

**“DETERMINACIÓN DE LA PERMEABILIDAD EFECTIVA  
EN MEDIOS POROSOS”.**

**TESIS PROFESIONAL**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERA QUÍMICA**

**PRESENTA:**

*Aurora Guadalupe Cervantes Alcántara*  
*Zulma Soraya Assam Salaya*



SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
Instituto Tecnológico de Minatitlán

DIV. DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
COORDINACIÓN DE TITULACIÓN  
OFICIO NÚM. 108/2016.

ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN  
DE SU TESIS PROFESIONAL.

19 DE ABRIL DEL 2016.

**C. AURORA GUADALUPE CERVANTES ALCÁNTARA.**  
**C. ZULMA SORAYA ASSAM SALAYA**  
PASANTE DE LA CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA  
PRESENTE:

Después de haber satisfecho los requisitos establecidos en el procedimiento académico para obtener el título en los Institutos Tecnológicos y de conformidad con la H. Comisión Revisora, me es grato autorizar la impresión de su Tesis Profesional:

**“DETERMINACIÓN DE LA PERMEABILIDAD EFECTIVA EN MEDIOS POROSOS.”**

Así mismo se les exhorta a seguir superándose Académicamente y poner en alto el nombre de la Institución.

**ATENTAMENTE**  
Por la Independencia Tecnológica de México®

LIC. JENNIFER LEÓN DOMÍNGUEZ  
COORDINADORA DE LA OFNA. DE TITULACIÓN



## **AGRADECIMIENTOS DE AURORA:**

Dedico este trabajo y agradezco en primer lugar a DIOS ya que sin él y su presencia en mi vida nada hubiese sido posible.

Agradezco a María Luisa la cual es una persona muy importante que pese a todas las circunstancias y dificultades siempre me ha apoyado, es uno de los principales pilares en mi vida ella es mi Madre; así mismo agradezco a un ser que no estuvo conmigo físicamente, pero si lo estuvo en espíritu, un hombre que creyó en mí en todos los aspectos. Papá siempre estarás en mi corazón.

Agradezco... a mis hermanos Carlos y Daniel ya que con su apoyo y cariño fue más fácil el camino.

Karime y Axel ustedes han sido pieza clave en el motor de mi vida, agradezco su comprensión y cariño.

Agradezco a toda mi familia mis tíos, primos y amigos por confiar en mí y apoyarme en todo este camino recorrido, quiero decirles que mis éxitos también son suyos.

Gracias Zulma ya que con tu apoyo fue más sencillo culminar con éxito este proyecto, siempre fuiste muy motivadora y esperanzadora.

Quiero terminar estas palabras con la siguiente cita:

*“Todo tiene su tiempo, y todo lo que se quiere debajo del cielo tiene su hora”*

*Eclesiastés 3:1*

## **AGRADECIMIENTOS DE ZULMA**

Primeramente quiero dar gracias a dios por permitirme llegar a este gran paso.

En segundo lugar quiero dar gracias a mi abuelita clementina por estar siempre con su cariño y palabras de apoyo para ayudarme a seguir adelante.

Agradecer a mi padre por sus consejos y su esfuerzo para ayudarme a forjar un lugar en la vida.

A mi familia por siempre darme un apoyo fundamental en todo momento.

## INDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
OBJETIVOS .....	8
1.1 ¿Qué es un medio poroso? .....	10
1.2 Porosidad.....	10
1.3 Área superficial específica .....	11
1.4 Tortuosidad.....	12
2.1. Porosidad .....	15
2.2. Distribución de las partículas minerales. ....	18
2.3. Comportamiento de las arcillas .....	21
3.1. ¿Por qué se estudia y se modela el paso del fluido en un medio poroso? ....	27
3.2. ¿Quiénes desarrollan o emplean estos modelos? .....	27
3.3. ¿Cómo se determina el campo de velocidades? .....	28
4.1. Modelo BMP .....	32
4.2. Escalamiento Fractal de los Medios Porosos.....	35
4.3. Calculo de la Permeabilidad.....	36
4.4. Aproximación Analítica .....	39
5.1. Procedimiento de Cálculo .....	41
5.2. Resultados.....	42
CONCLUSIONES .....	63
APÉNDICE.....	64
Apéndice A. Tablas de datos por figura .....	64
Apéndice B. Modelo de Capilares .....	71
BIBLIOGRAFÍA .....	74

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo se desarrolla un modelo fractal para la permeabilidad efectiva de medios porosos usando el modelo Bautista-Manero-Puig (BMP) para describir las propiedades reológicas del fluido. En este análisis se supone que los medios porosos se pueden aproximar con arreglos de capilares tortuosos cuya distribución de radios y tortuosidad se pueden representar con escalamientos fractales. Se derivan expresiones para la velocidad promedio y la permeabilidad efectiva para el flujo de un fluido BMP en medios porosos.

El modelo BMP puede describir comportamientos reológicas complejos (elasticidad y variación de la viscosidad debido a cambios en rapidez de deformación y en el tiempo) y todas las propiedades materiales presentes en el pueden ser estimadas a partir de mediciones reológicas independientes, esto es, no contiene parámetros libres.

El modelo consta de la ecuación de Maxwell convectiva superior acoplada con una ecuación cinética que representa la modificación estructural que sufren los fluidos complejos al moverse a través de medios porosos fractales. Las predicciones obtenidas con este modelo fractal son comparadas con datos experimentales, con otros modelos y con correlaciones que pueden encontrarse en la literatura.

El flujo de fluidos no newtonianos en medios porosos es un tema que ha cobrado gran interés en áreas como mecánica de suelos, filtración de soluciones poliméricas y de líquidos contaminantes debido a la implementación industrial de tales materiales en operaciones de campo (remediación de suelos y operación de estimulación de reservas de hidrocarburos, por mencionar algunas) [1, 2, 3, 5, 20, 26, 28].

Una gran cantidad de fluidos presentes en procesos industriales tienen comportamientos reológicas que no son descritos adecuadamente con el modelo newtoniano. Pueden presentar viscosidades que dependan de la rapidez de deformación en corte, del tiempo o incluso de la elasticidad [1, 3, 4, 5]. Además,

pueden ser complejos químicamente e interactuar con las formaciones porosas (arcillas, arenas, rocas, etc.) a través de las cuales fluyen y con otros materiales con los que entren en contacto durante el flujo [1].

Debido a la complejidad estructural de los medios porosos resulta muy difícil, si no imposible, obtener expresiones completamente analíticas para describir la distribución y geometría de los poros a través de los cuales tiene lugar el flujo [1, 2, 4] por lo que, por motivos prácticos, se describe con relaciones de naturaleza empírica como la ley de Darcy [1, 2, 5]:

$$v = \frac{k \Delta p}{\mu L},$$

$v$  es la velocidad promedio,  $\mu$  es la viscosidad del fluido newtoniano,  $\frac{\Delta P}{L}$  es el gradiente de presión y  $k$  es la permeabilidad específica (en este trabajo se hará referencia a la permeabilidad específica simplemente como permeabilidad).

Se pueden obtener expresiones semejantes a la ecuación anterior a partir de las ecuaciones de conservación [5, 6]; en estas se puede demostrar que la permeabilidad, aunque resulte sencilla de determinar experimentalmente, contiene todas las complejidades tanto de la distribución y tortuosidad de los poros en el medio como de las propiedades materiales del fluido (viscosidad, tiempo característico, etc.) [5, 6]. Por esta razón, se deben hacer varias suposiciones con el fin de obtener relaciones que permitan calcular la permeabilidad a partir de las propiedades del medio poroso (porosidad, compresibilidad, etc.) junto con las propiedades materiales.

**Medios Porosos:** Un medio poroso consta de una matriz sólida la cual contiene espacios vacíos conectados entre sí, los poros [1, 2, 3, 4, 5]; la estructura y distribución de estos está fuertemente relacionada con las propiedades macroscópicas del medio, en particular la permeabilidad [1, 2, 3, 4, 5, 6].

De manera práctica, es necesario entender el comportamiento de la permeabilidad bajo distintas condiciones de flujo, por esta razón se realizan experimentos de flujo en núcleos de roca, en medios granulares, en medios porosos artificiales y simulaciones computacionales [1, 5, 6]. A partir de los resultados de las mediciones de caída de presión y velocidad promedio junto con la descripción de la estructura del medio poroso (arenas, rocas y fibras entre otros) y la geología del fluido, se puede evaluar el comportamiento de la permeabilidad ante diferentes condiciones de flujo [1, 5, 6].

En la teoría, se deben hacer varias suposiciones sobre la geometría del medio poroso para poder dar una descripción aproximada de este y así poder definir la permeabilidad el medio [1, 2, 5].

Una suposición muy usada considera que el medio poroso es un arreglo de capilares paralelos, siendo el caso más sencillo el de capilares cilíndricos del mismo diámetro [1, 2, 5]; con esta consideración se puede demostrar que, en estado estacionario, la permeabilidad tendrá la siguiente funcionalidad [5] (ver apéndice B):

$$k = \frac{\phi}{8} R^2$$

$k$  es la permeabilidad,  $\phi$  es la porosidad y  $R$  el radio de los capilares.

Es importante remarcar que esta ecuación predice que la permeabilidad es independiente de la viscosidad del fluido, lo cual es aceptable si se trata de fluidos newtonianos, y solo puede usarse en algunos casos de flujo lento [1, 2]; además, aunque simple en forma, su aplicación no es tan sencilla puesto que requiere el conocimiento del radio de los poros, el cual no resulta sencillo de medir [2].

Se han propuesto varias alternativas para subsanar las debilidades de tal modelo, entre las que destacan los modelos topológicos [2, 6], los determinísticos [1] y los fractales [2]; siendo este último caso el enfoque que se seguirá en este trabajo.



Medios Fractales: Geométricamente hablando, el problema de la descripción de los medios porosos se debe a que tales medios son altamente irregulares en su conformación y autosimilares a varias escalas [2], esto ha motivado proponer modelos fractales para representar dichas propiedades (autosimilitud e irregularidad).

Es sabido que las geometrías fractales permiten describir fenómenos irregulares [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13], tales como la tortuosidad y la distribución de los radios de los poros [2], a través de un escalamiento donde se determinan las dimensiones (no enteras) tanto de los objetos como de los fenómenos que ocurren en estos [7, 8, 9, 10]; estas son conocidas como dimensiones fractales [13] y su uso requiere extender algunos conceptos fundamentales del cálculo, como lo son el de derivada y el de integral, a espacios caracterizados por las dimensiones fraccionarias [7, 8, 9, 10, 11, 12].

Las dimensiones fractales pueden obtenerse extendiendo las nociones clásicas de dimensión para tratar con objetos geométricos a los que no se les puede asociar una dimensión entera (rectas, planos, etc.) [7, 8, 9, 10, 11, 12]. Para calcular la dimensión de tales objetos se pueden usar diversas definiciones, por ejemplo las dimensiones de Hausdorff-Besicovitch, las de Renyi y las de Minkowski-Bouligand (conteo de cajas) [8, 13]; en general estas definiciones no son equivalentes y sus diferencias suelen ser provocadas por la estructura del fractal [13].

Una definición de dimensión muy usada en medios fractales es la dimensión de similitud, esta requiere que el objeto sea definido matemáticamente e indica la manera en que este se genera a partir de una unidad repetitiva en diferentes escalas [13]; la dimensión de similitud se define como:

$$D = -\frac{\ln(N)}{\ln(l)}$$

$D$  es la dimensión del objeto analizado,  $N$  es el número de elementos necesarios para generar al objeto y  $l$  es la longitud de cada elemento.

Así, si se analiza una línea, la dimensión de similitud indica cual es la longitud real de la línea comparada con la longitud de la recta que se genera a partir de dicha línea [13], lo cual suele usarse en el escalamiento de la tortuosidad de los poros.

Por otra parte, la dimensión de conteo de cajas es una de las más usadas en la práctica y es conceptualmente semejante a la dimensión de similitud [2, 8, 13], esta es una estimación basada en una imagen de la estructura del objeto sobre la que se traza una malla homogénea (formando así cajas). Se cuenta el número de cajas necesarias para cubrir el objeto y se observa como varia este número al hacer la malla más fina (cajas más pequeñas) [13].

La dimensión de conteo de cajas puede utilizarse para estimar la dimensión de porosidad de un objeto, cuyos poros son altamente irregulares en tamaño y distribución, observando como varia el número de cajas necesario para cubrir los poros del objeto.

Debido a su sencillez conceptual como a su fácil implementación en algoritmos, las dimensiones de similitud y de conteo de cajas son ampliamente utilizadas [2, 8, 9, 10]. Se han propuesto modelos basados en la ley de Darcy que contienen tales dimensiones; a partir de estos modelos se han derivado expresiones para la permeabilidad que dependen de la complejidad geométrica del medio poroso además de incluir efectos provocados por el comportamiento reológico de fluidos complejos [14, 15, 16, 17, 18, 19].

Flujo en Medios Porosos: Para el fluido, el caso más sencillo es suponer que el material en cuestión presenta comportamiento newtoniano donde la relación entre los esfuerzos y la rapidez de deformación es lineal (fluido newtoniano) [5, 22, 23]:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{D}}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$  es el tensor de esfuerzos,  $\underline{\underline{D}}$  es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ( $\frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)$ ),  $\underline{\underline{L}}$  es el tensor gradiente de velocidad y  $\mu$  es la viscosidad (newtoniana) del fluido.

En estudios realizados utilizando esta clase de fluidos se ha encontrado que la permeabilidad es independiente tanto del gradiente de presión aplicado como de la viscosidad del fluido [2, 5], además de que la velocidad promedio varía linealmente con el gradiente de presión, este comportamiento es descrito por la ecuación de Darcy. Como se mencionó anteriormente, una gran cantidad de fluidos presentes en la industria presenta comportamientos reológicos complejos (viscoelasticidad, tixotropía y viscosidad dependiente de la rapidez de deformación) y no pueden ser tratados como newtonianos, por lo que ha sido necesario obtener relaciones semejantes a la ley de Darcy a partir de ecuaciones constitutivas más elaboradas [5, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

En primera instancia, la extensión hacia el comportamiento no newtoniano se ha hecho considerando la ecuación del fluido newtoniano generalizado [5]. Esta consiste en hacer que la viscosidad en la ecuación anterior dependa de la rapidez de deformación (por convención internacional la viscosidad no newtoniana se representa con la letra griega  $\eta$  [29]); ecuaciones como la de ley de potencia, Carreau-Yasuda, Ellis y Herschel-Bulkley han sido usadas para obtener versiones más generales de la ley de Darcy [5, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

Los comportamientos tixotrópicos y antitixotrópicos también pueden obtenerse a partir del fluido newtoniano generalizado al incluir relaciones que describan la dependencia en el tiempo de la viscosidad [24, 25]; por otro lado, ninguna de las alternativas anteriores es capaz de describir comportamientos viscoelásticos; cuando el flujo es visto a escala de poros, el campo de velocidad se ve severamente afectado por los esfuerzos generados en el fluido los cuales resaltan el comportamiento viscoelástico

que provoca fenómenos como las diferencias de esfuerzos normales [3, 4, 5]. Para lidiar con tales fenómenos es necesario tomar en cuenta la historia de deformaciones del fluido, es decir, los efectos que representan la memoria del fluido [1, 5, 22, 23, 24]; las relaciones encontradas en la literatura se basan en la ecuación constitutiva de Maxwell [22, 23, 24]:

$$\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{G_0\phi_0} \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{dt} = \frac{2}{\phi_0} \underline{\underline{D}}$$

$G_0$  es el módulo de relajación y  $\phi_0$  es la fluidez (inverso de la viscosidad  $\eta_0$ ).

Esta dependencia en la historia de deformaciones se ve reflejada en la ley de Darcy, puesto que todas las complejidades antes mencionadas se deben considerar al obtener ecuaciones que permitan relacionar la permeabilidad con la porosidad del medio y con las constantes materiales del fluido (por ejemplo, tiempos característicos) [3, 4, 5, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

## OBJETIVOS

Como se menciona anteriormente, las ecuaciones constitutivas que se han utilizado en la predicción de la permeabilidad no tienen la capacidad de reproducir todos efectos reológicos que se pueden presentar durante el flujo; por esta razón, en este trabajo se empleará el modelo Bautista-Manero-Puig (BMP), que puede describir de manera adecuada una gran cantidad de efectos reológicos, para calcular la permeabilidad de medios porosos cuya tortuosidad y distribución de tamaños de poros siguen escalamientos fractales; el modelo resultante, a saber, no ha sido presentado antes. Las predicciones obtenidas con este modelo serán comparadas con resultados experimentales tomados de la literatura para fluidos con comportamientos reológicos diferentes.

Se presentara el análisis de sensibilidad del modelo para diferentes parámetros microestructurales del medio poroso (distribución de radios de poros, porosidad, tortuosidad), para diferentes funciones materiales del fluido (esfuerzo de cedencia,  $\phi_0$ ,  $\phi_\infty$ ) y para diferentes condiciones de flujo (gradiente de presión).

