traslación del sistema y el vector $\boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^2$ contiene solo los estados de rotación del sistema. Definimos el siguiente mapeo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_t \\ \boldsymbol{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_t(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_3(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_4(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\pi}_r(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_5(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_6(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}), \quad (6.21)$$

donde $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = \text{col}(\boldsymbol{\pi}_t(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\pi}_r(\boldsymbol{\xi}))$. En concordancia con el objetivo de control, las funciones $\pi_1(\boldsymbol{\xi})$ y $\pi_3(\boldsymbol{\xi})$ se pueden seleccionar como

$$\pi_1(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \text{ y } \pi_3(\boldsymbol{\xi}) = \xi_3, \quad (6.22)$$

esto es debido al hecho de que se desea que las trayectorias $(e_y(t), e_z(t))$ se comporten como las trayectorias del sistema dinámico objetivo $(\xi_1(t), \xi_3(t))$. Ahora, usando (6.21) y (6.22) en (6.5) conduce a

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \pi_2(\boldsymbol{\xi}), \\ m\dot{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) &= -\text{sen}(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))c_t(\boldsymbol{\xi}), \\ \dot{\xi}_3 &= \pi_4(\boldsymbol{\xi}), \\ m\dot{\pi}_4(\boldsymbol{\xi}) &= \text{cos}(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))c_t(\boldsymbol{\xi}) - mg, \\ \dot{\pi}_5(\boldsymbol{\xi}) &= \pi_6(\boldsymbol{\xi}), \\ J\dot{\pi}_6(\boldsymbol{\xi}) &= c_m(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Por lo que, de usar el sistema objetivo (6.6) en (6.23) se tiene

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \pi_2(\boldsymbol{\xi}), \\
-k_{v_y}\Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2 &= -\text{sen}(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))c_t(\boldsymbol{\xi}), \\
\xi_4 &= \pi_4(\boldsymbol{\xi}), \\
\delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4) &= \cos(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))c_t(\boldsymbol{\xi}) - mg, \\
\dot{\pi}_5(\boldsymbol{\xi}) &= \pi_6(\boldsymbol{\xi}), \\
J\dot{\pi}_6(\boldsymbol{\xi}) &= c_m(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned} \tag{6.24}$$

De la primera y tercera ecuaciones en (6.24) podemos encontrar los mapeos $\pi_2(\boldsymbol{\xi})$ y $\pi_4(\boldsymbol{\xi})$, respectivamente. Entonces, el mapeo $\boldsymbol{\pi}_t(\boldsymbol{\xi})$ es completamente definido como

$$\boldsymbol{\pi}_t(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

Usando la segunda y cuarta ecuaciones en (6.24) podemos encontrar el mapeo $\pi_5(\boldsymbol{\xi})$ como

$$\pi_5(\boldsymbol{\xi}) = \arctan\left(\frac{-c_y}{c_z + mg}\right), \tag{6.26}$$

donde

$$c_y = -k_{v_y}\Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2, \tag{6.27}$$

$$c_z = \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4). \tag{6.28}$$

Observe que el parámetro δ debe ser seleccionado como $mg > \delta > 0$ con el fin de evitar cualquier singularidad en la función $\pi_5(\boldsymbol{\xi})$. De la penúltima ecuación en (6.24) y usando (6.26) podemos encontrar el mapeo $\pi_6(\boldsymbol{\xi})$ el cual es simplemente la derivada con respecto al tiempo de la función $\pi_5(\boldsymbol{\xi})$ l cual resulta en

$$\pi_6(\boldsymbol{\xi}) = \frac{c_y\dot{c}_z - \dot{c}_y(c_z + mg)}{(c_z + mg)^2 + c_y^2}, \tag{6.29}$$

donde

$$\begin{aligned}
\dot{c}_y &= -k_{v_y}\dot{\Psi}(\xi_3)\xi_1 - k_{v_y}\Psi(\xi_3)\dot{\xi}_2 \\
&\quad - m\dot{\Psi}(\xi_3)\xi_2 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\dot{\xi}_2,
\end{aligned} \tag{6.30}$$

$$\dot{c}_z = \delta \text{sech}^2(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4)(-k_{p_z}\dot{\xi}_4 - k_{v_z}\dot{\xi}_4), \tag{6.31}$$

$$\Psi(\xi_3) = k_{p_y} \text{sech}(k\xi_3), \tag{6.32}$$

$$\dot{\Psi}(\xi_3) = -k_{p_y}k \text{sech}(k\xi_3) \tanh(k\xi_3)\dot{\xi}_4, \tag{6.33}$$

con $\dot{\xi}_2$ y $\dot{\xi}_4$ como se definieron en (6.6), con lo que se completa el mapeo $\boldsymbol{\pi}_r(\boldsymbol{\xi})$. Observe que la función $\pi_6(\boldsymbol{\xi})$ puede ser descrita también como

$$\pi_6(\boldsymbol{\xi}) = \dot{\pi}_5(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \pi_5(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}). \tag{6.34}$$

Finalmente, el mapeo $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ es completamente definido. El mapeo $c_t(\boldsymbol{\xi})$ puede ser definido de dos formas como

$$c_t(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{c_y^2 + (c_z + mg)^2} \tag{6.35}$$

ó

$$c_t(\boldsymbol{\xi}) = -\text{sen}(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))c_y + \cos(\pi_5(\boldsymbol{\xi}))(c_z + mg) \tag{6.36}$$

mediante el uso de la segunda y cuarta ecuación en (6.24), mientras que el mapeo $c_m(\boldsymbol{\xi})$ queda definido por la última ecuación en (6.24).

(A3) Variedad implícita

Usando la partición de $\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_r)$ con $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^2$ y la partición correspondiente de $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = \text{col}(\boldsymbol{\pi}_t(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\pi}_r(\boldsymbol{\xi}))$, podemos describir en forma explícita la función $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ definida en (3.12) como sigue

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{x}_r - \boldsymbol{\pi}_r(\boldsymbol{\pi}_t^{-1}(\mathbf{x}_t)) = 0. \quad (6.37)$$

Usando (6.37) la variedad es definida en concordancia con la definición del conjunto identidad (A3) como sigue

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi - \pi_5(\mathbf{x}_t) \\ w - \pi_6(\mathbf{x}_t) \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^4 \}. \quad (6.38)$$

Con el fin de simplificar la tarea de estabilización del equilibrio cero de la dinámica fuera de la variedad en el próximo paso del diseño de controlador, definiremos las siguientes funciones auxiliares

$$\varphi_2^*(\mathbf{x}) = w - \dot{\pi}_5(\mathbf{x}_t), \quad (6.39)$$

que también cumplen el conjunto identidad definido en (6.38). Para verificar lo anterior observe que la selección obvia para $\varphi_2(\mathbf{x})$ es

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = w - \pi_6(\mathbf{x}_t), \quad (6.40)$$

la cual puede ser reescrita usando la ecuación (6.34) como

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = w - \frac{\partial \pi_5(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_t). \quad (6.41)$$

Usando la función auxiliar (6.39) en (6.41) se tiene

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi_2^*(\mathbf{x}) + \frac{\partial \pi_5(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} (\dot{\mathbf{x}}_t - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_t)) \quad (6.42)$$

donde la identidad $\dot{\pi}_5(\mathbf{x}_t) = \frac{\partial \pi_5(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \dot{\mathbf{x}}_t$ se ha utilizado. Finalmente, usando la función $\varphi_1(\mathbf{x})$ definida por (6.38) en (6.42) conduce a

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi_2^*(\mathbf{x}) + \frac{\partial [\phi_1 - \varphi_1(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}_t} (\dot{\mathbf{x}}_t - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_t)). \quad (6.43)$$

Cabe resaltar que el último término de la mano derecha es igual a cero cuando $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$. Por esta razón $\varphi_2^*(\mathbf{x})$ es seleccionada de esta manera; en otras palabras, es suficiente que las funciones $\varphi_1(\mathbf{x})$ y $\varphi_2^*(\mathbf{x})$ sean cero, para hacer que la función $\varphi_2(\mathbf{x})$ sea cero también; con lo cual la condición (A3) también se satisface. En el siguiente paso en el diseño del controlador la función auxiliar $\varphi_2^*(\mathbf{x})$ será utilizada en lugar de la función $\varphi_2(\mathbf{x})$.

(A4) Atractividad de la variedad y acotamiento de soluciones

Ahora el objetivo es volver la variedad \mathcal{V} invariante. Para este fin, usando $\boldsymbol{\eta} \triangleq [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2^*(\mathbf{x})]^T$ como

$$\eta_1 = \phi - \pi_5(\mathbf{x}_t), \quad (6.44)$$

$$\eta_2 = w - \dot{\pi}_5(\mathbf{x}_t), \quad (6.45)$$

la dinámica fuera de la variedad queda descrita como

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= J^{-1} u_m - \ddot{\pi}_5(\mathbf{x}_t), \end{aligned} \quad (6.46)$$

donde la ley de control para el momento de alabeo es elegida como

$$u_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = J(-k_{p_\phi}\eta_1 - k_{v_\phi}\eta_2 + \ddot{\pi}_5(\mathbf{x}_t)) \quad (6.47)$$

con parámetros del controlador $k_{p_\phi} > 0$ y $k_{v_\phi} > 0$. Por lo anterior, el sistema (6.46) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= -k_{p_\phi}\eta_1 - k_{v_\phi}\eta_2. \end{aligned} \quad (6.48)$$

El sistema (6.48) tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente estable en $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$. Observe que la ecuación (6.47) es la ley de control para el momento de alabeo (6.10) definida en la Proposición 2. Finalmente, solo resta demostrar que las trayectorias del sistema (6.5) en lazo cerrado están acotadas. Para este fin, observe que seleccionado la entrada de control u_t con la misma estructura que el mapeo $c_t(\cdot)$ en (6.35), pero con \mathbf{x}_t en lugar de $\boldsymbol{\xi}$, i.e.

$$u_t(\mathbf{x}) \triangleq c_t(\mathbf{x}_t) = \sqrt{u_y^2 + (u_z + mg)^2} \quad (6.49)$$

con u_y y u_z como se definieron en (6.8) y (6.9), respectivamente, y usando las definiciones (6.44) y (6.45) el sistema (6.5) en lazo cerrado con (6.47) y (6.49) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= y_2, \\ m\dot{y}_2 &= -\sin(\eta_1 + \pi_5(\mathbf{x}_t))u_t(\mathbf{x}_t), \\ \dot{e}_z &= z_2, \\ m\dot{z}_2 &= \cos(\eta_1 + \pi_5(\mathbf{x}_t))u_t(\mathbf{x}_t) - mg, \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= -k_{p_\phi}\eta_1 - k_{v_\phi}\eta_2, \end{aligned} \quad (6.50)$$

el cual es un sistema en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\eta}), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (6.51)$$

donde \mathbf{K} es Hurwitz. Observe ahora que el subsistema $\boldsymbol{\eta}$ ya es globalmente asintóticamente estable y que el subsistema \mathbf{x}_t con $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ tiene la misma estructura que el sistema dinámico objetivo (6.6), i.e.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{0}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}_t},$$

lo que significa que dado $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ para el sistema $\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{0})$, el punto de equilibrio $\mathbf{x}_t = \mathbf{0}$ es globalmente asintóticamente estable. Además, el sistema (6.51) es un sistema en cascada, entonces usando los resultados reportados por [39] se puede demostrar que para cualquier solución de $\boldsymbol{\eta}(t)$ la solución $\mathbf{x}_t(t)$ del subsistema \mathbf{x}_t es uniformemente acotada y subsecuentemente la condición (A4) del Teorema 4 es satisfecha, lo que finalmente prueba la Proposición 2.

6.3. Simulación

Con el fin de evaluar el desempeño del controlador propuesto se llevaron a cabo simulaciones numéricas. La tarea a ser realizada consiste en mover la aeronave desde una posición inicial de descanso con ángulo inicial $\phi(0) = -0.349$ hacia una altura deseada $z_d = 20$ m y una posición lateral deseada de $y_d = 40$ m. Los resultados de la simulación fueron obtenidos utilizando el software MATLAB/SIMULINK, con un periodo de muestreo de 0.001 segundos y las siguientes condiciones iniciales $[y(0), z(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0), \phi(0), w(0)] = [0, 0, 0, 0, -0.349, 0]$. Los parámetros del sistema utilizados en simulación se muestran en la Tabla 6.1. Para propósitos de comparación, dos simulaciones fueron realizadas; la primera usando el controlador I&I

Parámetros del sistema		
Parámetro	Valor	Unidad
m	1.79	kg
J	0.04	$kg \cdot m^2$
g	9.81	$m \cdot s^{-2}$

Tabla 6.1: Parámetros del sistema aeronave PVTOL.

definido por (6.7) y (6.10) y la segunda utilizando el controlador propuesto en [36]. Se han utilizado los mismos parámetros de controlador que aquellos utilizados en [36, 13] para ambos controladores los cuales se muestran en la Tabla 6.2. Adicionalmente, se ha incluido otra simulación pero ahora utilizando mejor sintonización en los parámetros del controlador I&I propuesto. Estos parámetros se pueden observar en la Tabla 6.3 y los resultados de esta simulación se observan en las Figuras 6.2-6.7.

Los resultados para la primera simulación se muestran en las Figuras 6.2, 6.3 y 6.4. La Figura 6.2 muestra el movimiento de la aeronave PVTOL en el plano (y, z) donde se observa que el controlador I&I propuesto produce un particular comportamiento en el movimiento de la aeronave, este comportamiento en particular esta relacionado con la selección del sistema dinámico objetivo. En efecto, como se observa en los resultados de la Figura 6.3, el controlador propuesto da prioridad a estabilizar primero la altura y después se enfoca en alcanzar la posición lateral deseada. Este comportamiento particular brinda algunas ventajas, como se puede observar en la Figura 6.4, donde el ángulo de alabeo ϕ producido por el controlador propuesto es menor que el producido por el controlador de Saeki; por ejemplo, el ángulo resultante del controlador de Saeki es de $|\phi(t)| \leq 2.318$ rad mientras que el ángulo de alabeo resultante para el controlador propuesto es $|\phi(t)| \leq 1.029$ rad. En este punto, es importante notar que ángulos de alabeo que excedan ± 1.57 radianes pueden ser tareas peligrosas o simplemente imposibles de realizar por la mayoría de las aeronaves convencionales. Otra ventaja que presenta el controlador propuesto es que la entrada de control de empuje y momento de alabeo requeridos para desempeñar la tarea son considerablemente menores. Por ejemplo, las entradas de empuje y momento de alabeo requeridos por el controlador de Saeki son de $|u_t| \leq 155.1$ N y $|u_m| \leq 17.16$ Nm, mientras que los requeridos por el controlador I&I propuesto son $|u_t| \leq 33.56$ N y $|u_m| \leq 2.875$ Nm. Además, el controlador de Saeki requiere de entradas de empuje negativas, lo cual es imposible de suministrar por la mayoría de las aeronaves que no cuentan con este tipo de características en la entrada de control. Finalmente, se debe observar de la Figura 6.3 que la velocidad de convergencia para el desplazamiento lateral y es mayor para el controlador de Saeki que para el controlador I&I propuesto. Éste es un comportamiento esperado el cual esta directamente relacionado con la selección del sistema dinámico objetivo y recuerde que se han utilizado los mismos parámetros para ambos controladores que aquellos utilizados en [36, 13]; sin embargo, esta desventaja puede ser mitigada resintonizando los parámetros del controlador propuesto dando más prioridad a la velocidad de respuesta del controlador de desplazamiento lateral, estos resultados se puede observar en las Figuras 6.2-6.4 donde se ha resintonizado el controlador I&I propuesto.

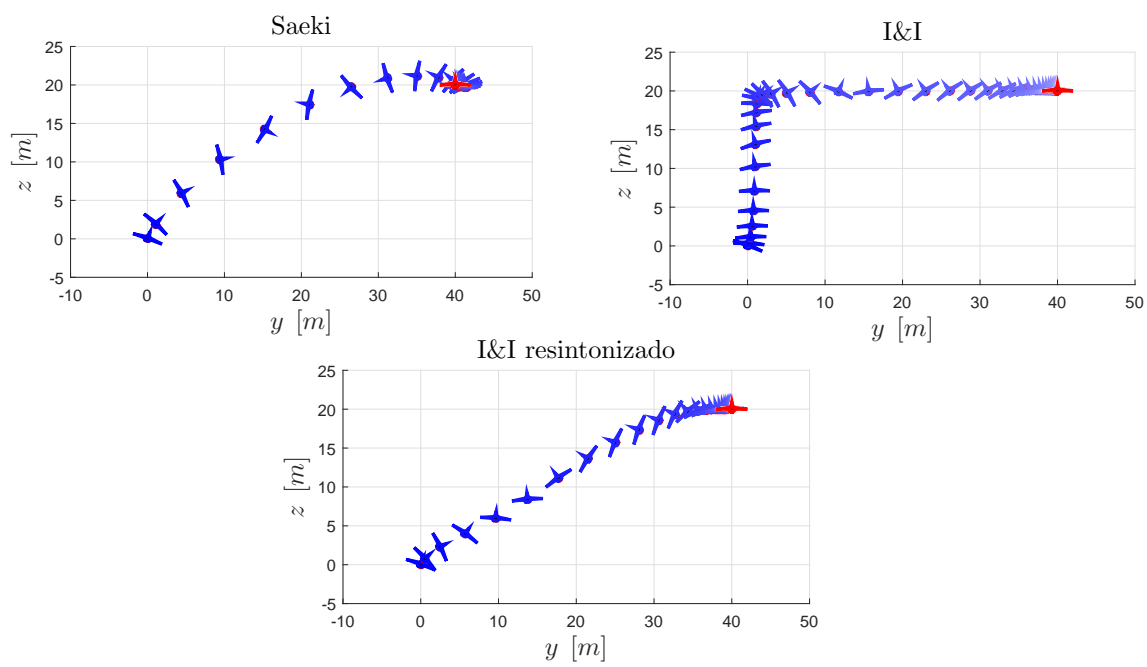
Para la segunda simulación dos perturbaciones $d_y(t)$ y $d_z(t)$ se han agregado con el fin de observar la robustez del controlador propuesto. Estos términos pueden ser usados para simular escenarios mas prácticos como los efectos del viento. Estas perturbaciones son fuerzas acotadas actuando en la dirección y y z . La primera perturbación se aplica a los 10 segundos de iniciar la simulación con valores positivos de $d_y(t) = 10$ N y $d_z(t) = 10$ N, y la segunda perturbación se aplica a los 20 segundos con valores negativos $d_y(t) = -10$ N y $d_z(t) = -10$ N, durante 0.5 segundos. Las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7 muestran los resultados de simulación. Como antes, la Figura 6.5 muestra el movimiento de la aeronave PVTOL en el plano (y, z) , donde se observa que la aeronave se aleja de la posición deseada y después regresa a ésta, esto se puede observar mejor en la Figura 6.6. Finalmente, en la Figura 6.7 se puede observar que la cantidad de empuje y momento de alabeo requerido para realizar la tarea es menor para el controlador propuesto que para el controlador de Saeki.

Parámetros de los controladores		
Parámetro	Valor	Unidad
k_{p_y}	1.69	$kg \cdot s^{-2}$
k_{p_z}	2.89	$kg \cdot s^{-2}$
k_{p_ϕ}	72.5	s^{-2}
k_{v_y}	1.82	$kg \cdot s^{-1}$
k_{v_z}	2.38	$kg \cdot s^{-1}$
k_{v_ϕ}	13.6	s^{-1}
δ	16	$N \cdot N^{-1}$
k	4	$s \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}$

Tabla 6.2: Parámetros para los controladores I&I y Saeki.

Parámetros del controlador I&I resintonizado		
Parámetro	Valor	Unidad
k_{p_y}	2	$kg \cdot s^{-2}$
k_{p_z}	2.2	$kg \cdot s^{-2}$
k_{p_ϕ}	32	s^{-2}
k_{v_y}	2	$kg \cdot s^{-1}$
k_{v_z}	2	$kg \cdot s^{-1}$
k_{v_ϕ}	3	s^{-1}
δ	12	$N \cdot N^{-1}$
k	0.08	$s \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}$

Tabla 6.3: Parámetros del controlador I&I resintonizado.

Figura 6.2: Movimiento de la aeronave PVTOL en el plano (y, z) .

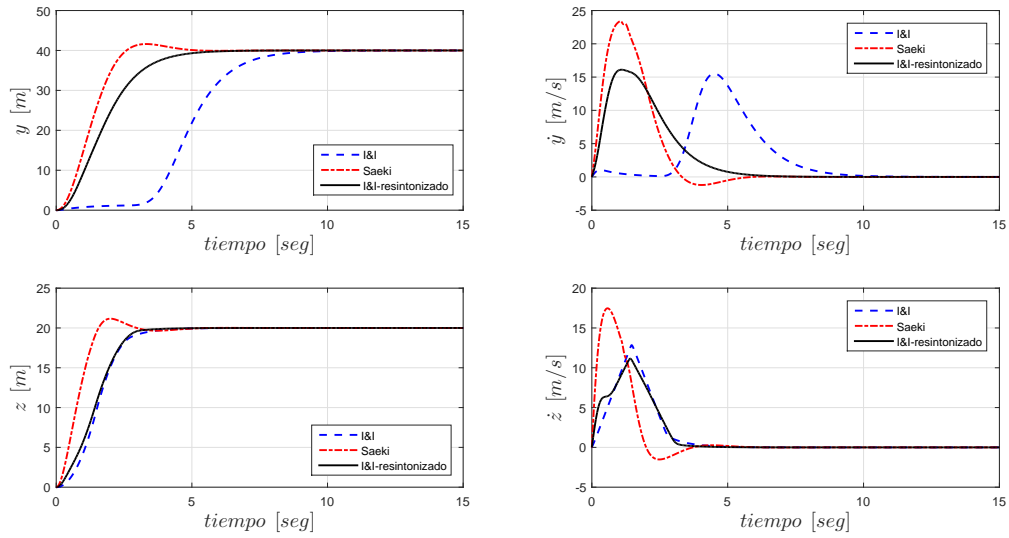


Figura 6.3: Dinámica de traslación de la aeronave PVTOL.

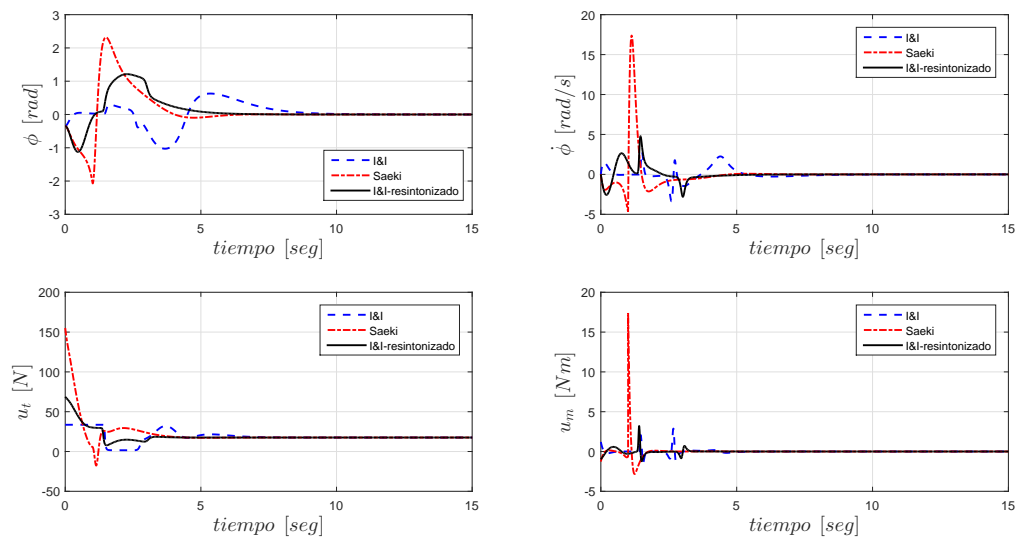


Figura 6.4: Dinámica de rotación y entradas de control para la aeronave PVTOL.

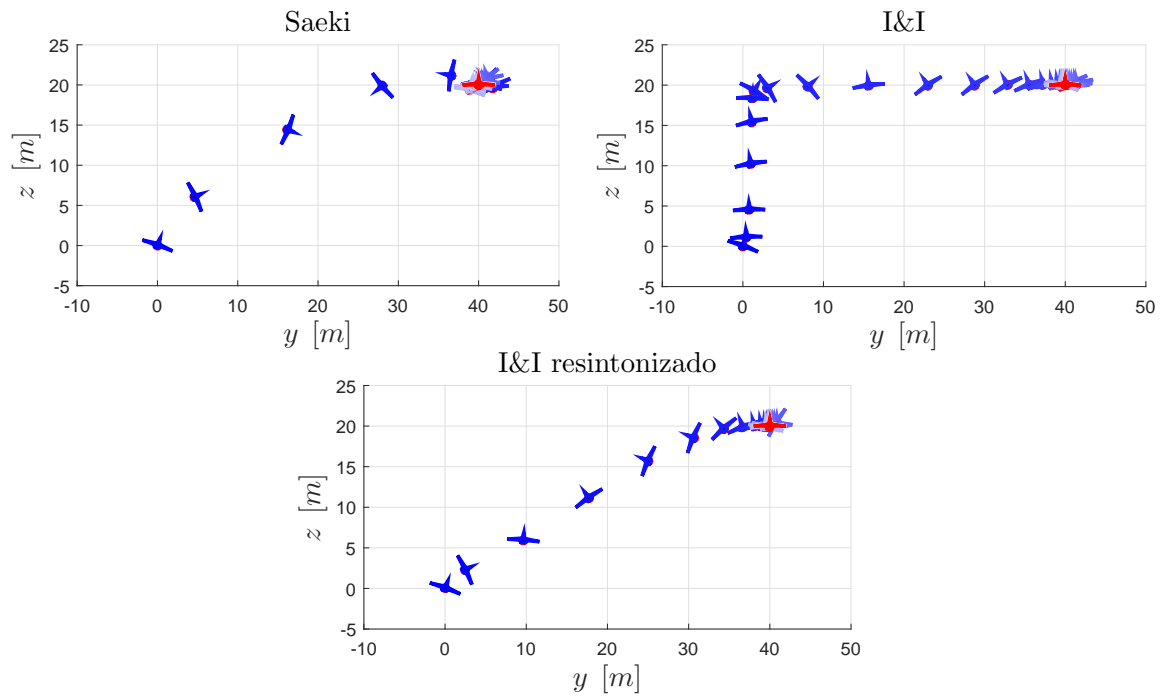


Figura 6.5: Movimiento de la aeronave PVTOL en el plano (y,z) incluyendo perturbaciones.

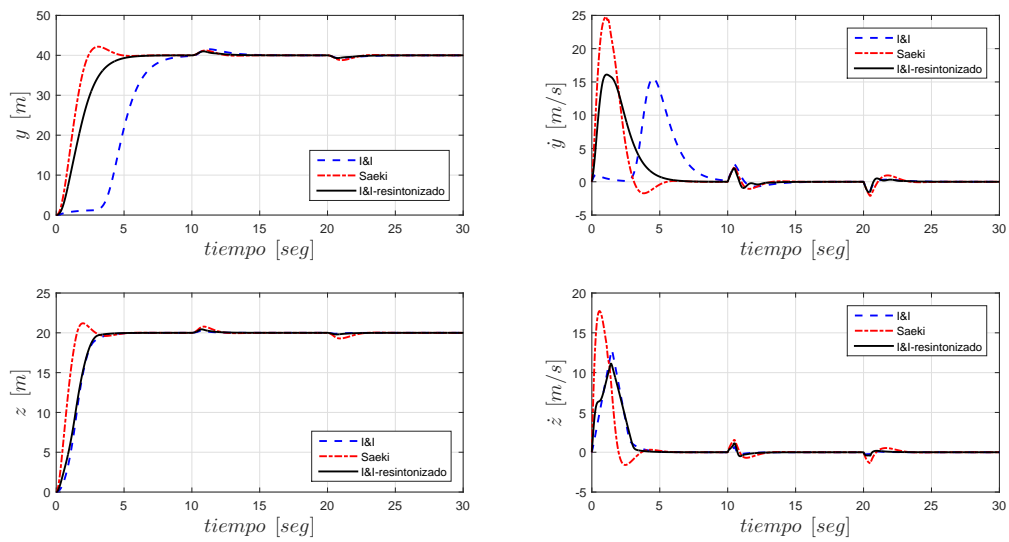


Figura 6.6: Dinámica de traslación de la aeronave PVTOL incluyendo perturbaciones.

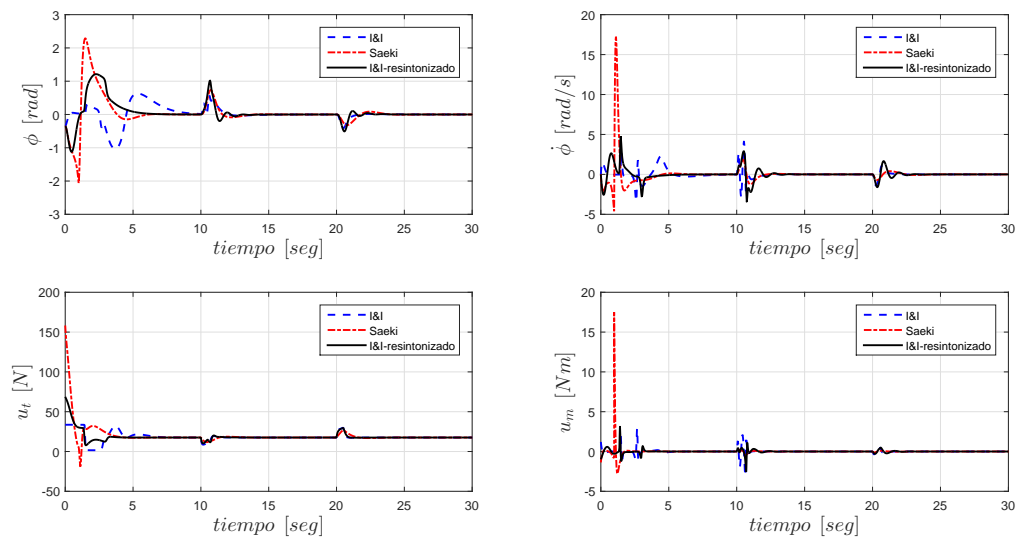


Figura 6.7: Dinámica de rotación y entradas de control para la aeronave PVTOL incluyendo perturbaciones.

Capítulo 7

Control I&I para un quadrotor

En este capítulo se aborda el diseño de control anidado de seguimiento de trayectorias para una aeronave del tipo helicóptero de cuatro rotores (quadrotor) utilizando la técnica de inmersión e invariancia (I&I). En contraste con trabajos previos [22, 43], la metodología I&I es utilizada en todos los niveles de diseño del controlador y en forma anidada, el esquema de control no requiere ser desacoplado en un lazo interno de control de postura y en un lazo externo de control de posición; el esquema de control aquí desarrollado no requiere de una entrada de control virtual como en la mayoría de los trabajos del área y además no requiere del uso de ninguna función de Lyapunov para probar estabilidad del esquema de control. El controlador I&I es desarrollado sumergiendo el sistema dinámico quadrotor dentro del sistema aeronave PVTOL el cual previamente también fue sumergido dentro de un sistema dinámico planar con propiedades deseadas de estabilidad, es por esto que se llama control I&I anidado. En términos de I&I, es posible sumergir el sistema quadrotor dentro del sistema aeronave PVTOL porque éste último es de menor orden que el sistema quadrotor lo cual concuerda con la idea de que un quadrotor puede ser visto como dos sistemas PVTOL conectados de tal manera que sus ejes son ortogonales [11]. En este capítulo de tesis esta idea es desarrollada y corroborada a través de la metodología I&I, resultando en la propuesta de un nuevo controlador.

7.1. Modelo dinámico de un quadrotor y de una aeronave tipo PVTOL

El quadrotor es un vehículo aéreo no tripulado que es levantado y propulsado por cuatro rotores el cual ha atraído mucho la atención de los investigadores, industria y publico en general debido a su grande rango de aplicaciones y potenciales aplicaciones en las areas militar, agrícola, vigilancia, y fotografía entre otras. El quadrotor es una máquina voladora que debido a su versatilidad y maniobrabilidad puede realizar varios tipos de tareas lo que ha atraído el especial interés de la comunidad de control automático. Esta sección muestra el modelo dinámico del sistema aeronave tipo quadrotor y del sistema aeronave tipo PVTOL. También se muestran las condiciones bajo las cuales el quadrotor presenta similitud al sistema aeronave PVTOL.

