



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE HERMOSILLO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
**ANÁLISIS COMPARATIVO DE DIVERSAS TÉCNICAS DE CONTROL
APLICADAS A UN SISTEMA CARRO-PÉNDULO**

TESIS

Presentada como requisito parcial para obtener el grado de:

Maestro en Ingeniería Electrónica

Ing. Adrián Francisco Gallardo Tullez

Director

Dr. Jorge Alberto Orrante Sakanassi

Codirector

Dr. Guillermo Valencia Palomo

Hermosillo, Sonora

Diciembre de 2017



*Dedicado a
mi madre*

Agradecimientos

A mi madre que es el pilar principal en mi vida, con su entrega he logrado un paso más hacia un camino de éxito. Por enseñarme el valor del esfuerzo, la perseverancia y la rectitud. Gracias por todo.

A mi hermano que ha sido un gran amigo y compañero. Su humildad y generosidad cada día me ayuda a ser una mejor persona.

A mi director de tesis Dr. Jorge Alberto Orrante Sakanassi, por guiarme e instruirme en este reto que supone el proceso de obtener el título de maestro.

A mis compañeros de generación: Ing. Fernando Joaquín Ramírez Coronel, Ing. Leonor García Gamez, Ing. Horacio Valencia Córdova, Ing. Jesús Naím León Ortega, Ing. Juan Antonio Borboa Griego, Ing. Jesús Alejandro Medellín; por el tiempo que convivimos y su gran amistad.

Al M.S.I Alfonso Mendoza Robles por su tiempo y amistad durante mi estadia dentro de esta institución.

Al Ing. Gustavo Meléndez Mazcareño por su apoyo para poder concluir con este proceso.

Muchas gracias Instituto Tecnológico de Hermosillo, por permitirme adquirir tu conocimiento y sabiduría.

Resumen

En esta tesis se trabaja con un sistema mecánico subactuado, es decir, un sistema que tiene menos actuadores que grados de libertad a controlar; esto significa que algunos elementos no están sujetos a la acción directa de un actuador. Para este trabajo de investigación, el sistema subactuado bajo estudio es el sistema carro-péndulo de Quanser.

El problema del péndulo invertido es un tema de control que se ha estudiado ampliamente; esto debido a que el sistema es altamente no lineal, inestable, de fase no mínima y subactuado.

En la literatura científica se encuentra toda una gama de controladores utilizados para sistemas subactuados, por lo que se hizo una investigación del estado del arte para hacer una selección de los controladores más representativos (actuales y clásicos). Se optó por elegir dos controladores no lineales para realizar pruebas de simulación y ensayos experimentales al sistema, los cuales son: Control Basado en Energía (CBE) y el Control por Modos Deslizantes (SMC). Se escogieron estos controladores ya que son los más fáciles de implementar a este tipo de sistemas.

Primeramente se trabaja con el Control Basado en Energía: este un controlador no lineal que efectúa el trabajo de levantar el péndulo hacia la parte vertical superior (swing-up). Para estabilizar el péndulo en la posición vertical superior del péndulo se utiliza un controlador lineal LQR (Linear-Quadratic Regulator).

El Controlador por Modos Deslizantes tiene como objetivo hacer que las trayectorias del estado converjan a una superficie de deslizamiento definida y deslizarse hasta llegar al equilibrio.

De este trabajo resulta un análisis de comparación de controladores con la intención de evaluar el desempeño de la respuesta del sistema en cuanto a rapidez, precisión, exactitud, robustez, etc. Lo anterior nos permitió conocer de manera más objetiva las diferentes características de los controladores aplicados al carro-péndulo.

Abstract

In this thesis, we work with an under-actuated mechanical system, that is, a system that has fewer actuators than degrees of freedom to control; this means that some elements are not subject to the direct action of an actuator. For this research work, it is used the Quanser cart-pendulum system.

The inverted pendulum problem is a control issue that has been studied extensively; this is because the system is highly non-linear, unstable, non-minimal phase and under-actuated.

In the scientific literature there is a whole range of controllers used for under-actuated systems, so an investigation of the state of the art was made to make a selection of the most representative controllers (current and classic). The choice of controllers was chosen to perform simulation tests and experimental tests on the system, which are: Energy Based Control (EBC) and Sliding Mode Control (SMC). These controllers were chosen and they are the easiest to implement to this type of systems.

First, we work with the Energy Based Control: this is a non-linear controller that does the work of lifting the pendulum towards the upper vertical part. To stabilize the pendulum in the upper part, a linear LQR (Linear-Quadratic Regulator) controller is used.

The Sliding Mode Control aims to make the trajectories of the state converge to a sliding surface defined and slid until reaching equilibrium.

The result of this work is a comparison analysis of controls with the intention of evaluating the performance of the response of the system in terms of speed, accuracy, robustness, etc. The above is aimed at knowing more objectively the different characteristics of the controllers applied to the cart-pole system.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Lista de figuras | III |
| Lista de tablas | V |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes | 1 |
| 1.2. Planteamiento del problema | 2 |
| 1.3. Hipótesis | 2 |
| 1.4. Objetivo | 3 |
| 1.4.1. Objetivo general | 3 |
| 1.4.2. Objetivos específicos | 3 |
| 1.5. Justificación | 3 |
| 1.6. Metas y alcances | 3 |
| 1.7. Descripción de la estructura de la Tesis | 4 |
| 2. Modelado del sistema | 5 |
| 2.1. Antecedentes del caso de estudio | 5 |
| 2.2. Modelado matemático del sistema físico | 7 |
| 2.3. Linealización | 11 |
| 2.4. Parámetros y especificaciones técnicas | 12 |
| 2.5. Conclusiones | 15 |
| 3. Estrategias de Control | 16 |
| 3.1. Control Basado en Energía | 16 |
| 3.2. Control por Modos Deslizantes | 21 |
| 3.3. Conclusiones | 26 |
| 4. Desarrollo de controladores en MATLAB | 27 |
| 4.1. Control Basado en Energía y LQR | 27 |
| 4.2. Control por Modos Deslizantes | 36 |
| 4.3. Control PD de posición y PD de velocidad | 42 |
| 4.4. Conclusiones | 45 |
| 5. Validación experimental | 46 |
| 5.1. Conclusiones | 54 |

| | |
|---|-----------|
| 6. Conclusiones | 55 |
| 6.1. Conclusiones finales | 55 |
| 6.2. Aportaciones | 56 |
| 6.3. Trabajos futuros y recomendaciones | 56 |
| A. Preliminares Matemáticos | 57 |
| A.1. Estabilidad de Lyapunov | 57 |
| A.2. Pasividad | 59 |
| Referencias | 60 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Implementación del Péndulo Invertido | 5 |
| 2.2. Esquemático y variables para el modelo del péndulo | 7 |
| 2.3. Esquema electromagnético del motor de CD | 10 |
| 2.4. Carro-Péndulo | 12 |
| 2.5. Dimensiones reales del sistema | 13 |
| 2.6. Tarjeta de adquisición de datos | 13 |
| 2.7. Amplificador de voltaje | 14 |
| 3.1. Puntos de Referencia | 17 |
| 3.2. Órbita Homoclínica | 18 |
| 3.3. Función $\text{sgn}(x)$ | 23 |
| 3.4. Función $\text{tanh}(x)$ | 23 |
| 4.1. Propuesta de Control | 27 |
| 4.2. Posición del carro - LQR | 28 |
| 4.3. Posición del péndulo - LQR | 29 |
| 4.4. Velocidad del carro - LQR | 29 |
| 4.5. Velocidad del péndulo - LQR | 30 |
| 4.6. Ley de Control - SwingUp | 30 |
| 4.7. Energía - SwingUp | 31 |
| 4.8. Posición del carro - SwingUp | 31 |
| 4.9. Posición del péndulo - SwingUp | 32 |
| 4.10. Velocidad del carro - SwingUp | 32 |
| 4.11. Velocidad del péndulo - SwingUp | 33 |
| 4.12. Ley de Control | 33 |
| 4.13. Energía | 34 |
| 4.14. Posición del carro | 34 |
| 4.15. Posición del péndulo | 35 |
| 4.16. Velocidad del carro | 35 |
| 4.17. Velocidad del péndulo | 36 |
| 4.18. Propuesta de Control | 36 |
| 4.19. Ley de Control - Estabilización | 37 |
| 4.20. Posición del carro - Estabilización | 38 |
| 4.21. Posición del péndulo - Estabilización | 38 |
| 4.22. Velocidad del carro - Estabilización | 39 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| 4.23. Velocidad del péndulo - Estabilización | 39 |
| 4.24. Ley de Control - SMC | 40 |
| 4.25. Posición del carro - SMC | 40 |
| 4.26. Posición del péndulo - SMC | 41 |
| 4.27. Velocidad del carro - SMC | 41 |
| 4.28. Velocidad del péndulo - SMC | 42 |
| 4.29. Posición del carro | 43 |
| 4.30. Posición del péndulo | 43 |
| 4.31. Velocidad del carro | 44 |
| 4.32. Velocidad del péndulo | 44 |
| 5.1. Posición del carro | 46 |
| 5.2. Posición del péndulo | 47 |
| 5.3. Velocidad del carro | 47 |
| 5.4. Velocidad del péndulo | 48 |
| 5.5. Posición del carro | 49 |
| 5.6. Posición del péndulo | 50 |
| 5.7. Velocidad del carro | 50 |
| 5.8. Velocidad del péndulo | 51 |
| 5.9. Posición del carro | 52 |
| 5.10. Posición del péndulo | 53 |
| 5.11. Velocidad del carro | 53 |
| 5.12. Velocidad del péndulo | 54 |

Lista de tablas

| | |
|---|----|
| 2.1. Especificaciones Tarjeta de Adquisición de Datos | 14 |
| 2.2. Especificaciones Amplificador de Voltaje | 15 |
| 2.3. Parámetros del modelo matemático del carro péndulo | 15 |
| 4.1. Ganancias Estabilización | 37 |
| 4.2. Ganancias Swing-Up | 37 |
| 4.3. Ganancias | 42 |
| 5.1. Ganancias LQR | 48 |
| 5.2. Ganancias Controlador No Lineal | 49 |
| 5.3. Ganancias Estabilización | 51 |
| 5.4. Ganancias Swing-Up | 52 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

En los últimos años, ha habido un gran interés en el desarrollo de algoritmos de estabilización de los sistemas mecánicos subactuados. Esto proviene de la necesidad de estabilizar sistemas como barcos, vehículos submarinos, helicópteros, aviones, dirigibles, aerodeslizadores, satélites, robots que caminan, etc., que pueden ser subactuados por diseño. Hay ocasiones en que los actuadores que se encuentran en los sistemas mecánicos son caros y/o pesados y por lo tanto a veces se evitan en el diseño de estos [1, 2].

La clase de sistemas mecánicos subactuados son abundantes en la vida real por diferentes razones, por ejemplo, como resultado de elecciones de diseño motivadas por la búsqueda de los dispositivos de ingeniería menos costosos o como resultado de un régimen de fallo en los sistemas mecánicos totalmente accionados [3].

Durante los últimos 50 años, las aplicaciones aeroespaciales y robóticas permanecieron como algunas de las fuentes más influyentes de la motivación para el análisis y control de los sistemas mecánicos y sistemas no lineales precisos y de gran exactitud. El peso del equipo es de suma importancia. Los cohetes espaciales con destino tienen una carga útil limitada, esto ha alimentado la investigación de sistemas mecánicos subactuados. La idea es simplemente reducir el peso de cualquier manipulador robótico mediante la reducción del número de motores, que a menudo son las partes más pesadas y difíciles de manejar. Algunos ejemplos de esto son los robots bípedos y los drones [2, 4].

También existen aplicaciones más específicas, como en el ámbito de las operaciones navales, donde el combustible y raciones se suministran a un buque de la marina de un barco de suministro utilizando una grúa oscilante. Bajo un estado de alta mar, el movimiento relativo de los dos buques se vuelve lo suficientemente importante para las operaciones de carga y descarga. En aplicaciones espaciales, cuando un brazo robótico se extiende y cualquiera de los motores tiene un mal funcionamiento del brazo, la única solución es abandonar la tarea, a menos, de utilizar un algoritmo subactuado para recuperarla [2].

Dicho todo esto, las consideraciones de costo, peso, consumo de energía y estructura de diseño

del sistema, pueden motivar a los constructores para crear vehículos subactuados. Es así que hay una necesidad de desarrollar nuevas técnicas de control aplicables a los sistemas mecánicos subactuados [1, 2].

Todas las investigaciones referentes al tema en general se centran en la obtención de algoritmos de control para los sistemas mecánicos subactuados. Ya que este objetivo general es difícil de lograr, todos los investigadores han simplificado la tarea estudiando los sistemas mecánicos simples. Algunos de estos sistemas representan puntos de referencia académicos y forman parte de un laboratorio de control estándar como el péndulo invertido, el péndulo invertido rotacional, el pendubot, el manipulador plano con resortes entre los enlaces, el péndulo impulsado por una rueda giratoria, la bola y viga, y el PVDA (plano vertical de despegue y aterrizaje) de aviones. A pesar del hecho de que son sistemas mecánicos simples, representan un desafío para la comunidad de control no lineal [2].

1.2. Planteamiento del problema

Hoy en día la tecnología crece a pasos agigantados por lo que el ser humano busca la forma de adaptarse lo más rápido posible a estos cambios repentinos y tener una manera de controlar los sistemas que se encuentran interactuando en su entorno. Del mismo modo el control ha evolucionado drásticamente, por lo que se requiere estar actualizándose continuamente en este tema y, gracias a esto, el hombre estudia la manera de obtener el mejor control sobre los sistemas [1].

Se han diseñado métodos de control que operan de manera adecuada para sistemas subactuados y han sido objeto de estudios desde hace varios años, entre los que están: PI (Controlador Proporcional Integral), PID (Controlador Proporcional Integral Derivativo), Control H_∞ , Control Adaptable, Control Basado en Energía y Control por Modos Deslizantes, por mencionar algunos.

De manera general, en el ámbito de control, cuando un investigador hace una publicación, este siempre busca dar argumentos válidos en como su trabajo mejora o supera al trabajo de otros. Sin embargo, casi siempre se carece de una comparación fiel y justa entre resultados obtenidos.

Lo anterior situación no es ausente en el contexto de sistemas subactuados. Por lo tanto, se pretende hacer una investigación del estado del arte para, primeramente, conocer las nuevas propuestas de control publicadas en los últimos años, y segundo, hacer una selección de los controladores más representativos (actuales y clásicos) para ser llevados a evaluación y obtener una comparación fiel en cuanto a desempeño.

1.3. Hipótesis

Es posible seleccionar al menos dos tipos de controladores para un sistema mecánico subactuado que presenten las mejores características de desempeño entre los que se encuentran en la literatura.

1.4. Objetivo

Este trabajo tiene los siguientes objetivos general y específicos.

1.4.1. Objetivo general

Evaluar por medios analíticos y experimentales dos técnicas de control adecuadas para un sistema mecánico subactuado.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Diseñar dos controladores utilizando distintas técnicas para sistemas mecánicos subactuados.
2. Hacer una comparativa de los controladores diseñados tomando en cuenta las características más relevantes para su implementación.
3. Implementar los controladores al sistema carro-péndulo, que acorde al desempeño previsto en simulaciones, permita el control del sistema.

1.5. Justificación

Debido a que los actuadores en los sistemas mecánicos son caros y/o pesados, a veces se evitan en el diseño de estos. En un sistema mecánico subactuado se busca reducir el peso mediante la reducción del número de motores que a menudo son la parte más difíciles de manejar [2].

Muchos sistemas de control que se pueden observar en la vida real, tales como: robots móviles, robots caminantes, robots nadadores, cohetes espaciales, satélites, aviones de despegue vertical, helicópteros, proyectiles, vehículos submarinos, barcos, buques de superficie, etc., son ejemplos de sistemas subactuados cuyo control está fuertemente ligado al sector industrial, puesto que han ayudado considerablemente a la mejora de la calidad de los productos fabricados, al aumento de la eficiencia de los procesos, a la minimización del consumo de energía, entre otros, convirtiéndose la ingeniería de control en una parte medular para el avance de la ingeniería y la ciencia [5].

Sabiendo la importancia de trabajar con sistemas subactuados, se pretende obtener mediante evaluación en simulación y ensayos experimentales, los controladores con mejores características de desempeño para sistemas mecánicos subactuados considerando los controladores más actuales y representativos que existen en la actualidad.

