



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CIUDAD MADERO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA



"POR MI PATRIA Y POR MI BIEN"

TESIS

**MODELADO MATEMÁTICO DE LA DINÁMICA DE TRENES MECÁNICOS
DE SISTEMAS DE GENERACIÓN DE ENERGÍA EOLO-ELÉCTRICA**

Que para obtener el Grado de
Doctor en Ciencias de la Ingeniería

Presenta

M.I.E. Joel Rodríguez Guillén

D08071120

No. de CVU del CONACyT: 560656

Director de Tesis

Dr. Rubén Salas Cabrera

No. de CVU del CONACyT: 60075

Co-director de Tesis

Dr. Pedro Martín García Vite

No. de CVU del CONACyT: 227310

Ciudad Madero, Tamaulipas, **29/abril/2022**

OFICIO No. : U.058/22
ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE
IMPRESIÓN DE TESIS

C. JOEL RODRÍGUEZ GUILLEN
No. DE CONTROL D08071120
P R E S E N T E

Me es grato comunicarle que después de la revisión realizada por el Jurado designado para su Examen de Grado de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, se acordó autorizar la impresión de su tesis titulada:

“MODELADO MATEMÁTICO DE LA DINÁMICA DE TRENES MECÁNICOS DE SISTEMAS DE GENERACIÓN DE ENERGÍA EOLO-ELÉCTRICA”

El Jurado está integrado por los siguientes catedráticos:

PRESIDENTE:	DR.	RUBÉN SALAS CABRERA
SECRETARIO:	DR.	PEDRO MARTÍN GARCÍA VITE
PRIMER VOCAL:	DRA.	GUADALUPE CASTILLA VALDEZ
SEGUNDO VOCAL:	DRA.	MARÍA LUCILA MORALES RODRÍGUEZ
TERCER VOCAL:	DRA.	SILVIA BEATRIZ BRACHETTI SIBAJA
SUPLENTE:	DR.	LUIS FORTINO CISNEROS SINENCIO
DIRECTOR DE TESIS:	DR.	RUBÉN SALAS CABRERA
CO-DIRECTOR:	DR.	PEDRO MARTÍN GARCÍA VITE

Es muy satisfactorio para la División de Estudios de Posgrado e Investigación compartir con usted el logro de esta meta. Espero que continúe con éxito su desarrollo profesional y dedique su experiencia e inteligencia en beneficio de México.

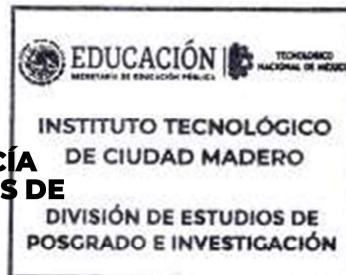
ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®

"Por mi patria y por mi bien"®



MARCO ANTONIO CORONEL GARCÍA
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO E INVESTIGACIÓN



c.c.p.- Archivo
MACG



Av. 1° de Mayo y Sor Juana I. de la Cruz S/N Col. Los Mangos C.P. 89440 Cd. Madero, Tam.

Tel. 01 (833) 357 48 20, ext. 3110, e-mail: depi_cdmadero@tecnm.mx

tecnm.mx | cdmadero.tecnm.mx



Dedicatoria

A mis padres Juan y Olivia por siempre apoyarme y darme aliento.

A mi profesor de primaria Raymundo Aldape Garfias y al Prof. Miguel Delgado Ordaz, quien en ese entonces fuera director de la Esc. Prim. Fed. Margarita Maza de Juárez, por haber impulsado el programa de computación. Todo empezó con una tortuguita en Logo. Muchas gracias de todo corazón.

Al M.C. Marco Antonio, Dra. Verónica, Ing. Ernesto, M.C. Roberto Galindo, M.C. José Luis Becerra, Ing. Nicolás Durón, Edith y a Angie por su amistad, por sus consejos y por todo su apoyo.

A Jessica por compartir conmigo su cosmovisión.

Apocalipsis 7:12

Agradecimientos

A mi director de tesis, el Dr. Rubén Salas Cabrera, por su paciencia, por su apoyo incansable, su dirección y por compartir conmigo sus estructuras argumentales, así como de comunicación clara y objetiva.

A mi co-director de tesis, el Dr. Pedro Martín García Vite, por compartir conmigo su experiencia así como su visión crítica y objetiva.

Al Dr. Luis Fortino Cisneros Sinencio, a la Dra. Margarita García Hernández, a la Dra. Silvia Beatriz Brachetti Sibaja, a la Dra. Guadalupe Castilla Valdez y a la Dra. María Lucila Morales Rodríguez por sus valiosas observaciones, comentarios y sugerencias las cuales fueron de gran valor en el desarrollo de la presente tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado a través de la beca 296997.

Al Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Ciudad Madero por darme la oportunidad de formarme profesionalmente y por brindar la infraestructura para que otras personas puedan tener acceso a la educación a nivel Licenciatura y Posgrado.

Modelado matemático de la dinámica de trenes mecánicos de sistemas de generación de energía eolo-eléctrica

Joel Rodríguez Guillén

Resumen

Los trenes mecánicos de turbinas eólicas exhiben un comportamiento dinámico que es de interés para el estudio de oscilaciones de potencia debidas a disturbios en los sistemas de generación de energía eolo-eléctrica. En los estudios de estabilidad de los sistemas eléctricos de potencia se emplea de forma extendida el sistema por unidad para modelar la dinámica de las máquinas eléctricas que lo componen. En el presente trabajo, se emplea la metodología de grafos de unión para desarrollar modelos genéricos en grafo de unión de trenes mecánicos de turbinas eólicas con parámetros y variables en cantidades físicas reales. Además, dicha metodología se emplea originalmente para obtener modelos en grafo de unión por-unizados resultando en la conversión a pu de los parámetros y variables de los modelos correspondientes en cantidades físicas reales. Para cada caso se obtiene el modelo matemático a partir del modelo en grafo de unión correspondiente. La metodología de los grafos de unión es una metodología formal multi-dominio que hace que se cumpla invariablemente la propiedad de conservación de la energía. Un resultado natural de aplicar dicha metodología es que los modelos dinámicos en por unidad, obtenidos aplicando el procedimiento de conversión propuesto en la presente tesis, son confiables y dimensionalmente homogéneos. La validez del procedimiento de conversión al sistema por unidad se demuestra de forma teórica y experimental. Esta metodología de conversión es usada para abordar la falta de homogeneidad dimensional de algunos modelos del tren mecánico los cuales están siendo empleados en la literatura de la energía eólica.

Mathematical modeling of drive train dynamics on wind energy generation systems

Joel Rodríguez Guillén

Abstract

Wind turbine drive trains exhibit a dynamic behavior that is of interest for the study of power oscillations caused by disturbances to wind energy generation systems. In power system stability studies the per-unit system is broadly used to model the dynamics of the electric machines it is composed of. In this work, the Bond graph methodology is used to develop generic bond graph models for wind turbine drive trains with real physical parameters and variables. Furthermore, this methodology is originally employed to obtain per-unitized bond graph models resulting in the pu conversion of the parameters and variables of the corresponding models with physical real quantities. For each case the mathematical model is derived from the corresponding bond graph model. Bond Graph is a formal multi-domain methodology that strongly enforces the energy conserving property. A natural outcome of applying this methodology is that the per-unit dynamic models, derived using the per-unit conversion procedure proposed in this Thesis, are reliable and dimensionally homogeneous. The validity of the per-unit system conversion procedure is theoretically and experimentally demonstrated. This conversion methodology is utilized to address the lack of dimensional homogeneity in some drive train models that are being used in the wind energy literature.

Índice general

Resumen	vi
Abstract	vii
Índice de tablas	xi
Índice de figuras	xii
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	3
1.2 Hipótesis	5
1.3 Objetivos	5
1.4 Justificación del estudio	6
1.5 Alcances y limitaciones	8
1.6 Organización de la tesis	9
2 Antecedentes	10
2.1 Turbinas eólicas	11
2.1.1 Componentes principales de una turbina eólica	12
2.2 Modelos del tren mecánico de la turbina eólica	15
2.3 Metodología de los grafos de unión	17
2.3.1 Elemento transformador	20
2.4 Estado del arte	21
3 Metodología	24
3.1 Sistema por unidad	25
3.2 Método de conversión a por unidad usando la metodología de los grafos de unión	27

3.2.1	Definición de la ecuación constitutiva del transformador	27
3.2.2	Cantidades base para las variables en ambos lados de un transformador	28
3.2.3	Fuentes y sumideros de esfuerzo y flujo en por unidad	31
3.2.4	Valores base, cantidades equivalentes por unidad y ecuaciones constitutivas equivalentes en por unidad	32
3.2.5	Cambio de base de las cantidades en pu	39
3.3	Interconexión de grafos de unión con diferentes cantidades base	43
4	Equipos y materiales	49
4.1	Material y equipo	50
4.1.1	Software	50
4.1.2	Validación de los modelos matemáticos	50
4.2	Grafo de unión en cantidades reales del modelo del tren mecánico de dos masas	56
4.2.1	Modelo matemático en cantidades reales	58
4.2.2	Datos en cantidades reales	58
4.2.3	Conversión a pu	62
5	Análisis y resultados	68
5.1	Validación de los modelos matemáticos	68
5.2	Grafo de unión en el sistema pu del modelo del tren mecánico de dos masas	73
5.2.1	Modelo matemático en por unidad	74
5.2.2	Datos en por unidad	78
6	Conclusiones y trabajos futuros	83
6.1	Conclusiones	84
6.2	Trabajos futuros	86
6.3	Publicaciones derivadas del presente trabajo	87
	Bibliografía	87
	Anexos	92

A	Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión	93
A.1	Cambio de potencia base	93
A.1.1	Cantidad pu	94
A.1.2	Expresión de cambio de base para \hat{R}	95
A.1.3	Expresión de cambio de base para \hat{I}	96
A.1.4	Expresión de cambio de base para \bar{C} y \hat{C}	97
A.2	Cambio de flujo base	100
A.2.1	Observación	101
A.2.2	Cantidad pu	102
A.2.3	Expresión de cambio de base para \hat{R}	104
A.2.4	Expresión de cambio de base para \hat{I}	105
A.2.5	Expresión de cambio de base para \bar{C} y \hat{C}	106
B	Deducción del valor del módulo del elemento transformador virtual	110

Índice de tablas

Tabla 2.1	Dominios de la energía y sus variables de esfuerzo y flujo correspondientes.	20
Tabla 4.1	Nomenclatura del tren mecánico de dos masas y unidades del SI.	57
Tabla 4.2	Datos del modelo de dos masas en [1].	59
Tabla 4.3	Datos del modelo de dos masas en [2].	60
Tabla 4.4	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 750 kW.	60
Tabla 4.5	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 1.5 MW.	61
Tabla 4.6	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 3 MW.	61
Tabla 4.7	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 5 MW.	62
Tabla 5.1	Datos del modelo de dos masas en [1] convertidos a pu.	79
Tabla 5.2	Datos del modelo de dos masas en [2] convertidos a pu.	79
Tabla 5.3	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 750 kW convertidos a pu.	79
Tabla 5.4	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 1.5 MW convertidos a pu.	80
Tabla 5.5	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 3 MW convertidos a pu.	80
Tabla 5.6	Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 5 MW convertidos a pu.	80

Índice de figuras

Figura 2.1	Componentes principales de una turbina eólica.	14
Figura 2.2	Diagrama esquemático del tren mecánico de una turbina eólica.	16
Figura 2.3	Elemento TF.	21
Figura 3.1	Uso de un elemento TF para realizar el cambio de base.	43
Figura 3.2	Grafo de unión de WJS con lazo de unión con elementos TF.	46
Figura 3.3	Propagación de las cantidades base en un grafo de unión de WJS con lazo de unión con elementos TF.	46
Figura 3.4	Conflicto en la asignación de las cantidades base.	47
Figura 3.5	Resolución del conflicto en la asignación de las cantidades base.	48
Figura 4.1	Diagrama del modelo de dos masas del tren mecánico.	57
Figura 4.2	Grafo de unión del modelo de dos masas del tren mecánico.	58
Figura 4.3	Propagación de las cantidades base. Modelo de dos masas del tren mecánico.	63
Figura 5.1	Grafo de unión en pu del modelo de dos masas del tren mecánico.	73
Figura 5.2	Diagrama de bloques correspondiente al modelo en grafo de unión del tren mecánico de dos masas en pu.	77
Figura 5.3	Simplificación del grafo de unión en pu del modelo de dos masas del tren mecánico.	81
Figura 5.4	Modelo de una masa del tren mecánico.	81
Figura B.1	Elemento TF virtual de módulo 1.	110
Figura B.2	Conversión del grafo de unión mostrado en la Figura B.1 a pu.	111
Figura B.3	Uso de un elemento TF para realizar el cambio de base.	113

Nomenclatura

HSS Eje de Alta Velocidad, *High-Speed Side*

LSS Eje de Baja Velocidad, *Low-Speed Side*

pu por unidad, *per unit*

SI Sistema Internacional de Unidades

Introducción

Conforme incrementa la capacidad instalada de generación a base de energías renovables, ha sido de interés conocer el comportamiento de la respuesta de estas plantas en escenarios con distintos porcentajes de participación [5]. Por mencionar algunos tipos de energías renovables, se tiene la hidráulica, marina, solar y eólica.

En particular, la energía eólica representa una porción cada vez mayor entre las diferentes tecnologías de generación de energía eléctrica [6]; por ejemplo, en México en el año 2019 la Comisión Federal de Electricidad (CFE) reportó un incremento del 3 % en el Indicador de porcentaje de energía proveniente de fuentes limpias [7]. Esto es debido a que la energía eólica presenta ventajas que la hacen una buena opción frente a la energía proveniente de los combustibles fósiles. Algunas ventajas de la energía eólica sobre la energía por combustibles fósiles son que su precio no fluctúa junto con el precio del petróleo o gas [8]; que es un recurso natural cuyo aprovechamiento no genera cantidades importantes de residuos tóxicos; que permite el desarrollo sustentable de las empresas y economías de los países [8]; y que su

precio puede irse reduciendo conforme incrementa la rentabilidad de los proyectos de parques eólicos instalados, por mencionar algunos ejemplos. En el caso de América del Norte, en el año 2016, Estados Unidos de América alcanzó a tener una capacidad instalada de 82 GW, convirtiéndose la energía eólica en la segunda mayor fuente de energía eléctrica, sobrepasando a la energía hidroeléctrica [8]; en el mismo año Canadá consiguió tener una capacidad instalada de aproximadamente 12 GW, en donde cabe notar que una parte de los proyectos pertenece total o parcialmente a comunidades locales, comunidades aborígenes o gobiernos locales, lo cual reporta un desarrollo económico en los lugares o comunidades en donde están instalados [8]; por último, en el caso de México, la capacidad instalada hacia el final del año 2016 era aproximadamente 3.5 GW, la cual se espera que incremente a una tasa de 2 GW por año hasta el año 2023 [8]. Las fuentes de energías de tipo no renovables, como aquellas basadas en combustibles fósiles, están siendo desplazadas por las fuentes de energías renovables, tales como la energía eólica; por lo que los fenómenos que se presentan en los sistemas de generación de energía eolo-eléctrica influyen cada vez en mayor proporción en los indicadores de calidad de la energía eléctrica, como el perfil de voltaje, frecuencia y forma de onda.

Se han realizado numerosos esfuerzos a fin de desarrollar modelos matemáticos que capturen las características de la dinámica de las turbinas eólicas, produciendo modelos de distintos órdenes y formulados asumiendo diversos supuestos.

Lo cual lleva a las siguientes preguntas:

¿Qué nivel de validez tienen los modelos matemáticos de las turbinas eólicas? ¿Cuál es el orden óptimo de estos modelos, que asegure resultados satisfactorios? ¿Qué procedimientos pueden aplicarse a dichos modelos con el fin de simplificarlos? ¿Cómo se puede asegurar la compatibilidad de los modelos de las turbinas con aquellos de los lazos de control y maquinaria eléctrica?

1.1. Planteamiento del problema

En los sistemas de generación de energía es importante conocer su comportamiento ante distintos tipos de disturbios, por ejemplo su respuesta ante fallas del equipo eléctrico, estabilidad de estado estable y transitorio. Un caso típico es conocer, durante el proceso de restauración de un sistema eléctrico, el desempeño transitorio de una central eléctrica tras su reconexión, arranque de emergencia, operación en isla y resincronización, por mencionar algunos. Un comportamiento que es de interés es la respuesta transitoria en los puntos de conexión a la red eléctrica de los generadores [9].

Periódicamente, se obtienen resultados a partir de la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales algebraicos, los cuales están sujetos a distintos escenarios; con el fin de investigar la confiabilidad y seguridad de la red eléctrica, así como la calidad de la energía producida por los diversos sistemas de generación.

Recientemente, con la mayor penetración de las fuentes de energías renovables en el sistema eléctrico, se ha vuelto preponderante modelar correctamente estos sistemas de generación puesto que esto le permite a los operadores de la red eléctrica diseñar esquemas de protección los cuales permitan disminuir el impacto de la salida de operación de diversas centrales de generación [9].

En particular, con relación a los sistemas de generación de energía eoloeléctrica, se han desarrollado diversos modelos del tren mecánico de engranajes de las turbinas eólicas; esto con el propósito de investigar la dinámica de dicho componente; a fin de poder detectar posibles modos de vibración, mantenimiento necesario e inclusive fallos durante la operación del aerogenerador. Tal es el caso de los modelos encontrados en la norma IEC 61400-27-1 [10], en donde se definen los diagramas de bloques que modelan el tren mecánico como un sistema de una o dos masas giratorias. Adicionalmente, en la literatura se encuentran documentados un buen número de modelos matemáticos de diverso orden los cuales buscan capturar la dinámica de la turbina, así como su influencia en la maquinaria eléctrica.

Una principal dificultad en la aplicación de estos modelos del tren de mecánico es determinar bajo qué condiciones son compatibles con los modelos de otra maquinaria y equipo del sistema de generación. Adicionalmente, los modelos desarrollados por diversos autores no obedecen un procedimiento de conversión a por unidad estandarizado, lo que resulta en que estos modelos de simulación sean susceptibles a contener errores o que puedan llegar a ser malinterpretados. Esto sin duda permite cuestionar la validez de los resultados de la simulación de diversos parques eólicos. Bajo algunas circunstancias podría ser necesario conocer con mayor detalle la dinámica de elementos del tren mecánico como lo es la caja de engranajes, que típicamente se conceptualiza como un elemento que meramente multiplica la velocidad, sin ningún tipo de proceso de almacenamiento de energía.

La principal motivación es discutir la aplicabilidad de los modelos, el desarrollo de procedimientos estándar de obtención, así como posibles estrategias de simplificación de los modelos matemáticos de los trenes mecánicos de las turbinas eólicas usando la metodología de conversión a por unidad; esta simplificación podría referirse a la reducción de orden del modelo matemático de una turbina, a la minimización del número de parámetros y también a la agregación de modelos de turbinas eólicas para representar una granja eólica.

Dicha simplificación es deseable dados los requisitos de eficiencia computacional y aplicabilidad de los resultados, pues permite la ejecución en tiempo real de los algoritmos, lo cual a su vez posibilita utilizar pasos de integración más pequeños [11]. Adicionalmente, se puede lograr disminuir la complejidad en la representación diagramática y matemática de los diferentes conceptos de turbinas eólicas.

1.2. Hipótesis

- Es posible establecer un proceso generalizado y unívoco de conversión a por unidad que pueda ser aplicado a los modelos de los trenes mecánicos de las turbinas eólicas.
- Los modelos del sistema del tren mecánico de la turbina eólica pueden ser desarrollados tanto en cantidades reales como en pu mediante la metodología de los grafos de unión, pueden ser interconectados con los de otras partes del sistema de generación y son aptos para su aplicación en la simulación de un sistema de generación eolo-eléctrica.
- Existe un orden óptimo para los modelos matemáticos de las turbinas eólicas con el cual se captura la dinámica requerida para llevar a cabo las diversas investigaciones de estabilidad de los sistemas de generación de energía eolo-eléctrica de interés.

1.3. Objetivos

Objetivo general: Desarrollar modelos matemáticos genéricos que describan el comportamiento dinámico de trenes mecánicos de turbinas de eje horizontal en sistemas de generación de energía eolo-eléctrica, para que por medio de su estudio y análisis se puedan desarrollar mejores técnicas de supervisión y control que permitan aumentar la vida útil, así como la confiabilidad y seguridad de la capacidad instalada de estos sistemas de generación.

Objetivos específicos:

- Identificar mediante una revisión bibliográfica los modelos matemáticos estándar usados a nivel internacional, para la simulación de trenes mecánicos de sistemas de generación de energía eolo-eléctrica.

- Identificar mediante una revisión bibliográfica los principales tipos de sistemas de generación de energía eolo-eléctrica usados en la literatura, así como sus componentes, para el posterior desarrollo de modelos dinámicos para la simulación de sistemas de trenes mecánicos.
- Determinar una metodología para la conversión de los modelos matemáticos de sistemas de trenes mecánicos en pu por unidad; la cual sea compatible con los parámetros en pu reportados en la bibliografía, para su uso en análisis de eigenvalores, estudios de estabilidad de pequeña señal y simulaciones transitorias.
- Determinación de un procedimiento compatible con la metodología de conversión a pu por unidad con el fin de estandarizar las cantidades en pu de diversos aerogeneradores de diversas capacidades.
- Identificar posibles estrategias de reducción de orden de los modelos de trenes mecánicos, para incrementar la eficiencia en el tiempo de simulación de estos.
- Aplicar las estrategias de reducción de orden identificadas, con el fin de producir modelos dinámicos de trenes mecánicos que puedan ser implementados en plataformas de tiempo real.

1.4. Justificación del estudio

Las fuentes de generación basadas en energías renovables contribuyen al desarrollo económico sustentable de las comunidades en donde se encuentran instalados proyectos como granjas eólicas y de paneles solares.

Es bien conocido que los pares de torsión y vibraciones periódicas en los sistemas mecánicos tienden a disminuir la vida útil de los equipos. En el caso de los parques eólicos, los cuales normalmente tienen una gran cantidad de turbinas, sería conveniente minimizar los costos de mantenimiento, que alargan el tiempo de recuperación de la inversión y por lo tanto aumentan la incertidumbre acerca de la viabilidad de este tipo de proyectos. Contar con una metodología para el modelado del tren mecánico

de la turbina eólica ofrece ventajas tales como una mayor comprensión del funcionamiento del sistema, mejor aprovechamiento de los recursos al enfocar el diseño en aquellas partes donde se observa que el sistema está sujeto a condiciones, tales como altos niveles de par mecánico, vibración, desgaste, entre otros. Dichas condiciones demandan un nivel mayor de mantenimiento.

El desarrollo de modelos y parámetros para la simulación de sistemas de generación de energía eólica participa en asegurar aspectos como la confiabilidad, seguridad y continuidad en el suministro, entre otros aspectos de la calidad de la energía. Por ello, es crucial disponer de modelos matemáticos de dominio público que estén validados y que sean útiles para realizar estudios de simulación y control de plantas de generación de energía eólica que proporcionen resultados comparables con los obtenidos por medio de pruebas de laboratorio.

El desarrollar un procedimiento estandarizado de conversión al sistema por unidad permite desarrollar estrategias didácticas y procedimientos claros que le permitan a los ingenieros e investigadores tener certeza de la validez de los resultados de simulaciones obtenidos en diversas plataformas computacionales.

Un problema en los estudios de las turbinas eolo-eléctricas es la falta de información detallada de los modelos matemáticos o computacionales, así como de sus parámetros tanto en cantidades reales como en por unidad. Es decir, estos modelos típicamente son provistos por los fabricantes en un acuerdo de confidencialidad, lo cual dificulta llevar a cabo estudios tales como los de bifurcación en los sistemas de transmisión mecánicos de las turbinas. Así, este proyecto está enfocado en establecer un procedimiento estandarizado el cual permita trabajar con estos sistemas y asimismo desarrollar modelos en cantidades reales, así como su conversión a por unidad, los cuales sean de dominio público y puedan hacerse disponibles para futuras referencias.

1.5. Alcances y limitaciones

Alcances

- Los modelos que se derivan consisten en aquellos para turbinas eólicas de velocidad constante, velocidad variable limitada y totalmente variable; los cuales tienen cajas de engranajes multi-etapa, una etapa o ninguna, tratándose de sistemas de generación de impulsión directa.
- La presente investigación abarca únicamente la caracterización del comportamiento en estado estacionario y en estado transitorio de los sistemas a estudiar.
- Este trabajo aporta una metodología para el modelado de turbinas eólicas y es una contribución a los modelos ya existentes, los cuales pueden ser usados para conducir estudios de estabilidad de sistemas de generación de energía eolo-eléctrica.
- Los modelos obtenidos deben ser lo suficientemente adecuados como para modelar el comportamiento de las turbinas eólicas para un conjunto determinado de disturbios. La validación de los resultados del análisis de los modelos de los sistemas será efectuada utilizando máquinas eléctricas reales en conjunto con un sistema digital, operando en tiempo real que simule el comportamiento dinámico de los equipos mecánicos que no estén disponibles en el laboratorio cuya señal de salida sea aplicada por medio de un equipo de acoplamiento, de tal manera que el modelo dinámico del sistema electromecánico del laboratorio tenga la misma estructura que el modelo dinámico de los sistemas de generación de energía eolo-eléctrica a estudiar.
- Se busca disponer de modelos matemáticos que usen la menor cantidad posible de parámetros.

Limitaciones

- Los valores numéricos de los parámetros que serán variados durante los análisis solo pueden tomar magnitudes reales que se encuentren dentro de intervalos factibles.

- Los resultados teóricos podrán ser validados únicamente con las máquinas eléctricas disponibles en el laboratorio.
- La presente investigación se limitará a describir los fenómenos de bifurcación en los sistemas indicados y dará una pauta para el diseño o adecuación de los sistemas de control de los aerogeneradores a fin de incrementar su margen de estabilidad.

1.6. Organización de la tesis

La presente tesis está organizada como se describe a continuación. En el Capítulo 2, Antecedentes, se describen los componentes principales de las turbinas eólicas y la metodología de los grafos de unión. En el Capítulo 3, Metodología, se muestra el proceso propuesto de conversión al sistema por unidad empleando la metodología de los grafos de unión. En el Capítulo 4, Equipos y materiales, se describen los modelos en grafo de unión y en espacio de estado, así como conjuntos de parámetros reales de los componentes del tren mecánico de las turbinas eólicas de los sistemas de generación eólica, detallando el procedimiento sistemático para su conversión al sistema pu. En el Capítulo 5, Análisis y resultados, se presentan los resultados teóricos y experimentales de aplicar la metodología propuesta. En el Capítulo 6, Conclusiones y trabajos futuros, se describen de forma general los resultados obtenidos y se realizan recomendaciones acerca de trabajos futuros. La Bibliografía y los Anexos se incluyen en la parte final de esta tesis.