7.1.1. Modelo dinámico de un quadrotor

El sistema aeronave quadrotor es modelado como un cuerpo rígido que se mueve y rota en el espacio tridimensional bajo la acción de la gravedad y las fuerzas y momentos generados por cuatro propelas las cuales están localizadas de forma equidistante del centro de masa de la aeronave formando una cruz, como se muestra en la Figura 7.1. Los motores de las propelas trasera y frontal giran en sentido contrario a las manecillas del reloj y mientras que los motores izquierdo y derecho giran en el sentido de las manecillas del reloj, vea la Figura 7.2. Esta configuración de dirección de pares opuestos hace que los efectos giroscópicos

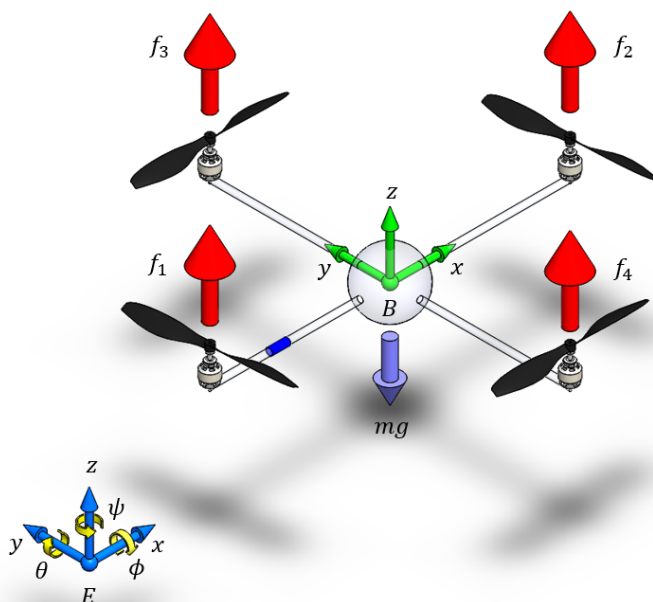


Figura 7.1: Diagrama de cuerpo libre del quadrotor.

y torques aerodinámicos tienden a cancelarse y remuevan la necesidad de utilizar un rotor de cola como en las estructuras estándar de los helicópteros. Para obtener el modelo dinámico es necesario definir los siguientes marcos de referencia; el marco inercial E cuyo origen está localizado en un punto fijo en tierra y el marco del cuerpo B cuyo origen coincide con el centro de masa del quadrotor, vea Figura 7.1. Para este trabajo se adopta la formulación de Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico del sistema aeronave quadrotor. Las ecuaciones de movimiento son desarrolladas en términos de las variables seleccionadas para definir los movimientos de rotación y traslación del quadrotor. Por lo tanto, definiendo el siguiente vector

$$\mathbf{q} \triangleq [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T \in \mathbb{R}^6, \quad (7.1)$$

como el vector de coordenadas generalizadas, donde las variables x , y y z representan la posición del centro de masa del quadrotor con respecto al marco de tierra, y las variables ϕ , θ y ψ representan la orientación del quadrotor usando los ángulos de Tait-Bryan, los cuales corresponden a las rotaciones sucesivas de los ángulos ψ - θ - ϕ alrededor de los ejes z - y - x (en ese orden) del marco de Tierra para hacerlo coincidir con el marco del cuerpo. Ahora para obtener el modelo dinámico usaremos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (7.2)$$

donde $\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ es el Lagrangiano del sistema el cual corresponde a la subtracción entre las energías cinética y potencial del sistema

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = K(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}), \quad (7.3)$$

donde $K(\dot{\mathbf{q}})$ corresponde a la energía cinética del sistema definida como

$$K(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(J_x\dot{\phi}^2 + J_y\dot{\theta}^2 + J_z\dot{\psi}^2), \quad (7.4)$$

donde m , J_x , J_y y J_z representan la masa y los momentos de inercia del quadrotor, respectivamente. La energía potencial del sistema $U(\mathbf{q})$ es definida como

$$U(\mathbf{q}) = mgz, \quad (7.5)$$

donde g representa la aceleración gravitacional de la tierra. La \mathbf{F} corresponde al vector de fuerzas externas generalizado aplicado a la aeronave

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} R(\phi, \theta, \psi) \mathbf{F}_t \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

donde $R(\phi, \theta, \psi)$ es la matriz de rotación de los ángulos de Tait-Bryan

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\theta s_\psi & s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & -s_\phi c_\theta \\ -c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi + s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

por simplicidad, se ha utilizado la siguiente notación abreviada $s_{\{\cdot\}} = \text{sen}(\cdot)$ and $c_{\{\cdot\}} = \text{cos}(\cdot)$. El vector

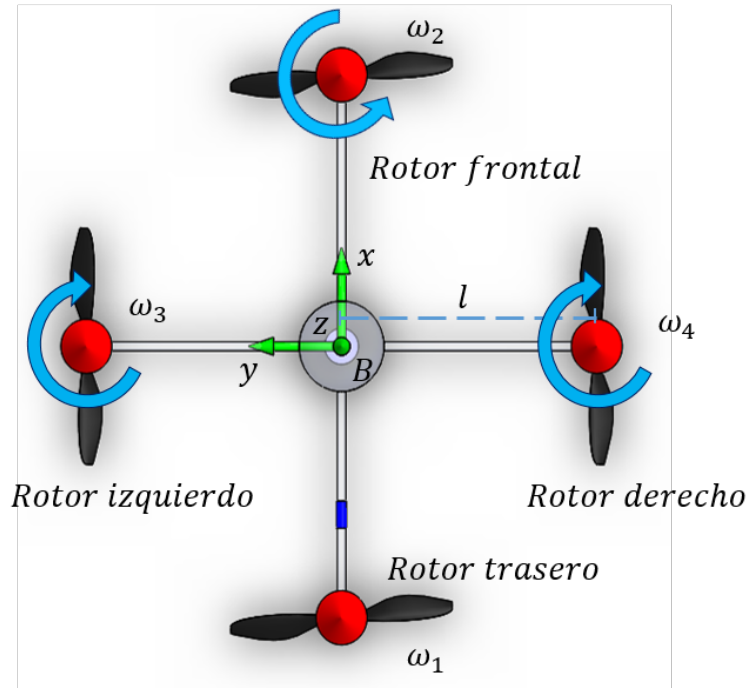


Figura 7.2: Vista superior del quadrotor.

de fuerzas traslacionales \mathbf{F}_t es definido como

$$\mathbf{F}_t = [0, 0, u_t]^T, \quad (7.8)$$

donde $u_t \in \mathbb{R}$ representa el empuje total suministrado por las cuatro propelas siempre apuntando en la dirección positiva del eje z del marco fijo del cuerpo

$$u_t = f_1 + f_2 + f_3 + f_4. \quad (7.9)$$

La fuerza f_i suministrada por cada propela se relaciona con la velocidad angular de cada motor con la siguiente ecuación

$$f_i = k_i \omega_i^2 \quad i = \{1, 2, 3, 4\}, \quad (7.10)$$

donde k_i es una constante positiva que denota el factor de empuje y ω_i representa la velocidad angular de cada motor. Finalmente, $\boldsymbol{\tau}$ representa el vector de momentos generalizados actuando sobre el cuerpo de la aeronave

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T \in \mathbb{R}^3, \quad (7.11)$$

con

$$\tau_\phi = l(f_3 - f_4), \quad (7.12)$$

$$\tau_\theta = l(f_1 - f_2), \quad (7.13)$$

$$\tau_\psi = d_3\omega_3^2 + d_4\omega_4^2 - d_1\omega_1^2 - d_2\omega_2^2, \quad (7.14)$$

donde l es la distancia entre el centro de masa y el eje de rotación de cada motor y d_i es un parámetro aerodinámico conocido como factor de arrastre de cada propela. El modelo es obtenido usando la ecuación de Euler-Lagrange (7.2) y las definiciones (7.3)-(7.14) como sigue

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}}_{\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \\ J_x\ddot{\phi} \\ J_y\ddot{\theta} \\ J_z\ddot{\psi} \end{bmatrix}} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underbrace{F}_{\begin{bmatrix} u_t \sin \theta \\ -u_t \sin \phi \cos \theta \\ u_t \cos \phi \cos \theta \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}}. \quad (7.15)$$

De esto, el modelo puede ser reescrito como

$$m\ddot{x} = u_t \sin \theta, \quad (7.16)$$

$$m\ddot{y} = -u_t \sin \phi \cos \theta, \quad (7.17)$$

$$m\ddot{z} = u_t \cos \phi \cos \theta - mg, \quad (7.18)$$

$$J_x\ddot{\phi} = \tau_\phi, \quad (7.19)$$

$$J_y\ddot{\theta} = \tau_\theta, \quad (7.20)$$

$$J_z\ddot{\psi} = \tau_\psi. \quad (7.21)$$

Este es el modelo dinámico considerado para este trabajo, para más información acerca de diferentes modelos dinámicos puede ver [2, 14, 12, 5]. Ahora, definiendo los estados $[x_1, x_2] \triangleq [x, \dot{x}]$, $[y_1, y_2] \triangleq [y, \dot{y}]$, $[z_1, z_2] \triangleq [z, \dot{z}]$, $[\phi_1, \phi_2] \triangleq [\phi, \dot{\phi}]$, $[\theta_1, \theta_2] \triangleq [\theta, \dot{\theta}]$, y $[\psi_1, \psi_2] \triangleq [\psi, \dot{\psi}]$, podemos reescribir el sistema (7.16)-(7.21) en la siguiente representación en espacio de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{u_t}{m} \sin(\theta_1) \\ y_2 \\ -\frac{u_t}{m} \sin(\phi_1) \cos(\theta_1) \\ z_2 \\ \frac{u_t}{m} \cos(\phi_1) \cos(\theta_1) - g \\ \phi_2 \\ J_x^{-1} \tau_\phi \\ \theta_2 \\ J_y^{-1} \tau_\theta \\ \psi_2 \\ J_z^{-1} \tau_\psi \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

7.1.2. Modelo dinámico de la aeronave PVTOL

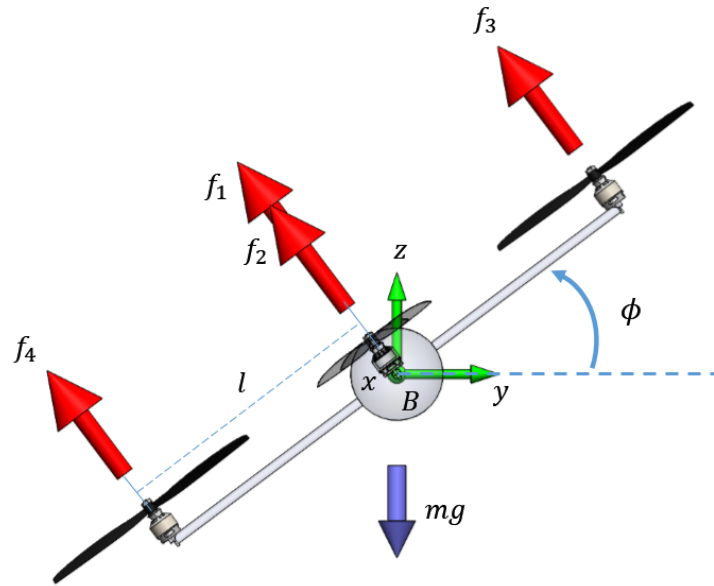


Figura 7.3: Quadrotor visto como una aeronave PVTOL.

La aeronave PVTOL es un vehículo volador que solo opera en el plano vertical y es una restricción natural de las aeronaves de despegue y aterrizaje vertical (VTOL, *Vertical Take-Off and Landing*). El modelo de la aeronave PVTOL es utilizado como una primera aproximación muy útil que mantiene las principales características de una aeronave tipo VTOL con un mínimo número de estados y entradas de control. El quadrotor es una aeronave tipo VTOL que de algún modo puede ser vista como dos aeronaves PVTOL conectadas de tal forma que sus ejes sean ortogonales. En efecto, si los ángulos θ y ψ son llevados a cero, el quadrotor se reduce a una aeronave PVTOL, vea la Figura 7.3. El modelo del quadrotor en esta configuración específica puede describirse como

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -u_t \sin(\phi), \\ m\ddot{z} &= u_t \cos(\phi) - mg, \\ J_x \ddot{\phi} &= \tau_\phi, \end{aligned} \tag{7.23}$$

la cual es una versión simplificada del modelo aeronave PVTOL descrito en [16, 30].

7.1.3. Formulación del problema de control

El problema de control consiste en encontrar leyes de control de empuje u_t y momentos de entrada τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ , tales que, dada una trayectoria deseada asequible

$$\mathbf{q}_d(t) \triangleq [x_d(t), y_d(t), z_d(t)]^T \in \mathbb{R}^3,$$

el quadrotor pueda seguirla con suficiente precisión. En otras palabras, definiendo el vector de posición

$$\mathbf{q}_p(t) \triangleq [x(t), y(t), z(t)]^T \in \mathbb{R}^3,$$

el vector de error de posición

$$\mathbf{e}_p(t) \triangleq \mathbf{q}_p(t) - \mathbf{q}_d(t),$$

el vector de error de velocidad

$$\mathbf{e}_v(t) \triangleq \dot{\mathbf{q}}_p(t) - \dot{\mathbf{q}}_d(t),$$

y el siguiente vector de error de seguimiento

$$\mathbf{e}(t) \triangleq [\mathbf{e}_p(t)^T, \mathbf{e}_v(t)^T]^T, \quad (7.24)$$

el objetivo de control consiste en encontrar leyes de control tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0.$$

Adicionalmente, se asume que todos los estados del sistema están disponibles. El quadrotor tiene que poder despegar, sustentarse y aterrizar de forma autónoma.

7.2. Diseño del controlador I&I

En esta sección el Teorema 4 es utilizado para diseñar un controlador para el sistema quadrotor. La idea fundamental para el desarrollo del controlador es sumergir la dinámica del quadrotor en la dinámica de un sistema aeronave PVTOL, previamente sumergido dentro de la dinámica de un sistema planar con propiedades deseadas de estabilidad, vea la Figura 7.4. Esto significa que la técnica I&I es utilizada de forma anidada. El diseño del controlador es desarrollado en tres pasos; en el primer paso la técnica I&I es utilizada para diseñar un sistema dinámico objetivo planar de cuatro dimensiones, en el segundo paso la técnica I&I es usada para diseñar un controlador para el aeronave PVTOL usando la dinámica planar objetivo previamente diseñada, finalmente, en el tercer paso la técnica I&I es usada nuevamente para diseñar un controlador para el sistema quadrotor utilizando el sistema PVTOL previamente controlado como sistema dinámico objetivo.

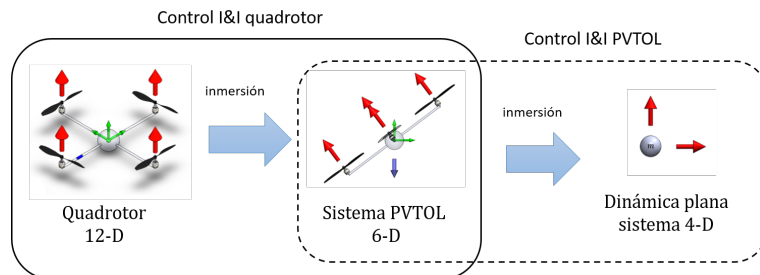


Figura 7.4: Estrategia de control.

7.2.1. Diseño del sistema dinámico objetivo planar

El sistema objetivo planar consiste en la dinámica de una partícula moviéndose libre en el plano vertical lateral (y, z) , bajo la acción de la gravedad y las fuerzas que causan el movimiento. El objetivo es diseñar un sistema planar que pueda seguir cualquier trayectoria asequible sobre el plano vertical (y, z) . Para este fin, considere el siguiente sistema de cuatro dimensiones

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ m\dot{y}_2 &= u_y, \\ \dot{z}_1 &= z_2, \\ m\dot{z}_2 &= u_z - mg, \end{aligned} \quad (7.25)$$

donde $m > 0$ es la masa de la partícula, $y_1 \in \mathbb{R}$ y $y_2 \in \mathbb{R}$ son la posición y velocidad del movimiento horizontal, $z_1 \in \mathbb{R}$ y $z_2 \in \mathbb{R}$ son la posición y velocidad del movimiento vertical, $u_y \in \mathbb{R}$ y $u_z \in \mathbb{R}$ son las

entradas de control del sistema a ser diseñadas. Luego, usando el vector de error de seguimiento definido en (7.24) podemos reescribir el sistema (7.25) como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ \frac{u_y}{m} - \ddot{y}_d \\ e_6 \\ \frac{u_z}{m} - g - \ddot{z}_d \end{bmatrix}. \quad (7.26)$$

La siguiente proposición resume la aplicación del enfoque de I&I para este sistema.

Proposición 3. *El sistema (7.26) es globalmente estabilizable por I&I con la siguiente dinámica objetivo*

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa_2 \xi_1 \\ -\kappa_3 \xi_2 \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^2$ y la ley de control

$$u_y = m(-\kappa_2 \lambda_2 e_2 - (\kappa_2 + \lambda_2) e_5 + \ddot{y}_d), \quad (7.28)$$

y

$$u_z = m(-\kappa_3 \lambda_3 e_3 - (\kappa_3 + \lambda_3) e_6 + g + \ddot{z}_d), \quad (7.29)$$

con parámetros de controlador $\kappa_2, \lambda_2 > 0$ y $\kappa_3, \lambda_3 > 0$.

Prueba 3. *Para establecer la prueba necesitamos verificar que las condiciones (A1)–(A4) del Teorema 4 se cumplen.*

(B1) Sistema objetivo

EL sistema dinámico objetivo (7.27) tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $\xi = 0 \in \mathbb{R}^2$, la condición (A1) es trivialmente satisfecha.

(B2) Condición de inmersión

Considere el siguiente mapeo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_p(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_3(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_4(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}). \quad (7.30)$$

Ahora, debido a que se desea que las trayectorias de $e_2(t)$ y $e_3(t)$ tiendan exponencialmente a cero, definimos $\pi_1(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_1$ y $\pi_2(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_2$. Usando esta definición parcial para la función $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ y la dinámica objetivo (7.27) el sistema (7.26) se transforma en

$$\begin{aligned} -\kappa_2 \xi_1 &= \pi_3(\boldsymbol{\xi}), \\ \dot{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{c_y(\boldsymbol{\xi})}{m} - \ddot{y}_d, \\ -\kappa_3 \xi_2 &= \pi_4(\boldsymbol{\xi}), \\ \dot{\pi}_4(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{c_z(\boldsymbol{\xi})}{m} - g - \ddot{z}_d. \end{aligned} \quad (7.31)$$

De la primera y tercera ecuación podemos encontrar los mapeos $\pi_3(\boldsymbol{\xi})$ y $\pi_4(\boldsymbol{\xi})$, con lo cual el mapeo $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ es completamente definido y la condición (A2) es satisfecha. Observe que las funciones $c_y(\boldsymbol{\xi})$ y $c_z(\boldsymbol{\xi})$ son consideradas como parámetros libres.

(B3) Variedad implícita

Usando la partición de $\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_s)$ con $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^2$ y la correspondiente partición de $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = \text{col}(\boldsymbol{\pi}_p(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\xi}))$, la función $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_s - \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\pi}_p^{-1}(\mathbf{x}_p))$ es tal que (A3) se cumple. Ahora, se define la siguiente variedad explícita

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e_5 + \kappa_2 e_2 \\ e_6 + \kappa_3 e_3 \end{bmatrix} = 0 \right\}, \quad (7.32)$$

en concordancia con el conjunto identidad (3.12).

(B4) Atractividad de la variedad y acotamiento de las soluciones

Para verificar (A4) la coordenada fuera de la variedad se define como

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e_5 + \kappa_2 e_2 \\ e_6 + \kappa_3 e_3 \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

Usando la definición (7.33) y el sistema (7.26), la dinámica fuera de la variedad resulta

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_y}{m} - \ddot{y}_d + \kappa_2 e_5 \\ \frac{u_z}{m} - g - \ddot{z}_d + \kappa_3 e_6 \end{bmatrix}. \quad (7.34)$$

Ahora con el fin de estabilizar la dinámica fuera de la variedad seleccionamos las siguientes leyes de control

$$\begin{aligned} u_y &= m(-\lambda_2 \eta_1 - \kappa_2 e_5 + \ddot{y}_d), \\ u_z &= m(-\lambda_3 \eta_2 - \kappa_3 e_6 + g + \ddot{z}_d), \end{aligned} \quad (7.35)$$

con parámetros $\kappa_2, \lambda_2 > 0$ y $\kappa_3, \lambda_3 > 0$, entonces usando (7.35) en (7.34), esto lleva al siguiente sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \eta_1 \\ -\lambda_3 \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (7.36)$$

el cual tiene un equilibrio global y asintóticamente estable e $\boldsymbol{\eta} = 0 \in \mathbb{R}^2$. Finalmente, solo resta por demostrar que las trayectorias del sistema (7.26) en lazo cerrado están acotadas. Para esto, usando la ley de control (7.35) en el sistema (7.26) nos lleva a

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = \boldsymbol{x}_s, \quad (7.37)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_s = -A\boldsymbol{x}_s - B\boldsymbol{\eta}, \quad (7.38)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -B\boldsymbol{\eta}, \quad (7.39)$$

donde $A = \text{diag}\{\kappa_2, \kappa_3\}$ y $B = \text{diag}\{\lambda_2, \lambda_3\}$. Observe ahora que las trayectorias de $\boldsymbol{\eta}(t)$ están acotadas y convergen exponencialmente a cero, esto implica por el subsistema (7.38) que las trayectorias de $\boldsymbol{x}_s(t)$ también están acotadas y convergen a cero, por lo que las trayectorias de $\boldsymbol{x}_p(t)$ en (7.37) están también acotadas para todo t , con lo cual se cumple la condición (A4) y finalmente esto demuestra la prueba. \square

Como resultado de la Proposición 3, el sistema (7.25) con ley de control (7.28) y (7.29), asegura que las soluciones $y_1(t)$ y $z_1(t)$ siguen globalmente cualquier trayectoria acotada y asequible $y_d(t)$ y $z_d(t)$, respectivamente; en otras palabras,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} y_1(t) - y_d(t) \\ z_1(t) - z_d(t) \end{bmatrix} = 0.$$

7.2.2. Diseño del sistema objetivo PVTOL

Para diseñar un controlador de seguimiento para el sistema aeronave PVTOL (7.23), ahora utilizaremos el sistema previamente controlado (7.26) como el sistema dinámico objetivo. Para este fin, usando el vector de error de seguimiento definido en (7.24), podemos reescribir el sistema (7.23) en la siguiente representación en espacio de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ -\frac{u_t}{m} \sin(\phi_1) - \ddot{y}_d \\ e_6 \\ \frac{u_t}{m} \cos(\phi_1) - g - \ddot{z}_d \\ \phi_2 \\ J_x^{-1} \tau_\phi \end{bmatrix}. \quad (7.40)$$

Ahora, podemos aplicar la metodología I&I para diseñar un controlador de seguimiento para el sistema PVTOL (7.40), usando el sistema planar previamente diseñado (7.26) como el sistema dinámico objetivo. Por lo tanto, la siguiente proposición resume el enfoque I&I aplicado a este caso.

Proposición 4. *El sistema aeronave PVTOL (7.40) es globalmente estabilizable vía I&I con el siguiente sistema dinámico objetivo*

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\xi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \frac{u_y(\xi_1, \xi_2)}{m} - \ddot{y}_d \\ \xi_4 \\ \frac{u_z(\xi_3, \xi_4)}{m} - g - \ddot{z}_d \end{bmatrix}}_{\alpha(\xi)}, \quad (7.41)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^4$, con funciones

$$\begin{aligned} u_y(\xi_1, \xi_2) &= m(-\kappa_2 \lambda_2 \xi_1 - (\kappa_2 + \lambda_2) \xi_2 + \ddot{y}_d), \\ u_z(\xi_3, \xi_4) &= m(-\kappa_3 \lambda_3 \xi_3 - (\kappa_3 + \lambda_3) \xi_4 + g + \ddot{z}_d), \end{aligned} \quad (7.42)$$

con parámetros $\kappa_2, \lambda_2 > 0$ y $\kappa_3, \lambda_3 > 0$. Utilizando la siguiente ley de control de empuje

$$u_t = \sqrt{u_y(e_2, e_5)^2 + u_z(e_3, e_6)^2}, \quad (7.43)$$

y la siguiente ley de control para el momento de roll

$$\tau_\phi = J_x(-\kappa_4 \lambda_4 [\phi_1 - \pi_5] - (\kappa_4 + \lambda_4) [\phi_2 - \dot{\pi}_5] + \ddot{\pi}_5), \quad (7.44)$$

donde la función

$$\pi_5 = \arctan \left(\frac{-u_y(e_2, e_5)}{u_z(e_3, e_6)} \right), \quad (7.45)$$

y parámetros de controlador $\kappa_4, \lambda_4 > 0$.

Prueba 4. Para establecer la prueba necesitamos verificar que las condiciones (A1)–(A4) del Teorema 4 se cumplan.

(C1) Sistema objetivo

Como consecuencia directa de la Proposición 3, el sistema dinámico objetivo (7.41) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\xi = 0 \in \mathbb{R}^4$, la condición (A1) es satisfecha.

(C2) Condición de inmersión

Considere el siguiente mapeo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_p(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_3(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_4(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_5(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_6(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}). \quad (7.46)$$

Ahora, como antes, definimos $\pi_1(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_1$ y $\pi_3(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_3$ por que se desea que las trayectorias de los errores de seguimiento $e_2(t)$ y $e_3(t)$ se comporten como las trayectorias del sistema dinámico objetivo. Entonces, usando esta definición parcial de $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ y el sistema objetivo (7.41), el sistema (7.40) se transforma en

$$\xi_2 = \pi_2(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.47)$$

$$u_y(\xi_1, \xi_2) = -c_t(\boldsymbol{\xi}) \sin(\pi_5(\boldsymbol{\xi})), \quad (7.48)$$

$$\xi_4 = \pi_4(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.49)$$

$$u_z(\xi_3, \xi_4) = c_t(\boldsymbol{\xi}) \cos(\pi_5(\boldsymbol{\xi})), \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial \pi_5(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \pi_6(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.51)$$

$$\dot{\pi}_6(\boldsymbol{\xi}) = J_x^{-1} c_\phi(\boldsymbol{\xi}). \quad (7.52)$$

De las ecuaciones (7.47) y (7.49) podemos encontrar los mapeos $\pi_2(\boldsymbol{\xi})$ y $\pi_4(\boldsymbol{\xi})$. El mapeo $\pi_5(\boldsymbol{\xi})$ es definido como

$$\pi_5(\boldsymbol{\xi}) = \arctan\left(\frac{-u_y(\xi_1, \xi_2)}{u_z(\xi_3, \xi_4)}\right), \quad (7.53)$$

el cual es obtenido de las ecuaciones (7.48) y (7.50). El mapeo $\pi_6(\boldsymbol{\xi})$ es obtenido de la ecuación (7.51) con lo cual el mapeo $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ queda completamente definido y la condición (A2) es satisfecha. Note que el mapeo $c_t(\boldsymbol{\xi})$ (mapeo libre) puede ser definido de dos maneras utilizando (7.48) y (7.50) como sigue

$$c_t(\boldsymbol{\xi}) = u_z(\xi_3, \xi_4) \cos(\pi_5(\boldsymbol{\xi})) - u_y(\xi_1, \xi_2) \sen(\pi_5(\boldsymbol{\xi})), \quad (7.54)$$

o

$$c_t(\boldsymbol{\xi}) = \sqrt{u_y(\xi_1, \xi_2)^2 + u_z(\xi_3, \xi_4)^2}, \quad (7.55)$$

mientras que el mapeo $c_\phi(\boldsymbol{\xi})$ queda definido por la ecuación (7.52).

(C3) Variedad implícita

Usando la partición de $\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_s)$ with $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^2$ y la correspondiente partición de $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = \text{col}(\boldsymbol{\pi}_p(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\xi}))$, la función $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_s - \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\pi}_p^{-1}(\mathbf{x}_p))$ es tal que (A3) se cumple. Ahora, se define la siguiente variedad

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \mid \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 - \pi_5(\mathbf{x}_p) \\ \phi_2 - \pi_6(\mathbf{x}_p) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}, \quad (7.56)$$

en concordancia con el conjunto identidad (3.12). Con el fin de simplificar la tarea de estabilización del equilibrio de la dinámica fuera de la variedad en la subsecuente condición (C4), utilizaremos otra función en lugar de $\varphi_2(\mathbf{x})$ en el conjunto identidad (7.56), esta nueva función es definida como

$$\varphi_2^*(\mathbf{x}) \triangleq \phi_2 - \frac{\partial \pi_5(\mathbf{x}_p)}{\partial \mathbf{x}_p} \dot{\mathbf{x}}_p, \quad (7.57)$$

es importante subrayar que $\varphi_2^*(\mathbf{x})$ no se obtiene de la elección obvia. Sin embargo, el conjunto identidad (3.12) también se cumple para esta función. Para verificar esto observe que la selección obvia para $\varphi_2(\mathbf{x})$ es

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \phi_2 - \pi_6(\mathbf{x}_t), \quad (7.58)$$

la cual puede ser reescrita como

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \phi_2 - \frac{\partial \pi_5(\mathbf{x}_p)}{\partial \mathbf{x}_p} \alpha(\mathbf{x}_p), \quad (7.59)$$

donde se ha utilizado la ecuación (7.51). Ahora, usando la definición (7.57) en (7.59) se tiene

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi_2^*(\mathbf{x}) + \frac{\partial \pi_5(\mathbf{x}_p)}{\partial \mathbf{x}_p} (\dot{\mathbf{x}}_p - \alpha(\mathbf{x}_p)). \quad (7.60)$$

Finalmente, usando la función $\varphi_1(\mathbf{x})$ definida por (7.56) en (7.60), se tiene que

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi_2^*(\mathbf{x}) + \frac{\partial[\phi_1 - \varphi_1(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}_p} (\dot{v} \mathbf{x}_p - \alpha(\mathbf{x}_p)), \quad (7.61)$$

ahora, se debe notar que el último término de mano derecha es igual a cero cuando $\varphi_1(\mathbf{x}) = 0$. Por esta razón $\varphi_2^*(\mathbf{x})$ es seleccionada de esta manera, en otras palabras, es suficiente con que las funciones $\varphi_1(\mathbf{x})$ y $\varphi_2^*(\mathbf{x})$ se vuelvan cero, para hacer que la función $\varphi_2(\mathbf{x})$ sea cero también, cumpliendo con esto el conjunto identidad (7.56) y simplificando la tarea de estabilizar el equilibrio cero de la dinámica fuera de la variedad.

(C4) Atractividad de la variedad y acotamiento de las soluciones

Para verificar (A4) la coordenada fuera de la variedad se define como

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2^*(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 - \pi_5(\mathbf{x}_p) \\ \phi_2 - \dot{\pi}_5(\mathbf{x}_p) \end{bmatrix}. \quad (7.62)$$

Usando la definición (7.62) y el sistema (7.40), la dinámica fuera de la variedad resulta en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ J_x^{-1} \tau_\phi - \ddot{\pi}_5(\mathbf{x}_p) \end{bmatrix}. \quad (7.63)$$

Ahora para estabilizar la dinámica fuera de la variedad seleccionamos la siguiente ley de control

$$\tau_\phi = J_x(-\kappa_4 \lambda_4 \eta_1 - (\kappa_4 + \lambda_4) \eta_2 + \ddot{\pi}_5(\mathbf{x}_p)), \quad (7.64)$$

con parámetros $\kappa_4 > 0$ y $\lambda_4 > 0$, entonces usando (7.64) en (7.63) esto nos lleva al siguiente sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -\kappa_4 \lambda_4 \eta_1 - (\kappa_4 + \lambda_4) \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (7.65)$$

el cual tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $\eta = 0 \in \mathbb{R}^2$. Finalmente, solo resta demostrar que la trayectorias del sistema (7.40) en lazo cerrado están acotadas. Para esto, usando la ley de control (7.64) en el sistema (7.40) nos lleva a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ -\frac{u_t}{m} \sin(\eta_1 + \pi_5(\mathbf{x}_p)) - \ddot{y}_d \\ e_6 \\ \frac{u_t}{m} \cos(\eta_1 + \pi_5(\mathbf{x}_p)) - g - \ddot{z}_d \\ \eta_2 \\ -\kappa_4 \lambda_4 \eta_1 - (\kappa_4 + \lambda_4) \eta_2 \end{bmatrix}. \quad (7.66)$$

Observando la estructura de este sistema dinámico, es tiempo de seleccionar la entrada de control de empuje u_t como sigue

$$u_t(\mathbf{x}_p) = \sqrt{u_y(e_2, e_5)^2 + u_z(e_3, e_6)^2}, \quad (7.67)$$

con funciones $u_y(\cdot, \cdot)$ y $u_z(\cdot, \cdot)$ como se definieron en (7.42). Esta selección específica para la entrada de control $u_t(x_p)$ es debida a que el sistema (7.66) se transforma en el siguiente sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ -\kappa_2 \lambda_2 e_2 - (\kappa_2 + \lambda_2) e_5 \\ e_6 \\ -\kappa_3 \lambda_3 e_3 - (\kappa_3 + \lambda_3) e_6 \end{bmatrix}. \quad (7.68)$$

cuando la variable $\eta = 0$, observe que el sistema (7.68) tiene la misma estructura que el sistema dinámico objetivo (7.41) el cual por la Proposición 3 tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $\mathbf{x}_p = 0 \in \mathbb{R}^4$. Note ahora, que el sistema (7.66) tiene la siguiente forma en cascada

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\eta}), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (7.69)$$

donde $\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, el subsistema $\boldsymbol{\eta}$ ya es globalmente asintóticamente estable y el subsistema \mathbf{x}_p con $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ tiene la misma estructura que el sistema dinámico objetivo i.e.

