



# **INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE MISANTLA**

---

## **EVALUACIÓN COMPUTACIONAL DEL MÉTODO DE MULTIMALLAS EN PROBLEMAS DE TRANSFERENCIA DE CALOR**

### **TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO ELECTROMECAÁNICO**

**PRESENTA**

**VÁZQUEZ BELTRÁN EDGAR**

### **ASESORES**

**Externo: Dr. J. Xamán Perfecto Villaseñor**

**Interno: MC. Vladimir Zagoya Juárez**

**MISANTLA, VERACRUZ**

**ENERO 2017**

## DEDICATORIAS

*A mis padres por haberme brindado la oportunidad de estudiar una carrera Universitaria, por su esfuerzo, dedicación y entera confianza.*

*A mi madre la Sra. Constanca Beltrán Sánchez, te has dedicado a amarme, con tanto amor que me has convertido en una persona amable y confiable. Gracias por todo el apoyo incondicional que sólo una madre puede dar durante todo este tiempo, por todas esas mañanas en las que te preocupabas porque no me fuera sin desayunar siempre al pendiente de mí. Por siempre mantenerse al pie del cañón en los momentos difíciles, por nunca darse por vencida. Me siento afortunado y no por estar vivo, si por tenerte a mi lado. La única en este mundo, nunca existirá mujer tan mágica, en otro vientre mi vida hubiera sido trágica. Solo quiero decirte madre te amo.*

*A mi padre Sr. Lic. en Física J. Atanasio Vázquez Mora, quisiera agradecerte por toda la paciencia, atención y perseverancia que me dedicas, cuando apenas era un niño, llegabas de trabajar y en lugar de llegar a descansar, te quedabas conmigo para jugar (tiempo de esparcimiento) en muchas ocasiones, mientras iba creciendo esos tiempos de esparcimiento se fueron cambiando por largas noches sobre todo cuando daba mis primeros pasos en la carrera, cuando me explicabas las matemáticas y como olvidar esos famosos “números imaginarios”. Gracias por tenerme la paciencia necesaria, ya que la virtud de heredar el conocimiento no es fácil ya que requiere paciencia y dedicación y tú las cumpliste con creces. Solo quiero decirte padre te amo.*

*“A súper mamá y súper papá el cansancio no les importa sabiendo que tienen hijos, es por eso que yo los admiro tanto porque a pesar de que están hartos siguen luchado, yo que más quisiera tener chingos de dinero y decirles a mis superhéroes que abandonen ya su empleo.”*

## **AGRADECIMIENTOS**

*Al **Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET)** por darme la oportunidad de continuar con mi formación académica para la elaboración de esta tesis.*

***Dr. J. Xamán Perfecto Villaseñor**, Asesor de mi estancia en el CENIDET, por todo su tiempo y dedicación durante mi estancia residencial. Gracias por todo, perdón por tan poco.*

*A todos los integrantes del laboratorio de modelación numérica del (CENIDET) por brindarme apoyo y amistad.*

***Instituto tecnológico superior de Misantla (ITSM)** por ser mi Alma Mater, a todos los docentes que me enseñaron y orientaron durante toda mi estancia como alumno.*

***M.C. Vladimir Zagoya Juárez** por sus todas sus enseñanzas durante sus clases, y por sus acertados comentarios en la realización de esta tesis.*

# INDICE

<b>DEDICATORIAS .....</b>	<b>II</b>
<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>III</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>VIII</b>
<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 UBICACIÓN DEL PROBLEMA.....	2
1.2 MARCO TEÓRICO .....	4
1.2.1 MECÁNICA DE FLUIDOS .....	4
1.2.2 FLUJOS LAMINAR Y TURBULENTO .....	4
1.2.3 TIPOS DE CAPAS LÍMITE .....	5
1.2.3.1 CAPA LÍMITE HIDRODINÁMICA .....	5
1.2.3.2 CAPA LÍMITE TÉRMICA.....	6
1.2.3.3 CAPA LÍMITE DE CONCENTRACIÓN .....	6
1.2.4 ECUACIONES GOBERNANTES .....	7
1.2.4.1 ECUACIÓN DE MASA .....	8
1.2.4.2 ECUACIÓN DE MOMENTUM.....	9
1.2.4.3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA .....	10
1.2.5 DINÁMICA DE FLUIDO COMPUTACIONAL.....	10
1.2.5.1 ANTECEDENTES .....	10
1.2.5.2 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (MDF).....	12
1.2.5.3 MÉTODOS DE VOLÚMENES FINITOS (MVF) .....	13
1.2.5.4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF) .....	15
1.2.5.5 INFLUENCIA DE LAS COMPUTADORAS.....	16
1.2.5.6 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL CFD.....	17
1.2.5.7 ESTRUCTURA DE LA DINÁMICA DEL FLUIDO COMPUTACIONAL CFD .....	18
1.2.5.7.1 PRE-PROCESO .....	19
1.2.5.7.2 SOLVER (PROCEDIMIENTO) .....	20
1.2.5.7.3 POST-PROCESO .....	20
1.2.5.8 ERRORES E INCERTIDUMBRES .....	21
1.2.5.8.1 ERRORES NUMÉRICOS.....	22
1.2.5.9 CONDICIÓN INICIAL Y DE FRONTERA .....	24
1.2.5.9.1 CONDICIÓN DE FRONTERA DE PRIMERA CLASE (DIRICHLET) .....	24
1.2.5.9.2 CONDICIÓN DE FRONTERA DE SEGUNDA CLASE (VON NEUMAN).....	25
1.2.5.9.3 CONDICIÓN DE FRONTERA DE TERCERA CLASE (ROBIN) .....	25

1.2.5.9.4 CONDICIÓN INICIAL .....	26
1.2.6 ANTECEDENTES .....	26
1.2.7 OBJETIVO.....	29
1.2.7.1 OBJETIVO ESPECIFICO .....	29
1.2.8 ALCANCE.....	30
1.2.9 ESTRUCTURA DE TESIS .....	30
1.2.10 CONCLUSIÓN .....	30
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>31</b>
<b>MODELO FÍSICO Y MATEMATICO.....</b>	<b>31</b>
2.1 MODELO FÍSICO DE CONVECCIÓN EN RÉGIMEN LAMINAR EN UNA CAVIDAD CUADRADA CALENTADA DIFERENCIALMENTE.....	32
2.2 MODELO MATEMÁTICO DE CONVECCIÓN EN RÉGIMEN LAMINAR EN UNA CAVIDAD CUADRADA CALENTADA DIFERENCIALMENTE .....	32
2.3 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA CAVIDAD CUADRADA .....	33
2.4 ANÁLISIS ADIMENSIONAL DE LAS VARIABLES QUE INTERVIENEN PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE CONVECTIVO $h$ EN UNA CAVIDAD CALENTADA DIFERENCIALMENTE .....	34
2.5 CONCLUSIÓN.....	37
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>39</b>
<b>MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS .....</b>	<b>39</b>
3.1 CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES .....	40
3.2 MÉTODOS DIRECTOS .....	40
3.2.1 REGLA DE CRAMER .....	41
3.2.2 ELIMINACIÓN DE GAUSS.....	42
3.2.3 ALGORITMO DE THOMAS .....	42
3.3 MÉTODOS INDIRECTOS.....	45
3.3.1 MÉTODO JACOBI.....	45
3.3.2 MÉTODO GAUSS-SEIDEL .....	46
3.3.3 ALGORITMO DE THOMAS PARA 2 DIMENSIONES .....	47
3.4 MÉTODO MULTIMALLA .....	50
3.4.1 FILOSOFÍA DEL MÉTODO MULTIMALLA.....	50
3.4.2 CLASIFICACIÓN DEL MÉTODO MULTIMALLA .....	51
3.4.3 MÉTODO MULTIMALLA TRADICIONAL .....	53
3.4.4 MULTIMALLAS DE CORRECCIÓN ADITIVA (ACM).....	56

3.4.4.1 TIPOS DE CICLOS DE MULTIMALLA.....	57
3.4.4.2 FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE CORRECCIÓN ADITIVA (ACM).....	58
3.5 CONCLUSIÓN .....	59
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>60</b>
<b>RESULTADOS .....</b>	<b>60</b>
4.1 EVALUACIÓN COMPUTACIONAL DEL TÉCNICA DE MULTIMALLAS DE CORRECCIONES ADITIVAS (ACM) 61	
4.2 ESFUERZO COMPUTACIONAL DE LA TÉCNICA DE MUTIMALLA EN CORRECCIONES ADITIVAS (ACM).....	61
4.3 EVALUACIÓN DEL MÉTODO GAUSS SEIDEL CON (ACM) .....	62
4.4 EVALUACIÓN DEL MÉTODO LBL-ADI CON (ACM) .....	78
4.5 EVALUACIÓN DEL MÉTODO LÍNEA POR LÍNEA CON GAUSS SEIDEL DE DIRECCIONES ALTERNANTES (LGS-ADI).....	92
4.6 CONCLUSIÓN.....	107
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>108</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>108</b>
5.1 GAUSS SEIDEL CON (ACM) .....	109
5.2 LBL-ADI CON (ACM) .....	109
5.3 LGS-ADI CON (ACM).....	109
5.4 CONCLUSIÓN GENERAL .....	110
5.5 SUGERENCIA PARA TRABAJOS FUTUROS.....	110
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>111</b>

## RESUMEN

En este reporte se presenta la evaluación computacional del método de Multimalla de correcciones aditivas (ACM), para mejorar el tiempo de cómputo de los distintos métodos de solución de ecuaciones algebraicas en un problema de transferencia de calor de una cavidad calentada diferencialmente en régimen flujo laminar. Las corridas computacionales fueron realizadas con los mismos parámetros, como son el paso de tiempo, factores de relajación, valores iniciales de las variables etc. Se demostró que el acoplamiento de la técnica multimalla (ACM) reduce el esfuerzo de computacional respecto al tiempo de cómputo considerablemente al acoplarlo al método de solución de ecuaciones algebraicas LGS-ADI.

## **ABSTRACT**

This thesis presents the computational evaluation of the Multimalla method of additive corrections (ACM), to improve the computation time of the different methods of solving algebraic equations in a problem of heat transfer of a cavity heated differently in laminar flow regime. The computational runs were performed with the same parameters, such as the time step, relaxation factors, initial values of the variables etc. It was demonstrated that the Multimalla technique coupling (ACM) reduces the computational effort with respect to the computation time considerably when coupled to the solution method of LGS-ADI algebraic equations.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta la ubicación del problema del presente trabajo de tesis, el cual surge al intentar dar solución a problemas no-lineales de transferencia de energía a través de las técnicas numéricas. Esto es, el método de solución de ecuaciones algebraicas (Gauss-Seidel, TDMA, etc), no es eficiente debido a la complejidad del problema, por lo que se busca una alternativa de mejorar el método de solución, entre ellos, existe el método de Multimalla. Posteriormente, se presenta el marco teórico, la revisión bibliográfica, el objetivo y el alcance del presente trabajo de tesis.

## 1.1 UBICACIÓN DEL PROBLEMA

En ingeniería se presentan problemas de particular interés los cuales pueden resolverse por distintos métodos analíticos, métodos numéricos y experimentales. Los métodos analíticos resuelven problemas lineales los cuales no representan un alto grado de complejidad, pueden ser solucionados con alguno de tantos métodos de solución que existen. El método experimental en la mayoría de las ocasiones no representa una viabilidad acertada ya sea por el alto costo de los equipos, y el manejo del mismo puede llegar a complicarse y por la seguridad de la persona o personal involucrado, pero afortunadamente los métodos numéricos son herramientas muy poderosas para la solución de problemas. Pueden manejar sistemas de ecuaciones con un gran número de incógnitas, no lineales y geometrías complejas prácticamente no tienen ninguna restricción. Los resultados pueden ser obtenidos en un tiempo relativamente corto. Con el uso de los métodos numéricos, se obtienen resultados aproximados, por lo tanto, se tienen que desarrollar criterios para determinar qué tan satisfactorios son los resultados obtenidos, deben ser lo suficientemente exactos o sin sesgos para no tener inexactitud en nuestro cálculo. El análisis numérico es de suma importancia ya que nos permite solucionar problemáticas del mundo real, la complejidad de estos problemas por ser no-lineales y geometrías arbitrarias complejas. El sistema de ecuaciones algebraicas que representa el sistema se vuelve grande para resolverlo con los métodos directos como pueden ser la ley de Cramer, eliminación de Gauss, etc. Estos métodos directos son eficaces para dar solución, pero requieren gran cantidad de almacenamiento y demasiado tiempo de cómputo. También existen los métodos indirectos los cuales van calculando progresivamente hasta llegar al resultado. Entre ellos están el método de Jacobi, Gauss-Seidel, etc. Son usados para resolver sistemas de ecuaciones lineales, normalmente se usan para mallas donde el número ecuaciones algebraicas no es tan grande. Al dar solución a problemas no lineales tratamos con más de un fenómeno físico de transporte, en particular nos interesa lo referente al fenómeno transferencia de energía, lo que involucran este fenómeno son: mecánica de fluidos, transferencia de calor, transferencia de masa,

convección natural, etc. Las modelaciones de estos fenómenos físicos generan modelos matemáticos de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), estos modelos matemáticos pueden tener tantas (EDP), como lo demande la complejidad de la problemática. Esta clase de sistemas de (EDP) se tienen que resolver a través de técnicas tales como: el método de diferencias finitas, el método de volumen finito y el método de elemento finito. Recomendable implementar la técnica de volumen finito, por su versatilidad y robustez, ya que se puede usar para discretizar la ecuación de conservación de la masa, momentum y la energía. La gran ventaja de implementar esta técnica es que la discretización espacial aplica directamente en el espacio físico del problema, esto reduce la ecuación diferencial parcial a una expresión algebraica mediante una integración sobre volumen de control. Para resolver las ecuaciones discretizadas se puede utilizar algún método de solución directa. Para analizar nuestro caso particular nos centraremos en los siguientes métodos de solución de ecuaciones algebraicas GS (Método Gauss-Seidel), LBL (Método Línea por Línea), LBL-ADI (Método de Línea por Línea de Direcciones Alternantes, LGS-ADI (Método de Línea con Gauss-Seidel de Direcciones Alternantes). Debido a la complejidad del problema por ser no-lineal esto hace que es el sistema a resolver sea complejo lo cual hace que el algoritmo se vuelva deficiente pues requiere de mayor recurso de cómputo. Para resolver esta situación se implementará la técnica de multimalla, la cual ayuda acelerar el proceso iterativo de los métodos de solución de ecuaciones algebraicas mencionado En el uso de esta técnica se tiene que diseñar los ciclos para mejorar la eficiencia del método de soluciones logrando determinar eficientemente los errores en un menor tiempo de cómputo. Esta técnica se implementará en un problema de convección natural en régimen de flujo laminar en una cavidad calentada diferencialmente. Con la finalidad de obtener parámetros de optimización en el modelado de la convección natural.

## 1.2 MARCO TEÓRICO

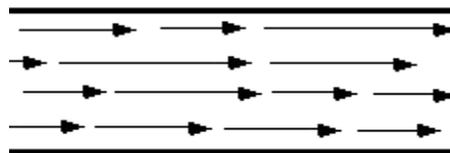
Se describen conceptos básicos de mecánica de fluidos, transferencia de calor, termodinámica y métodos numéricos aplicados a ecuaciones diferenciales.

### 1.2.1 MECÁNICA DE FLUIDOS

Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente bajo la aplicación de un esfuerzo de corte (tangencial) sin importar cuán tan pequeño pueda ser este esfuerzo. Los fluidos comprenden las fases (líquida y gaseosa o de vapor). El estudio de los fenómenos asociados a los fluidos y/o transferencia de calor, la ciencia los describe a través de modelos matemáticos, en general para representar la dinámica de fluidos y transferencia de calor para ello se usan las ecuaciones de conservación, la representación de estos modelos matemáticos pueden ser simples o complejos dependiendo del fenómeno bajo el estudio, estos modelos matemáticos se fundamentan en el principio de conservación por lo que pueden expresarse mediante ecuaciones de conservación. Por lo que es viable que cada una de estas ecuaciones que representa el modelo matemático y sus variables pueden ser representados a través de la ecuación general de convección-difusión para obtener su solución.

### 1.2.2 FLUJOS LAMINAR Y TURBULENTO

Un flujo laminar, es ordenado, es decir se mueve como clasificado en capas sin que estas se mezclen entre sí, se mueven unas sobre otras.



*Figura 1.1 flujo laminar*

Un flujo turbulento, se considera como caótico, al contrario del laminar, éste mezcla sus capas clasificadas generando un movimiento del fluido desordenado.



**Figura 1.2** Flujo turbulento

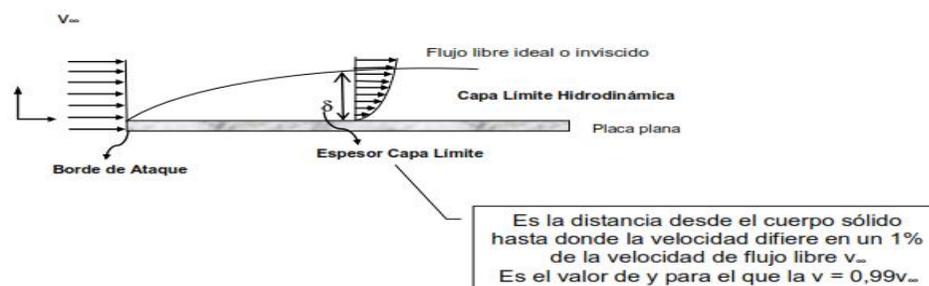
### 1.2.3 TIPOS DE CAPAS LÍMITE

- Capa Límite Hidrodinámica.
- Capa Límite Térmica.
- Capa Límite de concentración.

Hasta ahora, el termino capa limite solo se ha referido a los efectos viscosos asociados con un fluido que fluye junto a una superficie sólida que tiene la misma temperatura que el fluido.

#### 1.2.3.1 CAPA LÍMITE HIDRODINÁMICA

La capa limite hidrodinámica es la región próxima a la superficie del solido donde las fuerzas viscosas actúan, esto se explica por el gradiente de momento que existe entre las capas de fluido cerca de la pared y la corriente del fluido. Si existe alguna diferencia de temperaturas entre el fluido y la superficie del solido aparecerá entonces un flujo de calor que, siguiendo con el desarrollo de las capas limites, tendrá que definirse como la región donde los gradientes de temperatura estén presentes.

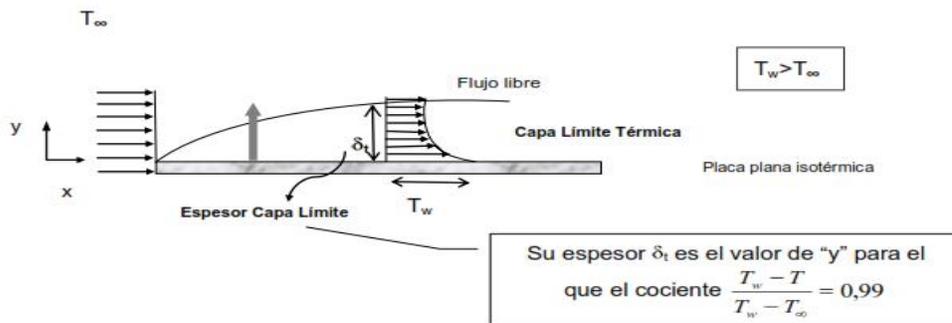


**Figura 1.3** Capa límite Hidrodinámica

### 1.2.3.2 CAPA LÍMITE TÉRMICA

La capa límite térmica es la capa principal de interés en el análisis de problemas de transferencia de calor. Es una zona delgada en inmediato contacto con una superficie sólida isotérmica en la cual la transferencia de calor ocurre por conducción debido a que en la superficie no hay movimiento y en la región adyacente el régimen de flujo es laminar y en consecuencia no hay mezcla del fluido en la dirección del flujo de calor.

Es decir que la máxima resistencia a la transferencia de calor en el mecanismo de convección se verifica en la zona de la capa límite.



**Figura 1.4** Capa límite térmica

### 1.2.3.3 CAPA LÍMITE DE CONCENTRACIÓN

Así como las capas térmicas hidrodinámica y térmica determinan la fricción de la pared y la transferencia de calor por convección, la capa límite de concentración determina la transferencia de masa por convección. Si una mezcla binaria de las especies químicas A y B fluyen sobre una superficie y la concentración de la especie A en la superficie,  $C_{A,S}$  difiere de la concentración en el flujo libre  $C_{A,\infty}$  se producirá una capa límite de concentración.

#### 1.2.4 ECUACIONES GOBERNANTES

Para predecir el comportamiento de los fluidos, transferencia de calor etc., en un sistema bajo estudio es necesario un modelo matemático que represente el comportamiento del fenómeno, este consiste en la formulación de las ecuaciones gobernantes generales.

La formulación de las ecuaciones gobernantes es muy importante conceptualmente debido a que se adoptan hipótesis que posteriormente se consideran si son admisibles o no para la representación de un fenómeno en particular. [Xamán y Gijón Rivera (2016)].

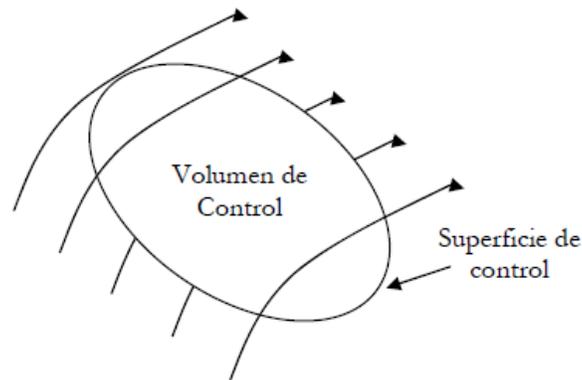
- La masa de un fluido se conserva (ley de conservación de masa).
- La razón de cambio de momentum corresponde a la suma de las fuerzas sobre una partícula del fluido (segunda ley de Newton).
- La razón de cambio de energía es igual a la suma de la razón de calor adicional y la razón de trabajo realizado sobre una partícula del fluido (primera ley de la termodinámica).

Adicionalmente, las ecuaciones resultantes se relacionan con las expresiones empíricas:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| • Ley de Fourier              | Relaciona calor y temperatura.                   |
| • Ley de viscosidad de Newton | Relaciona los esfuerzos con las velocidades.     |
| • Ecuaciones de estado        | Relaciona la densidad con presión y temperatura. |

La mecánica de fluidos, transferencia de calor y de masa son fenómenos que están gobernados por leyes físicas expresadas en modelos matemáticos, generalmente por términos de ecuaciones diferenciales. Cada ecuación emplea una cierta cantidad física como su variable dependiente e implica que debe haber un balance entre los diversos factores que influyen en la variable. Las variables dependientes de estas ecuaciones diferenciales son usualmente la velocidad, presión, temperatura y concentración de masa.

Para el análisis de flujo de fluidos a escalas de longitud macroscópicas ( $1 \mu m$  o más grande), la estructura molecular de la materia y los movimientos moleculares pueden ignorarse y el fluido puede considerarse como continuo. Esto describe el comportamiento del fluido en términos de propiedades macroscópicas, tales como la velocidad, presión, temperatura, etc., y sus derivadas en el espacio y tiempo. Con el propósito de explicar las ecuaciones de conservación es útil considerar un volumen de control (VC) de tamaño finito a través del cual pasa el fluido.



**Figura 1.5** volumen de control.

#### 1.2.4.1 ECUACIÓN DE MASA

La ecuación de conservación de masa se deriva de aplicar la ley de conservación de masa. Este principio se expresa como: el flujo neto másico de salida del volumen de control (VC) debe ser igual al incremento temporal de la masa interior. La ecuación resultante es conocida como la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad, la ecuación es representada en forma tensorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = x, y, z \quad (1.3)$$

El primer término del lado izquierdo de la Ec. (1.3) representa la variación de la densidad en el tiempo y el segundo término describe el flujo neto de masa saliendo del VC a través de sus fronteras.

### 1.2.4.2 ECUACIÓN DE MOMENTUM

La ecuación de momentum es la representación matemática de la segunda ley de Newton, la cual establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él, es decir, *masa \* aceleración = suma de fuerzas*. En otras palabras, la segunda ley de Newton establece que el incremento temporal del momento lineal en el VC (variación temporal de la cantidad de momento lineal) más el flujo neto de momento lineal de salida del VC (el momento lineal es producto de la masa por la velocidad) debe ser igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el VC (las fuerzas que actúan sobre el VC son de dos tipos: las fuerzas másicas o de cuerpo y las fuerzas superficiales o de contacto. Las fuerzas másicas actúan directamente sobre la masa volumétrica del VC, entre ellas la fuerza de la gravedad, centrífuga, coriolis, eléctrica y magnética. Las fuerzas superficiales actúan directamente sobre la superficie del VC del fluido, como son la presión ejercida sobre la superficie impuesta por el fluido exterior al VC y las fuerzas causadas por las tensiones viscosas (normales y tangenciales) actuando sobre la superficie del VC, también causado por el fluido exterior al VC por contacto directo). Este balance producirá tres ecuaciones diferenciales parciales, una para cada dirección del sistema coordenada (x, y, z). La expresión en notación tensorial de la cantidad de momentum para fluidos Newtonianos:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} S_{ij} \right] + F_i \quad (1.2)$$

El primer término de la Ec. (2.2) representa la velocidad de cambio de movimiento, el segundo término es el incremento de movimiento por convección, el tercer término representa las fuerzas de presión que actúan sobre el volumen de control, el cuarto término es la ganancia de movimiento por transporte viscoso y el último término representa la fuerza de gravedad, centrífuga etc., que actúa sobre el elemento de volumen de control.

### 1.2.4.3 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

La ecuación de energía es derivada de la primera ley de la termodinámica, la cual establece que la cantidad de cambio de energía de una partícula es igual a la cantidad de calor adicionado al elemento más la cantidad de trabajo realizado sobre la partícula. En otras palabras, se expresa que el flujo neto de salida de energía, la interna más la energía cinética (flujo másico multiplicado por la energía por unidad de masa), más el incremento temporal de la energía interna más la energía cinética al interior del VC (variación en el tiempo de la energía del VC), debe ser igual al trabajo realizado sobre el VC, tanto por fuerzas volumétricas como superficiales (el conjunto de las fuerzas másicas son englobadas en una fuerza por unidad de tiempo calculada como el producto de la fuerza por la velocidad en la dirección de la fuerza). Las fuerzas superficiales, al igual que en la ecuación de cantidad de momentum, son las fuerzas viscosas y la presión, más el flujo neto de calor entrante al VC (transferencia de calor a través de las caras del VC debido a los gradientes de temperatura), más la energía neta aportada o retirada al VC (este término es debido a la absorción o emisión de calor y es representado como  $s_E$ ). La energía del fluido se define como la suma de la energía interna ( $e_{int}$ ), la cinética  $e_{cin} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$  y la energía potencial gravitacional. La energía potencial será incluida en la fuerza gravitacional como una fuerza de cuerpo. Entonces, la ecuación para la energía específica ( $E = e_{int} + e_{cin}$ ). Se obtiene la ecuación de la conservación de energía térmica en términos de la temperatura.

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi + s_E \quad (1.3)$$

### 1.2.5 DINÁMICA DE FLUIDO COMPUTACIONAL

#### 1.2.5.1 ANTECEDENTES

Distintas áreas del campo científico utilizan diferente técnica para el estudio de los fenómenos los cuales pueden clasificarse en dos métodos: teóricos y experimentales estos métodos poseen ventajas y desventajas que dependiendo de las consideraciones que se hagan sobre el fenómeno de estudio y de la naturaleza del fenómeno de estudio. Se debe tener en cuenta que para un gran número

problemas necesitan la aplicación de estos dos métodos, el éxito en la solución muchas veces depende de la combinación de estos métodos resultando en método teórico-experimental.

Particularmente los métodos teóricos, Josiah Gibbs (1881) dijo que “Uno de los principales objetivos del análisis teórico en cualquier disciplina del conocimiento, es establecer un punto de vista desde el cual, el objeto aparezca en su máxima simplicidad”.

En el campo de aplicación los problemas que involucran flujo de fluidos, transferencia de calor y de masa estos se reducen en modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, estas ecuaciones gobernantes son de naturaleza compleja y muchas veces su solución es compleja. Pero afortunadamente los métodos teóricos normalmente permitirán la obtener los resultados de una manera más general. El empleo de los métodos teóricos solo se necesita una computadora para llevar a cabo la solución del problema, lo cual resulta muy práctico hoy en día. Para llevar la solución de estos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, se llegar a requerir algoritmos de optimización de los algoritmos de cómputo. Por lo tanto, los métodos teóricos se han convertido en una alternativa para la solución de problemas de flujo de fluido, transferencia de calor, entre otros.

Los métodos teóricos se clasifican en dos clases: la primera son los métodos que poseen una solución analítica, son aquellos problemas en los cuales se tiene una solución analítica, es importante tener en cuenta que para muchos de estos problemas tienen una solución complicada ya que contienen integrales, funciones especiales etc., La segunda categoría corresponde a los métodos numéricos, estos presentan como resultados una serie de valores aproximados para la solución del problema, dentro de esta categoría se encuentran métodos ampliamente usados como lo puede ser el método de Diferencias Finitas (MDF), Volumen de Finito (MVF) y de elemento Finito (MEF) para resolver las ecuaciones de conservación.

Los métodos numéricos presentan ciertas ventajas y desventajas contra las distintas técnicas de estudio. [Pletcher et al. (2012)] presentaron un resumen de las

ventajas y desventajas que tienen las tres formas de resolver los problemas de mecánica de fluidos (Tabla 1.1).