Antecedentes

En este capítulo se hace un repaso de los diferentes tipos de turbinas eólicas, sus componentes, así como de la metodología de los grafos de unión, se considera su aplicabilidad en la obtención de ecuaciones de estado de sistemas físicos en pu. Finalmente, se hace una revisión del estado del arte del modelado de los trenes mecánicos de turbinas eólicas de eje horizontal.

2.1. Turbinas eólicas

Con el surgimiento de las nuevas tecnologías que buscan aprovechar las energías renovables se ha vuelto más común la puesta en marcha de proyectos de parques eólicos, buscando reducir el impacto ecológico de otras fuentes de energía como las que usan combustibles fósiles, minerales y energía nuclear. Los principales tipos de turbinas eólicas son [12]:

- Eje horizontal.
- Eje vertical.

Las turbinas de eje horizontal usan la fuerza de empuje para hacerla girar, en el caso de las de eje vertical se emplean combinaciones de fuerzas de empuje y de arrastre [12].

En el caso de las turbinas de eje horizontal se tienen aquellos tipos que operan a altas y bajas velocidades en configuraciones como [12]:

- Barlovento.
- Sotavento.
- Pasivo.

Algunos de los tipos de turbinas de eje vertical son:

- Darrieus.
- Darrieus H.

- De Copa.
- Savonius.

2.1.1. Componentes principales de una turbina eólica

Las turbinas eólicas de eje horizontal con grandes valores de velocidad específica (*Tip-Speed Ratio*, TSR por sus siglas en inglés) presentan ventajas sobre las de eje vertical en su operación para un amplio rango de velocidades de viento, comportamiento de arranque y control [12]. Este es el tipo más usado y producido a nivel mundial [12, 13]. Dependiendo del tipo de turbina, sus componentes podrían variar. A continuación se definen sus elementos principales.

- Góndola. Sostiene los componentes del sistema mecánico del aerogenerador así como componentes de sistemas auxiliares [13].
- Rotor. Transforma la energía del viento en energía mecánica.
- Tren mecánico. Transmite la energía mecánica rotacional del rotor al generador.
- Generador. Transforma la energía mecánica en energía eléctrica.
- Torre. Soporta la góndola, el generador y el rotor. Por su altura, permite capturar una mayor cantidad de energía eólica debido a la mayor velocidad del viento [13, 14].

El rotor está compuesto por los siguientes elementos:

- Buje. Une las paletas con el eje de baja velocidad.
- Paletas. Capturan la energía cinética del viento, usando la fuerza de empuje para transmitir par mecánico al buje.

El tren mecánico de potencia se compone de las siguientes partes:

- Eje de baja velocidad. Conecta el buje al multiplicador para transmitir la energía captada por las paletas.
- Caja de engranajes. Aumenta la velocidad a la que gira el eje del rotor.
- Eje de alta velocidad. Aplica el par motor al generador.

En algunos de los aerogeneradores tipo IV el par mecánico del buje se transmite directamente al generador. A estos sistemas se les llama de transmisión directa [15].

Algunos de los componentes de sistemas auxiliares de la turbina son:

- Veleta. Mide la dirección del viento.
- Anemómetro. Mide la velocidad del viento.
- Sistema de orientación. Vigila la dirección del viento y orienta el rotor a fin de captar la máxima velocidad del viento.
- Freno de emergencia. Mecanismo de ajuste del ángulo de las paletas.

En la Figura 2.1 se muestra una vista general de los componentes principales de una turbina eólica.

Cajas de engranajes

Las cajas de engranajes también llamadas cajas multiplicadoras de velocidad son usadas para incrementar la velocidad de rotación del eje de baja velocidad por un factor llamado relación de la caja (*gearbox*

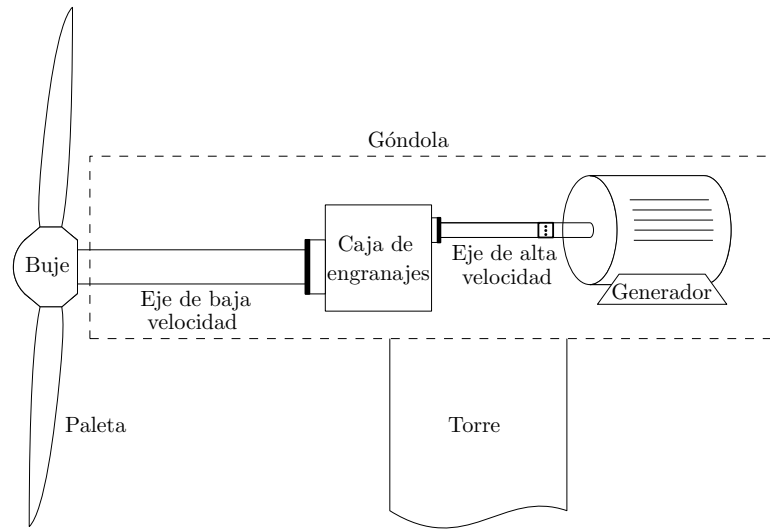


Figura 2.1: Componentes principales de una turbina eólica.

ratio, por sus siglas en inglés) [16]. Típicamente la velocidad del eje de alta velocidad se asocia con la del generador y la del eje de baja velocidad se asocia con la del rotor de la turbina. Así, la velocidad del generador se puede relacionar con la de la turbina mediante la ecuación:

$$\omega_g = N_{GB} \omega_t \quad (2.1.1)$$

Donde ω_g y ω_t son la velocidad angular del generador y de la turbina, respectivamente. N_{GB} es la relación de multiplicación de velocidad de la caja de engranajes, también llamada caja multiplicadora de velocidad puesto que $N_{GB} \gg 1$. N_{GB} puede tomar valores pequeños desde 26.66 hasta aproximadamente 100 [12, 15]

Los trenes de engranajes se pueden clasificar de una sola etapa o de etapas múltiples. En las turbinas eólicas se usan los trenes de engranajes de sistema planetario o PGTs (*planetary gear trains*, por sus siglas en inglés) [15, 17].

Las cajas de engranajes pueden considerarse como una caja negra [17], dentro de esta se encuentran los engranes los cuales por su modo de operación realizan la función de multiplicar la velocidad y dividir la potencia mecánica rotacional [17].

2.2. Modelos del tren mecánico de la turbina eólica

Para el modelado del comportamiento transitorio del tren mecánico ante variaciones de la velocidad del viento, par de carga, modelar el efecto sombra, entre otros; se han usado modelos en pu con un número incremental de parámetros como [12, 16, 18–21]:

- Modelo de seis masas.
- Modelo de tres masas.
- Modelo de dos masas.
- Modelo de una masa o concentrado.

En la Figura 2.2 se ilustran los diferentes modelos antes mencionados. En el modelo de seis masas que se muestra en la Figura 2.2a, T_{Wi} es el par motor aplicado por el viento en la i -ésima paleta, T_G es el par de eléctrico del generador en convención motor, H_{Bi} es la inercia de la i -ésima paleta en torno a la raíz de la misma, D_{Bi} es empleado para modelar la fricción de la i -ésima paleta con el aire, K_{HBi} es el coeficiente de rigidez de la i -ésima paleta y D_{HBi} es el coeficiente de amortiguamiento de la i -ésima paleta, con $i = 1, 2, 3$; H_H es la inercia del buje en torno a su eje, D_H es el coeficiente de fricción entre el buje y los rodamientos, K_{HGB} es el coeficiente de resistencia a la torsión del eje de baja velocidad el cual conecta el buje y la caja de engranajes, D_{HGB} es el coeficiente de amortiguamiento del eje de baja velocidad; H_{GB} es la inercia total de la caja de engranajes, D_{GB} es el coeficiente de fricción empleado para modelar las pérdidas debido a fricción entre los engranes y sus rodamientos; K_{GBG} es el coeficiente de resistencia a la torsión del eje de alta velocidad el cual conecta la caja de engranajes con el rotor del generador, D_{GBG} es el coeficiente de amortiguamiento del eje de alta velocidad; H_G es la inercia del generador, D_G es el coeficiente de fricción entre el rotor del generador y sus rodamientos; en el modelo de tres masas que se muestra en la Figura 2.2b, H_R es la inercia del rotor que concentra la inercia de las paletas y del buje, D_B es la fricción total de las paletas y del buje; en el modelo de dos masas que se

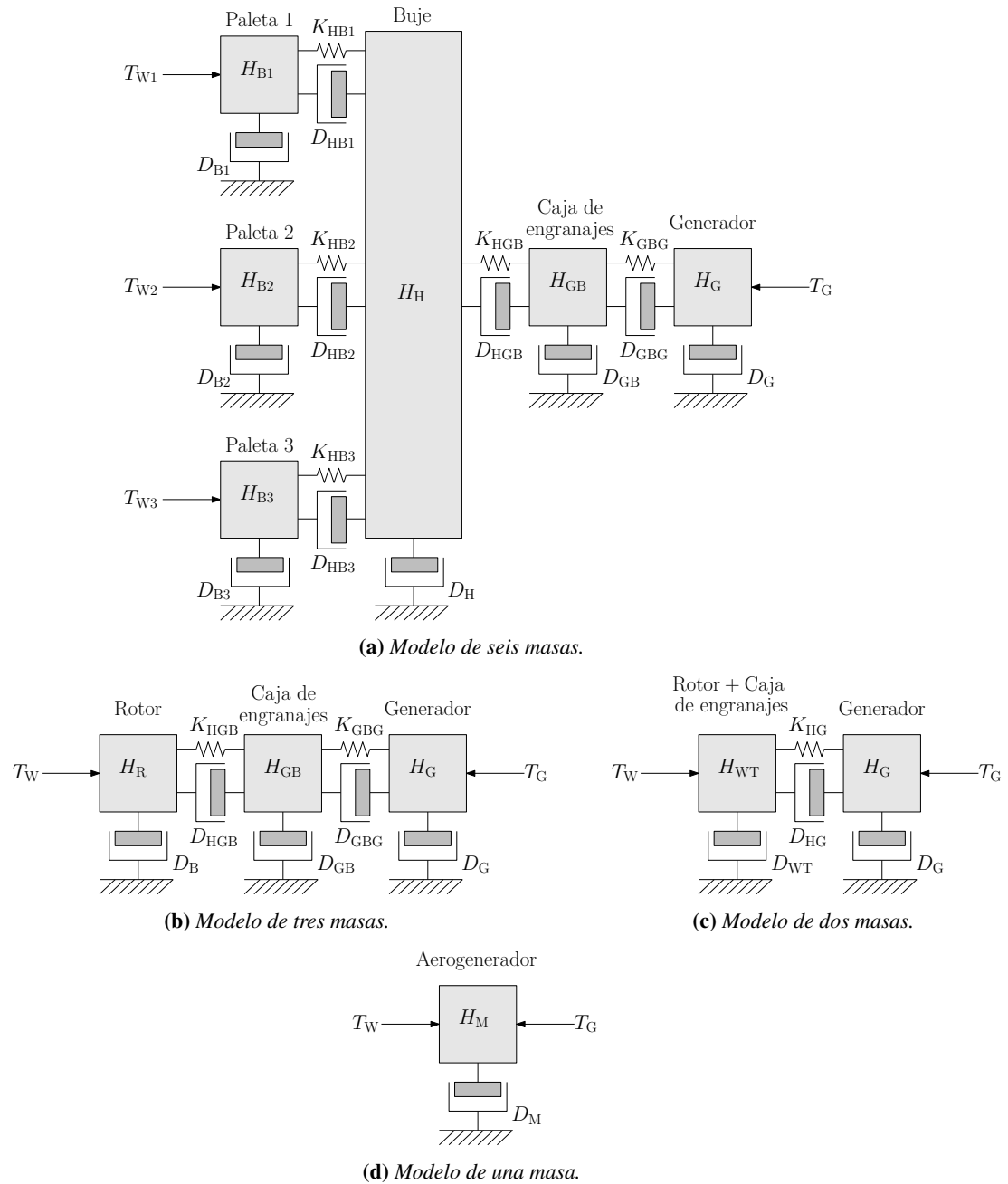


Figura 2.2: Diagrama esquemático del tren mecánico de una turbina eólica.

muestra en la Figura 2.2c, H_{WT} es la inercia total del rotor de la turbina que concentra la inercia de las paletas, del buje y de la caja de engranajes, D_{WT} es el coeficiente de fricción total de la turbina, K_{HG} es el coeficiente de resistencia a la torsión del eje que conecta la turbina y el generador en el modelo de dos masas, D_{HG} es el coeficiente de amortiguamiento del mismo eje; en el modelo de una masa que se muestra en la Figura 2.2d, H_M es la inercia del aerogenerador y D_M es el coeficiente de fricción del eje del aerogenerador.

2.3. Metodología de los grafos de unión

En la literatura se encuentran diferentes tipos de representaciones gráficas para describir las propiedades de un sistema físico y las interacciones que existen entre los elementos que lo conforman. Cada formalismo de representación es instrumental en la comunicación de resultados e ideas entre las personas dentro del estudio de las diversas disciplinas y también para derivar un conjunto de ecuaciones que represente el comportamiento del sistema. El proceso para definir este conjunto de ecuaciones mediante el uso de tales diagramas icónicos usualmente es una competencia que adquieren los miembros de las diversas disciplinas.

Los diferentes formalismos de representación gráfica de modelos que son empleados comúnmente incluyen:

- Diagramas icónicos.
- Diagramas de red.
- Diagramas de bloques.
- Grafos lineales.
- Grafos de unión.

Los diagramas esquemáticos como los diagramas icónicos, de red y de bloques son útiles para comunicar las relaciones básicas que existen entre los distintos elementos de un sistema. Es común que ciertas restricciones topológicas inherentes a este tipo de diagramas conlleve dificultades en la descripción de fenómenos particulares, los cuales dependen de consideraciones espaciales o de interacción entre los elementos de diferentes disciplinas, como es el caso de los sistemas mecatrónicos. Esta clase de representación gráfica detallada puede resultar en diagramas demasiado complicados, los cuales podrían incentivar a que el modelador use únicamente un cierto conjunto de ecuaciones matemáticas para realizar la descripción del sistema.

Los grafos lineales y los grafos de unión son dos distintas metodologías empleadas para representar de manera concisa las interacciones entre variables de estado que podrían pertenecer a sub-sistemas en diferentes dominios de la energía; estas metodologías se desarrollan usando un conjunto finito de símbolos de elementos, los cuales se emplean para expresar mecanismos elementales de transferencia de energía, de forma irrespectiva al dominio de la energía al que dichas variables pertenezcan. En particular, los grafos de unión han sido aceptados ampliamente debido a que cumplen con el principio de conservación de la energía de los sistemas físicos. Esto evita que el modelador desarrolle conjuntos de ecuaciones erróneos para el sistema. Además, debido a su uso extendido se está trabajando para que los modelos de un cierto sub-sistema se puedan compartir entre diversas plataformas de software a través del uso estructuras de archivo universales como el caso del formato XML [22, p. 135].

Para el estudio sistemático de la dinámica de estos sistemas de ingeniería se ha aplicado cada vez más ampliamente la metodología de los grafos de unión [23, 24]. Se trata de una metodología que es empleada para representar de forma concisa las interacciones entre diferentes variables de estado que podrían pertenecer a subsistemas en diferentes dominios de la energía; se desarrolla empleando un conjunto finito de símbolos de elementos que se usan para expresar mecanismos elementales de transferencia de energía, sin importar el dominio de la energía que se considere. La metodología de los grafos de unión ha tenido una amplia aceptación debido a que cumple con el principio de conservación de la energía en los sistemas físicos [22, 23, 25].

La metodología de los grafos de unión es un formalismo de descripción gráfica de modelos. En un grafo de unión, los puertos de potencia transfieren energía instantáneamente entre sí por medio de las uniones [22, 25]. Dos cantidades físicas, llamadas variables de potencia conjugadas, se le asignan a cada extremo de una unión, a estas se les llama *esfuerzo* e y *flujo* f [22, 25]. El producto de este par de variables es la potencia [22, 25]; es decir, la tasa por unidad de tiempo a la cual se transfiere energía desde o hacia otro elemento del grafo de unión. Las variables conjugadas de potencia de cada elemento del grafo de unión se rigen por principios básicos llamados ecuaciones constitutivas [22, 25].

El producto de este par de variables es la potencia P que está siendo transferida instantáneamente desde o hacia otro elemento del grafo de unión, es decir

$$P = e \cdot f \quad (2.3.1)$$

La cantidad de energía E que ha sido transferida a un elemento en el tiempo t puede expresarse como

$$E = \int_{-\infty}^t P d\tau = \int_{-\infty}^t e \cdot f d\tau \quad (2.3.2)$$

Convencionalmente, las variables conjugadas de potencia pueden considerarse para los diversos dominios de la energía tal como se muestra en la Tabla 2.1.

En la metodología de los grafos de unión existen dos cantidades físicas adicionales que se obtienen a partir de las variables conjugadas de potencia fundamentales. Estas variables adicionales que también son usadas en la metodología, son el momento generalizado p y el desplazamiento generalizado q [22]. Tanto a p como a q se les llama variables de energía dado que estas pueden ser usadas para cuantificar la cantidad de energía acumulada en un elemento ideal de almacenamiento de energía [22]. Las variables pueden expresarse como

$$\dot{p} = e \quad (2.3.3)$$

Tabla 2.1: Dominios de la energía y sus variables de esfuerzo y flujo correspondientes [22].

Dominio de la energía	Esfuerzo e	Flujo f
Mecánica traslacional	Fuerza F	Velocidad v
Mecánica rotacional	Momento de fuerza M	Velocidad angular ω
Dominio eléctrico	Voltaje u	Corriente i
Dominio magnético	Fuerza magnetomotriz V	Tasa de flujo magnético $\dot{\Phi}$
Dominio Hidráulico	Presión total p	Flujo volumétrico Q
Termodinámico	Temperatura T	Flujo de entropía \dot{S}
Dominio químico	Potencial químico μ	Flujo molar \dot{N}

$$\dot{q} = f \tag{2.3.4}$$

Existen casos particulares en los que podría ser necesario definir algunos desplazamientos inerciales q como variables de estado, A estas variables se les llama desplazamientos cinemáticos y estos han de ser incluidos en la ecuación de estado aumentada [22, 23, 25].

2.3.1. Elemento transformador

Los componentes ideales de sistemas físicos que interrelacionan variables dentro del mismo dominio de la energía sin pérdidas de energía en el proceso se pueden modelar mediante un elemento transformador.

Definición 2.3.1 (Elemento Transformador de dos puertos). Un elemento transformador de dos puertos es un elemento del grafo de unión que conserva la energía, denotado por el símbolo TF en el grafo de unión (véase la Figura 2.3).

La ecuación constitutiva de un elemento transformador, que relaciona el esfuerzo e y el flujo f se expresa como

$$\begin{cases} f^{(j)} = m_i f^{(i)} \\ m_i e^{(j)} = e^{(i)} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

donde m_i es el módulo del elemento TF; una cantidad referida al lado primario del elemento (semi-flecha hacia adentro) se identifica con un superíndice (i); similarmente, una cantidad referida al lado secundario (semi-flecha hacia afuera) se identifica con un superíndice (j), véase la Figura 2.3. El elemento TF podría ser usado para representar un acoplador ideal de potencia.

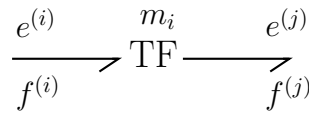


Figura 2.3: Elemento TF.

2.4. Estado del arte

En la literatura se ha externado preocupación acerca de serios problemas de errores y malinterpretaciones en el proceso de obtención de modelos dinámicos en por unidad de los trenes mecánicos de turbinas eólicas [19, 26].

A continuación se encuentra una breve descripción de algunos errores y malinterpretaciones encontrados en la literatura.

En ocasiones los modelos matemáticos no cumplen de lleno con el principio de homogeneidad dimensional, e.g., el lado derecho de la ecuación (A7) en [27] del modelo de dos masas que representa el comportamiento de la velocidad del rotor del generador de inducción de jaula de ardilla $\frac{d}{dt} \frac{\omega_r}{\omega_b \omega_s} = \frac{1}{2H_g} [T_e(s) - k_s \theta_s]$ parece estar expresado en pu/s mientras que el lado izquierdo de la misma ecuación parece estar expresado en pu/(s rps). De forma similar, la ecuación dinámica para la velocidad del eje $dw/dt = [P_{\text{mech}} - P_{\text{elec}}]/(H\omega_{\text{base}})$ en [28, p. 33] no parece mantener la homogeneidad

dimensional.

Algunos valores base para diferentes parámetros tales como la inercia y el coeficiente de resistencia a la torsión tienen las mismas dimensiones, véase [16, p. 42]; esta selección injustificada para los valores base no parece mantener la homogeneidad dimensional entre magnitudes mecánicas fundamentales tales como el momento de inercia y el par de resistencia a la torsión. Inclusive, el mismo parámetro en cantidades reales a veces se reporta con diferentes unidades dimensionales; e.g., la unidad dimensional para el coeficiente de resistencia a la torsión en [3, p. 8] es $N - m/rad$ mientras que la dimensión del mismo parámetro en [16, p. 42] es $N - m/(rad/s)$. De forma semejante, la constante de resistencia a la torsión en los modelos por unidad ha sido reportada con diferentes dimensiones; por ejemplo, el coeficiente de resistencia a la torsión k_{sh} en [29] está dado en pu, el coeficiente de resistencia a la torsión K_{sh} EN [30] está dado en rad, mientras que el coeficiente de resistencia a la torsión k_s en [31] está dado en pu/elec. rad.

Algunos de los parámetros por unidad, usados en diferentes trabajos de investigación para turbinas eólicas de potencias nominales similares, se encuentran extremadamente alejados unos de los otros; por ejemplo el coeficiente de resistencia a la torsión está establecido como $k_{sh} = 150.0052$ pu en [29] mientras que el mismo coeficiente de resistencia a la torsión está establecido como $k_s = 0.6$ pu en [27].

La comparación de resultados en diferentes trabajos de investigación se dificulta dado que las expresiones matemáticas en por unidad (para la misma variable de estado original) no son estructuralmente idénticas. Por ejemplo, combinando las expresiones (1), (3) y (5a) en [32] se obtiene una ecuación que es diferente a la ecuación (2) en [28].

Otro ejemplo de una expresión matemática no-estructuralmente idéntica es la ecuación de orden reducido de parámetros concentrados de masa que describe el comportamiento dinámico del tren mecánico. En [33, p. 833], la constante de inercia concentrada está definida como $H_m + H_t/\eta^2$ (véase la ecuación (36.32) en [33]); en cambio, la relación de engranaje η no se necesita para calcular la

constante de inercia concentrada $H_t + H_g$ de acuerdo con las contribuciones [34, p. 6] y [19, p. 447].

Las fuentes para este amplio espectro de posibles malinterpretaciones y/o errores son frecuentemente difíciles de rastrear. Las malinterpretaciones más comunes podrían resultar del uso de diferentes procesos de conversión a por unidad, potencias nominales, cantidades base o diferentes suposiciones de modelado, algunos de los cuales podría no haber sido declarado explícitamente. Algunos errores podrían ser de naturaleza tipográfica, o bien podría ser el caso que algún parámetro o descripción matemática errada haya sido empleada.

Es evidente que los antedichos errores y/o malinterpretaciones afectan de forma crítica a la calidad de algunos de los resultados que han sido reportados en la literatura correspondiente con la energía eólica; claramente establece la necesidad de un proceso de conversión a por unidad formal y sistemático para obtener una descripción matemática confiable en por unidad de trenes mecánicos de turbinas eólicas.

Se reconoce que varios trabajos han producido diversos procesos de conversión a por unidad sin detalles inconvenientes para el tren mecánico de sistemas de generación eolo-eléctrica, e.g., [26] y [35]. Adicionalmente, existen varias representaciones en cantidades reales y por unidad para el tren mecánico de la turbina eólica, dependiendo del estudio que se vaya a realizar. El comportamiento dinámico detallado del tren mecánico, interacción del tren mecánico con el generador, así como la interacción de la turbina eólica con la red eléctrica podría ser modelada empleando una ecuación dinámica de diferentes niveles de complejidad [12, 19, 20, 23].

Metodología

La adimensionalización de las variables y parámetros ha sido empleada regularmente para el análisis de los modelos matemáticos. De hecho, un artículo publicado en 1937 [36] usa el análisis dimensional para derivar modelos en por unidad de algunos sistemas eléctricos y mecánicos. En este capítulo, se establece un procedimiento para convertir a por unidad elementos disipativos y elementos de almacenamientos de un puerto por medio de la metodología de los grafos de unión, la cual evita que el modelador desarrolle un conjunto errado de parámetros y/o expresiones matemáticas. Por medio del uso de las ecuaciones constitutivas de estos elementos, cuando estos tienen características lineales, se obtienen expresiones para las cantidades base de un grafo de unión que contiene un cierto número de etapas.

3.1. Sistema por unidad

En el sistema por unidad (pu), todas las cantidades en pu denotadas con una barra, se obtienen mediante

$$\bar{y} := \frac{y}{y_b} \quad (3.1.1)$$

Esto implica que todo valor y que denota un parámetro físico puede ser expresado como el producto de una magnitud \bar{y} y una constante y_b correspondiente con el valor base.

El objetivo principal del sistema por unidad es usar un conjunto de valores base tal que al dividir cada cantidad por su correspondiente valor base, la cantidad resultante en pu no cambia su valor al referirla a un lado u otro de un transformador (e.g., un transformador eléctrico, una caja multiplicadora de velocidad, una polea, etc.) [37]. En el siguiente procedimiento se usa una serie de transformaciones que conservan la potencia para definir dicho conjunto de valores base. Si esta transformación se realiza correctamente, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinario o sistema de ecuaciones diferenciales algebraico resultantes define un desempeño transitorio en pu que es idéntico a aquel correspondiente con el modelo en cantidades reales, pero escalado por un factor correspondiente con el valor base adecuado. En el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarios, la eigenestructura no se modifica por el proceso de conversión a pu.

El uso del sistema por unidad (pu) incluye las siguientes ventajas:

- Tras la conversión, algunos componentes pueden ser despreciados, lo cual conduce a una simplificación del diagrama y ecuación producto de la no-dependencia de ciertos valores de los parámetros (e.g., cuando un elemento transformador con módulo 1 aparece en un diagrama, las variables y parámetros del sistema no cambian su valor al reflejarse en uno u otro lado de dicho transformador).
- Cualquier respuesta en el dominio del tiempo en pu es independiente de cualquier sistema de

unidades (e.g., MKS, USCS, SI, etc.).

- Los valores de las variables de máquina caen dentro de un intervalo predecible y es posible detectar fácilmente anomalías en un sistema donde interactúan múltiples etapas.
- Los problemas mal condicionados son más fáciles de abordar al ser convertidos a por unidad.