1.6. Metas y alcances

Diseñar dos estrategias de control para sistemas mecánicos subactuados, y hacer una comparativa de los controladores tomando en cuenta las características más importantes de desempeño (tiempo de respuesta, oscilaciones, etc). Posteriormente, pasar a la implementación de las estrategias de control en el sistema carro-péndulo de QUANSER, y así realizar una evaluación mediante simulaciones y ensayos experimentales.

1.7. Descripción de la estructura de la Tesis

Esta tesis cuenta con seis capítulos:

En el capítulo 2 se obtiene el modelo matemático no lineal del sistema mecánico subactuado utilizando la Segunda Ley de Newton y la formulación Euler-Lagrange. A continuación se obtiene el sistema en espacio de estados linealizado alrededor del punto de operación y se presenta una breve descripción técnica del sistema carro-péndulo de Quanser utilizado en este trabajo de tesis.

En el Capítulo 3 se desarrollan dos controladores no lineales los cuales serán aplicados al sistema: el Control Basado en Energía y el Control por Modos Deslizantes.

En el Capítulo 4 se hace la validación en simulación de los dos controladores y de un Control PD de posición y PD de velocidad que proporciona el programa de QUANSER, utilizando SIMULINK de MATLAB.

En el Capítulo 5 se validan los controladores en forma experimental.

En el Capítulo 6 se dan las conclusiones y planteamientos futuros sobre este proyecto de investigación.

Capítulo 2

Modelado del sistema

En éste capítulo se presentan el modelo matemático del sistema subactuado carro-péndulo y parámetros del modelo. Todo ello con la finalidad de tener una base matemática para el desarrollo de los controladores en el Capítulo 3.

2.1. Antecedentes del caso de estudio

El péndulo invertido ha sido una herramienta clásica en los laboratorios de control desde los años 50. Originalmente eran utilizados para ilustrar las ideas en el control lineal como la estabilización de sistemas inestables [6].

El problema del péndulo invertido es un tema de control que se ha estudiado ampliamente. Esto es debido a que el sistema presenta múltiples retos para el diseño de cualquier tipo de controlador, ya que el sistema es no lineal, inestable, de fase no mínima y subactuado. Además presenta efectos parásitos como la fricción, el juego entre engranes, la tensión de las bandas y la saturación de la entrada [7].

Algunos trabajos previos desarrollados sobre carros péndulo son los siguientes: en [5] se presenta



Figura 2.1: Implementación del Péndulo Invertido

una metodología que permite implementar un control adaptable al péndulo invertido, la cual utiliza el método de mínimos cuadrados recursivo para identificar un modelo dinámico digital de la planta y luego, con los parámetros estimados de la misma, sintonizar en tiempo real un control por reubicación de polos, donde se toma la conclusión de que en comparación con los modelos desarrollados con base en leyes físicas, los modelos obtenidos a partir de identificadores paramétricos presentan grandes ventajas, dado que estos se ajustan mejor a la dinámica del sistema, sin desprestigiar ningún fenómeno perceptible, lo que hace que el control sea más robusto.

Se ha desarrollado un Controlador Difuso Adaptable (AFLC, por las siglas en inglés de Adaptive Fuzzy Logic Control), originalmente propuesto en [8] donde se comenta que este controlador muestra una gran estabilidad con respecto a otros controladores, ya que mediante el uso de sistemas difusos se estiman funciones de un sistema parcialmente conocido; en [9] se presenta el tema de un controlador difuso de modo deslizantes tipo *switching*, donde todos sus resultados de simulación fueron efectivas y los resultados experimentales demostraron que los esquemas de control propuestos son válidos y efectivos para las aplicaciones en ingeniería del mundo real.

En [10] se presenta el procedimiento de diseño de implementación de un controlador difuso TKS (Takagi-Kosko-Sugeno) utilizando sintonía ANFIS (siglas en inglés de Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System), que a pesar de solo llegar a la parte de simulación, se concluye un desempeño satisfactorio del controlador difuso; en [11] se diseña y se describe un controlador digital difuso tipo Mamdani en un FPGA con la meta final de estabilizar el sistema del péndulo invertido, presentando una mejor respuesta y en tiempo real debido a que el procesamiento paralelo inherente del FPGA demuestra que responde más rápido que el control procesado dentro de una PC; y en [12] se propone un control de supervisión difusa, que es una combinación de control de estabilización difusa y cambio de ángulo del objetivo difuso, exponiendo que el esquema propuesto reduce eficazmente el número de reglas base, reduciendo los esfuerzos computacionales, y mejorando el rendimiento.

Se presentan artículos donde proponen la aplicación de dos estrategias de control, por ejemplo, [13] donde una estrategia la usan para swing-up y la otra para estabilización en el punto de equilibrio inestable a partir de desigualdades matriciales lineales (LMI, por las siglas en inglés de Linear Matrix Inequality), comentando finalmente que el funcionamiento del control para swing-up requiere sólo un 25 % de magnitud de señal de control, lo que establece usar la energía necesaria para llevar el péndulo cerca al punto de equilibrio inestable y que existe una suave conmutación entre los controladores de swing-up y estabilización lo que permite controlar satisfactoriamente el péndulo.

Y en [7] se presenta el control de un carro péndulo como un sistema de cuarto orden. Esto quiere decir que para realizar el control del péndulo, se utilizarán los cuatro estados del sistema: posición y velocidad del péndulo, y posición y velocidad del carro; los resultados obtenidos en simulación fueron muy satisfactorios y bastante aceptables.

Se encuentran otras técnicas de control en la literatura por lo que se realizó una investigación del estado del arte, de los cuales se obtuvieron 2 de los controladores más actuales y fáciles de implementar en el sistema subactuado carro-péndulo.

2.2. Modelado matemático del sistema físico

Para investigar el comportamiento de sistemas ante perturbaciones externas y modificación de sus variables, así como consecuentemente el diseño de controladores, se usan dos enfoques diferentes. Uno es el teórico, y el otro es el experimental. En el enfoque teórico, es requerida una representación matemática del sistema con la finalidad de investigar su comportamiento dinámico. Esta representación viene dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución lleva a obtener el comportamiento dinámico del proceso [14].

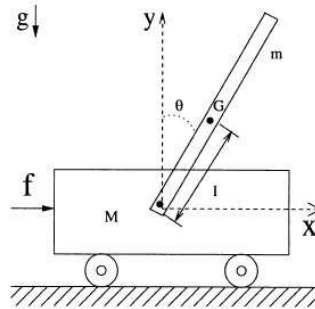


Figura 2.2: Esquemático y variables para el modelo del péndulo

En este caso, la obtención de las ecuaciones matemáticas del sistema carro-péndulo se deriva de utilizar la segunda Ley de Newton y la formulación de Euler-Lagrange [2].

Segunda Ley de Newton

Tomando en cuenta la figura 2.2, las coordenadas del centro de masa del péndulo (x_G, y_G) son:

$$\begin{aligned} x_G &= x + l \sin \theta \\ y_G &= l \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Aplicando la segunda Ley de Newton en la dirección x , obtenemos:

$$\begin{aligned} f &= M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 x_G}{dt^2} \\ &= M \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \\ &= M \ddot{x} + m \left(\ddot{x} + l \frac{d}{dt} (\cos \theta) \dot{\theta} \right) \\ &= M \ddot{x} + m \ddot{x} + ml \left((\cos \theta) \ddot{\theta} - (\sin \theta) \dot{\theta}^2 \right) \\ &= (M + m) \ddot{x} - ml (\sin \theta) \dot{\theta}^2 + ml (\cos \theta) \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde x es la posición del carro, \dot{x} la velocidad del carro, θ la posición del péndulo y $\dot{\theta}$ la velocidad del péndulo.

El movimiento rotacional del péndulo incluye dos fuerzas: la fuerza que ejerce la gravedad y la fuerza que ejerce la aceleración del carro. De hecho, cuando el carro está en movimiento acelerado, este aplica una fuerza sobre el péndulo. El momento de la fuerza que ejerce la gravedad está representado por $mgl \sin \theta$ y el momento de la fuerza que ejerce la aceleración del carro está dado por $-m\ddot{x} \cos \theta$.

La segunda Ley de Newton establece que la derivada del tiempo del momento angular (estado de rotación del cuerpo alrededor de un punto fijo) es igual al momento de las fuerzas aplicadas sobre el sistema. Entonces, se obtiene:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - ml\ddot{x} \cos \theta. \quad (2.3)$$

En donde M es la masa del carro, m la masa del péndulo, l la distancia desde el eje de giro al centro de gravedad del péndulo, g la fuerza de gravedad, x la distancia del centro de masa del carro desde la posición inicial, θ el ángulo del péndulo con la posición vertical, I la inercia del péndulo sobre su centro de gravedad y f la fuerza aplicada al carro.

Finalmente, las ecuaciones (2.2) y (2.3) describen el comportamiento dinámico del sistema.

Ecuaciones Euler-Lagrange.

Para calcular la función de Lagrange, se utiliza la energía cinética y la energía potencial del sistema.

La energía cinética del carro está dada por

$$K_1 = \frac{M\dot{x}^2}{2} \quad (2.4)$$

y la energía cinética del péndulo

$$K_2 = \frac{m\dot{x}G^2}{2} + \frac{m\dot{y}G^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2}. \quad (2.5)$$

Sumando (2.4) y (2.5), se obtiene la energía cinética total del sistema:

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La energía potencial es:

$$P = mgl(\cos \theta - 1). \quad (2.7)$$

La función de Lagrange se obtiene de la diferencia entre (2.6) y (2.7), teniendo como resultado:

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 - mgl(\cos \theta - 1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de movimiento correspondientes del sistema se derivan usando las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= f - B_{eq} \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -B_p \dot{\theta}\end{aligned}\tag{2.9}$$

en donde B_{eq} y B_p son el coeficiente de amortiguación viscoso del carro y del péndulo respectivamente.

Desarrollando (2.9), se tiene:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) &= ml\dot{x} \cos \theta + (I + ml^2)\dot{\theta} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) &= mgl \sin \theta - ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

y finalmente se obtienen las ecuaciones de movimiento (2.10).

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta &= f - B_{eq}\dot{x} \\ ml\ddot{x} \cos \theta + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta &= -B_p\dot{\theta}\end{aligned}\tag{2.10}$$

En base a (2.10), o a las ecuaciones (2.2) y (2.3), el sistema puede ser representado en una forma estándar como se muestra a continuación:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau.\tag{2.11}$$

dónde $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ la matriz de Coriolis y efectos de disipación, $G(q)$ la matriz de efectos gravitatorios, y q es el vector de estados del sistema.

$$\begin{aligned}q &= \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}, \quad M(q) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & I + ml^2 \end{bmatrix}, \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -ml \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} f - B_{eq}\dot{x} \\ -B_p\dot{\theta} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Quedando (2.11) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & I + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ml \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f - B_{eq}\dot{x} \\ -B_p\dot{\theta} \end{bmatrix}.\tag{2.12}$$

Relación Fuerza - Voltaje

Ya que el movimiento del sistema es producido por un motor de corriente directa, la fuerza de este se puede expresar en términos de su voltaje aplicado, mediante el análisis del circuito de armadura como se muestra en la Figura 2.2. Teniendo en cuenta que:

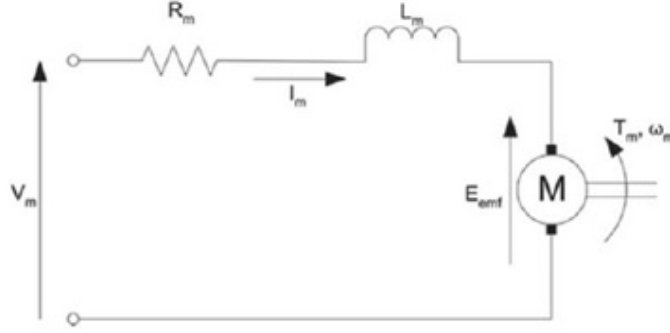


Figura 2.3: Esquema electromagnético del motor de CD

$$f = \frac{n_g k_g T_m}{r_{mp}}; \quad T_m = n_m k_t I_m; \quad I_m = \frac{v}{R_m} - \frac{k_m w_m}{R_m}; \quad w_m = \frac{k_g \dot{x}}{r_{mp}}$$

en donde k_g es la relación de la caja de engranaje, n_g la eficiencia de la caja de engranaje, n_m la eficiencia del motor, k_t la constante torque-corriente del motor, r_{mp} el radio del piñón del motor, R_m la resistencia de armadura del motor y k_m la constante de fuerza electromotriz del motor.

Reemplazando T_m, I_m y w_m en f se obtiene:

$$f = \frac{k_g n_g n_m k_t}{r_{mp} R_m} v - \frac{k_m k_t n_g n_m k_g^2}{r_{mp}^2 R_m} \dot{x} \quad (2.13)$$

Reemplazando (2.13) en (2.12) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & I + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ml \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_g n_g n_m k_t}{r_{mp} R_m} v - \frac{k_m k_t n_g n_m k_g^2}{r_{mp}^2 R_m} \dot{x} - B_{eq} \dot{x} \\ -B_p \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Para obtener las ecuaciones del sistema, hay que basarse en (2.11) y despejar \ddot{q} , que es el vector donde se encuentran implícitas las variables de estados del sistema.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1}(\tau - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \\ \ddot{q} &= M^{-1} \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 v \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_2 \dot{x} \\ B_p \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -ml \sin \theta \end{bmatrix} \right) \\ \ddot{q} &= \begin{bmatrix} \frac{I + ml^2}{\Delta} & \frac{-ml \cos \theta}{\Delta} \\ \frac{-ml \cos \theta}{\Delta} & \frac{M + m}{\Delta} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 v - \alpha_2 \dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -B_p \dot{\theta} + mgl \sin \theta \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

quedando

$$\ddot{x} = \frac{(I + ml^2)(\alpha_1 v - \alpha_2 \dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta - B_p \dot{\theta})}{\Delta} \quad (2.16)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{ml \cos \theta (\alpha_2 \dot{x} - \alpha_1 v - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) + (M + m)(mgl \sin \theta - B_p \dot{\theta})}{\Delta} \quad (2.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= (M + m)I + Mml^2 + m^2 l^2 \sin^2 \theta \\ \alpha_1 &= \frac{k_g n_g n_m k_t}{r_{mp} R_m} \\ \alpha_2 &= \left(\frac{k_m k_t n_g n_m k_g^2}{r_{mp}^2 R_m} + B_{eq} \right). \end{aligned}$$

2.3. Linealización

Se realiza una linealización de la representación de variables de estado del sistema, ya que esto es de utilidad para aplicar técnicas de control lineales, como el controlador LQR, que se verá mas adelante.

Linealizando (2.16) y (2.17) alrededor del punto de funcionamiento con $\theta = 0$; $\sin(\theta) = \theta$ y $\cos(\theta) = 1$ (posición vertical superior del péndulo):

$$\ddot{x} = \frac{(I + ml^2)(\alpha_1 v - \alpha_2 \dot{x}) - ml(mgl\theta - B_p \dot{\theta})}{(M + m)I + Mml^2} \quad (2.18)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{ml(\alpha_2 \dot{x} - \alpha_1 v) + (M + m)(mgl\theta - B_p \dot{\theta})}{(M + m)I + Mml^2} \quad (2.19)$$

Teniendo en cuenta como variables de estado:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \dot{x}, \quad x_4 = \dot{\theta}$$

Se obtiene como resultado un sistema lineal como se muestra en (2.20):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m^2 gl^2}{\Lambda} & \frac{-(I + ml^2)\alpha_2}{\Lambda} & \frac{ml B_p}{\Lambda} \\ 0 & \frac{(M + m)mgl}{\Lambda} & \frac{(ml)\alpha_2}{\Lambda} & \frac{-(M + m)B_p}{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I + ml^2)\alpha_1}{\Lambda} \\ \frac{-ml\alpha_1}{\Lambda} \end{bmatrix} v \quad (2.20)$$

donde $\Lambda = (M + m)I + Mml^2$.

2.4. Parámetros y especificaciones técnicas

En la Figura 2.4 se muestra el sistema carro-péndulo de QUANSER con el que se realizaron las experimentaciones en este trabajo de tesis. En la Figura 2.5 se dan a conocer las dimensiones en las que opera el sistema.