**Tabla 1.1** Comparación de las técnicas de Solución.

Técnica	Ventajas	Desventajas
<b>Experimental</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fenómeno más realista.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Equipo requerido.</li> <li>Problemas de escala.</li> <li>Dificultad de las mediciones.</li> <li>Costo operacional.</li> </ul>
<b>Teórico</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fenómeno más general.</li> <li>Resultado en formato de una formula.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Restricción de la geometría y procesos físicos simples.</li> <li>Generalmente se restringe a fenómenos lineales.</li> </ul>
<b>Numérico</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Geometría y procesos físicos complicados.</li> <li>Fenómenos no-lineales.</li> <li>Evolución temporal del fenómeno.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Errores de Truncamiento.</li> <li>Información de condiciones de frontera.</li> <li>Costo computacional.</li> </ul>

### 1.2.5.2 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (MDF)

El método de diferencias finitas (MDF) es el método más antiguo para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales; al parecer, en la literatura fue introducido por Euler durante el siglo XVIII. También es el método más fácil de usar para la aplicación a problemas con geometrías simples. El punto de inicio del método es la ecuación diferencial de una variable  $\varphi$ .

La variable desconocida  $\varphi$  se describe por medio de puntos sobre los nodos de una malla (el dominio de solución es cubierto por una malla). En cada punto de la malla, la ecuación diferencial es aproximada re-emplazando las derivadas parciales por aproximaciones finitas usando una expansión en series de Taylor o polinomios ajustados, los cuales son usados para obtener las aproximaciones de diferencias

finitas para la primera y segunda derivada de  $\varphi$  con respecto a las coordenadas en términos de los valores nodales. El resultado es una ecuación algebraica para  $\varphi$  en cada nodo de la malla, donde el valor de la variable en el nodo genérico y en ciertos nodos vecinos aparece como incógnitas. En principio, el MDF puede ser aplicado para cualquier tipo de malla. Sin embargo, se complica el método cuando es aplicado para mallas no regulares. Las líneas de la malla se utilizan como las líneas coordenadas. La principal desventaja del MDF es que es un método no-conservativo, esto es, la conservación de masa no se cumple a menos que se tenga especial cuidado para ello. También, otra desventaja significativa en flujos complejos es la restricción a geometrías simples. La exactitud del MDF puede ser examinada por el orden de truncamiento en la expansión de la serie de Taylor durante la discretización de la ecuación diferencial. [Xamán y Gijón Rivera (2016)].

### **1.2.5.3 MÉTODOS DE VOLÚMENES FINITOS (MVF)**

El método de volúmenes finitos (MVF) fue desarrollado originalmente como una forma especial de la formulación en diferencias finitas. El punto de inicio de este método es usar la forma integral de las ecuaciones de conservación. El dominio de estudio es subdividido en un número finito de volúmenes de control (VC) contiguos y las ecuaciones de conservación son aplicadas para cada VC. En el centroide de cada VC recae un nodo computacional en el cual se calcula el valor de las variables. Para expresar los valores de las variables en las superficies de los VC en términos de los valores nodales (localizados en el centro del VC) se utiliza algún tipo de interpolación. Las integrales de superficie se aproximan usando alguna fórmula de cuadratura disponible. Como resultado se obtiene una ecuación algebraica para cada VC, en la cual aparecen valores de los nodos vecinos. El MVF puede ser adecuado a cualquier tipo de malla y por lo tanto, puede ser aplicado a geometrías complejas. La malla define únicamente las fronteras de los volúmenes de control. El método es conservativo por construcción (las propiedades relevantes cumplen con conservación para cada volumen), así que las integrales de superficie (las cuales representan flujos convectivos y difusivos) son las mismas para las interfaces (fronteras) de los VC contiguos. La aproximación del MVF es quizás la más simple

de entender y de programar. Todos los términos que necesitan ser aproximados tienen significado físico, este es el motivo por el cual es popular entre los ingenieros. La desventaja del MVF comparado con el MDF, recae en la dificultad de la utilización de esquemas de alto orden en 3-D, debido a que la aproximación con el MVF requiere dos niveles de aproximación: interpolación e integración. El MVF representa el corazón de cuatro de los cinco códigos principales, comercialmente disponibles para la simulación de la dinámica de fluidos: PHOENICS, FLUENT, FLOW3D y STAR-CD. El algoritmo numérico usando el MVF consiste de los siguientes pasos:

- Integración de las ecuaciones gobernantes de flujo de fluidos sobre todos los VC del dominio de solución.
- Discretización al sustituir una variedad de aproximaciones finitas para los términos en las ecuaciones integradas, los cuales representan procesos, tales como convección, difusión y fuentes. Esto convierte las ecuaciones integrales en un sistema de ecuaciones algebraicas.
- Solución de las ecuaciones algebraicas por un método iterativo.

El aspecto principal por el cual los ingenieros y científicos eligen usar el método de volúmenes finitos, es el hecho de que haya una conservación integral de masa, momentum, energía y especies químicas y que ésta sea satisfecha por un grupo cualquiera de volúmenes de control; en otras palabras, las ecuaciones discretizadas bajo la formulación de volúmenes finitos expresan el principio de conservación de las diferentes cantidades físicas en un volumen de control, exactamente como las ecuaciones diferenciales expresan este principio a través de un volumen de control infinitesimal. Es lógico pensar, que la formulación en volúmenes finitos permitirá tener resultados más exactos conforme los volúmenes de control se aproximen al infinito, es decir, al continuo.

#### 1.2.5.4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)

El método de los elementos finitos, introducido por Turner et al. (1956), se empleó en principio para el análisis estructural, y fue diez años después cuando comenzó su utilización para la resolución de las ecuaciones de campos en medios continuos. El método de elementos finitos (MEF) es una generalización de los métodos de principio variacional (método de Ritz) y de residuos pesados (método de Galerkin, método de mínimos cuadrados, etc.). Los cuales están basados en la idea de que la solución  $\varphi$  de una ecuación diferencial puede ser representada como una combinación lineal de parámetros desconocidos  $c_j$  y de funciones apropiadas  $\varphi_j$  son llamadas funciones de aproximación y son seleccionadas de tal manera que satisfagan las condiciones de fronteras para acotar el problema. Los parámetros  $c_j$  se determinarán de tal forma que satisfacen la ecuación diferencial, por lo que a menudo se realiza una integral de peso para ello. Estos métodos (principios variacional y residuos pesados) tiene la desventaja que para la construcción de las funciones de aproximación de  $\varphi_j$  se deben satisfacer las condiciones de frontera del problema, pero como de los problemas reales se definen sobre regiones que son geoméricamente complejas, es muy complicado general funciones de aproximación que satisfagan diferentes tipos de condiciones de frontera del dominio complejo. La aproximación más sencilla del MEF es la interpolación lineal de cada elemento, de tal manera que se garantiza continuidad de la solución a través de las fronteras de los elementos (la función aproximada debe satisfacer las condiciones de frontera, ya sean homogéneas o no).

La función  $\varphi_j$  puede ser construida a partir de los valores en los nodos del elemento, usando la idea de la teoría de interpolación, por lo que se les conoce como funciones de interpolación. En resumen, el MEF inicia con una propuesta de solución para  $\varphi$  (función de  $c_j$  y  $\varphi_j$ ), esta propuesta es sustituida en las ecuaciones de conservación, pero como la propuesta no satisface el dominio y completo de solución, entonces queda como resultado un valor residual (si aproximación fuera la adecuada el residuo sería cero). Lo siguiente es minimizar los residuales de alguna forma; la manera de reducir los residuales es multiplicarlos por un grupo de funciones de

peso e integrarlos (igualando las integrales a cero). Como resultado se obtiene un grupo de ecuaciones algebraicas para coeficientes desconocidos  $c_j$  de las funciones de aproximación. Este corresponde a seleccionar la mejor solución dentro del grupo de funciones permitidas (una con residual mínimo).

La principal ventaja del MEF recae en la habilidad para ser usado sobre geometrías complejas, pero los avances de este método han sido lentos para aplicaciones en flujos de fluidos debido a las dificultades encontradas con los fenómenos al acoplar las ecuaciones de conservación.

#### **1.2.5.5 INFLUENCIA DE LAS COMPUTADORAS**

Los métodos numéricos son una herramienta muy poderosa para dar solución a problemas de dinámica de fluidos, transferencia de calor entre otros, las dificultades al tratar de resolver los modelos matemáticos en la mayoría de los casos suelen presentarse problemas no lineales, geometrías complejas y condiciones de frontera complicadas debido a esto factores, no es posible resolverlos a través de técnica de análisis exactas.

Gracias al gran desarrollo tecnológico que se está viviendo en nuestra época enfocado al desarrollo de computadoras que día a día se vuelven cada vez más poderosas y la relativa facilidad con la que se puede adquirir estos equipos á provocado un gran aumento en el uso de los métodos numéricos los cuales han venido aplicándose a distintas áreas del campo científico e ingenieril.

El desarrollo de las computadoras con capacidad de trabajar a altas velocidades ha impulsado el uso de los métodos numéricos para la solución de modelos matemáticos los cuales están expresados en ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). La solución de estos sistemas de ecuaciones requiere una solución numérica para debido que algunas veces no es posible obtener una solución analítica del problema, como el uso generalizado de las computadoras y algoritmos, han sido simplificados haciéndolos más fáciles de programar lo que ha llevado a que un gran número de investigadores lo usen para su campo de estudio. De tal forma se consolidaron las técnicas numéricas como consecuencia del desarrollo progresivo de las computadoras ha logrado crear una competencia comercial, usos

en la industria, vida académica y el campo de investigación. Como resultado del desarrollo tecnológico, dio el primer paso para la creación de la dinámica de fluidos computacionales (CFD).

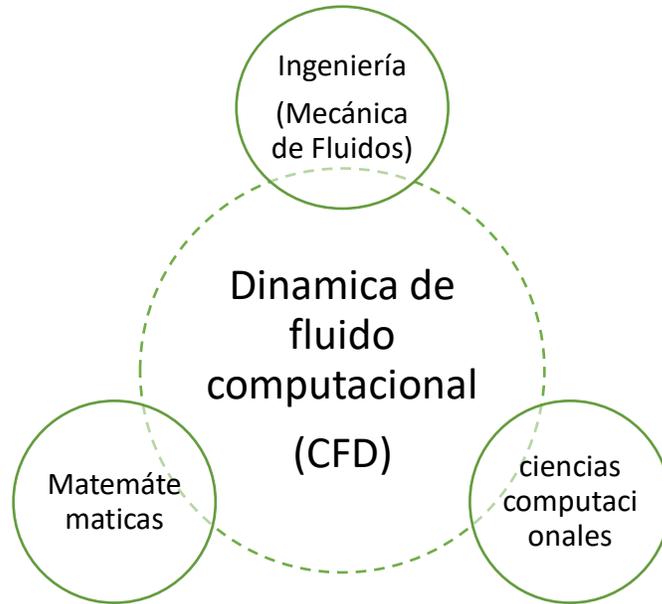
#### **1.2.5.6 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL CFD**

El CFD se está convirtiendo en una muy poderosa herramienta para el análisis de fenómenos donde se ven involucrados el flujo de fluido. La principal ventaja es que a través de su uso se puede mostrar el comportamiento de los fenómenos bajo estudio lo cual no sería posible con algún otro método. Se puede predecir las propiedades del fluido con gran detalle en el dominio estudiado siempre y cuando se cuente con un modelo matemático adecuado. [Xamán y Gijón Rivera (2016)].

Como principales desventajas del CFD son:

- El usuario debe tener una amplia experiencia
- La solución de fenómenos por naturaleza compleja, hace uso del hardware y software por lo que adquirir una computadora de alto rendimiento lo que representa una inversión inicial significativa.
- fenómenos muy complejos se puede llegar a tener un alto consumo de recursos computacionales. Sin embargo, para tener éxito con el uso de CFD se requiere experiencia y un profundo conocimiento de la física de flujos de fluidos y fundamentos de algoritmos numéricos [Versteeg et al., 2008].

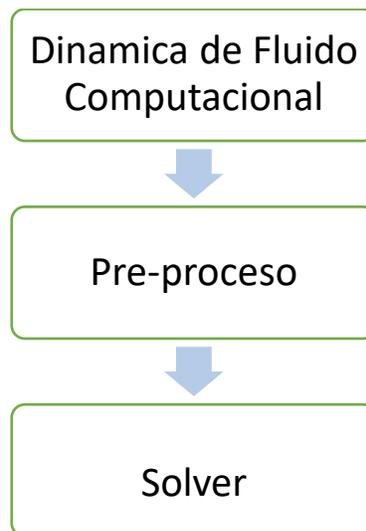
Para tener éxito en el uso de la dinámica de fluido computacional se requiere experiencia y un conocimiento profundo de la física de fluidos y fundamentos de algoritmos numéricos [Versteeg et al., 2008]. La dinámica de fluido computacional CFD se integra de 3 principales disciplinas: mecánica de fluidos, matemáticas y ciencias computacionales.



**Figura 1.5** Disciplinas que involucran CFD.

### 1.2.5.7 ESTRUCTURA DE LA DINÁMICA DEL FLUIDO COMPUTACIONAL CFD

La solución de un problema de CFD consta de 3 etapas fundamentales: pre-proceso, solver y post-proceso.



**Figura 1.6** Estructura general del CFD.

### 1.2.5.7.1 PRE-PROCESO

Es la preparación de los datos de entrada para el código de resolución del problema.

Para el caso donde el software sea comercial consistirá en los siguientes pasos:

1. Definir la geometría del problema o dominio computacional.
2. Generación de la malla numérica.
3. Especificar los fenómenos físicos que están bajo estudio.
4. Especificar las propiedades físicas del medio.
5. Establecer las condiciones iniciales y sus respectivas condiciones de frontera.

Para cuando la persona desarrolla el código numérico, esto resulta el pre-proceso algo más complicado pudiendo llevar varios meses o incluso años para la correcta comprensión y entendimiento de esta etapa.

Para este caso, quien desarrolla código numérico tiene que seguir estos puntos en el pre-proceso:

1. Establecer un modelo físico: Un modelo físico es la representación gráfica que hace referencia a la realidad, utilizada para plantar un problema, con el fin de estudiar a detalle su comportamiento bajo ciertas condiciones establecidas para el problema bajo estudio.
2. Establecer un modelo matemático: Un modelo matemático se define como la ecuación o conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de un fenómeno o fenómenos, se plantean las condiciones iniciales y las condiciones de frontera, también se requiere especificar las condiciones del medio en cuestión.
3. Generar malla numérica: Una malla numérica se define como la colección de puntos discretos (nodos) distribuidos sobre el dominio de estudio o modelo físico, que se utiliza para la solución numérica de un grupo de ecuaciones diferenciales parciales. Aquí, el desarrollar de software requiere de habilidades matemáticas y de computación, las cuales permitirán al

desarrollador establecer un algoritmo o rutina para generar una malla adecuada para la modelación. [Xamán y Gijón Rivera (2016)].

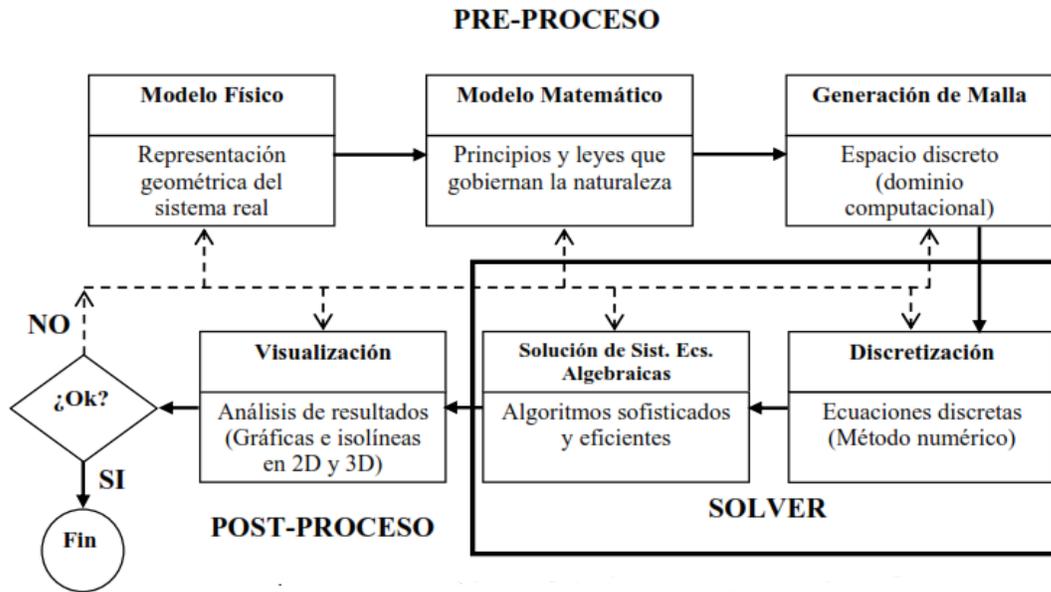
#### **1.2.5.7.2 SOLVER (PROCEDIMIENTO)**

En esta etapa está asociada con la solución del problema, resolviendo el modelo matemático a través del uso de una computadora, el tipo de método de solución que se utilice y la dificultad del modelo matemático dependerá del tiempo de obtención de los resultados, los cuales pueden tomar algunas horas, días e incluso semanas.

1. Proceso de discretización: La discretización de numérica se define como la sustitución de las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno bajo estudio por un conjunto de ecuaciones algebraicas a través de una de las técnicas mencionadas anteriormente. MDF, MVF o MEF. En particular, en el MVF el modelo matemático se integra sobre todo el dominio de interés y los términos de derivadas se discretizan mediante aproximaciones o esquemas algebraicos para llegar a formar un sistema de ecuaciones algebraicas.
2. Solución del sistema de ecuaciones algebraicas: la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas se realiza a través de algunos de los métodos de solución que existen en la literatura. Tratándose de un problema complejo la solución del problema puede tomar días o incluso semanas.

#### **1.2.5.7.3 POST-PROCESO**

Esta etapa de CFD es el elemento (visualizador) que permite aglomerar la multitud de datos de resultados en gráficos. Esta etapa es de vital importancia para el análisis de resultados y dependiendo de la capacidad de resolución del visualizador, ayudara al usuario o desarrollador a un mejor entendimiento del fenómeno y lo llevara a conclusiones exitosas. En un visualizador se debe poder representar la malla numérica, mapas de contornos de iso-líneas, campos de velocidad, etc. Actualmente, algunos visualizadores disponibles permiten realizar animaciones del fenómeno bajo estudio. Uno de los visualizadores más comunes en el medio académico y de investigación es el Tecplot.



**Figura 1.7** Estructura de un desarrollador de software de CFD.

### 1.2.5.8 ERRORES E INCERTIDUMBRES

En la solución de ecuaciones diferenciales parciales mediante CFD se tiene disponible una amplia variedad de esquemas para la discretización de las derivadas y la correspondiente solución de sistema de ecuaciones algebraicas resultante. En muchas situaciones, se cuestiona acerca del error de redondeo de las computadoras, los errores de truncamiento involucrado en los cálculos numéricos, así como también la consistencia, estabilidad y la convergencia del esquema usado. Así como en el campo de la experimentación existe el concepto de “metrología”, que es la ciencia de medir, cuyos objetivos más importantes son el resultado de la medición y la incertidumbre de medida, y conforme se identifiquen todas las posibles fuentes de incertidumbre y se cuantifiquen, mayor confianza se tendrá en el resultado, de igual forma, en el campo de CFD, se debe tener confianza y credibilidad en los resultados. Aunque no existe una ciencia tal cual en CFD para este fin, existen dos guías que definen y presentan recomendaciones acerca de los errores e incertidumbres involucradas en CFD (AIAA, 1998 y ERCOFTAC, 2000). Así en la modelación numérica mediante el uso de CFD se definen los conceptos de Error e Incertidumbre (Versterg et al., 2008).

*Error:* es la deficiencia reconocible en un modelo de CFD que no es causada por la carencia del conocimiento. Las causas o fuentes de error que caen bajo esta definición son:

- Errores numéricos: estos pueden ser de tres tipos - errores de redondeo (round-off), de discretización y de criterio de convergencia.
- Errores de código fuente: errores en el software.
- Errores de usuario: errores humanos mediante uso incorrecto del software.

*Incertidumbre:* es deficiencia potencial en un modelo de CFD que es causada por la carencia del conocimiento. Las causas o fuentes de incertidumbre son:

- Incertidumbre debido a información requerida: limitada representación de la geometría, aproximación en condiciones de frontera, propiedades de materiales o del medio fluido, etc.
- Incertidumbre debido al modelo matemático: diferencias entre el flujo real y el modelo de CFD, por ejemplo, en un flujo turbulento real se puede carecer del modelo adecuado para la representación física del flujo.

#### **1.2.5.8.1 ERRORES NUMÉRICOS**

*Errores numéricos:*

Las fuentes de error identificados por el uso del CFD para la solución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales se describen brevemente a continuación.

*Error por redondeo:*

Generalmente este tipo de error se genera por la exactitud de las computadoras. Pero afortunadamente las computadoras modernas pueden representar hasta 7 (precisión simple en Fortran) o más lugares de decimas para casos extremos, estos errores llamados "roundoff errors" estos errores pueden ser acumulados y llegar a ser la principal fuente de error pueden ser controlados por el uso adecuado de las operaciones aritméticas esto es, se debe tener cuidado que en dichas operaciones

aritméticas los valores de las variables o constantes involucradas sean representadas con el mismo formato de punto flotante y el mayor número de dígitos significativos.

*Error de discretización:*

En la representación de las derivadas de una ecuación diferencial parcial mediante una expresión algebraica, por ejemplo, por uso de una serie de Taylor, los términos de más alto orden son despreciados al truncar la serie y los errores causados como un resultado de tales truncamientos es llamado el error de discretización o de truncamiento. El error de discretización representa la diferencia entre la solución exacta de una ecuación diferencial y la correspondiente solución exacta de la ecuación algebraica discreta. El incremento del tamaño de la malla requiere de relativamente gran espacio de memoria y tiempo de cómputo, de tal manera que el error de discretización se vincula con el recurso computacional disponible.

*Consistencia:*

En las aproximaciones usadas de un método numérico para discretizar las derivadas de las EDP's, se requiere que conforme el refinamiento del tamaño del paso llegue a ser extremadamente pequeño (por ejemplo:  $\Delta x \approx 0$ ,  $\Delta t \approx 0$ ), la aproximación usada en el método numérico debe llegar a ser arbitrariamente cercana a las derivadas. Este requerimiento implica que el error de discretización debe tender a cero conformes el tamaño del paso se desvanece. Entonces, la aproximación del método numérico se dice ser *consistente* con la ecuación diferencial original. La importancia de esta propiedad radica en mejorar la solución numérica mediante un ejercicio de consistencia o independencia de malla. . [Xamán y Gijón Rivera (2016)].

*Convergencia:*

La solución numérica se dice ser convergente si la solución numérica se aproxima hacia valores fijos mientras la solución progresa. La tendencia hacia valores fijos debe presentarse conforme los pasos de tiempo y espacio tienden a cero. En caso contrario, se dice que la solución es divergente.

### *Errores de convergencia:*

Generalmente, la solución numérica de los problemas de flujos de fluidos, transferencia de calor y de masa requiere de un proceso iterativo; para detener o terminar el proceso iterativo de manera automática en un número  $k$  de iteraciones, se requiere de un criterio de paro o mejor conocido como criterio de convergencia. La solución final obtenida en la iteración  $k$  debe satisfacer las ecuaciones discretizadas del problema. El criterio de convergencia debe ser establecido de tal manera que la diferencia entre la solución de la iteración  $k$  y la solución de la iteración anterior ( $k-1$ ), debe ser mínima.

### **1.2.5.9 CONDICIÓN INICIAL Y DE FRONTERA**

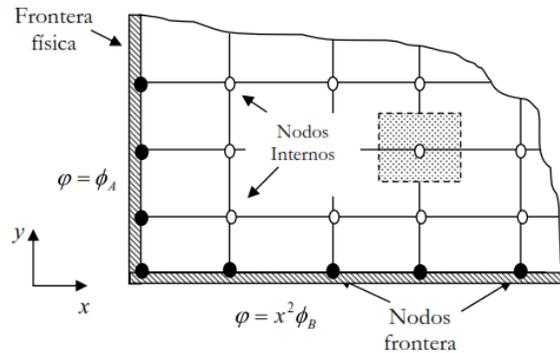
Los problemas de dinámica de fluidos, transferencia de calor y masa computacional son definidos en términos de las condiciones de frontera y la condición inicial; de lo contrario la ecuación diferencial correspondiente tendrá numerosas soluciones. En el desarrollo y uso de CFD es importante especificar correctamente estas condiciones, porque el resultado de la variable de interés depende fuertemente de la información matemática establecida en la frontera.

En general, los problemas que se abarcan en este libro se conocen como problemas de valor de frontera; y son aquellos en los cuales se fijan condiciones en los límites o contornos del dominio físico. Estas condiciones establecidas se conocen como condiciones de frontera o de contorno. Normalmente, en problemas de fluidos y fenómenos relacionados, las condiciones de frontera más comunes son: condición de Dirichlet o de primera clase, condición de Von Neumann o de segunda clase y la condición de Robin o de tercera clase.

#### **1.2.5.9.1 CONDICIÓN DE FRONTERA DE PRIMERA CLASE (DIRICHLET)**

Este tipo de condición de frontera es la más comúnmente encontrada en CFD. En la construcción de la malla numérica del dominio físico, se agrupan nodos alrededor de la frontera física, como se ilustra en la Figura 2.7. Este tipo de condición fija un valor de la variable  $\phi$  en los nodos frontera. El valor de la variable en la frontera puede ser una función del espacio y/o tiempo, o simplemente un valor constante.

Por ejemplo, en la figura se muestra que el valor de la variable  $\varphi$  en la frontera vertical es igual a  $\varphi_A$  y en la frontera horizontal es una función del espacio de la forma  $x^2\varphi_B$ .



**Figura 2.7** Condición de frontera de Dirichlet.

### 1.2.5.9.2 CONDICIÓN DE FRONTERA DE SEGUNDA CLASE (VON NEUMAN)

Este tipo de condición es muy utilizada para definir las fronteras de muchos fenómenos. Esta consiste en imponer en las fronteras un gradiente de la variable de temperatura  $\varphi$  en dirección normal a la frontera igual a una función del espacio y/o tiempo; también es posible tener un valor constante en el gradiente de la temperatura  $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = A$ , donde  $n$  representa la dirección normal a la frontera y  $A$  es un valor constante conocido). Para el caso particular de la transferencia de calor, es cuando el gradiente es igual a cero y es conocida como una condición adiabática, también para los problemas en flujo de fluido en múltiples problemas es usada como condición de simetría.

### 1.2.5.9.3 CONDICIÓN DE FRONTERA DE TERCERA CLASE (ROBIN)

Este tipo de condición de frontera es una combinación de las condiciones de frontera de la primera y segundas clase. Esta condición establece que para la frontera se encuentra gobernada por una ecuación diferencial de primer orden de tipo  $a\frac{\partial\varphi}{\partial n} + b\varphi = f$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes diferentes y  $f$  es una función conocida de espacio y/o tiempo o un valor constante. Generalmente este tipo de condición de frontera se usa para fenómenos de transferencia de calor. Entonces, si  $a = \lambda$ ,  $b = h$ ,  $f = hT_{ext}$  y la variable  $\varphi = T$ , se tiene en las fronteras una disipación o ganancia de

calor por convección hacia o desde el medio ambiente exterior al sistema. Esto es,  $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -h(T - T_{ext})$ , donde  $a$  representa la conductividad térmica y  $b$  es el coeficiente convectivo de transferencia de calor.

#### 1.2.5.9.4 CONDICIÓN INICIAL

En problemas dependientes del tiempo; los valores de la variable ( $\varphi$ ) al tiempo cero ( $t = 0$ ) necesitan ser especificados en todos los puntos del dominio físico. Este hecho, es lo que se llama condición inicial de la variable y el tiempo cero se refiere al tiempo previo en que el sistema físico de estudio deje su estado de equilibrio (por ejemplo; en transferencia de calor es el instante antes de que el sistema inicie su evolución hacia un nuevo estado de equilibrio en el tiempo). La condición inicial de la variable puede ser una función del espacio. [Xamán y Gijón Rivera (2016)]

#### 1.2.6 ANTECEDENTES

Se realizó una revisión bibliográfica de artículos relacionados con la técnica de Multimalla. Algebraico y se aproxima como una combinación lineal de los coeficientes de la malla fina. Este procedimiento se usa en paquetes comerciales de CFD (Versteeg y Malalasekera, 2007). La técnica conocida de esta formulación es Multimalla de Correcciones Aditivas (ACM) por sus siglas en inglés “Additive Correction Multigrid” (Hutchinson y Raithby, 1986).

**Hutchinson y Raithby** (1986) emplearon el método de Multimalla basado en la estrategia de correcciones aditivas, para mejorar la velocidad de convergencia para problemas de 2D y 3D, emplearon la estrategia de correcciones aditivas de [Settari Yaziz (1973)] resolviéndolo mediante el método de solución LGS descrito de [Van Doormal y Raithby, 1984] con un valor de sobre relajación, obtuvieron que la presencia de coeficientes anisotrópicos tiende a degradar la convergencia, pero esto se alivia mediante el uso de métodos iterativos lineales. Los resultados obtenidos demostraron que la aplicación de correcciones aditivas en múltiples niveles puede mejorar enormemente la convergencia, los autores concluyeron que

la estrategia de correcciones aditivas puede variar significativamente la aceleración de convergencia de solucionadores iterativos en 2D y 3D.

