

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

“Fault tolerant control for a three degrees of freedom overhead crane through Takagi-Sugeno techniques”.

Control tolerante a fallas de una grúa de tres grados de libertad mediante técnicas Takagi-Sugeno.

Tesis que presenta:

Ing. Oscar Roberto de los Santos Estudillo

Como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECATRÓNICA

Directores de Tesis

Dr. Francisco Ronay López Estrada
M. C. Samuel Gómez Peñate

Asesores

Dr. Elías Nefalí Escobar Gómez
Dr. Héctor Hernández de León

Tutor

Dr. Sabino Velázquez Trujillo

Marzo 2020

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. México.

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

“Fault tolerant control for a three degrees of freedom overhead crane through Takagi-Sugeno techniques”.

Control tolerante a fallas de una grúa de tres grados de libertad mediante técnicas Takagi-Sugeno.

Tesis que presenta:

Ing. Oscar Roberto de los Santos Estudillo

Como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECATRÓNICA

Directores de Tesis

Dr. Francisco Ronay López Estrada
M. C. Samuel Gómez Peñate

01/Mar/2020

Asesores

Dr. Elías Neftalí Escobar Gómez
Dr. Héctor Hernández de León

Tutor

Dr. Sabino Velázquez Trujillo

Marzo 2020

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. México.

DEDICATORIA

A mi padre, el hombre que me enseñó la importancia de la educación y el poder de una mente instruida. A mi madre, la mujer que me mostró el valor de la vida y la virtud de un corazón honesto.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis directores, el Dr. Francisco Ronay López Estrada y el M. C. Samuel Gómez Peñate por permitirme llevar a cabo este trabajo de investigación y sobre todo por guiarme durante el proceso y ofrecerme sus conocimientos sin reservas. Les agradezco la paciencia, la dedicación y el interés que invirtieron en el proyecto y en mí para lograr el desarrollo satisfactorio de este trabajo.

También agradezco a mis revisores, el Dr. Elías Neftalí Escobar Gómez, el Dr. Héctor Hernández de León y a mi tutor, el Dr. Sabino Velázquez Trujillo por sus observaciones siempre acertadas; por sus comentarios, palabras de aliento, consejos y sugerencias que me ayudaron avanzar y superar obstáculos.

Quiero agradecer a mis compañeros de posgrado por su apoyo moral e intelectual el cual tuvo un impacto innegable en este trabajo. Gracias por hacer mas amenos los días de mucho trabajo, y al mismo tiempo despertar mi espíritu de competencia.

Muchas gracias especialmente al CONACYT por la contribución financiera que me ha brindado y que le a dado a miles de estudiantes para apoyar a la investigación y al avance científico.

RESUMEN

El trabajo de investigación presentado desarrolla el diseño de un controlador con seguimiento de referencia tolerante a fallas aditivas presentes en actuadores. El esquema de tolerancia a fallas para el sistema de una grúa de tres grados de libertad (3DOF por sus siglas en inglés) representado por un modelo Takagi-Sugeno (TS) es pasivo, también denominado control confiable o robusto.

Se presenta la obtención de los submodelos TS a partir del modelo no lineal del sistema y la identificación de los elementos que vuelven no lineal a este. A partir de su representación multimodelo, se presenta el desarrollo del diseño de un estabilizador haciendo uso de un tipo de control por realimentación para sistemas Takagi-Sugeno (compensación paralela distribuida) con desempeño robusto H_∞ ante la presencia de fallas aditivas en los actuadores. Posteriormente, se propone un modelo aumentado del sistema en su representación TS, el cual integra a las referencias (salidas deseadas) como elementos más en el vector de estados. Tanto en el caso de estabilización como en el de control por referencia, la condición de estabilidad y desempeño robusto están dadas por una desigualdad matricial lineal (LMI por sus siglas en inglés), deducidas a partir del enfoque de Lyapunov y configuradas de acuerdo al uso de propiedades algebraicas como el complemento de Schur para lograr la factibilidad de estas. Se presentan resultados de simulación que demuestran la aplicabilidad y el desempeño del controlador obtenido en presencia de fallas aditivas en la entrada.

Para alcanzar los objetivos y resultados debidamente en este trabajo, se presentan todas las herramientas que el lector necesitará para el correcto entendimiento del proceso. Se hace una debida introducción a los modelos TS y al campo de los sistemas y esquemas con tolerancia a fallas. A través de la lectura se presentan ejemplos para la mejor comprensión de conocimientos clave que el lector necesitará.

ABSTRACT

The development of a fault tolerant tracking control design against additive actuator faults is presented in this work. The fault tolerant scheme proposed for a three degrees of freedom (3DOF) overhead crane system described by its Takagi-Sugeno equivalent representation is a passive one. These type of fault tolerant control schemes can also be referred to as reliable control or robust control.

The deduction of the TS submodels derived from the nonlinear model of the system, and the process of identification of the elements that make this system nonlinear is presented. From the Takagi-Sugeno submodels representation, the development of a stabilizer control scheme is described, making use of a certain type of feedback controller commonly used in TS approaches called parallel distributed compensation which is conditioned to show a H_∞ robustness on its performance even in the case of the appearance of additive actuator faults. Furthermore, a Takagi-Sugeno augmented system is proposed which adds the desired outputs of the system as elements within the state vector. In both the cases of stabilization and tracking control, the stability and robustness of performance conditions are given by a set of linear matrix inequalities, derived from the Lyapunov stability condition approach. These LMI's are configured according to conditions of feasibility, ones that are achieved through the use of algebraic properties such as Schur's complement. Simulation results are presented to show the controllers performance and the reliability even under faulty conditions.

To achieve the goals and the expected results this research aims at, all the necessary tools are presented so the reader has no problem following the process and leaves with a good understanding of this work. An introduction to the TS models and the field of fault tolerant control schemes is given. Moreover, easily understandable examples are given throughout the introductory content to better comprehend the key aspects of this work.

Índice general

1. Introducción	0
1.1. Estado del Arte	4
1.2. Hipótesis	6
1.3. Objetivos	7
1.3.1. General	7
1.3.2. Específicos	7
1.4. Organización de la tesis	7
2. Control tolerante a fallas	9
2.1. Control de oscilaciones en grúas mecánicas	9
2.2. Control Tolerante a Fallas	11
2.2.1. Clasificación de fallas	14
2.2.2. Modelado de fallas	16
3. Modelado Takagi-Sugeno	20
3.1. Introducción	20
3.1.1. Modelado TS a través del Sector no Lineal	22
3.1.1.1. Ejemplo 1: de modelado de sistemas TS	24
3.1.2. Control de modelos Takagi-Sugeno	32
3.1.3. Ejemplo 2: Control del sistema de 3 tanques	34
3.1.4. Regiones de desigualdades lineales matriciales	37
4. Control robusto de una grúa de 3DOF	43
4.1. Modelo no lineal de una grúa viajera	43

4.1.1. Modelo Takagi-Sugeno de la grúa	49
4.1.2. Desarrollo del controlador convexo H_∞	52
4.1.3. Control de seguimiento de trayectoria convexo H_∞	57
5. Resultados y Discusión	62
5.1. Validación del modelo convexo de la grúa	62
5.2. Desempeño de estabilización H_∞	65
5.3. Desempeño control por de seguimiento de trayectorias	70
5.3.1. Comparación de desempeño	76
6. Conclusiones	81
6.1. Publicaciones	82
Referencias	83

Índice de figuras

1.1. Presencia de grúas en la industria	1
1.2. Grúa mecánica de 3 grados de libertad	3
2.1. Oscilaciones en grúas viajeras	10
2.2. Diagrama a bloques de un control anti-sway	11
2.3. Controlador tolerante a fallas activo	13
2.4. Controlador tolerante a fallas pasivo	14
2.5. Clasificación de fallas por localización	15
2.6. Clasificación de fallas por características en el tiempo	15
3.1. Sector no lineal global	22
3.2. Sector no lineal local	23
3.3. Sistema de tres tanques de agua.	24
3.4. Comportamiento de estado x_1	30
3.5. Comportamiento de estado x_2	31
3.6. Comportamiento de estado x_3	31
3.7. Señal de entrada a ambos modelos	32
3.8. Estabilización en x_1	36
3.9. Estabilización en x_2	36
3.10. Estabilización en x_3	37
3.11. Región de estabilidad \mathbf{D}_2	39
3.12. Región de estabilidad \mathbf{D}_3	40
3.13. Región de estabilidad \mathbf{D}_3	41
4.1. Esquema de una grúa de tres grados de libertad.	44

4.2. Esquema de control de seguimiento de trayectoria.	57
5.1. Fuerza de excitación a ambos sistemas.	63
5.2. Comparación respuesta TS contra sistema no lineal en estados x_1 y x_2	64
5.3. Comparación respuesta TS contra sistema no lineal en estados x_3 y x_4	64
5.4. Comparación respuesta TS contra sistema no lineal en estados x_5 y x_6	65
5.5. Diagrama esquemático en Simulink	67
5.6. Falla aditiva más ruido	68
5.7. Estados de posición de la grúa 2D.	69
5.8. Estados de velocidad de la grúa 2D.	69
5.9. Diagrama esquemático en Simulink	73
5.10. Estados de posición de la grúa 2D.	73
5.11. Estados de velocidad de la grúa 2D.	74
5.12. Ruido más una señal desconocida presente como un off-set en la entrada.	74
5.13. Estados de posición de la grúa 2D.	75
5.14. Estados de velocidad de la grúa 2D.	75
5.15. Ruido más una señal desconocida presente como un off-set en la entrada.	76
5.16. Diagrama de bloques para configurar el estabilizador para seguir una trayectoria	77
5.17. Falla aditiva presente en la entrada.	77
5.18. Comparación, control de estado x_1 con ambos esquemas.	78
5.19. Comparación, control de estado x_2 con ambos esquemas.	78
5.20. Comparación, control de estado x_3 con ambos esquemas.	79
5.21. Comparación, control de estado x_4 con ambos esquemas.	79
5.22. Comparación, control de estado x_5 con ambos esquemas.	80
5.23. Comparación, control de estado x_6 con ambos esquemas.	80

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años se han incrementado los estudios de sistemas de diagnóstico y control tolerante a fallas (FTC por sus siglas del inglés Fault Tolerant Controller) debido al rápido crecimiento en la demanda en términos de desempeño y seguridad industriales, tanto de los sistemas como del operador humano (Rotondo et al. 2016). Estos esquemas de seguridad requieren de modelos basados en datos o ecuaciones diferenciales para representar las dinámicas complejas presentes en los sistemas físicos y que frecuentemente son no lineales (Wu & Dong 2017). Recientemente, el modelado mediante técnicas multimodelos (MM) a través de topologías de sistemas Lineales de Parámetros Variantes (LPV), cuasi-LPV (qLPV) y sistemas Takagi-Sugeno (TS), se han presentado como una alternativa atractiva para tratar con el análisis de sistemas no lineales complejos, ya que es posible extender técnicas desarrolladas para sistemas lineales, pero aplicadas a los sistemas no lineales (López-Estrada et al. 2017).

Sin embargo, cuanto más automatizado está un proceso, más propenso es a sufrir una falla (Gómez-Peñate et al. 2018). Una *falla* se puede definir generalmente como una desviación no permitida de al menos una propiedad característica o parámetro, que cambia el comportamiento del sistema (Blanke et al. 2006); por ejemplo un mal funcionamiento en un sensor o en un actuador. Todas las variaciones no esperadas que tienden a degradar el desempeño general de un sistema se pueden interpretar como fallas. Por otro lado, para indicar una interrupción completa del sis-

tema se tendría que considerar una avería. Es importante remarcar que una falla denota un mal funcionamiento en lugar de una catástrofe (Witczak 2014), por lo cual una falla no necesariamente termina en avería. Sin embargo, si una falla no se detecta a tiempo, el sistema comienza a degradarse lo que da resultado a una avería del instrumento (sensor o actuador) y puede terminar en una catástrofe(Nagy-Kiss et al. 2015).



Figura 1.1: Presencia de grúas en la industria

En la literatura los sistemas FTC's se han clasificado en dos enfoques (Zhang & Jiang 2008a), la primera denominada FTC pasivo, es una extensión del control robusto (Yu & Zhang 2015); requiere del conocimiento de todas las posibles fallas que puedan afectar al sistema (generalmente la magnitud de estas fallas). En este esquema el controlador se diseña a priori para ser robusta a todos fallos definidos y no se realiza ninguna adaptación en línea. Este tipo de control es interesante porque no necesita de algún módulo de diagnóstico de fallas (Nasiri et al. 2019). Sin embargo, sus principales inconvenientes son la imposibilidad de considerar fallas desconocidas y el conservadurismo de las condiciones de diseño.

En contraste, los sistemas FTC's activos ofrecen flexibilidades en la tarea de diseño y se asimilan como una técnica de estructura variable porque la estructura del controlador puede ser modificada y reconfigurada automáticamente cuando ocurre una falla (Liu et al. 2018). Además, ya no es necesario enumerar todas las fallas posibles en el sistema. Un modulo de detección y aislamiento de

fallas (FDI por sus siglas del inglés Fault Diagnosis and Isolation) esta incorporado en la unidad de control que proporciona información sobre las fallas ocurridas en la unidad FTC (Nemati et al. 2019), que reconfigura la estrategia de control para compensarlas. Sin embargo, una desventaja de los sistemas FTC activos se debe al módulo FDI, lo cual introduce cierto conservadurismo en la solución del controlador. Este trabajo está dedicado al estudio de controladores tolerantes a fallas pasivos.

En la industria existen muchos sistemas mecatrónicos que son susceptibles a fallas, tales como brazos robóticos, robots móviles de transporte de carga, empacadoras, grúas de transporte de carga, entre otros. Este trabajo se enfocará en el estudio de sistemas FTC aplicados a una grúa de 3 grados de libertad (DOF). Éstos mecanismos tienen el potencial de cargar cientos de toneladas y son ampliamente usadas en plataformas petroleras, barcos, fabricas, depósitos de ferrocarriles, embarcaderos, entre otros (Kim et al. 2004). Debido a su naturaleza, la grúa es un sistema subactuado, es decir tiene más grados de libertad que entradas de control. En caso particular de la grúa que se muestra en la Fig. 1.2, se asume que la carga está sujeta a un plano, por lo cual los grados de libertad de la grúa son tres: el primero referente al movimiento sobre el eje x (movimiento adelante/atrás del carro), el segundo sobre el eje z (movimiento arriba/abajo de la carga) y por último el movimiento angular de la carga sobre el eje x . Sin embargo, el sistema cuenta con solo dos actuadores que son el motor del carrito (Trolley) y el motor de elevación (Hoist). El objetivo de control, es por tanto ubicar la grúa en una posición deseada, por lo cual el motor del carrito debe moverse tan rápido como sea posible reduciendo al mínimo las oscilaciones que puedan llegar a inestabilizar el sistema (Shi et al. 2017). Debido a ello, es importante diseñar esquemas de control que no solo consideren la subactuación, el gran número de linealidades, sino también robustez ante las oscilaciones del sistema.



Figura 1.2: Grúa mecánica de 3 grados de libertad

En este trabajo se propone un sistema de control robusto tolerante a fallas pasivo, considerando fallas en los actuadores de una grúa de tres grados de libertad. Para ellos se propone considerar un enfoque basado en modelos convexos Takagi-Sugeno. El objetivo del trabajo es lograr ubicar la grúa en una posición deseada, reduciendo al mínimo las oscilaciones de la carga. Este objetivo deberá cumplirse aún bajo condiciones de operación de fallas en el actuador; estas fallas se aprecian como offsets en las rotaciones de los motores. Por ejemplo un rotor que ante cierta señal de entrada produce más revoluciones que las esperadas, o un rotor que con el tiempo presenta desgastes y por lo tanto empieza a fallar. Además, se considerará la existencia de ruido de medición y perturbaciones externas. Para lograr atenuar las posibles perturbaciones y ruido de medición se estudiarán técnicas de control robusto basado en un enfoque H_∞ , las cuales han demostrado una amplia aplicabilidad en la atenuación de perturbaciones, ruido de medición e incertidumbres del modelo (Estrada et al. 2015). Es importante remarcar que una falla en el actuador llega a provocar oscilaciones no controlables en la carga ocasionando inestabilidad y en consecuencia pérdidas económicas o de vidas humanas; de ahí la importancia no solo técnica sino también social de este trabajo.

1.1. Estado del Arte

Entre los primeros en abordar el tema de control de oscilaciones en grúas mecánicas se encuentran [Mita & Kanai \(1979\)](#) quienes presentaron una solución a un control de tiempo mínimo para perfiles de velocidad libre de oscilaciones bajo la asunción de que al inicio y final de la aceleración estas no existen, y [Ohnishi et al. \(1981\)](#) quienes propusieron un control anti-oscilación basado en las dinámicas de oscilación de la carga. Además, en [Sakawa & Shindo \(1982\)](#) se estudió el movimiento simultáneo del levantamiento de la carga y el viaje del carro en el riel, tratando de minimizar las oscilaciones durante, y al final de la transición sin mucha consideración en el tiempo mínimo de ejecución. En [Karihaloo & Parbery \(1982\)](#) se sugiere una ley de control óptimo produciendo aceleraciones altas en el trayecto lo que conllevó a oscilaciones durante el mismo pero no en la posición final, obteniendo un tiempo final mínimo. En [Starr \(1985\)](#) se propuso un algoritmo de lazo abierto el cual requería la restricción de una carga con oscilación cero al inicio. En [Moustafa & Ebeid \(1988\)](#) se diseñó un control dependiente de la trayectoria basado en la linealización del modelo a lo largo de la trayectoria deseada para una grúa tridimensional. En [Al-Garni et al. \(1995\)](#) se presentó un esquema de control por retroalimentación no lineal que ya consideraba movimiento simultáneo en los ejes x , y y z . Los autores en [Lee \(1998\)](#) propusieron un esquema de control desacoplado basado en la linealización del modelo al rededor del punto de equilibrio.

Gran parte de las investigaciones se han centrado en esquemas de control tradicionales que consisten en técnicas lineales ([Kim 2004](#), [Sawodny et al. 2002](#)). Por otra parte, los autores en [Lee & Cho \(2001\)](#) propusieron un control basado en el control de la posición de motor para controlar indirectamente la posición de la grúa mediante técnicas control difuso. A su vez en [Chang & Chiang \(2008\)](#) se presentó un método basado en datos que no requiere de un modelo dinámico complejo el cual considera datos de la posición del carro y ángulo de oscilación para reducir las oscilaciones. En el trabajo de [Garrido et al. \(2008\)](#) se propone un sistema de control anti-balanceo mediante mediciones con un inclinómetro bidimensional en línea mientras que el control modulación de entrada es dividido en dos fases: movimiento en línea recta y cancelación de perturbaciones externas. En el trabajo de [Almutairi & Zribi \(2009\)](#) se expone un esquema de control por modos deslizantes para regular la posición de la grúa y control de las oscilaciones en la carga. El desempeño de este

sistema de lazo cerrado fue simulado usando MATLAB. En (Castillo et al. 2015) se explora la aplicación experimental de la metodología de diseño de una superficie óptima singular LQ a través del Toolbox de MATLAB en una grúa viajera.

Este tema de investigación mantiene su relevancia en la actualidad. Recientemente, en Maghsoudi et al. (2017) se propone un esquema de control por modulación de entrada mejorado para un control de oscilaciones eficiente de una grúa viajera tridimensional con fricción el cual obtiene una mas alta reducción de oscilación al basar el modulador de entrada en el modelo completamente no lineal. A la vez, en Vu et al. (2017) se establece un control adaptativo el cual garantiza el seguimiento de posición deseada así como el control en las oscilaciones del cable de la carga. Se propone un control anti-oscilaciones adaptativo para grúas viajeras inciertas, presentando el modelo del sistema incluyendo sus incertidumbres y perturbaciones. El desempeño del algoritmo propuesto es verificado vía simulación en MATLAB. Más recientemente, en Abdullahi et al. (2018) se propone una nueva técnica por configuración de comandos adaptativa basados en la salida del sistema para una reducción efectiva de oscilaciones de una grúa bajo el efecto del levantamiento de carga y perturbación por viento.

Por otro lado, en la última década los estudios se ha expandido a la detección de fallas como se aprecia en Chen et al. (2008) donde se usan diferenciadores de modos deslizantes de segundo y tercer grado para resolver el diagnostico de fallas para el sistema no lineal y se proponen esquemas de diagnosis de fallas para lograr la detección y aislamiento de las mismas. En (Tan & Edwards 2007) los autores presentan un esquema de control tolerante a fallas en sensores en donde se reconstruye el vector de estados a partir de las lecturas de los sensores con falla y la ayuda de un observador para así lograr un *sensor virtual* cuya señal es usada para generar una entrada de control. A su vez, en Chen & Saif (2011) se propone un esquema de diagnóstico de fallas para esta clase de sistemas con entradas conocidas y también desconocidas haciendo uso de diferenciadores robustos de modos deslizantes de alto orden.

Algunos autores han explorado el diseño de controladores robustos basados en técnicas multi-modelos. Por ejemplo, en Kiriakidis (2001) proponen una estabilización robusta de sistemas T-S considerando desigualdades matriciales bilineales. Los autores en Adeli et al. (2011) presentan

un controlador híbrido incluyendo regulación de la posición y control de oscilaciones diseñado mediante técnicas de sistemas Takagi-Sugeno (TS). De igual manera, en [Hilhorst et al. \(2015\)](#) se propone un controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de orden reducido para sistemas lineales de parámetros variables (LPV) de tiempo discreto, validando sus resultados en una grúa viajera con longitud de cable variable. En [Zhao & Li \(2015\)](#) se explora la estabilización de sistemas T-S difusos por medio de compensación paralela distribuida. Así también, En [Rabaoui et al. \(2018\)](#) se presenta el diseño de un control tolerante a fallas para un sistema LPV afectado por fallas en actuador y entradas desconocidas. En [Morato et al. \(2018\)](#) se propone un esquema de reconfiguración para tolerancia a fallas activa, considerando un enfoque de control predictivo aplicado a un modelo LPV de un sistema en el cual se presenta pérdida de efectividad (fallas multiplicativas). No obstante ninguno de los trabajos reportados se sometió a pruebas de desempeño en presencia de perturbaciones por parte señales desconocidas aditivas.

Lo anterior demuestra que es necesario continuar expandiendo la investigación en este tema, enfocándonos no solo en el control antioscilaciones y el diagnóstico de fallas en el sistema, sino también en la tolerancia a dichas fallas lo cual como resultado nos garantizará un mejor desempeño y una mayor confianza en el sistema. Es importante notar que una falla en una grúa no solo representa un problema mecánico, sino también un problema económico y social grave, ya que a nivel industrial se mueven miles de dolares por hora a través de estos mecanismos. Por lo que este trabajo contribuirá con el desarrollo de estrategias de control robusto que minimicen el riesgo de "paros" debido a fallas mecánicas en grúas mecánicas, y aseguren un adecuado manejo de la carga.

1.2. Hipótesis

Mediante un esquema de control tolerante a fallas basado en control H_∞ Takagi-Sugeno se reducirán las oscilaciones de la carga lo cual garantizará la estabilidad del sistema aún bajo condiciones de fallas parciales aditivas¹

¹Para verificar la reducción de oscilaciones y sus tolerancia a fallas se comparará con un estabilizador común diseñado a partir de regiones LMI.

1.3. Objetivos

1.3.1. General

Desarrollar un sistema de control robusto H_∞ Takagi-Sugeno aplicado a una grúa de 3DOF el cual genere leyes de control que reduzcan al mínimo las oscilaciones en la carga al seguir una trayectoria deseada aún bajo condiciones de operación en estado de fallas parciales en los actuadores. Para ello se considerará una técnicas de control tolerante a fallas de tipo pasivo.

1.3.2. Específicos

- Realizar un estudio extenso del estado del arte sobre modelado Takagi-Sugeno y grúas mecánicas.
- Estudiar el modelo matemático no lineal de una grúa de 3 DOF y obtener una representación en modelos TS.
- Diseñar un controlador robusto tolerante a fallas pasivo H_∞ y verificar su efectividad a nivel simulación en una grúa de 3DOF.
- Verificar la efectividad del controlador ante diferentes condiciones de fallas parciales en los actuadores de la grúa. Con ello se espera compensar fallas parciales en los motores de la grúa.

1.4. Organización de la tesis

En los capítulos 2 y 3 se presenta una introducción a los conceptos principales que se abordan es este trabajo. Se provee un fundamento teórico para describir el contexto en el que este aporte científico toma lugar y de esta forma familiarizar al lector con el problema a atacar y las herramientas con las que se cuentan para solucionarlo. Por consiguiente, en el Capítulo 4 se hace el desarrollo

del aporte principal de esta tesis. Se describe de manera meticulosa el proceso de obtención del modelo matemático en cuestión, su transformación a modelos T-S y el desarrollo del controlador tolerante a fallas diseñado para solucionar la problemática de control en este sistema en particular. Por último, en los capítulos 5 y 6 se presentan los resultados obtenidos, sus simulaciones resultantes y se presenta el análisis y discusión sobre estos.

Capítulo 2

Control tolerante a fallas

En este capítulo se hace la introducción a conceptos relevantes los cuales se involucran de forma intrínseca en la investigación presentada. El primero es el control antioscilaciones el cual es de los objetivos principales a alcanzar. El segundo es el Control Tolerante a Fallas, explorando los dos tipos existentes. Este último es el esquema de control que estaremos explorando en este trabajo.