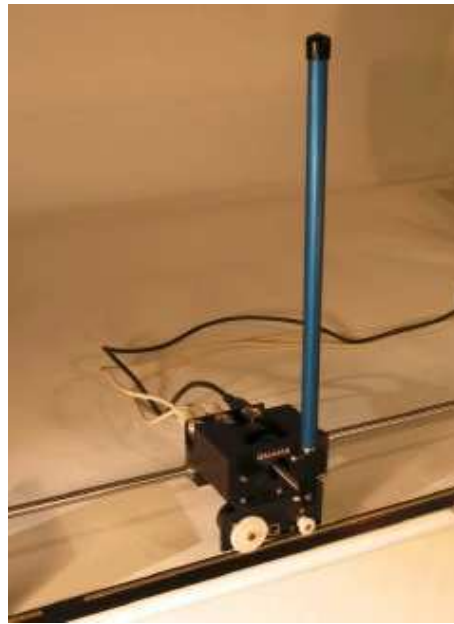


Figura 2.4: Carro-Péndulo

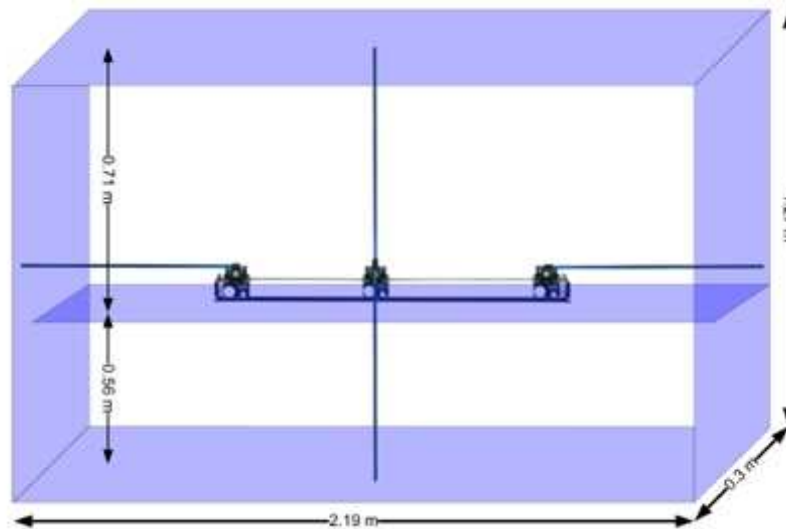


Figura 2.5: Dimensiones reales del sistema

El sistema utiliza un motor Faulhaber de CD (Corriente Directa), sin núcleo y de imán permanente, de baja inductancia y de alta eficiencia dando como resultado una respuesta mucho más rápida. Con un voltaje de entrada nominal de $6V$, corriente máxima de $1A$, frecuencia máxima de $50Hz$ y una velocidad de $628.3r[\text{rad/s}]$.

Las posiciones del carro y del péndulo se miden con dos codificadores ópticos digitales con una resolución de 2.275×10^{-5} y $0.0015[\text{rad/cuenta}]$ respectivamente.

La tarjeta de adquisición de datos que se utiliza es la "Q8-USB" de QUANSER, como se muestra en la Figura 2.6. En la tabla 2.1 se muestran algunas de las especificaciones de la tarjeta. En [15] se dan a conocer todas las especificaciones de esta.



Figura 2.6: Tarjeta de adquisición de datos

| Especificación | Valor |
|--|-----------------------------------|
| Número de canales entradas/salidas analógicas | 8 |
| Resolución entradas/salidas analógicas | 16 – bit |
| Rango entradas/salidas analógicas | $\pm 5V, \pm 10V / \pm 5V, 10.8V$ |
| Tiempo de conversión entradas/salidas analógicas | $4\mu s / 10\mu s$ |
| Número de líneas I/O entradas/salidas digitales | 8 |
| Corriente de fuga de entrada digital | $\pm 2\mu A$ |
| Corriente máxima salida digital | $\pm 32mA$ |

Tabla 2.1: Especificaciones Tarjeta de Adquisición de Datos

Se utiliza un amplificador de voltaje lineal de un solo canal "VoltPAQ-X1" de QUANSER, mostrado en la Figura 2.7. En la Tabla 2.2 se observan las especificaciones del amplificador.



Figura 2.7: Amplificador de voltaje

El software utilizado es QUARC de QUANSER que se combina con SIMULINK del programa MATLAB para realizar los experimentos de este trabajo.

Todas las simulaciones y experimentos que se llevan a cabo en el sistema físico tanto en este, como en subsecuentes capítulos, se desarrollan utilizando los parámetros mostrados en la Tabla 2.3.

| Especificación | Valor |
|-------------------------------|-----------------------------|
| Número de salidas | 1 |
| Salida de corriente continua | $\pm 4A$ |
| Salida de voltaje continuo | $\pm 24V$ |
| Número de entradas analógicas | 4 |
| Suministro de voltaje de CA | $100 - 127V$ o $220 - 240V$ |
| Ganancia del amplificador | $1V/V$ o $3V/V$ |
| Comando Amplificador | $\pm 10V$ |

Tabla 2.2: Especificaciones Amplificador de Voltaje

| Parámetros | Descripción | Valor |
|------------|--|--|
| m | Masa del péndulo | $0.127kg$ |
| l | Longitud del péndulo desde el pivote al centro de gravedad | $0.1778m$ |
| I | Momento de inercia | $1.20 \times 10^{-3}kg \cdot m^2$ |
| B_p | Constante de amortiguación viscosa del péndulo | $0.0024 \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$ |
| g | Constante de gravedad | $9.81 \frac{m}{s^2}$ |
| R_m | Resistencia de armadura del motor | 2.6Ω |
| k_t | Constante torque-corriente del motor | $0.18mH$ |
| k_m | Constante de fuerza electromotriz del motor | $7.68 \times 10^{-3} \frac{V}{rad/s}$ |
| n_m | Eficiencia del motor | 0.69 |
| k_g | Relación de la caja de engranaje | 3.71 |
| n_g | Eficiencia de la caja de engranaje | 0.90 |
| M | Masa del carro | $0.75kg$ |
| B_{eq} | Coficiente de amortiguación viscoso del carro | $5.4 \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$ |
| r_{mp} | Radio del piñón del motor | $6.35 \times 10^{-3}m$ |

Tabla 2.3: Parámetros del modelo matemático del carro péndulo

2.5. Conclusiones

En el capítulo se presentó el desarrollo del modelo matemático que describe al sistema carro-péndulo, basándonos en la Segunda Ley de Newton y en la formulación Euler-Lagrange, con la finalidad de obtener las ecuaciones de la dinámica del sistema, después se linealizaron dichas ecuaciones sobre un punto de operación. Se obtiene el modelo matemático del sistema ya que es la base sobre el cual se implementarán los controladores. Por último, se presentaron los parámetros y las especificaciones técnicas del carro-péndulo, así como también de la tarjeta de adquisición de datos y del amplificador de voltaje.

Capítulo 3

Estrategias de Control

3.1. Control Basado en Energía

El control Basado en Energía es un controlador no lineal que moldea la energía del sistema para diseñar la ley de control. Este controlador sirve para efectuar el levantamiento del péndulo desde la posición vertical inferior hacia la vecindad de la vertical superior (swing-up). A continuación se describe el proceso de diseño del controlador no lineal.

Pasividad del péndulo invertido

La energía total del sistema carro-péndulo está dada por la suma de la energía cinética $K(q, \dot{q})$ (2.6), y la energía potencial $P(q)$ (2.7):

$$\begin{aligned} E &= K(q, \dot{q}) + P(q) \\ &= \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Por lo tanto, de (2.11) se tiene que la derivada de la energía es:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} + \dot{q}^T G(q) \\ &= \dot{q}^T (-C\dot{q} - G + \tau + \frac{1}{2}\dot{M}\dot{q}) + \dot{q}^T G \\ &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \left(- \begin{bmatrix} ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 v \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_2 \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \frac{2}{2} \\ -ml\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + \begin{bmatrix} -mgl\dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_1 v - \alpha_2 \dot{x})\dot{x}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

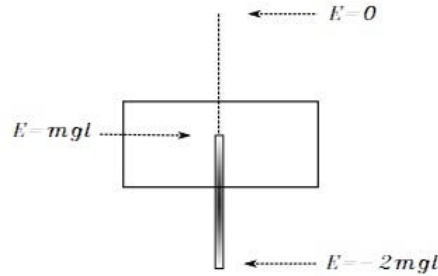


Figura 3.1: Puntos de Referencia

Integrando ambos lados de la ecuación de anterior, se obtiene:

$$\int_0^t (\alpha_1 v - \alpha_2 \dot{x}) \dot{x} \cdot dt = E(t) - E(0) \geq -2mgl - E(0). \quad (3.3)$$

La propiedad de pasividad del sistema sugiere el uso de la energía total E en el diseño del controlador, y querer llevar a cero a x , \dot{x} y E .

El sistema (2.11) tiene un subconjunto de dos puntos de equilibrio; $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = (*, 0, 0, 0)$, es el punto de equilibrio inestable, y $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = (*, \pi, 0, 0)$, es el punto de equilibrio estable. La energía total $E(q, \dot{q})$ es igual a 0 para el punto de equilibrio inestable y $-2mgl$ para el punto de equilibrio estable, como se muestra en la Figura 3.1. El objetivo de control es estabilizar el sistema alrededor del punto de equilibrio inestable.

Órbita Homoclínica

Una órbita homoclínica es una órbita única donde se cruzan una variedad estable y una variedad inestable (conjuntos de puntos cuyas órbitas, cuando el tiempo crece, tienden al punto fijo). Esta órbita deja el punto de silla en una dirección y vuelve en la dirección opuesta. Esto hace que converja al mismo punto [2].

El ejemplo de una bola rodante sin fricción en una superficie curva con alturas máximas diferentes, es un ejemplo simple de una órbita homoclínica. En este ejemplo, la bola rodante se desliza en la superficie entre las dos elevaciones y, al no tener fricción, el desplazamiento es continuo creando una única órbita que converge al mismo punto (parte convexa de la superficie), como se muestra en la Figura 3.2.

Al ser $\dot{x} = 0$ y $E(q, \dot{q}) = 0$ los valores deseados para llevar al péndulo a su posición vertical superior, de (3.1) se tiene que:

$$\frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 = mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.4)$$

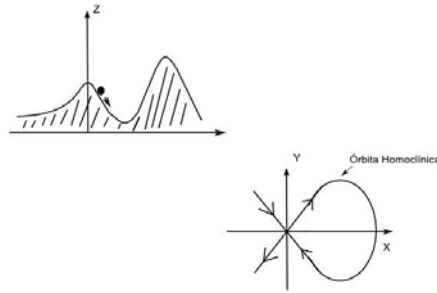


Figura 3.2: Órbita Homoclínica

la cual define una trayectoria muy particular que corresponde a la órbita homoclínica, que al traer al sistema a esta órbita se resuelve el problema de *swing – up* del péndulo.

Control para llevar al sistema a la Órbita Homoclínica

Como se mencionó anteriormente, la propiedad de pasividad del sistema sugiere el uso de la energía total E (3.1) en el diseño del controlador.

Al desear llevar a cero x, \dot{x} y E (punto de equilibrio inestable), se propone la siguiente Función Candidata de Lyapunov:

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2} E(q, \dot{q})^2 + \frac{k_v}{2} \dot{x}^2 + \frac{k_x}{2} x^2 \quad (3.5)$$

donde k_E, k_v y k_x , son constantes estrictamente positivas. Notar que (3.5) es una función semidefinida positiva.

Al derivar (3.5), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= k_E E \dot{E} + k_v \dot{x} \ddot{x} + k_x x \dot{x} \\ &= k_E E \dot{x} (\alpha_1 v - \alpha_2 \dot{x}) + k_v \dot{x} \ddot{x} + k_x x \dot{x} \\ &= \dot{x} [k_E E (\alpha_1 v - \alpha_2 \dot{x}) + k_v \ddot{x} + k_x x]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

De manera que:

$$\dot{V} = -k_\delta \dot{x}^2 \quad (3.7)$$

ya que la derivada de la Función de Lyapunov debe ser al menos semidefinida negativa. Se igualó \dot{V} de esta manera pero no es la única solución.

En el controlador no se tomará en cuenta la fricción viscosa del péndulo (B_p) ya que esta fuerza no conservadora (fuerza que va en sentido opuesto al desplazamiento) generalmente crea dificultades para modelar y controlar un sistema. Esta fricción crea una disipación en la energía del sistema que se puede considerar como una incertidumbre, que afecta el control de este.

Al tomar (2.16), (3.6) y (3.7) se intenta que:

$$v \left[\frac{\alpha_1(k_E E \Delta + k_v(I + ml^2))}{\Delta} \right] + k_v \left[\frac{(I + ml^2)(ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - \alpha_2 \dot{x}) - m^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta}{\Delta} \right] + k_x x - k_E E \alpha_2 \dot{x} = -k_\delta \dot{x}. \quad (3.8)$$

Se despeja v (voltaje del motor) ya que es la fuerza que se ejerce sobre el sistema, y de (3.8), se concluye que la ley de control queda de la siguiente manera:

$$v = \frac{(-k_\delta \dot{x} + k_E E \alpha_2 \dot{x} - k_x x) \Delta - k_v [(I + ml^2)(ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - \alpha_2 \dot{x}) - m^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta]}{\alpha_1 [k_E E \Delta + k_v (I + ml^2)]}. \quad (3.9)$$

Tomando en cuenta (3.8), la ley de control (3.9) no tendrá singularidades, siempre que:

$$\left(k_E E + \frac{k_v}{(M + m)I + Mml^2 + m^2 l^2 \sin^2 \theta} \right) \neq 0. \quad (3.10)$$

Esto da el siguiente límite inferior para $\frac{k_v}{k_E}$

$$\frac{k_v}{k_E} > 2mgl [(M + m)I + Mml^2 + m^2 l^2]. \quad (3.11)$$

Hay que tener en cuenta que la posición inicial del carro es arbitraria, ya que siempre se puede elegir un valor apropiado para k_x en $V(q, \dot{q})$ (3.5). Si $x(0)$ es grande, se debe elegir una k_x pequeña, sin embargo, la tasa de convergencia del algoritmo puede disminuir cuando k_x es pequeño.

Notar que cuando la energía cinética total $K(q(0), \dot{q}(0))$ es cero, la posición angular inicial $\theta(0)$ deberá pertenecer a $(-\pi, \pi)$. Esto significa que el único punto prohibido es $\theta(0) = \pi$. En particular, $\theta(0)$ puede incluso estar apuntando hacia abajo, es decir, $\theta = \pi$ siempre que $K(q(0), \dot{q}(0))$ no sea cero. Ya que \dot{V} es al menos semidefinida negativa, puede aplicarse el principio de Invariancia de La Salle para concluir estabilidad asintótica [2].

Estabilización en el punto de equilibrio inestable

Cuando el péndulo está en una vecindad de su posición de equilibrio inestable, el controlador lineal puede estabilizar satisfactoriamente el péndulo. Para implementar un controlador lineal de equilibrio, las ecuaciones no lineales (2.16) y (2.17) tienen que ser linealizadas sobre su posición de equilibrio superior como se muestra en (2.18) y (2.19).

El controlador lineal que se utiliza para la la estabilización es el LQR (Linear-Quadratic Regulator).

El regulador lineal cuadrático es un tipo de controlador (regulador de retroalimentación de estados) que pertenece a la familia de los controladores óptimos, y tiene la ventaja de que permite diseñar la matriz de retroalimentación K , de una manera un poco más sistemática y no necesita el total control del sistema, solamente que el sistema sea estabilizable.

Esta ley de control está definida como $u = -Kx^T$ que minimiza el índice de desempeño (función de costo):

$$J = \int_0^{\infty} [(xQx) + (uRu)]dt \quad (3.12)$$

donde Q y R son matrices de pesos definidas positivas de los estados y de la entrada del sistema respectivamente.

Sustituyendo los parámetros de la Tabla 2.3 en el sistema linealizado (2.20), el sistema lineal en el espacio de estados queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.2309 & -13.1012 & 0.0133 \\ 0 & 47.8080 & 56.7295 & -0.5179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.3753 \\ -5.9554 \end{bmatrix} v \quad (3.13)$$

Para calcular las ganancias del control lineal LQR se utiliza el siguiente comando en MATLAB:

```
>> K=lqr(A,B,diag([Q(1,1),Q(2,2),Q(3,3),Q(4,4)]),R(1,1))
```

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.2309 & -13.1012 & 0.0133 \\ 0 & 47.8080 & 56.7295 & -0.5179 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.3753 \\ -5.9554 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 0.1$$

el cual arroja como resultado

$$K = [-3.1623 \quad -52.2255 \quad -20.8922 \quad -8.2222] \quad (3.14)$$

del cual se obtiene el controlador como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} v = -Kx^T &= [3.1623 \quad 52.2255 \quad 20.8922 \quad 8.2222] \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= [(3.1623)x \quad (52.2255)\theta \quad (20.8922)\dot{x} \quad (8.2222)\dot{\theta}] \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2. Control por Modos Deslizantes

Debido a su simplicidad de diseño y su invariancia para modelar las incertidumbres, el control por modos deslizantes continúa siendo un tema de estudio reciente. El control por modos deslizantes tiene como objetivo hacer que las trayectorias del estado converjan a la superficie de deslizamiento definida y deslizarse en la superficie hasta llegar al equilibrio [16].

