



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE MISANTLA

INGENIERIA CIVIL

**RESOLUCIÓN DE REACTIVOS DE
LAS ÁREAS DE ESTÁTICA Y
DINÁMICA**

TESINA

**QUE PARA OBTENER EL TITULO EN
INGENIERIA CIVIL**

PRESENTA:

AZAEL MENDOZA PALOMINO

ASESOR:

M.I.I. ELIUD POLO DE LOS SANTOS

MISANTLA, VERACRUZ

ENERO, 2019



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE MISANTLA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES
AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN

FECHA: 30 de Enero de 2019.

ASUNTO: AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN
DE TESINA.

A QUIEN CORRESPONDA:

Por medio de la presente hago constar que el (la) C:

AZAZEL MENDOZA PALOMINO

pasante de la carrera de INGENIERÍA CIVIL con No. de Control 142T0137 ha cumplido satisfactoriamente con lo estipulado por el **Manual de Procedimientos para la Obtención del Título Profesional de Licenciatura** bajo la **opción Titulación Integral (Tesina)**

Por tal motivo se **Autoriza** la impresión del **Tema** titulado:

“RESOLUCIÓN DE REACTIVOS DE LAS ÁREAS DE ESTÁTICA Y DINÁMICA”

Dándose un plazo no mayor de un mes de la expedición de la presente a la solicitud del Acto de Recepción para la obtención del Título Profesional.

ATENTAMENTE

ING. GERBACIO TLAXALO ESPINOZA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES



Archivo.

Agradecimientos

A mi familia y amigos.

Por darme la oportunidad de seguir adelante e impulsarme día a día, por mantenerme siempre centrado en los objetivos para cumplir mis metas, además de brindarme sus experiencias y así ayudarme a trazar mi camino en mi paso durante esta etapa de mi vida.

A mis maestros.

Por brindarme su apoyo y comprensión durante mi formación profesional, por compartir sus conocimientos y hacer posible la realización de este trabajo.

Resumen

Este documento está enfocado en el estudio del área de física clásica, exclusivamente de los cuerpos en equilibrio definida como Estática y los cuerpos en movimiento conocido como Dinámica para lo cual se presentan una serie de temas y problemas seleccionados de manera que se ilustren los conceptos e ideas más importantes para facilitar su entendimiento. El trabajo está estructurado de tal manera que se ayuda al lector en su estudio dando las bases en cada tema para que pueda abordar los siguientes de manera fluida. La secuencia que se maneja parte de los temas básicos de aritmética, algebra y trigonometría hasta llegar al área de estática y dinámica donde se desarrollan los conceptos propios de cada área y se expanden a problemas de aplicación. Además, también se muestran métodos de análisis para determinar los parámetros que permiten el equilibrio estático de un cuerpo idealizado como una partícula, de un cuerpo que no se puede idealizar (un cuerpo rígido), así como de elementos estructurales tales como vigas, entre otros. En el área de dinámica se presenta primero la sección de cinemática seguida de la descripción cinética del movimiento. Se tratan los conceptos del movimiento rectilíneo, curvilíneo, movimiento relativo, así como el movimiento plano de una partícula; además de la explicación de las leyes de Newton prestando especial atención a la segunda ley. Se plantean los fundamentos de la energía y trabajo, así como el principio de la conservación de la energía, de la cantidad de movimiento y el impulso.

Índice

Agradecimientos	I
Resumen	II
Capítulo I. Generalidades del proyecto	1
1.1 Introducción	1
1.2 Planteamiento del problema	2
1.3 Objetivo general	2
1.4 Objetivos específicos	2
1.5 Alcances y limitaciones	3
1.6 Justificación	4
Capitulo II. Marco teórico	5
2.1 Aritmética	5
2.2 Álgebra	6
2.3 Trigonometría	9
2.4 Estática	9
2.5 Dinámica	10
Capitulo III. Desarrollo	11
3.1 Metodología	11
Capitulo IV. Resultados	12
4.1 Aritmética	12
4.1.1 Suma y resta	12
4.1.1.1 Problemas propuestos	13
4.1.2 Multiplicación y división	13
4.1.2.1 Problemas propuestos	14
4.1.3 Potenciación y radicación	15
4.1.3.1 Problemas propuestos	17
4.1.4 Logaritmos	17
4.1.4.1 Propiedades de los logaritmos	19
4.1.4.2 Problemas propuestos	19
4.2 Álgebra	19
4.2.1 Igualdades y ecuaciones	20
4.2.2 Ecuaciones lineales con una incógnita	20

4.2.2.1 Problemas propuestos.....	23
4.2.3 Ecuaciones cuadráticas.....	23
4.2.3.1 Problemas propuestos.....	27
4.2.4 Sistemas de ecuaciones.....	28
4.2.4.1 Método de reducción.....	29
4.2.4.1.1 Problemas propuestos.....	31
4.2.4.2 Método del determinante.....	32
4.2.4.3 Problemas propuestos.....	41
4.3 Trigonometría.....	43
4.3.1 Triángulos.....	43
4.3.1 Semejanza de triángulos.....	44
4.3.2 Triángulos rectángulos y funciones trigonométricas.....	46
4.3.3 Teoremas especiales de triángulos.....	50
4.3.3.1 Ley de senos.....	50
4.3.3.1.1 Problemas propuestos.....	52
4.3.3.2 Ley de cosenos.....	53
4.3.3.2.1 Problemas propuestos.....	54
4.4 Estática.....	56
4.4.1 Fuerzas.....	57
4.4.1.1 Componentes rectangulares o cartesianas.....	58
4.4.1.1.1 Problemas propuestos.....	62
4.4.2 Sistemas de fuerzas.....	63
4.4.2.1 Método del triángulo.....	63
4.4.2.1.1 Problemas propuestos.....	67
4.4.2.2 Método de las componentes rectangulares.....	69
4.4.2.2.1 Problemas propuestos.....	76
4.4.3 Equilibrio de la partícula.....	79
4.4.3.1 Problemas propuestos.....	84
4.4.3.2 Problemas propuestos.....	92
4.4.4 Equilibrio del cuerpo rígido.....	96
4.4.4.1 Método de los nodos.....	101
4.4.4.1.1 Problemas propuestos.....	109
4.4.4.2 Método de las secciones.....	112

4.4.4.2.1 Problemas propuestos.....	115
4.4.5 Centroides y centro de gravedad	119
4.4.5.1 Centroides de áreas planas	120
4.4.5.1.1 Problemas propuestos.....	123
4.4.5.2 Centroides de sólidos	125
4.4.5.2.1 Problemas propuestos.....	127
4.4.5.3 Momentos de inercia de áreas planas.....	129
4.4.5.3.1 Problemas propuestos.....	132
4.4.5.4 Análisis de estructuras estáticamente determinadas: vigas	134
4.4.5.4.1 Funciones de momento y cortante.....	138
4.4.5.4.1.1 Problemas propuestos.....	142
4.5 Dinámica.....	146
4.5.1 Movimiento rectilíneo uniforme	148
4.5.1.1 Problemas propuestos.....	151
4.5.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	154
4.5.2.1 Problemas propuestos.....	157
4.5.3 Movimiento circular uniforme.....	158
4.5.3.1 Problemas propuestos.....	161
4.5.4 Movimiento circular no uniforme	162
4.5.4.1 Problemas propuestos.....	167
4.5.5 Movimiento de proyectiles.....	169
4.5.5.1 Problemas propuestos.....	175
4.5.6 Movimiento plano	181
4.5.7 Movimiento relativo	182
4.5.7.1 Problemas propuestos.....	187
4.5.8 Leyes del movimiento de Newton	193
4.5.8.1 Primera ley de Newton.....	193
4.5.8.2 Segunda ley de Newton.....	196
4.5.8.3 Tercera ley de Newton	201
4.5.9 Impulso, cantidad de movimiento lineal y conservación del movimiento lineal	202
4.5.10 Trabajo y energía.....	209
Capítulo V. Conclusiones.....	216
5.1 Conclusión.....	216

5.2 Recomendaciones	216
Bibliografía	218

Índice de figuras

Figura 1.- Parámetros de un triángulo.....	43
Figura 2.- Triángulo semejante para la demostración 1.	44
Figura 3.- Triángulos semejantes.....	45
Figura 4.- Triángulos del ejemplo 3.	46
Figura 5.-Triángulo con $\angle A = 90^\circ$	47
Figura 6.- Ley de senos para triángulos oblicuángulos.	50
Figura 7.- Triángulo oblicuángulo del ejemplo 1.	50
Figura 8.- Triangulo oblicuángulo del ejemplo 2.	51
Figura 9.- Triangulo problema 1.	52
Figura 10.- Triángulo para ley de senos.....	52
Figura 11.- Triángulo del problema 3.	52
Figura 12.- Ley de cosenos para triángulos oblicuángulos.	53
Figura 13.- Triangulo para ejemplo 1.	53
Figura 14.- Triangulo para el ejemplo 2 ley de cosenos.....	54
Figura 15.- TRIángulo con dos ángulos desconocidos.....	54
Figura 16.- Triangulo con tres lados conocidos.	55
Figura 17.- Triángulo con ángulo de 130°	55
Figura 18.- Cubeta en equilibrio estático.	57
Figura 19.- Componentes cartesianas del vector fuerza.	58
Figura 20.- Representación de las componentes de la fuerza F del ejemplo 1.	59
Figura 21.- Descomposición de la fuerza F en sus componentes rectangulares.....	60
Figura 22.- Fuerza resultante del ejemplo 3.	61
Figura 23.- Componentes cartesianas de la fuerza del ejemplo 4.	61
Figura 24.- Triángulo de fuerzas del ejemplo 1.	64
Figura 25.- Triángulo para el cálculo de la fuerza F2	65
Figura 26.- DCL del barco remolcado.	66
Figura 27.- Triángulo de las fuerzas ejercidas sobre el barco del ejemplo 3.	66
Figura 28.- Triángulo del problema 1.	67
Figura 29.- Sistemas de fuerzas para el problema 2.	67
Figura 30.- Tensiones de las cuerdas sobre la argolla.....	68
Figura 31.-Argolla sometida a tensiones.	68
Figura 32.- Barras del problema 5.	68
Figura 33.- Sistema de fuerzas del ejemplo 1.	70
Figura 34.- Grafica de la fuerza resultante del ejemplo 1.....	72

Figura 35.- Tensiones sobre la argolla, ejemplo 2.	72
Figura 36.- Trazo de la resultante.	74
Figura 37.- Caja suspendida por dos cables.	74
Figura 38.- Trazo de la fuerza resultante.	76
Figura 39.- Bloque en equilibrio.	76
Figura 40.- Barco remolcado a velocidad constante.	77
Figura 41.- Equilibrio de un bloque mediante resortes.	77
Figura 42.- Sistema de fuerzas del problema 4.	78
Figura 43.- Sistema de fuerzas del problema 5.	78
Figura 44.- Caja en equilibrio.	80
Figura 45.- Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan en el punto "a".	80
Figura 46.- Equilibrio de una caja mediante barras.	81
Figura 47.- Diagrama de cuerpo libre del punto "a".	82
Figura 48.- Placa del ejemplo 3.	82
Figura 49.- Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas concurrentes en O.	83
Figura 50.- Semáforos del problema 1.	84
Figura 51.- Sistema de equilibrio de dos bloques.	85
Figura 52.- Equilibrio de tres cajas b, c, d.	85
Figura 53.- Bloque en equilibrio mediante resortes.	85
Figura 54.- Sistema de equilibrio de un candelabro.	86
Figura 55.- Equilibrio de una barra mediante resortes.	86
Figura 56.- Sistema tridimensional de fuerzas del ejemplo 1.	87
Figura 57.- Sistema tridimensional de fuerzas del ejemplo 2.	89
Figura 58.- Sistema tridimensional de fuerzas del ejemplo 3.	90
Figura 59.- Sistema de fuerzas del problema 1.	92
Figura 60.- Caja suspendida del problema 2.	92
Figura 61.- Sistema de fuerzas problemas 3 y 4.	93
Figura 62.- Sistema de fuerzas de la grúa del problema 5.	93
Figura 63.- Sistema de cajas suspendidas.	94
Figura 64.- Cazo en equilibrio del problema 2.	94
Figura 65.- Placa del problema 3.	95
Figura 66.- Sistema de fuerzas del problema 4.	95
Figura 67.- Estructura tradicional de un puente.	96
Figura 68.- Representación del giro provocado por una fuerza.	97
Figura 69.- Tipos de apoyos y sus reacciones (Hibbeler, 2010).	100
Figura 70.- Estructura en equilibrio.	101
Figura 71.- Dcl nodo "D".	102
Figura 72.- Dcl nodo "C".	102
Figura 73.- Dcl nodo "A".	103
Figura 74.- Armadura del ejemplo 2.	104
Figura 75.- Dcl nodo "A" ejemplo 2.	104
Figura 76.- Dcl nodo "B".	105
Figura 77.- DCL de la armadura figura 74.	106
Figura 78. Dcl nodo "C".	106

Figura 79.- DCL nodo "E"	107
Figura 80.-Armadura triangular.....	107
Figura 81.- Dcl nodo "B"	108
Figura 82.- Dcl nodo "C"	108
Figura 83.- Dcl nodo "A"	109
Figura 84.- Armadura del problema 1 y 4.....	109
Figura 85.- Armadura del problema 2 y 5.....	110
Figura 86.- Armadura de los problemas 3 y 6.....	110
Figura 87.- Armadura de nivel.....	111
Figura 88.- Armadura y corte a-a.....	112
Figura 89.- Sección derecha del corte a-a.	113
Figura 90.- Armadura para el ejemplo 2.....	114
Figura 91.- Diagramas de fuerzas actuantes en la armadura.	114
Figura 92.- Sección derecha de la armadura.	115
Figura 93.- Armadura de seccion triangular.	116
Figura 94.- Armadura Howe.	116
Figura 95.- Armadura en equilibrio.	117
Figura 96.- Estructura para soporte de puente.	117
Figura 97.-Armadura sobre reforzada.	117
Figura 98.- Armadura por secciones.....	118
Figura 99.- Armadura K.	118
Figura 100.- Armadura de ascenso.....	118
Figura 101.- Centro de masa y gravedad de un martillo.....	119
Figura 102.- Centroides del rectángulo aproximante, obtenida de "calculos diferencial e integral" de Frank Ayres.	121
Figura 103.- Centroides del rectángulo aproximante ejemplo 2, obtenida de "calculos diferencial e integral" de Frank Ayres.....	122
Figura 104.- Centroides del rectángulo aproximante ejemplo 2, obtenida de "calculos diferencial e integral" de Frank Ayres.....	123
Figura 105.- Centroides del rectángulo aproximante.....	127
Figura 106.- Rectángulo aproximante para el cálculo del momento de inercia.	130
Figura 107.- Rectángulo aproximante para el problema 2 cálculo del momento de inercia.	131
Figura 108.- Momento de inercia respecto al eje "y" de la función senx.	131
Figura 109.- Momento de inercia de una sección rectangular.	132
Figura 110.-Cargas sobre una viga.....	134
Figura 111.- viga simplemente apoyada.....	135
Figura 112.- Viga en cantiliver.	136
Figura 113.- Viga con carga gradualmente distribuida.	137
Figura 114.- Convención de signos para análisis de momento y cortante.....	138
Figura 115.- DCL primera sección de la viga.	140
Figura 116.- DCL segunda sección de la viga.	140
Figura 117.- Diagramas de cortante y momento flexionante.	141
Figura 118.- DCL de la viga con distribución de carga triangular.	141
Figura 119. Diagramas de momento flexionante y fuerza cortante.	142

Figura 120.- Viga en cantiliver. Figura 121.- Viga simplemente apoyada.	143
Figura 122.- condiciones de momento para viga.	143
Figura 123.- Momento de flexión en viga.....	143
Figura 124. Cantiliver y carga triangularmente distribuida.	143
Figura 125.- Viga con extremo en voladizo.	144
Figura 126.- Viga simplemente apoyada con combinación de carga.....	144
Figura 127.- Viga con extremo empotrado a muro y carga triangularmente distribuida.	144
Figura 128.- viga simplemente apoyada con carga triangularmente distribuida.....	144
Figura 129.- Viga con momento interno.....	145
Figura 130.Viga simplemente apoyada con doble carga puntual.	145
Figura 131.- Arco circular con carga distribuida.	145
Figura 132.- Tensión de la cuerda con la que el caballo tira del trineo.	147
Figura 133.- Deducción geométrica de la velocidad.....	148
Figura 134.- Variación de la velocidad respecto al tiempo.....	149
Figura 135.- Movimiento en línea recta del móvil.....	150
Figura 136.- Movimiento circular. Obtenida de Física Universitaria vol.1.	158
Figura 137.- Aceleración centrípeta y su cambio de dirección.	159
Figura 138.- Movimiento de una Noria.	161
Figura 139.- Aceleración y velocidad del movimiento circular no uniforme.	162
Figura 140.- Componentes normal y tangencial de la aceleración.	164
Figura 141.- Pasador en movimiento circular.....	165
Figura 142.- Cabina centrífuga de pruebas.....	168
Figura 143.- Bolas de goma en caída libre.....	169
Figura 144.- Distintas trayectorias de un proyectil.....	170
Figura 145.- Trayectoria del motociclista.	172
Figura 146.- Situaciones en la trayectoria de la pelota lanzada.	174
Figura 147.- Disparo del dardo al mono.	176
Figura 148.- Barco aproximándose al muelle para atracar.	176
Figura 149.- Bola de nieve en caída desde el techo.....	177
Figura 150.- Profesor de física en su acrobacia.	177
Figura 151.- Niños jugando en la nieve.	178
Figura 152.- Vagón de tren en movimiento.....	179
Figura 153.- Avión antiincendios.	179
Figura 154.- Caída de la leche al vaso.	180
Figura 155. Aceleración de una partícula con movimiento en una curva.....	181
Figura 156.- Sistemas relativos de referencia.....	183
Figura 157.- Automóviles en movimiento.	184
Figura 158.- Vectores de movimiento.	186
Figura 159.- Avión en movimiento.	187
Figura 160.- Esquiadores en movimiento.	188
Figura 161.- Cruce de trenes.	188
Figura 162.- Deslizamiento entre bloques.....	188
Figura 163.- Deslizamiento de la cuña.....	189
Figura 164.- Grúa.....	189

Figura 165.- Bandas transportadoras de material.	190
Figura 166.- Banda transportadora.	190
Figura 167.- Sistema bloque-pasador.	190
Figura 168.- Lancha y dirección del viento.	191
Figura 169.- Bloque sostenido con poleas.	191
Figura 170.- Bloques deslizándose en planos inclinados.	192
Figura 171.- Vagón en movimiento.	195
Figura 172 Física de una motocicleta.	197
Figura 173.- Elevador bajando.	198
Figura 174.- Velero deslizándose en la nieve.	199
Figura 175.- DCL de la persona en el elevador.	201
Figura 176.- Fuerzas de acción y reacción al patear un balón.	201

Capítulo I. Generalidades del proyecto

1.1 Introducción

La ingeniería es una disciplina que depende de diversas áreas del conocimiento científico cuyas bases teóricas son una herramienta para desarrollar aplicaciones prácticas, así como la innovación, diseño y perfeccionamiento de técnicas y procedimientos aplicados en industrias y otros campos de aplicación científica para el beneficio del ser humano.

El Ingeniero Civil se encarga de concebir diseños, a partir de la aplicación del conocimiento científico y de sus métodos y técnicas, que transforman el medio en que se desenvuelve el ser humano con el fin de permitir el acceso a nuevos horizontes, ya sea implementado vías de comunicación, diseñando infraestructura para el desarrollo humano en distintos aspectos como el económico, el de salud y la educación. Para lo cual es necesario disponer de bases sólidas de las herramientas de análisis y del manejo e interpretación de datos que con los métodos de cálculo se obtengan.

El presente trabajo tiene como objetivo el proveer una guía de estudio para los alumnos de la carrera de Ingeniería Civil del Instituto Tecnológico Superior de Misantla para el área de estática y dinámica; pilares base para materias posteriores de análisis y diseño, a partir de una serie de reactivos resueltos con los que se busca mostrar los principios básicos de cada disciplina seccionados por temas, así como también se proponen una serie de ejercicios, minuciosamente estructurados para que el alumno pueda complementar los conocimientos adquiridos en cada sección.

1.2 Planteamiento del problema

En la formación profesional del Ingeniero Civil, el área de física de las ciencias básicas que cursa, presenta índices de reprobación media mayores a la media nacional del 17.26%¹, los alumnos de la carrera de Ingeniería Civil del Instituto Tecnológico Superior de Misantla presenta un índice de reprobación media del 22.25% en las asignaturas de Estática clave ICF-1014 y Dinámica ICF-1009, por lo que los docentes que imparten las asignaturas realizan distintas actividades que permitan alcanzar los objetivos generales de conocimiento, concluyendo con una gran cantidad de materiales didácticos no recopilados variantes cada ciclo escolar, porque el impacto en la disminución del índice de reprobación es mínimo.

1.3 Objetivo general

Elaborar una guía de reactivos resueltos de las áreas de estática y dinámica donde se muestren los principios y conceptos básicos, para mejorar el desempeño de los alumnos de la carrera de ingeniería civil del instituto tecnológico superior de Misantla en dichas áreas, brindándoles un documento de estudio.

1.4 Objetivos específicos

- Elaborar una guía de reactivos resueltos en el área de estática donde se muestren los principios y conceptos básicos.
- Incluir en la guía una serie de ejercicios propuestos que le permitirán al alumno reforzar lo aprendido.
- Proponer una serie de ejercicios “reto” con los que se asegura se han alcanzado las competencias esperadas.

¹ *Dato de referencia del TecNM ciclo 2014-2015

1.5 Alcances y limitaciones

- Definir una metodología de estudio en el área de estática que asegure la comprensión de los conceptos que se maneja en dicha disciplina.
- El enfoque que se da al trabajo está orientado para la formación del ingeniero civil.

1.6 Justificación

La enseñanza de la física en el área estática y dinámica en el Instituto Tecnológico Superior de Misantla es de gran calidad pero requiere de un instrumento guía que permita medir el desempeño del alumno así como determinar las competencias y habilidades desarrolladas por este en cada unidad y o sección de dichas disciplinas, con el fin de que, en caso de ser necesario, dar un refuerzo al alumno en los temas en los que este tenga dificultades para entender y comprender los principios y conceptos ligados a dichos temas; y que además se tenga como una herramienta guía de estudio para aquellos alumnos que deseen mejorar sus habilidades en la resolución de problemas en las áreas de la estática y ramas de la dinámica de partículas y del cuerpo rígido bases fundamentales para el estudio de disciplinas posteriores propias a la carrera de ingeniería civil como lo son la mecánica de materiales y el análisis estructural, en las que los principios de la estática son aplicados constantemente y forman la piedra angular del éxito en dichas disciplinas.

Capítulo II. Marco teórico

2.1 Aritmética

La aritmética es el área de las matemáticas que se encarga del estudio de los números y las operaciones realizadas con ellos. Se considera que esta disciplina es la más antigua de las matemáticas. Las operaciones tradicionales que comprende esta disciplina son la suma, la división, la multiplicación y la resta. Con el paso del tiempo esta disciplina se amplió para incluir el estudio de otros números como los números reales (como el desarrollo decimal ilimitado), o incluso conceptos más avanzados como la exponenciación o la raíz cuadrada.

Hay evidencias de que los babilonios tenían sólidos conocimientos de casi todos los aspectos de la aritmética elemental hacia 1800a.C., gracias a transcripciones de caracteres cuneiformes sobre tablillas de barro cocido, referidas a problemas de geometría y astronomía. Otras civilizaciones mesopotámicas como sirios y fenicios alcanzaron grados de desarrollo matemático similar.

El sistema de numeración egipcio, basado en fracciones unitarias, permitía efectuar cuentas aritméticas avanzadas como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, utilizando un sistema de fracciones, así como los problemas de determinar el volumen de una esfera o el volumen de una pirámide truncada.

La aritmética formal se desarrolló en la antigua Grecia, donde dicha disciplina era considerada como el estudio de las propiedades de los números, y no incluía cálculos prácticos, los métodos operatorios eran considerados una ciencia aparte. El mayor progreso matemático de los griegos se dio entre los años 300 a.C y el 200 d.C. Después de esto los avances continuaron en regiones islámicas. En 1202, Fibonacci, en su tratado Liber Abaci, introduce el sistema de numeración decimal con números arábigos. Las operaciones aritméticas, realizadas hasta entonces, resultaban muy complicadas con numerales romanos, aún las más básicas; la importancia práctica en contabilidad hizo que las nuevas técnicas aritméticas se popularizaran enseguida en Europa. Fibonacci llegó a escribir que, comparado con este nuevo método, todos los demás habían sido erróneos.

La matemática hindú alcanzó su madurez durante los siglos I al VIII, con el invento trascendental de la notación posicional empleando la cifra cero como valor nulo. Utilizaron, como en Occidente, un sistema de numeración de base 10 (con diez dígitos).

El desarrollo moderno de la hace referencia a la teoría de números, la cual desarrolla y profundiza las propiedades de los números (enteros) relacionadas con su primalidad, divisibilidad y las soluciones de ecuaciones en los enteros; en particular, el teorema fundamental de la aritmética y las funciones aritméticas. Estudios posteriores cuya profundidad marca un parte aguas para nuevos conceptos como la aritmética modular, que trata de las congruencias de números enteros. La aritmética binaria y el álgebra de Boole, muy utilizadas en informática, es el cálculo aritmético efectuado en un sistema de numeración binario, y el álgebra resultante.

La aritmética ordinal, en teoría de conjuntos, describe el cálculo aritmético con las operaciones de suma, multiplicación y potenciación aplicadas a los números ordinales. La aritmética de Peano es el conjunto de axiomas de construcción de los números naturales. Teoremas de incompletitud de Gödel, enunciados por este en 1930, demuestra que ninguna teoría matemática formal capaz de describir los números naturales y la aritmética con suficiente expresividad, es a la vez consistente y completa. El Teorema Fundamental de la Aritmética, también conocido como teorema de factorización única, afirma que todo entero positivo se puede representar de forma única como producto de factores primos. Este resultado fue obtenido por Euclides, y presentado originalmente como un corolario al llamado Primer Teorema de Euclides cuya demostración formal no se dio hasta la publicación de las *Disquisitiones Arithmeticae* por Carl Friedrich Gauss en 1801. La generalización y profundización de este resultado y otros similares, son los que impulsan el desarrollo de la teoría de números, la geometría algebraica o la teoría de grupos.

2.2 Álgebra

Es la rama de las matemáticas que emplea números y letras para la representación de diversas cantidades y variables con las que desarrolla múltiples operaciones presentando generalizaciones de resultados para la aritmética.

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales ($ax = b$) y cuadráticas ($ax^2 + bx + c = 0$) entre otras. Los

antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan. Los matemáticos alejandrinos Herón y Diofante continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia, aunque el libro “Las aritméticas” de Diofante es de mucho más nivel. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se le llamó ciencia de reducción y equilibrio. La palabra árabe “al-jabru” que significa “reducción”, es el origen de la palabra álgebra. En el siglo IX, el matemático _Al-Jwizmi; escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. A finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra y resolvió problemas matemáticos muy complicados.

El álgebra en la antigua babilonia: La principal fuente de información sobre la civilización y la matemática babilónica procede de textos grabados con inscripciones cuneiformes en tablillas de arcilla. Estas tablillas han proporcionado abundante información sobre el sistema numérico y los métodos de cálculo que usaban. También las hay con textos que contienen problemas algebraicos y geométricos. Los babilonios disponían de fórmulas para resolver ecuaciones cuadráticas. No conocían los números negativos por lo que no se tenían en cuenta las raíces negativas de las ecuaciones. Su sistema de numeración era de base 60 y ha llegado hasta nosotros en la medida del tiempo y de los ángulos. Llegaron a resolver problemas concretos que conducían a sistemas de cinco ecuaciones con cinco incógnitas e incluso se conoce un problema astronómico que conduce a un sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas. Tampoco conocían el cero lo que lleva a problemas de interpretación de las cantidades. A partir del siglo VI a.C., fue utilizado un signo de omisión, es decir una especie de cero.

El álgebra en la civilización egipcia: Dejaron pocas evidencias matemáticas. En lo referente al álgebra, se sabe que esta civilización tenía conocimientos acerca de la solución de ecuaciones con una incógnita.

El álgebra en la civilización china: La civilización china tenía un procedimiento algorítmico para resolver sistemas de ecuaciones lineales parecido al que hoy conocemos como método de Gauss que les llevó al reconocimiento de los números negativos. Estos números constituyen uno de los principales descubrimientos de la matemática china. La escuela algebraica china alcanza su apogeo en el siglo XIII con los trabajos de Qin Jiushao, Li Ye, Yang Hui y Zhu Shi-jie que idearon un procedimiento para la resolución de ecuaciones de

grado superior llamado método del elemento celeste o tian-yuanshu. Este método actualmente se conoce como método de Horner, matemático que vivió medio milenio más tarde. El desarrollo del álgebra en esta época es notable: sistemas de ecuaciones no lineales, sumas de sucesiones finitas, utilización del cero, triángulo de Tartaglia (o Pascal) y coeficientes binomiales, así como métodos de interpolación que desarrollaron en unión de una potente astronomía.

El álgebra en la civilización india: Los primeros indicios matemáticos se calculan hacia los siglos VIII-VII a.C, centrándose en aplicaciones geométricas para la construcción de edificios religiosos y también parece evidente que desde tiempos remotos utilizaron un sistema de numeración posicional y decimal. Fue, sin embargo, entre los siglos V-XII d.C cuando la contribución a la evolución de las matemáticas se hizo especialmente interesante, destacando cuatro nombres propios: Aryabhata (s.VI), Brahmagupta (s.VI), Mahavira (s. IX) y Bhaskara Akaria (s.XII). La característica principal del desarrollo matemático en esta cultura, es el predominio de las reglas aritméticas de cálculo, destacando la correcta utilización de los números negativos y la introducción del cero, llegando incluso a aceptar como números válidos los números irracionales. Profundizaron en la obtención de reglas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Matemáticamente se considera indiscutible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal y las reglas de cálculo.

El álgebra en la civilización griega: La Escuela Pitagórica (fundada en el siglo V a.C.) incorpora resultados de la tradición babilónica aritmética algebraica. La primera finalidad de esta secta era religiosa pero secundariamente, el desarrollo matemático que de ella se derivó fue enorme. Se destaca la época del Álgebra Geométrica (450 – 300 a.C.), que trata los problemas algebraicos con la ayuda de construcciones geométricas. El núcleo lo constituye el método de anexión de áreas cuya finalidad básica era resolver ecuaciones. Este método se puede usar para resolver ecuaciones lineales y no lineales. En el tratado “Los Elementos” de Euclides se tratan diversas ecuaciones cuadráticas según los métodos del álgebra geométrica. También Teodoro de Cirene, Teeteto y Eudoxo de Cnido, consolidan esta álgebra geométrica.

2.3 Trigonometría

La trigonometría es la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. La trigonometría proviene de la composición de la palabra griega *trigonos* que significa triángulo y de la palabra *metros* que significa medida, medición.

La trigonometría ya existía a más de 3000 años atrás, cuando los babilonios y los egipcios usaban los ángulos de los triángulos para construir pirámides y otras estructuras arquitectónicas complejas hasta para la tecnología moderna. Civilizaciones posteriores desarrollaron conceptos más elaborados y los emplearon para dibujar mapas estelares y poder calcular rutas, para la predicción de fenómenos meteorológicos y espaciales, para elaboración de relojes, calendarios, etc

La función seno de la trigonometría ya era trabajada por los astrónomos árabes del siglo VIII. Dos siglos después ya habían completado 6 funciones y demostraron los teoremas fundamentales de la trigonometría. Esta disciplina se convirtió en un ramo independiente de la Matemática cuando la corriente llega a Europa y la separan de la Astronomía.

2.4 Estática

La estática es la rama de la mecánica clásica que analiza las cargas (fuerza, par / momento) y estudia el equilibrio de fuerzas en los sistemas físicos en equilibrio estático, es decir, en un estado en el que las posiciones relativas de los subsistemas no varían con el tiempo. La primera ley de Newton implica que la red de la fuerza y el par neto (también conocido como momento de fuerza) de cada organismo en el sistema es igual a cero. De esta limitación pueden derivarse cantidades como la carga o la presión. La red de fuerzas de igual a cero se conoce como la primera condición de equilibrio, y el par neto igual a cero se conoce como la segunda condición de equilibrio.

Análisis del equilibrio

La estática proporciona, mediante el empleo de la mecánica del sólido rígido, solución a los problemas denominados isostáticos. En estos problemas, es suficiente plantear las condiciones básicas de equilibrio, que son:

- El resultado de la suma de fuerzas es nulo.
- El resultado de la suma de momentos respecto a un punto es nulo.

Estas dos condiciones, mediante el álgebra vectorial, se convierten en un sistema de ecuaciones; la resolución de este sistema de ecuaciones es la solución de la condición de equilibrio.

Existen métodos de solución de este tipo de problemas estáticos mediante gráficos, heredados de los tiempos en que la complejidad de la resolución de sistemas de ecuaciones se evitaba mediante la geometría.

2.5 Dinámica

La dinámica es una rama de la física que estudia y describe la evolución en el tiempo de cualquier sistema físico, especialmente, centra su interés en aquellos factores capaces de provocar alteraciones en el sistema físico, objeto de estudio y para ello los cuantificará y planteará ecuaciones de movimiento y evolución en relación al mencionado sistema.

Los sistemas mecánicos, clásicos, relativistas o cuánticos, son aquellos en los cuales la dinámica enfoca su trabajo.

Isaac Newton fue el primero en formular algunas de las leyes fundamentales en este campo de estudio, las cuales, más luego, se convertirían en un cuerpo de teorías que ofrecen las correctas respuestas para la mayoría de los problemas relacionados con los cuerpos en movimiento o los que surgen mientras se los está estudiando.

Las leyes de la dinámica ostentan una particular importancia para el hombre en general, ya sea estudioso o no de la temática, debido a que la comprensión de las mismas son las que le permitirán al hombre común determinar cuestiones como el valor, sentido y dirección de la fuerza que debe aplicar para que el cuerpo produzca determinado movimiento o cambio. Por ejemplo, para que un transporte de carga viaje equilibrado y seguro será preciso que se le aplique al mismo la fuerza en el lugar más adecuado, esto se puede determinar mediante la aplicación de la dinámica.

Capítulo III. Desarrollo

3.1 Metodología

El trabajo está estructurado en secciones, partiendo de los conceptos y habilidades básicas necesarias para el correcto entendimiento de cada sección. Previo al desarrollo de la estática y la dinámica, se da una introducción de los conocimientos básicos en matemáticas como lo son aritmética, algebra y trigonometría cuyo dominio es de gran importancia al abordar las secciones posteriores. En cada una de las secciones del área de estática se introduce una panorámica de lo que se desarrolla, observando algunos casos de aplicación. En la sección de dinámica se aborda primeramente el área de cinemática seguida del área de cinética de la partícula y del cuerpo rígido presentando las leyes del movimiento de Newton. Para cada una de las áreas se definen los conceptos que sean oportunos y se plantean ejercicios ejemplo donde se muestra la aplicación del concepto abordado y con los que el alumno podrá visualizar la metodología de solución. Una vez que se han estudiado y analizado los puntos anteriores, se sigue la resolución por parte del alumno de los ejercicios propuestos, con los que se verifica que realmente se han alcanzado los conocimientos esperados y con los que además se complementa la practica en la solución de ejercicios. En la sección de problemas reto se presentan problemas de nivel moderado con los que se busca asegurar que el estudiante haya comprendido perfectamente los conceptos, así como para incitarlo a seguir practicando con mayor número de ejercicios del mismo estilo con el fin de explorar nuevos casos de aplicación.

La terminología, los ejemplos y las panorámicas mostradas en cada sección están orientados para complementar el perfil del ingeniero civil, relacionándolo con las aplicaciones prácticas. Además, la forma didáctica que sigue el trabajo permite el trabajo autodidacta del estudiante.

Capítulo IV. Resultados

4.1 Aritmética

En la presente sección se da una revisión a las ideas básicas que conforman la aritmética marcando esencialmente las operaciones de multiplicación, división, potenciación, radicación, suma y resta de cantidades numéricas, teniendo como punto de partida, en cada punto, un breve resumen acerca de las leyes de los signos, pilar fundamental para el desarrollo de cada una de las operaciones mencionadas. Además, se introduce el concepto de logaritmo, así como ejemplos para familiarizarse con su manejo.

4.1.1 Suma y resta

Para sumar o restar dos o más cantidades se aplican las siguientes leyes de los signos:

- Si las cantidades tienen el mismo signo, entonces se suman las cantidades y se conserva el signo.
- Si dos cantidades tienen signos distintos, las cantidades se restan y se conserva el signo de la cantidad mayor.

Ejemplo: Determinar las siguientes sumas de números

1.- $1 + 2 + 3 + 4$.

Solución: como todas las cantidades tienen el mismo signo, entonces se suman los números

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

2.- $-1 - 2 - 3 - 4$

Solución: de igual manera que en el ejercicio anterior, solo se suman las cantidades conservando el signo “-“ ya que se encuentra en todos los términos de la expresión.

$$-1 - 2 - 3 - 4 = -10$$

3.- $1 - 2$

Solución: en este caso, dado que las cantidades tienen signos diferentes, vamos a restar las cantidades y anotaremos al resultado el signo del número mayor.

$$1 - 2 = -1$$

4.- $4 - 3 + 2 - 5$

Solución: se agrupan las cantidades en pares y se aplican las leyes de signos mencionadas.

$$4 - 3 + 2 - 5 = (4 - 3) + (2 - 5)$$

$$(4 - 3) + (2 - 5) = (1) + (-3)$$

O bien

$$1 - 3 = -2$$

Para los ejercicios que siguen se aplican las mismas reglas.

4.1.1.1 Problemas propuestos.

1.- $2 - 3 - 4 + 6$

2.- $3 + 32 - 43 - 19 + 78$

3.- $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

4.- $32 - 12 + 43 + 25 + 10$

4.1.2 Multiplicación y división

También se tienen leyes de signos para realizar estas operaciones.

- Si dos cantidades que se multiplican o dividen tienen mismo signo, entonces el resultado tiene signo positivo.

$$\frac{+}{+} \text{ ó } \frac{-}{-} \rightarrow + \qquad (+)(+) \text{ ó } (-)(-) \rightarrow (+)$$

- Si dos cantidades que se multiplican o dividen tienen signo diferente, entonces el resultado tiene signo negativo.

$$\frac{+}{-} \text{ ó } \frac{-}{+} \rightarrow - \qquad (+)(-) \text{ ó } (-)(+) \rightarrow (-)$$

Ejemplo: realizar las siguientes operaciones.

1.- $100/20$

Solución: dado que las cantidades tienen signos iguales, entonces el resultado es positivo

$$\frac{100}{20} = 5$$

2.- $(-\frac{60}{15} * -2)$

Solución: en el cociente tanto el numerador como el denominador tienen signos distintos por lo tanto su resultado tiene signo negativo, pero como a su vez se está multiplicando por un número cuyo signo es igual, entonces el resultado final es positivo:

$$-\frac{60}{15} * (-2) = 8$$

3.- $3125/-125$

Solución: de nuevo, los signos de las cantidades involucradas son diferentes por lo tanto el resultado tiene signo negativo.

$$\frac{3125}{-125} = -25$$

4.- $-75/-10$

Solución: se observa que en el término, el signo del numerador y el denominador es el mismo por lo tanto el resultado tiene signo positivo.

$$\frac{-75}{-10} = \frac{15}{2}$$

Para los ejercicios siguientes aplicar las reglas estudiadas.

4.1.2.1 Problemas propuestos.

1.- $13 * -6$

2.- $-169/13$

3.- $15 * 3 * -1/12$

$$4.- -\frac{15}{9} * \frac{18}{5}$$

$$5.- -3 * -2 * 4 * -1 * 7$$

4.1.3 Potenciación y radicación

Este tipo de operaciones con cantidades son un tanto más elaboradas que las vistas anteriormente, sin embargo, guardan una relación con ellas. Así, se tiene que la potenciación no es más que una multiplicación de una misma cantidad un cierto número de veces, y que la radicación es la operación inversa de la potenciación.

Expresiones para la potenciación y la radicación:

$a^b = c$ (*potenciación*) significa que "a" es multiplicado por si mismo "b" veces

$$\sqrt[b]{c} = c^{\frac{1}{b}}$$

= a (*radicación*) significa encontrar "a" que multiplicado por si mismo "b" veces da "c"

A continuación, se muestran ejemplos de las relaciones mencionadas.

Ejemplo: Realizar las siguientes operaciones.

$$1.- 2^3$$

Solución: de acuerdo a lo enunciado anteriormente se tiene.

$$2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$$

$$2.- 3^2 * 5^2$$

Solución: se sabe que

$$3^2 * 5^2 = 3 * 3 * 5 * 5$$

O lo que es lo mismo

$$9 * 25 = 225$$

$$3.- \sqrt{625}$$

Solución: la operación anterior se puede ver como

$$\sqrt{625} = (625)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, se busca un número que multiplicado por si mismo dos veces de 625, es fácil ver que:

$$25 * 25 = 625 \quad \text{por lo tanto: } \sqrt{625} = 25$$

4.- $\sqrt[3]{8}$

Solución: esta operación se puede ver como

$$\sqrt[3]{8} = (8)^{\frac{1}{3}}$$

Es decir, se busca un número que multiplicado por sí mismo tres veces de ocho. El ejercicio 1) de esta sección nos dice que:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Para el ejemplo 3 observe que $(-25)*(-25)=625$, lo cual nos lleva a concluir que:

$$\sqrt{625} = \pm 25$$

Por lo tanto, hay que tener presente que al calcular una raíz cuadrada siempre se van a tener dos respuestas que cumplen que al ser elevadas a la potencia dos, es decir que al ser multiplicadas por si mismas dos veces, dan como resultado el radicando; observe además que cualquier producto de esta forma siempre da como resultado un numero positivo y que por lo tanto no es posible que al multiplicar por sí mismo un número se obtenga un resultado negativo.

Lo anterior lleva a concluir que:

$$\sqrt[b]{c} = a \text{ para todo } b = 2,4,6 \dots 2n \text{ existira "a" siempre que } c \geq 0$$

Esta conclusión se cumple para todas las potencias pares ya que cualquier múltiplo de dos puede organizarse en número entero de parejas, es decir en un número entero de productos de un mismo número.

4.1.3.1 Problemas propuestos.

1.- $\sqrt[3]{125}$

2.- $4^3 * 3^2 * 2^1$

3.- $\sqrt{169} * \sqrt{4}$

4.- $\sqrt[3]{-8} * (-3)^2 + \sqrt{36} * 3$

4.1.4 Logaritmos

Los logaritmos son una clase especial de operaciones que están relacionados con las operaciones de potenciación en las que un número "a" (base) es elevado a la potencia "b" y da como resultado un número "c", es decir:

$$a^b = c$$

Cuando se aplica un logaritmo de base "a" a "c" se obtiene la potencia "b" a la que fue elevada la base para obtener la cantidad c dada. La expresión que corresponde a este enunciado es:

$$\log_a c = b$$

Una definición más precisa se da a continuación:

“El logaritmo base "a" de una cantidad "c" es igual a la potencia "b" a la que fue elevada la base para dar c”.

Ejemplo: Realizar las siguientes operaciones y verificar los resultados.

1.- $\log_5 125$

Solución: esta operación es fácilmente realizable en una calculadora, dando como resultado

$$\log_5 125 = 3$$

La comprobación se obtiene de la misma definición del logaritmo, es decir, se tiene que cumplir que 5 elevado a la potencia 3 de 125, y efectivamente

$$5^3 = 5 * 5 * 5 = 25 * 5 = 125$$

Luego, el resultado es correcto.

2.- $\log 10000$

Solución: cuando la base del logaritmo no se especifica, por convención se acepta que el logaritmo es base 10 y se realiza la operación

$$\log 10000 = \log_{10} 10000 = 4$$

Ahora se realiza la comprobación siguiendo el mismo principio que el ejemplo anterior

$$10^4 = 10 * 10 * 10 * 10 = 100 * 100 = 10000$$

El resultado es correcto.

3.- $\log_3 27$

Solución: se realiza la operación directamente obteniendo

$$\log_3 27 = 3$$

Ahora se sigue la comprobación

$$3^3 = 3 * 3 * 3 = 9 * 3 = 27$$

4.- $\log_e e^3$

Solución: en este caso se tiene un tipo especial de logaritmo, el conocido logaritmo natural o neperiano, distinguido porque su base es el conocido número $e = 2.71828 \dots$ por lo tanto, realizando la operación se tiene

$$\log_e e^3 = 3$$

Comprobación:

$$e^3 = e * e * e = e^3$$

El resultado es correcto. El logaritmo natural también suele representarse mediante la notación $\ln()$ de manera que $\log_e c = \ln(c)$, en lo siguiente se usara esta notación para identificar esta clase de logaritmos.

4.1.4.1 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos poseen las siguientes propiedades:

$$1.- \log_a b * c = \log_a b + \log_a c$$

$$2.- \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$3.- \log_a b^c = c * \log_a b$$

$$4.- \ln(e) = 1, \log_2 2 = \log_3 3 = \log_4 4 \dots \log_n n = 1$$

4.1.4.2 Problemas propuestos.

Para los siguientes ejercicios realizar las operaciones indicadas y comprobar su resultado.

$$1.- \log_2 64$$

$$2.- \log_3 729$$

$$3.- \log_5 3125 * 625$$

$$4.- \ln(e^{100})$$

$$5.- \log_2 \frac{16}{\log_2 16}$$

4.2 Álgebra

En esta sección se abordan temas y principios básicos de álgebra que el estudiante debe conocer antes de pasar a las secciones siguientes, en las que se emplearán muchas de las herramientas que se presentan seguidamente, a la hora de resolver problemas propios de las áreas de estática y dinámica.