2.1. Control de oscilaciones en grúas mecánicas

Las oscilaciones en cargas que son trasladadas por grúas son provocadas cada vez que estas aceleran o desaceleran. Los sistemas de control de oscilaciones deben asegurarse de que estas oscilaciones de carga sean eliminadas de tal forma que el traslado de la carga sea rápido, seguro y sin dañar los bienes transportados.

Los mecanismos de suspensión por cable son aquellos que cuentan con un objeto suspendido de una cuerda. Estos se clasifican en mecanismos completamente restringidos e incompletamente restringidos. Estos últimos tienen la virtud de permitir movimiento tridimensional y orientación de la del objeto suspendido. Sin embargo, también presenta el inconveniente de que el objeto manipulado oscila fácilmente como se aprecia en una grúa viajera (ver Fig. 1.2) el cual es un mecanismo incompletamente restringido sencillo (Yanai et al. 2002). En este tipo de sistemas los actuadores

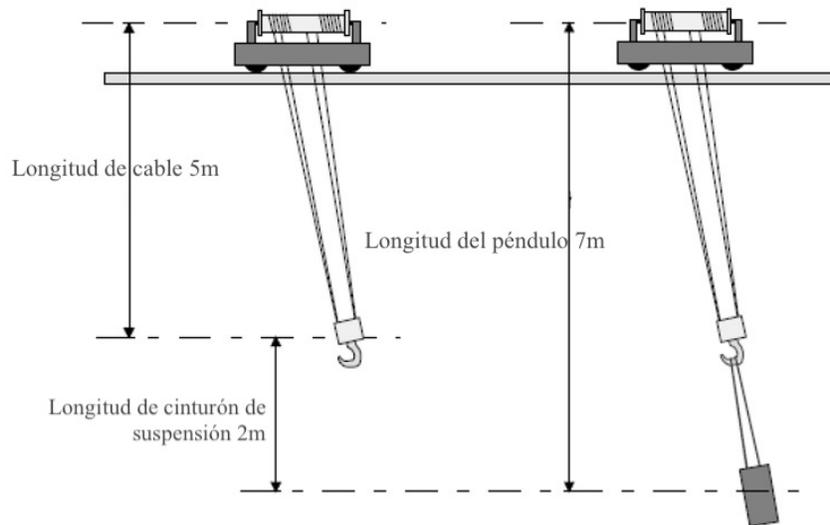


Figura 2.1: Oscilaciones en grúas viajeras

son entonces controlados adecuadamente de tal forma que durante la trayectoria y después de parar la carga esté suspendida sin ningún tipo de oscilación como si no hubiera existido movimiento por parte de la grúa. En lo que concierne al transporte y manejo en las grúas, la tendencia que se busca es claramente hacia el incremento en la productividad y calidad. Se busca la mayor velocidad de transporte sin esté crear mas oscilaciones de las que el sistema puede eliminar.

Para lograr una supresión exitosa del movimiento de balanceo en una carga suspendida es importante saber que partes de la dinámica tomar en cuenta durante la etapa del diseño de la ley de control y que partes deben ser despreciadas. En la Fig. 2.2 se aprecia el diagrama generalizado de un control contra oscilaciones propuesto por los autores en [Mahfouf et al. \(2000\)](#). Este se conforma de la planta la cual se caracteriza por contar con un cable del cual suspende una carga; un sensor que lleve a cabo la medición del ángulo que forma el cable con la normal debido al balanceo del objeto suspendido, la cual se resta a la señal de referencia resultando en la señal de error con la que trabaja el bloque de control el cual inyecta una señal al actuador que regula su comportamiento y cuya tarea es corregir el balanceo presentado en la planta.

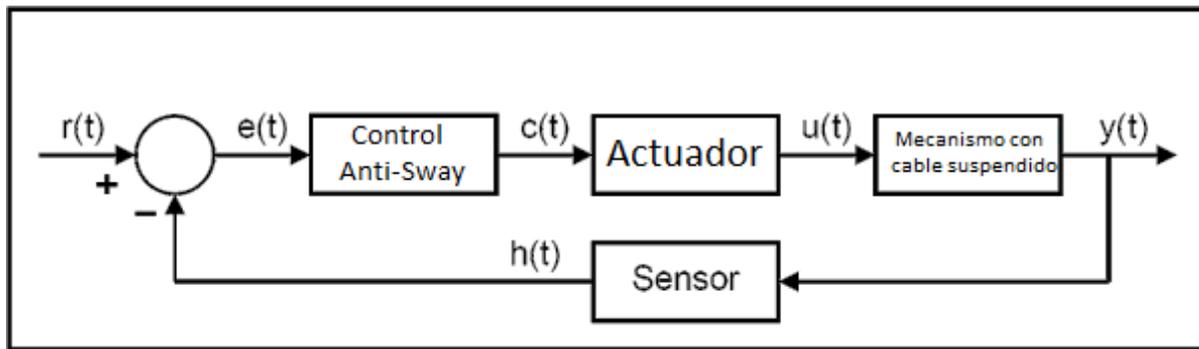


Figura 2.2: Diagrama a bloques de un control anti-sway

2.2. Control Tolerante a Fallas

Mucho empeño se ha puesto en el estudio de control en el campo de tolerancia a fallas, especialmente en las fallas presentes en aeronaves [Yu & Zhang \(2015\)](#), plantas nucleares [Buzhinsky & Pakonen \(2019\)](#) y en general entornos industriales ([Tian et al. 2018](#)). Muchos de los estudios que abordan este problema se basan en redundancia física o redundancia analítica ([Abdulhay et al. 2018](#)). La redundancia física es necesaria cuando el bienestar de los seres humanos podría verse afectado en caso de falla, como es el caso de las aeronaves y plantas con productos que requieren un manejo cuidadoso.

En otros procesos industriales, la redundancia física en actuadores es poco común o no es usada en absoluto debido a que puede llegar a ser un alto gasto económico. Por otro lado, la redundancia en sensores es más común ya que son más simples y generalmente más baratos. Por tanto, en estos casos, al presentarse una falla importante en actuadores es imposible mantener al sistema dañado a un nivel de desempeño aceptable. La tarea principal entonces se vuelve regresarlo a un estado de operación nominal con respecto al desempeño deseado y el nivel de prioridad que este tenga. Por tanto, lo que hace a esta técnica relevante es el hecho de minimizar la pérdida de producción ya sea en calidad o cantidad además de que mantiene un nivel de operación en el que las personas y el equipo mismo no corren peligro. El tema de la tolerancia a fallas ha atraído el interés de muchos investigadores y científicos a través del mundo; Incluso es posible encontrar artículos *reviews* en [Zhang & Jiang \(2008b\)](#), [López-Estrada et al. \(2019\)](#) y los excelentes libros de [Noura et al. \(2009\)](#),

Witczak (2014).

El control tolerante a fallas es una medida de precaución integrada en sistemas cuyas posibles fallas puedan ocasionar daños severos o presentar una amenaza hacia la seguridad de las personas o al propio sistema. Los varios estudios en relación con este problema están basados en la redundancia analítica o de hardware. En Noura et al. (2009) se explica que la tolerancia a fallas analítica puede ser alcanzada ya sea de manera pasiva por el uso de una ley de control diseñada para ser insensible a un número determinado de fallas conocidas, o de forma activa a través de un mecanismo de Detección y Aislamiento de Fallas (FDI) y el rediseño de una nueva ley de control para superar la pérdida completa de un sensor a través del uso de un método efectivo de compensación, siempre y cuando el sistema siga siendo observable. De hecho, después de la pérdida de un sensor, la propiedad de observabilidad permite que la estimación de las variables que ya no se pueden medir se logre usando las demás salidas que aun se tiene la posibilidad de medir. Aun así, las limitaciones de este método aparecen cuando se tiene la pérdida completa de un actuador; en este caso, la controlabilidad del sistema debe ser revisada. Muy comúnmente, solo las redundancias de hardware es efectiva para asegurar el desempeño nominal del sistema.

La posibilidad y la necesidad del diseño de un esquema de control tolerante a fallas en la presencia de posibles grandes averías en actuadores tal como la pérdida completa o el bloqueo completo de un actuador debe ser estudiado en una forma diferente. Para este tipo de casos de averías y su control compensativo, es posible que una técnica multimodelo sea más apropiada, dado que el número de averías es relativamente pequeño en comparación a las fallas. Es importante notar que la estrategia que debe ser aplicada y el nivel de desempeño alcanzado por el sistema bajo condiciones de falla varía dependiendo del tipo de proceso que el sistema lleva a cabo, los grados de libertad presentes en este, y qué tan severas son las fallas aparecidas. En este caso, es necesario reestructurar los objetivos del control en circunstancias del sistema con un desempeño degradado por las fallas. Los esquemas de FTC activo reaccionan a las fallas de los componentes del sistema activamente al reconfigurar las acciones de control, y al hacer eso, el desempeño nominal y la estabilidad del sistema se mantienen. En ciertas situaciones, se deberá aceptar un desempeño degradado. Para alcanzar la tolerancia a fallas el sistema depende fuertemente en que la detección y diagnóstico de fallas para

proporciona información actualizada acerca del estado real del sistema. La estructura general del FTC activo se presenta en la Fig. 2.3 en donde se describe el nivel de supervisión y ejecución.

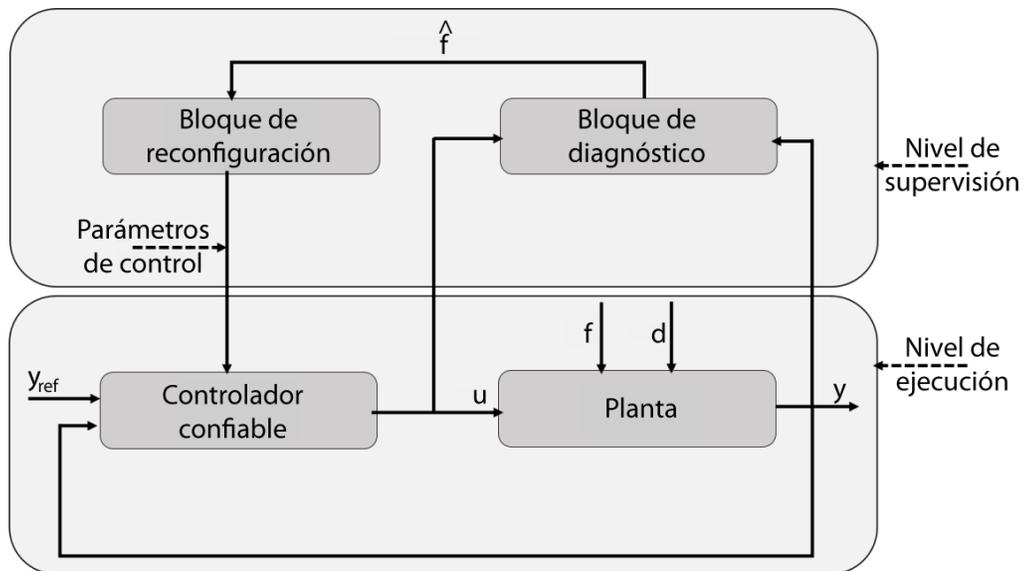


Figura 2.3: Controlador tolerante a fallas activo

En contraste, el FTC pasivo, el cual se usará en este proyecto, determina el propósito del control en un contexto en el que la habilidad de este para alcanzar su objetivo se preserva, usando una ley de control idéntica sin importar la situación del sistema (saludable o con fallas). En efecto, la ley de control no cambia cuando ocurren fallas. En [Witczak \(2014\)](#) se menciona que se debe hacer notar que un FTC pasivo es similar al enfoque robusto que se toma cuando se considera un sistema con incertidumbres. A pesar de eso, la diferencia se encuentra no solo en el tamaño e interpretación de las fallas en comparación con las incertidumbres sino también en la estructura de las restricciones resultantes de las fallas. El FTC pasivo tiene una estructura más simple que de una forma generalizada se muestra en la Fig. 2.4. En la literatura, los FTC pasivos son también conocidos como control *confiable* o sistemas de control con *integridad*.

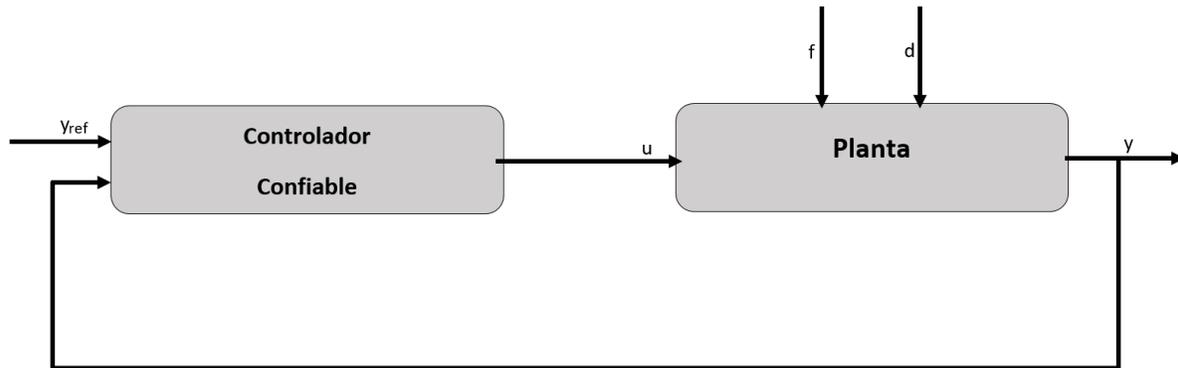


Figura 2.4: Controlador tolerante a fallas pasivo

2.2.1. Clasificación de fallas

En el área de tolerancia fallas, estas son clasificadas de acuerdo con su ubicación como se muestra en la Fig. 2.5, es decir, en qué parte del sistema en cuestión estas aparecen.

- Fallas en actuadores: representan la pérdida parcial o total de las acciones de control ejecutadas por el actuador. Un ejemplo de pérdida completa de las acciones de un actuador es cuando se atora por alguna razón inesperada y esta es incapaz de producir algún efecto sobre el comportamiento del sistema. Por otra parte, una falla parcial en un actuador significa que está sólo será capaz de producir parte del efecto de control que en una situación nominal este tendría sobre el sistema. Un ejemplo para este caso sería una fuga en algún sistema hidráulico debido a que una válvula (actuador) no puede cerrarse completamente.
- Fallas en sensores: representan una medición incorrecta por parte de los sensores. Estas también se dividen en parciales y totales. Ejemplos de casos de falla total son cables de conexión rotos o pérdida de contacto entre el sensor y el elemento a medir mientras que una falla parcial puede ocurrir cuando la ganancia de estos se reduce o hay una medición errónea por un sensor desplazado de su lugar nominal de operación.
- Fallas en componentes: son todas las demás fallas que no pueden ser tomadas como falla en actuador o sensor. Estas fallas pueden causar un cambio en los parámetros físicos del sistema

debido a un daño en la estructura de este. Las *fallas en componentes* es una clase amplia de de diferentes situaciones. Por tanto el tratamiento de estas fallas resulta ser un reto.

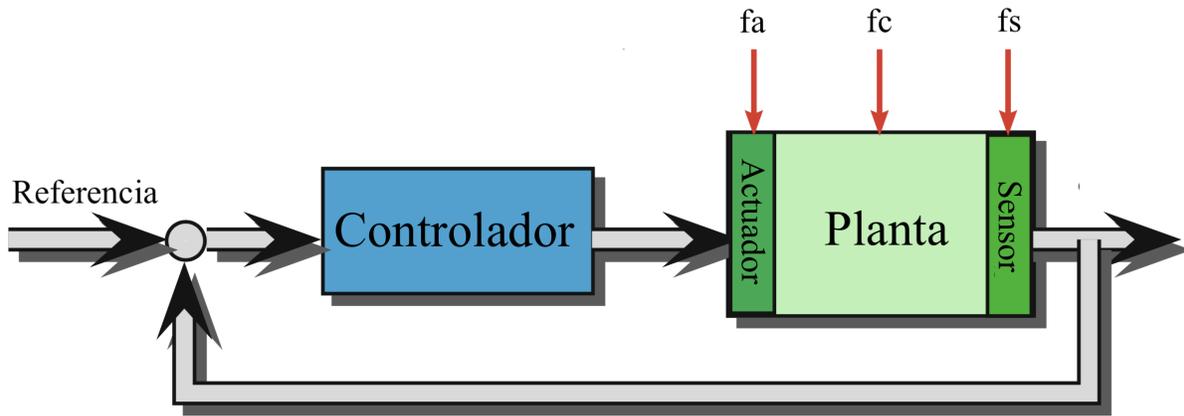


Figura 2.5: Clasificación de fallas por localización

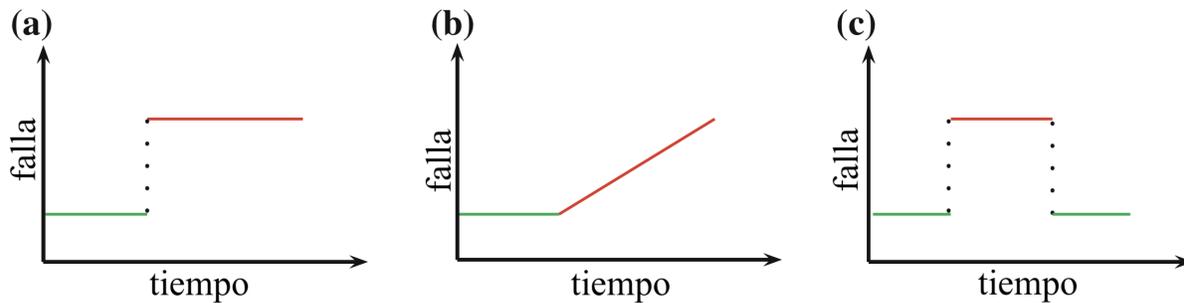


Figura 2.6: Clasificación de fallas por características en el tiempo

Las fallas también pueden ser clasificadas de acuerdo a sus características en el tiempo como se presenta en la Fig 2.6 donde se grafica el comportamiento de 3 tipos de fallas. Estas pueden llamarse de las siguientes formas:

- Abruptas: si su efecto sobre el sistema es tan grande que llevan al sistema a sus límites de desempeño aceptable y su aparición es violenta.
- Intermitentes: si aparece y desaparece repetidamente, de tal manera que es difícil determinar si es una falla o perturbación.

- Incipiente: si su impacto en el sistema es pequeño y los efectos de esta no son detectables al principio.

2.2.2. Modelado de fallas

Las fallas son comúnmente categorizadas en aditivas y multiplicativas según su forma de ser representadas en el sistema. En este caso se toma en cuenta el sistema dinámico en estado nominal (libre de fallas) descrito en la forma de espacio de estados para expresar la relación entre las entradas del sistema $u \in \mathbb{R}^m$ con las salidas medidas $y \in \mathbb{R}^p$, como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa al vector de estados del sistema y todas las matrices tienen las dimensiones adecuadas.

Fallas multiplicativas

El modelado multiplicativo de las fallas es generalmente usado para representar fallas en actuadores (*fa*), y fallas en sensores (*fs*). Particularmente, las fallas en actuadores son modeladas como un cambio abrupto en la acción nominal de control descrito como

$$u^f(t) = \Gamma_A u(t), \tag{2.2}$$

donde $\Gamma_A = \text{diag}(\gamma_1^a, \gamma_2^a, \dots, \gamma_m^a) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\gamma_i^a \in \mathbb{R}$. Al sustituir la acción nominal de control $u(t)$ en el sistema (2.1) por esta nueva acción de control $u^f(t)$ en modo de operación con falla en actuadores, se obtiene el siguiente modelo de espacio de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\Gamma_A u(t), \\ y(t) &= Cx(t) + D\Gamma_A u(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

De esta manera $\gamma_i^a = 0$, $\gamma_i^a = 1$, and $\gamma_i^a \in (0, 1) \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, representan una falla total, operación en estado nominal y pérdida parcial del actuador número i dentro del sistema.

La presencia de fallas en sensores (fs) en el sistema representa una lectura incorrecta de parte de los sensores. Como resultado, la verdadera señal de salida difiere de los datos de la señal medida. De manera similar a las fallas en actuadores, las fallas en sensores pueden ser modeladas como

$$y^f(t) = \Gamma_S y(t)\tag{2.4}$$

donde $\Gamma_A = \text{diag}(\gamma_1^s, \gamma_2^s, \dots, \gamma_p^s) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\gamma_j^s \in \mathbb{R}$, de tal manera que $\gamma_j^s = 0$ representa una falla total del sensor número j , y $\gamma_j^s = 1$ modela el sensor número j en estado de operación nominal. Por otra parte, las fallas parciales son modeladas con la expresión $\gamma_j^s \in (0, 1)$. De esta manera, el modelo del sistema ante la presencia de fallas en sensores se representa como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y^f(t) &= \Gamma_S Cx(t) + \Gamma_S Du(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Fallas en componentes

Las fallas presentes en componentes conllevan a cambios en cualquiera de los elementos dentro del sistema dinámico. Pertenecen al tipo de falla que no puede ser clasificada como falla en sensor o

actuador. Estas fallas son comúnmente modeladas como sistemas de parámetros lineales variables.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(f)x(t) + B(f)u(t), \\ y(t) &= C(f)x(t) + D(f)u(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $f \in \mathbb{R}^{n_f}$ es un vector de parámetros exógenos dependiente del tiempo representando las fallas en los componentes. Suponiendo que hay sólo una falla de componente en el sistema dinámico. Esto transforma la matriz B de (2.1) en $B(f)$ y tiene una representación explícita $B(f) = \Gamma_{bf}B$. Asumiendo que la matriz B tiene rango completo con respecto a sus columnas y que existe una matriz diagonal $\tilde{\Gamma}_{bf}$ de tal manera que

$$\Gamma_{bf}B = B\tilde{\Gamma}_{bf} \implies \tilde{\Gamma}_{bf} = B^I\Gamma_{bf}B\tag{2.7}$$

donde B^I es la matriz pseudoinversa de la matriz B . La representación de espacio de estados del modelo con falla es entonces descrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\tilde{\Gamma}_{bf}u(t), \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Podemos ver que la Ecuación (2.8) es equivalente a (2.3) con $D = 0$. Es interesante notar que las fallas en componentes pueden ser tomadas como un caso especial de fallas multiplicativas en actuadores. De forma similar, estas pueden ser expresadas como fallas multiplicativas en sensores también.

Fallas aditivas

La representación de fallas aditivas es mas general que la de las fallas multiplicativas. El modelo de espacio de estados con fallas aditivas está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ff(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + Ef(t)\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ es una señal que describe a la falla. Esta representación puede, en esencia, ser usada para modelar una variedad amplia de fallas, incluyendo en sensores, actuadores y fallas en componentes. Por ejemplo, para el caso de fallas en actuadores, considerando (2.2) como

$$u^f(t) = (\Gamma_A - I)u(t) + u(t)\tag{2.10}$$

y sustituyendolo en (2.1) resulta en (2.3), lo cual es equivalente a (2.9) con $\begin{bmatrix} F \\ E \end{bmatrix} f(t) = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} (\Gamma_A - I)u(t)$.

Esto puede ser expresado también para el caso de las fallas multiplicativas en una forma similar. Para demostrar la falla en componentes como un caso especial de fallas aditivas, se considera una falla de componente en la matriz B la cual es representada como $B(f) = B \pm \Delta B_f$, entonces $Ff(t) := \pm(\Delta B_f)u(t)$.

Una de las ventajas de este tipo de modelado, como ya se mencionó, es que la representación aditiva puede ser usada para modelar un tipo más general de fallas en comparación con el aborde multiplicativo. Además, es mucho mas adecuado en trabajos de diseño de esquemas de control tolerante a fallas debido a que, de este modo, las fallas son representadas como la entrada de una señal desconocida, en lugar de un cambio en las matrices del espacio de estado del sistema.

Capítulo 3

Modelado Takagi-Sugeno

3.1. Introducción

Tradicionalmente, el análisis de sistemas con base en modelos no lineales invariantes en el tiempo ha dominado el campo del control. Gracias a su linealidad e invarianza en el tiempo estos sistemas son fácilmente deducidos y manipulados para su análisis. Además, existe una variedad de métodos y algoritmos bien establecidos dentro de este campo para el diseño de controladores y observadores. Sin embargo, los modelos lineales presentan una desventaja; estos no logran describir al sistema real de forma global. La precisión de la representación de un sistema por medio de un modelo no lineal sólo puede ser logrado dentro de la proximidad de uno de sus puntos de equilibrio [Lendek et al. \(2011\)](#).