La dinámica del modelo del sistema de estudio puede estar escrita como:

$$\ddot{x} = f(x) + b(x)v \quad (3.16)$$

donde

$$\ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\Delta} \\ \frac{f_2}{\Delta} \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{\Delta} \\ \frac{h_2}{\Delta} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta &= (M + m)I + Mml^2 + m^2l^2 \sin^2 \theta \\ f_1 &= (I + ml^2)(-\alpha_2 \dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) - ml \cos \theta (mgl \sin \theta - B_p \dot{\theta}) \\ f_2 &= ml \cos \theta (\alpha_2 \dot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) + (M + m)(mgl \sin \theta - B_p \dot{\theta}) \\ h_1 &= (I + ml^2)\alpha_1 \\ h_2 &= -ml \cos \theta \alpha_1 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\Delta = (M + m)I + Mml^2 + m^2l^2 \sin^2 \theta > 0$.

Para la ecuación dinámica (3.16), el punto de equilibrio inestable es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1^*, 0, 0, 0]$, y el punto de equilibrio estable es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1^*, \pi, 0, 0]$, donde x_1^* es la posición deseada del carro. Los objetivos de control son: levantar el sistema carro-péndulo hacia el plano superior sobre el horizonte (swing-up); y estabilizar el carro-péndulo en el equilibrio inestable.

Sin pérdida de generalidad, se puede establecer x_1^* y denotar los puntos de equilibrio inestables como $(x_d, \theta_d, \dot{x}_d, \dot{\theta}_d) = (0, 0, 0, 0)$.

Se definen las superficies deslizantes D_1 y D_2 :

$$D_1 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d + \lambda_1(\theta - \theta_d) \quad (3.17)$$

$$D_2 = \dot{x} - \dot{x}_d + (\lambda_2/\lambda_3)(x - x_d) \quad (3.18)$$

donde los parámetros de las superficies deslizantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son constantes positivas.

Usando una combinación lineal de dos superficies deslizantes, se puede considerar λ_3 como un parámetro de acoplamiento combinando las superficies deslizantes (3.17) y (3.18), y proponer la superficie deslizante:

$$\begin{aligned} s &= D_1 + \lambda_3 D_2 \\ &= \dot{\theta} + \lambda_1 \theta + \lambda_3 \dot{x} + \lambda_2 x \\ &= x_4 + \lambda_1 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_2 x_1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se define la función de Lyapunov en términos de la superficie deslizante s :

$$V = \frac{1}{2}s^2. \quad (3.20)$$

Tomando la derivada, se tiene:

$$\dot{V} = s\dot{s}. \quad (3.21)$$

Usando \ddot{x} y $\ddot{\theta}$, en (3.16), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{\theta} + \lambda_1\dot{\theta} + \lambda_3\ddot{x} + \lambda_2\dot{x} \\ &= \frac{1}{\Delta}(h_1\lambda_3 + h_2)u + \frac{1}{\Delta}(f_2 + f_1\lambda_3) + \lambda_1x_4 + \lambda_2x_3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Se define

$$\Psi = \frac{f_2 + f_1\lambda_3}{h_1\lambda_3 + h_2}, \quad \Phi = \frac{h_1\lambda_3 + h_2}{\Delta} \quad (3.23)$$

y

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > 0 \\ 0 & \text{if } s = 0 \\ -1 & \text{if } s < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Se propone el siguiente control general:

$$v = -\Psi - \left[\frac{\lambda_1x_4 + \lambda_2x_3 + k_2\text{sgn}(s)}{\Phi} \right]. \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.25) en (3.22), se tiene:

$$\dot{V} = s[V\Phi + \Phi\Psi + \lambda_1x_4 + \lambda_2x_3]. \quad (3.26)$$

Para el teorema de estabilidad de Lyapunov (Apéndice A), el sistema es conducido por el controlador hacia la superficie deslizante $s = 0$.

Ahora, se tiene la condición de invertibilidad de (3.25):

$$h_1\lambda_3 + h_2 = \lambda_3(I + ml^2) - ml \cos \theta \neq 0. \quad (3.27)$$

Por lo tanto, se requiere:

$$\cos \theta \neq \frac{\lambda_3(I + ml^2)}{ml}. \quad (3.28)$$

Se sabe que el rango de θ es $[-\pi, \pi]$, y consecuentemente el rango de $\cos \theta$ es $[-1, 1]$. Esto implica que la singularidad se puede evitar si se diseña λ_3 en el control de deslizamiento (3.25), tal que:

$$\frac{\lambda_3(I + ml^2)}{ml} > 1. \quad (3.29)$$

En lugar de usar el término discontinuo $\text{sgn}(s)$ (signo), se puede utilizar la término $\tanh(s)$ (tangente hiperbólica) para evitar oscilaciones bruscas del sistema que puede excitar dinámicas de

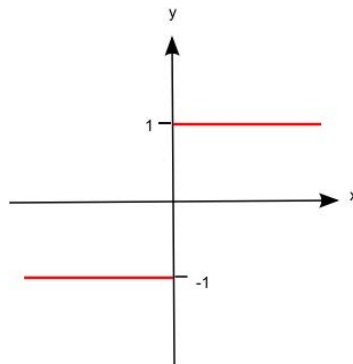


Figura 3.3: Función $\text{sgn}(x)$

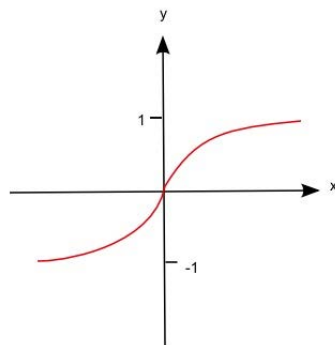


Figura 3.4: Función $\text{tanh}(x)$

actuador sin modelar, y de alta frecuencia dinámica [16]. Como se muestra en la Figura 3.3, la función sgn toma un valor de $[-1, 1]$, mientras que la función tanh toma todos los valores que van desde -1 a 1, como se observa en la Figura 3.4.

Por lo tanto, el sistema está garantizado por el esquema de control propuesto para alcanzar la superficie deslizante $s = 0$.

Tomando (3.25), ahora la ley de control queda de la siguiente manera:

$$v = -\Psi - \left[\frac{\lambda_1 x_4 + \lambda_2 x_3 + k_2 \tanh(s)}{\Phi} \right]. \quad (3.30)$$

Diseño de superficie deslizante para balancear y control de posición

El diseño del controlador de modo deslizantes se hace para lograr los siguientes objetivos:

1. Mover el péndulo hacia arriba desde el equilibrio estable usando un juego de parámetros de superficie deslizante.
2. Cambiar a un conjunto diferente de parámetros de la superficie de deslizamiento cuando el péndulo entra en la región de conmutación, y estabilizar el sistema carro-péndulo en el equilibrio inestable.

Estabilización

Se define el vector de estado:

$$z = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \dot{x}]^T. \quad (3.31)$$

El equilibrio de estado inestable es

$$ze_1 = [0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (3.32)$$

A partir de (3.32) se linealiza el sistema y se obtiene el modelo linealizado

$$\dot{e}_1 = A_1 e_1 \quad (3.33)$$

donde

$$e_1 = z - ze_1 = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \dot{x}]^T, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{mgl}{\Delta_1}\lambda_3 & -\frac{ml}{\Delta_1}\lambda_1 & -\frac{ml}{\Delta_1}\lambda_2 \\ \frac{mgl}{\Delta_1} & \frac{I + ml^2}{\Delta_1}\lambda_1 & \frac{I + ml^2}{\Delta_1}\lambda_2 \end{bmatrix}$$

y $\Delta_1 = ml - \lambda_3(I + ml^2)$.

Definiendo la variable p de Laplace, se obtiene la ecuación característica $\det(pI - A_1) = 0$ donde $\det(A)$ es la determinante de A_1 .

La ecuación polinómica característica es:

$$p^3 + \frac{ml\lambda_1 - (I + ml^2)\lambda_2}{\Delta_1}p^2 + \frac{mgl\lambda_3}{\Delta_1}p + \frac{mgl\lambda_2}{\Delta_1} = 0. \quad (3.34)$$

Usando el criterio de estabilización de Ruth-Hurwitz, obtenemos la condición de estabilidad:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \lambda_3 < \frac{ml}{I + ml^2}. \quad (3.35)$$

De (3.35), se tiene que:

$$\frac{\lambda_3(I + ml^2)}{ml} < 1. \quad (3.36)$$

Para satisfacer la condición de invertibilidad (3.28) y la condición de estabilidad (3.36), el límite de θ para el rango de operación del Control por Modos Deslizantes es:

$$\theta_{lim} < \cos^{-1} \left(\frac{\lambda_3(I + ml^2)}{ml} \right). \quad (3.37)$$

Swing-Up

El equilibrio de estado estable es

$$ze_2 = [\pi \quad 0 \quad 0]^T. \quad (3.38)$$

El modelo linealizado alrededor del equilibrio estable es

$$\dot{e}_2 = A_2 e_2 \quad (3.39)$$

donde

$$e_2 = z - ze_2 = [\theta - \pi \quad \dot{\theta} \quad \dot{x}]^T, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{mgl}{\Delta_2}\lambda_3 & -\frac{ml}{\Delta_2}\lambda_1 & -\frac{ml}{\Delta_2}\lambda_2 \\ \frac{mgl}{\Delta_2} & -\frac{I+ml^2}{\Delta_2}\lambda_1 & -\frac{I+ml^2}{\Delta_2}\lambda_2 \end{bmatrix}$$

y $\Delta_2 = ml + \lambda_3(I + ml^2)$.

Ahora, se obtiene la ecuación característica $\det(pI - A_2) = 0$ y el siguiente polinomio característico:

$$p^3 + \frac{ml\lambda_1 + (I + ml^2)\lambda_2}{\Delta_2}p^2 + \frac{mgl\lambda_3}{\Delta_2}p + \frac{mgl\lambda_2}{\Delta_2} = 0. \quad (3.40)$$

Para balancear el péndulo, se tiene que desestabilizar el sistema y aumentar la oscilación alrededor del punto de equilibrio estable. De (3.40), se deduce que una parte real de los autovalores es positiva si:

$$\lambda_3 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (3.41)$$

Para evitar la singularidad, se puede concluir de (3.28) que

$$\frac{ml}{I + ml^2} < \lambda_3. \quad (3.42)$$

Como resultado, la condición de *swing-up* es:

$$\frac{ml}{I + ml^2} < \lambda_3 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (3.43)$$

La región de conmutación R_s para el equilibrio inestable está definida como:

$$R_s = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i| \leq x_{ic}, i = 1, 2, 3, 4\} \quad (3.44)$$

donde x_{ic} es una constante positiva para $i = 1, 2, 3, 4$.

Se hace uso del mismo controlador (3.30) para la estabilización y el balanceo del péndulo utilizando las condiciones que se muestran en (3.35) y (3.43) respectivamente.

Entonces el control por modos deslizantes propuesto puede oscilar el sistema carro-péndulo desde el equilibrio estable y estabilizar el sistema en el equilibrio inestable.

3.3. Conclusiones

En este capítulo se desarrollaron los modelos matemáticos de dos controladores no lineales aplicados al sistema subactuado carro-péndulo. El primer controlador no lineal fue el Controlador Basado en Energía, el cual no tiene muy buenas propiedades de rechazo a perturbaciones, y a su vez, se crea una disipación en la energía del sistema si se toma en cuenta la fricción viscosa del péndulo (B_p) en el controlador. Junto con este controlador, para poder estabilizar el sistema en el punto de equilibrio inestable, se utilizó el controlador lineal LQR y así poder mantener el sistema en la parte superior vertical. Por otra parte, el Controlador por Modos Deslizantes ejecuta la función de levantar el péndulo a la parte vertical superior y estabilizarlo en el punto de equilibrio inestable utilizando el mismo controlador pero con condiciones de ganancias diferentes.

Capítulo 4

Desarrollo de controladores en MATLAB

Para observar el rendimiento de los controladores propuestos para el sistema carro-péndulo, se realizaron experimentos en MATLAB usando SIMULINK.

4.1. Control Basado en Energía y LQR

En la Figura 4.1 se muestra el esquema de propuesta de control en donde el Control Basado en Energía hace la función del swing-up y al momento de llegar a un abanico de conmutación, el control lineal LQR entra en acción para estabilizar al sistema en su punto de equilibrio inestable.

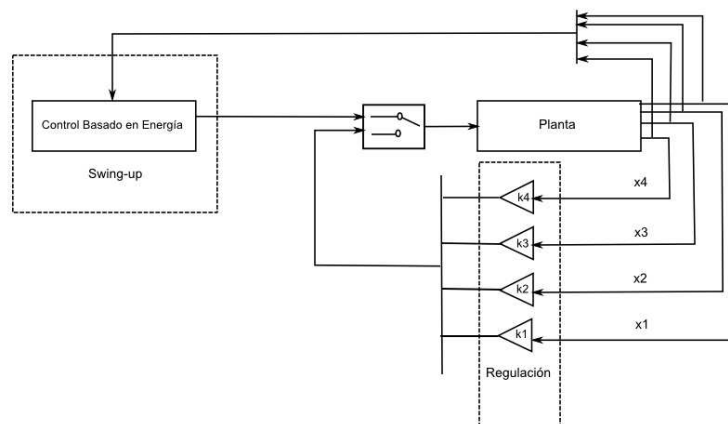


Figura 4.1: Propuesta de Control

Se escogieron las ganancias $k_E = 1$, $k_v = 1$, $k_x = 0.1$ y $k_\delta = 1$. Estas ganancias se han elegido

para aumentar la tasa de convergencia con el fin de cambiar al controlador de estabilización lineal (LQR) en un tiempo razonable. Hay que notar que estas ganancias satisfacen la desigualdad (3.11). El algoritmo lleva el péndulo invertido cerca de la órbita homoclínica, pero el péndulo invertido se mantendrá oscilante a medida que se acerque más y más al origen. Una vez que el sistema esté lo suficientemente cerca al origen, es decir, $(|x| \leq 0.1, |\theta| \leq 0.3, |\dot{x}| \leq 0.2, |\dot{\theta}| \leq 0.3)$, se cambia al controlador lineal LQR $u = -K[x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$, tomando las ganancias de (3.14).

Las condiciones iniciales propuestas para los estados del sistema, en donde interactúan el Control Basado en Energía y el control LQR son $x(0) = [0.1 \ 2\pi/3 \ 0 \ 0]$.

De la Figura 4.2 a la Figura 4.5, se muestra la parte de estabilización que ejerce el control LQR cuando el péndulo se encuentra en la vertical superior. Se observa como la posición del péndulo, la velocidad del carro, y la velocidad del péndulo convergen a cero con un tiempo menor a $t = 5s$, la posición del carro tarda un poco más es estabilizarse en un tiempo $t = 15s$.