A fin de lograr esto usando la metodología de los grafos de unión, se deben seguir las siguientes reglas:

- El escalar todas y cada una de las etapas por la misma potencia base normaliza la actividad energética de todo el sistema.
- Dentro de etapas adyacentes en el mismo dominio de la energía, los valores base especificados para las variables de esfuerzo y flujo se relacionan entre sí por medio de la ecuación fundamental del elemento TF (transformador).
- No se elegirá un valor base para el tiempo a fin de preservar la eigenestructura.

Esta última regla implica que las cantidades del sistema por unidad que incluyen el tiempo, tales como el momento generalizado, se derivan de otras cantidades que no cambian su valor en pu cuando se les refiere a algún lado de un elemento TF; es decir que en este procedimiento se establece un método directo para por-unizar las cantidades de un sistema, con excepción de aquellas cantidades derivadas que están relacionadas con el tiempo [38]. El mantener una percepción explícita del tiempo transcurrido en la dinámica de cualquier fenómeno en el sistema es importante, ya que diferentes escalas de tiempo podrían conducir a simplificaciones del modelo y/o controlador. Por ejemplo, se pueden diseñar controladores de forma individual para cada parte del sistema con diferentes escalas de tiempo, en el caso de la maquinaria eléctrica, el despreciar la dinámica del estator o del rotor es una simplificación generalmente aceptada, la cual se basa en la existencia de distintas escalas de tiempo [19, 39, 40].

En el siguiente subtema, las variables y parámetros expresadas en su equivalente valor en por unidad serán denotadas mediante un acento circunflejo.

3.2. Método de conversión a por unidad usando la metodología de los grafos de unión

3.2.1. Definición de la ecuación constitutiva del transformador

De acuerdo con la metodología de los grafos de unión, un transformador de dos puertos es un elemento conservador de la energía, que se denota mediante el símbolo TF (véase la Figura 2.3). Un elemento TF puede ser usado para representar un acoplamiento ideal de potencias; su ecuación constitutiva que relaciona el esfuerzo e y el flujo f en los puertos (i) y (j) puede encontrarse en la ecuación (2.3.5) y por conveniencia se vuelve a expresar como

$$\begin{cases} f^{(j)} &= m_i f^{(i)} \\ m_i e^{(j)} &= e^{(i)} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

donde $m_i \in \mathbb{R}^+$ denota el módulo del elemento TF, este será considerado como un parámetro constante. Nótese que de acuerdo con (3.2.1), m_i es adimensional.

En lo consecutivo, una cantidad referida al lado primario de un TF (semi-flecha que apunta hacia dicho elemento) se identifica mediante el superíndice (i); de forma análoga, una cantidad referida al lado secundario de un TF (semi-flecha que apunta hacia afuera de dicho elemento) se identifica mediante el superíndice (j), vea la Figura 2.3 y la expresión (3.2.1).

Al integrar ambos lados de las ecuaciones constitutivas del elemento TF en (3.2.1) y usando las

ecuaciones (2.3.3) y (2.3.4) se obtiene la expresión

$$\begin{cases} q^{(j)} = m_i q^{(i)} \\ m_i p^{(j)} = p^{(i)} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

que define las relaciones entre los desplazamientos generalizados q y los momentos generalizados p en ambos puertos de un elemento TF.

3.2.2. Cantidades base para las variables en ambos lados de un transformador

El producto de las variables de esfuerzo e y flujo f , que se asignan en los extremos de una unión, representan la cantidad de potencia P que está siendo transferida instantáneamente en cualquier dominio físico, es decir

$$P = e \cdot f \quad (3.2.3)$$

La cantidad de energía E transferida a un elemento en el tiempo t puede escribirse como

$$E = \int_{-\infty}^t P d\tau = \int_{-\infty}^t e \cdot f d\tau \quad (3.2.4)$$

Dada la definición del valor para la potencia base P_b , que es común para todas las etapas del sistema, se pueden definir valores base $e_b^{(i)}$ o $f_b^{(i)}$ para el esfuerzo o para el flujo, respectivamente, por medio de reescribir (3.2.3) como

$$P_b = e_b^{(i)} f_b^{(i)} \quad (3.2.5)$$

Si se opta por establecer el valor de $e_b^{(i)}$, el valor base para el esfuerzo en la etapa (i) entonces (3.2.5) puede resolverse para $f_b^{(i)}$, el valor base para el flujo en la etapa (i) . Al contrario, si se establece $f_b^{(i)}$, entonces (3.2.5) puede resolverse para $e_b^{(i)}$.

Por lo tanto, al sustituir las ecuaciones (3.1.1) y (3.2.5) en (3.2.3); es decir, haciendo $\bar{P} = P/P_b$, $\bar{e} = e/e_b^{(i)}$ y $\bar{f} = f/f_b^{(i)}$, se obtiene la ecuación de potencia en el sistema pu

$$\bar{P} = \bar{e} \cdot \bar{f} \quad (3.2.6)$$

El aplicar (3.1.1) a la ecuación (3.2.4) y sustituyendo (3.2.5) para expresar la energía en por unidad; es decir, haciendo $\hat{E} = E/P_b$, resulta en

$$\hat{E} = \int_{-\infty}^t \bar{P} d\tau = \int_{-\infty}^t \bar{e} \cdot \bar{f} d\tau \quad (3.2.7)$$

donde P_b ha sido seleccionado como el valor base para la energía E , es decir, $E_b := P_b$.

El reescribir la ecuación (3.2.1) para los valores base resulta en

$$\begin{cases} f_b^{(j)} = m_i f_b^{(i)} \\ m_i e_b^{(j)} = e_b^{(i)} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

la cual representa la ecuación que relaciona los valores base en las etapas (i) y (j) en ambos lados de un elemento TF de dos puertos.

Dada la definición numérica de los valores base para ya sea el lado primario o secundario de un elemento TF, se tiene que (3.2.8) puede emplearse para definir valores base en el otro lado de ese mismo elemento TF. Por ejemplo, un elemento TF que relaciona la potencia en los puertos (1) y (2) con módulo m_1 , y asumiendo que P_b y $e_b^{(1)}$ se establecen entonces los valores base $f_b^{(2)}$ y $e_b^{(2)}$ pueden ser calculados directamente por medio de (3.2.5) y (3.2.8)

$$\begin{cases} f_b^{(2)} := m_1 f_b^{(1)} \\ e_b^{(2)} := e_b^{(1)} / m_1 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Al usar las ecuaciones constitutivas en (3.2.2) para los valores base en ambos lado de un elemento TF,

resulta en

$$\begin{cases} q_b^{(j)} = m_i q_b^{(i)} \\ m_i p_b^{(j)} = p_b^{(i)} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

y suponiendo que $q_b^{(1)}$ y $p_b^{(1)}$ están dados numéricamente, se obtienen los valores base del desplazamiento y el momento generalizados en el secundario del elemento TF, por ejemplo

$$\begin{cases} q_b^{(2)} := m_1 q_b^{(1)} \\ p_b^{(2)} := p_b^{(1)} / m_1 \end{cases} \quad (3.2.11)$$

El usar las ecuaciones (3.2.8) y (3.2.10) resulta en

$$\frac{f_b}{q_b} = \frac{f_b^{(i)}}{q_b^{(i)}} = \frac{f_b^{(j)}}{q_b^{(j)}} \quad (3.2.12)$$

$$\frac{q_b}{f_b} = \frac{q_b^{(i)}}{f_b^{(i)}} = \frac{q_b^{(j)}}{f_b^{(j)}} \quad (3.2.13)$$

Se observa que los valores del flujo y desplazamiento generalizado base mantienen proporciones constantes, por ello los superíndices serán ignorados para tales cocientes.

La información de los valores base se propaga a través del grafo de unión siguiendo las expresiones (3.2.8) y (3.2.10), y dichas bases se aplican para la por-unización de los parámetros y variables. El número de etapa y el correspondiente conjunto de valores base puede ser almacenado en algún atributo de los elementos por unidad de un puerto. Los valores equivalentes en pu se usan para construir un grafo de unión en por unidad.

Observaciones

- Las bases que están relacionadas por las expresiones (3.2.8) y (3.2.10) preservan la propiedad conservadora de la energía del elemento TF. Es decir, que el valor P_b es el mismo en las diferentes etapas de potencia que están relacionadas por un elemento TF; esta es una característica clave de

un proceso de conversión a por unidad.

- En el dominio de la mecánica rotacional, es una práctica común que en la etapa inicial de potencia se defina un valor base para el desplazamiento angular $q_b^{(i)} = 1$ rad. Por lo tanto, cualquier desplazamiento en pu (en esta etapa inicial) es numéricamente igual a aquella en radianes; además, de acuerdo con la expresión (3.2.10) la base para el desplazamiento generalizado de la etapa (j) ahora resulta $q_b^{(j)} = m_i$, esta elección para el valor base en la etapa (j) permite transformar fácilmente cualquier torsión o desplazamiento absoluto en por unidad directamente a cantidades reales mediante usar el módulo de transformación.
- En la etapa inicial (con $q_b^{(i)} = 1$ rad) las funciones trigonométricas conservan su definición estándar, es decir, que no es necesario realizar cálculos adicionales empleando factores de conversión con el fin de evaluarlas; esto es importante en el contexto de la definición de la interacción entre subsistemas en los dominios de energía eléctrica y mecánica [26, 37].

3.2.3. Fuentes y sumideros de esfuerzo y flujo en por unidad

En la metodología de los grafos de unión, las condiciones ambientales del sistema se modelan mediante elementos llamados fuentes, denotados por el símbolo S. El elemento S establece ya sea un esfuerzo e o un flujo f en el grafo de unión. Así, existen dos tipos de elementos S, los elementos Se y Sf los cuales simbolizan a las fuentes de esfuerzo y de flujo respectivamente. La magnitud del esfuerzo o flujo establecido por estos elementos podría ser expresada como una función del tiempo t . Una fuente modulada por una señal se denota por el símbolo MS, por lo que surgen los elementos MSe y MSf. En las fuentes del grafo de unión, las semi-flechas en el extremo de la unión están orientadas hacia afuera, lo cual coincide con la referencia positiva de la dirección del flujo de energía [22, 23].

La potencia de un elemento S puede ser por-unizada mediante aplicar la definición dada en la ecuación (3.1.1) para obtener $\bar{P} = \bar{e} \cdot \bar{f}$ (véase la ecuación (3.2.6)). Así, las fuentes de esfuerzo y flujo pueden por-unizarse mediante dividir la variable de potencia correspondiente por el valor base apropiado de la

etapa (i). Así, al por-unizar elemento $Se:e$ se obtiene $Se:\bar{e}$, donde \bar{e} está dado por

$$\bar{e} = \frac{e}{e_b^{(i)}} \quad (3.2.14)$$

y al por-unizar el elemento $Sf:f$ se obtiene $Sf:\bar{f}$, donde \bar{f} está dado por

$$\bar{f} = \frac{f}{f_b^{(i)}} \quad (3.2.15)$$

La variable conjugada de potencia correspondiente también está en por unidad. Un sumidero es un elemento S con dirección positiva de referencia de la energía que está dirigida hacia adentro del elemento. Los sumideros se usan para modelar las condiciones ambientales que no son afectadas por el grafo de unión. Los elementos S por-unizados pueden ser usados directamente en un grafo de unión por-unizado.

3.2.4. Valores base, cantidades equivalentes por unidad y ecuaciones constitutivas equivalentes en por unidad

En la metodología de los grafos de unión, un elemento disipador de energía de un puerto se denota por el símbolo R. Asimismo, los elementos almacenadores de energía de un puerto se denotan por los símbolos I y C. La ecuación constitutiva de un elemento R de un puerto con causalidad resistiva, junto con las ecuaciones constitutivas de los elementos I y C de un puerto ambos con causalidad derivativa, pueden escribirse como [22, p. 99], [23]

$$Rf = e \quad (3.2.16)$$

$$I \frac{df}{dt} = e \quad (3.2.17)$$

$$C \frac{de}{dt} = f \quad (3.2.18)$$

a los elementos R, I y C se les llama Resistor, Inercia y Capacitancia respectivamente. Es importante recordar que R, I y C son elementos genéricos en el sentido de que pueden ser usados para modelar fenómenos físicos en cualquier dominio de energía incluido en la Tabla 2.1. Se asumirá que estos elementos tienen características lineales.

Las expresiones de este subtema son válidas para toda etapa de energía, asociada con un superíndice (i) o (j) del elemento TF de dos puertos; por esta razón los superíndices han sido omitidos temporalmente, por ejemplo, $f_b^{(i)}$ ahora se expresa como f_b ; la nomenclatura asociada a los superíndices será reincorporada más adelante cuando sea necesario.

El reescribir (3.2.16) para los valores base resulta en

$$R_b f_b = e_b \quad (3.2.19)$$

Asumiendo que f_b y e_b ya han sido definidos numéricamente como se describe en los subtemas anteriores, entonces (3.2.19) puede resolverse para el valor base de la resistencia R_b .

Aplicando la definición por unidad (3.1.1) a la expresión (3.2.16) y usando (3.2.19) resulta en

$$\bar{R} \bar{f} = \bar{e} \quad (3.2.20)$$

La ecuación (3.2.20) es la ecuación constitutiva en por unidad con causalidad resistiva para el elemento R de un puerto del elemento del grafo de unión equivalente en por unidad

Para definir la inercia equivalente en por unidad para el elemento de almacenamiento de energía I, se usa una relación equivalente a la expresión para el momento generalizado en (2.3.3), por ejemplo,

$$p = \int_{-\infty}^t e d\tau \quad (3.2.21)$$

usando (3.1.1) para expresarla en pu resulta

$$\hat{p} = \frac{p}{e_b} = \int_{-\infty}^t \bar{e} d\tau \quad (3.2.22)$$

donde e_b ha sido seleccionado como el valor base para el momento generalizado p , es decir, $p_b := e_b$.

Se define un nuevo parámetro H como

$$H := \frac{1}{2} I \frac{f_b}{e_b} \quad (3.2.23)$$

Esta definición generalizada de H está en consonancia con aquella de las constantes de inercia que han sido usadas históricamente en la literatura de los sistemas electromecánicos, e.g., [37] y [39].

A continuación se obtiene una ecuación constitutiva para el elemento I de un puerto mediante el uso de las ecuaciones (3.2.17) y (3.2.21), así

$$p = If \quad (3.2.24)$$

multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(2f_b)/(2e_b f_b)$, se obtiene

$$\frac{p}{e_b} = If \frac{2f_b}{2e_b f_b} = 2H \bar{f} \quad (3.2.25)$$

así (3.2.25) puede expresarse como

$$\hat{p} = 2H \bar{f} \quad (3.2.26)$$

tanto (3.2.22) como (3.2.26) definen el momento generalizado para un elemento I de un puerto con inercia $2H$.

Usando (2.3.4) y (3.2.18) se puede derivar la siguiente ecuación constitutiva alternativa de un elemento almacenador de energía C de un puerto con característica lineal [22, 23]

$$q = Ce \quad (3.2.27)$$

Reescribiendo (3.2.27) para los valores base, se obtiene

$$q_b = C_b e_b \quad (3.2.28)$$

donde (3.2.28) se resuelve típicamente para el valor base de la capacitancia C_b .

La relación constitutiva para el elemento almacenador de energía C de un puerto en pu en el caso lineal se puede derivar a partir de (3.2.27) mediante expresarlo en pu usando (3.1.1) y (3.2.28)

$$\bar{q} = \bar{C}\bar{e} \quad (3.2.29)$$

Una relación equivalente a la expresión para el desplazamiento generalizado en (2.3.4), puede reescribirse como

$$q = \int_{-\infty}^t f d\tau$$

Empleando la expresión fundamental (3.1.1) se obtiene $q_b \bar{q} = f_b \int_{-\infty}^t \bar{f} d\tau$, entonces resolviendo para \bar{q} se tiene

$$\bar{q} = \frac{f_b}{q_b} \int_{-\infty}^t \bar{f} d\tau \quad (3.2.30)$$

Aplicando la definición por unidad (3.1.1) al esfuerzo e y flujo f en las ecuaciones constitutivas para los elementos I y C de un puerto, dadas por (3.2.17) y (3.2.18) resulta

$$\frac{f_b}{e_b} I \frac{d\bar{f}}{dt} = \bar{e} \quad (3.2.31)$$

$$\frac{e_b}{f_b} C \frac{d\bar{e}}{dt} = \bar{f} \quad (3.2.32)$$

La ecuación (3.2.23) puede sustituirse en (3.2.31) lo cual resulta en

$$2H \frac{d\bar{f}}{dt} = \bar{e} \quad (3.2.33)$$

También, usando (3.1.1) para expresar la capacitancia C en pu, y sustituyéndola junto con (3.2.28) en (3.2.32) resulta en

$$\frac{q_b \bar{C}}{f_b} \frac{d\bar{e}}{dt} = \bar{f} \quad (3.2.34)$$

Las ecuaciones (3.2.33) y (3.2.34) son las ecuaciones constitutivas en por unidad con causalidad derivativa para elementos I y C de un puerto.

A continuación, se definen los parámetros equivalentes en por unidad que se emplean en el grafo de unión. En el caso del elemento R de un puerto, las expresiones (3.2.16) y (3.2.20) son estructuralmente idénticas. También, usando las ecuaciones (3.1.1) y (3.2.19) se puede definir el parámetro de resistencia en por unidad como

$$\hat{R} = \frac{f_b}{e_b} R = \frac{R}{R_b} = \bar{R} \quad (3.2.35)$$

donde \hat{R} es el parámetro de resistencia que se usa en el grafo de unión.

En el caso de un elemento I de un puerto, comparando (3.2.24), (3.2.26), (3.2.17) y (3.2.31), y usando las expresiones (3.2.19) y (3.2.23) el siguiente parámetro equivalente de inercia en por unidad puede ser definido

$$\hat{I} = \frac{f_b}{e_b} I = \frac{I}{R_b} = 2H \quad (3.2.36)$$

donde \hat{I} es el parámetro de inercia equivalente en por unidad que es usado en el grafo de unión. En el caso del elemento C de un puerto, comparando (3.2.18), (3.2.27), (3.2.29) y (3.2.32), y usando las expresiones (3.1.1), (3.2.19) y (3.2.28), el siguiente parámetro equivalente en por unidad de capacitancia puede ser ahora definido como

$$\hat{C} = \frac{e_b}{f_b} C = R_b C = \frac{q_b \bar{C}}{f_b} \quad (3.2.37)$$

donde \hat{C} es el parámetro de capacitancia equivalente en por unidad que es usado en el grafo de unión.

Se observa que \bar{R} , \bar{C} , \bar{q} , \bar{e} , \bar{f} y \bar{P} son cantidades adimensionales en pu; en contraste, se debe advertir que t , H , \hat{I} , \hat{C} , \hat{p} y \hat{E} están expresadas en s (segundos).

Sustituyendo (3.2.36) en (3.2.26) se obtiene la expresión en por unidad para el momento generalizado de un elemento almacenador de energía I de un puerto con inercia \hat{I}

$$\hat{p} = \hat{I}\bar{f} \quad (3.2.38)$$

Mediante resolver (3.2.37) para \bar{C} y sustituyendo en (3.2.29) se obtiene la expresión en por unidad del desplazamiento generalizado para un elemento C de un puerto con capacitancia $\frac{q_b}{f_b}\bar{C}$

$$\bar{q} = \frac{f_b}{q_b}\hat{C}\bar{e} \quad (3.2.39)$$

Es relevante advertir que la ecuación constitutiva del elemento I de un puerto en por unidad (3.2.38) es estructuralmente idéntica a aquella de un elemento I de un puerto en unidades reales (3.2.24). De forma similar, la ecuación constitutiva de un elemento C de un puerto (3.2.29) expresada en por unidad es estructuralmente idéntica a aquella de un elemento C de un puerto en unidades reales (3.2.27); aunque como se expresa en (3.2.37), el parámetro de capacitancia equivalente en por unidad es usado en el grafo de unión. Esto resulta en la inclusión del coeficiente f_b/q_b de la capacitancia \hat{C} en la ecuación constitutiva del elemento C de un puerto equivalente.

Además, si se le asigna causalidad diferencial a la ecuación constitutiva (3.2.38) de un elemento I de un puerto en por unidad, y usando (3.2.22) resulta en

$$\hat{I}\frac{d\bar{f}}{dt} = \bar{e} \quad (3.2.40)$$

la cual es estructuralmente idéntica a (3.2.17). Similarmente, si se le asigna causalidad diferencial a la ecuación constitutiva (3.2.39) de un elemento C de un puerto, y usando (3.2.30) se obtiene

$$\hat{C}\frac{d\bar{e}}{dt} = \bar{f} \quad (3.2.41)$$

la cual también es estructuralmente idéntica a (3.2.18). Así, las ecuaciones constitutivas en por unidad con causalidad integral o diferencial se resuelven preferiblemente usando exclusivamente las variables de potencia conjugadas. Las salidas de estos elementos de almacenamiento de energía, llamadas variables de co-energía entonces podrían ser seleccionadas como variables de estado.

Las expresiones (3.1.1), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.8), (3.2.10), (3.2.20), (3.2.31), (3.2.32) y (3.2.35)–(3.2.37) pueden usarse para deducir las siguientes ecuaciones para un elemento TF

$$\bar{e}^{(i)} = \bar{e}^{(j)} \quad (3.2.42)$$

$$\bar{f}^{(i)} = \bar{f}^{(j)} \quad (3.2.43)$$

$$\hat{R}^{(i)} = \hat{R}^{(j)} \quad (3.2.44)$$

$$\hat{I}^{(i)} = \hat{I}^{(j)} \quad (3.2.45)$$

$$\hat{C}^{(i)} = \hat{C}^{(j)} \quad (3.2.46)$$

$$\bar{q}^{(i)} = \bar{q}^{(j)} \quad (3.2.47)$$

$$\hat{p}^{(i)} = \hat{p}^{(j)} \quad (3.2.48)$$

De acuerdo con las expresiones anteriores, en el sistema por unidad, el esfuerzo, flujo, resistencia, inercia, capacitancia, desplazamiento generalizado y momento generalizado en ambos lados de un elemento TF tienen iguales magnitudes; en otras palabras, estos elementos por-unidad están relacionados por medio de un elemento TF virtual que tiene módulo igual a uno ($m_i = 1$), mientras que se preserva la estructura de unión tal como la del grafo de unión original. En consecuencia la influencia de los parámetros en por unidad en las variables de estado se puede conocer directamente.

La notación de superíndice, barra y acento circunflejo tiene el objetivo de establecer una conexión persistente entre las cantidades en por unidad, valores base, modelo en grafo de unión y cantidades reales. Esto puede permitir la portabilidad en el contexto de la computación y en mantener compatibilidad entre los sistemas por unidad como lo proponen varios autores y estándares [26, 29, 41].

Este procedimiento puede ser aplicado a grafos de unión que tienen una estructura de unión ponderada (Weighted Junction Structure) sin elementos transformador modulados (MTF) [22]. Se asume que si existen lazos de unión en el grafo, entonces estos lazos son mallas simples [22].

A partir de las ecuaciones (3.2.5), (3.2.7), (3.2.8), (3.2.10), (3.2.19), (3.2.22), (3.2.23), (3.2.28), (3.2.35), (3.2.36) y (3.2.37) se observa, que podrían propagarse únicamente las cantidades base e_b , P_b , q_b , y en consecuencia las demás cantidades base, i.e., $f_b := P_b/e_b$, $E_b := P_b$, $p_b := e_b$, $R_b := e_b/f_b$ y $C_b := q_b/e_b$, pueden ser calculadas a partir de las primeras tres en cada etapa del grafo de unión. Además, se observa que la cantidad P_b es de cierta forma una variable global en todo el procedimiento, por lo que no requiere ser calculada.

3.2.5. Cambio de base de las cantidades en pu

Se usará la notación, así como la metodología presentada para expresar la relación entre las cantidades en el sistema por unidad, referidas a cierto conjunto de cantidades base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ con aquellas cantidades referidas a las cantidades base $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,y}\}$. Se usan e , f y P para denotar esfuerzo, flujo y potencia. Los subíndices b,x y b,y denotan que se trata de una cantidad base de cierta etapa en donde se estableció $q_b = 1$, tratándose así de dos conjuntos de cantidades base x y y distintos. Las variables R , C e I denotan Resistencia, Capacitancia e Inductancia generalizadas, respectivamente.

Con el fin de poder llevar a cabo la agregación de los parámetros, así como la interconexión directa de modelos en el sistema por unidad, estos deben estar referidos al mismo conjunto de cantidades base. Sin embargo, a la fecha, el autor no ha encontrado publicado un procedimiento formal para llevar a cabo dicho cambio de base en el contexto de los dominios de energía detallados en la Tabla 2.1, a excepción del procedimiento que se encuentra implícito en [34] para el dominio de la energía mecánica rotacional. Esto es necesario debido a que es posible que ya se cuente con el conocimiento de los parámetros en pu, los cuales hayan sido calculados previamente para realizar diversos estudios de estabilidad y

simulaciones transitorias o que hayan sido provistos por algún fabricante [26, p. 784].

Cambio de potencia base

Si se desea conservar el valor $f_{b,x}$ establecido inicialmente dentro del proceso de conversión a por unidad, usando las ecuaciones (3.1.1), (3.2.5), (3.2.8), (3.2.10), (3.2.19), (3.2.28), (3.2.35), (3.2.36) y (3.2.37), las cantidades en pu referidas al conjunto $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,y}\}$, donde $f_{b,y} = f_{b,x}$, son:

$$\bar{z}_y = \frac{z_{b,x}}{z_{b,y}} \bar{z}_x \quad (3.2.49)$$

$$\hat{R}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{e_{b,x}}{e_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{R_{b,x}}{R_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} R \quad (3.2.50)$$

$$\bar{R}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \bar{R}_x = \frac{e_{b,x}}{e_{b,y}} \bar{R}_x = \frac{R_{b,x}}{R_{b,y}} \bar{R}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} R \quad (3.2.51)$$

$$\hat{I}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{I}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} I \quad (3.2.52)$$

$$H_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} H_x = \frac{1}{2} \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} I \quad (3.2.53)$$

$$\bar{C}_y = \frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \bar{C}_x = \frac{e_{b,y}}{e_{b,x}} \bar{C}_x = \frac{C_{b,x}}{C_{b,y}} \bar{C}_x = \frac{e_{b,y}}{q_{b,x}} C \quad (3.2.54)$$

$$\hat{C}_y = \frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \hat{C}_x = \frac{P_{b,y}}{f_{b,x}^2} C \quad (3.2.55)$$

La descripción detallada de este proceso de cambio de potencia base se encuentra en el Anexo A.1.