**Raby y Lemos.** (2003) formularon el método de multimalla de esquema de corrección para la solución numérica de flujos de recirculación laminares incompresibles. La técnica multimalla que se implementó es almacenamiento de corrección (CS) y la formulación para una estrategia de ciclo V. Se empleó Mallas estructuradas, ortogonales e irregulares para realizar una discretización en volumen finito. El acoplamiento de presión-velocidad se logró mediante el método SIMPLE, el TDMA y se utilizó el algoritmo de Gauss-Seidel para relajar las ecuaciones algebraicas. La literatura recomienda la aplicación de la formulación CS para la solución de problemas lineales, mientras que la formulación FAS es más adecuada para situaciones no lineales. El trabajo aplicó el método CS para resolver flujo estacionario con recirculación en régimen laminar e incompresibles en 2D, ya que la búsqueda de soluciones en estado permanente, para estos problemas, requiere el manejo adecuado del acoplamiento entre las componentes de la velocidad y las variables escalares (como la temperatura o fracción de masa). Los resultados muestran que la aplicación de la técnica de multimalla puede acelerar el algoritmo iterativo por los valores que van desde 1.7 hasta 4.8 veces, dependiendo de la geometría de flujo y la malla empleada. Estos resultados sugieren que una formulación FAS, puede ser más adecuada para los problemas de flujo, a menos que se aplique el método bloque implícito a la solución. Todos los resultados mostraron un mejor rendimiento en las soluciones multimalla en comparación con su contraparte de una sola malla, sin poner en peligro cualitativamente el patrón de campo de flujo. La aceleraciones de convergencia son de hasta 4.8 veces, por lo que se concluye que una formulación de FAS puede ser más adecuada.

**Somesh y Milan** (2006) presentaron el método multimalla Algebraico como una solución para malla estructurada. Para evaluar el código resolvieron 4 diferentes casos: 1) problema en 2-D con condiciones de Dirichlet, 2) problema en 2-D con condiciones de Neuman, 3) problema en 2-D con dos materiales diferentes, 3) problema en 2-D con aspecto de radio de 10:1. La primer prueba se resolvió con el

método Gauss-Seidel sin el método multimalla, y se obtuvieron resultados de convergencia en un tiempo de 2062.42s con 31,688 iteraciones, mientras que usando el método multimalla se obtuvo en un tiempo de 54.98s y 526 iteraciones. El multimallas reduce el tiempo en al menos 38 veces. En la segunda prueba se observó un cambio drástico pues el método multimallas permitió obtener la solución en 3.76s con 248 iteraciones, mientras que el Gauss-Seidel resuelve en 2147.48s con 232,853 iteraciones. Para la tercera prueba donde los materiales tienen propiedades diferentes, el multimallas obtuvo el resultado en 3.76s y el método Gauss-Seidel lo hizo en 2100s, es notorio que se redujo 570 veces. Por último en el cuarto problema se obtuvo la solución empleando el método multimalla en un tiempo de 26.25s con 2004 iteraciones mientras que el Gauss-Seidel lo realizó en un tiempo de 461.141s con 38,690 iteraciones. Los autores concluyeron que el método de solución Gauss-Seidel es ineficiente para mallas grandes.

**Darwish et al.** (2008) presentaron la implementación y el desempeño del multimalla algebraico en paralelo, (en sus siglas en inglés pAMG), sobre una malla no-estructurada. La paralelización de la solución se basó en el enfoque de la descomposición del dominio usando un programa individual para múltiples datos. El método de solución iterativo llamado ILU se usó para suavizar los errores que surgen dentro de cada partición en los diferentes niveles de malla y una sincronización del multi-nivel a través de la partición del dominio computacional, para mejorar el desempeño de la solución del multimallas paralelizado. Dos estrategias de paralelización fueron analizadas. En la primera, la sincronización se aplicó a través de los niveles de multimalla durante el paso de restricción, mientras la segunda sincronización se forzó durante la restricción y prolongación. La prueba empleó por arriba de 800,000 elementos en un máximo de 20 procesadores para problemas de difusión y advección. Los resultados mostraron que la sincronización a través de las particiones para los niveles de multimalla juegan un rol esencial en asegurar la escalabilidad (en ingeniería informática es la propiedad deseable de un sistema que indica su habilidad para reaccionar y adaptarse sin perder su calidad).

**Santhosh et. al.** (2009) presentaron la solución numérica en dos dimensiones de un problema de flujo de fluido en régimen laminar en una cavidad cuadrada con pared deslizante para diferentes números de Reynolds  $\leq 10000$ . Por ello, se usó el método de multimalla con esquema de aproximación completa (FAS) para una malla uniforme de  $512 \times 512$ . Las ecuaciones gobernantes se discretizaron basándose en el método de volumen finito (MVF) para el arreglo de malla desplazada. Se Implementó el algoritmo SIMPLEC (SIMPLE-Consistent) para el acoplamiento de las ecuaciones de conservación de masa y momento. La interpolación cuadrática (QUICK) es empleada para los términos convectivos en las ecuaciones de momento. Se obtuvieron las soluciones numéricas para los distintos (Re) número de Reynolds sobre una malla uniforme, los cuales indicaron una buena representación de los vórtices secundarios y terciarios para  $Re \leq 7500$ , para los cuales las soluciones todavía son estables, pero para el modelo con un  $Re = 10000$  se volvieron inestables. Se concluyó es que es posible obtener soluciones con mayor discretización orden en una malla muy fina mediante el uso de la técnica de multimalla.

### **1.2.7 OBJETIVO**

Realizar la evaluación del esfuerzo computacional ó tiempo de cómputo de la técnica de Mutimalla de correcciones aditivas (ACM) acoplándolo a los siguientes métodos de soluciones ecuaciones algebraicas Gauss Seldel (GS), línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI) y línea con Gauss-Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI).

#### **1.2.7.1 OBJETIVO ESPECIFICO**

- Análisis Adimensional del Problema de la cavidad calentada diferencialmente.
- Evaluación de los métodos GS, LBL-ADI, LGS-ADI acoplando la técnica de Multimalla (ACM) para la solución del problema de la cavidad calentada diferencialmente en régimen laminar.

- Análisis de resultados de tiempo de computo del problema de convección natural en régimen de flujo laminar en una cavidad calentada diferencialmente.

### **1.2.8 ALCANCE**

Realizar la evaluación computacional del esfuerzo computacional de la técnica de Multimalla (ACM), a través de los siguientes métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas (GS, LBL-ADI, LGS-ADI).

### **1.2.9 ESTRUCTURA DE TESIS**

El contenido de la presente tesis es el siguiente:

- En el capítulo 1 se muestra la ubicación del problema e importancia de este trabajo de tesis, los antecedentes, el objetivo y el alcance de la tesis.
- En el capítulo 2 se presenta el modelo físico y matemático de la cavidad calentada diferencialmente para la evaluación de la técnica de Multimalla (ACM).
- En el capítulo 3 se muestran los diferentes métodos de solución de ecuaciones algebraicas que existen, así como su clasificación y la filosofía de la técnica de Multimalla.
- En el capítulo 4 se presentan los resultados de obtenidos del estudio realizado.
- En el capítulo 5 se muestran las conclusiones obtenidas y recomendaciones para trabajos futuros.

### **1.2.10 CONCLUSIÓN**

En esta sección se describió la problemática del tiempo de cómputo que existe al dar solución a problemas complejos de transferencia de calor, así como en los objetivos y alcances de este trabajo de tesis. En los antecedentes se mostró que la implementación de la técnica de Multimalla reduce el tiempo de cómputo y el esfuerzo computacional este método se recomienda para suavizar los componentes de error.

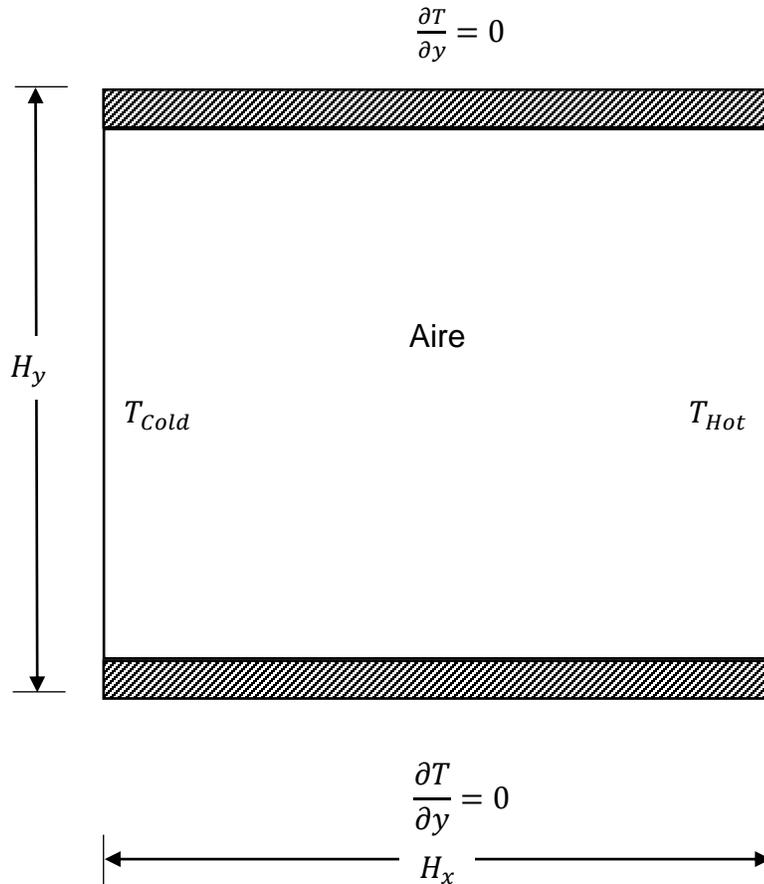
# CAPÍTULO 2

## MODELO FÍSICO Y MATEMÁTICO

La evaluación de la técnica de Multimalla (ACM), se realizará sobre un problema de nuestra área de interés (sistemas térmicos) que son problemas no lineales, los cuales casi siempre cuentan con más de un mecanismo de transferencia de energía o con algún tipo de transferencia de energía. Con base en ello en este capítulo se define el problema de transferencia de calor por convección natural en régimen de flujo laminar en una cavidad cuadrada. Así como su análisis dimensional de la cavidad calentada diferencialmente. Para realizar la evaluación del algoritmo de Multimalla (ACM) respecto a los métodos de solución de ecuaciones algebraicas.

## 2.1 MODELO FÍSICO DE CONVECCIÓN EN RÉGIMEN LAMINAR EN UNA CAVIDAD CUADRADA CALENTADA DIFERENCIALMENTE.

Se considera la transferencia de calor por convección natural en régimen de flujo newtoniano en laminar en una cavidad cuadrada, la cual se encuentra aislada en las paredes horizontales (norte y sur), calentada diferencialmente en las paredes verticales (este y oeste), el modelo se muestra en la figura 2.1



**Figura 2.1.** Modelo físico de una cavidad cuadrada.

## 2.2 MODELO MATEMÁTICO DE CONVECCIÓN EN RÉGIMEN LAMINAR EN UNA CAVIDAD CUADRADA CALENTADA DIFERENCIALMENTE

Las ecuaciones de conservación que describen el comportamiento del fenómeno bajo estudio, ecuación de masa, momento y energía, estas ecuaciones se describen de manera tensorial como [Xamán y Gijón rivera (2016)]

Ecuación de masa:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

Ecuación de momentum:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \rho g_i \beta (T - T_\infty) \quad (2.2)$$

Ecuación de energía:

$$\frac{\partial(\rho u_j T)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \left( \frac{\lambda}{CP} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.3)$$

### 2.3 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA CAVIDAD CUADRADA

En esta sección se muestran las condiciones de frontera para el problema de convección natural en régimen laminar en una cavidad calentada diferencialmente. Las condiciones de frontera para las velocidades son de no-deslizamiento en las paredes.

Las condiciones de fronteras para las paredes (norte y sur) son adiabáticas, mientras que para las paredes (este y oeste) son adiabáticas, la pared oeste se encuentra a una temperatura fría y la pared este está a una temperatura mayor.

Condiciones de fronteras hidrodinámicas:

- $u(0, y) = u(H_x, y) = 0$
- $u(x, 0) = u(x, H_y) = 0$
- $v(x, 0) = v(H_x, y) = 0$
- $v(x, 0) = v(x, H_y) = 0$

Condiciones de frontera de temperatura:

Pared norte (pared 1):

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Pared sur (pared 2):

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Pared oeste (pared 3):

$$T(0, y) = T_{cold}$$

Pared oeste (pared 4):

$$T(H_x, y) = T_{Hot}$$

Donde  $T_{Hot} > T_{cold}$

## **2.4 ANÁLISIS ADIMENSIONAL DE LAS VARIABLES QUE INTERVIENEN PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE CONVECTIVO $h$ EN UNA CAVIDAD CALENTADA DIFERENCIALMENTE**

El coeficiente  $h$  es un parámetro determinado experimentalmente cuyo valor depende de todas las variables que influyen en la convección, tales como la geometría, la naturaleza del movimiento del fluido, la propiedad del fluido y la velocidad del fluido.

El coeficiente de transferencia de calor convectivo ( $h$ ) para el fenómeno de estudio dependerá de las siguientes variables:

- Calor específico del fluido ( $C_p$ )
- Fuerzas de flotación  $g\beta(T - T_\infty)$
- Conductividad del fluido ( $K$ )
- La viscosidad del fluido ( $\mu$ )
- Densidad del fluido ( $\rho$ )
- Longitud ( $L$ )
- La velocidad del fluido ( $U$ )

Por lo tanto:

$$\bullet \quad h = f [K, \mu, Cp, \rho, l, g\beta(T - T_{\infty}), U] \quad (2.4)$$

$$\bullet \quad F [h, K, \mu, cp, \rho, l, g\beta(T - T_{\infty}), U] = 0 \quad (2.5)$$

Las variables dimensionales están formadas por el producto de las potencias de las variables dimensionales originales, entonces las variables dimensionales se indican con el símbolo  $\pi$ . En el análisis interfieren 8 variables de las cuales 4 son las principales y serán denotadas por  $\pi 1, \pi 2, \pi 3$ , y  $\pi 4$ .

$$1. \quad \pi(1) = [h, k, \mu, \rho, l] \quad (2.6)$$

Análisis dimensional para h

$$h = \frac{Q}{A\Delta T} \left( \frac{w}{m^2k} \right)$$

$$W = \frac{\text{joule}}{\text{seg}} = \frac{N \cdot m}{\text{seg}} = \frac{kg \cdot m}{\text{seg}^2} \left( \frac{m}{\text{seg}} \right) = \frac{kg \cdot m^2}{\text{seg}^3}$$

Entonces:

$$h = \frac{\frac{kg \cdot m^2}{\text{seg}^3}}{m^2k} = \frac{kg}{\text{seg}^2 \cdot k}$$

$$h = \frac{M}{t^3 \cdot T}$$

$$h = [Mt^{-3}T^{-1}]$$

Análisis dimensional para (K):

$$K = \frac{Q}{A \frac{\Delta T}{\Delta x}} = \frac{\frac{kg \cdot m^2}{\text{seg}^3}}{\frac{k}{m}} = \frac{kg \cdot m}{\text{seg}^3 \cdot k}$$

Entonces:

$$K = [Mt^{-3}T^{-1}]$$

Análisis dimensional para ( $\mu$ ):

$$\mu = [ML^{-1}t^{-1}]$$

Análisis dimensional para ( $\rho$ ):

$$\rho = [M]$$

$$\rho = [M L^{-3}]$$

Análisis dimensional para ( $l$ )

$$l = L$$

Ya se tienen variables principales, las  $\pi$ 's se representan de la siguiente manera

$$\pi_1 = [h, K^{a_1}, \mu^{b_1}, \rho^{c_1}, L^{d_1}]$$

$$\pi_1 = [h, K^{a_1}, \mu^{b_1}, \rho^{c_1}, L^{d_1}]$$

$$ML \ t \ T = [(Mt^{-3}T^{-1}), ML \ t^{-3}T^{-1a_1}(M L^{-1}t^{-1})^{b_1}, (M L^{-3})^{c_1}, L^{d_1}]$$

$$ML \ t \ T = M^{(1+a_1+b_1+c_1)} L^{(a_1-b_1-3c_1+d_1)} t^{(-3-3a_1-b_1)} T^{(-1a_1)}$$

Se igualan los exponentes para cada dimensión básica:

$$\text{Para } M \quad 1 + a_1 + b_1 + c_1 = 0$$

$$\text{Para } L \quad a_1 - b_1 - 3c_1 + d_1 = 0$$

$$\text{Para } t \quad -3 - 3a_1 - b_1 = 0$$

$$\text{Para } T \quad -1a_1 = 0$$

Se sustituye y se obtiene el valor de las variables:

$$a_1 = -1$$

$$b_1 = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$d_1 = 1$$

$\pi_1$  queda de la siguiente manera:

$$\pi_1 = [h, K^{-1}, l^1]$$

Obteniendo así el *Número de Nusselt*

$$\pi_1 = \left[ \frac{h l}{k} \right] Nu \quad (2.7)$$

De manera análoga se realizó el análisis para  $\pi_2$ ,  $\pi_3$ , y  $\pi_4$

$$2. \pi_2 = [U, K, \mu, \rho, l] \quad (2.8)$$

Al realizar el análisis de  $\pi_2$  se obtuvo el número de Reynolds

$$\pi_2 = \left[ \frac{U \rho l}{\mu} \right] \text{ Reynolds} \quad (2.9)$$

$$3. \pi_3 = [g \beta (T_w - T_f) K \mu \rho l] \quad (2.10)$$

Del análisis de  $\pi_3$  obtuvo el número de *Grashof*

$$\pi_3 = \frac{g \beta (T_w - T_f) \ell^3}{\nu^2} \text{ Grashof} \quad (2.11)$$

$$4. \pi_4 = [c_p, K, \mu, \rho, l] \quad (2.12)$$

Del análisis de  $\pi_4$  se obtuvo el número de *Prandtl*

$$\pi_4 = \frac{c_p \mu}{K} \text{ Prandtl} \quad (2.13)$$

Se obtuvo un número dimensional más  $\pi_5$ , siendo este el resultado del producto del número de Prandtl y de Grashof.

$$\pi_5 = \frac{g \beta (T_w - T_f) \ell^3}{\nu / K} \text{ Rayleigh} \quad (2.14)$$

## 2.5 CONCLUSIÓN

Se presentaron los modelos físicos y las ecuaciones gobernantes para el problema de convección natural en régimen de flujo laminar en una cavidad cuadrada calentada diferencialmente. También, se mostraron las condiciones de frontera del

problema, y así como su análisis adimensional de la cavidad cuadrada calentada diferencialmente la cual será resuelta a través de los distintos métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas acoplado la técnica de Multimalla (ACM).

# CAPÍTULO 3

## MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

En este capítulo se describen las operaciones aritméticas de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas, estas operaciones permiten evaluar la variable de interés. Estos métodos pueden clasificarse en: métodos directos que involucran cierto número de operaciones para lograr obtener el resultado y en métodos indirectos que involucran realizar ciertos números de operaciones y los métodos indirectos que resuelven el sistema mediante procedimientos iterativos que involucran la repetida aplicación de algoritmos sencillos. Finalmente, en esta sección se describe la filosofía de la técnica de Multimalla así como su clasificación.

### 3.1 CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Los métodos de solución pueden clasificarse en forma general como directos e iterativos. Entre los métodos directos, se encuentran la regla de Cramer de inversión de matrices y la eliminación Gaussiana. Sin embargo, el número de operaciones necesarias para la solución son normalmente exponenciales al número de las ecuaciones por resolver. Por otro lado, los métodos iterativos son generalmente mucho más económicos computacionalmente que los métodos directos y por ello son preferidos cuando la matriz es dispersa. Entre los métodos iterativos se encuentra el método de Jacobi y Gauss-Seidel, los cuales se emplean para resolver grandes sistemas de ecuaciones algebraicas.

Se puede afirmar que uno de los algoritmos más utilizados en CFD es el desarrollado por Thomas, el cual resuelve rápidamente sistemas de ecuaciones algebraicas tridiagonales y actualmente es conocido como el algoritmo de Thomas o el algoritmo de matriz tridiagonal (TDMA).

A continuación, se describen los métodos directos e iterativos, así como sus ventajas y limitaciones.

### 3.2 MÉTODOS DIRECTOS

De acuerdo con la discretización obtenida mediante el método de volumen finito para los problemas de difusión en una dimensión, el sistema de ecuaciones algebraicas resultante es la Ecuación (3.1).

$$[A_{i,j}] [\varphi_j] = [B_j] \quad (3.1)$$

Donde  $A_{i,j}$  es la matriz de coeficientes,  $\varphi_j$  es el vector incógnita para la variable discreta  $\varphi$  y  $B_j$  es el vector resultante debido a términos fuentes o información de condiciones de frontera. Los métodos directos resuelven la Ecuación (3.1) mediante métodos establecidos del algebra lineal. El método directo más simple es el de inversión, donde el vector se determina de la siguiente manera:

$$\varphi_j = [A_{i,j}]^{-1} B_j \quad (3.2)$$

Si se encuentra  $[A_{i,j}]^{-1}$ , entonces se garantiza la solución del vector  $\varphi_j$ . Sin embargo, debido a que el número finito de operaciones matemáticas para invertir la matriz  $A_{i,j}$  es del orden de  $Nx^2$ , los métodos directos de inversión no se emplean en problemas prácticos. Para los métodos de discretización empleados; la matriz de coeficientes  $A_{i,j}$  es dispersa y diagonalmente dominante, debido al uso de mallas estructuradas es bandeda y en general para muchos problemas es simétrica. Para problemas de una dimensión la matriz  $A_{i,j}$  es tridiagonal; pero dependiendo de la naturaleza del problema, las dimensiones y el esquema de interpolación, la matriz de coeficientes puede ser multidiagonal, completa o dispersa. Los métodos directos se prefieren para sistemas que tienen una matriz de coeficientes bandedos y para problemas que tienen geometrías muy simples en su malla y condiciones de frontera, son eficientes, pero requieren una gran capacidad de almacenamiento del espacio de memoria en la computadora. Por ello, los métodos directos no son muy recomendados en CFD, porque si la matriz  $A_{i,j}$  es muy grande, resultan ser imprácticos, otra situación, es que generalmente la matriz  $A_{i,j}$  es no-lineal; entonces, si se emplea un método directo, éste debe quedar embebido en un ciclo iterativo para actualizar las no-linealidades en  $A_{i,j}$ . Dentro de estos métodos se encuentran los siguientes:

### **3.2.1 REGLA DE CRAMER**

El método de Cramer no es práctico para usar en un número grande de ecuaciones debido a que el método involucra un gran número de operaciones. Al resolver un grupo de  $Nx$  ecuaciones, el número de operaciones básicas necesarias es del orden de  $Nx^4$ . Este método emplea el doble del número de ecuaciones a ser resuelto, lo cual incrementa el tiempo de computó en un orden de  $2^4$  veces, la exactitud será disminuida por los errores de redondeo.

### 3.2.2 ELIMINACIÓN DE GAUSS

Este método es el más común, en este método la matriz de coeficientes se transforma en una matriz triangular superior y solo emplea dos operaciones:

- Multiplicación o División de alguna ecuación algebraica por una constante.
- Re-emplazamiento de alguna ecuación por la suma o diferencia de esta ecuación con alguna otra ecuación.

Una vez que el sistema se transforma en una forma de diagonal superior, la solución inicia desde la última ecuación por un proceso de sustitución inversa. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento, el cual involucra solo tres variables desconocidas así el sistema de ecuaciones algebraicas es:

### 3.2.3 ALGORITMO DE THOMAS

La designación del algoritmo de Thomas o el TDMA (*TriDiagonal-Matriz Algorithm*) se refiere al hecho que en la matriz de coeficientes  $A_{i,j}$  todos los coeficientes diferentes de cero se alinean en sí mismo a lo largo de tres diagonales de la matriz. Si se supone que los puntos discretos de la malla fueron numerados  $i = 1, 2, 3, \dots, Nx$ , donde los puntos  $i = 1$  e  $i = Nx$  corresponden a los puntos discretos de la frontera. Las ecuaciones discretizadas para problemas en una 1-D pueden ser escritas como:

$$a_p(i)\varphi_p(i) = a_E(i)\varphi_E(i+1) + a_W(i)\varphi_W(i-1) + b(i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, Nx \quad (3.3)$$

Se aprecia que la variable  $\varphi_p(i)$  está relacionada con los valores de las variables vecinas  $\varphi_W(i-1)$  y  $\varphi_E(i+1)$ . Para tomar en cuenta la forma especial de las ecuaciones en los puntos frontera, siempre que se hace la discretización de las condiciones de frontera indistintamente del tipo de condición se debe tener:

$$a_W(i=1) = 0 \quad (3.4)$$

$$a_E(i=Nx) = 0 \quad (3.5)$$

Para emplear la Ecuación (3.3) para  $i = 1$  implica  $\varphi_1$  es conocida en términos de  $\varphi_2$  al aplicar la condición dada en la Ecuación (3.4) para  $i = 2$  de la Ecuación (3.3)

existe relación entre  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$ , pero como  $\varphi_1$  puede ser expresada en términos de  $\varphi_2$  esta relación se reduce a una expresión entre  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$ . En otras palabras,  $\varphi_2$  se expresa en términos  $\varphi_3$ . Este proceso de sustitución se continua hasta que  $\varphi_{N_x}$  se expresa formalmente en términos de  $\varphi_{N_x+1}$ . Pero debido a que  $\varphi_{N_x+1}$  no existe, se obtiene el valor numérico de  $\varphi_{N_x}$  en esta etapa. Esto permite iniciar un proceso de sustitución básica hasta atrás, en el cual  $\varphi_{N_x-1}$  se obtiene de  $\varphi_{N_x}$ ,  $\varphi_{N_x-2}$  de  $\varphi_{N_x-1}$ .....,  $\varphi_2$  de  $\varphi_3$  y  $\varphi_1$  de  $\varphi_2$ . Esta es la esencia del TDMA.

Los pasos del algoritmo TDMA se inician al considerar que el proceso de sustitución hacia adelante, se puede escribir con la relación.

$$\varphi_p(i) = P(i)\varphi_E(i+1) + Q(i) \quad (3.6)$$

Si se evalúa la relación anterior para el punto  $i-1$ , la ecuación se puede escribir como:

$$\varphi_w(i-1) = P(i-1)\varphi_p(i) + Q(i-1) \quad (3.7)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.7) en la Ecuación (3.3) se llega a:

$$a_p(i)\varphi_p(i) = a_w(i)[P(i-1)\varphi_p(i) + Q(i-1)] + a_E(i)\varphi_E(i+1) + b(i) \quad (3.8)$$

De tal manera que arreglando se obtiene:

$$\varphi_p(i) = \frac{a_E(i)}{a_p(i) - a_w(i)P(i-1)}\varphi_E(i+1) + \frac{b(i) + a_w(i)Q(i-1)}{a_p(i) - a_w(i)P(i-1)} \quad (3.9)$$

Al comparar la Ecuación (3.9) con la Ecuación (3.6) se obtiene:

$$P(i) = \frac{a_E(i)}{a_p(i) - a_w(i)P(i-1)} \quad (3.10)$$

$$Q(i) = \frac{b(i) + a_w(i)Q(i-1)}{a_p(i) - a_w(i)P(i-1)} \quad (3.11)$$

Estas últimas ecuaciones son llamadas relaciones de recurrencia, así que para el caso de  $i = 1$  y al usar la condición de las Ecuaciones (3.3) y (3.4), la Ecuación (3.10) y la Ecuación (3.11) se reducen a:

$$P(i) = \frac{a_E(i)}{a_p(i)} \quad (3.12)$$

$$Q(i) = \frac{b(i)}{a_p(i)} \quad (3.13)$$

Para determinar los valores de  $P(i)$  y  $Q(i)$  en los nodos restantes  $i=2,3,\dots,N_x$  se usan las Ecuaciones (3.10) y (3.11). Nótese que para  $i = N_x$  se sabe que  $a_E(N_x) = 0$  y por lo tanto  $P(N_x) = 0$ . Con  $P(N_x) = 0$  y por medio de la Ecuación (2.7) se obtiene:

$$\varphi_p(N_x) = Q(N_x) \quad (3.14)$$

En este punto se está en la posición de iniciar una sustitución hacia atrás al usar la Ecuación (3.6), lo cual concluye el proceso de cálculo del algoritmo. Los pasos del TDMA se resumen de la siguiente manera:

- Calcular  $P(1)$  y  $Q(1)$  de la Ecuación (3.12).
- Usar las relaciones de recurrencias de las Ecuaciones (3.10) y (3.11) para obtener  $P(i)$  y  $Q(i)$  para  $i = 2,3,\dots,N_x$ .
- Agrupar o asignar  $\varphi_p(N_x) = Q(N_x)$  de la Ecuación (3.14).
- Usar la Ecuación (3.6) para  $i = N_x - 1, N_x - 2, \dots, 3, 2, 1$ , para obtener  $\varphi_{N_x-1}, \varphi_{N_x-2}, \dots, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ .

El TDMA es un método muy eficaz y conveniente para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas, ya que éste requiere almacenamiento y tiempo proporcional a  $N_x$  en lugar de  $N_x^2$  o  $N_x^3$  como es el caso de otros métodos. Por consecuencia el tiempo computacional es mucho menor, también los errores de redondeo se reducen significativamente.