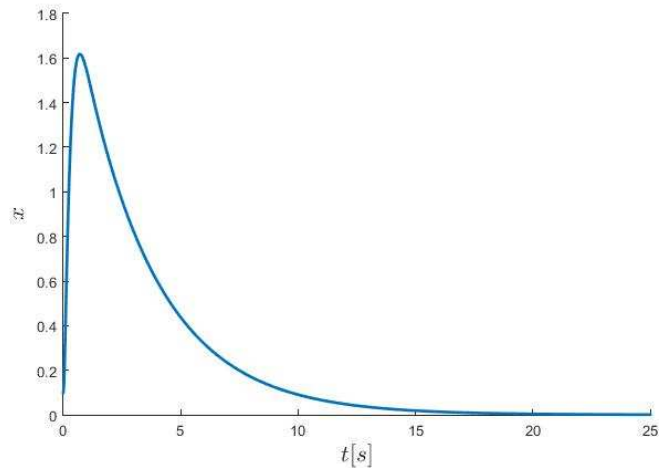


Figura 4.2: Posición del carro - LQR

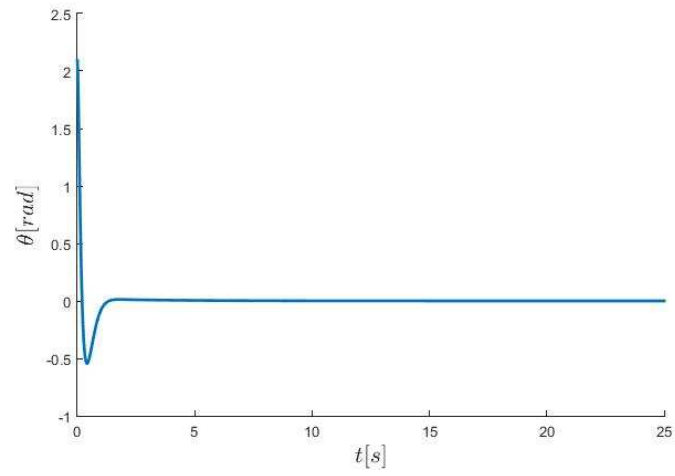


Figura 4.3: Posición del péndulo - LQR

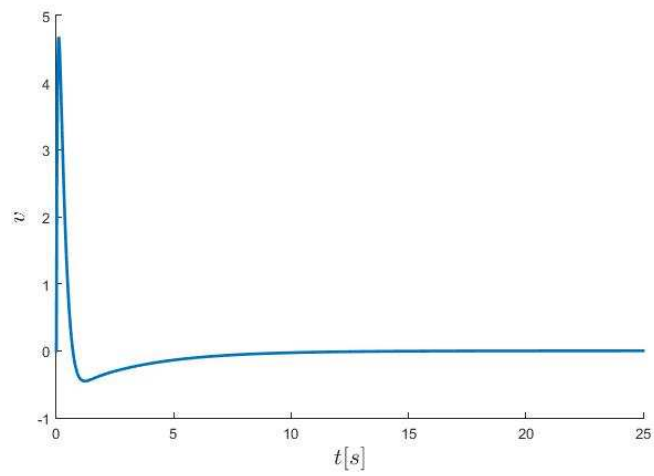


Figura 4.4: Velocidad del carro - LQR

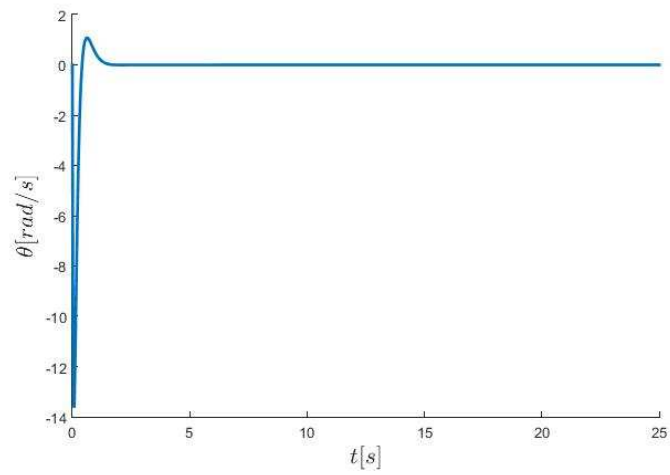


Figura 4.5: Velocidad del péndulo - LQR

De la Figura 4.6 a la Figura 4.11, se muestra el comportamiento de los estados, del voltaje, y de la energía en base al controlador no lineal Basado en Energía. Este ejerce el trabajo de llevar el péndulo desde la posición vertical inferior hacia la superior. Se observa como la energía toma un valor ascendente desde $-2mgl$ tendiendo a 0, es decir, lleva al sistema a la órbita homoclínica.

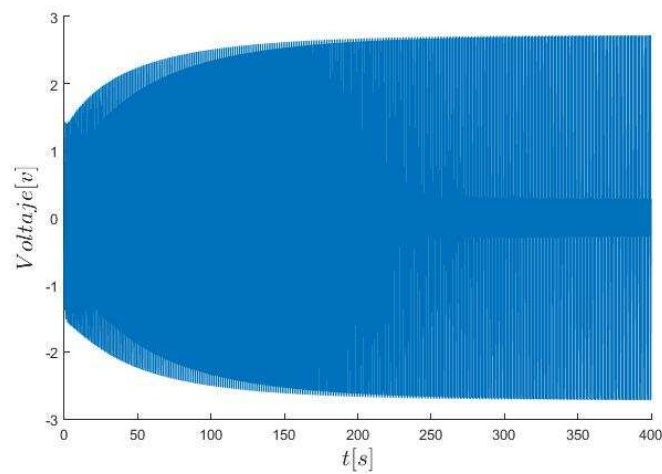


Figura 4.6: Ley de Control - SwingUp

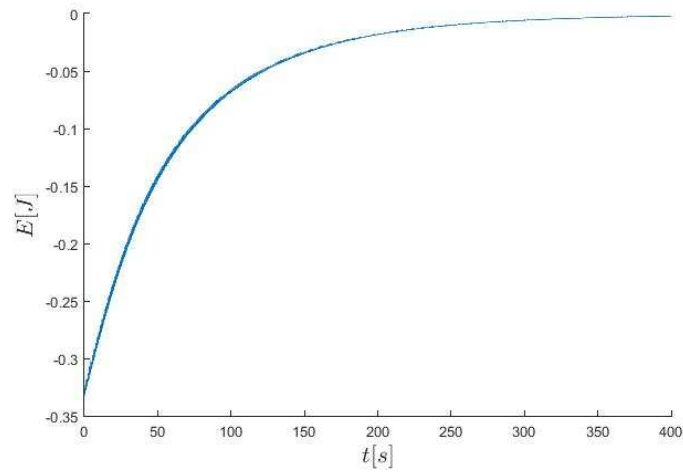


Figura 4.7: Energía - SwingUp

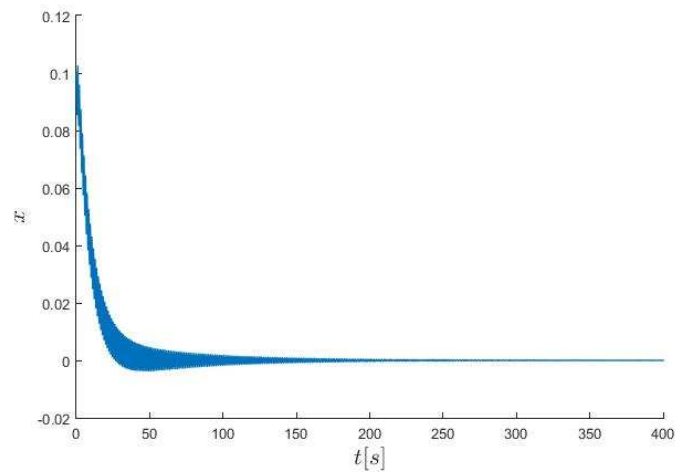


Figura 4.8: Posición del carro - SwingUp

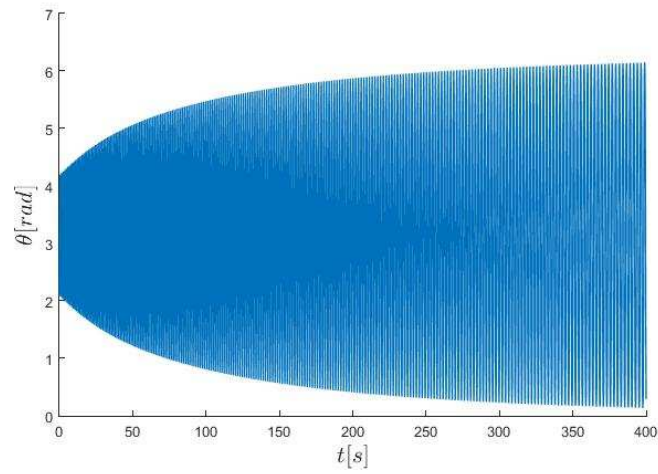


Figura 4.9: Posición del péndulo - SwingUp

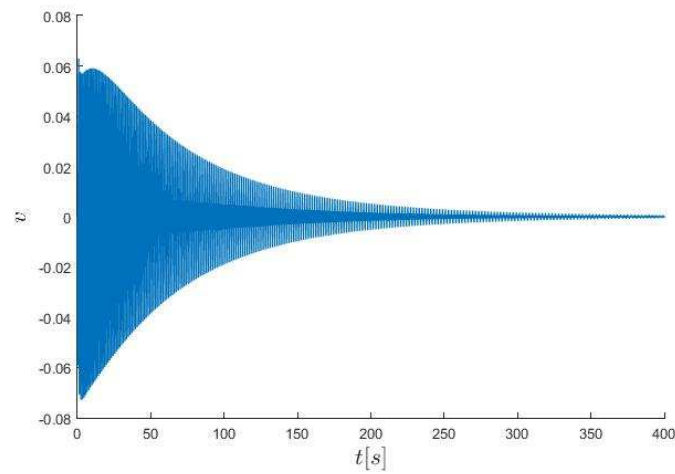


Figura 4.10: Velocidad del carro - SwingUp

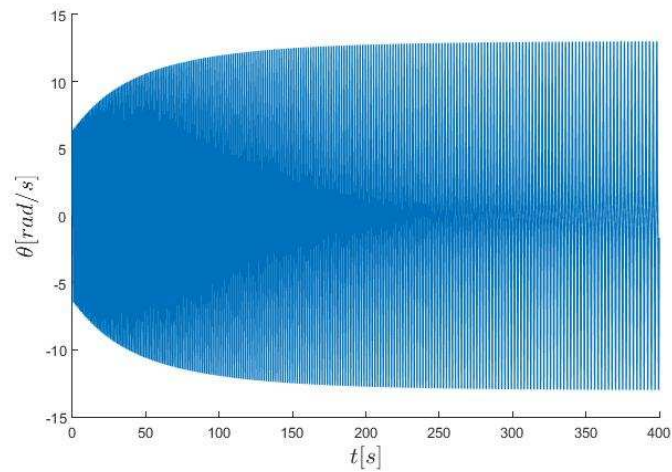


Figura 4.11: Velocidad del péndulo - SwingUp

Las simulaciones de la Figura 4.12 a la Figura 4.17, muestran que el control no lineal hace oscilar al sistema hasta llevarlo a la órbita homoclínica, conmutando al controlador lineal en un tiempo de $t = 350s$, que hace que los estados, el voltaje, y la energía del sistema se establezcan en cero. Se observa que antes de la conmutación, la energía E mantiene una mínima oscilación muy cercana a cero.

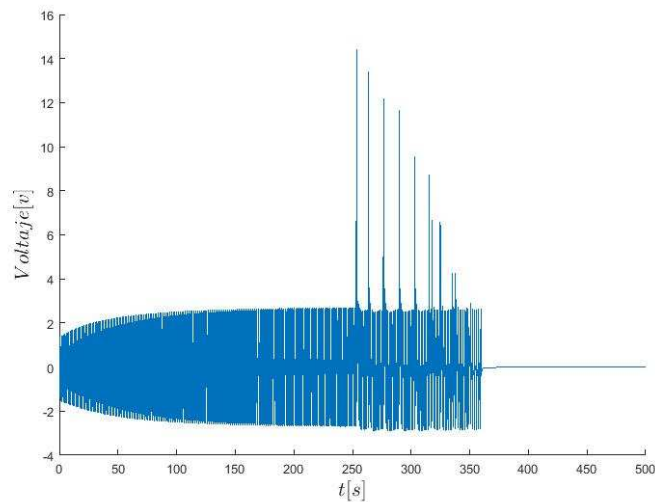


Figura 4.12: Ley de Control

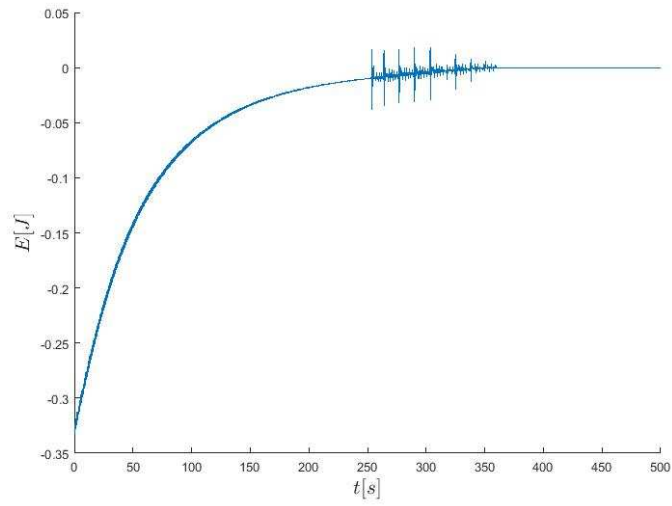


Figura 4.13: Energía

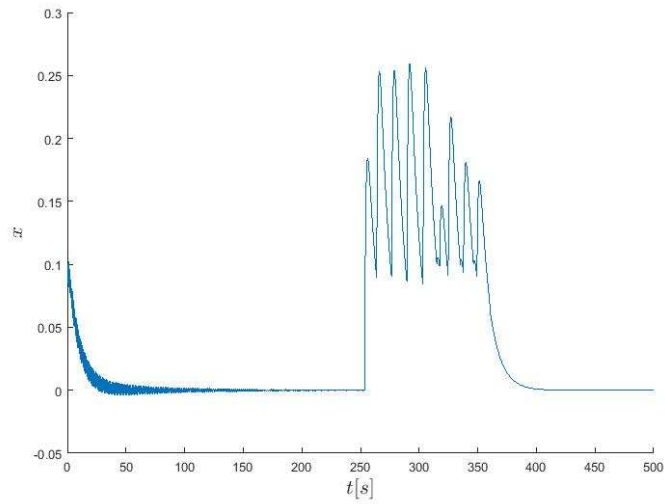


Figura 4.14: Posición del carro

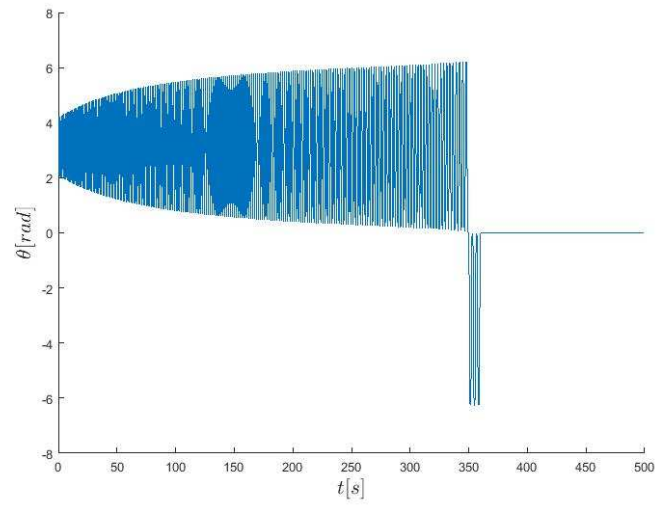


Figura 4.15: Posición del péndulo

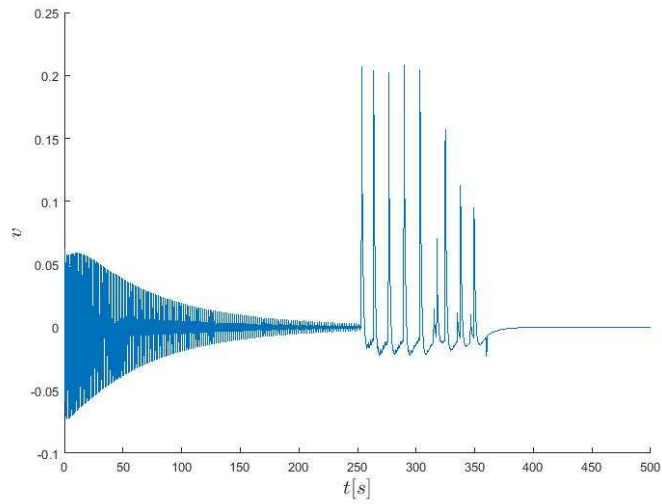


Figura 4.16: Velocidad del carro

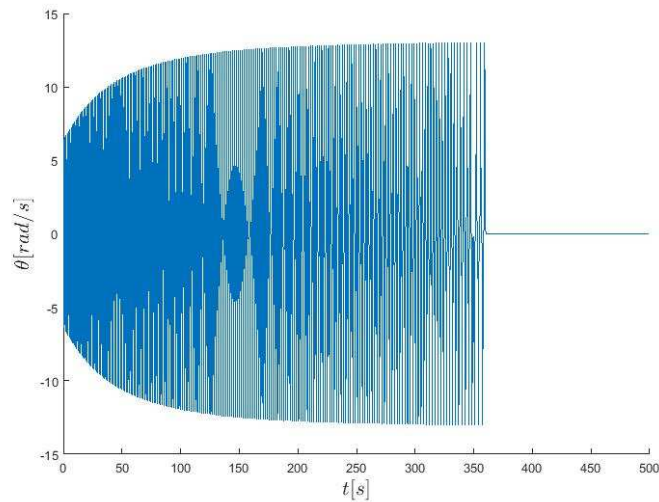


Figura 4.17: Velocidad del péndulo

4.2. Control por Modos Deslizantes

En la Figura 4.18, se muestra el esquema de propuesta del controlador por Modos Deslizantes, el cual ejerce la acción de *swing – up* y estabilización del sistema.