Por otro lado, el modelado Takagi-Sugeno (TS) permite representar el comportamiento de sistemas no lineales por medio de la interpolación de un grupo de submodelos lineales. Cada submodelo contribuye a la descripción global del sistema no lineal por medio de una función de peso $\mu_i(\xi(t))$. La estructura de un modelo Takagi-Sugeno está descrita como:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\boldsymbol{\xi}(t)) (A_i \boldsymbol{x}(t) + B_i \boldsymbol{u}(t)), \\ y(t) &= C \boldsymbol{x}(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^b$ representa el vector de salida. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{b \times n}$ son matrices conocidas. Las funciones $\mu_i(\boldsymbol{\xi}(t))$ son las funciones de peso las cuales dependen de la variable $\boldsymbol{\xi}(t)$ la cual representa a las variables que contienen no linealidades. Estas funciones deben satisfacer las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r \mu_i(\boldsymbol{\xi}(t)) &= 1, \\ 0 \leq \mu_i(\boldsymbol{\xi}(t)) &\leq 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Gracias a la propiedad de suma convexa de las funciones de peso, es posible generalizar algunas de las herramientas desarrolladas en el dominio lineal a los sistemas no lineales. La representación es muy interesante debido a que simplifica los estudios de estabilidad, el diseño de leyes de control y observadores para los sistemas no lineales. En podemos apreciar que las técnicas usadas para el análisis de estabilidad y la estabilización son desarrolladas con base en el estudio de los esquemas aplicados en los sistemas lineales.

Obtener un modelo Takagi-Sugeno puede ser llevado a cabo por varios métodos tales como linealización al rededor de un cierto numero de puntos de operación y usando funciones de peso adecuadas. También puede ser obtenido mediante el uso de enfoques de caja negra, lo que permite identificar los parámetros del modelo a partir de la información de entrada-salida. Finalmente, un modelo Takagi-Sugeno puede ser obtenido a partir de las transformaciones ampliamente conocidas como *técnica de sector no lineal* (Taniguchi et al. 2001). Estas transformaciones permiten obtener lo que se conoce como un modelo Takagi-Sugeno exacto el cual es una representación exacta del modelo no lineal sin perdida de información en lo absoluto. Esto representado en un grupo compacto de espacios de estado. En este trabajo se considera este enfoque, el cual se describe a continuación:

3.1.1. Modelado TS a través del Sector no Lineal

Se le llama a este enfoque *técnica de sector no lineal* ya que este consiste en acotar cada una de las no linealidades existentes en el sistema entre dos límites o rectas". Esta técnica cuya primera aparición se reconoce en Kawamoto et al. (1992) está basada en el siguiente razonamiento. Consideremos un sistema no lineal simple $\dot{x} = f(x(t))$, donde $f(0) = 0$. el objetivo es encontrar el sector global de tal modo que $\dot{x} = f(x) \in [a_1 a_2]x(t)$. La Fig. 3.1 ilustra el enfoque del sector no lineal. Esta técnica garantiza la obtención de un modelo Takagi-Sugeno exacto. Sin embargo, muchas veces encontrar un sector no lineal global puede ser una tarea difícil en el caso de los sistemas no lineales generales. Para estos casos se considera un sector no lineal local. Esta es una idea lógica y factible ya que las variables de los sistemas físicos en la vida real siempre están acotadas. La Fig. 3.2 presenta un sector no lineal local, donde dos líneas delimitan el sector local de forma que $-d < x(t) < d$. De este modo, el modelo Takagi-Sugeno exacto es la representación fiel de una región local ($-d < x(t) < d$) en la que sabemos que este operará físicamente.

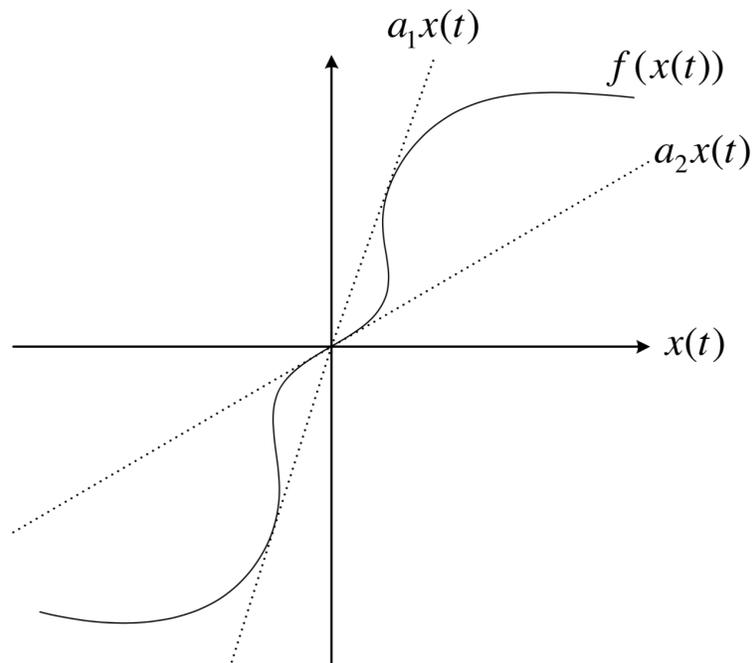


Figura 3.1: Sector no lineal global

Para comenzar la obtención del modelo TS exacto, la ecuación del sistema no lineal debe ser

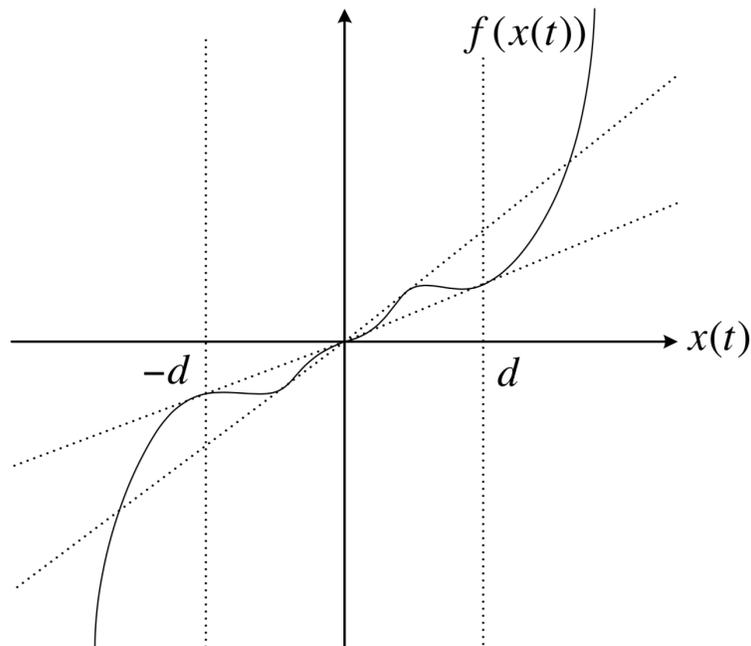


Figura 3.2: Sector no lineal local

afín en el control por su lado derecho.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad y(t) = s(x(t)) \quad (3.3)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ tienen las dimensiones usuales de estado, entradas y salidas; mientras que $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ y $s(\cdot)$ son funciones vectoriales no lineales de los estados con las dimensiones adecuadas. Este sistema puede representarse de manera equivalente como:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad y(t) = C(x(t))x(t), \quad (3.4)$$

donde $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ son funciones matriciales de dimensiones adecuadas. Esta nueva reinterpretación del sistema nos permite identificar en cada matriz todos los términos no constantes, es decir, lo que al multiplicarse por el vector de estados o de entrada producirán una no linealidad. Estas no linealidades presentes se agrupan en un vector cuya dimensión es p (número de no linealidades *diferentes* en el sistema) denominado vector premisa. Para un mejor entendimiento se

presenta el proceso de obtención de los submodelos T-S de un sistema comúnmente usado en el campo del control en donde se busca controlar los tres niveles de agua ($h_1(t), h_2(t), h_3(t)$) en tres tanques conectados.

3.1.1.1. Ejemplo 1: de modelado de sistemas TS

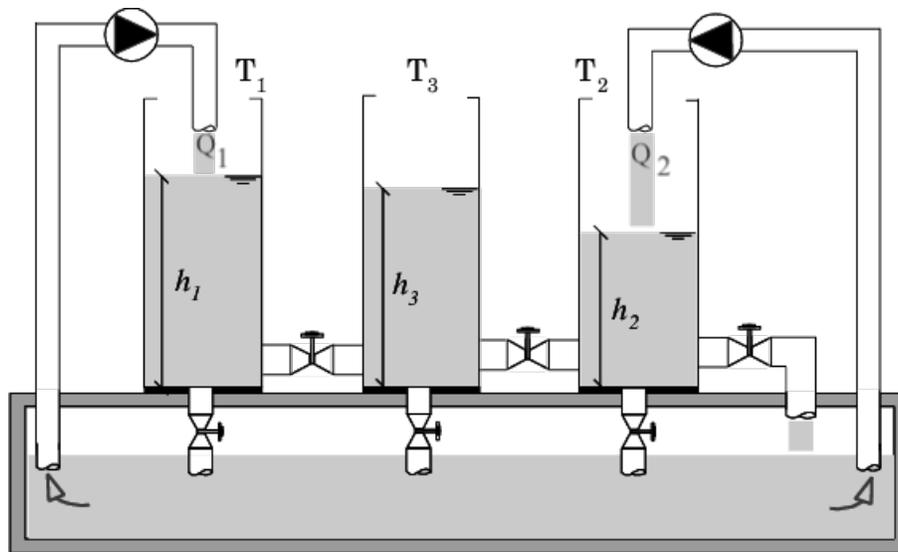


Figura 3.3: Sistema de tres tanques de agua.

Teniendo en cuenta el siguiente modelo de un sistema de tres tanques configurado de la manera en que se presenta en la Fig. 3.3 (en donde los 3 tanques están conectados en el fondo entre sí) de la forma (3.3) y donde $\mathbf{x}(t) = [h_1(t), h_2(t), h_3(t)]^T$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\frac{1}{S}\right) \begin{bmatrix} -c_1\sqrt{x_1 - x_2} \\ c_3\sqrt{x_3 - x_2} - c_2\sqrt{x_2} \\ c_1\sqrt{x_1 - x_2} - c_3\sqrt{x_3 - x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3], \quad (3.5)$$

podemos reescribirlo de la forma (3.4):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(\frac{1}{S}\right) \begin{bmatrix} -c_1 \frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 \frac{\sqrt{x_2}}{x_2} & c_3 \frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3} \\ c_1 \frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1} & 0 & -c_3 \frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

de esta forma se hacen evidentes los términos no constantes presentes en el sistema de tanques, como se aprecia en color rojo, $z_1(x(t)) = \frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1}$, $z_2(x(t)) = \frac{\sqrt{x_2}}{x_2}$ y $z_3(x(t)) = \frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3}$, por tanto, el vector premisa en este caso queda definido como:

$$z(t) = [z_1(x) \quad z_2(x) \quad z_3(x)]^T = \left[\frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1} \quad \frac{\sqrt{x_2}}{x_2} \quad \frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3} \right]^T \quad (3.7)$$

Cada uno de los términos en el vector premisa, $z_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, r$ se asume acotado en un compacto definido \mathbf{C} del espacio de estados. Estas cotas deben ser conocidas a través de la inspección del comportamiento del sistema. Este espacio entre las cotas, dentro del que se mueven las variables premisas es \mathbf{C} . Por ejemplo, $\mathbf{C} = \{0,4 \leq \frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1} \leq 2\}$.

Al acotar un término no lineal dentro de un compacto de su dominio, este puede reescribirse como una suma convexa de valores constantes. Continuando con la variable premisa $\frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1}$, esta puede reescribirse como:

$$\frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1} = 0,4 \underbrace{\left(\frac{2 - \frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1}}{1,6} \right)}_{w_0^1(x_2)} + 2 \underbrace{\left(\frac{\frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1} - 0,4}{1,6} \right)}_{w_1^1(x_2)} = \sum_{i=0}^1 w_i^1(x_2) z_1^i, \quad (3.8)$$

donde $z_1^0 = 0,4$ y $z_1^1 = 2$. De esta forma, se logra una expresión equivalente que satisface la propiedad de suma convexa dentro de $\mathbf{C} = \{0,4 \leq \frac{\sqrt{x_1-x_2}}{x_1} \leq 2\} : w_0^1 + w_1^1 = 1, w_0^1 \geq 0, w_1^1 \geq 0$.

Se debe tener en cuenta que puede existir mas de una forma en la que el desacoplamiento de las no linealidades se lleve a cabo. Por ejemplo, el término $\sqrt{x_1 - x_2}$ podría transformarse de la siguiente manera produciendo otra forma algebraica equivalente:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -c_1 \frac{\sqrt{x_1 - x_2}}{x_2} & 0 \\ 0 & -c_2 \frac{\sqrt{x_2}}{x_2} & c_3 \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} \\ 0 & c_1 \frac{\sqrt{x_1 - x_2}}{x_2} & -c_3 \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.9)$$

$$, y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad (3.10)$$

Basándonos en el valor máximo y mínimo de cada termino no constante en $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$, dentro de \mathbf{C} es posible realizar p reescrituras, como la propuesta anteriormente, construyendo los siguientes pares de funciones denominadas *pesos*:

$$w_0^j(x) = \frac{z_j^1 - z_j(x)}{z_j^1 - z_j^0}, \quad w_1^j(x) = 1 - w_0^j(x), \quad (3.11)$$

de modo que cada elemento no lineal podrá entonces escribirse como:

$$z_j(x) = z_j^0 w_0^j(x) + z_j^1 w_1^j(x) = \sum_{i_j=0}^1 w_{i_j}^j(x) z_j^{i_j}. \quad (3.12)$$

Este tipo de sumas convexas tienen propiedades importantes como se describe a continuación:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(x) A_{i_1}^1 + \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(x) A_{i_2}^2 + \dots + \sum_{i_p=0}^1 w_{i_p}^p(x) A_{i_p}^p \\
= & \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \dots \sum_{i_p=0}^1 w_{i_1}^1(x) w_{i_2}^2(x) \dots w_{i_p}^p(x) \left(A_{i_1}^1 + A_{i_2}^2 + \dots + A_{i_p}^p \right) \\
& = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \dots \sum_{i_p=0}^1 w_{i_1}^1(x) w_{i_2}^2(x) \dots w_{i_p}^p(x) A_{i_1 i_2 \dots i_p},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

que permite “agrupar” los pesos en una sola suma anidada aún si los términos $A_{i_j}^j$ son expresiones matriciales (forzosamente del mismo tamaño) con: $A_{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{i_1}^1 + A_{i_2}^2 + \dots + A_{i_p}^p$.

De esta manera, la propiedad (3.13) puede ser utilizada para reescribir lo siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 \left(\frac{1+x_2}{2} \right) + 1 \left(\frac{1-x_2}{2} \right) & 0 \\ -0,2172 \left(\frac{1-\sin x_1/x_1}{1,2172} \right) + 1 \left(\frac{\sin x_1/x_1 + 0,2172}{1,2172} \right) & 1 \end{bmatrix} x(t) \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0,54 \left(\frac{1-\cos x_2}{0,46} \right) + 1 \left(\frac{\cos x_2 - 0,54}{0,46} \right) \end{bmatrix} u(t) \\
&= \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \sum_{i_3=0}^1 w_{i_1}^1 w_{i_2}^2 w_{i_3}^3 \begin{bmatrix} z_1^{i_1} & 0 \\ z_2^{i_2} & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ z_3^{i_3} \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= \left[0,54 \left(\frac{1-\cos x_2}{0,46} \right) + 1 \left(\frac{\cos x_2 - 0,54}{0,46} \right) \quad 0 \right] x(t) \\
&= \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 \sum_{i_3=0}^1 w_{i_1}^1 w_{i_2}^2 w_{i_3}^3 \begin{bmatrix} z_1^{i_1} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De esta manera llegamos a un modelo el cual no es nada más que una reescritura algebraica del modelo no lineal original, válida en todo \mathbb{R}^n y convexa dentro de la región de modelado \mathbf{C} :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z(x))(A_i x + B_i u), \quad y = \sum_{i=1}^r h_i(z(x)) C_i x, \tag{3.15}$$

donde $A_i = A(x)|_{h_i=1}$, $B_i = B(x)|_{h_i=1}$, $C_i = C(x)|_{h_i=1}$ y $r = 2^p$.

Para reescribir este sistema como modelo Takagi-Sugeno en $\mathbf{C} = \{x : |x_2| \leq 1\}$ este se define como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 h_i(z(x))(A_i x(t) + B_i u(t)), \quad y = \sum_{i=1}^8 h_i(z) C_i x(t), \quad (3.16)$$

donde $A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & 0 \\ a_{21}^i & 1 \end{bmatrix}$, $B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{12}^i \end{bmatrix}$ y $C_i = \begin{bmatrix} b_{12}^i & 0 \end{bmatrix}$ están conformadas de acuerdo a la siguiente tabla:

h_i	a_{11}^i	a_{21}^i	b_{12}^i
$h_1 = w_0^1 w_0^2 w_0^3$	z_1^0	z_2^0	z_3^0
$h_2 = w_0^1 w_0^2 w_1^3$	z_1^0	z_2^0	z_3^1
$h_3 = w_0^1 w_1^2 w_0^3$	z_1^0	z_2^1	z_3^0
$h_4 = w_0^1 w_1^2 w_1^3$	z_1^0	z_2^1	z_3^1
$h_5 = w_1^1 w_0^2 w_0^3$	z_1^1	z_2^0	z_3^0
$h_6 = w_1^1 w_0^2 w_1^3$	z_1^1	z_2^0	z_3^1
$h_7 = w_1^1 w_1^2 w_0^3$	z_1^1	z_2^1	z_3^0
$h_8 = w_1^1 w_1^2 w_1^3$	z_1^1	z_2^1	z_3^1

Cuadro 3.1: Funciones de membresía

Debe remarcar que el conjunto de las matrices (A_i , B_i , C_i) se produce justo donde su respectiva función de pertenencia resulta en $h_i(x) = 1$; además, la combinación de máximos y mínimos está dada por: $[i_1 i_2 i_3]$, la cual puede tomarse como combinaciones binarias de tres ($i - 1$) dígitos. Las sumas convexas pueden ser definidas como una notación corta con una similitud remarcable con los modelos lineales, pero manteniendo su no linealidad dentro de las funciones de pertenencia:

$$A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(x))A_i, \quad B_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(x))B_i, \quad C_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(x))C_i, \quad (3.17)$$

a partir de las ecuaciones anteriores, podemos representar a (3.15) como

$$\dot{x}(t) = A_h x(t) + B_h u(t), \quad y(t) = C_h x(t). \quad (3.18)$$

De esta forma, si partiéramos de un modelo Takagi-Sugeno, sería difícil poder distinguir si este fue obtenido a partir de un modelo no lineal el cual fue linealizado en diferentes puntos o si directamente describe una representación exacta dado que ambas notaciones tienen la misma estructura. Aun así, debe recordarse que los modelos Takagi-Sugeno obtenidos por la técnica de sector no lineal siempre están conformados por un número determinado de submodelos lineales de la forma $r = 2^p$, donde p representa el número de no linealidades diferentes que se presentan en las matrices del sistema.

Codificando la técnica del sector ni lineal a través de MATLAB para, a partir de la representación no lineal del sistema de tres tanques con dos entradas utilizado como ejemplo anteriormente (4.23), llegar a la representación lineal conformada por submodelos, en el formato Takagi-Sugeno, se puede obtener una representación sin pérdida de información a la cual se le puede aplicar esquemas de control comunes en el control lineal.

A continuación, simulamos ambas versiones del sistema, aplicando una señal de entrada idéntica para cada una, para comparar su comportamiento el cual, habiendo desarrollado de forma correcta la transformación de modelo no lineal a modelo T-S, es el mismo en ambos casos. Se presentan los resultados de las simulaciones llevadas a cabo haciendo uso de los parámetros especificados en la tabla (3.2), los cuales, sin entrar en detalles, pertenecen a valores de área y propiedades como la viscosidad, e inyectando una señal de entrada solamente en la válvula Q_1 mientras la entrada Q_2 permanece inactiva.

Estas simulaciones fueron llevadas a cabo de tal manera que ambas representaciones matemáticas codificadas del sistema físico fueran simuladas a partir de las mismas condiciones iniciales.

De esta manera, es evidente que ambas representaciones algebraicas para este sistema son equivalentes ya que cada uno de los estados en el espacio del sistema se comportan de manera idéntica en ambas versiones como se aprecia en las Figuras 3.4 - 3.6 en donde las respuestas del modelo TS se sobrepone perfectamente sobre las respuestas del sistema no lineal, al excitarlos con la misma entrada (Fig. 3.7).

Parámetro	Valor
S	$154e^{-4}$
c_1	$1e^{-2}$
c_2	$2,3e^{-2}$
c_3	$1e^{-2}$

Cuadro 3.2: Parámetros del sistema de tanques para simulación

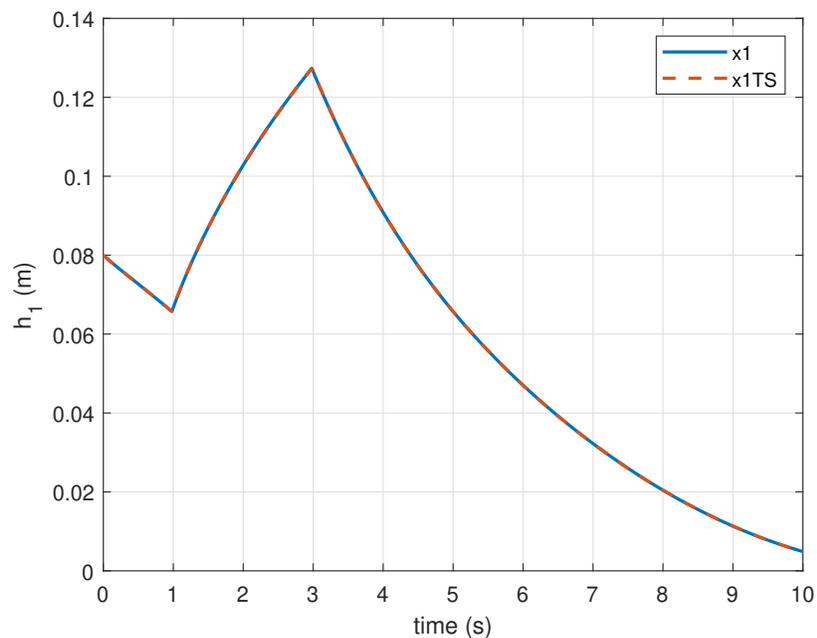
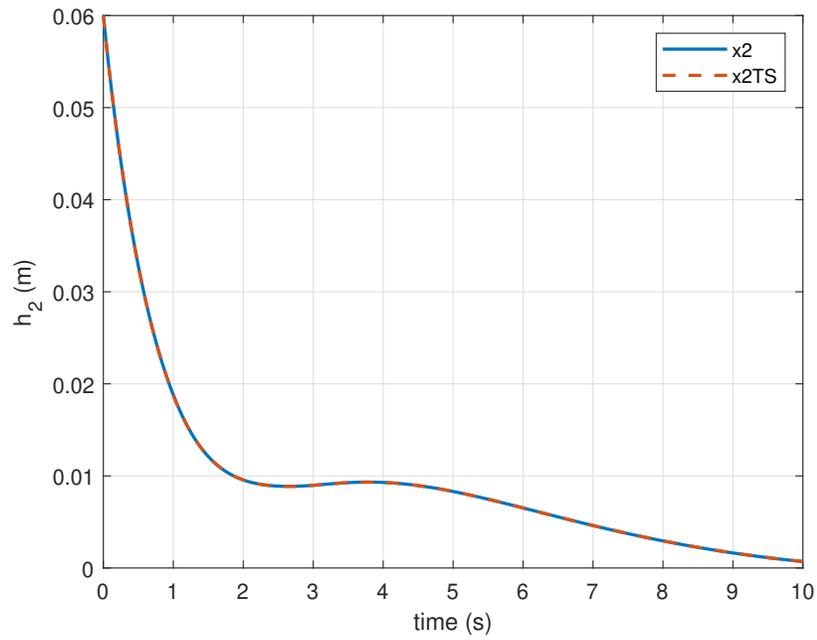
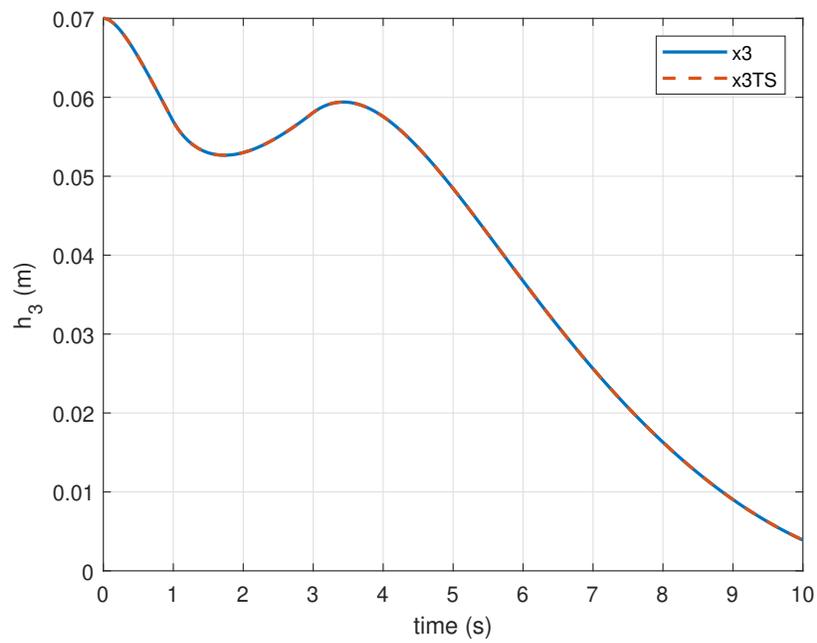


Figura 3.4: Comportamiento de estado x_1

Figura 3.5: Comportamiento de estado x_2 Figura 3.6: Comportamiento de estado x_3

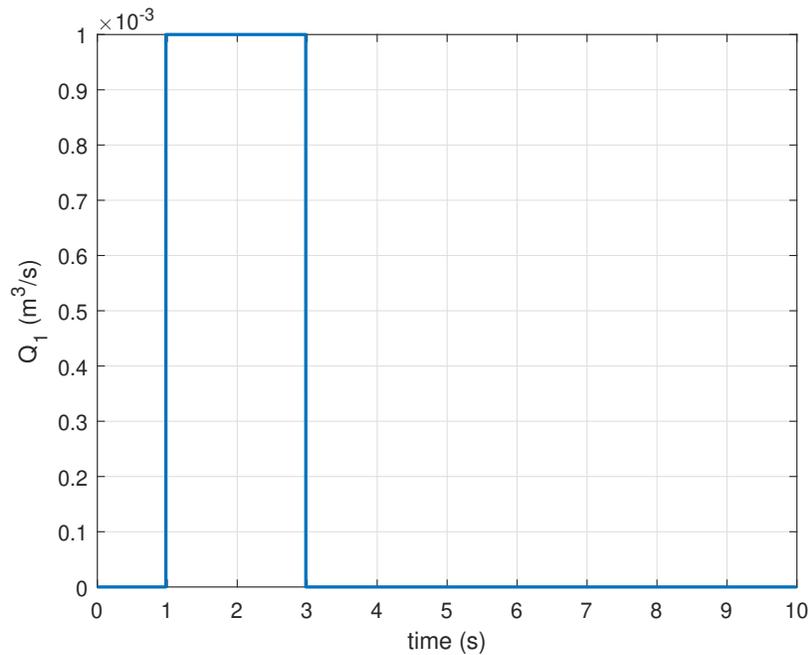


Figura 3.7: Señal de entrada a ambos modelos

3.1.2. Control de modelos Takagi-Sugeno

Comúnmente, el control de un sistema lineal se lleva a cabo por medio de la realimentación lineal del estado $u(t) = Fx(t)$. A continuación se presenta uno de los esquemas desarrollados para modelos Takagi Sugeno,

$$\dot{x}(t) = A_h x(t) + B_h u(t) \quad (3.19)$$

derivado de manera análoga del utilizado en los modelos lineales, denominado compensación paralela distribuida.