4.2.1 Igualdades y ecuaciones

Dos cantidades son iguales o equivalentes cuando tienen el mismo valor numérico. Una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras (Martinez, 2018). Así pues, se pueden establecer relaciones de equivalencia entre cantidades tanto conocidas como desconocidas con el fin de modelar una situación y determinar su comportamiento bajo las condiciones marcadas. A continuación, se presentan algunos ejemplos de los conceptos mencionados.

Igualdades:

- $a = a$
- $6 = 5 + 1$
- $\text{sen}(x) = \text{tan}(x) * \text{cos}(x)$
- $\sqrt{100} = 10$
- $0 = 1 - 1$

Ecuaciones:

- $x + 3 = 1$
- $E = mc^2$
- $a^2 + b^2 = c^2$
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- $A = \pi r^2$

4.2.2 Ecuaciones lineales con una incógnita

Las ecuaciones lineales con una incógnita son aquellas en las que solo interviene una, y solo una cantidad, desconocida llamada variable o incógnita y en las que además el grado o exponente de la variable es 1. Por ejemplo, considere las siguientes expresiones:

$$a) x + 5 = 0 \quad b) x + y = 2x + 3 \quad c) x^2 + y^2 = 1$$

Si se clasificaran las expresiones anteriores, se puede decir respecto a cada una que: a) es una ecuación lineal con una incógnita " x ", b) es una ecuación lineal con dos incógnitas " x, y ", y por último c) es una ecuación no lineal (de grado 2) con dos incógnitas " x, y ".

Todas las ecuaciones lineales con una incógnita tendrán una estructura similar a la presentada en el ejemplo a), pero lo importante es que se sepa identificar este tipo de expresiones en base a las restricciones mencionadas párrafos antes.

Una vez se ha logrado lo anterior, se sigue conocer el procedimiento de solución de este tipo de ecuaciones para lo cual bástese con saber las siguientes reglas las cuales se basan en la idea de las operaciones directas y sus inversas correspondientes.

- Si una cantidad está sumando de un lado de la ecuación, pasa al otro lado de la misma restando.
- Si una cantidad está multiplicando de un lado de la ecuación, pasa al otro lado de la misma dividiendo.

A continuación, se muestra un ejemplo de aplicación de la primera regla y otro donde se aplica la segunda regla.

Ejemplo. Despejar la variable en cada una de las expresiones.

$$1.- x + 3 = 5$$

Solución: para despejar la incógnita es necesario mover el número tres del otro lado de la igualdad observando que su signo cambiará de "+" a "-" como se muestra

$$x + 3 = 5$$

$$x = 5 - 3 \rightarrow x = 2$$

Por lo tanto, el valor de x que cumple la igualdad es $x = 2$.

$$2.- 5x - 2 = 3$$

Solución: de nuevo, para despejar la incógnita es necesario mover el número dos al otro lado de la igualdad:

$$5x - 2 = 3$$

$$5x = 3 + 2 \rightarrow 5x = 5$$

Hasta aquí se ha logrado despejar el término $5x$ pero como se requiere conocer el valor de x únicamente es necesario mover, el cinco que está multiplicando, del otro de la igualdad donde pasara dividiendo, así:

Se tiene

$$5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5} \rightarrow x = 1$$

Por lo tanto, el valor que cumple la ecuación dada es $x = 1$.

$$3.- -3x + 6 = -5x - 2$$

Solución: En este caso la solución consiste en agrupar términos similares en cada lado de la ecuación. Se elige agrupar los términos con variables en el lado izquierdo de la ecuación y los demás términos en el lado derecho:

$$-3x + 6 = -5x - 2$$

$$-3x + 5x = -2 - 6$$

$$(-3 + 5)x = -8$$

$$2x = -8$$

$$x = -\frac{8}{2} \rightarrow x = -4$$

Por lo tanto, el valor que cumple la ecuación dada es $x = -4$.

$$4.- \frac{1}{4}x - 3 = 4$$

Solución: En este caso se pueden multiplicar primero ambos lados de la ecuación por 4:

$$4 * \left(\frac{1}{4}x - 3 \right) = 4 * 4$$

$$\frac{4}{4}x - 4 * 3 = 16$$

$$x - 12 = 16$$

$$x = 16 + 12 \rightarrow x = 28$$

Por lo tanto, el valor que cumple la ecuación dada es $x = 28$.

4.2.2.1 Problemas propuestos.

Resolver las ecuaciones dadas

1.- $4x - 25 = 14$

2.- $4(2x + 3) = 3(x - 1)$

3.- $\frac{2x-9}{4} = 3 - 4x$

4.- $13x - 25 = 38$

5.- $\frac{6}{x} = 4$

4.2.3 Ecuaciones cuadráticas

La estructura que tiene este tipo de ecuaciones se caracteriza porque el mayor grado de la incógnita es dos, también cuenta con un término lineal y uno independiente (que no tiene variable). Generalmente se expresa como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Algunos ejemplos de ecuaciones de este tipo son:

- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $-3x^2 + 3x = 3$
- $x^2 - 26 = 0$
- $\frac{4}{3}x^2 + 6x = 0$

Este tipo de ecuaciones se puede resolver mediante la aplicación de la conocida fórmula cuadrática o fórmula general cuya expresión es la siguiente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a, b, c son los coeficientes de la ecuación cuadrática expresada en su forma general. Las soluciones x_1, x_2 se obtienen al sustituir los parámetros a, b, c en la fórmula y efectuar las operaciones.

Antes de pasar a los ejemplos, vale la pena analizar la fórmula anterior con el fin de mostrar algunos aspectos importantes.

En primera instancia observe que las soluciones dadas por la fórmula cuadrática están sujetas a un cociente cuyo denominador es a , que coincide justamente con el coeficiente del término cuadrático de la ecuación a resolver, por lo tanto, se puede concluir que la fórmula cuadrática es únicamente aplicable para resolver ecuaciones de grado 2.

En segundo lugar, también vale la pena revisar el hecho que se muestra una raíz cuadrada en la expresión, por lo que analizando el radicando o discriminante se obtienen los siguientes casos:

- si $b^2 - 4ac \geq 0$ la expresión arroja dos soluciones reales.
- si $b^2 - 4ac = 0$ la expresión arroja una solución real repetida.
- si $b^2 - 4ac \leq 0$ la expresión no arroja soluciones reales.

Lo anterior permite tener presente ciertos aspectos que en algunas ocasiones se pueden pasar por alto pero que son necesarios de conocer. Ahora se continúa con los ejemplos.

Ejemplo: Obtener la solución de cada ecuación mediante el uso de la fórmula cuadrática.

1.- $x^2 - 2x - 15 = 0$

Solución: se aplica la fórmula cuadrática.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con $a = 1, b = -2, c = -15$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

Haciendo operaciones:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

De aquí se obtienen las dos soluciones x_1, x_2 :

$$x_1 = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} \rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{2 - 8}{2} = -\frac{6}{2} \rightarrow x_2 = -3$$

Los valores de x que cumplen la igualdad son $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$, observe que se obtuvieron dos soluciones reales y distintas dado que el discriminante cumplía el primero de los casos mostrados anteriormente.

$$2.- x^2 - 2x + 1 = 0$$

Solución: se aplica directamente la formula general o cuadrática con $a = 1, b = -2, c = 1$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

Haciendo operaciones:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

Como el discriminante en este caso es igual a cero entonces solo se podrá obtener únicamente una solución repetida.

$$x_{1,2} = \frac{2}{2} \rightarrow x_{1,2} = 1$$

Es decir:

$$x_1 = x_2 = 1$$

Se dice que la solución es repetida porque, aunque haya sido un único valor encontrado, el teorema fundamental del algebra dice que la cantidad de soluciones de una ecuación es igual al grado de dicha ecuación, así, como se tiene una igualdad de grado dos, forzosamente se tendrán dos valores de x que cumplan la igualdad dada. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal de una incógnita?

$$3.- x^2 - 2x = -2x - 1$$

Solución: lo que hay que hacer previo a la aplicación de la formula general es expresar la ecuación como una igualdad equivalente a cero, como se hace a continuación.

$$x^2 - 2x + 2x + 1 = 0$$

O bien

$$x^2 + 1 = 0$$

Ahora es posible aplicar la formula general tomando en cuenta que $a = 1, b = 0, c = 1$, entonces, sustituyendo valores en la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

Haciendo operaciones:

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2}$$

Observe que en este caso el radicando es un número negativo (menor que cero) por lo tanto, como ya se mencionó anteriormente, la ecuación no tiene soluciones reales.

Lo anterior no implica que la ecuación no tenga soluciones, en realidad si las tiene y son dos (como lo dice el teorema fundamental del algebra), solo que dichas soluciones no son

reales es decir que no se encuentran dentro del conjunto de los números reales. Si se quisiera expresar dichas soluciones estas tendrían la forma siguiente:

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{4}}{2}i$$

O bien

$$x_{1,2} = \pm \frac{2}{2}i$$

$$x_{1,2} = \pm i$$

$$x_1 = i \quad x_2 = -i$$

Donde i se define como: $i = \sqrt{-1}$ que es la unidad imaginaria base de los números complejos.

4.2.3.1 Problemas propuestos.

Resolver las siguientes ecuaciones con la formula cuadrática.

1.- $x^2 - 9x + 3 = 0$

2.- $\frac{1}{5}x^2 + 2x + 5 = 0$

3.- $18 - 9x + x^2 = 0$

4.- $4 - x^2 = 0$

5.- $(x - 2)(7 - x) = 0$

6.- $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

(sugerencia: hacer el cambio de variable $u = x^2$, resolver para u y despues para x).

7.- $\cos^2(\theta) + 2 \cos(\theta) + 1 = 0$

(sugerencia: hacer el cambio de variable $x = \cos(\theta)$, resolver para x y despues para θ).

8.- $x + 1 = \frac{1}{x}$

4.2.4 Sistemas de ecuaciones

Hasta ahora solo se han estudiado ecuaciones en las que solo interviene una única variable, pero en los problemas que se revisaran posteriormente, una sola ecuación no basta para modelar matemáticamente la situación. Por lo general se obtienen conjuntos de dos o tres ecuaciones con dos y tres incógnitas respectivamente.

En esta sección se abordarán los sistemas de ecuaciones que no son otra cosa más que un conjunto de ecuaciones en las que el número de incógnitas que se manejan es igual al número de ecuaciones que se deben de tener para poder resolver dicho sistema. Se dice que el sistema es inconsistente cuando el número de variables involucradas supera al número de ecuaciones disponibles y viceversa. A continuación, se muestran algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones consistentes.

- $$\begin{aligned} 3x + 2y &= -5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 12x - 5y + 3z &= 5 \\ -x - 3z &= -7 \\ x + y + z &= 25 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x + 4z &= 2 \\ 2y - 3z &= 5 \end{aligned}$$

Los métodos de solución varían en función del número de ecuaciones que formen el sistema. En lo siguiente se presentan los métodos más prácticos y de menor complejidad con los que se pueden resolver sistemas de ecuaciones.

4.2.4.1 Método de reducción

Este método es práctico para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas o sistemas 2x2 como generalmente se les llama. Dicho método consiste en manipular las ecuaciones con el fin de que al hacer una operación de suma o resta entre estas se llegue a cancelar una variable de tal forma que resulte una ecuación con una sola incógnita para las cuales ya se tiene un método de solución. A continuación, se ilustra la aplicación de este método de solución.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente sistema.

$$3x + y = 2$$

$$6x - 3y = 12$$

Solución: se van a sumar las ecuaciones de tal manera que al hacerlo se cancele, en este caso, la variable y . Para esto es necesario que el coeficiente de esta variable en la primera ecuación sea 3, por lo que se multiplicara primero dicha ecuación por 3 como se ilustra.

$$3x + y = 6 \quad (3)$$

$$6x - 3y = 12$$

O bien:

$$9x + 3y = 18 \quad (\text{Sumando las ecuaciones})$$

$$\begin{array}{r} 6x - 3y = 12 \\ \hline 15x + 0y = 30 \end{array}$$

O lo que es lo mismo: $15x = 30$

$$x = \frac{30}{15} \rightarrow x = 2$$

Ahora se sigue determinar el valor de la variable y sustituyendo el resultado obtenido en cualquiera de las dos igualdades, por ejemplo, tomando la primera ecuación y sustituyendo se tiene

$$3(2) + y = 6$$

$$6 + y = 6$$

$$y = 6 - 6 \rightarrow y = 0$$

Entonces las soluciones del sistema son $x = 2, y = 0$. Se pueden sustituir estos resultados en cada una de las ecuaciones para verificar que realmente sean soluciones. Esto se deja como trabajo para el lector.

Ejemplo 2: Resolver el siguiente sistema.

$$2x + 3y = -1$$

$$-3x + 2y = 8$$

Solución: en este caso vamos a cancelar la variable x para lo cual vea que es necesario multiplicar la primera ecuación por un factor de 3 y la segunda por un factor de 2, haciendo esto:

$$2x + 3y = -1 \quad (3)$$

$$-3x + 2y = 8 \quad (2)$$

O bien:

$$6x + 9y = -3$$

(Sumando las ecuaciones)

$$\begin{array}{r} -6x + 4y = 16 \\ \hline 0x + 13y = 13 \end{array}$$

O lo que es lo mismo:

$$13y = 13$$

$$y = \frac{13}{13} \rightarrow y = 1$$

Ahora se determina el valor de x a partir del resultado anterior:

$$2x + 3(1) = -1$$

$$2x + 3 = -1$$

$$2x = -1 - 3$$

$$2x = -4$$

$$x = -\frac{4}{2} \rightarrow x = -2$$

Por lo tanto los valores que cumplen cada igualdad son $x = -2, y = 1$.

La idea en la que se basa este método es sencilla y se logra dominar con un poco de práctica. Se han ilustrado ya algunos casos de aplicación del método y se aplicara la misma metodología para resolver cualquier sistema 2×2 . Pruebe lo aprendido con los siguientes ejercicios.

4.2.4.1.1 Problemas propuestos.

1.-
$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 11 \\ 3x - 2y &= -9 \end{aligned}$$

2.-
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

3.-
$$\begin{aligned} 7x - 4y &= 5 \\ 9x + 8y &= 13 \end{aligned}$$

4.-
$$\begin{aligned} 15x - 11y &= -87 \\ -12x - 5y &= -27 \end{aligned}$$

5.-
$$\begin{aligned} 6x - 3y &= 4 \\ -5x + y &= -4 \end{aligned}$$

4.2.4.2 Método del determinante

Con este método es posible resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, aunque su complejidad aumenta conforme n se incrementa. Para sistemas 2×2 el método es sencillo porque las operaciones que implica son fácilmente realizables.

El determinante es un concepto matemático que tiene su propia metodología, un determinante se representa mediante un arreglo cuadrado de números limitado por barras paralelas $| |$. El determinante de una matriz A (como se le llama a dicho arreglo) se puede denotar como $\det(A)$. (PERRY, 1990)

La metodología para el cálculo de los determinantes se muestra a continuación, en el que se desarrollara con un arreglo 2×2 .

Ejemplo 1: calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución: para el cálculo de un determinante 2×2 se multiplican los términos de la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, y al resultado se le resta el producto de los números que se encuentran en la diagonal contraria:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 * 5 - 3 * 1 = 7$$

2.- Calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución: se aplica lo explicado anteriormente.

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (5)(0) = -2$$

Las operaciones ilustradas se aplican a todos los determinantes del mismo tipo y se seguirán practicando ya de manera aplicada al resolver sistemas de ecuaciones.

Primero se va a mostrar la generalización del método, para lo cual considere el siguiente sistema de ecuaciones 2x2:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

La metodología de solución es la siguiente:

1.- Se forma el determinante principal, el cual se denotará como Δ_T , con los coeficientes de las variables tal y como se muestra:

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

2.- Se forma el determinante para la variable x , el cual se denotará como Δ_x , sustituyendo la fila correspondiente a los coeficientes a dicha variable por los valores respectivos a los que esta igualada cada ecuación, así:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

3.- Para la variable y se hace lo descrito anteriormente, obteniendo:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

4.- Las soluciones x e y del sistema están dadas por:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_T} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_T}$$

Al cálculo de las soluciones del sistema de ecuaciones a partir de los determinantes se denomina regla de Cramer. (PERRY, 1990). A continuación, se aplica esta metodología.

Ejemplo 3: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con el método del determinante.

$$2x + 3y = -1$$

$$-3x + 2y = 8$$

Solución: se calcula el determinante total

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-3) * 3$$

$$\Delta_T = 13$$

Ahora se calculan Δ_x, Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (3)(8)$$

$$\Delta_x = -26$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8) - (-1)(-3)$$

$$\Delta_y = 13$$

Por lo que las soluciones son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_T} = -\frac{26}{13} \rightarrow x = -2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_T} = \frac{13}{13} \rightarrow y = 1$$

Observe las soluciones obtenidas son las mismas que las que se obtuvieron con el método de reducción aplicado en el ejemplo 2.

Ejemplo 4: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con el método del determinante.

$$x + y = 2$$

$$x - y = 0$$

Solución: se calcula el determinante total

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1)$$

$$\Delta_T = -2$$

Ahora se calculan Δ_x, Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (1)(0)$$

$$\Delta_x = -2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (2)(1)$$

$$\Delta_y = -2$$

Por lo que las soluciones son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_T} = \frac{-2}{-2} \rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_T} = \frac{-2}{-2} \rightarrow y = 1$$

Las soluciones obtenidas cumplen con las igualdades dadas (verifíquelo).

Ejemplo 5: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con el método del determinante.

$$6x - 3y = 4$$

$$-5x + y = -4$$

Solución: se calcula el determinante total

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (6)(1) - (-3)(-5)$$

$$\Delta_T = -9$$

Ahora se calculan Δ_x, Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (-3)(-4)$$

$$\Delta_x = -8$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = (6)(-4) - (4)(-5)$$

$$\Delta_y = -4$$

Por lo que las soluciones son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_T} = \frac{-8}{-9} \rightarrow x = \frac{8}{9}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_T} = \frac{-4}{-9} \rightarrow y = \frac{4}{9}$$

Las soluciones cumplen las igualdades dadas, verifíquelo.

Hasta ahora se han abordado sistemas de ecuaciones 2×2 para los que se han mostrado dos métodos de solución (el de reducción y el del determinante). En lo que sigue se estudiarán sistemas 3×3 cuya solución se obtendrá a partir del método de determinantes.

Para esto es necesario saber cómo se calcula un determinante 3×3 por lo que a continuación se muestra como se realiza esta operación. Tómese en cuenta el siguiente arreglo de números:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Este determinante se descompone en determinantes 2×2 fácilmente calculables. La descomposición del arreglo dado en subarreglos se muestra a continuación.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Tómese en cuenta el siguiente ejemplo para ilustrar este procedimiento.

Ejemplo 6: Calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución: se aplica directamente la descomposición mostrada.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1(-8 - 0) - (0 - 15) - 2(0 + 10) \\ &= -8 + 15 - 20 \\ &= -13 \end{aligned}$$

(Realizando las operaciones)

Por lo tanto, el valor del determinante es $\Delta = -13$.

Ejemplo 7: Calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & 3 \\ 20 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución: se aplica directamente la descomposición mostrada.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & 3 \\ 20 & 0 & 8 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 20 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 20 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0(8 - 0) + 7(88 - 60) - 2(0 - 20) \\ &= 0 + 196 + 40 \\ &= 236 \end{aligned}$$

(Realizando las operaciones)

Por lo tanto, el valor del determinante es $\Delta = 236$.

Ejemplo 8: Calcular el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 10 & -7 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución: se aplica directamente la descomposición mostrada.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 10 & -7 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} &= 10 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 10(-4 - 0) + 7(8 - 0) - 2(2 + 3) \\ &= -40 + 56 + 10 \\ &= 26 \end{aligned}$$

(Realizando las operaciones)

Por lo tanto, el valor del determinante es $\Delta = 26$.

En seguida se muestra la metodología de solución de un sistema 3×3 . La estructura que se sigue es similar a la aplicada anteriormente a los sistemas 2×2 . Se parte de un sistema de la forma:

$$ax + by + cz = A$$

$$dx + ey + fz = B$$

$$gx + hy + iz = C$$

1.- Se forma el determinante principal, el cual se denota como Δ_T , con los coeficientes de las variables tal y como se muestra:

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

2.- Se forma el determinante para la variable x , el cual se denota como Δ_x , sustituyendo la fila correspondiente a los coeficientes a dicha variable por los valores respectivos a los que esta igualada cada ecuación, así:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & i \end{vmatrix}$$

3.- Para la variable y se hace lo descrito anteriormente, obteniendo:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & A & c \\ d & B & f \\ g & C & i \end{vmatrix}$$

4.- Se hace de igual manera por la variable z .

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & B \\ g & h & C \end{vmatrix}$$

5.- Las soluciones x, y, z del sistema están dadas por:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_T} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_T} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta_T}$$

Observe que la metodología mostrada es la misma a la aplicada a un sistema 2×2 pero extendida a una variable más (z). El ejemplo siguiente ilustra de manera clara la aplicación de este método.

Ejemplo 9: Determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + y + 5z = 12$$

$$-4x + 3y - z = 6$$

$$-x - 5y + 4z = 7$$

Solución: se calcula el determinante total

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_T = 2(12 - 5) - (-16 - 1) + 5(20 + 3)$$

$$\Delta_T = 2(7) - (-17) + 5(23)$$

$$\Delta_T = 146$$

Ahora se calculan $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = 12(12 - 5) - (24 + 7) + 5(-30 - 21)$$

$$\Delta_x = 12(7) - (31) + 5(-51)$$

$$\Delta_x = -202$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ -4 & 6 & -1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - (12) \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = 2(24 + 7) - (12)(-16 - 1) + 5(-28 + 6)$$

$$\Delta_y = 2(31) - 12(-17) + 5(-22)$$

$$\Delta_y = 156$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ -4 & 3 & 6 \\ -1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = 2(21 + 30) - (1)(-28 + 6) + 12(20 + 3)$$

$$\Delta_z = 2(51) - (-22) + 12(23)$$

$$\Delta_z = 400$$

Por lo que las soluciones son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_T} = \frac{-202}{146} \rightarrow x = -\frac{101}{73}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_T} = \frac{156}{146} \rightarrow y = \frac{78}{73}$$

$$z = \frac{\Delta_y}{\Delta_T} = \frac{400}{146} \rightarrow z = \frac{200}{73}$$

Las soluciones cumplen las igualdades dadas, verifíquelo.

Ejemplo 10: Determine la solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$-x + 3y + z = 5$$

$$4x - y - z = 2$$

$$x - 5y + 2z = -3$$

Solución: se calcula el determinante total

$$\Delta_T = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_T = -1(-2 - 5) - 3(8 + 1) + (-20 + 1)$$

$$\Delta_T = -1(-7) - 3(9) + (-19)$$

$$\Delta_T = -39$$

Ahora se calculan $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = 5(-2 - 5) - 3(4 - 3) + (-10 - 3)$$

$$\Delta_x = 5(-7) - 3(1) + (-13)$$

$$\Delta_x = -51$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = -1(4 - 3) - 5(8 + 1) + (-12 - 2)$$

$$\Delta_y = -(1) - 5(9) + (-14)$$

$$\Delta_y = -60$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = -1(3 + 10) - (3)(-12 - 2) + 5(-20 + 1)$$

$$\Delta_z = -1(13) - 3(-14) + 5(-19)$$

$$\Delta_z = -66$$

Por lo que las soluciones son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_T} = \frac{-51}{-39} \rightarrow x = \frac{51}{39}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_T} = \frac{-60}{-39} \rightarrow y = \frac{60}{39}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta_T} = \frac{-66}{-39} \rightarrow z = \frac{66}{39}$$

Las soluciones cumplen las igualdades dadas, verifíquelo.

Hasta aquí se dejan los temas de álgebra para poder continuar con los tópicos necesarios de trigonometría.

4.2.4.3 Problemas propuestos.

Obtener la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1.- $3x - 7y + 17z = 26$

$$-5x + y = -5$$

$$x + 4y - 8z = 9$$

$$5x + 12y - 4z = -15$$

2.- $x - y + 13z = 3$

$$9x + y - 3 = 11$$

$$19x - 2y - 5z = 14$$

3.- $7x - y + z = 3$

$$-5x + 3y + 6z = 9$$

$$x + y + z = 3$$

4.- $x - y - z = -1$
 $5x - 3y - z = 1$

$$-2x + y + \frac{1}{2}z = 6$$

5.- $x + y + 2z = 2$
 $3x - 3y - z = 9$

4.3 Trigonometría

Como se mencionó en el capítulo II, la trigonometría es la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, para lo cual se auxilia en los principios y conceptos planteados en el álgebra.

En la presente sección se abordarán algunos temas selectos de trigonometría cuyo conocimiento es necesario para poder transitar con fluidez las secciones posteriores de estática y dinámica.

4.3.1 Triángulos

Un triángulo es una porción del plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos, a los puntos de intersección se les denomina vértices. A la abertura generada interiormente entre las intersecciones de las rectas se le denomina ángulo. La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es π radianes o 180 grados, es decir, $\gamma + \beta + \alpha = \pi$, véase la figura 1.

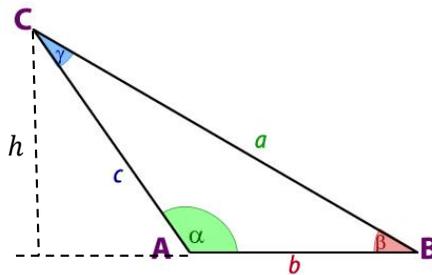


FIGURA 1.- PARÁMETROS DE UN TRIÁNGULO.

Los parámetros a, b, c son los lados del triángulo y su valor numérico muestra la longitud de dichos lados. La suma de los lados de un triángulo es igual al perímetro (p) de dicha figura, y el semiproducto de su base por su altura representa el área (A) de la región encerrada.

$$p = a + b + c$$

$$A = b * \frac{h}{2}$$

Para la ecuación del área del triángulo, el parámetro h es la altura de la figura, es decir, la longitud del segmento que va de la base hasta su vértice opuesto medido perpendicularmente (vea figura 1). También se puede determinar el área de un triángulo en términos de dos de sus lados y un ángulo, para lo cual se tiene:

$$A = \frac{b * a * \text{sen}(\beta)}{2}$$

Observe que la relación anterior involucra un ángulo y los lados que lo forman, por lo que es susceptible a ser adaptada a los demás parámetros, por ejemplo, para b, c y α .

Así como se pueden establecer relaciones entre los parámetros de un mismo triángulo también se puede hacer lo propio con los pertenecientes a varios de estos siempre que se cumplan ciertas condiciones. El principio de semejanza de triángulos se basa en dicha idea y representa una herramienta muy importante.

4.3.1 Semejanza de triángulos

Este principio dice que dos o más triángulos son semejantes siempre que sus ángulos respectivos sean iguales y que sus lados sean proporcionales. Para ilustrar esto considérense los triángulos ABC y $A'B'C'$, si:

$$\angle A = \angle A' \quad \angle B = \angle B' \quad \angle C = \angle C' \quad \text{y} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Entonces los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes. Para verificar la semejanza de dos triángulos no es necesario comprobar todas las condiciones, pues el hecho de cumplir algunas determina las demás con la diferencia que cada caso implique. A continuación, se muestra un ejemplo para ilustrar lo mencionado hasta aquí.

Ejemplo 1: Si los segmentos \overline{AB} y \overline{DE} son paralelos, demostrar que ΔABC es semejante a ΔDEC . Véase la figura 2.

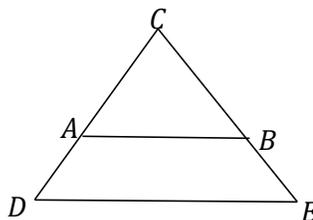


FIGURA 2.- TRIÁNGULO SEMEJANTE PARA LA DEMOSTRACIÓN 1.

Solución: dado que \overline{AB} y \overline{DE} son paralelos entonces $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ y $\angle C = \angle C$, esto también implica que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$

Y por lo tanto se concluye que los triángulos son semejantes.

Ejemplo 2: Si \overline{EB} es paralelo a \overline{CD} , y $\overline{AB} = 2\text{ m}$, $\overline{BC} = 18\text{ m}$ y $\overline{BE} = 3\text{ m}$, calcular \overline{CD} .

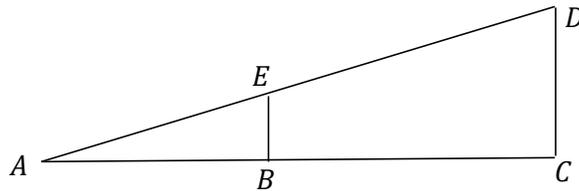


FIGURA 3.- TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Solución: dado que \overline{EB} es paralelo a \overline{CD} , observe la figura 3, entonces ΔACD es semejante a ΔABE por lo que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}$$

Considerando solo la siguiente igualdad:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}$$

Con: $\overline{AB} = 2\text{ m}$, $\overline{AC} = 18 + 2 = 20\text{ m}$, $\overline{BE} = 3\text{ m}$, sustituyendo en la ecuación se tiene

$$\frac{2}{20} = \frac{3}{\overline{CD}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{3}{\overline{CD}}$$

$$\overline{CD} = 10(3) \rightarrow \overline{CD} = 30\text{ m}$$

Ejemplo 3: Si \overline{AB} es paralelo a \overline{ED} , \overline{AB} es perpendicular a \overline{BD} , \overline{ED} es perpendicular a \overline{BD} y $\overline{DE} = 4\text{ m}$, $\overline{CD} = 2\text{ m}$, $\overline{BC} = 6\text{ m}$, Hallar \overline{AB} .

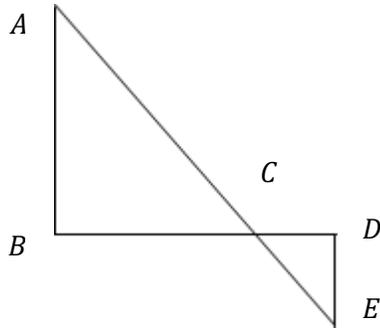


FIGURA 4.- TRIÁNGULOS DEL EJEMPLO 3.

Solución: De igual manera, dado que \overline{AB} es paralelo a \overline{ED} y a que la intersección de estos segmentos tiene como recta común el segmento \overline{BD} , entonces los triángulos dados son semejantes. Luego, son válidas las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

Tomando la primera igualdad y considerando $\overline{DE} = 4 \text{ m}$, $\overline{CD} = 2 \text{ m}$ y $\overline{BC} = 6 \text{ m}$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{4} = \frac{6}{2}$$

$$\overline{AB} = 3(4) \rightarrow \overline{AB} = 12 \text{ m}$$

4.3.2 Triángulos rectángulos y funciones trigonométricas

Los triángulos rectángulos son un caso especial de triángulos que poseen propiedades interesantes, estos se identifican de los demás por una característica muy notoria, a saber, tienen un ángulo recto es decir un ángulo que mide 90° como se muestra en la figura 5. De este tipo de triángulo se derivan un tipo especial de relaciones entre los lados y los ángulos las cuales se llaman funciones trigonométricas.

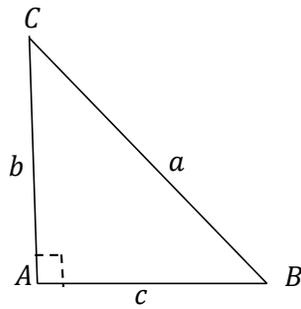


FIGURA 5.-TRIÁNGULO CON $\angle A = 90^\circ$.

Un resultado importante para este tipo de triángulos es el conocido teorema de Pitágoras, el cual relaciona las longitudes de los lados a partir de la siguiente expresión:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Donde b, c son los llamados catetos y a es la hipotenusa o lado de mayor longitud. El teorema de Pitágoras se cumple para cualquier triángulo que tenga un ángulo recto. Otro tipo de relaciones cuyas aplicaciones prácticas son variadas y son importantes recalcar son las conocidas funciones trigonométricas que relacionan los lados y ángulos de un triángulo de la siguiente manera: para un triángulo rectángulo como el mostrado en la figura 5.

- La función seno aplicada a un ángulo relaciona el lado opuesto a dicho ángulo con la hipotenusa:

$$\text{seno de } C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen}(C) = \frac{c}{a}$$

- La función coseno aplicada a un ángulo relaciona el lado adyacente a dicho ángulo con la hipotenusa:

$$\text{coseno de } C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(C) = \frac{b}{a}$$

- La función tangente aplicada a un ángulo relaciona el lado opuesto a dicho ángulo con el lado adyacente al mismo:

$$\text{tangente de } C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan(C) = \frac{c}{b}$$

Además, cada una de estas funciones tiene su respectiva función recíproca e inversa las cuales serán de gran apoyo en las secciones siguientes por lo que vale la pena mencionarlas.

Funciones trigonométricas recíprocas. Cada expresión siguiente corresponde a la función recíproca respectiva a cada una de las funciones ilustradas anteriormente.

- La función cosecante es la función recíproca al seno de un ángulo, de manera que:

$$\text{cosecante de } C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{csc}(C) = \frac{1}{\text{sen}(C)} \rightarrow \text{csc}(C) = \frac{a}{c}$$

- La función secante es la función recíproca al coseno de un ángulo, de manera que:

$$\text{secante de } C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{sec}(C) = \frac{1}{\text{cos}(C)} \rightarrow \text{sec}(C) = \frac{a}{b}$$

- La función cotangente es la función recíproca a la tangente de un ángulo, de manera que:

$$\text{cotangente de } C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\text{cot}(C) = \frac{1}{\text{tan}(C)} \rightarrow \text{cot}(C) = \frac{c}{b}$$

Como ya se mencionó, estas funciones tienen gran variedad de aplicaciones para resolver problemas geométricos, pero por ahora no se mencionará algún ejemplo, sino que se sigue con el estudio de algunas propiedades importantes de dichas funciones.

Debido a que no siempre se tratan problemas que involucran un solo ángulo al que se le aplique alguna función trigonométrica, se vuelve necesario introducir las siguientes propiedades que relacionan las funciones trigonométricas básicas aplicadas a casos especiales de suma, resta y multiplicación de ángulos.

$$1.- \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) \pm \cos(a) \operatorname{sen}(b)$$

$$2.- \operatorname{cos}(a \pm b) = \operatorname{cos}(a) \operatorname{cos}(b) \mp \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)$$

$$3.- \tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

$$4.- \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{cos}^2 a = 1$$

$$5.- \operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cos} 2a$$

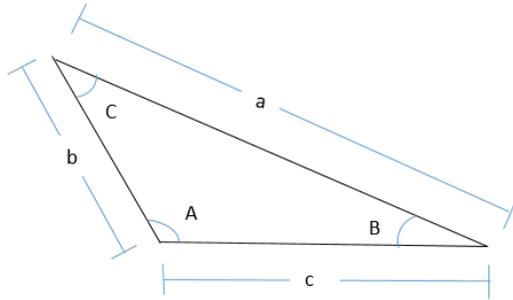
$$6.- \operatorname{cos}^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cos} 2a$$

$$7.- \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a$$

4.3.3 Teoremas especiales de triángulos

4.3.3.1 Ley de senos.

Es una herramienta matemática básica para poder resolver cualquier triángulo oblicuángulo, es decir encontrar las dimensiones de sus lados y los ángulos que se forman entre ellos.



$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

FIGURA 6.- LEY DE SENOS PARA TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

Se puede utilizar para los siguientes casos:

1. Dos ángulos interiores del triángulo y un lado
2. Dos lados del triángulo y un ángulo opuesto a cualquiera de estos lados.

Ejemplo 1. De acuerdo con el siguiente triángulo (ver figura 7) determina los elementos faltantes.

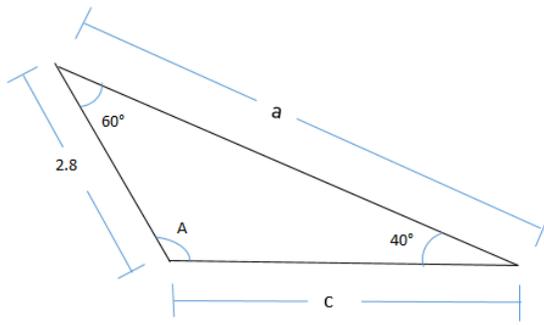


FIGURA 7.- TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO DEL EJEMPLO 1.

Sol.

Calculando lado "c"

$$\frac{c}{\text{sen}(60^\circ)} = \frac{2.8}{\text{sen}(40^\circ)}$$

$$c = \frac{(2.8) \text{sen}(60^\circ)}{\text{sen}(40^\circ)} = 3.77 \text{ u}$$

Calculando

el ángulo "A"

Dado que la suma de los ángulos interiores es 180,

$$A + B + C = 180$$

$$A + 60^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

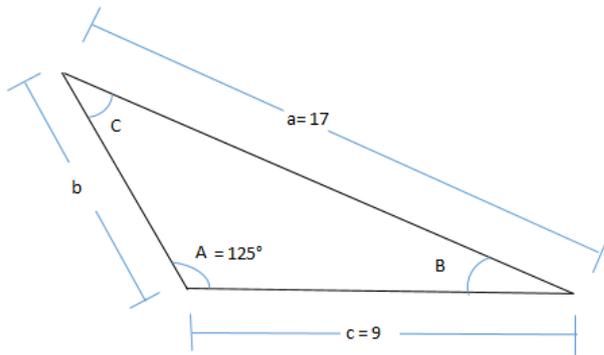
$$A = 80^\circ$$

Calculando lado "a".

$$\frac{a}{\text{sen}(80^\circ)} = \frac{2.8}{\text{sen}(40^\circ)}$$

$$a = \frac{(2.8) \text{sen}(80^\circ)}{\text{sen}(40^\circ)} = 4.28 u$$

Ejemplo 2.- De acuerdo al siguiente triángulo, calcular los ángulos y lados faltantes, C , B , a .



Calculando Angulo "C".

$$\frac{9}{\text{sen } C} = \frac{17}{\text{sen}(125^\circ)}$$

$$\text{sen } C = \frac{9 \text{sen}(125^\circ)}{17}$$

$$C = \sin^{-1} \frac{9 \text{sen}(125^\circ)}{17}$$

$$\therefore C = 25^\circ$$

FIGURA 8.- TRIANGULO OBLICUÁNGULO DEL EJEMPLO 2.

Calculando ángulo "B".

Teniendo en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180° , se tiene:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$125^\circ + B + 25^\circ = 180^\circ$$

$$B = 30^\circ$$

Calculando lado "b".

$$\frac{b}{\text{sen}(30^\circ)} = \frac{17}{\text{sen}(125^\circ)}$$

$$b = \frac{17 \text{sen}(30^\circ)}{\text{sen}(125^\circ)}$$

$$\therefore b = 10.37$$

4.3.3.1.1 Problemas propuestos.

1.- Calcular los elementos que faltan en el siguiente triángulo.

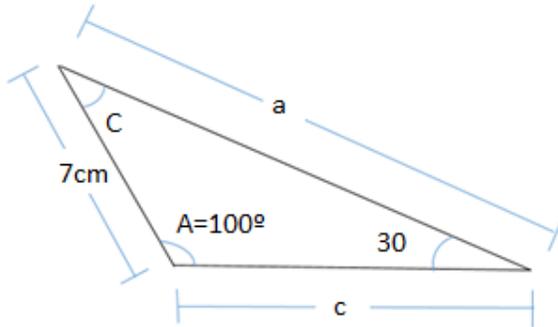


FIGURA 9.- TRIANGULO PROBLEMA 1.

2.- Calcular los elementos que faltan en el siguiente triángulo. Tome en cuenta los datos proporcionados en la figura 10.

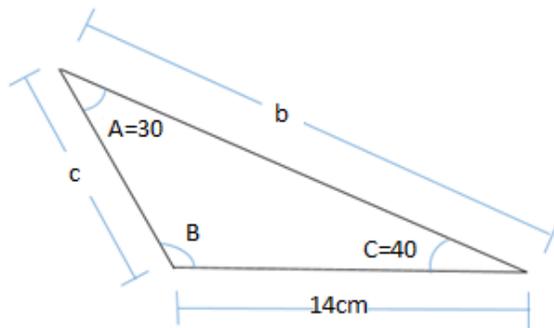


FIGURA 10.- TRIÁNGULO PARA LEY DE SENOS.

3.- Calcular los elementos que faltan en el siguiente triángulo mostrado en la figura 11.

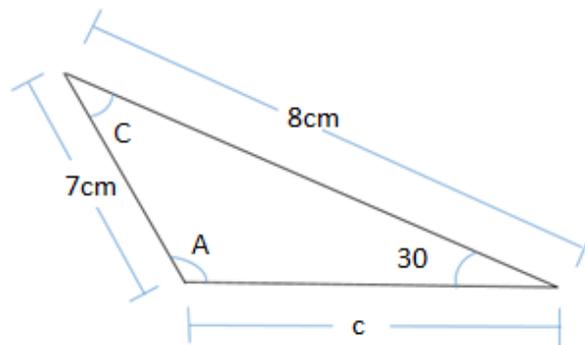
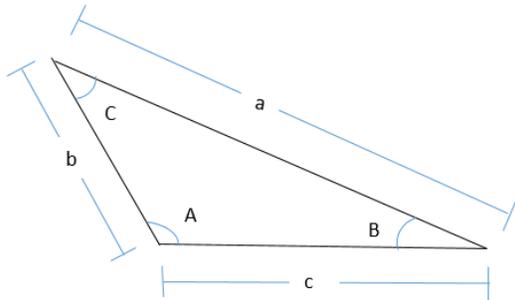


FIGURA 11.- TRIÁNGULO DEL PROBLEMA 3.

4.3.3.2 Ley de cosenos.

Al igual que la ley de senos, la ley de cosenos también es una herramienta básica para resolver triángulos de cualquier tipo y establece que:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$$

FIGURA 12.- LEY DE COSENOS PARA TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

Esta ley se utiliza para determinar la longitud de un lado del triángulo cuando se conocen los otros dos lados y el ángulo opuesto al lado que se desea calcular.

También se utiliza cuando se tiene los tres lados del triángulo, para poder obtener los ángulos.

Ejemplo 1: Para el triángulo que se muestra en la figura 13, calcular la longitud del lado “b”.

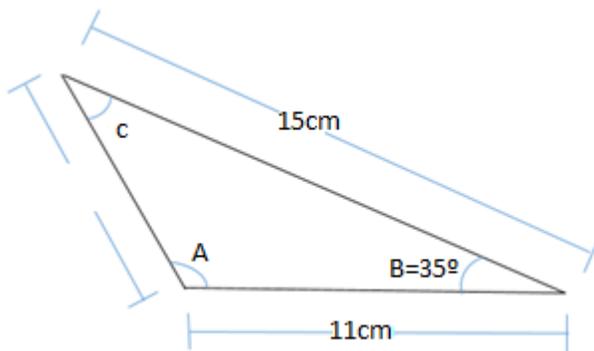


FIGURA 13.- TRIANGULO PARA EJEMPLO 1.

$$b^2 = (15)^2 + (11)^2 - 2(15)(11) \cos(35^\circ)$$

$$b^2 = 121 + 225 - 330 \cos(35^\circ)$$

$$b^2 = 121 + 225 - 330(0.8191)$$

$$b^2 = 75.679$$

$$b = 8.7$$

2.- De acuerdo a los elementos del triángulo mostrado en la figura 14, calcula los ángulos interiores del mismo, “C”, “A”, “B”.

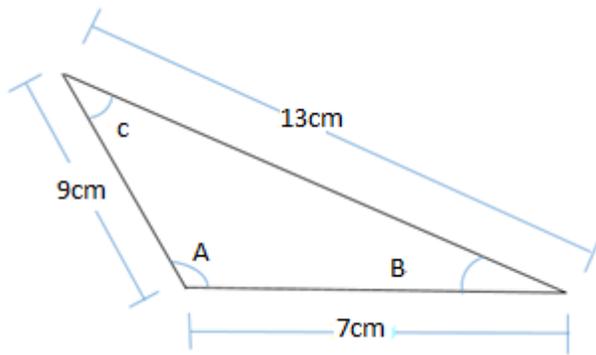


FIGURA 14.- TRIANGULO PARA EL EJEMPLO 2 LEY DE COSENOS.

Calculando "A".

$$13^2 = 9^2 + 7^2 - 2(7)(9) \cos A$$

$$169 = 81 + 49 - 126 \cos A$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{-39}{126}\right) = A \quad \therefore A = 108^\circ$$

Calculando "C".

$$7^2 = 13^2 + 9^2 - 2(13)(9) \cos C$$

$$49 = 169 + 81 - 234 \cos C$$

$$\frac{-201}{-234} = \cos C$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{-201}{-234}\right) = C \quad \therefore C = 30.8^\circ$$

Calculando "B".

De acuerdo a las propiedades de los triángulos, la suma de sus ángulos interiores es de 180° .

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$108^\circ + B + 30.8^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore B = 39.2^\circ$$

4.3.3.2.1 Problemas propuestos.

Ejercicio 1. Determine los datos faltantes del triángulo mostrado en la figura 15.

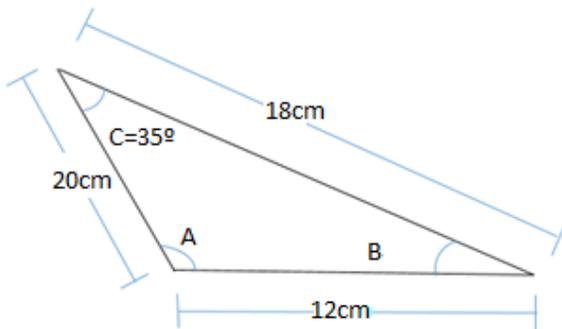


FIGURA 15.- TRIÁNGULO CON DOS ÁNGULOS DESCONOCIDOS.