Cambio de la potencia base de las cantidades en pu de una turbina eólica

Considerando que en el dominio de la mecánica rotacional el par mecánico T corresponde con la variable de esfuerzo e , la velocidad angular ω corresponde con la variable de flujo f , el momento angular L corresponde con la variable de momento generalizado p , la posición angular θ corresponde con el desplazamiento generalizado q , el coeficiente de amortiguamiento D corresponde con la resistencia

R , el momento de inercia J corresponde con la inercia I y el recíproco del coeficiente de resistencia a la torsión K corresponde con la capacitancia C , es decir, $e \equiv T$, $f \equiv \omega$, $p \equiv L$, $q \equiv \theta$, $R \equiv D$, $I \equiv J$ y $C \equiv K^{-1}$, respectivamente, entonces

$$\bar{T}_y = \frac{T_{b,x}}{T_{b,y}} \bar{T}_x \quad (3.2.56)$$

$$\hat{L}_y = \frac{T_{b,x}}{T_{b,y}} \hat{L}_x \quad (3.2.57)$$

$$\hat{D}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{D}_x = \frac{T_{b,x}}{T_{b,y}} \hat{D}_x = \frac{D_{b,x}}{D_{b,y}} \hat{D}_x = \frac{\omega_{b,x}^2}{P_{b,y}} D \quad (3.2.58)$$

$$\bar{D}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \bar{D}_x = \frac{T_{b,x}}{T_{b,y}} \bar{D}_x = \frac{D_{b,x}}{D_{b,y}} \bar{D}_x = \frac{\omega_{b,x}^2}{P_{b,y}} D \quad (3.2.59)$$

$$\hat{I}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{I}_x = \frac{\omega_{b,x}^2}{P_{b,y}} J \quad (3.2.60)$$

$$H_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} H_x = \frac{1}{2} \frac{\omega_{b,x}^2}{P_{b,y}} J \quad (3.2.61)$$

$$\bar{K}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \bar{K}_x = \frac{T_{b,x}}{T_{b,y}} \bar{K}_x = \frac{K_{b,x}}{K_{b,y}} \bar{K}_x = \frac{\theta_{b,x}}{T_{b,y}} K \quad (3.2.62)$$

$$\hat{K}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{K}_x = \frac{\omega_{b,x}^2}{P_{b,y}} K \quad (3.2.63)$$

Cambio de velocidad angular base

Si se desea conservar el valor $P_{b,x}$ establecido inicialmente dentro del proceso de conversión a por unidad, es decir $P_{b,y} = P_{b,x}$, haciendo que los valores del flujo y desplazamiento generalizado base mantengan relaciones proporcionales idénticas, es decir $f_{b,x}/q_{b,x} = f_{b,y}/q_{b,y}$; donde

$$f_{b,y} = \lambda f_{b,x}$$

$$q_{b,y} = \lambda q_{b,x}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

y usando las ecuaciones (3.1.1), (3.2.5), (3.2.12), (3.2.19), (3.2.28), (3.2.35), (3.2.36) y (3.2.37), las cantidades en pu referidas al conjunto $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,x}\}$ son:

$$\bar{z}_y = \frac{z_{b,x}}{z_{b,y}} \bar{z}_x \quad (3.2.64)$$

$$\bar{e}_y = \lambda \bar{e}_x \quad (3.2.65)$$

$$\bar{f}_y = \frac{1}{\lambda} \bar{f}_x \quad (3.2.66)$$

$$\bar{p}_y = \lambda \bar{p}_x \quad (3.2.67)$$

$$\bar{q}_y = \frac{1}{\lambda} \bar{q}_x \quad (3.2.68)$$

$$\hat{R}_y = \lambda^2 \hat{R}_x \quad (3.2.69)$$

$$\bar{R}_y = \lambda^2 \bar{R}_x \quad (3.2.70)$$

$$\hat{I}_y = \lambda^2 \hat{I}_x \quad (3.2.71)$$

$$H_y = \lambda^2 H_x \quad (3.2.72)$$

$$\bar{C}_y = \frac{1}{\lambda^2} \bar{C}_x \quad (3.2.73)$$

$$\hat{C}_y = \frac{1}{\lambda^2} \hat{C}_x \quad (3.2.74)$$

La descripción detallada de este proceso de cambio de potencia base se encuentra en el Anexo A.2.

Cambio de la velocidad angular base de las cantidades en pu de una turbina eólica

Considerando que para la mecánica rotacional $e \equiv T$, $f \equiv \omega$, $p \equiv L$, $q \equiv \theta$, $R \equiv D$, $I \equiv J$ y $C \equiv K^{-1}$, entonces

$$\bar{T}_y = \lambda \bar{T}_x \quad (3.2.75)$$

$$\bar{\omega}_y = \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}_x \quad (3.2.76)$$

$$\hat{L}_y = \lambda \hat{L}_x \quad (3.2.77)$$

$$\bar{\theta}_y = \frac{1}{\lambda} \bar{\theta}_x \quad (3.2.78)$$

$$\hat{D}_y = \lambda^2 \hat{D}_x \quad (3.2.79)$$

$$\bar{D}_y = \lambda^2 \bar{D}_x \quad (3.2.80)$$

$$\hat{I}_y = \lambda^2 \hat{I}_x \quad (3.2.81)$$

$$H_y = \lambda^2 H_x \quad (3.2.82)$$

$$\bar{K}_y = \lambda^2 \bar{K}_x \quad (3.2.83)$$

$$\hat{K}_y = \lambda^2 \hat{K}_x \quad (3.2.84)$$

3.3. Interconexión de grafos de unión con diferentes cantidades base

El usar conjuntos independientes de cantidades base en un solo sistema pu, implica que dichos grafos no pueden ser interconectados directamente. En la Figura 3.1 se muestra un elemento TF: m_B virtual en un grafo de unión en donde m_B es el módulo buscado para realizar el cambio de base, a fin de poder llevar a cabo la interconexión de grafos de unión con diferentes cantidades base x y y pero con el mismo valor de potencia base P_b y cuyos valores del flujo base f_b y desplazamiento generalizado base q_b mantienen relaciones proporcionales idénticas, es decir $f_{b,x}/q_{b,x} = f_{b,y}/q_{b,y}$ a través de los puertos 1 y 2, con bases x y y , respectivamente; en caso de que esto no se cumpla, las ecuaciones (3.2.64)-(3.2.74) pueden utilizarse para ajustar el valor del flujo base. A este elemento TF se le aplica el procedimiento descrito en el Subtema 3.2, con el fin de determinar el valor de m_B requerido. La demostración de este resultado se encuentra en los Anexos A.2 y B.

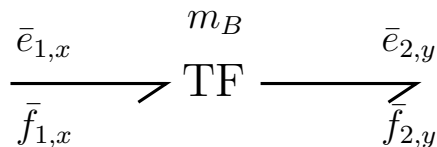


Figura 3.1: Uso de un elemento TF virtual para realizar el cambio de base de las cantidades en pu.

Definición 3.3.1 (Elemento TF: m_B virtual). El valor del módulo m_B del elemento TF virtual que permite la interconexión de dos grafos de unión en por unidad de distintas bases $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ y

$\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,y}\}$ como se indica en la Figura 3.1 es:

$$m_B = \frac{e_{b,y}^{(j)}}{e_{b,x}^{(i)}} = \frac{f_{b,x}^{(i)}}{f_{b,y}^{(j)}} \quad (3.3.1)$$

En donde los superíndices (i) y (j) corresponden con la etapa del lado primario y secundario del elemento TF virtual, respectivamente. Se asume que $P_{b,x} = P_{b,y} = P_b$ y que $f_{b,x}^{(i)}/q_{b,x}^{(i)} = f_{b,y}^{(j)}/q_{b,y}^{(j)} = f_b/q_b$.

Este resultado permite desarrollar de forma concurrente el modelo en pu de cada dominio de la energía por separado para posteriormente unirlos [22]. Se debe notar que el proceso de propagación de las cantidades base, mencionado en el Subtema 3.2.2, ya ha tomado lugar, y que además, por construcción las cantidades base no se propagan a través de los elementos TF virtuales; por lo que las cantidades base x y y que existan definidas en cada etapa del elemento TF: m_B están desvinculadas una de la otra, es decir, ninguna puede ser propagada a través de este elemento TF virtual, excepto por la potencia base P_b y la información acerca del valor del cociente f_b/q_b de la etapa a la que corresponden los puertos de los elementos que están siendo interconectados (véase los Anexos A.2 y B).

Adicionalmente, cuando se requiere aplicar el procedimiento de conversión a pu descrito en el Subtema 3.2 a un grafo de unión que contiene lazos de unión con elementos TF, en los cuales la propagación origina multiplicidad de las cantidades base en alguna unión en alguna etapa del grafo con WJS; este elemento TF virtual puede ser usado con el fin de escalar correctamente el esfuerzo e y flujo f través de dicha unión, una vez que se realizó la conversión a pu de dicho grafo de unión.

Definición 3.3.2 (Conflicto de asignación de cantidades base). Se dice que una unión tiene conflicto de asignación de cantidades base cuando al realizar la propagación de las cantidades base en una WJS se tiene que desde ambos extremos de dicha unión se han propagado valores de cantidades base distintos, de tal manera que el esfuerzo e y flujo f en pu presentes en un extremo de la unión no son iguales a los encontrados al otro extremo de esta.

Es notable que el surgimiento de los conflictos de asignación de cantidades base es dependiente de qué

trayectoria se elija para realizar la propagación de las cantidades base.

Definición 3.3.3 (Trayectoria de propagación de cantidades base). Una trayectoria de propagación de cantidades base es una línea de flujo contenida en la estructura de unión de un grafo de unión con WJS que pasa a través de los nodos $\{0, 1, TF\}$ y que es auxiliar durante el proceso de asignación secuencial de las cantidades base asociado con la propagación de las cantidades base a través del grafo. Dichas trayectorias llevan las cantidades base e_b, f_b, p_b, q_b y P_b . El principio de una trayectoria de propagación de cantidades base es en cualquier etapa del grafo de unión y el término de la misma es en el puerto de los diversos elementos del grafo o en las uniones en donde surjan conflictos de asignación de cantidades base.

Las trayectorias de propagación de cantidades base son un apoyo visual durante la realización de la propagación de las cantidades base a través del grafo de unión.

Una trayectoria de propagación puede orientarse arbitrariamente, sin embargo queda sujeta a las siguientes restricciones:

- Cuando atraviesa un elemento TF, las cantidades base propagadas al lado primario (i) o secundario (j) de dicho elemento satisfacen las ecuaciones (3.2.8) y (3.2.10).
- En un mismo grafo de unión no pueden coexistir trayectorias de propagación con valores de potencia base P_b o relaciones f_b/q_b distintas.
- Las trayectorias de propagación conexas propagan las mismas cantidades base.
- Las trayectorias de propagación inconexas debido a conflictos de asignación de cantidades base requieren de la inserción de un elemento TF virtual $TF:m_B$ adecuado en las uniones en donde esto ocurra en el grafo de unión en pu.

Uso del elemento virtual TF: m_B para la resolución de conflictos de asignación de cantidades base

Considere el grafo de unión mostrado en la Figura 3.2. Suponga que se elije designar la etapa (0) en el lado primario de los elementos TF: a y TF: b en donde se encuentra el elemento genérico A, con $a \neq b$ y $a, b \neq 0$, y a partir de los puertos de este último elemento se realiza la propagación de las cantidades base $\{e_{b,x}^{(0)}, f_{b,x}^{(0)}, P_{b,x}^{(0)}\}$ haciendo $q_{b,x}^{(0)} = 1$ como se muestra en la Figura 3.3.

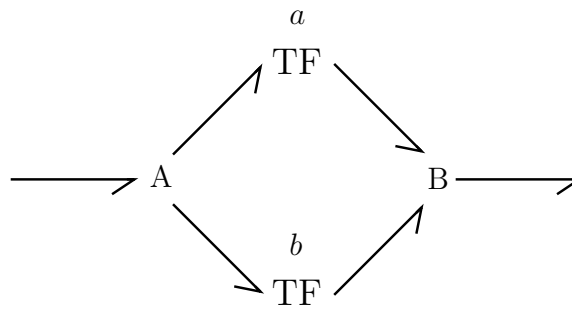


Figura 3.2: Grafo de unión de WJS con lazo de unión con elementos TF.

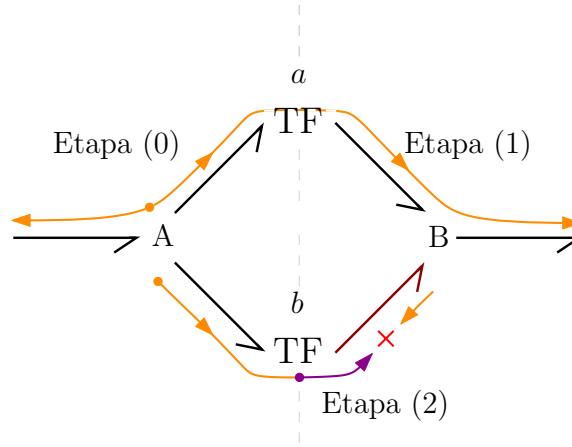


Figura 3.3: Propagación de las cantidades base $\{e_{b,x}^{(0)}, f_{b,x}^{(0)}, P_{b,x}^{(0)}\}$ en el grafo de unión de la Figura 3.2.

Se observa que en la unión que hay entre el puerto del lado secundario del elemento TF: b y un puerto del elemento genérico B, los valores de las cantidades base son distintos, es decir, siguiendo la trayectoria de la propagación de las cantidades base de la etapa (0) mostrada con una flecha de sentido de circulación color naranja en la Figura 3.3, y empleando la ecuación (3.2.8), en los puertos

del elemento genérico B se tienen las siguientes cantidades base:

$$\begin{cases} f_{b,x}^{(1)} = af_{b,x}^{(0)} \\ ae_{b,x}^{(1)} = e_{b,x}^{(0)} \end{cases} \implies \begin{cases} f_{b,x}^{(1)} = af_{b,x}^{(0)} \\ e_{b,x}^{(1)} = \frac{1}{a}e_{b,x}^{(0)} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Mientras que, siguiendo la trayectoria de la propagación de las cantidades base de la etapa (0) mostrada con una flecha de sentido de circulación color morado en la Figura 3.3 y empleando la ecuación (3.2.8), en el lado secundario del elemento TF: b se tienen las siguientes cantidades base:

$$\begin{cases} f_{b,x}^{(2)} = bf_{b,x}^{(0)} \\ be_{b,x}^{(2)} = e_{b,x}^{(0)} \end{cases} \implies \begin{cases} f_{b,x}^{(2)} = bf_{b,x}^{(0)} \\ e_{b,x}^{(2)} = \frac{1}{b}e_{b,x}^{(0)} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Comparando las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3) se observa que $f_{b,x}^{(1)} \neq f_{b,x}^{(2)}$ y que $e_{b,x}^{(1)} \neq e_{b,x}^{(2)}$, siempre que $a \neq b$. Tras convertir el grafo de unión mostrado en la Figura 3.2 a pu usando las cantidades base $\{e_{b,x}^{(0)}, f_{b,x}^{(0)}, P_{b,x}^{(0)}\}$ así como aquellas indicadas en las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3), dicho conflicto en la asignación de las cantidades base se indica en el grafo de unión mostrado en la Figura 3.4 por medio de una cruz que interrumpe la unión que lo presenta.

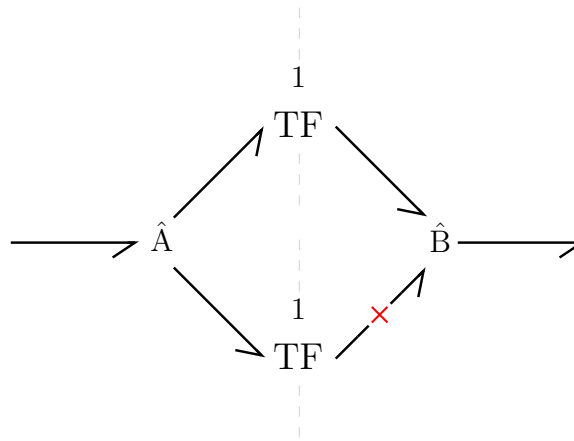


Figura 3.4: Conflicto en la asignación de las cantidades base. Se indica la unión que lo presenta en el grafo de unión convertido a pu.

Finalmente, en el grafo de unión de la Figura 3.4 se introduce un elemento TF virtual en la unión que presenta el conflicto, a fin de obtener el grafo de unión final en pu que resulta de convertir a pu el grafo que se muestra en la Figura 3.2. Es decir, en el grafo de unión de la Figura 3.4 se identifica que la

dirección positiva del flujo de la potencia en la unión con conflicto coincide con la del elemento TF virtual mostrado en la Figura 3.1. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (3.3.1) y la Figura 3.3, el valor del módulo m_B del elemento TF virtual es:

$$m_B = \frac{e_{b,y}^{(j)}}{e_{b,x}^{(i)}} = \frac{f_{b,x}^{(i)}}{f_{b,y}^{(j)}} \quad (3.3.4)$$

$$m_B = \frac{e_{b,x}^{(1)}}{e_{b,x}^{(2)}} = \frac{f_{b,x}^{(2)}}{f_{b,x}^{(1)}} \quad (3.3.5)$$

De esta forma, el grafo de unión que resulta de convertir a por unidad el grafo de la Figura 3.2 es el que se muestra en la Figura 3.5.

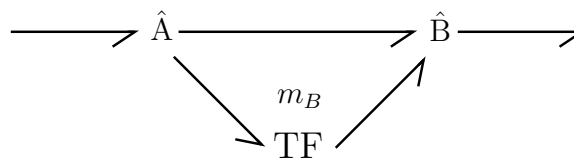


Figura 3.5: Resolución del conflicto en la asignación de las cantidades base. Se muestra la conversión a por unidad del grafo de unión de la Figura 3.2

Así, la aplicación del procedimiento mostrado en el Subtema 3.2 se puede extender a los grafos de unión de WJS con lazos de unión que contienen elementos TF empleando el elemento TF virtual en las uniones del grafo transformado al sistema por unidad en las que se presente un conflicto de asignación de bases.

Este procedimiento se podría realizar de forma secuencial, almacenando las cantidades base, el número de etapa, así como el número de puerto en el que ocurre el conflicto de asignación de cantidades base en algún atributo de cada elemento del grafo de unión, tal como se menciona en el Subtema 3.2.2, de esta forma se podría programar automáticamente el cómputo de los módulos de los elementos TF virtuales donde se requiera.

Equipos y materiales

En este capítulo se plantea un procedimiento genérico de validación de la metodología para conversión al sistema por unidad de los grafos de unión a través de la verificación del escalamiento de la energía transformada irreversiblemente al dominio termodinámico por los elementos resistores R de un puerto, así como de la energía almacenada en los elementos inercia I y capacitancia C de un puerto con característica lineal. Tal condición se presume necesaria y suficiente para demostrar la validez de la metodología propuesta para la conversión al sistema por unidad de los grafos de unión con estructura de unión ponderada posiblemente con lazos que contengan a su vez elementos transformadores TF de módulo constante.

Asimismo, se aborda el modelado a través de grafos de unión del tren de potencia de la turbina eólica con base en un concepto de dos masas. Se describen los elementos que lo componen así como los parámetros y variables asociados con cada uno de estos. Se usan parámetros reales y numéricos encontrados en la literatura con el fin de validar la metodología propuesta por medio de simulaciones.

4.1. Material y equipo

4.1.1. Software

Los modelos dinámicos en cantidades reales obtenidos a través de la metodología de los grafos de unión así como los convertidos al sistema por unidad empleando la metodología propuesta serán resueltos numéricamente usando archivos de scripts basados en comandos en un software de grado comercial (MATLAB).

4.1.2. Validación de los modelos matemáticos

En el Subtema 3.1 se indicó que, en parte, la conversión al sistema por unidad desarrollado busca normalizar la actividad energética de todo el sistema mediante escalar todas y cada una de las etapas del sistema físico por la misma potencia base. Dado que por construcción el procedimiento normaliza la potencia de cada etapa, se desea validar esta primera hipótesis.

A continuación se exponen las ecuaciones de energía de los elementos resistor R, inercia I y capacitancia C en su característica lineal los cuales se obtuvieron mediante resolver la ecuación (3.2.4) para cada caso.

Elemento R

Si se emplea la causalidad resistiva para expresar la ecuación característica del elemento R, para este elemento el problema de calcular la energía convertida irreversiblemente al dominio termodinámico

supone resolver

$$\begin{cases} E(t) = \int_{-\infty}^t P(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot f(\tau) d\tau \\ e = Rf \end{cases} \quad (4.1.1)$$

para $E(t)$.

La energía E convertida al dominio termodinámico por el elemento R de un puerto en su característica lineal resulta:

$$E(t) = R \int_{-\infty}^t f^2(\tau) d\tau \quad (4.1.2)$$

Condición necesaria. A continuación se realiza el escalamiento de la energía convertida irreversiblemente al dominio termodinámico por el elemento R descrito de un grafo de unión en cantidades reales que satisface las condiciones expuestas en los Subtemas 3.2 y 3.3.

De acuerdo con las ecuaciones (3.2.7) y (3.2.5) la energía base se definió numéricamente igual a la potencia base $E_b := P_b = e_b f_b$. Además, para el elemento R de un puerto en su característica lineal, de acuerdo con la ecuación (3.2.19), se definió la siguiente relación:

$$f_b R_b = e_b \quad (4.1.3)$$

por lo que la energía base resulta numéricamente igual a:

$$E_b := R_b f_b^2 \quad (4.1.4)$$

Mutatis mutandis:

$$E_b := \frac{e_b^2}{R_b} \quad (4.1.5)$$

Empleando las ecuaciones (3.1.1), (4.1.5) y (4.1.2) que para referencia se incluyen a continuación en

orden idéntico:

$$\begin{aligned}\bar{y} &:= \frac{y}{y_b} \\ E_b &:= \frac{e_b^2}{R_b} \\ E(t) &= R \int_{-\infty}^t f^2(\tau) d\tau\end{aligned}$$

Ambos lados de la ecuación (4.1.2) se dividen por E_b .

$$\frac{E(t)}{E_b} = \frac{R}{E_b} \int_{-\infty}^t f^2(\tau) d\tau$$

Empleando las ecuaciones (3.1.1), (3.2.35) y (4.1.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \frac{R}{R_b f_b^2} \int_{-\infty}^t f_b^2 \bar{f}^2(\tau) d\tau = \bar{R} \int_{-\infty}^t \bar{f}^2(\tau) d\tau \\ \hat{E} &= \hat{R} \int_{-\infty}^t \bar{f}^2(\tau) d\tau = \bar{R} \int_{-\infty}^t \bar{f}^2(\tau) d\tau \implies\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

Mutatis mutandis,

$$\hat{E} = \frac{1}{\hat{R}} \int_{-\infty}^t \bar{e}^2(\tau) d\tau = \frac{1}{\bar{R}} \int_{-\infty}^t \bar{e}^2(\tau) d\tau \implies\tag{4.1.7}$$

Las expresiones (4.1.6) y (4.1.7) representan la condición necesaria para calcular la energía en el sistema por unidad convertida irreversiblemente al dominio termodinámico en el elemento equivalente \hat{R} del grafo de unión en pu.

Elemento I

Si se emplea la causalidad diferencial para expresar la ecuación característica del elemento I, el problema de calcular la energía almacenada en este elemento supone resolver

$$\begin{cases} E(t) = \int_{-\infty}^t P(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot f(\tau) d\tau \\ I \frac{df}{dt} = e \\ p = If \end{cases} \quad (4.1.8)$$

para $E(t)$.

La energía E almacenada en el elemento I de un puerto en su característica lineal resulta:

$$E(t) = \frac{p^2(t)}{2I} \quad (4.1.9)$$

Cabe destacar que la energía $E(t)$ almacenada en el tiempo $t = 0$ s no necesariamente es $E(0) = 0$ J, ya que su valor depende de cuánto momento generalizado $p(0)$ exista en el elemento I en dicho instante de tiempo.

Condición necesaria. A continuación se realiza el escalamiento de la energía almacenada en el elemento I descrito de un grafo de unión en cantidades reales que satisface las condiciones expuestas en los Subtemas 3.2 y 3.3. Empleando las ecuaciones (3.1.1), (3.2.5), (3.2.7), (3.2.22), (3.2.36) y (4.1.9) que para referencia se incluyen a continuación en orden idéntico:

$$\begin{aligned} \bar{y} &:= \frac{y}{y_b} \\ P_b &= e_b^{(i)} f_b^{(i)} \\ E_b &:= P_b \\ p_b &:= e_b \end{aligned}$$

$$\hat{I} = \frac{f_b I}{e_b} = \frac{I}{R_b} = 2H$$

$$E(t) = \frac{p^2(t)}{2I}$$

Ambos lados de la ecuación (4.1.9) se dividen por E_b .

$$\frac{E(t)}{E_b} = \frac{p^2(t)}{2E_b I}$$

Empleando las ecuaciones (3.1.1), (3.2.5), (3.2.7) y (3.2.22) se obtiene:

$$\hat{E}(t) = \frac{e_b^2 \hat{p}^2(t)}{2f_b e_b I} = \frac{e_b \hat{p}^2(t)}{2f_b I} = \frac{\hat{p}^2(t)}{2 \frac{f_b}{e_b} I} \quad (4.1.10)$$

Finalmente, empleando la ecuación (3.2.36) se obtiene la expresión para el escalamiento de $E(t)$. Es decir,

$$\hat{E}(t) = \frac{\hat{p}^2(t)}{2\hat{I}} \quad \implies \quad (4.1.11)$$

La expresión (4.1.11) representa la condición necesaria para calcular la energía en el sistema por unidad almacenada en el elemento equivalente \hat{I} del grafo de unión en pu.

Elemento C

Si se emplea la causalidad diferencial para expresar la ecuación característica del elemento C, el problema de calcular la energía almacenada en este elemento supone resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} E(t) = \int_{-\infty}^t P(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot f(\tau) d\tau \\ C \frac{de}{dt} = f \\ q = Ce \end{array} \right. \quad (4.1.12)$$

para $E(t)$.

La energía E almacenada en el elemento C de un puerto en su característica lineal resulta:

$$E(t) = \frac{q^2(t)}{2C} \quad (4.1.13)$$

Cabe destacar que la energía $E(t)$ almacenada en el tiempo $t = 0$ s no necesariamente es $E(0) = 0$ J, ya que su valor depende de cuánto desplazamiento generalizado $q(0)$ exista en el elemento C en dicho instante de tiempo.