### 3.3 MÉTODOS INDIRECTOS

Los métodos indirectos, también conocidos como métodos iterativos, bajo ciertas circunstancias es mejor emplearlos respecto a un método directo, si el método indirecto permite que el sistema de ecuaciones algebraicas sea convergente, entonces, la solución se obtiene con exactitud. Si el conjunto de ecuaciones que forman la matriz a resolver es diagonalmente dominante, entonces el método iterativo convergerá. Una matriz diagonalmente dominante expresa que los valores en una matriz, por ejemplo, de (3x3), que se encuentran en la diagonal principal de la matriz son los valores más altos en sus respectivas ecuaciones.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 121 \end{bmatrix}$$

Los valores en la diagonal principal indican que la solución a través de un método iterativo convergerá. La filosofía del método es adivinar el valor de la variable y corregirlo progresivamente mediante la aplicación repetida de la ecuación discreta hasta que algún criterio de convergencia se satisface. Estos métodos iterativos son algoritmos simples, fáciles de aplicar y no tienen dificultades al emplear geometría simple o por las condiciones de frontera; a continuación, presentamos algunos métodos iterativos:

#### 3.3.1 MÉTODO JACOBI

El método de Jacobi consiste en suponer una primera aproximación  $(\varphi_j)^{n=0}$  para la solución de  $[A_{i,j}][\varphi_j] = [B_j]$  después ésta se calcula por aproximaciones sucesivas  $(\varphi_j)^n$  resolviendo el sistema con respecto a su diagonal, para  $n = 1, 2, 3, \dots$  (número de iteraciones). Por ejemplo, para una ecuación discreta típica como la Ecuación (3.3).

$$a_p(i)\varphi_p(i) = a_E(i)\varphi_E(i+1) + a_W(i)\varphi_W(i-1) + b(i) \quad i = 2, 3, \dots, Nx$$

Si se supone un campo de valores iniciales  $(\varphi_j)^{n=0}$  después se calcula  $(\varphi_j)^{n=1}$  a partir de los valores conocidos de la iteración precedente de la Ecuación (3.3) como:

$$[\varphi_P(i)]^{n+1} = \frac{a_E(i)[\varphi_E(i+1)]^n + a_W(i)[\varphi_W(i-1)]^n + b(i)}{a_P(i)} \quad (3.15)$$

La Ecuación (3.15) es aplicable para todos los nodos del sistema, incluyendo los nodos frontera.

### 3.3.2 MÉTODO GAUSS-SEIDEL

El método de Gauss-Seidel es una modificación del método de Jacobi, donde se utilizan los valores más recientes en los cálculos en lugar de emplear únicamente los valores de la iteración previa. La iteración de Gauss-Seidel se basa en la idea de aproximaciones sucesivas, pero ésta difiere de la iteración estándar de Jacobi en que el valor determinado más recientemente se usa en cada ronda de iteraciones. Los pasos básicos son:

#### Paso 1

Suponer valores para todos los puntos discretos de la variable  $(\varphi_P^{n=0})$ .

#### Paso 2

El cálculo inicia con el uso de valores supuestos para determinar una primera aproximación para cada uno de los valores de la variable sobre la diagonal principal, se usa el valor determinado más reciente, con lo que la primera ronda de iteraciones es completa  $(n+1)$ . Si se considera el ejemplo donde el recorrido punto a punto se hace desde el punto  $(i=1)$  hasta  $(i=N_x)$  de la Ecuación (3.15) se tiene:

$$[\varphi_P(i)]^{n+1} = \frac{a_E(i)[\varphi_E(i+1)]^n + a_W(i)[\varphi_W(i-1)]^{n+1} + b(i)}{a_P(i)} \quad (3.16)$$

Nótese que el valor de  $\varphi_W(i-1)$  ya es conocido, entonces éste se utiliza.

#### Paso 3

El procedimiento se continúa hasta que se satisface algún criterio de convergencia para todos los valores de la variable  $\varphi_P$ .

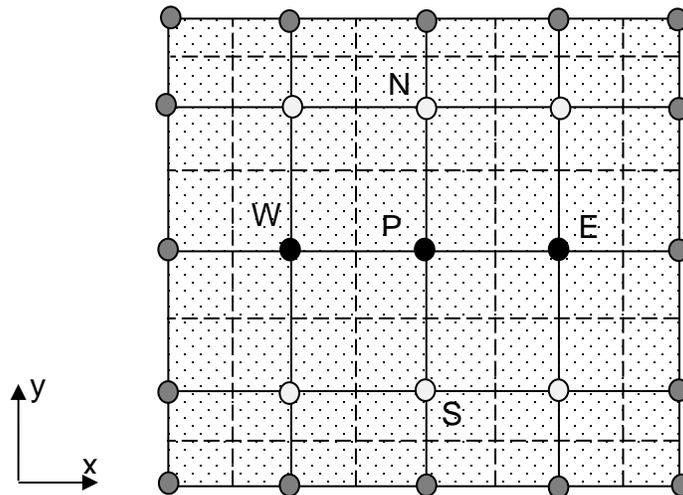
Este método no converge lo suficientemente rápido, por lo que es necesario emplear la sobre-relajación en conjunto con el método de Gauss-Seidel para acelerar la convergencia. Sin embargo, para problemas no-lineales no se recomienda el uso de la sobre-relajación, por el contrario se tendrá que hacer uso del concepto de bajo-relajación.

### 3.3.3 ALGORITMO DE THOMAS PARA 2 DIMENSIONES

El TDMA puede ser aplicado iterativamente, línea por línea para resolver problemas en 2-D. El TDMA iterativo se usa ampliamente en problemas de CFD. Existen varias modificaciones al TDMA para ser usado de forma iterativa, estas se presentan a continuación.

Para situaciones bidimensionales, considérese la Figura 3.1 y la ecuación en notación de coeficientes agrupados para 2-D como:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.17)$$



**Figura 3.1** Representación de TDMA en 2 dimensiones.

Para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas mediante el algoritmo de Thomas, el TDMA se aplica a lo largo de líneas horizontales (método de línea por línea en dirección-x, LBL-x) o verticales (método de línea por línea en dirección-y, LBL-y). El método LBL-x se arregla de la siguiente manera:

$$-a_W\varphi_W + a_P\varphi_P - a_E\varphi_E = b^* \quad (3.18)$$

Donde:  $b^* = a_S\varphi_S + a_N\varphi_N + b$

Este término  $b^*$  de la Ecuación (3.18) se supone conocido y los valores de  $\varphi_s$  y  $\varphi_n$  se toman de la iteración anterior. De esta manera, se puede resolver a lo largo de la dirección  $x$  como si fuera un problema en una dimensión. La Ecuación (3.18) se aplica  $j$  veces desde  $j=1$  hasta  $j=Ny$  ( $Ny$  es el número de nodos en dirección vertical). Cuando se han recorrido todas las líneas de  $j$  entonces se dice que se acaba de realizar una iteración del método LBL- $x$ . Posteriormente, se aplica algún criterio de convergencia, si se cumple, se termina el proceso de solución de  $\varphi$  de lo contrario se actualiza el valor de  $\varphi$  y se repite el cálculo aplicando nuevamente la Ecuación (3.18), hasta que se cumpla el criterio de convergencia establecido. La secuencia en que las líneas se van resolviendo se conoce como la dirección de barrido, en este caso dicha dirección es  $x$ .

Para realizar el mismo procedimiento, solo que en dirección  $y$ , este método se conoce como LBL- $y$ . Para un barrido en dirección  $y$  la Ecuación (3.17) se escribe como:

$$-a_S\varphi_S + a_P\varphi_P - a_N\varphi_N = b^* \quad (3.19)$$

Donde:  $b^* = a_W\varphi_W + a_E\varphi_E + b$

El término  $b^*$  de la Ecuación (3.19) supone conocidos los valores de  $\varphi_W$  y  $\varphi_E$  de la iteración anterior. También, la Ecuación (3.19) representa un sistema tridiagonal, el cual se puede resolver a lo largo de la dirección  $y$ .

Con el fin de mejorar el proceso iterativo hacia la convergencia se puede realizar una combinación de los métodos anteriores, este método es conocido como el método de línea por línea de dirección alternante (LBL-ADI). Los resultados de la variable  $\varphi$  obtenida al aplicar el método LBL- $x$  se usan para inicializar el barrido por el método LBL- $y$ . Al término del barrido por el método LBL- $x$  y posteriormente aplicar el LBL- $y$ , se ha hecho una iteración del método LBL-ADI.

Para finalizar se aplica el criterio de convergencia, el proceso iterativo concluye hasta cumplir el criterio establecido.

Existen otras variantes de los métodos iterativos de línea por línea al igual usa la filosofía de punto a punto de Gauss-Seidel entre ellos: El método LGS-y, LGS-x y LGS-ADI.

El método LGS-x tiene la misma estructura y seguimiento que el método LBL-x con la diferencia que al momento de tomar los valores de  $\varphi_N$  y  $\varphi_S$  se usan los valores ya determinados sobre la misma iteración. Es decir, para iniciar el método y resolver para la línea  $j=1$  se suponen los valores de  $\varphi_N^*$ , para las siguientes líneas de barrido el método ( $j=2,3,\dots,Ny$ ) se usa el valor recién calculado de  $\varphi_S$  y para  $\varphi_N^*$  se toma el valor de la iteración anterior. Así la ecuación generativa del sistema de ecuaciones algebraicas a resolver es:

$$-a_W\varphi_W + a_P\varphi_P - a_E\varphi_E = b^{**} \quad (3.20)$$

Donde:  $b^{**} = a_S\varphi_S + a_N\varphi_N^* + b^*$

Los términos  $\varphi_N^*$  y  $b^*$  representan los valores supuestos de la iteración anterior. En el método LGS-x se emplea la misma filosofía de usar los valores conocidos inmediatos en el proceso iterativo punto a punto de Gauss-Seidel, con la diferencia que aquí es línea a línea.

Un procedimiento análogo se realiza en la dirección-y en este caso el método se le conoce como LGS-y. Para el barrido en dirección-y, la Ecuación (3.18) se escribe como:

$$-a_S\varphi_S + a_P\varphi_P - a_N\varphi_N = b^{**} \quad (3.21)$$

Donde:  $b^{**} = a_W\varphi_W + a_E\varphi_E^* + b^*$

Los términos  $\varphi_E^*$  y  $b^*$  representan los valores supuestos de la iteración anterior. El método de línea de Gauss-Seidel de dirección alternantes (LGS-ADI) es la combinación de los dos métodos LGS-x y LGS-y. Se inicia con la aplicación normal

de uno de los dos métodos; por ejemplo, se aplica LGS-x que dará valores de salida de  $\varphi$  en todo el dominio de solución, estos valores servirán de valor supuesto para otro método LGS-y. Al término del cálculo del segundo algoritmo se dice que se ha hecho una iteración del método LGS-ADI.

### **3.4 MÉTODO MULTIMALLA**

Por la dificultad que presentan ciertos problemas, por no tener solución analítica es necesario emplear un método numérico y por consecuencia un método de solución de ecuaciones algebraicas, el número de ecuaciones a resolver depende de la complejidad del problema. El método de solución de ecuaciones algebraicas es menos eficiente cuando el sistema de ecuaciones a resolver es muy grande, pues aumenta el tiempo de cómputo para obtener la solución y por ello que se requiere mejorar los algoritmos de solución. Entre ellos, se encuentran la técnica de multimalla, la cual fue desarrollada debido a la necesidad de reducir los tiempos computacionales en la solución de grandes sistemas de ecuaciones algebraicas. En el uso de una técnica de multimalla se tienen que diseñar los ciclos para mejorar la eficiencia del método de soluciones logrando determinar eficientemente los errores.

#### **3.4.1 FILOSOFÍA DEL MÉTODO MULTIMALLA**

Los métodos iterativos tienden a eliminar eficientemente, en mallas finas las componentes de alta frecuencia de error (aquellas con longitudes de onda del orden del tamaño del espaciamiento de la malla) pero fallan en desvanecer las componentes de baja frecuencia de error (aquellas con longitudes de onda mayores del tamaño del espaciamiento de la malla), los cuales son difíciles de remover. El error es la diferencia entre la solución en un número "n" de iteraciones con un método indirecto comparada con la solución exacta del problema. El objetivo es reducir este error a un nivel mínimo, es decir, reducir las componentes de alta y baja frecuencia, como los métodos iterativos reducen con eficiencia los componentes de error cuya frecuencia corresponde a un tamaño de malla en uso, si únicamente se emplea una malla, es natural esperar que la reducción de todas las componentes de error sea ineficiente.

### 3.4.2 CLASIFICACIÓN DEL MÉTODO MULTIMALLA

Existe una gran información acerca del método multimalla y en particular, aplicado a la dinámica de fluidos computacional (CFD). Se espera que la siguiente clasificación sea de utilidad, ya que resulta ser un tanto difícil tener una clasificación (Soria, 2000). Los algoritmos de multimalla orientados hacia CFD pueden ser clasificados como:

1.- El método usado para obtener el operador discreto  $(I_k^{k-1}, I_{k-1}^k)$ :

- Geométrico (GMG): La ecuación discreta se obtiene en función del espesor del volumen de control, y recalcula los coeficientes en cada nivel de malla.
- Algebraico (AMG): Es aproximado como una combinación lineal de los coeficientes de la malla fina, es decir interpola los coeficientes entre cada nivel de malla.

2.- El tratamiento de acoplamiento de presión-velocidad:

- Segregados (S-MG): Resuelve las componentes de velocidad  $(u, v)$  y la de Presión en procedimientos individuales.
- Acoplados (A-MG): Resuelve las componentes de velocidad  $(u, v)$  y presión en el mismo procedimiento.

3.-El tipo de malla:

- Estructurado (MG): El operador  $A^k$  es una matriz penta o hepta-diagonal, esto es razonable para mantener la plantilla de 5 o 7 puntos constantes para la siguiente matriz  $A^{k+1}$ , de otra forma el tamaño de la plantilla estaría aumentando.
- No-estructurado (MG): Para este caso, no hay una ecuación patrón para preservar en el siguiente nivel. La malla gruesa es usualmente generada al unir volúmenes de control adyacentes. Este proceso se denomina aglomeración.

4.- La ecuaciones de corrección:

- Esquema de Corrección (CS-MG): Este método emplea un error o corrección para calcular la variable, es decir se aproxima la corrección que se añade a la aproximación actual. No es una aproximación de la solución, pero si una aproximación de su corrección.
- Almacenamiento de Aproximación Completa (FAS-MG): Este emplea una aproximación de la variable.

#### 5.-Tratamiento de las no-linealidades:

- Lineal MG:
- No-lineal MG

#### 6.-Control de iteraciones para desvanecer (*smoothing*) los errores:

- Fijo: Cuando en el método se aplica el *smoothing* en cada nivel de malla este podría ser definido con un número de iteraciones máximas.
- Número de iteraciones adaptadas a un criterio: En este caso al aplicar el *smoothing* en cada nivel se podría emplear un criterio de convergencia.

#### 7.- Generación de valor inicial estimado:

- Uso del FMG (*Full Multigrid*): Emplea un valor aproximado de la variable en la malla gruesa esa solución, es prolongada y mejorada al siguiente nivel de malla.
- No generar valores estimados: Trabaja con valores adivinados

#### 8.-Tipos de ciclos (V, W, F):

- Fijos: Se definen al inicio del procedimiento la restricción y prolongación en cada nivel de malla.
- Flexibles: Varía el procedimiento de restricción y prolongación, es decir sucede de manera aleatoria y depende del monitoreo del procedimiento.

### 3.4.3 MÉTODO MULTIMALLA TRADICIONAL

La filosofía del método multimalla está basada en la idea de que cada componente de error debe ser suavizada en una malla adecuada, esto es por qué el método multimalla hace uso de unas secuencias de mallas en conjunto con algún método iterativo de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas para suavizar y desvanecer las componentes de error.

Por ejemplo de las ecuaciones de conservación en dos dimensiones discretizadas por el método de volumen finito se tiene:

$$a_P \varphi_P = a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + a_N \varphi_N + a_S \varphi_S + b$$

O en forma matricial

$$[A][\varphi] = [B] \quad (3.22)$$

Por simplicidad se elimina los corchetes de la ecuación anterior, por lo tanto, la expresión es:

$$A\varphi = B \quad (3.23)$$

Donde  $A$  es la matriz de coeficientes,  $\varphi$  es la solución exacta del sistema y  $B$  es el término independiente. Si la variable  $\varphi$  es la solución exacta, la ecuación (3.23) es igual a cero ecuación (3.24), pero si no es la solución exacta se tiene una  $\varphi_{iter}$  la cual es una aproximación de un número "n" de iteraciones cuyo valor no ha sido convergido, de donde se obtiene un residual, ecuación (3.25).

$$B - A\varphi_{exact} = 0 \quad (3.24)$$

$$B - A\varphi_{iter} = R \quad (3.25)$$

El error de la solución de este sistema de ecuaciones es la diferencia entre la solución exacta y una solución aproximada esto es:

$$\varepsilon = \varphi_{exact} - \varphi_{iter}$$

De la cual se puede obtener

$$\varphi_{exact} = \varphi_{iter} + \varepsilon \quad (3.26)$$

Si se resta la Ecuación (3.25) de la Ecuación (3.24) y se obtiene la siguiente expresión:

$$A[\varphi_{exact} - \varphi_{iter}] = R \quad (3.27)$$

$$A[\varepsilon] = R \quad (3.28)$$

La Ecuación (3.28) es de suma importancia en el método de multimalla, ya que será la ecuación que se resuelve en las diferentes mallas gruesas a usar en el método.

Los pasos de la formulación multimalla se describen a continuación:

Se supondrá que se tienen 3 niveles de mallas donde: el nivel 1, nivel 2, nivel 3 corresponde a la malla fina, la malla gruesa, malla muy gruesa, respectivamente.

En el nivel 1 se tiene la matriz de  $[A]$ ,  $[\varphi]$ , se aplica un método de solución de ecuaciones para obtener los valores del residual  $[R]$  y la variable  $[\varphi_{iter}]$ . Con esta información se interpola hacia la malla gruesa mediante la operación de restricción que se define como:

- Operación de Restricción: Transferencia de la información de Residual y coeficientes de la malla fina a las mallas gruesas.

El residual obtenido en el nivel 1 se envía a través de una interpolación al nivel 2, la matriz de coeficientes de igual manera se envía al siguiente nivel, solo que se debe decidir si se interpola o se recalcula en cada nivel de malla. En el nivel 2 es necesario calcular el  $\varepsilon'$  por lo que se le aplica un método de solución de ecuaciones hasta obtener un  $\varepsilon'_{iter}$ , por lo tanto, se produce un  $R'_2$  el cual es un residual en el nivel 2 como resultado de las iteraciones. El valor de  $\varepsilon'_{iter}$  y el residual  $R'_2$  obtenido en el nivel 2 pasa a través de una interpolación al nivel 3 y así

sucesivamente si hubiese más mallas gruesas. En el último nivel o la malla más gruesa elegida se tiene:

- Solución en la Malla Gruesa: Obtener la solución exacta de la variable ( $\varepsilon''$ ).

En el nivel 3 no se tiene el valor del  $\varepsilon''$  por lo que hay que aplicar un método de solución de ecuaciones algebraicas, el método de solución se aplica hasta converger y obtener una solución del error  $\varepsilon''_{exact}$ . Posteriormente, se debe interpolar desde la malla más gruesa hacia las mallas más finas hasta llegar al nivel 1. Ésto se realizará mediante el operador de prolongación definido como:

- Operación de Prolongación: Transferir la información del error de la malla gruesa a las mallas finas.

El error  $\varepsilon''_{exact}$  obtenido en el nivel 3 es interpolado para transferirse al nivel 2 de malla como  $\varepsilon''_{error}$ , el término  $\varepsilon'_{inter}$  es el valor del error obtenido en la restricción en el nivel 2. Teniendo toda esta información, es necesario calcular el valor exacto del error en el nivel 2 como se muestra en la Ecuación (3.29).

$$\varepsilon''_{exact} = \varepsilon'_{inter} + \varepsilon''_{error} \quad (3.29)$$

Para recuperar la información perdida en las interpolaciones realizadas es necesario emplear el concepto de *smoothing*, éste consiste en aplicar un método de solución y realizar algunas iteraciones. Ya que se tiene el valor del error exacto en el nivel 2,  $\varepsilon''_{exact}$ , éste pasa a través de una interpolación al nivel 1 como  $\varepsilon'_{error}$  como se muestra en la Ecuación (3.30) para obtener la  $\varphi_{exact}$ .

$$\varphi_{exact} = \varphi_{iter} + \varepsilon'_{error} \quad (3.30)$$

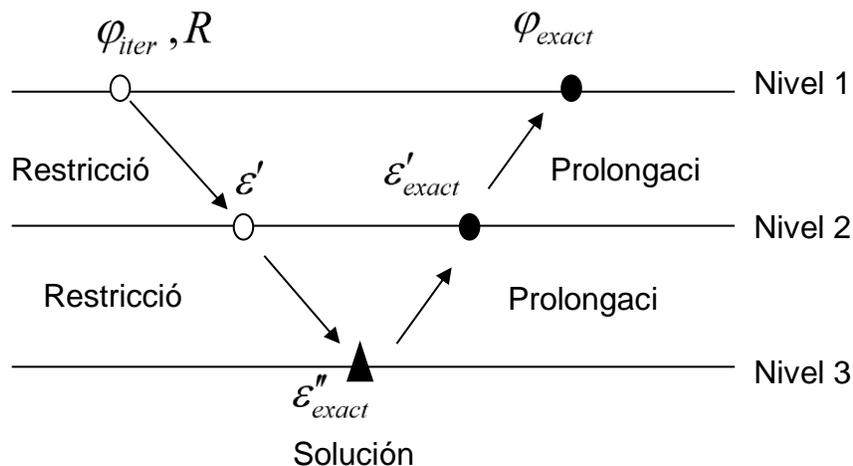
En el proceso de Restricción ( $I_k^{k-1}$ ) y Prolongación ( $I_{k-1}^k$ ) es donde surgen dos maneras de formular el método multimalla Geométrico y Algebraico. El primer método se usa la información geométrica, es decir los coeficientes de la matriz  $[A]$ , los cuales se calculan en cada nivel de malla. Para dominios regulares esta formulación geométrica tiene una convergencia eficiente, pero es altamente

dependiente de dominio, por lo que al tener dominios irregulares es complicado aplicar este método.

El método Algebraico utiliza la información de la matriz de coeficientes  $[A]$ , la cual es calculada en el nivel de malla fina, este se sustituye en una secuencia de matrices con base en los diferentes niveles de malla; es decir en este método, la matriz de coeficientes en cada nivel de malla gruesa se determina a partir de la matriz de la malla fina. También, el método emplea la relación de la Ecuación (3.30) para determinar la solución exacta. El método que emplea esta formulación se conoce como ACM que significa de sus siglas en inglés, *Additive Correction MultiGrid* (Multimalla de Corrección Aditiva).

### 3.4.4 MULTIMALLAS DE CORRECCIÓN ADITIVA (ACM)

El método ACM pertenece al grupo del método multimalla llamado Esquema de Corrección (CS), donde la Ecuación (3.28) es importante. Por lo tanto, el valor del error  $[\varepsilon]$  se obtiene en el nivel de la malla gruesa. En la Figura 3.2 se presenta un esquema de 3 niveles de malla en un ciclo V del método ACM. La malla fina (nivel 1), malla menos fina (nivel 2) y la malla gruesa (nivel 3). Al obtener  $(e)$  en la malla gruesa servirá de corrección al valor de  $(\varphi_{iter})$  en la malla fina y obtener la solución exacta  $(\varphi_{exact})$  en la malla fina mediante la Ecuación (3.30).



**Figura 3.2.** Esquema de 3 niveles de un Ciclo-V del método ACM.

### 3.4.4.1 TIPOS DE CICLOS DE MULTIMALLA

El ciclo multimalla es definido a partir de la transferencia de información entre los distintos niveles de mallas y el orden en el cual sucede la transferencia de información, con el objetivo de eliminar los componentes de error. Los ciclos multimallas pueden ser de tipo flexibles o fijos.

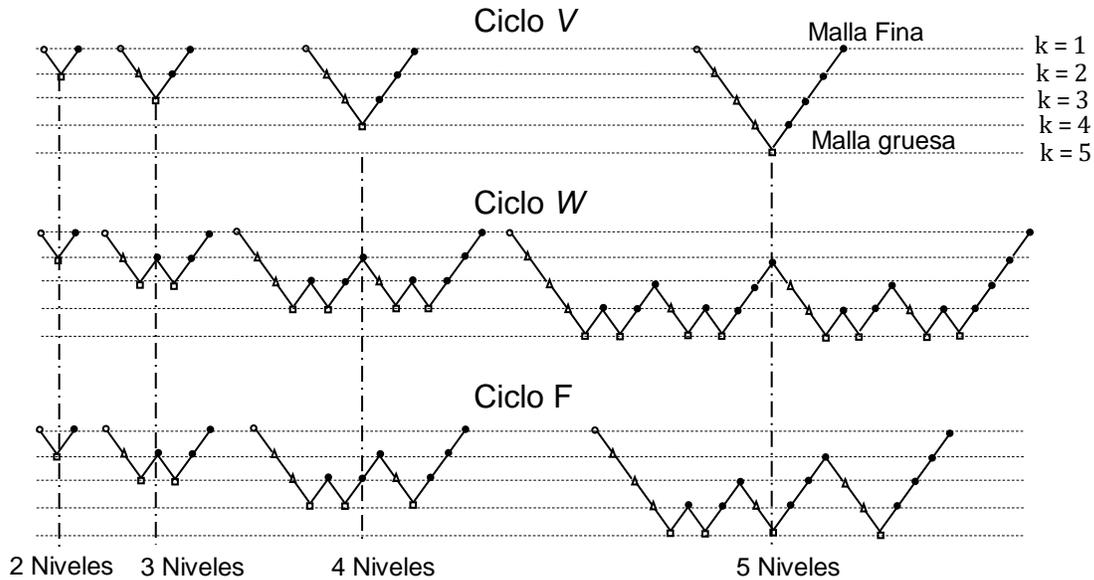
- **Ciclo Flexibles**

Estos ciclos se caracterizan por qué iteran el método de solución de ecuaciones algebraicas hasta cumplir el criterio convergencia establecido, esto se realiza después de cada procedimiento de restricción y prolongación. En función de la tasa de convergencia obtenida, el algoritmo decide: continuar en una malla más gruesa, continuar iterando en el nivel actual ó retornar a una malla más fina. El número de iteraciones del método iterativo de solución de ecuaciones es por lo tanto variable en cada malla. La principal dificultad asociada al uso de este tipo de ciclo consiste en establecer un criterio de convergencia adecuado.

- **Ciclo Fijos**

En este tipo de ciclos se define la secuencia de diferentes mallas a utilizar y el número de iteraciones del método de solución de ecuaciones algebraicas en cada una de ellas. En la Figura 2.9 se presentan los ciclos fijos más empleados V, W y F para diferentes niveles de malla ( $k$ ). Se puede observar que para dos niveles los ciclos son idénticos, pero para el caso de tres niveles los ciclos W y F son similares. Después de tres niveles los ciclos son totalmente diferentes.

Independientemente del ciclo multimalla empleado, es recomendable obtener la mejor solución en el último nivel de malla, es decir iterar hasta cumplir el criterio de convergencia establecido al utilizar un método iterativo de solución de ecuaciones.



**Figura 3.3.** Ciclos Multimalla con diferentes niveles de mallas.

#### 3.4.4.2 FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE CORRECCIÓN ADITIVA (ACM)

En la formulación ACM la ecuación de conservación se discretiza en la malla fina, en la malla gruesa se tiene que transferir únicamente la información de los coeficientes y residual obtenidos en la malla fina.

En general, son tres etapas que se desarrollan durante una formulación con el algoritmo ACM:

- Transferencia de información de la malla fina a la gruesa.
- Solución en la malla gruesa.
- Transferencia de información de la malla gruesa a la fina.

#### ***Interpolación Bi-lineal***

La interpolación bilineal es una extensión de la interpolación lineal para interpolar funciones de dos variables (por ejemplo,  $x$  e  $y$ ) en una malla regular en dos dimensiones. La idea principal es realizar una interpolación lineal en una dirección, y después en la otra. Aunque cada uno de estos pasos es lineal, la interpolación en

su conjunto no es lineal sino cuadrática. Contrariamente a lo que el nombre podría sugerir, la interpolación bilineal *no* es lineal, ya que de hecho es el producto de dos funciones lineales y, por tanto, no lineal.

### ***Operador de Prolongación***

Al igual que se requiere transferir información desde una malla fina a una malla gruesa, también es necesario transferir información desde una malla gruesa hacia una malla fina. Para que sea posible, se requiere una interpolación la cual se conoce como Prolongación y se denota por el símbolo  $(I_{k-1}^k)$ . Este operador también depende de la razón de volúmenes de control entre las diferentes mallas.

## **3.5 CONCLUSIÓN**

Se describió la formulación de los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas a través de los métodos directos e indirectos. También se describió la filosofía de la técnica de Multimalla así mismo como su clasificación y la descripción conceptual de la técnica Multimalla (ACM).

# CAPÍTULO 4

## RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados correspondientes a la evaluación computacional por el uso de la técnica de Multimalla (ACM) respecto a otros métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. Los resultados mostraron que la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) se reduce significativamente el tiempo de cómputo principalmente para mallas finas.

#### **4.1 EVALUACIÓN COMPUTACIONAL DEL TÉCNICA DE MULTIMALLAS DE CORRECCIONES ADITIVAS (ACM)**

El código numérico fue desarrollado sobre sistema Windows para el lenguaje de programación FORTRAN en la versión Power Station (Visual Fortran) por el Dr. J. Perfecto Xamán Villaseñor en el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET). La evaluación del esfuerzo computacional del método de (ACM) se realizó sobre el problema de transferencia de calor por convección natural en una cavidad calentada diferencialmente en régimen laminar en 2-D. La evaluación computacional fue realizada sobre la siguiente plataforma: Equipo computer-0-6 con un procesador Intel® core™ i7-4790 cpu @ 3.60 GHz, memoria instalada (RAM) 32.0 GB, sistema operativo 64 bits.