Finalmente, se compararan las predicciones del modelo con relaciones utilizadas a nivel industrial.

# **CAPÍTULO 1.**

## **EL MEDIO POROSO**

## 1.1 ¿Qué es un medio poroso?

Podríamos definir a un medio poroso como aquel material compuesto por dos fases: una matriz sólida y en su interior un sistema de huecos (poros) que pueden o no estar interconectados entre sí. Estos últimos pueden tener geometrías, tamaños y topologías variadas, dependiendo del origen de su formación.

La *geometría* de un sistema poroso describe las formas y tamaños de sus poros como así también la rugosidad de la superficie.

Mientras que la *topología* nos dice el modo en que dichos poros están conectados entre sí. Uno de los conceptos más útiles para caracterizar la topología de un medio es el número de coordinación  $z$ .

A continuación definamos ciertas cantidades útiles para describir la morfología de los materiales porosos, a las que dividiremos en macroscópicas y microscópicas. Las propiedades macroscópicas más importantes son la porosidad, el área superficial específica y la permeabilidad, entre otras.

## 1.2 Porosidad

Quizás la propiedad más simple de un sistema poroso sea su porosidad  $\phi$ , la cual se define como la fracción de su volumen ocupada por los poros. Es importante distinguir entre esta porosidad y la porosidad accesible  $\phi_A$ , la cual es la fracción de  $\phi$ , a la que puede llegarse desde la superficie externa del sistema. Dependiendo del tipo de medio poroso, la porosidad puede variar desde prácticamente cero para metales y ciertas rocas volcánicas, hasta cerca de uno para aerogeles.

La porosidad de un sistema puede ser medida por diversos métodos. El más simple es el método directo, en el cual el volumen total del sistema es medido y posteriormente la muestra es compactada para remover todo el espacio poroso. Luego

la diferencia de estos volúmenes nos da la porosidad total del sistema. Para medir la porosidad accesible el método más ampliamente utilizado es el llamado expansión de gas.

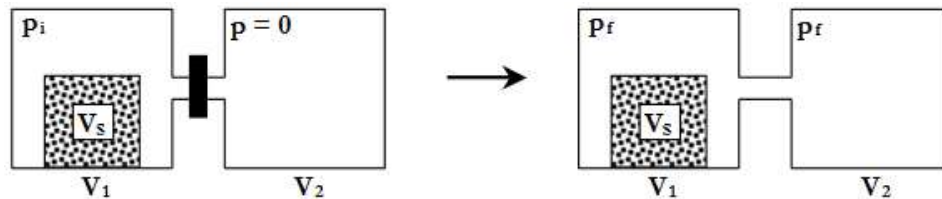


Figura 1.1. Esquema que muestra cómo se utiliza la expansión de un gas, para calcular  $\phi_A$ .

En este método, la muestra porosa de volumen  $V_s$ , es encerrada en una cámara de volumen  $V_1$ , con un gas a una dada presión  $p_i$ , como se observa en la figura 1.1. Cuando se abre la válvula el gas se expande a la cámara vecina de volumen  $V_2$  y la presión disminuye a  $p_f$ . Usando la ecuación de estado del gas ideal se llega a:

$$\phi_A = 1 - \frac{V_1}{V_s} - \frac{V_2}{V_s} \frac{p_f}{p_f - p_i}$$

### 1.3 Área superficial específica

El área superficial específica de un sólido,  $S_m$  es definida como el área intersticial de la superficie de los poros por unidad de masa y es uno de los principales parámetros para evaluar la capacidad adsortiva de los sólidos. Varía desde unos pocos  $\text{cm}^2/\text{gr}$  para rocas, llega a valores de entre 600 y 1000  $\text{m}^2/\text{gr}$  para aerogeles y alcanza valores de hasta 2000-3000  $\text{m}^2/\text{gr}$  para carbones activados. Es difícil de imaginar, pero si pudiéramos dividir 7 gramos de aerogel de modo que su superficie interna quedara esparcida, esta ocuparía una superficie equivalente a una cancha de fútbol reglamentaria.



## 1.4 Tortuosidad

La tercera característica importante de un medio poroso es la tortuosidad  $\tau$ , la que es usualmente definida como la razón entre la longitud real que debe recorrer una partícula de fluido para unir dos puntos en el seno del medio poroso y la distancia en línea recta entre dichos puntos.

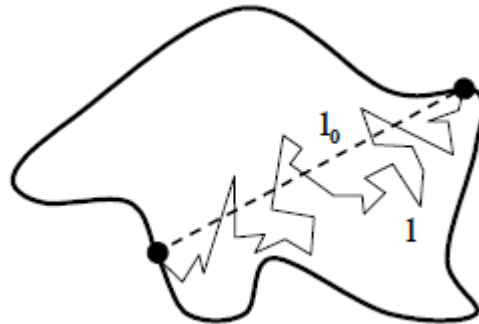


Figura 1.2: A partir de la figura, definimos la tortuosidad como:  $\tau = l/l_0$ . Como es de esperar,  $\tau$  depende de  $\phi$ . Si  $\phi$  es muy baja,  $\tau$  es muy grande. Generalmente  $\tau$  no puede ser medido experimentalmente y en la mayoría de los modelos clásicos de flujo y transporte en medios porosos lo tratan como un parámetro ajustable.

**CAPITULO 2.**  
**CARACTERISTICAS DEL MEDIO**  
**POROSO**

El medio poroso se distribuye de forma continua y tortuosa y lo componen tres fases bien diferenciadas: sólida, líquida y gaseosa. La primera, denominada matriz, está formada por las partículas minerales y orgánicas del suelo unidas mediante agregados más o menos estables.

Las otras dos, compuestas por agua y aire con vapor de agua, ocupan los espacios huecos, poros, entre las partículas sólidas del suelo. El agua no es pura sino que lleva disueltas sales y sustancias orgánicas. A la fase líquida se le denomina disolución del suelo y su flujo se considera laminar.

La caracterización espacial de las propiedades hidrofísicas del suelo adolece de la variabilidad espacial de las variables implicadas en el movimiento del agua y transporte de solutos. El estudio de dicha variabilidad se ha visto favorecido por el desarrollo de los métodos de medida y de análisis en muestras de suelo representativas de la superficie en estudio.

Las medidas tomadas en puntos específicos del suelo no dejan de ser una mera aproximación de la realidad que utiliza la Geoestadística para estimar la variabilidad espacial de la propiedad en estudio en el conjunto de la superficie. Dicho conocimiento permitirá una gestión más eficiente de los recursos naturales, en especial el uso del agua de riego, en una sociedad donde ésta es un bien escaso.

Las partículas minerales de la fase sólida varían en tamaño. Su distribución define la textura del suelo. La clasificación de familias de suelo del triángulo de texturas se hace en función de la proporción en arcilla, limo y arena del mismo.

Los suelos arenosos son sueltos y relativamente inertes mientras que los arcillosos son suelos más complejos, físicamente pesados lo que dificulta su laboreo.

La ordenación de los agregados del suelo, atendiendo a la forma, el tamaño, la disposición, y el grado de cohesión y compactación de las partículas sólidas, define la estructura del mismo. Ésta condiciona sus propiedades hidrofísicas pues determina la proporción y tamaño de los poros.

## 2.1. Porosidad

La capacidad de un suelo para retener y dejar pasar el agua y el aire se relaciona con su volumen de poros  $V_p$ . La relación entre éste y el volumen aparente  $V_a$  del suelo se denomina porosidad  $P$ .

$$P = \frac{V_p}{V_a}$$

La porosidad coincide con el contenido de agua del medio poroso saturado sin embargo, no es indicativa de la cantidad de agua que puede transmitir. La expresión anterior puede expresarse por:

$$P = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_m}$$

Donde  $P_a$  es la de densidad aparente del suelo (relación entre la masa de suelo seco y su volumen aparente) y  $P_m$  la densidad de las partículas minerales (relación entre la masa de suelo seco y el volumen ocupado por las partículas minerales).

La porosidad depende de la composición, de la textura y de la estructura del suelo. Por lo general,  $P$  varía de 0,4 a 0,6 y su valor es superior a 0,9 en suelos con un contenido de materia orgánica (su forma irregular produce una escasa compactación). Un aumento en el contenido de arcilla favorece la formación de agregados del suelo e incrementa la porosidad. La tabla 2.1 muestra el intervalo de valores de  $P$  y  $P_a$  de diversos suelos.

Tabla 2.1. Intervalo típico de valores de  $P$  y  $a$  en distintos suelos,

Suelo	Porosidad ( $P$ ) (%)	Densidad aparente ( $a$ ) (g/cm <sup>3</sup> )
Arenoso	36-56	1,16-1,70
Franco	30-55	1,20-1,85
Arcilloso	35-70	0,88-1,72

La porosidad y la densidad aparente del suelo no deben de relacionarse, directamente, con la permeabilidad del suelo. Se da la paradoja de que suelos con valores  $P_a$  grandes y valores  $P$  pequeños son muy permeables mientras que al contrario, suelos con valores  $P_a$  pequeños y  $P$  grandes son poco permeables. La permeabilidad del suelo se relaciona con la forma y distribución del tamaño de poros.

Los poros difieren en forma y en tamaño. La interconexión entre ellos varía con el tipo de suelo, con la actividad biológica y con las prácticas de cultivo. El uso de maquinaria agrícola, la aplicación de elevadas concentraciones de fertilizantes, unido a la disminución progresiva de materia orgánica, favorece la compactación del suelo, deshace los agregados y modifica su porosidad.

La porosidad de los materiales porosos compuestos por un tamaño de partícula uniforme depende de su compactación. Los medios porosos con predominio de diferentes tamaños de partículas minerales tienen una menor porosidad dado que las partículas más pequeñas rellenan los huecos que dejan las partículas grandes. Cuanto más amplio es el rango en el tamaño de partícula más pequeña será su porosidad. La porosidad también depende de la forma de las partículas sólidas. Formas redondeadas se compactan más que las formas irregulares por lo que  $P$  es más pequeño.

El tamaño de poro afecta a la retención del agua en el suelo. Los poros gruesos tienen una capacidad de retención baja pero participan de forma activa en la filtración líquida en situaciones de saturación. Sin embargo, los poros finos tienen una capacidad de retención más alta. Se suele distinguir tres categorías de poros: microporos (diámetro comprendido entre 3 a 30  $\mu\text{m}$ ), mesoporos (diámetro comprendido entre 30 a 100  $\mu\text{m}$ )

y macroporos (diámetro > 100  $\mu\text{m}$ ). Una proporción equilibrada y estable entre los diferentes tamaños de poro asegura un buen comportamiento del suelo ante el agua: los poros más grandes facilitan los procesos de filtración y de aireación mientras que los más pequeños permiten una buena capacidad de retención.

En el medio poroso natural (rocas, sedimentos,..), la porosidad producida por la acción de los factores climáticos suele denominarse porosidad primaria. La presencia de fracturas entre los materiales aumenta su porosidad. A ésta última se la denomina “porosidad secundaria”.

En suelos francos y arcillosos  $V_a$  no es constante, depende del contenido de humedad  $\theta$  (ver figura 2.1). El suelo se expande cuando se humecta y se contrae cuando se seca. La relación entre  $P$  y  $V_a$  con  $\theta$  muestra zonas diferenciadas. En la zona no lineal, cuando el suelo se seca, solamente, una proporción del volumen ocupado por el agua es ocupado por aire; cuando el suelo se humecta, el volumen del suelo aumenta pero una proporción de poros permanece llena de aire. Por debajo de un determinado valor de  $\theta$  el volumen aparente del suelo alcanza el mínimo. En suelos con alto contenido de agua ésta se pierde sin un cambio apreciable en  $V_a$ . Los valores de que delimitan las diferentes zonas están condicionados por la textura y estructura del suelo, tipo de arcilla, contenido en materia orgánica etc.

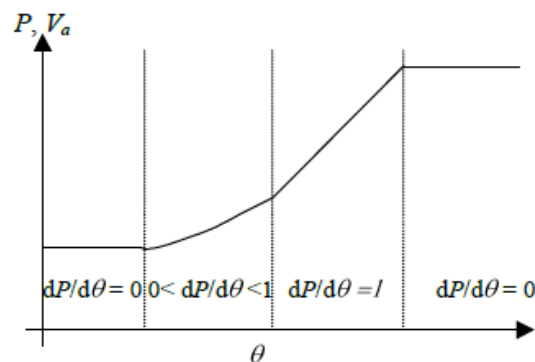


Figura 2.1. Variación de la porosidad y volumen aparente con el contenido de agua en suelos con arcillas expansibles.

La determinación de la forma y distribución del espacio poroso es esencial para el estudio del movimiento del agua en el suelo. La distribución de poros suele realizarse en el laboratorio en muestras de suelo ya que no existe un procedimiento práctico para determinarla en campo.

## **2.2. Distribución de las partículas minerales.**

Los materiales porosos se clasifican en función de su tamaño de grano atendiendo a las especificaciones dadas por diversos organismos como el U.S. Geological Survey o la American Society of Testing Materials. La distribución del tamaño de partículas minerales se representa en las llamadas curvas granulométricas (ver figura 2.2) que muestra la distribución acumulada de los tamaños de partícula: curvas de frecuencia acumulada. El valor de la ordenada indica el porcentaje de partículas de tamaño menor que el valor del diámetro  $d$  que le corresponde en el eje de abscisas, expresado a escala logarítmica o a escala real. Dichas partículas han pasado por el diámetro  $d$  de la criba utilizada para la evaluación de las mismas.

Las curvas continuas muestran uniformidad en la distribución de los diferentes tamaños de partículas del medio. Las curvas con discontinuidades indican el predominio de unos tamaños sobre otros. Estas curvas proporcionan información de la composición de las partículas minerales de una determinada muestra de suelo y son de aplicación en diferentes campos de la Ingeniería Hidráulica como la caracterización de materiales filtrantes, por ejemplo filtros de arena o grava, utilizados en obras hidráulicas (embalses, presas, cimientos, relleno de carreteras...).

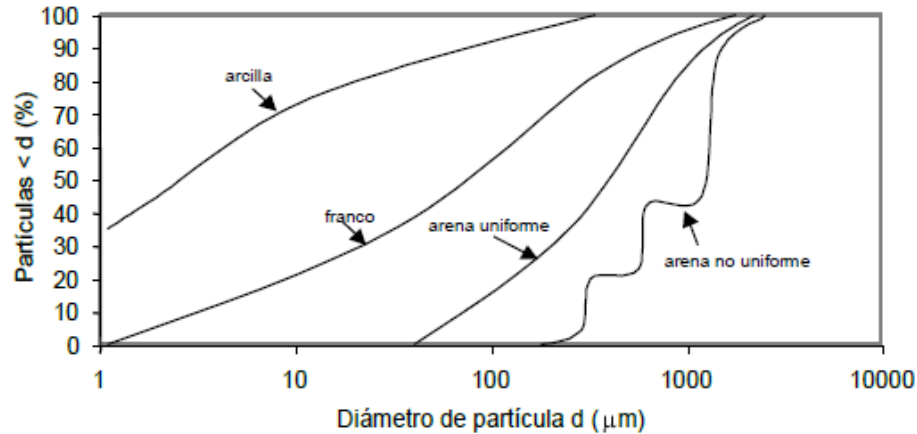


Figura 2.2. Curvas granulométricas de distintos componentes de suelos.

En algunas curvas granulométricas el eje de ordenadas expresa el porcentaje de partículas retenidas en la criba utilizada para su clasificación por lo que se debe de sustraer de 100 las cantidades representadas en la figura anterior.

Para describir la distribución del tamaño de partículas en cada muestra del medio poroso, a partir de su curva granulométrica se considera: los tamaños pequeños de partícula, la pendiente y su forma. Con respecto a los primeros, éstos se clasifican, según el rango de tamaños especificado para cada uno de ellos, en arena fina, arena gruesa y grava. Hazen (1892) definió “tamaño efectivo” de partícula como el correspondiente al tamaño de partícula donde el 10 % corresponde a la fracción más fina y el 90% a la más gruesa. Éste representa un índice general utilizado en la clasificación de los tamaños de arena y sirve para correlacionar el tamaño de grano de arena con su permeabilidad intrínseca  $K_i$  (depende de las características del medio poroso). En las curvas representadas en la figura 2.2 se determinaría por el valor  $d_{10}$  correspondiente al 10% de las partículas. El tamaño medio de las partículas es el valor  $d_{50}$  correspondiente al 50 % de las partículas.