2.- De acuerdo al triángulo de la figura 16 calcular los elementos faltantes.

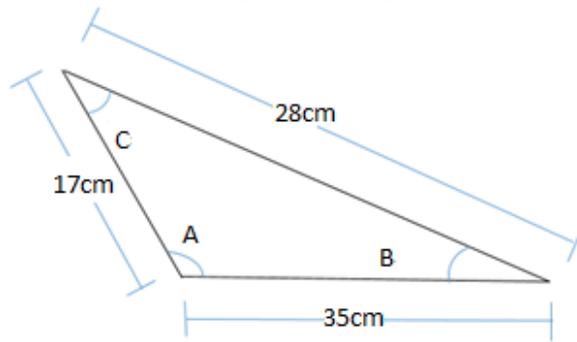


FIGURA 16.- TRIÁNGULO CON TRES LADOS CONOCIDOS.

3.- De acuerdo al siguiente triángulo, calcular los elementos faltantes. Ver figura 17.

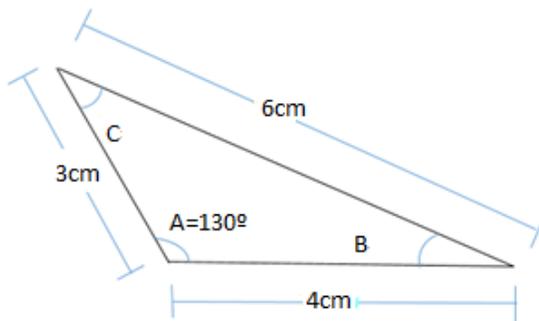


FIGURA 17.- TRIÁNGULO CON ÁNGULO DE 130°

4.4 Estática

La estática es la rama de la física que se encarga del estudio de los cuerpos en reposo, estableciendo condiciones para el equilibrio. Los conceptos involucrados en esta área son intuitivos y de fácil comprensión, por lo que la práctica de la solución de ejercicios clave lleva al dominio rápido de los problemas con los que se puede encontrar más adelante.

Se inicia el estudio de esta disciplina con la introducción de los conceptos de mayor relevancia. Para lo cual tómesese en cuenta que se abordaran problemas que involucran sistemas mecánicos de uso común en la aplicación de la ingeniería civil.

Como ya se mencionó, el objeto de estudio de la estática son los cuerpos en equilibrio, es decir, todos aquellos cuerpos, objetos o partículas que se encuentran en estado de reposo y cuyo comportamiento y posición no varían en el tiempo. El principio físico de esta idea se basa en la primera y segunda ley de Newton en las que se enuncia que cualquier objeto se mantendrá en estado de reposo o en movimiento constante siempre que no haya una fuerza externa que altere dicho estado (primera ley). La segunda ley da un enunciado matemático cuya expresión es la madre, junto con la ecuación de equilibrio de momento o par de torsión, de todos los principios de la estática.

$$\sum F_k = 0 \dots (1)$$

$$\sum M_k = 0 \dots (2)$$

La ecuación (1) es la versión de la segunda ley de Newton para el equilibrio y se puede interpretar como: para que un cuerpo este en equilibrio, la acumulación de todas las interacciones externas al objeto debe ser igual a cero, es decir, la acción que cada fuerza provoca debe ser contrarrestada por su propia reacción o por la respuesta impuesta por la acción de las otras fuerzas. Para la ecuación (2) sucede lo mismo, la acción de todos los “giros” impuestos al cuerpo debe ser netamente igual a cero. El enunciado de la tercera ley de Newton también juega un papel importante en el estudio de la estática, este nos dice que la acción y la reacción correspondientes a una fuerza son colineales y están dadas en direcciones opuestas, este principio nos permitirá saber más adelante si un elemento está en tensión o en compresión cuando se analicen estructuras en el tema del equilibrio del cuerpo rígido, y además nos permitirá resolver problemas relacionados con el equilibrio de la partícula.

En la siguiente imagen se muestran explícitamente lo enunciado por la ecuación (1). La cubeta mostrada se mantiene en la posición mostrada debido a que la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre esta (W) es contrarrestada por la tensión (T) del cable que sujeta la cubeta, de tal manera que la magnitud de dicha tensión es igual al peso de la cubeta. Si lo anterior no se cumple y la magnitud de la tensión T es mayor que la magnitud de W , entonces el equilibrio no se cumple y por lo tanto la cubeta se movería hacia arriba. Caso contrario a lo que ocurriría si T es menor que el W para el que la cubeta se movería hacia abajo.

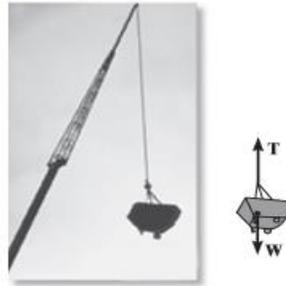


FIGURA 18.- CUBETA EN EQUILIBRIO ESTÁTICO.

$$\sum F = 0 \rightarrow W - T = 0$$

$$W = T \text{ (en equilibrio)}$$

(Si se considera que el sentido de acción positivo de la fuerza es hacia abajo)

Lo anterior se verá con mayor detenimiento en apartados posteriores, cuando se llegue a los temas de equilibrio de la partícula y equilibrio del cuerpo rígido.

4.4.1 Fuerzas

Una fuerza es una “magnitud” física empleada para estudiar las causas y efectos de las interacciones entre distintos cuerpos, sus unidades son el Newton (N), la libra (Lb), el Kilogramo-Fuerza, entre otras, pero las más empleadas son las dos primeras. La fuerza es un concepto vectorial ya que posee las características de un vector (magnitud, dirección y sentido) y se representa mediante \vec{F} . También suelen representarse de la siguiente manera:

$$\vec{F} = F_x i + F_y j \text{ (cuando se trata de una fuerza en el plano)}$$

$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k \text{ (cuando se trata de una fuerza en tres dimensiones)}$$

Donde F_x, F_y, F_z son las componentes en las respectivas dimensiones del vector fuerza, ya sea en el plano (dos dimensiones) o en el espacio (tres dimensiones).

4.4.1.1 Componentes rectangulares o cartesianas

A las componentes F_x, F_y, F_z se les llama componentes rectangulares o cartesianas de la fuerza \vec{F} y representan la descomposición de dicho vector en sus componentes sobre los ejes cartesianos x, y, z lo que permite en algunas ocasiones reducir un problema vectorial a uno con términos escalares.

Para el estudio de las componentes nos centraremos en el caso vectorial más sencillo, es decir, en el caso de un vector en dos dimensiones. Se estudia cómo obtener las componentes F_x, F_y del vector fuerza, para esto considérese la siguiente figura donde se muestra un plano cartesiano, el vector fuerza y la localización de sus componentes.

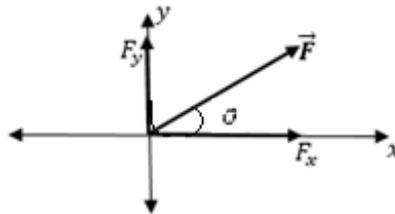


FIGURA 19.- COMPONENTES CARTESIANAS DEL VECTOR FUERZA.

Observe que cada componente no es más que la proyección de la magnitud de la fuerza F sobre cada eje, dichas proyecciones se obtienen mediante la aplicación de triángulos rectángulos donde la magnitud de F será la hipotenusa y las componentes F_x, F_y serán las magnitudes de los catetos de modo que, dichas componentes están dadas por:

$$F_x = F \cos(\theta)$$

$$F_y = F \sin(\theta)$$

Además, obsérvese que, debido a la geometría triangular manejada la magnitud y la dirección (θ) de la fuerza resultante se obtienen a partir de sus componentes cartesianas como sigue:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{Magnitud de la fuerza resultante } F$$

$$\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x} \quad \text{Dirección de la fuerza resultante } \theta$$

La expresión para la fuerza resultante no presenta ninguna dificultad al aplicarla, cosa que no ocurre con la expresión para dirección de dicha resultante, debido a que el ángulo θ no tiene una única referencia de medición, se puede medir tanto respecto al eje x positivo como respecto al negativo. Para evitar confusiones solo se deben ubicar las componentes x, y de la fuerza ya que la resultante estará dentro del cuadrante formado por las componentes. Vale la pena recordar que el ángulo mencionado se mide siempre respecto la horizontal y que este será positivo siempre que se mida en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y será negativo cuando se mida en la misma dirección.

A continuación, se muestran algunos ejemplos que ilustran lo estudiado hasta ahora.

Ejemplo 1.- Obtener las componentes cartesianas de $F = 5 \text{ N}$, $\theta = 30^\circ$ y dibujarlas en el plano x, y .

Solución: se aplican directamente las expresiones para F_x, F_y dadas anteriormente.

$$F_x = 5 \text{ N} \cos(30^\circ) \rightarrow F_x = 4.33 \text{ N}$$

$$F_y = 5 \text{ N} \sin(30^\circ) \rightarrow F_y = 2.5 \text{ N}$$

La representación es la siguiente:

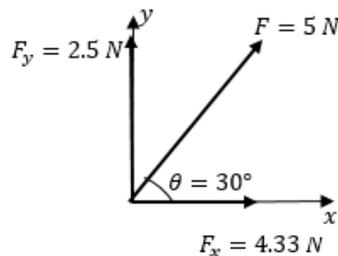


FIGURA 20.- REPRESENTACIÓN DE LAS COMPONENTES DE LA FUERZA F DEL EJEMPLO 1.

Ejemplo 2.- Obtener las componentes cartesianas de $F = 20\text{ N}$, $\theta = 45^\circ$ y dibujarlas en el plano x, y .

Solución: se aplican directamente las expresiones para F_x, F_y dadas anteriormente.

$$F_x = 20\text{ N} \cos(45^\circ) \rightarrow F_x = 14.142\text{ N}$$

$$F_y = 20\text{ N} \sin(45^\circ) \rightarrow F_y = 14.142\text{ N}$$

La representación es la siguiente:

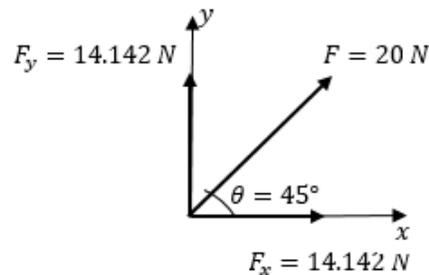


FIGURA 21.- DESCOMPOSICIÓN DE LA FUERZA F EN SUS COMPONENTES RECTANGULARES.

Ejemplo 3.- Dados $F_x = 3\text{ N}$, $F_y = 4\text{ N}$ obtener la magnitud y dirección de la resultante y dibujarla en el plano x, y .

Solución: los parámetros pedidos se obtienen de manera inmediata aplicando las expresiones dadas anteriormente, entonces:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F = \sqrt{3^2 + 4^2} \rightarrow F = 5\text{ N}$$

$$\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\tan(\theta) = \frac{4}{3} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\theta = 53.13^\circ$$

Para obtener la representación gráfica de F nótese que primero que las componentes cartesianas son positivas, por lo tanto, la resultante está contenida en el primer cuadrante.

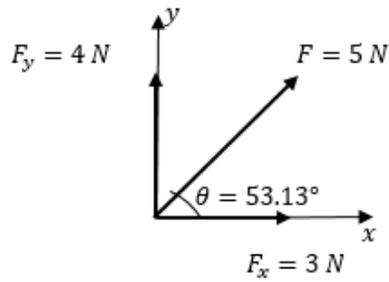


FIGURA 22.- FUERZA RESULTANTE DEL EJEMPLO 3.

Ejemplo 4.- Obtener las componentes cartesianas de $F = 6\text{ N}$, $\theta = 120^\circ$ y dibujarlas en el plano x, y .

Solución: se aplican directamente las expresiones para F_x, F_y dadas anteriormente.

$$F_x = 6\text{ N}\cos(120^\circ) \rightarrow F_x = -3\text{ N}$$

$$F_y = 6\text{ N}\sin(120^\circ) \rightarrow F_y = 5.196\text{ N}$$

La fuerza F se encuentra en el segundo cuadrante debido a que θ es mayor de 90° .

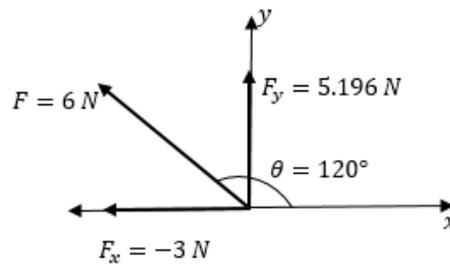


FIGURA 23.- COMPONENTES CARTESIANAS DE LA FUERZA DEL EJEMPLO 4.

4.4.1.1.1 Problemas propuestos.

Determinar las componentes cartesianas de las siguientes fuerzas.

1.- $F = 50 \text{ N}, \theta = 60^\circ$

2.- $F = 120 \text{ N}, \theta = 270^\circ$

3.- $F = 14 \text{ lb}, \theta = 38^\circ$

4.- $F = 8 \text{ lb}, \theta = 180^\circ$

Obtener la magnitud de la fuerza resultante, así como su dirección medida desde el eje x positivo.

1.- $F_x = 13 \text{ N}, F_y = 7 \text{ N}$

2.- $F_x = 60 \text{ lb}, F_y = -40 \text{ lb}$

3.- $F_x = -3.5 \text{ N}, F_y = 2.5 \text{ N}$

4.- $F_x = -38 \text{ lb}, F_y = -20 \text{ lb}$

4.4.2 Sistemas de fuerzas

Se llama sistema de fuerzas a un conjunto de acciones externas que actúan sobre un cuerpo, estas pueden ser coplanares y su análisis implica revisar un punto de concurrencia de donde surjan las fuerzas. Al igual a como ocurre con las componentes con las que se obtiene una fuerza resultante, en el caso de un sistema de fuerzas también se puede obtener una resultante cuya acción sobre el cuerpo es la misma que la suma de las acciones individuales provocadas en el cuerpo por cada una de las fuerzas.

En lo siguiente se mostrarán dos métodos empleados para obtener la resultante de un sistema de fuerzas, el primer método consiste en aplicar triángulos y resolverlos, de aquí la importancia de los temas abarcados en la sección de trigonometría, sin embargo, este método es un poco limitado ya que se aplica de manera sencilla a sistemas de dos fuerzas. El segundo método es el basado en los conceptos abordados en el tema anterior debido a que se manejan las componentes de cada una de las fuerzas implicadas.

4.4.2.1 Método del triángulo

Este método aplica a sistemas de dos fuerzas y consiste en formar un triángulo con estas, el principio que sigue el método se basa en una idea rescatada del principio de la suma de vectores, el cual no se abordara de manera directa en este trabajo. A continuación, se muestra la metodología de solución que plantea el método para lo cual consideres un par de fuerzas concurrentes en un punto y con dirección medida respecto al eje x positivo:

- 1.- Dibuje la con una línea la primera fuerza tomando como origen de coordenadas un punto arbitrario, especificado su magnitud y dirección.
- 2.- A continuación, se dibuja la segunda fuerza tomando como origen de coordenadas el punto final de la primera línea dibujada y de igual manera se especifican su magnitud y dirección.
- 3.- Ahora se unen con una línea recta el origen de la primera recta (primera fuerza) con el punto final de la segunda fuerza. Ésta recta que cierra el triángulo será la resultante del sistema cuya magnitud se desea determinar.
- 4.- Se resuelve el triángulo en base a los datos proporcionados.

En seguida se muestran algunos ejemplos que ilustran la metodología señalada.

Ejemplo 1: Obtener la magnitud y dirección de la resultante del siguiente par de fuerzas $F_1 = 18\text{ N}$, $\theta = 60^\circ$ y $F_2 = 13\text{ N}$, $\alpha = 70^\circ$.

Solución: la aplicación de los pasos 1, 2 y 3 dan como resultado triángulo mostrado en la figura 24, el cual se tiene que resolver.

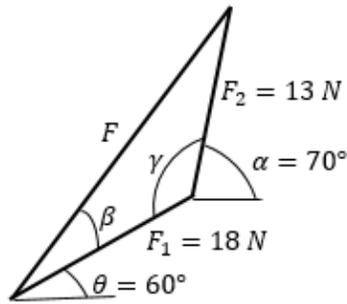


FIGURA 24.- TRIÁNGULO DE FUERZAS DEL EJEMPLO 1.

Para obtener F se aplica la ley de cosenos a con los lados que comprenden el ángulo γ .

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2(F_1 * F_2)\cos(\gamma)$$

Obsérvese que $\gamma = 60^\circ + 20^\circ + 90^\circ = 170^\circ$, por lo que sustituyendo datos en la expresión anterior se tiene:

$$F^2 = 18^2 + 13^2 - 2(18 * 13)\cos(170^\circ)$$

$$F^2 = 324 + 169 - (-460.89)$$

$$F^2 = 953.89 \rightarrow F = 30.885\text{ N}$$

La dirección que tiene la resultante está dada por la suma de los ángulos β y θ , por lo que en seguida se obtiene el valor ángulo β desconocido aplicando la ley de senos como sigue:

$$\frac{F}{\text{sen}(170^\circ)} = \frac{F_2}{\text{sen}\beta}$$

$$\frac{30.885}{\text{sen}(170^\circ)} = \frac{13}{\text{sen}\beta}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{13}{30.885}\text{sen}(170^\circ)$$

O bien

$$\text{sen}\beta = 0.07309 \rightarrow \beta = \arcsen(0.07309)$$

$$\beta = 4.2^\circ$$

Por lo que la dirección de la fuerza F es $\beta + \theta = 4.2^\circ + 60^\circ = 64.2^\circ$

Ejemplo 2: En base a la siguiente figura determine el valor de F_2 y el ángulo θ que forma respecto a la horizontal.

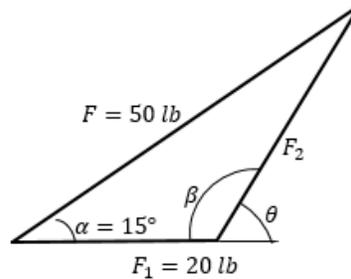


FIGURA 25.- TRIÁNGULO PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA F_2 .

Solución: la aplicación de los pasos 1, 2 y 3 se omite dado que ya se da la el triángulo formado.

Se pide determinar F_2 , para la cual observe que se puede emplear la ley de cosenos para determinar su magnitud de la siguiente manera:

$$F_2^2 = F_1^2 + F^2 - 2(F_1 * F)\cos(\alpha)$$

Sustituyendo datos en la expresión anterior se tiene:

$$F_2^2 = 50^2 + 20^2 - 2(50 * 20)\cos(15^\circ)$$

$$F_2^2 = 2500 + 400 - (1931.85)$$

$$F_2^2 = 968.15 \rightarrow F_2 = 31.12 \text{ lb}$$

La dirección que tiene la fuerza F_2 está dada por la diferencia $\theta = 180^\circ - \beta$, por lo que en seguida se obtiene el valor ángulo β desconocido aplicando la ley de senos como sigue:

$$\frac{F_2}{\text{sen}(15^\circ)} = \frac{F}{\text{sen}\beta}$$

$$\frac{31.12}{\text{sen}(15^\circ)} = \frac{50}{\text{sen}\beta}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{50}{31.12}\text{sen}(15^\circ)$$

O bien

$$\text{sen}\beta = 0.4158 \rightarrow \beta = \text{arcsen}(0.4158)$$

$$\beta = 24.57^\circ$$

Por lo que la dirección de la fuerza F_2 es $\theta = 180^\circ - 24.57^\circ = 155.43^\circ$

Ejemplo 3.- Un barco de carga es remolcado hacia el puerto para el desembarque de la carga que transporta. Determine la tensión T_1 que debe ejercer el remolcador 1 así como su dirección para que el barco se dirija hacia el oeste como se ilustra en la figura 26.

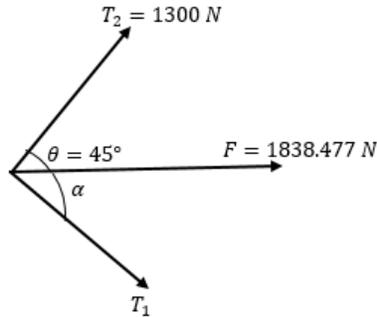


FIGURA 26.- DCL DEL BARCO REMOLCADO.

Solución: la aplicación de los pasos 1, 2 y 3 dan como resultado el siguiente triángulo, el cual se tiene que resolver.

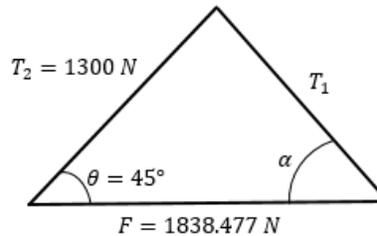


FIGURA 27.- TRIÁNGULO DE LAS FUERZAS EJERCIDAS SOBRE EL BARCO DEL EJEMPLO 3.

Para obtener F se aplica la ley de cosenos con los lados que comprenden el ángulo θ .

$$T_1^2 = F^2 + T_2^2 - 2(F * T_2)\cos(\theta)$$

Sustituyendo datos en la expresión anterior se tiene:

$$T_1^2 = 1838.477^2 + 1300^2 - 2(1838.477 * 1300)\cos(45^\circ)$$

$$T_1^2 = 1838.477^2 + 1300^2 - (3,379,998.84)$$

$$T_1^2 = 16,689,999.84 \rightarrow T_1 = 1300 \text{ N}$$

La dirección que tiene la tensión T_1 está dada por el ángulo α cuyo valor desconocido se obtiene aplicando la ley de senos como sigue:

$$\frac{T_2}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{T_1}{\text{sen}(45^\circ)}$$

$$\frac{1300}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{1300}{\text{sen}(45^\circ)}$$

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(45^\circ)$$

O bien

$$\alpha = \text{arcsen}(\text{sen}(45^\circ)) \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Hasta aquí se han ilustrado ciertos casos de aplicación del método mostrado, los problemas de aplicación son muy variados pero para su solución se sigue la idea desarrollada en los ejemplos. Se recomienda seguir practicando con los siguientes problemas para mejorar su dominio del método.

4.4.2.1.1 Problemas propuestos.

1.- Considere la siguiente figura y determine la resultante de las fuerzas dadas.

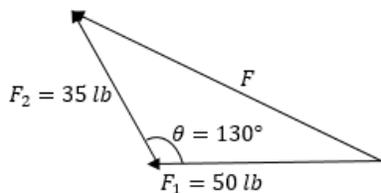


FIGURA 28.- TRIÁNGULO DEL PROBLEMA 1.

2.- Determina la magnitud y dirección de la tensión T_2 del siguiente sistema de fuerzas si la resultante es vertical y tiene magnitud de 50 N.

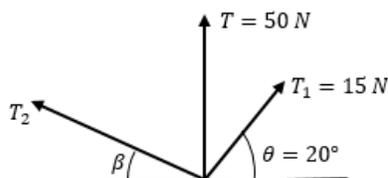


FIGURA 29.- SISTEMAS DE FUERZAS PARA EL PROBLEMA 2.

3.- Determine la magnitud y dirección de la resultante del siguiente sistema de fuerzas, ver figura 30.

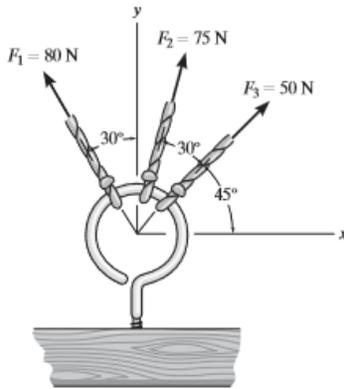


FIGURA 30.- TENSIONES DE LAS CUERDAS SOBRE LA ARGOLLA.

4.- Determine la magnitud y la dirección de la fuerza F_3 mínima tal que la fuerza resultante de las tres fuerzas tenga una magnitud de 20 lb. Ver figura 31.

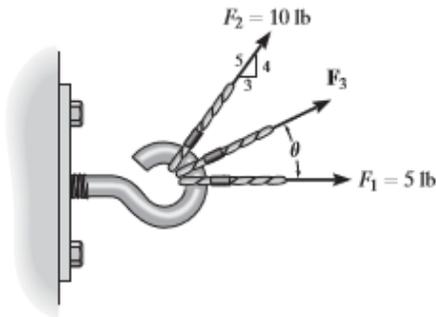


FIGURA 31.- ARGOLLA SOMETIDA A TENSIONES.

5.- Determine el ángulo de diseño θ ($\theta < 90^\circ$) entre las dos barras de modo que la fuerza horizontal de 500 lb tenga una componente de 600 lb dirigida de A hacia C. ¿Cuál es la componente de la fuerza que actúa a lo largo del elemento BA? Véase la siguiente figura.

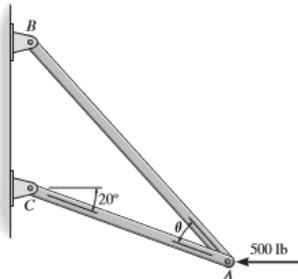


FIGURA 32.- BARRAS DEL PROBLEMA 5.

4.4.2.2 Método de las componentes rectangulares.

Como ya se vio anteriormente, cualquier fuerza en dos o tres dimensiones puede descomponerse en sus componentes rectangulares F_x, F_y en el primer caso y F_x, F_y y F_z en el segundo. Pues bien, el método que se mostrará plantea la idea que la resultante de un sistema de fuerzas puede obtenerse a partir de sus componentes rectangulares. Esto es evidente si se observa detenidamente la siguiente ecuación (plantada en la sección 3.4.1.1).

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Las proyecciones de la fuerza F sobre los ejes x, y resultan en dos nuevas fuerzas cuya acción conjunta es igual a la provocada por F . En la sección 3.4.1.1 solo se trabajó con una única fuerza a la cual se le determinaron sus componentes cartesianas, ahora en esta sección se abordarán sistemas con mayor número de acciones externas, para las que para obtener la fuerza resultante de las acciones conjuntas de cada fuerza se descompondrán en sus proyecciones cartesianas.

La metodología a seguir para obtener la resultante es operacionalmente sencilla y fácil de comprender, solo bástese con tener presentes los siguientes enunciados.

- 1.- Se obtienen las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas.
- 2.- Se determina la suma total de las componentes en cada sentido x y y respetando los signos que cada una tenga, de manera que:

$$\sum F_{ki} = F_{k1} + F_{k2} + \dots + F_{kn}$$

Donde k representa el eje para el cual se hace la suma x o y .

- 3.- A partir de lo anterior se obtiene la magnitud de la fuerza resultante y también su dirección mediante las siguientes expresiones.

$$F = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

Observe que las expresiones anteriores son la generalización de las expresiones mostradas en la sección 3.4.1.1 a un sistema de n fuerzas con n componentes tanto en x como en y .

Se siguen algunos ejemplos de aplicación de esta metodología.

Ejemplo 1.- Obtener la magnitud y dirección de la resultante del siguiente sistema de fuerzas, haga un bosquejo de dicha fuerza.

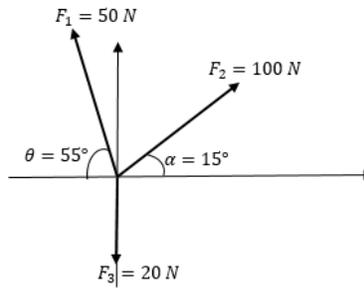


FIGURA 33.- SISTEMA DE FUERZAS DEL EJEMPLO 1.

Solución: en base a la metodología planteada, primero se tiene que descomponer cada fuerza en sus componentes cartesianas para posteriormente obtener la suma total de cada de estas en cada eje coordenado.

Para F_1 :

$$F_{1x} = 50 N \cos(125^\circ) \rightarrow F_{1x} = -28.68 N$$

$$F_{1y} = 50 N \sin(125^\circ) \rightarrow F_{1y} = 40.96 N$$

Para F_2 :

$$F_{2x} = 100 N \cos(15^\circ) \rightarrow F_{2x} = 96.59 N$$

$$F_{2y} = 100 N \sin(15^\circ) \rightarrow F_{2y} = 25.88 N$$

Para F_3 :

$$F_{3x} = 20 N \cos(270^\circ) \rightarrow F_{3x} = 0 N$$

$$F_{3y} = 20 N \sin(270^\circ) \rightarrow F_{3y} = -20 N$$

Se obtiene la suma de las componentes en x, y :

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

O bien

$$\sum F_x = -28.68 + 96.59 + 0 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 40.96 + 25.88 - 20 \text{ N}$$

Lo que da:

$$\sum F_x = 67.91 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 46.84 \text{ N}$$

La magnitud de la resultante está dada por:

$$F = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

Por lo que sustituyendo datos se obtiene:

$$F = \sqrt{(67.91)^2 + (46.84)^2}$$

$$F = 82.5 \text{ N}$$

Ahora se obtiene la dirección de la resultante a partir de la siguiente expresión.

$$\tan(\theta) = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

$$\tan(\theta) = \frac{46.84}{67.91} \rightarrow \tan(\theta) = 0.689$$

Despejando la tangente como tangente inversa del segundo lado de la ecuación y haciendo operaciones se obtiene:

$$\theta = 34.59^\circ$$

Dibujando la resultante:

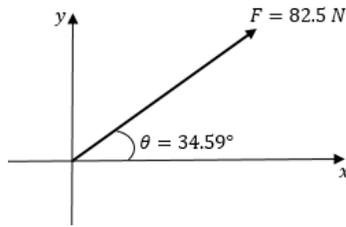


FIGURA 34.- GRAFICA DE LA FUERZA RESULTANTE DEL EJEMPLO 1.

Ejemplo 2.- Obtener la magnitud y dirección de la resultante del siguiente sistema de fuerzas, hacer además un bosquejo de dicha fuerza. Considere la siguiente figura 35.

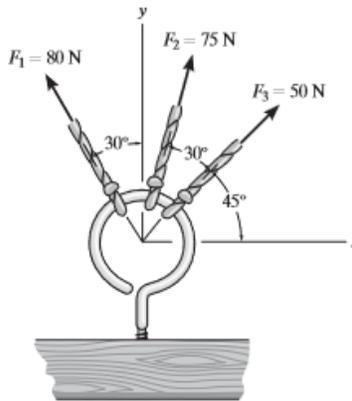


FIGURA 35.- TENSIONES SOBRE LA ARGOLLA, EJEMPLO 2.

Solución: en base a la metodología planteada, primero se tiene que descomponer cada fuerza en sus componentes cartesianas para posteriormente obtener la suma total de cada de estas en cada eje coordenado.

Para F_1 :

$$F_{1x} = -80 \text{ N} \sin(30^\circ) \rightarrow F_{1x} = -40 \text{ N}$$

$$F_{1y} = 80 \text{ N} \cos(30^\circ) \rightarrow F_{1y} = 69.23 \text{ N}$$

Para F_2 :

$$F_{2x} = 75 \text{ N} \cos(75^\circ) \rightarrow F_{2x} = 19.42 \text{ N}$$

$$F_{2y} = 75 \text{ Nsen}(75^\circ) \rightarrow F_{2y} = 72.44 \text{ N}$$

Para F_3 :

$$F_{3x} = 50 \text{ Ncos}(45^\circ) \rightarrow F_{3x} = 35.355 \text{ N}$$

$$F_{3y} = 50 \text{ Nsen}(45^\circ) \rightarrow F_{3y} = 35.355 \text{ N}$$

Se obtiene la suma de las componentes en x, y :

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

O bien

$$\sum F_x = -40 + 19.42 + 35.355 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 69.23 + 72.44 + 35.355 \text{ N}$$

Lo que da:

$$\sum F_x = 14.775 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 177.025 \text{ N}$$

La magnitud de la resultante está dada por:

$$F = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

Por lo que sustituyendo datos se obtiene:

$$F = \sqrt{(14.775)^2 + (177.025)^2}$$

$$F = 177.64 \text{ N}$$

Ahora se obtiene la dirección de la resultante a partir de la siguiente expresión.

$$\tan(\theta) = \frac{\sum F_y}{\sum F_x}$$

$$\tan(\theta) = \frac{177.025}{14.775} \rightarrow \tan(\theta) = 19.98$$

Despejando la tangente como tangente inversa del segundo lado de la ecuación y haciendo operaciones se obtiene:

$$\theta = 85.23^\circ$$

Dibujando la resultante:

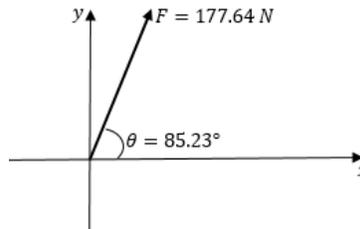


FIGURA 36.- TRAZO DE LA RESULTANTE.

Ejemplo 3.- Obtener la magnitud y dirección de la resultante del siguiente sistema de fuerzas, hacer además un bosquejo de dicha fuerza. Considere los datos mostrados en la figura 37.

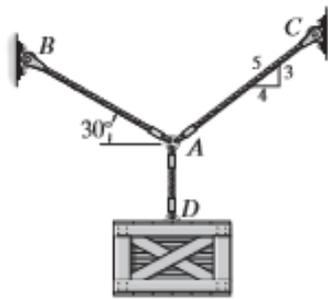


FIGURA 37.- CAJA SUSPENDIDA POR DOS CABLES.

Solución: en base a la metodología planteada, primero se tiene que descomponer cada fuerza en sus componentes cartesianas para posteriormente obtener la suma total de cada de estas en cada eje coordenado.

Para F_1 :

$$T_{ABx} = -300 \text{ lb} \cos(30^\circ) \rightarrow T_{ABx} = -259.8 \text{ lb}$$

$$T_{ABy} = 300 \text{ lb} \sin(30^\circ) \rightarrow T_{ABy} = 150 \text{ lb}$$

Para F_2 :

$$T_{ACx} = 800 \text{ lb} \left(\frac{4}{5}\right) \rightarrow T_{ACx} = 640 \text{ lb}$$

$$T_{ACy} = 800 \text{ lb} \left(\frac{3}{5}\right) \rightarrow T_{ACy} = 480 \text{ lb}$$

Para F_3 :

$$T_{ADx} = 550 \text{ lb} \cos(270^\circ) \rightarrow T_{ADx} = 0 \text{ lb}$$

$$T_{ADy} = 550 \text{ N} \sin(270^\circ) \rightarrow T_{ADy} = -550 \text{ lb}$$

Se obtiene la suma de las componentes en x, y :

$$\sum T_x = T_{1x} + T_{2x} + T_{3x}$$

$$\sum T_y = T_{1y} + T_{2y} + T_{3y}$$

O bien

$$\sum T_x = -259.8 + 640 + 0 \text{ lb}$$

$$\sum T_y = 150 + 480 - 550 \text{ lb}$$

Lo que da:

$$\sum T_x = 380.2 \text{ lb}$$

$$\sum T_y = 80 \text{ lb}$$

La magnitud de la resultante está dada por:

$$F = \sqrt{(\sum T_x)^2 + (\sum T_y)^2}$$

Por lo que sustituyendo datos se obtiene:

$$F = \sqrt{(380.2)^2 + (80)^2}$$

$$F = 388.53 \text{ lb}$$

Ahora se obtiene la dirección de la resultante a partir de la siguiente expresión.

$$\tan(\theta) = \frac{\sum T_y}{\sum T_x}$$

$$\tan(\theta) = \frac{80}{380.2} \rightarrow \tan(\theta) = 0.21$$

Despejando la tangente como tangente inversa del segundo lado de la ecuación y haciendo operaciones se obtiene:

$$\theta = 11.88^\circ$$

Dibujando la resultante:

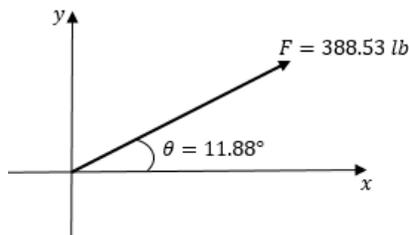


FIGURA 38.- TRAZO DE LA FUERZA RESULTANTE.

4.4.2.2.1 Problemas propuestos.

1.- Determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante del siguiente conjunto de fuerzas, donde $T_{AB} = T_{BC} = 20\text{ N}$, $T_{BD} = 15\text{ N}$. Considere que el punto B se encuentra justo a 0.2 m del punto A. vea la figura 39.

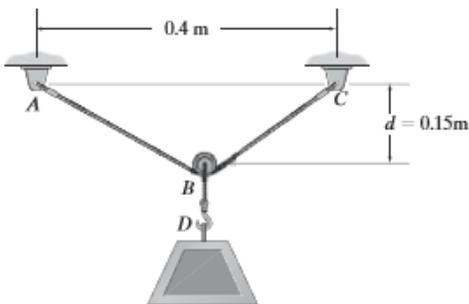


FIGURA 39.- BLOQUE EN EQUILIBRIO.

2.- Determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante del siguiente conjunto de fuerzas, donde $T_{BC} = 110 \text{ kN}$, $T_{BD} = 70 \text{ kN}$. Ver la figura 40.

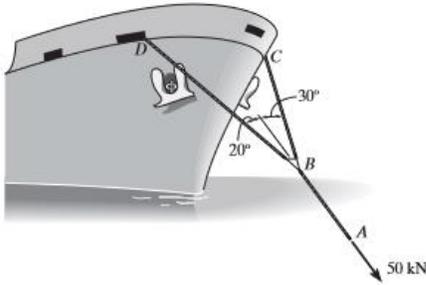


FIGURA 40.- BARCO REMOLCADO A VELOCIDAD CONSTANTE.

3.- Determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante del siguiente conjunto de fuerzas, donde $T_{AC} = k_{AC} * longitud \text{ de } AC$, $T_{AB} = k_{AB} * longitud \text{ de } AB$. Suponga el peso del bloque de 100 N. ver figura 41.

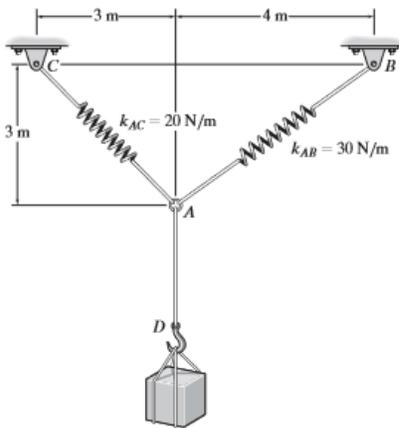


FIGURA 41.- EQUILIBRIO DE UN BLOQUE MEDIANTE RESORTES.

4.- Determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante del siguiente conjunto de fuerzas, donde $T_{AC} = 30 \text{ N}$, $T_{AB} = 50 \text{ N}$, $T_{AD} = 20 \text{ N}$ y $F = 100 \text{ N}$. Considere $d = 2 \text{ m}$.

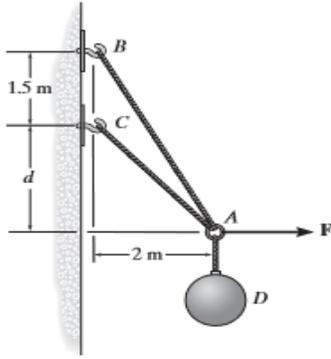


FIGURA 42.- SISTEMA DE FUERZAS DEL PROBLEMA 4.

5.- La placa de refuerzo está sometida a las fuerzas de tres elementos. Determine la fuerza de tensión resultante, así como su dirección, del sistema de fuerzas. Las fuerzas son concurrentes en el punto O. Considere $F = 8\text{ kN}$, $T = 10\text{ kN}$, $\theta = 60^\circ$.

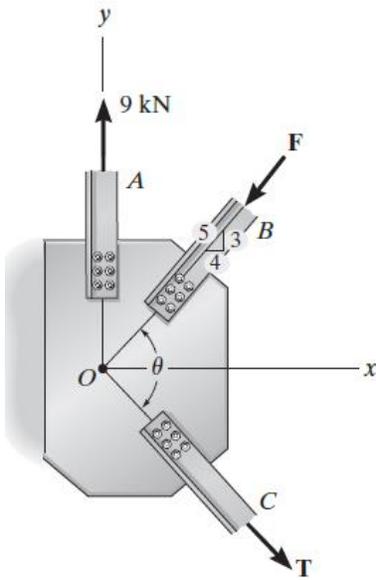


FIGURA 43.- SISTEMA DE FUERZAS DEL PROBLEMA 5.

4.4.3 Equilibrio de la partícula

Hasta ahora se han estudiado las fuerzas y sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo para poder determinar la acción resultante que generan en conjunto cada una de las acciones individuales de las fuerzas. En lo siguiente se aplicarán los principios vistos anteriormente prestando especial atención a las condiciones de equilibrio ya que se estudiarán problemas en los que se obtiene el equilibrio de la partícula. Llámese partícula, en este contexto, a cuerpos idealizados para facilitar cálculos debido a que algunas propiedades (por ejemplo, la forma) que poseen estos resultan irrelevantes en este estudio, por lo cual se llevan a la omisión sin afectar de algún modo el comportamiento físico del objeto o sistema. El objeto entonces se considera como un objeto puntual (un punto en el plano, localizado justamente en el centro de masa del cuerpo original) al concurren todas las fuerzas externas que actúan sobre él.

El equilibrio de la partícula se obtiene cuando la acción neta, del sistema de fuerzas que tienen acción sobre esta, es igual a cero de manera que el comportamiento del objeto idealizado no evoluciona con el tiempo debido a la acción de las fuerzas. Lo que dice la segunda ley de Newton para el equilibrio se refleja en la siguiente expresión.

$$\sum F_k = 0$$

Donde k representa la variedad que se maneje (componentes de una fuerza en dos o tres dimensiones).

En los problemas de equilibrio para una partícula lo que se busca es determinar las magnitudes de las fuerzas que interactúan para lograr el equilibrio, y para ello se emplean algunas de las ideas vistas en los temas anteriores. Pasemos directamente a los ejemplos para ir profundizando en el tema.

Ejemplo 1.- La caja mostrada en la figura tiene un peso de 550 lb. Determine la fuerza en cada cable de soporte para que el sistema esté en equilibrio. Vea la figura 44.

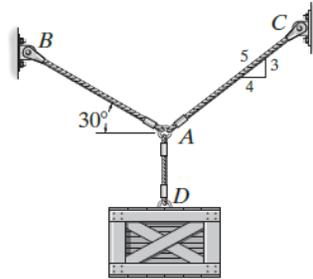


FIGURA 44.- CAJA EN EQUILIBRIO.

Solución: se traza primeramente un diagrama que permita visualizar las fuerzas actuantes en el sistema. Se supone que todas esas fuerzas tienen su origen el punto A. La tensión del elemento que va de i-j se denota como T_{ij} .

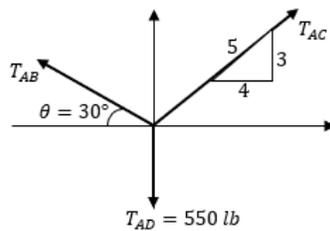


FIGURA 45.- DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL PUNTO "A".

Ahora se aplican las condiciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

De manera que:

$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \sum F_x = 0; & \quad T_{AC} \left(\frac{4}{5}\right) - T_{AB} \cos 30^\circ = 0 && \text{En cada ecuación se} \\
 +\uparrow \sum F_y = 0; & \quad T_{AC} \left(\frac{3}{5}\right) + T_{AB} \sin 30^\circ - 550 = 0 && \text{emplean las} \\
 & && \text{componentes de} \\
 & && \text{cada fuerza.}
 \end{aligned}$$

Despejando T_{AC} de la primera ecuación resulta:

$$T_{AC} = \left(\frac{5}{4}\right) \cos 30^\circ T_{AB}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cos 30^\circ T_{AB} * \left(\frac{3}{5}\right) + T_{AB} \operatorname{sen} 30^\circ - 550 = 0$$

$$T_{AB} \left(\left(\frac{3}{4}\right) \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \right) = 550$$

$$T_{AB} (1.1496) = 550$$

$$T_{AB} = 478.427 \text{ lb}$$

$$\therefore T_{AC} = \left(\frac{5}{4}\right) \cos 30^\circ T_{AB} \rightarrow T_{AC} = 517.912 \text{ lb}$$

Ejemplo 2.- Si en la figura 46 los elementos AC y AB pueden soportar una tensión máxima de 300 lb y 250 lb, respectivamente, determine el peso máximo de la caja que pueden sostener con seguridad.

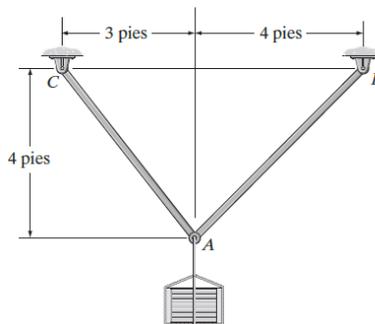


FIGURA 46.- EQUILIBRIO DE UNA CAJA MEDIANTE BARRAS.

Solución: se traza un diagrama que permita visualizar las fuerzas actuantes en el sistema. Se supone que todas esas fuerzas tienen su origen el punto A.

Ahora se aplican las condiciones de equilibrio solo para las componentes en y debido a que el peso W se encuentra sobre ese eje: $\sum F_y = 0$.

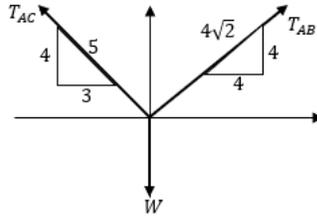


FIGURA 47.- DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL PUNTO "A".