#### **4.2 ESFUERZO COMPUTACIONAL DE LA TÉCNICA DE MUTIMALLA EN CORRECCIONES ADITIVAS (ACM)**

Para la técnica de Multimalla (ACM) se utilizó un ciclo fijo en "V". El problema que se eligió para la evaluación del esfuerzo computacional corresponde al Convección natural en régimen de flujo laminar en una cavidad calentada diferencialmente Vahl Davis 1982. Los parámetros característicos del problema para la modelación son:  $T_{OLD} = 25^{\circ}\text{C}$  (Temperatura en la pared caliente),  $\rho = 1.2047 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$  (Densidad),  $C_p = 1004 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$ , (Calor específico) y  $\lambda = 0.02563 \frac{\text{W}}{\text{mk}}$  (Conductividad térmica). Para estos parámetros característicos se evaluó con un número de Rayleigh de  $10^4$ . Para determinar la magnitud del esfuerzo computacional aplicando el método de Multimalla (ACM), se establecieron 4 diferentes tamaños de malla numéricas, las cuales son:  $NX = 258, 130, 66, 34$ ;  $NY = 258, 130, 66, 34$ , cada una de las mallas numéricas fueron evaluadas con los siguientes métodos de solución de ecuaciones algebraicas GS (Gauss Seidel), LBL-ADI (Método de línea por línea en direcciones alternantes), LGS-ADI (Método de línea de Gauss-Seidel de direcciones alternantes).

Las corridas computacionales fueron realizadas con los mismos parámetros, como son el paso de tiempo, factores de relajación, valores iniciales de las variables etc. A estos métodos de soluciones de ecuaciones algebraicas se les implemento la

técnica de multimalla (ACM) para 5 niveles para obtener de manera cuantitativa, si los métodos reducen el esfuerzo computacional con la finalidad de acelerar el tiempo de convergencia hacia la solución del problema planteado. Los parámetros del código numérico para la solución del problema planteado son los siguientes:

- ◆ Se estableció un épsilon de  $10^{-6}$  para el criterio de convergencia en las componentes de velocidad  $(u, v)$ .
- ◆ Valores de relajación para las componentes de velocidad  $(u = v = 0.5)$
- ◆ Se estableció un épsilon de  $10^{-9}$  para las variables de presión y temperatura  $(P, T)$ .
- ◆ Valores de relajación para la presión y la temperatura  $(P = T = 0.5)$
- ◆ Número máximo de iteraciones en 50000.

Se probarán cada uno de los niveles de Multimalla (ACM), los cuales se han venido desarrollándose por el Dr. J. Xamán de cenidet. Para los cuales se establecieron 5 niveles de malla, corriendo cada uno de estos niveles para los diferentes tamaños de malla numérica determinado el nivel de malla más óptimo.

#### **4.3 EVALUACIÓN DEL MÉTODO GAUSS SEIDEL CON (ACM)**

La tabla 4.1 presenta el esfuerzo computacional con respecto al tiempo de cómputo que le toma para llegar a la solución del problema, utilizando el método de solución de ecuaciones algebraicas de Gauss Seidel (GS) para lo cual se evaluaron distintos tamaños de malla numérica sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM), para posteriormente acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles para el método de solución (GS).

**Tabla 4.1** Tiempo de cómputo (*hrs:min:seg.cs*), método Gauss Seidel

Tamaño de malla	Gauss Seidel (GS)	Multimalla (ACM)			
		K=2	K=3	K=4	K=5
<b>258*258</b>	1:53:19.16	3:42:27.93	3:33:14.91	3:30:51.87	punto flotante
<b>130*130</b>	0:23:27.07	0:10:59.68	0:06:27.12	0:04:39.12	punto flotante
<b>66*66</b>	0:02:09.73	0:01:06.04	0:00:47.22	0:00:38.23	punto flotante
<b>34*34</b>	0:00:12.64	0:00:01.52	0:00:01.75	0:00:01.70	punto flotante

La tabla 4.1 muestra el tiempo de cómputo para las distintas mallas numéricas utilizando el método de solución de ecuaciones algébricas Gauss Seidel (GS) sin la implementación de Multimalla (ACM) y con la implementación de Multimalla (ACM). La obtención de los resultados muestra que para la malla más gruesa de 34\*34 le toma un tiempo de 12 segundos con 64 centésimas para alcanzar la convergencia con el método (GS), con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) mostro que el nivel de malla más óptimo fue para 2 niveles de malla obteniendo un tiempo de cómputo de 1 segundo con 52 centésimas, es importante recalcar que para mallas gruesas no se obtiene la solución única del problema, la solución única se encontrara en mallas numéricas más finas. La malla numérica gruesa de 66\*66 con el método de (GS) sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) tomo un tiempo de 2 minutos con 9 segundos y 73 centésimas para alcanzar la convergencia, con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) mostro que el nivel más óptimo de malla fue para 5 niveles obteniendo la convergencia con un

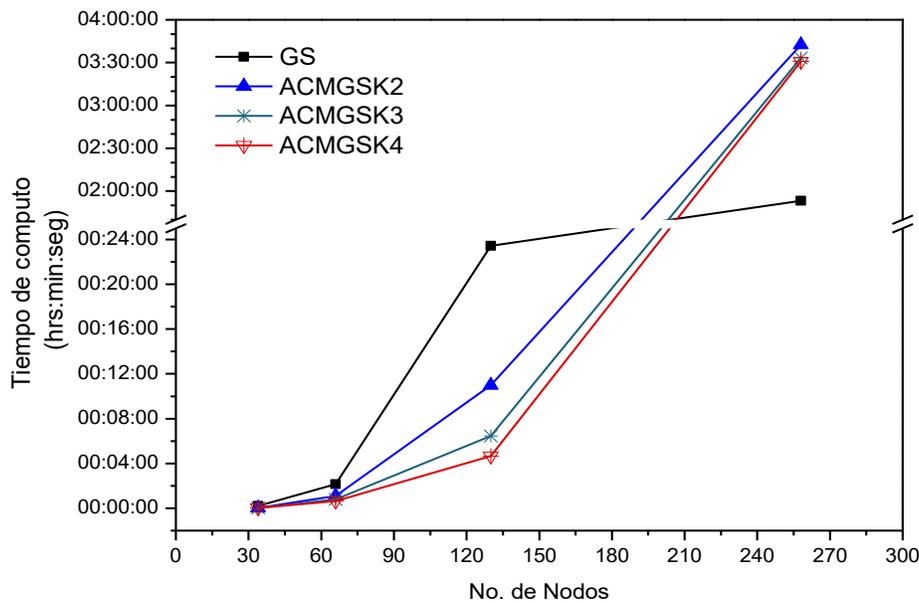
tiempo de cómputo 38 segundos con 23 centésimas. Para la malla numérica fina de  $130 \times 130$  para este número de nodos, ya se obtiene una solución decente, con el método de (GS) le tomo un tiempo de cómputo de 23 minutos con 27 segundos y 7 centésimas mientras que con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) mostro que el nivel más óptimo resultado para 4 niveles de malla, obteniendo la solución con un tiempo de cómputo de 4 minutos con 39 segundos y 12 centésimas para alcanzar la convergencia. Para la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) para mallas numéricas más finas es necesario realizar una optimización al algoritmo para lograr converger la solución del problema, recordado que para la evaluación de esfuerzo computacional que en este trabajo los parámetros del algoritmo Multimalla (ACM) se consideraron para todos los mismos parámetros. Los resultados que muestra la malla numérica más fina de  $258 \times 258$ , el tiempo de cómputo que le tomo para alcanzar la convergencia para la solución fue de 1 hora 59 minutos con 19 segundos y 16 centésimas, mientras que con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) se obtuvo el nivel de malla más óptimo corresponde al 4 nivel de malla obteniendo la solución con un tiempo de cómputo de 3 horas 30 minutos con 51 segundos y 87 centésimas.

Demostrando que la implementación de la técnica de Mulimalla (ACM) presenta una mejoría significativa en el esfuerzo computacional del tiempo de cómputo para las siguientes mallas numéricas  $130 \times 130$ ,  $66 \times 66$ ,  $34 \times 34$ .

A los resultados obtenidos de la evaluación del tiempo de cómputo (mostrados en la tabla 4.1), se observa que la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles, al método de solución de (GS) la corrida arroja un punto flotante debido a que aún no se ha optimizado correctamente para (GS) para 5 niveles.

En la figura 4.1 se muestra el comportamiento cualitativo del esfuerzo computacional del tiempo de cómputo con respecto al número de nodos, los resultados corresponden al método de solución (GS) con la implementación de Multimalla (ACM), para distintos tamaños de malla numéricas 34,66,134,258. Correspondientes a los valores de la tabla 1. La figura 5.1 muestra que para las mallas gruesas de 34,66 y la fina 134 nodos presenta una mejoría en el tiempo de

cómputo hacia la convergencia de la solución del problema al implementar la técnica de Multimalla (ACM) resultando que al utilizar 4 niveles de malla se obtiene el menor tiempo de cómputo como puede observar en la figura 4.1. El comportamiento de esfuerzo computacional para la malla más fina que corresponde a la malla numérica de 258\*258 nodos, se observó que al implementar la técnica de Multimalla (ACM) para 4 niveles al método de solución (GS), este presenta un aumento de un 86 % en el esfuerzo de tiempo de cómputo con respecto al método (GS) implementado con Multimalla (ACM) con 4 niveles de malla.



**Figura 4.1** Resultados del tiempo de cómputo del método (GS) acoplado (ACM)

Este incremento de 86 % se debe a que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) no está llegando a su criterio de convergencia, por lo que la simulación se detiene por su número de iteraciones máximas de 50,000. Tener un criterio de convergencia demasiado estricto puede provocar que la simulación no alcance la convergencia o en muchas ocasiones el problema es que una de las variables se está quedando en un residual, lo cual provoca que no alcance la convergencia, cuando las demás variables ya llegaron a su criterio de paro.

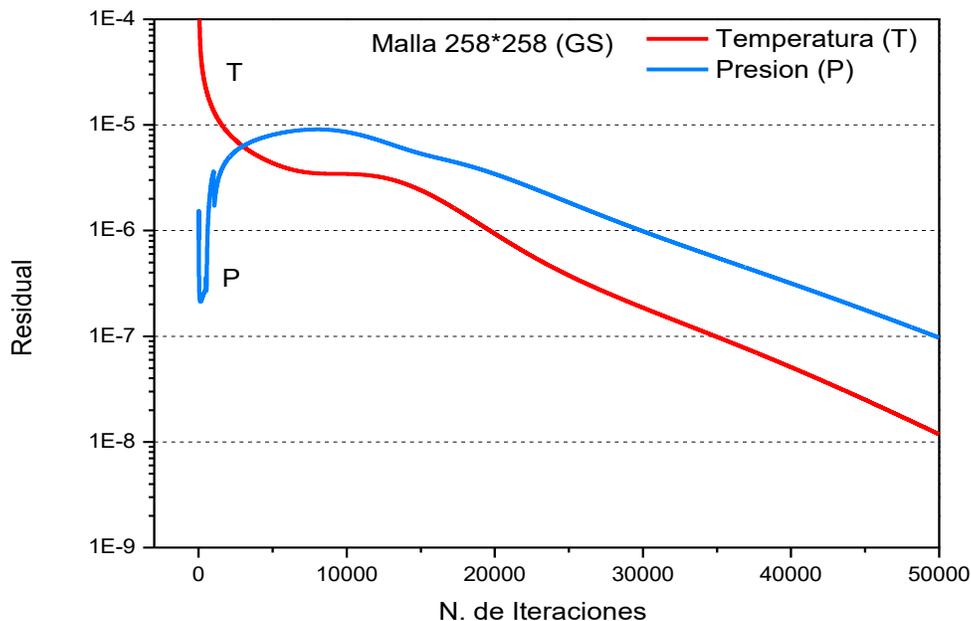
La tabla 4.2, muestra el número de iteraciones que demandó cada una de las mallas numéricas cuando es acoplada la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas Gauss Seidel (GS), se observó que para la

malla numérica de 34\*34 nodos sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) le tomo 6178 iteraciones, mientras que con la implementación de (ACM) se observó que el nivel más óptimo se presenta para 4 niveles de malla logrando la convergencia de la solución con 458 iteraciones. Para la malla de 66\*66 sin la implementación de (ACM) le tomo 17705 iteraciones para alcanzar la convergencia, mientras que con la implementación de (ACM) demostrando que el nivel de malla más óptimo corresponde para 4 niveles de malla convergiendo con 2996 iteraciones para la solución del problema. Se puede observar que para la malla numérica de 130\*130 sin la implementación de (ACM) esta no llega a converger, por lo que la simulación se detiene por el criterio de iteraciones máximas el cual corresponde a 50000, mientras que con la implementación de (ACM) para 4 niveles presenta el menor número de iteraciones para alcanzar la convergencia con 5595 iteraciones. Para la malla más fina 258\*258 sin la implementación de (ACM) esta no llega a converger por lo tanto la simulación se detiene por el criterio de iteraciones máximas correspondientes a 50000 iteraciones, al implementar (ACM) tampoco logra alcanzar la convergencia, terminando por número de iteraciones máximas.

**Tabla 4.2** Número de iteraciones realizadas por Gauss Seidel (GS) implementando con y sin Multimalla (ACM)

Tamaño de malla	Gauss Seidel (GS)	Multimalla (ACM)			
		K=2	K=3	K=4	K=5
258*258	50000	50000	50000	50000	21
130*130	50000	12497	7654	5595	10
66*66	17705	4968	3667	2996	8
34*34	6178	407	471	458	493

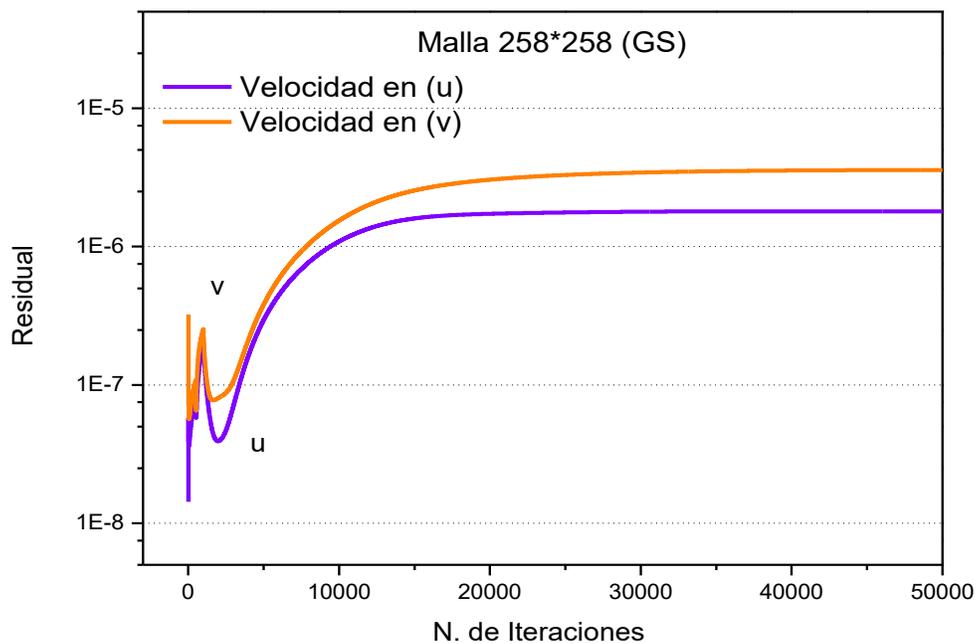
Los resultados mostrados en la tabla 4.2 demuestran que la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas Gauss Seidel (GS) reduce el número de iteraciones para los tamaños de malla numérica: 34\*34, 66\*66,130\*130. Se puede observar que la malla numérica de 130\*130 sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) no llega a converger, pero al implementar la técnica de Multimalla (ACM) esta alcanza la solución con 5595 iteraciones con el nivel más óptimo de malla correspondiente a 4 niveles. Los resultados correspondientes para malla más fina de 258\*258 muestran que no alcanzaron la convergencia, se graficaron los residuales de temperatura ( $T$ ), presión ( $P$ ), velocidades del fluido ( $u$ ) y ( $v$ ) de la corrida de la malla más fina sin y con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM).



**Figura 4.2** Comportamiento de la variable temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) con  $\epsilon$  de  $10^{09}$  para la corrida 258\*258 con (GS) sin (ACM).

La figura 4.2 Muestra el comportamiento de los residuales de las variables temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) los cuales corresponden a la corrida de 258\*258 sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) mostrada en la tabla 4.2 Para que la solución del problema converja se necesita que cada de las variables alcancen su  $\epsilon$  correspondiente. La figura 4.2 se puede observar que el

comportamiento del residual de temperatura comienza con un residual de  $10^{-04}$ , conforme el número de iteraciones vaya aumentando, el residual de ( $T$ ) presenta una ligera oscilación entre las 10000 y 20000 iteraciones para posteriormente ir disminuyendo, pero no lograr alcanzar su  $\epsilon$  de  $10^{-09}$ , también se observa el comportamiento del residual de la variable Presión ( $P$ ) comenzando un residual de  $10^{-06}$  después de unas iteraciones el residual comienza a presentar un comportamiento divergente pero este se estabiliza alrededor de la iteración 5000 y alrededor de la iteración 10000 se normaliza y comienza a converger pero no lograr alcanzar su  $\epsilon$   $10^{-09}$ , al observar el comportamiento de ambos residuales se puede observar que alrededor de la iteración 5000 ambos residuales presentabas un comportamiento hacia la su convergencia.



**Figura 4.3** Comportamiento de residual de las componente de variable velocidad ( $v$ ), ( $u$ ) con  $\epsilon$  de  $e^{-06}$  para la corrida 258\*258 con (GS) sin (ACM).

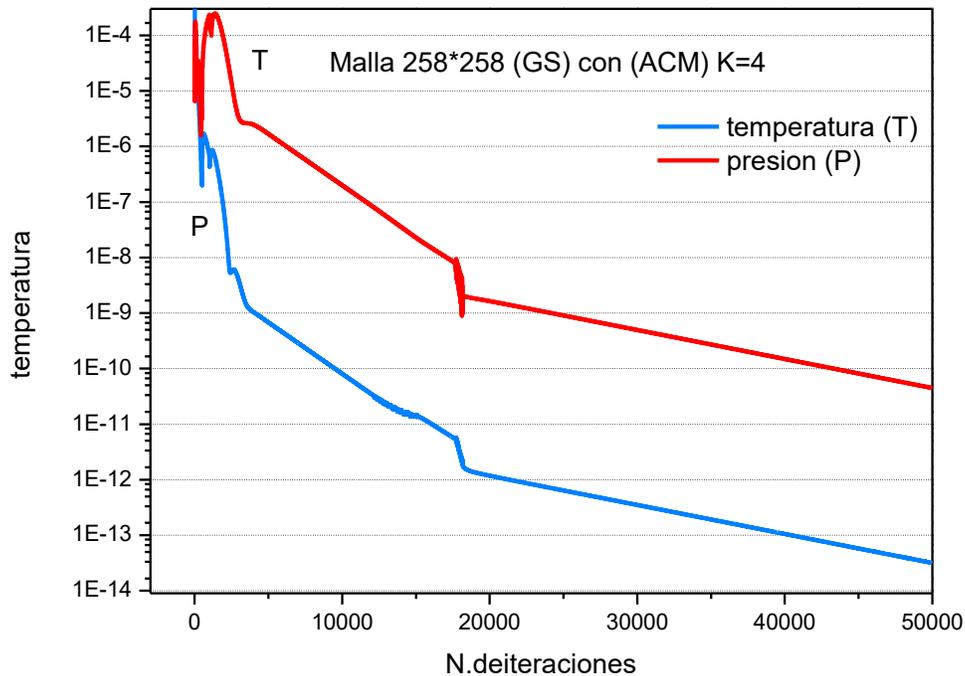
La figura 4.3 Muestra el comportamiento del residual de las componentes de velocidades ( $v$ ), ( $u$ ) . Se observó que ambos residuales comienzan con un residual que está por debajo de su  $\epsilon$   $10^{-06}$  pero conforme avanza el número de iteraciones alrededor de las 5000 ambos residuales presentando un comportamiento divergente, conforme aumenta el número de iteraciones ambos

residuales se estabilizan alrededor de la iteración 40000 presentaron un comportamiento constante en un residual de  $10^{-06}$ , quedando dentro del valor de su  $\epsilon$  para converger.

Observando el comportamiento de los residuales temperatura ( $T$ ), presión ( $P$ ), velocidades ( $u, v$ ) para la corrida de la malla numérica de  $258 \times 258$  sin la implementación de la técnica Multimalla (ACM) mostrados en las figuras 4.2 y 4.3. En la cual se observó que los residuales de temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) tienden a alcanzar su criterio de convergencia si se establecía un mayor número de iteraciones máximas. Mientras que los residuales de las componentes de velocidad

alcanzaron  $\epsilon$  de  $10^{-06}$ . Por lo tanto la corrida convergiría si se aumentaba el número de iteraciones máximas.

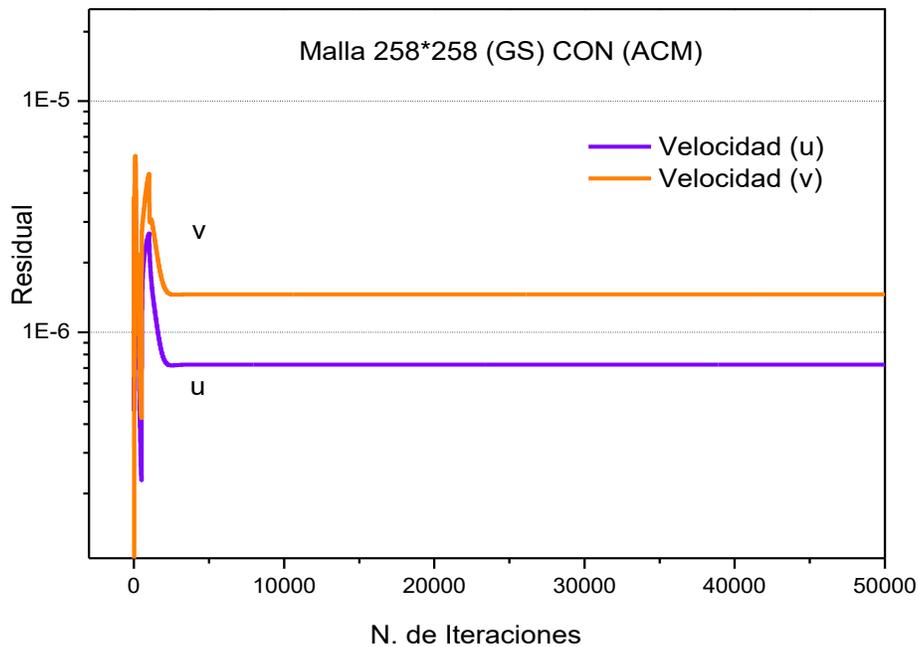
La figura 4.4, presenta el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) y de la presión ( $P$ ) para la corrida de  $258 \times 258$  con el método de solución Gauss Seidel implementado la técnica de Multimalla (ACM).



**Figura 4.4** Comportamiento de la variable temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) con  $\epsilon$  de  $10^{-09}$  para la corrida  $258 \times 258$  (GS) con (ACM)

El comportamiento que presentan ambos residuales ( $T$ ) y ( $P$ ) es un comportamiento convergente, el residual de la ( $T$ ) alcanzó su convergencia a las 25000 iteraciones mientras que el residual ( $P$ ) alcanzo su residual alrededor de las 15000 iteraciones. La implementación de la técnica de Multimalla (ACM) mostro para los residuales de la temperatura y presión ( $T$ ), ( $P$ ) respectivamente mostraron un mejor comportamiento para la convergencia. La figura 4.5 muestra el comportamiento de los residuales de las componentes de la velocidad ( $u$ ), ( $v$ ). Se

observó que con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) para la corrida de 258\*258 con el método de Gauss Seidel (GS) con (ACM).



**Figura 4.5** Comportamiento de residual de las componente de variable velocidad ( $v$ ), ( $u$ ) con épsilon de  $e^{-06}$  para la corrida 258\*258 (GS) con (ACM).

Al implementar la técnica de Multimalla (ACM) se observó que el comportamiento de los residuales de las componentes de las velocidades ( $u$ ) y ( $v$ ) alcanza la estabilidad con un número menor de iteraciones alcanzando un estado estable a las 2000 iteraciones. El residual de la variable de velocidad en ( $v$ ) logro alcanzar un épsilon de  $10^{-07}$ , mientras que la componente en ( $v$ ) alcanzando la convergencia con un épsilon de  $10^{-06}$ . Mostrando que la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) para la malla más fina mejora el comportamiento de los residuales hacia la convergencia.

La tabla 4.3. Muestra la relación de los mejores resultados obtenidos la implementar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas Gauss Seidel (GS), mostrando el tiempo de cómputo que le tomo para converger al usar el método de solución Gauss Seidel (GS) y al implementar la técnica de

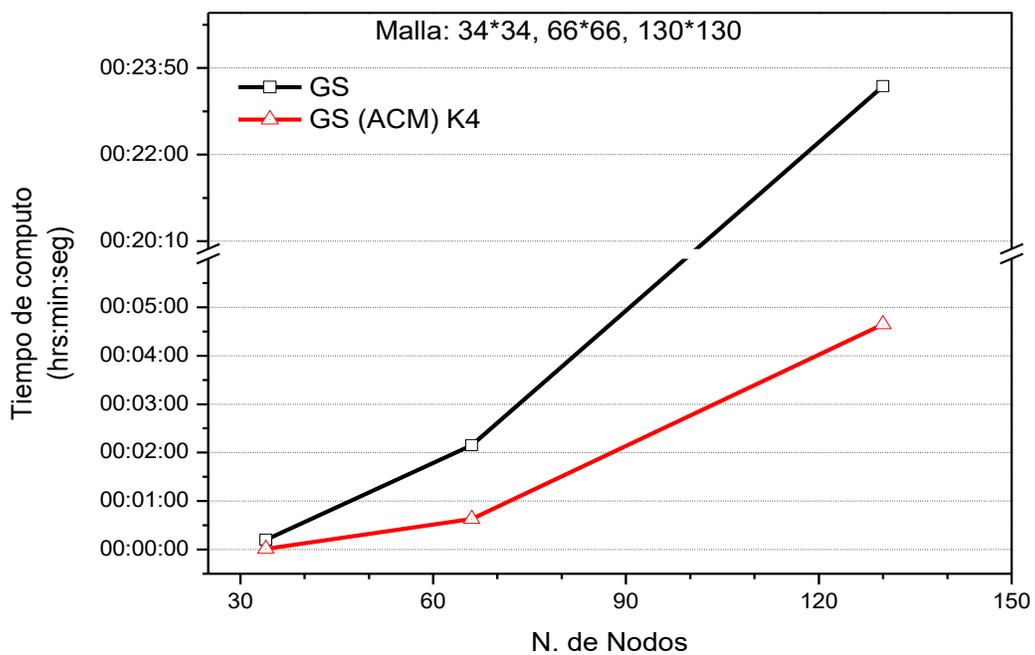
Multimalla (ACM) mostrando cual fue el nivel de malla más óptimo conforme al tiempo de cómputo, también así mismo el número de iteraciones máximas.

