

# Tecnológico Nacional de México

## Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

### Tesis de Maestría

Diseño de Algoritmos de Diagnóstico y Pronóstico. Caso  
de Estudio: Modelado Fractal de un Ducto Hidráulico

presentada por

**Ing. Ian Llunas Correa Escudero**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica**

Director de tesis

**Dr. José Francisco Gómez Aguilar**

Codirector de tesis

**Dra. Flor Lizeth Torres Ortiz**

**Cuernavaca, Morelos, México. Diciembre de 2018.**

ESC\FORDOC11

Cuernavaca, Morelos a 3 de diciembre de 2018.

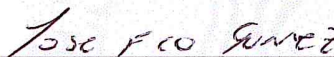
OFICIO No. DIE/174/2018

**Asunto:** Aceptación de documento de tesis

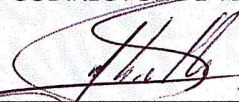
**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Ian Lluas Correa Escudero**, con número de control **M17CE003** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Diseño de Algoritmos de Diagnóstico y Pronóstico Basado en Modelos. Caso de Estudio: Modelado Fractal de un Ducto Hidráulico”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

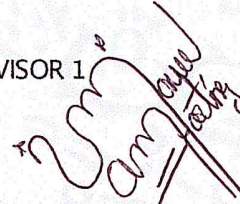
DIRECTOR DE TESIS

  
Dr. José Francisco Gómez Aguilar  
Doctor en Física  
Cédula profesional 9124781

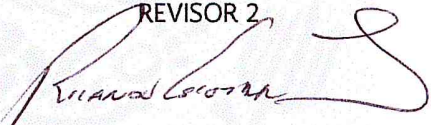
CODIRECTOR DE TESIS

  
Dra. Flor Lizeth Torres Ortiz  
Doctora en Automática  
Sin cédula profesional

REVISOR 1

  
Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 8031070

REVISOR 2

  
Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 7534115

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Estudiante  
Expediente  
RFEJ/lrr.



**SEP**  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cuernavaca, Morelos, **10/Diciembre/2018**

OFICIO No. SAC/565/2018

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**ING. IAN LLUNAS CORREA ESCUDERO**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS**  
**EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**  
**PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Diseño de Algoritmos de Diagnóstico y Pronóstico Basado en Modelos. Caso de Estudio: Modelado Fractal de un Ducto Hidráulico", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica*  
*"Conocimiento y tecnología al servicio de México"*

**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ**  
**SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



SEP TecNM  
CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.  
Expediente

GVGR/mcr

**cenidet**<sup>®</sup>  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos.  
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4106, e-mail: dir\_cenidet@tecnm.mx

[www.tecnm.mx](http://www.tecnm.mx) | [www.cenidet.edu.mx](http://www.cenidet.edu.mx)



---

# Dedicatoria

---

**A Jesucristo, Rey de reyes, Señor de señores. El único Creador y Dador de Vida.**

*A ti, **José Juan Correa Avellaneda**, mi amado papá, mi mayor ejemplo de disciplina, dedicación, trabajo duro, y sobre todo, una figura de paternidad llena de amor y atención. A ti que incontables días, e incluso noches, trabajaste con el sudor de tu frente para sustentar a tu familia, a ti que predicas con el ejemplo. Te amo papá.*

*A ti, **Xóchitl Escudero Argüelles**, mi querida mamá, siempre llena de amor, cariño y consejos valiosos, que forjaron mi carácter y el hombre que soy hoy en día. A ti que me llevaste en tu vientre, me cobijaste en mi niñez, y me instruiste en mi juventud, y que hoy en día sigues siendo indispensable. Te amo mamá.*

*A ti, **Martha Abril Correa Escudero**, mi dulce hermanita, siempre pendiente de mi, demostrando tu cariño e inmerecida admiración. Te amo, hermanita.*

*A ti, **Cesia Isabel Ocampo Medina**, mi amada novia, la niña de mis ojos, la fuente de mi inspiración y motivación para convertirme en un hombre digno de tu amor. Me has demostrado que el amor verdadero existe, eres todo lo que soñé y más. Te amo, mi amor.*