De manera que:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; T_{AB} \left(\frac{4}{4\sqrt{2}} \right) + T_{AC} \left(\frac{4}{5} \right) - W = 0$$

Sustituyendo datos resulta:

$$250 \left(\frac{4}{4\sqrt{2}} \right) + 300 \left(\frac{4}{5} \right) = W$$

$$176.7767 + 240 = W$$

$$\therefore W = 416.7767 \text{ lb}$$

El peso que se puede sostener con los cables es de $W = 416 \text{ lb}$.

Ejemplo 3.- La placa de refuerzo, mostrada en la figura 48, está sometida a las fuerzas de tres elementos. Determine la tensión del elemento OC, así como su el ángulo θ para que se logre le equilibrio. Las fuerzas son concurrentes en el punto O. Considere $F = 8 \text{ kN}$.

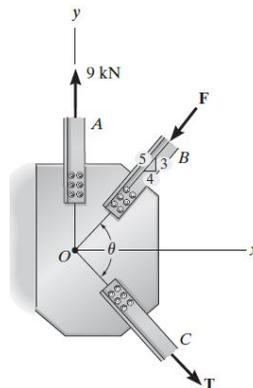


FIGURA 48.- PLACA DEL EJEMPLO 3.

Solución: se traza un diagrama que permita visualizar las fuerzas actuantes en el sistema.

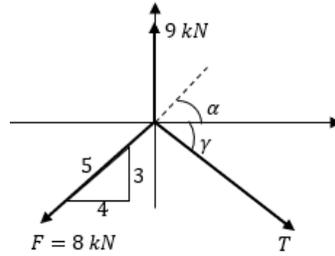


FIGURA 49.- DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LAS FUERZAS CONCURRENTES EN O.

Ahora se aplican las condiciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

De manera que:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -F\left(\frac{4}{5}\right) + T\cos(\gamma) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; -F\left(\frac{3}{5}\right) - T\sen(\gamma) + 9 = 0$$

En cada ecuación se emplean las componentes de cada fuerza.

Sustituyendo datos resulta:

$$-8\left(\frac{4}{5}\right) + T\cos(\gamma) = 0$$

$$T\cos(\gamma) = \frac{32}{5} \dots (1)$$

Y

$$-8\left(\frac{3}{5}\right) - T\sen(\gamma) + 9 = 0$$

$$T\sen(\gamma) = -\frac{21}{5} \dots (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) entre la ec.(1)

$$\frac{T \operatorname{sen}(\gamma)}{T \operatorname{cos}(\gamma)} = -\frac{\frac{21}{5}}{\frac{32}{5}}$$

$$\tan(\gamma) = -\frac{21}{32} \rightarrow \gamma = -33.27^\circ$$

Por lo que el valor de la tensión T se obtiene tomando la ecuación (1) y sustituyendo el valor del ángulo encontrado:

$$T \operatorname{cos}(-33.27^\circ) = \frac{32}{5} \rightarrow T = 7.655 \text{ kN}$$

$$T_{AB} = 478.427 \text{ lb}$$

Ahora bien, observe que la dirección θ pedida está dada por $\theta = \alpha + \gamma$. Entonces lo que sigue es determinar el valor de α , para el que se tiene:

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = 36.86^\circ$$

Entonces $\theta = 36.86^\circ + 33.27^\circ \rightarrow \theta = 70.13^\circ$ que es lo que se quería determinar.

Practique lo aprendido con los siguientes ejercicios.

4.4.3.1 Problemas propuestos.

1.- Determine la tensión necesaria en los cables AB, BC y CD, mostrados en la figura 50, para sostener los semáforos de 10 kg y 15 kg en B y C, respectivamente. Además, determine el ángulo θ .

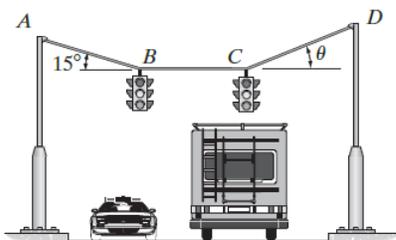


FIGURA 50.- SEMÁFOROS DEL PROBLEMA 1

2.- Si la masa del cilindro C es de 40 kg, determine la masa del cilindro A a fin de sostener el ensamble en la posición mostrada.

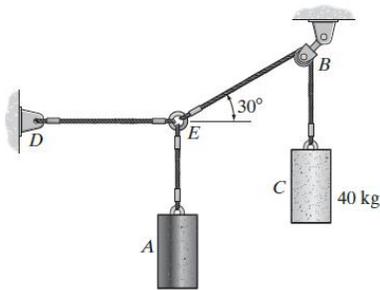


FIGURA 51.- SISTEMA DE EQUILIBRIO DE DOS BLOQUES.

3.- Si el bloque B pesa 200 lb y el bloque C pesa 100 lb, determine el peso requerido del bloque D y el ángulo θ para lograr el equilibrio.

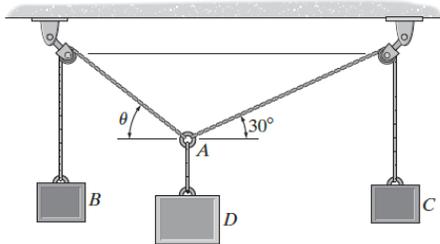


FIGURA 52.- EQUILIBRIO DE TRES CAJAS B, C, D.

4.- Determine el alargamiento en los resortes AC y AB cuando el bloque de 2 kg está en equilibrio. Los resortes se muestran en la posición de equilibrio.

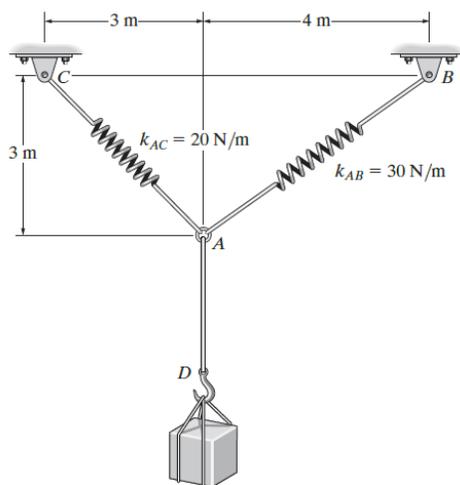


FIGURA 53.- BLOQUE EN EQUILIBRIO MEDIANTE RESORTES.

5.- Determine la tensión desarrollada en cada cable usado para sostener el candelabro de 50 kg.

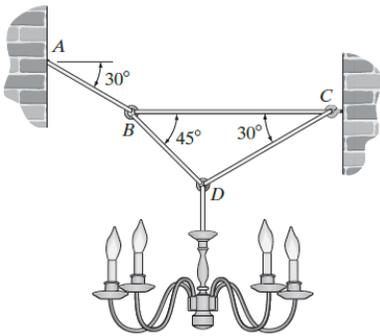


FIGURA 54.- SISTEMA DE EQUILIBRIO DE UN CANDELABRO.

6.- Los resortes en el ensamble de cuerdas están originalmente estirados 1 pie cuando $\theta = 0^\circ$. Determine la fuerza vertical F que debe aplicarse para que $\theta = 30^\circ$. Ver figura 55.

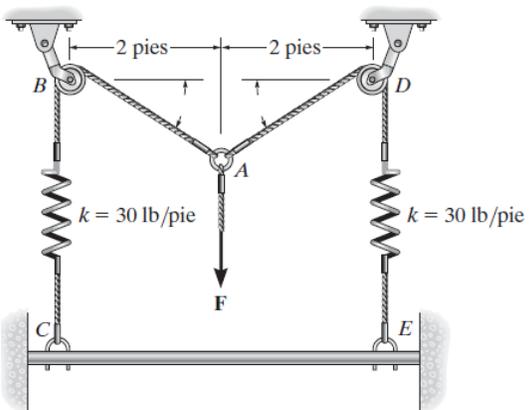


FIGURA 55.- EQUILIBRIO DE UNA BARRA MEDIANTE RESORTES.

Los problemas abordados anteriormente aplican la idea de equilibrio en un análisis simplificado de dos dimensiones, sin embargo, los problemas con los que se encuentra generalmente en la práctica requieren de saber el análisis en tres dimensiones de los sistemas de equilibrio. Es por esto que a continuación se abordan algunos ejemplos de dicho análisis en tres dimensiones. Nótese que el análisis aplicado es el mismo que el abordado anteriormente solo que ahora se introduce una variable extra.

Ejemplo 1.- Determine la magnitud de las fuerzas F_1 , F_2 , F_3 , de manera que la partícula se mantenga en equilibrio.

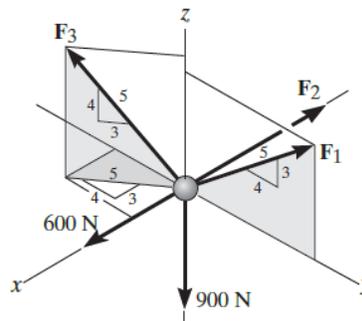


FIGURA 56.- SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE FUERZAS DEL EJEMPLO 1.

Solución: se obtiene la forma vectorial de cada fuerza proponiendo una magnitud F_i para cada una de estas, y se expresan sus componentes (x,y,z) en función de dicha magnitud tal y como se muestra a continuación.

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \left\langle 0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \langle -1, 0, 0 \rangle$$

$$\mathbf{F}_3 = F_3 \left\langle \frac{9}{25}, -\frac{12}{25}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

$$\mathbf{F}_i = 600 \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\mathbf{F}_K = 900 \langle 0, 0, -1 \rangle$$

Ahora se aplican las condiciones de equilibrio en las tres componentes de cada fuerza.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -F_2 + \left(\frac{9}{25}\right)F_3 + 600 = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_y = 0; \left(\frac{4}{5}\right)F_1 - \left(\frac{12}{25}\right)F_3 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_z = 0; \left(\frac{3}{5}\right)F_1 + \left(\frac{4}{5}\right)F_3 - 900 = 0$$

De las que extrae el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-F_2 + \left(\frac{9}{25}\right)F_3 = -600$$

$$4F_1 - \left(\frac{12}{5}\right)F_3 = 0$$

$$3F_1 + 4F_3 = 900$$

El sistema de ecuaciones se puede resolver por medio del método de los determinantes estudiado en la sección de algebra. La aplicación del método se omite pero continuación se muestran las soluciones que este arroja (se recomienda comprobarlo).

$$F_1 = 421.875 \text{ N}$$

$$F_2 = 853.125 \text{ N}$$

$$F_3 = 703.125 \text{ N}$$

Las respuestas anteriores son las magnitudes que los elementos experimentan para que el sistema esté en equilibrio.

Ejemplo 2.- Determinar las tensiones de los cables para que el sistema se encuentre en equilibrio.

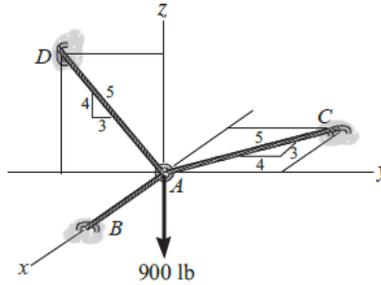


FIGURA 57.- SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE FUERZAS DEL EJEMPLO 2.

Solución: se obtiene la forma vectorial de cada una de las fuerzas:

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC} \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right\rangle$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB} \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\mathbf{T}_{AD} = T_{AD} \left\langle 0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

$$\mathbf{F}_K = 900 \langle 0, 0, -1 \rangle$$

Ahora se aplican las condiciones de equilibrio en las tres componentes de cada fuerza.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \left(-\frac{3}{5}\right)T_{AC} + T_{AB} = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_y = 0; \left(\frac{4}{5}\right)T_{AC} + \left(-\frac{3}{5}\right)T_{AD} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_z = 0; \left(\frac{4}{5}\right)T_{AD} - 900 = 0$$

De las que extrae el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)T_{AC} + T_{AB} = 0$$

$$4T_{AC} - 3T_{AD} = 0$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)T_{AD} - 900 = 0$$

El valor de T_{AD} se obtiene de manera inmediata:

$$T_{AD} = \left(\frac{5}{4}\right) * 900 \rightarrow T_{AD} = 1125 \text{ lb}$$

De igual manera para T_{AC} y T_{AB} :

$$4T_{AC} - 3(1125) = 0 \rightarrow T_{AC} = 843.75 \text{ lb}$$

Y

$$\left(-\frac{3}{5}\right)(843.75) + T_{AB} = 0 \rightarrow T_{AB} = 506.25 \text{ lb}$$

En resumen:

$$T_{AD} = 1125 \text{ lb}$$

$$T_{AC} = 843.75 \text{ lb}$$

$$T_{AB} = 506.25 \text{ lb}$$

Las respuestas anteriores son las magnitudes que los elementos experimentan para que el sistema esté en equilibrio.

Ejemplo 3.- Determine la tensión desarrollada por los cables para que el sistema se encuentre en equilibrio.

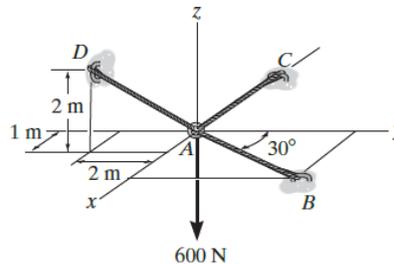


FIGURA 58.- SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE FUERZAS DEL EJEMPLO 3.

Solución: se obtiene la forma vectorial de cada una de las fuerzas:

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC} \langle -1, 0, 0 \rangle$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\rangle$$

$$\mathbf{T}_{AD} = T_{AD} \left\langle \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$$

$$\mathbf{F}_K = 600 \langle 0, 0, -1 \rangle$$

Ahora se aplican las condiciones de equilibrio en las tres componentes de cada fuerza.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -T_{AC} + \frac{1}{2}T_{AB} + \frac{1}{3}T_{AD} = 0$$

$$+\rightarrow \sum F_y = 0; \frac{\sqrt{3}}{2}T_{AB} + \left(-\frac{2}{3}\right)T_{AD} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_z = 0; \left(\frac{2}{3}\right)T_{AD} - 600 = 0$$

De las que extrae el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-T_{AC} + \frac{1}{2}T_{AB} + \frac{1}{3}T_{AD} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_{AB} + \left(-\frac{2}{3}\right)T_{AD} = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)T_{AD} - 600 = 0$$

El valor de T_{AD} se obtiene de manera inmediata:

$$T_{AD} = \left(\frac{3}{2}\right) * 600 \rightarrow T_{AD} = 900 \text{ N}$$

De igual manera para T_{AC} y T_{AB} :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_{AB} + \left(-\frac{2}{3}\right) * 900 = 0 \rightarrow T_{AB} = 692.82 \text{ N}$$

Y

$$-T_{AC} + \frac{1}{2}(692.82) + \frac{1}{3}(900) = 0 \rightarrow T_{AC} = 646.41 \text{ N}$$

En resumen:

$$T_{AD} = 900 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 646.41 \text{ N}$$

$$T_{AB} = 692.82 \text{ N}$$

Las respuestas anteriores son las magnitudes que los elementos experimentan para que el sistema esté en equilibrio.

4.4.3.2 Problemas propuestos.

1.- Determine la tensión desarrollada en los cables AB, AC y AD para las que el sistema está en equilibrio. Ver figura 59.

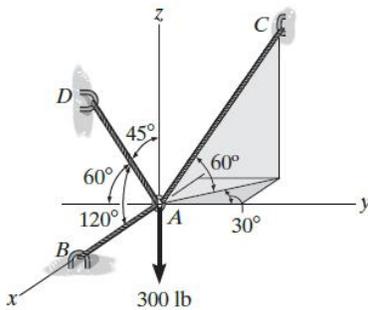


FIGURA 59.- SISTEMA DE FUERZAS DEL PROBLEMA 1.

2.- La caja mostrada en la figura 60 tiene un peso de 150 lb y se sostiene mediante los cables AB, AC y AD. Determine la tensión en estos cables.

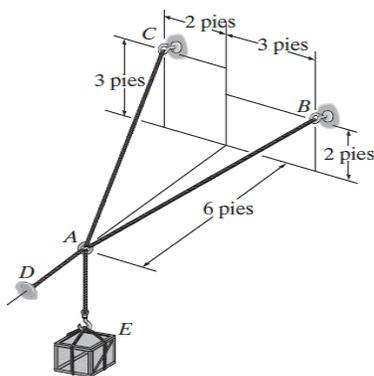


FIGURA 60.- CAJA SUSPENDIDA DEL PROBLEMA 2

3.- Determine la tensión desarrollada en los cables AB, AC y AD que es necesaria para lograr el equilibrio del cilindro de 75 kg.

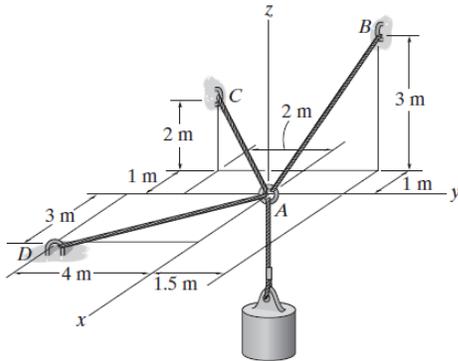


FIGURA 61.- SISTEMA DE FUERZAS PROBLEMAS 3 Y 4.

4.- Si cada uno de los cables puede soportar una tensión máxima de 1000 N, determine la masa máxima del cilindro para que se pueda mantener el equilibrio. Vea la figura anterior.

5.- La grúa de brazos de corte se utiliza para llevarla red de pescado de 200 kg hacia el muelle. Determine la fuerza de compresión a lo largo de cada uno de los brazos AB y CB, y la tensión en el cable DB del cabestrante. Suponga que la fuerza presente en cada brazo actúa a lo largo de su eje.

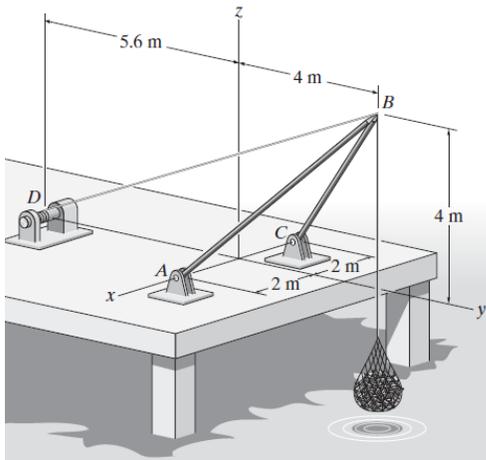


FIGURA 62.- SISTEMA DE FUERZAS DE LA GRÚA DEL PROBLEMA 5.

problemas reto

1.- Cada uno de los tres bloques exteriores tiene una masa de 2 kg, y el bloque central E tiene una masa de 3 kg. Determine la flecha necesaria para el equilibrio del sistema. Ver figura 63.

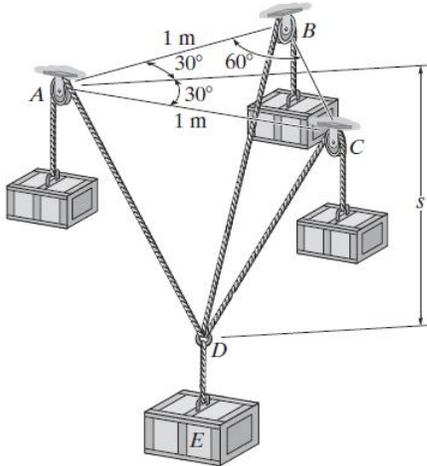


FIGURA 63.- SISTEMA DE CAJAS SUSPENDIDAS.

2.- El cazo tiene un peso de 80 lb y se eleva mediante el uso de tres resortes, cada uno de los cuales tiene una longitud no alargada de $l_0 = 1.5$ pies y una rigidez $k = 50$ lb/pie. Determine la distancia vertical d desde el aro hasta el punto A necesaria para lograr el equilibrio.

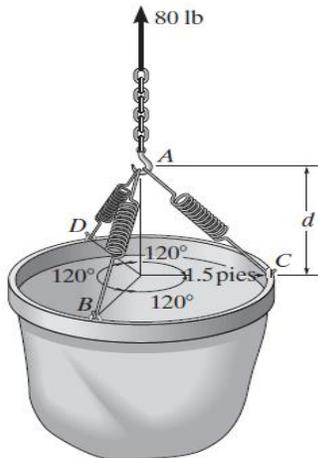


FIGURA 64.- CAZO EN EQUILIBRIO DEL PROBLEMA 2.

3.- Los extremos de los tres cables están unidos a un anillo localizado en A, al borde de una placa uniforme de 150 kg. Determine la tensión necesaria en cada uno de los tres cables para lograr el equilibrio.

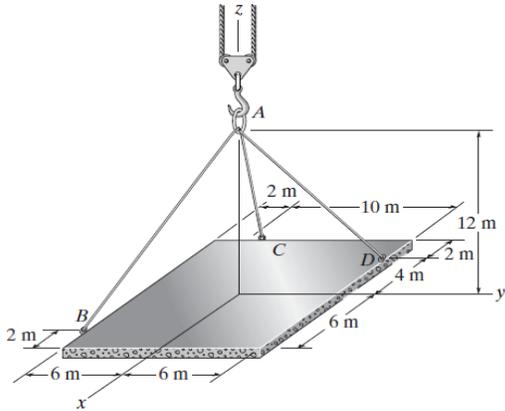


FIGURA 65.- PLACA DEL PROBLEMA 3.

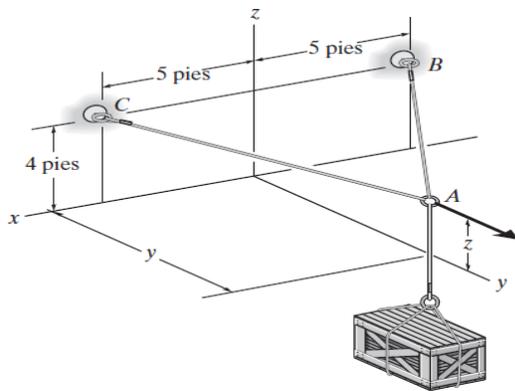


FIGURA 66.- SISTEMA DE FUERZAS DEL PROBLEMA 4.

4.- Si la tensión máxima permitida en los cables AB y AC es de 500 lb, determine la altura máxima z a la cual se puede elevar la caja de 200 lb. ¿Cuál es la fuerza horizontal F que debe aplicarse? Considere $y = 8$ pies.

4.4.4 Equilibrio del cuerpo rígido

En la presente sección se amplía el concepto de equilibrio de un cuerpo visto como partícula, a un sistema más complejo en el que la simplificación que se tomó para la sección anterior no es posible de hacer ya que no es correcto, para su análisis, omitir ciertas propiedades que juegan un papel determinante en el comportamiento de los objetos de estudio, de tal manera que el sistema a analizar no puede verse como una partícula puntual. Se entenderá por cuerpo rígido a todos aquellos sistemas inertes cuyo comportamiento mecánico interesa analizar. Generalmente se trata de estructuras compuestas en las que intervienen varios elementos con funciones distintas pero cuyas acciones individuales llevan al correcto funcionamiento de la estructura.

De igual manera que en las secciones anteriores las acciones son las fuerzas externas que intervienen en el sistema, aunque en este caso se impondrán restricciones que ayudaran a obtener el equilibrio del sistema. En ingeniería civil, se refiere a sistemas como estructuras y armaduras de acero generalmente con las que es posible sostener una estructura extra, por ejemplo, es muy común emplear armaduras especialmente diseñadas para soportar la carpeta rodante (por la que circulan los automóviles) de un puente.



FIGURA 67.- ESTRUCTURA TRADICIONAL DE UN PUENTE.

Para el análisis empleado en esta sección es necesario tener presentes conceptos referentes a los sistemas a los que estamos haciendo mención: las armaduras.

Las armaduras son un conjunto de elementos de sección definida, los cuales son unidos entre sí mediante articulaciones, remaches, placas o pernos, entre otros, cuyo funcionamiento en conjunto da como resultado un sistema con comportamiento mecánico

cuyas aplicaciones en la ingeniería civil son variadas. En el análisis de este tipo de sistemas resulta importante saber el comportamiento de cada elemento y las acciones que aporta al sistema total, la medición del primer parámetro se da mediante la determinación de la fuerza o tensión a la que está sujeto para posteriormente determinar si el elemento se encuentra en tensión o en compresión bajo la acción de esa fuerza. Una fuerza de tensión indica que el elemento está siendo “estirado”, y una fuerza de compresión indica que este está siendo comprimido desde sus extremos. Dichas acciones convergen entre sí, bajo ciertas configuraciones, en puntos llamados nodos que son los lugares importantes para el análisis de equilibrio. El análisis de estático de las armaduras se realiza en los nodos donde se establecen las condiciones de equilibrio ya estudiadas, sin embargo, como se mencionó anteriormente cada tipo de sistema se somete a restricciones externas que ayudan a equilibrar las acciones de fuerzas externas aplicadas simultáneamente a las anteriores lo cual necesariamente implica tener una condición extra para el equilibrio, a saber, el equilibrio en los giros de la estructura el cual plantea que la suma de los momentos provocados por la acción de las fuerzas y restricciones externas debe ser igual a cero en cualquiera de los puntos de apoyo de la estructura. Hágase un paréntesis para definir el concepto de momento que nos será de mucha utilidad en esta sección.

El momento o torque sobre un punto de apoyo se puede entender fácilmente como la acción causada por una fuerza que actúa a una cierta distancia de dicho punto generando una tendencia a girar. Un ejemplo claro de aplicación de este concepto lo puede usted observar cuando se sube a su bicicleta, en la que para iniciar su movimiento es necesario que recargue su peso sobre el pedal para generar un giro de este alrededor del eje donde están apoyados los platos o estrellas. En este caso la fuerza que genera el giro es su peso y la distancia a la que actúa, medida desde el eje de giro, es igual a la longitud del pedal. Observe que si usted aplica la fuerza de su peso de manera perpendicular al pedal es más fácil generar un giro y en este caso, la magnitud de dicho giro es la máxima que se puede obtener, dicha magnitud se calcula con la siguiente expresión:

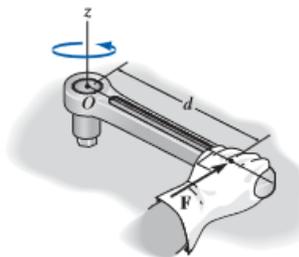


FIGURA 68.- REPRESENTACIÓN DEL GIRO PROVOCADO POR UNA FUERZA.

$$M = F * D$$

Si la fuerza F es perpendicular a la distancia D (brazo de palanca).

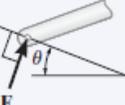
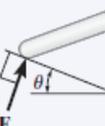
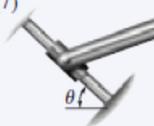
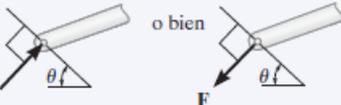
La fuerza F también puede ser la proyección o componente perpendicular al brazo de palanca de una cierta acción aplicada de manera oblicua a dicho brazo. La aplicación de este concepto se muestra ya en los ejemplos de análisis de equilibrio de las armaduras.

También ya se mencionó que la armadura se restringe a condiciones externas que son necesarias para que el sistema físico se mantenga “por sí solo”. En la figura 67 se observa una armadura que sostiene un puente, note que dicha armadura se apoya sobre dos soportes laterales de manera que se impiden los desplazamientos laterales y el desplazamiento vertical con lo cual se mantiene la estructura estática. Los soportes deben ser diseñados para asegurar que las fuerzas provocadas por los factores climáticos (como el aire, la lluvia o incluso un sismo) o por el tránsito de los vehículos no generen movimiento de la estructura.

Existe una gran variedad de apoyos o soportes para estructura según sea el uso que se les vaya a dar, así pues, en algunos casos conviene que estas se puedan trasladar horizontalmente en una o dos direcciones, o que se mantengan restringidas a los desplazamientos, pero no al giro.

Cuando se habla de las restricciones tanto a los desplazamientos como al giro se está haciendo uso de la tercera ley de Newton, la ley de acción y reacción la cual dice que a toda acción corresponde una reacción de igual magnitud, pero en dirección contraria, actuando sobre la misma línea de acción. Un ejemplo claro lo puede observar cuando comprime un resorte el cual se opondrá a ser comprimido hasta llegar al punto de equilibrio en el que la fuerza aplicada al comprimirlo se iguala con la fuerza de reacción que ejerce el resorte.

A continuación se presenta una tabla en la que se muestran algunos de los soportes de uso común en la ingeniería civil, así como las restricciones que presenta cada uno.

Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa alejándose del elemento en la dirección del cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>eslabón sin peso</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón.</p>
<p>(3)</p>  <p>rodillo</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(4)</p>  <p>rodillo o pasador confinado en una ranura lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.</p>
<p>(5)</p>  <p>soporte mecedora</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(6)</p>  <p>superficie de contacto lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(7)</p>  <p>elemento conectado mediante un pasador a un collar sobre una barra lisa</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.</p>

(Continua)

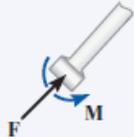
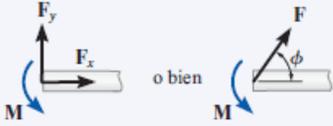
Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(8)</p>  <p>pasador liso o articulación lisa</p>	 <p>o bien</p>	<p>Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza, o la magnitud y la dirección ϕ de la fuerza resultante. Observe que ϕ y θ no son necesariamente iguales [no suelen serlo, a menos que la barra mostrada sea un eslabón como en (2)].</p>
<p>(9)</p>  <p>elemento con conexión fija a un collar sobre una barra lisa</p>		<p>Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.</p>
<p>(10)</p>  <p>soporte fijo</p>	 <p>o bien</p>	<p>Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección ϕ de la fuerza resultante.</p>

FIGURA 69.- TIPOS DE APOYOS Y SUS REACCIONES (HIBBELER, 2010).

Al revisar detalladamente el comportamiento de cada tipo de apoyo para saber las restricciones que presentan, resulta evidente que dichas reacciones de restricción son las que surgen al limitar la estructura para que no responda a cierta acción, por ejemplo, en el caso (8) se observa que el apoyo restringe la estructura a que se desplace horizontal y verticalmente por lo que entonces tendrá dos reacciones, una horizontal F_x y otra vertical F_y las cuales impedirán el movimiento de la estructura sobre los ejes horizontal y vertical, pero esta podrá girar libremente respecto al apoyo, ya que este no restringe el giro. A este tipo de apoyos se les denomina articulaciones. Ahora bien, si se revisa el caso (10) se observa que el empotramiento (como usualmente se le llama) además de restringir los desplazamientos horizontales y verticales, también impide que el elemento gire respecto al punto de apoyo, de ahí que surja un elemento de giro o momento que se opone al giro de la estructura.

Para el análisis de equilibrio que se, resulta importante conocer el comportamiento de los apoyos en cuanto a las reacciones que presentan para poder considerarlas en los diagramas de fuerzas que se aplicaran a cada punto de análisis o nodo. La metodología de solución para problemas de equilibrio se muestra para dos métodos de análisis.

4.4.4.1 Método de los nodos

Este método consiste en analizar las fuerzas que convergen hacia un punto o nodo para establecer las condiciones de equilibrio y asegurar el comportamiento estático de dicho nodo. El método permite conocer las reacciones internas a las que cada elemento de la armadura está sujeto para que el sistema en general se encuentre en equilibrio. La metodología a seguir es la siguiente:

- 1.- Se calculan las reacciones en los apoyos debidas a las sollicitaciones externas de carga que tenga el sistema.
- 2.- Se elige un nodo de tal manera que el número de fuerzas desconocidas sea igual al número de ecuaciones disponibles para las condiciones de equilibrio.
- 3.- Se plantean y resuelven las ecuaciones, además se establece si el elemento se encuentra en tensión o en compresión en función del valor obtenido para las fuerzas. Se dice que un elemento está en tensión si la fuerza que experimenta dicho elemento es positiva, y si es negativa el elemento se encuentra en compresión.
- 4.- Se efectúan los pasos anteriores para cada uno de los nodos de la armadura.

A continuación, se muestran algunos ejemplos donde se desarrolla el método.

Ejemplo 1.- Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de la figura 70. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

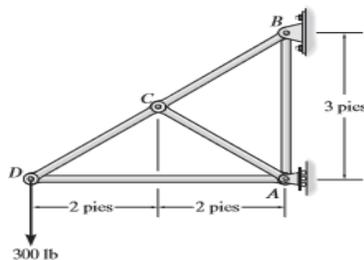


FIGURA 70.- ESTRUCTURA EN EQUILIBRIO.

Solución: se observa que no es necesario determinar inmediatamente las reacciones, por lo que se iniciara el análisis de equilibrio en el nodo B. El diagrama del cuerpo libre se observa en la figura 71.

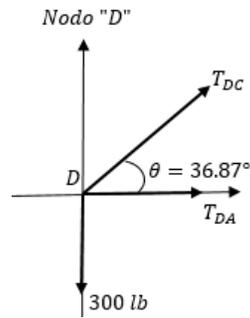


FIGURA 71.- DCL NODO "D".

Se aplican las condiciones de equilibrio para las fuerzas resultando:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; T_{DC} \left(\frac{1.5}{2.5} \right) - 300 = 0$$

$$T_{DC} = \left(\frac{2.5}{1.5} \right) * 300 \rightarrow T_{DC} = 500 \text{ lb}$$

$$T_{DC} = 500 \text{ lb (Tension)}$$

Además:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; T_{DC} \left(\frac{2}{2.5} \right) + T_{DA} = 0$$

Despejando T_{DA} y sustituyendo valores resulta:

$$T_{DA} = - \left(\frac{2}{2.5} \right) T_{DC}$$

$$T_{DA} = - \left(\frac{2}{2.5} \right) * 500 \rightarrow T_{DA} = -400 \text{ lb}$$

$$T_{DA} = 400 \text{ lb (Compresion)}$$

Se sigue el análisis del nodo "C"

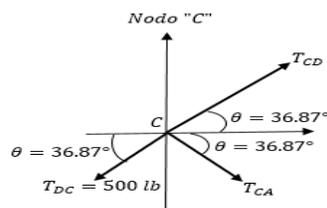


FIGURA 72.- DCL NODO "C".

Se aplican las condiciones de equilibrio para las fuerzas resultando:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -500 \left(\frac{2}{2.5} \right) + T_{CB} \left(\frac{2}{2.5} \right) + T_{CA} \left(\frac{2}{2.5} \right) = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; -500 \left(\frac{1.5}{2.5} \right) + T_{CB} \left(\frac{1.5}{2.5} \right) - T_{CA} \left(\frac{1.5}{2.5} \right) = 0$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$T_{CB} + T_{CA} = 500$$

$$T_{CB} - T_{CA} = 500$$

Si se suman ambas ecuaciones se obtiene que:

$$2T_{BC} = 1000 \rightarrow T_{BC} = 500 \text{ lb}$$

$$T_{BC} = 500 \text{ lb (Tension)}$$

Y

$$T_{CA} = 0 \text{ lb (elemento de fuerza cero)}$$

Analizando el nodo "A"

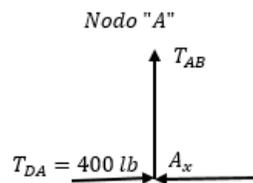


FIGURA 73.- DCL NODO "A".

Se aplican las condiciones de equilibrio para las fuerzas resultando:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; 400 - A_x = 0$$

$$A_x = 400 \text{ lb} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; T_{AB} = 0 \rightarrow T_{AB} = 0 \text{ lb}$$

Por último se analiza el nodo "B"

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -500 \left(\frac{2}{2.5} \right) + B_x = 0$$

$$B_x = 400 \text{ lb} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; -500 \left(\frac{1.5}{2.5} \right) + B_y = 0$$

$$B_y = 300 \text{ lb} \uparrow$$

La metodología de solución no se expresa explícitamente, analice el proceso de solución.

Ejemplo 2.- La armadura, que se ha utilizado para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Aproxime cada nodo como un pasador y determine la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 800 \text{ lb}$, $P_2 = 0$.

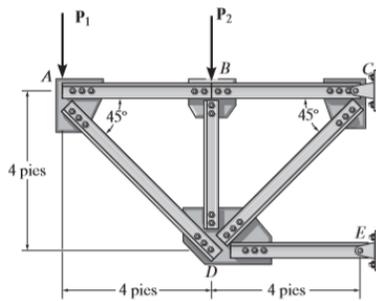


FIGURA 74.- ARMADURA DEL EJEMPLO 2.

Solución: se observa que no es necesario determinar inmediatamente las reacciones, por lo que se iniciara el análisis de equilibrio en el nodo A. El diagrama del cuerpo libre se observa en la figura 75.

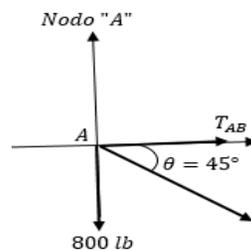


FIGURA 75.- DCL NODO "A" EJEMPLO 2.

Se aplican las condiciones de equilibrio para las fuerzas resultando:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; -T_{AD}\text{sen}45^\circ - 800 = 0$$

$$T_{AD} = -\frac{800}{\text{sen}45^\circ} \rightarrow T_{AD} = -1131.37 \text{ lb}$$

$$T_{AD} = 1131.37 \text{ lb (Compresion)}$$

Además:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -T_{AD}\text{cos}45^\circ - T_{AB} = 0$$

$$T_{AB} = 1131.37\text{cos}45^\circ \rightarrow T_{AB} = 800 \text{ lb}$$

$$T_{AB} = 800 \text{ lb (Tension)}$$

Se analiza el nodo "B":

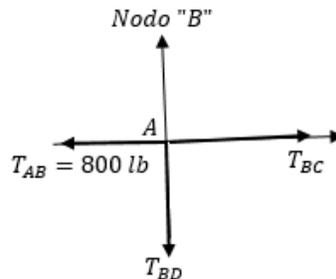


FIGURA 76.- DCL NODO "B"

Planteando el equilibrio de las fuerzas.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; T_{BC} - 800 = 0$$

$$T_{BC} = 800 \text{ lb} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; T_{BD} = 0 \rightarrow T_{BD} = 0$$

Determinando las reacciones en los soportes. Considere el diagrama de cuerpo libre de la figura 77.

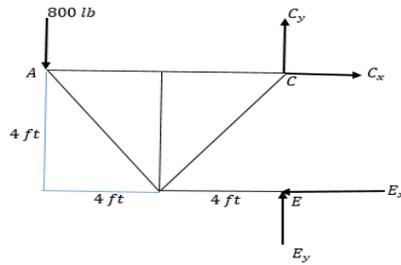


FIGURA 77.- DCL DE LA ARMADURA FIGURA 74.

Planteando el equilibrio de los momentos en E y además del equilibrio de fuerzas.

$$+\circlearrowleft M_E = 0; 800(8) - c_x(4) = 0 \rightarrow C_x = 1600 \text{ lb} \rightarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; 1600 - E_x = 0 \rightarrow E_x = 1600 \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; C_y + E_y - 800 = 0$$

$$C_y + E_y = 800$$

Esta última ecuación no puede resolverse por ahora, se continúa entonces con el análisis de los nodos.

Analizando el nodo "C".

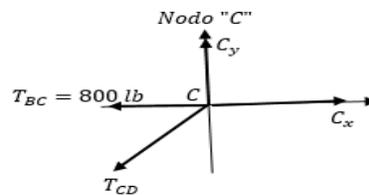


FIGURA 78. DCL NODO "C"

El equilibrio de las fuerzas da:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -800 - T_{CD}\cos 45 + C_x = 0$$

$$-800 - T_{CD}\cos 45 + 1600 = 0 \rightarrow T_{CD} = 1131.37 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; C_y - T_{CD}\sen 45^\circ = 0$$

$$C_y = 1131.37 \text{sen}45^\circ \rightarrow C_y = 800 \text{ lb}$$

Con este resultado se obtiene que:

$$800 + E_y = 800 \rightarrow E_y = 0$$

Nodo "E" el diagrama de cuerpo libre se presenta en la figura 79.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; T_{DE} - C_x = 0$$

$$T_{DE} = 1600 \text{ lb (Compresion)}$$

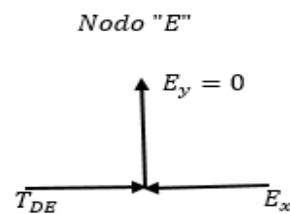


FIGURA 79.- DCL NODO "E".

Ejemplo 3.- Determine la fuerza en cada elemento de la armadura mostrada en la figura 80 e indique si los elementos están en tensión o en compresión.

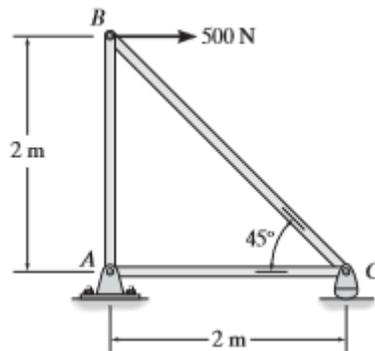


FIGURA 80.- ARMADURA TRIANGULAR.

Como no se debe tener más de dos incógnitas en el nodo y por lo menos contar con una fuerza conocida actuando ahí, se comienza el análisis en el nodo B.

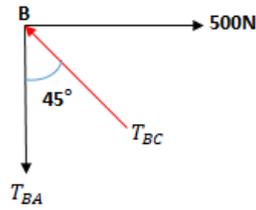


FIGURA 81.- DCL NODO "B"

El equilibrio de fuerzas da:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; 500N - T_{BC}\text{sen}45^\circ = 0$$

$$+\rightarrow T_{BC} = \frac{500}{\text{sen}(45^\circ)} = 707.1 N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; -T_{BA} + T_{BC} \cos(45^\circ) = 0$$

$$T_{BA} = 500 N$$

De igual manera para el nodo "C"

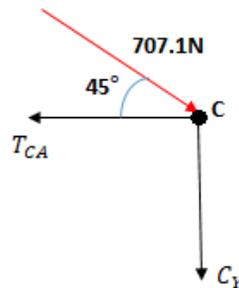


FIGURA 82.- DCL NODO "C"

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; T_{CA} - T_{BC}\text{cos}45^\circ = 0$$

$$T_{CA} = 707.1 \cos(45)$$

$$T_{CA} = 500 N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; C_Y + 707.1\text{sen}45^\circ = 0$$

$$C_Y = 500 N$$

Por último, se analiza el nodo A, de manera que:

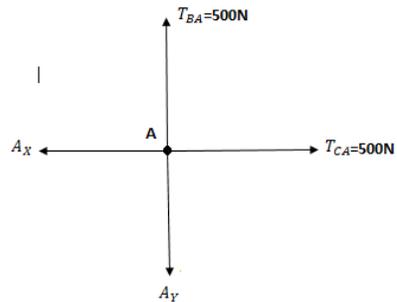


FIGURA 83.- DCL NODO "A"

El equilibrio de fuerzas da:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; 500 - A_x = 0$$

$$A_x = 500 N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; 500N - A_y = 0$$

$$A_y = 500 N$$

4.4.4.1.1 Problemas propuestos.

1.- Elimine la fuerza de 500 lb de la armadura de la figura 84 y determine la máxima fuerza P que puede aplicarse a la armadura de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 800 lb en tensión o 600 lb en compresión.

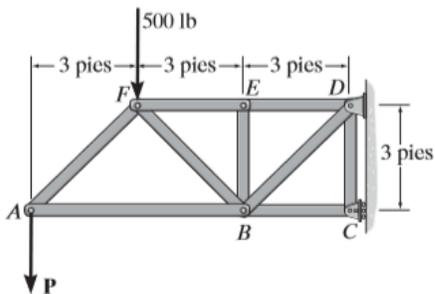


FIGURA 84.- ARMADURA DEL PROBLEMA 1 Y 4.

2.- Determine la máxima fuerza P que puede aplicarse a la armadura, de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 2.5 kN en tensión o 2 kN en compresión, vea la siguiente figura.

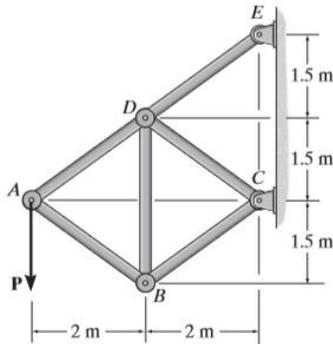


FIGURA 85.- ARMADURA DEL PROBLEMA 2 Y 5.

3.- Determine la máxima fuerza P que puede aplicarse a la armadura, de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 1.5 kN en tensión o 1 kN en compresión, vea la siguiente figura.

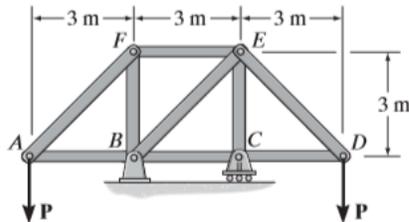


FIGURA 86.- ARMADURA DE LOS PROBLEMAS 3 Y 6.

Problemas reto

4.- Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de la figura 83 y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 800 \text{ lb}$.

5.- Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 5 \text{ kN}$. Vea la figura 85.

6.- Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de la figura 86 y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 4 \text{ kN}$.

7.- Determine la fuerza en cada elemento de la armadura en términos de la carga P , e indique si los elementos están en tensión o en compresión. Ver la figura 87.

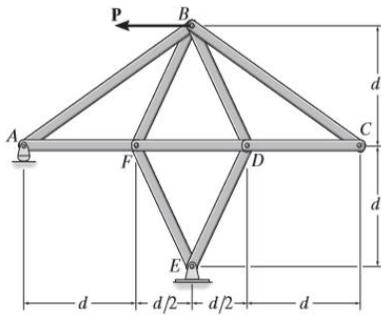


FIGURA 87.- ARMADURA DE NIVEL.

4.4.4.2 Método de las secciones

El método de las secciones es otra de las metodologías de análisis de estructuras, la diferencia de este método con respecto al anterior es que permite conocer las reacciones internas de ciertos elementos de una estructura sin necesidad de hacer el análisis de todo el sistema, lo cual nos da facilidad de cálculo. La metodología de cálculo es la siguiente.