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(x)) F_i x(t) = F_h x(t), \quad (3.20)$$

donde $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, r$, son ganancias que deben ser determinadas. Este controlador

es en sí resultado de una suma convexa de realimentaciones de estado el cual utiliza las mismas funciones de pertenencia que el sistema Takagi-Sugeno a controlar.

Teorema. El sistema Takagi-Sugeno, bajo la ley de control PDC, tiene el origen asintóticamente estable si existen matrices $X, M_j, j = 1, 2, \dots, r$ tales que:

$$X > 0, \quad A_i X + B_i M_j + X A^T + M_j^T B_i^T < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (3.21)$$

donde la función de Lyapunov está conformada por $V(x) = x^T P x$, con $P = X^{-1}$, y las ganancias serían $F_j = M_j X^{-1}, j = 1, 2, \dots, r$.

Demostración: Considerando $X = P^{-1} > 0$, con $P = P^T > 0$, y una función de Lyapunov $V(x) = x^T P x > 0$. Al sustituir (3.20) en (3.19) obtenemos el sistema de lazo cerrado $\dot{x}(t) = (A_h + B_h F_h)x(t)$, el cual será tomado en cuenta en el siguiente desarrollo que examina la condición $\dot{V}(x) < 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T P \dot{x} = x^T P (A_h + B_h F_h)x + x^T (A_h^T + F_h^T B_h^T) P x \\ &= x^T (P A_h + P B_h F_h + A_h^T P + F_h^T B_h^T P)x < 0 \\ &\iff P A_h + P B_h F_h + A_h^T P + F_h^T B_h^T P < 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Esta última desigualdad puede pre y postmultiplicarse por $X = P^{-1}$ para poder obtener la siguiente forma de la misma.

$$A_h X + B_h F_h X + X A_h^T + X F_h^T B_h^T < 0 \quad (3.23)$$

Después se hace la sustitución $M_h = F_h X$ con lo que conseguimos la expresión

$$\begin{aligned}
& A_h X + B_h M_h + X A_h^T + M_h^T B_h^T < 0 \\
& = \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) A_i \right) X + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) B_i \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) M_j \right) \\
& + X \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) A_i^T \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) M_j^T \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i(x) B_i^T \right) \\
& = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) (A_h X + B_h M_h + X A_h^T + M_h^T B_h^T) < 0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

de donde, visto que $0 \leq h_i(x) \leq 1$, se sigue que el segundo grupo de LMI's en (3.21) garantiza la desigualdad anterior.

De esta manera, resolviendo las desigualdades lineales matriciales (3.21) a través de MATLAB, se obtienen los valores resultantes de M_h y P . A partir de estos, resultados podemos resolver para

$$F_h = M_j X^{-1} \tag{3.25}$$

y

$$P = X^{-1}, \tag{3.26}$$

de esta forma obteniendo los valores de las ganancias que se necesitan (F_h) para llevar a cabo el control a través de la realimentación de estados del sistema y de esta manera llegar a la estabilización del sistema como se muestra en los resultados de las simulaciones.

3.1.3. Ejemplo 2: Control del sistema de 3 tanques

Retomando el ejemplo en la sección anterior, se desarrolla un estabilizador a partir del teorema presentado arriba para el sistema en lazo cerrado de los tres tanques (4.23). Esto, tomando en cuenta la versión del modelo Takagi-Sugeno obtenida previamente (3.18). Por medio del toolbox YALMIP en MATLAB se resuelven las LMIs descritas en (3.21), dando como resultado las siguientes matrices de ganancia:

$$P = \begin{bmatrix} -0,1612 & 0,0114 & -0,0592 \\ -0,1612 & 0,0825 & -0,0155 \\ 0,0035 & 0,0002 & -0,0020 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

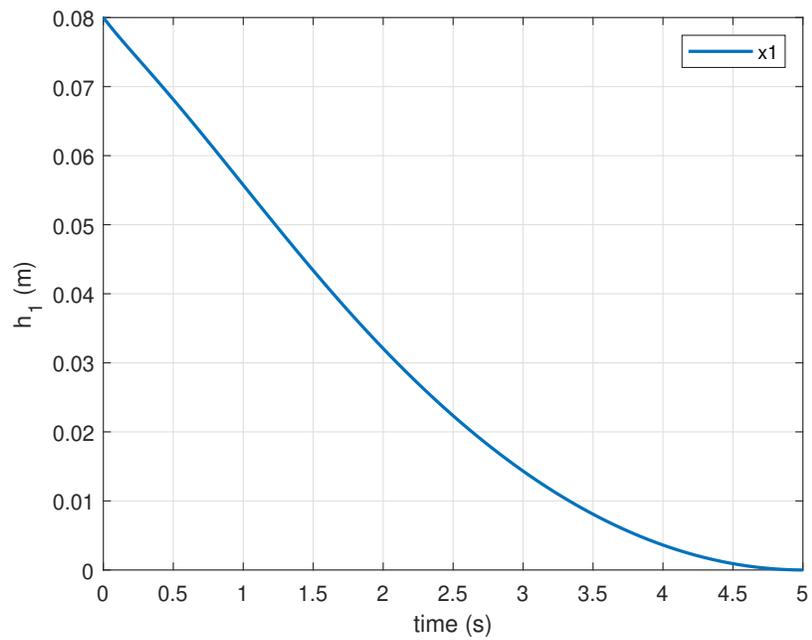
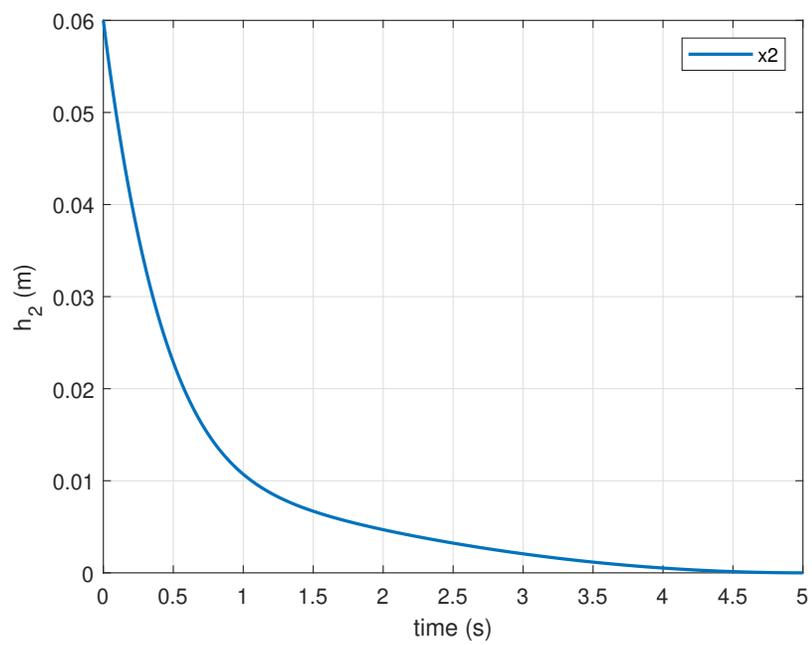
$$F_1 = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 17 \\ 29 & 73 & -18 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 5 & 19 & -15 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

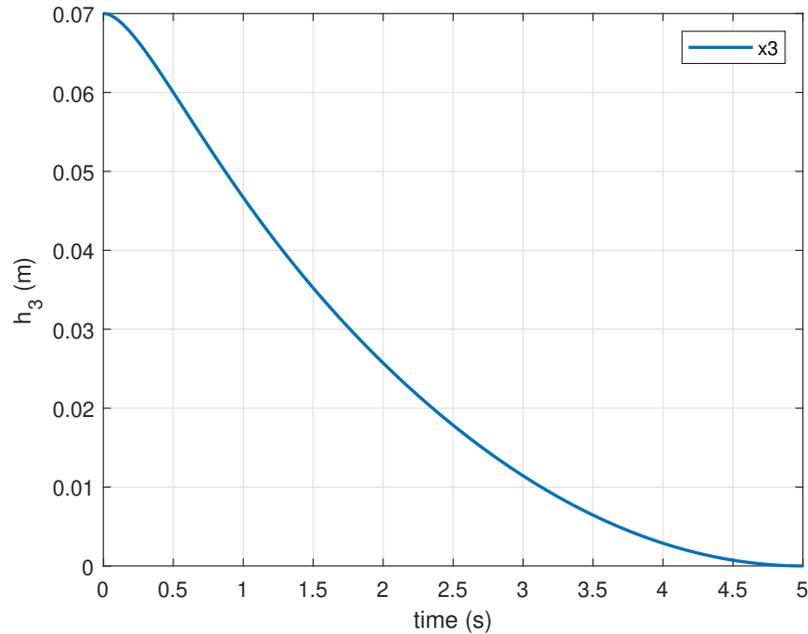
$$F_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -9 \\ 7 & 4 & -14 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -7 \\ 9 & 7 & -15 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} -9 & -2,6 & -10 \\ 8,2 & 2,7 & -12,6 \end{bmatrix}, \quad F_6 = \begin{bmatrix} -9,5 & -4,3 & -10,9 \\ 3,4 & 5,3 & -7,1 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$F_7 = \begin{bmatrix} -6,3 & -10,8 & -19 \\ 9 & 5,1 & -1,2 \end{bmatrix}, \quad F_8 = \begin{bmatrix} -8 & -7,5 & -2,2 \\ 3,2 & 7,8 & -10,1 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

En las Figuras 3.8-3.10 se puede notar que el control paralelo distribuido que se desarrollo para el sistema es efectivo, ya los estados estimados convergen desde su valores iniciales hasta cero de manera asintótica.

Figura 3.8: Estabilización en x_1 Figura 3.9: Estabilización en x_2

Figura 3.10: Estabilización en x_3

3.1.4. Regiones de desigualdades lineales matriciales

Se sabe que $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable si y solamente si la parte real de los valores propios de A son negativos. A pesar de esto, en muchas ocasiones es necesario definir una región más específica dentro de todo el semiplano complejo izquierdo.

Un subconjunto \mathbf{D} del plano complejo es llamado región LMIs si existen matrices $\alpha = \alpha^T$ y β de dimensiones adecuadas tales que:

$$\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathbf{D}}(z) < 0\} \quad (3.32)$$

La función $f_{\mathbf{D}}(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T$ es llamada función característica de \mathbf{D} .

Se establece que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es \mathbf{D} -estable, o sea, tiene todos sus valores propios en la región \mathbf{D} si y sólo si existe una matriz $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$\alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T < 0, \quad X > 0, \quad (3.33)$$

en donde el operador \otimes representa el producto de Kroneker de matrices: $A \otimes B = [A_{ij}B]_{ij}$. Entonces la expresión (3.38) puede ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}X + \beta_{11}AX + \beta_{11}(AX)^T & \dots & \alpha_{1n}X + \beta_{1n}AX + \beta_{1n}(AX)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}X + \beta_{n1}AX + \beta_{n1}(AX)^T & \dots & \alpha_{nn}X + \beta_{nn}AX + \beta_{nn}(AX)^T \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (3.34)$$

Debe notarse que la relación entre (3.38) y la función $f_{\mathbf{D}}(z)$ está dada por $(X, AX, XA^T) \longleftrightarrow (1, z, \bar{z})$. Algunos ejemplos de regiones LMI son:

1. Todo el semiplano complejo izquierdo:

$$\mathbf{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{Re}(z) < 0 \iff f_{\mathbf{D}_1}(z) = z + \bar{z} < 0\}; \quad (3.35)$$

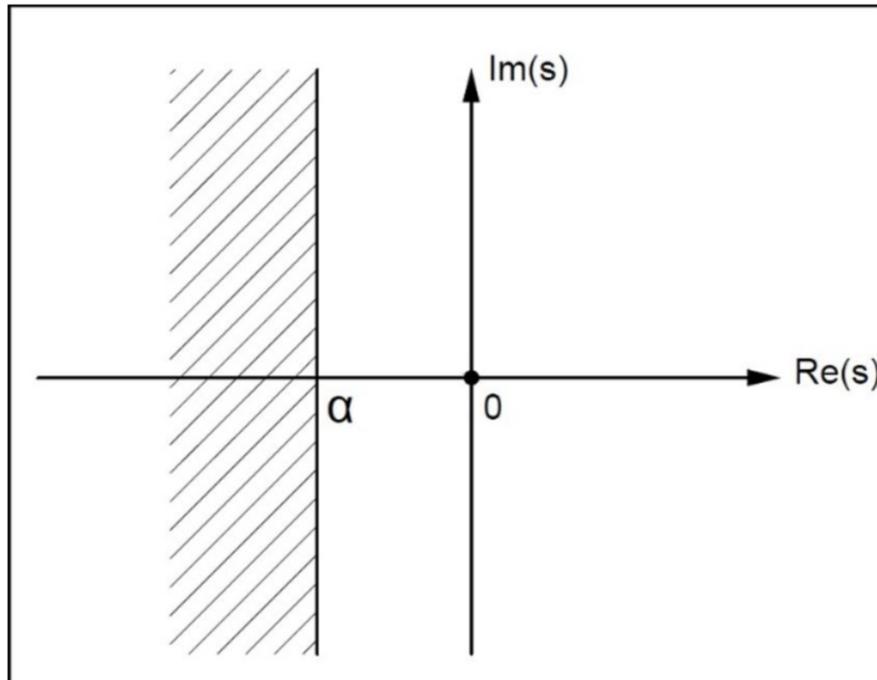
es claro que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, por lo tanto (3.38) queda como

$$1 \otimes (AX) + 1 \otimes (AX)^T = AX + XA^T < 0, \quad X > 0, \quad (3.36)$$

que es la LMI correspondiente a la obtenida mediante el teorema de criterio de estabilidad basado en Lyapunov.

2. Todo el semiplano complejo a la izquierda de un valor (Fig. 3.11):

$$\mathbf{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{Re}(z) < -a \iff f_{\mathbf{D}_2}(z) = 2a + z + \bar{z} < 0\}; \quad (3.37)$$

Figura 3.11: Región de estabilidad \mathbf{D}_2

esta región LMI implica que $\alpha = 2a$ y $\beta = 1$, entonces (3.38) es:

$$2a \otimes X + 1 \otimes (AX) + 1 \otimes (AX)^T = 2aX + AX + XA^T < 0, \quad X > 0, \quad (3.38)$$

3. En un disco de radio r y centrado en $(-q, 0)$ (Fig. 3.12):

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z+q| < r \iff f\mathbf{D}_3(z) = \begin{bmatrix} -r & z+q \\ \bar{z}+q & -r \end{bmatrix} < 0 \right\} \quad (3.39)$$

La LMI que garantiza la estabilidad de $\dot{x} = Ax$ en el disco se construye con

$$\alpha = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} \text{ y } \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} \otimes X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (AX) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes (XA^T) = \\ \begin{bmatrix} -rX & AX + qX \\ XA^T + qX & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

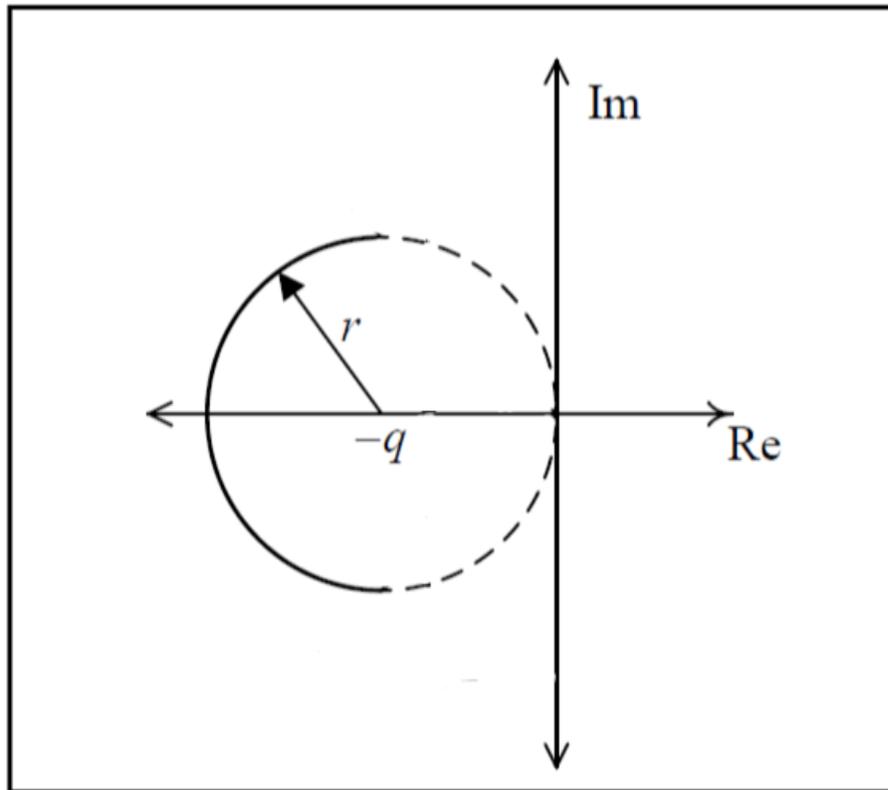


Figura 3.12: Región de estabilidad D_3

Adicionalmente es posible usar estas diferentes delimitaciones por regiones de manera simultánea para tener más control con respecto a la región en la que los polos serán colocados. De esta manera, por ejemplo, se puede exigir la solución de una matriz $K \in \mathbb{R}_{m \times n}$ para un sistema de lazo

cerrado tal que

$$\text{eig}(A + BK) \in \Psi(\alpha, \beta, r) \quad (3.42)$$

donde $\text{eig}(\cdot)$ representa los valores propios de la matriz de lazo cerrado y Ψ denota región acotada dentro del lado izquierdo del plano complejo, como se ilustra en la Fig. 3.13. Los parámetros α , β y r determinan la velocidad de respuesta, el amortiguamiento y las dinámicas más rápidas respectivamente.

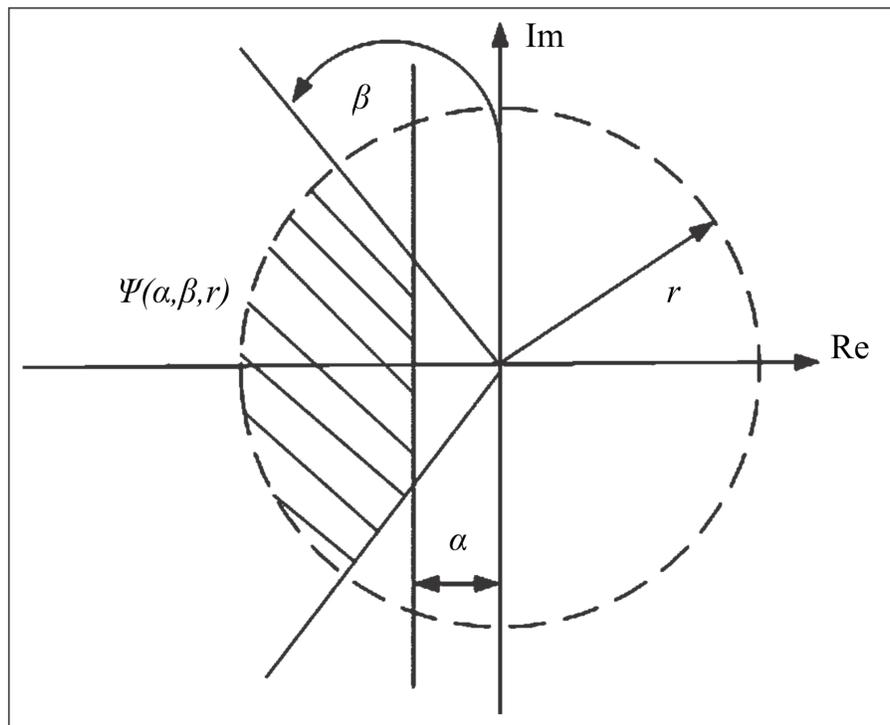


Figura 3.13: Región de estabilidad \mathbf{D}_3

De esta manera, el sistema de lazo cerrado es estabilizable y sus valores propios en lazo cerrado cumplen con la condición (3.42) si y sólo si existen matrices $X = X^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que:

$$\begin{aligned}
& AX + XA^T + BM + M^T B^T + 2\alpha X < 0, \\
& \begin{bmatrix} -rX & AX + BM \\ XA^T + M^T B^T & -rX \end{bmatrix} < 0, \\
& \begin{bmatrix} \sin\beta(AX + XA^T + BM + M^T B^T) & \cos\beta(AX - XA^T + BM - M^T B^T) \\ \cos\beta(XA^T - AX + M^T B^T - BM) & \sin\beta(AX + XA^T + BM + M^T B^T) \end{bmatrix} < 0,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Capítulo 4

Control robusto de una grúa de 3DOF

En esta sección se presentan los principales desarrollos de la tesis. El Capítulo inicia con el desarrollo del modelo matemático no lineal de una grúa viajera de tres grados de libertad, así como con su modelo convexo Takagi-Sugeno y el sistema de control retroalimentado con enfoque H_∞ .

4.1. Modelo no lineal de una grúa viajera

El diagrama esquemático de una grúa viajera de tres grados de libertad (3DOF) se muestra en la Figura 4.1. El carro se desliza a lo largo del riel horizontal al mismo tiempo que este es sostenido por dos patas metálicas. Una masa es suspendida de un cable unido al carro. La fuerza F_x se aplica al carro para moverlo a una distancia x . Este movimiento provoca que se forme un ángulo θ en el péndulo formado por la carga de masa m y el cable de longitud l cuyo valor puede cambiar mediante F_l el cual activa el sistema de alzado por medio de un motor y engranes. La posición de la carga en un plano (x, z) descrita a partir de la posición del centro del carrito $(x(t), z(t))$:

$$\begin{aligned}x_m &= x(t) + l(t) \sin \theta(t), \\z_m &= -l(t) \cos \theta(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

nótese que x_m es la posición en el eje x de la masa el cual depende de la posición del carrito ($x(t)$) mas la componente horizontal del ángulo formado por el cable. De la misma forma z_m está descrita por la posición del carrito la cual siempre será cero en el eje z menos la componente vertical del ángulo formado por el cable.

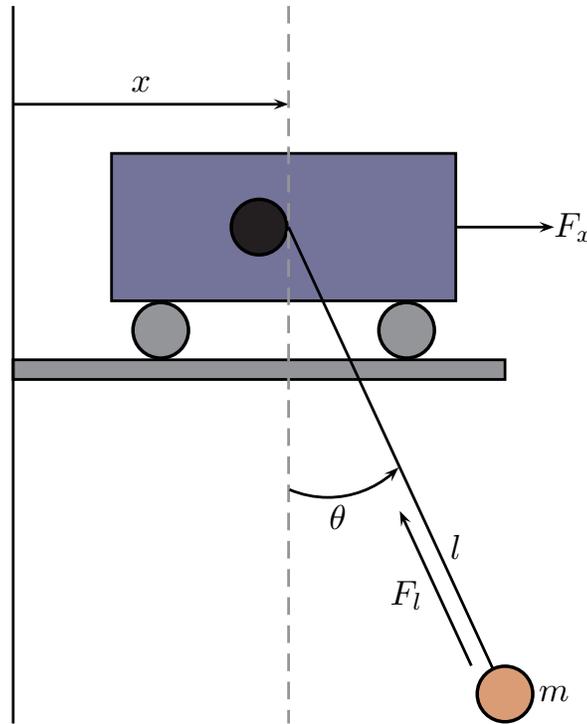


Figura 4.1: Esquema de una grúa de tres grados de libertad.