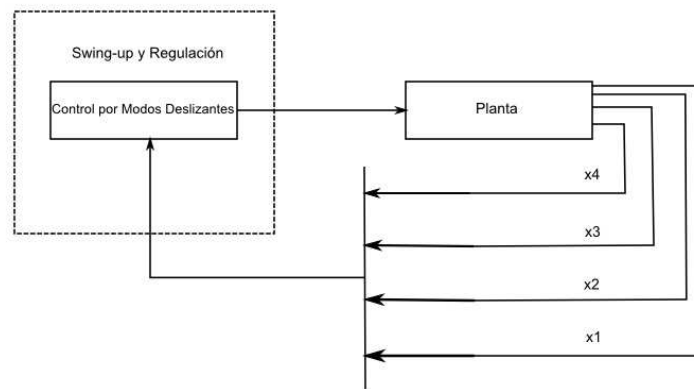


Figura 4.18: Propuesta de Control

En la Tabla 4.1, y en la Tabla 4.2, se indican los valores de las ganancias de las condiciones en las que el controlador cambia a la superficie deslizante que lleva a los estados al equilibrio. También se escogió $k_2 = 0.5$.

Las condiciones iniciales en el que el controlador ejerce la acción de estabilización del sistema

| Ganancia | Valor |
|-------------|-------|
| λ_1 | 4 |
| λ_2 | 6.75 |
| λ_3 | 4 |

Tabla 4.1: Ganancias Estabilización

| Ganancia | Valor |
|-------------|-------|
| λ_1 | 0.01 |
| λ_2 | 129 |
| λ_3 | 5.5 |

Tabla 4.2: Ganancias Swing-Up

de los cuatro estados son $x(0) = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0]$. A su vez, se propusieron las siguientes condiciones iniciales para el sistema en donde el controlador actúa desde el levantamiento del péndulo hasta la estabilización $x(0) = [0 \ 2\pi/3 \ 0 \ 0]$.

De la Figura 4.19 a la Figura 4.23, se observa el comportamiento de estabilización del control por modos deslizantes cuando el péndulo se encuentra en el punto de equilibrio inestable, haciendo que los estados del sistema converjan a cero en un tiempo $t = 3s$.

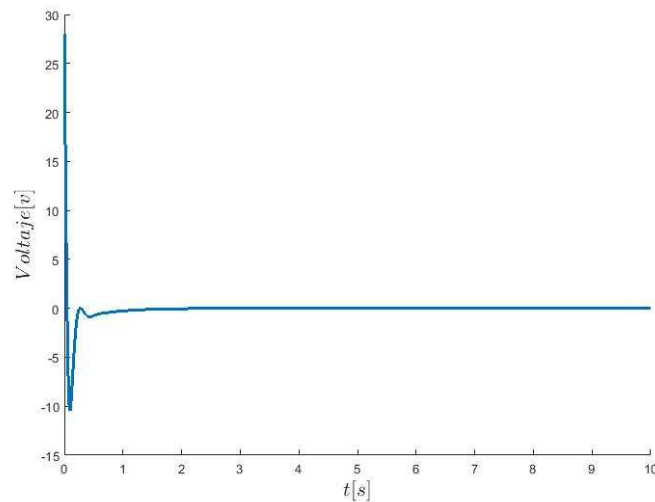


Figura 4.19: Ley de Control - Estabilización

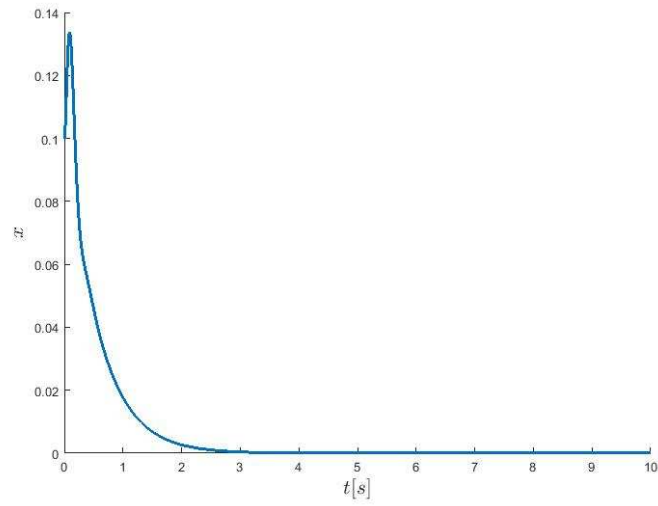


Figura 4.20: Posición del carro - Estabilización

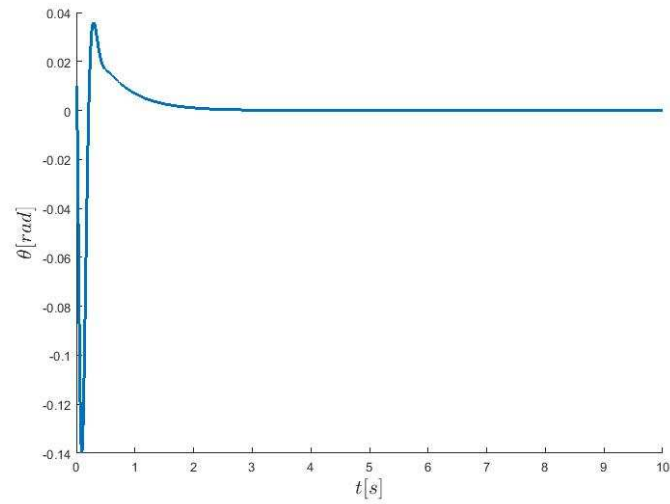


Figura 4.21: Posición del péndulo - Estabilización

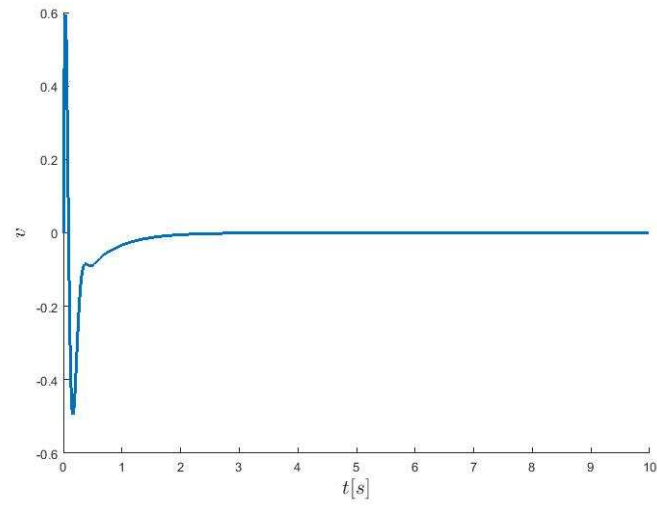


Figura 4.22: Velocidad del carro - Estabilización

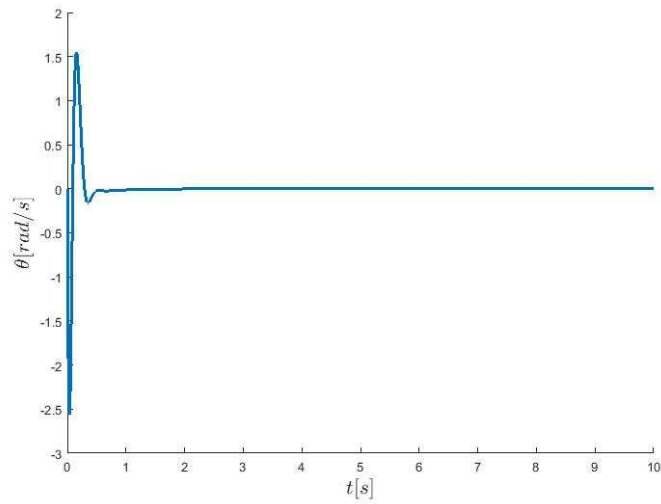


Figura 4.23: Velocidad del péndulo - Estabilización

El trabajo completo del controlador, muestra como este hace que el sistema oscile desde su punto de equilibrio estable, subiendo el péndulo hasta la parte vertical superior hasta estabilizar al sistema en un tiempo de $t = 22s$, como se observa de la Figura 4.24 a la Figura 4.28.

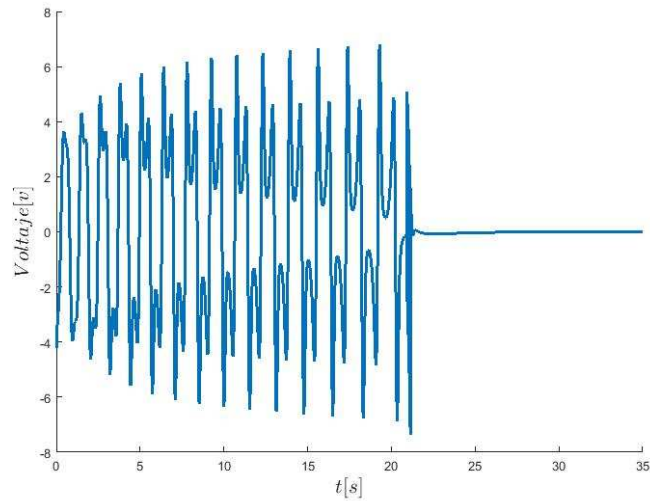


Figura 4.24: Ley de Control - SMC

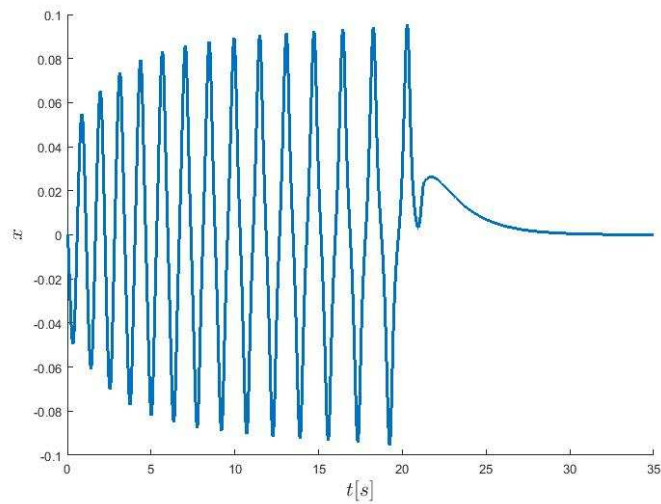


Figura 4.25: Posición del carro - SMC

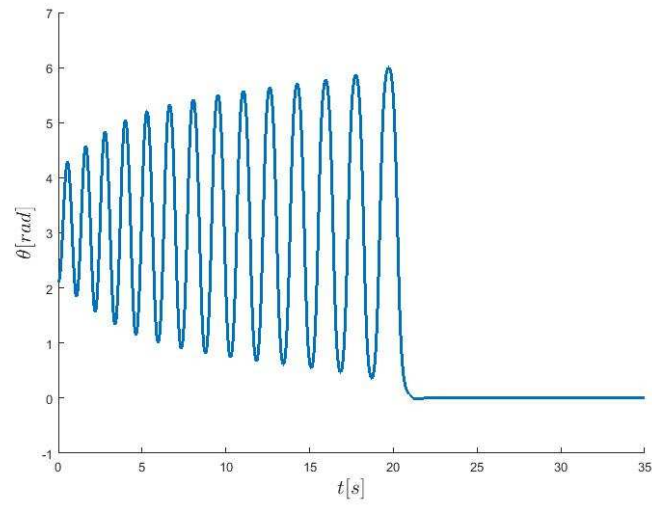


Figura 4.26: Posición del péndulo - SMC

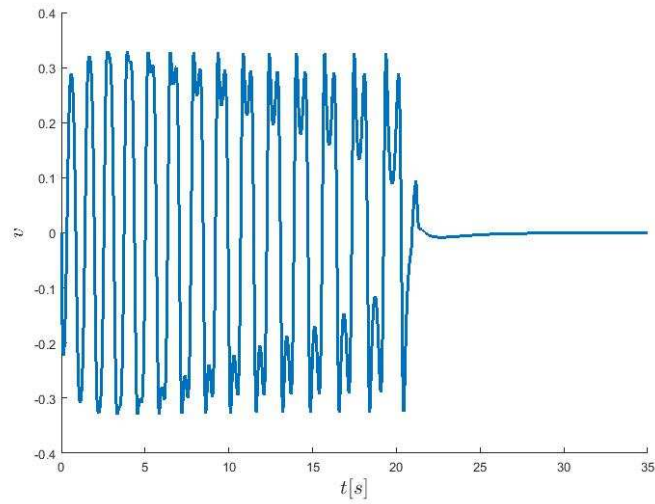


Figura 4.27: Velocidad del carro - SMC

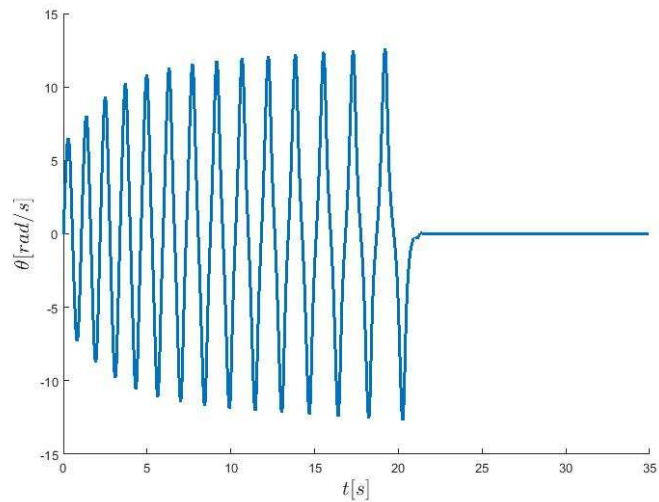


Figura 4.28: Velocidad del péndulo - SMC

4.3. Control PD de posición y PD de velocidad

El programa de QUANSER incluye un controlador PD de posición y un controlador PD de velocidad para el sistema carro péndulo. Este se puede utilizar para estabilizar el sistema en el punto de equilibrio inestable, y hacer uso de él junto con los controladores no lineales anteriores.

En la Tabla 4.3 se establecen las ganancias del controlador para los estados.

| Estado | Ganancia |
|----------------|----------|
| x | 25 |
| θ | 100 |
| \dot{x} | 40 |
| $\dot{\theta}$ | 20 |

Tabla 4.3: Ganancias

De la Figura 4.29 a la Figura 4.32, se observa el comportamiento de estabilización del control PD con unas condiciones iniciales para los estados de $x(0) = [0.1 \ 2\pi/3 \ 0 \ 0]$. Se observa como la posición del carro y del péndulo y la velocidad del carro y del péndulo se estabilizan en cero en un tiempo $t = 6s$.