La distribución del tamaño de partículas del medio poroso se ha correlacionado con  $K_i$  por medio de diferentes expresiones empíricas cuya aplicación se ve restringida a medios similares pero no así a otros medios con diferente tamaño de partículas y/o agregados. Se ha observado que en materiales porosos formados por partículas con



forma esférica uniforme de diámetro efectivo  $d$ , el caudal que lo atraviesa es proporcional a  $d^2$ . Aplicando la ecuación de Darcy se cumple:

$$K_i \propto d^2$$

Los materiales porosos con gradación uniforme en el tamaño de partículas cumplen la relación anterior. Cuanto más pequeño es el tamaño de partícula, mayor es su superficie específica por lo que la resistencia al flujo es mayor y el valor de  $K_i$  menor. Por el contrario, tamaños mayores de partícula producen poros más grandes por lo que  $K_i$  aumenta.

La conductividad hidráulica  $K$  depende tanto de las características geométricas del medio poroso como de las propiedades del fluido, fundamentalmente, peso específico  $\gamma$  y viscosidad dinámica  $\mu$  ( $K = K_i \gamma / \mu$ ). Hazen (1911) observó que en filtros de arena con “tamaño efectivo”  $d_{10}$  comprendido entre 0,1 y 3 mm se cumple la relación siguiente:

$$K \propto d_{10}^2$$

La pendiente correspondiente de la mayor parte de la curva puede determinarse de diferentes maneras. En la práctica, se usa el coeficiente de uniformidad  $C_u$  definido por Hazen como la relación entre el tamaño de partícula que corresponde al 60% de partículas más pequeñas y el correspondiente al 10% de partículas más pequeñas ( $C_u = d_{60}/d_{10}$ ). Éste representa el valor medio de la pendiente de la curva entre el 10 y el 60% de los tamaños de partículas. Su valor es indicativo de la buena o mala uniformidad en la gradación de los tamaños de partícula. Cuanto más pequeño sea, más uniformes serán los tamaños de arena dentro de los límites considerados. Su uso queda limitado a materiales que, de por sí, ya son uniformes por ejemplo en gravas.

En cuanto a la forma de la curva cabe distinguir las formas en “S”, como las que presentan los sedimentos acarreados por el agua en suspensión, y las distribuciones con la presencia de colas, como los acarreos de mezclas de arena y grava. La porosidad de los materiales con curvas en forma de S es mayor que la de los materiales con curvas con presencia de colas.

Hasta hoy, no se conoce un método que calcule directamente K a partir de la curva granulométrica del material. Sin embargo, la información que de ellas se extrae permite estimar la capacidad para transmitir agua del medio.

### **2.3. Comportamiento de las arcillas**

Las arcillas son partículas minerales de tamaño  $< 2 \mu\text{m}$  con gran superficie específica y con carácter coloidal. Poseen carga eléctrica negativa que se compensa con la adsorción de cationes  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{H}^+$ ,  $\text{NH}_4^+$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{Ca}^{2+}$  y  $\text{Al}^{3+}$  de la disolución del suelo. Éstos, al no formar parte de la estructura de la arcilla, se intercambian por otros cationes de la solución y son los responsables de la capacidad de cambio del suelo que afecta tanto a la retención y movimiento de sales y de nutrientes en él, como a su estabilidad estructural (floculación y dispersión de los coloides). La capacidad de cambio depende del contenido y el tipo de arcilla (superficie específica y carga eléctrica).

La carga eléctrica negativa de la superficie externa de la micela se neutraliza con la carga positiva de los cationes de la disolución del suelo formando la denominada doble capa electrostática (ver figura 2.3). La concentración de cationes varía con la distancia a la micela (ver figura 2.4). Los cationes próximos a ella forman una capa más rígida que la de los más alejados. Ésta se hace más difusa al aumentar la distancia a la micela y disminuir la concentración de cationes. Su distribución final, resulta del equilibrio entre la atracción electrostática entre éstos y la arcilla y del proceso de difusión, derivado de la agitación de las moléculas de agua, que tiende a equilibrar su concentración. El estado de equilibrio se corresponde con el mínimo de energía libre del sistema.

Los aniones, por lo general, son repelidos de la superficie micelar. Para profundizar en la justificación teórica de la doble capa electrostática consultar Childs, 1969 (sección 4.9) e Iwata et al. 1995 (sección 2.3).

En la figura 2.3a se muestra una micela cuya carga negativa ha sido neutralizada por cationes adsorbidos. Tras la humectación del suelo una parte de ellos se separa de la micela (ver figura 2.3b)

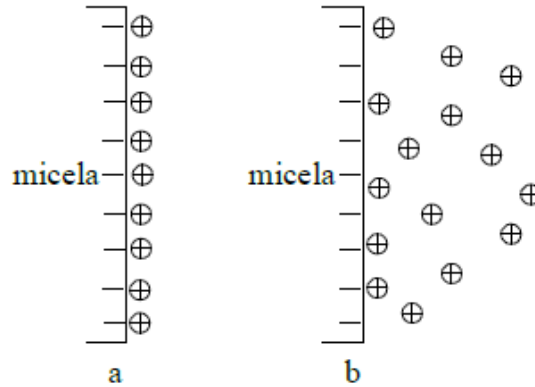


Figura 2.3. Formación de la doble capa electrostática: (a) micela seca y (b) micela hidratada.

El espesor de la doble capa, definido por la distancia entre la superficie externa de la micela hasta el punto donde la concentración de electrolitos se aproxima a la de la disolución del suelo, disminuye con el aumento en la valencia de los electrolitos y, para una misma valencia, disminuye al aumentar su concentración (ver figura 2.4).

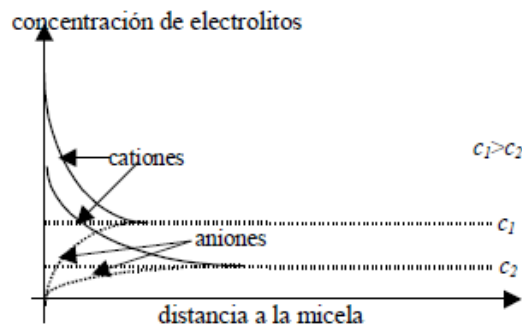


Figura 2.4. Distribución de cationes y de aniones en las proximidades de la micela ( $c_1$  y  $c_2$  son concentraciones de electrolitos fuera de la influencia de la doble capa).

Cuando dos partículas de arcilla se aproximan, las dobles capas de cada una de ellas interactúan entre sí. Se crea una fuerza electrostática (de Coulomb) de repulsión entre los electrolitos, con la misma carga eléctrica, adsorbidos a ellas que tenderá a dispersarlas. Por otra parte, las fuerzas de atracción, fuerzas de Van der Waals entre

los dipolos de las moléculas de agua, que están unidas fuertemente a la micela y que se mueven al unísono con ella (hidratación de la arcilla), tenderá a atraerlas. El efecto de éstas fuerzas es mayor cuanto más próximas se encuentren las partículas de arcilla pues son inversamente proporcionales a la séptima potencia de la distancia intermicelar mientras que las electrostáticas, son proporcionales al cuadrado de la distancia y su efecto sigue manifestándose a distancias mayores (ver figura 2.5).

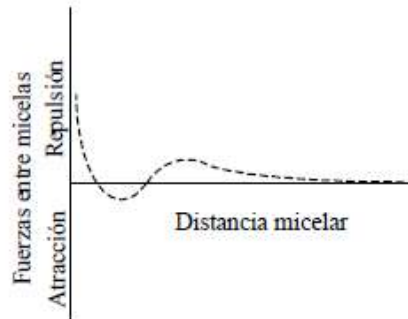


Figura 2.5. Fuerzas entre micelas hidratadas.

Aparte de las fuerzas citadas, se producen otras fuerzas de atracción y de repulsión pero de menor importancia. Cuando predomina el efecto de atracción la arcilla flocula. Para profundizar más en la interacción entre las dobles capas consultar Childs, 1969, secciones 4.10 y 4.11. e Iwata et al. 1995. El balance entre fuerzas de atracción y repulsión es reversible. Según las condiciones del suelo la arcilla puede repetir varias veces el proceso de dispersión y floculación como ocurre en un suelo regado con agua en la que se varía la concentración de sales y la composición de iones.

La dispersión se favorece en situaciones con espesor grande de la doble capa: disoluciones con concentración de electrolitos pequeña, complejo de cambio dominado por un catión monovalente etc. Por el contrario, favorecen la floculación situaciones con espesor pequeño de la doble capa: disoluciones con concentración de sales alta. La recuperación de suelos salino-sódicos exige lavar las sales y aplicar mejorantes químicos (en general calizos). Un complejo de cambio dominado por el  $\text{Na}^+$  crea unas condiciones estructurales del suelo deficientes al dispersar la arcilla.

Las arcillas tienen carácter higroscópico: adsorben y condensan el vapor de agua de la atmósfera del suelo. Conforme se hidrata la arcilla aumenta el espesor de la capa de moléculas de agua que la rodean. La adsorción de las moléculas de agua a la superficie externa de la arcilla se produce por complejos mecanismos donde intervienen fuerzas de atracción electrostática y puentes de hidrógeno. La fuerza de atracción disminuye al aumentar la separación a la micela. El agua más próxima a la superficie de la micela es retenida con más fuerza. Se cree que la estructura y propiedades (viscosidad, densidad) de ésta pueden diferir de las del agua de la disolución del suelo. Los cationes adsorbidos a la superficie externa de la arcilla pueden, a su vez, hidratarse.

Cuando la arcilla se pone en contacto con la disolución del suelo, la diferencia de presión osmótica entre ésta y la de la doble capa origina unas presiones que tienden a expandir y aumentar su volumen. Por otra parte, conforme la micela aumenta de tamaño, la carga negativa de los aniones adsorbidos a la doble capa de una micela repele a los de otra próxima y las dos micelas se separan produciendo un aumento del volumen del suelo. Durante la expansión se cierran los poros más gruesos con la consiguiente reducción en la permeabilidad del suelo.

Durante la desecación del suelo se produce la contracción de la arcilla provocando fisuras, sobre todo, en la superficie del suelo. En climas semiáridos, con alternancia entre humectación-desecación, se llegan a formar planos de fracturas en horizontes más profundos. Los suelos ricos en monmorillonita, por ejemplo vertisoles, al humectarse se encharcan y al desecarse se endurecen dificultando las labores agrícolas.

**CAPITULO 3.**  
**APLICACIONES DEL MEDIO**  
**POROSO**

En 1856 el ingeniero Henry Darcy, experimentalmente encontró la siguiente relación. Que el caudal de agua que atraviesa un medio poroso, depende del gradiente de presión,

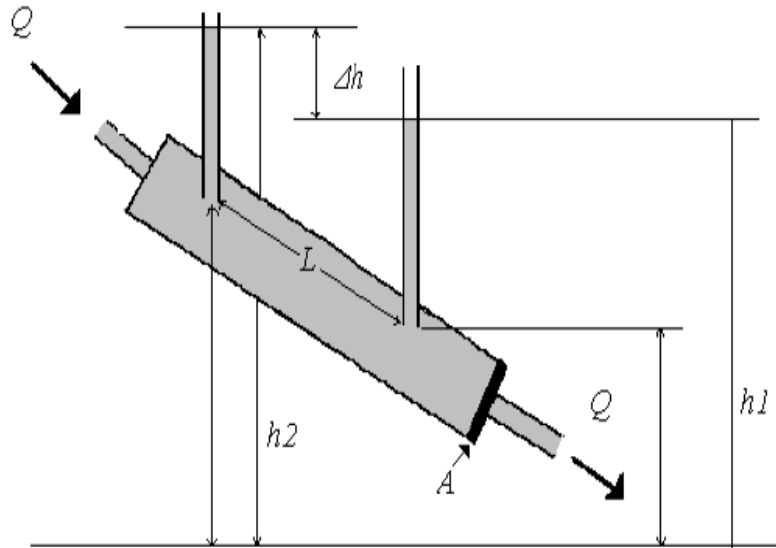


Figura 3.1. Caudal de agua.

**Factores geométricos:** la longitud, el área del medio

**Permeabilidad:** conductividad hidráulica.

$$Q = -KA \frac{\Delta h}{L}$$

$$Q = -KA \frac{\Delta h}{L}$$

**Caudal** = área\*velocidad

$$v = \frac{Q}{A} = -K \frac{\Delta h}{L}$$

**Permeabilidad** =  $K = \frac{k}{\mu}$

**Viscosidad**, propiedad de un fluido que tiende a oponerse a su flujo cuando se le aplica una fuerza. Los fluidos de alta viscosidad presentan una cierta resistencia a fluir; los fluidos de baja viscosidad fluyen con facilidad.

$$v = -\frac{k}{\mu} \nabla P$$

Que necesitamos para modelar un fluido en un medio poroso, necesitamos de:

$$v = -\frac{k}{\mu} \nabla p$$

$$\text{div } v = 0$$

**(Ecuación gobernante de flujo Ley de Darcy y ecuación de conservación o de balance de flujo).**

Para determinar el camino de una perturbación:

$$\frac{d\phi}{dt} + v_x \frac{d\phi}{dx} + v_y \frac{d\phi}{dy} = 0$$

### **3.1. ¿Por qué se estudia y se modela el paso del fluido en un medio poroso?**

En la explotación del petróleo, en la agricultura, transporte de contaminantes en aguas subterráneas, en medio ambiente, para simular accidentes, para evaluar daños, prevenir posibles accidentes por contaminación ambiental, en procesos industriales, construcción de equipos, filtros, torres de absorción, etc.

### **3.2. ¿Quiénes desarrollan o emplean estos modelos?**

- Matemática
- Física
- Ing. química
- Ing. petroquímica



- Ing. Civil,
- Ing. Ambiental
- Ing. Agrícola
- Ing. Metalúrgica
- Geólogos
- Entre otros

### 3.3. ¿Cómo se determina el campo de velocidades?

Para determinar el campo de velocidades es necesario discretizar el medio.

#### Métodos usados para discretizar el dominio

- Método de diferencias finitas
- Método de elementos finitos
- Método de volumen finitos

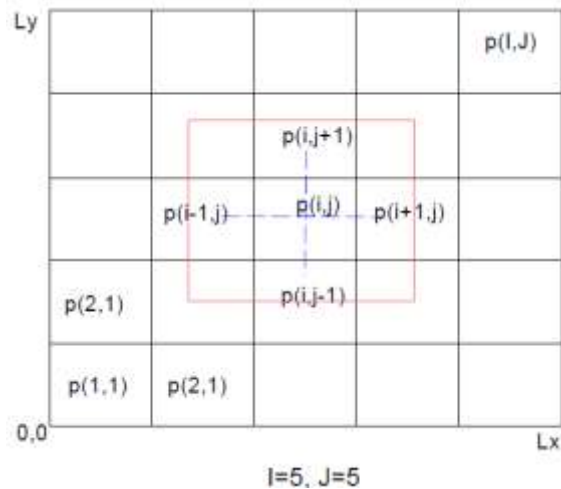


Figura 3.2. Discretización del dominio.

Definimos:

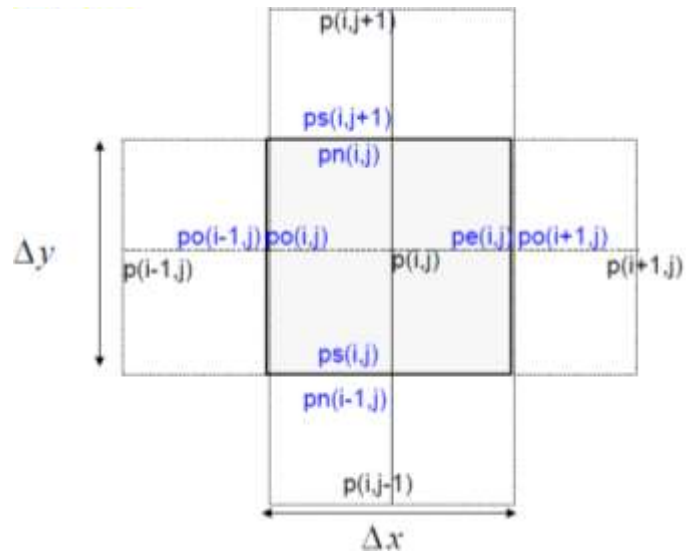


Figura 3.3. Discretización del dominio.

Condición de Dirichlet:

$$pn(i, j) = ps(i, j + 1) \quad pe(i, j) = po(i+1, j)$$

$$ps(i, j) = pn(i, j - 1) \quad po(i, j) = pe(i - 1, j)$$

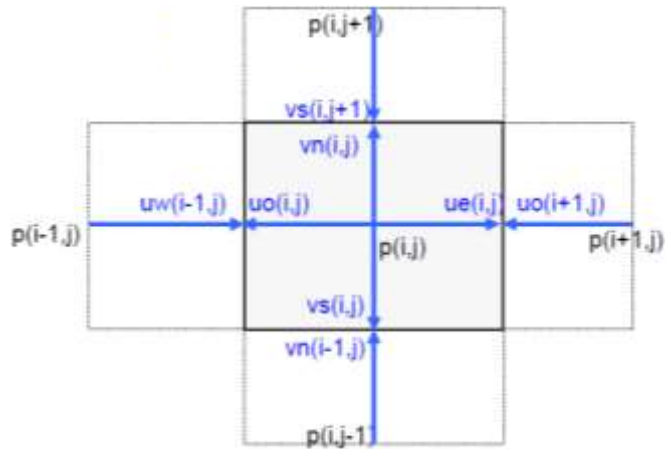


Figura 3.3. Discretización del dominio.