Para obtener las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema se utiliza el formalismo Euler-Lagrange, tomando como base las deducciones publicadas en [Almutairi & Zribi \(2009\)](#). Las ecuaciones de energía cinética (K) y potencial (P) son:

$$K = \frac{1}{2} (M_x \dot{x}(t)^2 + M_l \dot{l}(t)^2) + \frac{m}{2} v_m^2, \quad (4.2)$$

$$P = mgl(t)(1 - \cos\theta(t)), \quad (4.3)$$

nótese que (4.2) sigue la formula general para la obtención de la energía cinética la cual es un

medio de la masa del objeto por la velocidad a la que se mueve al cuadrado. En este caso, debido a que la masa del sistema está dividida en varios elementos cuyos movimientos son diferentes, cada sección de la masa se multiplica por su respectiva velocidad. Para la energía potencial, en este caso la única sección de masa que es afectada por esta es la carga. La carga de la masa es multiplicada por la aceleración gravitatoria y por la diferencia entre la longitud de la cuerda y la componente vertical del ángulo formado por el cable.

donde M_x es la suma de m y m_c , M_l equivale a m (ver Tabla. 4.1) y el análisis de la velocidad se presenta a continuación:

$$v_m^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{z}_m^2 \quad (4.4)$$

donde \dot{x}_m^2 y \dot{z}_m^2 , a partir de (4.1), están descritas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m^2 = & \dot{x}(t)^2 + 2\dot{x}(t)l(t)\sin\theta(t) + 2\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) + \dot{l}(t)^2\sin^2\theta(t) + \\ & \dot{\theta}(t)\dot{l}(t)l(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t) + l(t)^2\cos^2\theta^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\dot{z}_m^2 = \dot{\theta}(t)^2l(t)^2\sin^2\theta(t) + 2\dot{\theta}(t)\dot{l}(t)l(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t) + \dot{l}(t)^2\cos^2\theta(t)^2 \quad (4.6)$$

de esta manera, tomando en cuenta las ecuaciones (4.5) y (4.6), la ecuación (4.4) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$v_m^2 = \dot{x}(t)^2 + \dot{l}(t)^2 + \dot{\theta}(t)^2l(t)^2 + 2\dot{x}(t)\dot{l}(t)\sin\theta(t) + 2\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t). \quad (4.7)$$

La ecuación de Lagrange está expresada como:

$$L = K - P, \quad (4.8)$$

y usando las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.7), la ecuación (4.8) se reescribe como:

$$L = \frac{1}{2} (M_x \dot{x}(t)^2 + M_l \dot{l}(t)^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}(t)^2 + \dot{l}(t)^2 + \dot{\theta}(t)^2 l(t)^2 + 2\dot{x}(t)\dot{l}(t) \sin \theta(t) + 2\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t)) + mgl(t) (\cos \theta(t) - 1). \quad (4.9)$$

Las ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange con respecto a la posición de la carga en el eje x y el eje z y el ángulo entre el cable y la normal pueden ser escritas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_x(t) - D_x \dot{q}_1, \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_l(t) - D_l \dot{q}_2, \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0, \quad (4.12)$$

para este caso, $[q_1, q_2, q_3] = [x(t), l(t), \theta(t)]$. De esta manera, sustituyendo (4.9) en estas ecuaciones

$$\frac{d}{dt} (M_x \dot{x}(t) + m\dot{x}(t) + m\dot{l}(t) \sin \theta(t) + ml(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t)) - 0 = F_x(t) - D_x \dot{x}(t), \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_l \dot{l}(t) + m\dot{l}(t) + m\dot{x}(t) \sin \theta(t)) - m\dot{\theta}(t)^2 l(t) - m\dot{x}(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) - mg \cos \theta(t) \\ + mg = F_l(t) - D_l \dot{l}(t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\dot{\theta}(t)l(t)^2 + m\dot{x}(t)l(t) \cos \theta(t)) - m\dot{x}(t)\dot{l}(t) \cos \theta(t) + m\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \\ + mgl \sin \theta(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

A continuación, desarrollando la derivada con respecto al tiempo, obtenemos

$$(M_x + m)\ddot{x}(t) + m\dot{l}(t)\sin\theta(t) + 2m\dot{l}(t)\cos\theta(t)\dot{\theta}(t) - ml(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t)^2 + ml(t)\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) - 0 = F_x(t) - D_x\dot{x}(t), \quad (4.16)$$

$$(M_l + m)\dot{l}(t) + m\ddot{x}(t)\sin\theta(t) + m\dot{x}(t)\cos\theta(t)\dot{\theta} - m\dot{\theta}(t)^2l(t) - m\dot{x}(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) - mg\cos\theta(t) + mg = F_l(t) - D_l\dot{l}(t), \quad (4.17)$$

$$m\ddot{\theta}(t)l(t)^2 + 2m\dot{\theta}(t)l(t)\dot{l}(t) + m\ddot{x}(t)l(t)\cos\theta(t) + m\dot{x}(t)\dot{l}(t)\cos\theta(t) - m\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) - m\dot{x}(t)\dot{l}(t)\cos\theta(t) + m\dot{x}(t)l(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + mgl\sin\theta(t) = 0, \quad (4.18)$$

de donde se pueden eliminar los términos semejantes de modo que se deducen las ecuaciones diferenciales no lineales siguientes:

$$(M_x + m)\ddot{x}(t) + m\dot{l}(t)\sin\theta(t) + 2m\dot{l}(t)\cos\theta(t)\dot{\theta}(t) - ml(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t)^2 + ml(t)\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) = F_x(t) - D_x\dot{x}(t), \quad (4.19)$$

$$(M_l + m)\dot{l}(t) + m\ddot{x}(t)\sin\theta(t) - ml(t)\dot{\theta}(t)^2 - mg\cos\theta(t) + mg = F_l(t) - D_l\dot{l}(t), \quad (4.20)$$

$$m\ddot{\theta}(t)l(t)^2 + m\ddot{x}(t)l(t)\cos\theta(t) + 2m\dot{\theta}(t)l(t)\dot{l}(t) + mgl(t)\sin\theta(t) = 0. \quad (4.21)$$

Donde f_x , y f_l son las entradas del sistema que controlan el movimiento de la grúa en la dirección x y z .

Los valores de cada parámetro se muestran en la Tabla 4.1, los cuales se tomaron de [Petrehuş et al. \(2013\)](#).

Cuadro 4.1: Descripción de parámetros

Parámetros	Símbolo	Valor	Unidad
Masa de la carga	m	1	Kg
Masa del carrito	m_c	2.49	Kg
Aceleración gravitatoria	g	9.81	m/s
Índice de amortiguamiento x	D_x	82	Kg/s
Índice de amortiguamiento z	D_l	100	Kg/s

El modelo dinámico del sistema de la grúa viajera de 3DOF presenta la complicación debido a que existen segundas derivadas de mas de una de las variables premisas en cada ecuación diferencial resultante de la resolución de la ecuación Lagrangeana descritas en (4.19), (4.20) y (4.21). Por tanto, es conveniente describir estas en una notación matricial como el que se presenta a continuación

$$M(q)\ddot{q} + D\dot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F \quad (4.22)$$

en donde los elementos del vector q , las entradas F , la matriz simétrica de masas $M(q)$, la matriz centrífuga $C(q, \dot{q})$, matriz de amortiguamiento D y el vector de fuerza gravitacional $G(q)$ son definidas a continuación:

$$q = \begin{bmatrix} x(t) \\ l(t) \\ \theta \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_l \\ 0 \end{bmatrix} \quad M(q) = \begin{bmatrix} (M_x + m) & m \sin \theta(t) & ml(t) \cos \theta(t) \\ m \sin \theta(t) & (M_l + m) & 0 \\ ml(t) \cos \theta(t) & 0 & ml(t)^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 2m \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) & -ml \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) \\ 0 & 0 & -ml(t) \dot{\theta}(t) \\ 0 & 2m \dot{\theta}(t) l(t) & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ mg - mg \cos \theta(t) \\ mgl(t) \sin \theta(t) \end{bmatrix}$$

Definiendo un vector de estado, el cual contiene la posición en el eje x y el eje z así como sus respectivas velocidades, el ángulo formado por el cable y su velocidad angular, tal que $x(t) =$

$[x(t), \dot{x}(t), l(t), \dot{l}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)]^T$, el vector de entrada como $\mathbf{u}(t) = [F_x(t), F_l(t)]^T$ y considerando $\sin\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$ debido a que se asume que los ángulos en la carga serán muy pequeños, el sistema queda representado en variables de estado de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 D_x & 0 & m_1 D_l x_5 & m_4 g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 D_x x_5 & 0 & -m_3 D_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_2 D_x}{x_3} & 0 & -\left(\frac{m_1 D_l x_5}{x_3} + \frac{2x_6}{x_3}\right) & \frac{-m_5 g}{x_3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & -m_1 x_5 \\ 0 & 0 \\ -m_1 x_5 & m_3 \\ 0 & 0 \\ -\frac{m_2}{x_3} & \frac{m_1 x_5}{x_3} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (4.23)$$

4.1.1. Modelo Takagi-Sugeno de la grúa

Con el objetivo de desarrollar un modelo TS, los términos no lineales del modelo presentado en (4.23) se eligen como variables premisas, es decir:

$$\mathbf{z} = \left[x_5 \quad \frac{1}{x_3} \quad \frac{x_5}{x_3} \quad \frac{x_6}{x_3} \right].$$

Cada estado presente en el vector premisa queda acotado de acuerdo a limitaciones presentes en el sistema físico, tal que: $x_3 \in [0,1,0,72][m]$ debido a la longitud del cable de la grúa de la que se basa el modelo, y $x_5 \in [-0,35,0,35][rad]$ y $x_6 \in [-3,467,3,467][rad/s]$ basado en simulaciones del sistema de un péndulo simple, las cuales nos presentan las velocidades angulares máximas y mínimas, así como los ángulos máximos y mínimos que se forman con el balanceo.

Las funciones de peso para $z_i, i = 1, \dots, 4$ se obtienen de acuerdo al siguiente procedimiento:

1. Para $z_1 = x_5$ las cotas son $z_{1,min} = -0,35$ y $z_{1,max} = 0,35$. Las funciones de peso son $w_{11} = \frac{z_{1,max} - z_1}{z_{1,max} - z_{1,min}}$ y $w_{12} = 1 - w_{11}$. El término z_1 puede ser rescrito como $z_1 = z_{1,min}w_{11} + z_{1,max}w_{12}$.
2. El término $z_2 = \frac{1}{x_3}$ es acotado como $z_{2,min} = 1$ y $z_{2,max} = 10$. Las funciones de peso son

$w_{21} = \frac{z_{2,max} - z_2}{z_{2,max} - z_{1,min}}$ y $w_{22} = 1 - w_{21}$. El termino $z_2(t)$ puede ser rescrito como $z_2 = z_{2,min}w_{21} + z_{2,max}w_{22}$.

3. $z_3 = \frac{x_5}{x_3}$ es acotado como $z_{3,min} = -3,5$ y $z_{3,max} = 3,5$. Las funciones de peso son $w_{31} = \frac{z_{3,max} - z_3}{z_{3,max} - z_{3,min}}$ y $w_{32} = 1 - w_{31}$. El termino z_3 puede ser rescrito como $z_3 = z_{3,min}w_{31} + z_{3,max}w_{32}$.

4. De igual manera $z_4 = \frac{x_6}{x_3}$ es acotado como $z_{4,min} = -34,67$ y $z_{4,max} = 34,67$. Las funciones de peso son $w_{41} = \frac{z_{4,max} - z_4}{z_{4,max} - z_{4,min}}$ y $w_{42} = 1 - w_{41}$. z_4 es rescrito como $z_4 = z_{4,min}w_{41} + z_{4,max}w_{42}$.

Como se aprecia arriba, cada variable premisa $z_i, i = 1, \dots, 4$ tiene dos funciones de peso, eso significa que tenemos un modelo TS con $2^4 = 16$ modelos locales. Las funciones de pertenencia se obtienen:

$$h_i(z) = \prod_{j=1}^r w_{i_j}^j(z_j), \quad i = 1, 2, \dots, 2^p. \quad (4.24)$$

Con $i = 2, \dots, 2^p, i_j \in \{0, 1\}, p$ es el nombre de no linealidades, $r = 2^p$ es el numero de submodelos. De esta manera, el modelo TS obtenido en este trabajo queda expresado como:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{16} h_i(z)(A_i x + B_i u). \quad (4.25)$$

donde las funciones de ponderación quedan descritas como

$$\begin{aligned} h_1 &= \mu_1 \mu_3 \mu_5 \mu_7 \\ h_2 &= \mu_1 \mu_3 \mu_5 \mu_7 \\ h_3 &= \mu_1 \mu_3 \mu_5 \mu_8 \\ &\vdots \\ h_{16} &= \mu_2 \mu_4 \mu_6 \mu_8 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Y los modelos locales se obtienen evaluando cada modelo local en las cotas mínimas y máximas de los variables premisa:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 D_x & 0 & \underline{z}_2 & m_1 m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 D_x \underline{z}_1 & 0 & -m_3 D_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_1 D_x \underline{z}_3 & 0 & \underline{z}_5 & -m_4 g \underline{z}_3 & 0 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1 & -m_2 \\ 0 & 0 \\ -m_2 \underline{z}_1 & m_3 \\ 0 & 0 \\ -m_1 \underline{z}_3 & \underline{z}_4 \end{bmatrix} \\
A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 D_x & 0 & \underline{z}_2 & m_1 m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 D_x \underline{z}_1 & 0 & -m_3 D_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_1 D_x \underline{z}_3 & 0 & \underline{z}_5 & -m_4 g \underline{z}_3 & 0 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1 & -m_2 \\ 0 & 0 \\ -m_2 \underline{z}_1 & m_3 \\ 0 & 0 \\ -m_1 \underline{z}_3 & \underline{z}_4 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 D_x & 0 & \underline{z}_2 & m_1 m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 D_x \underline{z}_1 & 0 & -m_3 D_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_1 D_x \underline{z}_3 & 0 & \underline{z}_5 & -m_4 g \underline{z}_3 & 0 \end{bmatrix} & B_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1 & -m_2 \\ 0 & 0 \\ -m_2 \underline{z}_1 & m_3 \\ 0 & 0 \\ -m_1 \underline{z}_3 & \underline{z}_4 \end{bmatrix} \\
& \vdots \\
A_{16} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 D_x & 0 & \bar{z}_2 & m_1 m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 D_x \bar{z}_1 & 0 & -m_3 D_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_1 D_x \bar{z}_3 & 0 & \bar{z}_5 & -m_4 g \bar{z}_3 & 0 \end{bmatrix} & B_{16} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1 & -m_2 \\ 0 & 0 \\ -m_2 \bar{z}_1 & m_3 \\ 0 & 0 \\ -m_1 \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Los modelos locales lineales son obtenidos al reemplazar los valores correspondientes de las no linealidades de (términos no constantes) en las matrices A_i y B_i de (4.23). Con lo que se obtienen las 16 combinaciones que dan como resultado 16 submodelos.

Nótese, que el modelo obtenido es exacto al modelo no lineal dentro de las cotas consideradas. Este modelo Takagi-Sugeno puede entonces presentarse de una forma mas compacta como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_h x(t) + B_h u(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{4.28}$$

donde

$$A_h = \sum_{i=1}^{16} h_i(z(x))A_i, \quad B_h = \sum_{i=1}^{16} h_i(z(x))B_i.\tag{4.29}$$

4.1.2. Desarrollo del controlador convexo H_∞

La estabilización de un sistema lineal suele realizarse por medio de realimentación lineal del estado $u(t) = Fx(t)$. De manera análoga, se aplica el esquema propuesto por Wang et al. (1995) denominado compensación paralela distribuida (PDC). Esta ley de control utiliza las funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno a controlar y es, en sí misma, una combinación convexa de realimentación de estado.

Dado que se trata de un control tolerante a fallas pasivo, las fallas a las que este será tolerante son consideradas a priori. En este caso, el tipo de fallas tomadas en cuenta son las aditivas. De este modo, de acuerdo con Benosman & Lum (2009), el sistema (4.28) se reescribe como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_h \mathbf{x} + B_h (\mathbf{u} + f), \\ y &= C(\mathbf{x} + f),\end{aligned}\tag{4.30}$$

donde:

$$A_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i, B_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) B_i.$$

Haciendo uso de la ley algebraica distributiva podemos reescribir el sistema como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_h \mathbf{x} + B_h \mathbf{u} + B_h f, \\ y &= C \mathbf{x} + C f,\end{aligned}\tag{4.31}$$

Considerando la posibilidad de que las matrices de fallas sea a diferente a las matrices de entrada y salida.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_h \mathbf{x} + B_h \mathbf{u} + G_h f, \\ y &= C \mathbf{x} + E f,\end{aligned}\tag{4.32}$$

donde $f \in \mathbb{R}^s$ representa las fallas aditivas tomadas en cuenta a priori en los actuadores con $G \in \mathbb{R}^{n \times s}$ y sensores con $E = 0$ debido a que en este trabajo no se consideran las fallas en sensores.

Se considera un controlador con compensación paralela distribuida de la forma:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^r h_i(z(\mathbf{x})) F_i(t) = F_h \mathbf{x},\tag{4.33}$$

donde $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i = 1, 2, \dots, r$, son las ganancias necesarias para estabilizar al sistema.

Sustituyendo (4.33) en (4.32), se tiene la siguiente representación del sistema realimentado

$$\dot{x} = (A_h + B_h F_h)x + G_h f. \quad (4.34)$$

Esta técnica consiste en minimizar la relación entre la norma ℓ_2 de la señal de salida y la norma ℓ_2 de la perturbación; es decir, resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\gamma > 0} \gamma: \min_{\|f\|_{\ell_2} \neq 0} \frac{\|y\|_{\ell_2}}{\|f\|_{\ell_2}} \leq \gamma, \quad (4.35)$$

donde $\gamma > 0$ se denomina nivel de atenuación y la norma ℓ_2 . El siguiente Teorema da condiciones suficientes para garantizar la estabilización del sistema (4.31) sujeto a (4.35).

Teorema 1. *Dado el sistema TS (4.25) y la ley de control (4.33), el sistema (4.31) es estable y robusto con desempeño H_∞ y factor de atenuación $\gamma > 0$ si y solo si existen matrices $X = X^T > 0$ y $M_j \forall i \in 1, 2, \dots, r$ tal que:*

$$\begin{bmatrix} A_i X + B_i M_j + M_j^T B_i^T + X A_i^T & G_i & X C^T \\ G_i^T & -\gamma^2 I & E^T \\ C X & E & -I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.36)$$

Las ganancias del observador se calculan como $F_i = M_j X^{-1}$.

Demostración: Para garantizar la estabilidad del sistema y minimizar los efectos de las perturbaciones en la salida del sistema, se considera el siguiente criterio de desempeño:

$$\dot{V}(x) + y^T y - \gamma^2 f^T f \leq 0, \quad (4.37)$$

donde \dot{V} es la derivada de la función de Lyapunov sobre la trayectoria de los estados, tal que:

$$V(x) := x^T P x > 0. \quad (4.38)$$

Considerando la derivada de (4.54) en (4.37), se tiene:

$$\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + (Cx - Ef)^T (Cx - Ef) - \gamma^2 f^T f \leq 0. \quad (4.39)$$

Desarrollando considerando el sistema retroalimentado (4.34), se obtiene:

$$\begin{aligned} & x^T P ((A_h + B_h F_h)x + G_h f) + ((A_h + B_h F_h)x + G_h f)^T P x \\ & + (Cx - Ef)^T (Cx - Ef) - \gamma^2 f^T f \leq 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned} & x^T (PA_h + PB_h F_h + F_h^T B_h^T P + A_h^T P + C^T C)x + x^T (PG_h + C^T E)f \\ & + f^T (E^T C + G_h^T P)x + f^T (E^T E - \gamma^2 I)f \leq 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Factorizando a la izquierda y derecha por $\begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix}$ y su transpuesta se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x^T \\ f^T \end{bmatrix}^T \Phi \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.42)$$

Donde Φ queda definida como:

$$\begin{bmatrix} PA_h + PB_h F_h + F_h^T B_h^T P + A_h^T P + C^T C & PG_h + C^T E \\ E^T C + G_h^T P & E^T E - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.43)$$

Nótese que el sistema (4.44) es no lineal debido a los términos desconocido P y F_h . Para solventar este problema, se pre y pos multiplica por:

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

donde $X = P^{-1}$, tal que se obtiene la siguiente LMI equivalente.

$$\begin{bmatrix} A_h X + B_h F_h X + X F_h^T B_h^T + X A_h^T + X C^T C X & G_h + X C^T E \\ E^T C X + G_h^T & E^T E - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.44)$$

Con esta consideración, el término no lineal resultante se elimina fácilmente considerando $M_h = F_h X$, tal que se obtiene la siguiente desigualdad lineal matricial (LMI):

$$\begin{bmatrix} A_h X + B_h M_h + M_h^T B_h^T + X A_h^T + X C^T C X & G_h + X C^T E \\ G_h^T + E^T C X & E^T E - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.45)$$

Equivalentemente, la LMI (4.45) se expresa de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_h X + B_h M_h + M_h^T B_h^T + X A_h^T & G_h \\ G_h^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X C^T \\ E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C X & E \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.46)$$

Finalmente aplicando el complemento de Schur se obtiene la LMI descrita en el Teorema 1. \square

Al resolver el teorema descrito, se garantiza la estabilidad del controlador incluso bajo ciertas condiciones de falla. El problema expresado en (4.35) se vuelve entonces un problema de optimización el cual consiste en hallar el mínimo $\gamma > 0$ de tal manera que $X > 0$ y (4.37) se satisfagan y de esta manera conseguir la mayor atenuación posible del impacto que las perturbaciones (en este

caso fallas) sobre la señal de salida.

4.1.3. Control de seguimiento de trayectoria convexo H_∞

El objetivo de esta sección es desarrollar una ley de control por realimentación capaz de hacer que las salidas del sistema sigan un conjunto señales de referencia previamente definidas. Se toma en cuenta de nuevo el sistema descrito en (4.32) y se propone un sistema conformado como se muestra en la Fig. 4.2 en donde ω es el valor deseado para las salidas y se agrega un integrador comparador. Para que las salidas alcancen los valores de referencia se agrega un comparador integrador de tal forma que

$$\dot{\epsilon}(t) = \omega(t) - y(t) = \omega(t) - Cx(t) - Ef(t) \quad (4.47)$$

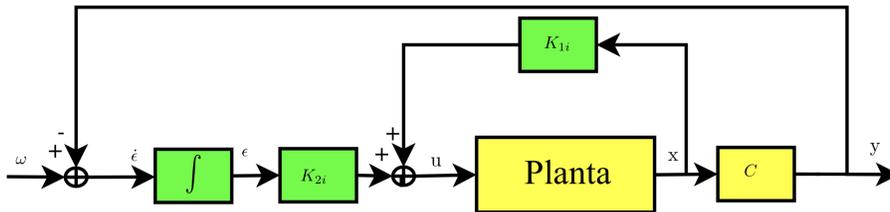


Figura 4.2: Esquema de control de seguimiento de trayectoria.

La ley de control esta dada por el siguiente esquema de retroalimentación

$$u(t) = F_{1i}x(t) + F_{2i}\epsilon(t) = \mathcal{F}_i \begin{bmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

en donde F_{1i} y F_{2i} son las matrices de ganancia para la retroalimentación de estados que necesitan ser obtenidas. De esta forma el problema se delimita a determinar los valores óptimos para estas ganancias de control.

Considerando la presencia del comparador (4.47) en el esquema de control, se obtiene el siguiente sistema aumentado

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_h \bar{x}(t) + \bar{B}_h u(t) + \bar{G}_h f(t) + \bar{B}_\omega \omega(t) \quad (4.49)$$

con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_h \\ -E \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}.$$

Asumiendo que el par $[\bar{A}, \bar{B}]$ es controlable y tomando en cuenta la ley de control como quedó definida en (4.48), se obtiene el siguiente sistema de lazo cerrado

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A}_h - \bar{B}_h \mathcal{F}_h) \bar{x} + \bar{G}_h f(t) + \bar{B}_\omega \omega(t) \quad (4.50)$$

Por simplicidad, (4.50) puede ser descrito de manera equivalente como:

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A}_h - \bar{B}_h \mathcal{F}_h) \bar{x} + \bar{G}_{\omega h} \bar{f}_\omega(t) \quad (4.51)$$

con

$$\bar{G}_{\omega h} = \begin{bmatrix} \bar{G}_h & \bar{B}_\omega \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_\omega = \begin{bmatrix} f(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

De esta manera se procede a demostrar para este sistema el teorema (1) de la misma forma en que se demostró en la sección anterior.