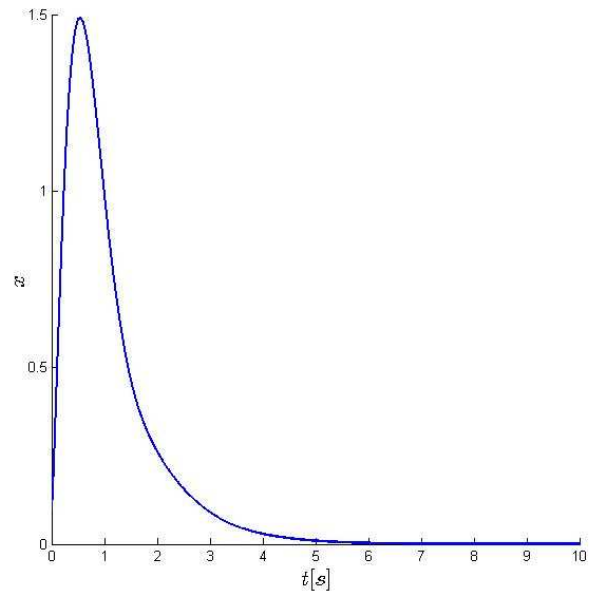


Figura 4.29: Posición del carro

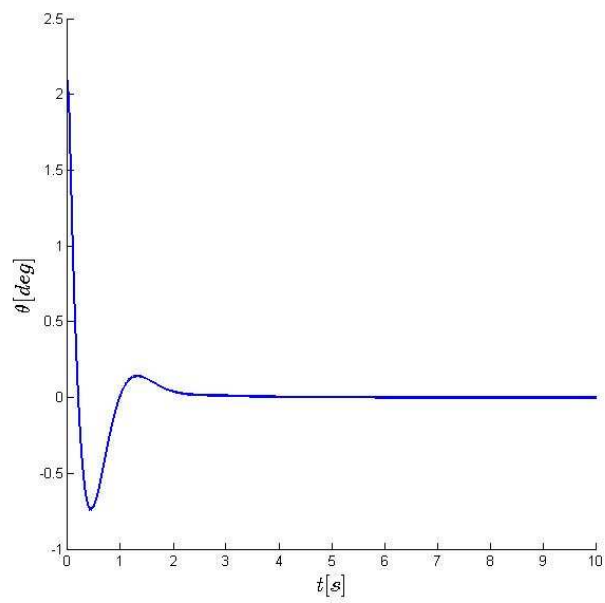


Figura 4.30: Posición del péndulo

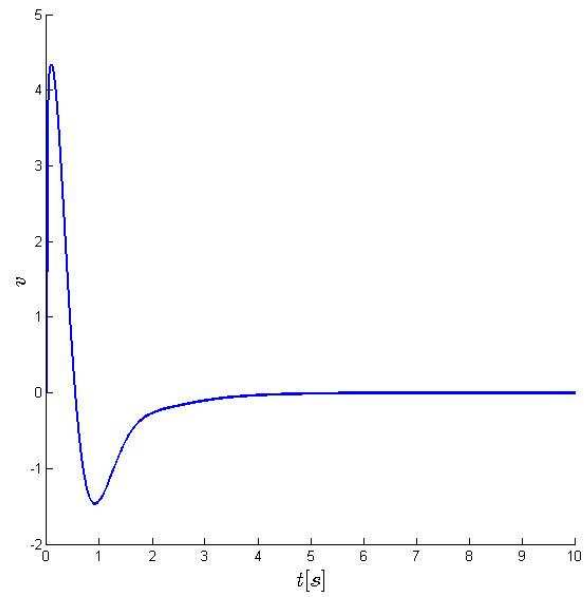


Figura 4.31: Velocidad del carro

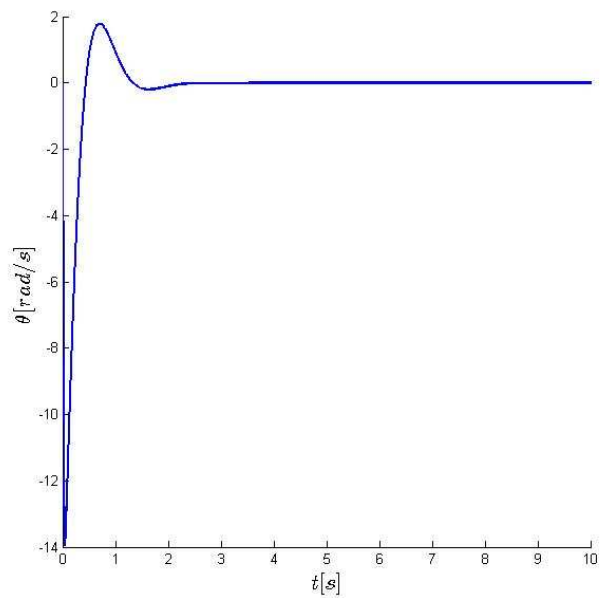


Figura 4.32: Velocidad del péndulo

4.4. Conclusiones

En este capítulo se muestran los resultados de simulación del Control Basado en Energía con el LQR, del Control por Modos Deslizantes, y del Control PD de posición y PD de velocidad.

Se observa como el Control Basado en Energía oscila de manera suave durante un tiempo muy prolongado en llegar a la vecindad de conmutación y efectuar la estabilización en el punto de equilibrio inestable. Al momento de efectuarse el cambio de controlador para la estabilización, se generan ciertos picos, y no se genera una conmutación inmediata entre controladores.

El Control por Modos Deslizantes genera oscilaciones rápidas y de mayor fuerza al hacer el swing-up, por lo que el tiempo de oscilación es mucho menor en comparación con el controlador anterior. Al momento de estar en la vecindad de conmutación, se cambia a la condición de estabilización de una manera más rápida.

Teniendo en cuenta estas simulaciones, observando que los resultados pueden ser favorables, y que comportamiento podrá tomar el sistema físico, se pasa a la validación experimental y probar los controladores en el sistema carro-péndulo.

Capítulo 5

Validación experimental

Control PD de posición y PD de velocidad

Este controlador se probó de manera experimental poniendo en la vertical superior al péndulo para así observar el comportamiento de estabilización sobre el sistema. Se levantó manualmente el péndulo hasta llevarlo a un rango de 5° en la parte superior, al hacer esto el controlador entra en acción y mantiene al péndulo en su punto de equilibrio inestable.

De la Figura 5.1 a la Figura 5.4, se observa el comportamiento de los cuatro estados del sistema en su estabilización bajo el dominio del control PD de posición y PD de velocidad.

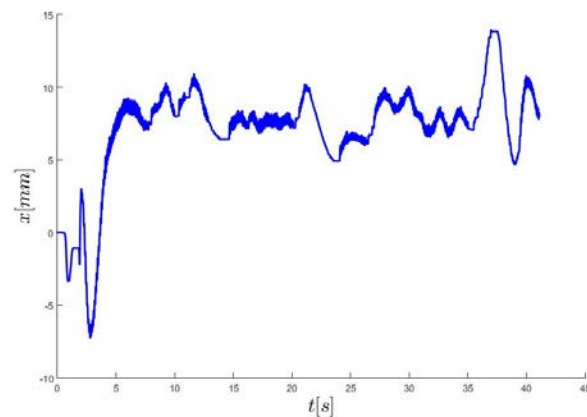


Figura 5.1: Posición del carro

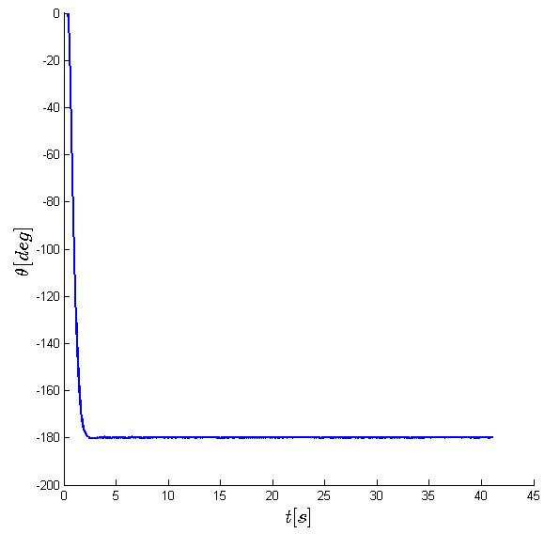


Figura 5.2: Posición del péndulo

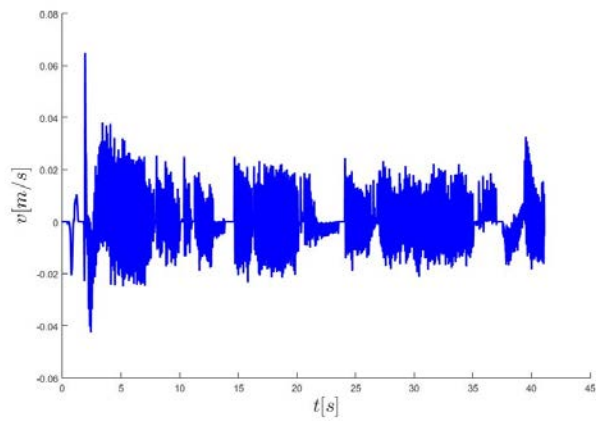


Figura 5.3: Velocidad del carro

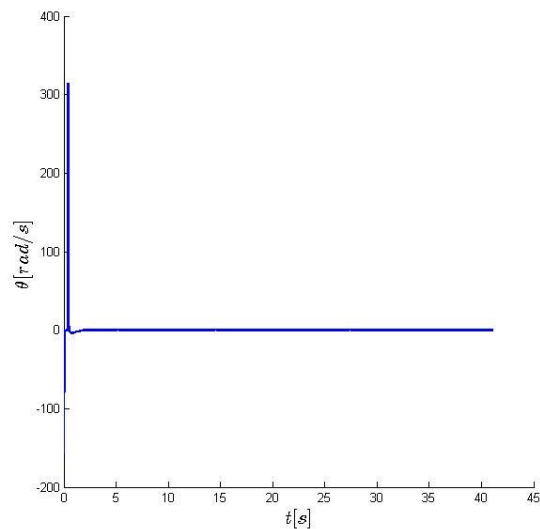


Figura 5.4: Velocidad del péndulo

Control Basado en Energía con LQR

Al probar el controlador en el carro-péndulo, las ganancias que se aplicaron de manera teórica no fueron las acertadas para el sistema físico, ya que la posición y la velocidad del carro presentaban oscilaciones bastantes significativas y no se lograba una estabilización de los 4 estados del sistema, por lo que, de manera empírica, se probaron ganancias cerca del valor estipulado que se establecieron en simulación. En la Tabla 5.1 y 5.2 se muestra el valor de las ganancias que se aplicaron al sistema, obteniendo la mejor estabilidad de este.

Se propuso un abanico de conmutación cerca del origen en donde $|\theta| \leq 0.13$ y $|\dot{\theta}| \leq 0.35$. En el abanico de conmutación no se incluyen los estados del carro ya que este no siempre queda en el origen (posición inicial).

| Estado | Ganancia |
|----------------|----------|
| x | -12 |
| θ | -60 |
| \dot{x} | -30 |
| $\dot{\theta}$ | -8.222 |

Tabla 5.1: Ganancias LQR

| Constante | Ganancia |
|------------|----------|
| k_E | 1 |
| k_v | 1 |
| k_x | 1.5 |
| k_δ | 2 |

Tabla 5.2: Ganancias Controlador No Lineal

Aplicando el controlador al sistema carro-péndulo, se observa como este empieza a oscilar desde su punto de equilibrio estable hasta llegar a la vertical superior en $t = 80s$, estabilizando la posición del carro y del péndulo, y la velocidad del carro y del péndulo como se muestra de la Figura 5.5 a la Figura 5.8. Se observa que la posición y la velocidad del carro tienen unas pequeñas oscilaciones al momento de llegar a la estabilización al tratar de mantener al péndulo en la vertical superior.

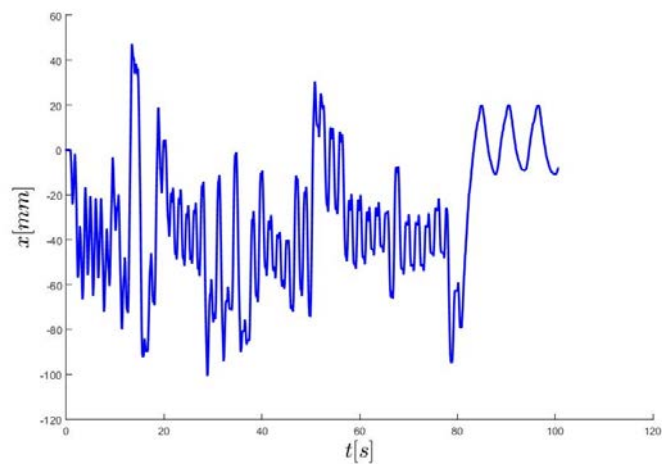


Figura 5.5: Posición del carro

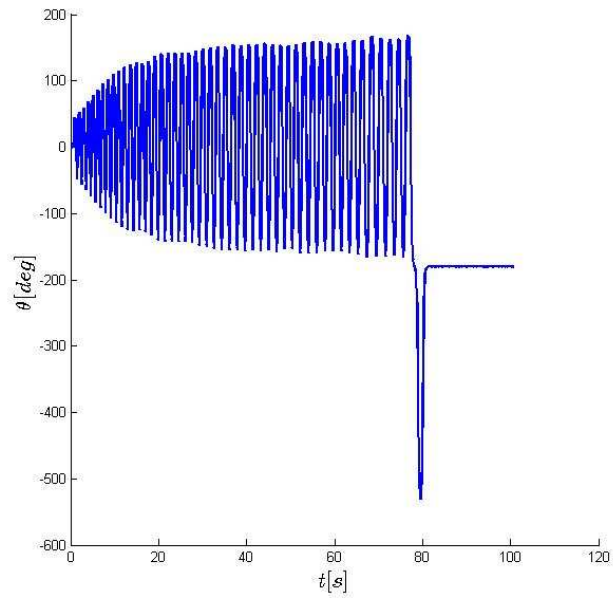


Figura 5.6: Posición del péndulo

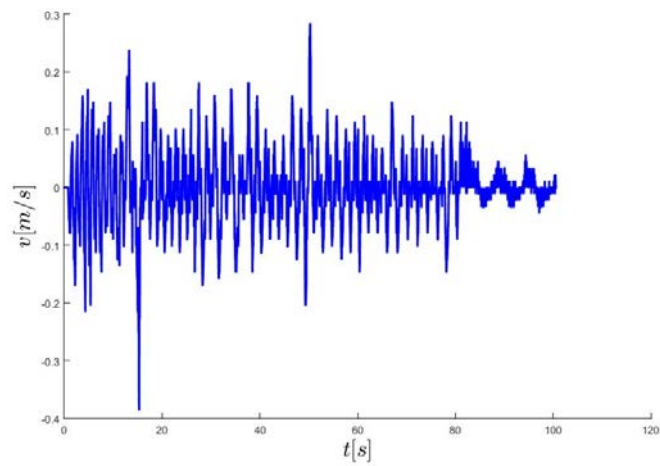


Figura 5.7: Velocidad del carro

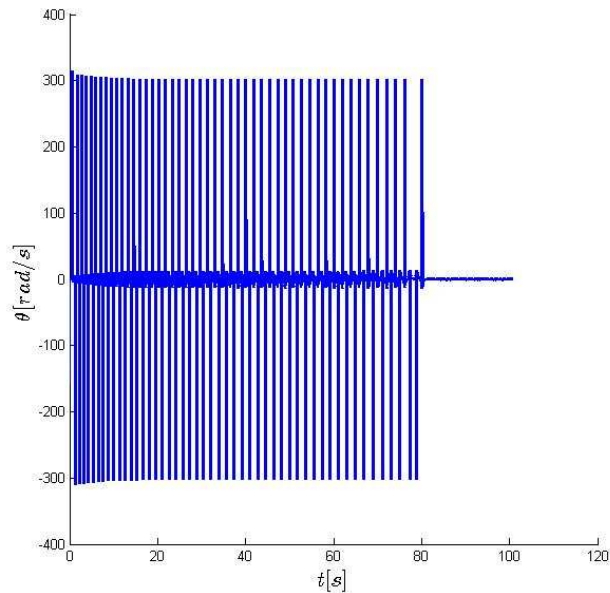


Figura 5.8: Velocidad del péndulo

Control por Modos Deslizantes

Como en el caso anterior, del Control Basado en Energía, las ganancias que se aplicaron de manera teórica no fueron las acertadas para el sistema físico. En este caso, la respuesta que daba el sistema al momento de efectuar el swing-up, lo hacía de una manera muy rápida y esto causaba daños al piñón del motor, por lo que, se tuvieron que ajustar para que el levantamiento del péndulo se realizara de una manera mas suave. De manera empírica se probaron ganancias hasta tener una mejor respuesta del sistema. En la Tabla 5.3 y en la Tabla 5.4, se muestra el valor de las ganancias que se aplicaron al sistema, obteniendo la mejor estabilidad de este. Dando un valor de $k_2 = 20$.

Se propuso un abanico de conmutación para entrar a la superficie deslizante de estabilización donde $|x| \leq 0.15$, $|\theta| \leq 0.25$, $|\dot{x}| \leq 0.2$ y $|\dot{\theta}| \leq 2$.

| Ganancia | Valor |
|-------------|-------|
| λ_1 | 4 |
| λ_2 | 6.75 |
| λ_3 | 4 |

Tabla 5.3: Ganancias Estabilización

| Ganancia | Valor |
|-------------|-------|
| λ_1 | 2 |
| λ_2 | 370 |
| λ_3 | 5.5 |

Tabla 5.4: Ganancias Swing-Up

De la Figura 5.9 a la Figura 5.12, se muestra el comportamiento del sistema carro-péndulo al estar bajo el Control por Modos Deslizantes, observando como el sistema empieza a oscilar hasta llegar a la estabilización de sus cuatro estados en el punto de equilibrio inestable en $t = 23s$.