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_p, \mathbf{0}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_p), \quad (7.70)$$

lo que implica estabilidad asintótica global, por lo que usando los resultados reportados en [39] para sistemas en cascada, se puede mostrar que para cualquier solución de $\eta(t)$, la solución $\mathbf{x}_p(t)$ del subsistema \mathbf{x}_p esta uniformemente acotada y subsecuentemente la condición (A4) del Teorema 4 se cumple y finalmente esto demuestra la prueba. \square

7.2.3. Diseño del controlador I&I para un quadrotor

En esta sección se muestra el diseño de control de seguimiento basado en I&I para una aeronave tipo quadrotor, utilizando el sistema aeronave PVTOL como sistema dinámico objetivo y adicionalmente se agrega la dinámica deseada para el movimiento de dirección de la aeronave (*heading o guiñada*). Entonces, usando el vector de error de seguimiento definido en (7.24) y el vector de error para la dinámica de dirección (guiñada) definido como $[e_{\psi_1}, e_{\psi_2}]^T \triangleq [\psi_1 - \psi_d, \psi_2 - \dot{\psi}_d]^T$, el sistema (7.22) puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ e_{\psi_1} \\ e_{\psi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_4 \\ \frac{u_t(e_t)}{m} \text{sen}(\theta_1) - \ddot{x}_d \\ e_5 \\ -\frac{u_t(e_t)}{m} \text{sen}(\phi_1) \cos(\theta_1) - \ddot{y}_d \\ e_6 \\ \frac{u_t(e_t)}{m} \cos(\phi_1) \cos(\theta_1) - g - \ddot{z}_d \\ \phi_2 \\ J_x^{-1} \tau_\phi(e_t, e_\phi) \\ \theta_2 \\ J_y^{-1} \tau_\theta \\ e_{\psi_2} \\ J_z^{-1} \tau_\psi - \ddot{\psi}_d \end{bmatrix}, \quad (7.71)$$

donde las funciones $u_t(e_t)$ y $\tau_\phi(e_t, e_\phi)$ son las leyes de control diseñadas para el sistema aeronave PVTOL y descritas por las ecuaciones (7.43) y (7.44) con $e_t \triangleq [e_2, e_5, e_3, e_6]^T$ y $e_\phi \triangleq [\phi_1, \phi_2]^T$. Ahora, podemos aplicar la metodología I&I para diseñar el controlador de seguimiento para el sistema quadrotor (7.71), usando el sistema PVTOL previamente controlado (7.40) como el sistema objetivo. Por lo tanto, la siguiente proposición resume la aplicación del enfoque I&I para este caso.

Proposición 5. *El sistema quadrotor (7.71) es estabilizable vía I&I con el siguiente sistema objetivo*

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \\ \xi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -\kappa_1 \lambda_1 \xi_1 - (\kappa_1 + \lambda_1) \xi_2 \\ \xi_4 \\ -\frac{u_t(\xi_t)}{m} \text{sen}(\xi_7) - \ddot{y}_d \\ \xi_6 \\ \frac{u_t(\xi_t)}{m} \cos(\xi_7) - g - \ddot{z}_d \\ \xi_8 \\ J_\phi^{-1} \tau_\phi(\xi_t, \xi_\phi) \\ -\kappa_6 \xi_9 \end{bmatrix}, \quad (7.72)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^9$, $\xi_t \triangleq [\xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6]^T$ y $\xi_\phi \triangleq [\xi_7, \xi_8]^T$, con funciones $u_t(\xi_t)$ y $\tau_\phi(\xi_t, \xi_\phi)$ como se definen en (7.43) y (7.44) en la proposición 4. Usando la siguiente ley de control de empuje

$$u_t = \sqrt{u_y^2 + u_z^2}, \quad (7.73)$$

con

$$u_x = m(-\kappa_1 \lambda_1 e_1 - (\kappa_1 + \lambda_1) e_4 + \ddot{x}_d), \quad (7.74)$$

$$u_y = m(-\kappa_2 \lambda_2 e_2 - (\kappa_2 + \lambda_2) e_5 + \ddot{y}_d), \quad (7.75)$$

$$u_z = m(-\kappa_3 \lambda_3 e_3 - (\kappa_3 + \lambda_3) e_6 + \ddot{z}_d + g), \quad (7.76)$$

y las siguientes leyes de control para los momentos de alabeo, cabeceo y guiñada

$$\tau_\phi = J_x(-\kappa_4 \lambda_4 [\phi_1 - \Phi] - (\kappa_4 + \lambda_4) [\dot{\phi}_2 - \dot{\Phi}] + \ddot{\Phi}), \quad (7.77)$$

$$\tau_\theta = J_y(-\kappa_5 \lambda_5 [\theta_1 - \Theta] - (\kappa_5 + \lambda_5) [\dot{\theta}_2 - \dot{\Theta}] + \ddot{\Theta}), \quad (7.78)$$

$$\tau_\psi = J_z(-\kappa_6 \lambda_6 e_{\psi_1} - (\kappa_6 + \lambda_6) e_{\psi_2} - \ddot{\psi}_d), \quad (7.79)$$

con funciones

$$\Phi = \arctan\left(\frac{-u_y}{u_z}\right), \quad \Theta = \arctan\left(\frac{u_x}{u_t}\right) \quad (7.80)$$

y parámetros de controlador $\kappa_j, \lambda_j > 0$, con $j = \{1, 2, \dots, 6\}$.

Prueba 5. Para establecer la prueba necesitamos verificar que las condiciones (A1)–(A4) del Teorema 4 se cumplen.

(D1) Sistema objetivo

El sistema objetivo (7.72) puede ser dividido en tres subsistemas; el primero es el subsistema (ξ_1, ξ_2) el cual representa la dinámica objetivo para el movimiento traslacional del subsistema (e_1, e_4) y el cual tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $[\xi_1, \xi_2] = 0 \in \mathbb{R}^2$. El segundo es el subsistema (ξ_t, ξ_ϕ) el cual es el subsistema aeronave PVTOL que utiliza las leyes de control de empuje y momento de roll desarrollados en la sección anterior, por lo que como consecuencia directa de la Proposición 4 el sistema tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $[\xi_t, \xi_\phi] = 0 \in \mathbb{R}^6$. Finalmente, el tercer subsistema es el subsistema ξ_9 el cual simplemente representa la dinámica deseada para la coordenada de dirección yaw, que tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $\xi_9 = 0$, por lo que finalmente la condición (A1) se satisface.

(D2) Condición de inmersión

Considere el siguiente mapeo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ e_{\psi_1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ e_{\psi_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_p(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_3(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_4(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_5(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_6(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_7(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_8(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_9(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \pi_{10}(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_{11}(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_{12}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}). \quad (7.81)$$

Ahora, definiendo $\pi_1(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_1$, $\pi_3(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_3$, $\pi_5(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_5$, $\pi_7(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_7$ y $\pi_9(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \xi_9$ por que se desea que las trayectorias de estas coordenadas en específico se comporten como el sistema dinámico objetivo. Entonces, usando esta definición parcial para la función $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ y el sistema objetivo (7.72), el sistema (7.71) se transforma en

$$\xi_2 = \pi_2(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.82)$$

$$-\kappa_1 \lambda_1 \xi_1 - (\kappa_1 + \lambda_1) \xi_2 = \frac{c_t(\boldsymbol{\xi})}{m} \text{sen}(\pi_{10}(\boldsymbol{\xi})) - \ddot{x}_d, \quad (7.83)$$

$$\xi_4 = \pi_4(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.84)$$

$$-\frac{u_t(\boldsymbol{\xi}_t)}{m} \text{sen}(\xi_7) - \ddot{y}_d = -\frac{c_t(\boldsymbol{\xi})}{m} \text{sen}(\xi_7) \cos(\pi_{10}(\boldsymbol{\xi})) - \ddot{y}_d, \quad (7.85)$$

$$\xi_6 = \pi_6(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.86)$$

$$\frac{u_t(\boldsymbol{\xi}_t)}{m} \cos(\xi_7) - g - \ddot{z}_d = \frac{c_t(\boldsymbol{\xi})}{m} \cos(\xi_7) \cos(\pi_{10}(\boldsymbol{\xi})) - g - \ddot{z}_d, \quad (7.87)$$

$$\xi_8 = \pi_8(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.88)$$

$$J_\phi^{-1} \tau_\phi(\xi_t, \xi_\phi) = J_\phi^{-1} c_\phi(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.89)$$

$$\dot{\pi}_{10}(\boldsymbol{\xi}) = \pi_{11}(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.90)$$

$$\dot{\pi}_{11}(\boldsymbol{\xi}) = J_\phi^{-1} c_\theta(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.91)$$

$$-\kappa_6 \xi_9 = \pi_{12}(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.92)$$

$$\dot{\pi}_{12}(\boldsymbol{\xi}) = J_z^{-1} c_\psi(\boldsymbol{\xi}) - \ddot{\psi}_d. \quad (7.93)$$

De las ecuaciones (7.82), (7.84), (7.86), (7.88) y (7.92) podemos encontrar los mapeos $\pi_2(\boldsymbol{\xi})$, $\pi_4(\boldsymbol{\xi})$, $\pi_6(\boldsymbol{\xi})$, $\pi_8(\boldsymbol{\xi})$ y $\pi_{12}(\boldsymbol{\xi})$, respectivamente. De las ecuaciones (7.85) y (7.87) seleccionamos la función $c_t(\boldsymbol{\xi})$ (parámetro libre) como $c_t(\boldsymbol{\xi}) \triangleq u_t(\boldsymbol{\xi}_t)$, con esta elección y usando las ecuaciones (7.83) y (7.85) podemos encontrar los mapeos $\pi_{10}(\boldsymbol{\xi})$ como sigue

$$\pi_{10}(\boldsymbol{\xi}) = \arctan\left(\frac{u_x(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)}{u_t(\boldsymbol{\xi}_t)}\right). \quad (7.94)$$

El mapeo $\pi_{11}(\boldsymbol{\xi})$ se obtiene de la ecuación (7.90) con lo que el mapeo $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi})$ queda completamente definido y la condición (A2) es satisfecha. Adicionalmente, la función $c_\phi(\boldsymbol{\xi})$ (parámetro libre) es definido como $c_\phi(\boldsymbol{\xi}) \triangleq \tau_\phi(\boldsymbol{\xi}_t, \boldsymbol{\xi}_\phi)$ de la ecuación (7.89).

(D3) Variedad implícita

Usando la partición de $\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_s)$ con $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^9$, $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^3$ y la correspondiente partición de $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\xi}) = \text{col}(\boldsymbol{\pi}_p(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\xi}))$, la función $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_s - \boldsymbol{\pi}_s(\boldsymbol{\pi}_p^{-1}(\mathbf{x}_p))$ es tal que (A3) se cumple. Ahora, definimos la siguiente variedad explícita en concordancia con el conjunto identidad (3.12), como

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12} \mid \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \\ \varphi_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 - \pi_{10}(\mathbf{e}) \\ \theta_2 - \pi_{11}(\mathbf{e}) \\ e_{\psi_2} + \kappa_6 e_{\psi_1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}. \quad (7.95)$$

Con el objetivo de simplificar la tarea de estabilización del equilibrio cero de la dinámica fuera de la variedad en la subsecuente condición (D4), usaremos otra función en lugar de la función $\varphi_2(\mathbf{x})$ definida en el conjunto identidad (7.95). Usando los mismos argumentos descritos en la subsección (C3) esta nueva función es descrita como $\varphi_2(\mathbf{x})^* = \theta_2 - \dot{\pi}_{10}(\mathbf{e})$ la cual también satisface el conjunto identidad (3.12).

(D4) Atractividad de la variedad y acotamiento de las soluciones

Para verificar el cumplimiento de la condición (A4), la coordenada fuera de la variedad es definida como

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2^*(\mathbf{x}) \\ \varphi_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 - \pi_{10}(\mathbf{e}) \\ \theta_2 - \dot{\pi}_{10}(\mathbf{e}) \\ e_{\psi_2} + \kappa_6 e_{\psi_1} \end{bmatrix}. \quad (7.96)$$

Usando la definición en (7.96) y el sistema (7.71), la dinámica fuera de la variedad resulta en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ J_y^{-1} \tau_\theta - \dot{\pi}_{10}(\mathbf{e}) \\ J_z^{-1} \tau_\psi - \ddot{\psi}_d + \kappa_6 e_{\psi_2} \end{bmatrix}. \quad (7.97)$$

Ahora, con el fin de estabilizar la dinámica fuera de la variedad seleccionamos las siguientes leyes de control

$$\tau_\theta = J_y(-\kappa_5 \lambda_5 \eta_1 - (\kappa_5 + \lambda_5) \eta_2 + \dot{\pi}_{10}(\mathbf{e})), \quad (7.98)$$

$$\tau_\psi = J_z(-\lambda_6 \eta_3 - \kappa_6 e_{\psi_2} + \ddot{\psi}_d), \quad (7.99)$$

con parámetros $\kappa_5, \lambda_5 > 0$ y $\kappa_6, \lambda_6 > 0$, entonces usando (7.98) y (7.99) en (7.97) nos conduce el siguiente sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_2 \\ -\kappa_5 \lambda_5 \eta_1 - (\kappa_5 + \lambda_5) \eta_2 \\ -\lambda_6 \eta_3 \end{bmatrix}, \quad (7.100)$$

el cual tiene un equilibrio global y asintóticamente estable en $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$. Finalmente, solo resta por demostrar que las trayectorias del sistema (7.71) en lazo cerrado están acotadas. Para esto, usando la ley

de control (7.98) y (7.99) en el sistema (7.71) conduce al siguiente sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_4 \\ \frac{u_t(\mathbf{e}_t)}{m} \operatorname{sen}(\eta_1 + \pi_{10}(\mathbf{e})) - \ddot{x}_d \\ e_5 \\ -\frac{u_t(\mathbf{e}_t)}{m} \operatorname{sen}(\phi_1) \cos(\eta_1 + \pi_{10}(\mathbf{e})) - \ddot{y}_d \\ e_6 \\ \frac{u_t(\mathbf{e}_t)}{m} \cos(\phi_1) \cos(\eta_1 + \pi_{10}(\mathbf{e})) - g - \ddot{z}_d \\ \phi_2 \\ J_x^{-1} \tau_\phi(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_\phi) \\ \eta_2 \\ -\kappa_5 \lambda_5 \eta_1 - (\kappa_5 + \lambda_5) \eta_2 \\ -\lambda_6 \eta_3 \end{bmatrix}. \quad (7.101)$$

Observando la estructura de este sistema dinámico, es fácil ver que cuando $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ el sistema (7.101) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_4 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_3 \\ e_6 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_4 \\ -\kappa_1 \lambda_1 e_1 - (\kappa_1 + \lambda_1) e_4 \\ e_5 \\ -\frac{u_t(\mathbf{e}_t)}{m} \operatorname{sen}(\phi_1) - \ddot{y}_d \\ e_6 \\ \frac{u_t(\mathbf{e}_t)}{m} \cos(\phi_1) - g - \ddot{z}_d \\ \phi_2 \\ J_x^{-1} \tau_\phi(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_\phi) \end{bmatrix}, \quad (7.102)$$

donde el subsistema (e_1, e_4) tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente en $[e_1, e_4] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ y note también que el subsistema $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_\phi)$ es el sistema aeronave PVTOL el cual por la proposición 4 implica que tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente estable en $[\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_\phi] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$. Observe ahora, que el sistema (7.101) tiene la siguiente forma en cascada

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\eta}), \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (7.103)$$

donde $\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, el subsistema $\boldsymbol{\eta}$ ya es global y asintóticamente estable y el subsistema \mathbf{x}_p con $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ tiene estabilidad asintótica global, por lo que, usando los resultados reportados en [39] para sistemas en cascada, se puede mostrar que para cualquier trayectoria de $\boldsymbol{\eta}(t)$, la solución $\mathbf{x}_p(t)$ del subsistema \mathbf{x}_p es uniformemente acotada y subsecuentemente la condición (A4) del Teorema 4 es satisfecha y finalmente con esto se termina la prueba. \square

7.3. Simulación

Con el fin de evaluar el desempeño del controlador diseñado en la subsección anterior, se llevaron a cabo simulaciones numéricas. La tarea a realizar consiste en tres fases; la primera es la fase de despegue, la cual consiste en llevar la aeronave desde una posición inicial en Tierra a una altura de 1 metro en 10 segundos, la segunda fase es de maniobra, la cual consiste en describir dos círculos de radio 2 metros y finalmente la tercera fase, que es la fase de aterrizaje, la cual consiste en regresar la aeronave a Tierra. Los resultados de simulación fueron obtenidos utilizando MATLAB/SIMULIK con un periodo de muestreo de 0.001 segundos. Los parámetros del sistema, del controlador y los estados iniciales usados para la simulación se puede observar en las Tablas 7.1, Tabla 7.2 y Tabla 7.3, respectivamente. La Figura 7.5 muestra la trayectoria seguida por la aeronave en el plano (x, y, z) . La trayectoria deseada y la posición de la aeronave se muestran en la Figura 7.6, donde se puede observar que la aeronave sigue la trayectoria deseada. La Figura 7.7 muestra el vector de error de posición, donde se puede observar que los errores

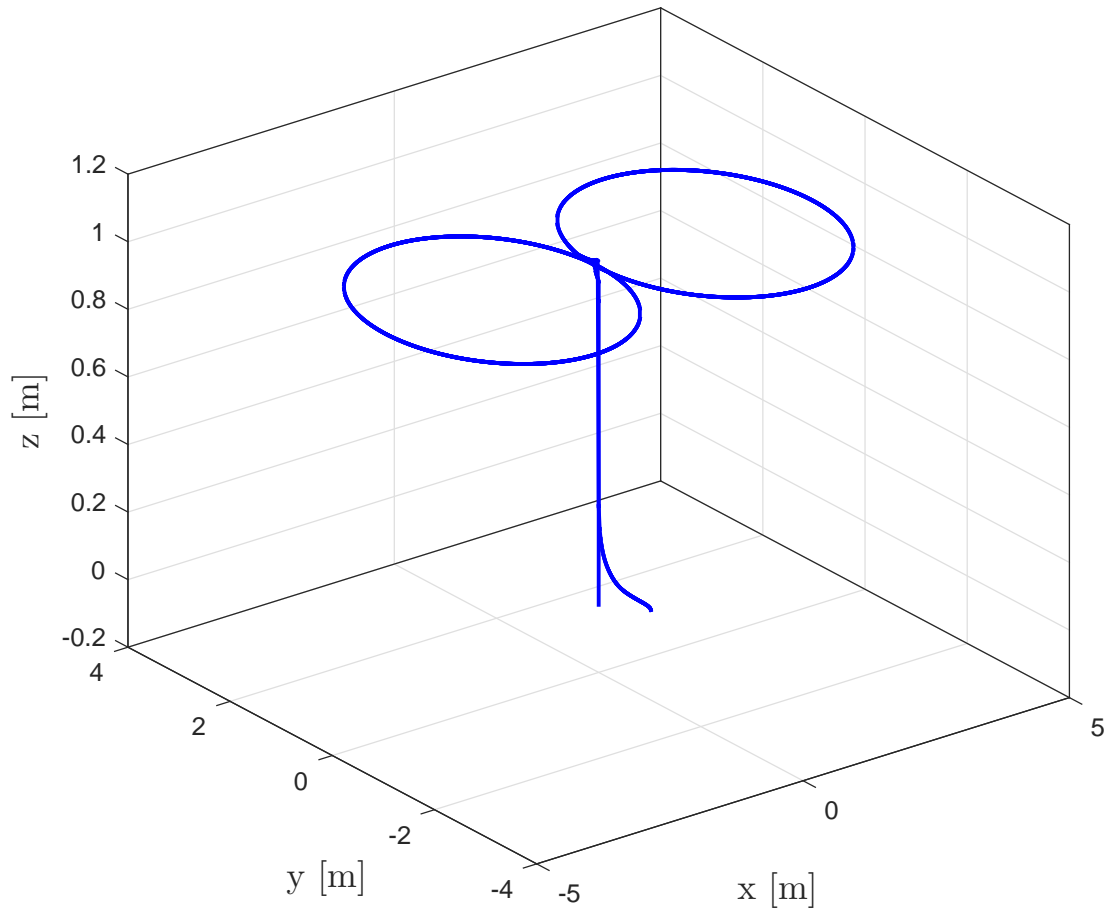


Figura 7.5: Trayectoria del quadrotor en el plano (x, y, z) .

son llevados a cero. Finalmente, la Figura 7.8 muestra las entradas de control resultantes usadas para desarrollar la tarea.

Tabla 7.1: Parámetros del sistema

Parámetro	Valor	Unidad
m	1.79	kg
g	9.81	$m \cdot s^{-2}$
J_x	0.04	$kg \cdot m^2$
J_y	0.04	$kg \cdot m^2$
J_z	0.04	$kg \cdot m^2$

Tabla 7.2: Parámetros del controlador I&I.

Parámetro	Valor	Unidad	Parámetro	Valor	Unidad
κ_1	2	s^{-1}	κ_4	3	s^{-1}
λ_1	2.5	s^{-1}	λ_4	2	s^{-1}
κ_2	2	s^{-1}	κ_5	3	s^{-1}
λ_2	3	s^{-1}	λ_5	2	s^{-1}
κ_3	6	s^{-1}	κ_6	4	s^{-1}
λ_3	3	s^{-1}	λ_6	3	s^{-1}

Tabla 7.3: Estados iniciales

Estado	Valor	Unidad	Estado	Valor	Unidad
$x_1(0)$	0.5	m	$\phi_1(0)$	0.1963	rad
$x_2(0)$	0	$m \cdot s^{-1}$	$\phi_2(0)$	0	$rad \cdot s^{-1}$
$y_1(0)$	-0.5	m	$\theta_1(0)$	-0.1963	rad
$y_2(0)$	0	$m \cdot s^{-1}$	$\theta_2(0)$	0	$rad \cdot s^{-1}$
$z_1(0)$	0	m	$\psi_1(0)$	-0.1963	rad
$z_2(0)$	0	$m \cdot s^{-1}$	$\psi_2(0)$	0	$rad \cdot s^{-1}$

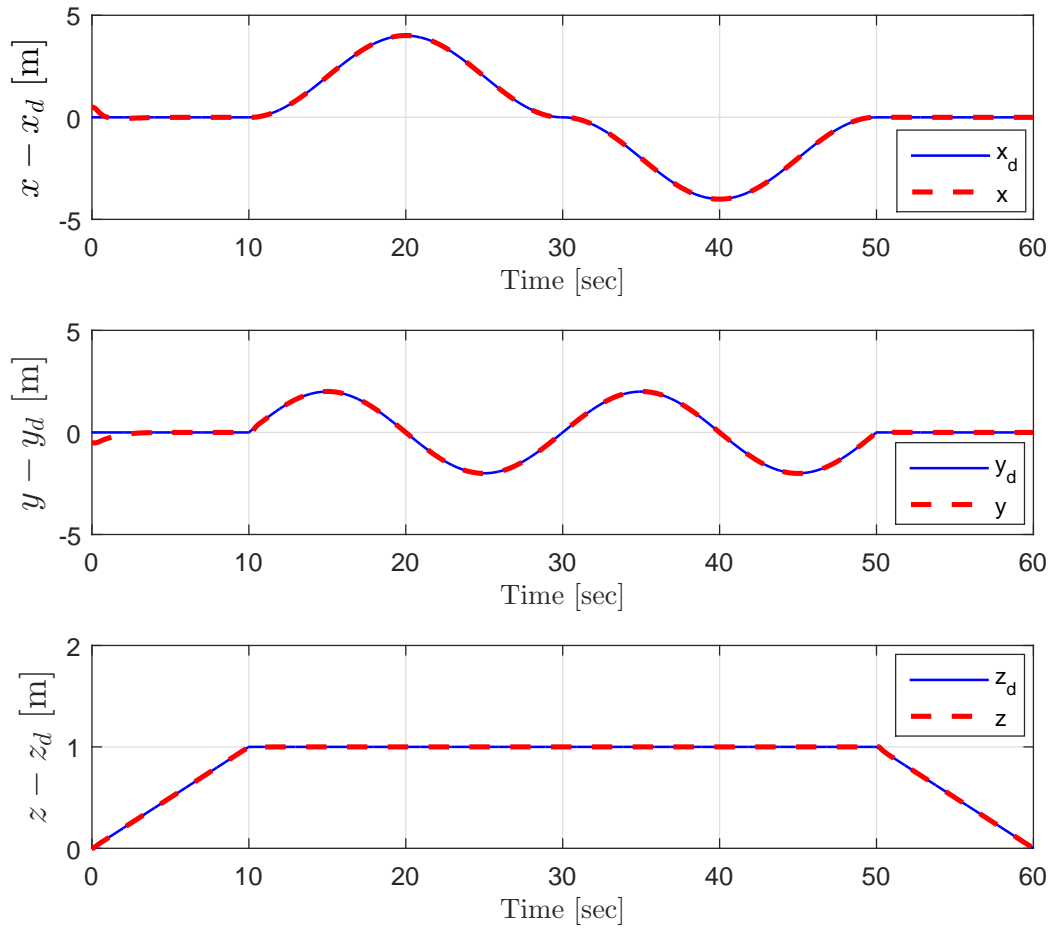


Figura 7.6: Vector de posición $\mathbf{q}_p(t) = [x, y, z]^T$ y vector de posición deseada $\mathbf{q}_d(t) = [x_d, y_d, z_d]^T$.

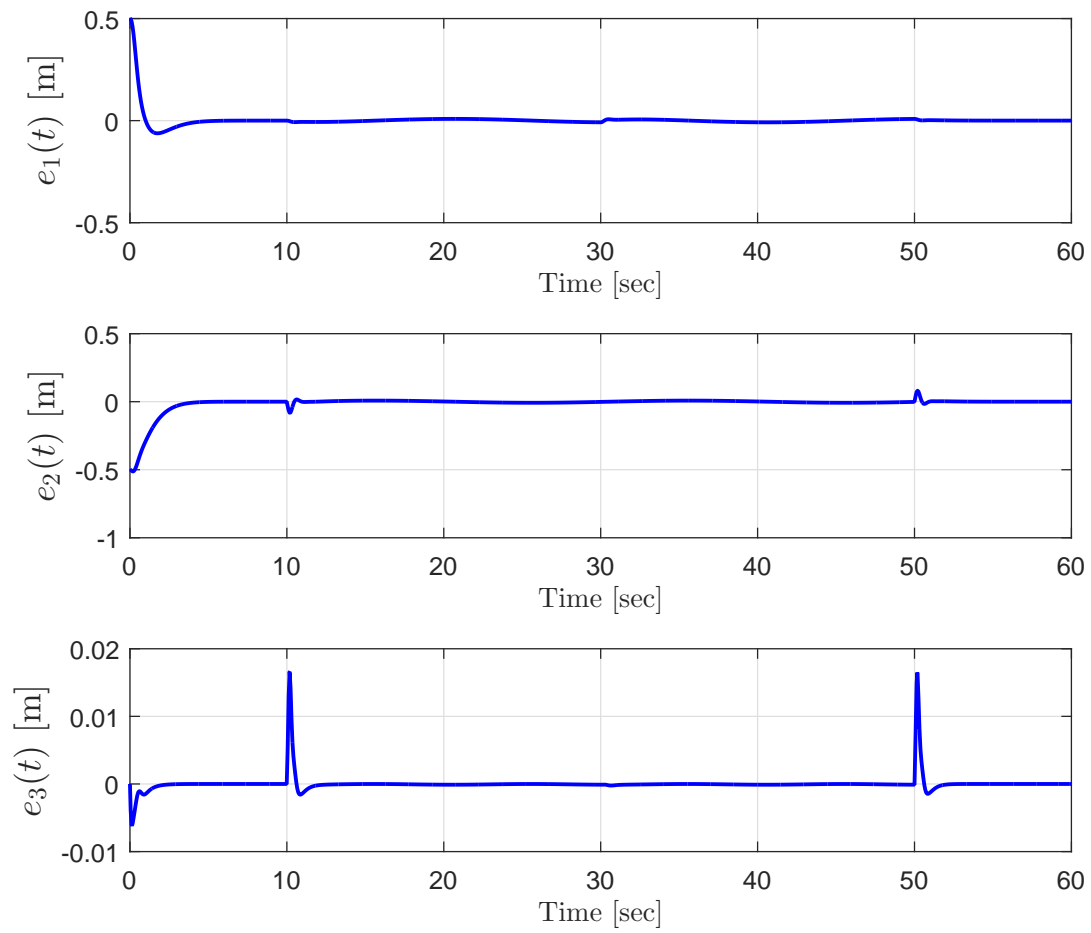


Figura 7.7: Vector de error de posición $e_p = [e_1, e_2, e_3]^T$.

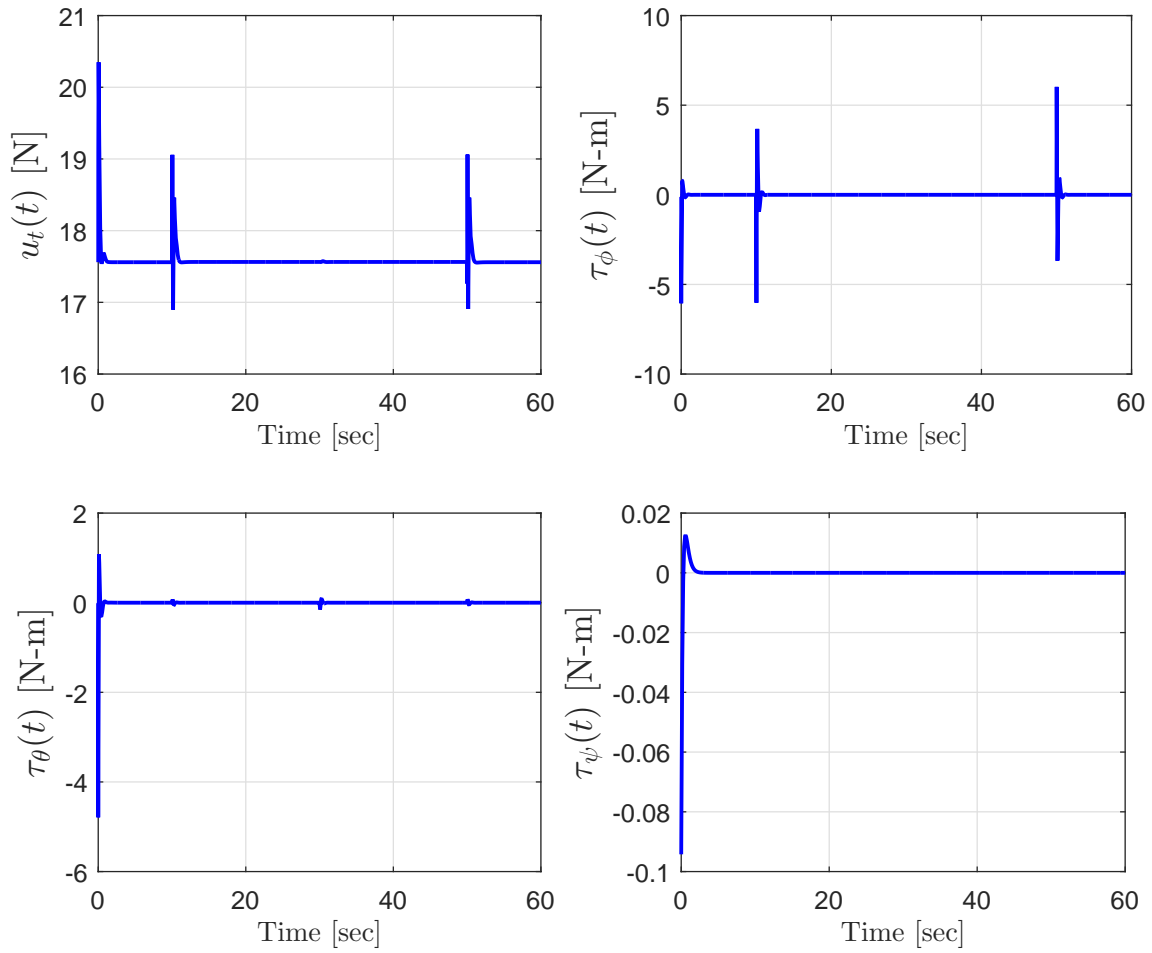


Figura 7.8: Entradas de control.