Condición necesaria. A continuación se realiza el escalamiento de la energía almacenada en el elemento C descrito de un grafo de unión en cantidades reales que satisface las condiciones expuestas en los Subtemas 3.2 y 3.3. Empleando las ecuaciones (3.1.1), (3.2.5), (3.2.7), (3.2.28) (3.2.37) y (4.1.13) que para referencia se incluyen a continuación en orden idéntico:

$$\begin{aligned} \bar{y} &:= \frac{y}{y_b} \\ P_b &= e_b^{(i)} f_b^{(i)} \\ E_b &:= P_b \\ q_b &= C_b e_b \\ \hat{C} &= \frac{e_b}{f_b} C = R_b C = \frac{q_b}{f_b} \bar{C} \\ E(t) &= \frac{q^2(t)}{2C} \end{aligned}$$

Ambos lados de la ecuación (4.1.13) se dividen por E_b .

$$\frac{E(t)}{E_b} = \frac{q^2(t)}{2E_b C}$$

Empleando las ecuaciones (3.1.1), (3.2.5) y (3.2.7) se obtiene:

$$\hat{E}(t) = \frac{q_b^2 \bar{q}^2(t)}{2f_b e_b C_b \bar{C}} \quad (4.1.14)$$

Resolviendo la ecuación (3.2.28) para C_b y sustituyendo en (4.1.14) se obtiene:

$$\hat{E}(t) = \frac{q_b^2 \bar{q}^2(t)}{2 f_b e_b \frac{q_b}{e_b} \bar{C}} = \frac{q_b \bar{q}^2(t)}{2 f_b \bar{C}} = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \frac{f_b}{q_b} \bar{C}} \quad (4.1.15)$$

Además, si el denominador de (4.1.15) es multiplicado por (q_b/f_b) así como por su recíproco y empleando (3.2.37), se tiene

$$\hat{E}(t) = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \frac{f_b}{q_b} \bar{C}} = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \frac{f_b}{q_b} \frac{f_b}{q_b} \frac{q_b}{f_b} \bar{C}} = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \left(\frac{f_b}{q_b} \right)^2 \hat{C}} \quad (4.1.16)$$

Obteniendo así dos posibles expresiones para el escalamiento de $E(t)$. Es decir,

$$\hat{E}(t) = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \frac{f_b}{q_b} \bar{C}} = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \left(\frac{f_b}{q_b} \right)^2 \hat{C}} \quad \implies \quad (4.1.17)$$

La expresión (4.1.17) representa la condición necesaria para calcular la energía en el sistema por unidad almacenada en el elemento equivalente \hat{C} del grafo de unión en pu.

4.2. Grafo de unión en cantidades reales del modelo del tren mecánico de dos masas

El tren mecánico de la turbina eólica se puede modelar mediante el sistema de masas rotatorias que se muestra en la Figura 4.1, en donde ω_t es la velocidad angular del eje del rotor de la turbina eólica y ω_g es la velocidad angular de la flecha del generador. Los demás parámetros y variables se describen en la Tabla 4.1. En la Figura 4.1 se indican los lados de alta y baja velocidad del tren mecánico mediante las etiquetas HSS y LSS (*High-Speed Side* y *Low-Speed Side*, por sus siglas en inglés). Un modelo dinámico de dos masas es típicamente empleado para la realización de estudios de respuesta transitoria de sistemas de energía eolo-eléctrica por ser lo suficientemente preciso en su representación de la

dinámica del tren mecánico [32,42,43].

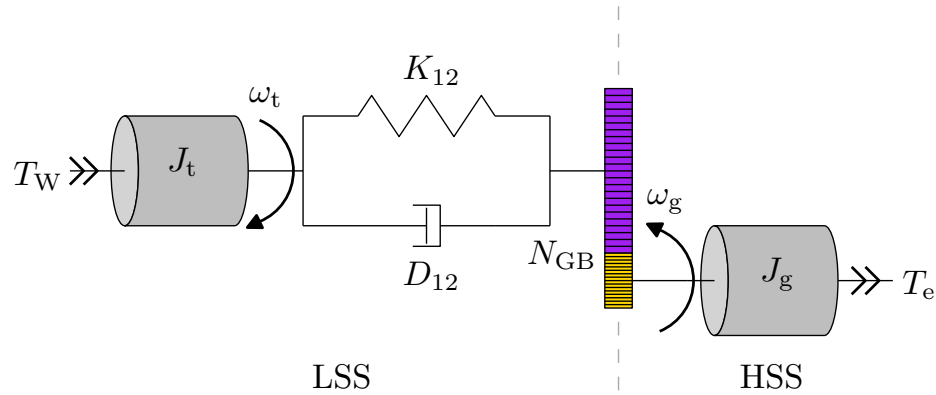


Figura 4.1: Diagrama icónico del modelo de dos masas del tren mecánico de la turbina eólica.

Tabla 4.1: Nomenclatura del tren mecánico de dos masas y unidades del SI.

Variable	Unidades del SI
Coeficiente de fricción.	
D_{12}	$N - m \cdot s / rad$
Coeficiente de resistencia a la torsión.	
K_{12}	$N - m / rad$
Inercia de las masas rotatorias.	
J_t	$kg \cdot m^2$
J_g	$kg \cdot m^2$
Par de aceleración de la turbina.	
T_W	$N - m$
Par eléctrico de la máquina en convención generador.	
T_e	$N - m$
Razón de multiplicación (Módulo del elemento TF).	
N_{GB}	1

El modelo en grafo de unión correspondiente con la Figura 4.1 se muestra en la Figura 4.2 [44]. Dicho modelo en grafo de unión ya ha sido causalmente completado eligiendo la causalidad integral como la preferida.

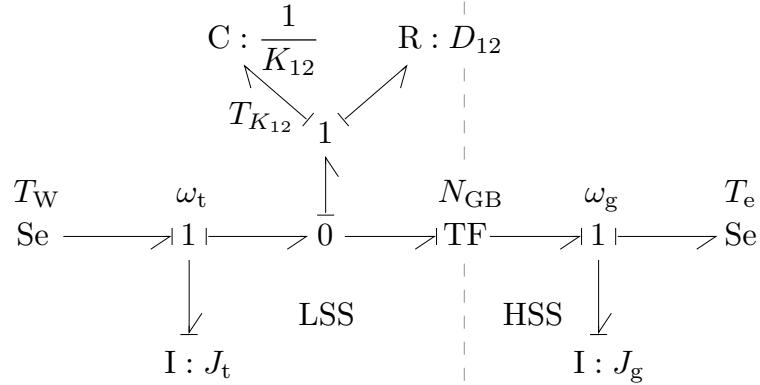


Figura 4.2: Grafo de unión correspondiente con el diagrama icónico del modelo de dos masas del tren mecánico de la turbina eólica, mostrado en la Figura 4.1.

4.2.1. Modelo matemático en cantidades reales

El modelo matemático en cantidades reales correspondiente con el grafo de unión del tren mecánico de dos masas mostrado en la Figura 4.2 se obtuvo manualmente siguiendo el procedimiento para la obtención manual de ecuaciones a partir de un grafo de unión [22].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_{K_{12}}}{dt} = K_{12} \left(\omega_t - \frac{1}{N_{GB}} \omega_g \right) \\ \frac{d\omega_t}{dt} = \frac{1}{J_t} \left(T_W - T_{K_{12}} - D_{12} \left(\omega_t - \frac{1}{N_{GB}} \omega_g \right) \right) \\ \frac{d\omega_g}{dt} = \frac{1}{J_g} \left(-T_e + \frac{1}{N_{GB}} \left(T_{K_{12}} + D_{12} \left(\omega_t - \frac{1}{N_{GB}} \omega_g \right) \right) \right) \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

4.2.2. Datos en cantidades reales

Llevando a cabo una revisión exhaustiva de la literatura, se encontró que existe una relativa escasez de datos reales de turbinas eólicas modeladas bajo el concepto de dos masas. A continuación, en las Tablas 4.2–4.7 se presentan los conjuntos de datos, de acceso público y susceptibles a ser verificados, aportados por las agencias Risø National Laboratory [1] y National Renewable Energy Laboratory

(NREL) [2–4]. Es importante precisar que algunos de los datos mostrados en las Tablas 4.2–4.7 fueron calculados empleando las suposiciones de modelado encontradas en el Subtema 4.2.2 correspondientes con el Método-2 para la reducción de orden del modelo del tren mecánico, detallado en [16]. Como se menciona en [45], las turbinas eólicas de referencia han sido de utilidad para la comunidad investigadora y tecnológica. La turbina de 5 MW de la NREL [2], desarrollada en el año 2005 es una de las más conocidas. Esta última turbina de referencia fue desarrollada empleando una combinación de datos de turbinas comerciales y parámetros de otras turbinas contemporáneas [2].

Tabla 4.2: Datos del modelo de dos masas en [1].

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	5	MW	Potencia nominal
N_{GB}	86.39	1	Razón de multiplicación
n_p	6	-	Número de polos
J_g	600	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del generador
K_{12}	7.5×10^8	$\text{N} - \text{m}/\text{rad}$	Coefficiente de resistencia a la torsión del LSS
D_{12}	0	$\text{N} - \text{m}/(\text{rad}/\text{s})$	Coefficiente de amortiguamiento del LSS
J_H	110,000	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del buje
J_{HB}	NaN	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de los rodamientos del ángulo azimutal de las paletas en torno al LSS
J'_H	110,000	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del buje
J_B	7.381×10^6	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de cada paleta en torno al LSS
J_{3B}	2.2143×10^7	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total de las tres paletas
J_t	2.2253×10^7	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del rotor

Modelo de parámetros concentrados

Con el fin de conformar los datos mostrados en las Tablas 4.2–4.7 con el modelo de dos masas presentado en el Subtema 4.2, se empleó el Método-2 detallado en [16] para la reducción de orden de un modelo de seis masas de la turbina eólica de eje horizontal bajo las siguientes suposiciones de modelado:

- Se asume que las paletas de la turbina son infinitamente rígidas. Además, se asume que los

Tabla 4.3: Datos del modelo de dos masas en [2].

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	5	MW	Potencia nominal
N_{GB}	97	1	Razón de multiplicación
n_p	6	-	Número de polos
J_g	534.116	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del generador
K_{12}	867,637,000	$\text{N} - \text{m}/\text{rad}$	Coefficiente de resistencia a la torsión del LSS
D_{12}	6,215,000	$\text{N} - \text{m}/(\text{rad}/\text{s})$	Coefficiente de amortiguamiento del LSS
J_H	115,926	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del buje
J_{HB}	NaN	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de los rodamientos del ángulo azimutal de las paletas en torno al LSS
J'_H	115,926	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del buje
J_B	11,776,047	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de cada paleta en torno al LSS
J_{3B}	35,328,141	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total de las tres paletas
J_t	3.5444067×10^7	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del rotor

Tabla 4.4: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 750 kW.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	0.75	MW	Potencia nominal
N_{GB}	62.83185307	1	Razón de multiplicación
n_p	4	-	Número de polos
J_g	16.651	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del generador
K_{12}	129,646,445	$\text{N} - \text{m}/\text{rad}$	Coefficiente de resistencia a la torsión del LSS
D_{12}	278,494	$\text{N} - \text{m}/(\text{rad}/\text{s})$	Coefficiente de amortiguamiento del LSS
J_H	5,161	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del buje
J_{HB}	2,324.2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de los rodamientos del ángulo azimutal de las paletas en torno al LSS
J'_H	7,485.17321	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del buje
J_B	180,640	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de cada paleta en torno al LSS
J_{3B}	541,920	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total de las tres paletas
J_t	5.494051732×10^5	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del rotor

momentos de inercia en torno a la raíz, el eje de baja velocidad, de cada una de las tres paletas de la turbina tienen todos la misma magnitud, es decir, $J_{B1} = J_{B2} = J_{B3} = J_B$ [3, 16]. Así, la turbina podría considerarse como un disco de gran radio y grosor pequeño con distribución uniforme de masa, tal que el momento de inercia total de las tres paletas equivale a la suma de los momentos de inercia de cada una de las mismas, es decir $J_{3B} = J_{B1} + J_{B2} + J_{B3} = 3J_B$ [16].

Tabla 4.5: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 1.5 MW.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	1.5	MW	Potencia nominal
N_{GB}	87.965	1	Razón de multiplicación
n_p	4	-	Número de polos
J_g	56.442	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del generador
K_{12}	483, 129, 640	$\text{N} - \text{m}/\text{rad}$	Coefficiente de resistencia a la torsión del LSS
D_{12}	1, 355, 794	$\text{N} - \text{m}/(\text{rad}/\text{s})$	Coefficiente de amortiguamiento del LSS
J_H	29, 975	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del buje
J_{HB}	12, 500.2	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de los rodamientos del ángulo azimutal de las paletas en torno al LSS
J'_H	42, 475.20625	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del buje
J_B	798, 506	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de cada paleta en torno al LSS
J_{3B}	2, 395, 518	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total de las tres paletas
J_t	2.437993206×10^6	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del rotor

Tabla 4.6: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 3 MW.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	3	MW	Potencia nominal
N_{GB}	124.4070691	1	Razón de multiplicación
n_p	4	-	Número de polos
J_g	177.885	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del generador
K_{12}	1, 039, 402, 036	$\text{N} - \text{m}/\text{rad}$	Coefficiente de resistencia a la torsión del LSS
D_{12}	4, 992, 005	$\text{N} - \text{m}/(\text{rad}/\text{s})$	Coefficiente de amortiguamiento del LSS
J_H	197, 987	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del buje
J_{HB}	70, 729.9	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de los rodamientos del ángulo azimutal de las paletas en torno al LSS
J'_H	268, 716.97303	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del buje
J_B	5, 012, 212	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de cada paleta en torno al LSS
J_{3B}	15, 036, 636	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total de las tres paletas
J_t	1.530535297×10^7	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del rotor

- Se considera que los elementos rotativos en el eje de baja velocidad que contribuyen de forma preponderante a la inercia total del mismo son el buje, con inercia J_H , y los rodamientos de las tres paletas, con inercia J_{HB} . Así, la inercia total del buje J'_H puede asemejarse a la de un disco y se calcula mediante $J'_H = J_H + J_{HB}$.

Tabla 4.7: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4]. Turbina de 5 MW.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	5	MW	Potencia nominal
N_{GB}	160.8495439	1	Razón de multiplicación
n_p	4	-	Número de polos
J_g	438.855	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del generador
K_{12}	2,300,693,020	$\text{N} - \text{m}/\text{rad}$	Coefficiente de resistencia a la torsión del LSS
D_{12}	14,909,175	$\text{N} - \text{m}/(\text{rad}/\text{s})$	Coefficiente de amortiguamiento del LSS
J_H	668,485	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia del buje
J_{HB}	255,550.6	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de los rodamientos del ángulo azimutal de las paletas en torno al LSS
J'_H	924,035.57012	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del buje
J_B	17,475,408	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia de cada paleta en torno al LSS
J_{3B}	52,426,224	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total de las tres paletas
J_t	5.335025957×10^7	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Inercia total del rotor

- La inercia total del rotor J_t , en el eje de baja velocidad, se puede calcular mediante suponer que el coeficiente de resistencia a la torsión del eje de baja velocidad referido al eje de alta velocidad es menor que el del eje de alta velocidad [16]. Así, la inercia total del rotor se calcula mediante sumar las inercias de los discos equivalentes a la turbina y al buje, es decir $J_t = J_{3B} + J'_H$.
- Se asume que el valor de la inercia del generador J_g provisto en las diversas hojas de datos se conforma a que, considerando que el eje de alta velocidad es infinitamente rígido, los elementos con valores preponderantes de inercia son el eje de alta velocidad, los acoplamientos y los discos de freno; desestimando así el valor de la inercia de la caja de engranajes.

4.2.3. Conversión a pu

Con el fin de realizar la conversión al sistema pu del grafo de unión de la Figura 4.2 de acuerdo con la metodología descrita en el Capítulo 3, se lleva a cabo la propagación de las cantidades base en las diversas etapas del grafo siguiendo las trayectorias de propagación, como se muestra en la Figura 4.3. En la Figura 4.3 se puede notar que las variables y cantidades asociadas con las cantidades base de la

etapa (i) tienen el superíndice (i).

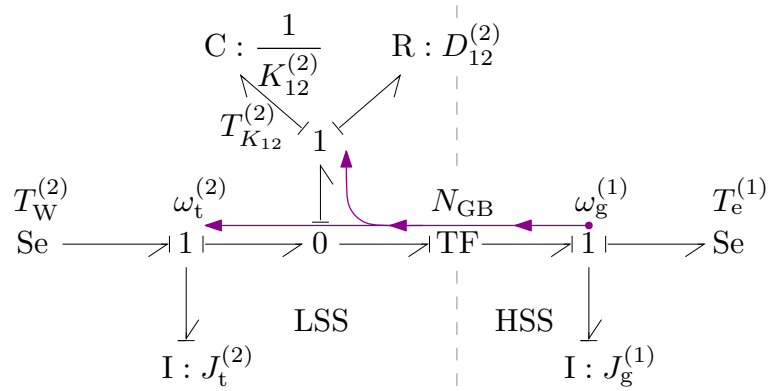


Figura 4.3: Propagación de las cantidades base a través del grafo de unión del modelo de dos masas del tren mecánico.

Se observa que en el dominio de la mecánica rotacional $e \equiv T$, $f \equiv \omega$, $p \equiv L$, $q \equiv \theta$, $R \equiv D$, $I \equiv J$ y $C \equiv 1/K$.

Cantidades base

Etapa (0). En primera instancia, en la etapa (0) se definen arbitrariamente las cantidades base $\{T_b^{(0)}, \omega_b^{(0)}, P_b^{(0)}\}$ con $P_b = P_b^{(0)} = T_b^{(0)} \omega_b^{(0)}$ y se hace $\theta_b^{(0)} := 1$ rad. A partir de dicha definición y empleando las ecuaciones (3.2.5), (3.2.7), (3.2.8), (3.2.10), (3.2.19), (3.2.22) y (3.2.28), las demás cantidades base, i.e., $T_b := P_b/\omega_b$, $E_b := P_b$, $L_b := T_b$, $D_b := T_b/\omega_b$ y $C_b \equiv 1/K_b := \theta_b/T_b$ serán calculadas a partir de las cantidades base $\omega_b^{(0)}$, P_b y $\theta_b^{(0)}$ en cada etapa del grafo de unión.

Empleando las ecuaciones (3.2.5), (3.2.8), (3.2.19) y (3.2.28) se tiene que:

$$T_b^{(0)} := \frac{P_b}{\omega_b^{(0)}} \quad (4.2.2)$$

$$D_b^{(0)} := \frac{T_b^{(0)}}{\omega_b^{(0)}} \quad (4.2.3)$$

$$C_b^{(0)} \equiv \frac{1}{K_b^{(0)}} := \frac{\theta_b^{(0)}}{T_b^{(0)}} \quad (4.2.4)$$

Etapa (1). A continuación se realiza el cómputo de las cantidades base $\omega_b^{(1)}$ y $\theta_b^{(1)}$ asociadas con la etapa (1) a partir de las de la etapa (0), empleando las ecuaciones (3.2.8) y (3.2.10).

Asumiendo que las cantidades base de la etapa (0) se definieron en la etapa eléctrica de una máquina eléctrica de n_p polos, e.g., $n_p = 4$, se tiene entonces que el cómputo de las cantidades base de la etapa (1) se puede realizar mediante [39]:

$$\omega_b^{(1)} = \frac{2}{n_p} \omega_b^{(0)} \quad (4.2.5)$$

$$\theta_b^{(1)} = \frac{2}{n_p} \theta_b^{(0)} \quad (4.2.6)$$

Además, empleando las ecuaciones (3.2.5), (3.2.8), (3.2.19) y (3.2.28) se tiene que:

$$T_b^{(1)} := \frac{P_b}{\omega_b^{(1)}} \quad (4.2.7)$$

$$D_b^{(1)} := \frac{T_b^{(1)}}{\omega_b^{(1)}} \quad (4.2.8)$$

$$C_b^{(1)} \equiv \frac{1}{K_b^{(1)}} := \frac{\theta_b^{(1)}}{T_b^{(1)}} \quad (4.2.9)$$

Etapa (2). A continuación se realiza el cómputo de las cantidades base $\omega_b^{(2)}$ y $\theta_b^{(2)}$ asociadas con la etapa (2) a partir de las de la etapa (1), empleando las ecuaciones (3.2.8) y (3.2.10). En estas ecuaciones, las cantidades base del primario y secundario del elemento TF: m_i tienen asociados los superíndices (i) y (j), respectivamente, como se muestra en la Figura 2.3.

Así, a partir de observar que en la Figura 4.3 las cantidades base de la etapa (1) se propagan del lado secundario, i.e., etapa (j), al lado primario del elemento TF: N_{GB} , en donde se encuentran las cantidades base de la etapa (2), i.e., etapa (i), se tiene que el cómputo de las cantidades base de la etapa (2) se

puede realizar mediante:

$$\omega_b^{(2)} = \frac{1}{N_{GB}} \omega_b^{(1)} \quad (4.2.10)$$

$$\theta_b^{(2)} = \frac{1}{N_{GB}} \theta_b^{(1)} \quad (4.2.11)$$

Además, empleando las ecuaciones (3.2.5), (3.2.8), (3.2.19) y (3.2.28) se tiene que:

$$T_b^{(2)} := \frac{P_b}{\omega_b^{(2)}} \quad (4.2.12)$$

$$D_b^{(2)} := \frac{T_b^{(2)}}{\omega_b^{(2)}} \quad (4.2.13)$$

$$C_b^{(2)} \equiv \frac{1}{K_b^{(2)}} := \frac{\theta_b^{(2)}}{T_b^{(2)}} \quad (4.2.14)$$

Parámetros y variables en pu

Para realizar la conversión al sistema por unidad del grafo de unión del modelo de dos masas del tren mecánico mostrado en la Figura 4.3, se emplea reiteradamente la definición de cantidad pu (3.1.1), así como las ecuaciones (3.2.13), (3.2.35), (3.2.36) y (3.2.37) para calcular los valores de las resistencias, inercias y capacitancias equivalentes del grafo de unión en el sistema por unidad.

Etapa (1)

$$\bar{T}_e = \frac{T_e}{T_b^{(1)}} \quad (4.2.15)$$

$$\bar{\omega}_g = \frac{\omega_g}{\omega_b^{(1)}} \quad (4.2.16)$$

$$\hat{I}_g = 2H_g = \frac{\omega_b^{(1)}}{T_b^{(1)}} J_g \quad (4.2.17)$$

Etapa (2)

$$\bar{T}_W = \frac{T_W}{T_b^{(2)}} \quad (4.2.18)$$

$$\bar{T}_{K_{12}} = \frac{T_{K_{12}}}{T_b^{(2)}} \quad (4.2.19)$$

$$\bar{\omega}_t = \frac{\omega_t}{\omega_b^{(2)}} \quad (4.2.20)$$

$$\bar{D}_{12} = \frac{D_{12}}{D_b^{(2)}} \quad (4.2.21)$$

$$\hat{I}_t = 2H_t = \frac{\omega_b^{(2)}}{T_b^{(2)}} J_t \quad (4.2.22)$$

$$\bar{K}_{12} = \frac{K_{12}}{K_b^{(2)}} \quad (4.2.23)$$

$$\hat{C}_{12} = \frac{1}{\hat{K}_{12}} = \frac{T_b^{(2)}}{\omega_b^{(2)}} \frac{1}{K_{12}} = \frac{\theta_b}{\omega_b} \frac{1}{\bar{K}_{12}} \quad (4.2.24)$$

En resumen, los parámetros pu que serán empleados en el grafo de unión en el sistema por unidad para este sistema definido en el dominio de la mecánica rotacional son:

$$\hat{R} = \bar{R} \equiv \bar{D} \quad (4.2.25)$$

$$\hat{I} = 2H \quad (4.2.26)$$

$$\hat{C} \equiv \frac{\theta_b}{\omega_b} \frac{1}{\bar{K}} = \frac{1}{\hat{K}} \quad (4.2.27)$$

Los valores apropiados de los parámetros y variables se calculan mediante las ecuaciones (4.2.15)–(4.2.24) y se sustituyen en el grafo de unión en el sistema por unidad que se muestra en la Figura 5.1 del Capítulo 5.

Análisis y resultados

En este capítulo se presentan la demostración de la condición suficiente con el fin de demostrar la validez del procedimiento de conversión al sistema por unidad propuesto empleando la metodología de los grafos de unión. Además, se detallan los resultados obtenidos tras aplicar la metodología de conversión al sistema pu a diversos conjuntos de datos reales de parámetros de trenes mecánicos de dos masas, así como a su modelo en grafo de unión y modelo matemático asociado. Se lleva a cabo la reducción de orden del modelo en grafo de unión del tren mecánico de dos masas de la turbina eólica; se incluye la ecuación dinámica correspondiente.

5.1. Validación de los modelos matemáticos

En el Subtema 4.1.2 se expuso la condición necesaria para determinar la validez de la conversión de los modelos a por unidad obtenidos empleando la metodología de los grafos de unión descrita en el

Subtema 3.1.

A continuación se verifica la condición suficiente para las ecuaciones de energía en pu de los elementos resistor R, inercia I y capacitancia C en su característica lineal.

Elemento R

Se obtendrá la expresión de energía para el elemento R de un puerto de la metodología de los grafos de unión en el sistema por unidad descrito en el Subtema 3.2.

Condición suficiente. Si se emplea la causalidad resistiva para expresar la ecuación característica del elemento R, obtener la ecuación de energía implica resolver el sistema de ecuaciones formado por (3.2.6), (3.2.7) y (3.2.20) para $\hat{E}(t)$. Para referencia se incluyen a continuación en orden idéntico:

$$\begin{cases} \bar{P} = \bar{e} \cdot \bar{f} \\ \hat{E} = \int_{-\infty}^t \bar{P} d\tau = \int_{-\infty}^t \bar{e} \cdot \bar{f} d\tau \\ \bar{R}\bar{f} = \bar{e} \end{cases}$$

Tomando la ecuación (3.2.20) del elemento R en causalidad resistiva, y sustituyéndola en la ecuación (3.2.7) se tiene:

$$\hat{E} = \int_{-\infty}^t \bar{P} d\tau = \int_{-\infty}^t \bar{e} \cdot \bar{f} d\tau = \int_{-\infty}^t (\bar{R}\bar{f}) \cdot \bar{f} d\tau = \bar{R} \int_{-\infty}^t \bar{f}^2 d\tau$$

Finalmente, empleando la ecuación (3.2.35) se obtiene:

$$\Leftarrow \hat{E} = \hat{R} \int_{-\infty}^t \bar{f}^2(\tau) d\tau = \bar{R} \int_{-\infty}^t \bar{f}^2(\tau) d\tau \quad (5.1.1)$$

Mutatis mutandis,

$$\Leftarrow \hat{E} = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^t \bar{e}^2(\tau) d\tau = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^t \bar{e}^2(\tau) d\tau \quad (5.1.2)$$

Comparando (4.1.6) con (5.1.1) y (4.1.7) con (5.1.2) se puede concluir que se cumple la condición necesaria y suficiente para el caso del elemento R de un puerto descrito en el Subtema 3.2. \square

Elemento I

Se obtendrá la expresión de energía para el elemento I de un puerto de la metodología de los grafos de unión en el sistema por unidad descrito en el Subtema 3.2.