- 1.- Se calculan las reacciones en los soportes.
- 2.- Se hace un corte imaginario que seccione la estructura por los elementos cuyas reacciones se quieran determinar.
- 3.- Se toma la sección que presente mayor ventaja de cálculo y se trazan las tensiones de los elementos a calcular.
- 4.- Se determinan dichas tensiones aplicando las condiciones de equilibrio.

Vea y analice los siguientes ejemplos donde se muestra este método para que se familiarice con su aplicación.

Ejemplo 1.- Determine la fuerza en los elementos BC, CF y FE de la armadura mostrada en la figura 88. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

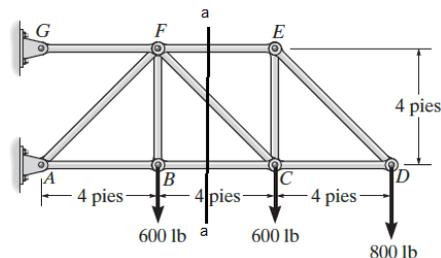


FIGURA 88.- ARMADURA Y CORTE A-A.

Solución: En este caso no es necesario determinar las reacciones para analizar los elementos involucrados. Se traza el corte a-a que secciona la estructura en dos por los elementos que se desean calcular. Se toma la sección derecha de la estructura tal como se muestra en la figura 89.

Aplicando las condiciones de equilibrio de momentos en el nodo "F" (ver figura 88).

$$+\circlearrowleft M_F = 0; -800(8) - 600(4) - BC(4) = 0 \rightarrow BC = -2200 \text{ lb}$$

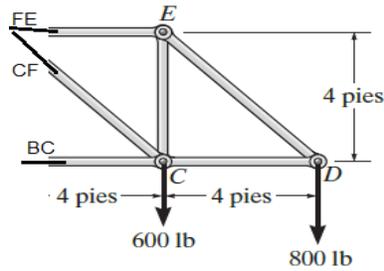


FIGURA 89.- SECCIÓN DERECHA DEL CORTE A-A.

Las condiciones de equilibrio para las fuerzas arrojan:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; CF \left(\frac{4}{4\sqrt{2}} \right) - 600 - 800 = 0$$

$$CF = 1400\sqrt{2} \text{ lb} \rightarrow CF = 1979.89 \text{ lb}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; -FE + 2200 - 1979.89 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$FE = 800 \text{ lb}$$

Por lo que las fuerzas en los elementos pedidos son:

$$FE = 800 \text{ lb (Tensión),}$$

$$CF = 1979.89 \text{ lb (Tensión)}$$

$$BC = 2200 \text{ lb (Compresión)}$$

Ejemplo 2.- Determine la fuerza en los elementos GF, GD y CD de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

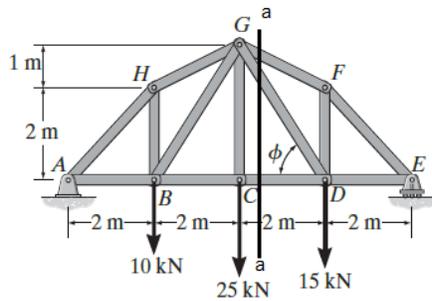


FIGURA 90.- ARMADURA PARA EL EJEMPLO 2.

Solución: observe que para obtener la fuerza que experimentan los miembros solicitados primero hay que calcular las reacciones en el apoyo E. Dado que el apoyo E es un “rodillo”, solo se restringe el desplazamiento vertical de la estructura por lo que solo se tiene una reacción en y a saber, E_y actuando verticalmente hacia arriba. El diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 91 permite determinar dicha reacción.

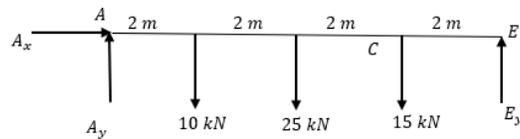


FIGURA 91.- DIAGRAMAS DE FUERZAS ACTUANTES EN LA ARMADURA.

Si aplicamos el equilibrio de momentos en el nodo A, en base a la figura anterior se tiene:

$$+\circlearrowleft M_A = 0; -10(2) - 25(4) - 15(6) + E_y(8) = 0 \rightarrow E_y = 26.25 \text{ kN}$$

Ahora, para obtener los valores de las fuerzas en los elementos requeridos se toma la sección del lado derecho de la figura 90 resultando el siguiente diagrama.

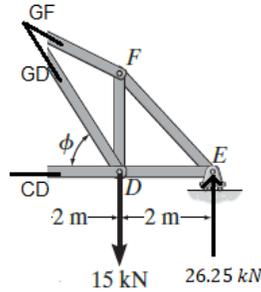


FIGURA 92.- SECCIÓN DERECHA DE LA ARMADURA.

Aplicando el equilibrio de momentos en el nodo G:

$$+\circlearrowleft M_G = 0; -15(2) + 26.25(4) - DC(3) = 0 \rightarrow DC = -25 \text{ kN}$$

el análisis de equilibrio en el nodo F da:

$$+\circlearrowleft M_F = 0; 25(2) - DE\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \rightarrow DE = 50\sqrt{2}$$

$$DE = 70.71 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; 25 - 70.71\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - GF\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$GF = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) * 25 \rightarrow GF = -27.95 \text{ kN}$$

Por lo que los valores de las fuerzas en los elementos pedidos son:

$$DC = 25 \text{ kN (Compresión)}$$

$$DE = 70.71 \text{ kN (Tensión)}$$

$$GF = 27.95 \text{ kN (Compresión)}$$

4.4.4.2.1 Problemas propuestos.

1.- Determine la fuerza en los elementos BC, CG y GF de la armadura Warren mostrada en la figura 93. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

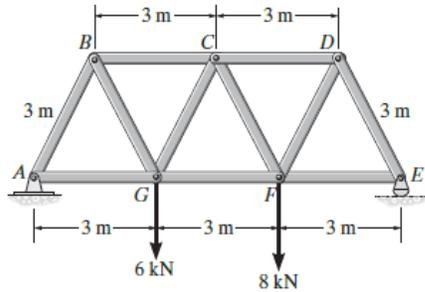


FIGURA 93.- ARMADURA DE SECCION TRIANGULAR.

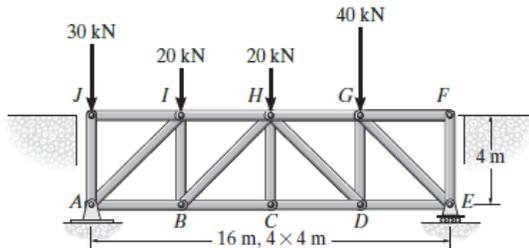


FIGURA 94.- ARMADURA HOWE.

2.- La armadura Howe para puente está sometida a las cargas que se muestran en la figura 94. Determine la fuerza en los elementos HI, HB y BC, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

3.- Determine la fuerza en los elementos ED, EH y GH de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Vea la figura 95.

4.- Determine la fuerza en los elementos GF, GD y CD de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Vea la figura 96.

Problemas reto

5.- Determine la fuerza en los elementos BG, BC y HG de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Vea la figura 96.

6.- Determine la fuerza en los elementos KJ, KC y BC de la armadura Howe mostrada en la figura 97, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

7.- Determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada en la figura 98 y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 40 \text{ kN}$, $P_2 = 20 \text{ kN}$.

8.- Determine la fuerza en los elementos KJ, NJ, ND y CD de la armadura K. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. Sugerencia: use las secciones aa y bb. Vea la figura 99.

9.- Determine la fuerza en los elementos JI, EF, EI y JE de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Vea la figura 100.

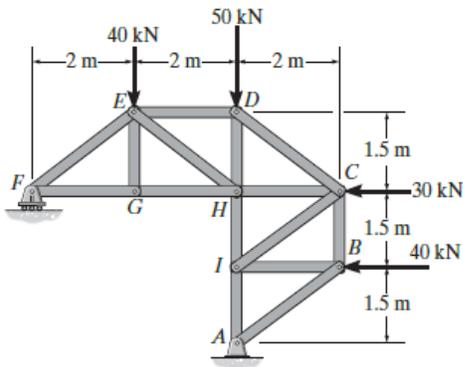


FIGURA 95.- ARMADURA EN EQUILIBRIO.

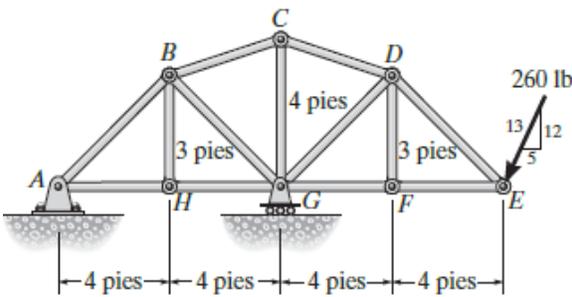


FIGURA 96.- ESTRUCTURA PARA SOPORTE DE PUENTE.

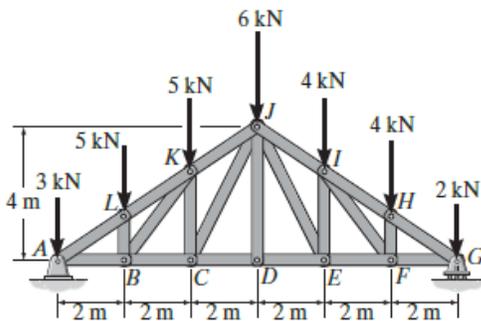


FIGURA 97.- ARMADURA SOBRE REFORZADA.

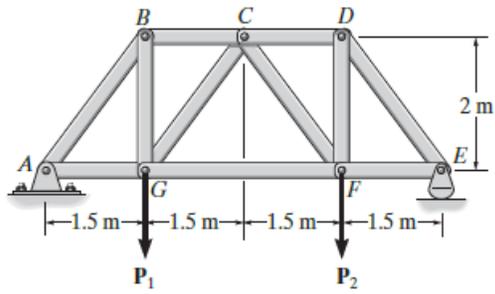


FIGURA 98.- ARMADURA POR SECCIONES.

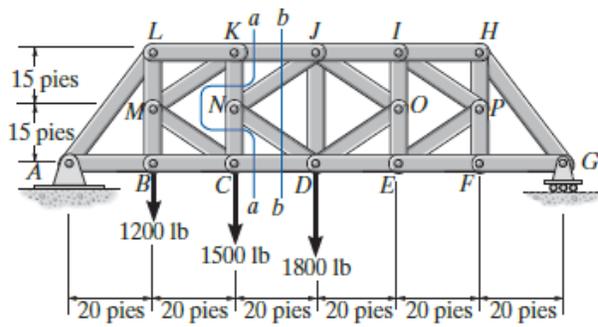


FIGURA 99.- ARMADURA K.

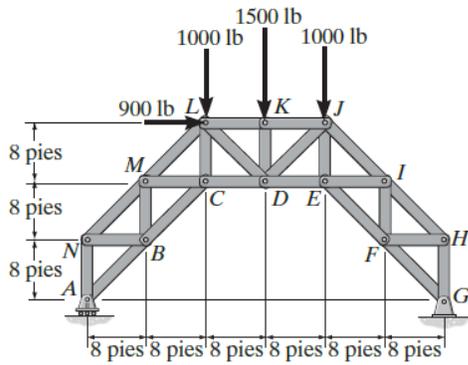


FIGURA 100.- ARMADURA DE ASCENSO.

4.4.5 Centroide y centro de gravedad

El centroide es un concepto puramente geométrico que depende de la forma geométrica del sistema y señala al punto en el cual se encuentra ubicado el centro del sistema de geometría definida. La definición aplica a todos aquellos cuerpos puramente geométricos, es decir, a aquellos cuerpos cuya idealización mecánica conduzca a una representación en el plano bidimensional.

También se puede hablar de un tipo de centroide más general empleado en física a la hora de hacer idealizaciones de cuerpos complejos con la finalidad de facilitar cálculos, el cual depende de una propiedad muy importante de la materia, a saber, la masa. La distribución de masa de un cuerpo es un factor determinante al momento de simplificar un sistema. El centro de masa de un cuerpo es el punto en el cual se puede considerar que esta concentrada toda la masa del objeto, y entonces en lugar de analizar todo el cuerpo en sí, solo basta con analizar el comportamiento de dicho punto ante las acciones a las que esté sometido el cuerpo. El centro de masa está relacionado con otro tipo especial de centroide el cual depende del campo gravitatorio al que esté sometido el cuerpo. El centro de gravedad es aquel punto donde se considera que actúa la acción de la gravedad sobre el cuerpo.



FIGURA 101.- CENTRO DE MASA Y GRAVEDAD DE UN MARTILLO.

En la figura 101 se observa un cuerpo con distribución de masa no uniforme, ya que el objeto está compuesto por una cabeza de hierro, con más masa, que el un mango de madera. Observe que el centro de masa y el centro de gravedad señalados coinciden en el mismo punto ubicado muy cerca de la cabeza de hierro, esto debido a que la mayor distribución de materia está en la cabeza de hierro. En lo que sigue de presentan los fundamentos matemáticos que permiten el cálculo de las coordenadas de posición del centroide de un área plana y de un sólido, para más adelante pasar a los principios del cálculo de los centros de masa y gravedad.

4.4.5.1 Centroides de áreas planas

En la presente sección aborda el análisis para el cálculo del centro geométrico de áreas planas y de sólidos, para lo cual se presenta la siguiente metodología de cálculo la cual se puede revisar en el libro de cálculo diferencial e integral de Frank Ayres Jr.

Para iniciar con la metodología, primero tómnese en cuenta los siguientes conceptos.

Primer momento M_L de un área plana: el primer momento de un área plana respecto a una recta L es el producto del área por la distancia dirigida de su centroide a esa recta. El momento de un área compuesta con respecto a una recta es la suma de los momentos de las áreas individuales (FRANK AYRES Jr.). El momento de un área plana respecto a un eje de coordenadas se calcula así:

- 1.- Se dibuja el área mostrando una franja representativa y el rectángulo aproximante.
- 2.- Multiplicar el área del rectángulo por la distancia de su centroide al eje y sumar para todos los rectángulos.
- 3.- Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.

Para un área plana A con centroide (\bar{x}, \bar{y}) y momentos M_x y M_y con respecto a los ejes x e y, se tiene:

$$A\bar{x} = M_y \quad y \quad A\bar{y} = M_x$$

A continuación, se presentan algunos ejemplos donde se aplica el análisis propuesto.

Ejemplo 1.- Determinar el centroide del área plana acotada en el primer cuadrante por la parábola $y = 4 - x^2$.

Solución: el centroide del rectángulo aproximante se muestra en la figura 102, sus coordenadas son $(x, \frac{y}{2})$. El área de la región acotada es:

$$A = \int_0^2 y \, dx = \int_0^2 (4 - x^2) \, dx = \frac{16}{3}$$

Los momentos respecto a los ejes x e y son:

$$M_x = \int_0^2 \frac{y}{2} (y dx) = \frac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{128}{15}$$

$$M_y = \int_0^2 x (y dx) = \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 4$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{3}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{8}{5}$$

Entonces, el centroide se encuentra en las coordenadas $(3/4, 8/5)$.

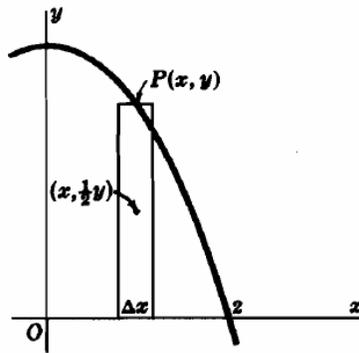


FIGURA 102.- CENTROIDE DEL RECTÁNGULO APROXIMANTE, OBTENIDA DE "CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL" DE FRANK AYRES.

Ejemplo 2.- Hallar el centroide del área bajo la curva $y = 2\text{sen}3x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/3$.

Solución: El rectángulo aproximante se muestra en la figura 103, tiene centroide $(x, y/2)$, entonces:

$$A = \int_0^{\pi/3} y dx = \int_0^{\pi/3} 2\text{sen}3x dx = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \int_0^{\pi/3} \frac{y}{2} (y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2\text{sen}3x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi/3} \text{sen}^2 3x dx = \frac{\pi}{3}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/3} x (y dx) = \int_0^{\pi/3} x(2\text{sen}3x) dx = 2 \int_0^{\pi/3} x \text{sen}3x dx = \frac{2}{9} \pi$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{2}{9}\pi}{\frac{4}{3}} \rightarrow \bar{x} = \frac{\pi}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{4}{3}} \rightarrow \bar{y} = \frac{\pi}{4}$$

Entonces, el centroide se encuentra en las coordenadas $(\pi/6, \pi/4)$.

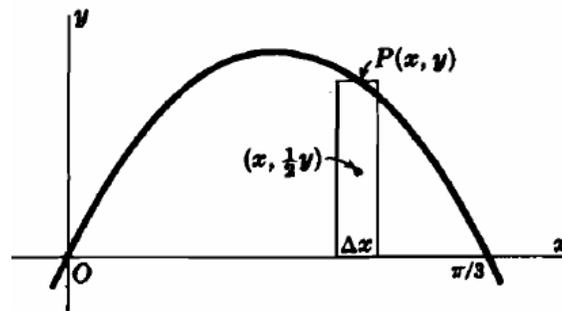


FIGURA 103.- CENTROIDE DEL RECTÁNGULO APROXIMANTE EJEMPLO 2, OBTENIDA DE "CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL" DE FRANK AYRES.

Ejemplo 3.- Hallar el centroide del área acotada por las parábolas $x = y^2$ y $x^2 = -8y$.

Solución: El centroide del rectángulo aproximante puede verse en la figura 104, y es $(x, 1/2(y_1 + y_2))$. Con:

$$y_1 = -\sqrt{x} \quad y \quad y_2 = -\frac{x^2}{8}$$

Entonces, se calculan el área de la región cotada y sus momentos respecto a los ejes. Los límites de integración se obtienen a partir de $y_1 = y_2$, dando como resultado los valores de x : $x = 0$ y $x = 4$.

$$A = \int_0^4 (y_2 - y_1) dx = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \int_0^4 \frac{y_1 + y_2}{2} (y_2 - y_1) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\frac{x^4}{64} - x\right) dx = -\frac{12}{5}$$

$$M_y = \int_0^4 x(y_2 - y_1)dx = \int_0^4 x\left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{24}{5}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{8}{3}} \rightarrow \bar{x} = \frac{9}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{-\frac{12}{5}}{\frac{8}{3}} \rightarrow \bar{y} = -\frac{9}{10}$$

Entonces, el centroide se encuentra en las coordenadas $(9/5, -9/10)$.

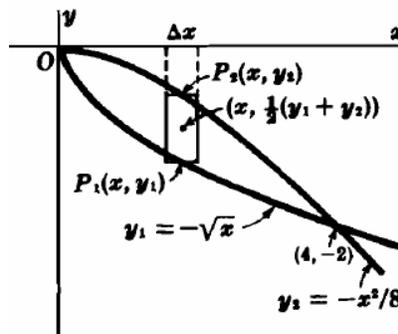


FIGURA 104.- CENTROIDE DEL RECTÁNGULO APROXIMANTE EJEMPLO 2, OBTENIDA DE "CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL" DE FRANK AYRES.

La metodología mostrada aplica a todos los problemas que impliquen cálculo de centroides de áreas planas. Para más ejemplos de aplicación, ver el libro de Calculo Diferencial e integral citado en las referencias, del que además se rescatan los siguientes problemas.

4.4.5.1.1 Problemas propuestos.

- 1.- Hallar el centroide de la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 9$.
- 2.- Hallar el centroide de la región limitada por $y = 4x - x^2$, $y = 0$.
- 3.- Hallar el centroide de la región limitada por $3y^3 = 4(3 - x)$, $x = 0$.
- 4.- Hallar el centroide de la región limitada por $y = x^2$, $y = x^3$.

5.- Hallar el centroide de la región limitada por $x^2 = 8y, y = 0, x = 4$.

Problemas reto

1.- Hallar el centroide de la región limitada por $x^2 - 8y + 4 = 0, x^2 = 4y$.

2.- Hallar el centroide de la región del primer cuadrante limitada por la curva $x^2 + y^2 = a^2$.

3.- Hallar el centroide de la región limitada por el lazo derecho de la curva $y^2 = x^4(1 - x^2)$.

4.- Hallar el centroide de la región limitada por el primer arco de la curva $x = \theta - \operatorname{sen}\theta, y = 1 - \operatorname{cos}\theta$.

5.- Probar que la distancia del centroide de un triángulo a su base es un tercio de la altura.

4.4.5.2 Centroides de sólidos

La metodología de cálculo para determinar el centroide de un sólido es similar a la expresada para las áreas planas. De nuevo, antes de abordarla se debe presentar el siguiente concepto, que es el primer momento de un sólido.

El primer momento de un sólido: el momento de un sólido de volumen V , generado al girar un área plana alrededor de un eje de coordenadas, con respecto al plano que pasa por el origen y es perpendicular al eje (FRANK AYRES Jr.) se puede calcular de la siguiente manera:

- 1.- Dibujar el área, mostrando una franja representativa y el rectángulo aproximante.
- 2.- Multiplicar el volumen, disco o capa generado al girar el rectángulo en torno al eje por la distancia del centroide del rectángulo al plano y sumar para todos los rectángulos.
- 3.- Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.

Cuando el área se gira en torno al eje x , el centroide (\bar{x}, \bar{y}) está en el eje x . si M_{yz} denota el momento del sólido con respecto al plano que pasa por el origen y es perpendicular al eje x , entonces

$$V\bar{x} = M_{yz} \text{ e } \bar{y} = 0$$

Análogamente, cuando el área se hace girar en torno al eje y , el centroide (\bar{x}, \bar{y}) está en el eje y . si M_{xz} es el momento del sólido con respecto al plano que pasa por el origen perpendicular al eje y , entonces

$$V\bar{y} = M_{xz} \text{ y } \bar{x} = 0$$

Véanse los siguientes ejemplos de aplicación para que se familiarice con el método de cálculo.

Ejemplo 1.- Hallar el centroide $(\bar{x}, 0)$ del sólido generado al girar el área del ejemplo 1 en la sección anterior, en torno al eje x .

Solución: se usa el rectángulo aproximante del ejemplo 1 de la sección anterior, vea la figura 102, por lo que se tiene:

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{256}{15} \pi$$

$$M_{yz} = \pi \int_0^2 xy^2 dx = \pi \int_0^2 x(4 - x^2)^2 dx = \frac{32}{3} \pi$$

El centroide está dado por $\bar{x} = M_{yz}/V$ de manera que:

$$\bar{x} = \frac{\frac{32}{3} \pi}{\frac{256}{15} \pi} \rightarrow \bar{x} = \frac{5}{8}$$

Las coordenadas en las que se localiza son $(5/8, 0)$.

Ejemplo 2.- Hallar el centroide $(0, \bar{y})$ del solido generado al girar el área del ejemplo 1 en la sección anterior, en torno al eje y.

Solución: se usa el rectángulo aproximante del ejemplo 1 de la sección anterior, vea la figura 102, por lo que se tiene:

$$V = 2\pi \int_0^2 xy dx = 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 8\pi$$

$$M_{xz} = 2\pi \int_0^2 \frac{1}{2} y(xy) dx = \pi \int_0^2 x(4 - x^2)^2 dx = \frac{32}{3} \pi$$

El centroide está dado por $\bar{y} = M_{xz}/V$ de manera que:

$$\bar{y} = \frac{\frac{32}{3} \pi}{8\pi} \rightarrow \bar{y} = \frac{4}{3}$$

Las coordenadas en las que se localiza son $(0, 4/3)$.

Ejemplo 3.- Hallar el centroide $(\bar{x}, 0)$ del solido generado al girar el área en el primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$, en torno al eje x.

Solución: se usa el rectángulo aproximante mostrado en la figura 105, por lo que se tiene:

$$V = \pi \int_0^1 (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{2}{15} \pi$$

$$M_{yz} = \pi \int_0^2 x(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^2 x(x^2 - x^4) dx = \frac{1}{12}\pi$$

El centroide está dado por $\bar{x} = M_{yz}/V$ de manera que:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{12}\pi}{\frac{15}{2}\pi} \rightarrow \bar{x} = \frac{5}{8}$$

Las coordenadas en las que se localiza son $(5/8, 0)$.

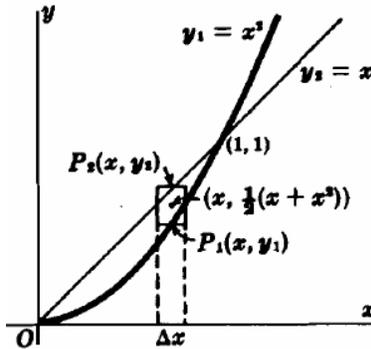


FIGURA 105.- CENTROIDE DEL RECTÁNGULO APROXIMANTE.

La metodología mostrada aplica a todos los problemas que impliquen cálculo de centroides de sólidos generados al rotar un área plana en torno a un eje de coordenadas. Para más ejemplos de aplicación, ver el libro de Calculo Diferencial e integral citado en las referencias.

4.4.5.2.1 Problemas propuestos.

- 1.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $y = x^2, y = 9, x = 0$ en torno al eje y .
- 2.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $y = x^2, y = 9, x = 0$ en torno al eje x .
- 3.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $y = 4x - x^2, y = x$ en torno al eje y .

4.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $y = 4x - x^2, y = x$ en torno al eje x .

5.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$ en torno al eje x .

6.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$ en torno al eje y .

Problemas reto

1.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $(x - 2)y^2 = 4, y = 0, x = 3, x = 5$ en torno al eje x .

2.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana limitada por $yx^2 = 16(4 - y), y = 0, x = 0, x = 4$ en torno al eje y .

3.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana en el primer cuadrante acotada por $y^2 = 12x$ y su latus rectum, en torno al eje x .

4.- Hallar el centroide del solido generado al hacer girar el área plana en el primer cuadrante acotada por $y^2 = 12x$ y su latus rectum, en torno a la directriz.

4.4.5.3 Momentos de inercia de áreas planas

El momento de inercia es la tendencia que experimenta un cuerpo a girar respecto a un eje debido a una acción externa, este depende de la distribución de masa en un objeto. Cuanto más lejos está la masa del centro de rotación, mayor es el momento de inercia. En esta sección se aborda el cálculo del momento de inercia de áreas planas en las que se supone se tiene una distribución de masa uniforme unitaria, por lo que no se considera el efecto de la masa sino solo el de a geometría del cuerpo.

El momento de inercia I_L de un área plana A con respecto la recta L en su plano se puede calcular de la siguiente manera:

- 1.- Dibujar el área, mostrando una franja representativa paralela a la recta y el rectángulo aproximante.
- 2.- Hacer el producto del área del rectángulo por el cuadrado de la distancia de su centroide a la recta y sumar para todos los rectángulos.
- 3.- Suponer que el número de rectángulo crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental del cálculo.

Además de la metodología presentada, es importante resaltar otra herramienta que ayuda en el cálculo del momento de inercia para secciones con el eje de rotación en una recta dada.

Teorema del eje paralelo: el momento de inercia de un área, arco o volumen con respecto a cualquier eje es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centroide más el producto del área, longitud de arco o volumen por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes paralelos. (FRANK AYRES Jr.)

Véanse los siguientes ejemplos de aplicación para que se familiarice con la metodología de cálculo.

Ejemplo 1.- Hallar el momento de inercia con respecto al eje y del área plana entre la parábola $y = 9 - x^2$ y el eje x .

Solución: El rectángulo aproximante de la sección se muestra en la figura 106, de la que se puede observar que $A = y\Delta x$ y que el centroide tiene coordenadas $(x, y/2)$. Luego, en base a la definición dada se tiene:

$$I_y = \int_{-3}^3 x^2 y \, dx = \int_{-3}^3 x^2 (9 - x^2) \, dx = 324/5$$

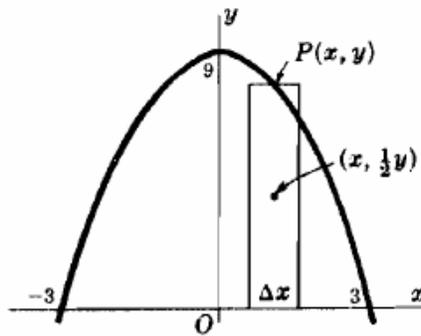


FIGURA 106.- RECTÁNGULO APROXIMANTE PARA EL CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA.

El momento de inercia de la región acotada es $I_y = 64/5$

Ejemplo 2.- Hallar el momento de inercia con respecto al eje y del área del primer cuadrante acotada por la parábola $x^2 = 4y$ y la recta $y = x$.

Solución: El rectángulo aproximante de la sección se muestra en la figura 107, de la que se puede observar que $A = (x - 1/4x^2)\Delta x$ y que el centroide tiene coordenadas $(x, (x + 1/4x^2)/2)$. Los límites de integración se obtienen de hacer $y_1 = y_2$, lo que da como resultado los valores $x = 0$ y $x = 4$.

Luego, en base a la definición dada se tiene:

$$I_y = \int_0^4 x^2 (y_2 - y_1) \, dx = \int_0^4 x^2 (x - 1/4x^2) \, dx = 64/5$$

El momento de inercia de la región acotada es $I_y = 64/5$

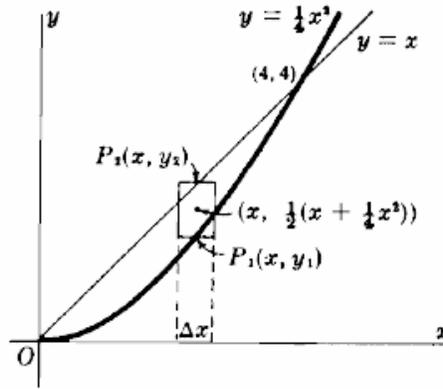


FIGURA 107.- RECTÁNGULO APROXIMANTE PARA EL PROBLEMA 2 CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA.

Ejemplo 3.- Calcular el momento de inercia con respecto a cada eje de coordenadas del área acotada por la curva $y = \text{sen}x$ desde $x = 0$ a $x = \pi$ y el eje x .

Solución: En base a la curva representada en la figura 108, el momento de inercia del rectángulo aproximante, respecto al eje x es $\frac{1}{3}(y dx)y^2$, vea el ejemplo 4. El valor del momento respecto al eje y se obtiene de $(y dx)x^2$, luego, ejecutando operaciones se tiene:

$$I_x = \int_0^{\pi} y^2(y) dx = \int_0^{\pi} y^2\left(\frac{1}{3} \text{sen}x dx\right) = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \text{sen}^3 x dx = \frac{4}{9}$$

$$I_y = \int_0^{\pi} x^2(y dx) = \int_0^{\pi} x^2 \text{sen}x dx = \pi^2 - 4$$

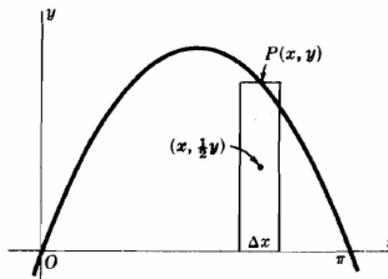


FIGURA 108.- MOMENTO DE INERCIA RESPECTO AL EJE "Y" DE LA FUNCIÓN SENX.

Ejemplo 4.- Hallar el momento de inercia de la sección rectangular A de dimensiones a y b con respecto a uno de sus lados.

Solución: considerando el rectángulo aproximante de la figura 109, con el lado en cuestión sobre el eje y, con área $b\Delta x$ y momento $(b\Delta x)x^2$, por lo que el momento total es:

$$I_y = \int_0^a x^2(b dx) = b \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3b$$

Observe que el área del rectángulo es $A = ab$, por lo que el resultado anterior se puede escribir como:

$$I_y = \frac{1}{3}Aa^2$$

Es decir, el momento de inercia de una sección rectangular respecto a un lado es igual a un tercio del producto de su área por el cuadrado de la longitud del otro lado.

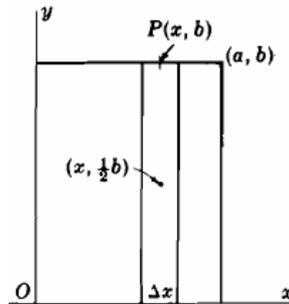


FIGURA 109.- MOMENTO DE INERCIA DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR.

4.4.5.3.1 Problemas propuestos.

- 1.- Determinar el momento de inercia del área plana acotada por $y = 4 - x^2, x = 0, y = 0$, en torno a los ejes x e y.
- 2.- Determinar el momento de inercia del área plana acotada por $y = 8x^3, x = 1, y = 0$, en torno a los ejes x e y.
- 3.- Determinar el momento de inercia del área plana acotada por $x^2 + y^2 = a^2$, en torno a un diámetro.
- 4.- Determinar el momento de inercia del área plana acotada por $y = x, x = 0$ y $x = 4$, en torno a los ejes x e y.

5.- Determinar el momento de inercia del área plana en el primer cuadrante acotada por $y^2 = x, x = 0, x = 4$, en torno a los ejes x e y .

Problemas reto

Usar los resultados de los problemas anteriores y del teorema del eje paralelo para obtener el momento de inercia del área dada con respecto a la recta indicada.

1.- Entre $y = 4 - x^2, x = 0, y = 0$, en torno a $x = 4$.

2.- Entre $x^2 + y^2 = a^2$, en torno a una tangente.

3.- Entre $y^2 = x, x = 0, x = 4$, en torno a $x = 4$.

4.4.5.4 Análisis de estructuras estáticamente determinadas: vigas

En el análisis estático de estructuras (como las armaduras que se estudiaron en la sección de equilibrio de cuerpo rígido) conlleva una revisión del comportamiento de los elementos estructurales sometidos a ciertas solicitaciones de carga con el fin de asegurar el buen desempeño de la estructura. En este caso se revisa el análisis de los distintos parámetros que intervienen, en el comportamiento ante carga, de vigas. Las vigas son elementos estructurales dispuestos de forma horizontal y apoyados sobre las columnas con el fin de generar un marco rígido que de estabilidad a una estructura. Estos elementos estructurales pueden ser de acero o concreto según se especifique en el proyecto ejecutivo de la estructura. Se trabaja en esta sección con vigas de acero, aunque para el análisis que se realiza, el material del que este echa la viga resulta irrelevante para los primeros casos de análisis.

Una estructura estáticamente determinada es aquella cuyos elementos se encuentran sometidos a condiciones de restricción (reacción en los apoyos) cuya magnitud se puede determinar únicamente con las ecuaciones disponibles en el análisis de equilibrio, es decir con las ecuaciones disponibles al plantear el equilibrio de fuerzas en los ejes correspondientes y el equilibrio de momentos. Por ejemplo, véase la figura 110, en la que se muestra una viga sometida a dos cargas una puntual P y otra distribuida w , el elemento se apoya en el punto O mediante una articulación y en el extremo contrario mediante un rodillo. El elemento está estáticamente determinado ya que el número de reacciones, tres en total, dos en la articulación y una en el rodillo, es igual al número de ecuaciones disponibles que la estática plantea.

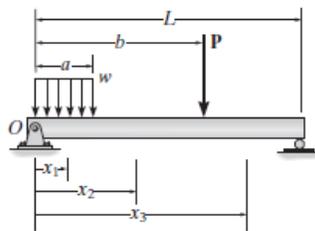


FIGURA 110.-CARGAS SOBRE UNA VIGA

Continuación se ven algunos ejemplos de análisis de vigas en las que por ahora se determinan las reacciones en los soportes inducidas por distintas solicitaciones de carga, por ejemplo, las causadas por cargas puntuales y por cargas uniformemente distribuidas.

Para el segundo tipo de cargas se verá que se pueden simplificar a una carga puntual actuante en el centro geométrico de la distribución de carga.

Ejemplo 1.- Determine las reacciones en los soportes A y B de la viga mostrada en la figura 111.

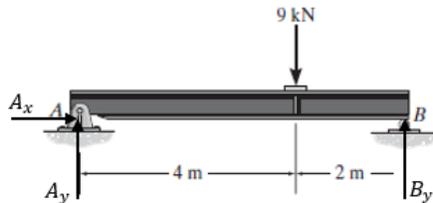


FIGURA 111.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA.

Solución: se tienen tres reacciones de magnitud desconocida, a saber, las dos reacciones (horizontal y vertical) en la articulación colocada en A, y la reacción vertical del rodillo colocado en B. en seguida se plantea el equilibrio de momentos en A.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; -9kN(4m) + B_y(6m) = 0 \rightarrow B_y = 6 kN \uparrow$$

El equilibrio de fuerzas da:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; A_y + 6kN - 9kN = 0 \rightarrow A_y = 3 kN \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; A_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

Note que no hay fuerzas externas actuando de manera horizontal, por lo que no hay reacción sobre ese eje, de ahí que $A_x = 0$.

Ejemplo 2.- Determine las reacciones en el empotramiento de la viga mostrada en la figura 112.

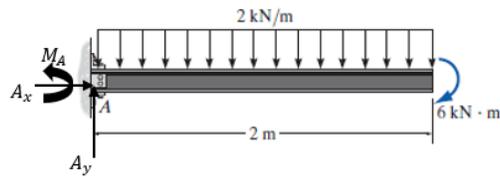


FIGURA 112.- VIGA EN CANTILIVER.

Solución: las reacciones a calcular son las generadas en el empotramiento de la viga donde, como se muestra en la figura 112, se tienen tres reacciones: una para el desplazamiento horizontal, otra para el desplazamiento vertical y una última que restringe el giro de la viga.

Para determinar las reacciones primero se debe obtener la fuerza equivalente a la carga distribuida que causa el mismo efecto que esta última, en este caso como se trata de una carga uniformemente distribuida, la fuerza equivalente está dada por:

$$P = \left(2 \frac{kN}{m}\right) (2 m) \rightarrow P = 4 kN \downarrow$$

La fuerza P genera el mismo efecto sobre la viga, esta fuerza actúa justamente a la mitad de la viga, en el centroide, y tiene misma dirección que su predecesora. Luego, planteando las condiciones de equilibrio se tiene:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; M_A - (4kN)(1 m) - 6 kN * m = 0 \rightarrow M_A = 10 kN * m \circlearrowleft$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; A_y - 4kN = 0 \rightarrow A_y = 4 kN \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; A_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

De nuevo, no hay reacción horizontal debido a que no hay fuerzas externas que alteren a la estructura en esa dirección. El valor del momento M_A es la magnitud del giro que se opone a que se desplace la viga.

Ejemplo 3.- Determine el valor de las reacciones en los soportes localizados en los puntos A y B de la viga mostrada en la figura 113.

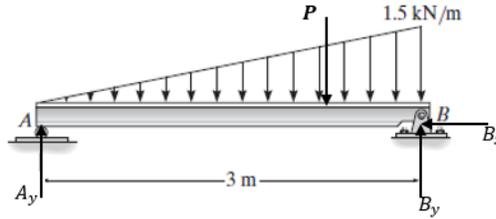


FIGURA 113.- VIGA CON CARGA GRADUALMENTE DISTRIBUIDA.

Solución: las reacciones en cada apoyo se muestran en la figura 113. En este caso se tiene una carga triangular distribuida a lo largo de la longitud de la viga, la fuerza P equivalente se calcula a continuación:

$$P = \frac{\left(1.5 \frac{kN}{m}\right)(3 m)}{2} \rightarrow P = 2.25 kN \downarrow$$

Esta fuerza actúa a un tercio de la longitud total de la viga medido desde el punto B, es decir, a 1 m de dicho punto. A continuación, se aplican las condiciones de equilibrio:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; B_y(3m) - (2.25kN)(2 m) = 0 \rightarrow B_y = 1.5 kN \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; A_y + B_y - 2.25kN = 0 \rightarrow A_y = 0.75 kN \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; A_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

De nuevo la reacción horizontal es nula.

Un punto importante en el análisis de vigas es conocer el comportamiento de la viga en cualquier punto de su longitud total, es decir, conocer las reacciones internas de la viga debidas a las sollicitaciones de fuerzas externas. Para tal caso resulta importante conocer cuáles son esas reacciones internas. Mecánicamente interesa saber la fuerza que genera un esfuerzo cortante en cualquier sección de la viga además del momento flexionante que

hace que el elemento se pandee, esto con la finalidad de diseñar un elemento que cumpla con las exigencias de uso y seguridad del elemento.

4.4.5.4.1 Funciones de momento y cortante

Las funciones de momento y cortante de una viga son un mecanismo matemático que permite conocer las fuerzas y momentos internos en una cierta sección interior de un elemento estructural como una viga, por ejemplo. El momento es la acción mecánica de giro causada por la acción de una fuerza actuante sobre un brazo de palanca que va del punto de giro al punto donde actúa la fuerza. Cuando usted abre una puerta, ejerce una fuerza sobre su manija originando que gire respecto a las bisagras mientras usted entra.

La fuerza cortante es aquella que genera un esfuerzo cortante tangencial a la sección transversal del elemento. Esta fuerza está relacionada con el momento de flexión mencionado anteriormente. En la siguiente figura se muestra la convención de signos para la fuerza cortante y momento flexionante actuantes en una viga, la cual es de utilidad a la hora de realizar el análisis y obtención de las funciones de momento y fuerza.

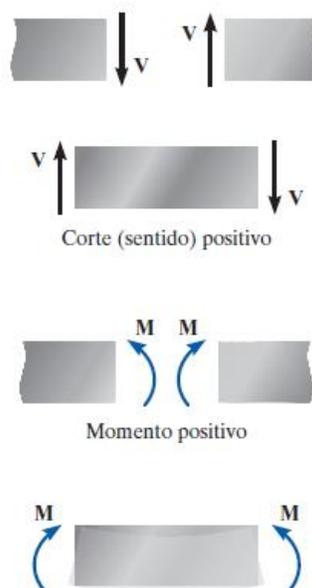


FIGURA 114.- CONVENCION DE SIGNOS PARA ANALISIS DE MOMENTO Y CORTANTE.

La metodología para determinar las funciones de momento y cortante es sencilla de comprender ya que involucra únicamente los principios de equilibrio vistos hasta ahora. Una vez que se determinan las funciones, lo que sigue es obtener las gráficas de cada una de estas para tener una visualización general de las acciones de interés en el elemento.

A continuación, se muestra el procedimiento de análisis propuesto en el libro de Ingeniería Mecánica: Estática de R.C Hibbeler citado en las referencias.

Procedimiento de análisis.

1.- Determine todas las fuerzas y los momentos de par reactivos que actúan sobre la viga, y descomponga todas las fuerzas en componentes que actúan en forma perpendicular y paralela al eje de la viga.

2.- Especifique coordenadas x separadas cuyo origen está en el extremo izquierdo de la viga y que se extienden a regiones de la viga entre fuerzas y/o momentos de par concentrados, o donde la carga distribuida sea continua.

3.- Seccione la viga en cada distancia x y trace el diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos. Asegúrese de que V y M se muestren al actuar en sus sentidos positivos, de acuerdo con la convención de signos dada anteriormente.

4.- La fuerza cortante V se obtiene al sumar fuerzas perpendiculares al eje de la viga.

5.- El momento flexionante M se obtiene al sumar momentos con respecto al extremo seccionado del segmento.

6.- Por último, grafique el diagrama de fuerza cortante (V contra x) y el diagrama de momento flexionante (M contra x). Si los valores calculados de las funciones que describen V y M son positivos, se grafican sobre el eje x , en tanto que los valores negativos se grafican debajo del eje x .

Vea los siguientes ejemplos de aplicación y analice cada caso.

Ejemplo 1.- Determine y grafique las funciones de momento y cortante respectivas a la viga del ejemplo 1 de la sección anterior.

Solución: las reacciones se calcularon anteriormente, obteniéndose: $A_y = 3 \text{ kN}$, $B_y = 6 \text{ kN}$. Ahora se inicia el análisis considerando el diagrama de cuerpo libre mostrado a

continuación, el cual es válido para el intervalo $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$ debido a que la viga se seccionará en dos partes por causa de la discontinuidad de carga dada.

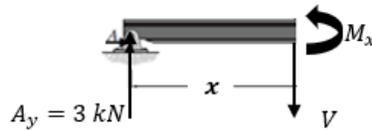


FIGURA 115.- DCL PRIMERA SECCIÓN DE LA VIGA.

Se determinan la función de la fuerza cortante y de momento flexionante a partir de lo establecido en la metodología:

Para $0 \leq x \leq 4 \text{ m}$

$$+\downarrow \sum F_y = 0; V - A_y = 0 \rightarrow V = 3 \text{ [kN]}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0; M_x - (A_y)(x \text{ m}) = 0 \rightarrow M_x = 3x \text{ [kN * m]}$$

Ahora se analiza la sección $4 \leq x \leq 6 \text{ m}$

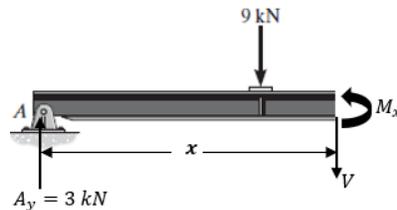


FIGURA 116.- DCL SEGUNDA SECCIÓN DE LA VIGA.

$$+\downarrow \sum F_y = 0; V - A_y + 9 \text{ kN} = 0 \rightarrow V = -6 \text{ [kN]}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_x = 0; M_x - (A_y)(x \text{ m}) + (9 \text{ kN})(x - 4 \text{ m}) = 0 \rightarrow M_x = -6x + 36 \text{ [kN * m]}$$

Las gráficas que se obtienen se muestran en la figura 117.