Condición de Neuman:

$$vn(i, j) = -vs(i, j + 1) \quad ue(i, j) = uo(i+1, j)$$

$$vs(i, j) = -vn(i, j - 1) \quad uo(i, j) = -ue(i - 1, j)$$

Condición de Robin:

$$pn(i, j) - ps(i, j + 1) = \beta(vn(i, j) + vs(i, j + 1))$$

$$pe(i, j) - ps(i + 1, j) = \beta (ve(i, j) + vo(i + 1, j))$$

Luego la Ecuación de balance de masa:  $div v = f$

$$\frac{2ue(i, j) + 2uo(i, j)}{\Delta x} + \frac{2vn(i, j) + 2vs(i, j)}{\Delta y} = f(i, j)$$

$$v = -\frac{k}{\mu} \nabla p \Rightarrow \frac{\mu}{k} v + \nabla p = 0$$

Ecuación de Darcy:

$$\frac{\mu(i, j)}{k(i, j)} (ue(i, j) - uo(i + 1, j)) + \frac{p(i + 1, j) - p(i, j) + pe(i, j) - po(i + 1, j)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\mu(i, j)}{k(i, j)} (vn(i, j) - vs(i, j + 1)) + \frac{p(i, j + 1) - p(i, j) + pn(i, j) - ps(i, j + 1)}{\Delta x} = 0$$

$$p^{n+1}(i, j) = \left\{ f(i, j) + 2 \frac{\xi_x(i, j)}{\Delta x} (po'(i + 1, j) + pe'(i - 1, j)) + \beta (uo'(i + 1, j) + ue'(i - 1, j)) + 2 \frac{\xi_y(i, j)}{\Delta y} (ps'(i, j + 1) + pn'(i, j - 1)) + \beta (vs'(i, j + 1) + vn'(i, j - 1)) \right\} \frac{1}{\xi(i, j)}$$

**CAPITULO 4.**  
**MODELO PARA LA**  
**PERMEABILIDAD**

En este trabajo se eligió usar el modelo BMP [24] para calcular la permeabilidad en medios porosos fractales. Las ecuaciones que conforman el modelo son la ecuación de Maxwell convectiva superior acoplada con una ecuación cinética que representa la modificación estructural de líquidos complejos [24] que fluyen a través de medios porosos fractales. Este nuevo modelo involucra arreglos de capilares cuya distribución de radios y tortuosidad pueden representarse a través de escalamientos fractales [19].

El modelo BMP fue elegido por su capacidad de predecir, en flujos cortantes simples, una primera zona de viscosidad constante a bajas rapidezces de deformación, una segunda zona de viscosidad constante a altas rapidezces de deformación, una zona de transición a rapidezces de deformación intermedias (Figura 4.1), esfuerzo de cedencia real (cuando la fluidez a bajas rapidezces de deformación es cero) (Figura 4.2) y comportamientos viscoelásticos, específicamente, una primera diferencia de esfuerzos normales que aumenta con la rapidez de deformación [24]. Además, en ciclos no estacionarios, el modelo puede predecir comportamientos tixotrópicos y antitixotrópicos [3, 4, 5, 24].

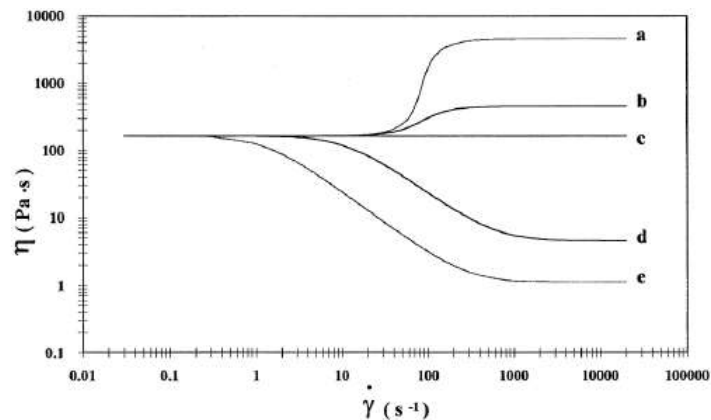


Figura 4.1. Viscosidad contra rapidez de deformación en corte calculado con el modelo BMP en estado estacionario a diferentes valores de  $\phi_\infty$  en  $(Pa \cdot s)^{-1}$ : (a) 0.0002; (b) 0.002; (c) 0.052; (d) 0.2; (e)

1. Los parámetros usados fueron  $\phi_0 = 0.052 (Pa \cdot s)^{-1}$ ,  $k_0 = 3.9 \times 10^{-5} s - Pa^{-1}$  y  $\lambda = 0.14s$ .

#### 4.1. Modelo BMP

El modelo BMP consta de las siguientes ecuaciones:

$$\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{G_0 \phi} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{2}{\phi} \underline{\underline{D}}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\lambda} (\phi_0 - \phi) + k_0 (\phi_\infty - \phi) \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$$

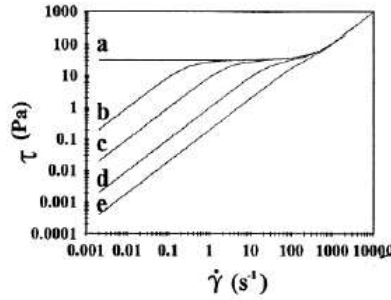


Figura 4.2. Esfuerzo contra rapidez de deformación en corte calculado con el modelo BMP en estado estacionario a diferentes valores de  $\phi_0$  en  $(Pa \cdot s)^{-1}$ : (a) 0; (b) 0.0001; (c) 0.001; (d) 1; (e) 10.5. Los parámetros usados fueron  $\phi_\infty = 10.5 (Pa \cdot s)^{-1}$ ,  $k_0 = 3.9 \times 10^{-5} s^{-1} Pa^{-1}$  y  $\lambda = 0.14s$ .

En las ecuaciones anteriores  $\frac{d}{dt}$  denota la derivada material,  $\underline{\underline{\sigma}}$  es el tensor de esfuerzos,  $\underline{\underline{D}}$  es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ( $\underline{\underline{L}} = \nabla \underline{v}$ ),  $\phi$  es la fluidez,  $\phi_0$  y  $\phi_\infty$  son las fluideces a bajas y a altas rapidezces de deformación respectivamente,  $G_0$  es el módulo de relajación en corte,  $\lambda$  es el tiempo característico estructural y  $k_0$  es una constante cinética asociada con la modificación estructural. La derivada convectiva superior del tensor de esfuerzos está dada por [22, 24]:

$$\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{L}}^T$$

Las ecuaciones sobre el modelo BMP se reducen al modelo de Maxwell convectivo superior cuando  $\phi = \phi_0$ . Estas ecuaciones acoplan la viscoelasticidad no lineal de la ecuación de Maxwell con una ecuación en términos de la fluidez, que es en sí una ecuación cinética con un tiempo característico asociado a la formación de la estructura ( $\lambda$ ) y un término de destrucción relacionado a la modificación estructural con una constante cinética ( $k_0$ ) proporcional a la disipación.

En flujo cortante simple estas ecuaciones se reducen a:

$$\sigma + \frac{1}{G_0\varphi} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + k_0(\varphi_\infty - \varphi)\sigma\dot{\gamma}$$

Por simplicidad, en las ecuaciones anteriores se escribe  $\sigma$  en lugar de  $\sigma_{rz}$ ,  $\dot{\gamma}$  es la rapidez de deformación en corte, los términos no lineales de las ecuaciones del modelo BMP (5.1) no son considerados puesto que se estudia el caso cuando los esfuerzos normales generados en el flujo son despreciables. En estado estacionario las ecuaciones anteriores se combinan para obtener:

$$(\varphi_0 - \varphi) + k_0\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma^2\varphi = 0$$

Como se puede ver en la figura 4.1, la ecuación anterior predice adelgazamiento al corte cuando  $\phi_\infty > \phi_0$ , engrosamiento al corte cuando  $\phi_\infty < \phi_0$ , comportamiento newtoniano cuando  $\phi_\infty = \phi_0$ , dos zonas de viscosidad constante, una a bajas y otra a altas rapidezces de deformación con una zona de transición para rapidezces de deformación intermedias. Además, en la figura 4.2 se puede ver que el modelo presenta esfuerzo de cedencia real cuando  $\phi_0 = 0$ . Este implica que el fluido tendera a comportarse como solido cuando la rapidez de deformación tienda a cero, semejante al modelo viscoplástico de Bingham. El modelo también predice esfuerzo de cedencia aparente para valores pequeños de  $\phi_0$ . De esta manera, con un solo modelo se pueden predecir comportamientos como el de Bingham y ley de potencia.

Se puede calcular el esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) a partir de la ecuación anterior haciendo  $\phi_0 = 0$ , obteniendo así:

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{k_0\lambda\varphi_\infty}}$$

La ecuación combinada anterior se puede resolver para  $\phi$  expresando el resultado en función de  $\sigma_y$  para obtener:

$$\frac{\varphi(\sigma)}{\varphi_\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left( \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2 - 1 + \sqrt{\left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2 - 1 \right]^2 + 4 \left( \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} \right) \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2} \right)$$

La ecuación requiere tres constantes materiales ( $\phi_0$ ,  $\phi_\infty$  y  $k_0\lambda$ ) que pueden ser evaluadas a partir de datos reométricos de mediciones independientes; en este sentido, el modelo no contiene parámetros de ajuste.

## 4.2. Escalamiento Fractal de los Medios Porosos

Aquí se ha supuesto que se puede describir los medios porosos como un conjunto de capilares cuya distribución de poros y tortuosidad siguen escalamientos fractales. La relación para el número de poros/capilares ( $N$ ) de radio  $r$  en el medio está dada por [19]:

$$N(L \geq r) = \left( \frac{r_{max}}{r} \right)^{D_f}$$

$L$  es la longitud característica del escalamiento,  $r_{max}$  es el radio máximo de los poros/capilares y  $D_f$  es la dimensión fractal de estos ( $1 < D_f < 2$  para 2 dimensiones); entonces, el número de capilares con radios en el intervalo de  $r$  a  $r + dr$  está dado por:

$$-dN = D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr$$

El signo negativo implica que el número de capilares disminuye al aumentar el radio de estos, y  $-dN > 0$ ; además,  $N \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ , que es una propiedad de los medios fractales. A partir de la ecuación anterior a esta, se puede obtener el número total de capilares, desde el radio mínimo ( $r_{min}$ ) hasta el máximo ( $r_{max}$ ):

$$N(L \geq r_{min}) = \left( \frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^{D_f}$$



La tortuosidad de los capilares también puede ser descrita por escalamientos fractales [19]:

$$L_t = L_0^{D_t} (2r)^{1-D_t} = 2^{1-D_t} L_0^{D_t} r^{1-D_t}$$

$L_0$  es la longitud representativa del medio poroso y  $L_t$  es la longitud tortuosa del capilar en dirección del flujo,  $D_t$  es la dimensión fractal de tortuosidad ( $1 < D_t < 2$  para 2 dimensiones); esta representa la convolución de los capilares para el flujo en medios poroso. Diferenciando la ecuación con respecto a  $L_0$  se obtiene:

$$dL_t = 2^{1-D_t} L_0^{D_t-1} r^{1-D_t} D_t dL_0$$

Las ecuaciones vistas en el tema 4.2 serán usadas para derivar el modelo de flujo en medios porosos junto con el modelo BMP.

### 4.3. Calculo de la Permeabilidad

El esfuerzo en la pared provocado por el flujo en capilares tortuosos está dado por:

$$\sigma_w = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dL_t}$$

$\sigma_w$  es el esfuerzo en la pared y  $\frac{dp}{dL_t}$  es el gradiente de presión; el signo señala que las direcciones de estos son opuestas.

Desarrollando la derivada por regla de la cadena y sustituyendo la última ecuación vista en el tema 1.2 se obtiene:

$$\sigma_w = -\frac{r^{D_t}}{2^{2-D_t}} \frac{1}{D_t L_0^{D_t-1}} \frac{dp}{dL_0}$$

Ahora, el esfuerzo total en la pared ( $\sigma$ ) dada una celda unitaria (ver B.1) se puede expresar como:

$$\sigma = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sigma_w dN(r) = - \frac{dp}{dL_0} \left( \frac{2^{D_t-2} D_f L_0^{1-D_t} r_{max}^{D_t}}{D_t (D_t - D_f)} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{D_t - D_f} \right]$$

El flujo volumétrico ( $q$ ) en capilares tortuosos de radio  $r$  se puede expresar como:

$$q(r) = - \frac{dp}{dL_0} \left( \frac{2^{D_t-1} \pi}{D_t L_0^{D_t-1}} r^{D_t-1} \right) [I\varphi](r)$$

$\phi(r)$  es la integral de la fluidez, esta se expresa como:

$$I\varphi](r) = \int_0^r \left( \int_0^{r^*} r \varphi(r) dr \right) r^* dr^*$$

La ecuación sobre el flujo volumétrico ( $q$ ) indica que el flujo decrece debido a la tortuosidad de los capilares. En el caso particular de capilares rectos ( $D_t = 1$ ) y fluido newtoniano ( $\phi(\xi) = \phi_0$ ) las dos ecuaciones anteriores se reducen a la ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$q(r) = - \frac{dp}{dL_0} \frac{\pi r^4}{8} \varphi_0;$$

El flujo volumétrico total a través de la celda unitaria se puede calcular como la suma del flujo en cada capilar:

$$Q = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} q(r) dN(r) = - \frac{dp}{dL_0} \left( \frac{2^{D_t-1} \pi D_f r_{max}^{D_f}}{D_t L_0^{D_t-1}} \right) \int_{r_{min}}^{r_{max}} [I\varphi](r) r^{D_t - D_f - 2} dr$$

En el desarrollo anterior se supuso que  $\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{D_f} \approx 0$ , esto ocurre porque  $r_{min}$  suele ser varios ordenes de magnitud menor que  $r_{max}$  [19] y  $D_f$  es un número entre 1 y 2 lo cual hace al cociente tienda a cero. Para calcular la velocidad promedio en medios porosos, el flujo total se divide entre el área transversal total

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{V_t} = \frac{Q}{\phi L_0}$$

$V_t$  es el volumen total de la celda,  $V_p$  es el volumen total de poros y  $\phi = \frac{V_p}{V_t}$  es la porosidad. El volumen total de poros es entonces:

$$V_p = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} \pi r^2 L_t dN = \pi D_f r_{max}^{3-D_t} \frac{2^{1-D_t} L_0^{D_t}}{3-D_t-D_f} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]$$

Por lo tanto, la velocidad promedio queda expresada como:

$$v = \frac{dp}{dL_0} \frac{2^{2D_t-2} (3-D_t-D_f) \phi}{D_t L_0^{2D_t-2} r_{max}^{3-D_t-D_f}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [I\varphi](r) r^{D_t-D_f-2} dr.$$

Al comparar esta expresión con la ecuación de Darcy se obtiene la siguiente expresión para la permeabilidad:

$$k = \frac{2^{2D_t-2} (3-D_t-D_f) \phi}{D_t L_0^{2D_t-2} r_{max}^{3-D_t-D_f}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [I\varphi](r) r^{D_t-D_f-2} dr$$

La permeabilidad newtoniana se obtiene sustituyendo  $[I\varphi](r) = \frac{\phi_0 r^4}{8}$  y  $\phi(\sigma) = \phi_0$  en la ecuación anterior:

$$k = \frac{2^{2D_t-2} (3-D_t-D_f) \phi}{8 D_t L_0^{2D_t-2}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{2D_t}}{D_t - D_f + 3}$$

Además, para capilares rectos ( $D_t = 1$ ):

$$k = \frac{(2 - D_f)\phi}{8} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{2-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^2}{4 - D_f}$$

Esta ecuación es la que se encuentra en la literatura para fluidos newtonianos en capilares rectos.

#### 4.4. Aproximación Analítica

Se pueden obtener resultados analíticos a partir de la ecuación comparada de Darcy para la permeabilidad si se evalúa la integral en la ecuación sobre la integral de la fluidez  $\phi(r)$ , esto se puede lograr si se supone una expresión para  $\phi(\xi)$  con significado físico. Varias expresiones se pueden proponer basándose en que la fluidez en el capilar es mínima en el centro y máxima en las paredes, este comportamiento se debe a la respuesta del fluido a los esfuerzos generados en la geometría (máximos en las paredes y decrecen al alejarse de estas). La expresión analítica no lineal más simple que cumple con estos límites es que la fluidez es una función cuadrática del radio del capilar. Esto es:

$$\varphi(r) = \varphi_0 + (\varphi(\sigma) - \varphi_0)r^2$$

La ecuación predice un mínimo en la fluidez en el centro del capilar con valor  $\phi_0$ ; de manera semejante, la fluidez presenta un máximo en la pared del capilar con valor de  $\phi(\sigma)$ . Para calcular la fluidez en la pared es necesario calcular el esfuerzo en la pared con la segunda ecuación del tema 4.3.