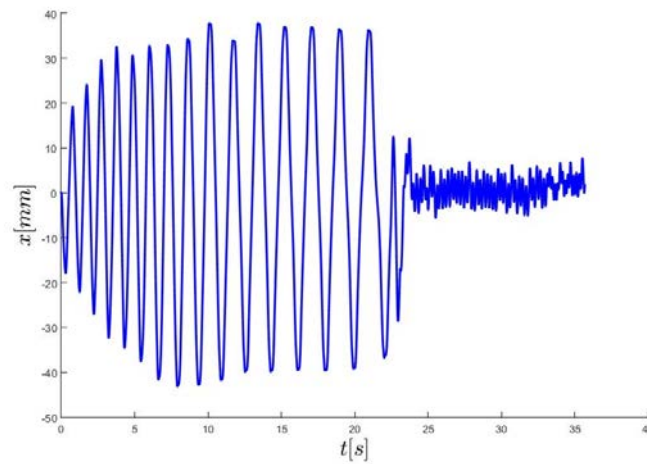


Figura 5.9: Posición del carro

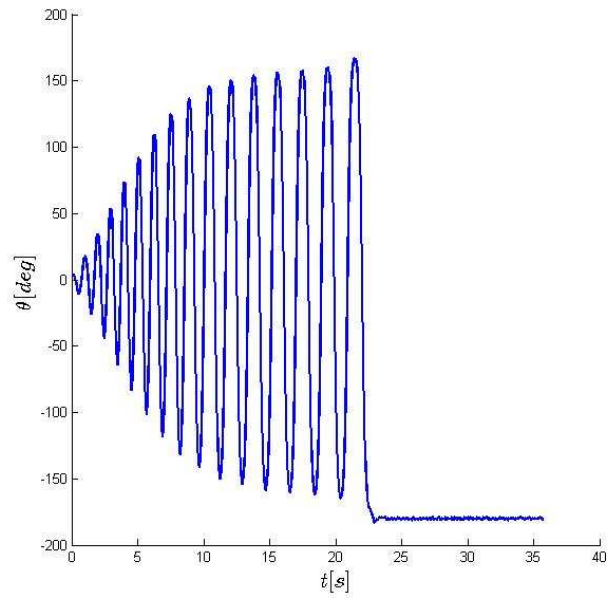


Figura 5.10: Posición del péndulo

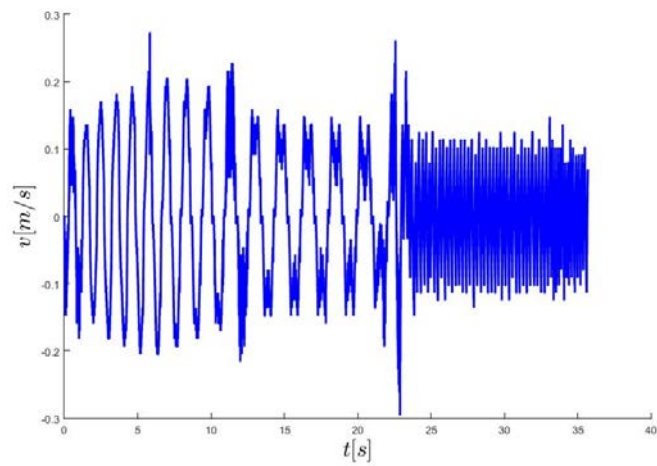


Figura 5.11: Velocidad del carro

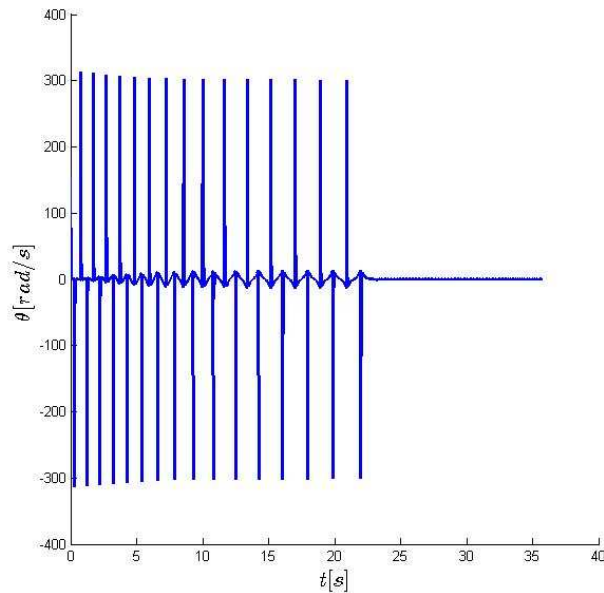


Figura 5.12: Velocidad del péndulo

5.1. Conclusiones

En este capítulo se validaron de manera experimental los controladores no lineales en el sistema carro-péndulo. Se observa que el Control Basado en Energía tarda más tiempo en llegar a la parte vertical superior, ya que se tuvo que omitir la fricción viscosa del péndulo en el controlador, al ser este un efecto parásito, el cual hace que la energía del sistema se disipe; en cambio, el Control por Modos Deslizantes es un controlador más robusto, en el cual se pueden omitir varios factores del sistema en el controlador, como por ejemplo, la inercia del péndulo, y aún así poder trabajar satisfactoriamente. Del mismo modo, el tiempo que tarda en hacer que llegue el péndulo a la vertical superior, es mucho menor en comparación con el Control Basado en Energía.

Al momento de aplicar los controladores al sistema, las ganancias establecidas en simulación no fueron las acertadas para este, ya que el sistema no se comportaba de la manera esperada acorde a las simulaciones previas. Se modificaron las ganancias para obtener un mejor control sobre el carro-péndulo.

En base a lo antes visto en este capítulo, se puede hacer una combinación de controladores para hacer la función de swing-up y de estabilización, por ejemplo, el Control Basado en Energía con la condición de estabilidad del Control por Modos Deslizantes; la Condición de swing-up del Control por Modos Deslizantes con el LQR; así como también usar el control PD de posición y de velocidad junto con los controladores no lineales.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Conclusiones finales

En esta tesis se trabajó con un sistema mecánico subactuado, es decir, un sistema que tiene menos actuadores que grados de libertad a controlar; esto significa que algunos elementos no están sujetos a la acción directa de un actuador. Para este trabajo de investigación, el sistema subactuado bajo estudio es el sistema carro-péndulo de Quanser.

Se eligieron dos controladores no lineales para realizar pruebas de simulación y ensayos experimentales al sistema, los cuales son: Control Basado en Energía, junto con el controlador lineal LQR (Linear-Quadratic Regulator); y el Controlador por Modos Deslizantes. Se escogieron estos controladores ya que son los más fáciles de implementar a este tipo de sistemas.

De este trabajo, resultó un análisis de comparación de controladores con la intención de evaluar el desempeño de la respuesta del sistema en cuanto a rapidez, precisión, exactitud, robustez, etc. Lo anterior, permitió conocer de manera más objetiva las diferentes características de los controladores aplicados al carro-péndulo.

Se observa que el Control Basado en Energía tarda más tiempo en llegar a la parte vertical superior, ya que se tuvo que omitir la fricción viscosa del péndulo en el controlador, al ser esta un efecto parásito, el cual hace que la energía del sistema se disipe; en cambio, el Control por Modos Deslizantes es un controlador más robusto en el cual se pueden omitir varios factores del sistema en el controlador, como por ejemplo la inercia del péndulo y aún así poder trabajar satisfactoriamente. Del mismo modo, el tiempo que tarda en hacer que llegue el péndulo a la vertical superior, es mucho menor en comparación con el Control Basado en Energía.

Se puede hacer una combinación de controladores para hacer la función de swing-up y de estabilización, por ejemplo, el Control Basado en Energía con la condición de estabilidad del Control por Modos Deslizantes; la Condición de swing-up del Control por Modos Deslizantes con el LQR; así como también usar el control PD de posición y de velocidad junto con los controladores no lineales.

6.2. Aportaciones

Las aportaciones presentadas en este trabajo de investigación son:

1. El desarrollo, modelado y simulación de dos controladores no lineales aplicados al sistema mecánico subactuado carro-péndulo.
2. La validación experimental de los controladores.
3. La comparación entre los dos controladores aplicados al sistema.

6.3. Trabajos futuros y recomendaciones

Como trabajos a futuro de investigación se desea realizar una comparación de más controladores entre los cuales están: Control Adaptable, Control Difuso Adaptable, Control Difuso de Modos Deslizantes tipo *switching*. De esto se podrá obtener una base de datos más grande de características de los distintos controladores encontrados en la literatura científica.

Del mismo modo se desea saber si los controladores estudiados en este trabajo de tesis, junto con los demás controladores que se encuentran en la literatura, son adecuados para aplicarlos en otros tipo de sistemas mecánicos subactuados.

Apéndice A

Preliminares Matemáticos

A.1. Estabilidad de Lyapunov

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico representa las condiciones de las variables del sistema, en donde este se encuentra estático. Por ejemplo, en el caso de una partícula si se encuentra en reposo sin alguna fuerza externa que representa una entrada, entonces se dice que se encuentra en un punto de equilibrio. Entonces, un punto de equilibrio está dado en

$$\dot{x} = f(x^0, u^0) \equiv 0. \quad (\text{A.1})$$

Definición 1

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A.2})$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapa local de Lipschitz desde un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R} . Suponemos que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio de (A.2), que satisface

$$f(0) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La teoría de Lyapunov es la herramienta fundamental para el análisis de la estabilidad de los sistemas dinámicos.

El punto de equilibrio $x = 0$ del sistema (A.2) es

1. **estable**, si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del mismo.
Si para cada $\epsilon > 0$, hay $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

2. **inestable**, si no es estable.
3. **asintóticamente estable**, si todas las soluciones que inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, si no que además

tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito. De modo que δ se puede elegir de tal manera que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (\text{A.5})$$

4. **exponencialmente estable**, si existen dos números estrictamente positivos α y λ independientemente del tiempo y las condiciones iniciales de tal manera que

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad \forall > 0 \quad (\text{A.6})$$

Las definiciones anteriores corresponden a propiedades locales del sistema alrededor del punto de equilibrio. Los conceptos de estabilidad anteriores se vuelven globales cuando sus condiciones correspondientes se satisfacen para cualquier estado inicial [2].

Definición 2

Se dice que la función real de dos variables $E(x, y)$ es:

1. **definida positiva** cuando $E(0, 0) = 0$ y $E(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$.
Obsérvese que $E(x, y) = ax^2 + by^2$ con $a > 0, b > 0$ es definida positiva.
2. **semidefinida positiva** cuando $E(0, 0) = 0$ y $E(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$.
Obsérvese que $E(x, y) = ax^2$ con $a > 0$ y $E(x, y) = by^2$ con $b > 0$, son semidefinidas positivas.
3. **definida negativa** cuando $E(0, 0) = 0$ y $E(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$.
Obsérvese que $E(x, y)$ es definida negativa si, y sólo si, $-E(x, y)$ es definida positiva.
4. **semidefinida negativa** cuando $E(0, 0) = 0$ y $E(x, y) \leq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

Método Directo de Lyapunov

(Semi)definición. Una función escalar continua $V(x)$ se dice que es localmente (semi)definida positiva si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ ($V(x) \geq 0$) para $x \neq 0$. Del mismo modo, $V(x)$ se dice que es (semi)definida negativo si $-V(x)$ es (semi)definida positiva.

Función de Lyapunov. $V(x)$ se llama una Función de Lyapunov para el sistema (A.2) si, en una bola B que contiene el origen, $V(x)$ es definida positiva y tiene derivadas parciales positivas, y si su tiempo derivado a lo largo de la solución de (A.2) es semidefinido negativo, es decir, $\dot{V}(x) = (\partial V / \partial x) f(x) \leq 0$.

Estabilidad Local. El punto de equilibrio 0 del sistema (A.2) es (asintóticamente) estable en una bola B si existe una función escalar $V(x)$ con derivadas continuas tal que $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa (definida negativa) en la bola B.

Estabilidad Global. EL punto de equilibrio del sistema (A.2) es asintóticamente estable globalmente si existe una función escalar $V(x)$ con derivadas continuas de primer orden tal que $V(x)$ es definida positiva, $\dot{V}(x)$ es definida negativa y $V(x)$ es radialmente ilimitada, es decir, $V(x) \rightarrow \infty$ como $\|x\| \rightarrow \infty$.

Principio de invariancia de La Salle

Sea Ω un conjunto compacto (cerrado y delimitado) con la propiedad de que cada solución del sistema (A.2) que empieza en Ω permanece en Ω para todo el tiempo futuro. Sea $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M la mayor invariante establecida en E . Entonces, cada solución que comienza en Ω se acerca a M como $t \rightarrow \infty$.

A.2. Pasividad

Considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), & x &\in \mathbb{R}^n \\ y &= h(x, u), & u, y &\in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde:

$x(t)$ es el estado del sistema y representa una función del tiempo,
 $u(t)$ es la función de entrada y se asume que $u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ pertenece a un conjunto U de funciones de entrada las cuales son acotadas.

Para (A.7), en sistemas no lineales afines a control se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) + j(x)u \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Disipatividad

Asuma que el sistema (A.7) tiene asociada una función $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, llamada función de suministro la cual es localmente integrable para todo $u \in U$, esto es

$$\int_{t_0}^{t_1} |w[u(t), y(t)]| dt < \infty \quad \text{para todo } t_0 \leq t_1. \quad (\text{A.9})$$

Por otra parte sea X un subconjunto \mathbb{R}^n que contiene el origen. Entonces un sistema se dice que es disipativo en X con una función de energía $w(u, y)$ si existe una función de energía $S(0) = 0$ que cumple que para todo $x \in X$.

Pasividad

Se dice que el sistema (A.7) es pasivo si es disipativo y además cumple que la función fuente de energía está dada por

$$w = u^T y. \quad (\text{A.10})$$

De la definición anterior se observa que la pasividad es un caso especial de la disipatividad, esto es, cuando se cumple que la función de suministro es el producto de la entrada por la salida [17].

Referencias

- [1] Y.-F. Chen and A.-C. Huang, "Controller design for a class of underactuated mechanical systems," *IET control theory & applications*, vol. 6, no. 1, pp. 103–110, 2012.
- [2] I. Fantoni and R. Lozano, *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [3] L. Colombo, D. Martín De Diego, and M. Zuccalli, "Optimal control of underactuated mechanical systems: a geometric approach," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 51, no. 8, p. 083519, 2010.
- [4] R. Olfati-Saber, "Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles," Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [5] C. A. Saldarriaga-Cortés, V. D. Correa-Ramírez, and D. Giraldo-Buitrago, "Identificación de parámetros y control adaptativo aplicado al péndulo invertido," *Tecno Lógicas*, no. 28, 2012.
- [6] K. J. Åström and K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control," *Automatica*, vol. 36, no. 2, pp. 287–295, 2000.
- [7] F. Ruvalcaba, M. Llama, and V. Santibáñez, "Control de un carro péndulo como un sistema de cuarto orden," in *Congreso Anual*, 2010.
- [8] L.-X. Wang, *A course in fuzzy systems*. Prentice-Hall press, USA, 1999.
- [9] T.-H. S. Li and M.-Y. Shieh, "Switching-type fuzzy sliding mode control of a cart-pole system," *Mechatronics*, vol. 10, no. 1, pp. 91–109, 2000.
- [10] A. R. Moreno, C.Ñ. Ocola, and L. E. C. Sosa, "Diseño e implementación de un controlador difuso tks utilizando sintonía anfis. aplicación: Péndulo invertido."
- [11] A. Flores Cortés, "Control inteligente de un péndulo invertido y su implementación sobre fpga," 2013.
- [12] J.-H. Li, "Fuzzy supervisory control of a cart-pole system," in *Control & Automation (ICCA), 11th IEEE International Conference on*. IEEE, 2014, pp. 435–439.
- [13] J. A. Riaño, "Design and implementation of an inverted pendulum on a cart applying control strategies based on lmis."

- [14] J. Jayaprakash, D. Davidson, P. Subha Hency Jose *et al.*, “Comparison of controller performance for mimo process,” 2013.
- [15] *Quanser Inc. Q8-USB Data-Acquisition System Users Guide*, 2010.
- [16] C.-C. Yih, “Sliding mode control for swing-up and stabilization of the cart-pole underactuated system,” *Asian journal of control*, vol. 15, no. 4, pp. 1201–1214, 2013.
- [17] C. C. Romero, “Sistemas dinámicos con fricción expresados en ecuaciones hamiltonianas controladas por puerto,” Ph.D. dissertation, Universidad Autónoma de México, 2010.