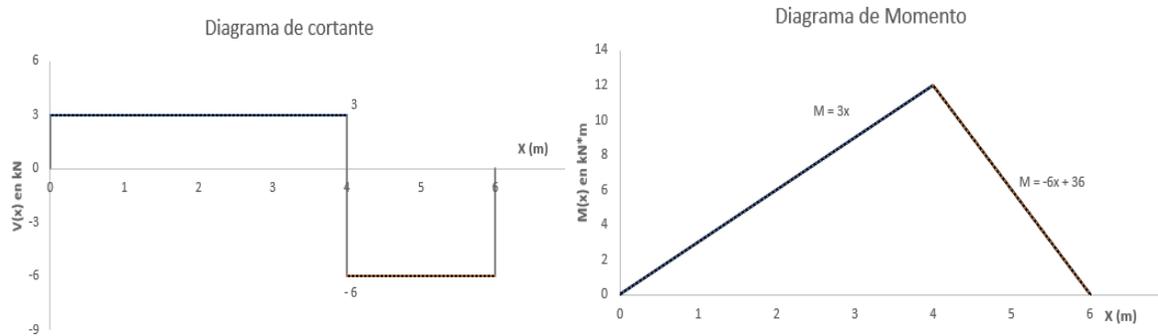


FIGURA 117.- DIAGRAMAS DE CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE.

Observe en los diagramas de la figura 117, que el momento máximo de $12 \text{ kM} \cdot \text{m}$ de la viga analizada se obtiene justo cuando el cortante es igual a cero, y que el valor del cortante en los extremos es igual al valor de las reacciones en los apoyos. Además, también se visualiza que los momentos en los extremos de la viga son igual a cero tal y como se planteó con las condiciones de equilibrio.

Ejemplo 2.- Determine y grafique las funciones de momento y cortante respectivas a la viga del ejemplo 3 de la sección anterior.

Solución: las reacciones son: $A_y = 0.75 \text{ kN}$, $B_y = 1.5 \text{ kN}$. Ahora se inicia el análisis considerando el diagrama de cuerpo libre mostrado a continuación. Observe que la carga distribuida ya se ha simplificado en la carga P , y que la distancia a la que aplica es $d = 1/3x$ medida desde x . en este caso solo se tiene que analizar una sección.

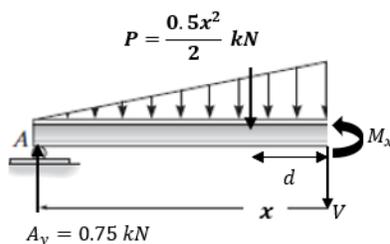


FIGURA 118.- DCL DE LA VIGA CON DISTRIBUCIÓN DE CARGA TRIANGULAR.

Ahora se aplican las condiciones de equilibrio al punto x , de manera que:

$$\text{Para } 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$+\downarrow \sum F_y = 0; V - A_y + \frac{0.5x^2}{2} = 0 \rightarrow V = -0.25x^2 + 0.75 \text{ [kN]}$$

$$+\curvearrowright \sum M_x = 0; M_x - (A_y)(x \text{ m}) + \frac{0.5x^2}{2} \left(\frac{x}{3} \text{ m}\right) = 0 \rightarrow M_x = -\frac{0.25}{3} x^3 + 0.75x \text{ [kN * m]}$$

Graficando las funciones se obtiene:

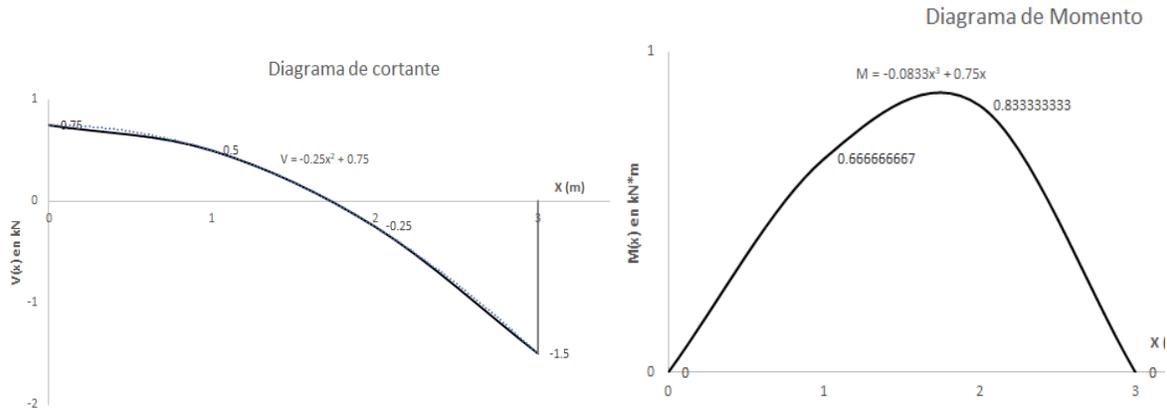


FIGURA 119. DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE Y FUERZA CORTANTE.

Observe nuevamente que las reacciones en los apoyos de la estructura coinciden con el valor del cortante en esos puntos, además de que también se cumple el equilibrio de momentos en dichos extremos.

Continúe con los problemas propuestos para que domine la solución de problemas del tema presentado.

4.4.5.4.1.1 Problemas propuestos.

1.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga en voladizo mostrada en la figura 120.

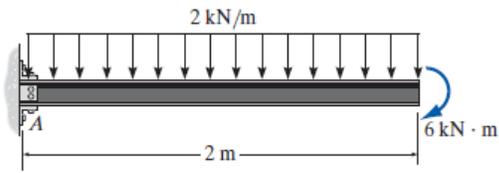


FIGURA 120.- VIGA EN CANTILIVER.

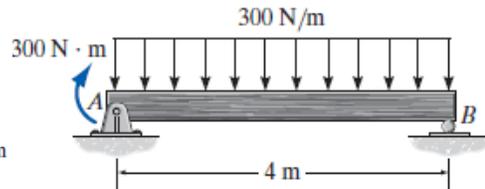


FIGURA 121.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA.

2.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 121.

3.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 122.

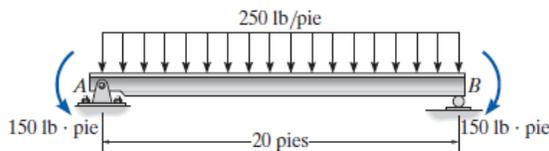


FIGURA 122.- CONDICIONES DE MOMENTO PARA VIGA.

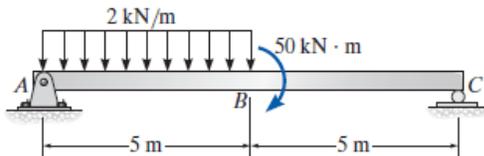


FIGURA 123.- MOMENTO DE FLEXIÓN EN VIGA.

4.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 123.

5.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 124.

6.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga en voladizo mostrada en la figura 125.

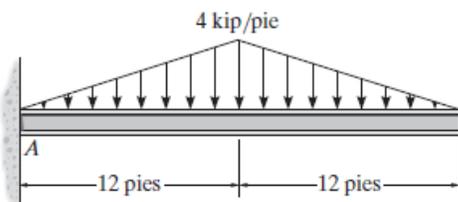


FIGURA 124. CANTILIVER Y CARGA TRIANGULARMENTE DISTRIBUIDA.

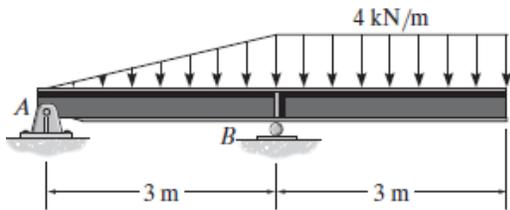


FIGURA 125.- VIGA CON EXTREMO EN VOLADIZO.

7.- Determine la intensidad w_0 más grande de la carga distribuida que puede soportar la viga si ésta puede aguantar un momento flexionante máximo de $M_{m\acute{a}x} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ y una fuerza cortante máxima de $V_{m\acute{a}x} = 80 \text{ kN}$. Vea la figura 126.

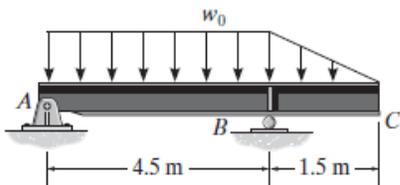


FIGURA 126.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON COMBINACIÓN DE CARGA.

Problemas reto

1.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga en voladizo mostrada en la figura 127.

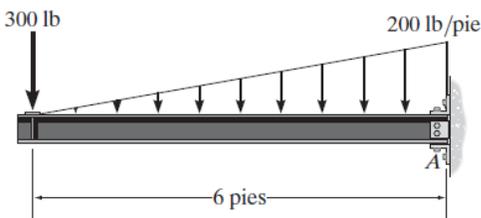


FIGURA 127.- VIGA CON EXTREMO EMPOTRADO A MURO Y CARGA TRIANGULARMENTE DISTRIBUIDA.

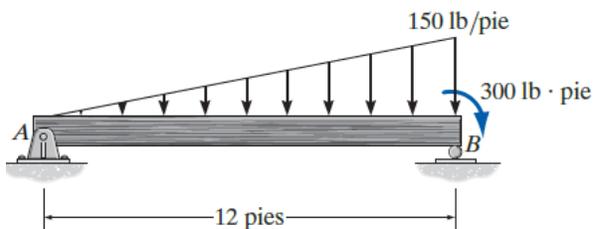


FIGURA 128.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA TRIANGULARMENTE DISTRIBUIDA.

2.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 128.

3.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga (a) en términos de los parámetros mostrados; (b) considere $M_0 = 500 N \cdot m$, $L = 8 m$. Figura 129.

4.- Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga (a) en términos de los parámetros mostrados; (b) considere $P = 800 lb$, $a = 5 pies$, $L = 12 pies$. Ver figura 130.

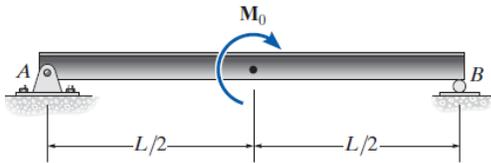


FIGURA 129.- VIGA CON MOMENTO INTERNO.

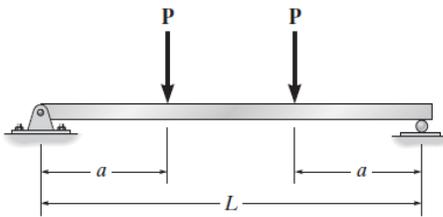


FIGURA 130. VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON DOBLE CARGA PUNTUAL.

5.- Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en la barra curva como una función de θ . Vea la figura 131.

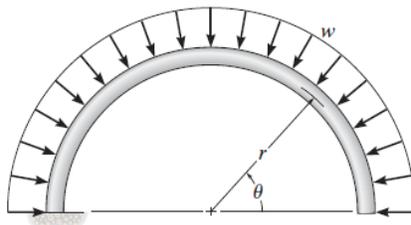


FIGURA 131.- ARCO CIRCULAR CON CARGA DISTRIBUIDA.

4.5 Dinámica

La dinámica es la disciplina que analiza los objetos en movimiento, las causas y acciones que condicionan el comportamiento del objeto al perder su estado de equilibrio estático, permite el análisis y comprensión de la mayoría de los sistemas mecánicos clásicos. La dinámica se puede dividir en dos ramas, la cinética y la cinemática, ambas estudian y modelan el comportamiento de los cuerpos al estar en movimiento, la diferencia radica en que la cinemática no considera el estudio de las acciones que ocasionan el movimiento, sino que solo se centra en modelar matemáticamente la respuesta del sistema ante dicha acción. Para la cinética resulta importante el análisis de las acciones que causan el movimiento del sistema con el fin de modelar la respuesta en función de las acciones de entorno que lo afectan, en este caso, el análisis de la naturaleza de las fuerzas que originan el movimiento conlleva a una descripción precisa del comportamiento del sistema durante su evolución en el tiempo, restringido a las condiciones del entorno.

Las leyes de Newton presentadas en su libro “Principios Matemáticos de la Filosofía Natural”, son la base del estudio de la dinámica, se hace un especial énfasis en la segunda ley ya que su expresión matemática permite la deducción de los modelos matemáticos empleados para la comprensión y predicción de la evolución del sistema en el tiempo. La segunda ley de Newton expresa que la fuerza neta aplicada a un objeto para iniciar su movimiento es directamente proporcional a la aceleración que este experimente, teniendo como constante de proporcionalidad la masa del objeto. Se entiende por fuerza cualquier acción o influencia que modifique el estado físico de un cuerpo, ya sea de movimiento o de equilibrio estático.

Los tipos de fuerzas que generalmente se manejan en el estudio dinámico de un cuerpo son la fuerza ocasionada por la acción de la gravedad sobre un objeto con masa y que comúnmente se le denomina como peso, la fuerza normal que se origina al apoyar un objeto sobre una superficie, la fuerza de roce o fricción que se origina al deslizar dos superficies en contacto una respecto a la otra, así como también la fuerza de tensión en una cuerda o cable al sostener la canasta de pasajeros de un globo aerostático o al tirar de un trineo con un caballo.

En general, en el estudio de los cuerpos en movimiento, se busca sintetizar todas las acciones y fuerzas que actúen sobre un sistema para poder plantear un modelo matemático simple pero representativo que permita predecir el comportamiento del sistema, con lo cual

se ayude al observador a comprender y generalizar los principios que rigen el estado de movimiento de un cuerpo o sistema.

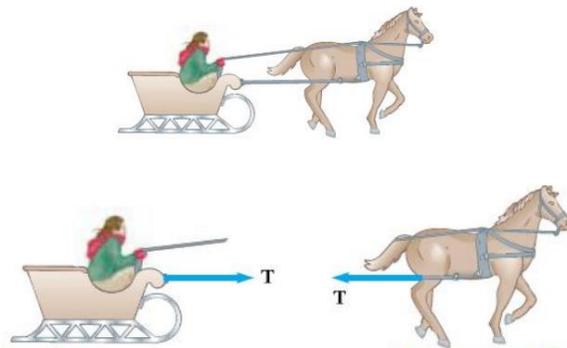


FIGURA 132.- TENSIÓN DE LA CUERDA CON LA QUE EL CABALLO TIRA DEL TRINEO.

Para el desarrollo de las siguientes secciones se inicia con el estudio cinemático de los cuerpos en movimiento para posteriormente analizar con la descripción cinética de objetos y sistemas en movimiento.

4.5.1 Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.), es aquel descrito por un objeto en movimiento con velocidad constante y cuya trayectoria es una línea recta. Es el más simple de los tipos de movimiento que existen y es descrito por sencillas ecuaciones. La ecuación de posición del objeto es una ecuación lineal, por lo que al representarla en el plano cartesiano se obtiene una línea recta cuya pendiente es igual a la velocidad a la que se mueve el objeto.

Para el estudio de este tipo de movimiento no se tiene interés en las propiedades de los objetos ni en las causas de sus movimientos; el objetivo consiste solo en describir y analizar el movimiento de un punto en el espacio, con este fin se define la posición, velocidad y aceleración de un punto, aunque por ahora solo serán de utilidad las dos primeras definiciones.

Se puede describir la posición de un punto P escogiendo un punto de referencia O presentando el vector de posición r de O a P (Fig.133 a). Suponga que P está en movimiento respecto a O, de manera que es una función del tiempo t (Fig.133 b). Se expresa esto con la notación $r = r(t)$.

Ahora bien, para describir la velocidad, suponga que P está en movimiento respecto de O, de manera que es una función del tiempo t (Fig.133 c). La velocidad de P respecto de O en el tiempo t se define como:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

La velocidad es la razón de cambio de la posición de P en el tiempo t . (La primera derivada de la posición respecto al tiempo: $v = \frac{dr}{dt}$)

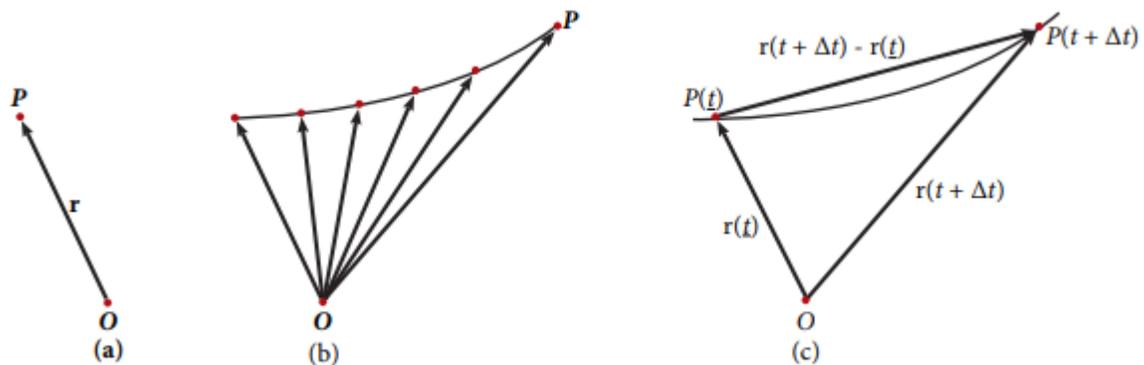


FIGURA 133.- DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA VELOCIDAD.

La aceleración de P respecto a O en un tiempo t se define como:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

donde el numerador del límite es el cambio en la velocidad de P durante el intervalo de tiempo (figura 134). La aceleración es la razón de cambio de la velocidad de P en el tiempo t, Es decir, la segunda derivada de la posición respecto al tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

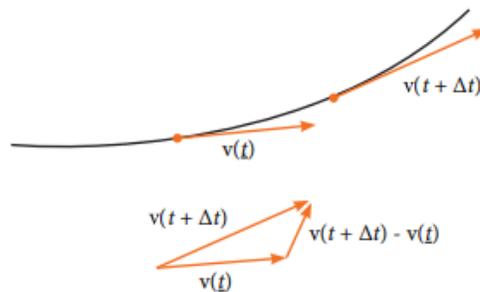


FIGURA 134.- VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD RESPECTO AL TIEMPO

A continuación, se muestran algunos ejemplos donde se estudia este tipo de movimiento.

Ejemplo 1.- Un objeto que se mueve a velocidad constante tiene la siguiente ecuación de movimiento $r(t) = 4t + 1$, determine la velocidad a la que se mueve. Grafique la ecuación de movimiento en el intervalo $0 \leq t \leq 3$.

Solución: El objeto se mueve a velocidad constante, por lo tanto, se mueve en línea recta y la ecuación que describe su movimiento es una ecuación lineal, luego la pendiente de su ecuación es igual a la velocidad a la que se mueve el objeto.

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Lo anterior se comprueba aplicando la definición de la velocidad como la razón de cambio de la posición respecto al tiempo, de manera que:

$$v = \frac{dr}{dt} \rightarrow v = \frac{d}{dt}(4t + 1)$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

La grafica de la ecuación de movimiento se muestra en la figura 135.

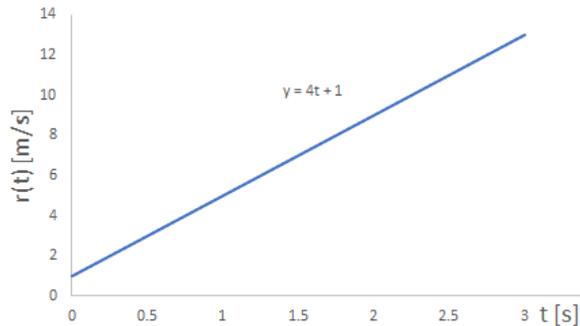


FIGURA 135.- MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA DEL MÓVIL.

Ejemplo 2.- Un auto móvil se mueve a velocidad constante de 90km/h por una autopista recta, determine, a) la distancia que recorre en 2 horas, b) la distancia que recorre por segundo, c) el tiempo que tardará en recorrer 10 km.

Solución:

a) Por la definición de la velocidad como razón de cambio de la posición respecto al tiempo se tiene:

$$v = \frac{d}{t} \rightarrow d = v * t$$

Entonces, si $v = 90 \text{ km/h}$ y $t = 2 \text{ h}$

$$d = \left(90 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) * (2\text{h}) \rightarrow d = \mathbf{180 \text{ km}}$$

b) En este caso el tiempo se da en segundos, por lo que es necesario convertir la unidad de tiempo de la velocidad a segundos, de manera que:

$$v = \left(90 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) * \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) \rightarrow v = 0.025 \text{ km/s}$$

Por lo que la distancia recorrida por el automóvil en un segundo es

$$d = \left(0.025 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right) (1 \text{ s}) \rightarrow d = \mathbf{0.025 \text{ km} = 25 \text{ m}}$$

c) A partir de la definición de la velocidad se despeja el tiempo resultando la siguiente expresión:

$$t = \frac{d}{v} \rightarrow t = \frac{10 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = \mathbf{0.11 \text{ h} \approx 7 \text{ min}}$$

Ejemplo 3.- La velocidad de la luz en el vacío es $c = 300\,000 \text{ km/s}$. La luz del Sol tarda en llegar a la Tierra 8 minutos y 19 segundos. Calcular la distancia entre el Sol y la Tierra.

Solución: vea que $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ y $t = 8 \text{ min } 19 \text{ s} = 499 \text{ s}$, por lo que la distancia recorrida por la luz en el tiempo dado es de:

$$d = v * t \rightarrow d = \left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (499 \text{ s})$$

$$\mathbf{d = 1497 \times 10^8 \text{ m} = 149,700,000 \text{ km}}$$

4.5.1.1 Problemas propuestos.

1.- Sabiendo que la velocidad del sonido es de 343.2 m/s , ¿a cuántos kilómetros de distancia se produce un trueno que tarda 6 segundos en oírse?

2.- Dibujar la gráfica del espacio recorrido en función del tiempo y la gráfica de la velocidad en función del tiempo del movimiento rectilíneo uniforme de una aeronave que vuela a 1200 km/h .

3.- En un movimiento rectilíneo con velocidad no constante, la velocidad media es $v_m = x/t$ donde x es la distancia recorrida final y t el tiempo transcurrido.

La velocidad media es la velocidad que el móvil debería tener para recorrer la misma distancia en el mismo tiempo realizando un movimiento rectilíneo uniforme, es decir, con velocidad constante.

Se sabe que un cohete espacial recorre 120 km a una velocidad constante de 500 km/h . Cuando alcanza los 120 km , su velocidad pasa a ser, de forma instantánea, 900 km/h . A esta velocidad recorre otros 120 km . Calcular la velocidad media del cohete.

4.- En el mismo instante, una motocicleta sale de la ciudad A y otra de la ciudad B, con la intención de encontrarse en el camino recto de 60 km que une ambas ciudades. Sabiendo que las velocidades de las motocicletas son 70 km/h y 55 km/h , calcular el tiempo que tardarán en encontrarse.

5.- Dos vehículos salen al encuentro desde dos ciudades separadas por 300 km , con velocidades de 72 km/h y 108 km/h , respectivamente. Si los vehículos empiezan su movimiento en el mismo instante, determine: a) El tiempo que tardan en encontrarse, b) La posición donde se encuentran.

Problemas reto

1.- En una persecución policial, el automóvil a la fuga lleva una velocidad de 140 km/h cuando pasa por un determinado punto de una carretera. Tres minutos después, el automóvil oficial que sigue al anterior pasa por dicho punto a una velocidad de tan solo 230 km/h para evitar causar un accidente con los demás vehículos de la carretera a causa de un exceso de velocidad. Se supone que las velocidades indicadas son constantes y la carretera es recta. Calcular cuánto tardará la policía en alcanzar al delincuente.

2.- Las ciudades A y B distan 600 km . Hay un tren de alta velocidad que circula entre ambas ciudades a 320 km/h .

En otra ciudad, C, a 150 km en línea recta de la ciudad A y a 512 km en línea recta de la ciudad B, un motorista tiene que decidir qué ruta tomar para llegar a la ciudad B.

Las posibilidades son las siguientes:

- a) viajar desde C hasta B en su motocicleta.
- b) viajar desde C hasta A en su motocicleta y desde A hasta B en tren.

Determinar la ruta más rápida sabiendo que la velocidad a la que circula la motocicleta es 120 km/h . ¿Es la ruta más corta en cuanto a distancia?

3.- Dos caminos rectos, A y B, terminan en el mismo punto, que es el punto de encuentro de dos amigos: Félix y Erika. La longitud del camino A y B es 25 km y 35 km , respectivamente.

Félix circula por el camino B a una velocidad de 50 km/h , y Erika circula por el camino A. Calcular la velocidad a la que tiene que viajar Erika para que ambos amigos lleguen al punto de encuentro en el mismo instante sabiendo que Erika comenzó su viaje 6 min más tarde que Félix.

4.5.2 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Este tipo de movimiento se diferencia del anterior debido a que no se realiza a velocidad constante, sino que esta se incrementa o decrementa gradualmente debido a la existencia de una aceleración o desaceleración impuesta al objeto. Anteriormente ya se definió la aceleración como la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo, si se trata la velocidad como una función del tiempo resulta que la aceleración es la derivada de esta respecto al tiempo $a = \frac{dv}{dt}$, o también como la segunda derivada de la posición respecto al tiempo, de forma que $a = \frac{d^2v}{dt^2}$.

Debido a que la velocidad no se mantiene constante, la gráfica de la ecuación de posición no será una línea recta en la mayoría de los casos, sino que más bien será una parábola ya que se obtiene una ecuación de grado dos para modelar la posición del objeto en función del tiempo.

Vea los ejemplos que se muestran a continuación, para los que se analiza como interviene el parámetro aceleración en el movimiento del objeto.

Ejemplo 1.- Un automóvil parte del reposo con una aceleración constante de 3 m/s^2 , determinar la velocidad que tendrá a los 8 s de haber iniciado el movimiento, así como la distancia que habrá recorrido en ese lapso de tiempo.

Solución: la aceleración es la derivada de la velocidad, por lo tanto, para obtener la velocidad a partir de la aceleración se tiene que integrar el valor de esta respecto al tiempo tal y como se muestra.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt$$

Si $a = 3 \text{ m/s}^2$ y debido a que el automóvil parte del reposo en $t = 0$ y $v = 0$, entonces se plantea la integral definida para el intervalo $0 \leq t \leq t$ y $0 \leq v \leq v$, por lo que se tiene:

$$\int_0^v dv = \int_0^t 3 dt$$

Integrando y aplicando el teorema fundamental del cálculo se obtiene la expresión para la velocidad en función del tiempo.

$$v(t) - 0 = 3[t - 0] \rightarrow v(t) = 3t$$

Ahora bien, debido a la definición de la velocidad, resulta claro que

$$\frac{dx}{dt} = 3t \rightarrow dx = 3t dt$$

Por lo que de nuevo se integra en el intervalo $0 \leq t \leq t$ y $0 \leq x \leq x$.

$$\int_0^x dx = \int_0^t 3t dt$$

$$x(t) - 0 = \frac{3t^2}{2} - 0 \rightarrow x(t) = \frac{3t^2}{2}$$

Ahora se determina la velocidad y la distancia recorrida al tiempo de $t = 8 s$

$$v(8) = (3)(8) \frac{m}{s} \rightarrow v = 24 m/s$$

$$x(8) = \frac{3(8)^2}{2} m \rightarrow x = 96 m$$

En este caso la posición x del móvil y la distancia recorrida coinciden.

Ejemplo 2.- Un auto marcha a una velocidad de $90 km/h$. El conductor aplica los frenos en el instante en que ve el pozo y reduce la velocidad hasta $1/5$ de la inicial en los $4 s$ que tarda en llegar al pozo. Determinar a qué distancia del obstáculo el conductor aplico los frenos, suponiendo que la aceleración fue constante.

Solución: para resolver este problema primero se debe plantear un punto de referencia, que en este caso será el instante en que el conductor aplica los frenos, sabiendo que en ese instante la velocidad inicial del auto es de $v_0 = 90 km/h = 25 m/s$ y comienza a reducir su velocidad con una desaceleración $a = -a$, a partir de esto, por integración, se obtiene la ecuación para la velocidad de manera que $0 \leq t \leq t$ y $25 \leq v \leq v$:

$$\int_{25}^v dv = \int_0^t -a dt$$

$$v - 25 = -a[t - 0] \rightarrow v(t) = -at + 25$$

Además, se sabe que transcurridos 4 s la velocidad del auto es una quinta parte de la velocidad inicial, por lo que se puede decir que $v(4) = 5 \text{ m/s}$ y entonces a partir de la ecuación obtenida se determina la desaceleración impuesta por los frenos.

$$5 = -a(4) + 25$$

$$-20 = -4a \rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

La ecuación para la posición del auto se obtiene por integración de la ecuación de velocidad, teniendo como intervalo de integración $0 \leq t \leq t$ y $0 \leq x \leq x$, luego:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (-5t + 25) dt$$

$$x(t) = -\frac{5t^2}{2} + 25t$$

Se sustituye el valor $t = 4 \text{ s}$ en la ecuación anterior y se obtiene $x(4) = 60 \text{ m}$ que es la distancia recorrida por el auto desde que se aplicaron los frenos hasta llegar al pozo.

Ejemplo 3.- Un móvil que se desplaza con velocidad constante, aplica los frenos durante 25 s, y recorre una distancia de 400 m hasta detenerse. Determinar la velocidad que tenía el móvil antes de aplicar los frenos y la desaceleración que estos produjeron.

Solución: tomando como punto de referencia, para obtener las ecuaciones de movimiento, el instante en que se aplicaron los frenos, se sabe que existe una desaceleración y una velocidad inicial para dicho punto de partida, por lo tanto, en base al análisis aplicado anteriormente se sabe que la velocidad estará dada por la ecuación:

$$v(t) = -at + v_0$$

Si se integra la ecuación anterior en el intervalo $0 \leq t \leq t$ y $0 \leq x \leq x$, resulta que la expresión para la posición respecto al tiempo está dada por:

$$x(t) = -\frac{at^2}{2} + v_0t$$

Luego, en base a las condiciones dadas se tiene que $v(25) = 0 \text{ m/s}$ y $x(25) = 400 \text{ m}$ por lo que sustituyendo en las ecuaciones obtenidas para la velocidad y la posición resulta el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$-25a + v_0 = 0$$

$$-\frac{625a}{2} + 25v_0 = 400$$

Si se multiplica la primera ecuación por -25 y se suma con la segunda se obtiene:

$$\frac{625a}{2} = 400 \rightarrow a = 1.28 \frac{m}{s^2}$$

Que es el valor de la desaceleración provocada por los frenos.

Con el valor de a encontrado se obtiene el valor de la velocidad inicial a partir de la primera ecuación.

$$-25(1.28) + v_0 = 0 \rightarrow v_0 = 32 \text{ m/s}$$

Que es la velocidad que el móvil tenía cuando se aplicaron los frenos.

4.5.2.1 Problemas propuestos.

1.- Un avión, cuando toca pista, acciona todos los sistemas de frenado, que le generan una desaceleración de 20 m/s^2 , necesita 100 metros para detenerse. Calcular la velocidad con que toca pista, así como el tiempo que demoró en detenerse.

2.- Un camión va disminuyendo su velocidad en forma uniforme, de 100 km/h a 50 km/h . Si para esto tuvo que frenar durante $1,500 \text{ m}$. Determinar la desaceleración produjeron los frenos. ¿Cuánto tiempo empleó para el frenado?

3.- Un automóvil que viaja a una velocidad constante de 120 km/h , demora 10 s en detenerse. Calcular: a) ¿Qué distancia necesitó para detenerse?, b) ¿Con qué velocidad chocaría a otro vehículo ubicado a 30 m del lugar donde aplicó los frenos?

4.- La bala de un rifle, cuyo cañón mide $1,4 \text{ m}$, sale con una velocidad de 1.400 m/s . Calcular: a) ¿Qué aceleración experimenta la bala?, b) ¿Cuánto tarda en salir del rifle?

5.- Un ciclista que va a 30 km/h , aplica los frenos y logra detener la bicicleta en 4 segundos . Calcular la desaceleración que produjeron los frenos y la distancia que necesito para detenerse.

4.5.3 Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, tiene un movimiento circular uniforme. Un automóvil que da vuelta a una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento. No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. En este caso el vector de aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (nunca hacia fuera) al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez. Vea la figura 136.

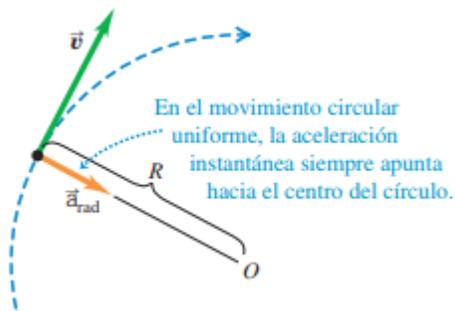


FIGURA 136.- MOVIMIENTO CIRCULAR. OBTENIDA DE FÍSICA UNIVERSITARIA VOL.1.

La magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme se relaciona de manera sencilla con la rapidez de la partícula y el radio del círculo tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

La aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea v . Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama aceleración centrípeta. La palabra “centrípeta” significa “que busca el centro” en griego. La figura muestra las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme. Observe que la magnitud de la aceleración centrípeta permanece constante pero su dirección cambia en función de la posición en que se encuentre el objeto, sin embargo, su dirección siempre es radialmente hacia el centro de curvatura de la trayectoria en que se mueve. Vea la figura 137.

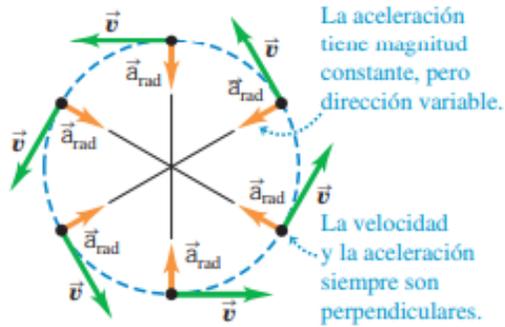


FIGURA 137.- ACCELERACIÓN CENTRÍPETA Y SU CAMBIO DE DIRECCIÓN.

La aceleración en el movimiento circular uniforme tiene algunas similitudes con la aceleración en el movimiento de proyectiles que no enfrenta resistencia del aire, pero también existen algunas diferencias importantes entre ambas. Tanto en el movimiento circular uniforme como en el movimiento de proyectiles la magnitud de la aceleración siempre es la misma. Sin embargo, en el movimiento circular uniforme la dirección de la aceleración cambia continuamente, de manera que siempre apunta hacia el centro del círculo. (En la parte superior del círculo, la aceleración apunta hacia abajo; en la parte inferior del círculo, la aceleración apunta hacia arriba.) En contraste, en el movimiento de proyectiles la dirección de es la misma en todo momento (la aceleración de la gravedad siempre se dirige verticalmente hacia abajo).

Sin más, a continuación, se muestran directamente los ejemplos que incluyen el estudio del movimiento circular uniforme.

Ejemplo 1.- Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una “aceleración lateral” de $0.96g$, que es $(0.96) \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) = 9.4 \frac{m}{s^2}$. Ésta es la aceleración centrípeta máxima que puede lograr el auto sin salirse de la trayectoria circular derrapando. Si el auto viaja a 40 m/s , ¿cuál es el radio mínimo de curva que puede describir? (Suponga que no hay peralte.). Este ejemplo fue tomado del libro de física universitaria con física moderna volumen 1.

Solución: Si el automóvil se moviera sobre curva plana (debido a que no se considera el peralte de la curva) a velocidad constante, entonces la aceleración que experimentaría sería la aceleración centrípeta que va hacia el centro de curvatura de la trayectoria, luego el radio

de la curva que evita que el automóvil se mantenga en movimiento sobre esta se obtiene de:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Con $a = 9.4 \text{ m/s}^2$ y $v = 40 \text{ m/s}$, resulta que el radio de curvatura es:

$$R = \frac{v^2}{a} = \frac{(40 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{9.4 \text{ m/s}^2} \rightarrow R = 170 \text{ m}$$

Por lo tanto, se requiere que la curva tenga un radio de 170 m para que el automóvil pueda transitar por ella sin problema. Si se considerara un radio menor para la misma y si el auto no cambiara su velocidad ni su aceleración centrípeta, este sería “expulsado” por la curva con la posibilidad de volcar fuera de esta.

Ejemplo 2: En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante en un círculo de 5 m de radio, dando una vuelta completa cada 4 s. ¿Qué aceleración tienen?. Este ejemplo fue tomado del libro de física universitaria con física moderna volumen 1.

Solución: Los pasajeros tienen un movimiento circular uniforme dado que su velocidad es constante. Se dice que los pasajeros en el juego mecánico dan una vuelta completa cada 4 s, entonces la velocidad a la que giran es igual al cociente entre la longitud de la circunferencia y el tiempo que tardan en recorrerla.

$$v = \frac{2\pi R}{t} \rightarrow v = \frac{2\pi(5 \text{ m})}{4 \text{ s}}$$

$$v \approx 7.85 \text{ m/s}$$

Para la aceleración experimentada se sabe que:

$$a = \frac{v^2}{R} \rightarrow a = \frac{(7.85 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{5 \text{ m}}$$

$$a = 12.32 \text{ m/s}^2$$

La aceleración impuesta por el juego mecánico es mayor a la aceleración debida a la gravedad.

4.5.3.1 Problemas propuestos.

1.- Una rueda de la fortuna de 14 m de radio gira sobre un eje horizontal en el centro (figura 138). La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7.00 m/s . ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar a) por el punto más bajo de su movimiento circular? b) ¿Por el punto más alto de su movimiento circular? c) ¿Cuánto tarda una revolución de la rueda?

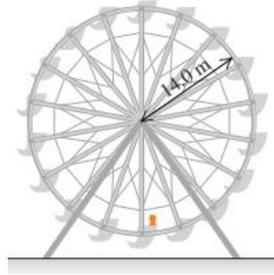


FIGURA 138.- MOVIMIENTO DE UNA NORIA.

2.- La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h . a) ¿Qué aceleración centrípeta tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g . b) Si a en el ecuador fuera mayor que g , los objetos saldrían volando hacia el espacio, ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación para que esto sucediera?

3.- Un modelo de rotor de helicóptero tiene cuatro aspas, cada una de 3.40 m de longitud desde el eje central hasta la punta. El modelo se gira en un túnel de viento a 550 rpm . a) ¿Qué rapidez lineal tiene la punta del aspa en m/s ? b) ¿Qué aceleración radial tiene la punta del aspa, expresada como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad, es decir, g ?

4.- El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (suponiendo que fuera circular) es de $1.5 \times 10^8\text{ km}$, y la Tierra la recorre en 365 días. a) Calcule la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en m/s . b) Calcule la aceleración radial de la Tierra hacia el Sol en m/s^2 . c) Repita los incisos a) y b) para el movimiento del planeta Mercurio (radio orbital de $5.79 \times 10^7\text{ km}$, periodo orbital de 88 días).

5.- En una prueba de un "traje g ", un voluntario se gira en un círculo horizontal de 7.0 m de radio. ¿Con qué periodo de rotación la aceleración centrípeta tiene magnitud de a) $3g$? b) $10g$?

5.4.4 Movimiento circular no uniforme

En la sección anterior se supuso que la rapidez de la partícula es constante. Si la rapidez varía, tenemos un movimiento circular no uniforme. Un ejemplo es un carro de montaña rusa que frena y se acelera al moverse en un lazo vertical. En el movimiento circular no uniforme, sigue existiendo la aceleración radial o centrípeta, que siempre es perpendicular a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, dado que la rapidez v tiene diferentes valores en diferentes puntos del movimiento, la aceleración centrípeta no es constante, esta es mayor donde la rapidez es mayor. En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración paralela a la velocidad instantánea. Ésta es la componente se llama aceleración tangencial para destacar que es tangente al círculo. Se sabe que la aceleración tangencial a_t es igual a la tasa de cambio de la rapidez respecto al tiempo, entonces:

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

El vector de aceleración de una partícula que se mueve con rapidez variable en un círculo es la suma vectorial de las componentes de aceleración radial y tangencial. Esta última tiene la dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando (figura 139). En el movimiento circular uniforme, la aceleración no tiene componente tangencial; no obstante, la componente radial es la magnitud de $\frac{d\vec{v}}{dt}$.

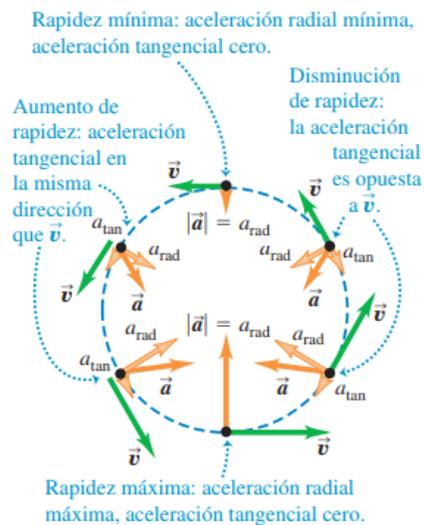


FIGURA 139.- ACCELERACIÓN Y VELOCIDAD DEL MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME.

Observe que las dos cantidades $\frac{d|\vec{v}|}{dt}$ y $\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$ no son iguales. La primera, al igual que la aceleración tangencial, es la tasa de cambio de la rapidez; es igual a cero siempre que una partícula se mueve con rapidez constante, incluso cuando cambia la dirección de su movimiento (como en el movimiento circular uniforme). La segunda es la magnitud de la aceleración vectorial; es igual a cero cuando el vector de aceleración de la partícula es cero, es decir, cuando la partícula se mueve en línea recta con rapidez constante. En el movimiento circular uniforme $\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = a_n$, en el movimiento circular no uniforme también existe una componente tangencial de la aceleración, de manera que:

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Este análisis aplica siempre que el movimiento se de en el plano, para generalizarlo a un movimiento tridimensional es necesario desarrollar nuevas herramientas entre vectores, lo cual por el momento se omite. En seguida se muestran problemas resueltos, donde se aplican los conceptos introducidos en esta sección, para que se familiarice con el tema.

Ejemplo 1.- Un automovilista viaja sobre una sección curva de una autopista de 2 500 *ft* de radio a una rapidez de 60 *mi/h*. El automovilista aplica repentinamente los frenos, provocando que el automóvil se desacelere a una tasa constante. Si se sabe que después de 8 *s* la rapidez se ha reducido a 45 *mi/h*, determine la aceleración del automóvil inmediatamente después de que se han aplicado los frenos.

Solución: cuando se activan los frenos por la acción del conductor, el automóvil disminuye la velocidad con la que viajaba por la curva, es decir, los frenos generan una desaceleración tangencial a la trayectoria curva $a_t = -a$, entonces la velocidad en función del tiempo estará dada por la expresión:

$$v = -at + v_0$$

Con $v_0 = \left(60 \frac{mi}{h}\right) \left(\frac{5280 ft}{1 mi}\right) \left(\frac{1 h}{3600 s}\right) = 88 ft/s$, la velocidad al tiempo $t = 8 s$ es de $v = \left(45 \frac{mi}{h}\right) \left(\frac{5280 ft}{1 mi}\right) \left(\frac{1 h}{3600 s}\right) = 66 ft/s$. Sustituyendo los valores en la ecuación anterior se tiene

$$66 \frac{ft}{s} = -a(8 s) + (88 \frac{ft}{s})$$

$$a = \frac{(88 - 66) ft/s}{8 s} \rightarrow \mathbf{a = 2.75 ft/s^2}$$

Por lo tanto, el valor de la desaceleración tangencial es de $a_t = -2.75 ft/s^2$. Además, también existe la componente normal de la aceleración, es decir, existe la aceleración centrípeta que mantiene el movimiento del auto sobre la curva cuya magnitud se obtiene de:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_n = \frac{\left(88 \frac{ft}{s}\right)^2}{2500 ft} \rightarrow \mathbf{a_n = 3.1 ft/s^2}$$

Se usa el valor de $v = 88 ft/s$ debido a que es el valor de la velocidad que se tuvo justo después de que se aplicaran los frenos. La magnitud de la aceleración impuesta al movimiento es entonces:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2.75)^2 + (3.1)^2} \rightarrow |\vec{a}| = \mathbf{4.14 ft/s^2}$$

La dirección de la aceleración \vec{a} respecto a su componente tangencial a la curva es de:

$$\tan(\alpha) = \frac{a_n}{a_t} = \frac{3.1 ft/s^2}{2.75 ft/s^2}$$

$$\alpha = 48.4^\circ$$

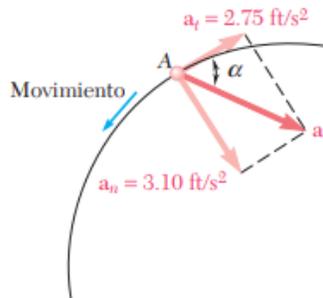


FIGURA 140.- COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN.

Ejemplo 2.- El pasador A, que se encuentra unido al eslabón AB, está restringido a moverse en la ranura circular CD vea la figura 141. Si en $t = 0$ el pasador empieza a moverse del reposo de manera que su rapidez aumenta a razón constante de 20 mm/s^2 , determine la magnitud de su aceleración total cuando a) $t = 0$. b) $t = 2 \text{ s}$.

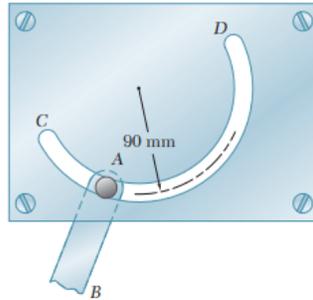


FIGURA 141.- PASADOR EN MOVIMIENTO CIRCULAR.