Capítulo 8

Conclusión

En el presente trabajo de investigación se estudió y aplicó la metodología de control por inmersión e invariancia que presenta una alternativa en el diseño de controladores para sistemas no lineales. La idea fundamental del enfoque I&I consiste en sumergir la dinámica de la planta dentro de un sistema objetivo de menor orden que capture el comportamiento deseado. Se estudiaron las principales características de la metodología, el teorema fundamental de estabilización y su relación con otras técnicas de control. En particular, en el presente trabajo de tesis se aplicó la metodología I&I en el diseño de controladores para robots manipuladores donde se diseñaron dos leyes de control para el caso de control de posición y una ley de control para el caso de control de movimiento y de lo cual las estructuras de las leyes de control resultantes son similares a la estructura de los controladores tipo PD más compensación de gravedad, PD más compensación precalculada de gravedad y el control por par-calculado, con la diferencia fundamental de que las ganancias del controlador presentan un enfoque diferente para su sintonización.

Por otro lado, se utilizó la metodología I&I para el diseño de una ley de control de posición para estabilizar el equilibrio cero del sistema con modelo normalizado de una aeronave PVTOL, el cual es un sistema de fase no mínima. El controlador diseñado toma en cuenta la naturaleza positiva de la entrada de control de empuje y el ángulo de alabeo no se encuentra restringido en alguna región de trabajo como en otros enfoques. Se diseñó además una ley de control de estabilización para el sistema aeronave PVTOL que, en contraste con trabajos previos, cuenta con la característica particular de dar prioridad a la estabilización de la altura por sobre la estabilización del desplazamiento lateral, lo que le brinda al controlador la cualidad de producir maniobras de alabeo menos agresivas y requerir menor esfuerzo de la entrada de control de empuje para realizar la tarea. Adicionalmente, el esquema de control propuesto es globalmente asintóticamente estable.

También se diseñó un controlador de seguimiento de trayectorias para un vehículo aéreo tipo quadrotor. En contraste con trabajos previos, el controlador es desarrollado utilizando la metodología I&I en todos los niveles de diseño, en forma anidada y sin la necesidad de utilizar funciones de Lyapunov. A diferencia de la mayoría de los trabajos reportados en la literatura, el esquema de control aquí propuesto no es desacoplado en dos partes; a saber, una parte para el lazo interno de control de la orientación y la otra para el lazo externo de control de la posición, además el uso de entradas de control virtual no fue requerido. En lugar de ello, el sistema de control basado en I&I toma otro enfoque al hacer uso de la naturaleza estructural del sistema quadrotor mediante la selección del sistema aeronave PVTOL como el sistema dinámico objetivo, explotando con esto la formulación I&I.

Anexo A

Artículos publicados

Como resultado del presente trabajo de tesis se redactaron y publicaron los siguientes artículos científicos:

- Fernando Castañeda, Francisco Jurado y Víctor Santibáñez. Control de Movimiento de Robots Manipuladores: Casos Particulares. *Congreso Nacional de Control Automático*, págs. 339-345, Cuernavaca, Morelos, México; octubre 2015, AMCA.
- Fernando Hernández-Castañeda, Francisco Jurado y Víctor Santibáñez. Control de Postura para un Vehículo Espacial vía Inmersión e Invariancia. *Congreso Nacional de Control Automático*, Santiago de Querétaro, Querétaro, México; septiembre 2016, AMCA.
- Fernando Hernández-Castañeda, Víctor Santibáñez y Francisco Jurado. Control de estabilización para el sistema PVTOL vía Inmersión e Invariancia. *XVIII Congreso Mexicano de Robótica*, Mazatlán, Sinaloa, México; noviembre 2016, AMRob.
- Fernando Hernández-Castañeda, Víctor Santibáñez and Francisco Jurado. Priority Altitude PVTOL Aircraft Control via Immersion and Invariance. *International Journal of Control*, 2018.

El siguiente artículo aún sin publicar se redactó en base al estudio descrito en el capítulo 7 y se encuentra en revisión por los directores del presente estudio de tesis.

- Fernando Hernández-Castañeda, Víctor Santibáñez and Francisco Jurado. Nonlinear Immersion and Invariance Nested Tracking Control for a Quadrotor Aircraft.

Las siguientes páginas dan muestra de los artículos mencionados anteriormente.



Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2015, Cuernavaca, Morelos, México.

339

Control de Movimiento de Robots Manipuladores vía Inmersión e Invariancia: Casos particulares

Fernando Castañeda, Francisco Jurado, Víctor Santibáñez *

* *Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de la Laguna, Blvd. Revolución y Calzada Cuauhtémoc S/N, C.P. 27000, Torreón, Coahuila de Zaragoza, México.*
(e-mail:[jfcastaneda][fjurado][vsantiba]@itl.laguna.edu.mx)

Resumen: El objetivo del presente trabajo es mostrar cómo la metodología Inmersión e Invariancia (I&I) aplicada para el caso de control de robots manipuladores resulta ser más general en el sentido que se pueden obtener leyes de control de movimiento con estructura similar a las leyes de control clásicas para robots manipuladores sin la necesidad de recurrir al análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov para el sistema completo. En el presente trabajo, el principio fundamental para la obtención de las leyes de control estabilizadoras por realimentación de estados vía I&I se centra en la selección de la dinámica objetivo como un sistema lineal y desacoplado dependiente únicamente de los errores articulares. El desempeño de los controladores I&I es validado mediante simulación.

Palabras Clave: Control no lineal, inmersión, invariancia, robots manipuladores.

1. INTRODUCCIÓN

Recientemente, una metodología para el diseño de controladores no lineales y controladores adaptables para sistemas no lineales basada en las nociones de inmersión del sistema a controlar (Nijmeijer and van der Schaft, 1990; Isidori, 1995; Byrnes et al., 1997) e invariancia de una variedad diseñada con características particulares (Nijmeijer and van der Schaft, 1990; Wiggins, 1990; Isidori, 1995), las cuales son herramientas clásicas de la teoría de regulación no lineal y control geométrico no lineal (Wonham, 1985; Jouan, 2003), ha sido reportada en la literatura como *Inmersión e Invariancia* (I&I) (*Immersion and Invariance*, I&I) (Astolfi et al., 2002; Astolfi and Ortega, 2003; Astolfi et al., 2008).

El desarrollo de la teoría de control geométrico lineal y no lineal ha demostrado que los subespacios invariantes y sus contrapartes no lineales como distribuciones invariantes juegan un papel fundamental en la solución de muchos problemas de diseño. Variedades invariantes lentas y rápidas, las cuales surgen de manera natural en los sistemas con perturbaciones singulares, han sido utilizadas para estabilización (Kokotovic, 1985) y análisis de sistemas de adaptación lenta (Riedle and Kokotovic, 1986). La noción de variedades invariantes es además crucial en el diseño de leyes de control estabilizadoras para sistemas no lineales. La teoría de variedad central (Carr, 1981) ha sido instrumento en el diseño de leyes de control estabilizadoras para sistemas con aproximación lineal no controlable (Aeyels, 1985) mientras que el concepto de dinámica cero y la fuertemente relacionada noción de variedad cero han sido explotadas en diversos métodos de estabilización local y global, incluyendo el control basado en pasividad (Ortega et al., 1998), *backstepping* (Krstic et al., 1995) y *forwarding*

(Sepulchre et al., 1996). La noción de inmersión tiene además una larga tradición en la teoría de control, su idea básica es la de transformar el sistema en consideración a un sistema con propiedades específicas. Por ejemplo, el problema clásico de inmersión de un sistema no lineal genérico dentro de un sistema lineal y controlable por medio de una realimentación de estados estática o dinámica ha sido extensamente estudiada en (Nijmeijer and van der Schaft, 1990; Isidori, 1995). Más recientemente, la inmersión ha sido usada en la teoría del regulador no lineal en la obtención de condiciones necesarias y suficientes para regulación robusta. En particular, en (Byrnes et al., 1997; Isidori, 1997) se demuestra que la regulación robusta puede conseguirse considerando que el exosistema pueda ser inmerso dentro de un sistema lineal y observable. En (Michel et al., 2001), se muestra que un sistema dinámico, posiblemente de dimensión infinita, tiene un equilibrio estable si este puede ser inmerso dentro de otro sistema dinámico con un equilibrio estable mediante el denominado mapeo de *preservación de estabilidad*. La estabilización vía I&I está además relacionada con el método de estabilización basado en pasividad (Byrnes et al., 1991; Ortega et al., 1998) y en la teoría de disipatividad (Byrnes et al., 1991).

En el presente artículo se presenta el estudio de la técnica I&I aplicada al control de *posición pura* y *control de movimiento* (seguimiento de trayectoria) para robots manipuladores. Del estudio en cuestión resulta interesante observar que se pueden obtener leyes de control con estructuras similares a las leyes de control clásicas para robots manipuladores, además, el enfoque utilizado para sintonizar las ganancias del controlador resulta ser diferente.



2. METODOLOGÍA I&I Y EL ENFOQUE CLÁSICO PARA EL CONTROL DE MOVIMIENTO DE ROBOTS MANIPULADORES

La idea básica del enfoque I&I es conseguir el objetivo de control mediante la inmersión de la dinámica de la planta dentro de un sistema objetivo, de orden menor, que capture el comportamiento deseado. El problema de control es luego reducido al diseño de una ley de control que garantice que el sistema controlado asintóticamente se comporte como el sistema objetivo. La metodología I&I requiere de la selección de un sistema dinámico objetivo, lo cual no es una tarea trivial ya que la solución del problema fundamental de diseño del control depende de tal selección. La selección de la dinámica objetivo lineal para sistemas físicos no es necesariamente la más adecuada, ya que, por un lado, los diseños realizables podrían tomar en cuenta las restricciones impuestas por la estructura física y, por el otro lado, es bien sabido que muchos de los sistemas físicos no son linealizables por realimentación. Este no es el caso cuando se aborda el estudio para el control de robots manipuladores ya que como se sabe, la ley de control por par calculado permite obtener un sistema lineal en lazo cerrado en términos de las variables de estado. El enfoque utilizado para estudiar y obtener controladores para robots manipuladores como es el caso del control PD más compensación pre-calculada de gravedad, PD más compensación de gravedad, el control PID y control por Par-Calculado entre otros, es seleccionar una ley de control basada en energía o linealizante que estabilizará al sistema, para lo cual después es necesario analizar la estabilidad del equilibrio en lazo cerrado utilizando la teoría de Lyapunov; en particular el llamado *segundo método de Lyapunov* para sistemas no lineales. El método I&I es más general que los métodos para obtener leyes de control basadas en la teoría de Lyapunov en el sentido que en éste último es necesario primero seleccionar una ley de control para posteriormente analizar la unicidad y estabilidad del equilibrio del sistema en lazo cerrado, por lo que la estabilidad es analizada para el sistema completo, lo cual la mayoría de las veces no resulta ser un tarea fácil. Por el contrario, el método I&I se aparta de este enfoque debido a que en éste se pretende obtener una ley de control estabilizadora cumpliendo con ciertas condiciones, *i.e.*, la ley de control surge al desarrollar la metodología y no es impuesta desde el inicio como en los métodos basados en Lyapunov para el control de robots manipuladores; sin embargo, esto no quiere decir que la teoría de estabilidad de Lyapunov no sea utilizada en esta metodología, de hecho, ésta se sigue utilizando pero no para analizar la estabilidad del sistema completo sino para analizar la estabilidad de algunos de los subsistemas que surgen al desarrollar la metodología I&I que pueden ser más fáciles de resolver.

3. INMERSIÓN E INVARIANCIA (I&I)

A continuación se exponen las condiciones fundamentales para la construcción de una ley de control por realimentación de estados, estática, globalmente asintóticamente estabilizadora para sistemas no lineales, las cuales son parte del resultado básico de la estabilización por I&I.

Además, consideraciones similares pueden plantearse para abordar el problema de seguimiento.

El principio de estabilización de un punto de equilibrio de un sistema no lineal vía I&I es mostrado en el siguiente teorema (Astolfi et al., 2008).

Teorema 1. Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y un punto de equilibrio $x^* \in \mathbb{R}^n$ a ser estabilizado. Suponga que existen mapeos suaves $\alpha : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $v : \mathbb{R}^{n \times (n-p)} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $p < n$, tales que sostengan lo siguiente:

(C1) *Sistema dinámico objetivo.* El sistema objetivo es definido por

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad (2)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^p$ tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\xi^* \in \mathbb{R}^p$ y

$$x^* = \pi(\xi^*).$$

(C2) *Condición de Inmersión.* Para todo ξ ,

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (3)$$

(C3) *Variedad implícita.* El conjunto identidad

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^p\} \quad (4)$$

se mantiene.

(C4) *Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones.* Todas las trayectorias del sistema

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)v(x, z)], \quad (5)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, z), \quad (6)$$

están acotadas y (5) posee un equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable en $z = 0 \in \mathbb{R}^{n-p}$, donde z representa el estado de la dinámica fuera de la variedad. Luego x^* es un equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \phi(x)). \quad (7)$$

◇

La prueba para este teorema puede examinarse en (Astolfi et al., 2008). Los resultados del teorema 1 son interpretados de la siguiente manera: Dado el sistema (1) y establecido el sistema (2), el objetivo es encontrar una variedad \mathcal{V} descrita implícitamente por $\{x \in \mathbb{R}^n | \phi(x) = 0\}$ y en forma parametrizada por $\{x \in \mathbb{R}^n | x = \pi(\xi)\}$, la cual pueda hacerse invariante y asintóticamente estable tal que la restricción en lazo cerrado del sistema para \mathcal{V} sea descrita por $\dot{\xi} = \alpha(\xi)$. Cabe resaltar que el control v que haga invariante la variedad no será único, ya que éste es únicamente definido solo sobre la variedad \mathcal{V} , *i.e.*, $v(\pi(\xi), 0) = c(\pi(\xi))$. De todos los posibles controles se deberá seleccionar aquel que lleve la coordenada z a cero y mantenga acotadas las trayectorias del sistema, *i.e.*, tal que la condición **(C4)** sea satisfecha.



Definición 1. Un sistema descrito por ecuaciones de la forma (1) con dinámica objetivo (2) se dice que es (localmente) I&I estabilizable si las condiciones (C1)-(C4) del teorema 1 se cumplen (localmente).

4. MODELO DINÁMICO DE ROBOTS MANIPULADORES

El modelo dinámico para robots manipuladores de n g.d.l. está descrito por la ecuación

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (8)$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares externos. Los vectores \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ representan las posiciones, velocidades y aceleraciones de las variables articulares del robot, respectivamente. El modelo dinámico (8) cuenta con propiedades que son de gran utilidad cuando se estudia la estabilidad del sistema en lazo cerrado con alguna ley de control $\boldsymbol{\tau}$. Algunas de estas propiedades son descritas a continuación.

Propiedad 1. Matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.

La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos son funciones solamente de \mathbf{q} . Existe una constante real positiva α tal que

$$M(\mathbf{q}) \geq \alpha I \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

donde I denota la matriz identidad de orden $n \times n$. La matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe y es definida positiva.

Propiedad 2. Matriz de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único. $C(\mathbf{q}, 0) = 0$ para todo vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está relacionada con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ por la expresión

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

y de hecho $\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica.

Propiedad 3. Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.

El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ de $n \times 1$ depende sólo de las posiciones articulares \mathbf{q} . El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está acotado si \mathbf{q} lo está también. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz, *i.e.*, existe una constante $k_g > 0$ tal que

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

5. CONTROL DE POSICIÓN VÍA I&I

El objetivo de control de posición para robots manipuladores consiste en encontrar una ley de control por realimentación de estados $\boldsymbol{\tau}$ tal que las trayectorias $\mathbf{q}(t)$ del sistema (8) en lazo cerrado sean iguales a las posiciones constantes deseadas de las variables articulares del robot manipulador, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)] = 0.$$

Para iniciar con el diseño del controlador vía I&I, es necesario definir el vector de error de posición articular

como $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ donde $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones deseadas constantes de las variables articulares del robot manipulador, luego, el modelo (8) puede expresarse en términos del vector de estado $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$. Aplicando la metodología I&I para el control de posición del sistema (9), se comienza por seleccionar el sistema dinámico objetivo para luego buscar satisfacer las suposiciones (C2)-(C4).

(C1) *Sistema dinámico objetivo.* Se establece el sistema objetivo

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K\boldsymbol{\xi} \quad (10)$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ y $K > 0$ es una matriz diagonal de diseño con coeficientes constantes, *i.e.*, $K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. El sistema (10) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\boldsymbol{\xi}^* = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(C2) *Condición de inmersión.* La condición de inmersión requiere de la selección de un mapeo entre los estados del sistema dinámico del robot manipulador y los estados del sistema objetivo. Este mapeo es definido como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

de donde se selecciona $\pi_1(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$, debido a que se desea que el comportamiento de las trayectorias del vector de errores articulares sea el mismo que el definido por el sistema (10), *i.e.*, que las trayectorias tengan un comportamiento exponencial decreciente. Sustituyendo el mapeo conocido $\pi_1(\boldsymbol{\xi})$ en (9) como se describe en (3) se tiene

$$\pi_2(\boldsymbol{\xi}) = K\boldsymbol{\xi},$$

con lo que el mapeo $\pi(\boldsymbol{\xi})$ queda definido completamente como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ K\boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}.$$

(C3) *Variedad Implícita.* Se define el siguiente conjunto identidad

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} | \phi(\mathbf{x}) = 0 \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} | \tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\xi}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = K\boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \}$$

de donde se satisface que el orden del sistema dinámico objetivo (10) es menor que el orden del sistema (9). Ahora, una función $\phi(\mathbf{x})$ que cumple con el conjunto identidad definido anteriormente puede ser

$$\phi(\mathbf{x}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - K\tilde{\mathbf{q}} = 0$$

con lo que queda definida por completo la variedad \mathcal{V} .

(C4) *Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones.* Se define la siguiente coordenada

$$\mathbf{z} \triangleq \phi(\mathbf{x}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - K\tilde{\mathbf{q}}$$

donde la derivada de \mathbf{z} a lo largo de las trayectorias del sistema (9) queda definida como

$$\dot{\mathbf{z}} = M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] + K\dot{\tilde{\mathbf{q}}}. \quad (11)$$

Luego, habrá de seleccionarse una entrada de control $\boldsymbol{\tau}$ tal que el subsistema (11) tenga un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = 0$$



y que las trayectorias del sistema resultante estén acotadas. Para esto, observe que si τ es seleccionada como

$$\tau = -\Gamma z + g(q) \quad (12)$$

donde $\Gamma > 0$ es una matriz diagonal de diseño con coeficientes constantes, $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, con esta elección el sistema (9) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z - K\tilde{q} \\ M(q)^{-1} [-\Gamma z - C(q, z + K\tilde{q})(z + K\tilde{q})] \\ M(q)^{-1} [-\Gamma z - C(q, z + K\tilde{q})(z + K\tilde{q})] + K[z + K\tilde{q}] \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Ahora, observe que el subsistema dinámico

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z - K\tilde{q} \\ M(q)^{-1} [-\Gamma z - C(q, z + K\tilde{q})(z + K\tilde{q})] + K[z + K\tilde{q}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

representa una ecuación diferencial autónoma, debido a que q_d es constante, cuyo equilibrio se encuentra en el origen y es único. Para demostrar la estabilidad del equilibrio de este subsistema se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{q}, z) = \frac{1}{2}[z + K\tilde{q}]^T M(q)[z + K\tilde{q}] + \frac{1}{2}\tilde{q}^T \Gamma K \tilde{q}$$

donde $V(\tilde{q}, z) > 0$ es una función definida positiva y la derivada temporal $\dot{V}(\tilde{q}, z)$ a lo largo de las trayectorias del subsistema (14) resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, z) = & \frac{1}{2}[z + K\tilde{q}]^T \dot{M}(q)[z + K\tilde{q}] \\ & + [z + K\tilde{q}]^T M(q) \left[M(q)^{-1} [-\Gamma z - C(q, z + K\tilde{q})(z + K\tilde{q})] + K[z + K\tilde{q}] \right] \\ & - [z + K\tilde{q}]^T M(q) K [z + K\tilde{q}] - \tilde{q}^T \Gamma K [z + K\tilde{q}]. \end{aligned}$$

Simplificando se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, z) = & \frac{1}{2}[z + K\tilde{q}]^T \dot{M}(q)[z + K\tilde{q}] - [z + K\tilde{q}]^T \Gamma z \\ & - [z + K\tilde{q}]^T C(q, z + K\tilde{q})[z + K\tilde{q}] - \tilde{q}^T \Gamma K [z + K\tilde{q}]. \end{aligned}$$

Utilizando la Propiedad 2 y desarrollando términos finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, z) = & -[z + K\tilde{q}]^T \Gamma [z + K\tilde{q}], \\ \dot{V}(\tilde{q}, z) \leq & -\lambda_{\min}\{\Gamma\} \|z + K\tilde{q}\|^2; \end{aligned}$$

con lo que se concluye que el subsistema (14) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen. Resta ahora solo demostrar que las trayectorias de $\tilde{q}(t)$ están acotadas; para esto observe que debido a la conclusión anterior se tiene $\tilde{q}(t), z(t) \in \mathcal{L}_\infty \cup \mathcal{L}_2$. Utilizando luego la definición de $z(t) = \dot{q} - K\tilde{q}$ se concluye que $\dot{q}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, lo que cumple con la condición (C4) del teorema 1. De la ley de control (12), si se sustituye la coordenada z según su definición se obtiene

$$\tau = \Gamma K \tilde{q} - \Gamma \dot{q} + g(q),$$

ley de control que tiene la estructura de la conocida ley de control PD más compensación de gravedad, con la diferencia de que las ganancias proporcional y derivativa son definidas de diferente manera según el enfoque que le imprime la metodología I&I.

Si ahora la ley de control es redefinida como

$$\tau = -\Gamma z + g(q_d) \quad (15)$$

y las definiciones (C1)-(C3) anteriores son consideradas nuevamente, luego el sistema dinámico (9) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} = & -z - K\tilde{q} \\ \dot{q} = & M(q)^{-1} [-\Gamma z - C(q, z + K\tilde{q})(z + K\tilde{q}) + g(q_d) - g(q)] \\ \dot{z} = & M(q)^{-1} [-\Gamma z - C(q, z + K\tilde{q})(z + K\tilde{q}) + g(q_d) - g(q)] + K[z + K\tilde{q}]. \end{aligned}$$

Utilizando el siguiente subsistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z - K\tilde{q} \\ M(q)^{-1} [-\Gamma z - C(q, z + K\tilde{q})(z + K\tilde{q})] \\ + g(q_d) - g(q) + K[z + K\tilde{q}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

se observa que (16) es un sistema no lineal autónomo, el cual tiene un equilibrio en el origen $[\tilde{q}^T z^T]^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Sin embargo, aparte del origen pueden existir otros equilibrios los cuales pueden ser tantos como soluciones de \tilde{q} tenga la ecuación

$$\Gamma K \tilde{q} = g(\tilde{q} - q_d) - g(q_d). \quad (17)$$

Aunque aquí no se demuestra, si ΓK se escoge suficientemente "grande" entonces $\tilde{q} = 0 \in \mathbb{R}^n$ será la única solución. Esta condición surge de la aplicación del teorema de contracción de mapas a la ecuación (17), donde se concluye que si $\lambda_{\min}\{\Gamma K\} > k_g$ (Kelly and Santibañez, 2003) entonces la única solución será $\tilde{q} = 0 \in \mathbb{R}^n$, por consiguiente el origen del subsistema (16) será el único equilibrio. Suponga que se selecciona $\lambda_{\min}\{\Gamma K\} > k_g$, entonces se propone la siguiente función candidata de Lyapunov para analizar la estabilidad del origen del subsistema (16) como

$$V(\tilde{q}, z) = \frac{1}{2}[z + K\tilde{q}]^T M(q)[z + K\tilde{q}] + f(\tilde{q})$$

con

$$f(\tilde{q}) = \frac{1}{2}\tilde{q}^T \Gamma K \tilde{q} + \mathcal{U}(q_d - \tilde{q}) - \mathcal{U}(q_d) + g(q_d)^T \tilde{q}$$

donde $f(\tilde{q})$ es una función definida positiva de forma global si $\lambda_{\min}\{\Gamma K\} > k_g$ (Kelly and Santibañez, 2003). Luego $V(\tilde{q}, z)$ es una función definida positiva en forma global cuya derivada a lo largo de las trayectorias del subsistema (16) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, z) = & \frac{1}{2}[z + K\tilde{q}]^T \dot{M}(q)[z + K\tilde{q}] \\ & - [z + K\tilde{q}]^T \Gamma \\ & - [z + K\tilde{q}]^T C(q, z + K\tilde{q})[z + K\tilde{q}] \\ & + [z + K\tilde{q}]^T [g(q_d) - g(\tilde{q} - q_d)] \\ & - \tilde{q}^T \Gamma K [z + K\tilde{q}] + [z + K\tilde{q}]^T \frac{\partial \mathcal{U}(q_d - \tilde{q})}{\partial (q_d - \tilde{q})} \\ & - [z + K\tilde{q}]^T g(q_d). \end{aligned}$$

Considerando la Propiedad 2 de antisimetría de $\dot{M}(q)$ y $C(q, \dot{q})$ y el hecho de que $\frac{\partial \mathcal{U}(q_d - \tilde{q})}{\partial (q_d - \tilde{q})} = g(\tilde{q} - q_d)$, finalmente se obtiene

$$\dot{V}(\tilde{q}, z) = -[z + K\tilde{q}]^T \Gamma - \tilde{q}^T \Gamma K [z + K\tilde{q}]$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, z) = & -[z + K\tilde{q}]^T \Gamma [z + K\tilde{q}], \\ \dot{V}(\tilde{q}, z) \leq & -\lambda_{\min}\{\Gamma\} \|z + K\tilde{q}\|^2; \end{aligned}$$

con lo que se concluye que el subsistema (16) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen. Solo resta demostrar que las trayectorias de $\tilde{q}(t)$ están acotadas. Para esto, observe que debido a la conclusión anterior $\tilde{q}(t), z(t) \in \mathcal{L}_\infty \cup \mathcal{L}_2$ y utilizando la definición de $z(t) = \dot{q} - K\tilde{q}$ se concluye además que $\dot{q}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, lo que cumple con la condición (C4) del teorema 1.

6. CONTROL DE MOVIMIENTO VÍA I&I

Para comenzar con el diseño del controlador de movimiento para robots manipuladores es necesario aplicar una



transformación de coordenadas al sistema (8), para esto es definido el vector de error \mathbf{e} como

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} q_d - q \\ \dot{q}_d - \dot{q} \end{bmatrix}$$

donde $q_d \in \mathbb{R}^n$ y $\dot{q}_d \in \mathbb{R}^n$ representan la posición y velocidad deseada de las variables articulares variantes en el tiempo, respectivamente. El modelo dinámico (8) puede representarse en términos del vector de estado $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{2n}$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \ddot{q}_d - M(q_d - \tilde{q})^{-1}[\boldsymbol{\tau} - C(q_d - \tilde{q}, \dot{q}_d - \dot{\tilde{q}})(\dot{q}_d - \dot{\tilde{q}}) - g(q_d - \tilde{q})] \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde $\ddot{q}_d \in \mathbb{R}^n$ es la aceleración deseada de las variables articulares del robot manipulador. Ahora, considere el modelo para robots manipuladores en espacio de estados descrito por (18). El objetivo de control de movimiento consiste en encontrar una ley de control por realimentación de estados $\boldsymbol{\tau}$ tal que dado un conjunto de funciones vectoriales acotadas $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$, las trayectorias de $q(t)$ sigan con precisión las trayectorias de $q_d(t)$, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0. \quad (19)$$

Si el objetivo de control se verifica, significará que las articulaciones del robot manipulador siguen asintóticamente la trayectoria de movimiento deseado.

A continuación se describe el diseño de una ley de control por realimentación de estados que cumple el objetivo de control anteriormente expuesto utilizando la metodología I&I.

Proposición 1. El sistema (18) del robot manipulador es globalmente I&I estabilizable con dinámica objetivo

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K\boldsymbol{\xi}$$

y ley de control

$$\boldsymbol{\tau} = M(q_d - \tilde{q})[-\Gamma\mathbf{z} - K\dot{\tilde{q}} + C(q_d - \tilde{q}, \dot{q}_d - \dot{\tilde{q}})(\dot{q}_d - \dot{\tilde{q}}) + g(q_d - \tilde{q})]$$

con $\mathbf{z} = \dot{\tilde{q}} - K\tilde{q}$, donde K y Γ son matrices de diseño del controlador.

Prueba 1. Aplicando la formulación propuesta en el teorema 1, se comienza por seleccionar la dinámica objetivo.

(C1) Sistema dinámico objetivo. El enfoque clásico de la teoría de control no lineal es transformar un sistema no lineal en uno lineal, con esto en mente se define el siguiente sistema dinámico objetivo

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -K\boldsymbol{\xi} \quad (20)$$

donde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ y $K > 0$ es una matriz diagonal de coeficientes constantes $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ y el sistema (20) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

(C2) Condición de inmersión. Se define el siguiente mapeo

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \pi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \pi_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde el mapeo $\pi_1(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$ es seleccionado debido a que se desea que la coordenada \tilde{q} , que es el vector asociado al error de posición articular, se comporte como el sistema dinámico objetivo (20), *i.e.*, que presente un comportamiento exponencial decreciente, por lo que solo resta encontrar el mapeo $\pi_2(\boldsymbol{\xi})$ aplicando la formulación descrita en (3).

Sustituyendo (21) en (18) tenemos

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \pi_2(\boldsymbol{\xi}), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_2(\boldsymbol{\xi}) &= \ddot{q}_d - M(q_d - \boldsymbol{\xi})^{-1}[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\xi}) \\ &\quad - C(q_d - \boldsymbol{\xi}, \dot{q}_d - \pi_2(\boldsymbol{\xi}))(\dot{q}_d - \pi_2(\boldsymbol{\xi})) - g(q_d - \boldsymbol{\xi})]; \end{aligned} \quad (23)$$

donde se observa de la primera ecuación que $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ es conocida, por lo que sustituyendo (20) en (22) resulta

$$-K\boldsymbol{\xi} = \pi_2(\boldsymbol{\xi}). \quad (24)$$

De (24) se observa que

$$\pi_2(\boldsymbol{\xi}) = -K\boldsymbol{\xi},$$

por lo que ahora el mapeo $\pi(\boldsymbol{\xi})$ es definido por completo como

$$\pi(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ -K\boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

cumpliendo con la condición descrita en **(C2)** del teorema 1.

(C3) Variedad implícita. Acorde a la identidad (4) se define la siguiente variedad implícita

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\triangleq \{e \in \mathbb{R}^{2n} | \phi(e) = 0\} = \\ &\{e \in \mathbb{R}^{2n} | \tilde{q} = \boldsymbol{\xi}, \dot{\tilde{q}} = -K\boldsymbol{\xi} \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n\}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde se satisface que $n < 2n$, *i.e.*, el orden del sistema dinámico objetivo (20) es menor que el orden del sistema (18).

Luego, si el vector \mathbf{e} es descrito por los siguientes componentes

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \in \mathbb{R}^n \\ \dot{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^n \end{bmatrix}, \quad (27)$$

la siguiente ecuación

$$\phi(e) = \dot{\tilde{q}} - \pi_2(\pi_1^{-1}(\tilde{q})) = 0 \quad (28)$$

cumple con las condiciones descritas en la definición (26). Sustituyendo en (28) el mapeo inverso $\pi_1^{-1}(\cdot)$ obtenido de (25) se tiene

$$\phi(e) = \dot{\tilde{q}} - \pi_2(\tilde{q}) = 0.$$

Luego, sustituyendo $\pi_2(\cdot)$ de (25) resulta

$$\phi(e) = \dot{\tilde{q}} + K\tilde{q} = 0 \quad (29)$$

con lo que queda definida la variedad \mathcal{V} de forma explícita.