**Tabla 4.3** Mejores resultados implementado la técnica Multimalla (ACM) con Gauss Seidel (GS)

Tamaño de malla	Gauss Seidel (ACM)				Diferencia de Tiempo (%)
	Sin (ACM)		Con (ACM) k=4		
	Tiempo (hrs:min:seg.c s)	Iteraciones	Tiempo (hrs:min:seg.c s)	Iteraciones	
<b>130*130</b>	0:23:27.07	50000	0:04:39.12	5595	80,2
<b>66*66</b>	0:02:09.73	17705	0:00:38.23	2996	70,5
<b>34*34</b>	0:00:12.64	6178	0:00:01.70	458	91,7

La implementación de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas Gauss Seidel (GS) mostro una disminución del esfuerzo de cómputo. La corrida de la malla numérica más gruesa de 34\*34 sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) presentó la convergencia con un tiempo de cómputo de 12 segundos con 64 centésimas deteniéndose a las 6178 iteraciones, mientras que con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) presento la convergencia con un tiempo de cómputo de 1 segundo con 70 centésimas deteniéndose a las 458 iteraciones, observando una disminución del tiempo de computo de 10 segundos con 94 centésimas con una diferencia porcentual de 91.7 %. Para la malla numérica gruesa de 66\*66 sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) presentó la convergencia con un

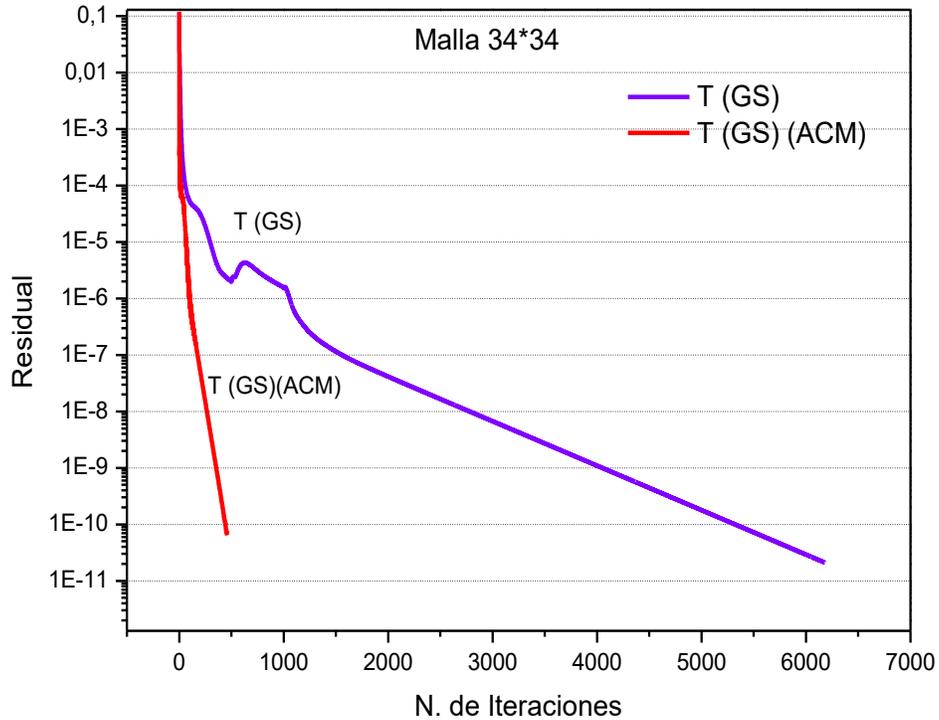
tiempo de cómputo de 2 minutos con 9 segundos y 73 centésimas deteniéndose a las 17705 iteraciones, mientras que con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) presento la convergencia con un tiempo de cómputo de 38 segundos con 23 centésimas deteniéndose a las 2990, observando una disminución del tiempo de cómputo de 1 minuto con 71 segundo y 50 centésimas con una diferencia porcentual de 70.5%. Para la malla numérica fina de 130\*130 sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) presentó la convergencia con un tiempo de cómputo de 23 minutos con 27 segundos y 7 centésimas deteniéndose a las 50000 iteraciones, mientras que con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) presentó la convergencia con un tiempo de cómputo de 4 minutos con 39 segundos y 12 centésimas deteniéndose a las 5595 iteraciones, observando una disminución del tiempo de cómputo de 18 minutos con 88 segundos y 95 centésimas con una diferencia porcentual de 80.2%. Con los resultados mostrados en la tabla 5.3 indican que la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) reduce el esfuerzo de tiempo de cómputo como puede observar de manera cualitativa en la figura 4.6.



**Figura 4.6** Resultados de los mejores tiempos de cómputo del método (GS) implementando la técnica de Multimalla (ACM).

En la Figura 4.6 Se muestra el comportamiento cualitativo del esfuerzo computacional con respecto al número de nodos, los resultados corresponden a la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas Gauss Seidel (GS). En la figura se puede observar la reducción del esfuerzo de tiempo de cómputo para las distintas mallas numéricas mostrando que para mallas con un gran número de nodos presenta e la mayor eficiencia. La implementación de la técnica de Multiamalla presenta una mejoría en los comportamientos de los residuales haciendo que alcancen la convergencia en un menor número de iteraciones.

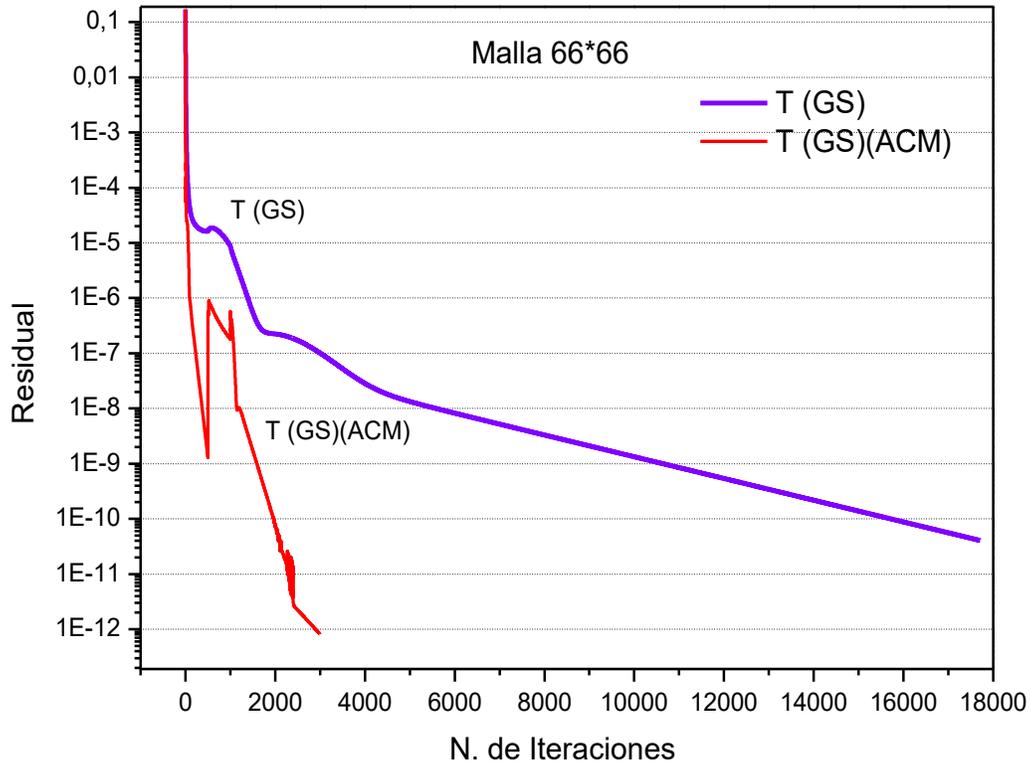
La figura 4.7 Muestra el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla numérica gruesa de  $34 \times 34$ , se observa que al no implementar la técnica de Multimalla (ACM) se observó un comportamiento oscilatorio hacia la convergencia al inicio de la corrida para posteriormente normalizarse y presenta un comportamiento hacia la convergencia alcanzando su criterio de paro de  $10^{-09}$  a la iteración 4000, mientras que la con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) se observa un comportamiento hacia la convergencia alcanzando su criterio de paro de  $10^{-09}$  a la iteración 458 mostrando una diferencia de 5720 iteraciones mostrando que la técnica de Multimalla (ACM) mejora el comportamiento del residual.



**Figura 4.7** Comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla 34 \*

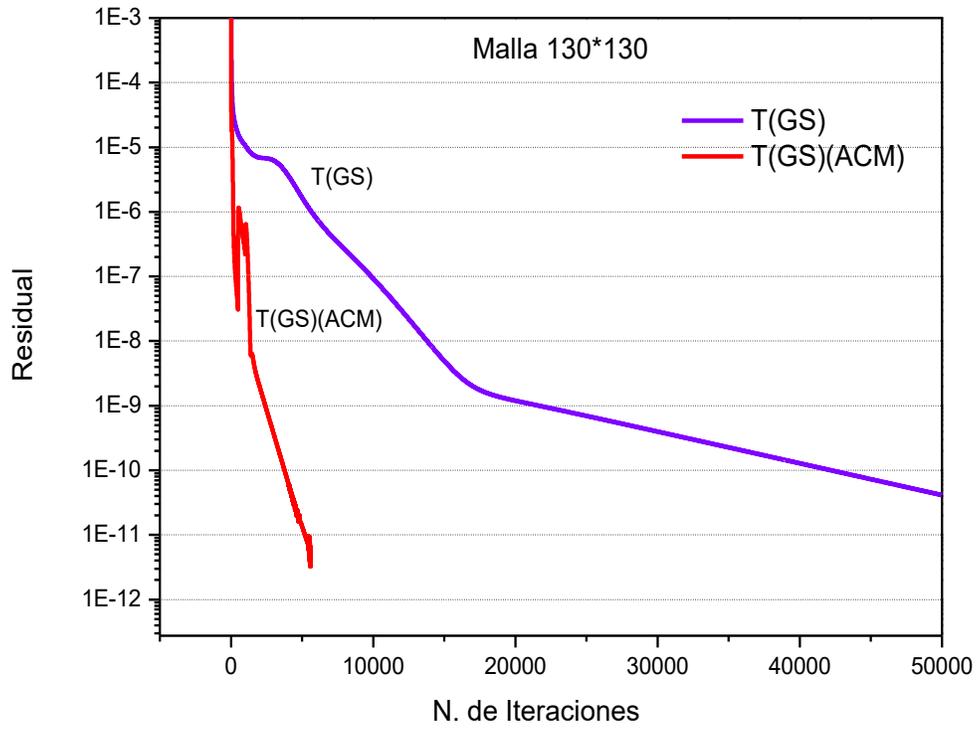
34

La figura 4.8 se muestra el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla de 66\*66 en la cual se puede observar que al implementar la técnica de Mutimalla (ACM) el residual presenta una convergencia más rápida alcanzando con épsilon de convergencia de  $10^{-09}$  a las 2996 iteraciones mientras que sin la implementación el residual alcanza a las 17705 iteraciones para que alcance su convergencia a mostrando que para la malla de 66\*66 muestra una disminución de 14709 mostrando una mejor convergencia al utilizar la técnica de Multimalla (ACM).



**Figura 4.8** Comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla 66\*66.

La figura 4.9 muestra el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) en cual se observa como el comportamiento del residual sin la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) alcanza su convergencia a las 10000 iteraciones, mientras que con la implementación de Multimalla (ACM) se muestra una aceleración en la convergencia alcanzándola a las 2000 iteraciones, lo cual muestra una reducción de 8000 iteraciones. Mostrando que la técnica de Multimalla (ACM) mejora la velocidad de convergencia.



**Figura 4.9** Comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla 130\*130.

#### 4.4 EVALUACIÓN DEL MÉTODO LBL-ADI CON (ACM)

La tabla 4.4 muestra el esfuerzo computacional con respecto al tiempo de cómputo que le toma para llegar a la solución del problema, para ello se utilizara el método de solución de ecuaciones algebraicas de línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI) para lo cual se evaluó distintos tamaños de malla numérica sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), para posteriormente acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles.

**Tabla 4.4** Tiempo de cómputo (*hrs;min;seg,cs*), método de direcciones alternantes

Tamaño de malla	(LBL-ADI)	Multimalla (ACM)			
		K=2	K=3	K=4	K=5
<b>258*258</b>	2:36:02:96	6:10:26:82	6:02:23:64	5:57:21:36	5:55:45:19
<b>130*130</b>	0:07:20:95	0:13:26:29	0:10:43:35	0:08:08:21	0:06:35:69
<b>66*66</b>	0:00:39:35	0:01:24:90	0:19:37:78	0:00:58:47	0:00:57:35
<b>34*34</b>	0:00:05:37	0:00:01:92	0:00:02:25	0:00:02:41	0:00:02:51

La tabla 4.4 muestra el tiempo de cómputo para las distintas mallas numéricas utilizando el método de solución (LBL-ADI) sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM). Los resultados mostraron que la malla más gruesa de 34\*34 le toma un tiempo de 5 segundos con 37 centésimas para obtener la solución, mientras que con el acople de la técnica de Multimalla (ACM) mostro que el nivel más óptimo fue para 2 niveles malla obteniendo un tiempo de cómputo de 1 segundo con 92 centésimas para alcanzar su criterio de paro, recordando que con una malla de

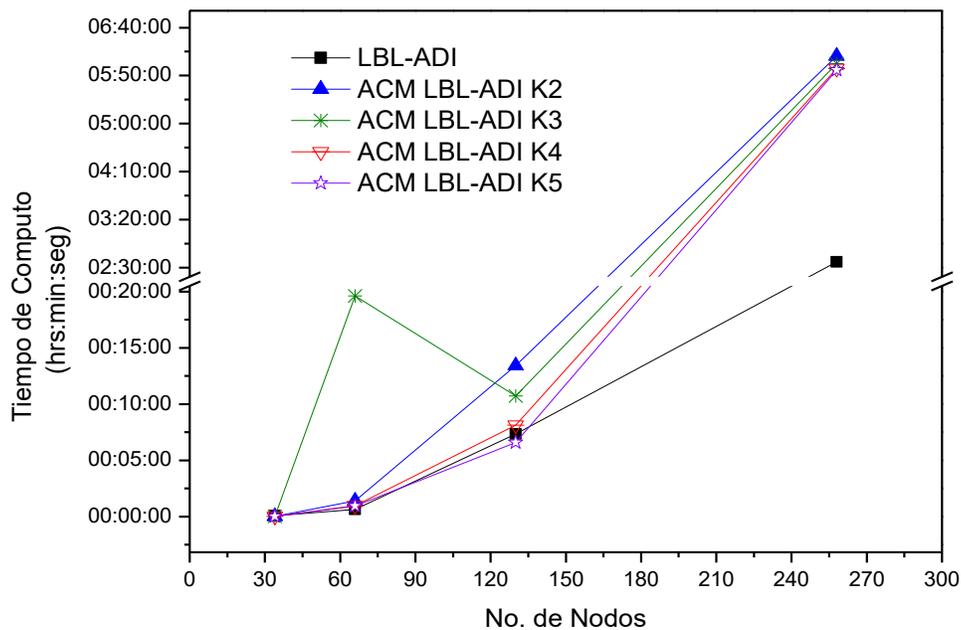
34\*34 no se obtiene una solución adecuada por ser la malla más gruesa. Para obtener la solución de la malla numérica de 66\*66 le tomo al método de solución (LBL-ADI) un tiempo de cómputo de 39 segundos con 35 centésimas para obtener la solución del problema mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para el nivel de malla más óptimo correspondiente al nivel 5, se obtuvo la solución en un tiempo de cómputo de 57 segundos con 35 centésimas. Para solución de la malla numérica de 130\*130 a través del método de solución (LBL-ADI), se obtuvo en un tiempo computacional de 7 minutos con 20 segundos y 95 centésimas, mientras que al acoplar la técnica de Multimalla (ACM), el mejor tiempo de cómputo se obtuvo al usar 5 niveles de malla alcanzando su criterio de paro la solución con un tiempo de cómputo de 6 minutos con 35 segundos y 69 centésimas. El tiempo de cómputo que le toma para obtener la solución de la malla numérica de 258\*258 fue de 2 horas 36 minutos con 2 segundos y 96 centésimas, mientras que con el acople de la técnica de Multimalla (ACM) y con el nivel más óptimo de malla correspondiente a 5 niveles le toma un tiempo de 5 horas 55 minutos con 45 segundos y 19 centésimas para obtener la solución del problema.

Los resultados observados en la tabla 4.4 mostraron que al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución (LBL-ADI), se observó un aumento en el tiempo de cómputo para los siguientes tamaños de mallas numéricas: 66\*66, 258\*258.

La figura 4.10 muestra el comportamiento cualitativo del esfuerzo computacional del tiempo de cómputo con respecto al número de nodos, los resultados corresponden al método de solución (LBL-ADI) con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), para los siguientes tamaños de mallas numéricas 34\*34, 66\*66, 130\*130, 258\*258 nodos. Correspondientes a los valores mostrados en la tabla 4.4. En la figura 4.10 se observa que el comportamiento del tiempo de cómputo para la malla más gruesa de 34\*34 nodos al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 2 niveles de malla, se observó una reducción en el tiempo de cómputo de 80% con respecto al tiempo de cómputo sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), mostrando que el acople de la técnica de Multimalla (ACM) acelera el tiempo de

cómputo, pero al ser una malla muy gruesa de  $34 \times 34$  nodos la solución del problema no es la indicada. Se observa que para la malla gruesa de  $66 \times 66$  nodos se presentó un aumento en el tiempo de cómputo de 46% al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla con respecto al tiempo de cómputo sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM). Para la malla fina de  $130 \times 130$  nodos se observó una reducción de 10% en el tiempo de cómputo al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla al método de solución (LBL-ADI). La malla más fina de  $258 \times 258$  nodos se observó un incremento de 128% en el tiempo de cómputo al acoplar la técnica de Multimalla (ACM).

Como se puede observar en la figura 4.10, el acoplamiento de la técnica Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas (LBL-ADI) se observó que mejora el tiempo de cómputo para la malla más gruesa y para la malla fina de  $34 \times 34$  y  $130 \times 130$  nodos respectivamente, mientras que para la malla gruesa y la más fina de  $66 \times 66$  y  $258 \times 258$  nodos respectivamente presentaron un aumento en el tiempo de cómputo, por lo que se observó que al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución (LBL-ADI), solo resulto beneficioso para las siguientes mallas numéricas  $34 \times 34$  y  $130 \times 130$  nodos.



**Figura 4.10** Resultados del tiempo de cómputo del método (LBL-ADI) acoplado (ACM).

Como se puede observar que el mayor esfuerzo de cómputo se presentó para la malla más fina correspondiente a la malla numérica de  $258 \times 258$  nodos, presentando un incremento de 128% al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla, este incremento se debe a que la solución del problema no está alcanzando su criterio de convergencia, por lo que la simulación se detiene por su criterio de iteraciones máximas que corresponde a 50,000. Esto puede deberse a tener un criterio demasiado estricto que puede provocar que no alcance la convergencia de la solución o en otras ocasiones se una de las variables se está quedando en residual por no tener un criterio adecuado de relajación lo que provoca que no alcance su convergencia, cuando las demás variables ya alcanzaron su criterio de paro.

A continuación la tabla 4.5 muestra el número de iteraciones que demanda una de las mallas numéricas cuando es acoplada la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI), se observó que para la malla numérica más gruesa que corresponde a la de  $34 \times 34$  nodos sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) le tomo 1689 iteraciones para alcanzar la solución del problema mientras que con el acople de la técnica de Multimalla (ACM) para 2 niveles de malla el cual resulto el nivel más optimo alcanzo la solución con 281 iteraciones mostrando una reducción de 1408 iteraciones. Para la malla gruesa de  $66 \times 66$  nodos, la solución del problema se alcanzó con 3698 iteraciones, mientras que con el acople de la técnica Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla la solución se alcanzó con 2450 iteraciones mostrando una reducción de 1248 iteraciones. Para la malla numérica fina correspondiente a la malla numérica de  $130 \times 130$  nodos, la solución del problema se alcanzó con 10852 iteraciones, mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla mostro ser el más optimo alcanzo la solución del problema con 4354 mostrando una reducción de 6498 iteraciones. Finalmente para la malla más fina correspondiente a la malla numérica de  $258 \times 258$

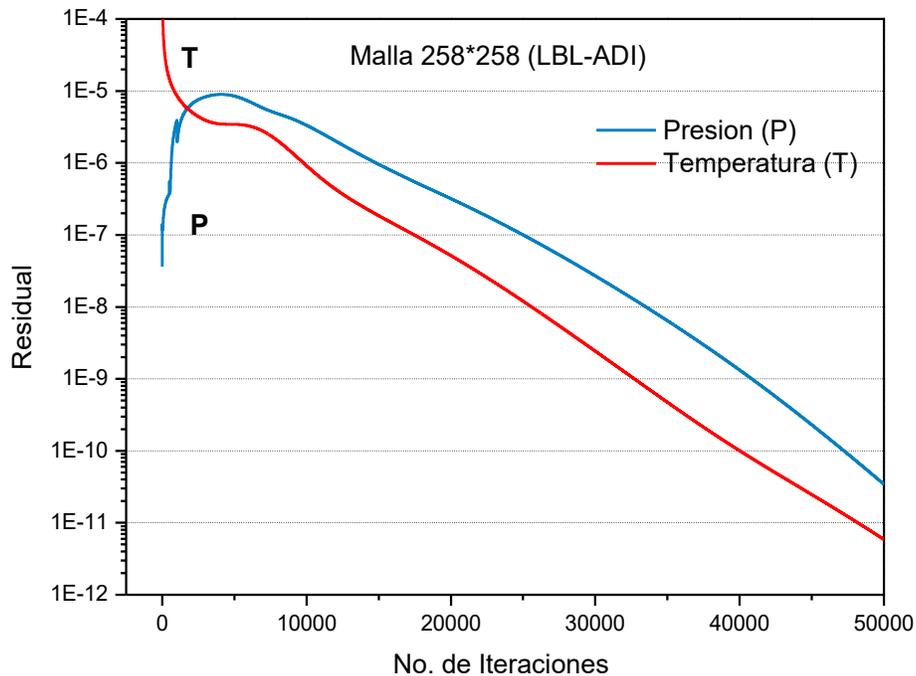
nodos, la solución del problema no llega a converger, por lo que la corrida se detiene por el criterio e iteraciones máximas el cual corresponde a 50000, mientras que con la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles el cual resultado el más óptimo con respecto al tiempo de cómputo, tampoco alcanza la convergencia de la solución por lo cual la corrida se detiene por su número máximo de iteraciones el cual corresponde a 50000 iteraciones.

**Tabla 4.5** Número de iteraciones realizadas por (LBL-ADI) implementando con y sin Multimalla (ACM)

Tamaño de malla	(LBL-ADI)	Multimalla (ACM)			
		K=2	K=3	K=4	K=5
<b>258*258</b>	50000	50000	50000	50000	50000
<b>130*130</b>	10852	8154	6891	5347	4354
<b>66*66</b>	3698	3386	50000	2483	2450
<b>34*34</b>	1689	281	336	366	384

En base a los resultados mostrados en la tabla 4.5 demuestran que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI) reduce el número de iteraciones para las siguientes mallas numéricas: 34\*34, 66\*66, 130\*130 nodos. Se puede observar que la malla más fina correspondiente a la malla numérica de 258\*258 nodos la solución a través del método (LBL-ADI) no alcanza la convergencia para la solución del problema por lo cual la corrida se detienen por su criterio de iteraciones máximas correspondiente a 50,000 iteraciones y al implementar el

acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), se observó que tampoco logra la convergencia para la solución del problema por lo que la corrida igualmente se detiene por su criterio de iteraciones máximas, se graficaron los residuales de las variables: temperatura ( $T$ ), presión ( $P$ ), velocidades del fluido ( $u$ ) y ( $v$ ), para determinar si la corrida presentaba un comportamiento convergente o divergente.

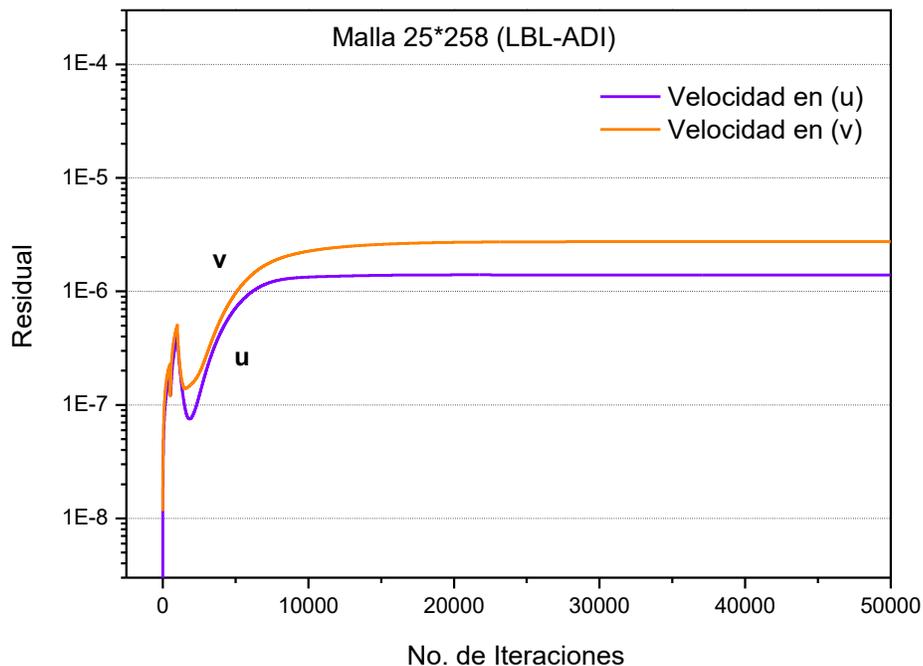


**Figura 4.11** Residual de la variable temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) con  $\epsilon$  de  $e^{-09}$  para la corrida de 258\*258 nodos con (LBL-ADI) sin (ACM).

La figura 4.11, muestra el comportamiento de los residuales de las variables de temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) los cuales corresponden a la corrida de la malla más fina de 258\*258 nodos, para que la solución del problema logre la convergencia se requiere que cada una de las variables alcance su  $\epsilon$  correspondiente, como se puede observar en la figura 4.11, el comportamiento del residual de la variable de temperatura ( $T$ ) comienza con un valor de residual de  $10^{-04}$ , conforme el número de iteraciones va aumentando se observa un comportamiento ligeramente oscilatorio, pero a partir de las 10,000 iteraciones se puede observar que el residual presenta un comportamiento convergente hacia su criterio de paro de  $10^{-09}$ , alcanzando su criterio de paro a 34,000 iteraciones, también se observa el

comportamiento del residual de la variable presión ( $P$ ), comenzando con un residual de  $10^{-08}$ , presentando un comportamiento divergente entre 0 y 500 iteraciones para posteriormente presentar el comportamiento convergente hacia su criterio de paro de  $10^{-09}$ , alcanzándolo a las 40,000 iteraciones. Como se puede observar el comportamiento de los residuales de las variables de temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) presentan un comportamiento convergente alcanzando su criterio de paro antes de las 50,000 iteraciones.

La figura 4.12 muestra el comportamiento del residual de la variable de velocidad para las componentes ( $u$ ) y ( $v$ ), con un criterio de paro de  $10^{-06}$  para la malla más fina de  $258 \times 258$  a través de método (LBL-ADI).



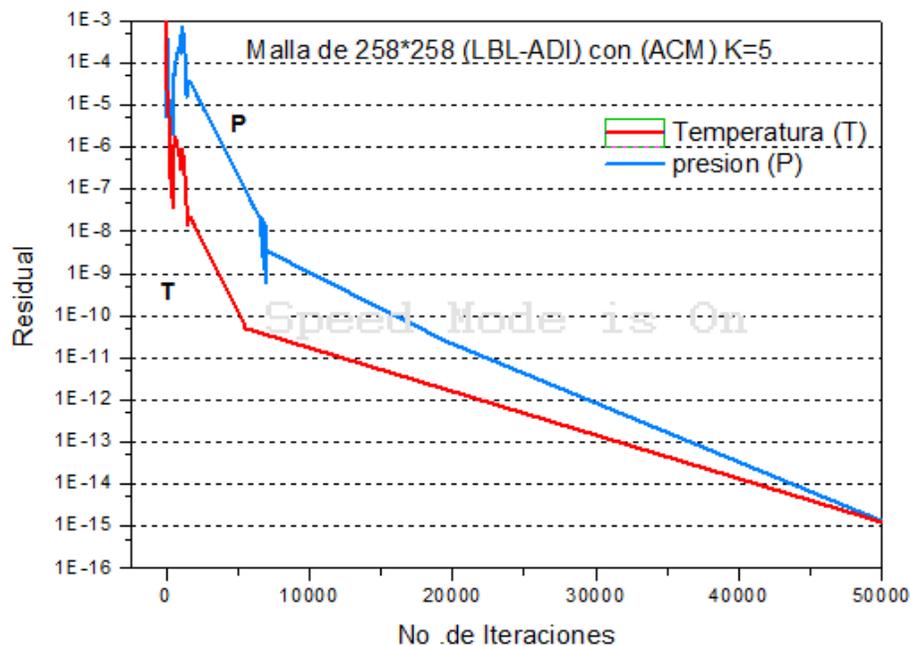
**Figura 4.12** Residual de las componentes de la variable velocidad en ( $u$ ) y ( $v$ ) con un  $\epsilon$  de  $1 \times 10^{-06}$  para la corrida  $258 \times 258$ .

En la figura 4.12 se observa que ambos residuales de los componentes de las velocidades presentan un comportamiento similar, se observó que los residuales comienzan con un residual que está por debajo de su  $\epsilon$   $10^{-06}$  pero conforme avanza la modelación de los fenómenos involucrados el comportamiento de ambos residuales es divergente, pero después de la iteración 10,000 el comportamiento de

ambos residuales se estabiliza en  $3.76 \times 10^{-06}$  y  $1.40 \times 10^{-06}$  para  $(u)$  y  $(v)$  respectivamente, aún que los residuales alcanzaron el  $\epsilon$  de a la menos seis a la iteración 10,000, pero aún no se alcanzaba el criterio de paro de  $10^{-06}$  por lo cual la corrida se detuvo por su número de iteraciones máximas correspondiente a 50,000 iteraciones.

Por lo observado en las figuras 4.11 y 4.12 se determina que la corrida para la malla más fina de  $258 \times 258$  nodos, resuelta a través del método de solución Línea por Línea de direcciones alternantes (LBL-ADI) sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), alcanzaría la convergencia si se optimizaran algunos parámetros como lo son el paso de tiempo, factor de relajación etc.