Solución:

a) Cuando el pasador inicia su movimiento, lo hace debido a que cambia su rapidez tangencial, por lo que en ese instante la única aceleración existente es la aceleración tangencial y por lo tanto la aceleración total es igual a la aceleración tangencial, de modo que $|\vec{a}| = a_t = 20 \text{ mm/s}^2$.

b) Cuando ya han transcurrido dos segundos, la rapidez del pasador ha cambiado de ser cero a ser cierta rapidez v con la que se mueve sobre la curva con aceleración tangencial a_t y aceleración centrípeta a_n , para las que se sabe:

$$a_t = 20 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

La rapidez tangencial del pasador en función del tiempo se obtiene por integración de la aceleración tangencial en el intervalo $0 \leq t \leq t$ y $0 \leq v \leq v$, resultando:

$$v = 20t$$

La rapidez al tiempo $t = 2 \text{ s}$ es de $v = 20(2) = 40 \text{ mm/s}$, por lo que la magnitud de la aceleración centrípeta es de:

$$a_n = \frac{\left(40 \frac{\text{mm}}{\text{s}}\right)^2}{90 \text{ mm}} \rightarrow a_n = 17.78 \text{ mm/s}^2$$

Por lo que la magnitud de la aceleración total es de $|\vec{a}| = \sqrt{(20)^2 + (17.78)^2} \rightarrow |\vec{a}| = 26.76 \text{ mm/s}^2$.

Ejemplo 3.- Un automovilista que viaja a lo largo de la parte recta de una carretera, está disminuyendo la rapidez de su automóvil a razón constante antes de salir de la carretera por una rampa circular con radio de 560 ft . Continúa desacelerando a la misma tasa constante de manera que 10 s después de entrar a la rampa, su rapidez ha bajado a 20 mi/h , a partir de entonces mantiene dicha rapidez. Si se sabe que a esta rapidez constante la aceleración total del automóvil es igual a un cuarto de su valor antes de entrar a la rampa, determine el valor máximo de la aceleración total del automóvil.

Solución: El movimiento del auto en la rampa está dado en dos etapas: la primera cuando entra en la rampa manteniendo una desaceleración que lo lleva a tener una rapidez de 20 mi/h a los 10 segundos, y la segunda en la que dicha rapidez se mantiene constante y por lo tanto no existe aceleración tangencial a_t . Se plantean las ecuaciones de solución para la segunda etapa, para posteriormente resolver la primera.

Dado que no existe componente tangencial de la aceleración en la segunda etapa resulta que:

$$|\vec{a}| = a_n = \frac{v^2}{R}$$

El valor de la rapidez es $v = 20 \frac{\text{mi}}{\text{h}} = \frac{88}{3} \text{ ft/s}$, por lo que la aceleración normal es

$$a_n = \frac{(88/3 \frac{\text{ft}}{\text{s}})^2}{560 \text{ ft}} \rightarrow a_n = 1.536 \text{ ft/s}^2$$

Dado que $\frac{1}{4} a_t = a_n$ por lo dicho en el enunciado, entonces:

$$a_t = 4a_n \rightarrow a_t = -6.144 \text{ ft/s}^2$$

El valor negativo indica que el auto está desacelerando. Ahora bien, en la primera etapa del movimiento se da la desaceleración por lo que el automóvil reduce su velocidad desde v_0 hasta $v = \frac{88}{3} \text{ ft/s}$ en los primeros 10 segundos. Además, la aceleración es máxima cuando $v = v_0$ dado que es cuando se comienza a desacelerar. Luego, durante el periodo de desaceleración se tiene:

$$v = v_0 + a_t t$$

Para cuando $t = 10 \text{ s}$ se tiene

$$\frac{88 \text{ m}}{3 \text{ s}} = v_0 + \left(-6.144 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (10 \text{ s})$$

$$v_0 = 90.77 \text{ m/s}$$

La aceleración máxima es entonces

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a = \sqrt{(-6.144)^2 + \left(\frac{90.77^2}{560}\right)^2}$$

$$\mathbf{a = 15.945 \text{ ft/s}^2}$$

4.5.4.1 Problemas propuestos.

1.- Determine el radio mínimo que debe usarse para una carretera si la componente normal de la aceleración de un automóvil que viaja a 45 mi/h no debe ser mayor que 2.4 ft/s^2 .

2.- A fin de probar el desempeño de un automóvil, éste es conducido alrededor de una pista de pruebas circular con diámetro d . Determine a) el valor de d si cuando la rapidez del automóvil es de 72 km/h , la componente normal de la aceleración es de 3.2 m/s^2 , b) la rapidez del automóvil si $d = 180 \text{ m}$ y se sabe que la componente normal de la aceleración es de $0.6g$.

3.- Determine la rapidez periférica de la cabina de pruebas centrífuga A, para la cual la componente normal de la aceleración es de $10g$.

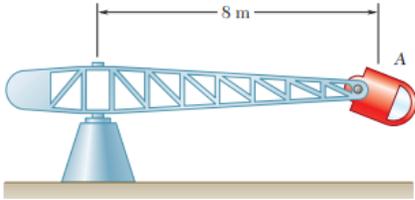


FIGURA 142.- CABINA CENTRIFUGA DE PRUEBAS.

4.- Un tren monorraíl parte desde el reposo en una curva de 400 m de radio y acelera a una razón constante a_t . Si la aceleración total máxima del tren no debe exceder 1.5 m/s^2 , determine a) la distancia más corta en la que el tren puede alcanzar una rapidez de 72 km/h , b) la razón constante de aceleración a_t correspondiente.

5.- Una pista al aire libre tiene un diámetro de 420 ft . Una corredora aumenta su rapidez a razón constante desde 14 hasta 24 ft/s en una distancia de 95 ft . Determine la aceleración total de la corredora 2 s después de que empieza a aumentar su rapidez.

4.5.5 Movimiento de proyectiles

Un proyectil es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su trayectoria. Para analizar este tipo de movimiento tan común, se parte de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración (debida a la gravedad) constante tanto en magnitud como en dirección. Se desprecian los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación terrestres. Como todos los modelos, éste tiene limitaciones.

El movimiento de un proyectil siempre está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial. La razón es que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede mover un proyectil lateralmente. Por lo tanto, este movimiento es bidimensional. La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que se pueden tratar por separado las coordenadas x y y del movimiento. La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. Así, se puede analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante. La figura 143 muestra dos proyectiles con diferente movimiento x , pero con idéntico movimiento y : uno se deja caer desde el reposo y el otro se proyecta horizontalmente, aunque ambos proyectiles caen la misma distancia en el mismo tiempo.

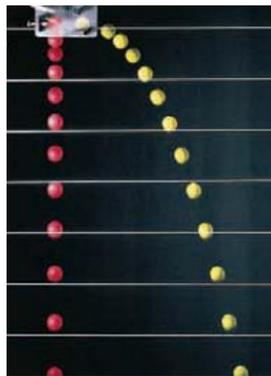


FIGURA 143.- BOLAS DE GOMA EN CAÍDA LIBRE.

Se pueden expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales. Las componentes del vector posición se muestran a continuación:

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

El subíndice cero en los términos x_0 , y_0 y v_0 hace referencia a los valores de las condiciones iniciales del movimiento, las que generalmente se consideran como el punto de referencia para el análisis. Las componentes cartesianas respectivas para la velocidad y aceleración del proyectil se obtienen derivando las ecuaciones para la posición, las cuales pueden reescribirse de la siguiente manera; si se toma en cuenta la dirección del vector velocidad dada el ángulo α tal como se muestra en la figura 144.

$$x = x_0 + v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y = y_0 + v_0 \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

Observe que finalmente, la posición final del proyectil queda determinada por la velocidad y el ángulo iniciales con los que este sea lanzado.

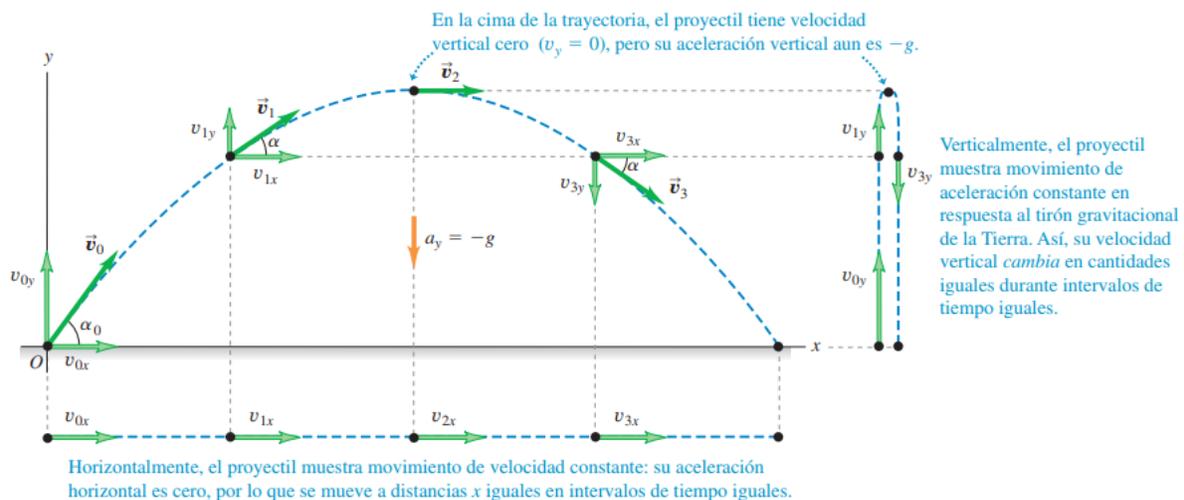


FIGURA 144.- DISTINTAS TRAYECTORIAS DE UN PROYECTIL.

Si se despeja la variable t de la ecuación para la posición x y se sustituye en la expresión para la posición y , se obtiene una función de grado dos para la variable x la cual, graficada

en un plano cartesiano de coordenadas, da como resultado una parábola que abre hacia abajo. Es por ello que comúnmente se le llama movimiento parabólico al movimiento de un proyectil.

Ejemplo 1.- Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s . Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.5 s .

Solución: dado que la velocidad con la que se lanza el acróbata desde el borde es horizontal, entonces el ángulo comprendido por el vector velocidad respecto a la horizontal es $\alpha = 0$. En base a esta condición y tomando como referencia para el origen de coordenadas el borde del risco, es decir se cumple $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, se pueden reescribir las ecuaciones de movimiento como:

$$x = 9t$$
$$y = -\frac{g}{2}t^2$$

La posición se obtiene evaluando el tiempo $t = 0.5 \text{ s}$ en las ecuaciones, de tal manera que se obtiene:

$$x = 9(0.5) \rightarrow x = 4.5 \text{ m}$$
$$y = -\frac{9.81}{2}(0.5)^2 \rightarrow y = -1.2 \text{ m}$$

Es decir, el acróbata se encuentra a 4.5 m a la derecha del risco y a 1.2 m por debajo de este. La distancia desde el borde es:

$$s = \sqrt{(4.5)^2 + (-1.2)^2} \rightarrow s = 4.7 \text{ m}$$

Para obtener la velocidad primero observe que las componentes de esta están dadas por:

$$v_x = x' = 9$$
$$v_y = y' = -gt$$

Evaluando al tiempo pedido resulta $v_x = 9 \text{ m/s}$ y $v_y = -4.9 \text{ m/s}$. La magnitud de dicha velocidad es:

$$v = \sqrt{(9)^2 + (-4.9)^2} \rightarrow v = 10.2 \text{ m/s}$$

La dirección del vector velocidad se encuentra mediante la expresión $\tan\alpha = v_y/v_x$ con lo que se obtiene:

$$\tan\alpha = -\frac{4.9}{9} \rightarrow \alpha = 29^\circ$$

En la figura 145 se muestra los parámetros anteriormente calculados.

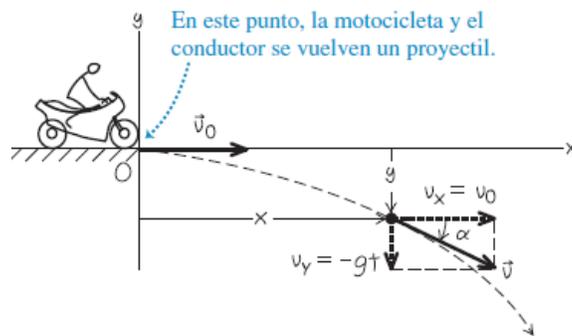


FIGURA 145.- TRAYECTORIA DEL MOTOCICLISTA.

Ejemplo 2.- Un bateador golpea una pelota de beisbol de modo que esta sale del bate a una rapidez $v_0 = 37 \text{ m/s}$ con un ángulo $\alpha_0 = 53.1^\circ$, en un lugar donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. a) Calcule la posición de la pelota y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2 \text{ s}$. b) Determine cuando la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto. c) Obtenga el alcance horizontal R , es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo. Vea la figura 146.

Solución:

a) Obteniendo las ecuaciones de movimiento:

$$x = 0 + 37 \cos(53.1^\circ) t$$

$$y = 0 + 37 \sin(53.1^\circ) t - \frac{g}{2} t^2$$

O bien:

$$x = 22.2t$$

$$y = 29.6t - 4.9t^2$$

Entonces, la posición de la pelota después de dos segundos de haber iniciado su movimiento es:

$$x = 22.2(2) \rightarrow x = \mathbf{44.4\ m}$$

$$y = 29.6(2) - 4.9(2)^2 \rightarrow y = \mathbf{39.6\ m}$$

Ahora bien, para obtener la magnitud y dirección de la velocidad se necesita conocer las componentes de dicha velocidad, para lo cual se tiene:

$$v_x = \mathbf{22.2\ m/s}$$

$$v_y = 29.6 - 9.8(2) \rightarrow v_y = \mathbf{10\ m/s}$$

La magnitud y dirección de la velocidad al tiempo $t = 2\ s$ son:

$$v = \sqrt{(22.2)^2 + (10)^2} \rightarrow v = \mathbf{24.3\ m/s}$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \rightarrow \alpha = \mathbf{24.2^\circ}$$

b) La pelota alcanza el punto más alto cuando la componente vertical de la velocidad es cero, es decir $v_y = 0$. Partamos de las ecuaciones de movimiento.

$$x = 22.2t$$

$$y = 29.6t - 4.9t^2$$

Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = 22.2 \frac{m}{s}$$

$$v_y = 29.6 - 9.8t \frac{m}{s}$$

Haciendo $v_y = 0$ se tiene:

$$0 = 29.6 - 9.8t \rightarrow t = \mathbf{3.02\ s}$$

Que es el tiempo para el cual el alcance vertical es máximo, cuyo valor es $h = y(3.02) = 44.7\ m$.

c) El alcance horizontal del proyectil se obtiene cuando este cae al suelo, es decir, cuando $y = 0$.

$$29.6t - 4.9t^2 = 0$$

$$t(29.6 - 4.9t) = 0$$

Lo anterior lleva a las soluciones $t = 0 \text{ s}$ y $t = 6.04 \text{ s}$. Evidentemente el primer valor de t se cumple al inicio del movimiento y por lo tanto el segundo valor corresponde al tiempo en que el proyectil cae, el alcance horizontal es entonces:

$$x = 22.2(6.04) \rightarrow x = 134 \text{ m}$$

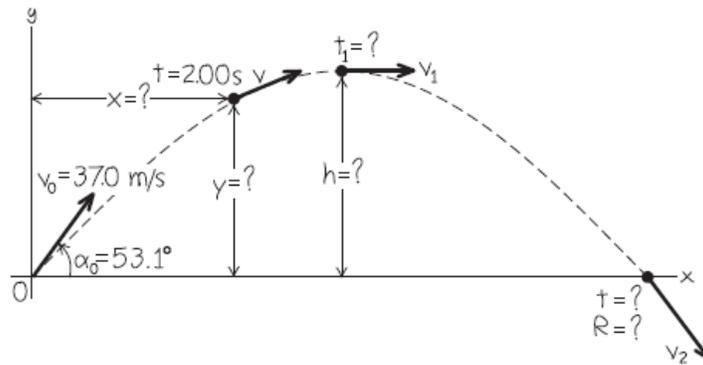


FIGURA 146.- SITUACIONES EN LA TRAYECTORIA DE LA PELOTA LANZADA.

Ejemplo 3.- Una rana salta con rapidez de 2.2 m/s y cae a 25 cm de donde saltó. ¿Con qué ángulo con respecto a la horizontal pudo haber saltado?

Solución: las ecuaciones de movimiento quedan expresadas en función del tiempo y el ángulo como sigue

$$x = 2.2\cos(\alpha)t$$

$$y = 2.2\text{sen}(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2$$

Al tiempo $t = t_i$ se cumple simultáneamente que $x = 0.25 \text{ m}$ y $y = 0$, por lo que sustituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2.2\cos(\alpha)t_i = 0.25$$

$$2.2\text{sen}(\alpha)t_i - \frac{g}{2}t_i^2 = 0$$

Realizando operaciones y reacomodando términos se tiene que:

$$t_i = \frac{0.25}{2.2\cos(\alpha)}$$

$$t_i(2.2\text{sen}(\alpha) - 4.9t_i) = 0$$

El valor $t_i = 0$ no es de interés en nuestra solución, en cambio el segundo factor proporciona la solución buscada.

$$2.2\text{sen}(\alpha) - 4.9t_i = 0 \rightarrow t_i = \frac{2.2\text{sen}(\alpha)}{4.9}$$

Haciendo $t_i = t_i$ y realizando operaciones

$$\frac{0.25}{2.2\cos(\alpha)} = \frac{2.2\text{sen}(\alpha)}{4.9}$$

$$1.225 = 2.2(2)\cos(\alpha)\text{sen}(\alpha)$$

Aplicando la sustitución trigonométrica $\text{sen}(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\text{sen}(\alpha)$ resulta:

$$1.225 = 2.2\text{sen}(2\alpha) \rightarrow \text{sen}(2\alpha) = 0.5568$$

$$\therefore \alpha = 16.9^\circ$$

El ángulo α esta medido respecto al eje horizontal, por lo tanto, es el ángulo con el que salto la rana.

4.5.5.1 Problemas propuestos.

1.- Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como no logra atraerlo, la cuidadora apunta su rifle con un dardo sedante directamente hacia el mono y dispara (figura 147). El astuto mono se suelta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle, intentando caer al suelo y escapar. Demuestre que el dardo siempre golpea al mono, sea cual fuere la velocidad inicial del dardo (siempre que dé en el mono antes de que éste llegue al piso).

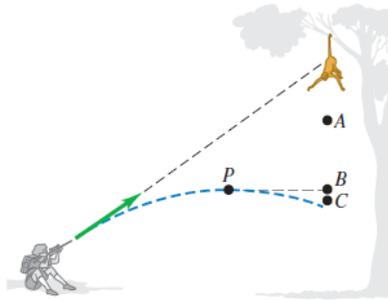


FIGURA 147.- DISPARO DEL DARDO AL MONO.

2.- Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo inicial α (entre 0° y 90°), deduzca expresiones generales para la altura máxima h y el alcance horizontal R . Para una v_0 , dada, ¿qué valor de α da la altura máxima? ¿Y qué valor da el alcance horizontal máximo?

3.- Conforme un barco se acerca al muelle a 45 cm/s , es necesario lanzar hacia el barco una pieza importante para que pueda atracar. El equipo se lanza a 15 m/s a 60.0° por encima de la horizontal desde lo alto de una torre en la orilla del agua, 8.75 m por encima de la cubierta del barco (figura 148). Para que el equipo caiga justo enfrente del barco, ¿a qué distancia D del muelle debería estar el barco cuando se lance el equipo? Se desprecia la resistencia del aire.

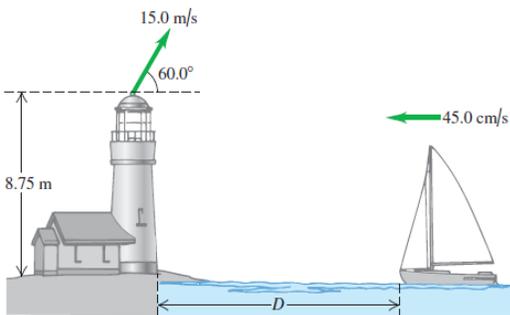


FIGURA 148.- BARCO APROXIMÁNDOSE AL MUELLE PARA ATRACAR.

4.- Una bola de nieve rueda del techo de un granero con inclinación hacia abajo de 40° (figura 149). El borde del techo está a 14.0 m del suelo y la bola tiene una rapidez de 7.00 m/s al salir del techo. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿A qué distancia del borde del granero golpea la bola el piso si no golpea otra cosa al caer? b) Un hombre de 1.9 m de estatura está parado a 4.0 m del granero. ¿Lo golpeará la bola?

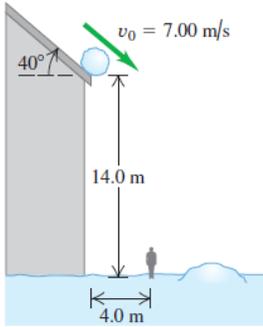


FIGURA 149.- BOLA DE NIEVE EN CAÍDA DESDE EL TECHO.

5.- Un profesor de física hacía acrobacias audaces en su tiempo libre. Su última acrobacia fue un intento por saltar un río en motocicleta (figura 150). La rampa de despegue está inclinada a 53.0° , el río tiene 40.0 m de ancho y la ribera lejana está a 15.0 m bajo el tope de la rampa. El río está a 100 m abajo de la rampa. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez se necesita en el tope de la rampa para alcanzar apenas el borde de la ribera lejana? b) Si su rapidez era sólo la mitad del valor obtenido en a), ¿dónde cayó?

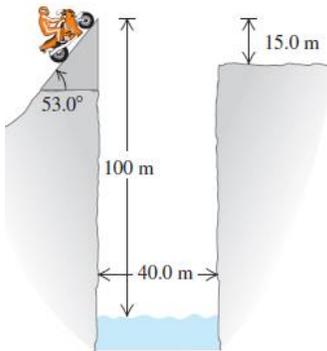


FIGURA 150.- PROFESOR DE FÍSICA EN SU ACROBACIA.

6.- Tres niños se lanzan bolas de nieve entre sí. El niño A lanza una bola de nieve con una velocidad horizontal v_0 . Si la bola de nieve pasa justo sobre la cabeza del niño B y golpea al niño C, determine a) el valor de v_0 , b) la distancia d. Vea la figura 151.

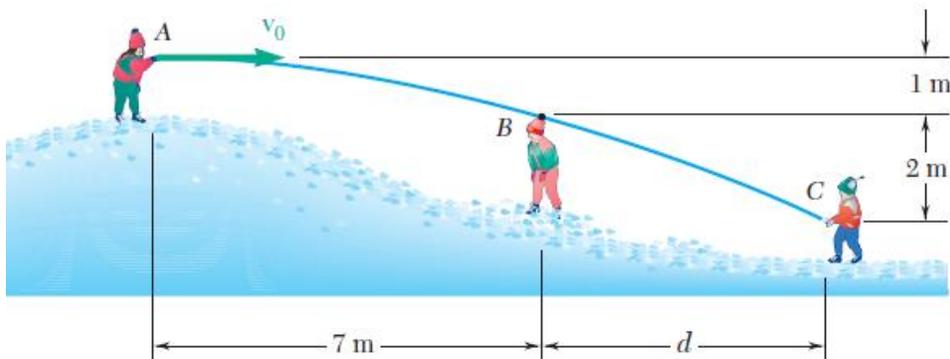


FIGURA 151.- NIÑOS JUGANDO EN LA NIEVE.

Problemas reto

1.- Dos tanques participan en un ejercicio de maniobras en terreno plano. El primero lanza una bala de práctica cargada con pintura, con rapidez de salida de 250 m/s a 10° sobre la horizontal, mientras avanza hacia el segundo tanque con una rapidez de 15 m/s relativa al suelo. El segundo tanque va en retirada a 35.0 m/s relativa al suelo, pero es alcanzado por la bala. Ignore la resistencia del aire y suponga que la bala golpea al tanque a la misma altura desde la que fue disparada. Calcule la distancia entre los tanques a) cuando se disparó la bala y b) en el momento del impacto.

2.- Un estudiante está sentado en una plataforma a una altura h sobre el suelo. Lanza un petardo horizontalmente con una rapidez v . Sin embargo, un viento que sopla paralelo al suelo imprime al petardo una aceleración horizontal constante de magnitud a . El resultado es que el petardo cae al suelo directamente abajo del estudiante. Determine la altura h en términos de v , a y g . Ignore el efecto de la resistencia del aire sobre el movimiento vertical.

3.- Un hombre sobre un vagón abierto de ferrocarril que viaja con rapidez constante de 9.10 m/s (figura 152) quiere lanzar una pelota a través de un aro estacionario a 4.90 m sobre la altura de la mano, de modo que la bola se mueva horizontalmente al pasar por el aro. El hombre lanza la bola con una rapidez de 10.8 m/s con respecto a sí mismo. a) ¿Qué componente vertical debe tener la velocidad inicial de la bola? b) ¿Cuántos segundos después del lanzamiento la bola atravesará el aro? c) ¿A qué distancia horizontal del aro se deberá soltar la bola? d) Cuando la pelota sale de la mano del hombre, ¿qué dirección tiene su velocidad relativa al marco de referencia del vagón? ¿Y relativa al marco de referencia de un observador parado en el suelo?

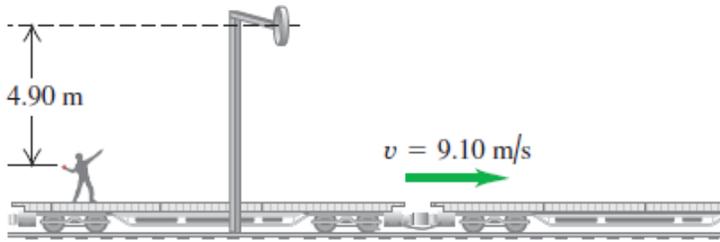


FIGURA 152.- VAGÓN DE TREN EN MOVIMIENTO.

4.- Un proyectil se lanza desde un punto P. Su movimiento es tal que su distancia respecto a P siempre aumenta. Determine el ángulo máximo arriba de la horizontal con que pudo haberse lanzado. Ignore la resistencia del aire.

5.- Una escopeta dispara muchos perdigones hacia arriba. Algunos viajan casi verticalmente, pero otros se desvían hasta 1° de la vertical. Suponga que la rapidez inicial de todos los perdigones es uniforme de 150 m/s e ignore la resistencia del aire. ¿En qué radio del punto de disparo caerán los perdigones?

6.- Un avión diseñado para dejar caer agua sobre incendios forestales vuela sobre una línea recta horizontal a 315 km/h a una altura de 80 m . Determine la distancia d a la que el piloto debe soltar el agua de manera que caiga sobre el incendio en B. vea la figura 153.

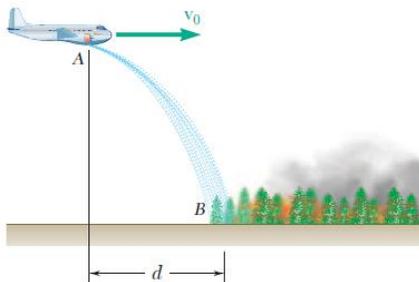


FIGURA 153.- AVIÓN ANTIINCENDIOS.

7.- Se vierte leche dentro de un vaso que tiene una altura de 140 mm y un diámetro interior de 66 mm (vea la figura 154). Si la velocidad inicial de la leche es de 1.2 m/s a un ángulo de 40° con la horizontal, determine el rango de valores de la altura h para los cuales la leche entrará en el vaso.

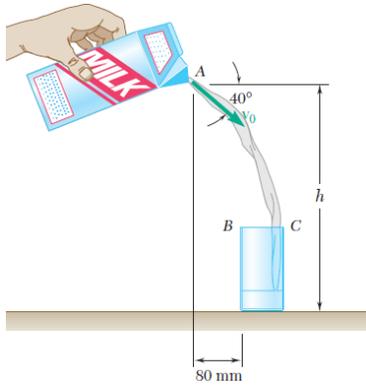


FIGURA 154.- CAÍDA DE LA LECHE AL VASO.

4.5.6 Movimiento plano

En esta sección se da una descripción vectorial del movimiento curvilíneo de una partícula tomando como referencia el análisis aplicado al modelo del movimiento en el plano. Se verá que las aceleraciones tangencial y normal de la aceleración descritas en la sección anterior son las magnitudes de los vectores tangencial y normal originados por el movimiento sobre la curva de la partícula. La deducción matemática para la expresión de la aceleración a no se aborda, sin embargo, puede consultarse en el libro Mecánica vectorial para ingenieros-dinámica, la aceleración neta de la partícula en movimiento está dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{R} e_n$$

De tal modo, las componentes escalares de la aceleración son:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

Y e_t, e_n son vectores unitarios que dan la dirección tangencial y normal respectivamente del movimiento de la partícula.

Las relaciones obtenidas expresan que la magnitud de la componente tangencial de la aceleración es igual a la razón de cambio de la velocidad de la partícula, en tanto que la magnitud de la componente normal es igual al cuadrado de la velocidad dividida entre el radio de curvatura de la trayectoria en P . Si aumenta la velocidad de la partícula, a_t es positiva y la componente vectorial a_t apunta en la dirección de movimiento. Si disminuye la velocidad de la partícula, a_t es negativa y a_t apunta contra la dirección del movimiento. La componente vectorial a_n , por otro lado, siempre se dirige hacia el centro de curvatura C de la trayectoria.

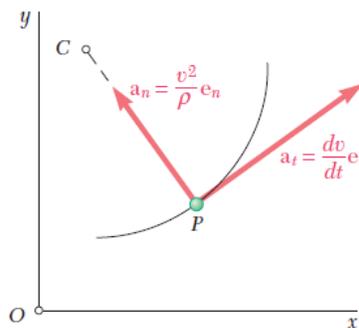


FIGURA 155. ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA CON MOVIMIENTO EN UNA CURVA.

Observe que si la componente normal de la aceleración es cero $a_n = 0$, entonces resulta que:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t$$

La condición anterior implica el movimiento rectilíneo no uniforme de la partícula, es decir que no hay cambio en la trayectoria de la partícula mientras se mueve, pero si existe cambio en la velocidad en la dirección de movimiento.

4.5.7 Movimiento relativo

Cuando se habla de movimiento relativo de una partícula respecto a un sistema de referencia se debe tener en cuenta que la descripción matemática del movimiento dependerá de si el sistema de referencia es fijo o, al igual que la partícula, se encuentra en movimiento. En el primer caso no se tiene nada nuevo respecto a lo abordado en las secciones anteriores donde el sistema de referencia, con el que se hace el análisis y la descripción del movimiento, siempre fue un sistema fijo; tome como ejemplo al acróbata del ejemplo 1 de la sección 4.5.5. para el que el sistema de referencia en base al cual se definía su movimiento era el borde del risco desde el que saltaba, el cual se mantenía fijo. Estrictamente hablando, el risco se mueve debido a la rotación de la tierra y por lo tanto no sería completamente fijo, sin embargo, el acróbata también rota junto con la tierra por lo que, respecto a un sistema inercial tanto el risco como el acróbata se pueden considerar fijos respecto al movimiento de rotación de la tierra, y el único movimiento que habría sería el del motociclista cayendo por la acción de la gravedad al momento en que sale del risco.

El caso en que tanto la partícula como el sistema referencia se encuentran en movimiento uno respecto al otro, es necesario especificar un punto fijo desde el cual se pueda describir cada uno de los movimientos tal y como se ve más adelante. El movimiento relativo entre sistemas en movimiento permite conocer con que velocidad debe despegar un jet de guerra desde un porta aviones en el mar o como usted debe manejar en la autopista para no chocar por detrás a otro automóvil.

Para revisar la descripción del movimiento entre sistemas al igual en movimiento, considere dos partículas A y B que se mueven en el espacio (figura 156); los vectores r_A y r_B definen sus posiciones en cualquier instante dado con respecto a un sistema de referencia fijo $Oxyz$. Considere ahora un sistema de ejes x', y', z' centrado en A y paralelo a los ejes x, y, z . Mientras el origen de estos ejes se mueve, su orientación permanece invariable; el sistema de referencia $Ax'y'z'$ está en traslación con respecto a $Oxyz$.

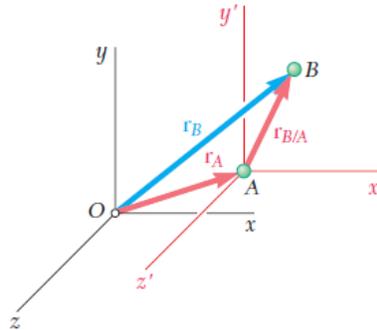


FIGURA 156.- SISTEMAS RELATIVOS DE REFERENCIA.

El vector $r_{B/A}$ que une a A y B define la posición de B relativa al sistema de referencia móvil $Ax'y'z'$. En la figura 156 se advierte que el vector de posición r_B de la partícula B es la suma del vector de posición r_A de la partícula A y del vector de posición $r_{B/A}$ de B relativa a A; se escribe

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

Al diferenciar la expresión anterior respecto al tiempo resulta que:

$$r'_B = r'_A + r'_{B/A}$$

Las derivadas r'_A y r'_B representan, respectivamente, las velocidades v_A y v_B de las partículas A y B. Como $Ax'y'z'$ está en traslación, la derivada $r'_{B/A}$ representa la razón de cambio de $r_{B/A}$ con respecto al sistema de referencia $Ax'y'z'$ así como con respecto al sistema de referencia fijo. Por lo tanto, esta derivada define la velocidad $v_{B/A}$ de B relativa al sistema de referencia $Ax'y'z'$ o, dicho de otra forma, la velocidad de B relativa a A. es decir

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

Si se diferencia nuevamente respecto al tiempo y se emplea $v'_{B/A}$ para definir la aceleración de B respecto a A, se tiene:

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

El movimiento de B con respecto al sistema de referencia fijo $Oxyz$ se denomina movimiento absoluto de B. Las ecuaciones que se obtuvieron en esta sección muestran que el movimiento absoluto de B puede obtenerse combinando el movimiento de A y el movimiento relativo de B con respecto al sistema de referencia móvil unido a A.

Las ecuaciones obtenidas anteriormente permiten modelar el movimiento de una partícula respecto a otra en base a ciertos parámetros como ya se vio. La posición de un cuerpo respecto a otro que está unido a este mediante una cuerda puede conocerse fácilmente empleando las ecuaciones obtenidas. A continuación, se presentan algunos ejemplos donde se emplean los conceptos desarrollados anteriormente, ponga especial atención al análisis empleado y resuelva los problemas propuestos.

Ejemplo 1.- El automóvil A viaja hacia el este con una rapidez constante de 36 km/h . Cuando el automóvil A cruza la intersección que se muestra, el automóvil B parte del reposo desde una distancia de 35 m al norte de la intersección y se mueve hacia el sur con una aceleración constante de 1.2 m/s^2 . Determine la posición, velocidad y aceleración de B relativa a A 5 s después de que A cruza la intersección. Ve la figura 157.

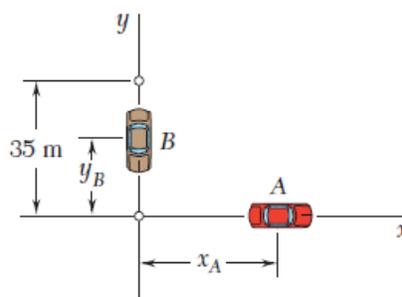


FIGURA 157.- AUTOMÓVILES EN MOVIMIENTO.

Solución: Para obtener lo pedido, primero se debe modelar el movimiento de A y B entonces, tomando en cuenta el esquema mostrado en la figura 157 donde el movimiento comienza justo cuando A pasa por el origen de coordenadas, se tiene:

Para A, $v_A = \left(36 \frac{km}{h}\right) \left(\frac{1000m}{1km}\right) \left(\frac{1h}{3600s}\right) = 10 \text{ m/s}$, dado que se mueve a velocidad constante y que parte del origen de coordenadas:

$$a_A = 0$$

$$v_A = 10 \text{ m/s}$$

$$x_A = 10t \text{ m}$$

Entonces, a los 5 segundos de haber iniciado su movimiento se tiene $a_A = 0$, $v_A = 10 \frac{m}{s}$ y $x_A = 50 \text{ m}$.

Para B. El movimiento de B parte del reposo y es uniformemente acelerado, luego:

$$a_B = -1.2 \text{ m/s}^2$$

$$v_B = -1.2t \text{ m/s}$$

$$y_B = 35 - 0.6t^2$$

Evaluando $t = 5 \text{ s}$ en las ecuaciones anteriores se tiene $a_B = -1.2 \text{ m/s}^2$, $v_B = -6 \text{ m/s}$ y $x_B = 20 \text{ m}$.

La posición, velocidad y aceleración de B debidos a A se obtienen a partir de los triángulos formados por los vectores respectivos a cada parámetro. Vea la figura 158.

$$\mathbf{r_{B/A}} = 53.9 \text{ m y } \alpha = 21.8^\circ$$

$$\mathbf{v_{B/A}} = 11.66 \text{ m/s y } \beta = 31^\circ$$

$$\mathbf{a_{B/A}} = 1.2 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

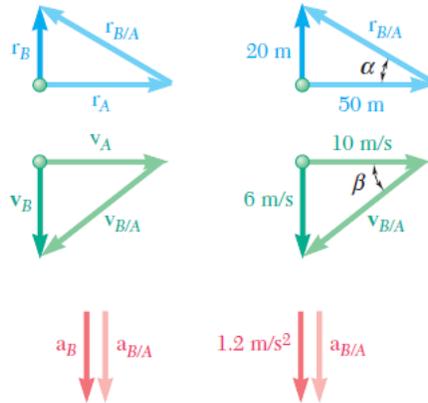


FIGURA 158.- VECTORES DE MOVIMIENTO.

Ejemplo 2.- La brújula de un avión indica que va al norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h . Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

Solución: La velocidad indicada por el velocímetro, es igual a la velocidad del avión relativa al aire, y la velocidad que se midió del viento se hizo respecto a la tierra, entonces para los respectivos sistemas de referencia se tiene:

$$v_{P/A} = 240 \frac{\text{km}}{\text{h}} \uparrow \quad y \quad v_{A/E} = 100 \text{ km/h} \rightarrow$$

Donde los subíndices P, A, E representan los sistemas avión, aire y tierra respectivamente. Las flechas indican la dirección de los vectores velocidad del avión y el viento. La velocidad del avión relativa a la tierra se obtiene de la suma vectorial de los vectores velocidad del viento y del avión debido que el avión se mueve respecto al aire y este a su vez lo hace respecto a la tierra.

$$v_{P/E} = v_{A/E} + v_{P/A}$$

Si se considera un sistema cartesiano de coordenadas, la suma de los vectores se expresa como:

$$v_{P/E} = (100i + 0j) + (0i + 240j)$$

$$v_{P/E} = 100i + 240j$$

La rapidez con la que se mueve el avión respecto a la tierra es $|v_{P/E}|$:

$$|v_{P/E}| = \sqrt{100^2 + 240^2} \rightarrow |v_{P/E}| = 260 \text{ km/h}$$

Y su dirección está dada por:

$$\tan(\beta) = \frac{240 \text{ km/h}}{100 \text{ km/h}} \rightarrow \beta = 67^\circ$$

El ángulo α medido respecto a la vertical que da dirección al vector velocidad es $\alpha = 90 - \beta \rightarrow \alpha = 23^\circ$.

En la figura 159 se muestra la representación gráfica del vector velocidad del avión respecto a la tierra.

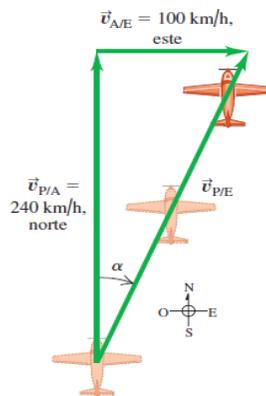


FIGURA 159.- AVIÓN EN MOVIMIENTO.

4.5.7.1 Problemas propuestos.

1.- Las velocidades de los esquiadores A y B son las que se muestran en la figura 160. Determine la velocidad de A con respecto a B.

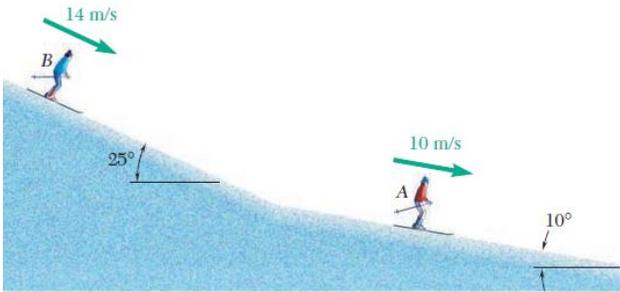


FIGURA 160.- ESQUIADORES EN MOVIMIENTO.

2.- Las velocidades de los trenes A y B son las que se indican en la figura 161. Si se sabe que la rapidez de cada tren es constante y B alcanza el cruce 10 min después de que A lo hizo, determine a) la velocidad relativa de B con respecto a A, b) la distancia entre los frentes de las máquinas 3 min después de que A pasó por el cruce.

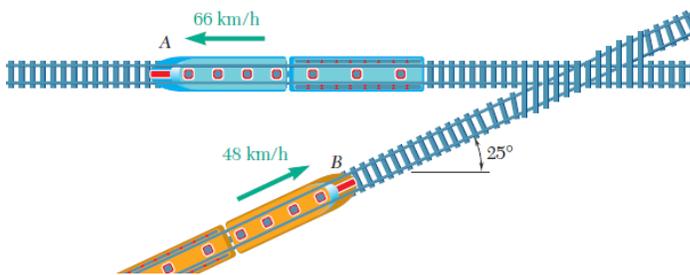


FIGURA 161.- CRUCE DE TRENES.

3.- Si se sabe que en el instante mostrado el bloque A tiene una velocidad de 8 in/s y una aceleración de 6 in/s^2 , ambas dirigidas hacia abajo sobre el plano inclinado, determine a) la velocidad del bloque B, b) la aceleración del bloque B. Vea la figura 162.

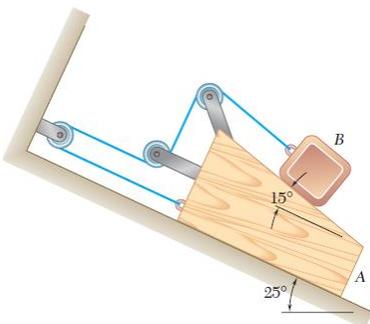


FIGURA 162.- DESLIZAMIENTO ENTRE BLOQUES.

4.- El ensamble de la barra A y la cuña B inicia su movimiento desde el reposo y se mueve hacia la derecha con una aceleración constante de 2 mm/s^2 . Determine a) la aceleración de la cuña C, b) la velocidad de la cuña C cuando $t = 10 \text{ s}$.

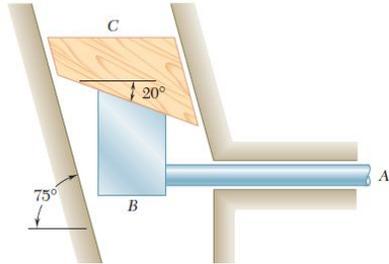


FIGURA 163.- DESLIZAMIENTO DE LA CUÑA.

5.- Cuando el camión que se muestra en la figura 164, empieza a retroceder con una aceleración constante de 1.2 m/s^2 , la sección externa B de su brazo comienza a retraerse con una aceleración constante de 0.5 m/s^2 en relación con el camión. Determine a) la aceleración de la sección B, b) la velocidad de la sección B cuando $t = 2 \text{ s}$.

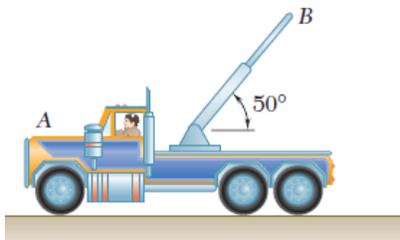


FIGURA 164.- GRÚA.

Problemas reto

1.- Determine la velocidad requerida de la banda B para que la velocidad relativa con la cual la arena golpea a dicha banda sea a) vertical, b) lo más pequeña posible.

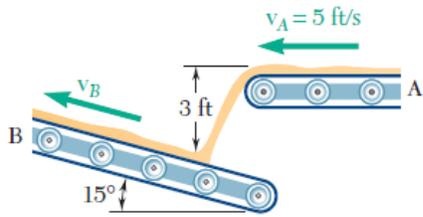


FIGURA 165.- BANDAS TRANSPORTADORAS DE MATERIAL.

2.- La banda transportadora A, que forma un ángulo de 20° con la horizontal, se mueve a una rapidez constante de 4 ft/s y se usa para cargar un avión. Si el trabajador lanza una bolsa de equipaje B con una velocidad inicial de 2.5 ft/s a un ángulo de 30° con la horizontal, determine la velocidad de la bolsa de equipaje relativa a la banda cuando cae sobre esta última, vea la figura 165.

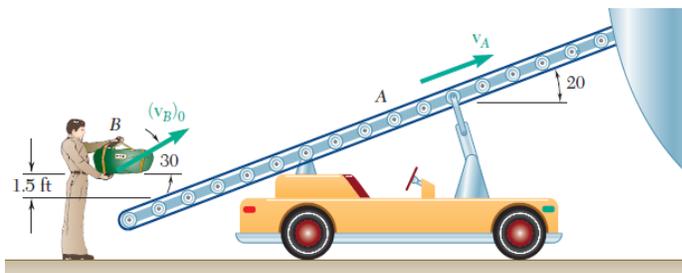


FIGURA 166.- BANDA TRANSPORTADORA.

3.- Si se sabe que en el instante mostrado el ensamble A tiene una velocidad de 9 in/s y una aceleración de 15 in/s^2 , ambas dirigidas hacia abajo, determine a) la velocidad del bloque B, b) la aceleración del bloque B.

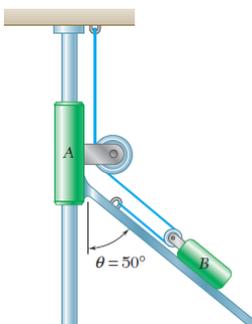


FIGURA 167.- SISTEMA BLOQUE-PASADOR.