(C4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones. La dinámica fuera de la variedad se obtiene a partir de la siguiente definición

$$\mathbf{z} \triangleq \phi(e)$$

con $\phi(e)$ como se obtuvo de (29), donde la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (18) resulta como

$$\dot{\mathbf{z}} = \ddot{\tilde{q}} + K\dot{\tilde{q}}. \quad (30)$$

Sustituyendo (18) en (30) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \ddot{q}_d - M(q_d - \tilde{q})^{-1}[\boldsymbol{\tau} \\ &\quad - C(q_d - \tilde{q}, \dot{q}_d - \dot{\tilde{q}})(\dot{q}_d - \dot{\tilde{q}}) - g(q_d - \tilde{q})] \\ &\quad + K\dot{\tilde{q}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Luego, habrá de seleccionarse una entrada de control $\boldsymbol{\tau}$ tal que el subsistema (31) tenga un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = 0,$$

y que las trayectorias del sistema resultante estén acotadas. Para este fin, se selecciona de todos los posibles

controladores que estabilicen el sistema (31) la siguiente ley de control

$$\tau = M(q_d - \tilde{q})[\ddot{q}_d + \Gamma z + K \dot{\tilde{q}}] + C(q_d - \tilde{q}, \dot{q}_d - \dot{\tilde{q}})[\dot{q}_d - \dot{\tilde{q}}] + g(q_d - \tilde{q}) \quad (32)$$

donde Γ es una matriz diagonal de diseño con coeficientes constantes, *i.e.*, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Esta elección surge al igualar la parte derecha de (31) con $-\Gamma z$ y debido a que $M(q_d - \tilde{q})$ es una matriz definida positiva y por lo tanto invertible (Propiedad 1) es posible despejar la entrada de control τ , lo que conduce a la dinámica

$$\dot{z} = -\Gamma z \quad (33)$$

donde se observa por las propiedades de la matriz de diseño Γ que (33) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen. Ahora bien, al sustituir (32) en (18) se obtiene el siguiente subsistema en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -K \dot{\tilde{q}} - \Gamma z \\ -\Gamma z \end{bmatrix} \quad (34)$$

en función de las coordenadas (e, z) , donde es fácil observar que las trayectorias de $z(t)$ están acotadas y tienden a cero de forma exponencial, por lo que la dinámica de la coordenada $\dot{\tilde{q}}(t)$ en algún momento en el tiempo solo dependerá del término $-K \dot{\tilde{q}}$, el cual debido a las propiedades de diseño de la matriz K permitirá que las trayectorias de $\dot{\tilde{q}}(t)$ estén acotadas y, más aún, tiendan a cero; por lo que también las trayectorias de $\tilde{q}(t)$ se mantendrán acotadas debido a su dependencia directa con la coordenada $\dot{\tilde{q}}$, con lo que la condición (C4) del teorema 1 es satisfecha y de esta manera se cumple con la prueba de la Proposición 1.

7. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Con el fin de ilustrar el comportamiento de las leyes de control (12), (15) y (32), se evaluaron simulaciones utilizando el modelo matemático de un robot manipulador de 2 g.d.l. La Fig. 1 muestra el diagrama esquemático del robot manipulador del modelo en cuestión. El modelo dinámico del robot manipulador como en (8) es obtenido en (Kelly and Santibañez, 2003) y descrito como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}}_{M(q)} \ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}}_{C(q, \dot{q})} \dot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}}_{g(q)} = \tau$$

donde

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(q) = m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2$$

$$M_{21}(q) = m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0$$

$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2)$$

$$g_2(q) = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

Las condiciones iniciales correspondientes a las posiciones y velocidades articulares son seleccionadas como

$$\tilde{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\tilde{q}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

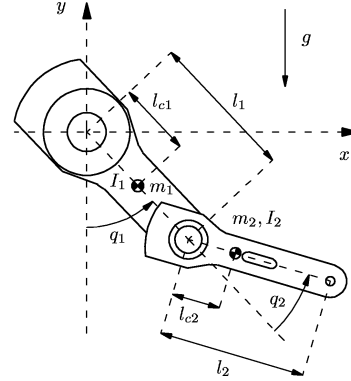


Figura 1. Diagrama esquemático de un brazo robot manipulador de 2 g.d.l.

Para la simulación de las leyes de control de posición (12) y (15) se definieron los valores $q_d = [\pi/4 \ \pi/20]^T$ para la posición deseada de las articulaciones del robot manipulador así como $K = \text{diag}\{4, 5\}$, $\Gamma = \text{diag}\{30, 15\}$, $K_p = \text{diag}\{120, 81\}$ y $K_v = \text{diag}\{35, 15\}$ para las ganancias de los controladores. Para el caso del controlador de movimiento (32) se establecieron los valores $K = \text{diag}\{20\}$ y $\Gamma = \text{diag}\{40\}$ para las ganancias de los controladores y para el caso del controlador Par Calculado clásico se utilizaron $K_p = \text{diag}\{900\}$ y $K_v = \text{diag}\{60\}$. Las Figs. 2-4 muestran una comparación del desempeño de los controladores (12), (15) y (32), aquí obtenidos, con respecto a los controladores clásicos. Como era de esperarse, el comportamiento de estas leyes de control es similar entre sí pero con la diferencia fundamental de que las ganancias de los controladores son seleccionadas de forma diferente, *i.e.*, primero es seleccionada la razón de decaimiento exponencial para el comportamiento del error mediante la ganancia K y después se establece la velocidad con la que el sistema se comportará como el sistema objetivo mediante la ganancia Γ .

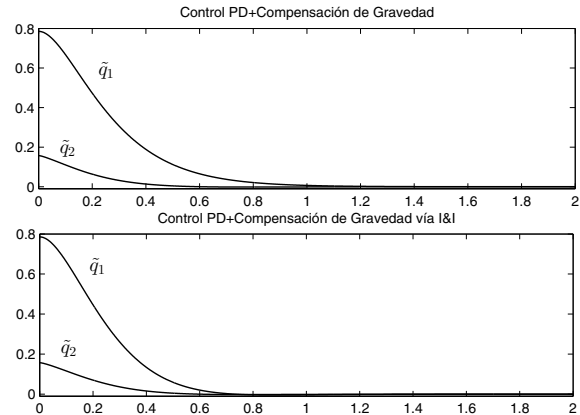


Figura 2. Errores de posición [rad vs seg].

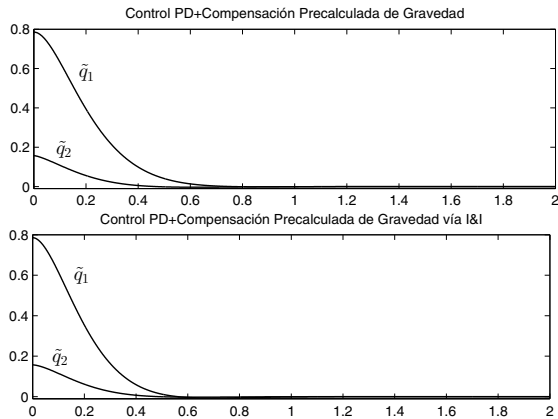


Figura 3. Errores de posición [rad vs seg].

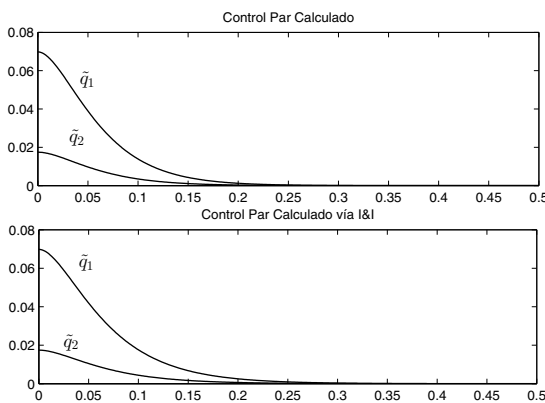


Figura 4. Errores de posición [rad vs seg].

8. CONCLUSIÓN

Se ha empleado la metodología I&I para el control de robots manipuladores. Para el caso de control de posición se obtuvieron leyes de control (12) y (15) con la estructura de los controladores PD más compensación de gravedad y PD más compensación pre-calculada de gravedad, pero con la diferencia fundamental de que las ganancias Γ y K de los controladores tienen un enfoque diferente de sintonía. Para el caso de control de movimiento, se obtuvo una ley de control (32) con la estructura del controlador Par Calculado, también con la diferencia particular de que las ganancias del controlador son sintonizadas con otro enfoque. Esto permite concluir que con la metodología I&I es posible obtener algunas de las leyes de control clásicas para el control de robots manipuladores.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico otorgado mediante la beca de estudios y el proyecto CONACyT 134534 y Proyectos TecNM.

REFERENCIAS

- Aeyels, D. (1985). Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. *Systems & Control Letters*, 5(5), 289–294.
- Astolfi, A., Escobar, G., Ortega, R., and Stankovic, A. (2002). An adaptive controller for the tcsc based on the immersion and invariance design technique. *In Proc. 14th Conf. Power Systems Computation, Seville, Spain*.
- Astolfi, A., Karagiannis, D., and Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag London Ltd., London.
- Astolfi, A. and Ortega, R. (2003). Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 48(4), 590–606.
- Byrnes, C., Isidori, A., and Willems, J. (1991). Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(11), 1228–1240.
- Byrnes, C., Priscoli, F.D., and Isidori, A. (1997). *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser, Boston.
- Carr, J. (1981). *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 3rd edition, Berlin.
- Isidori, A. (1997). A remark on the problem of semiglobal nonlinear output regulation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 42(12), 1734–1738.
- Jouan, P. (2003). Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM J. Control and optimization*, 41(6), 1756–1778.
- Kelly, R. and Santibañez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Education, Madrid.
- Kokotovic, P. (1985). Recent trends in feedback design: an overview. *Automatica*, 21(3), 225–236.
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotovic, P. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, New York.
- Michel, A., Wang, K., and Hu., B. (2001). *Qualitative Theory of Dynamical Systems: The Role of Stability Preserving Mappings*. Marcel Dekker, 2nd edition, New York.
- Nijmeijer, H. and van der Schaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag.
- Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P., and Sira-Ramírez, H. (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag, London.
- Riedle, B. and Kokotovic, P. (1986). Integral manifolds of slow adaptation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 31(4), 316–324.
- Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P. (1996). *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, Berlin.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York.
- Wonham, W. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer-Verlag, 3rd edition.

Control de Postura para un Vehículo Espacial vía Inmersión e Invariancia

Fernando Hernández-Castañeda, Francisco Jurado,
Víctor Santibáñez

*Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna,
Blvd. Revolución y Calzada Instituto Tecnológico de La Laguna S/N,
C.P. 27000, Torreón, Coahuila de Zaragoza, México.
(e-mail:[jfcastaneda][fjurado][vsantiba]@itlalaguna.edu.mx)*

Resumen: El control de seguimiento de postura (orientación) de un vehículo espacial con ruedas de reacción es abordado utilizando la metodología de Inmersión e Invariancia (I&I). Se describe el modelo cinemático y dinámico del vehículo espacial utilizando la representación de los ángulos de Euler para la postura de un cuerpo en el espacio. El sistema dinámico objetivo requerido por la metodología I&I es seleccionado como un sistema lineal y desacoplado dependiente únicamente de los errores de postura del vehículo espacial. La ley de control obtenida contiene un tipo de término PD y una compensación de la inercia del vehículo espacial, incluidas las ruedas de reacción. La prueba de estabilidad es simple y no requiere de una función de Lyapunov. El desempeño del controlador propuesto es validado mediante simulación.

Palabras Clave: Control no lineal, inmersión, invariancia, seguimiento, vehículo espacial.

1. INTRODUCCIÓN

Antes de abordar el tema principal de este artículo se dará una breve introducción de lo que es el control de postura de un vehículo espacial y lo que esto involucra con el fin de brindar una base para aquellos que no están familiarizados en el campo. Una nave espacial, vehículo espacial o astronave es un vehículo diseñado para operar más allá de la atmósfera terrestre, es decir, en el espacio exterior. Estos vehículos se utilizan para una gran variedad de propósitos entre los que se incluyen las comunicaciones, experimentación en el espacio exterior, exploración espacial, observaciones terrestres, meteorología, navegación, entre otros; suelen maniobrar a través de actuadores como motores a reacción, también conocidos como motores de propulsión a chorro de gas (*Gas-Jet*, **GJ**), ruedas de reacción (*Reaction Wheels*, **RWs**), pares magnéticos (*Magnetic Torques*, **MTs**) o giroscopios de control de momento (*Control Moment Gyros*, **CMGs**). Por otro lado, el movimiento de un vehículo espacial puede ser dividido en dos tipos: movimiento traslacional y movimiento rotacional. El movimiento traslacional describe el movimiento de un vehículo espacial en una órbita mientras que el movimiento rotacional describe la orientación (postura) del vehículo en el espacio con respecto a una referencia como el sol o una estrella en particular. Estos dos movimientos pueden desacoplarse entre sí, según el tipo de actuador empleado para la descripción del movimiento y la configuración del vehículo espacial. En este artículo se abordará únicamente el control de seguimiento de postura de un vehículo espacial que utiliza ruedas de reacción como actuadores. El control de postura es el proceso de orientar un cuerpo rígido en una dirección específica predeterminada y tiene importantes

aplicaciones; desde direccionar y orientar una aeronave, un helicóptero, un satélite o nave espacial hasta el control de orientación de un objeto sostenido por uno o varios brazos robóticos.

Los primeros estudios sobre el control de postura de un vehículo espacial fueron reportados por Meyer (1966a,b, 1968). Posteriormente, un análisis global sobre el problema de control de postura de un vehículo espacial fue reportado también por Meyer (1971), el cual se enfocaba en las representaciones apropiadas para la postura y adoptó un enfoque de Lyapunov, usó apropiadas funciones de Lyapunov basadas en energía para el análisis de sistemas de control cuyo comportamiento surge del análisis de sistemas Lagrangianos. Luego, varios trabajos fueron reportados sobre este tema como el de Crouch (1984), donde la teoría de control geométrico no lineal fue usada para el problema del control de postura de un vehículo espacial con ruedas de reacción, en cuyo documento se establecieron condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad del sistema para el caso en el que los actuadores tengan uno, dos o hasta tres pares independientes; estos tipos de problemas también han sido estudiados en Aeyels (1985) y Byrnes et al. (1988). Más tarde, el trabajo reportado por Wen and Kreutz-Delgado (1991) representaría un marco general para el análisis del problema de control de seguimiento de postura de un cuerpo rígido al definir como representación de postura global y no singular al cuaternión unitario y cuyo trabajo es visto como una extensión natural al trabajo reportado por Meyer (1971). Por otra parte, recientemente una metodología para el diseño de controladores no lineales y controladores adaptables para sistemas no lineales basada en las nociones de inmersión del sistema a controlar (Nijmeijer and van der Schaft, 1990; Isidori, 1995; Byrnes et al., 1997) e

Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2016, Querétaro, México, Septiembre 28-30, 2016

invariancia de una variedad diseñada con características particulares (Nijmeijer and van der Schaft, 1990; Wiggins, 1990; Isidori, 1995), las cuales son herramientas clásicas de la teoría de regulación no lineal y control geométrico no lineal (Wonham, 1985; Jouan, 2003), ha sido reportada en la literatura como Inmersión e Invariancia (*Immersion and Invariance, I&I*) (Astolfi et al., 2002; Astolfi and Ortega, 2003; Astolfi et al., 2008). Las nociones sobre inmersión e invariancia fueron empleadas en una versión adaptable en la solución al problema de seguimiento de postura para un modelo de cuerpo rígido de tres grados de libertad, completamente actuado, el cual considera la presencia de fuerzas externas desconocidas y en donde el diseño del controlador parte del modelo de cuerpo rígido descrito en la forma perturbada Hamiltoniana y de la propuesta de una función de energía en términos de los errores de seguimiento tanto para los ángulos de Euler como para el vector de velocidad angular (Astolfi et al., 2008). Luego, el control adaptable en cuestión fue considerado como parte de un sistema de control de vuelo para un vehículo aéreo autónomo; éste último sistema compuesto además por un controlador de seguimiento de trayectoria diseñado bajo la metodología I&I (Astolfi et al., 2008). Basándose también en la metodología I&I, Hu and Zhang (2015) diseñaron dos observadores para un sistema de control de postura de un cuerpo rígido, el primero destinado a la estimación de la velocidad angular y el segundo para la estimación de una constante de perturbación. La ley de control consistió en un simple control PD más una compensación de la perturbación, donde los estimados de la velocidad angular y la perturbación fueron usados directamente en la realimentación. En el presente artículo, continuando con el trabajo previo en lo referente al estudio de la metodología I&I (Castañeda et al., 2015), se aborda ahora el problema del control de seguimiento de postura para un vehículo espacial donde la metodología en cuestión es utilizada en la obtención de una ley de control para el sistema completo y que por la naturaleza propia en la que se desenvuelve el sistema no se consideraran momentos aerodinámicos externos.

La organización del presente artículo es descrita a continuación. En la sección 2 se exhiben las ecuaciones que describen la cinemática y dinámica de un vehículo espacial y se formula el problema de control. En la sección 3 se muestran los resultados preliminares sobre la metodología I&I y se establece el teorema usado como herramienta principal del enfoque por I&I. En la sección 4 se aborda el problema del control de seguimiento de postura de un vehículo espacial, gobernado mediante ruedas de reacción, utilizando el enfoque I&I. Los resultados en simulación referentes al desempeño del controlador propuesto son mostrados en la sección 5. Finalmente, las conclusiones se establecen en la sección 6.

2. MODELO DEL VEHÍCULO ESPACIAL

Un vehículo espacial es tratado como un cuerpo rígido en el espacio cuya postura puede describirse por un conjunto de ecuaciones llamadas ecuaciones de cinemática y dinámica o simplemente cinemática y dinámica del cuerpo. La cinemática relaciona la derivada temporal de las coordenadas de la posición angular (postura u orientación) con el vector de velocidad angular mientras

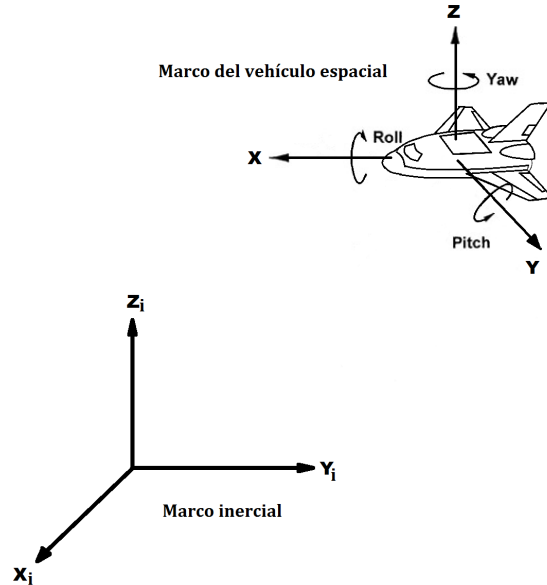


Figura 1. Vehículo espacial y los marcos de referencia.

que la dinámica describe la evolución temporal del vector de velocidad angular. Como se comentó anteriormente, un vehículo espacial puede ser maniobrado por diferentes tipos de actuadores, por lo que en este artículo se considera que el vehículo espacial es gobernado a través de tres ruedas de reacción colocadas a lo largo de un conjunto de tres ejes ortonormales. Luego, basados en estos ejes, se define un marco de referencia ortonormal arbitrario unido al vehículo espacial que llamaremos *marco del vehículo espacial*, cuyo origen no necesariamente es el centro de masa del sistema o sus ejes no necesariamente son los ejes principales del vehículo espacial. Para efectos de simplicidad aquí se supondrá que estos coinciden. Además, se define un *marco de referencia inercial* con respecto a las estrellas o alguna otra referencia que pueda ser considerada inercial durante la duración de la maniobra de cambio de postura como para un transbordador espacial. Ver figura 1.

2.1 Cinemática de cuerpo rígido

Las ecuaciones para la cinemática, las cuales relacionan la derivada temporal de las coordenadas para la posición angular con el vector de velocidad angular, pueden ser descritas de varias maneras y esto depende de las coordenadas que describen la posición angular (postura) del vehículo espacial. La representación de la postura de un vehículo espacial (cuerpo rígido) puede realizarse utilizando de tres a cuatro parámetros. Las técnicas de representación de postura que utilizan tres parámetros son los ángulos de Euler, el vector de Gibbs (*Cayley-Rodrigues parameters*) y los parámetros de Rodrigues modificados (*Modified Rodrigues parameters*), las cuales pueden exhibir orientaciones singulares debido a que la matriz Jacobiana en la ecuación cinemática puede resultar singular para algunas orientaciones. La representación

$$R(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

de postura utilizando cuatro parámetros está dada por el cuaternión unitario, el cual representa de forma global la postura de un cuerpo rígido sin caer en singularidades, sin embargo una ecuación de restricción es introducida con los cuatro parámetros. Por simplicidad, en el presente trabajo se utilizan los ángulos de Euler para la representación de la postura considerando que estos tienen un mayor significado físico en contraste con otras representaciones. Un estudio de estas representaciones para la postura es llevado a cabo en Shuster (1993).

La postura de un cuerpo rígido o sistema de partículas puede ser descrita mediante la representación clásica de los ángulos de Euler, la cual consiste de las rotaciones angulares consecutivas en dirección de giro con las agujas del reloj de los ángulos ϕ , θ y ψ (*cabeceo*, *alabeo* y *guiñada*) que alinean el marco inercial con el marco del vehículo espacial. En este caso la ecuación para la cinemática es descrita como

$$\dot{\gamma} = M(\gamma)\omega$$

donde $\gamma = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ es el vector de los ángulos de Euler, $\omega \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidad angular del vehículo espacial y

$$M(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix}.$$

Esta descripción es válida en la región $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Usando esta representación, el momento angular p del vehículo espacial puede ser obtenido como

$$p = R(\gamma)p_I$$

donde p_I es el momento angular constante del vehículo espacial y $R(\gamma)$ representa la matriz de transformación de coordenadas del marco inercial a las coordenadas del vehículo espacial. Ver ecuación (1).

2.2 Dinámica de cuerpo rígido

El modelo dinámico que describe la evolución en el tiempo de la velocidad angular de un vehículo espacial puede ser descrito como (Crouch, 1984; Slotine and Benedetto, 1990)

$$H\dot{\omega} = p \times \omega + \tau$$

donde $p \in \mathbb{R}^3$ es el momento angular total del vehículo espacial y $\tau \in \mathbb{R}^3$ es el vector de pares aplicado al vehículo espacial a través de las ruedas de reacción, todos expresados en coordenadas del vehículo espacial. H es la matriz de inercia de la nave, definida positiva, dada como

$$H = H^0 - H^A$$

donde H^0 es la matriz central de inercias total (nave espacial más ruedas de reacción) y H^A es la matriz diagonal de las inercias de las ruedas de reacción. El operador \times denota la operación de producto vectorial y la notación $[p \times]$ se refiere a la matriz antisimétrica definida por el producto vectorial con p

$$[p \times] = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En resumen, el conjunto de ecuaciones que describe la postura de un vehículo espacial puede escribirse en forma compacta como

$$\begin{aligned} H\dot{\omega} &= p \times \omega + \tau \\ \dot{x} &= J(x)\omega \end{aligned} \quad (2)$$

donde dependiendo de la representación utilizada para las ecuaciones de la cinemática, las componentes del vector x serán los parámetros del vector de Gibbs (*Cayley-Rodrigues parameters*), los parámetros de Rodrigues modificados (*Modified Rodrigues parameters*), la representación mediante el cuaternión unitario o los ángulos de Euler. En el presente trabajo, $x = \gamma = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ y $J(x) = M(\gamma)$.

2.3 Formulación del problema de control

De la definición del modelo dinámico y seleccionando cualquier tipo de representación de coordenadas para las ecuaciones de la cinemática, el problema de control de seguimiento de postura puede formularse como sigue: Considere el sistema descrito por (2), diferenciando la expresión \dot{x} y después de algunas simplificaciones la ecuación de movimiento de la nave en relación a las coordenadas de postura seleccionadas puede ser escrita como

$$D(x)\ddot{x} + C(x, \dot{x})\dot{x} = F \quad (3)$$

con

$$\begin{aligned} \tau &= J^T F, \\ D(x) &= J^{-T} H J^{-1}, \\ C(x, \dot{x}) &= -J^{-T} H J^{-1} \dot{J} J^{-1} - J^{-T} [p \times] J^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, el problema de control de seguimiento de postura consiste en encontrar una ley de control F tal que dependiendo de las coordenadas seleccionadas para la cinemática, la trayectoria de postura describa una trayectoria de postura deseada, *i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_d(t) - x(t)] = 0$$

con $x_d(t)$ una función suave de referencia.

3. INMERSIÓN E INVARIANCIA (I&I)

Con el objetivo de ser utilizadas en la sección siguiente, a continuación se exponen las condiciones fundamentales para la construcción de leyes de control por realimentación de estados, globalmente asintóticamente estabilizadoras para sistemas no lineales, las cuales son parte del resultado principal de la estabilización por I&I (Astolfi and Ortega, 2003).

El principio de estabilización de un punto de equilibrio de un sistema no lineal vía I&I se resume a través del siguiente teorema (Astolfi et al., 2008).

Teorema 1. Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y un punto de equilibrio $x^* \in \mathbb{R}^n$ a ser estabilizado. Suponga que existen mapeos suaves

Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2016, Querétaro, México, Septiembre 28-30, 2016

$\alpha : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$, $\pi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$, $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $v : \mathbb{R}^{n \times (n-s)} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $s < n$, tales que sostengan lo siguiente:

(C1) *Sistema dinámico objetivo*. El sistema objetivo es definido por

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad (5)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^s$ tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\xi^* \in \mathbb{R}^s$ y

$$x^* = \pi(\xi^*).$$

(C2) *Condición de inmersión*. Para todo ξ ,

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (6)$$

(C3) *Variedad implícita*. El conjunto identidad

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^s\} \quad (7)$$

se mantiene.

(C4) *Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones*. Todas las trayectorias del sistema

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} [f(x) + g(x)v(x, z)], \quad (8)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, z), \quad (9)$$

están acotadas y (8) posee un equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable en $z = 0 \in \mathbb{R}^{n-s}$, donde z representa el estado de la dinámica fuera de la variedad. Luego x^* es un equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \phi(x)). \quad (10)$$

◇

4. CONTROL DE POSTURA PARA UNA NAVE ESPACIAL VÍA I&I

En esta sección, el problema de control de un vehículo espacial gobernado a través de ruedas de reacción es abordado bajo el enfoque de la metodología I&I. Para este fin, se define una representación en espacio de estados del sistema como en (4) dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D(x)^{-1}[F - C(x, \dot{x})\dot{x}] \end{bmatrix}. \quad (11)$$

De la definición $x_e = x_d - x$ para el error de postura, el sistema (11) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_e \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \dot{x} \\ D(x_d - x_e)^{-1}[F - C(x_d - x_e, \dot{x})\dot{x}] \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde \dot{x}_d es la velocidad de la trayectoria deseada para la postura. Así, el enfoque I&I es aplicado al sistema (12) considerando el teorema 1. Hacia este fin, el sistema objetivo (5) es definido como sigue.

(C1) *Sistema objetivo*. El sistema dinámico objetivo es seleccionada como

$$\dot{\xi} = -K\xi, \quad (13)$$

donde K es una matriz diagonal definida positiva, $\xi \in \mathbb{R}^3$, la dimensión de este vector es debida a que se utilizarán los tres parámetros de Euler para la representación de la cinemática y el sistema tiene un equilibrio globalmente

asintóticamente estable en $\xi^* = 0$. El mapeo $\pi(\xi)$ es definido como

$$\begin{bmatrix} x_e \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \pi(\xi) = \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix}$$

donde el mapeo $\pi_1(\xi)$ es seleccionado debido a que se desea que la trayectoria del error de postura se comporte como el sistema objetivo (13).

(C2) *Condición de inmersión*. El mapeo restante $\pi_2(\xi)$ es obtenido de la condición de inmersión (6) como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \pi_2(\xi) \\ D(x_d - \xi)^{-1}[F - C(x_d - \xi, \pi_2(\xi))\pi_2(\xi)] \end{bmatrix}$$

donde usando $\dot{\xi} = \dot{x}_d - \pi_2(\xi)$ y la definición (13) el mapeo $\pi_2(\xi)$ resulta como

$$\pi_2(\xi) = \dot{x}_d + K\xi.$$

(C3) *Variedad implícita*. La variedad es definida de acuerdo con (7) como

$$\mathcal{M} = \{x_e, \dot{x} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(x_e, \dot{x}) = \dot{x} - \dot{x}_d - Kx_e = 0\} = \{x_e, \dot{x} \in \mathbb{R}^3 | x_e = \xi, \dot{x} = \dot{x}_d + K\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3\}$$

(C4) *Atractividad de la variedad y acotamiento de soluciones*. La coordenada fuera de la variedad es definida como

$$z \triangleq \varphi(x_e, \dot{x}).$$

Usando (8), la dinámica fuera de la variedad resulta

$$\dot{z} = D(x_d - x_e)^{-1}[F - C(x_d - x_e, \dot{x})\dot{x}] - \ddot{x}_d - K[\dot{x}_d - \dot{x}] \quad (14)$$

donde seleccionando F como

$$F = D(x_d - x_e)[- \Gamma z + \ddot{x}_d + K\dot{x}_d - K\dot{x}] + C(x_d - x_e, \dot{x})\dot{x} \quad (15)$$

con Γ una matriz diagonal definida positiva conduce a

$$\dot{z} = -\Gamma z, \quad (16)$$

cuyo sistema posee un equilibrio global y asintóticamente estable en el origen $z = 0 \in \mathbb{R}^3$. Finalmente, sólo resta demostrar que las trayectorias del sistema (9) están acotadas; para esto, sustituyendo (15) en (12) conduce al sistema en lazo cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_e \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \dot{x} \\ -\Gamma z + \ddot{x}_d + K\dot{x}_d - K\dot{x} \end{bmatrix}.$$

Luego, usando (16) y la definición $x_r = \dot{x}_d - \dot{x}$, el sistema se transforma en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ x_e \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma z \\ x_r \\ \Gamma z - Kx_r \end{bmatrix}.$$

Ahora, de la primera ecuación, $\dot{z} = -\Gamma z$, es fácil observar que $z \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$, lo que implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. De la tercer ecuación y considerando la conclusión anterior se tiene además $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_r = -Kx_r$, el cual es un sistema globalmente asintóticamente estable en el origen, lo que implica que $x_r \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$. Así, de esta conclusión y de la segunda ecuación, $\dot{x}_e = x_r$, se puede concluir además que $\dot{x}_e \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$, lo que implica que $x_e \in \mathcal{L}_\infty$ con lo que se cumple la última condición del teorema 1.

5. SIMULACIÓN

Con el fin de evaluar el desempeño del controlador (15), obtenido por medio de la aplicación de la técnica de I&I, en el control de seguimiento de postura de un vehículo

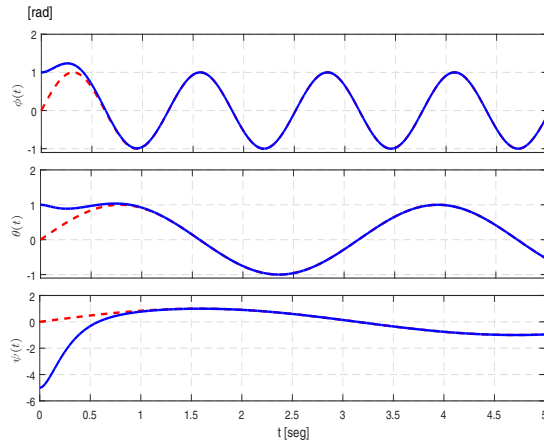


Figura 2. Postura del vehículo espacial (— postura real, - - - postura deseada).

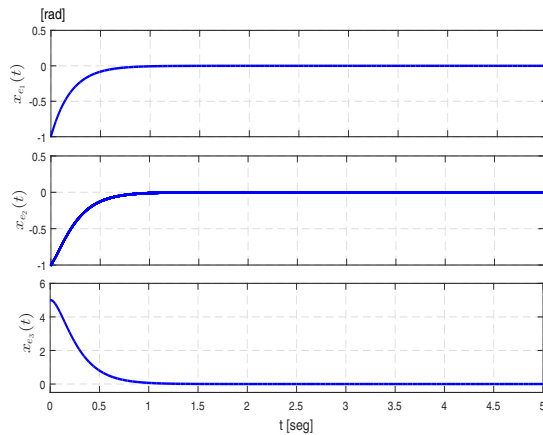


Figura 3. Error de postura.

espacial simulaciones numéricas fueron realizadas utilizando los siguientes parámetros

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{bmatrix} \quad p_I = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para el modelo dinámico. Las trayectorias deseadas fueron establecidas como $\phi(t) = \sin(5t)$, $\theta(t) = \sin(2t)$ y $\psi(t) = \sin(t)$. La velocidad de muestreo para la simulación fue establecida en 1000 Hz y los estados iniciales del sistema establecidos como $x(0) = [1 \ 1 \ -5]^T$ y $\dot{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. Los parámetros para el controlador están dados por

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

La figura 2 muestra la evolución en el tiempo de los ángulos de Euler. De la figura en cuestión se puede observar que las trayectorias de los ángulos de Euler siguen las trayectorias deseadas después de aproximadamente 1,5 segundos, dato que es corroborado en la figura 3 donde se

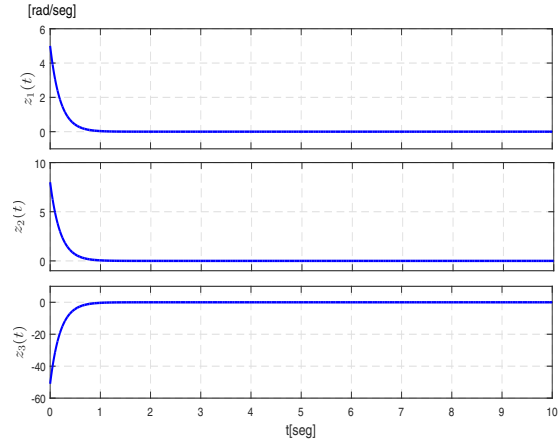


Figura 4. Dinámica fuera de la variedad.