Al sustituir la ecuación anterior en la ecuación sobre la integral de la fluidez se obtiene  $\phi(r)$ , este resultado se sustituye en la ecuación comparada de Darcy con la permeabilidad para obtener:

$$k = \frac{2^{2D_t-2}(3-D_t-D_f)\phi}{D_t L_0^{2D_t-2}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \left( \frac{\varphi_0}{8} \frac{r_{max}^{2D_t}}{D_t-D_f+3} + \frac{\varphi(\sigma) - \varphi_0}{24} \frac{r_{max}^{2D_t+2}}{D_t-D_f+5} \right)$$

Cuando  $\phi(\sigma) \rightarrow \phi_0$ , cerca del centro del capilar, la permeabilidad tiende a una constante, dada por la ecuación utilizada para obtener la permeabilidad newtoniana, y disminuye asintóticamente hasta otro valor constante cerca de la pared en función del máximo de la fluidez ( $\phi(\sigma) \rightarrow \phi_\infty$ ).

# **CAPITULO 5.**

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

## 5.1. Procedimiento de Cálculo

Para calcular la permeabilidad utilizando la última ecuación del capítulo anterior es necesario conocer la porosidad y el radio promedio de los poros, con estos valores es posible calcular los parámetros estructurales ( $r_{max}$ ,  $r_{min}$  y  $L_0$ ), a partir de expresiones conocidas para los medios porosos ([19]), y estimar las dimensiones fractales ( $D_t$  y  $D_f$ ). Las tres funciones materiales del modelo BMP ( $\phi_0$ ,  $\phi_\infty$  y  $k_0\lambda$ ) se pueden obtener de curvas reométricas (gráficas de viscosidad contra rapidez de deformación en corte generadas en reómetros comerciales).

Dado un gradiente de presión, se evalúa el esfuerzo con la ecuación sobre el esfuerzo total en la pared ( $\sigma$ ) y la fluidez usando la última ecuación del tema 4.1, entonces se puede calcular la permeabilidad con la última ecuación del capítulo anterior; estas predicciones serán comparadas con datos experimentales disponibles en la literatura y con predicciones de otros modelos. Los valores de las propiedades reométricas del fluido y de la microestructura del medio poroso se presentan, para cada caso, en el apéndice A.

## 5.2. Resultados

La influencia del esfuerzo de cedencia sobre la velocidad promedio se ilustra en las figuras 5.1 y 5.3. En la figura 5.1 se comparan mediciones experimentales de una solución de poliacrilamida al 0.5% en peso ([26]) con las predicciones del modelo BMP. Esta solución no presenta esfuerzo de cedencia, se puede ver que la curva de flujo correspondiente (puntos) presenta una transición muy suave entre la zona de bajos esfuerzos (donde la solución presenta una primera zona de viscosidad constante) y la zona de altos esfuerzos (donde la solución presente una segunda zona de viscosidad constante), ambas caracterizadas por pendientes constantes; tal transición ocurre en un intervalo amplio de esfuerzos. Los datos experimentales han sido representados adecuadamente usando el modelo de Ellis ([19]).

Por otra parte, el modelo BMP presenta una curva de flujo donde la transición entre las dos zonas de viscosidad constante ocurre de manera abrupta, se podría decir que la transición ocurre en un valor específico de esfuerzo (el esfuerzo de cedencia); pero, como se ve en el inserto presentado en la figura 5.1, el modelo BMP predice que, cuando se aplican esfuerzos menores al valor de cedencia, el material fluye muy lentamente con viscosidad constante (pendiente constante) y su comportamiento es muy parecido al del fluido newtoniano; además, la transición entre las dos zonas de viscosidad constante también es suave pero, en este caso, ocurre en un intervalo muy pequeño de esfuerzos (esfuerzo de cedencia aparente).

En esta comparación se puede ver la diferencia en el comportamiento de un material que presenta cedencia (transición de la viscosidad en un intervalo pequeño de esfuerzos) y uno que no la presenta (transición de la viscosidad en un intervalo amplio de esfuerzos); se puede ver que hay concordancia en las regiones de bajos y altos gradientes de presión, donde se predicen valores constantes para la viscosidad, mas no para valores intermedios de este.

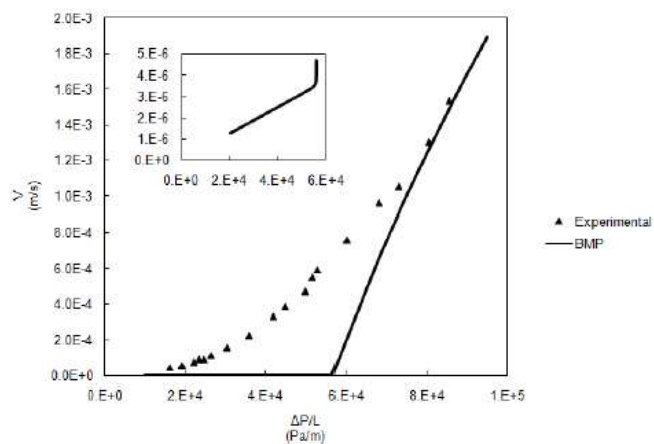


Figura 5.1. Velocidad promedio en función del gradiente de presión característico. Comparación entre datos experimentales tomados de Park ([26]), correspondientes a una solución de poliacrilamida y las predicciones del modelo BMP (los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 5.2 se comparan las predicciones del modelo BMP con las predicciones del modelo presentado por Orgéas et al. ([6]) para un fluido newtoniano generalizado en un medio poroso ortotrópico (transversalmente isotrópico). La permeabilidad en



este modelo es una cantidad tensorial y se considera transversalmente isotrópica, se emplea la ecuación de Carreau-Yasuda para la viscosidad y un medio poroso de sección transversal elíptica. La anisotropía del medio provoca que la relación entre la estructura de los poros y la reología del fluido sea compleja, lo cual se refleja en las predicciones de este modelo.

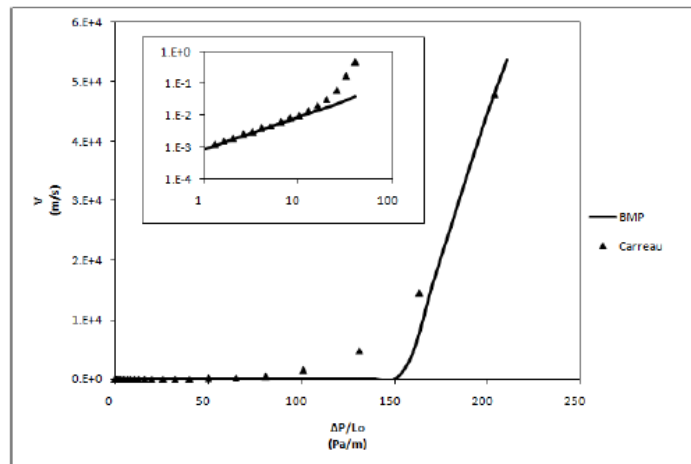


Figura 5.3. Velocidad promedio en función del gradiente de presión característico. Comparación entre las predicciones del modelo presentado por Orgéas ([6]) usando la ecuación Carreau-Yasuda para la viscosidad y predicciones usando el modelo BMP (Los datos usados están en el apéndice A).

Se puede ver en el inserto en la figura 5.2 que la curva de flujo correspondiente al modelo de Orgéas et al. (puntos) presenta, a esfuerzos pequeños, flujo muy lento con viscosidad constante y, a esfuerzos intermedios (figura principal), una transición brusca entre las dos zonas de viscosidad constante (pendientes constantes), este efecto es semejante al que se presenta cuando el material tiene esfuerzo de cedencia, como se puede ver en la curva correspondiente al modelo BMP.

Se presentan diferencias entre las predicciones hechas con el modelo BMP y las presentadas por Orgéas et al. ([6]), dichas diferencias se deben a que la ecuación de Carreau-Yasuda no presenta esfuerzo de cedencia, esto es, la transición de la viscosidad no es tan abrupta como en el modelo BMP.

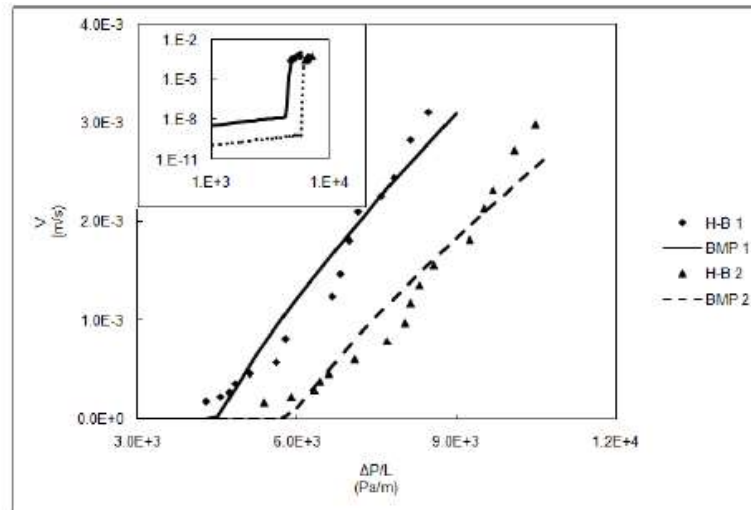


Figura 5.3. Velocidad promedio en función del gradiente de presión característico. Comparación de series de datos experimentales de dos soluciones de polimetilcelulosa tomadas de Park ([26]) y predicciones usando el modelo BMP (los datos usados están en el apéndice A).

Se hizo una última comparación de las predicciones del modelo BMP para la velocidad promedio en función del gradiente de presión (figura 5.3), esta vez contra datos experimentales de dos soluciones de polimetilcelulosa con masa molecular denotada como PMC-25 ([26]) y concentraciones del 0.3 % (H-B 1) y 0.5 % (H-B 2) en peso.

Park ([26]) utilizando la ecuación de Herschel-Bulkley, la cual presenta esfuerzo de cedencia real (no hay flujo para esfuerzos menores a este), para representar la reología de las soluciones. Como se puede ver en el inserto en la figura 5.3, en todas las curvas correspondientes al modelo BMP la velocidad promedio es cercana a cero para gradientes de presión menores al esfuerzo de cedencia y, cuando este es superado (figura principal), la velocidad se incrementa linealmente; en este caso las predicciones del modelo BMP están de acuerdo con los datos experimentales. El punto de cedencia no pudo ser descrito de manera adecuada por Sochi ([5]), por lo que sus simulaciones no son incluidas aquí.

En la figura 5.4 se presentan las predicciones de velocidad promedio usando el modelo BMP para varios valores del esfuerzo de cedencia. Se puede ver que la velocidad

promedio es muy baja a gradientes de presión menores al esfuerzo de cedencia (primera zona de viscosidad constante) y crece de manera casi lineal cuando dicho esfuerzo es superado (segunda zona de viscosidad constante), este efecto ocurre porque la viscosidad del material a bajos esfuerzos es muy alta, lo cual hace que el material presente alta resistencia al flujo; mientras que, para esfuerzos altos, la viscosidad del material es considerablemente menor, permitiendo así que este fluya más fácilmente.

Cuando la transición entre las dos zonas de viscosidad constante ocurre en un intervalo de esfuerzo muy pequeño se dice que el material presenta esfuerzo de cedencia, mientras mayor sea el valor de este, mayor será el esfuerzo necesario para alcanzar la zona de transición. Este comportamiento se puede ver en la figura 5.4, cuando el esfuerzo de cedencia es pequeño la curva de flujo presenta cambio de pendiente a gradientes de presión pequeños y al aumentar el esfuerzo de cedencia aumenta también el gradiente de presión correspondiente a la transición. Como es de esperarse, la velocidad promedio presenta un crecimiento mayor a menor esfuerzo de cedencia.

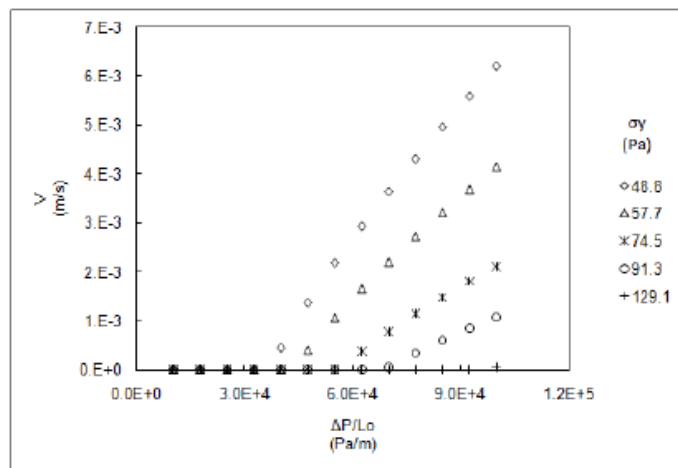


Figura 5.4. Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra gradiente de presión característico para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

Como se presentó en la figura 4.2, el modelo BMP predice esfuerzo de cedencia real ( $\phi_0 = 0$ ) y aparente (valores pequeños de  $\phi_0$ ). El esfuerzo de cedencia real implica que el material tendrá un comportamiento parecido al de un sólido cuando la rapidez de deformación en corte sea cero, semejante al comportamiento en el modelo viscoplástico de Bingham. En la figura 5.5, se presenta la gráfica de velocidad promedio contra gradiente de presión para varios valores de  $\phi_0$ ; se puede ver que cuando  $\phi_0 \rightarrow 0$  el modelo predice esfuerzos de cedencia aparentes, valores del esfuerzo donde la curva de flujo tiene un cambio abrupto de pendiente, que se hacen presentes en la zona donde las velocidades tienen valores cercanos a cero.

Esto corresponde a la región de muy bajas velocidades en el modelo de Orgéas et al. ([6]) y a la zona donde no hay datos experimentales de la velocidad en la figura 5.3. El efecto del esfuerzo de cedencia es menor cuando  $\phi_0$  crece, generando curvas donde, aun cuando existe el cambio de pendiente, este ya no es tan drástico puesto que la diferencia entre los valores de la viscosidad en las dos zonas donde esta es constante es pequeño comparado con el caso cuando  $\phi_0 \rightarrow 0$ .

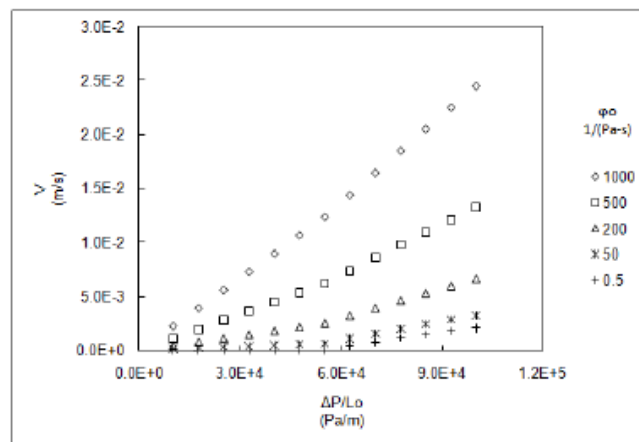


Figura 5.5. Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra gradiente de presión característico para varios valores de la fluidez a bajas rapidezces de deformación ( $\phi_0$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 2.6 se presenta la gráfica de velocidad contra gradiente de presión para varios valores de porosidad, el modelo predice un efecto semejante al presentado en la figura 5.5 donde se varió el esfuerzo de cedencia; a bajas porosidades el medio

tiene menor espacio disponible para que el material fluya, lo cual disminuye la velocidad promedio. Este efecto puede compararse con el caso de esfuerzos de cedencia altos en la figura 5.5 donde la velocidad promedio es muy baja.

Por otro lado, a altas porosidades el fluido encuentra mayor espacio en el medio para desplazarse lo que produce que la velocidad promedio crezca rápidamente con el gradiente de presión. Comparando la figura 5.6 con la figura 5.5, este efecto equivale a la velocidad promedio que se presenta a bajos esfuerzos de cedencia.

Hay que resaltar que el comportamiento que se presenta en la figura 5.6 incluye la presencia del esfuerzo de cedencia (74.5P a), este se puede notar en el cambio de pendiente que presentan todas las curvas. En el inserto incluido en la figura 5.6 se puede notar que, a esfuerzos menores al valor de cedencia donde todas las curvas presentan velocidades muy bajas, la tendencia de flujo antes señalada se mantiene, se presentan velocidades bajas cuando la porosidad es baja y, al aumentar esta última, también lo hace la velocidad.