Demostración: En este caso, a diferencia del anterior, se busca garantizar la estabilidad del sistema y minimizar los efectos de las perturbaciones en el vector de estados del sistema aumentado. Se considera el siguiente criterio de desempeño:

$$\dot{V}(\bar{x}) + \bar{x}^T \bar{x} - \gamma^2 \bar{f}_\omega^T \bar{f}_\omega \leq 0, \quad (4.53)$$

donde \dot{V} es la derivada de la función de Lyapunov sobre la trayectoria de los estados aumentados, tal que:

$$V(\bar{x}) := \bar{x}^T P \bar{x} > 0. \quad (4.54)$$

Considerando la derivada de (4.54) en (4.53), se tiene:

$$\dot{\bar{x}}^T P \bar{x} + \bar{x}^T P \dot{\bar{x}} + \bar{x}^T \bar{x} - \gamma^2 \bar{f}_\omega^T \bar{f}_\omega \leq 0. \quad (4.55)$$

Desarrollando considerando el sistema retroalimentado (4.51), se obtiene:

$$\bar{x}^T P ((\bar{A}_h - \bar{B}_h \mathcal{F}_h) \bar{x} + \bar{G}_{\omega h} f_\omega) + ((\bar{A}_h - \bar{B}_h \mathcal{F}_h) \bar{x} + \bar{G}_{\omega h} f_\omega)^T P \bar{x} + \bar{x}^T \bar{x} - \gamma^2 \bar{f}_\omega^T \bar{f}_\omega \quad (4.56)$$

equivalentemente:

$$x^T (P\bar{A}_h - P\bar{B}_h\mathcal{F}_h - \mathcal{F}_h^T\bar{B}_h^T P + \bar{A}_h^T P + I)x + x^T (P\bar{G}_{\omega h})\bar{f}_\omega + \bar{f}_\omega^T (\bar{G}_{\omega h}^T P)x - \bar{f}_\omega^T (\gamma^2 I)\bar{f}_\omega \leq 0. \quad (4.57)$$

Factorizando a la izquierda y derecha por $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{f}_\omega \end{bmatrix}$ y su transpuesta se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^T \\ \bar{f}_\omega^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P\bar{A}_h - P\bar{B}_h\mathcal{F}_h - \mathcal{F}_h^T\bar{B}_h^T P + \bar{A}_h^T P + I & P\bar{G}_{\omega h} \\ \bar{G}_{\omega h}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{f}_\omega \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.58)$$

Nótese que el sistema (4.58) es no lineal debido a los términos desconocido P y \mathcal{F} . Para solventar este problema, se pre y pos multiplica por:

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

donde $X = P^{-1}$, tal que se obtiene la siguiente LMI equivalente.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_h X - \bar{B}_h \mathcal{F}_h X - X \mathcal{F}_h^T \bar{B}_h^T + X \bar{A}_h^T + X^T X & \bar{G}_{\omega h} \\ \bar{G}_{\omega h}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.59)$$

Con esta consideración, el término no lineal resultante se elimina fácilmente considerando $M_h = \mathcal{F}_h X$, tal que se obtiene la siguiente desigualdad lineal matricial (LMI):

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_h X - \bar{B}_h M_h - M_h^T \bar{B}_h^T + X \bar{A}_h^T + X^T X & \bar{G}_{\omega h} \\ \bar{G}_{\omega h}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.60)$$

Se puede notar que a pesar de este cambio de variable, aun queda un termino cuadrático lo cual no permite que la solución de la LMI sea factible. Una vez mas tomamos ayuda del complemento de

Schur para lograr separar los términos de esta no linealidad de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_h X - \bar{B}_h M_h - M_h^T \bar{B}_h^T + X \bar{A}_h^T & \bar{G}_{\omega h} \\ \bar{G}_{\omega h}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^T X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.61)$$

en donde la segunda matriz en la suma puede ser factorizada como

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_h X - \bar{B}_h M_h - M_h^T \bar{B}_h^T + X \bar{A}_h^T & \bar{G}_{\omega h} \\ \bar{G}_{\omega h}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^T \\ 0 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.62)$$

Finalmente, de este modo obtenemos la siguiente LMI:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_h X - \bar{B}_h M_h - M_h^T \bar{B}_h^T + X \bar{A}_h^T & \bar{G}_{\omega h} & X^T \\ \bar{G}_{\omega h}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ X & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.63)$$

En este caso, la solución de el teorema garantiza la estabilidad del controlador de seguimiento de trayectoria incluso bajo ciertas condiciones de falla. Se presenta entonces un problema de optimización en el que se pretende obtener $\gamma > 0$ de tal manera que $X > 0$ y (4.53) se satisfagan y de esta manera conseguir la mayor atenuación posible del impacto que las fallas presentadas tengan en el vector de estados del sistema extendido.

Capítulo 5

Resultados y Discusión

En este capítulo se se presentan los resultados de los controladores de control paralelo distribuido discutidos en el capítulo anterior. En la Sección 5.1 se presenta la validación del modelo convexo de la grúa. En la Sección 5.2 se presentan las matrices resultantes y la estabilización de la grúa considerando el controlador PDC con desempeño H_∞ . En la Sección 5.3 se presentan los resultados de aplicar el control robusto comparador integrador a la grúa y su tolerancia a fallas aditivas. Finalmente en la sección 5.3, se presenta una comparación del desempeño de ambos controladores en condiciones sin falla y con fallas en actuadores.

5.1. Validación del modelo convexo de la grúa

El modelo matemático de la grúa se desarrollo en el Cap. anterior. Para su validación se le aplicó una entrada pulso al actuador que controla la posición de la cagar a través del eje x , como se muestra en la Fig. 5.1. Los parámetros de la grúa se tomaron de (Abdullahi et al. 2018) y se muestran en la Tabla 5.1. Se consideraron como condiciones iniciales $x(0) = 0$, $l(0) = 0,22$, $\theta(0) = 0$ y un pulso de un décimo de segundo de amplitud 1.1N.

Como se aprecia en las gráficas resultantes de las Figuras 5.2-5.4, la respuesta del modelo convexo Takagi-Sugeno y el modelo no lineal con respecto a la señal de entrada, es la misma. Es

Parámetro	Valor	Unidad
g	9.81	m/s^2
m	0.50	kg
M_x	1.655	kg
M_l	0.50	kg
D_x	100	Ns/m
D_l	82	Ns/m

Cuadro 5.1: Parámetros de la grúa para simulación

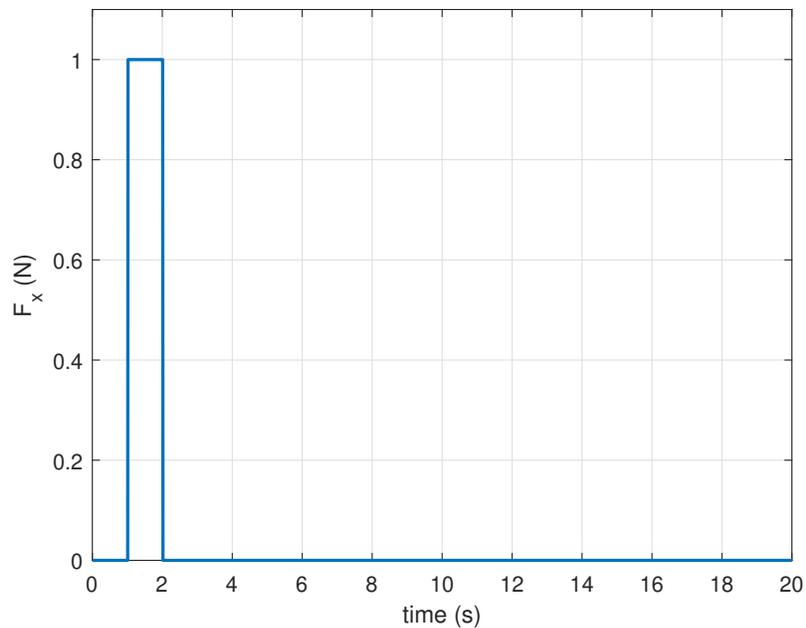


Figura 5.1: Fuerza de excitación a ambos sistemas.

decir, el comportamiento del modelo Takagi-Sugeno es idéntico al del modelo no lineal para los 6 estados de la grúa de 3DOF. En la Fig. 5.2 se presenta la respuesta a la entrada de la posición y la velocidad. Se aprecia como cambia la posición del carrito. En la Fig. 5.3 se aprecia la respuesta que se obtuvo por parte de la cuerda la cual se mantiene en mayor parte estable (el movimiento que presenta es despreciable) ya que no se le aplica una fuerza para que cambie. Finalmente en la Fig. 5.4 se aprecia una mayor respuesta ya que los estados graficados son el ángulo y la velocidad angular. Esta similitud se debe a que la técnica del sector no lineal representan de manera exacta al modelo no lineal en los sectores seleccionados.

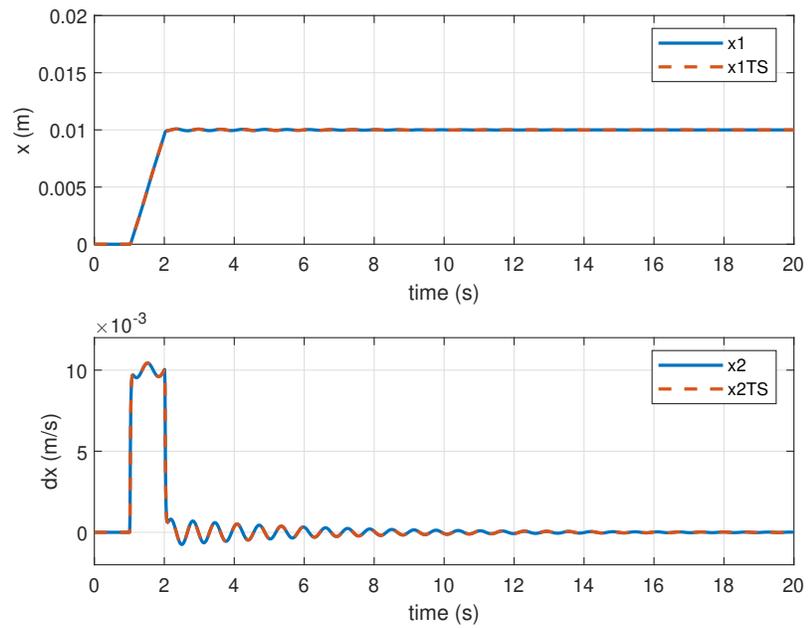


Figura 5.2: Comparación respuesta TS contra sistema no lineal en estados x_1 y x_2 .

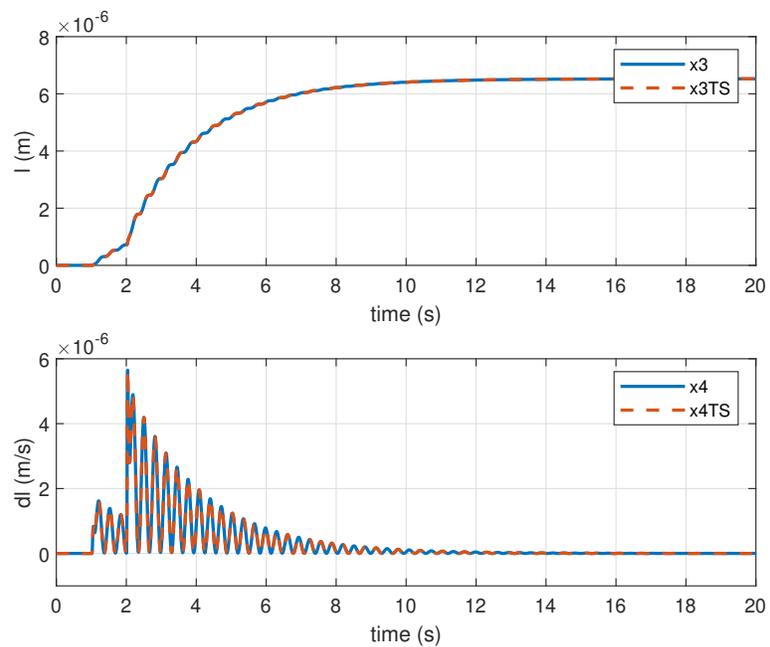


Figura 5.3: Comparación respuesta TS contra sistema no lineal en estados x_3 y x_4 .

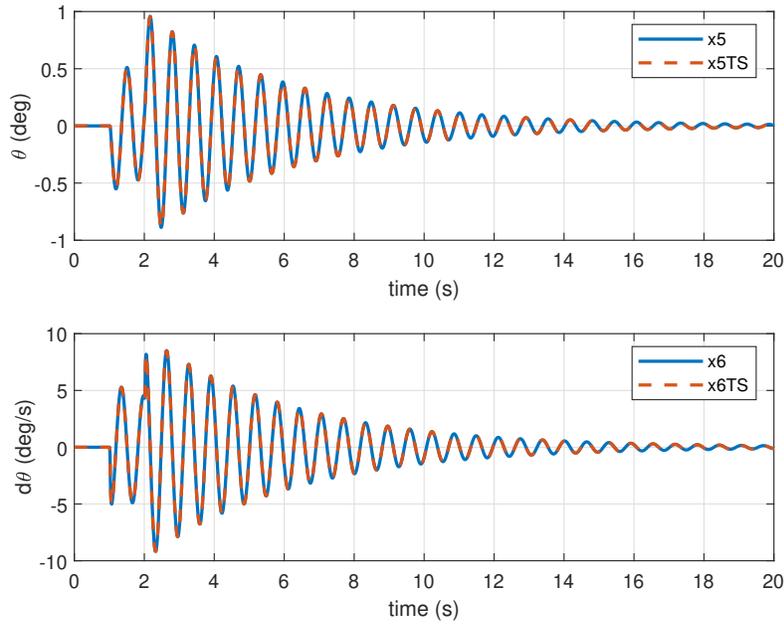


Figura 5.4: Comparación respuesta TS contra sistema no lineal en estados x_5 y x_6 .

5.2. Desempeño de estabilización H_∞

Los siguiente tiene como objetivo estabilizar la grúa aún bajo condiciones de ruido de medición y perturbaciones externas. Para ello, se resuelve el las desigualdades matriciales desarrolladas en (4.36) del Teorema (1), las cuales garantizan convergencia a cero y robustez. Resolviendo este problema de optimización por medio de software (MATLAB) y el toolbox YALMIP, se tiene una $\gamma = 1$, y la matriz P simétrica obtenida, la cual se calcula como la inversa de X es:

$$P = \begin{bmatrix} 29,2989 & 33,8755 & 35,2641 & -25,3974 & -112,0708 & -1,1582 \\ 33,8755 & 41,7475 & 46,7113 & -29,3192 & -139,3964 & -1,8173 \\ 35,2641 & 46,7113 & 165,1513 & 2,0182 & -168,5182 & -5,5944 \\ -25,3974 & -29,3192 & 2,0182 & 87,9937 & 86,5479 & -4,0631 \\ -112,0708 & -139,3964 & -168,5182 & 86,5479 & 478,4657 & 8,7512 \\ -1,1582 & -1,8173 & -5,5944 & -4,0631 & 8,7512 & 1,4297 \end{bmatrix},$$

las ganancias de realimentación se calculan como $F_h = M_h X^{-1}$ y se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{bmatrix} 2,0079 & 2,3689 & 0,5531 & -5,8250 & -7,3258 & 0,1643 \\ 1,9240 & 2,5069 & 3,9266 & -0,1850 & -9,3210 & -0,5901 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_2 &= \begin{bmatrix} 2,0081 & 2,3691 & 0,5533 & -5,8251 & -7,3266 & 0,1643 \\ 1,9237 & 2,5066 & 3,9271 & -0,1835 & -9,3202 & -0,5902 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 1,9192 & 2,2303 & 0,1316 & -6,1263 & -6,6614 & 0,2719 \\ 1,9239 & 2,5067 & 3,9264 & -0,1851 & -9,3204 & -0,5901 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_4 &= \begin{bmatrix} 1,9195 & 2,2306 & 0,1318 & -6,1267 & -6,6625 & 0,2719 \\ 1,9238 & 2,5066 & 3,9270 & -0,1839 & -9,3204 & -0,5902 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_5 &= \begin{bmatrix} 2,0083 & 2,3693 & 0,5518 & -5,8287 & -7,3265 & 0,1646 \\ 1,5305 & 1,8908 & 2,0426 & -1,5411 & -6,3612 & -0,1088 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_6 &= \begin{bmatrix} 2,0073 & 2,3681 & 0,5524 & -5,8241 & -7,3232 & 0,1644 \\ 1,5271 & 1,8869 & 2,0430 & -1,5293 & -6,3496 & -0,1094 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_7 &= \begin{bmatrix} 1,9196 & 2,2307 & 0,1301 & -6,1304 & -6,6619 & 0,2723 \\ 1,5304 & 1,8907 & 2,0425 & -1,5411 & -6,3608 & -0,1088 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_8 &= \begin{bmatrix} 1,9193 & 2,2303 & 0,1304 & -6,1285 & -6,6610 & 0,2722 \\ 1,5272 & 1,8869 & 2,0431 & -1,5291 & -6,3497 & -0,1094 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_9 &= \begin{bmatrix} 1,5527 & 1,8079 & -0,0747 & -5,4312 & -5,4525 & 0,1888 \\ 1,5832 & 2,1134 & 3,9547 & 0,9978 & -8,1598 & -0,6448 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_{10} &= \begin{bmatrix} 1,5528 & 1,8081 & -0,0746 & -5,4314 & -5,4532 & 0,1888 \\ 1,5827 & 2,1130 & 3,9550 & 0,9994 & -8,1586 & -0,6449 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_{11} &= \begin{bmatrix} 1,4639 & 1,6692 & -0,4963 & -5,7325 & -4,7879 & 0,2963 \\ 1,5831 & 2,1133 & 3,9544 & 0,9975 & -8,1593 & -0,6448 \end{bmatrix} \times 10^5, \\
 F_{12} &= \begin{bmatrix} 1,4642 & 1,6695 & -0,4962 & -5,7330 & -4,7890 & 0,2963 \\ 1,5829 & 2,1131 & 3,9548 & 0,9987 & -8,1589 & -0,6449 \end{bmatrix} \times 10^5,
 \end{aligned}$$

$$F_{13} = \begin{bmatrix} 1,5524 & 1,8075 & -0,0760 & -5,4326 & -5,4509 & 0,1890 \\ 1,1882 & 1,4957 & 2,0702 & -0,3545 & -5,1949 & -0,1637 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

$$F_{14} = \begin{bmatrix} 1,5520 & 1,8071 & -0,0755 & -5,4302 & -5,4499 & 0,1888 \\ 1,1862 & 1,4934 & 2,0704 & -0,3476 & -5,1881 & -0,1640 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

$$F_{15} = \begin{bmatrix} 1,4640 & 1,6692 & -0,4978 & -5,7354 & -4,7871 & 0,2966 \\ 1,1895 & 1,4972 & 2,0701 & -0,3588 & -5,1992 & -0,1635 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

Considerando estas ganancias se procede a realizar las simulaciones en MATLAB/SIMULINK tal como se muestra en el diagrama de la Fig. 5.5 en donde se describe el sistema y el controlador con sus matrices de ganancia así como las conexiones, formando un sistema de lazo cerrado.

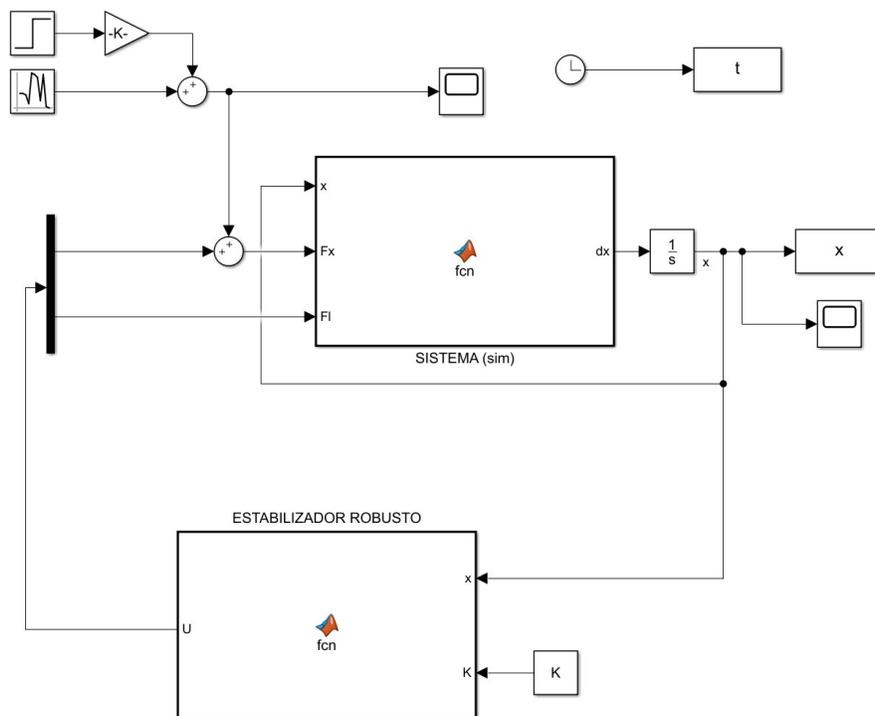


Figura 5.5: Diagrama esquemático en Simulink

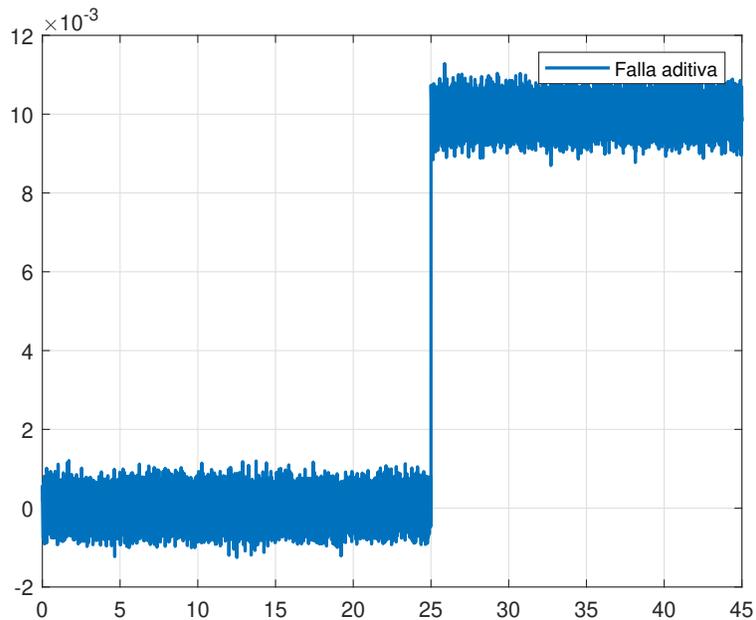


Figura 5.6: Falla aditiva más ruido

Para validar su robustez y tolerancia a fallas, se considera una señal de ruido y una falla aditiva (representada como un off-set) aditiva a la entrada F_x como se aprecia en la Fig. 5.6. Se muestran los resultados en donde se aprecia el comportamiento de los estados de posición y velocidad respectivamente del sistema de la grúa al ser retroalimentados con las ganancias F_h . Por inspección, a través de las Figuras 5.7-5.8, se verifica que todos los estados convergen asintóticamente a cero, logrando estabilizar la grúa. Nótese que a pesar de la presencia de la falla aditiva, el sistema mantiene la convergencia asintóticamente a cero con mínimo esfuerzo, lo cual nos indica que el control es suficientemente robusto para estabilizar al sistema incluso en presencia de fallas aditivas en la entrada y la posible aparición de ruido, esto debido a que el controlador cumple con la norma H_∞ presentando un nivel de atenuación óptimo.

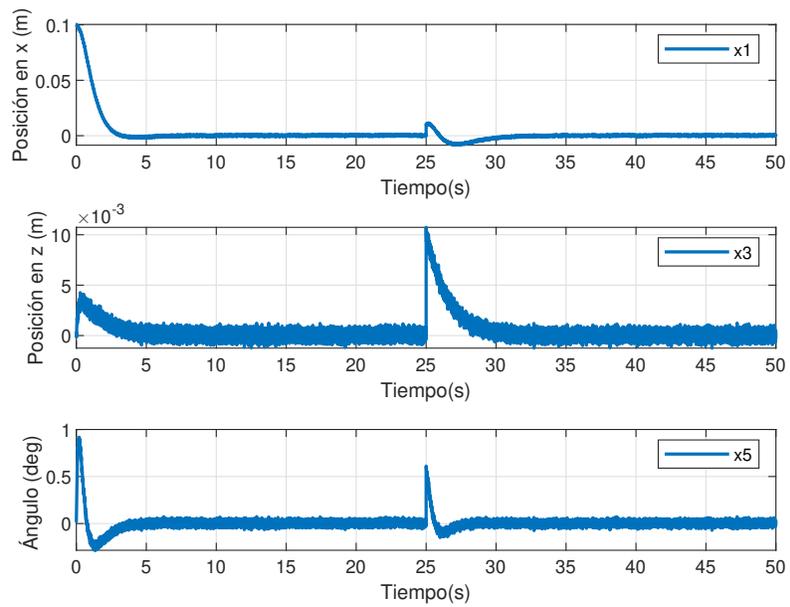


Figura 5.7: Estados de posición de la grúa 2D.