4.- Cuando una pequeña lancha viaja hacia el norte a 5 km/h , una bandera montada sobre su popa forma un ángulo $\theta = 50^\circ$ con la línea central de la lancha en la forma que se indica en la figura 168. Un breve tiempo después, cuando el bote se desplaza hacia el este a 20 km/h , el ángulo θ es otra vez de 50° . Determine la rapidez y la dirección del viento.

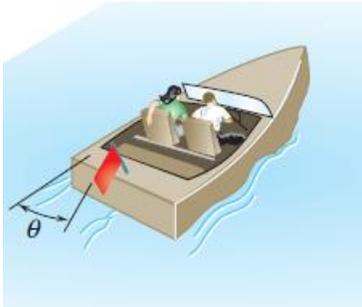


FIGURA 168.- LANCHA Y DIRECCIÓN DEL VIENTO.

5.- Un bloque deslizante A se mueve hacia abajo a una rapidez de 0.5 m/s , la velocidad con respecto a A de la porción B de la banda entre las poleas locas C y D es $v_{CD/A} = 2 \text{ m/s}$ por encima de la horizontal. Determine la velocidad de la porción CD de la banda cuando $\theta = 45^\circ$, la figura 169.

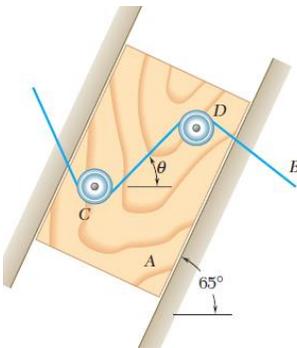


FIGURA 169.- BLOQUE SOSTENIDO CON POLEAS.

6.- Si se sabe que la velocidad del bloque B con respecto al bloque A es $v_{B/A} = 5.6 \text{ m/s}$ a 70° respecto a la horizontal, determine las velocidades de A y B, vea la figura 170.

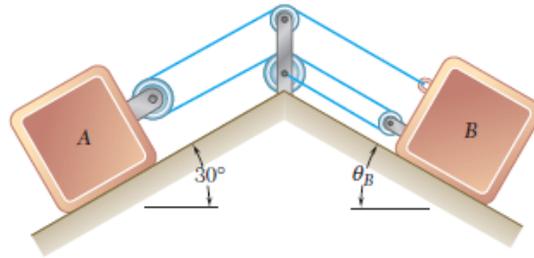


FIGURA 170.- BLOQUES DESLIZÁNDOSE EN PLANOS INCLINADOS.

4.5.8 Leyes del movimiento de Newton

Las leyes del movimiento que Newton planteó en su libro “Principios matemáticos de la filosofía natural” son ampliamente aplicadas en la ingeniería, es por ello que en esta sección se abordan los principios fundamentales que Newton planteo en su obra, de tal manera que la matemática empleada en la descripción de las leyes es de carácter básico, se da un mayor énfasis en presentar los conceptos físicos propios de una explicación satisfactoria y fácil de comprender.

Las leyes del movimiento son tres, la primera ley dice que si la fuerza neta sobre un cuerpo es cero, su movimiento no cambia. La segunda ley relaciona la fuerza con la aceleración cuando la fuerza neta no es cero. La tercera ley es una relación entre las fuerzas que ejercen dos cuerpos que interactúan entre sí.

Las leyes de Newton no son producto de deducciones matemáticas, sino una síntesis que los físicos han descubierto al realizar un sinnúmero de experimentos con cuerpos en movimiento. Newton usó las ideas y las observaciones que muchos científicos hicieron antes que él, como Copérnico, Brahe, Kepler y especialmente Galileo Galilei.

Con el desarrollo de esta sección, se incursiona en el campo de la cinética con la que ahora se puede describir el movimiento de cuerpos y objetos a partir de las causas físicas que generan dicho movimiento. En las secciones anteriores solo se abordó la descripción del movimiento sin prestar atención a las causas que lo generaban.

4.5.8.1 Primera ley de Newton

Si un cuerpo está en reposo y ninguna fuerza neta actúa sobre él, el cuerpo permanecerá en reposo. Tal y como ocurre con un libro que este sobre la mesa, el libro permanecerá en la misma posición hasta que alguna acción externa cambie su estado o posición. Algo similar ocurre con un cuerpo en movimiento a velocidad constante (para el que la aceleración es cero), el cuerpo mantendrá su estado de movimiento hasta que alguna fuerza externa cambie dicho estado, por ejemplo, si se le impone una aceleración al cuerpo, cambiara la rapidez con la que se mueve y por lo tanto su estado de movimiento a velocidad constante se pierde.

Como se mencionó, las leyes de Newton son el resultado de observaciones meticulosas de experimentos. En este caso, experimentos realizados con la finalidad de exponer las ideas anteriormente descritas, demuestran que si ninguna fuerza neta actúa sobre un cuerpo, éste permanece en reposo, o bien, se mueve con velocidad constante en línea recta. Una vez que un cuerpo se pone en movimiento, no se necesita una fuerza neta para mantenerlo en movimiento; a tal observación se le conoce como primera ley del movimiento de Newton: un cuerpo sobre el que no actúa una fuerza neta se mueve con velocidad constante (que puede ser cero) y aceleración cero.

La tendencia de un cuerpo a seguir moviéndose una vez iniciado su movimiento es resultado de una propiedad llamada inercia. Se usa inercia cuando se trata de sacar salsa de tomate de una botella agitándola. La tendencia de un cuerpo en reposo a permanecer en reposo también se debe a la inercia. Quizás el lector haya visto sacar un mantel de un tirón de debajo de la vajilla sin romper nada. La fuerza sobre la vajilla no basta para moverla mucho durante el breve lapso que toma retirar el mantel.

Un concepto fundamental para las leyes del movimiento de Newton es el conocido como marco de referencia inercial, para comprenderlo suponga que está en un autobús que viaja por una carretera recta y acelera. Si pudiera pararse en el pasillo usando patines, comenzaría a moverse hacia atrás relativo al autobús, conforme éste aumenta de rapidez vea la figura 171. En cambio, si el autobús frenara, usted comenzaría a moverse hacia delante, respecto del autobús, por el pasillo. En ambos casos, parecería que no se cumple la primera ley de Newton: no actúa una fuerza neta sobre usted, pero su velocidad cambia. ¿Qué sucede aquí? La cuestión es que el autobús acelera con respecto al suelo y no es un marco de referencia adecuado para la primera ley de Newton. Ésta es válida en algunos marcos de referencia, pero no en otros. Un marco de referencia en el que es válida la primera ley de Newton es un marco de referencia inercial. La Tierra es aproximadamente un marco de referencia inercial, pero el autobús no. Como se usó la primera ley de Newton para definir lo que es un marco de referencia inercial, se le conoce como ley de inercia.

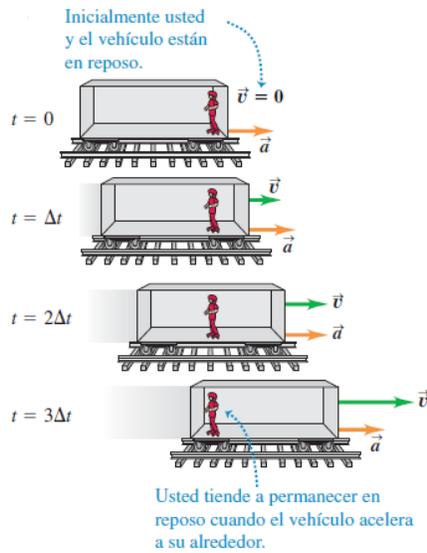


FIGURA 171.- VAGÓN EN MOVIMIENTO.

Por último, se mencionó sólo un marco de referencia (aproximadamente) inercial: la superficie de la Tierra. No obstante, hay muchos otros. Si se tiene un marco de referencia inercial A, donde se cumple la primera ley de Newton, cualquier otro marco de referencia B será inercial si se mueve con velocidad constante $v_{B/A}$ relativa a A. Para demostrarlo considere la siguiente ecuación:

$$v_{P/A} = v_{P/B} + v_{B/A}$$

Suponga que P es un cuerpo que se mueve con velocidad constante $v_{P/A}$ con respecto a un marco inercial A. Por la primera ley de Newton, la fuerza neta sobre este cuerpo es cero. La velocidad de P relativa a otro marco B tiene un valor distinto $v_{P/B} = v_{P/A} - v_{B/A}$, No obstante, si la velocidad relativa $v_{B/A}$ de los dos marcos es constante, $v_{P/B}$ también es constante, y B es un marco inercial. La velocidad de P en este marco es constante y la fuerza neta sobre P es cero, así que la primera ley de Newton se cumple en B. Observadores en los marcos A y B diferirán en cuanto a la velocidad de P, pero coincidirán en que es constante (aceleración cero) y no hay fuerza neta actuando sobre P.

4.5.8.2 Segunda ley de Newton

La segunda ley de movimiento de Newton tiene gran cantidad de aplicaciones para la mecánica y física clásica debido a que su enunciado y expresión matemática permite modelar casi cualquier fenómeno de cada una de dichas áreas. La segunda ley de Newton se puede enunciar de la manera siguiente:

“Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante”. (FERDINAND P. BEER, 2010)

El concepto que implica esta segunda ley de movimiento se comprende mejor al imaginar el siguiente experimento: una partícula se somete a una fuerza F_1 de dirección constante y magnitud constante F_1 . Bajo la acción de esa fuerza se observa que la partícula se mueve en línea recta y en la dirección de la fuerza. Al determinar la posición de la partícula en diferentes instantes, se encuentra que su aceleración tiene una magnitud constante a_1 . Si el experimento se repite con fuerzas F_2, F_3, \dots o de diferente magnitud o dirección, se descubre que cada vez que la partícula se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre ella y que las magnitudes a_1, a_2, a_3, \dots de las aceleraciones son proporcionales a las magnitudes F_1, F_2, F_3, \dots de las fuerzas correspondientes:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{constante}$$

El valor constante que se obtiene para el cociente de las magnitudes de las fuerzas y aceleraciones es característico de la partícula que se considera; se denomina la masa de la partícula y se denota mediante m . Cuando sobre una partícula de masa m actúa una fuerza F , la fuerza F y la aceleración a de la partícula deben satisfacer entonces la relación

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Esta relación proporciona una formulación completa de la segunda ley de Newton; no sólo expresa que la magnitud de F y a son proporcionales, sino también (puesto que m es un escalar positivo) que los vectores F y a tienen la misma dirección. La expresión anterior se puede generalizar a una cantidad n de fuerzas aplicadas al objeto, de manera que:

$$\sum F_n = ma$$

la fuerza neta generada por la acción de n fuerzas sobre un objeto de masa m produce una aceleración neta a sobre dicho objeto. El diseño de las motocicletas de alto desempeño depende fundamentalmente de la segunda ley de Newton. Para aumentar al máximo la aceleración hacia adelante, el diseñador hace a la motocicleta lo más ligera posible (es decir, reduce la masa al mínimo) y utiliza el motor más potente posible (es decir, aumenta al máximo la fuerza hacia adelante).



FIGURA 172 FÍSICA DE UNA MOTOCICLETA.

Las situaciones en las que se puede aplicar la segunda ley de Newton son variadas, a continuación, se muestran algunos ejemplos de la aplicación de dicha ley. Los problemas de contexto son los siguientes.

Ejemplo 1.- Un trabajador aplica una fuerza horizontal constante con magnitud de 20 N a una caja con masa de 40 kg que descansa en un piso plano con fricción despreciable. ¿Qué aceleración sufre la caja?

Solución: Considerando que el trabajador y la caja se encuentran sobre la misma superficie plana horizontal, el problema se puede tratar de manera escalar, por lo que la segunda ley de Newton se puede expresar como:

$$F = ma$$

Sabiendo que $F = 20 \text{ N}$ y $m = 40 \text{ kg}$ y suponiendo que no existe fricción entre la caja y el suelo se puede obtener el valor de la aceleración despejando a de la ecuación anterior

$$a = \frac{F}{m} \rightarrow a = \frac{20 \text{ N}}{40 \text{ kg}}$$

$$a = 0.5 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 2.- Un elevador y su carga tienen masa total de 800 kg y originalmente está bajando a 10 m/s ; se le detiene con aceleración constante en una distancia de 25 m . Calcule la tensión T en el cable de soporte mientras el elevador se está deteniendo.

Solución: La aceleración con la que se detiene el elevador es proporcionada por la fuerza de tensión del cable, el elevador baja debido a la acción de la aceleración de la gravedad. Si se aplica la segunda ley de Newton tomando como referencia el diagrama mostrado en la figura 173 se tiene:

$$\sum F_n = ma$$

$$T - mg = ma_y$$

O bien, $T = m(g + a_y)$. Observe que el movimiento se da solo en dirección vertical por lo tanto el vector aceleración tendrá solo componente en y , aunque para los fines de análisis no es necesario trabajar con la notación vectorial.

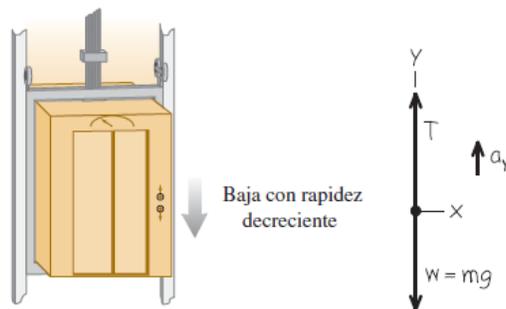


FIGURA 173.- ELEVADOR BAJANDO.

Dado el resultado de la interacción de las fuerzas de tensión y del peso del objeto es una aceleración constante a_y entonces, por lo visto anteriormente, la ecuación de movimiento del elevador se obtiene de:

$$\frac{dv}{dt} = a_y$$

Aplicando técnicas del cálculo diferencial

$$v \frac{dv}{dy} = a_y$$

Si se integra en el intervalo $25 \leq y \leq 0 \text{ m}$ y $10 \leq v \leq 0 \text{ m/s}$ y se aplica el teorema fundamental del cálculo resulta:

$$\frac{1}{2}(0^2 - 10^2) = a_y(0 - 25)$$

$$a_y = 2 \text{ m/s}^2 \uparrow$$

Con el valor de la constante se la aceleración gravitacional $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ el valor de la tensión T es

$$T = (800 \text{ kg})(9.8 + 4 \text{ m/s}^2)$$

$$T = 9940 \text{ N}$$

Ejemplo 3.- Un velero para hielo descansa en una superficie horizontal sin fricción. Sopla un viento constante (en la dirección de los patines del trineo), de modo que 4 s después de soltarse el velero adquiere una velocidad de 6 m/s. ¿Qué fuerza constante F_w ejerce el viento sobre el velero? La masa total del velero más el tripulante es de 200 kg.



FIGURA 174.- VELERO DESLIZÁNDOSE EN LA NIEVE.

Solución: El viento que sopla genera una fuerza de empuje sobre el velero lo cual causa que este se mueva en la dirección del viento, sin embargo, esto no sucede hasta que el velero se suelta. Dado que el viento sopla de manera constante, la fuerza de empuje también lo es y por lo tanto la aceleración aunada a dicha fuerza también es constante; por

esto y considerando el diagrama de la figura 174 y aplicando la segunda ley de newton se tiene:

$$F_W = m_0 a_x$$

Despejando la aceleración: $a_x = F_W/m$, esta aceleración genera el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado del velero, por lo que su ecuación de movimiento se obtiene de:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{F_W}{m}$$

Si se integra la ecuación anterior en el intervalo $0 \leq v_x \leq 6 \text{ m/s}$ y $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$ y aplicando el teorema fundamental del cálculo resulta

$$6 - 0 \text{ m/s} = \frac{F_W}{m_0} (4 - 0 \text{ s}) \rightarrow F_W = \frac{6m_0}{4}$$

$$F_W = \frac{\left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (200 \text{ kg})}{4 \text{ s}} \rightarrow F_W = \mathbf{300 \text{ N}}$$

Observe que no existe movimiento del velero en dirección vertical, es por ello que el velero se mantiene siempre sobre la superficie horizontal de hielo.

Ejemplo 4.- Una mujer de 50 kg se para en una báscula dentro del elevador del ejemplo 2. ¿Qué valor marca la báscula?

Solución: La aceleración encontrada en el ejemplo 2 es la aceleración que experimenta el conjunto elevador-mujer sin considerar la aceleración de atracción gravitacional g . La báscula mide la magnitud de la fuerza normal sobre su superficie que genera la mujer, el peso de la mujer debido a la gravedad es de $w = (50 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 490 \text{ N}$. El diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 175 lleva al siguiente planteamiento de la segunda ley de newton:

$$n - w = ma_y \rightarrow n = w + ma_y$$

$$n = 490 \text{ N} + (50 \text{ kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \rightarrow n = \mathbf{590 \text{ N}}$$

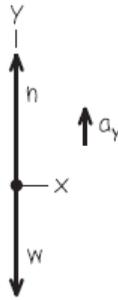


FIGURA 175.- DCL DE LA PERSONA EN EL ELEVADOR.

4.5.8.3 Tercera ley de Newton

La última de las leyes propuestas por Newton en su obra, es la conocida comúnmente como la ley de acción y reacción debido a que hace referencia a las interacciones entre los cuerpos. Una fuerza que actúa sobre un cuerpo siempre es el resultado de su interacción con otro cuerpo, así que las fuerzas siempre vienen en pares. No se puede tirar de una perilla sin que ésta tire de quien provoca la acción. Al patear un balón de fútbol, la fuerza hacia adelante que el pie ejerce sobre él lo lanza en su trayectoria, pero sentimos la fuerza que el balón ejerce sobre el pie vea la figura 176. Si patea un peñasco, el dolor que sentiría se debería a la fuerza que el peñasco ejerce sobre el pie.

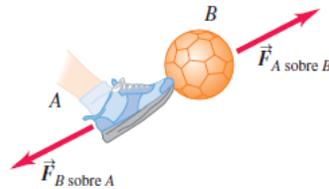


FIGURA 176.- FUERZAS DE ACCIÓN Y REACCIÓN AL PATEAR UN BALÓN.

En todos estos casos, la fuerza que se ejerce sobre el otro cuerpo tiene dirección opuesta a la que el cuerpo ejerce sobre el primero. Los experimentos muestran que, al interactuar dos cuerpos, las fuerzas que ejercen mutuamente son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Ésta es la tercera ley del movimiento de Newton y enuncia lo siguiente: “si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B (una “acción”), entonces, B ejerce una fuerza sobre A (una “reacción”). Estas dos fuerzas tienen la misma magnitud pero dirección opuesta, y actúan sobre diferentes cuerpos”.

4.5.9 Impulso, cantidad de movimiento lineal y conservación del movimiento lineal

Si en la ecuación $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se sustituye \mathbf{a} por $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ entonces se tiene

$$\sum \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

O, ya que la masa del objeto es constante

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Donde el producto de la masa m por el vector velocidad \mathbf{v} se llama cantidad de movimiento lineal de la partícula. La ecuación anterior expresa que la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula. En esta forma fue que Newton enunció originalmente la segunda ley de movimiento.

Debe notarse que la masa m de la partícula se supone constante en las ecuaciones mostradas anteriormente y no deben entonces usarse para resolver problemas que impliquen el movimiento de cuerpos, como cohetes, que ganan o pierden masa. Se desprende de la ecuación obtenida que la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}$ es cero cuando $\sum \mathbf{F} = 0$. De tal modo que si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la cantidad de movimiento lineal de la partícula permanece constante, tanto en magnitud como en dirección. Éste es el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal para una partícula, el cual puede reconocerse como un enunciado alternativo de la primera ley de Newton.

Si P denota la cantidad de movimiento lineal de una partícula u objeto, de tal forma que:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}$$

Entonces, se puede establecer una relación entre la cantidad de movimiento del objeto y la energía cinética E_k respectiva a su movimiento. Partiendo de la definición de la energía cinética y se reescribe la ecuación de tal modo que se obtiene:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} \rightarrow E_k = \frac{1}{2m} p^2$$

La relación anterior expresa que la energía cinética de un cuerpo en movimiento es directamente proporcional al cuadrado de la cantidad de movimiento lineal e inversamente proporcional al doble de la su masa. Observe que la cantidad P manejada es un escalar y no un vector, lo cual da congruencia al resultado ya que la energía es una cantidad escalar y no vectorial.

En cambio, si en la ecuación

$$\sum F = \frac{d}{dt}(mv)$$

Se mueve el diferencial de tiempo y se integra para los intervalos $0 \leq t \leq t$ y $v_0 \leq v \leq v$ resulta:

$$\int_0^t \sum F dt = \int_{v_0}^v d(mv)$$

$$\int_0^t \sum F dt = m(v - v_0)$$

Lo anterior se cumple siempre que la masa m sea constante. La ecuación anterior describe matemáticamente el fenómeno de impulso, aquella acción que una fuerza causa sobre un cuerpo en un intervalo de tiempo; dicha acción es igual al cambio en el movimiento lineal de la partícula siempre que esta mantenga su masa constante. La ecuación se puede escribir de la siguiente manera

$$\int_0^t \sum F dt = m\Delta v$$

Se deja expresada la integral del primer miembro dado que se deja generalizado el concepto para fuerzas tanto independientes como dependientes del tiempo.

En lo que respecta al principio de la conservación de la cantidad de movimiento como ya se mencionó se obtiene de $\sum F = 0$. Para definir matemáticamente este fenómeno, considérense dos cuerpos que chocan entre si donde el primero ejerce una fuerza $F_{1,2}$ sobre el segundo cuerpo, entonces por la ecuación para el impulso se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1,2} dt = m_1(\mathbf{v}_{f1} - \mathbf{v}_{i1}) = \mathbf{P}_{f1} - \mathbf{P}_{i1}$$

De igual manera, el segundo cuerpo ejerce una fuerza $F_{2,1}$ sobre el primer cuerpo, con magnitud igual a la fuerza $F_{1,2}$ pero en sentido contrario tal y como dicta la tercera ley de Newton, es decir

$$\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1} = 0$$

O bien $F_{1,2} = -F_{2,1}$. El impulso que ejerce el segundo cuerpo sobre el primero durante el mismo instante está dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2,1} dt = m_2(\mathbf{v}_{f2} - \mathbf{v}_{i2}) = \mathbf{P}_{f2} - \mathbf{P}_{i2}$$

Si se integra la ecuación $\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1} = 0$ en el intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1}) dt = 0$$

$$(\mathbf{P}_{f1} - \mathbf{P}_{i1}) + (\mathbf{P}_{f2} - \mathbf{P}_{i2}) = 0$$

Reescribiendo la ecuación se obtiene la expresión matemática para la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{P}_{f1} + \mathbf{P}_{f2} = \mathbf{P}_{i1} + \mathbf{P}_{i2}$$

La expresión anterior permite analizar el fenómeno de colisión entre dos cuerpos a partir de la cantidad de movimiento lineal que posea cada uno antes de chocar; después del choque se modifica la cantidad mv de cada cuerpo, sin embargo, la cantidad de movimiento total permanece invariante. Observe que en la deducción anterior no se consideraron otras fuerzas durante la colisión de los objetos más que las ejercidas entre si por la propia acción de choque, esto se debe a que las demás fuerzas que pudieran interactuar como la resistencia del aire se consideran despreciables en comparación con las fuerzas de choque que surgen durante el pequeño lapso de tiempo que tarda la colisión.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de problemas donde se aplican los conceptos abordados en esta sección.

Ejemplo 1.- Un pitcher de ligas mayores lanza una bola rápida que cruza el plato de “home” con una rapidez de 40.23 m/s con un ángulo de 5° debajo de la horizontal. Un bateador la golpea para un jonrón, lanzándola con una rapidez de 49.17 m/s en un ángulo de 35° arriba de la horizontal. Se requiere que la masa de la pelota sea de 0.145 kg , determine la magnitud del impulso del bate que recibe la pelota.

Solución: El impulso que proporciona el bate es el mismo que recibe la pelota para cambiar de trayectoria y rapidez después del choque, y su magnitud está dada por

$$\Delta p = m\Delta v$$

Donde Δv es el cambio de la rapidez de la pelota durante el impacto; a continuación, se determina dicho cambio a partir de la rapidez inicial y final de la pelota, para lo cual se descomponen los vectores velocidad en sus componentes rectangulares

$$v_{ix} = 40.23\cos 185^\circ \text{ m/s} \quad y \quad v_{iy} = 40.23\sen 185^\circ \text{ m/s}$$

$$v_{fx} = 49.17\cos 35^\circ \text{ m/s} \quad y \quad v_{fy} = 49.17\sen 35^\circ \text{ m/s}$$

Los cambios en la rapidez en cada componente se obtienen de $\Delta v_j = v_{fj} - v_{ij}$, de modo que

$$\Delta v_x = 80.35 \text{ m/s} \quad y \quad \Delta v_y = 31.71 \text{ m/s}$$

El cambio en la rapidez total es

$$\Delta v = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2}$$

$$\Delta v = 86.38 \text{ m/s}$$

Luego, la magnitud del impulso experimentado por la pelota es de

$$\Delta p = (0.145 \text{ kg})(86.38 \text{ m/s})$$

$$\Delta p = \mathbf{12.5 \text{ kg m/s}}$$

Que es igual al impulso proporcionado por el bate. Una pregunta importante lleva a cuestionar cuál es la fuerza necesaria para proporcionar dicho impulso, para ello considere que el tiempo de contacto entre la pelota y el bate fue de 1.2 ms y que la fuerza que se necesitó fue constante, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \Delta p$$

$$F \int_{t_1}^{t_2} dt = \Delta p \rightarrow F \Delta t = \Delta p$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F = \frac{12.5 \text{ kg m/s}}{0.0012 \text{ s}} \rightarrow F = \mathbf{10.4 \text{ kN}}$$

El resultado anterior implica una fuerza considerablemente grande por lo que al contacto entre la pelota y el bate se genera una deformación considerable en la pelota, en consecuencia, se utilizan varias capas de materiales muy resistentes para fabricar una pelota de beisbol, es debido a esto que las pelotas de este tipo generalmente son “duras” y pesadas.

El choque entre dos cuerpos puede dar diferentes trayectorias de los objetos a la salida de la colisión dependiendo, como ha de esperarse, de las trayectorias de los objetos antes del choque, así como también del tipo de interacción que se dé entre estos debido a los materiales de los que están hechos. Por ejemplo, no es lo mismo hacer chocar dos pelotas de futbol (hechas de materiales elásticos) que tomar dos bolas de hierro y hacerlas colisionar, obviamente en el primer caso la energía de choque provocará que cada pelota salga “disparada” a una rapidez similar a la rapidez antes del choque, en cambio para el segundo caso la energía de choque se transformará mayormente en sonido y una pequeña fracción de esta en calor, por lo que la rapidez que cada bola tendrá después del choque será mucho menor que la rapidez que tenían antes de colisionar.

Ejemplo 2.- Una bola de billar de masa $m = 0.250 \text{ kg}$ pega en el cojin de una mesa de billar con un ángulo de $\theta_1 = 30^\circ$, medido en sentido de las manecillas del reloj desde el eje x negativo, con una rapidez de $v_1 = 27 \text{ m/s}$. Rebota con un ángulo $\theta_2 = 19^\circ$ medido desde el eje x positivo en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj con una rapidez de $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Determinar el cambio en la cantidad de movimiento de la bola de billar.

Solución: Se requiere determinar la magnitud del cambio en la cantidad de movimiento de la bola de billar debido al choque con el cojín de la mesa de billar, para lo cual es necesario

determinar primero el cambio en la rapidez de la bola. Atendiendo a la definición de la cantidad de movimiento se tiene

$$\Delta p = m\Delta v$$

La cuantificación de la velocidad en sus componentes

$$v_{ix} = 27\cos 150^\circ \text{ m/s} \quad y \quad v_{iy} = 27\sin 150^\circ \text{ m/s}$$

$$v_{fx} = 10\cos 19^\circ \text{ m/s} \quad y \quad v_{fy} = 10\sin 19^\circ \text{ m/s}$$

Los cambios en la rapidez en cada componente se obtienen de $\Delta v_j = v_{fj} - v_{ij}$, de modo que

$$\Delta v_x = 32.84 \text{ m/s} \quad y \quad \Delta v_y = -10.24 \text{ m/s}$$

El cambio en la rapidez total es

$$\Delta v = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2}$$

$$\Delta v = 34.34 \text{ m/s}$$

Luego, el cambio en la magnitud del impulso experimentado por la bola es de

$$\Delta p = (0.250 \text{ kg})(34.34 \text{ m/s})$$

$$\Delta p = \mathbf{8.58 \text{ kg m/s}}$$

Ejemplo 3.- Un corredor de 83 kg salta hacia adelante hacia la zona de anotación con una rapidez de 6.5 m/s. Un defensa de 115 kg manteniendo los pies sobre el suelo, atrapa al corredor antes de que los pies del corredor toquen el suelo. ¿Cuál es la rapidez del corredor después de ser atrapado por el defensa?

Solución: Cuando el corredor es atrapado por el defensa, ambos cuerpos se vuelven un mismo objeto de masa $m = m_1 + m_2$ y se mueven con la misma rapidez final. El análisis del choque entre ambos cuerpos a partir de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento da:

$$P_{f1} + P_{f2} = P_{i1} + P_{i2}$$

O bien

$$m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2} = m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}$$

Dado que $v_{f1} = v_{f2} = v_f$, $v_{i1} = 6.5 \text{ m/s}$ y que $v_{i2} = 0$ (dado que el defensa se encuentra inicialmente en reposo), entonces la ecuación se puede reescribir como

$$(m_1 + m_2)v_f = 6.5m_1 \rightarrow v_f = \frac{6.5m_1}{m_1 + m_2}$$

Con $m_1 = 83 \text{ kg}$, $m_2 = 115 \text{ kg}$

$$v_f = \frac{\left(6.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(83 \text{ kg})}{(83 + 115)\text{kg}} \rightarrow v_f = 2.72 \text{ m/s}$$

La rapidez v_f es la rapidez que tanto el corredor como el defensa tienen después del impacto, por lo que la rapidez del corredor después de ser atrapado es de $v_{f1} = 2.72 \text{ m/s}$.

4.5.10 Trabajo y energía

La energía mecánica es una de las cantidades físicas más evocadas en la mecánica clásica debido a que todo el universo “práctico” sirve su funcionamiento de dicha cantidad. Un automóvil en movimiento tiene energía de movimiento o energía cinética, un reactor nuclear produce energía térmica o calórica a partir de la fisión de núcleos de uranio altamente radioactivo, una manzana en lo más alto de la copa de un árbol tiene energía potencial debida a la acción de la gravedad; también, un resorte que ha sido estirado o comprimido posee energía elástica, un televisor necesita de energía eléctrica para poder funcionar. Estos tipos de energía son aprovechados de distintas formas por el ser humano, por ejemplo, en los reactores nucleares la energía calorífica obtenida de la fisión nuclear es empleada para producir energía eléctrica mediante generadores que son movidos por la fuerza del vapor obtenido del agua calentada por la energía térmica que se libera de las reacciones nucleares.

Una persona al mover un objeto de un lugar a otro, ya sea por una superficie recta o inclinada, gasta energía corporal al hacerlo, dicha energía se emplea para generar una fuerza F con la que se saca del reposo al objeto y se inicia el movimiento. En ese instante, el objeto adquiere energía cinética, propia del movimiento sobre la superficie horizontal, esta energía que se obtiene al aplicar la fuerza sobre el objeto es igual al trabajo realizado por la fuerza sobre dicho objeto. En otras palabras, el trabajo obtenido por la acción de una fuerza F que es empleada para mover un cuerpo de una posición a otra es una energía. Dicho trabajo está definido matemáticamente por la siguiente expresión

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se da la definición de trabajo a partir de los vectores de fuerza y posición, sin embargo, el trabajo es una cantidad escalar y sus unidades son las propias la energía $N \cdot m$ o julios J en el sistema internacional de unidades o $lb \cdot ft$ en el sistema inglés. Observe que el integrando es el producto interno (una operación propia de la teoría del cálculo de varias variables) entre los vectores fuerza y distancia lo cual da como resultado una función escalar y por lo tanto el valor de la integral evaluada es una cantidad.

El campo vectorial de fuerza \vec{F} depende del medio en que se mueva el objeto, por ejemplo, si un objeto se mueve sobre una superficie horizontal en la superficie de la tierra, el campo de fuerzas que experimentará será el debido a la atracción gravitacional, el cual se

considera que permanecerá constante sobre toda la superficie terrestre, por lo tanto, para el análisis del trabajo ejercido para hacer que el objeto se mueva sobre la superficie no es necesario considerar el peso del objeto; se sabe que dicho trabajo está dado por

$$W = \int_a^b \vec{F} * d\vec{r}$$

O dado que solo se ejerce trabajo el plano horizontal, se plantean la fuerza y la distancia únicamente sobre dicha componente

$$W = \int_a^b F dx$$

Dado que el objeto se encuentra en movimiento, entonces, por la segunda ley de newton la fuerza F esta dada por

$$F = ma$$

Recordando que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

El trabajo que da dado por la integral en el intervalo $v_a \leq v \leq v_b$

$$W = \int_{v_a}^{v_b} mv dv$$

$$W = \frac{1}{2}m(v_b^2 - v_a^2)$$

Si inicialmente el objeto se encuentra en reposo $v_a = 0$ y al final del movimiento su velocidad es $v_b = v$, entonces la ecuación anterior se escribe como

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

Dado que el trabajo es igual a la energía cinética de movimiento E_k , entonces

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Como se ve en la ecuación, la energía cinética depende de la velocidad a la que se mueva el objeto, así como también de su masa.

El siguiente ejemplo muestra el cálculo de la energía cinética para un cuerpo en movimiento. Las ecuaciones para la energía generalmente son conocidas como ecuaciones de estado debido a que se pueden aplicar a puntos específicos del movimiento de un cuerpo sin importa por lo que haya pasado el cuerpo para llegar a dichos puntos.

Ejemplo 1.- Un auto móvil de masa $m = 1200 \text{ kg}$ se mueve en línea recta sobre una carretera. Inicialmente se movía con una velocidad de 15 m/s y después de un breve lapso de tiempo su velocidad era de 30 m/s , determine la energía cinética del móvil en dicho lapso de tiempo.

Solución: La energía cinética se debe al movimiento del móvil y su valor está dado por la expresión

$$E_k = \frac{1}{2} m \Delta v^2$$

Sustituyendo los datos dados se tiene

$$E_k = \frac{1}{2} (1200 \text{ kg}) \left[\left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right]$$

$$E_k = 405,000 \text{ J} = \mathbf{405 \text{ kJ}}$$

Otro tipo de energía manejado en la física clásica es la energía potencial de un objeto debida a la posición en que este se encuentre respecto a la fuente generadora del campo de fuerza. La tierra con su campo gravitacional mantiene a los objetos con masa sobre su superficie; debido a que es sumamente masiva ejerce una fuerza de atracción sobre estos tal y como lo demostró Newton. Pues bien, se sabe que la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre un objeto de masa m que se encuentre en su superficie está dada por

$$F = w = mg$$

Donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la constante de atracción gravitacional para las condiciones dadas. Si un cuerpo se mueve de una altura h_1 a otra h_2 (como pasaría si usted levantara las llaves de su auto desde el piso y las colocara sobre la mesa), entonces

$$W = \int_{h_1}^{h_2} mg \, dh$$

Integrando se tiene (siempre que el objeto se mueva desde una altura mayor a otra menor)

$$W = mg(h_2 - h_1)$$

Este trabajo es igual a la energía potencial del objeto debida al campo gravitacional de la tierra

$$E_p = mgh$$

La ecuación anterior nos dice que la energía potencial de un objeto depende de la posición a la que se encuentre respecto a la superficie de la tierra; a mayor altura mayor energía potencial. Las llaves que tiene sobre la mesa tienen mayor energía potencial estando ahí que estando en el piso.

Cuando el objeto se mueve de una altura menor a otra mayor, la fuerza necesaria para moverlo va en contra de la acción de la gravedad por lo que en este caso el trabajo efectuado será negativo, es decir

$$W = -E_p \rightarrow W = -mgh$$

Véase el siguiente ejemplo en el que se aplica este concepto de manera sencilla.

Ejemplo 2.- Una viga de acero que tiene una masa distribuida a lo largo de su longitud de 70 kg/m es levantada desde el nivel del piso hasta lo alto de un edificio de 15 m de altura. Si la longitud de la viga es de 7 m , determine la energía potencial que tiene la viga una vez que se encuentra en la cima del edificio.

Solución: Se quiere determinar la energía potencial que posee la viga debida a la altura a la que se encuentra, la masa de la viga no se especifica, pero se puede determinar a partir de la condición de masa distribuida con un simple análisis de unidades, para lo cual se sigue

$$m = \left(70 \frac{\text{kg}}{\text{m}}\right) (7 \text{ m}) \rightarrow m = 490 \text{ kg}$$

La energía potencial está dada por

$$E_p = mg(h_2 - h_1)$$

Si se considera al suelo como punto de referencia entonces $h_1 = 0$, por lo que la expresión anterior se puede escribir como

$$E_p = mgh$$

Con la que, sustituyendo datos resulta

$$E_p = (490 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (15 \text{ m})$$

$$E_p = 72030 \text{ J} = \mathbf{72.030 \text{ kJ}}$$

Las grúas empleadas en la construcción deben de tener un motor con la capacidad de producir esa cantidad de energía, dicha capacidad se designa como potencia del motor la cual se mide en caballos de potencia o Hp por sus siglas en inglés.

Un resorte también puede almacenar energía, a este tipo de energía se le llama energía potencial elástica y es debida a la capacidad de los materiales de deformarse y regresar a su estado inicial siempre que no sea sobrepasado su límite elástico, de lo contrario el material se deforma permanentemente y hasta puede llegar a romperse. De acuerdo con la ley de Hooke: “existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación dentro el limite elástico de un material”. (HIBBELER R. C., 2011). En términos de la fuerza que genera la deformación del material en el límite elástico se puede decir que la fuerza que ejerce un resorte en compresión es proporcional al desplazamiento de compresión considerando como constante de proporcionalidad el módulo elástico del material el que este hecho el resorte. Si x representa el desplazamiento de compresión del resorte y k la constante de elasticidad del material, entonces la expresión para la ley de Hooke es la siguiente

$$F = kx$$

Entonces, por la definición del trabajo, la energía que tiene el resorte al ser comprimido es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

O bien:

$$W = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

$$E_e = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Que es la expresión que da la energía potencial elástica E_e de un resorte que se comprime desde una distancia x_1 a otra distancia x_2 . Cuando a un resorte comprimido se le retira la fuerza f de compresión este regresa a su estado de equilibrio, para el cual tiene una longitud l_0 , liberando la energía almacenada en la compresión.

Cualquier objeto elástico sometido a compresión puede almacenar energía potencial elástica. La ejemplificación de un problema en el que se ve involucrado este tipo de energía se da a continuación.

Ejemplo 3.- Un resorte con constante de elasticidad de 500 N/m es comprimido desde la posición de equilibrio una distancia de 15 cm , determine la energía potencial elástica almacenada por el resorte.

Solución: Se aplica directamente la ecuación para la energía potencial elástica y se sustituyen los datos especificados.

$$E_e = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Con $k = 500 \text{ N/m}$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0.15 \text{ m}$ y haciendo operaciones se tiene

$$E_e = \frac{1}{2} \left(500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) [(0.15 \text{ m})^2 - (0 \text{ m})^2]$$

$$E_e = 5.63 \text{ J}$$

Los tipos de energía mecánica que se han presentado son los que generalmente se emplean en la dinámica de los cuerpos, sin embargo, se pueden identificar otros tipos de energías como la térmica y la eléctrica que son con las que interactúa en su vida diaria y son empleadas para su beneficio.

Atendiendo al enunciado de la conservación de la energía:

“La energía se puede transformar de una forma a otra, y transferir de un objeto a otro, pero la cantidad total permanece constante”. (DOUGLAS, 2006)

Se concluye que las variaciones de la energía en el universo siempre son compensadas dentro de un proceso, por ejemplo, en el motor de un automóvil la energía de explosión de la gasolina es aprovechada por el pistón para mover el auto lo que se traduce en energía mecánica de movimiento.

El proceso de transformación de la energía de un tipo a otro se resume en el principio de la conservación de la energía, el cual se enuncia matemáticamente de la siguiente manera

$$\Delta E = 0$$

O, en otras palabras: dentro de un proceso físico la variación de la energía total del sistema siempre es cero. Una forma alternativa de la ecuación anterior es expresarla en función de los tipos de energía que intervienen en el proceso, en este caso dado que solo interesan los tipos de energía propios del movimiento de un cuerpo en los que se desprecian las variaciones de la energía interna (lo cual no se podría suponer si se tratara de un gas) y otras, se tiene

$$\Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_e + W = 0$$

Donde se expresa que el cambio en las energías ya conocidas, más el trabajo realizado por una fuerza hacia el sistema debe ser cero durante el proceso de ocurrencia del movimiento.

Capítulo V. Conclusiones

5.1 Conclusión

El desarrollo del presente trabajo bajo el enfoque didáctico, con el fin de proporcionar al alumno una guía de estudio con la que pueda desarrollar el sentido autodidacta de estudio, resalta la importancia de generar una estructura organizada de enseñanza de la materia por parte del docente en la que haga especial énfasis en las ideas de aplicación y variantes de generalización que cada concepto implica, con el fin de expandir el panorama visual que el estudiante tenga del tema.

Lo anterior tiene como consecuencia próxima el hecho que el estudiante obtiene un mayor dominio en la materia y por lo tanto se encuentra preparado para abordar asignaturas posteriores que impliquen el análisis, cálculo y comprensión de conceptos que estén en la misma línea que las abordadas en el presente documento.

La triada concepto-aplicación-práctica es la estructura de enseñanza con la que mejores resultados se obtienen en la formación de los alumnos en carreras técnicas como la ingeniería. El desarrollo de las materias donde las matemáticas y sus métodos son el pilar del entendimiento de los fenómenos físicos, permite su manipulación, así como la implementación de técnicas con el fin de obtener un beneficio para la humanidad.

5.2 Recomendaciones

Dar continuación a los objetivos planteados en el documento y además aplicarlos en otras áreas de formación del ingeniero civil en esta institución para elevar el nivel de preparación de los estudiantes y así poder egresar a más profesionistas con capacidades de análisis y razonamiento que les permitan competir destacadamente en las áreas de trabajo tanto docentes como prácticas.

Se recomienda seguir trabajando en la bibliografía referente tanto a las áreas de ciencias básicas como en las asignaturas propias de la carrera de ingeniería civil en las que se involucren herramientas propias de la matemática y la física con el fin de fortalecer la formación de los estudiantes.

Implementar la triada concepto-aplicación-práctica en la enseñanza de las disciplinas de estática y dinámica para impulsar la preparación de los estudiantes de ingeniería aprovechando al máximo los recursos bibliográficos disponibles.

Se recomienda puntualmente expresar a detalle y hasta sus últimas consecuencias el entendimiento de los conceptos ya que son la materia prima de la expresión de las disciplinas técnicas, así como las matemáticas su lenguaje de comunicación.

Bibliografía

- ANSALONI, A. (s.f.). *MATEMATICAS PREUNIVERSITARIAS-TOMO II LOGARITMOS*. CARACAS: REVERTÉ VENEZOLANA.
- astro.puc*. (s.f.). Obtenido de http://www.astro.puc.cl/~avalcarc/FIS109A/08_Dinamica.pdf
- Carmen Chávez Reyes, A. L. (2005). *LA BIBLIA DE LAS MATEMÁTICAS*. Mexico D.F.: Letrarte, S.A.
- DefiniciónABC. (20 de Noviembre de 2018). Obtenido de DefiniciónABC: <https://www.definicionabc.com/general/algebra.php>
- DOUGLAS, G. C. (2006). *Física: principios con aplicaciones*. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- EcuRed. (29 de Noviembre de 2018). Obtenido de EcuREd: <https://www.ecured.cu/Est%C3%A1tica>
- FERDINAND P. BEER, E. R. (2010). *MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS DINÁMICA*. MEXICO, DF: McGrawHill.
- FisicaNet*. (s.f.). Obtenido de https://www.fisicanet.com.ar/fisica/cinematica/tp04_muv.php
- FRANK AYRES Jr., E. M. (s.f.). *Cálculo Diferencial e Integral. Tercera edision*. MacGraw-Hill.
- HIBBELER, R. (2010). *INGENIERIA MECANICA-DINAMICA Decimosegunda edicion*. MEXICO: PEARSON EDUCACION.
- Hibbeler, R. (2010). *Ingenieria Mecanica-Estatica*. Mexico: Pearson Educacion.
- HIBBELER, R. C. (2011). *MECANICA DE MATERIALES. Octava edición*. MÉXICO: PEARSON EDUCACIÓN.
- Martinez, J. S. (2018). *Curso Taller "Nivelacion para el ingreso a nivel superior"*. Misantla.
- matesfacil*. (s.f.). Obtenido de <https://www.matesfacil.com/fisica/cinematica/MRU/ejercicios-problemas-resueltos-movimiento-rectilineo-uniforme.html>
- PERRY, W. L. (1990). *ÁLGEBRA LINEAL CON APLICACIONES*. MÉXICO: MacGraw-Hill.
- previa.ucml.es*. (s.f.). Obtenido de https://previa.ucml.es/profesorado/ajbarbero/farmacacia/t02_dinamica.pdf
- SINGER, F. L. (1979). *MECÁNICA PARA INGENIEROS-ESTÁTICA*. MÉXICO: Harla.
- Wolfgang Bauer, G. D. (2014). *Fundamentos de Fisica*. México,Df: MacGrawHill.
- YOUNG, H. D. (2009). *Fisica universitaria volumen 1. Decimosegunda edición*. Mexico: PEARSON EDUCACIÓN.