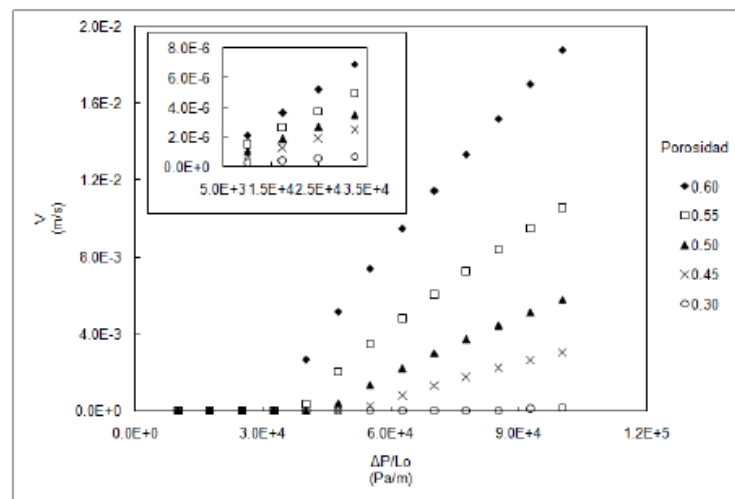


Figura 5.6. Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra gradiente de presión característico para varios valores de la porosidad ( $\phi$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

La dependencia de la velocidad promedio con los parámetros microestructurales y las dimensiones fractales se presenta en las figuras 5.7 y 5.9. El modelo predice un

resultado interesante al variar la relación de radios de los poros (figura 5.7); según la ecuación utilizada para obtener el número total de capilares, cuando la distribución de radios de los poros es cerrada, el número de poros en el medio disminuye, lo cual provoca que el esfuerzo total en la pared disminuya.

Esto afecta de forma notable el comportamiento del flujo. Para gradientes de presión bajos las relaciones de radios más pequeñas generan menor esfuerzo en la pared, lo cual permite que el fluido se mueva más fácilmente (porque hay menor fricción). Esta tendencia puede verse en el inserto en la figura 5.7 donde las relaciones de radios más pequeñas tienen velocidades mayores.

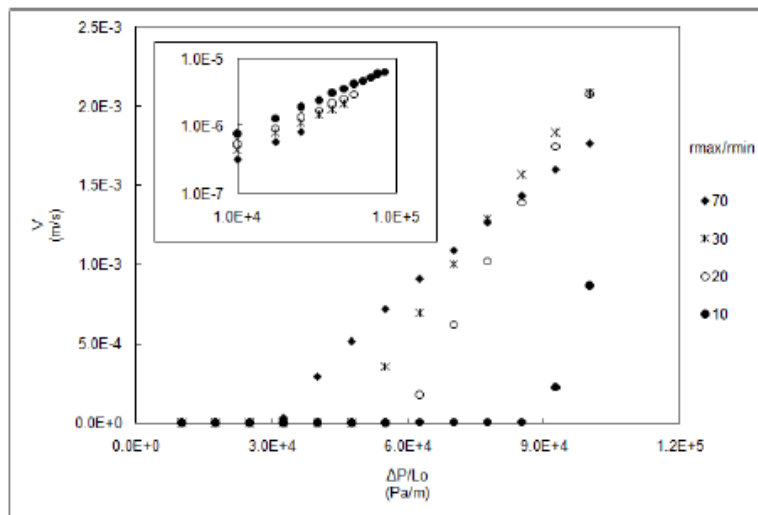


Figura 5.7. Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra el gradiente de presión característico para varios valores de la relación de radios ( $r_{max}/r_{min}$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

El hecho de que los esfuerzos dependan de la relación de radios afecta el punto de cedencia (el valor del gradiente de presión en el que se presenta un cambio abrupto en la pendiente de la curva de flujo). Puesto que las relaciones de radios más cerradas generan menores esfuerzos, estas requerirán gradientes de presión mayores para presentar cedencia pero, una vez que esta se presenta, el gradiente de presión es lo suficientemente grande como para provocar un cambio de pendiente mucho más marcado en la curva de flujo. Este efecto se comprueba en la figura 5.7 donde se

puede ver que las relaciones de radios más grandes ceden a gradientes de presión más pequeños pero, una vez que se presenta la cedencia, las relaciones de radios más pequeñas presentan cambios de pendiente más drásticos.

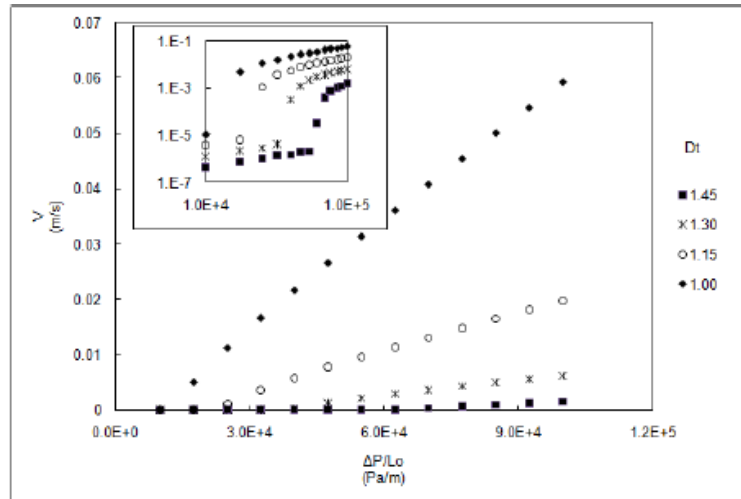


Figura 5.8. Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra el gradiente de presión característico para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 5.8 se presenta la influencia de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ); el límite donde  $D_t = 1$  corresponde a capilares rectos; cuando la dimensión de tortuosidad disminuye, la velocidad promedio aumenta y el efecto de la cedencia se ve abatido (inserto en la figura 2.8), demostrando la relación entre el esfuerzo de cedencia y la tortuosidad. Cuando el capilar es recto ( $D_t = 1$ ), el fluido puede moverse con mayor facilidad que cuando hay tortuosidad, esta impide el movimiento del fluido en el medio poroso provocando velocidades menores como se puede ver en la figura 5.8.

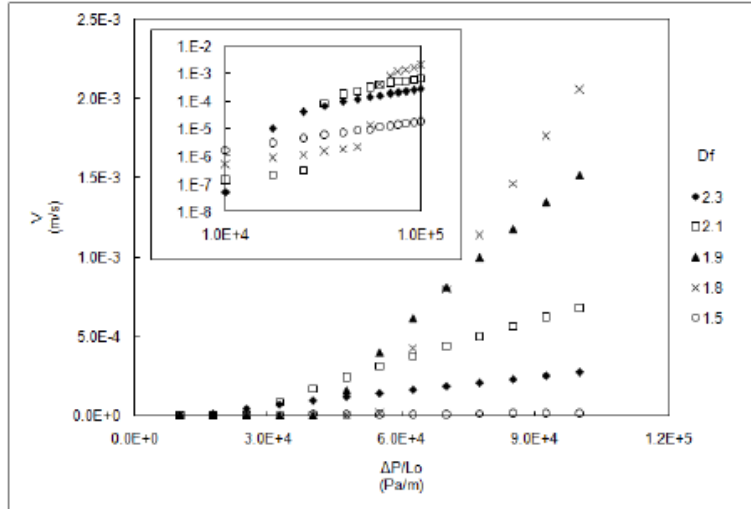


Figura 5.9. Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra el gradiente de presión característico para varios valores de la dimensión fractal de porosidad ( $D_f$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

Por otra parte, en la figura 5.9 se puede ver que la relación para la velocidad y la dimensión fractal de porosidad ( $D_f$ ) es semejante a la relación mostrada en la figura 5.7; cuando  $D_f$  crece también lo hacen los esfuerzos, esto provoca que a bajos gradientes de presión (ampliación en la figura 5.9) la curva correspondiente a la menor dimensión de porosidad presente mayor velocidad (en esta se genera menor fricción); por otra parte, las curvas con mayor  $D_f$  generan mayores esfuerzos, por lo que presentan cedencia a gradientes de presión menores, pero la cedencia de las curvas con menor  $D_f$  es más drástica como se puede ver en la figura 5.9.



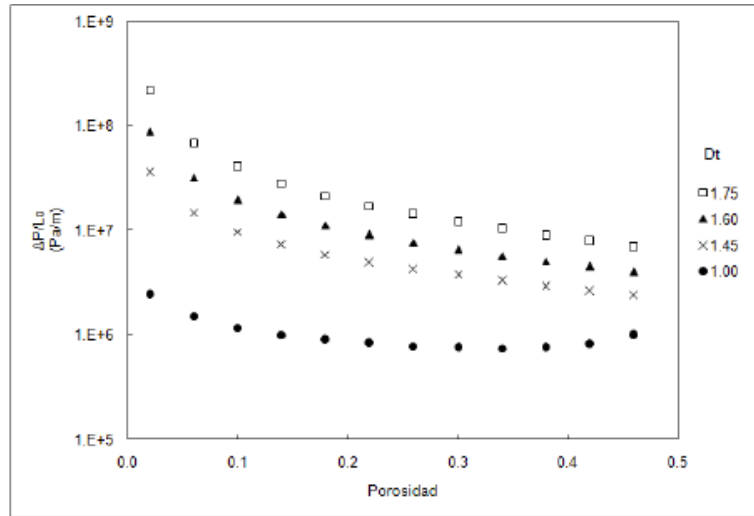


Figura 5.10. Gradiente de presión en función de la para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

Las predicciones obtenidas para el gradiente de presión en función de la porosidad y del esfuerzo de cedencia se muestran en las figuras 5.10 y 5.11. En la figura 5.10 se puede ver que el gradiente de presión necesario para iniciar el flujo disminuye asintóticamente al aumentar la porosidad del medio para varios valores de  $D_t$ ; al variar  $D_t$  se obtienen resultados semejantes por lo que no se discutirán aquí.

Cuando  $D_t \rightarrow 1$ , el gradiente de presión necesario para el flujo es muy pequeño y tiende al valor límite para porosidades altas. En la zona de baja porosidad, se puede ver que el gradiente de presión crece rápidamente para valores altos de  $D_t$ . Estos resultados son semejantes a los que presentan Yun et al. ([18]) para un fluido de Bingham. Esta discusión complementa y corrobora las afirmaciones hechas para la figura 2.8 (la tortuosidad dificulta el flujo).

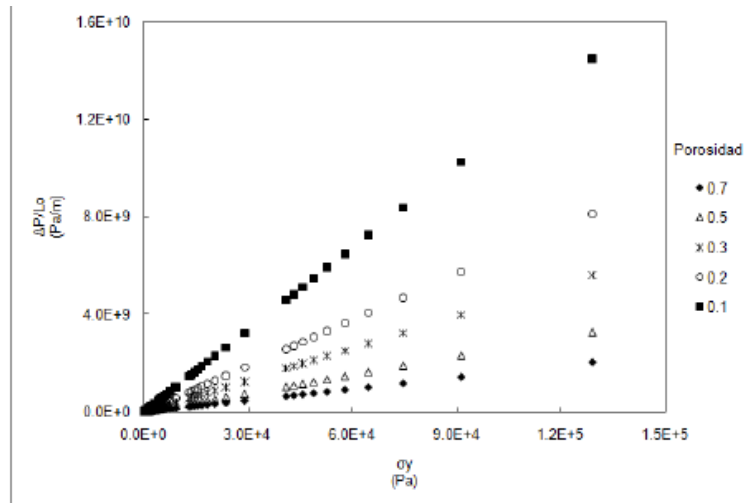


Figura 5.11. Predicciones del modelo BMP para el gradiente de presión en función del esfuerzo de cedencia para varios valores de la porosidad ( $\phi$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

La figura 5.11 revela una relación lineal entre el gradiente de presión y el esfuerzo de cedencia para varios valores de la porosidad. Se puede ver que al aumentar la porosidad, el gradiente de presión necesario para iniciar el flujo disminuye para cada valor del esfuerzo de cedencia. Esta relación también ha sido presentada para fluidos de Bingham ([18]) y concuerda con la expresión teórica desarrollada por Zhang et al. ([17]) para crudo pesado en medios porosos:

$$\frac{\Delta p}{L_0} = 2\sigma_y \sqrt{\frac{\phi}{8k}}$$

En la región donde  $k$  es constante (independiente de la viscosidad del fluido), la gráfica del gradiente de presión contra esfuerzo de cedencia debe tener una pendiente mayor al aumentar la porosidad. Sin embargo, si se tiene permeabilidad variable (función de la viscosidad del fluido), la pendiente disminuye para porosidades mayores, esto puede verse en la figura 5.11.

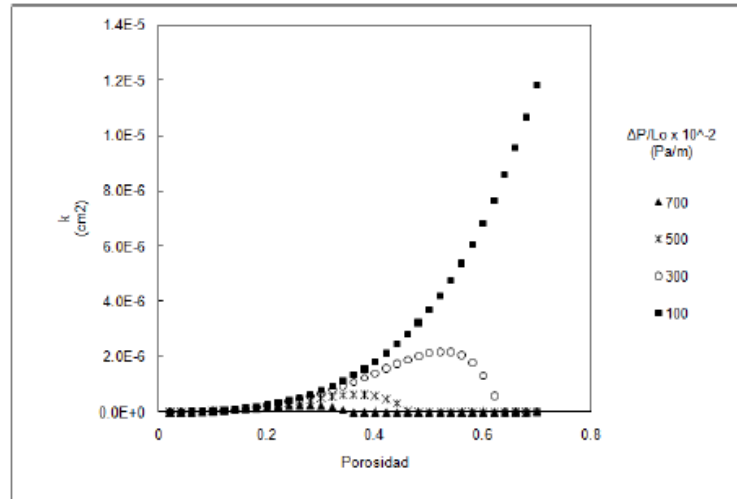


Figura 5.12. Permeabilidad contra porosidad para varios valores del gradiente de presión aplicado ( $\frac{\Delta P}{L_0}$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

Se presentan las predicciones del modelo BMP para la permeabilidad en función de la porosidad, para distintos valores del gradiente de presión (figura 5.12), de la dimensión fractal de tortuosidad (figura 5.13) y del esfuerzo de cedencia (figura 5.14).

En la figura 5.12 se ve que, para gradientes de presión pequeños, la permeabilidad aumenta monótonamente al aumentar la porosidad, cuando el gradiente de presión es pequeño (menor que el esfuerzo de cedencia) el fluido se encuentra en la primer zona de viscosidad constante y no presenta cedencia (la permeabilidad no presenta máximos) y, al aumentar la porosidad, el fluido se moverá más fácilmente a través del medio; pero, para gradientes de presión grandes, la permeabilidad presenta un máximo debido a que el fluido presenta cedencia seguida de una zona donde su fluidez es mayor; después la permeabilidad disminuye asintóticamente al aumentar la porosidad como efecto del aumento en la fluidez del material.

Este comportamiento no ha sido descrito antes; de hecho, las predicciones presentadas por Zhang et al. ([17]) usando la ecuación de la ley de la potencia para la viscosidad describen crecimiento monofónico de la permeabilidad para todos los exponentes de la ley de la potencia, además el crecimiento es mayor al aumentar el

exponente. Las predicciones hechas por Zhang et al. no incluyen la variación de la permeabilidad para varios gradientes de presión.

En la figura 5.13 se puede ver que al variar la dimensión fractal de tortuosidad se obtiene un resultado cualitativamente semejante al presentado en la figura 5.12. La permeabilidad presenta máximos cuando la dimensión de tortuosidad tiende a uno (límite de capilares rectos); y, para dimensiones de tortuosidad mayor, se presenta crecimiento monótonico de la permeabilidad con la porosidad.

Este comportamiento se debe a que, como se mencionó antes, la tortuosidad impide el flujo, por lo que a bajas  $D_t$  el material cede más rápidamente y la permeabilidad tiene un máximo; pero cuando la tortuosidad es alta, el material no puede generar el esfuerzo necesario para ceder, por lo que la permeabilidad no presenta máximos. Es necesario remarcar que, bajo estas condiciones, la permeabilidad disminuye al aumentar la tortuosidad de los capilares.