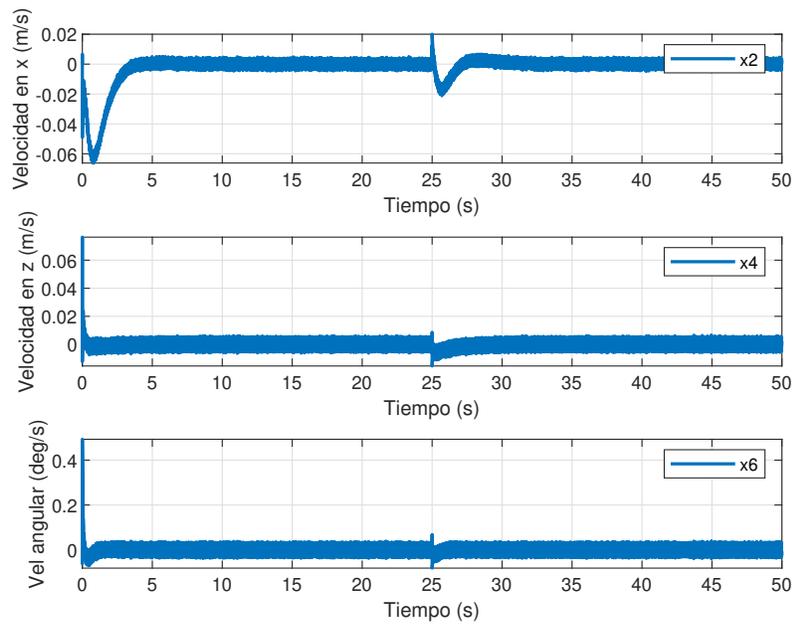


Figura 5.8: Estados de velocidad de la grúa 2D.

5.3. Desempeño control por de seguimiento de trayectorias

Para verificar la efectividad del controlador de seguimiento de trayectorias, se resuelven las LMIs del Teorema (1) con YALMIP. Como resultado se encuentra un factor de atenuación $\gamma = 0,0314$. La γ encontrada en este caso es muy buena, ya que entre mas pequeña sea el índice, mayor atenuación se obtiene del efecto de las perturbaciones sobre los estados del sistema en lazo cerrado. Como resultado se tiene la siguiente matriz P simétrica obtenida, la cual se calcula como la inversa de X :

$$P = \begin{bmatrix} 0,4657 & 0,4372 & 0,9189 & -0,0673 & -1,2153 & -0,2049 & -0,1976 & -0,1195 \\ 0,4372 & 0,4118 & 0,9016 & -0,0546 & -1,1454 & -0,1938 & -0,1850 & -0,1187 \\ 0,9189 & 0,9016 & 3,9513 & 0,3195 & -2,5567 & -0,4510 & -0,3615 & -0,5945 \\ -0,0673 & -0,0546 & 0,3195 & 0,1264 & 0,1409 & 0,0188 & 0,0345 & -0,0586 \\ -1,2153 & -1,1454 & -2,5567 & 0,1409 & 3,1886 & 0,5397 & 0,5135 & 0,3385 \\ -0,2049 & -0,1938 & -0,4510 & 0,0188 & 0,5397 & 0,0919 & 0,0863 & 0,0604 \\ -0,1976 & -0,1850 & -0,3615 & 0,0345 & 0,5135 & 0,0863 & 0,0845 & 0,0459 \\ -0,1195 & -0,1187 & -0,5945 & -0,0586 & 0,3385 & 0,0604 & 0,0459 & 0,0919 \end{bmatrix} \times 10^4,$$

las ganancias de realimentación se calculan como $F_h = M_h X^{-1}$, las cuales se presentan a continuación:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0,4413 & 0,3982 & 0,5094 & -0,1564 & -1,1217 & -0,1864 & -0,1920 & -0,0527 \\ 1,4111 & 1,3417 & 3,4874 & -0,0393 & -3,7456 & -0,6419 & -0,5895 & -0,4799 \end{bmatrix} \times 10^4,$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0,4012 & 0,3618 & 0,4954 & -0,1367 & -1,0220 & -0,1703 & -0,1742 & -0,0533 \\ 1,2311 & 1,1716 & 3,0945 & -0,0219 & -3,2718 & -0,5612 & -0,5136 & -0,4274 \end{bmatrix} \times 10^4,$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= \begin{bmatrix} 0,2041 & 0,1737 & -0,0230 & -0,1372 & -0,4961 & -0,0798 & -0,0922 & 0,0190 \\ 1,2177 & 1,1586 & 3,0506 & -0,0245 & -3,2352 & -0,5548 & -0,5082 & -0,4211 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_4 &= \begin{bmatrix} 0,1893 & 0,1604 & -0,0222 & -0,1303 & -0,4598 & -0,0740 & -0,0856 & 0,0178 \\ 1,1476 & 1,0923 & 2,8978 & -0,0176 & -3,0506 & -0,5234 & -0,4786 & -0,4007 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_5 &= \begin{bmatrix} 0,5565 & 0,5131 & 1,0649 & -0,0850 & -1,4498 & -0,2458 & -0,2366 & -0,1372 \\ 0,2073 & 0,2049 & 0,9205 & 0,0890 & -0,5815 & -0,1042 & -0,0812 & -0,1389 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_6 &= \begin{bmatrix} 0,4009 & 0,3709 & 0,9820 & -0,0109 & -1,0601 & -0,1822 & -0,1676 & -0,1349 \\ 0,0129 & 0,0180 & 0,3311 & 0,0683 & -0,0569 & -0,0130 & -0,0014 & -0,0545 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_7 &= \begin{bmatrix} 3,6911 & 3,3356 & 5,3294 & -0,9768 & -9,4708 & -1,5883 & -1,5920 & -0,6196 \\ 1,8070 & 1,7746 & 7,4317 & 0,6509 & -5,0215 & -0,8931 & -0,7156 & -1,1119 \end{bmatrix} \times 10^3, \\
F_8 &= \begin{bmatrix} 3,6480 & 3,3015 & 5,6128 & -0,9532 & -9,3868 & -1,5775 & -1,5687 & -0,6704 \\ 1,6019 & 1,5798 & 6,9650 & 0,6504 & -4,4785 & -0,7998 & -0,6294 & -1,0488 \end{bmatrix} \times 10^3, \\
F_9 &= \begin{bmatrix} 0,3482 & 0,3100 & 0,2877 & -0,1526 & -0,8757 & -0,1445 & -0,1530 & -0,0224 \\ 1,4248 & 1,3568 & 3,6259 & -0,0135 & -3,7912 & -0,6507 & -0,5939 & -0,5021 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_{10} &= \begin{bmatrix} 0,3202 & 0,2846 & 0,2830 & -0,1382 & -0,8063 & -0,1333 & -0,1405 & -0,0237 \\ 1,3100 & 1,2478 & 3,3557 & -0,0066 & -3,4873 & -0,5988 & -0,5457 & -0,4654 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_{11} &= \begin{bmatrix} 0,1262 & 0,0999 & -0,2081 & -0,1338 & -0,2903 & -0,0447 & -0,0596 & 0,0443 \\ 1,1881 & 1,1326 & 3,0850 & 0,0029 & -3,1661 & -0,5441 & -0,4944 & -0,4290 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_{12} &= \begin{bmatrix} 0,1188 & 0,0934 & -0,2016 & -0,1303 & -0,2726 & -0,0419 & -0,0562 & 0,0426 \\ 1,1718 & 1,1169 & 3,0388 & 0,0025 & -3,1222 & -0,5365 & -0,4877 & -0,4225 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_{13} &= \begin{bmatrix} 0,5176 & 0,4743 & 0,8648 & -0,1116 & -1,3392 & -0,2258 & -0,2217 & -0,1066 \\ 0,2807 & 0,2750 & 1,1203 & 0,0910 & -0,7779 & -0,1378 & -0,1116 & -0,1670 \end{bmatrix} \times 10^4, \\
F_{14} &= \begin{bmatrix} 0,3858 & 0,3540 & 0,8086 & -0,0457 & -1,0099 & -0,1722 & -0,1631 & -0,1069 \\ 0,0820 & 0,0831 & 0,4775 & 0,0607 & -0,2386 & -0,0437 & -0,0306 & -0,0740 \end{bmatrix} \times 10^4,
\end{aligned}$$

$$F_{15} = \begin{bmatrix} 3,3049 & 2,9414 & 2,9499 & -1,3361 & -8,3367 & -1,3787 & -1,4495 & -0,2494 \\ 2,4164 & 2,3639 & 9,4764 & 0,7532 & -6,6856 & -1,1820 & -0,9631 & -1,4094 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

$$F_{16} = \begin{bmatrix} 3083,5 & 2831,9 & 7679,6 & -50,2 & -8157,7 & -1405,5 & -1287,0 & -1058,8 \\ -3114,1 & -2862,5 & -2574,8 & 1291,3 & 7865,9 & 1292,2 & 1368,9 & 200,6 \end{bmatrix},$$

Para validar el desempeño del controlador con seguimiento de trayectoria se consideran los parámetros presentados anteriormente en la Tabla 4.1 y el esquema de simulación presentado en la Fig. 5.9. La evolución del sistema realimentado se presenta a continuación en las Figuras 5.10 y 5.11, mientras que en la Fig. 5.12 se presenta describe la falla aditiva con ruido presente en el actuador que control el sistema en su eje x . Como se planteo anteriormente, debido al óptimo índice de atenuación obtenido al resolver las LMIs, el desempeño es muy bueno. Como se aprecia en la Figura (5.10), el controlador no tiene problemas compensando la falla aparecida en el segundo 35; esta variable de estado vuelve inmediatamente a la cero.

Para validar su tolerancia a fallas, se considera una falla aditiva que aparece en el actuador en un momento transitorio, es decir, en el que el controlador mueve al estado de posición debido a un cambio en la referencia. Se le inyecta una señal de falla aditiva a partir del segundo 25 como se muestra en la Fig. 5.15. Nótese que, a pesar de la presencia de la señal desconocida, el sistema converge a su siguiente referencia. Como se puede apreciar en la Fig. 5.13 el sistema (línea continua) sigue la referencia (línea punteada) con una respuesta rápida y generando oscilaciones mínimas en la carga; lo cual implica ángulos pequeños formados por la cuerda y la normal, manteniendo un rechazo significativo de las perturbaciones como se muestra también en la Fig. 5.14. Éstos resultados demuestran la efectividad del método propuesto.

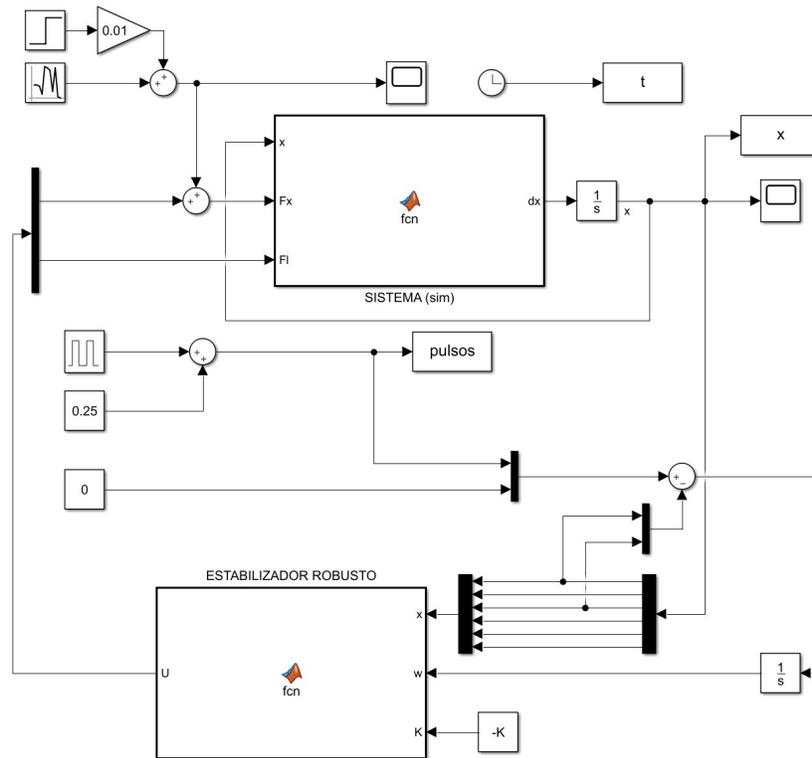


Figura 5.9: Diagrama esquemático en Simulink

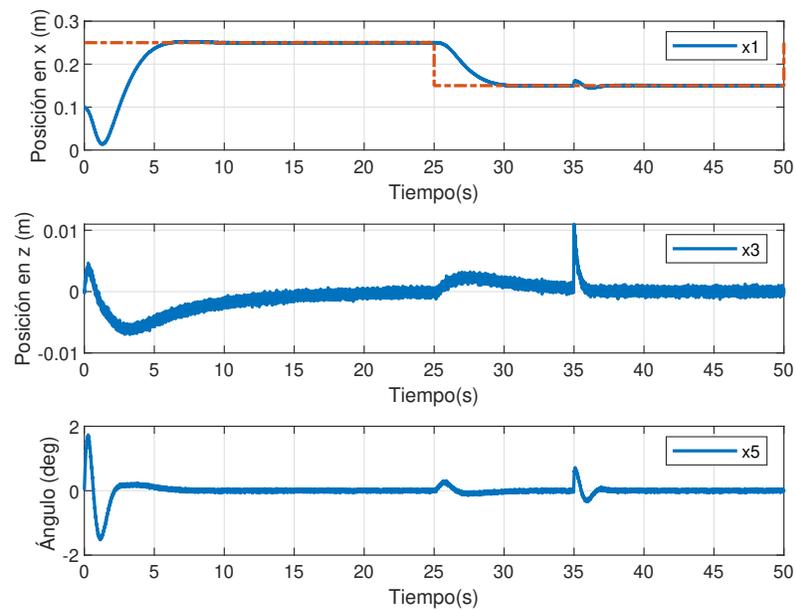


Figura 5.10: Estados de posición de la grúa 2D.

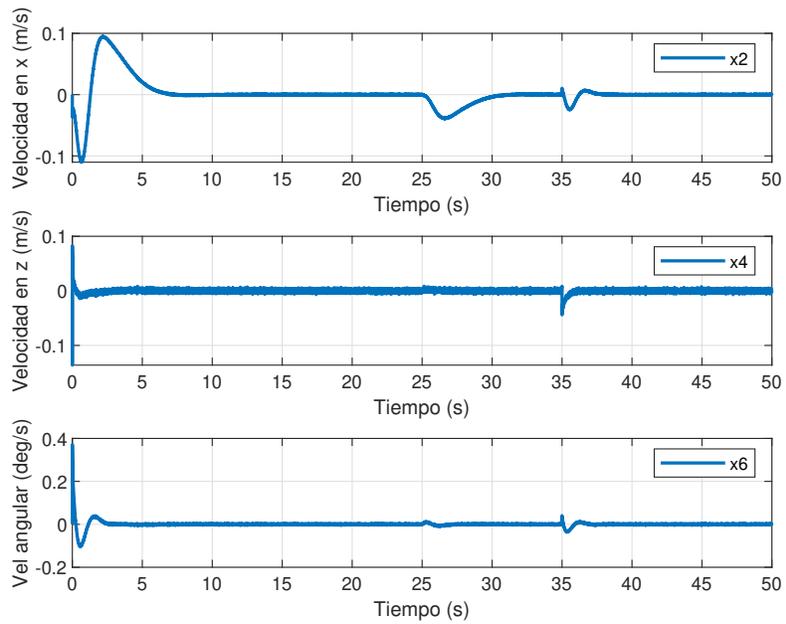


Figura 5.11: Estados de velocidad de la grúa 2D.

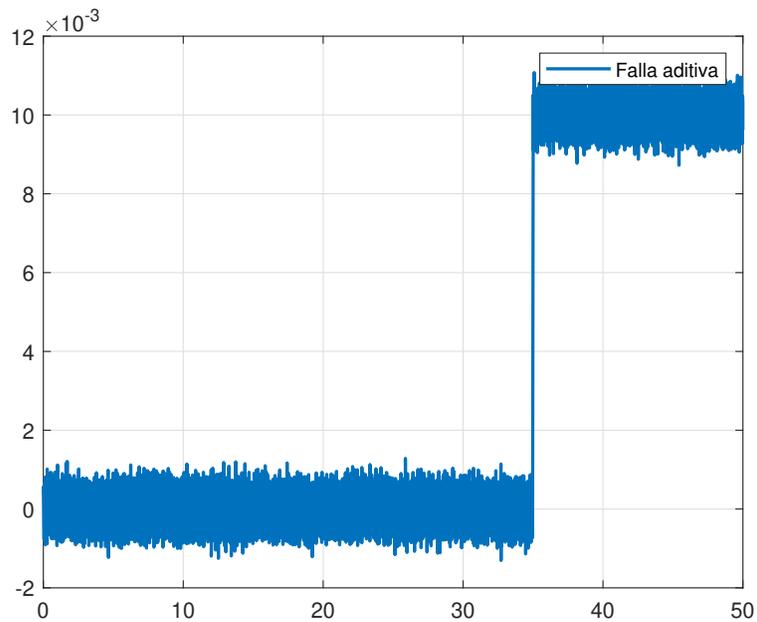


Figura 5.12: Ruido más una señal desconocida presente como un off-set en la entrada.

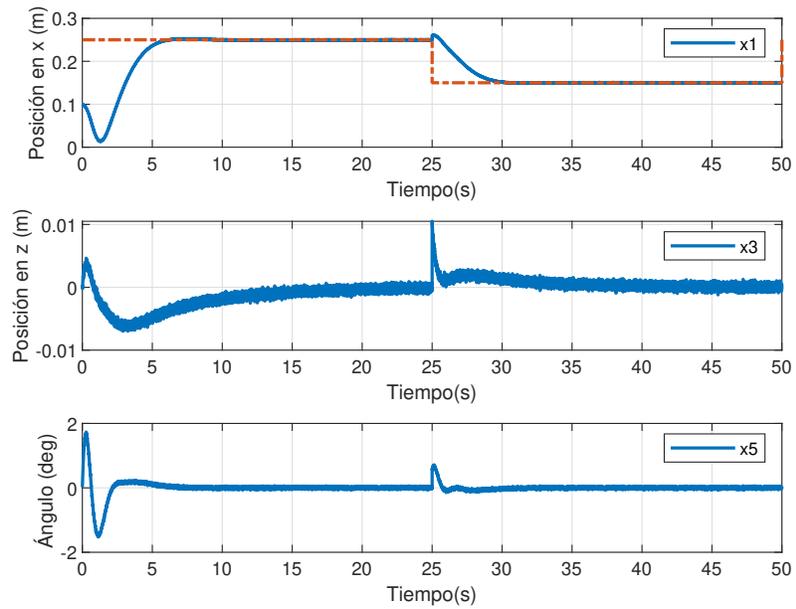


Figura 5.13: Estados de posición de la grúa 2D.

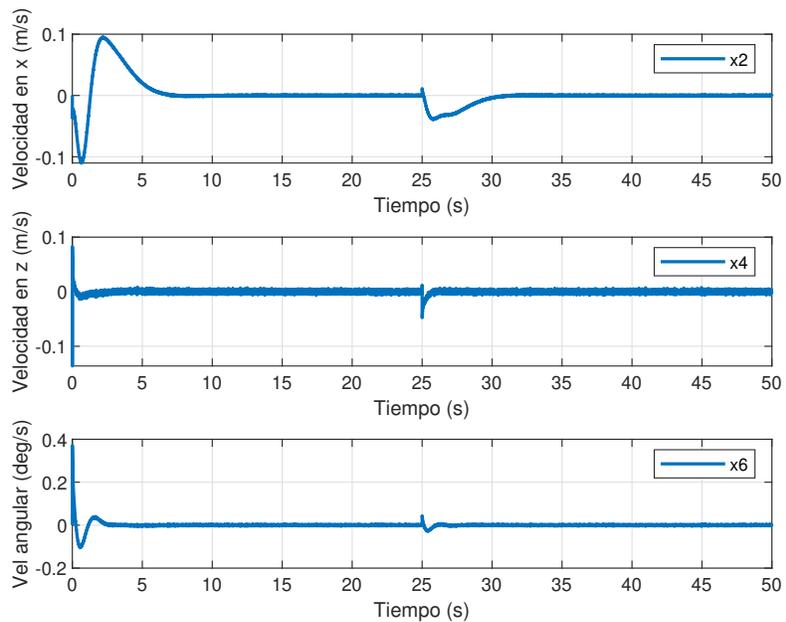


Figura 5.14: Estados de velocidad de la grúa 2D.

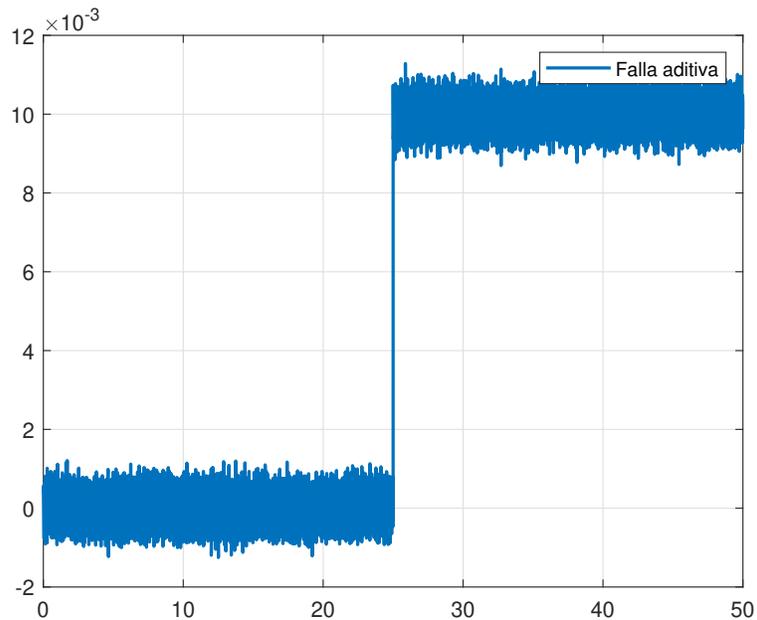


Figura 5.15: Ruido más una señal desconocida presente como un off-set en la entrada.

5.3.1. Comparación de desempeño

A partir de manipulación de la señal del estabilizador H_∞ durante su simulación en MATLAB, este puede también volverse un controlador cuyo fin es seguir una determinada referencia como se muestra en el diagrama de bloques de la Fig. 5.16 agregando en la simulación la sección sombreada.

De esta manera se comparan los dos controladores. En las Figuras 5.18 - 5.23 se muestran los resultados de desempeño de los controladores obtenidos, con base en el comportamiento de cada uno de los estados. Como se aprecia de forma más evidente en la Fig. 5.18, el controlador con seguimiento de referencia (línea roja) presenta varias ventajas en comparación con el simple estabilizador adaptado en simulación (línea azul). A pesar de que el estabilizador parece alcanzar la referencia más rápidamente, el controlador con seguimiento es más estable una vez alcanzando esta. Además, este último presenta una mayor eficiencia bajo condiciones de falla ya que este devuelve el estado a la referencia más rápidamente. Por último, el nivel de atenuación del ruido en la entrada por parte del controlador con seguimiento es mayor. Esta diferencia se hace más obvia en 5.23.

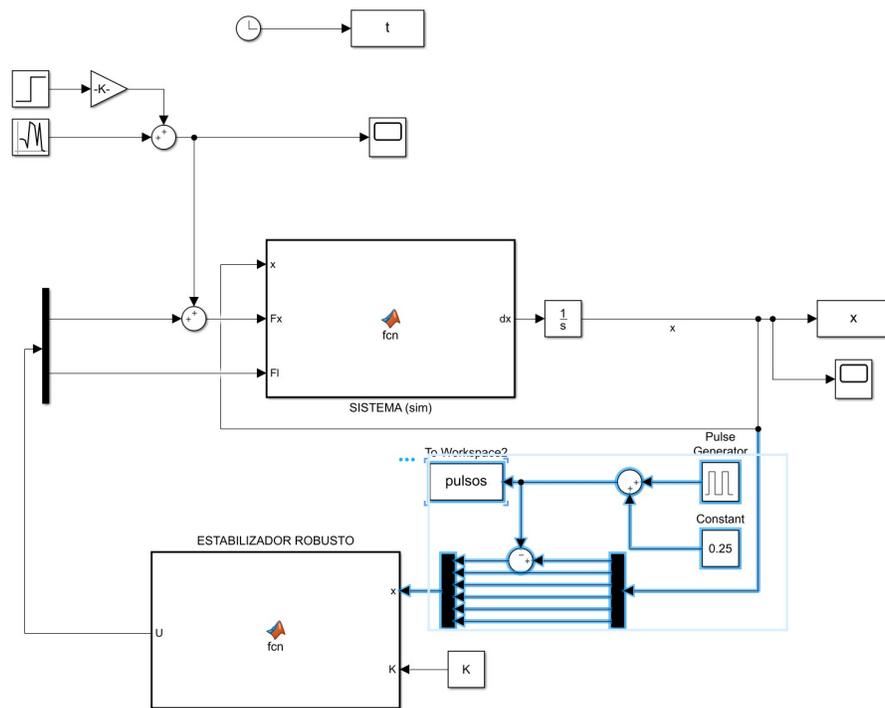


Figura 5.16: Diagrama de bloques para configurar el estabilizador para seguir una trayectoria

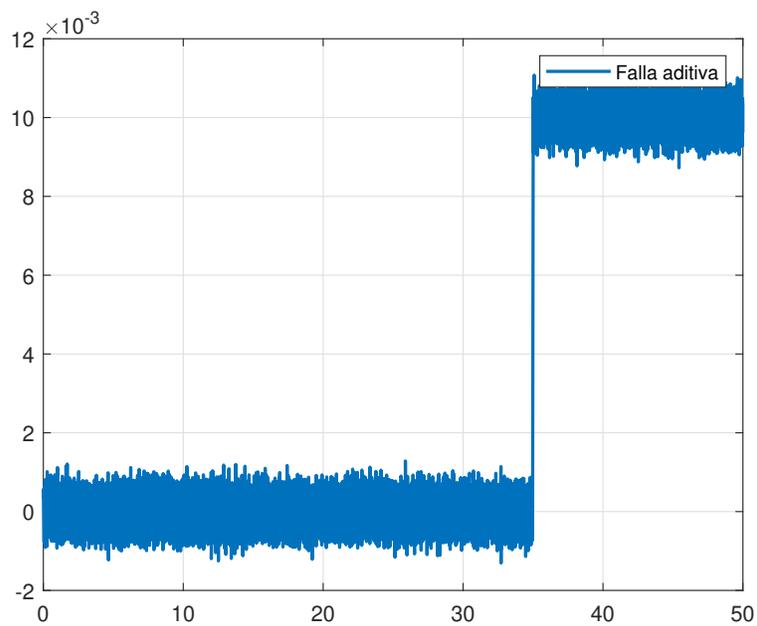


Figura 5.17: Falla aditiva presente en la entrada.