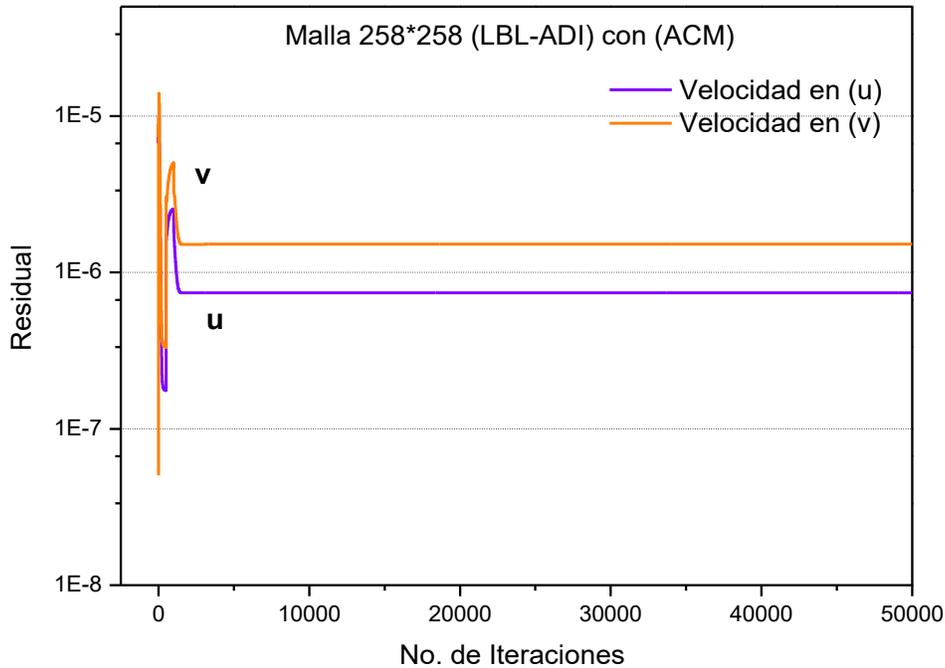
La figura 4.13 Muestra el comportamiento de los residuales de las variables de temperatura  $(T)$  y  $(P)$  con un criterio de paro de  $10^{-09}$ . Para la corrida de la malla más fina correspondiente a la malla numérica de  $258 \times 258$  nodos, la cual termino por el criterio de iteraciones máximas a través del método de solución de línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI) con el acope de la técnica de Multimalla (ACM).



**Figura 4.13** Residual de la variable temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) con  $\epsilon$  de  $1 \times 10^{-09}$  para la corrida de  $258 \times 258$  nodos para el método (LBL-ADI) con (ACM).

La figura 4.13, muestra el comportamiento de los residuales de las variables de temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ), para que la solución del problema logre la convergencia se requiere que cada una de las variables alcancen su  $\epsilon$  correspondiente, como se puede observar en la figura 4.13, el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) comienza con un valor de residual de  $10^{-03}$ , pero conforme el número de iteraciones va aumentando se observa un comportamiento altamente convergente alcanzando su criterio de paro alrededor de la iteración 4,000. El comportamiento del residual de la presión ( $P$ ) comienza con un valor de residual de  $6 \times 10^{-09}$ , pero conforme el número de iteraciones se observa un comportamiento altamente convergente alcanzando su criterio de paro alrededor de la iteración 10,000. Mostrando que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) mejoro el comportamiento de los residuales hacia la convergencia para alcanzar su criterio de paro y reduciendo el número de iteraciones con respecto al método (LBL-ADI) sin el acoplamiento.

La figura 4.14, muestra el comportamiento de los residuales de las componentes de la velocidad ( $u$ ) y ( $v$ ) para la corrida de la malla más fina de  $258 \times 258$  nodos a través del método de solución de línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI) con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM). Se puede observar el comportamiento de los residuales alcanzan una estabilidad alrededor de la iteración 2,000 pero conforme aumenta el número de iteraciones se observa que ambos residuales permanecen constantes con  $\epsilon$  de  $2 \times 10^{-06}$  para la componente de la velocidad en ( $u$ ) por lo que no logro alcanzar su criterio de paro de  $1 \times 10^{-06}$ , mientras que para la componente de la velocidad en ( $v$ ) logra alcanzar su criterio de paro quedando por debajo de su criterio de paro de  $10^{-06}$  con un  $\epsilon$  de  $9 \times 10^{-07}$ . Debido a que el residual de la componente en ( $v$ ) de la velocidad no alcanza su criterio de paro, la corrida termina por su criterio de iteraciones máximas.



**Figura 4.14.** Residual de las componentes de las velocidades ( $u$ ) y ( $v$ ) con un  $\epsilon$  de  $10^{-06}$  para la corrida 258\*258 (LBL-ADI) con (ACM).

Como se pudo observar que la corrida para la malla más fina correspondiente para 258\*258 nodos, no alcanza la convergencia de la solución por lo cual la corrida termino por el criterio de iteraciones máximas a través del método de solución (LBL-ADI) con y sin el acoplamiento de la técnica Multimalla (ACM), como se pudo observar el comportamiento de los residuales de las variables de temperatura y presión mostradas en las figuras 4.11 y 4.12, para ambos casos el comportamiento de estos residuales presentan un comportamiento convergente, mientras que el comportamiento de las componentes de la velocidad ( $u$ ) y ( $v$ ) mostrado en las figuras 4.12 y 4.14, mostraron que el residual de la componentes de la variable velocidad no están alcanzando su criterio, esto ocurre debido a que se tiene optimizar la técnica de Multimalla (ACM) para mallas más finas.

La tabla 4.6, muestra la relación de los mejores resultados obtenidos al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI), mostrando el tiempo de cómputo y

el número de iteraciones que requirió para alcanzar la convergencia, también así mismo el nivel más óptimo de malla al acoplar la técnica de Multimalla (ACM).

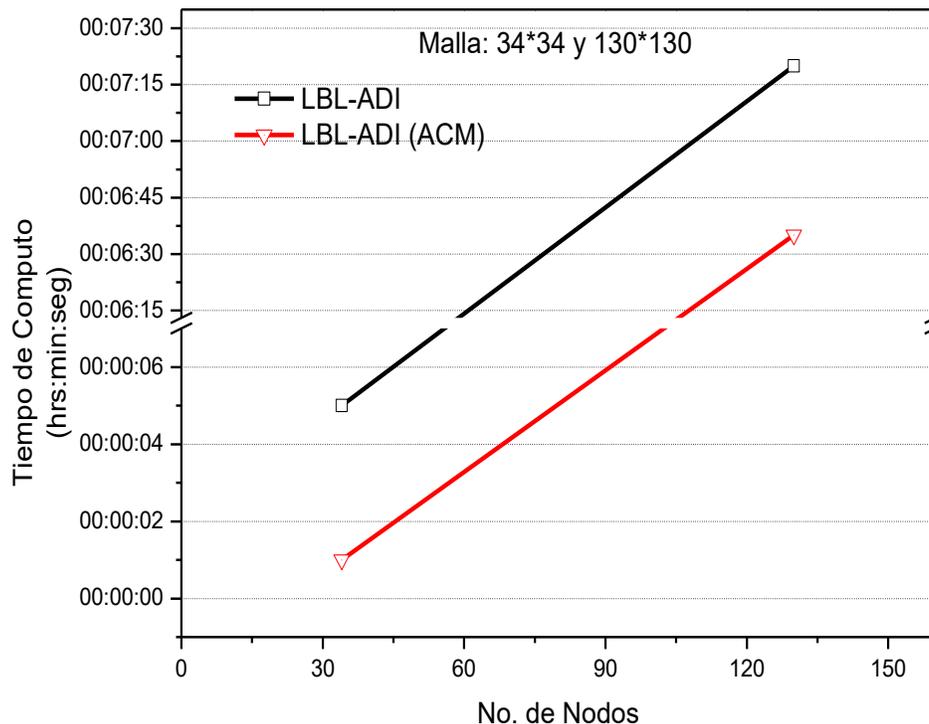
**Tabla 4.6** Mejores resultados acoplando la técnica Multimalla (ACM) con línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI)

Tamaño de malla	(LBL-ADI)					Diferencia de Tiempo (%)
	Sin (ACM)		Con (ACM)			
	Tiempo (hrs:min:seg.cs)	Iteración	Tiempo (hrs:min:seg.cs)	Iteración	Nivel (k)	
<b>130*130</b>	0:07:20:95	10852	0:06:35:69	4354	5	10,2
<b>34*34</b>	0:00:05:37	1689	0:00:01:92	281	2	80

El acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas de línea por línea de direcciones alternantes (LBL-ADI) mostro una disminución del esfuerzo cómputo. La corrida de la malla numérica más gruesa de 34\*34 nodos mostro un tiempo de cómputo de 5 segundos con 37 centésimas para alcanzar la convergencia de la solución con 1689 iteraciones, se observa que al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución (LBL-ADI) presento la convergencia en un tiempo de 1 segundo con 92 centésimas deteniéndose en la iteración 281, observando una disminución del tiempo de cómputo de 3 segundos con 45 centésimas con una diferencia porcentual de 80 %. La corrida de la malla numérica fina de 130\*130 nodos mostro un tiempo de cómputo de 7 minutos con 20 segundos y 95 centésimas para alcanzar la convergencia de la solución con 10852 iteraciones, se observa que al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método (LBL-ADI) presento la convergencia para la solución en un tiempo de 6 minutos con 35 segundos y 69 centésimas deteniéndose en la iteración 4354,

observando una disminución en el tiempo de cómputo de 1 minuto con 45 segundos y 26 centésimas con una diferencia porcentual de 10.2%.

Con los resultados mostrados en la tabla 5.6 indican que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas (LBL-ADI) mejoro el esfuerzo computacional conforme al tiempo de cómputo para la malla más gruesa de  $34 \times 34$  y para la malla fina de  $130 \times 130$  nodos, como se puede observar de manera cualitativa en la figura 4.15.

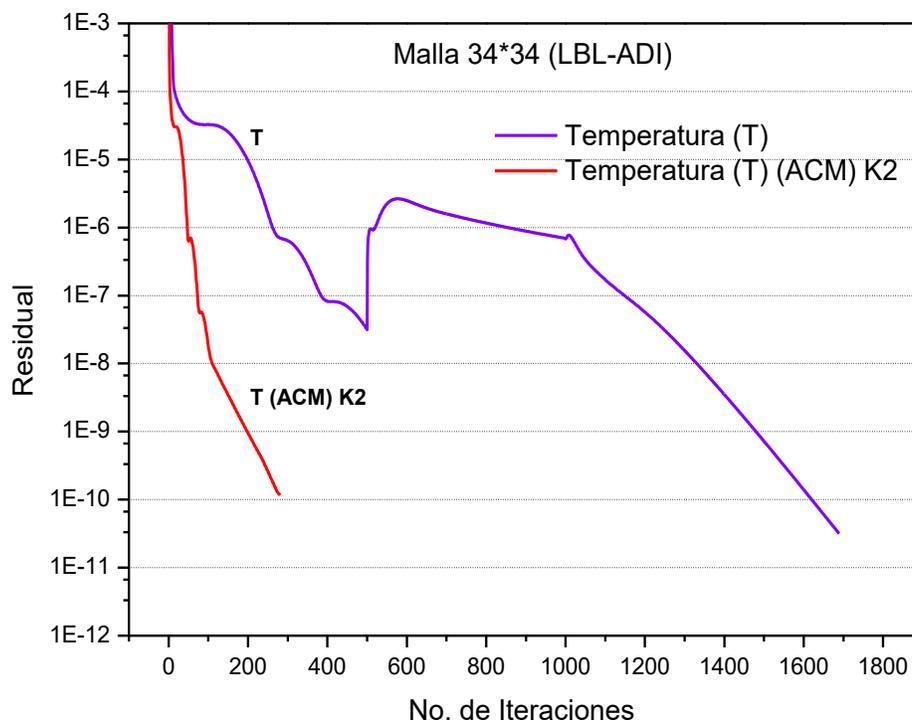


**Figura 4.15** Resultados de los mejores tiempos de cómputo del método (LBL-ADI) acoplado la técnica de Multimalla (ACM).

En la figura 4.15, se muestra el comportamiento cualitativo del esfuerzo computacional con respecto al número de nodos, se observa que le acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas (LBL-ADI) acelera el tiempo de convergencia para la solución para la malla más gruesa y para la malla fina. La solución del problema en la malla más gruesa no es la más indicada debido al poco número de nodos que tiene por lo cual la solución que presenta este tamaño de malla numérica recomendado, por otra parte la corrida

para la malla numérica fina de 130\*130 presenta un tamaño adecuado para la solución del problema, al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) se observó una diferencia porcentual del tiempo de cómputo de 10.2 % y una reducción de 6,498 iteraciones, demostrando que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) mejora el esfuerzo computacional.

La figura 4.16, muestra el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la corrida de la malla numérica más gruesa, al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución (LBL-ADI).

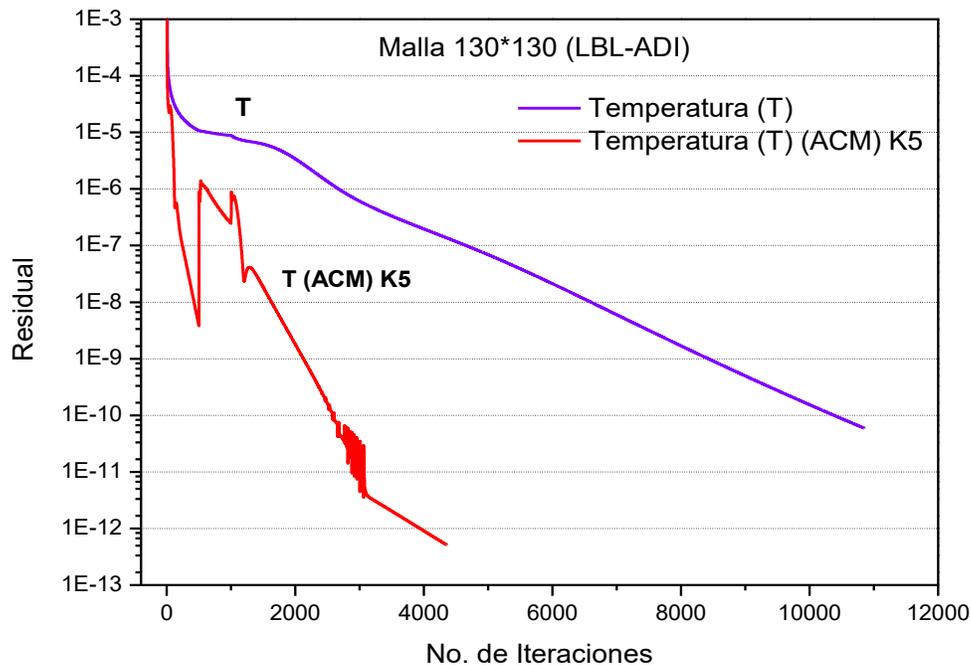


**Figura 4.16.** Comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla más gruesa de 34\*34 nodos.

La figura 4.16 se observa el comportamiento del residual de la variable de temperatura ( $T$ ), se observó que sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) el residual presenta un comportamiento fluctuante hacia la convergencia alcanzando su criterio de paro de  $10^{-09}$  alrededor de la iteración 1450, mientras que al acoplar la técnica de Multimalla (ACM), el residual de la temperatura ( $T$ ) presenta un comportamiento altamente convergente hacia la solución del problema,

alcanzando su criterio de paro alrededor de la iteración 200, por lo que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) mejora significativamente el comportamiento del residual.

A continuación se mostrara en la figura 4.17, el comportamiento del residual de la variable temperatura ( $T$ ) para la malla fina correspondiente a la de  $130 \times 130$  nodos la cual resulto como una de las mejores comportadas al acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas (LBL-ADI), en el cual se observa como el comportamiento del residual sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) presenta un comportamiento convergente, alcanzando su criterio de paro de  $10^{-09}$  alrededor de la iteración 8100, mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) se observa un comportamiento de la temperatura ( $T$ ) fluctuante para posteriormente estabilizarse alcanzando su criterio de paro de  $1 \times 10^{-09}$  a las 2,000 iteraciones.



**Figura 4.17** Comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla fina de  $130 \times 130$  nodos.

Con base a lo anterior mostrado en las figura 4.17, se puede observar que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de

ecuaciones algebraicas (LBL-ADI) mejora el comportamiento de los residuales para la malla fina de 130\*130 nodos.

#### 4.5 EVALUACIÓN DEL MÉTODO LÍNEA POR LÍNEA CON GAUSS SEIDEL DE DIRECCIONES ALTERNANTES (LGS-ADI)

La tabla 4.7 representa el esfuerzo computacional con respecto al tiempo de cómputo que le toma para llegar a la solución del problema, utilizando el método de solución de ecuaciones algebraicas (LGS-ADI) para lo cual se evaluaron distintos tamaños de malla numéricas sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), para posteriormente acoplar la técnica de Multimalla (ACM) con 5 niveles para el método de solución (LGS-ADI).

**Tabla 4.7** Tiempo de cómputo (*hrs:min:seg,cs*), método de línea por línea con Gauss Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI).

Tamaño de malla	(LGS-ADI)	Multimalla (ACM)			
		K=2	K=3	K=4	K=5
<b>258*258</b>	2:28:01:53	5:42:41:79	5:33:48:28	5:29:32:95	5:30:17:43
<b>130*130</b>	0:33:33:54	0:07:43:65	0:06:26:89	00:05:29:32	0:05:02:56
<b>66*66</b>	0:00:50:80	0:00:06:41	0:00:09:54	0:00:10:52	0:00:11:43
<b>34*34</b>	0:00:06:24	0:00:01:39	0:00:01:59	0:00:01:71	0:00:01:70

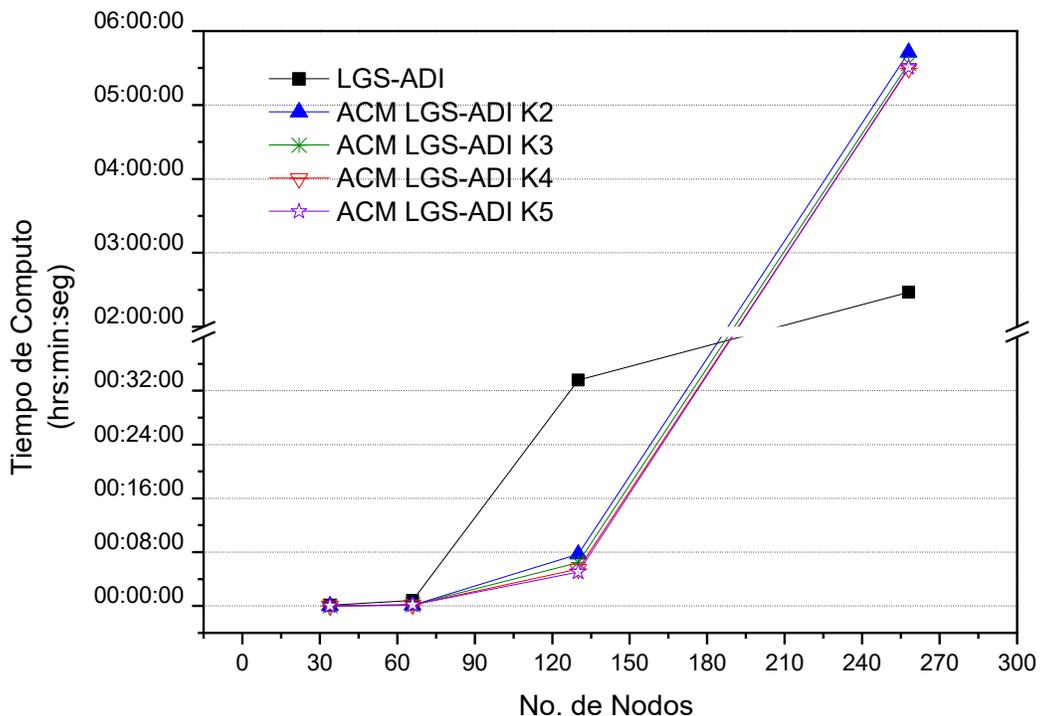
La tabla 4.7 muestra el tiempo de cómputo para las distintas mallas numéricas utilizando el método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea con Gauss Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI) y con el acoplamiento de Multimalla (ACM). La obtención de los resultados muestra que para la malla más

gruesa de  $34 \times 34$  nodos le toma un tiempo de 6 segundos con 24 centésimas para alcanzar la convergencia con el método (LBL-ADI), mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) mostro que el nivel de malla más óptimo fue para 2 niveles de malla obteniendo un tiempo de cómputo de 1 segundo con 39 centésimas, es importante recalcar que para mallas gruesas no se obtiene la solución adecuada del problema, la solución única se encuentra en mallas más finas. La malla numérica de gruesa de  $66 \times 66$  nodos con el método (LBL-ADI) sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) le tomo un tiempo de 50 segundos con 80 centésimas para la convergencia, mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) mostrando que el nivel de malla más óptimo se obtuvo para 2 niveles de malla, obteniendo la convergencia con un tiempo de 6 segundos con 41 centésimas. Para la malla numérica fina de  $130 \times 130$  nodos, sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), le tomo un tiempo de cómputo de 33 minutos con 33 segundos y 54 centésimas para alcanzar la solución del problema, mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para el nivel más óptimo que resulto ser para 5 niveles de malla, obtuvo la convergencia de la solución con un tiempo de cómputo de 5 minutos con 2 segundos y 56 centésimas. Para la malla más fina de  $258 \times 258$  nodos, sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), el tiempo de cómputo que le tomo para alcanzar la convergencia de la solución fue de 2 horas 28 minutos con 1 segundo y 53 centésimas, mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para el nivel más óptimo correspondiente a 4 niveles de malla, obtuvo la solución con un tiempo de cómputo de 5 horas 29 minutos con 32 segundos y 32 segundos.

Con base a los resultados obtenidos de la evaluación del tiempo cómputo (mostrados en la tabla 5.7), se observa que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla, acelera la convergencia de la solución para los siguientes tamaños de mallas numéricas:  $34 \times 34$ ,  $66 \times 66$ ,  $130 \times 130$  nodos. El aumento del tiempo de cómputo que se observó en la corrida de la malla más fina de  $258 \times 258$  nodos, es debido a que no logro alcanzar el criterio de convergencia por lo que la corrida termino por su criterio de iteraciones máximas correspondiente a 50,000 iteraciones, este aumento en el tiempo de cómputo se debe a que en la

técnica de Multimalla (ACM) aún no está optimizada particularmente para este tamaño de malla numérica. En la figura 5.18, se muestra el comportamiento cualitativo del esfuerzo computacional del tiempo de cómputo con respecto al número de nodos, al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de línea por línea con Gauss Seidel de direcciones alternantes (LBL-ADI) para los siguientes tamaños de mallas numéricas: 34\*34, 66\*66, 130\*130, 258\*258 nodos correspondientes a los valores mostrados en la tabla 4.7.

La figura 4.18, se observa que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) mejora el esfuerzo computacional con respecto al tiempo de cómputo para los siguientes tamaños de mallas numéricas: 34\*34, 66\*66, 130\*130. El incremento que muestra para la malla numérica más fina de 258\*258 nodos es debido a que la corrida no alcanza la convergencia para la solución del problema por lo que termina por el número máximo correspondiente a 50,000, este incremento se debe a que la técnica de Multimalla (ACM) no está optimizada para este tipo de malla.



**Figura 4.18** Resultado del tiempo de cómputo del método (LBL-ADI) acoplado la técnica de Multimalla (ACM).

En la tabla 4.8 se muestra el número de iteraciones que demanda cada una de las mallas numéricas al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea con Gauss Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI). Se observó que para la malla más gruesa correspondiente a la de  $34 \times 34$  nodos sin la el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) le tomo 2055 iteraciones para obtener la solución del problema, mientras al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) se observó que el nivel más óptimo es para 4 niveles de malla alcanzado la convergencia de la solución en la iteración 256. Para la malla numérica gruesa correspondiente a  $66 \times 66$  nodos sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), le tomo 4855 iteraciones para obtener la solución del problema, mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) demostrando que el nivel de malla más óptimo corresponde para 4 niveles de malla convergiendo con 444 iteraciones para la solución del problema. Se puede observar como la corrida de la malla numérica de la malla fina de  $130 \times 130$  no alcanza la convergencia de la solución por lo cual la corrida se detiene por el criterio de iteraciones máximas correspondientes a 50,000 iteraciones, pero al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) con 5 niveles de malla, esta alcanza la convergencia de la solución con 3368 iteraciones. Para la malla más fina de  $258 \times 258$  nodos se puede observar que no alcanza la convergencia de la solución por lo cual la corrida se detiene por el número de iteraciones máximas. Al implementar la técnica de Multimalla (ACM) tampoco logra converger, terminando por el criterio de iteraciones máximas.

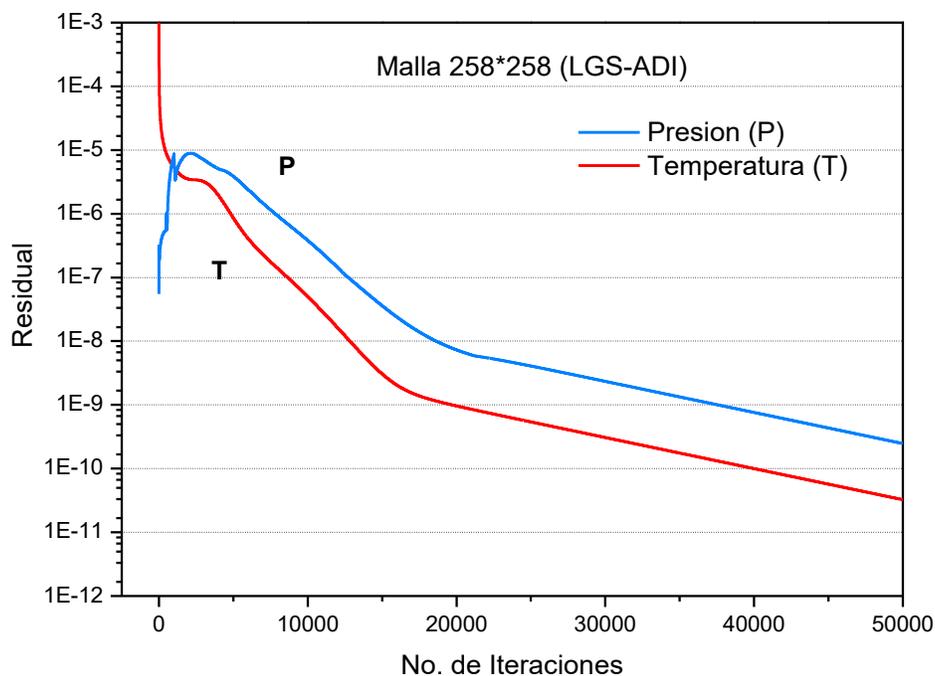
**Tabla 4.8** Número de iteraciones realizadas por (LGS-ADI) acoplado la técnica de Multimalla (ACM).

Tamaño de malla	(LGS-ADI)	Multimalla (ACM)			
		K=2	K=3	K=4	K=5
<b>258*258</b>	50000	50000	50000	50000	50000
<b>130*130</b>	50000	4856	4218	3649	3368
<b>66*66</b>	4855	259	398	444	477
<b>34*34</b>	2055	205	234	256	259

Los resultados mostrados en la tabla 4.8, demuestran que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea con Guass Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI) reduce el número de iteraciones para las siguientes mallas numéricas: 34\*34, 66\*66, 130\*130. Se puede observar que la malla numérica de 130\*130 sin el acoplamiento de la técnica (ACM) no llega a la converger, pero al implementar la técnica de Multimalla (ACM) la cual alcanza la solución en 3368, iteraciones con el nivel más óptimo de malla correspondiente a 5 niveles. Los resultados correspondientes para la malla más fina de 258\*258 muestran que no alcanzaron la convergencia, se graficaran los residuales de temperatura ( $T$ ), presión ( $P$ ) y velocidades del fluido ( $v$ ), ( $u$ ).

La figura 4.19, muestra el comportamiento de los residuales de las variables temperatura ( $T$ ) y presión ( $P$ ) los cuales corresponden a la corrida de 258\*258 nodos sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM). El comportamiento del residual de la temperatura comienza con un residual de  $10^{-03}$ , conforme el número

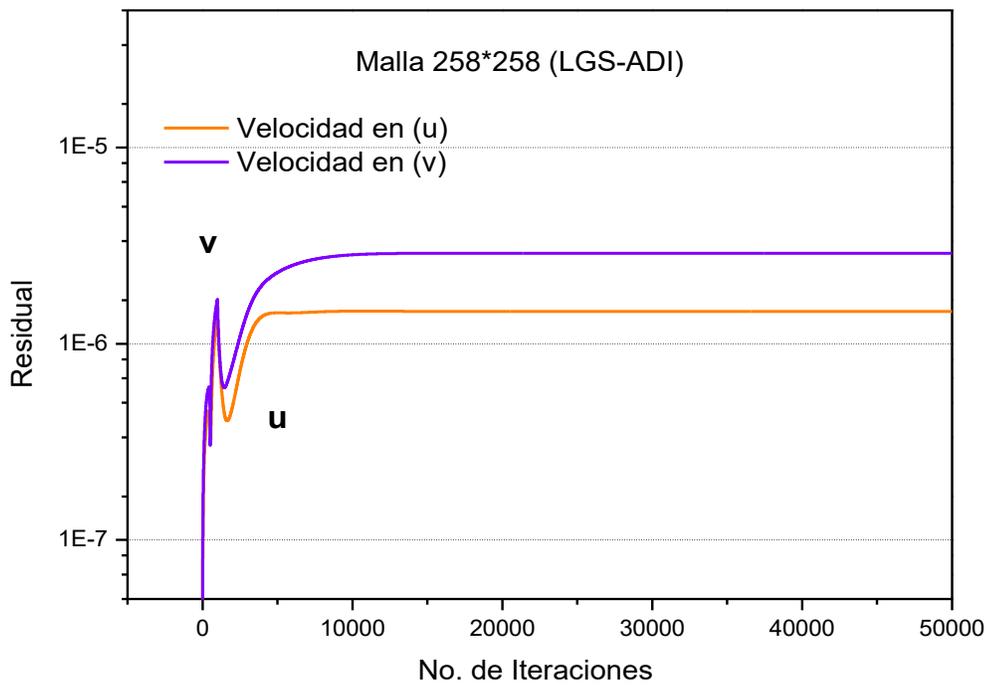
de iteraciones va aumento el residual de la temperatura comienza a presentar un comportamiento convergente alcanzando su criterio de paro a la iteración 2,000. El residual de la presión comienza con un valor de  $7.5 \times 10^{-08}$ , conforme el número de iteraciones va aumentando el residual de la presión comienza a presenta un comportamiento divergente, pero al alcanzar la iteración 200, el residual de la presión presenta un comportamiento convergente logrando alcanzar su criterio de paro de  $1 \times 10^{-09}$  a la iteración 3100. Con base a lo mostrado en la figura 5.19, se observa que los residuales de la temperatura y presión no presentaron problemas en su comportamiento hacia la convergencia para la solución del problema.