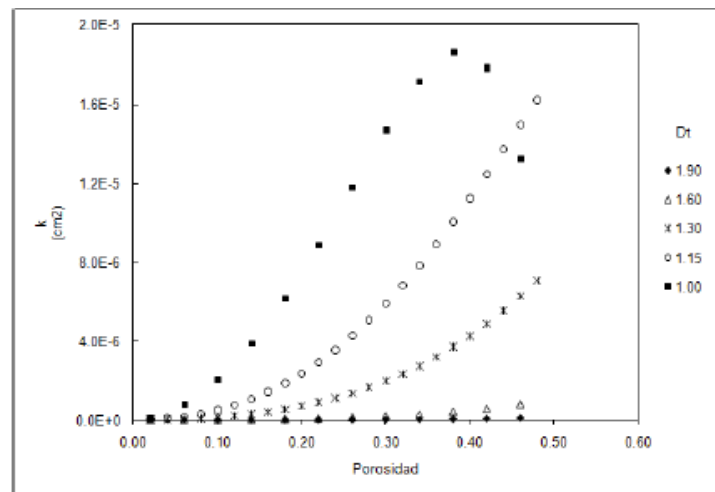


Figura 5.13. Permeabilidad en función de la porosidad para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

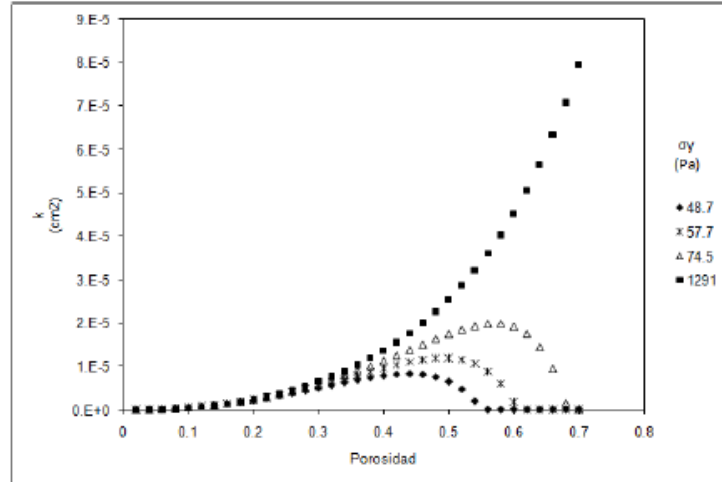


Figura 5.14. Permeabilidad en función de la porosidad para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_u$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 5.14 se ve que el esfuerzo de cedencia afecta de manera drástica el comportamiento de la permeabilidad en la zona de alta porosidad. Para valores altos del esfuerzo de cedencia la permeabilidad crece monótonamente y se presentan máximos conforme el esfuerzo de cedencia disminuye. Este resultado contrasta con la tendencia mostrada en la figura 5.12, al aumentar el gradiente de presión.

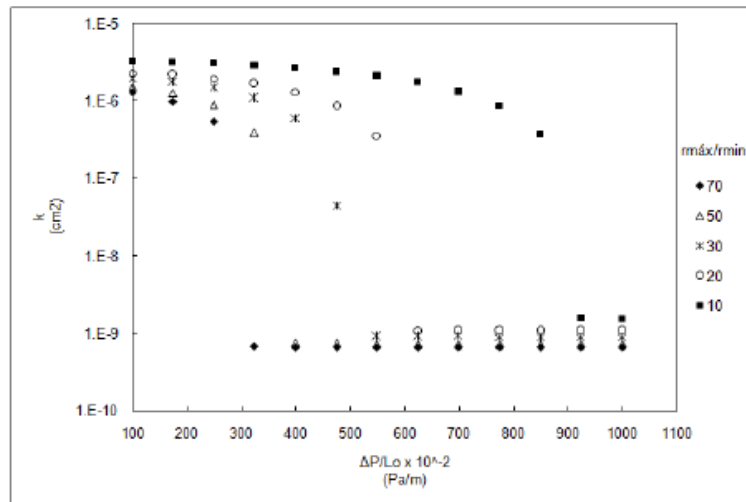


Figura 5.15. Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para valores de la razón de radios ( $\frac{r_{max}}{r_{min}}$ ) (los datos usados están en el apéndice A)

Ahora, para ilustrar la dependencia de permeabilidad con el gradiente de presión aplicado, se presentan las figuras 5.15-5.18. En la figura 5.15, la permeabilidad disminuye al aumentar el gradiente de presión aplicado de un valor alto (correspondiente al valor constante de la viscosidad a bajas rapidezces de deformación) hacia un valor asintótico menor (correspondiente al valor constante de la viscosidad a altas rapidezces de deformación), también se puede ver que la transición entre ambas zonas ocurre en intervalos de esfuerzo muy pequeños (se presenta cedencia). Se predice una mayor permeabilidad para distribuciones de radios más cerradas ( $\frac{r_{max}}{r_{min}} \rightarrow 1$ ).

Este comportamiento se debe a que las distribuciones más cerradas generan menores esfuerzos, por lo tanto, el medio presenta una menor resistencia al flujo. Este comportamiento es semejante al obtenido cuando se varía la dimensión fractal de porosidad, por esta razón este último no es mostrado aquí.

La variación de la permeabilidad con el gradiente de presión también depende de la tortuosidad del medio poroso; esta dependencia se muestra en la figura 5.16. Como se puede ver, para capilares rectos ( $D_t = 1$ ), la pendiente del decremento de la permeabilidad es más pronunciada (el fluido cede más libremente) y disminuye al aumentar la tortuosidad. Es evidente que, en general, se predicen permeabilidades menores al aumentar la tortuosidad del medio, lo cual corrobora que la tortuosidad se opone al flujo.

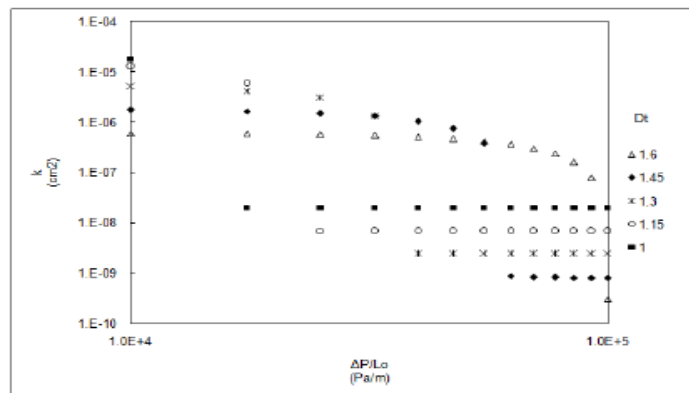


Figura 5.16. Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (los datos usados están en el apéndice A)

La microestructura del medio poroso se refleja macroscópicamente en la porosidad; para ilustrar esta dependencia en la figura 5.17 se presenta la variación de la permeabilidad con el gradiente de presión para distintos valores de la porosidad. De manera general, el comportamiento es semejante al que se presenta en la figura 5.16, es decir, al aumentar la porosidad se obtienen predicciones semejantes a las que se presentan al disminuir la tortuosidad.

Las regiones presentes incluyen una zona de permeabilidad constante para gradientes de presión pequeños seguidos de un decremento súbito de la permeabilidad para gradientes de presión intermedios y una región asintótica de baja permeabilidad para gradientes de presión altos. La pendiente del decremento de la permeabilidad es más pronunciada al aumentar la porosidad. Estos resultados concuerdan con el comportamiento predicho para un fluido de Ellis ([19]) para varios exponentes de la zona de ley de potencia.

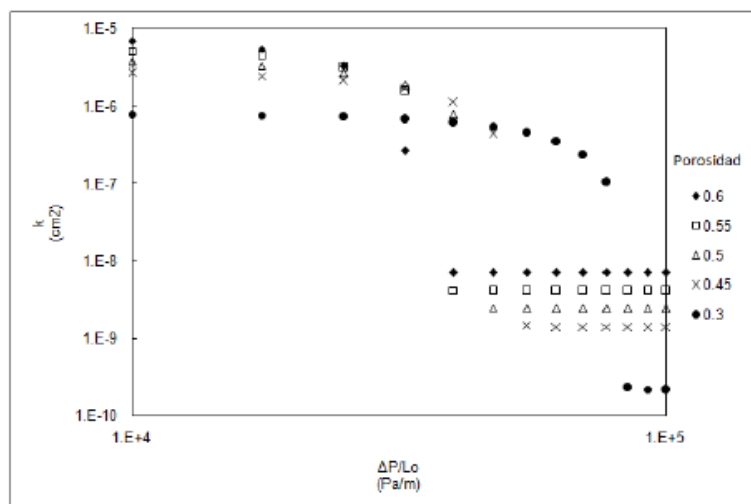


Figura 5.17. Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para diferentes valores de porosidad ( $\phi$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

De manera semejante, en la figura 5.18 se puede ver que el modelo predice un decremento mayor en la permeabilidad con el gradiente de presión mayor para valores menores del esfuerzo de cedencia.

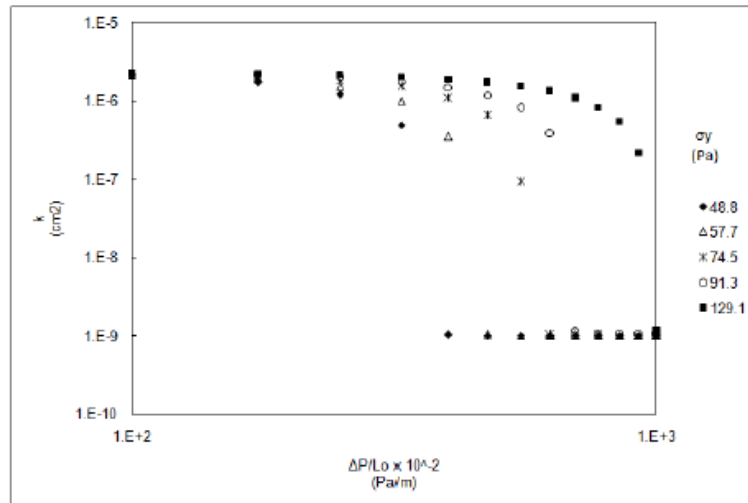


Figura 5.18. Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

En la referencia [27] se presenta una descripción teórica, basada en simulaciones tridimensionales de materiales no newtonianos a través de un medio poroso desordenado, usando como modelo reológico la ecuación de Herschel-Bulkley. Los resultados que se presentan en esta referencia muestran un máximo en las curvas de permeabilidad contra número de Reynolds para varios esfuerzos de cedencia, y el máximo se desplaza a Reynolds mayores al aumentar el esfuerzo de cedencia.

Estos resultados también se predicen utilizando el modelo BMP (aquí se grafica permeabilidad contra velocidad) en las figuras 5.19 y 5.20. En la figura 5.19 se usaron capilares rectos ( $D_t = 1$ ); para esfuerzos de cedencia pequeños se presenta el desplazamiento del máximo de la permeabilidad, tal y como se presenta en [27], y para esfuerzos mayores se predice que la permeabilidad aumenta monótonamente.

Al aumentar la tortuosidad de los capilares se obtienen resultados similares como se muestra en la figura 5.20 ( $D_t = 1.15$ ); se presenta el desplazamiento del máximo en la permeabilidad para valores bajos del esfuerzo de cedencia y, a valores altos de este, se predice crecimiento monótono de la permeabilidad.



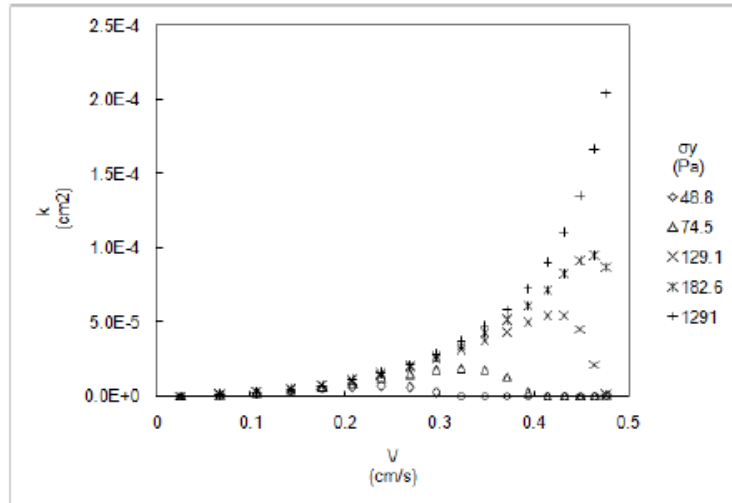


Figura 5.19. Permeabilidad en función de la velocidad para varios valores del esfuerzo de cedencia. Se usaron capilares rectos ( $D_t = 1$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

Se ha encontrado que, para formaciones con permeabilidad alta, se puede relacionar la variación de la permeabilidad con la variación de la porosidad de acuerdo a una ley de potencia ( $k \propto \phi^n$ ). La siguiente ecuación es una correlación sugerida por Lambird ([28]) basada en los valores iniciales de la porosidad y la permeabilidad ( $\phi_i$  y  $k_i$ ) para estimar los correspondientes valores después de un tratamiento ácido.

$$\frac{k}{k_i} = \left( \frac{\phi}{\phi_i} \right)^3$$

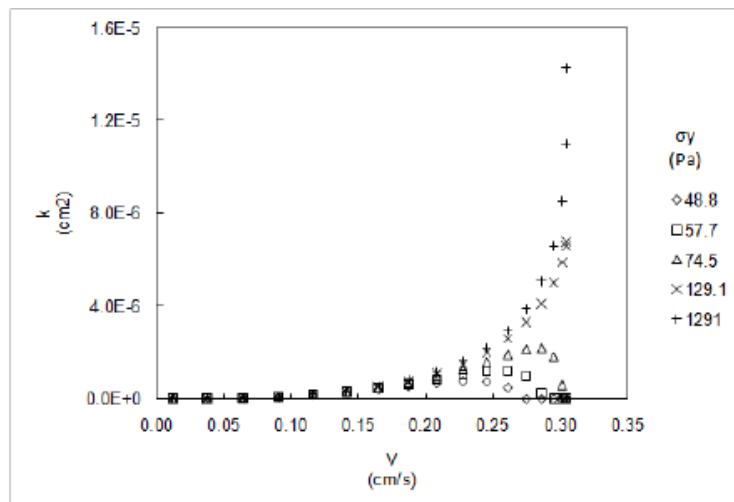


Figura 5.20. Permeabilidad en función de la velocidad para varios valores del esfuerzo de cedencia. Se usaron capilares tortuosos ( $D_t = 1.15$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

En las figuras 5.21 y 5.23 se comparan las predicciones del modelo BMP (líneas) con la correlación de Lambird para varias condiciones iniciales. En la figura 5.21 se puede ver que la concordancia en las predicciones llega hasta porosidades altas para valores de  $D_f$  altos (desde 1.5 hasta 1.9), para valores de  $D_f$  menores el modelo BMP predice un máximo en la permeabilidad; la figura 5.21 muestra que la relación cubica concuerda con las curvas del modelo BMP para valores altos de la dimensión fractal de porosidad (donde no se produce cedencia).

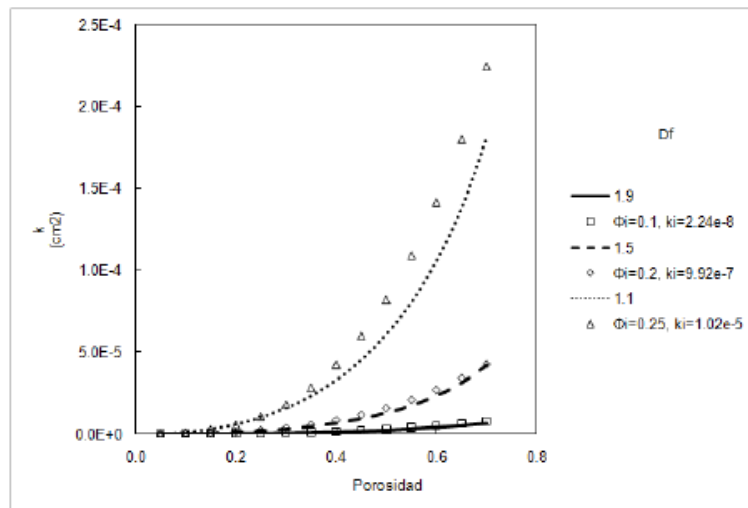


Figura 5.21. Comparación de las predicciones del modelo BMP con la correlación de Lambird con diferentes condiciones iniciales para varios valores de la dimensión fractal de porosidad ( $D_f$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

De manera análoga, en la figura 5.22 se ve la concordancia de las predicciones para valores altos de la dimensión de fractal tortuosidad, siendo el máximo en la permeabilidad, debido a la cedencia que predice el modelo BMP, la razón de las discrepancias. Finalmente, la figura 5.23 muestra que, para varios valores del esfuerzo de cedencia, hay equivalencia entre ambas predicciones para valores altos de porosidad, lo cual muestra la relación existente entre las condiciones iniciales para esfuerzos de cedencia bajos hasta el punto de cedencia.