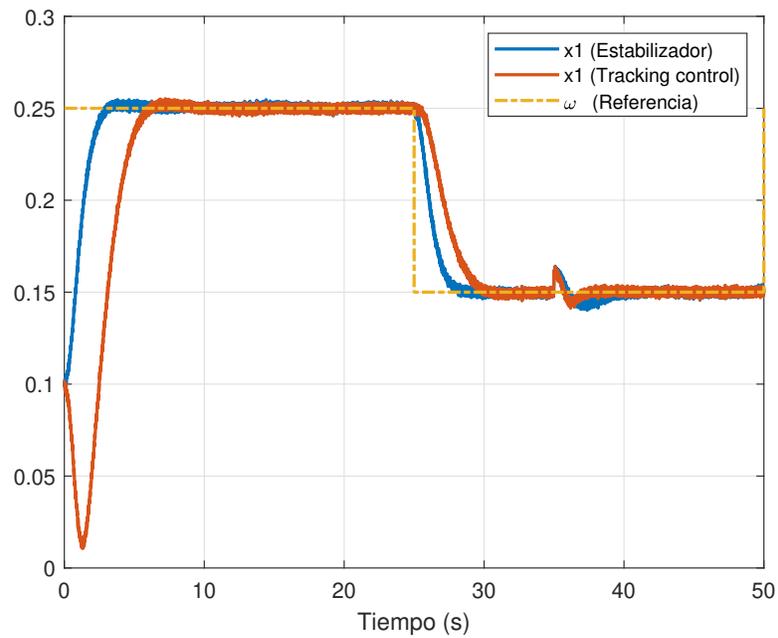


Figura 5.18: Comparación, control de estado x_1 con ambos esquemas.

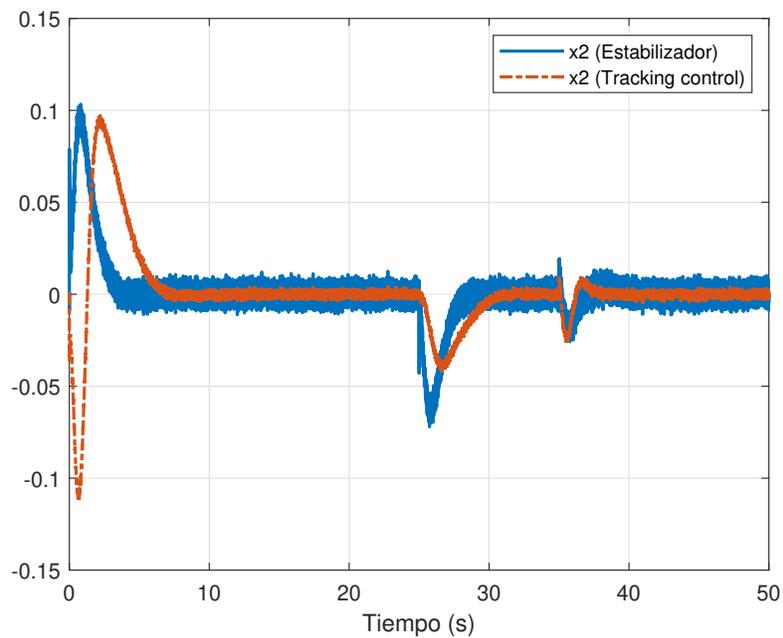


Figura 5.19: Comparación, control de estado x_2 con ambos esquemas.

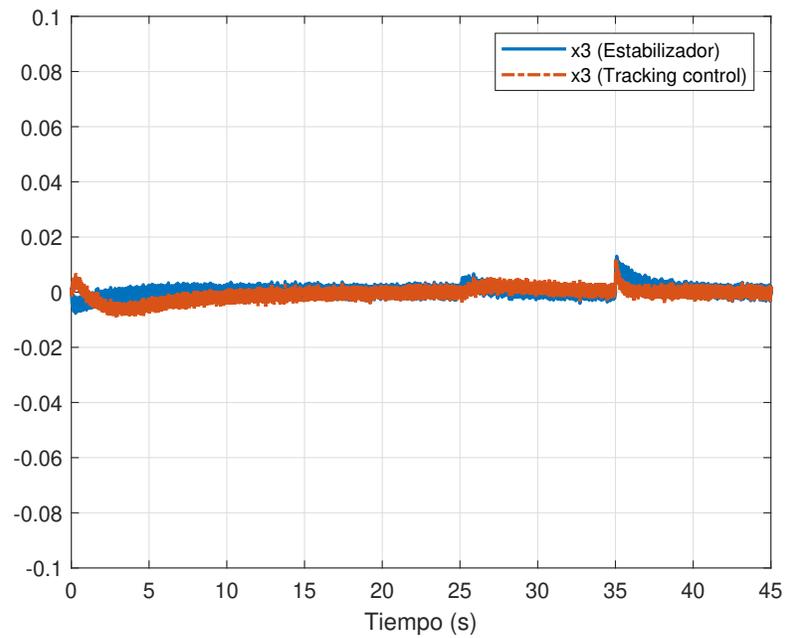


Figura 5.20: Comparación, control de estado x_3 con ambos esquemas.

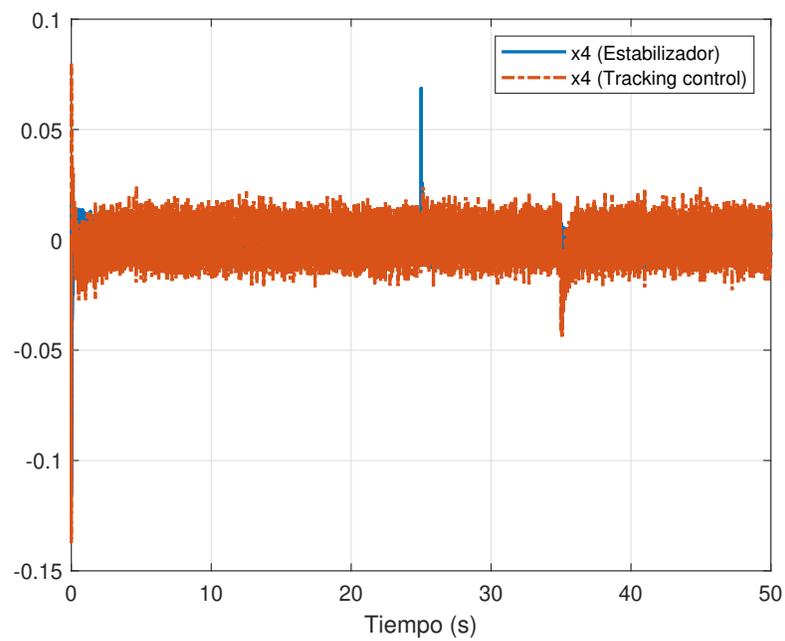


Figura 5.21: Comparación, control de estado x_4 con ambos esquemas.

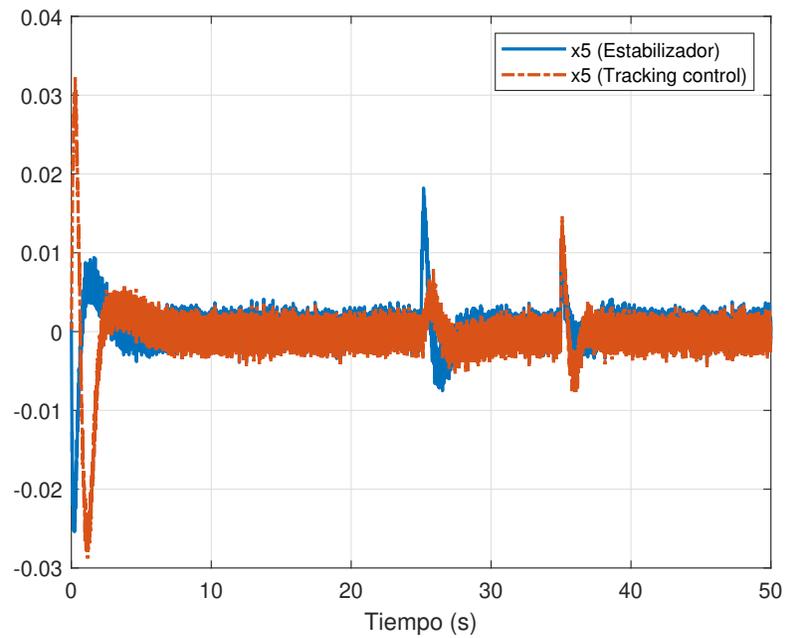


Figura 5.22: Comparación, control de estado x_5 con ambos esquemas.

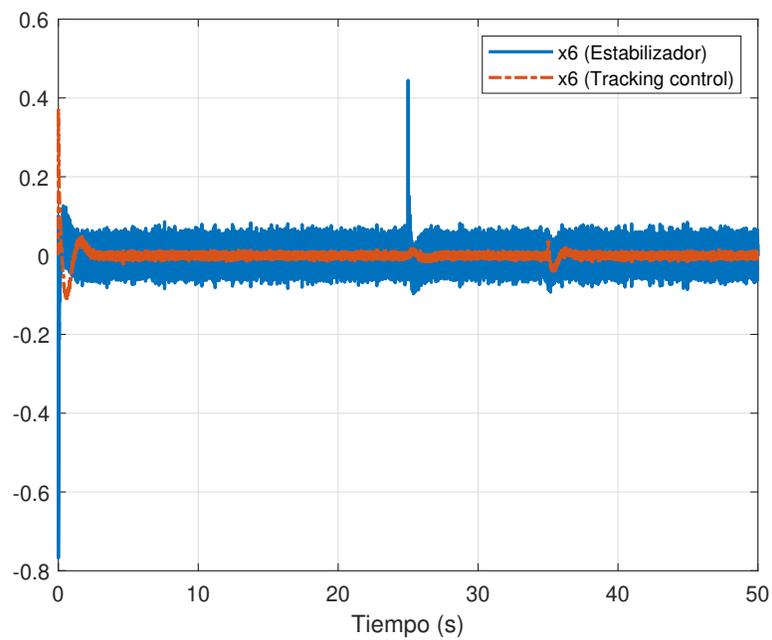


Figura 5.23: Comparación, control de estado x_6 con ambos esquemas.

Capítulo 6

Conclusiones

Tomando en cuenta la investigación realizada sobre los modelos Takagi-Sugeno, se logró obtener exitosamente una representación T-S para el sistema de una grúa de 3 grados de libertad. A partir del cual se diseñó el controlador convexo con el enfoque de compensación paralela distribuida. El cual fue obtenido de manera sencilla a partir de su representación como un problema de optimización descrito a través de desigualdades lineales matriciales. La optimización de los valores encontrados al resolver las LMIs dependen en gran magnitud en la forma en que estas LMIs son presentadas. Un problema de optimización como el estudiado puede ser representado con diferentes configuraciones de LMIs y diferentes conjuntos de LMIs arrojarán distintos resultados aunque se trate del mismo sistema de lazo cerrado. Por tanto, al resolver un problema de este tipo, es importante explorar varias maneras de representarlo en desigualdades lineales matriciales haciendo uso de herramientas como regiones de estabilidad, los cambios de variables, complementos, relajaciones y demás propiedades con las que se pueda contar para llegar al mejor resultado posible.

Considerando los resultados obtenidos y presentados anteriormente se llega a la conclusión de que el esquema de control Takagi-Sugeno con seguimiento de referencia, diseñado como una compensación paralela distribuida, lleva satisfactoriamente a los estados del sistema sus respectivas referencias. Además, en presencia de fallas aditivas en la entrada, este es capaz de continuar con el seguimiento y regresar al estado a su referencia aun después de desviarse por la abrupta aparición

de la falla. Las LMIs deducidas a partir de la suposición de fallas en la entrada nos ayudan a obtener ganancias de retroalimentación que proveen un resultado satisfactorio al mismo tiempo que el desempeño del estabilizador cumple con la norma H_∞ . Este sistema puede entonces ser fácilmente controlado incluso estando fuera de su área de desempeño nominal. La técnica TS de compensación paralela distribuida en conjunto con la norma H_∞ fueron muy efectivas en este caso de estudio ya que el sistema presentó una atenuación bastante remarcable en sus salidas, siendo tan efectiva que incluso es capaz de absorber los efectos de fallas aditivas como se ha demostrado en las simulaciones presentadas. Además, su representación en forma de desigualdades matriciales lineales nos hace más fácil su resolución y manejo en general.

6.1. Publicaciones

Santos-Estudillo, O., López-Estrada, F., Gómez-Penate, S., Dominguez-Zenteno, J. Molina-Dominguez, S. (n.d.), 'Estabilización robusta de una grúa de 3dof mediante técnicas takagi-sugeno'.

Bibliografía

- Abdulhay, E., Elamaran, V., Arunkumar, N. & Venkataraman, V. (2018), 'Fault-tolerant medical imaging system with quintuple modular redundancy (qmr) configurations', *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing* pp. 1–13.
- Abdullahi, A. M., Mohamed, Z., Selamat, H., Pota, H. R., Abidin, M. Z., Ismail, F. & Haruna, A. (2018), 'Adaptive output-based command shaping for sway control of a 3d overhead crane with payload hoisting and wind disturbance', *Mechanical Systems and Signal Processing* **98**, 157–172.
- Adeli, M., Zarabadipour, H., Zarabadi, S. H. & Shoorehdeli, M. A. (2011), Anti-swing control for a double-pendulum-type overhead crane via parallel distributed fuzzy lqr controller combined with genetic fuzzy rule set selection, in '2011 IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering', IEEE, pp. 306–311.
- Al-Garni, A., Moustafa, K. & Nizami, S. J. (1995), 'Optimal control of overhead cranes', *Control Engineering Practice* **3**(9), 1277–1284.
- Almutairi, N. B. & Zribi, M. (2009), 'Sliding mode control of a three-dimensional overhead crane', *Journal of vibration and control* **15**(11), 1679–1730.
- Benosman, M. & Lum, K.-Y. (2009), 'Passive actuators' fault-tolerant control for affine nonlinear systems', *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **18**(1), 152–163.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., Staroswiecki, M. & Schröder, J. (2006), *Diagnosis and fault-tolerant control*, Vol. 691, Springer.

- Buzhinsky, I. & Pakonen, A. (2019), ‘Model-checking detailed fault-tolerant nuclear power plant safety functions’, *IEEE Access* **7**, 162139–162156.
- Castillo, I., Vázquez, C. & Fridman, L. (2015), Overhead crane control through lq singular surface design matlab toolbox, in ‘American Control Conference (ACC), 2015’, IEEE, pp. 5847–5852.
- Chang, C.-Y. & Chiang, K.-H. (2008), ‘Fuzzy projection control law and its application to the overhead crane’, *Mechatronics* **18**(10), 607–615.
- Chen, W. & Saif, M. (2011), ‘Actuator fault diagnosis for a class of nonlinear systems and its application to a laboratory 3d crane’, *Automatica* **47**(7), 1435–1442.
- Chen, W., Wu, Q., Tafazzoli, E. & Saif, M. (2008), ‘Actuator fault diagnosis using high-order sliding mode differentiator (hosmd) and its application to a laboratory 3d crane’, *IFAC Proceedings Volumes* **41**(2), 4809–4814.
- Estrada, F. L., Ponsart, J. C., Theilliol, D. & Astorga-Zaragoza, C.-M. (2015), ‘Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ fault detection observer design for descriptor-lpv systems with unmeasurable gain scheduling functions’, *International Journal of Control* **88**(11), 2380–2391.
- Garrido, S., Abderrahim, M., Giménez, A., Diez, R. & Balaguer, C. (2008), ‘Anti-swinging input shaping control of an automatic construction crane’, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* **5**(3), 549–557.
- Gómez-Peñate, S., López-Estrada, F.-R., Valencia-Palomo, G., Osornio-Ríos, R., Zepeda-Hernández, J., Rios-Rojas, C. & Camas-Anzueto, J. (2018), ‘Sensor fault diagnosis observer for an electric vehicle modeled as a takagi-sugeno system’, *Journal of Sensors* **2018**.
- Hilhorst, G., Pipeleers, G., Michiels, W., Oliveira, R. C., Peres, P. L. D. & Swevers, J. (2015), Reduced-order $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time lpv systems with experimental validation on an overhead crane test setup, in ‘2015 American Control Conference (ACC)’, IEEE, pp. 125–130.
- Karihaloo, B. & Parbery, R. (1982), ‘Optimal control of a dynamical system representing a gantry crane’, *Journal of optimization theory and applications* **36**(3), 409–417.

- Kawamoto, S., Tada, K., Ishigame, A. & Taniguchi, T. (1992), An approach to stability analysis of second order fuzzy systems, in '[1992 Proceedings] IEEE International Conference on Fuzzy Systems', IEEE, pp. 1427–1434.
- Kim, Y.-B. (2004), 'A new approach to anti-sway system design problem', *KSME International Journal* **18**(8), 1306–1311.
- Kim, Y.-S., Hong, K.-S. & Sul, S.-K. (2004), 'Anti-sway control of container cranes: inclinometer, observer, and state feedback', *International Journal of Control, Automation, and Systems* **2**(4), 435–449.
- Kiriakidis, K. (2001), 'Robust stabilization of the takagi-sugeno fuzzy model via bilinear matrix inequalities', *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(2), 269–277.
- Lee, H.-H. (1998), 'Modeling and control of a three-dimensional overhead crane', *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **120**(4), 471–476.
- Lee, H.-H. & Cho, S.-K. (2001), A new fuzzy-logic anti-swing control for industrial three-dimensional overhead cranes, in 'Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on', Vol. 3, IEEE, pp. 2956–2961.
- Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R. & De Schutter, B. (2011), *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*, Springer.
- Liu, Z., Liu, J. & He, W. (2018), 'Robust adaptive fault tolerant control for a linear cascaded ode-beam system', *Automatica* **98**, 42–50.
- López-Estrada, F.-R., Astorga-Zaragoza, C., Theilliol, D., Ponsart, J.-C., Valencia-Palomo, G. & Torres, L. (2017), 'Observer synthesis for a class of takagi-sugeno descriptor system with unmeasurable premise variable. application to fault diagnosis', *International Journal of Systems Science* **48**(16), 3419–3430.

- López-Estrada, F.-R., Rotondo, D. & Valencia-Palomo, G. (2019), 'A review of convex approaches for control, observation and safety of linear parameter varying and takagi-sugeno systems', *Processes* **7**(11), 814.
- Maghsoudi, M. J., Mohamed, Z., Sudin, S., Buyamin, S., Jaafar, H. & Ahmad, S. (2017), 'An improved input shaping design for an efficient sway control of a nonlinear 3d overhead crane with friction', *Mechanical Systems and Signal Processing* **92**, 364–378.
- Mahfouf, M., Kee, C., Abbod, M. F. & Linkens, D. A. (2000), 'Fuzzy logic-based anti-sway control design for overhead cranes', *Neural Computing & Applications* **9**(1), 38–43.
- Mita, T. & Kanai, T. (1979), 'Optimal control of the crane system using the maximum speed of the trolley', *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers* **15**(6), 833–838.
- Morato, M. M., Sename, O. & Dugard, L. (2018), 'Lpv-mpc fault tolerant control of automotive suspension dampers', *IFAC-PapersOnLine* **51**(26), 31–36.
- Moustafa, K. A. & Ebeid, A. M. (1988), 'Nonlinear modeling and control of overhead crane load sway', *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **110**(3), 266–271.
- Nagy-Kiss, A. M., Ichalal, D., Schutz, G. & Ragot, J. (2015), Fault tolerant control for uncertain descriptor multi-models with application to wastewater treatment plant, in 'American Control Conference (ACC), 2015', IEEE, pp. 5718–5725.
- Nasiri, A., Nguang, S. K., Swain, A. & Almakhlles, D. (2019), 'Passive actuator fault tolerant control for a class of mimo nonlinear systems with uncertainties', *International Journal of Control* **92**(3), 693–704.
- Nemati, F., Hamami, S. M. S. & Zemouche, A. (2019), 'A nonlinear observer-based approach to fault detection, isolation and estimation for satellite formation flight application', *Automatica* **107**, 474–482.
- Noura, H., Theilliol, D., Ponsart, J.-C. & Chamseddine, A. (2009), *Fault-tolerant control systems: Design and practical applications*, Springer Science & Business Media.

- Ohnishi, E., Tsuboi, I., Egusa, T. & Uesugi, M. (1981), 'Automatic control of an overhead crane', *IFAC Proceedings Volumes* **14**(2), 1885–1890.
- Petrehuş, P., Lendek, Z. & Raica, P. (2013), 'Fuzzy modeling and design for a 3d crane', *IFAC Proceedings Volumes* **46**(20), 479–484.
- Rabaoui, B., Rodrigues, M., Hamdi, H. & BenHadj Braiek, N. (2018), 'A model reference tracking based on an active fault tolerant control for lpv systems', *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **32**(6), 839–857.
- Rotondo, D., **López-Estrada, F.R.**, Nejjari, F., Ponsart, J.-C., Theilliol, D. & Puig, V. (2016), 'Actuator multiplicative fault estimation in discrete-time lpv systems using switched observers', *Journal of the Franklin Institute* **353**(13), 3176–3191.
- Sakawa, Y. & Shindo, Y. (1982), 'Optimal control of container cranes', *Automatica* **18**(3), 257–266.
- Sawodny, O., Aschemann, H. & Lahres, S. (2002), 'An automated gantry crane as a large workspace robot', *Control Engineering Practice* **10**(12), 1323–1338.
- Shi, K., Wang, B., Yang, L., Jian, S. & Bi, J. (2017), 'Takagi–sugeno fuzzy generalized predictive control for a class of nonlinear systems', *Nonlinear Dynamics* **89**(1), 169–177.
- Starr, G. (1985), 'Swing-free transport of suspended objects with a path-controlled robot manipulator', *Journal of dynamic systems, measurement, and control* **107**(1), 97–100.
- Tan, C. P. & Edwards, C. (2007), 'A robust sensor fault tolerant control scheme implemented on a crane', *Asian Journal of Control* **9**(3), 340–344.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. & Wang, H. O. (2001), 'Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems', *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4), 525–538.
- Tian, B., Mirzaeva, G., An, Q.-T., Sun, L. & Semenov, D. (2018), 'Fault-tolerant control of a five-phase permanent magnet synchronous motor for industry applications', *IEEE Transactions on Industry Applications* **54**(4), 3943–3952.

- Vu, N. T.-T., Thanh, P. T., Duong, P. X. & Phuoc, N. D. (2017), Robust adaptive control of 3d overhead crane system, in 'Adaptive Robust Control Systems', IntechOpen.
- Wang, H. O., Tanaka, K. & Griffin, M. (1995), Parallel distributed compensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model, in 'Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems.', Vol. 2, pp. 531–538 vol.2.
- Witczak, M. (2014), 'Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems', *Lecture Notes in Electrical Engineering* **266**, 375–392.
- Wu, Y. & Dong, J. (2017), 'Fault detection for t–s fuzzy systems with partly unmeasurable premise variables', *Fuzzy Sets and Systems* .
- Yanai, N., Yamamoto, M. & Mohri, A. (2002), Feedback control for wire-suspended mechanism with exact linearization, in 'Intelligent Robots and Systems, 2002. IEEE/RSJ International Conference on', Vol. 3, IEEE, pp. 2213–2218.
- Yu, X. & Zhang, Y. (2015), 'Design of passive fault-tolerant flight controller against actuator failures', *Chinese Journal of Aeronautics* **28**(1), 180–190.
- Zhang, Y. & Jiang, J. (2008a), 'Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems', *Annual Reviews in Control* **32**(2), 229–252.
- Zhang, Y. & Jiang, J. (2008b), 'Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems', *Annual reviews in control* **32**(2), 229–252.
- Zhao, L. & Li, L. (2015), 'Robust stabilization of t–s fuzzy discrete systems with actuator saturation via pdc and non-pdc law', *Neurocomputing* **168**, 418–426.