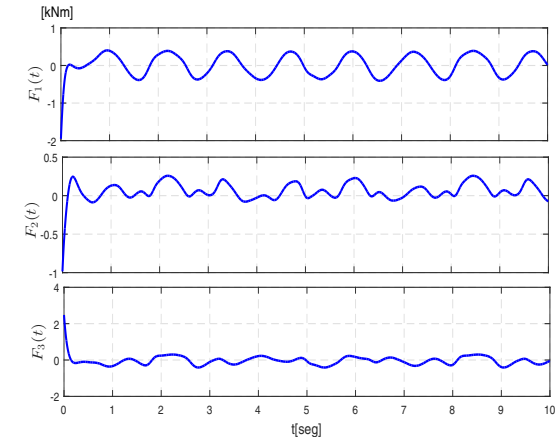


Figura 5. Entradas de control.

describen las trayectorias del vector del error de postura. La figura 4 muestra la trayectoria de la dinámica fuera de la variedad descrita por las componentes del vector z , donde se observa que después de alrededor de 2 segundos ésta coordenada se vuelve cero en sus tres componentes, lo que significa que a partir de ese momento las trayectorias de los ángulos de Euler se comportan como se describe a través del sistema dinámico objetivo. Finalmente, la figura 5 muestra los pares aplicados al vehículo espacial.

6. CONCLUSIÓN

En el presente artículo, la metodología I&I es aplicada en el diseño del control de seguimiento de postura para un vehículo espacial de lo que resulta una ley de control que depende del modelo del sistema y que está constituida por una matriz K de parámetros, la cual afecta solo el comportamiento del sistema dinámico objetivo, así como por una matriz de parámetros Γ , la cual afecta la velocidad de convergencia para la dinámica fuera de la variedad definida por z , pero que juntas forman un

Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2016, Querétaro, México, Septiembre 28-30, 2016

tipo de término PD que afecta al sistema completo. La ley de control propuesta pareciera similar a la ley de control Proporcional Calculado que puede encontrarse en Kelly et al. (2005); sin embargo, la aquí propuesta no considera el vector de pares gravitacionales debido a la naturaleza en la que se desenvuelve el sistema a controlar. Más aún, el establecimiento de las ganancias del controlador I&I las imprime el propio enfoque de la metodología.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico otorgado mediante la beca de estudios y el proyecto CONACyT 134534 y Proyectos TecNM.

REFERENCIAS

- Aeyels, D. (1985). Stabilization by smooth feedback of the angular velocity of a rigid body. *Systems & Control Letters*, 6(1), 59–63.
- Astolfi, A., Escobar, G., Ortega, R., and Stankovic, A. (2002). An adaptive controller for the TCSC based on the immersion and invariance design technique. In *Proc. of the 14th Conf. on Power Systems Computation, Seville, Spain*.
- Astolfi, A., Karagiannis, D., and Ortega, R. (2008). *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag London Ltd., London.
- Astolfi, A. and Ortega, R. (2003). Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48(4), 590–606.
- Byrnes, C.I., Isidori, A., Monaco, S., and Sabatino, S. (1988). Analysis and simulation of a controlled rigid spacecraft: stability and instability near attractors. pp. 81–85. Decision and Control, In Proc. of the 27th IEEE Conf. on, IEEE, Austin, TX.
- Byrnes, C., Prisco, F.D., and Isidori, A. (1997). *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser, Boston.
- Castañeda, F., Jurado, F., and Santibáñez, V. (2015). Control de movimiento de robots manipuladores vía inmersión e invariancia: Casos particulares. In *Congreso Nacional de Control Automático*, 339–345. AMCA, Cuernavaca, Morelos, México.
- Crouch, P., E. (1984). Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 29, 321–331.
- Hu, J. and Zhang, H. (2015). Output feedback control for rigid-body attitude with constant disturbances. *International Journal of Control*, 88(3), 602–612.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin.
- Jouan, P. (2003). Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM J. Control and optimization*, 41(6), 1756–1778.
- Kelly, R., Santibáñez, V., and Loría, A. (2005). *Control of Robots Manipulators in Joint Space*. Springer London.
- Meyer, G. (1966a). On the use of orthogonal transformation for the synthesis of attitude control systems. pp. 430–434. Presented at the 1966 Joint Automatic Control Conference, Seattle, Washington.
- Meyer, G. (1966b). On the use of Euler’s theorem on rotations for the synthesis of attitude control systems. TN D-3643, NASA.
- Meyer, G. (1968). Response envelop - a global description of three-axis large-angle spacecraft attitude control systems. TN D-4896, NASA.
- Meyer, G. (1971). Design and global analysis of spacecraft attitude control systems. Tech. Rep. R-361, NASA.
- Nijmeijer, H. and van der Schaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag.
- Shuster, M., D. (1993). A survey of attitude representations. *Journal of Astronautical Sciences*, 41(4), 439–517.
- Slotine, J. and Benedetto, M. (1990). Hamiltonian adaptive control of spacecraft. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(7), 848–852.
- Wen, J.Y. and Kreutz-Delgado, K. (1991). The attitude control problem. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36(10), 1148–1162.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York.
- Wonham, W. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. 3rd edition, Springer-Verlag.

CONTROL DE ESTABILIZACIÓN PARA EL SISTEMA PVTOL VÍA INMERSIÓN E INVARIANCIA

Fernando Hernández-Castañeda Víctor Santibáñez * Francisco Jurado

División de Estudios de Posgrado e Investigación
 Tecnológico Nacional de México
 Instituto Tecnológico de La Laguna
 Torreón, Coahuila de Zaragoza
 Email: [jfcastaneda][vsantiba][fjurado]@itlalaguna.edu.mx

RESUMEN

El control de estabilización del sistema PVTOL (Planar Vertical Take-Off and Landing) es abordado utilizando la metodología de Inmersión e Invariancia (I&I). La idea fundamental para la síntesis del controlador consiste en separar el sistema de acuerdo con la naturaleza de su movimiento (traslación y rotación) para luego seleccionar la dinámica objetivo dependiente únicamente del movimiento de traslación y después estabilizar la dinámica fuera de la variedad utilizando únicamente el movimiento rotacional. Resultados en simulación muestran el desempeño del controlador propuesto.

INTRODUCCIÓN

El control de estabilización de una aeronave para las tareas de despegue y aterrizaje en el plano vertical (PVTOL, *Planar Vertical Take-Off and Landing*) representa un problema interesante en el control de sistemas no lineales debido, entre otras cosas, a que este tipo de sistema es de fase no mínima; lo que significa que su dinámica de ceros es inestable y la linealización exacta por realimentación de estados no es factible para el mismo. Además, se trata de un sistema sub-actuado ya que cuenta con tres grados de libertad y tan solo dos entradas de control. El problema en cuestión motiva al diseño de un control de estabilización

para el PVTOL. El sistema PVTOL es una restricción natural del sistema V/STOL (*Vertical/Short Take-Off and Landing*) para una aeronave en donde solo se considera el movimiento del sistema en un plano y no en el espacio tridimensional completo pero que mantiene muchas de las principales características a considerarse en el diseño de leyes de control para aeronaves reales. Existen en la literatura numerosas propuestas de diseño para el control de vuelo de una aeronave PVTOL [1]. Entre los primeros trabajos, un procedimiento de linealización aproximada entrada-salida fue desarrollado en [2] el cual resulta en seguimiento acotado y estabilidad asintótica del sistema. En [3] se provee de un formalismo para el análisis de cierto tipo de sistemas de control con saturación, validado utilizando el modelo del sistema aeronave PVTOL. En [4] básicamente se presentó una extensión de los resultados reportados en [2]. Un control robusto para la sustentación (*hover*) de una aeronave PVTOL utilizando el enfoque de control óptimo en el diseño de una realimentación de estados no lineal fue propuesto en [5]. En [6] fue propuesta una configuración para la estabilización global de una aeronave PVTOL con acoplamiento estricto de la entrada utilizando una realimentación de estados estática suave. Un resumen sobre trabajos relacionados con el control de un sistema PVTOL puede encontrarse en [7] y [8].

Por otra parte, recientemente una metodología para el diseño de controladores no lineales y controladores adaptables para sistemas no lineales basada en las nociones de inmersión del sis-

*Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de La Laguna, Blvd. Revolución y Calzada Instituto Tecnológico de La Laguna S/N, C.P. 27000, Torreón, Coahuila de Zaragoza, México

tema a controlar [9–11] e invariancia de una variedad diseñada con características particulares [9, 10, 12], las cuales son herramientas clásicas de la teoría de regulación no lineal y control geométrico no lineal [13, 14], ha sido reportada en la literatura como Inmersión e Invariancia (*Immersion and Invariance*, I&I) [15, 16]. En lo que respecta al control de la aeronave PVTOL empleando la metodología I&I en [17] fue utilizada solo para generar una ley de adaptación para la masa del vehículo aéreo, luego mediante saturaciones anidadas estabilizaron el sistema completo. En el presente trabajo la metodología I&I es utilizada en el diseño del control de estabilización del sistema aeronave PVTOL.

MODELO DEL SISTEMA

El PVTOL es un sistema cuyo modelo matemático representa un objeto que vuela y se desenvuelve en el plano vertical y que posee tres grados de libertad (x, y, θ) correspondientes a la posición y orientación en el plano. El PVTOL esta compuesto por dos entradas de control (propulsores) que producen la fuerza y el momento sobre la máquina voladora o aeronave. La dinámica completa de una aeronave, considerando la flexibilidad de las alas y el fuselaje, efectos aero-elásticos, la dinámica interna del motor, la superficie de control de los actuadores y la multitud de variables cambiantes, es algo compleja y algunas veces imposible de tratar para propósitos prácticos de control. Una primera aproximación muy utilizada consiste en considerar la aeronave como un cuerpo rígido sobre el cual actúan un grupo de fuerzas y momentos. El modelo dinámico del sistema aeronave

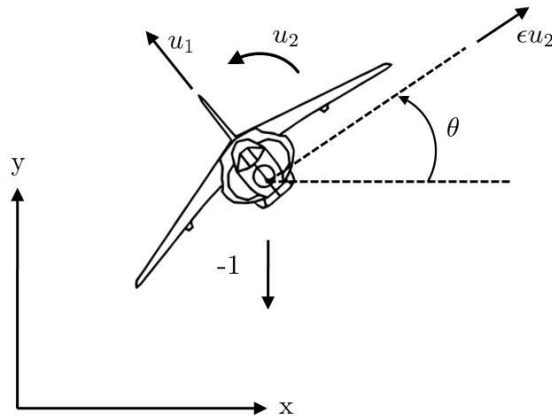


FIGURA 1. Vehículo aéreo de despegue y aterrizaje vertical (PVTOL).

PVTOL puede obtenerse utilizando las ecuaciones de Lagrange o las leyes de Newton. Las ecuaciones que describen el modelo dinámico del sistema PVTOL de forma normalizada están dadas como [2]

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\sin(\theta)u_1 + \varepsilon \cos(\theta)u_2, \\ \ddot{y} &= \cos(\theta)u_1 + \varepsilon \sin(\theta)u_2 - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2;\end{aligned}\quad (1)$$

donde x representa el desplazamiento horizontal del centro de masa de la aeronave, y representa el desplazamiento vertical del centro de masa, θ es el ángulo de alabeo (*roll*) que define el PVTOL con respecto a la horizontal, u_1 es la entrada de control que representa el empuje total suministrado directamente debajo de la aeronave, u_2 es la entrada de control que genera el momento de alabeo (aceleración angular) alrededor del centro de masa de la aeronave y $\varepsilon \ll 1$ es un coeficiente dado por el acoplamiento entre el momento de alabeo y la aceleración lateral de la aeronave donde la constante “-1” es la aceleración gravitacional normalizada. La figura 1 muestra la representación esquemática del sistema PVTOL. Por lo general el coeficiente ε se puede despreciar debido a que representa un valor muy pequeño y no siempre bien conocido, luego es posible suponer que $\varepsilon = 0$ al considerar que no existe acoplamiento entre los momentos de alabeo y la aceleración lateral y así el sistema se transforma en

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\sin(\theta)u_1, \\ \ddot{y} &= \cos(\theta)u_1 - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2.\end{aligned}\quad (2)$$

El sistema (2) puede presentar problemas de desempeño debido a la dinámica no modelada al ignorar el efecto del parámetro ε , afortunadamente varios autores han demostrado que mediante un apropiado cambio de coordenadas podemos obtener la representación del sistema sin el término debido a ε . Por ejemplo, en [6] se aplica el siguiente cambio de coordenadas

$$z = x - \varepsilon \sin(\theta), \quad (3)$$

$$w = y + \varepsilon(\cos(\theta) - 1). \quad (4)$$

El sistema dinámico (1) considerando este cambio de coordenadas se transforma en

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= -\sin(\theta)\ddot{u}_1, \\ \ddot{w} &= \cos(\theta)\ddot{u}_1 - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2;\end{aligned}\quad (5)$$

donde $\bar{u}_1 = u_1 - \varepsilon \dot{\theta}^2$. Observe ahora que la estructura del sistema (5) tiene la misma forma que el sistema (1) con $\varepsilon = 0$, por lo que ahora el sistema (2) puede ser utilizado sin ningún problema para propósitos de control, *i.e.*, se parte del modelo simplificado (2) al emplear la metodología I&I en donde el controlador resultante será luego aplicado al sistema completo bajo el conocimiento total o parcial del parámetro ε .

INMERSIÓN E INVARIANCIA (I&I)

El siguiente teorema expone las condiciones fundamentales para la construcción de leyes de control por realimentación de estados, globalmente asintóticamente estabilizadoras para sistemas no lineales, el cual es parte del resultado principal de la estabilización por I&I [15]. El principio de estabilización de un punto de equilibrio de un sistema no lineal vía I&I se resume a través del siguiente teorema [16].

Teorema 1. Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y un punto de equilibrio $x^* \in \mathbb{R}^n$ a ser estabilizado. Suponga que existen mapeos suaves $\alpha : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $v : \mathbb{R}^{n \times (n-p)} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $p < n$, tales que sostengan lo siguiente:

(C1) Sistema dinámico objetivo. El sistema objetivo es definido por

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad (7)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^p$ tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\xi^* \in \mathbb{R}^p$ y $x^* = \pi(\xi^*)$.

(C2) Condición de inmersión. Para todo ξ ,

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (8)$$

(C3) Variedad implícita. El conjunto identidad

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^p\} \quad (9)$$

se mantiene.

(C4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones. Todas las trayectorias del sistema

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)v(x,z)], \quad (10)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x,z), \quad (11)$$

están acotadas y (10) posee un equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable en $z = 0 \in \mathbb{R}^{n-p}$, donde z representa el estado de la dinámica fuera de la variedad. Luego x^* es un equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \phi(x)). \quad (12)$$

ESTABILIZACIÓN VÍA I&I

En esta sección se aborda el diseño de control para el sistema aeronave PVTOL utilizando la metodología I&I. El objetivo de control consiste en encontrar leyes de control u_1 y u_2 tales que estabilicen el origen del sistema (2). Para este fin, se obtiene una representación en espacio de estados del sistema dada por

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (13)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin(\theta)u_1, \quad (14)$$

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (15)$$

$$\dot{y}_2 = \cos(\theta)u_1 - 1, \quad (16)$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (17)$$

$$\dot{\omega} = u_2; \quad (18)$$

donde x_1 y x_2 representan la posición y velocidad de la aeronave, respectivamente, a través del eje horizontal. Los estados y_1 y y_2 representan la posición y velocidad de la aeronave, respectivamente, a través del eje vertical. θ representa el desplazamiento angular del alabeo y la velocidad angular del alabeo esta dada por ω . La filosofía tras el diseño del controlador para el sistema aeronave PVTOL mediante la metodología de I&I es la de seleccionar el sistema dinámico objetivo de acuerdo a la naturaleza del movimiento; *i.e.*, el sistema (2) puede dividirse en dos subsistemas, uno de los cuales describe el movimiento traslacional y el otro el movimiento rotacional de la aeronave. Así, la idea fundamental en el diseño del controlador es seleccionar el sistema dinámico objetivo como un subsistema que describa solo el movimiento de traslación con características deseadas de estabilidad y luego cuidar que la trayectoria del sistema que describe el movimiento rotacional esté acotada. Con esto en mente, se aplica el teorema 1 al sistema (13)-(18) y se comienza por la selección del sistema dinámico objetivo.

(C1) Sistema objetivo. El sistema dinámico objetivo es seleccionado acorde a la filosofía de control como un sistema de cuarto orden que representa solo el movimiento de traslación deseado sobre el marco $x - y$ del sistema y se define como

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad (19)$$

$$\dot{\xi}_2 = -k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2, \quad (20)$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad (21)$$

$$\dot{\xi}_4 = -k_3 \xi_3 - k_4 \xi_4; \quad (22)$$

donde $k_j > 0$, para $j = \{1, \dots, 4\}$, son parámetros de diseño y el sistema tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen. La función $\pi(\cdot)$ luego es definida como

$$\begin{bmatrix} \text{Traslación}_{4 \times 1} \\ \text{Rotación}_{2 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \pi(\xi) = \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \\ \pi_3(\xi) \\ \pi_4(\xi) \\ \pi_5(\xi) \\ \pi_6(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \pi_2(\xi) \\ \xi_3 \\ \pi_4(\xi) \\ \pi_5(\xi) \\ \pi_6(\xi) \end{bmatrix}$$

donde se han seleccionado $\pi_1(\xi) = \xi_1$ y $\pi_3(\xi) = \xi_3$ debido a que se desea que las posiciones de movimiento horizontal y vertical de la aeronave se comporten como lo describen las trayectorias del sistema dinámico objetivo (19)-(22).

(C2) Condición de inmersión. Las funciones restantes para el mapeo $\pi(\cdot)$ son obtenidas de la condición de inmersión (8) y están dadas como

$$\xi_2 = \pi_2(\xi), \quad (23)$$

$$-k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 = -\text{sen}(\pi_5(\xi))c_1(\xi), \quad (24)$$

$$\xi_4 = \pi_4(\xi), \quad (25)$$

$$-k_3 \xi_3 - k_4 \xi_4 = \text{cos}(\pi_5(\xi))c_1(\xi) - 1, \quad (26)$$

$$\tilde{\pi}_5(\xi) = \pi_6(\xi), \quad (27)$$

$$\tilde{\pi}_6(\xi) = c_2(\xi). \quad (28)$$

Los mapeos $\pi_2(\xi)$ y $\pi_4(\xi)$ están definidos por (23) y (25), respectivamente. Ahora bien, de (24) y (26) se puede obtener el mapeo $\pi_5(\xi)$ resolviendo este sistema de ecuaciones algebraicas para obtener

$$c_1(\xi) = \sqrt{(-k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2)^2 + (-k_3 \xi_3 - k_4 \xi_4 + 1)^2}, \quad (29)$$

entrada que solo producirá un empuje positivo a la aeronave; lo que concuerda con la naturaleza del actuador (propulsor debajo de la aeronave $u_1 > 0$). Luego, con esta elección para la entrada de control $u_1 = c_1(\xi)$ se obtiene el mapeo

$$\pi_5(\xi) = \arctan\left(\frac{k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2}{1 - k_3 \xi_3 - k_4 \xi_4}\right). \quad (30)$$

Finalmente, $\pi_6(\xi)$ es obtenida de (27) resultando como

$$\pi_6(\xi) = \frac{\mu(\xi)\hat{\beta}(\xi) - (\beta(\xi) + 1)\dot{\mu}(\xi)}{(\beta(\xi) + 1)^2 + \mu^2(\xi)}, \quad (31)$$

donde

$$\mu(\xi) = -k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2,$$

$$\beta(\xi) = -k_3 \xi_3 - k_4 \xi_4,$$

$$\dot{\mu}(\xi) = k_1 k_2 \xi_1 + (k_2^2 - k_1) \xi_2,$$

$$\dot{\beta}(\xi) = k_3 k_4 \xi_3 + (k_4^2 - k_3) \xi_4;$$

con lo que queda definido por completo el mapeo $\pi(\xi)$.

(C3) Variedad implícita. La variedad es definida de acuerdo con (9) como

$$\mathcal{V} = \left\{ (X_t, R_t) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \mid \phi(X_t, R_t) = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_5(X_t) \\ \pi_6(X_t) \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

con $X_t = [x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2]^T$ y $R_t = [\theta \ \omega]^T$.

(C4) Atractividad de la variedad y acotamiento de soluciones. Se define la coordenada de la variedad como

$$z \triangleq \phi(X_t, R_t) = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_5(X_t) \\ \pi_6(X_t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

donde la dinámica fuera de la variedad queda descrita por

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\pi}_5(X_t) \\ \dot{\pi}_6(X_t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

y a lo largo de las trayectorias del sistema (13)-(28) resulta

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \omega \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_6(X_t) \\ \tilde{\pi}_6(X_t) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Ahora, utilizando (33) el sistema se transforma en

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (35)$$

$$\dot{z}_2 = u_2 - \tilde{\pi}_6(X_t). \quad (36)$$

Seleccionando la entrada de control u_2 como

$$u_2 = \tilde{\pi}_6(X_t) - \gamma_1 z_1 - \gamma_2 z_2 \quad (37)$$

el subsistema se transforma en

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (38)$$

$$\dot{z}_2 = -\gamma_1 z_1 - \gamma_2 z_2; \quad (39)$$

el cual tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen.

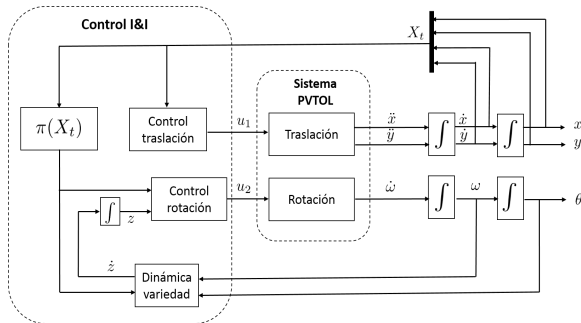


FIGURA 2. Diagrama a bloques del sistema de control propuesto.

SIMULACIÓN

Se llevaron a cabo simulaciones del controlador obtenido en la sección anterior con el fin de observar el desempeño del mismo y validar su funcionamiento. El diagrama a bloques del sistema de control se muestra en la figura 2. La tarea de control consistió en llevar la aeronave PVTOL de una posición alejada del origen hacia el mismo origen como en [18]. Se utilizaron los siguientes parámetros para el controlador $k_1 = 0.3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0.3$, $k_4 = 1$, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 5$ y las siguientes condiciones iniciales $X_t = [x_1(0) \ x_2(0) \ y_1(0) \ y_2(0)]^T = [50 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y $R_t = [\theta(0) \ \omega(0)]^T = [\frac{3\pi}{5} \ 0]^T$. El tiempo de la simulación fue de 15 segundos y la frecuencia de muestreo de 1000 Hz. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 3-7. La figura 3 muestra la posición y velocidad de la aeronave a lo largo del eje horizontal donde se observa que la aeronave PVTOL se traslada al origen de forma suave. En la figura 4 se muestran la posición y velocidad de la aeronave a lo largo del eje vertical donde se observa que el sistema PVTOL disminuye su altura en -1.75 metros y luego regresa a su posición inicial de manera suave. En la figura 5 se exhibe el desplazamiento y velocidad angular de la aeronave alrededor de su eje de giro donde se observa que el sistema PVTOL comienza su movimiento de rotación con una inclinación de $\frac{3\pi}{5}$, *i.e.* mas allá de los 90 grados, condición que contrasta con algunos enfoques que requieren que el movimiento de alabeo esté restringido a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. En la figura 6 se muestran las entradas de control del sistema donde se observa que el empuje u_1 es siempre positivo y tiende a 1, lo que significa que cuando la aeronave se estabiliza la fuerza de empuje contrarresta el efecto de la aceleración gravitacional normalizada. La entrada de control u_2 inicia en un valor de par aproximado de -6 Nm y finalmente se estabiliza en cero. La figura 7 exhibe los estados de la dinámica fuera de la variedad donde se observa que los estados llegan a cero en poco menos de 5 segundos, lo que significa que después de este tiempo el sistema se comporta como el sistema dinámico objetivo.

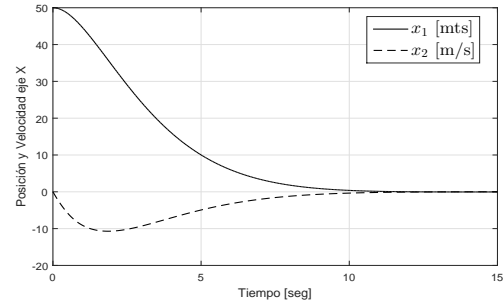


FIGURA 3. Estados asociados al movimiento traslacional sobre el eje horizontal.

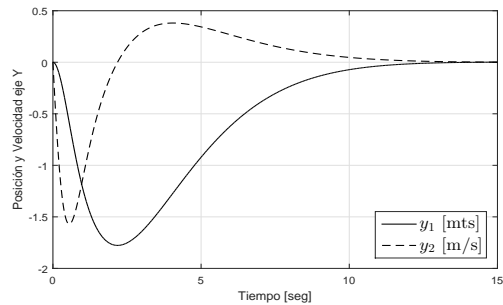


FIGURA 4. Estados asociados al movimiento traslacional sobre el eje vertical.

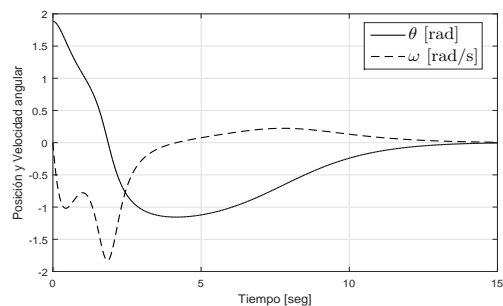


FIGURA 5. Estados asociados al movimiento rotacional.

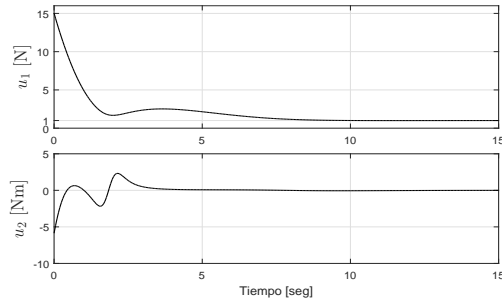


FIGURA 6. Entradas de control.

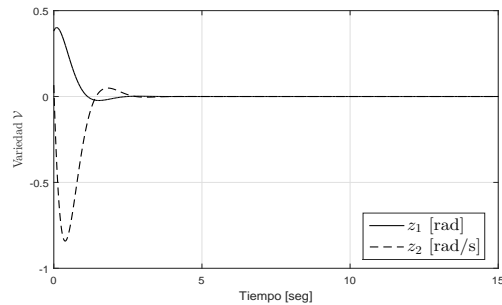


FIGURA 7. Estados de la dinámica fuera de la variedad.

CONCLUSIÓN

Se ha utilizado la metodología I&I para estabilizar el sistema aeronave PVTOL. El controlador obtenido toma en cuenta la naturaleza positiva del empuje y el ángulo de alabeo no está restringido a alguna región como en otros enfoques. Simulaciones numéricas apoyan los resultados teóricos. Hasta donde los autores tienen conocimiento, esta es la primera vez que la metodología I&I es utilizada bajo el enfoque propuesto para el control del sistema aeronave PVTOL.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico otorgado mediante la beca de estudios y el proyecto CONACyT 134534 y Proyectos TecNM.

REFERENCIAS

- [1] Fantoni, I., and Lozano, R., 2002. *Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer-Verlag.
- [2] Hauser, J., Sastry, S., and Meyer, G., 1992. "Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Appli-

cation to VSTOL aircraft.". *Automatica*, **28(4)**, pp. 665–679.

- [3] Teel, A. R., 1996. "A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation.". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41(9)**, pp. 1256–1270.
- [4] Martin, P., Devasia, S., and Paden, B., 1996. "A different look at output tracking: control of a VTOL aircraft.". *Automatica*, **32(1)**, pp. 101–107.
- [5] Lin, F., Zhang, W., and Brandt, R. D., 1999. "Robust hovering control of a PVTOL aircraft.". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **7(3)**, pp. 343–351.
- [6] Olfati-Saber, R., 2000. "Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling.". In Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control.
- [7] Castillo, P., Lozano, R., and Dzul, A. E., 2005. *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*. Springer-Verlag.
- [8] Fantoni, I., and Palomino, A., 2010. "Nested saturation control for stabilizing the PVTOL aircraft". In *Unmanned Aerial Vehicles: Embedded Control*, R. Lozano, ed., ISTE Ltd.
- [9] Nijmeijer, H., and van der Schaft, A., 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag.
- [10] Isidori, A., 1995. *Nonlinear Control Systems*. 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Byrnes, C., Priscoli, F. D., and Isidori, A., 1997. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser, Boston.
- [12] Wiggins, S., 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York.
- [13] Wonham, W., 1985. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. 3rd edition, Springer-Verlag.
- [14] Jouan, P., 2003. "Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection". *SIAM J. Control and optimization*, **41(6)**, pp. 1756–1778.
- [15] Astolfi, A., and Ortega, R., 2003. "Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems". *IEEE Trans. on Automatic Control*, **48(4)**, pp. 590–606.
- [16] Astolfi, A., Karagiannis, D., and Ortega, R., 2008. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag London Ltd., London.
- [17] Hu, J., and Zhang, H., 2013. "Immersion and invariance based command-filtered adaptive backstepping control of VTOL vehicles.". *Automatica*, **49(7)**, pp. 2160–2167.
- [18] Fantoni, I., Zavala, A., and Lozano, R., 2002. "Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust". In Proc. of the 41st IEEE Conf. on Decision and Control.



Priority altitude PVTOL aircraft control via immersion and invariance

Fernando Hernández-Castañeda , Víctor Santibáñez and Francisco Jurado 

Tecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, Torreón, Coahuila de Zaragoza, México

ABSTRACT

In this work, the immersion and invariance (I&I) control technique is used in order to design a new controller that stabilises the PVTOL (planar vertical take-off and landing) aircraft system. The controller gives priority to the control of the aircraft's altitude before controlling the lateral displacement, fact from which interesting features as less thrust effort and less aggressive manoeuvres for roll moment are gained. The fundamental idea for the development of the proposed controller is based on the selection of the target dynamic system in accordance with the nature of the translational motion system to then stabilise the off-manifold dynamics by using the rotational motion system. It is proved that the proposed control scheme is globally asymptotically stable. Simulation results validate our proposal.