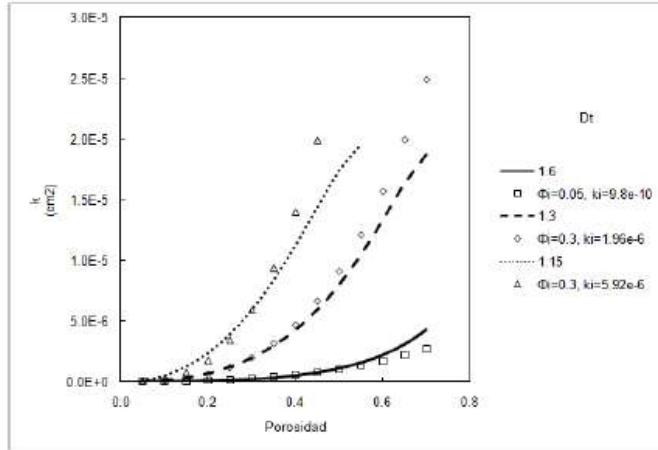


Figura 5.22. Comparación de las predicciones del modelo BMP con la correlación de Lambird con diferentes condiciones iniciales para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

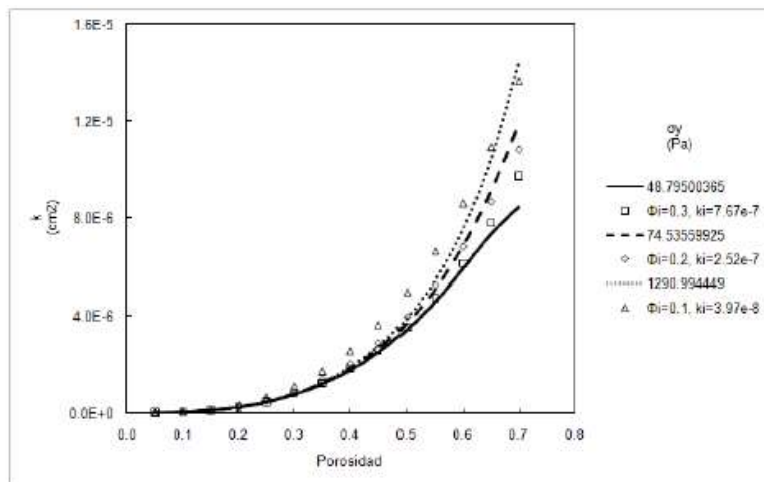


Figura 5.23. Comparación de las predicciones del modelo BMP con la correlación de Lambird con diferentes condiciones iniciales para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) (los datos usados están en el apéndice A).

## CONCLUSIONES

En este trabajo se usó el modelo BMP para desarrollar un modelo fractal de la permeabilidad de medios porosos. En estado estacionario, el comportamiento reológico predicho por el modelo BMP incluye dos zonas de viscosidad constante, una a bajas rapidezces de deformación y otra a altas, una región de transición a rapidezces de deformación intermedias y esfuerzos de cedencia (reales y aparentes). Las predicciones de la permeabilidad en función de los parámetros microestructurales del medio poroso (la distribución de tamaño de poros y las dimensiones fractales de porosidad y tortuosidad), de las propiedades macroscópicas del medio poroso (porosidad), las funciones materiales del fluido (esfuerzo de cedencia) y el gradiente de presión aplicado concuerdan con datos experimentales presentados en la literatura para fluidos con cedencia, con descripciones previas para fluidos newtonianos generalizados (Ley de potencia, Carreau-Yasuda, Ellis, Bingham y Herschel-Bulkley) y con correlaciones usadas a nivel industrial (Lambird).

Los resultados muestran una fuerte influencia del esfuerzo de cedencia del fluido sobre el comportamiento de la permeabilidad; por esta razón la expresión obtenida para la permeabilidad resulta de utilidad en cálculos relacionados con procedimientos de fracturamiento de roca (en estos se utilizan materiales como espumas, surfactantes y geles) y en el análisis de curvas de presión puesto que el dato necesario es el gradiente de presión aplicado además de la descripción reológica del fluido y las características del medio poroso.

## APÉNDICE.

### Apéndice A. Tablas de datos por figura

En todas las tablas, los parámetros del modelo BMP fueron ajustados a los parámetros de otros modelos.

Tabla A.1: Datos usados en la figura 6.1. Los parámetros del modelo de Ellis y del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Modelo	Ellis	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\sigma_{\frac{1}{2}}$	$0.719 Pa$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$\mu_0$	$4.35 Pa - s$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\alpha$	2.47	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$			$D_f$	1.79
				$D_t$	1.42

Tabla A.2: Datos usados en la figura 6.2. Los parámetros del modelo de Carreau-Yasuda y la porosidad fueron tomados de [6], el resto de los parámetros del medio poroso se estimaron con el método presentado en [19]:

Modelo	BMP	Carreau	Yasuda	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.7 Pa^{-1} s^{-1}$	$\eta_0$	$1 Pa - s$	$\phi$	0.4
$\varphi_\infty$	$1.4 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$\eta_\infty$	$0 Pa - s$	$r_{max}$	$2.89 \times 10^{-1} m$
$k_0 \lambda$	$9 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\dot{\gamma}_0$	$1 s^{-1}$	$r_{min}$	$1.3 \times 10^{-2} m$
$\sigma_y$	$89.1 Pa$	$n$	0.2	$D_f$	1.30
		$a_c$	2	$D_t$	1.10

Tabla A.3: Datos usados en la figura 6.3. Los parámetros del modelo de Herschel-Bulkley y la porosidad fueron tomados de [5] y los parámetros del medio poroso se estimaron con el método presentado en [19]:

Modelo	BMP	Herschel	Bulkley	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$10Pa^{-1}s^{-1}$	$C$	$0.009Pa - s^n$	$\phi$	0.42
$\varphi_\infty$	$4.5 \times 10^{18}Pa^{-1}s^{-1}$	$n$	0.66	$r_{max}$	$1.2 \times 10^{-6}m$
$k_0\lambda$	$5.56 \times 10^{-16}s - Pa^{-1}$	$\sigma_y$	$0.018Pa$	$r_{min}$	$5.4 \times 10^{-8}m$
$\sigma_y$	$0.02Pa$	$n$	0.2	$D_f$	1.57
				$D_t$	1.16

Tabla A.4: Datos usados en la figura 6.3. Los parámetros del modelo de Herschel-Bulkley y la porosidad fueron tomados de [5] y los parámetros del medio poroso se estimaron con el método presentado en [19]:

Modelo	BMP	Herschel	Bulkley	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$10Pa^{-1}s^{-1}$	$C$	$0.021Pa - s^n$	$\phi$	0.42
$\varphi_\infty$	$6.5 \times 10^{19}Pa^{-1}s^{-1}$	$n$	0.63	$r_{max}$	$1.6 \times 10^{-6}m$
$k_0\lambda$	$2.73 \times 10^{-18}s - Pa^{-1}$	$\sigma_y$	$0.072Pa$	$r_{min}$	$7.3 \times 10^{-8}m$
$\sigma_y$	$0.075Pa$	$n$	0.2	$D_f$	1.85
				$D_t$	1.16

Tabla A.5: Datos usados en la figura 6.4. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278Pa^{-1}s^{-1}$	$\phi$	0.423
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4}m$
		$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5}m$
		$D_f$	1.79
		$D_t$	1.42

Tabla A.6: Datos usados en la figura 6.5. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5Pa^{-1}s^{-1}$	$\phi$	0.423
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4}m$
$\sigma_y$	$74.5Pa$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5}m$
		$D_f$	1.79
		$D_t$	1.42

Tabla A.7: Datos usados en la figura 6.6. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_t$	1.42
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$		
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.8: Datos usados en la figura 6.7. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_f$	1.79
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_t$	1.42

Tabla A.9: Datos usados en la figura 6.8. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_f$	1.79

Tabla A.10: Datos usados en la figura 6.9. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_t$	1.42

Tabla A.11: Datos usados en la figura 6.10. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$		
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.12: Datos usados en la figura 6.11. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.42
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.13: Datos usados en la figura 6.12. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_t$	1.42
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$		
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.14: Datos usados en la figura 6.13. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$		
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		



Tabla A.15: Datos usados en la figura 6.14. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.15
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.16: Datos usados en la figura 6.15. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_f$	1.79
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_t$	1.42

Tabla A.17: Datos usados en la figura 6.16. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_f$	1.79

Tabla A.18: Datos usados en la figura 6.17. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_t$	1.42
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$		
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.19: Datos usados en la figura 6.18. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
		$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
		$D_f$	1.79
		$D_t$	1.42

Tabla A.20: Datos usados en la figura 6.19. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.00
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.21: Datos usados en la figura 6.20. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.15
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.22: Datos usados en la figura 6.21. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_t$	1.42
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$		
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.23: Datos usados en la figura 6.22. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$		
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.24: Datos usados en la figura 6.23. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]:

Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.42
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

## Apéndice B. Modelo de Capilares

Como se mencionó en el capítulo 1 es posible obtener una expresión sencilla que permita calcular la permeabilidad si se considera al medio poroso como un arreglo de capilares rectos del mismo radio y que el fluido es newtoniano.

Primero hay que considerar el caso de una celda con un solo capilar como se muestra en la figura B.1a.

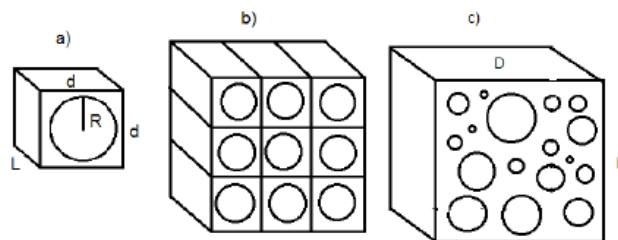


Figura B.1: Modelo de capilares cilíndricos para un medio poroso, a)Celda unitaria con un solo capilar, b)Celdas formada por un conjunto de capilares del mismo radio y c)Celda formada por un conjunto de capilares de radios diferentes

En este caso el flujo a través del capilar cilíndrico de radio R se puede calcular con la ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$q = \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu}$$

**(B.1)**

Al dividir el flujo entre el área transversal de la celda ( $d^2$ ) se obtiene la velocidad promedio, esta es igualada a la ecuación de Darcy para obtener la relación para la permeabilidad de este sistema:

$$\frac{\Delta p k}{L \mu} = \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu d^2}$$

$$k = \frac{\pi R^4}{8d^2}$$

**(B.2)**

Ahora se define la porosidad como el volumen del capilar ( $V_c$ ) entre el volumen total de la celda ( $V_T$ ):

$$\phi = \frac{V_c}{V_T} = \frac{\pi R^2 L}{d^2 L} = \frac{\pi R^2}{d^2}$$

**(B.3)**

Sustituyendo este resultado en la ecuación B.2 se recupera la ecuación 1.2:

$$k = \frac{\phi}{8} R^2$$

**(B.4)**

El procedimiento es análogo para calcular la permeabilidad de una celda formada por un conjunto de capilares del mismo radio (figura B.1b). Primero se calcula el flujo a través de la celda ( $Q$ ) sumando la contribución de cada capilar; si se tienen  $n$  capilares el flujo se puede obtener a partir de la ecuación B.1 de la siguiente manera:

$$Q = nq = n \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu}$$

**(B.5)**

Para obtener la velocidad promedio se divide el flujo total entre el área transversal total de la celda ( $n d^2$ ); finalmente, se compara este resultado con la ecuación de Darcy para obtener la permeabilidad de la celda (la porosidad se define de manera análoga al caso de un capilar obteniendo el mismo resultado).

$$\frac{\Delta p k}{L \mu} = \frac{\Delta p n \pi R^4}{L n d^2 8\mu} = \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu d^2}$$

$$k = \frac{\pi R^4}{8 d^2} = \frac{\phi}{8} R^2$$

**(B.6)**

Esta relación para la permeabilidad es igual a la que se obtuvo para un solo capilar (B.2). Así, si se considera que el medio poroso está formado por capilares rectos de un mismo diámetro la permeabilidad es independiente del número de capilares.

Finalmente, para calcular la permeabilidad de una celda formada por varios capilares de radios diferentes (B.1c) se debe calcular el flujo a través de la celda ( $Q$ ) sumando el flujo de cada capilar ( $q_i$ ) en toda la distribución de radios ( $dN_i$ ):

$$Q = \int_{R_{min}}^{R_{max}} q_i dN_i = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi}{8\mu} \int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^4 dN_i$$

**(B.7)**

La velocidad promedio se obtiene dividiendo el flujo total entre el área transversal de la celda ( $D^2$ ) y, al comparar con la ecuación de Darcy, se obtiene la siguiente expresión para la permeabilidad:

$$k = \frac{\pi}{8D^2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^4 dN_i;$$

**(B.8)**

La porosidad se define como el volumen de los capilares entre el volumen de la celda, en este caso:

$$\phi = \frac{V_c}{V_T} = \frac{\int_{R_{min}}^{R_{max}} \pi L R_i^2 dN_i}{D^2 L} = \frac{\pi}{D^2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^2 dN_i.$$

**(B.9)**

Sustituyendo este resultado en la ecuación B.8 se obtiene:

$$k = \frac{\phi}{8} \frac{\int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^4 dN_i}{\int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^2 dN_i}$$

**(B.10)**

Estas relaciones son equivalentes a las ecuaciones presentadas por Denys ([1]) para la permeabilidad usando modelos capilares.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. F. J. Denys, "Flow of polymer solutions through porous media", Tesis doctoral, Delft University Press, Países Bajos, 2003.
- [2] P. M. Adler, "Porous media: Geometry and transports", Butterworth-Heinemann, Estados Unidos de América, 1992.
- [3] T. Sochi, "Flow of non-Newtonian fluids in porous media", J. of Polymer Science, 48 (2010) 2437-2466.
- [4] T. Sochi, "Modeling the flow of Bautista-Manero fluid in porous media", Int. J. Of Heat and Fluid Flow, 30 (2009) 1202-1217.
- [5] T. Sochi, "Pore-scale modeling of non-Newtonian fluids in porous media", Tesis doctoral, Imperial College, Inglaterra, 2007.
- [6] L. Orgéas, C. Geindreau, J. -L. Auriault, J. -F. Bloch, "Upscaling the flow of generalised Newtonian fluids through anisotropic porous media", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 145 (2007) 15-29.
- [7] F. Mainardi, "Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity", Imperial College Press, Inglaterra, 2010.
- [8] V. E. Tarasov, "Fractional dynamics", Springer, Alemania, 2010.
- [9] B. J. West, M. Bologna, P. Grigolini, "Physics of fractal operators", Springer, Estados Unidos de América, 2003.
- [10] R. Hilfer, "Applications of fractional calculus in physics", World Scientific, Inglaterra, 2000.

[11] K. B. Oldham, J. Spanier, "The fractional calculus", Academic Press, Estados Unidos de América, 1974.

[12] I. Podlubny, "Fractional differential equations", Academic Press, Estados Unidos de América, 1999.

[13] M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen "Fractal geometry, complex dimension and zeta functions", Springer, Estados Unidos de América, 2006.

[14] J. S. Wu, B. M. Yu, "A fractal resistance model for flow through porous media", Int. J. Heat Mass Transfer, 50 (2007) 3925-3932.

[15] B. M. Yu, "Fractal character for tortuous streamtubes in porous media", Chin. Phys. Lett., 22 (2005) 158-160.

[16] B. M. Yu, P. Cheng, "A fractal model for permeability of bi-dispersed porous media", Int. J. Heat Mass Transfer, 45 (2002) 2983-2993.

[17] B. Zhang, B. Yu, H. Wang, M. Yun, "A fractal analysis of permeability for power-law fluids in porous media", Fractals, 14 (2006) 171-177.

[18] M. Yun, B. Yu, J. Cai, "A fractal model for the starting pressure gradient for Bingham fluids in porous media", Int. J. Heat Mass Transfer, 51 (2008) 1402-1408.

[19] Y. Li, B. Yu, J. Chen, C. Wang, "Analysis of Permeability for Ellis Fluid Flow in Fractal Porous Media", Chem. Eng. Comm., 195 (2008) 1240-1256.

[20] A. J. Katz, A. H. Thompson, "Fractal sandstones pores: implications for conductivity and pore formation". Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 1325-1328.



[21] G. Astarita, G. Marrucci, "Principles of non-newtonian fluid mechanics", McGraw-Hill, Inglaterra, 1974.

[22] R. G. Larson, "Constitutive equations for polymer melts and solutions", Butterworth, Estados Unidos de América, 1988.

[23] C. W. Macosko, "Rheology: Principles, measurements and applications", Wiley-VCH, Estados Unidos de América, 1994.

[24] F. Bautista, J.M. Santos, J.E. Puig, O. Manero, "Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model", J. Non-Newt. Fluid Mech., 80 (1999) 93-113.

[25] A. G. Fredrickson, "A model for thixotropy of suspensions", AIChE Journal, 16 (1970) 436-441.

[26] H. C. Park, "The flow of non-Newtonian fluids through porous media", Tesis doctoral, Michigan State University, Estados Unidos de América, 1972.

[27] A. F. Morais, H. Seybold, H. J. Herrmann, J. S. Andrade, "Non-Newtonian fluid flow through three-dimensional disordered porous Media" Phys. Rev. Lett., 103 (2009) 194502.

[28] J. C. Labrid, "Thermodynamic and kinetic aspects of argillaceous sandstone acidizing", SPE Journal, Paper SPE 5165 (1975) 117-128.

[29] J. M. Dealy, "Official nomenclature for material functions describing the response of a viscoelastic fluid to various shearing and extensional deformations" J. Rheol., 39 (1995) 253-265.