Condición suficiente. Si se emplea la causalidad diferencial para expresar la ecuación característica del elemento I, obtener la ecuación de energía implica resolver el sistema de ecuaciones formado por (3.2.6), (3.2.7), (3.2.26), (3.2.33) y (3.2.36) para $\hat{E}(t)$. Para referencia se incluyen a continuación en orden idéntico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{P} = \bar{e} \cdot \bar{f} \\ \hat{E} = \int_{-\infty}^t \bar{P} d\tau = \int_{-\infty}^t \bar{e} \cdot \bar{f} d\tau \\ \hat{p} = 2H\bar{f} \\ 2H \frac{d\bar{f}}{dt} = \bar{e} \\ \hat{I} = \frac{f_b}{e_b} I = \frac{I}{R_b} = 2H \end{array} \right.$$

A partir de la ecuación (3.2.26) se despeja \bar{f} y se sustituye en (3.2.33), así:

$$\bar{f} = \frac{\hat{p}}{2H} \quad (5.1.3)$$

$$2H \frac{d\bar{f}}{dt} = 2H \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{p}}{2H} \right) = \frac{d\hat{p}}{dt} = \bar{e} \quad (5.1.4)$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \bar{e} \quad (5.1.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.1.3) y (5.1.5) en (3.2.7) se obtiene:

$$\hat{E} = \int_{-\infty}^t \bar{P} d\tau = \int_{-\infty}^t \bar{e} \cdot \bar{f} d\tau = \int_{-\infty}^t \left(\frac{d\hat{p}}{d\tau} \right) \cdot \left(\frac{\hat{p}}{2H} \right) d\tau \quad (5.1.6)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2H} \int_{-\infty}^t \hat{p} \frac{d\hat{p}}{d\tau} d\tau \quad (5.1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \hat{p} \\ du = \frac{d\hat{p}}{d\tau} d\tau \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \hat{p}(t) \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{p}(t) = 0 \end{array} \right. \quad (5.1.8)$$

Empleando el cambio de variable indicado en la ecuación (5.1.8) y aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo:

$$\hat{E} = \frac{1}{2H} \int_0^{\hat{p}(t)} u du = \frac{1}{2H} \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\hat{p}(t)} \quad (5.1.9)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2H} \frac{\hat{p}^2}{2} = \frac{\hat{p}^2}{4H} \quad (5.1.10)$$

$$\hat{E}(t) = \frac{\hat{p}^2(t)}{4H} \quad (5.1.11)$$

Finalmente, empleando la ecuación (3.2.36) en (5.1.11) se obtiene:

$$\Leftarrow \hat{E}(t) = \frac{\hat{p}^2(t)}{2\hat{I}} \quad (5.1.12)$$

Comparando (4.1.11) con (5.1.12) se puede concluir que se cumple la condición necesaria y suficiente para el caso del elemento I de un puerto descrito en el Subtema 3.2. \square

Elemento C

Se obtendrá la expresión de energía para el elemento C de un puerto de la metodología de los grafos de unión en el sistema por unidad descrito en el Subtema 3.2.

Condición suficiente. Si se emplea la causalidad diferencial para expresar la ecuación característica del elemento C, obtener la ecuación de energía implica resolver el sistema de ecuaciones formado por (3.2.6), (3.2.7), (3.2.29), (3.2.34) y (3.2.37) para $\hat{E}(t)$. Para referencia se incluyen a continuación en orden idéntico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{P} = \bar{e} \cdot \bar{f} \\ \hat{E} = \int_{-\infty}^t \bar{P} d\tau = \int_{-\infty}^t \bar{e} \cdot \bar{f} d\tau \\ \bar{q} = \bar{C} \bar{e} \\ \frac{q_b \bar{C}}{f_b} \frac{d\bar{e}}{dt} = \bar{f} \\ \hat{C} = \frac{e_b}{f_b} C = R_b C = \frac{q_b \bar{C}}{f_b} \end{array} \right.$$

A partir de la ecuación (3.2.29) se despeja \bar{e} y se sustituye en (3.2.34), así:

$$\bar{e} = \frac{\bar{q}}{\bar{C}} \quad (5.1.13)$$

$$\frac{q_b \bar{C}}{f_b} \frac{d\bar{e}}{dt} = \frac{q_b \bar{C}}{f_b} \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{q}}{\bar{C}} \right) = \frac{q_b}{f_b} \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{f} \quad (5.1.14)$$

$$\frac{q_b}{f_b} \frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{f} \quad (5.1.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.1.13) y (5.1.15) en (3.2.7) se obtiene:

$$\hat{E} = \int_{-\infty}^t \bar{P} d\tau = \int_{-\infty}^t \bar{e} \cdot \bar{f} d\tau = \int_{-\infty}^t \left(\frac{\bar{q}}{\bar{C}} \right) \cdot \left(\frac{q_b}{f_b} \frac{d\bar{q}}{d\tau} \right) d\tau \quad (5.1.16)$$

$$\hat{E} = \frac{q_b}{f_b} \frac{1}{\bar{C}} \int_{-\infty}^t \bar{q} \frac{d\bar{q}}{d\tau} d\tau \quad (5.1.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \bar{q} \\ du = \frac{d\bar{q}}{d\tau} d\tau \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \bar{q}(t) \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{q}(t) = 0 \end{array} \right. \quad (5.1.18)$$

Empleando el cambio de variable indicado en la ecuación (5.1.18) y aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo:

$$\hat{E} = \frac{q_b}{f_b} \frac{1}{\bar{C}} \int_0^{\bar{q}(t)} u du = \frac{q_b}{f_b} \frac{1}{\bar{C}} \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\bar{q}(t)} \quad (5.1.19)$$

$$\hat{E}(t) = \frac{q_b}{f_b} \frac{1}{\bar{C}} \frac{\bar{q}^2(t)}{2} \quad (5.1.20)$$

El recíproco de (q_b/f_b) pasa multiplicando al denominador de la ecuación (5.1.20). Además, si el denominador de (5.1.20) es multiplicado por (q_b/f_b) así como por su recíproco, se tiene

$$\hat{E}(t) = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \frac{f_b}{q_b} \bar{C}} = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \frac{f_b}{q_b} \frac{f_b}{q_b} \frac{q_b}{f_b} \bar{C}} = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \left(\frac{f_b}{q_b}\right)^2 \frac{q_b}{f_b} \bar{C}} \quad (5.1.21)$$

Finalmente, empleando la ecuación (3.2.37) en (5.1.21) se obtienen dos posibles expresiones para $\hat{E}(t)$:

$$\Leftarrow \hat{E}(t) = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \frac{f_b}{q_b} \bar{C}} = \frac{\bar{q}^2(t)}{2 \left(\frac{f_b}{q_b}\right)^2 \hat{C}} \quad (5.1.22)$$

Comparando (4.1.17) con (5.1.22) se puede concluir que se cumple la condición necesaria y suficiente para el caso del elemento C de un puerto descrito en el Subtema 3.2. □

5.2. Grafo de unión en el sistema pu del modelo del tren mecánico de dos masas

En la Figura 5.1 se muestra el resultado de la conversión del modelo en grafo de unión del tren mecánico de dos masas del Subtema 4.2.

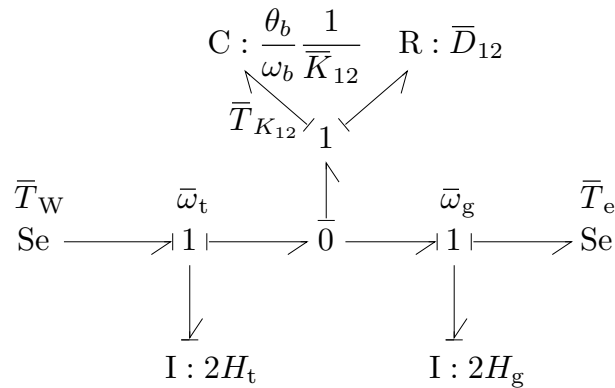


Figura 5.1: Grafo de unión en el sistema por unidad correspondiente con aplicarle la metodología al grafo de unión de la Figura 4.2.

5.2.1. Modelo matemático en por unidad

El modelo matemático en pu correspondiente con el grafo de unión en pu del tren mecánico de dos masas mostrado en la Figura 5.1 se obtuvo manualmente siguiendo el procedimiento para la obtención manual de ecuaciones a partir de un grafo de unión [22].

$$\begin{cases} \frac{d\bar{T}_{K_{12}}}{dt} = \omega_b \bar{K}_{12} (\bar{\omega}_t - \bar{\omega}_g) \\ \frac{d\bar{\omega}_t}{dt} = \frac{1}{2H_t} (\bar{T}_w - \bar{T}_{K_{12}} - \bar{D}_{12} (\bar{\omega}_t - \bar{\omega}_g)) \\ \frac{d\bar{\omega}_g}{dt} = \frac{1}{2H_g} (-\bar{T}_e + \bar{T}_{K_{12}} + \bar{D}_{12} (\bar{\omega}_t - \bar{\omega}_g)) \end{cases} \quad (5.2.1)$$

con $\omega_b = \omega_b^{(0)}$.

A continuación, se define la variable de estado $\bar{x} = [\bar{T}_{K_{12}}, \bar{\omega}_t, \bar{\omega}_g]^t$ y el vector de entrada $\bar{u} = [\bar{T}_w, \bar{T}_e]^t$. Así, la ecuación (5.2.1) puede escribirse en forma matricial como:

$$\dot{\bar{x}} = \hat{A}\bar{x} + \hat{B}\bar{u} \quad (5.2.2)$$

con

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{K}_{12} & -\hat{K}_{12} \\ -\frac{1}{2H_t} & -\frac{\bar{D}_{12}}{2H_t} & \frac{\bar{D}_{12}}{2H_t} \\ \frac{1}{2H_g} & \frac{\bar{D}_{12}}{2H_g} & -\frac{\bar{D}_{12}}{2H_g} \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2H_t} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2H_g} \end{bmatrix} \quad (5.2.4)$$

Las variables de estado en cantidades reales pueden recuperarse a través de la siguiente transformación diagonal de estado:

$$x = T\bar{x} = \begin{bmatrix} T_{K_{12}} \\ \omega_t \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_b^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_b^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_b^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_{K_{12}} \\ \bar{\omega}_t \\ \bar{\omega}_g \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

donde x es el estado del modelo original en cantidades reales (4.2.1), \bar{x} es el estado de la ecuación de estado en pu (5.2.1), y T es la matriz de transformación compuesta de cantidades base no nulas.

Observaciones

- La homogeneidad dimensional se preserva completamente en la representación en pu dada en la ecuación (5.2.1). Este resultado importante es a consecuencia de haber aplicado la metodología formal y sistemática de los grafos de unión a cada uno de los parámetros y variables de la representación en cantidades reales del tren mecánico de dos masas original.
- El comportamiento cualitativo de la representación original en cantidades reales (4.2.1) se preserva completamente por la representación en pu dada en (5.2.1). Al denotar el modelo original en cantidades reales en (4.2.1) en forma matricial como $\dot{x} = Ax + Bu$ y el modelo en pu encontrado en (5.2.2) como $\dot{\bar{x}} = \hat{A}\bar{x} + \hat{B}\bar{u}$ donde $\hat{A} := T^{-1}AT$ o $A = T\hat{A}T^{-1}$, $\hat{B} := T^{-1}BU_B$ y U_B es una matriz diagonal compuesta por los valores base de los pares de entrada en el entorno del grafo de unión; ambas ecuaciones de estado son equivalentes y la transformación $x = T\bar{x}$ dada en (5.2.5) es llamada una transformación de equivalencia [46]. Se sabe que las ecuaciones de estado equivalentes tienen la misma ecuación característica y por lo tanto los mismos componentes de respuesta modal, i.e., mismo comportamiento cualitativo [46].
- Por simplicidad, todas las cantidades pu han sido referidas a la etapa de potencia (i) en donde el valor base $\theta_b^{(i)} = 1$ rad se encuentra definido. Como se indicó en el Subtema 4.2.3, esta es la etapa eléctrica. Las cantidades en el sistema pu asociadas con el valor de esta cantidad base de

dicha etapa de potencia se dice que tienen unidades en radianes eléctricos [31].

- De acuerdo con las ecuaciones (3.1.1), (3.2.28), (3.2.37) y (4.2.27), \bar{K} y \hat{K} tienen unidades distintas, y posiblemente diferentes magnitudes en el sistema pu. En el sistema pu, la constante de resistencia a la torsión equivalente \hat{K} está en s^{-1} . En contraste, en el sistema pu, la constante de resistencia a la torsión \bar{K} está en pu.
- De acuerdo con la ecuación (3.2.29), el par de torsión en pu podría ser expresado como

$$\bar{T} = \bar{K}\bar{\theta} \quad (5.2.6)$$

De acuerdo con (3.2.39) el par de torsión en pu podría expresarse como

$$\bar{T} = \hat{K}\theta_b\bar{\theta}/\omega_b \quad (5.2.7)$$

Si a θ_b se le establece el valor de 1 rad, la ecuación (5.2.7) resulta

$$\bar{T} = \hat{K}\bar{\theta}/\omega_b \quad (5.2.8)$$

- Se puede demostrar que conforme D_1 , D_2 y D_{12} tienden a cero, la parte imaginaria de los eigenvalores complejos conjugados de la matriz de coeficientes A en (4.2.1) tiende a (véase [47])

$$\omega_n = \sqrt{K_{12} \frac{J_1 + n_1^2 J_2}{n_1^2 J_1 J_2}} \quad (5.2.9)$$

donde ω_n en (5.2.9) está en rad/s. Convirtiendo K_{12} , J_1 y J_2 a sus parámetros equivalentes en pu empleando (3.2.5), (3.2.8), (3.2.10), (3.2.12), (3.2.36) y (3.2.37) resulta

$$\omega_n = \sqrt{\hat{K}_{12} \frac{H_1 + H_2}{2H_1 H_2}} = \sqrt{\frac{\omega_b}{\theta_b} \bar{K}_{12} \frac{H_1 + H_2}{2H_1 H_2}} \quad (5.2.10)$$

La ecuación (5.2.10) es idéntica a aquella obtenida mediante aplicar el mismo análisis a la matriz de coeficientes \hat{A} en (5.2.2). Si la relación ω_b/θ_b es referida a las cantidades base en la etapa (0) en donde $\theta_b^{(0)} = 1$ rad, entonces puede ser simplificada adicionalmente para obtener

(véase [26, p. 788], [31])

$$\omega_n = \sqrt{\omega_b \bar{K}_{12} \frac{H_1 + H_2}{2H_1 H_2}} \quad (5.2.11)$$

- A partir de (5.2.8) y (5.2.10), Observe que el coeficiente de resistencia a la torsión equivalente en pu podría estar o no dividido por ω_b . De igual forma, de acuerdo con (5.2.6) y (5.2.11), el coeficiente de resistencia a la torsión en pu podría o no estar siendo multiplicado por ω_b . Esta es una posible fuente de confusión en el uso del sistema pu cuando se aplica al dominio de la energía de la mecánica rotacional, i.e., en el sistema pu, \hat{K} y \bar{K} no son, y de hecho ambas no pueden ser consideradas como cantidades pu exceptuando el caso excepcional en el cual el valor de la cantidad de desplazamiento angular base se tome como $\theta_b := \omega_b$ (compare e.g., [26, p. 788] y [29]).

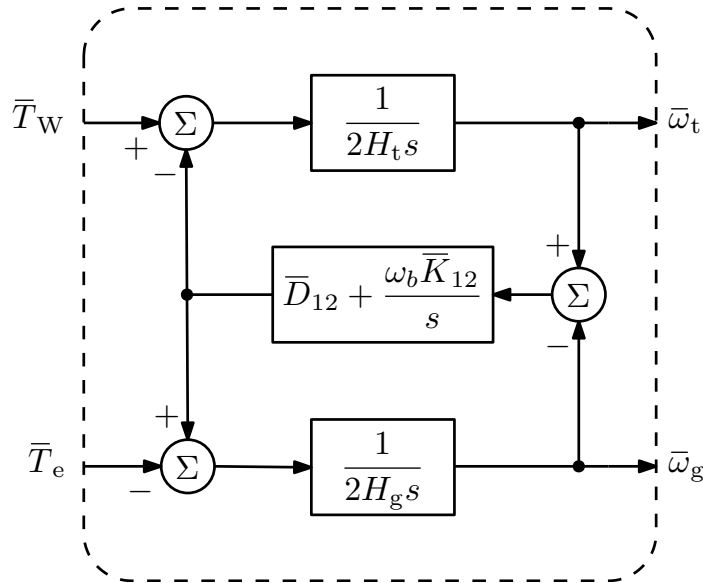


Figura 5.2: Diagrama de bloques correspondiente al modelo en grafo de unión del tren mecánico de dos masas en el sistema pu que se muestra en la Figura 5.1 (compárese con [10, 48]).

Comparando el modelo de dos masas del tren mecánico de las turbinas eólicas mostrado en la Figura 5.2 con los de las Figuras 21, 3 y 4 – 10 en [10], [30] y [48], respectivamente, se tiene que:

- La metodología expuesta en la presente tesis puede ser usada para producir de manera sistemática modelos matemáticos los cuales son consistentes con los encontrados en la literatura, e.g.,

[10, 30, 48].

- La notación establecida en la presente tesis permite relacionar unívocamente los parámetros del sistema pu con las variables del modelo matemático, reduciendo de esta forma la probabilidad de cometer errores humanos [19, p. 4–5], [26, p. 541].
- El procedimiento de conversión al sistema pu desarrollado el cual emplea la metodología de los grafos de unión permite el desarrollo de conjuntos de datos en el sistema pu a partir de conjuntos en cantidades reales, lo cual permite a su vez dimensionar correctamente la dinámica de las turbinas usadas para diversos estudios de estabilidad.
- Dada la naturaleza física de los sistemas electromecánicos, la metodología de grafos de unión permite establecer un punto intermedio durante los procesos de diseño, simulación y control de los sistemas de potencia eléctricos; de forma que el emplear las expresiones matemáticas semejantes a leyes físicas de los grafos de unión en el sistema por unidad, indicadas en el procedimiento propuesto, informa a los analistas, técnicos y demás profesionales respecto a la pertinencia de los datos de entrada [19].

5.2.2. Datos en por unidad

En el caso del modelo del tren mecánico de dos masas en grafo de unión mostrado en la Figura 4.2, el resultado de aplicar el procedimiento de conversión al sistema por unidad descrito en el Subtema 4.2.3 a los datos de las Tablas 4.2–4.7 se encuentra contenido en las Tablas 5.1–5.6.

Comparando los valores de los parámetros encontrados en las Tablas 4.2–4.7 con los de las Tablas 5.1–5.6 es evidente que mientras que en cantidades reales los valores de los parámetros se encuentran en un amplio intervalo de valores con diversos órdenes de magnitud, las cantidades del sistema pu se encuentran dentro de un intervalo de valores mucho más corto con un mucho menor número de órdenes de magnitud. Esta es una ventaja clave que ofrece el sistema por unidad. Con base en estas

Tabla 5.1: Datos del modelo de dos masas en [1] convertidos a pu.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	5	MW	Potencia base
ω_b	$2\pi 60$	rad/s	Velocidad angular base
H_g	0.947482023	s	Inercia del generador
\bar{K}_{12}	0.841885288	1	Coefficiente de resistencia a la torsión
\hat{K}_{12}	317.3832764	s^{-1}	Coefficiente de resistencia a la torsión
\bar{D}_{12}	0	1	Coefficiente de amortiguamiento
H_t	4.707851933	s	Inercia de la turbina

Tabla 5.2: Datos del modelo de dos masas en [2] convertidos a pu.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	5	MW	Potencia base
ω_b	$2\pi 60$	rad/s	Velocidad angular base
H_g	0.84344218	s	Inercia del generador
\bar{K}_{12}	0.77252617	1	Coefficiente de resistencia a la torsión
\hat{K}_{12}	291.2355049	s^{-1}	Coefficiente de resistencia a la torsión
\bar{D}_{12}	2.086158915	1	Coefficiente de amortiguamiento
H_t	5.948669056	s	Inercia de la turbina

Tabla 5.3: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 750 kW convertidos a pu.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	750	kW	Potencia base
ω_b	$2\pi 60$	rad/s	Velocidad angular base
H_g	0.394413079	s	Inercia del generador
\bar{K}_{12}	4.126774513	1	Coefficiente de resistencia a la torsión
\hat{K}_{12}	1555.757339	s^{-1}	Coefficiente de resistencia a la torsión
\bar{D}_{12}	3.341933464	1	Coefficiente de amortiguamiento
H_t	3.296431039	s	Inercia de la turbina

observaciones al modelo del tren mecánico de dos masas en pu se le pueden efectuar razonablemente simplificaciones adicionales.

Considere por ejemplo los casos en los que H_g y H_t permanecen relativamente en el mismo orden de

Tabla 5.4: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 1.5 MW convertidos a pu.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	1.5	MW	Potencia base
ω_b	$2\pi 60$	rad/s	Velocidad angular base
H_g	0.668472254	s	Inercia del generador
\bar{K}_{12}	3.923049036	1	Coficiente de resistencia a la torsión
\hat{K}_{12}	1478.954644	s^{-1}	Coficiente de resistencia a la torsión
\bar{D}_{12}	4.150351512	1	Coficiente de amortiguamiento
H_t	3.731587834	s	Inercia de la turbina

Tabla 5.5: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 3 MW convertidos a pu.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	3	MW	Potencia base
ω_b	$2\pi 60$	rad/s	Velocidad angular base
H_g	1.053392747	s	Inercia del generador
\bar{K}_{12}	2.109809865	1	Coficiente de resistencia a la torsión
\hat{K}_{12}	795.3795807	s^{-1}	Coficiente de resistencia a la torsión
\bar{D}_{12}	3.820022192	1	Coficiente de amortiguamiento
H_t	5.856042613	s	Inercia de la turbina

Tabla 5.6: Datos del modelo de dos masas en [3] y en [4] - Turbina de 5 MW convertidos a pu.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
P_b	5	MW	Potencia base
ω_b	$2\pi 60$	rad/s	Velocidad angular base
H_g	1.559277086	s	Inercia del generador
\bar{K}_{12}	1.676177979	1	Coficiente de resistencia a la torsión
\hat{K}_{12}	631.9042108	s^{-1}	Coficiente de resistencia a la torsión
\bar{D}_{12}	4.094927216	1	Coficiente de amortiguamiento
H_t	7.326543215	s	Inercia de la turbina

magnitud y el valor de \bar{K}_{12} es relativamente grande, como se puede observar en las Tablas 5.3–5.6. Si se considera que $\bar{K}_{12} \gg 1$ y desestimado el valor de \bar{D}_{12} , el modelo en grafo de unión de la Figura 5.1 puede simplificarse como se muestra en la Figura 5.3. En la Figura 5.3 se muestra el grafo de unión causalmente completado del modelo de una masa del tren mecánico de la turbina eólica, en donde el

elemento $I:2H_g$ recibe causalidad diferencial.

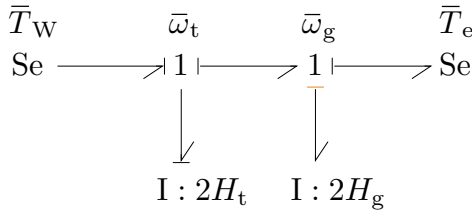


Figura 5.3: Simplificación del grafo de unión en el sistema por unidad correspondiente con aplicar las suposiciones de modelado $\bar{K}_{12} \rightarrow \infty$ y $\bar{D}_{12} \rightarrow 0$ al grafo de unión de la Figura 5.1.

En la Figura 5.3 se observa que $\bar{\omega}_g := \bar{\omega}_t$, así, el tren mecánico de la turbina eólica y el generador tienen en total un momento angular dado por $\hat{L} = (2H_t + 2H_g)\bar{\omega}_t = \hat{L}\bar{\omega}_t = 2H\bar{\omega}_t$. Observando que en general $\bar{\omega}_g = \bar{\omega}_t$ e identificando que en este modelo de una masa del tren mecánico existe solamente una masa giratoria con inercia $H = H_t + H_g$ [19, 34, 39, 48] (compárese con [33, p. 833]), se obtiene el modelo de una masa del tren mecánico de la turbina eólica, mostrado en la Figura 5.4.

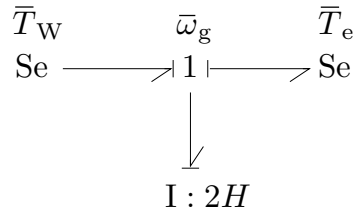


Figura 5.4: Grafo de unión en el sistema por unidad correspondiente con el modelo de una masa del tren mecánico.

El modelo matemático correspondiente con el modelo de una masa del tren mecánico en grafo de unión mostrado en la Figura 5.4 está dado por (compárese con [28]):

$$\frac{d\bar{\omega}_g}{dt} = \frac{\bar{T}_w - \bar{T}_e}{2H} \quad (5.2.12)$$

con $H = H_t + H_g$.

Tanto el modelo matemático (5.2.12) como el modelo en grafo de unión mostrado en la Figura 5.4 pueden ser usados cuando los aerogeneradores incluyen dispositivos convertidores de fuente de voltaje (*Voltage-Source Converter*, VSC por sus siglas en inglés) cuyos controles pueden amortiguar efectivamente el efecto sombra de la torre y las oscilaciones del tren mecánico, lo cual a su vez permitiría

considerar que el tren mecánico es infinitamente rígido [19]. De esta forma se estarían efectivamente desestimando los efectos de los componentes aerodinámicos y mecánicos, lo cual no permitiría la simulación de oscilaciones de potencia [10].

Se demostró la aplicabilidad del método de conversión al sistema por unidad para la conversión de los datos de los modelos de tren mecánico de dos masas de la turbina eólica, el cual tiene la ventaja de presentar la trazabilidad de los datos obtenidos, así como de dar certeza acerca de la validez de los mismos.

Los resultados encontrados durante el desarrollo del presente tema de tesis respaldan el hecho de que los métodos, innovaciones y resultados de la investigación se han particularizado al nivel de un solo componente de la turbina eólica en la disciplina de matemáticas aplicadas [45, 49]. Se han empleado componentes de referencia los cuales permiten la comparación de los resultados y de las distintas estrategias de simulación y control de las turbinas eólicas [1–4, 45, 50]. El lograr este avance en el uso de los sistemas por unidad, permite realizar la comparación directa de los resultados a partir de los datos y aunado a esto, se constata que la metodología de los grafos de unión empleada a lo largo de esta tesis representa un formalismo y una herramienta poderosa para el modelado de sistemas físicos que permite la comunicación de los resultados entre diversos grupos especializados en las diversas áreas de la ingeniería. Una de los principales objetivos logrados es el proveer de un marco teórico bien fundamentado que permite lograr la reproducibilidad de los resultados con el fin de que puedan ser usados para la validación de diversas técnicas de control, estudios de estabilidad y en general en el diseño concurrente de los diversos componentes de las turbinas eólicas [45, 51].

Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se muestran las conclusiones del trabajo realizado en la presente tesis y se ofrecen recomendaciones para trabajos futuros a desarrollar empleando el procedimiento de conversión a pu basado en la metodología de los grafos de unión.

6.1. Conclusiones

En el presente trabajo la metodología de los grafos de unión fue empleada para desarrollar modelos matemáticos de sistemas físicos que exhiben la característica de ser dimensionalmente correctos y que se conforman a las suposiciones de modelado.

Se desarrolló y validó teóricamente el procedimiento de conversión al sistema por unidad de grafos de unión que correspondan con estructuras de unión ponderadas, así como para estructuras de unión en las cuales no haya lazos causales, ni existan elementos transformador (TF) ni girador (GY) de módulo m o relación r variantes en el tiempo.

Se obtuvieron diversos modelos en pu del tren mecánico de turbinas eólicas de eje horizontal usando la metodología descrita, la cual puede ser usada para estandarizar la conversión al sistema por unidad de los parámetros físicos de turbinas eólicas de diversas capacidades los cuales se encuentran reportados en la literatura. Se reconoce que no fue posible llevar a cabo la validación experimental de los modelos matemáticos; sin embargo, la metodología de los grafos de unión permite realizar la validación formal de los mismos. Adicionalmente, se comprobó que la metodología de los grafos de unión puede ser usada para formalizar el proceso de cambio de base de las cantidades del sistema por unidad. Es evidente que al no existir ambigüedades en el proceso de conversión al sistema por unidad, se minimiza la probabilidad de cometer errores en el cálculo de las cantidades por unidad y en la sustitución las variables y parámetros de la turbina en los diversos modelos obtenidos, aumentando así la confiabilidad de los resultados. Finalmente, relacionar los modelos en forma de ecuaciones diferenciales algebraicas y en diagramas de bloques con el grafo de unión evita que existan errores de signo cuando se emplean diferentes convenciones.

Se observa que el proceso utilizado para la conversión al sistema por unidad es conservador de energía y está bien definido, por lo que la probabilidad de formular modelos erróneos se reduce drásticamente.

Se puede notar que la metodología de los grafos de unión es una herramienta sólida para el modelado de sistemas físicos lineales variantes e invariantes en el tiempo, que permite generalizar comportamientos y deducciones de diferentes dominios de la energía, empleando un formalismo bien establecido.

6.2. Trabajos futuros

- Desarrollar un modelo en por unidad de la caja de engranajes de sistema planetario con dos etapas paralelas de una turbina eólica.
- Investigar la posibilidad de desarrollar un modelo aumentado del tren mecánico el cual incorpore los modelos en pu de la caja de engranajes de sistema planetario con dos etapas paralelas y del tren mecánico de dos masas.
- Investigar si es posible extender el procedimiento de conversión a pu a los grafos de unión con elementos TF, GY, MTF y MGY con módulos variantes en el tiempo.
- Investigar la posibilidad de conversión al sistema por unidad de los elementos R, C e I multipuerto, así como de los elementos TF y GY multipuerto de módulo constante.
- Desarrollar un algoritmo computacional que realice de forma automática la propagación de las cantidades base para ciertas trayectorias de propagación, y que así mismo realice el cómputo de las cantidades base y valores en pu de los elementos de cada etapa de un grafo de unión de estructura de unión ponderada con mallas simples, de haberlas.
- Explorar la posibilidad de desarrollar modelos en el sistema por unidad usando la metodología de los grafos de unión para las diversas máquinas eléctricas empleadas en los sistemas de generación eoloeléctrica.

6.3. Publicaciones derivadas del presente trabajo

- J. Rodríguez-Guillén, R. Salas-Cabrera, and P. M. García-Vite, “Bond graph as a formal methodology for obtaining a wind turbine drive train model in the per-unit system,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 124, p. 106382, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2020.106382>
- J. Rodríguez-Guillén and R. Salas-Cabrera, “Per-unit quantities calculation method for the two-mass drive train model of a wind turbine using the bond graph methodology,” Apr. 2022, preprint submitted to *Renewable Energy*.

Bibliografía

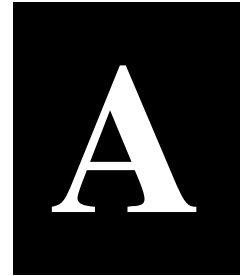
- [1] T. Krogh, “HAWC load simulation of generic 5MW offshore wind turbine model,” Risø National Laboratory, Roskilde, Denmark, Tech. Rep. 1475(EN), Aug. 2004. [Online]. Available: https://orbit.dtu.dk/files/7711272/ris_r_1475.pdf
- [2] J. Jonkman, S. Butterfield, W. Musial, and G. Scott, “Definition of a 5-MW reference wind turbine for offshore system development,” National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO, Tech. Rep. NREL/TP-500-38060, 2 2009. [Online]. Available: <https://www.osti.gov/biblio/947422>
- [3] K. L. Dykes and J. Rinker, “WindPACT reference wind turbines,” National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO, USA, Tech. Rep. NREL/TP-5000-67667, Apr. 2018.
- [4] J. Rinker, “Microsoft excel files for the WindPACT reference models,” https://github.com/WISDEM/Ref_Turbines/tree/master/WindPACT/excel_design_files, Aug. 2016, [Última consulta: 01 de diciembre de 2021].
- [5] B. B. Adetokun, C. M. Muriithi, and J. O. Ojo, “Voltage stability assessment and enhancement of power grid with increasing wind energy penetration,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 120, p. 105988, 2020. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061520300387>
- [6] Comisión Federal de Electricidad, “Reporte anual 2015,” <http://bit.ly/2wiDpDp>, May 2015.
- [7] —, “Informe anual 2020,” <https://bit.ly/3ndQGt3>, Apr. 2021.
- [8] G. W. E. Council, “Global wind report 2016,” Global Wind Energy Council, Ulaanbaatar, Mongolia, Tech. Rep., May 2017.
- [9] Comisión Federal de Electricidad, *Código de Red*. Diario Oficial de la Federación, Apr. 2016.
- [10] *Wind Energy Generation Systems – Part 27-1: Electrical simulation models for wind power generation – Wind turbines*, International Electrotechnical Commission Std. IEC 61 400-27-1, Rev. 2.0, Jul. 2020. [Online]. Available: <https://webstore.iec.ch/publication/32564>
- [11] J. A. Cruz-Tavira and G. Rodríguez Gómez, “¿es posible mejorar la eficiencia de cómputo de un modelo ordenando sus ecuaciones?” in *XIII International Conference on Computing*. Mexico: CIC IPN, Oct. 2004.

- [12] S. Heier, *Grid Integration of Wind Energy: Onshore and Offshore Conversion Systems*, 3rd ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons Inc., 2014.
- [13] A. Aparician, “Patrones de vórtice a sotavento de una torre de aerogenerador multi-MW, en condiciones de viento extremo,” Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ingeniería, La Plata, Argentina, Oct. 2019.
- [14] K. R. Rao, *Wind Energy for Power Generation*. Springer International Publishing, 2019.
- [15] V. Yaramasu, B. Wu, P. C. Sen, S. Kouro, and M. Narimani, “High-power wind energy conversion systems: State-of-the-art and emerging technologies,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 103, no. 5, pp. 740–788, May 2015.
- [16] S. M. Mueen, J. Tamura, and T. Murata, *Stability Augmentation of a Grid-connected Wind Farm*, 1st ed. Springer-Verlag London, 2009.
- [17] K. Arnaudov and D. P. Karaivanov, *Planetary Gear Trains*. CRC Press, mar 2019.
- [18] F. Gonzalez-Longatt, P. Regulski, H. Novanda, and V. Terzija, “Effect of the shaft stiffness on the inertial response of the fixed speed wind turbines and its contribution to the system inertia,” in *2011 International Conference on Advanced Power System Automation and Protection*. IEEE, oct 2011.
- [19] F. Milano, *Power System Modelling and Scripting*, ser. Power Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [20] H. Zhao, Q. Wu, I. Margaris, J. Bech, P. E. Sorensen, and B. Andresen, “Implementation and validation of IEC generic type 1a wind turbine generator model,” *International Transactions on Electrical Energy Systems*, vol. 25, no. 9, pp. 1804–1813, apr 2014.
- [21] Z. Xie, Z. Xu, X. Zhang, S. Yang, and L. Wang, “Improved power pulsation suppression of DFIG for wind shear and tower shadow effects,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 5, pp. 3672–3683, May 2017.
- [22] W. Borutzky, *Bond Graph Methodology*, 1st ed. Springer London, 2010.
- [23] W. Borutzky, Ed., *Bond Graphs for Modelling, Control and Fault Diagnosis of Engineering Systems*, 2nd ed. Springer International Publishing, 2017.
- [24] J. Hu, W. Zhao, Y. Han, Z. Hu, and Y. Zheng, “Power flow and efficiency analyses of dual planetary coupling mechanism based on bond graph theory,” *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, vol. 12, no. 2, pp. JAMDSM0054–JAMDSM0054, 2018.
- [25] W. Borutzky, “Bond graph modelling and simulation of multidisciplinary systems – an introduction,” *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 17, no. 1, pp. 3 – 21, 2009, bond Graph Modelling.
- [26] H. Knudsen and J. N. Nielsen, “Introduction to the modelling of wind turbines,” in *Wind Power in Power Systems*, 2nd ed., T. Ackermann, Ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2012, ch. 34, pp. 769–797.

- [27] N. Amutha and B. K. Kumar, "Effect of modeling of induction generator based wind generating systems on determining CCT," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 4, pp. 4456–4464, Nov 2013.
- [28] S. A. Eisa, "Modeling dynamics and control of type-3 DFIG wind turbines: Stability, Q droop function, control limits and extreme scenarios simulation," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 166, pp. 29–42, 2019.
- [29] H. Zhao, Q. Wu, P. Sørensen, J. Bech, and B. Andresen, "Implementation of draft IEC generic model of Type 1 wind turbine generator in PowerFactory and Simulink," in *Proceedings of the 12th wind integration workshop in London 2013*. Energynautics GmbH, 2013.
- [30] X. Zhang, W. He, and J. Hu, "Impact of inertia control of DFIG-based WT on torsional vibration in drivetrain," *IEEE Trans. Sustain. Energy*, pp. 1–1, 2020.
- [31] M. Rahimi and M. Asadi, "Control and dynamic response analysis of full converter wind turbines with squirrel cage induction generators considering pitch control and drive train dynamics," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 108, pp. 280–292, 2019.
- [32] G. P. Prajapat, P. Bhui, N. Senroy, and I. N. Kar, "Modelling and estimation of gear train backlash present in wind turbine driven DFIG system," *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 12, pp. 3527–3535(8), August 2018. [Online]. Available: <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-gtd.2017.1377>
- [33] K. Elkington, J. G. Slootweg, M. Ghandhari, and W. L. Kling, "Reduced-order modelling of wind turbines," in *Wind Power in Power Systems*, 2nd ed., T. Ackermann, Ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2012, ch. 36, pp. 821–847.
- [34] J. Zhang, M. Cui, and Y. He, "Robustness and adaptability analysis for equivalent model of doubly fed induction generator wind farm using measured data," *Applied Energy*, vol. 261, p. 114362, 2020.
- [35] V. Akhmatov, "Analysis of dynamic behaviour of electric power systems with large amount of wind power," Ph.D. dissertation, Technical University of Denmark, Kongens Lyngby, Denmark, Apr. 2003.
- [36] I. Travis, "Per-unit quantities," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 56, no. 12, pp. 22–28, Dec 1937.
- [37] V. Vittal, J. D. McCalley, P. M. Anderson, and A. A. Fouad, *Power System Control and Stability*, 3rd ed. USA: Wiley-IEEE Press, Oct. 2019.
- [38] J. M. Cabello, X. Roboam, S. Junco, E. Bru, and F. Lacressonniere, "Scaling electrochemical battery models for time-accelerated and size-scaled experiments on test-benches," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 32, no. 6, pp. 4233–4240, Nov 2017.
- [39] P. Krause, O. Wasynczuk, S. Sudhoff, and S. Pekarek, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*, 3rd ed. USA: Wiley-IEEE Press, 2013.
- [40] Y. Pan, X. Li, and H. Yu, "Efficient PID Tracking Control of Robotic Manipulators Driven by Compliant Actuators," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 27, no. 2, pp. 915–922, March 2019.

- [41] J. Fortmann, *Modeling of Wind Turbines with Doubly Fed Generator System*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.
- [42] Rashmi and K. N. Shubhanga, “Rotor speed-instability performance of type-1 WECS employing double-cage induction generator,” in *2017 IEEE International Conference on Signal Processing, Informatics, Communication and Energy Systems (SPICES)*. IEEE, aug 2017, pp. 1–6.
- [43] K. Schechner and C. M. Hackl, “Scaling of the drive train dynamics of large-scale wind turbine systems for real-time emulation in small-scale laboratory setups,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 66, no. 9, pp. 6779–6788, Sep. 2019.
- [44] T. Bakka and H. R. Karimi, “Bond graph modeling and simulation of wind turbine systems,” *J. Mech. Sci. Technol.*, vol. 27, no. 6, pp. 1843–1852, Jun. 2013.
- [45] P. Bortolotti, H. C. Tarres, K. L. Dykes, K. Merz, L. Sethuraman, D. Verelst, and F. Zahle, “IEA Wind TCP Task 37: Systems engineering in wind energy - WP2.1 Reference wind turbines,” International Energy Agency Wind Technology Collaboration Programme (IEA Wind), Tech. Rep. NREL/TP-5000-73492, 6 2019. [Online]. Available: <https://www.osti.gov/biblio/1529216>
- [46] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*, 4th ed., ser. The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering. New York: Oxford University Press, 2013.
- [47] I. P. Girsang, J. S. Dhupia, E. Muljadi, M. Singh, and L. Y. Pao, “Gearbox and drivetrain models to study dynamic effects of modern wind turbines,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 50, no. 6, pp. 3777–3786, Nov 2014.
- [48] K. Clark, N. W. Miller, and J. J. Sanchez-Gasca, “Modeling of GE wind turbine-generators for grid studies,” General Electric International, Inc., One River Road, Schenectady, NY 12345, Tech. Rep., Apr. 2010.
- [49] H. Neunzert and D. Prätzel-Wolters, Eds., *Currents in Industrial Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [50] Y. Guo, J. Keller, and R. G. Parker, “Dynamic analysis of wind turbine planetary gears using an extended harmonic balance approach: Preprint,” no. NREL/CP-5000-55355, 6 2012, conference: Presented at International Conference on Noise and Vibration Engineering, 17-19 September 2012, Leuven, Belgium. [Online]. Available: <https://www.osti.gov/biblio/1044460>
- [51] J. A. Sokolowski and C. M. Banks, Eds., *Modeling and simulation fundamentals: theoretical underpinnings and practical domains*, 1st ed. Suffolk, VA: John Wiley & Sons, Inc., 2010.

Anexos



Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

A.1. Cambio de potencia base

Sean $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ y $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,y}\}$ ciertos conjuntos de cantidades base de dos diferentes grafos de unión que tienen estructuras de unión ponderadas (Weighted Junction Structures) idénticas sin elementos transformador modulados (MTF) [22]. Se asume que si existen lazos de unión en el grafo, entonces estos lazos son mallas simples [22]. Se desea relacionar las cantidades pu del primer grafo de unión con aquellas del segundo, en donde exclusivamente los valores base de flujo son iguales, es decir

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

$f_{b,x} = f_{b,y}$. Se tiene entonces que $P_{b,x} \neq P_{b,y}$, de lo contrario el problema sería trivial, con la restricción

$$P_{b,k} = e_{b,k} f_{b,k}, \quad \text{con } k \in \{x, y\} \quad (\text{A.1.1})$$

en alguna etapa del grafo de unión en que la cantidad base del desplazamiento generalizado q se estableció $q_b = 1$. Se usan e , f y P para denotar esfuerzo, flujo y potencia. Las variables R , C , e I denotan Resistencia, Capacitancia e Inductancia generalizadas, respectivamente.

A.1.1. Cantidad pu

En el sistema pu, todas las cantidades en pu para alguna base k se obtienen mediante

$$\bar{z}_k := \frac{z}{z_{b,k}} \quad (\text{A.1.2})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $f_{b,k} = f_{b,x} = f_{b,y}$ se tiene que las cantidades reales y pu mantienen la relación dada por:

$$\bar{z}_x = \frac{z}{z_{b,x}} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\bar{z}_y = \frac{z}{z_{b,y}} \quad (\text{A.1.4})$$

Dividiendo la ecuación (A.1.3) por (A.1.4) se tiene que:

$$\frac{\bar{z}_x}{\bar{z}_y} = \frac{\frac{z}{z_{b,x}}}{\frac{z}{z_{b,y}}} = \frac{z_{b,y}}{z_{b,x}} \quad (\text{A.1.5})$$

$$\frac{\bar{z}_x}{\bar{z}_y} = \frac{z_{b,y}}{z_{b,x}} \quad (\text{A.1.6})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Despejando \bar{z}_y de (A.1.6) se tiene entonces:

$$\bar{z}_y = \frac{z_{b,x}}{z_{b,y}} \bar{z}_x \quad (\text{A.1.7})$$

La cual representa la ecuación para el cambio de base de la cantidad pu \bar{z} , variable o parámetro, de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,y}\}$.

A.1.2. Expresión de cambio de base para \hat{R}

En el caso del elemento R de un puerto, el parámetro de resistencia en por unidad para cierta base k está dado por

$$\hat{R}_k = \frac{f_{b,k}}{e_{b,k}} R = \frac{R}{R_{b,k}} = \bar{R}_k \quad (\text{A.1.8})$$

Multiplicando y dividiendo (A.1.8) por $f_{b,k}$, se tiene

$$\hat{R}_k = \frac{f_{b,k}^2}{e_{b,k} f_{b,k}} R = \frac{f_{b,k}^2}{P_{b,k}} R \quad (\text{A.1.9})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $f_{b,k} = f_{b,x} = f_{b,y}$ se tiene que:

$$\hat{R}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,x}} R \quad (\text{A.1.10})$$

$$\hat{R}_y = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} R \quad (\text{A.1.11})$$

Multiplicando (A.1.10) por $P_{b,x}/P_{b,y}$, se tiene

$$\frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,x}} R = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} R \quad (\text{A.1.12})$$

Comparando (A.1.11) y (A.1.12) se tiene que

$$\hat{R}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} R \quad (\text{A.1.13})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

A partir de la ecuación (A.1.13), y empleando (A.1.1) se tiene que:

$$\hat{R}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{e_{b,x} f_{b,x}}{e_{b,y} f_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{e_{b,x}}{e_{b,y}} \hat{R}_x \quad (\text{A.1.14})$$

Reordenando los términos en (A.1.14), empleando la ecuación (3.2.19) y manteniendo $f_{b,x} = f_{b,y}$, se tiene que:

$$\hat{R}_y = \frac{\frac{e_{b,x}}{f_{b,y}}}{\frac{e_{b,y}}{f_{b,x}}} \hat{R}_x = \frac{e_{b,x}}{e_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{R_{b,x}}{R_{b,y}} \hat{R}_x \quad (\text{A.1.15})$$

$$\hat{R}_y = \frac{R_{b,x}}{R_{b,y}} \hat{R}_x \quad (\text{A.1.16})$$

Finalmente, comparando las ecuaciones (A.1.13), (A.1.14) y (A.1.16), y empleando la ecuación (3.2.35) se tiene:

$$\hat{R}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{e_{b,x}}{e_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{R_{b,x}}{R_{b,y}} \hat{R}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} R \quad (\text{A.1.17})$$

$$\bar{R}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}} \bar{R}_x = \frac{e_{b,x}}{e_{b,y}} \bar{R}_x = \frac{R_{b,x}}{R_{b,y}} \bar{R}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}} R \quad (\text{A.1.18})$$

La cual representa la ecuación para el cambio de base del parámetro \hat{R} en pu de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,x}, P_{b,y}\}$.

A.1.3. Expresión de cambio de base para \hat{I}

En el caso del elemento I de un puerto, el parámetro de inercia equivalente en por unidad para cierta base k está dado por

$$\hat{I}_k = \frac{f_{b,k}}{e_{b,k}} I = \frac{I}{R_{b,k}} = 2H_k \quad (\text{A.1.19})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Multiplicando y dividiendo (A.1.19) por $f_{b,k}$, se tiene

$$\hat{I}_k = \frac{f_{b,k}^2}{e_{b,k}f_{b,k}}I = \frac{f_{b,k}^2}{P_{b,k}}I = 2H_k \quad (\text{A.1.20})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $f_{b,k} = f_{b,x} = f_{b,y}$ se tiene que:

$$\hat{I}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,x}}I = 2H_x \quad (\text{A.1.21})$$

$$\hat{I}_y = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}}I = 2H_y \quad (\text{A.1.22})$$

Multiplicando (A.1.21) por $P_{b,x}/P_{b,y}$, se tiene

$$\frac{P_{b,x}}{P_{b,y}}\hat{I}_x = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}}\frac{f_{b,x}^2}{P_{b,x}}I = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}}I = 2\frac{P_{b,x}}{P_{b,y}}H_x \quad (\text{A.1.23})$$

Comparando (A.1.22) y (A.1.23) se tiene finalmente que

$$\hat{I}_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}}\hat{I}_x = \frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}}I \quad (\text{A.1.24})$$

$$H_y = \frac{P_{b,x}}{P_{b,y}}H_x = \frac{1}{2}\frac{f_{b,x}^2}{P_{b,y}}I \quad (\text{A.1.25})$$

Las cuales representan las ecuaciones para el cambio de base, tanto del parámetro \hat{I} equivalente en pu así como del parámetro H , de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,x}, P_{b,y}\}$.

A.1.4. Expresión de cambio de base para \bar{C} y \hat{C}

Se presenta el procedimiento para deducir la fórmula para el cambio de base de las cantidades \bar{C} y \hat{C} en pu y equivalente en pu, respectivamente.

Expresión de cambio de base para \bar{C}

En el caso del elemento C de un puerto, el parámetro de capacitancia en por unidad para cierta base k está dado por

$$\bar{C}_k = \frac{C}{C_{b,k}} = \frac{e_{b,k} C}{q_{b,k}} \quad (\text{A.1.26})$$

Multiplicando y dividiendo (A.1.26) por $f_{b,k}$ se tiene

$$\bar{C}_k = \frac{e_{b,k} f_{b,k} C}{q_{b,k} f_{b,k}} = \frac{P_{b,k} C}{q_{b,k} f_{b,k}} \quad (\text{A.1.27})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $f_{b,k} = f_{b,x} = f_{b,y}$ y $q_{b,k} = q_{b,x} = q_{b,y}$ se tiene que:

$$\bar{C}_x = \frac{P_{b,x} C}{q_{b,x} f_{b,x}} \quad (\text{A.1.28})$$

$$\bar{C}_y = \frac{P_{b,y} C}{q_{b,x} f_{b,x}} \quad (\text{A.1.29})$$

Multiplicando (A.1.28) por $P_{b,y}/P_{b,x}$, se tiene

$$\frac{P_{b,y} \bar{C}_x}{P_{b,x}} = \frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \frac{P_{b,x} C}{q_{b,x} f_{b,x}} = \frac{P_{b,y} C}{q_{b,x} f_{b,x}} = \frac{e_{b,y} C}{q_{b,x}} \quad (\text{A.1.30})$$

Comparando (A.1.29) y (A.1.30) se tiene que

$$\bar{C}_y = \frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \bar{C}_x = \frac{e_{b,y} C}{q_{b,x}} \quad (\text{A.1.31})$$

A partir de la ecuación (A.1.31), y empleando las ecuaciones (A.1.1) y (A.1.26) se tiene:

$$\bar{C}_y = \frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \bar{C}_x = \frac{e_{b,y} f_{b,x} e_{b,x} C}{e_{b,x} f_{b,x} q_{b,x}} \quad (\text{A.1.32})$$

$$\bar{C}_y = \frac{e_{b,y} e_{b,x} C}{e_{b,x} q_{b,x}} = \frac{e_{b,y} \bar{C}_x}{e_{b,x}} \quad (\text{A.1.33})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Multiplicando y dividiendo (A.1.33) por $q_{b,x}$, reordenando, manteniendo $q_{b,x} = q_{b,y}$ y empleando (A.1.26) se tiene:

$$\bar{C}_y = \frac{q_{b,x} e_{b,y}}{e_{b,x} q_{b,y}} \bar{C}_x = \frac{C_{b,x}}{C_{b,y}} \bar{C}_x \quad (\text{A.1.34})$$

Comparando las ecuaciones (A.1.31), (A.1.33) y (A.1.34) se tiene que

$$\bar{C}_y = \frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \bar{C}_x = \frac{e_{b,y}}{e_{b,x}} \bar{C}_x = \frac{C_{b,x}}{C_{b,y}} \bar{C}_x = \frac{e_{b,y}}{q_{b,x}} C \quad (\text{A.1.35})$$

La cual representa la ecuación para el cambio de base del parámetro \bar{C} en pu de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,x}, P_{b,y}\}$.

Expresión de cambio de base para \hat{C}

En el caso del elemento C de un puerto, el parámetro de capacitancia equivalente en pu por unidad para cierta base k está dado por

$$\hat{C}_k = \frac{e_{b,k}}{f_{b,k}} C = R_{b,k} C = \frac{q_{b,k}}{f_{b,k}} \bar{C} \quad (\text{A.1.36})$$

Multiplicando y dividiendo (A.1.36) por $f_{b,k}$, se tiene

$$\hat{C}_k = \frac{e_{b,k} f_{b,k}}{f_{b,k}^2} C = \frac{P_{b,k}}{f_{b,k}^2} C \quad (\text{A.1.37})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $f_{b,k} = f_{b,x} = f_{b,y}$ se tiene que:

$$\hat{C}_x = \frac{P_{b,x}}{f_{b,x}^2} C \quad (\text{A.1.38})$$

$$\hat{C}_y = \frac{P_{b,y}}{f_{b,x}^2} C \quad (\text{A.1.39})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Multiplicando (A.1.38) por $P_{b,y}/P_{b,x}$, se tiene

$$\frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \hat{C}_x = \frac{P_{b,y} P_{b,x}}{P_{b,x} f_{b,x}^2} C = \frac{P_{b,y}}{f_{b,x}^2} C \quad (\text{A.1.40})$$

Comparando (A.1.39) y (A.1.40) se tiene finalmente que

$$\hat{C}_y = \frac{P_{b,y}}{P_{b,x}} \hat{C}_x = \frac{P_{b,y}}{f_{b,x}^2} C \quad (\text{A.1.41})$$

La cual representa la ecuación para el cambio de base del parámetro \hat{C} equivalente en pu de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,x}, P_{b,y}\}$.