ARTICLE HISTORY

Received 22 March 2018
Accepted 23 November 2018

KEYWORDS

Immersion; invariance;
nonlinear control; PVTOL
aircraft

1. Introduction

The planar vertical take-off and landing (PVTOL) aircraft system has attracted the attention of the control community because it is an underactuated non-minimum phase system, i.e. due to the moment-to-force coupling in the model, its zero dynamic is unstable and the straightforward application of the exact input-output linearisation methodology produces undesirable results. There are numerous studies in the literature about stabilisation control for the PVTOL aircraft system, among the pioneer works is the one developed by Hauser, Sastry, and Meyer (1989) where an approximate scheme for hover control of the PVTOL was introduced, leading to tracking schemes with an *a priori* bounded, but not necessarily, zero steady-state tracking error. The approach proposed by Isidori and Byrnes (1990) for trajectory tracking for nonlinear systems was used by Roltgen and Byrnes (1991) for hover control of the PVTOL system, where the controller for the plant was not subject to the limitation of being of minimum phase, providing zero steady-state error. In Hauser, Sastry, and Meyer (1992), a feedback control was designed based on a minimum phase approximation to the true system, resulting in a system with desirable properties such as bounded tracking and asymptotic stability; a rigorous justification for the common practice of ignoring the moment-to-force coupling in the design of the controller was also provided in such a work. In Gong and Thompson (1993), the nonlinear L_2 gain (or H^∞) control technique was used for the stabilisation of the PVTOL aircraft where the moment-to-force coupling was included and the control problem was formulated as one of robust stabilisation of a linear system with high order perturbations. A comparative analysis of trajectory tracking for a PVTOL aircraft using different methodologies was presented in Benvenuti, Giamberardino, and Farina (1996) and, at the same year, Teel illustrated his central result of nonlinear small gain theorem for the example of the PVTOL aircraft in Teel (1996). An extension of the

results reported by Hauser et al. (1992) was proposed in Martin, Devasia, and Paden (1996). An optimal control approach for robust hovering control of the PVTOL aircraft was proposed by Lin, Zhang, and Brandt (1999). The next year, Olfati-Saber (2000) proposed a global configuration stabilisation for the VTOL aircraft with a strong input coupling using a smooth static state feedback. In Fantoni, Lozano, and Mazenc (2001), based on the Lyapunov approach, a control law to stabilise the PVTOL aircraft system was designed using the forwarding technique. The same year, in Saeki and Sakaue (2001) a controller for the PVTOL aircraft was designed by applying a linear high gain approximation of backstepping, which it is also known as a two-step linearisation method. In Fantoni, Zavala, and Lozano (2002) using saturation functions for bounding the thrust input, they design a control law to stabilise the PVTOL aircraft. The next year, in Zavala-Río, Fantoni, and Lozano (2003) they propose a global stabilisation controller for the PVTOL aircraft system using non-linear combinations of linear saturation functions to bound the thrust and roll moment input. In Lozano, Castillo, and Dzul (2004), they design a control law for the PVTOL aircraft based on Lyapunov analysis and show the performance of the controller using a four-rotor aircraft. An alternative cascade structure for global stabilisation of the PVTOL system, achieved by minimising the interconnection term between closed-loop subsystems, was proposed in Wood and Cazzolato (2007). In Poulin, Chemori, and Marchand (2007) based on receding horizon control, they propose a global stabilising control law for the PVTOL aircraft. A gain-scheduled control approach for the PVTOL aircraft system was presented in Wu, Chen, Hsu, and Chang (2008). In López-Araujo, Zavala-Río, Fantoni, Salazar, and Lozano (2010), they prove that the work previously reported in Zavala-Río et al. (2003) is also robust with respect to the parameter characterising such a lateral force coupling. Another controller using

2  F. HERNÁNDEZ-CASTANEDA ET AL.

a Lyapunov function to globally stabilise the PVTOL system was presented in Turker, Oflaz, Gorgun, and Cansever (2012). In Léchappé, Aoustin, Márquez-Martínez, and Moog (2013), partial linearisation of the state space system was used to control the PVTOL aircraft showing that the controller stabilises the aircraft even with a strong input coupling (moment-to-force coupling). By using the passivity-based methodology, in Venkatesh, Mehra, Kazi, and Singh (2013) a feedback controller was designed for the PVTOL system. Recently, in Popov, Andrievsky, and Zaitceva (2015) the super twisting algorithm, from the sliding mode control technique, was used for the stabilisation of the PVTOL system and, at the same year, in Aguilar-Ibanez, Sossa-Azuela, and Suarez-Castanon (2015) using the backstepping procedure, a control design to solve the regulation problem for a simplified PVTOL system strongly coupled was introduced. In Petkar, Gupta, Ketkar, and Kazi (2016), a novel control strategy named as tube-based model predictive control (TB-MPC) was used for robust stabilisation of the PVTOL aircraft. An interesting study about the control of an unmanned aerial vehicle (UAV), which takes into account some unknown aerodynamic effects, can be found in Chapter 9 in Astolfi, Karagiannis, and Ortega (2008), however, in such a work the aircraft does not have the ability to take off and land vertically.

In this paper, the immersion and invariance (I&I) control technique proposed in Astolfi and Ortega (2003) is used to design a new feedback control law in order to stabilise the PVTOL aircraft system. In comparison with many existing works on which the I&I approach is applied to the aircrafts control, and usually only used as a complementing part/term in the design of the whole controller, in our work it is straightforwardly applied in the design of the controller for the whole system. An advantage when using the I&I approach for this type of aircraft is that, for this control problem, it is possible to define a target dynamic in accordance with the natural structure of the PVTOL dynamic system and, therefore, exploit the I&I formulation. Also, the controller design problem is reduced to other subproblems which are relatively easier to solve, for example, only one Lyapunov function is designed to proof the stability of the target system and it is not necessary to design a Lyapunov function to proof the stability for the entire PVTOL system, which is common in practice when using other methodologies. The proposed control scheme leads to a globally asymptotically stable closed loop system. Furthermore, the controller has the main feature of giving priority to the altitude control over lateral displacements control, which produces less thrust effort and less aggressive manoeuvres for roll moment required by the control inputs. The fundamental idea for the development of the controller is based on the selection of the target dynamic system in accordance with the nature of the translational motion system; then, by using the rotational motion system, the off-manifold dynamics is stabilised.

This paper is organised as follows. In Section 2, the dynamical model of the PVTOL aircraft system is presented and the control problem is formulated. In Section 3, the design procedure of the controller using the I&I methodology is presented. In Section 4, simulation results are shown in order to observe the behaviour and performance of the proposed controller. Section 5 shows some concluding remarks.

2. PVTOL aircraft system

The PVTOL aircraft is a flying vehicle that only operates in a vertical lateral plane and it is a natural restriction of a vertical take-off and landing (VTOL) aircraft operating in the three-dimensional space (see Figure A1). As it is well known, the complete dynamics of a real aircraft taking into account flexibility of the wings and fuselage, aeroelastic effects, the internal dynamics of the engine and multitude of changing variables, is quite complex and somewhat unmanageable for control purposes; by this reason the PVTOL aircraft model is used as a first useful approximation that retains the main features of the VTOL aircraft with a minimum number of states and inputs. The PVTOL aircraft model is particularly useful for the control of UAVs (as the Ducted-fan tail-sitter, Double-fan portable VTOL, Quadrotor, etc.) due to the fact that the moment-to-force coupling does not appear in the model or can be easily rejected because this kind of vehicles usually flies at slow speeds. So, the simplified dynamic model of a PVTOL aircraft (as the AV-8B Harrier II aircraft) is given in Hauser et al. (1989, 1992) as follows:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -\sin(\phi)\bar{u}_t + \epsilon\cos(\phi)u_m, \\ m\ddot{z} &= \cos(\phi)\bar{u}_t + \epsilon\sin(\phi)u_m - mg, \\ J\ddot{\phi} &= u_m, \end{aligned} \quad (1)$$

where m is for the mass of the aircraft, J represents the mass moment of inertia about the axis through the aircraft centre of mass and along the fuselage, and g stands for the gravitational acceleration exerted on the aircraft centre of mass. Consider that the aircraft is moving in a vertical (\bar{Y}, \bar{Z}) -plane and it can rotate a ϕ angle around the aircraft centre of mass. The control inputs for the aircraft system are represented by \bar{u}_t and u_m , where \bar{u}_t represents the thrust force, normally directed out from the bottom of the aircraft, and u_m represents the rolling moment around the aircraft centre of mass. Finally, ϵ represents a small constant coefficient giving the coupling between the rolling moment and the lateral force ϵu_m produced by the wing tips, this phenomenon makes the aircraft non-minimum phase system. In general, the coefficient of coupling ϵ is small and not always well known, therefore this coefficient is usually neglected ($\epsilon = 0$). However, as it is shown in Olfati-Saber (2000); Saeki and Sakaue (2001), with an appropriate change of coordinates the system (1) can be simplified. So, using

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} - \frac{\epsilon J}{m} \sin \phi, \\ z &= \bar{z} + \frac{\epsilon J}{m} \cos \phi, \\ u_t &= \bar{u}_t - \epsilon J \dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

the PVTOL aircraft system (1) becomes

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -\sin(\phi)u_t, \\ m\ddot{z} &= \cos(\phi)u_t - mg, \\ J\ddot{\phi} &= u_m, \end{aligned} \quad (3)$$

where y, z represent the position of the aircraft in a (Y, Z) -plane and u_t is the new input for the system. Note that the system (3)

has the same structure as the system (1) with $\epsilon = 0$, but now the open loop system is not a non-minimum phase system, for detailed discussion on non-minimum phase systems, see Byrnes and Isidori (1984); Isidori and Moog (1989). Now, we can design a controller for the system (3) and then to apply the coordinates change (2) in order to control the PVTOL aircraft system (1).

2.1 Control problem formulation

The main goal control is to lead the aircraft from an initial position (y_0, z_0) to a desired constant position in the (\bar{Y}, \bar{Z}) -plane, keeping it hovering with a zero ϕ angle and zero speed. Defining the following error coordinates

$$\begin{aligned} e_y &\triangleq y - y_d, \\ e_z &\triangleq z - z_d \end{aligned} \quad (4)$$

with desired constant positions $y_d, z_d \in \mathbb{R}$, the control problem can be formulated as follows. For the system (3), find out, if possible, functions (control laws) for the inputs $u_t, u_m \in \mathbb{R}$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\phi}(t) = 0.$$

It should be noticed that, depending on the aircraft features the control input for the thrust can be limited; for example, as in the Harrier aircraft, for which only positive control inputs ($u_t > 0$) for thrust are valid.

2.2 I&I methodology

The basic result for the I&I stabilisation (Astolfi et al., 2008), namely a set of sufficient conditions for the construction of globally asymptotically stabilising state feedback control laws, for general nonlinear systems is recalled here in order to be used in the next section.

Theorem 2.1. *Consider the system*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5)$$

with $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, and an equilibrium point $x^* \in \mathbb{R}^n$ to be stabilised. Assume that there exist smooth mappings $\alpha : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}, c : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ and $v : \mathbb{R}^{n \times (n-p)} \rightarrow \mathbb{R}^m$, with $p < n$, such that the following hold.

(A1) *Target system*

The following system is the target dynamic system

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad (6)$$

with $\xi \in \mathbb{R}^p$ and has a globally asymptotically stable equilibrium at $\xi^* \in \mathbb{R}^p$ and $x^* = \pi(\xi^*)$.

(A2) *Immersion condition*

For all $\xi \in \mathbb{R}^p$,

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi(\xi)}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (7)$$

(A3) *Implicit manifold*

The set identity

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^p\} \quad (8)$$

holds.

(A4) *Manifold attractivity and trajectory boundedness*

All trajectories of the system

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(x) + g(x)v(x, \eta)), \quad (9)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \eta) \quad (10)$$

are bounded and (9) has a uniformly globally asymptotically stable equilibrium at $\eta = 0$.

Then, x^* is a globally asymptotically stable equilibrium of the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \varphi(x)). \quad (11)$$

3. I&I control design

Consider the problem of stabilising (for hover condition) the PVTOL aircraft system (1) towards a pre-specific desired constant position (y_d, z_d) with zero roll angle ($\phi = 0$). To solve this problem, we will use the I&I methodology in order to design a controller that stabilises the system (3) and then, using the coordinate transformation (2) be able to control the system (1). To this end, through the error coordinates (4) the system (3) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= y_2, \\ m\dot{y}_2 &= -\sin(\phi)u_t, \\ \dot{e}_z &= z_2, \\ m\dot{z}_2 &= \cos(\phi)u_t - mg, \\ \dot{\phi} &= w, \\ J\dot{w} &= u_m, \end{aligned} \quad (12)$$

where y_2 and z_2 represent the linear velocity for the y - and z -translational coordinates, respectively, and w represents the angular velocity for the roll angle ϕ . The origins of the system (12) can be stabilised by using the I&I methodology, the fundamental idea for the development of the controller is to immerse the six-dimensional PVTOL system (12) into a four-dimensional system with desired stability properties. The following proposition sets forth the main result of this paper.

Proposition 3.1. *The PVTOL aircraft system (12) is I&I stabilisable with the following target dynamic system:*


$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ m\dot{\xi}_2 &= -k_{v_y} \Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2, \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ m\dot{\xi}_4 &= \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4), \end{aligned} \quad (13)$$

with function $\Psi(\xi_3) = k_{p_y} \operatorname{sech}(k\xi_3)$; design gains $k_{p_y}, k_{v_y}, k_{p_z}, k_{v_z}, k > 0$ and

$$u_t(x) = \sqrt{u_y^2 + (u_z + mg)^2}, \quad (14)$$

as control law for the thrust, where

$$u_y = -k_{v_y} \Psi(e_z)e_y - (k_{v_y} + m\Psi(e_z))y_2, \quad (15)$$

4  F. HERNÁNDEZ-CASTANEDA ET AL.

$$u_z = \delta \tanh(-k_{p_z} e_z - k_{v_z} z_2); \quad (16)$$

and

$$u_m(x) = J(-k_{p_\phi}(\phi - \Phi_1) - k_{v_\phi}(w - \Phi_2) + \Phi_3), \quad (17)$$

as control law for the roll moment where Φ_1, Φ_2 and Φ_3 are functions defined in the [Appendix](#). Then, by selecting k_{p_y}, k_{v_y} , and δ as

$$k_{v_y} > \frac{k_{p_y}}{4},$$

and

$$mg > \delta > 0,$$

the system (12), in closed loop with (14) and (17), has a globally asymptotically stable equilibrium point at the origin.

Proof: We proceed to verify the hypothesis (A1)–(A4) from Theorem 2.1. In the first assumption, we need to prove that the target dynamic system (13) has a globally asymptotically stable equilibrium at $\xi = 0 \in \mathbb{R}^4$. For this purpose, we will use Lyapunov's stability theory.

(A1) *Target system stability*

The target dynamic system (13) can be divided into two subsystems to facilitate stability analysis: the target subsystem for the lateral translational motion (horizontal movement) and the target subsystem for the vertical translational motion (vertical movement). It is important to underscore that the target dynamics system selected here was not trivially obtained. Hence, before dealing with the stability analysis it is important to explain how this elaborate target system was obtained.

First of all, in general for the I&I stabilisation problem for nonlinear systems, the classical target dynamics is chosen as the extensively studied linear dynamics, see Isidori (1995); Nijmeijer and van der Schaft (1990). In this direction, the first idea for the selection of the target dynamic was a simple linear system in the form

$$\text{Horizontal movement } \Sigma_H : \begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ m\dot{\xi}_2 &= -k_{p_y}\xi_1 - k_{v_y}\xi_2, \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{Vertical movement } \Sigma_V : \begin{cases} \dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ m\dot{\xi}_4 &= -k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4, \end{cases} \quad (19)$$

with parameters $k_{p_y}, k_{p_z}, k_{v_y}, k_{v_z} > 0$, which represent the desired dynamics of a particle with mass m moving free in a vertical (Y, Z) -plane. The states ξ_1 and ξ_2 represent the position and velocity of the particle, respectively, moving in the horizontal axis and the states ξ_3 and ξ_4 represent the position and velocity of the particle, respectively, moving in the vertical axis. This target system is a decoupled system, namely, the horizontal dynamics does not depend on the states of the vertical dynamics and vice versa. From the linear control theory, for any initial condition the trajectories of this system tend globally asymptotically to zero, in other words, for any initial position and velocity of the particle, it always moves towards the origin of the (Y, Z) -plane.

On the other hand, in general in the existing works of PVTOL aircraft control, they only worry about generating a controller that drives the aircraft, from one point to another

in a (Y, Z) -plane, without taking into account the movement of the wings (described by the ϕ angle) and how much thrust and rolling moment are necessary to perform the task. In order to deal with this type of problems, we think in a coupled target system that would give priority to the stabilisation of the altitude of the aircraft, rather than to the stabilisation of the lateral displacement of the aircraft. Which means less total thrust input because naturally the thrust component that moves the aircraft laterally is drastically decreased, and this also reduces the amount of rolling moment input by concentrating the effort in stabilising the wings with the horizontal line and not in producing a roll angle for lateral displacement. This translates the dynamic subsystem (18) of horizontal motion into the following dynamics:

$$\Sigma_H : \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ m\dot{\xi}_2 = -K_1(\xi_3)\xi_1 - K_2(\xi_3)\xi_2. \end{cases} \quad (20)$$

This is a coupled system because its dynamics depend on the state ξ_3 of the vertical dynamics (19). The functions $K_1(\xi_3)$ and $K_2(\xi_3)$ are design functions to be defined and play the role of variable gains, in order to increase or decrease the speed of convergence of the trajectories of Σ_H , but these gains cannot be arbitrarily defined and must respect certain properties to preserve the stability of the system and set the specific desired behaviour. These properties are as follows.

- (1) The functions must be bounded and positive, i.e. $0 < K_1(\xi_3) \leq k_1$ and $0 < K_2(\xi_3) \leq k_2$.
- (2) Both functions $K_1(\xi_3)$ and $K_2(\xi_3)$ must be selected in such a way that the speed of convergence of the trajectories of Σ_H decreases as the trajectory of the state ξ_3 moves away from the origin.
- (3) Both functions $K_1(\xi_3)$ and $K_2(\xi_3)$ must be selected in such a way that the speed of convergence of the trajectories of Σ_H increases as the trajectory of the state ξ_3 approaches to the origin.

The first property is simply defined to preserve stability conditions and avoid very high or unlimited convergence speeds. The second and third properties establish the specific desired behaviour for the horizontal movement.

Of all possible continuous or discontinuous functions that have these properties, here we chose the following functions:

$$\begin{aligned} K_1(\xi_3) &= k_{v_y}\Psi(\xi_3), \\ K_2(\xi_3) &= k_{v_y} + m\Psi(\xi_3), \end{aligned} \quad (21)$$

where the main function is the hyperbolic secant function defined as

$$\Psi(\xi_3) = k_{p_y} \operatorname{sech}(k\xi_3) \quad (22)$$

with $k > 0$. The specific structure of the functions defined in (21) is just to facilitate the subsequent stability analysis.

On the other hand, the vertical movement subsystem (19) is transformed into

$$\Sigma_V : \begin{cases} \dot{\xi}_3 = \xi_4, \\ m\dot{\xi}_4 = \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4), \end{cases} \quad (23)$$

where the hyperbolic tangent function has been added, with the parameter $\delta > 0$. This function is added just to avoid any singularity in the π_5 function that will be appear in the subsequent analysis. This describes how the target system (13) was obtained and thus we can continue with the stability analysis of the target system using the Lyapunov's stability theory.

Lateral motion subsystem stability

The lateral translational motion subsystem is represented by

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ m\dot{\xi}_2 &= -k_{v_y}\Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2,\end{aligned}\quad (24)$$

which has a unique equilibrium at $\xi_1 = 0$ and $\xi_2 = 0$. Defining $h = k_{v_y}\xi_1 + m\xi_2$, the subsystem (24) becomes

$$\begin{aligned}m\dot{\xi}_2 &= -\Psi(\xi_3)h - k_{v_y}\xi_2, \\ \dot{h} &= -\Psi(\xi_3)h.\end{aligned}\quad (25)$$

By selecting the following Lyapunov function candidate

$$V_1(\xi) = \frac{m}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{2}h^2, \quad (26)$$

which is a positive definite function, we have that its time derivative, along the trajectories of (24), is given by

$$\dot{V}_1(\xi) = - \begin{bmatrix} \xi_2 \\ h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{v_y} & \frac{1}{2}\Psi(\xi_3) \\ \frac{1}{2}\Psi(\xi_3) & \Psi(\xi_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ h \end{bmatrix}, \quad (27)$$

which with $k_{v_y} > k_{p_y}/4$ is a negative definite function. By using the Lyapunov's theory, we conclude that the origin of the target dynamics subsystem (24) is globally asymptotically stable.

Vertical motion subsystem stability

The vertical translational motion subsystem is given by

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_3 &= \xi_4, \\ m\dot{\xi}_4 &= \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4).\end{aligned}\quad (28)$$

This subsystem has a unique equilibrium at $\xi_3 = 0$ and $\xi_4 = 0$. Choosing $s = -k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4$, the subsystem (28) becomes

$$\begin{aligned}m\dot{\xi}_4 &= \delta \tanh(s), \\ m\dot{s} &= -k_{p_z}m\xi_4 - k_{v_z}\delta \tanh(s).\end{aligned}\quad (29)$$

By selecting the Lyapunov's candidate function as

$$V_2(\xi) = \frac{k_{p_z}m^2}{2}\xi_4^2 + m \int_0^s \delta \tanh(\tau) d\tau, \quad (30)$$

which is a positive definite function, we have that its time derivative along (29) is given by

$$\dot{V}_2(\xi) = -k_{v_z}\delta^2 \tanh^2(s) \quad (31)$$

is negative semi-definite. Noting from (31) and (29) that the trivial solution $\xi_4 = 0$ and $s = 0$, which belongs to the set $S = \{\xi_4 \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} | \dot{V}_2(\xi_4, s) = 0\} = \{\xi_4 \in \mathbb{R}, s = 0\}$, is the only solution that remains identically in S then it is straightforward to prove global asymptotical stability of the equilibrium point via Lasalle's invariance principle (Khalil, 2002), which completes the proof for the assumption (A1). The following

assumption is the immersion condition where to find a mapping $\pi(\xi)$ is needed using the system (12).

(A2) The immersion condition

For convenience, we introduce the six-dimensional state vector

$$x = \begin{bmatrix} x_t = \begin{bmatrix} e_y \\ y_2 \\ e_z \\ z_2 \end{bmatrix} \\ x_r = \begin{bmatrix} \phi \\ w \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

where $x = \text{col}(x_t, x_r)$, with $x_t \in \mathbb{R}^4$ is the vector containing only the translational states of the system and vector $x_r \in \mathbb{R}^2$ contains only the rotational states. Then, we define the following mapping:

$$x = \begin{bmatrix} x_t \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_t(\xi) = \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \\ \pi_3(\xi) \\ \pi_4(\xi) \end{bmatrix} \\ \pi_r(\xi) = \begin{bmatrix} \pi_5(\xi) \\ \pi_6(\xi) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \pi(\xi), \quad (33)$$

where $\pi(\xi) = \text{col}(\pi_t(\xi), \pi_r(\xi))$. In accordance with the control objective, the functions $\pi_1(\xi)$ and $\pi_3(\xi)$ can be chosen as

$$\pi_1(\xi) = \xi_1 \text{ and } \pi_3(\xi) = \xi_3, \quad (34)$$

this is due to the fact that it is desired that the trajectories $(e_y(t), e_z(t))$ behave as the target dynamic system trajectories $(\xi_1(t), \xi_3(t))$. Now, using (33) and (34) into (12), it yields


$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \pi_2(\xi), \\ m\dot{\pi}_2(\xi) &= -\sin(\pi_5(\xi))c_t(\xi), \\ \dot{\xi}_3 &= \pi_4(\xi), \\ m\dot{\pi}_4(\xi) &= \cos(\pi_5(\xi))c_t(\xi) - mg, \\ \dot{\pi}_5(\xi) &= \pi_6(\xi), \\ J\dot{\pi}_6(\xi) &= c_m(\xi).\end{aligned}\quad (35)$$

Therefore, from using the target dynamic system (13) into (35) it has

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \pi_2(\xi), \\ -k_{v_y}\Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2 &= -\sin(\pi_5(\xi))c_t(\xi), \\ \xi_4 &= \pi_4(\xi), \\ \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4) &= \cos(\pi_5(\xi))c_t(\xi) - mg, \\ \dot{\pi}_5(\xi) &= \pi_6(\xi), \\ J\dot{\pi}_6(\xi) &= c_m(\xi).\end{aligned}\quad (36)$$

From the first and third equations in (36), we can find the mappings $\pi_2(\xi)$ and $\pi_4(\xi)$, respectively. Then, the mapping $\pi_t(\xi)$ is completely defined as

$$\pi_t(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

6  F. HERNÁNDEZ-CASTANEDA ET AL.

Using the second and fourth equations in (36), we can find the mapping $\pi_5(\xi)$ as

$$\pi_5(\xi) = \arctan\left(\frac{-c_y}{c_z + mg}\right), \quad (38)$$

where

$$c_y = -k_{v_y}\Psi(\xi_3)\xi_1 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\xi_2, \quad (39)$$

$$c_z = \delta \tanh(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4). \quad (40)$$

Note that the parameter δ must be chosen as $mg > \delta > 0$ in order to avoid any singularity for $\pi_5(\xi)$. From penultimate equation in (36) and using (38), we can find the mapping $\pi_6(\xi)$ which is simply the derivative with respect to the time of the function $\pi_5(\xi)$ and results in

$$\pi_6(\xi) = \frac{c_y\dot{c}_z - \dot{c}_y(c_z + mg)}{(c_z + mg)^2 + c_y^2}, \quad (41)$$

where

$$\begin{aligned} \dot{c}_y &= -k_{v_y}\dot{\Psi}(\xi_3)\xi_1 - k_{v_y}\Psi(\xi_3)\dot{\xi}_2 \\ &\quad - m\dot{\Psi}(\xi_3)\xi_2 - (k_{v_y} + m\Psi(\xi_3))\dot{\xi}_2, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\dot{c}_z = \delta \operatorname{sech}^2(-k_{p_z}\xi_3 - k_{v_z}\xi_4)(-k_{p_z}\dot{\xi}_4 - k_{v_z}\dot{\xi}_4), \quad (43)$$

$$\Psi(\xi_3) = k_{p_y} \operatorname{sech}(k\xi_3), \quad (44)$$

$$\dot{\Psi}(\xi_3) = -k_{p_y}k \operatorname{sech}(k\xi_3) \tanh(k\xi_3)\dot{\xi}_4 \quad (45)$$

with $\dot{\xi}_2$ and $\dot{\xi}_4$ as defined in (13), which completes the mapping $\pi_r(\xi)$. Note that the $\pi_6(\xi)$ function can also be described as

$$\pi_6(\xi) = \dot{\pi}_5(\xi) = \frac{\partial \pi_5(\xi)}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (46)$$

Finally, the mapping $\pi(\xi)$ is completely defined. The mapping $c_t(\xi)$ can be defined in two ways as

$$c_t(\xi) = \sqrt{c_y^2 + (c_z + mg)^2} \quad (47)$$

or

$$c_t(\xi) = -\sin(\pi_5(\xi))c_y + \cos(\pi_5(\xi))(c_z + mg) \quad (48)$$

by using the second and fourth equations in (36), while the mapping $c_m(\xi)$ is defined by the last equation in (36).

(A3) Implicit manifold

Using the partition of $x = \operatorname{col}(x_t, x_r)$ with $x_t \in \mathbb{R}^4$, $x_r \in \mathbb{R}^2$ and a corresponding partition of $\pi(\xi) = \operatorname{col}(\pi_t(\xi), \pi_r(\xi))$, we can describe in explicit form the function $\varphi(x)$ defined in (8) as follows:

$$\varphi(x) \triangleq x_r - \pi_r(\pi_t^{-1}(x_t)) = 0. \quad (49)$$

Then, using (49) the manifold is defined in accordance with the definition of the identity set in (A3) as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^6 \mid \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi - \pi_5(x_t) \\ w - \pi_6(x_t) \end{bmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^6 \mid x = \pi(\xi), \xi \in \mathbb{R}^4\}. \end{aligned} \quad (50)$$

In order to simplify the stabilising task of the zero equilibrium of the off-manifold dynamics in the next step of the controller design, we will define the following auxiliary function:

$$\varphi_2^*(x) = w - \dot{\pi}_5(x_t), \quad (51)$$

which also fulfils the identity set (50). To verify this observe that the obvious choice for $\varphi_2(x)$ is

$$\varphi_2(x) = w - \pi_6(x_t), \quad (52)$$

which can be rewritten using equation in (46) as

$$\varphi_2(x) = w - \frac{\partial \pi_5(x_t)}{\partial x_t} \alpha(x_t), \quad (53)$$

by using the auxiliary function (51) into (53) it has

$$\varphi_2(x) = \varphi_2^*(x) + \frac{\partial \pi_5(x_t)}{\partial x_t} (\dot{x}_t - \alpha(x_t)), \quad (54)$$

where the notation $\dot{\pi}_5(x_t) = (\partial \pi_5(x_t) / \partial x_t) \dot{x}_t$ has been used. Finally, by using the function $\varphi_1(x)$ defined in (50) into (54) it yields

$$\varphi_2(x) = \varphi_2^*(x) + \frac{\partial [\phi_1 - \varphi_1(x)]}{\partial x_t} (\dot{x}_t - \alpha(x_t)). \quad (55)$$

Now, it must be noticed that the last right-hand term is equal to zero when $\varphi_1(x) = 0$. By this reason, $\varphi_2^*(x)$ is chosen in this way; in other words, it is sufficient that $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2^*(x)$ functions become zero, to make the $\varphi_2(x)$ function to be zero too; wherewith the (A3) condition is also satisfied. In the following step of the controller design, the auxiliary $\varphi_2^*(x)$ function will be used instead of the $\varphi_2(x)$ function.

(A4) Manifold attractivity and trajectory boundedness

Now the goal is to render the manifold \mathcal{M} invariant. To this end, using $\eta \triangleq [\varphi_1(x), \varphi_2^*(x)]^T$ as

$$\eta_1 = \phi - \pi_5(x_t), \quad (56)$$

$$\eta_2 = w - \dot{\pi}_5(x_t), \quad (57)$$

notice that the off-manifold dynamics is given by

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad (58)$$

$$\dot{\eta}_2 = J^{-1}u_m - \ddot{\pi}_5(x_t),$$

where the control law for the roll moment is chosen as

$$u_m(x, \eta) = J(-k_{p_\phi}\eta_1 - k_{v_\phi}\eta_2 + \ddot{\pi}_5(x_t)) \quad (59)$$

with controller parameters $k_{p_\phi} > 0$ and $k_{v_\phi} > 0$. Hence, the system (58) becomes

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad (60)$$

$$\dot{\eta}_2 = -k_{p_\phi}\eta_1 - k_{v_\phi}\eta_2.$$

Consequently, the system (60) has a uniformly globally asymptotically stable equilibrium point at $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$. Note that Equation (59) is the control law for the roll moment (17) defined in Proposition 3.1. Finally, it only remains to show that the

trajectories of the system (12) in closed-loop are bounded. To this end, note that choosing the control input u_t with the same structure as the mapping $c_t(\cdot)$ in (47), but with x_t instead of ξ , i.e.

$$u_t(x) \triangleq c_t(x_t) = \sqrt{u_y^2 + (u_z + mg)^2} \quad (61)$$

with u_y and u_z as defined in (15) and (16), respectively; and using the definitions (56) and (57), the system (12) in closed loop with (59) and (61) becomes

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= y_2, \\ m\dot{y}_2 &= -\sin(\eta_1 + \pi_5(x_t))u_t(x_t), \\ \dot{e}_z &= z_2, \\ m\dot{z}_2 &= \cos(\eta_1 + \pi_5(x_t))u_t(x_t) - mg, \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= -k_{p\phi}\eta_1 - k_{v\phi}\eta_2, \end{aligned} \quad (62)$$

which is a system in the form

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= h(x_t, \eta), \\ \dot{\eta} &= K\eta, \end{aligned} \quad (63)$$

where K is Hurwitz. Notice now that the η -subsystem is already globally asymptotically stable and x_t -subsystem with $\eta = 0$ has the same structure as the target dynamic system (13), i.e.

$$h(x_t, 0) = \alpha(\xi)|_{\xi=x_t},$$

which means that given $\eta = 0$ for $\dot{x}_t = h(x_t, 0)$, $x_t = 0$ is globally asymptotically stable. Also, the dynamic system (63) is a cascade system so using the results reported by Sontag (1989) it can be shown that for any solution $\eta(t)$, the solution $x_t(t)$ of the x_t -subsystem is uniformly bounded and subsequently the condition (A4) of the I&I theorem is fulfilled and finally this proves the claim. ■

4. Simulation results

In order to evaluate the performance of the proposed controller, numerical simulations were carried out. The task to be performed consists of moving the aircraft from the rest with initial roll angle $\phi(0) = -0.349$ rad towards a desired altitude $z_d = 20$ m and desired lateral position $y_d = 40$ m. The simulation results were obtained using MATLAB and SIMULINK, with a sampling period of 0.001 seconds and the following initial states $[y(0), z(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0), \phi(0), w(0)] = [0, 0, 0, 0, -0.349, 0]$. The system parameters used in simulation are shown in Table A1. For comparison purposes, two simulations using the I&I controller defined by (14) and (17), as well as the controller proposed in Saeki and Sakaue (2001), were performed. Here we have used the same controller parameters as those used in Fantoni et al. (2002); Saeki and Sakaue (2001) for both controllers (see Table A2). In addition, we have included another simulation, but now using better tuning for the I&I controller parameters (see Table A3 and Figures A2–A7).