**Figura 4.19.** Residual de temperatura (T) y de presión (P), con  $\epsilon$  de  $1 \times 10^{-09}$  para la malla 258\*258 con (LBL-ADI) sin (ACM).

La figura 4.20, muestra el comportamiento de los componentes de la variable de velocidad ( $u$ ) y ( $v$ ) para la corrida de la malla fina de 258\*258 nodos, el comportamiento del residual para la componente ( $u$ ), comienza con un residual que está por debajo del su criterio de paro, pero conforme aumenta el número de iteraciones se observa que le residual de la componente en ( $u$ ) presenta un comportamiento estable quedando el residual en un valor de  $1.45 \times 10^{-06}$ , mostrando

un comportamiento similar para el residual en la componente ( $v$ ), el comportamiento de este residual presenta un comportamiento divergente al comienzo, pero conforme aumenta el número de iteraciones, el residual presenta un comportamiento estable quedando con un residual de  $2.89 \times 10^{-6}$  como no se logra alcanzar la convergencia del problema la corrida termina por el criterio de iteraciones máximas.

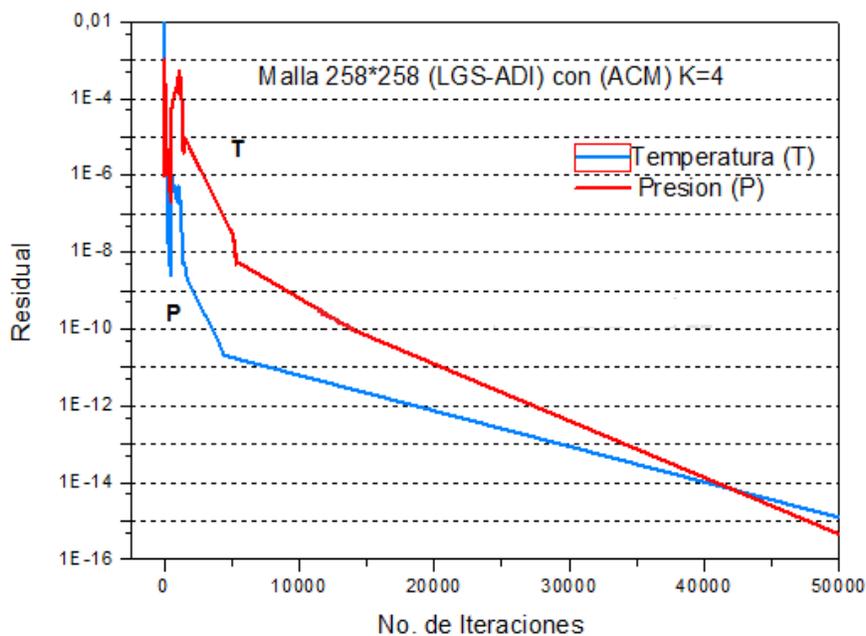


**Figura 4.20.** Residual de las componentes de la variable velocidad ( $u$ ) y ( $v$ ) con  $\epsilon$  de  $1 \times 10^{-6}$  para la malla 258\*258 con (LBL-ADI) sin (ACM).

Observando el comportamiento de los residuales de temperatura ( $T$ ), presión ( $P$ ), velocidades en ( $u$ ) y ( $v$ ) para la corrida de la malla numérica más fina de 258\*258 nodos, se puede determinar que la falta de convergencia es causada por los residuales de los componentes de la velocidad ( $u$ ) y ( $v$ ), estos se están quedando con un residual que no está alcanzando su criterio de paro de  $10^{-6}$ , pero sin embargo el valor que se están quedando los residuales están muy aproximados, para estos casos la experiencia del programador decidirá qué es lo más apropiado,

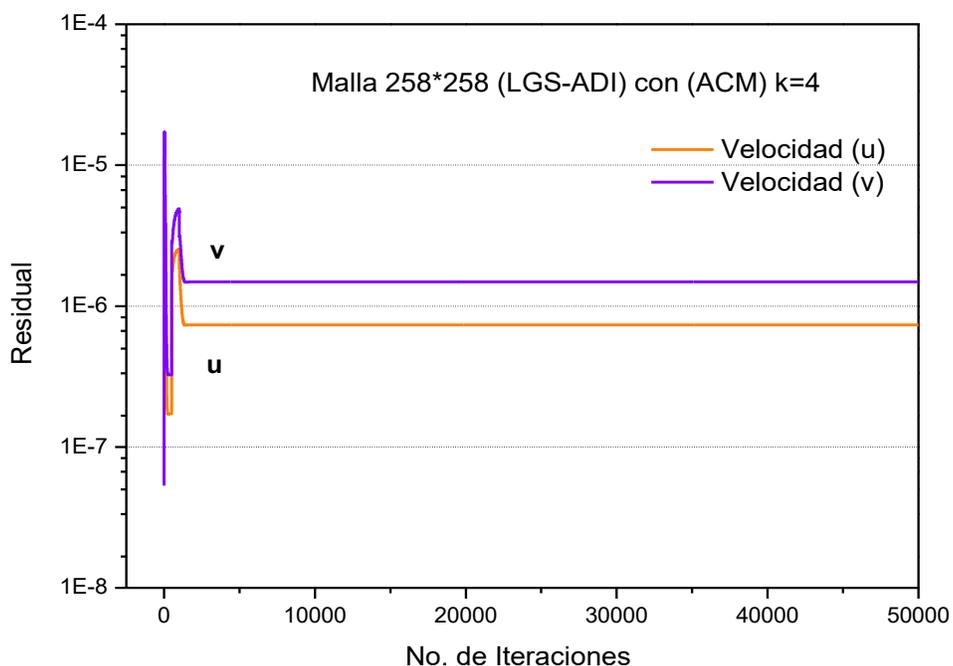
si bajar el criterio del épsilon para esa variable o ajustar los parámetros como lo pueden ser el factor de relajación, paso de tiempo etc..

La figura 4.21. Muestra el comportamiento de los residuales de la temperatura ( $T$ ) y de la presión ( $P$ ) para la corrida de malla más fina, cuando es acoplado la técnica de Multimalla (ACM) para 4 niveles. La figura 4.21 se observa que el residual de la temperatura ( $T$ ) comienza con un residual de  $6.4 \times 10^{-04}$ , se observó que la comienzo de la corrida el residual presento un comportamiento inestable, pero conforme el número de iteraciones va aumentando el algoritmo presenta una estabilidad, mostrando un comportamiento convergente logrando alcanzar su criterio de paro de  $10^{-09}$  a la iteración 2,000. El comportamiento del residual de la presión ( $P$ ), comienza con un valor de residual de  $10^{-02}$ , conforme va aumentando el número de iteraciones se observa que el residual de la presión presenta una estabilidad, mostrando un comportamiento convergente logrando llegar a su criterio de paro a la iteración 2871. Como se puede observar en la figuras 4.19 y 4.21, el acoplamiento de la técnica de Mulltimalla (ACM) mejora el comportamiento de los residuales de temperatura ( $T$ ) para su convergencia.



**Figura 4.21.** Residual de temperatura ( $T$ ) y de presión ( $P$ ), con épsilon de  $1 \times 10^{-09}$  para la malla 258\*258 con (LBL-ADI) con (ACM).

La figura 4.22 muestra el comportamiento de los componentes de la variable de velocidad ( $u$ ) y ( $v$ ) al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 4 niveles de malla, para la corrida de la malla fina de  $258 \times 258$  nodos, el comportamiento del residual para la componente ( $u$ ), presenta un comportamiento fluctuante al comienzo de la corrida pero conforme va aumentando el número de iteraciones el comportamiento del residual se estabiliza a la iteración 2,000 con un valor de residual de  $7.36 \times 10^{-07}$  quedando por debajo de su criterio de convergencia. Por lo que el residual de la velocidad en la componente ( $u$ ) presenta un mejor comportamiento al acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 4 niveles. El comportamiento del residual para la velocidad de la componente ( $v$ ), presenta un comportamiento muy similar al del residual de la componente en ( $u$ ), con la diferencia de que el residual de ( $v$ ) se estabiliza y permanece constante con un residual de  $1.48 \times 10^{-06}$  por lo que no logra alcanzar su criterio de paro de  $10^{-06}$ . Por lo cual la corrida se detiene por su criterio de iteraciones máximas correspondiente a 50,000 iteraciones, pero sin embargo el valor que se están quedando los residuales están muy aproximados, para estos casos la experiencia del programador decidirá qué es lo más apropiado, bajar el criterio del épsilon para esa variable o ajustar los parámetros como lo pueden ser el factor de relajación, paso de tiempo etc...



**Figura 4.22** Residual de las componentes de la variable velocidad ( $u$ ) y ( $v$ ) con  $\epsilon$  de  $1 \times 10^{-06}$  para la malla  $258 \times 258$  con (LBL-ADI) con (ACM).

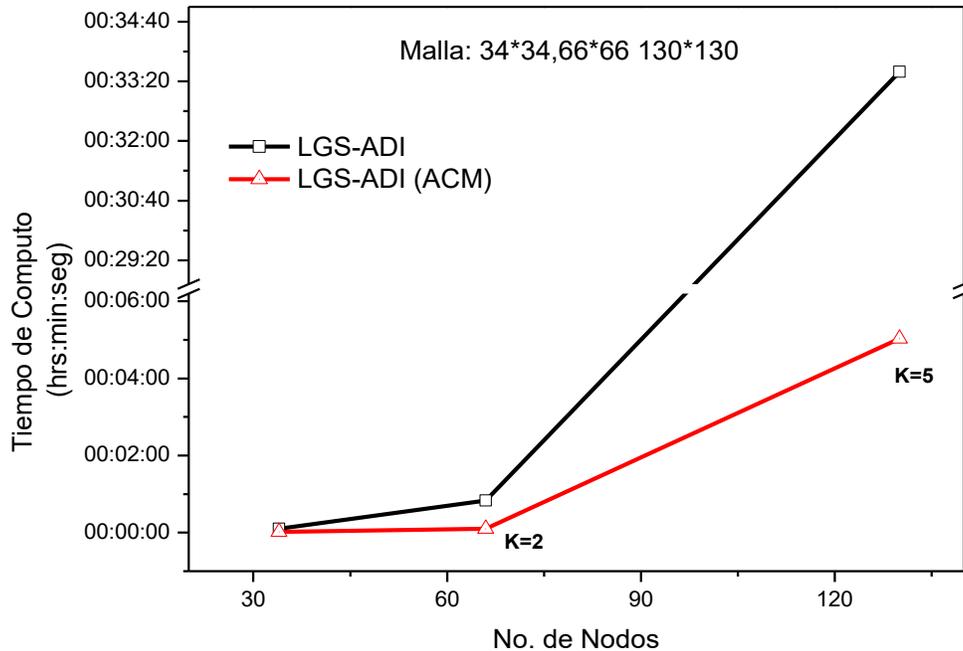
El acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 4 niveles al método de solución de ecuaciones algebraicas de línea por línea con Gauss Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI), presentan una mejoría en el comportamiento de los residuales hacia la convergencia de la solución.

La tabla 4.9 muestra la relación de los mejores resultados obtenidos al acoplar la técnica de multimalla (ACM), al método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea con Gauss Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI), mostrando el tiempo de cómputo que le tomo al acoplar la técnica de Multimalla (ACM) mostrando cual resultado ser el nivel de malla más óptimo conforme al tiempo de cómputo, también así mismo el número de iteraciones máximas.

**Tabla 4.9** Mejores resultados acoplando la técnica de Multimalla (ACM) con (LBL-ADI).

Tamaño de malla	(LGS-ADI)					Diferencia de Tiempo (%)
	Sin (ACM)		Con (ACM)			
	Tiempo (hrs:min:seg.cs)	Iteración	Tiempo (hrs:min:seg.cs)	Iteración	Nivel (k)	
<b>130*130</b>	0:33:33:54	50000	0:05:02:56	3368	5	85
<b>66*66</b>	0:00:50:80	4855	0:00:06:41	259	2	88
<b>34*34</b>	0:00:06:24	2055	0:00:01:39	205	2	83,3

El acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas línea por línea con Gauss Seidel de direcciones alternantes (LGS-ADI) mostro una disminución del esfuerzo de cómputo. La corrida de la malla más gruesa  $34 \times 34$  nodos sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) presento la convergencia con un tiempo de cómputo de 6 segundos con 24 centésimas deteniéndose a las 2055 iteraciones, mientras que el acoplamiento de la técnica de Multimallas (ACM) para 2 niveles de malla, presento la convergencia con un tiempo de cómputo de 1 segundo con 39 centésimas deteniéndose a las 205 iteraciones, observando una disminución en el tiempo de cómputo de 5 segundos con 85 centésimas con una diferencia porcentual de 83.3%. La corrida de la malla gruesa de  $66 \times 66$  nodos sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) presento la convergencia con un tiempo de cómputo de 50 segundos con 80 centésima deteniéndose a las 4855 iteraciones, mientras que con acoplamiento de la técnica de Multimallas (ACM) para 2 niveles de malla, presento la convergencia en un tiempo de cómputo de 6 segundos con 41 centésimas deteniéndose en la iteración 259, observando una disminución del tiempo de cómputo de 44 segundos con 39 centésimas con un diferencia porcentual de 88%. El comportamiento para la malla fina correspondiente para la malla de  $130 \times 130$  nodos sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla de (ACM) presento la convergencia con un tiempo de cómputo de 33 minutos con 33 segundos y 54 centésimas deteniéndose en la iteración 50,000, mientras que con el acople de la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla, presentando la convergencia con un tiempo de cómputo de 5 minutos con 2 segundos y 56 centésimas deteniéndose en la iteración 3368 observando una disminución del tiempo de cómputo de 28 minutos con 30 segundos y 98 centésimas con diferencia porcentual de 85.0%. Los resultados obtenidos de la tabla 4.9, demuestran que la implementación de la técnica de Multimalla (ACM) mejora el tiempo de cómputo para los siguientes tamaños de malla:  $34 \times 34$ ,  $66 \times 66$  y  $130 \times 130$  nodos, como puede observarse de manera cualitativa en la figura 4.23.

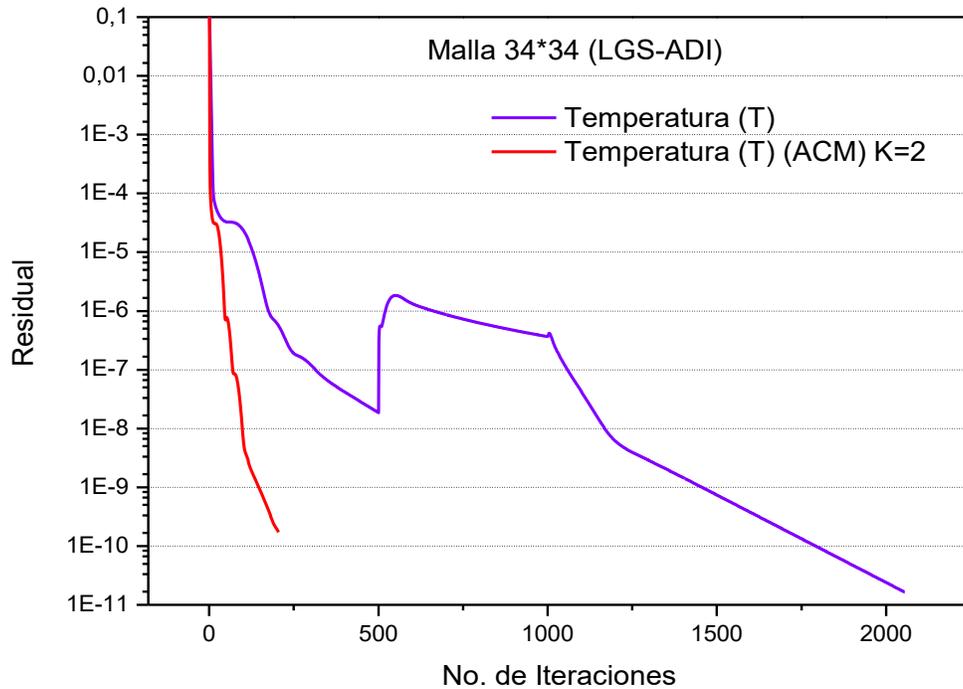


**Figura 4.23** Resultados de los mejores tiempos del método (LGS-ADI) acoplado la técnica de Multimalla (ACM).

En la figura 4.23 Se muestra el comportamiento cualitativo del esfuerzo computacional con respecto al número de nodos, los resultados corresponden a los mostrados anteriormente en la tabla 4.9. En la figura se puede observar la reducción del esfuerzo de tiempo de cómputo para las distintas mallas numéricas mostrando que para la malla fina de 130\*130 muestra que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla presenta un mejor tiempo de cómputo con una diferencia porcentual de 80%.

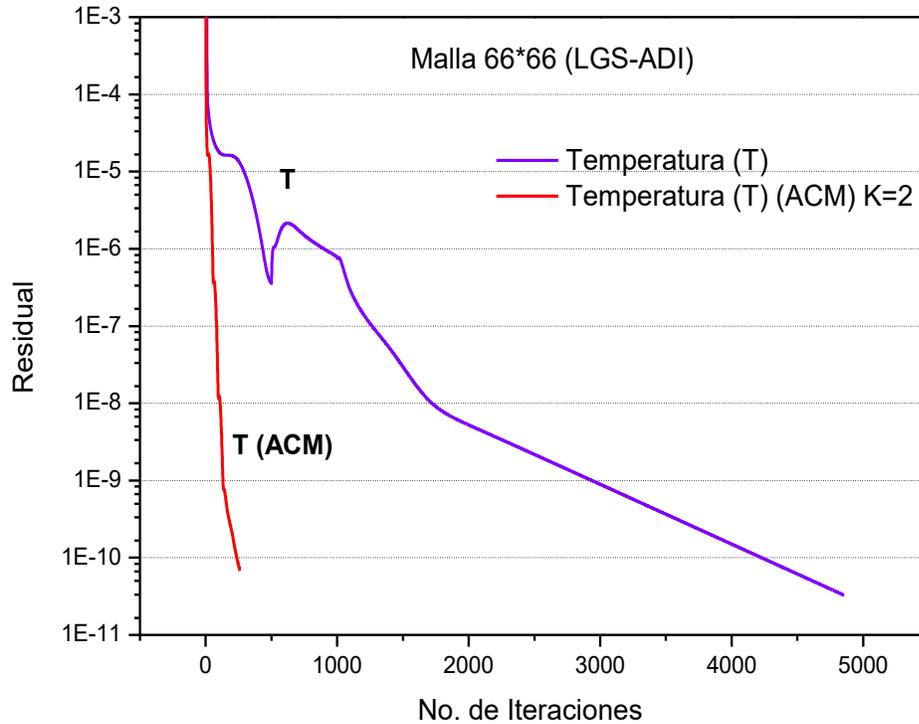
La figura 4.24 muestra el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla numérica gruesa de 34\*34, se observa el comportamiento del residual de la temperatura sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), presento un comportamiento oscilatorio hacia la convergencia, para posteriormente normalizarse y presentar un comportamiento convergente alcanzando su criterio de paro de  $10^{-09}$ , en la iteración 1450, mientras que con el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 2 niveles de malla se observa un mejor comportamiento hacia la convergencia alcanzando su criterio de paro de  $10^{-09}$ , en la iteración 146

mostrando que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 4 niveles al método de solución de ecuaciones algebraicas (LGS-ADI) mejora el comportamiento del residual logrando acelerar la convergencia del problema.



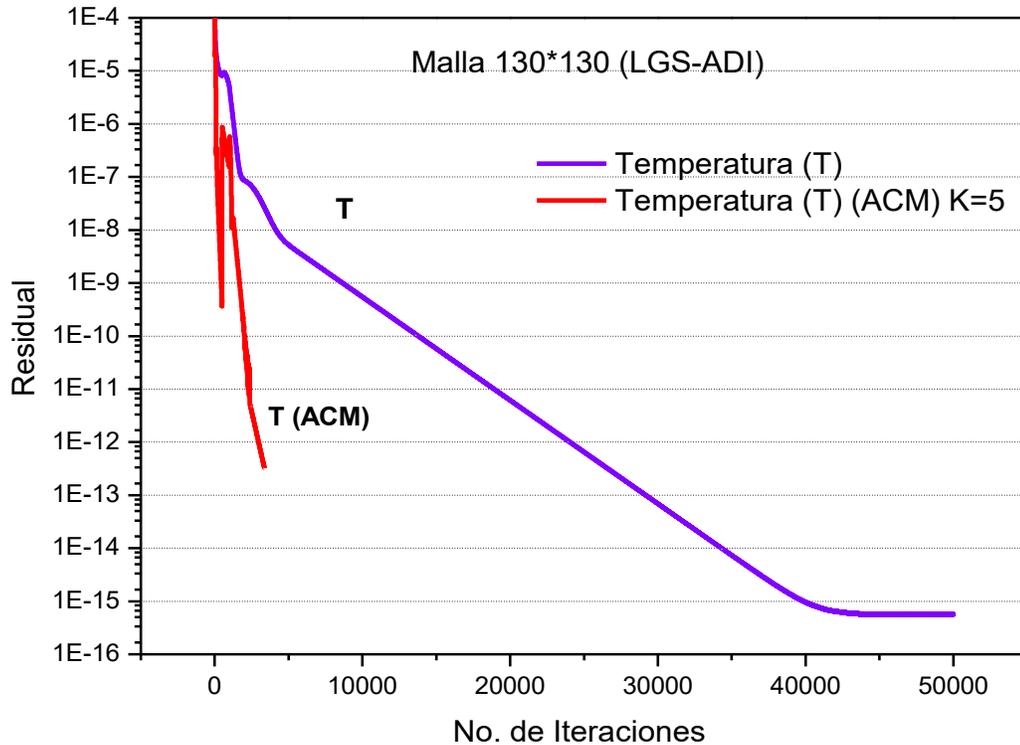
**Figura 4.24** Comportamiento del residual de temperatura ( $T$ ) para la malla gruesa de  $34 \times 34$ .

La figura 4.25, muestra el comportamiento de la variable de la temperatura ( $T$ ) para la malla de  $66 \times 66$ , en la cual podemos observar que el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), presenta un comportamiento oscilatorio hacia la convergencia, alcanzando su criterio de paro de  $10^{-09}$  en la iteración 2900, mientras que con acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) con 2 niveles de malla, el residual presento un comportamiento altamente convergente alcanzado su criterio de paro de  $10^{-09}$  en la iteración 137. Mostrando que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) para 2 niveles mejora el comportamiento del residual para la corrida de la malla numérica de  $66 \times 66$  nodos.



**Figura 4.25** Comportamiento del residual de temperatura ( $T$ ) para la malla gruesa de  $66 \times 66$ .

La figura 4.26 muestra el comportamiento del residual de la temperatura ( $T$ ) para la malla fina de  $130 \times 130$  nodos, en el cual se observa el comportamiento del residual antes y después de acoplar la técnica de Multimalla (ACM) para 5 niveles de malla.



**Figura 4.26.** Comportamiento del residual de temperatura ( $T$ ) para la malla gruesa de  $130 \times 130$ .

Como se logra apreciar el comportamiento sin el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), se observa un comportamiento convergente logrando alcanzar su criterio de paro de  $1 \times 10^{-09}$  en la iteración 8500, mientras con el acoplamiento de la técnica de Multimallas (ACM) se observa una aceleración en la convergencia alcanzando su criterio de paro de  $1 \times 10^{-09}$  en la iteración 1600. Mostrando que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) disminuye el esfuerzo computacional con respecto al tiempo de cómputo.

#### **4.6 CONCLUSIÓN**

Se presentó un análisis de los resultados obtenidos con la implementación del método Multimalla. De los resultados de la evaluación computacional por uso de la técnica de multimallas en los métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas, se concluyó que cuando se usa el ACM los tiempos de cómputo disminuyen, y el número de iteraciones es menor, sin embargo; se debe tener en cuenta que en una iteración usando el acople del ACM en los métodos tradicionales (GS, LBL-ADI, etc.), representa mayor esfuerzo computacional por iteración debido a que el número de operaciones es mayor. El método que presenta los menores tiempos de cómputo es el LGS-ACM.

# CAPÍTULO 5

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones que se obtienen después del análisis de los resultados descritos en el capítulo anterior, con respecto a la evaluación computacional del acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM). Así también, se presentan recomendaciones sugeridas para trabajos futuros.

Para lograr comprender mejor los resultados obtenidos al realizar la evaluación de la técnica de Multimalla (ACM) acoplados a los siguientes métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas, se presentan una conclusión para cada uno de los métodos a los cuales se les acoplo la técnica de Multimalla (ACM).

### **5.1 GAUSS SEIDEL CON (ACM)**

Los resultados obtenidos mostraron que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas Gauss Seidel (GS), para resolver el problema de cavidad calentada diferencialmente, acelera la convergencia y el los componentes de error de la variable de temperatura, presión y velocidades en las mallas gruesas por lo cual tiene que resolver un menor número de iteraciones posteriormente este valor, se utiliza para prolongar y corregir la solución en la malla más fina de esta manera se acelera convergencia, Al implementar el método de Guass Seidel se observó una mejoría en el tiempo de computo de hasta un 80.2 %

### **5.2 LBL-ADI CON (ACM)**

Los resultados obtenidos de la evaluación del acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM), al método de soluciones algebraicas LBL-ADI mostro que para la malla más gruesa de  $34 \times 34$  nodos mejoran el tiempo de computo, pero al ser una malla de  $34 \times 34$  no presenta una cantidad de nodos adecuada. Para la malla de  $66 \times 66$  nodos se presentó un aumento en el tiempo de cómputo, para la malla fina donde la solución es adecuada presento una diferencia porcentual de 10.2%. Mostrando que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) acoplada al método de solución de ecuaciones algebraicas LBL-ADI no presenta un beneficio considerable.

### **5.3 LGS-ADI CON (ACM)**

En los resultados obtenidos de la evaluación del acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución de ecuaciones algebraicas LGS-ADI, se apreció para la malla más gruesa de  $34 \times 34$  se presentó una aceleración de la convergencia con una diferencia porcentual de 83.3 %. Para la malla de  $66 \times 66$  nodos se presentó una aceleración hacia la convergencia mostrando una diferencia

porcentual de 88%. Para la malla fina de  $130 \times 130$  se obtuvo una aceleración hacia la convergencia de la solución, presentando una diferencia porcentual de 85%. Mostrando que el acoplamiento de la técnica de Multimalla (ACM) al método de solución LGS-ADI mejora el comportamiento de los residuales y por lo tanto reduce el tiempo cómputo para los siguientes tamaños de malla numérica:  $34 \times 34$ ,  $66 \times 66$  y  $130 \times 130$ .

#### **5.4 CONCLUSIÓN GENERAL**

Conforme a los resultados obtenidos, se muestra que el método de solución de ecuaciones algebraicas LGS-ADI resulto el que presento una mayor reducción del esfuerzo computacional con respecto al tiempo de cómputo para la solución de las siguientes mallas numéricas:  $34 \times 34$ ,  $66 \times 66$  y  $130 \times 130$ , observando que para la malla numérica fina de  $130 \times 130$  donde la solución del problema es adecuada presentó una reducción de 28 minutos con 30 segundos y 98 centésimas. Se obtuvo que el método de solución de ecuaciones algebraicas LGS-ADI es el mejor método de solución para acoplar la técnica de Multimalla (ACM).

#### **5.5 SUGERENCIA PARA TRABAJOS FUTUROS**

Con la intención de dar continuidad a este trabajo de tesis se sugieren los siguientes estudios respecto al algoritmo de la técnica de Multimalla (ACM).

- Realizar la optimización de la técnica de Multimalla (ACM) para los métodos de solución de ecuaciones algebraicas (Gs, LBL-ADI, LGS-ADI).
- Acoplar la técnica de Multimallas (ACM) a otros métodos de solución de ecuaciones algebraicas (LIU, SIP, MSIP).
- Desarrollar las subrutinas para de ciclo W y F para evaluar el algoritmo desarrollado de ACM.
- Hacer uso del algoritmo ACM desarrollado para otros problemas de aplicación del área de sistemas térmicos donde se vean involucrados fenómenos más complejos como la turbulencia.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- D.Santhosh Kumar, Ksuresh kumar and Manab Kumar Dass, A FINE GRID SOLUTION FOR A LID-DRIVEN CAVITY FLOW USING MULTIGRID METHOD, Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics Vol. 3, No. 3, pp. 336–354 (2009)
- Hutchinson B. R., Raithby G. D., “A Multigrid Method based on the AdditiveCorrection Strategy”, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 9, 511-537, 1986.
- Pletcher R., Tannehill J., Anderson D., (2012). Computational fluid mechanics and heat transfer. CRC Press, New York.
- Rodríguez J., Introducción a la Termodinámica.1ra edición, 1990.
- Mott R., Mecánica de fluidos aplicada. 4a edición, 1996
- Versteeg H., Malalasekera W. (2008). An Introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method. Pearson, Prentice Hall, England.
- Xamán J, Gijón M, Dinámica de fluidos computacional para ingenieros (2016).