A.2. Cambio de flujo base

Sean $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ y $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,y}\}$ ciertos conjuntos de cantidades base de dos diferentes grafos de unión que tienen estructuras de unión ponderadas (Weighted Junction Structures) idénticas sin elementos transformador modulados (MTF) [22]. Se asume que si existen lazos de unión en el grafo, entonces estos lazos son mallas simples [22]. Se desea relacionar las cantidades pu del primer grafo de unión con aquellas del segundo, en donde exclusivamente los valores base de potencia son iguales, es decir $P_{b,x} = P_{b,y}$, y los valores del flujo y desplazamiento generalizado base mantienen relaciones proporcionales idénticas, es decir $f_{b,x}/q_{b,x} = f_{b,y}/q_{b,y}$; donde

$$f_{b,y} = \lambda f_{b,x} \quad (\text{A.2.1})$$

$$q_{b,y} = \lambda q_{b,x}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{A.2.2})$$

Se tiene entonces que $\lambda \neq 1$, de lo contrario el problema sería trivial, con la restricción

$$P_{b,k} = e_{b,k} f_{b,k}, \quad \text{con } k \in \{x, y\} \quad (\text{A.2.3})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

en alguna etapa del grafo de unión en que la cantidad base del desplazamiento generalizado q se estableció $q_b = q_{b,x} = q_{b,y}/\lambda = 1$. Se usan e , f y P para denotar esfuerzo, flujo y potencia. Las variables R , C e I denotan Resistencia, Capacitancia e Inductancia generalizadas, respectivamente.

A.2.1. Observación

Considere la ecuación (3.2.12) del Subtema 3.2.2, en donde se ha incorporado la constante de proporcionalidad λ del Anexo A.2:

$$\frac{\lambda f_{b,x}}{\lambda q_{b,x}} = \frac{\lambda f_{b,x}^{(i)}}{\lambda q_{b,x}^{(i)}} = \frac{f_{b,y}}{q_{b,y}} = \frac{f_{b,y}^{(i)}}{q_{b,y}^{(i)}} \quad (\text{A.2.4})$$

Existe alguna etapa del grafo de unión en el sistema por unidad en donde se definió $q_{b,x} = q_{b,y}/\lambda = 1$.

Para cada etapa (i) del grafo de unión, la constante de proporcionalidad λ que satisface la ecuación (A.2.1) podría emplearse para realizar el cómputo de las cantidades de flujo base $f_{b,y}^{(i)}$ de la base y a partir de los valores de flujo base $f_{b,x}^{(i)}$ de la base x siguiendo la misma ecuación (A.2.1), es decir:

$$f_{b,y}^{(i)} := \lambda \cdot f_{b,x}^{(i)} \quad (\text{A.2.5})$$

Para cada etapa (i) del grafo de unión, la constante de proporcionalidad λ que satisface la ecuación (A.2.1) podría emplearse para realizar el cómputo de las cantidades de desplazamiento base $q_{b,y}^{(i)}$ de la base y a partir de los valores de cantidades de desplazamiento base $q_{b,x}^{(i)}$ de la base x siguiendo la ecuación (A.2.2), es decir:

$$q_{b,y}^{(i)} := \lambda q_{b,x}^{(i)} \quad (\text{A.2.6})$$

Correspondientemente, de acuerdo con la ecuación (3.2.5), para cada etapa (i) , la constante de proporcionalidad λ podría emplearse para realizar el cómputo de las cantidades de esfuerzo base $e_{b,y}^{(i)}$ de la

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

base y a partir de las cantidades de esfuerzo base $e_{b,x}^{(i)}$ de la base x mediante:

$$P_b = e_{b,y}^{(i)} f_{b,y}^{(i)} \quad (\text{A.2.7})$$

$$e_{b,y}^{(i)} := \frac{P_b}{f_{b,y}^{(i)}} \quad (\text{A.2.8})$$

O bien, mediante:

$$e_{b,x}^{(i)} f_{b,x}^{(i)} = e_{b,y}^{(i)} f_{b,y}^{(i)} \quad (\text{A.2.9})$$

$$e_{b,x}^{(i)} f_{b,x}^{(i)} = e_{b,y}^{(i)} \lambda \cdot f_{b,x}^{(i)} \quad (\text{A.2.10})$$

$$e_{b,y}^{(i)} := \frac{1}{\lambda} e_{b,x}^{(i)} \quad (\text{A.2.11})$$

Además, sin perder generalidad, a partir de las ecuaciones (A.2.1), (A.2.3) y (A.2.11) se tiene que las cantidades de esfuerzo base de las bases x y y están relacionados mediante:

$$e_{b,y} = \frac{1}{\lambda} e_{b,x} \quad (\text{A.2.12})$$

A.2.2. Cantidad pu

En el sistema pu, todas las cantidades en pu para alguna base k se obtienen mediante

$$\bar{z}_k := \frac{z}{z_{b,k}} \quad (\text{A.2.13})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $P_{b,k} = P_{b,x} = P_{b,y}$ se tiene que las cantidades reales y pu mantienen la relación dada por:

$$\bar{z}_x = \frac{z}{z_{b,x}} \quad (\text{A.2.14})$$

$$\bar{z}_y = \frac{z}{z_{b,y}} \quad (\text{A.2.15})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Dividiendo la ecuación (A.2.14) por (A.2.15) se tiene que:

$$\frac{\bar{z}_x}{\bar{z}_y} = \frac{\frac{z}{z_{b,x}}}{\frac{z}{z_{b,y}}} = \frac{z_{b,y}}{z_{b,x}} \quad (\text{A.2.16})$$

$$\frac{\bar{z}_x}{\bar{z}_y} = \frac{z_{b,y}}{z_{b,x}} \quad (\text{A.2.17})$$

Despejando \bar{z}_y de (A.2.17) se tiene entonces:

$$\bar{z}_y = \frac{z_{b,x}}{z_{b,y}} \bar{z}_x \quad (\text{A.2.18})$$

La cual representa la ecuación para el cambio de base de la cantidad pu \bar{z} , variable o parámetro, de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,x}\}$.

Ejemplo. Exprese las variables pu \bar{e}_x y \bar{f}_x referidas a la base x en términos de la base y .

Solución. Empleando las ecuaciones (A.2.1), (A.2.12), (A.2.18).

$$\bar{e}_y = \frac{e_{b,x}}{e_{b,y}} \bar{e}_x = \frac{e_{b,x}}{\frac{1}{\lambda} e_{b,x}} \bar{e}_x \quad (\text{A.2.19})$$

$$\bar{e}_y = \lambda \bar{e}_x \quad (\text{A.2.20})$$

$$\bar{f}_y = \frac{f_{b,x}}{f_{b,y}} \bar{f}_x = \frac{f_{b,x}}{\lambda f_{b,x}} \bar{f}_x \quad (\text{A.2.21})$$

$$\bar{f}_y = \frac{1}{\lambda} \bar{f}_x \quad (\text{A.2.22})$$

A.2.3. Expresión de cambio de base para \hat{R}

En el caso del elemento R de un puerto, el parámetro de resistencia en por unidad para cierta base k está dado por:

$$\hat{R}_k = \frac{f_{b,k}}{e_{b,k}} R = \frac{R}{R_{b,k}} = \bar{R}_k \quad (\text{A.2.23})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $P_{b,k} = P_{b,x} = P_{b,y}$ se tiene que:

$$\hat{R}_x = \frac{f_{b,x}}{e_{b,x}} R = \frac{R}{R_{b,x}} = \bar{R}_x \quad (\text{A.2.24})$$

$$\hat{R}_y = \frac{f_{b,y}}{e_{b,y}} R = \frac{R}{R_{b,y}} = \bar{R}_y \quad (\text{A.2.25})$$

Dividiendo la ecuación (A.2.24) por (A.2.25) se tiene que:

$$\frac{\hat{R}_x}{\hat{R}_y} = \frac{\frac{f_{b,x}}{e_{b,x}} R}{\frac{f_{b,y}}{e_{b,y}} R} = \frac{\frac{R}{R_{b,x}}}{\frac{R}{R_{b,y}}} = \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_y} \quad (\text{A.2.26})$$

$$\frac{\hat{R}_x}{\hat{R}_y} = \frac{\frac{f_{b,x}}{e_{b,x}}}{\frac{f_{b,y}}{e_{b,y}}} = \frac{R_{b,y}}{R_{b,x}} = \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_y} \quad (\text{A.2.27})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.2.1), (A.2.12) y (3.2.19) en (A.2.27) y haciendo los ajustes necesarios se tiene que:

$$\frac{\hat{R}_x}{\hat{R}_y} = \frac{\frac{f_{b,x}}{e_{b,x}}}{\frac{\lambda f_{b,x}}{\frac{1}{\lambda} e_{b,x}}} = \frac{\frac{e_{b,y}}{f_{b,y}}}{\frac{e_{b,x}}{f_{b,x}}} = \frac{\frac{1}{\lambda} e_{b,x}}{\lambda f_{b,x}} = \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_y} \quad (\text{A.2.28})$$

$$\frac{\hat{R}_x}{\hat{R}_y} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_y} \quad (\text{A.2.29})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Despejando \hat{R}_y y \bar{R}_y de (A.2.29) se tiene:

$$\hat{R}_y = \lambda^2 \hat{R}_x \quad (\text{A.2.30})$$

$$\bar{R}_y = \lambda^2 \bar{R}_x \quad (\text{A.2.31})$$

La cual representa la ecuación para el cambio de base del parámetro \hat{R} en pu de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,x}\}$.

Observación. Comparando las ecuaciones (A.2.27) y (A.2.29) se tiene que:

$$R_{b,y} = \frac{1}{\lambda^2} R_{b,x} \quad (\text{A.2.32})$$

La cual corresponde con una forma alternativa de calcular la cantidad base de la resistencia generalizada de la base y a partir de la de la base x en alguna etapa (i) del grafo de unión.

A.2.4. Expresión de cambio de base para \hat{I}

En el caso del elemento I de un puerto, el parámetro de inercia equivalente en por unidad para cierta base k está dado por

$$\hat{I}_k = \frac{f_{b,k}}{e_{b,k}} I = \frac{I}{R_{b,k}} = 2H_k \quad (\text{A.2.33})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $P_{b,k} = P_{b,x} = P_{b,y}$ se tiene que:

$$\hat{I}_x = \frac{f_{b,x}}{e_{b,x}} I = \frac{I}{R_{b,x}} = 2H_x \quad (\text{A.2.34})$$

$$\hat{I}_y = \frac{f_{b,y}}{e_{b,y}} I = \frac{I}{R_{b,y}} = 2H_y \quad (\text{A.2.35})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Dividiendo la ecuación (A.2.34) por (A.2.35) se tiene que:

$$\frac{\hat{I}_x}{\hat{I}_y} = \frac{\frac{f_{b,x} I}{e_{b,x}}}{\frac{f_{b,y} I}{e_{b,y}}} = \frac{\frac{I}{R_{b,x}}}{\frac{I}{R_{b,y}}} = \frac{2H_x}{2H_y} \quad (\text{A.2.36})$$

$$\frac{\hat{I}_x}{\hat{I}_y} = \frac{\frac{f_{b,x}}{e_{b,x}}}{\frac{f_{b,y}}{e_{b,y}}} = \frac{R_{b,y}}{R_{b,x}} = \frac{H_x}{H_y} \quad (\text{A.2.37})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.2.1), (A.2.12) y (3.2.19) en (A.2.37) y haciendo los ajustes necesarios se tiene que:

$$\frac{\hat{I}_x}{\hat{I}_y} = \frac{\frac{f_{b,x}}{e_{b,x}}}{\frac{\lambda f_{b,x}}{\frac{1}{\lambda} e_{b,x}}} = \frac{\frac{e_{b,y}}{f_{b,y}}}{\frac{e_{b,x}}{f_{b,x}}} = \frac{\frac{1}{\lambda} e_{b,x}}{\lambda f_{b,x}} = \frac{H_x}{H_y} \quad (\text{A.2.38})$$

$$\frac{\hat{I}_x}{\hat{I}_y} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{H_x}{H_y} \quad (\text{A.2.39})$$

Despejando \hat{I}_y y H_y de (A.2.39) se tiene entonces:

$$\hat{I}_y = \lambda^2 \hat{I}_x \quad (\text{A.2.40})$$

$$H_y = \lambda^2 H_x \quad (\text{A.2.41})$$

Las cuales representan las ecuaciones para el cambio de base, tanto del parámetro \hat{I} equivalente en pu así como del parámetro H , de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,x}\}$.

A.2.5. Expresión de cambio de base para \bar{C} y \hat{C}

Se presenta el procedimiento para deducir la fórmula para el cambio de base de las cantidades \bar{C} y \hat{C} en pu y equivalente en pu, respectivamente.

Expresión de cambio de base para \bar{C}

En el caso del elemento C de un puerto, el parámetro de capacitancia en por unidad para cierta base k está dado por

$$\bar{C}_k = \frac{C}{C_{b,k}} = \frac{e_{b,k} C}{q_{b,k}} \quad (\text{A.2.42})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $P_{b,k} = P_{b,x} = P_{b,y}$ se tiene que:

$$\bar{C}_x = \frac{C}{C_{b,x}} = \frac{e_{b,x} C}{q_{b,x}} \quad (\text{A.2.43})$$

$$\bar{C}_y = \frac{C}{C_{b,y}} = \frac{e_{b,y} C}{q_{b,y}} \quad (\text{A.2.44})$$

Dividiendo la ecuación (A.2.43) por (A.2.44) se tiene que:

$$\frac{\bar{C}_x}{\bar{C}_y} = \frac{\frac{C}{C_{b,x}}}{\frac{C}{C_{b,y}}} = \frac{\frac{e_{b,x} C}{q_{b,x}}}{\frac{e_{b,y} C}{q_{b,y}}} \quad (\text{A.2.45})$$

$$\frac{\bar{C}_x}{\bar{C}_y} = \frac{C_{b,y}}{C_{b,x}} = \frac{e_{b,x} q_{b,y}}{q_{b,x} e_{b,y}} \quad (\text{A.2.46})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.2.12), (A.2.2) y (3.2.28) en (A.2.46) y haciendo los ajustes necesarios se tiene que:

$$\frac{\bar{C}_x}{\bar{C}_y} = \frac{\frac{q_{b,y}}{e_{b,y}}}{\frac{q_{b,x}}{e_{b,x}}} = \frac{\frac{\lambda q_{b,x}}{1}}{\frac{1}{\lambda} e_{b,x}} = \frac{e_{b,x} \lambda q_{b,x}}{q_{b,x} \frac{1}{\lambda} e_{b,x}} \quad (\text{A.2.47})$$

$$\frac{\bar{C}_x}{\bar{C}_y} = \lambda^2 \quad (\text{A.2.48})$$

Despejando \bar{C}_y de (A.2.48) se tiene que:

$$\bar{C}_y = \frac{1}{\lambda^2} \bar{C}_x \quad (\text{A.2.49})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

La cual representa la ecuación para el cambio de base del parámetro \bar{C} en pu de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,x}\}$.

Observación. Comparando las ecuaciones (A.2.46) y (A.2.48) se tiene que:

$$C_{b,y} = \lambda^2 C_{b,x} \quad (\text{A.2.50})$$

La cual corresponde con una forma alternativa de calcular la cantidad base de la capacitancia generalizada de la base y a partir de la de la base x en alguna etapa (i) del grafo de unión.

Expresión de cambio de base para \hat{C}

En el caso del elemento C de un puerto, el parámetro de capacitancia equivalente en por unidad para cierta base k está dado por

$$\hat{C}_k = \frac{e_{b,k}}{f_{b,k}} C = R_{b,k} C = \frac{q_{b,k} \bar{C}}{f_{b,k}} \quad (\text{A.2.51})$$

Particularizando para las bases x y y , manteniendo $P_{b,k} = P_{b,x} = P_{b,y}$ se tiene que:

$$\hat{C}_x = \frac{e_{b,x}}{f_{b,x}} C = R_{b,x} C = \frac{q_{b,x} \bar{C}_x}{f_{b,x}} \quad (\text{A.2.52})$$

$$\hat{C}_y = \frac{e_{b,y}}{f_{b,y}} C = R_{b,y} C = \frac{q_{b,y} \bar{C}_y}{f_{b,y}} \quad (\text{A.2.53})$$

Dividiendo la ecuación (A.2.52) por (A.2.53) se tiene que:

$$\frac{\hat{C}_x}{\hat{C}_y} = \frac{\frac{e_{b,x}}{f_{b,x}} C}{\frac{e_{b,y}}{f_{b,y}} C} = \frac{R_{b,x} C}{R_{b,y} C} = \frac{\frac{q_{b,x} \bar{C}_x}{f_{b,x}}}{\frac{q_{b,y} \bar{C}_y}{f_{b,y}}} \quad (\text{A.2.54})$$

$$\frac{\hat{C}_x}{\hat{C}_y} = \frac{\frac{e_{b,x}}{f_{b,x}}}{\frac{e_{b,y}}{f_{b,y}}} = \frac{R_{b,x}}{R_{b,y}} = \frac{\frac{q_{b,x} \bar{C}_x}{f_{b,x}}}{\frac{q_{b,y} \bar{C}_y}{f_{b,y}}} \quad (\text{A.2.55})$$

Anexo A. Derivación de las ecuaciones para el cambio de base de las cantidades en pu de un grafo de unión

Sustituyendo las ecuaciones (A.2.1), (A.2.2), (A.2.12) y (3.2.19) en (A.2.55) y haciendo los ajustes necesarios se tiene que:

$$\frac{\hat{C}_x}{\hat{C}_y} = \frac{\frac{e_{b,x}}{f_{b,x}}}{\frac{e_{b,y}}{f_{b,y}}} = \frac{\frac{e_{b,x}}{f_{b,x}}}{\frac{1}{\lambda} \frac{e_{b,x}}{f_{b,x}}} = \frac{\frac{q_{b,x} \bar{C}_x}{f_{b,x}}}{\frac{\lambda q_{b,x} \bar{C}_y}{\lambda f_{b,x}}} \quad (\text{A.2.56})$$

$$\frac{\hat{C}_x}{\hat{C}_y} = \lambda^2 = \frac{\bar{C}_x}{\bar{C}_y} \quad (\text{A.2.57})$$

Despejando \hat{C}_y de (A.2.57) se tiene entonces:

$$\hat{C}_y = \frac{1}{\lambda^2} \hat{C}_x \quad (\text{A.2.58})$$

La cual representa la ecuación para el cambio de base del parámetro \hat{C} equivalente en pu de la base $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ a la base $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,x}\}$.

Comentario 1. El requisito de que los valores de flujo y desplazamiento generalizado base mantengan relaciones proporcionales idénticas, es decir, $f_{b,x}/q_{b,x} = f_{b,y}/q_{b,y}$ para el cambio de flujo base, descrito en el Anexo A.2, además de simplificar el procedimiento de cambio de flujo (y esfuerzo) base, también es un requisito para que la energía normalizada del grafo de unión en pu preserve su valor tras el cambio de base, dada la elección $E_b := P_b$, como se detalla en los Subtemas 3.2, 4.1.2 y 5.1 de los Capítulos 3, 4 y 5, respectivamente.

Comentario 2. De acuerdo con las ecuaciones (A.2.3), (A.2.20), (A.2.22), (A.2.30), (A.2.40) y (A.2.58), se observa que el cambio de flujo base expuesto en el Anexo A.2 implica la existencia de un elemento TF virtual de módulo λ a través del cual las cantidades del sistema por unidad referidas a la base x , que se encuentran en el lado secundario del mismo, son reflejadas a su lado primario para ser referidas a la base y [22, p. 84].

Deducción del valor del módulo del elemento transformador virtual

Suponga que en cierta unión de un grafo de unión en cantidades reales del Sistema Internacional de Unidades, que tiene estructura de unión ponderada (Weighted Junction Structure) sin elementos transformador modulados (MTF), se inserta un elemento TF: 1 virtual como se muestra en la Figura B.1.

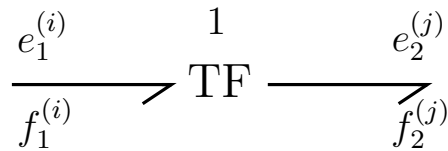


Figura B.1: Elemento TF virtual de módulo 1.

Se definen las cantidades bases $\{e_{b,x}, f_{b,x}, P_{b,x}\}$ y $\{e_{b,y}, f_{b,y}, P_{b,y}\}$ arbitrariamente para las cantidades de las etapas (i) y (j) del elemento TF, respectivamente, con la restricción

$$P_{b,k} = e_{b,k} f_{b,k}, \quad \text{con } k \in \{x, y\} \quad (\text{B.0.1})$$

es decir

$$e_b^{(i)} = e_{b,x}^{(i)} \quad (\text{B.0.2})$$

$$P_b^{(i)} = P_{b,x}^{(i)} = P_b \quad (\text{B.0.3})$$

$$f_b^{(i)} = \frac{P_b}{e_{b,x}^{(i)}} \quad (\text{B.0.4})$$

$$e_b^{(j)} = e_{b,y}^{(j)} \quad (\text{B.0.5})$$

$$P_b^{(j)} = P_{b,y}^{(j)} = P_b \quad (\text{B.0.6})$$

$$f_b^{(j)} = \frac{P_b}{e_{b,y}^{(j)}} \quad (\text{B.0.7})$$

Se busca una constante C tal que al expresar en pu el grafo de unión mostrado en la Figura B.1 se obtenga el que se muestra en la Figura B.2.

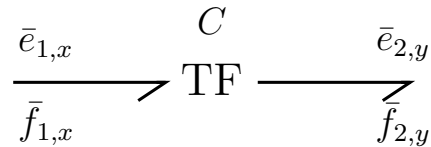


Figura B.2: Conversión del grafo de unión mostrado en la Figura B.1 al sistema pu.

De acuerdo con la definición del elemento TF, se tiene que, dado que es un elemento conservador de la energía:

$$\bar{e}_{1,x} \bar{f}_{1,x} = \bar{e}_{2,y} \bar{f}_{2,y} \quad (\text{B.0.8})$$

Y además, de acuerdo con la ecuación constitutiva del elemento TF:

$$\begin{cases} \bar{f}_{2,y} = C \bar{f}_{1,x} \\ C \bar{e}_{2,x} = \bar{e}_{1,y} \end{cases} \quad (\text{B.0.9})$$

Empleando la definición de las cantidades en pu:

$$\bar{y} := \frac{y}{y_b} \quad (\text{B.0.10})$$

Anexo B. Deducción del valor del módulo del elemento transformador virtual

Se tiene que:

$$\begin{cases} \frac{f_2^{(j)}}{f_{b,y}^{(j)}} = C \frac{f_1^{(i)}}{f_{b,x}^{(i)}} \\ C \frac{e_2^{(j)}}{e_{b,y}^{(j)}} = \frac{e_1^{(i)}}{e_{b,x}^{(i)}} \end{cases} \quad (\text{B.0.11})$$

Despejando C en ambas ecuaciones en (B.0.11) y reordenando los términos se tiene:

$$\begin{cases} C = \frac{f_2^{(j)} f_{b,x}^{(i)}}{f_1^{(i)} f_{b,y}^{(j)}} \\ C = \frac{e_1^{(i)} e_{b,y}^{(j)}}{e_2^{(j)} e_{b,x}^{(i)}} \end{cases} \quad (\text{B.0.12})$$

Observando en la Figura B.1 que $e_1^{(i)} = e_2^{(j)}$ y $f_1^{(i)} = f_2^{(j)}$, entonces $f_2^{(j)}/f_1^{(i)} = e_1^{(i)}/e_2^{(j)} = 1$. Por lo tanto, la ecuación (B.0.12) se puede expresar como:

$$\begin{cases} C = \frac{f_{b,x}^{(i)}}{f_{b,y}^{(j)}} \\ C = \frac{e_{b,y}^{(j)}}{e_{b,x}^{(i)}} \end{cases} \quad (\text{B.0.13})$$

Empleando la restricción encontrada en la ecuación (B.0.1) para las etapas (i) y (j) para las bases x y y , respectivamente, se tiene:

$$P_b = P_{b,x}^{(i)} = e_{b,x}^{(i)} f_{b,x}^{(i)} \quad (\text{B.0.14})$$

$$P_b = P_{b,y}^{(j)} = e_{b,y}^{(j)} f_{b,y}^{(j)} \quad (\text{B.0.15})$$

Dividiendo la ecuación (B.0.14) por (B.0.15) y despejando $f_{b,x}^{(i)}/f_{b,y}^{(j)}$ y comparando con (B.0.13) se encuentra la relación buscada:

$$C = \frac{f_{b,x}^{(i)}}{f_{b,y}^{(j)}} = \frac{e_{b,y}^{(j)}}{e_{b,x}^{(i)}} \quad (\text{B.0.16})$$

Conclusión: El módulo $m_B = C$ del elemento TF virtual buscado es:

$$m_B = \frac{f_{b,x}^{(i)}}{f_{b,y}^{(j)}} = \frac{e_{b,y}^{(j)}}{e_{b,x}^{(i)}} \quad (\text{B.0.17})$$

Este resultado se puede resumir como se muestra en la Figura B.3

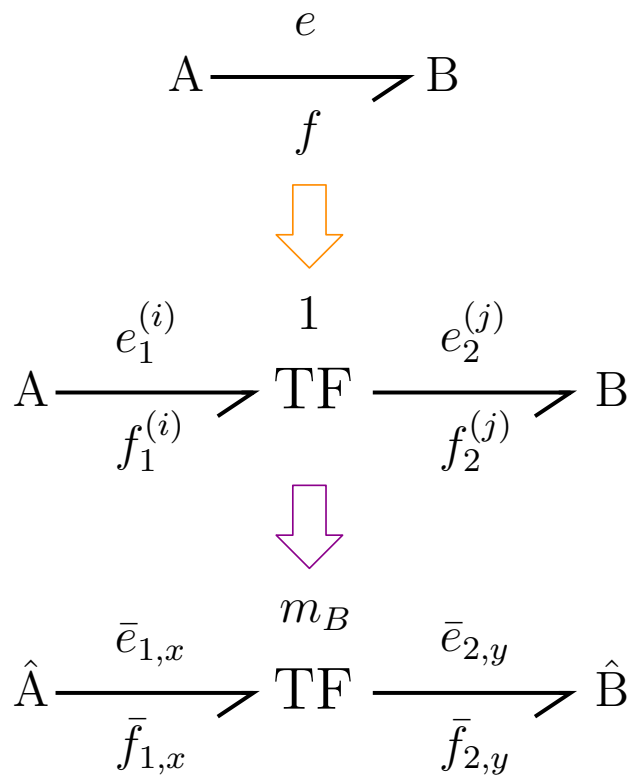


Figura B.3: Uso de un elemento TF virtual para realizar el cambio de base de las cantidades en pu.

Observación: Considerando la ecuación (B.0.13), se observa que en general si no se cumple la restricción encontrada en la ecuación (B.0.1), dicho sistema de ecuaciones no tiene solución.