The results for the first simulation are shown in Figures A2–A4. Figure A2 shows the movement of the PVTOL aircraft in the (y, z) -plane, where it is observed that the proposed I&I

controller produces a particular behaviour in the movement of the aircraft, this behaviour is directly related to the selection of the target system. Indeed, as it is seen in the results of Figure A3, the proposed controller gives priority to stabilise the height first and then it focusses on reaching the desired lateral position. This particular behaviour brings with it some advantages, as can be seen in Figure A4, where the roll angle ϕ produced by the proposed controller is less than that produced by the Saeki controller; for instance, the roll angle resulting from the Saeki controller is $|\phi(t)| \leq 2.318$ rad while the roll angle for the proposed controller is $|\phi(t)| \leq 1.029$ rad. At this point, it is important to note that for a roll angle exceeding ± 1.57 radians it can be a dangerous, or simply impossible, task to be performed for most of the aircrafts. Another advantage is that the thrust and roll moment inputs required to perform the task are considerably less for the proposed controller; for instance, the thrust and roll moment inputs required by the Saeki controller are $|u_t| \leq 155.1$ N and $|u_m| \leq 17.16$ Nm, while the thrust and roll moment inputs required by the proposed I&I controller are $|u_t| \leq 33.56$ N and $|u_m| \leq 2.875$ Nm; also, the Saeki controller requires negative thrust, which is impossible for most aircraft that do not have this type of actuators. Finally, it should be noticed from Figure A3 that the convergence speed for the lateral displacement y is greater for the Saeki's controller than the I&I controller proposed here. This is an expected behaviour which is directly related with the selection of the target dynamic system and remembering that we have used the same controller parameters as those used in Fantoni et al. (2002); Saeki and Sakaue (2001). However, this disadvantage can be mitigated by modifying the controller parameters, giving more priority to the response speed for the lateral displacement control (see Figures A2–A4 with I&I-retuned).

For the second simulation, two perturbations $d_y(t)$ and $d_z(t)$ have been added in order to observe the robustness of the proposed I&I controller. These terms can be used to simulate more practical scenarios like effect of wind. These perturbations are bounded forces acting in y and z directions. The first disturbance is applied after 10 seconds, with positive values $d_y(t) = 10$ N and $d_z(t) = 10$ N, and the second perturbation is applied at 20 seconds, with negative values $d_y(t) = -10$ N and $d_z(t) = -10$ N, during 0.5 seconds. Figures A5–A7 show the simulation results. As before, Figure A5 shows the movement of the PVTOL aircraft in the (y, z) -plane, where it is observed that the aircraft moves away from the desired position and then return to it, this can be better observed in Figure A6 where for the first disturbance at 10 seconds the aircraft moves away from the desired position $y_d = 40$ m and $z_d = 20$ m and then return to it, the same behaviour occurs for the second disturbance at 20 seconds. Finally, from Figure A7 it can be seen that the proposed I&I controller produces less roll movement and also as before, the amount of thrust and roll moment inputs required to perform the task are less than the Saeki controller.

5. Conclusion

In this work, a novel controller for the PVTOL aircraft system based on the I&I methodology has been introduced. The controller is globally asymptotically stable and takes into account the positive nature of the thrust input. In contrast with previous

works, the controller here proposed has the particular feature of taking priority of the altitude control over lateral displacements control, which produces less thrust effort and less aggressive manoeuvres for roll moment required by the control inputs. This last behaviour is due to the choice of the target dynamic system (13) as a fourth-order nonlinear dynamic system that uses a hyperbolic secant function in $\Psi(\cdot)$ where the k parameter regulates the desired priority level to the altitude control. Also, the tuning of the controller parameters is relatively easier because it first tunes the roll and altitude controller without taking care of the lateral displacement, i.e. the I&I controller keeps the lateral displacement y bounded with zero velocity to then tuning the lateral displacement controller.

As future work, we seek to obtain experimental results by using the proposed controller; unfortunately, we do not have an experimental platform with the characteristics of the PVTOL aircraft system. In despite this, we are studying the possibility of using a quadrotor to emulate the dynamic behaviour of the PVTOL aircraft system.

Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors.

Funding

We thank to Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) from México for the financial support granted through the scholarship CONACyT project 134534 and TecNM projects.

ORCID

Fernando Hernández-Castañeda  <http://orcid.org/0000-0001-7625-8348>
Francisco Jurado  <http://orcid.org/0000-0001-5568-0435>

References

- Aguilar-Ibanez C., Sossa-Azuela H., & Suarez-Castanon M. S. (2015, November). PVTOL control: A backstepping approach. *2015 International conference on mechatronics, electronics and automotive engineering (ICMEAE)* (pp. 93–98).
- Astolfi A., Karagiannis D., & Ortega R. (2008). *Nonlinear and adaptive control with applications*. London: Springer-Verlag London.
- Astolfi A., & Ortega R. (2003). *Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4), 590–606.
- Benvenuti L., Giamberardino P. D., & Farina L. (1996, December). Trajectory tracking for a PVTOL aircraft: A comparative analysis. *Proceedings of the 35th conference on decision and control*. Kobe, Japan.
- Byrnes C. I., & Isidori A. (1984). A frequency domain philosophy for nonlinear systems, with applications to stabilization and to adaptive control. *Proceedings of the 23rd conference on decision and control*. (pp. 1569–1573). Las Vegas, NV.
- Fantoni I., Lozano R., & Mazenc F. (2001, September 4–7). Control of the PVTOL aircraft using the forwarding technique and a Lyapunov approach. *European control conference (ECC)*. Porto, Portugal.
- Fantoni I., Zavala A., & Lozano R. (2002, December). Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust. *Proceedings of the 41st IEEE conference on decision and control* (Vol. 4, pp. 4462–4467).
- Gong C., & Thompson S. (1993). Stabilization of a VTOL aircraft – An L_2 gain control approach. *Printed and published by the IEE, Savoy Place, London WC2R 0BL, UK*.
- Hauser J., Sastry S., & Meyer G. (1989). *Nonlinear controller design for flight control systems*. *IFAC Proceedings Volumes*, 22(3), 385–390.
- Hauser J., Sastry S., & Meyer G. (1992). *Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to V/STOL aircraft*. *Automatica*, 28(4), 665–679.
- Isidori A. (1995). *Nonlinear control systems*. (3rd ed.). Berlin: Springer-Verlag.
- Isidori A., & Byrnes C. I. (1990). *Output regulation of nonlinear systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2), 1311–140.
- Isidori A., & Moog C. H. (1989). On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros. In C. Byrnes, A. Kurzhanski (Eds.), *Modelling and adaptive control* (vol. 105, pp. 146–158). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Léchappé V., Aoustin Y., Márquez-Martínez L. A., & C. H. Moog (2013, December). Partial linearization of the PVTOL aircraft with internal stability. *52nd IEEE conference on decision and control*. (pp. 2564–2569).
- Lin F., Zhang W., & Brandt R. D. (1999). *Robust hovering control of a PVTOL aircraft*. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3), 343–351.
- López-Araujo D., Zavala-Río A., Fantoni I., Salazar S., & Lozano R. (2010). *Global stabilisation of the PVTOL aircraft with lateral force coupling and bounded inputs*. *International Journal of Control*, 83(7), 1427–1441.
- Loria A. (2016, April). *Observers are unnecessary for output-feedback control of lagrangian systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4), 905–920. doi:10.1109/TAC.2015.2446831
- Lozano R., Castillo P., & Dzul A. (2004). *Global stabilization of the PVTOL: Real-time application to a mini-aircraft*. *International Journal of Control*, 77(8), 735–740.
- Martin P., Devasia S., & Paden B. (1996). *A different look at output tracking: Control of a VTOL aircraft*. *Automatica*, 32(1), 101–107.
- Nijmeijer H., & van der Schaft A. (1990). *Nonlinear dynamical control systems* (Vol. 175). New York: Springer-Verlag.
- Olfati-Saber R. (2000, December). Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on decision and control*. Sydney, Australia.
- Petkar S. J., Gupta A. A., Ketkar V. D., & Kazi F. S. (2016). *Robust model predictive control of PVTOL aircraft*. *IFAC-PapersOnLine*, 49(1), 760–765.
- Popov A., Andrievsky B., & Zaitceva I. (2015, April). Stabilization of PVTOL aircraft by supertwisting algorithms. *2015 international workshop on recent advances in sliding modes (RASM)* (pp. 1–6).
- Poulin G., Chemori A., & Marchand N. (2007). *Minimum energy oriented global stabilizing control of the PVTOL aircraft*. *International Journal of Control*, 80(3), 430–442.
- Roltingen J., & Byrnes C. I. (1991, June). Hover control of a PVTOL using nonlinear regulator theory. *1991 American control conference*. (pp. 1126–1130).
- Saeki M., & Sakaue Y. (2001, December). Flight control design for a nonlinear non-minimum phase VTOL aircraft via two-step linearization. *Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control*. Orlando, FL.
- Sontag E. D. (1989, April). *Smooth stabilization implies coprime factorization*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(4), 435–443. doi:10.1109/9.28018
- Teel A. R. (1996). *A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9), 1256–1270.
- Turker T., Oflaz T., Gorgun H., & Cansever G. (2012, June). A stabilizing controller for PVTOL aircraft. *2012 American control conference (ACC)*. (pp. 909–913).
- Venkatesh C., Mehra R., Kazi F., & Singh N. M. (2013, January). *Passivity based controller for underactuated PVTOL system*. *2013 IEEE international conference on electronics, computing and communication technologies*. (pp. 1–5).
- Wood R., & Cazzolato B. (2007, July). *An alternative nonlinear control law for the global stabilization of the PVTOL vehicle*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7), 1282–1287.
- Wu S. L., Chen P. C., Hsu C. H., & Chang K. Y. (2008). *Gain-scheduled control of PVTOL aircraft dynamics with parameter-dependent disturbance*. *Journal of the Franklin Institute*, 345(8), 906–925.
- Zavala-Río A., Fantoni I., & Lozano R. (2003). *Global stabilization of a PVTOL aircraft model with bounded inputs*. *International Journal of Control*, 76(18), 1833–1844.

Appendix A

The functions Φ_1 , Φ_2 and Φ_3 used by the roll controller are defined as follows:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \pi_5(x_t), \\ \Phi_2 &= \dot{\pi}_5(x_t), \\ \Phi_3 &= \ddot{\pi}_5(x_t)\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

with $\pi_5(\cdot)$ function as defined in (38). Note that the functions Φ_2 and Φ_3 are defined simply by using π_5 and its respective first and second derivatives, so in practice they can be implemented simply with the numerical derivative, i.e.

$$\Phi_2 = \frac{q_1(t) - q_1(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (\text{A2})$$

$$\Phi_3 = \frac{q_2(t) - q_2(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (\text{A3})$$

where Δt is the sampling period, $q_1 = \pi_5$ and $q_2 = \Phi_2$. Or they can also be implemented using a sliding-mode base observer or the 'dirty' derivative filter (Loria, 2016). The analytical derivative can also be implemented, which, despite having a higher computational cost, can help by reducing the inherent noise of the signals. The analytical derivative of the functions is shown below.

$$\Phi_1 = \arctan\left(\frac{-u_y}{u_z + mg}\right), \quad (\text{A4})$$

$$\Phi_2 = \frac{\rho}{\sigma}, \quad (\text{A5})$$

$$\Phi_3 = \frac{\dot{\rho}\sigma - \rho\dot{\sigma}}{\sigma^2} \quad (\text{A6})$$

with the following auxiliary functions:

$$\rho = u_y \dot{u}_z - \dot{u}_y (u_z + mg), \quad (\text{A7})$$

$$\sigma = (u_z + mg)^2 + u_y^2, \quad (\text{A8})$$

$$\dot{\rho} = u_y \ddot{u}_z - \ddot{u}_y (u_z + mg), \quad (\text{A9})$$

$$\dot{\sigma} = 2(u_z + mg)\dot{u}_z + 2u_y \dot{u}_y, \quad (\text{A10})$$

where

$$u_y = -k_{v_y} \Psi(e_z) e_y - (k_{v_y} + m\Psi(e_z)) y_2, \quad (\text{A11})$$

$$u_z = \delta \tanh(-k_{p_z} e_z - k_{v_z} z_2), \quad (\text{A12})$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_y &= -k_{v_y} \dot{\Psi}(e_z) e_y - (k_{v_y} \Psi(e_z) + m\dot{\Psi}(e_z)) y_2 \\ &\quad - (k_{v_y} + m\Psi(e_z)) \dot{y}_2,\end{aligned}\quad (\text{A13})$$

$$\dot{u}_z = \delta \operatorname{sech}^2(-k_{p_z} e_z - k_{v_z} z_2) (-k_{p_z} z_2 - k_{v_z} \dot{z}_2), \quad (\text{A14})$$

$$\begin{aligned}\dot{u}_y &= -k_{v_y} \ddot{\Psi}(e_z) e_y - (2k_{v_y} \dot{\Psi}(e_z) + m\ddot{\Psi}(e_z)) y_2 \\ &\quad - (k_{v_y} \Psi(e_z) + (m+1)\dot{\Psi}(e_z)) \dot{y}_2 \\ &\quad - (k_{v_y} + m\Psi(e_z)) \frac{\dot{y}_2^2}{m},\end{aligned}\quad (\text{A15})$$

$$\ddot{u}_z = -2\delta \operatorname{sech}^2(r) \tanh(r) \dot{r}^2 + \delta \operatorname{sech}^2(r) \ddot{r} \quad (\text{A16})$$

with auxiliary functions

$$r = -k_{p_z} e_z - k_{v_z} z_2, \quad (\text{A17})$$

$$\dot{r} = -k_{p_z} z_2 - k_{v_z} \dot{z}_2, \quad (\text{A18})$$

$$\ddot{r} = -k_{p_z} \dot{z}_2 - k_{v_z} \ddot{z}_2, \quad (\text{A19})$$

$$\Psi(e_z) = k_{p_y} \operatorname{sech}(ke_z), \quad (\text{A20})$$

$$\dot{\Psi}(e_z) = -k\Psi(e_z) \tanh(ke_z) z_2, \quad (\text{A21})$$

$$\ddot{\Psi}(e_z) = -k\dot{\Psi}(e_z) \tanh(ke_z) z_2 \quad (\text{A22})$$

$$-k\Psi(e_z) (k \operatorname{sech}^2(ke_z) z_2^2 + \tanh(ke_z) \dot{z}_2), \quad (\text{A23})$$

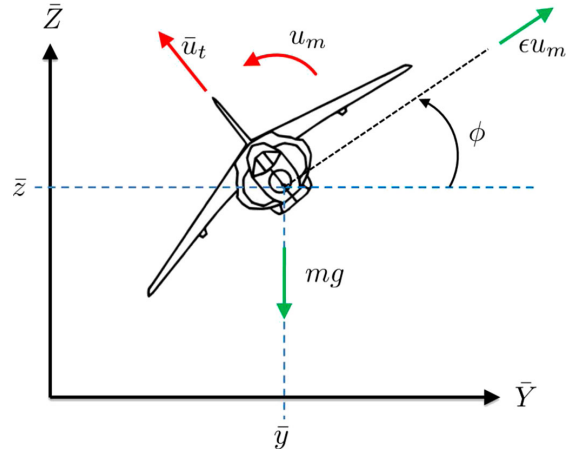


Figure A1. PVTOL aircraft system.

Table A1. System parameters.

Parameter	Value	Unit
m	1.79	kg
J	0.04	kg · s ²
g	9.81	m · s ⁻²

Table A2. Saeki and I&I controller parameters.

Parameter	Value	Unit
k_{p_y}	1.69	kg · s ⁻²
k_{p_z}	2.89	kg · s ⁻²
k_{p_ϕ}	72.5	s ⁻²
k_{v_y}	1.82	kg · s ⁻¹
k_{v_z}	2.38	kg · s ⁻¹
k_{v_ϕ}	13.6	s ⁻¹
δ	16	N · N ⁻¹
k	4	s · kg ⁻¹ · m ⁻¹

Note that the I&I proposed controller uses the additional δ and k parameters.

Table A3. I&I-retuned controller parameters.

Parameter	Value	Unit
k_{p_y}	2	kg · s ⁻²
k_{p_z}	2.2	kg · s ⁻²
k_{p_ϕ}	32	s ⁻²
k_{v_y}	2	kg · s ⁻¹
k_{v_z}	2	kg · s ⁻¹
k_{v_ϕ}	3	s ⁻¹
δ	12	N · N ⁻¹
k	0.08	s · kg ⁻¹ · m ⁻¹

where

$$\ddot{y}_2 = -w \cos(\phi) \frac{\dot{u}_t}{m} - \sin(\phi) \frac{\dot{u}_t}{m}, \quad (\text{A24})$$

$$\ddot{z}_2 = -w \sin(\phi) \frac{\dot{u}_t}{m} + \cos(\phi) \frac{\dot{u}_t}{m}, \quad (\text{A25})$$

$$\dot{u}_t = \frac{\dot{\sigma}}{2\sqrt{\sigma}}. \quad (\text{A26})$$

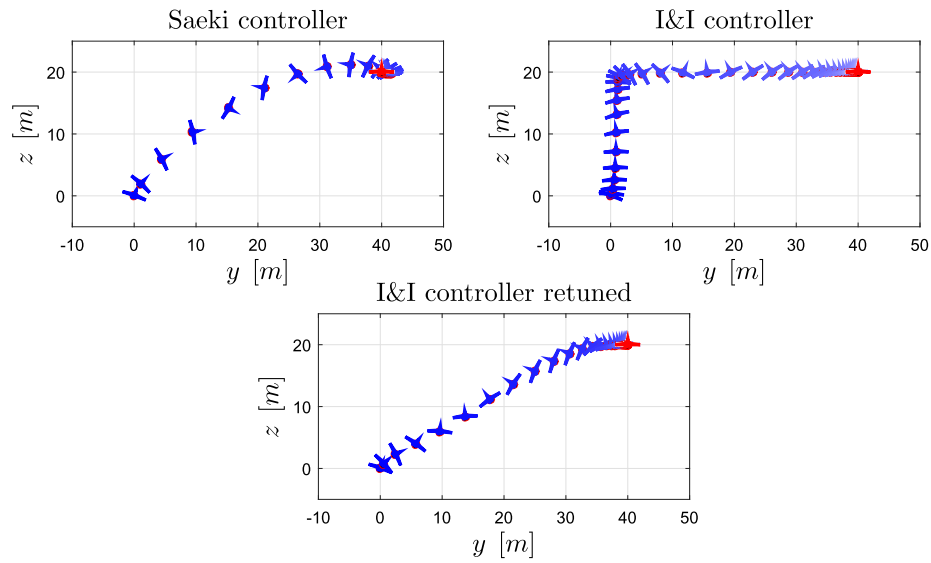


Figure A2. PVTOL aircraft motion in the (y, z) -plane.

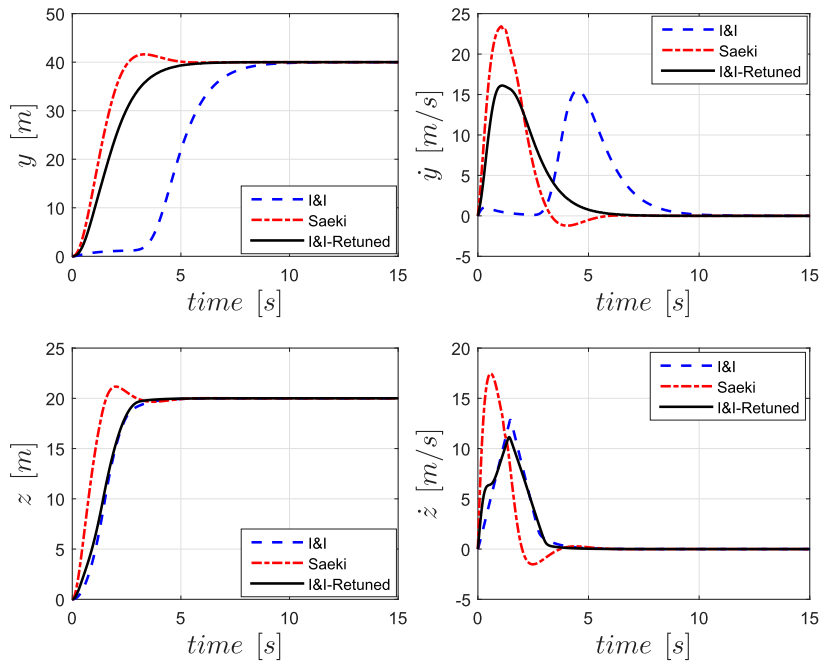


Figure A3. PVTOL aircraft translational states.

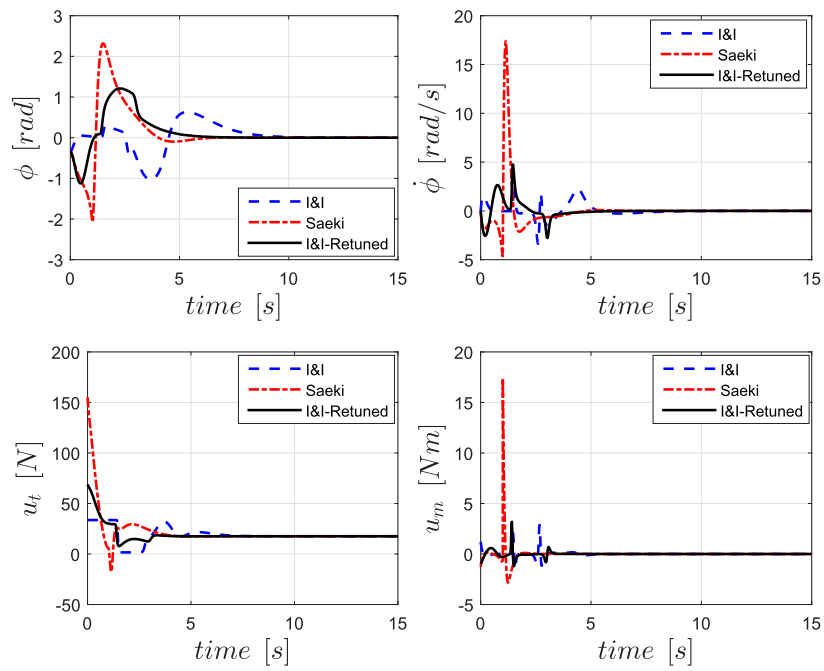


Figure A4. PVTOL aircraft rotational states and control inputs.

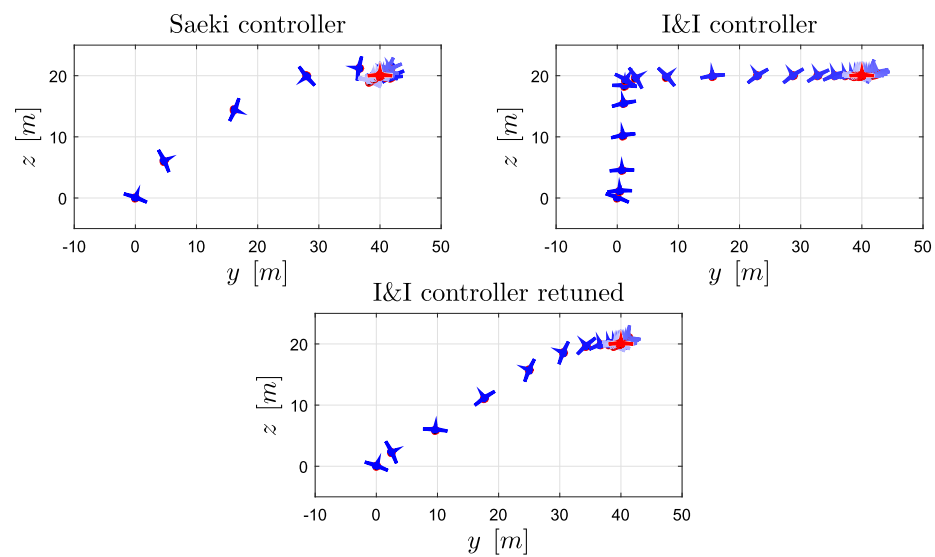


Figure A5. PVTOL aircraft motion in the (y, z) -plane.

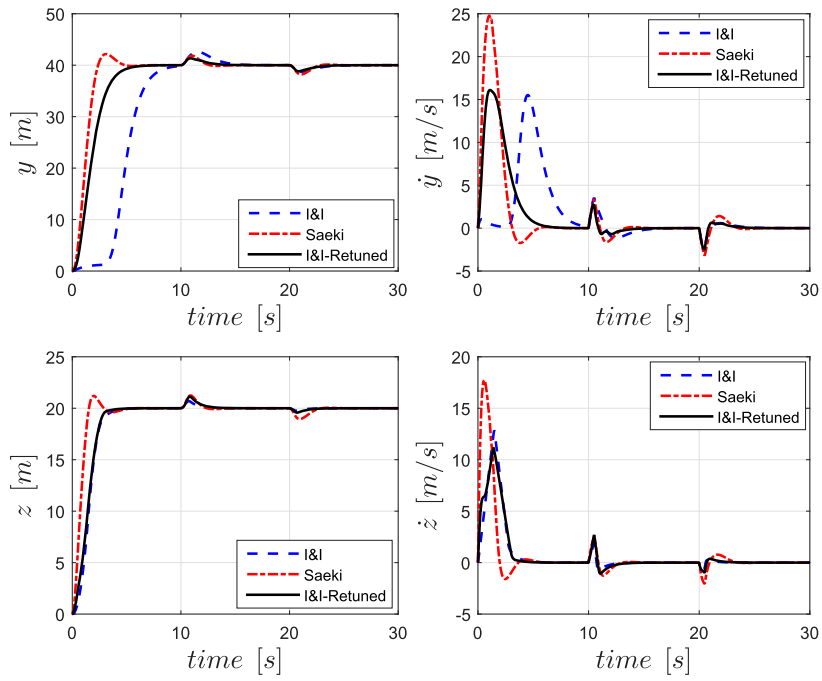


Figure A6. PVTOL aircraft translational states.

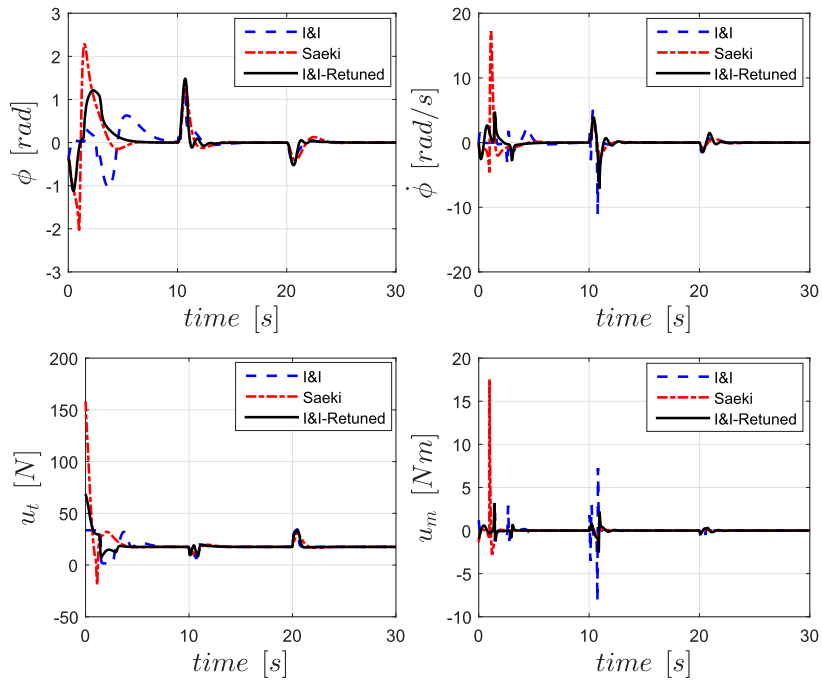


Figure A7. PVTOL aircraft rotational states and control inputs.

Bibliografía

- [1] D. Aeyels. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. *Systems & Control Letters*, 5(5):289–294, 1985.
- [2] E. Altug, J. P. Ostrowski, and R. Mahony. Control of a quadrotor helicopter using visual feedback. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292)*, volume 1, pages 72–77 vol.1, 2002.
- [3] Alessandro Astolfi, Dimitrios Karagiannis, and Romeo Ortega. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag London Ltd., London, 2008.
- [4] Alessandro Astolfi and Romeo Ortega. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48(4):590–606, 2003.
- [5] Tommaso Bresciani. Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter. Master thesis, Lund University, Department of Automatic Control, Box 118 SE-221 00 Lund Sweden, October 2008.
- [6] C. I. Byrnes and A. Isidori. A Frequency Domain Philosophy for Nonlinear Systems, with Applications to Stabilization and to Adaptive Control. In *Proceedings of the 23rd Conference on Decision and Control*, pages 1569–1573, Las Vegas, Nevada, 1984.
- [7] C.I. Byrnes, A. Isidori, and J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(11):1228–1240, 1991.
- [8] C.I. Byrnes, F. Delli Priscoli, and A. Isidori. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser, Boston: MA, 1997.
- [9] J. Carr. *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag, 1981.
- [10] Fernando Castañeda, Francisco Jurado, and Víctor Santibáñez. Control de movimiento de robots manipuladores vía inmersión e invariancia: Casos particulares. In *Congreso Nacional de Control Automático*, pages 339–345, Cuernavaca, Morelos, México., Octubre 2015. AMCA.
- [11] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(4):510–516, July 2004.
- [12] P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul. Stabilization of a mini-rotorcraft having four rotors. In *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*, volume 3, pages 2693–2698 vol.3, Sept 2004.
- [13] I. Fantoni, A. Zavala, and R. Lozano. Global stabilization of a PVTOL aircraft with bounded thrust. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, volume 4, pages 4462–4467 vol.4, Dec 2002.
- [14] Tarek Hamel, Robert Mahony, Rogelio Lozano, and James Ostrowski. Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4-flyer. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):217 – 222, 2002. 15th IFAC World Congress.

- [15] J. Hauser, S. Sastry, and G. Meyer. Nonlinear controller design for flight control systems*. *IFAC Proceedings Volumes*, 22(3):385 – 390, 1989.
- [16] J. Hauser, S. Sastry, and G. Meyer. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to VSTOL aircraft. *Automatica*, 28(4):665–679, 1992.
- [17] Fernando Hernández-Castañeda, Víctor Santibáñez, and Francisco Jurado. Control de estabilización para el sistema PVTOL vía inmersión e invariancia. In *XVIII Congreso Mexicano de Robótica*, Mazatlán Sinaloa, México, 2016.
- [18] Fernando Hernández-Castañeda, Víctor Santibáñez, and Francisco Jurado. Priority altitude PVTOL aircraft control via immersion and invariance. *International Journal of Control*, 0(ja):1–26, 2018.
- [19] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 3rd edition, Berlin, 1995.
- [20] A. Isidori. A remark on the problem of semiglobal nonlinear output regulation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 42(12):1734–1738, 1997.
- [21] A. Isidori and C. H. Moog. On the Nonlinear Equivalent of the Notion of Transmission Zeros. In C.I. Byrnes and A. Kurzhanski, editors, *Modelling and Adaptive Control*, volume 105 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 146–158. Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [22] Y. Ji, H. Zhou, and X. Guo. Asymptotic tracking control for an underactuated quadrotor via immersion and invariance technology. In *2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, pages 1674–1679, May 2017.
- [23] P. Jouan. Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM J. Control and optimization*, 41(6):1756–1778, 2003.
- [24] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using Lyapunovs auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5):241–247, 1998.
- [25] N. Kazantzis and C. Kravaris. Singular pdes and the single-step formulation of feedback linearization with pole placement. *Systems and Control Letters*, 39(2):115–122, 2000.
- [26] R. Kelly and V. Santibáñez. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Education, Madrid, 2003.
- [27] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Third edition, 2002.
- [28] P.V. Kokotovic. Recent trends in feedback design: an overview. *Automatica*, 21(3):225–236, 1985.
- [29] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [30] F. Lin, W. Zhang, and R. D. Brandt. Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3):343–351, 1999.
- [31] A.N. Michel, K. Wang, and B. Hu. *Qualitative Theory of Dynamical Systems: The Role of Stability Preserving Mappings*. Marcel Dekker, 2nd edition, New York, 2001.
- [32] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [33] R. Olfati-Saber. Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling. In *Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control*, Sydney, Australia, Dec 2000.
- [34] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag, London, 1998.

- [35] B.D. Riedle and P.V. Kokotovic. Integral manifolds of slow adaptation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 31(4):316–324, 1986.
- [36] Masami Saeki and Yoshinobu Sakaue. Flight control design for a nonlinear non-minimum phase VTOL aircraft via two-step linearization. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA, December 2001.
- [37] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [38] P. Setlur, Y. Fang, D. Dawson, and B. Costic. Nonlinear tracking control of the VTOL aircraft. In *In Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control CDC'01*, 2001.
- [39] E. D. Sontag. Smooth Stabilization Implies Coprime Factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(4):435–443, Apr 1989.
- [40] V.I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [41] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [42] W.M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer-Verlag, 3rd edition, New York, 1985.
- [43] B. Zhao, B. Xian, Y. Zhang, and X. Zhang. Nonlinear robust adaptive tracking control of a quadrotor uav via immersion and invariance methodology. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(5):2891–2902, May 2015.