*A toda mi amada familia, abuelos, tíos, primos y sobrinos quienes, a pesar de la distancia, lazos de amor y cariño nos mantienen unidos.*

---

# Agradecimientos

---

*A mi director de tesis, el Dr. José Francisco Gómez Aguilar, cuya continua instrucción y atento consejo siempre estuvo presente, guiándome con motivación hacia la obtención de los mejores resultados.*

*A mi co-directora de tesis, la Dra. Flor Lizeth Torres Ortíz, siempre atenta y dispuesta a instruirme con paciencia.*

*A mis revisores, el Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez y el Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez, por su interés en evaluar mi trabajo, y brindarme oportunamente sus valiosas observaciones.*

*A mis compañeros de clase, Alejandra, Alfonso, Ariel, David, Luis y Miguel, gracias por su apoyo, y los buenos momentos.*

*A mi casa de estudios, el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, que me abrió sus puertas y se encargó de proporcionar las herramientas y habilidades necesarias para convertirme en un profesionalista ético y competente.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por brindarme el sustento económico necesario para culminar en tiempo y forma mis estudios de posgrado.*

---

# Resumen Ejecutivo

---

El uso de tuberías como medio de transporte de fluidos, ha sido de vital importancia para muchos países, de tal manera que tan sólo en México existen aproximadamente 70,000 kilómetros de ductos para transportar productos derivados del petróleo, es por esto que fallas en este sistema de transporte deben identificarse con la mayor velocidad posible, y para ello, investigadores de todo el mundo han desarrollado diferentes métodos para la detección y localización de fugas en ductos, los cuales, en su mayoría, se encuentran basados en modelos analíticos del sistema.

El propósito de este trabajo es la obtención de un modelo generalizado de parámetros concentrados para describir la dinámica del flujo en un ducto hidráulico, y que puede ser utilizado para el diseño de algoritmos de diagnóstico. El modelo se formulará a partir de las ecuaciones diferenciales parciales de momento y continuidad que describen la dinámica del flujo en el ducto. Estas ecuaciones por ser no lineales se resolverán de manera numérica y con ello se encontrará una solución aproximada del modelo. Algunos de los métodos que han sido utilizados para obtener el modelo de parámetros concentrados son el método de características, el método de diferencias finitas y el método de colocación ortogonal. Debido a que el comportamiento del fluido en un ducto presenta comportamientos anómalos, viscoelásticos y, en general, dinámicas altamente complejas, en esta tesis se propone aplicar el cálculo de orden fraccionario para modelar la dinámica del fluido en un ducto. En particular, se generaliza el modelo ordinario aplicando derivadas conformables y derivadas fraccionarias de tipo Caputo-Fabrizio. Las soluciones numéricas se obtienen aplicando un método numérico basado en interpolaciones de Lagrange.

Por otro lado, la determinación del coeficiente de fricción viscosa en una tubería es esencial en diversos campos, tales como la industria petrolera, para el diseño de ductos de gas y petróleo; en ingeniería civil para el cálculo de sistemas de distribución de agua, sistemas de drenaje y ventilación, en ingeniería química y en todos los campos de ingeniería donde el flujo de fluido tome lugar. La ecuación más exacta para el cálculo de este parámetro es la ecuación de Colebrook, y se ha convertido en el estándar aceptado para el cálculo del factor de fricción en regímenes turbulentos, sin embargo, la forma implícita que presenta es su principal desventaja, por lo que diversas aproximaciones explícitas han sido propuestas en los últimos 60 años.

En esta tesis se presenta una aproximación explícita del coeficiente de fricción, mediante el uso de la función de Mittag-Leffler, esta función es utilizada debido a que permite capturar el comportamiento de diversos tipos de procesos, tales como: procesos monotónicos, oscilatorios, de oscilaciones amortiguadas, exponenciales estrechos, entre otros. Los parámetros involucrados en la función de Mittag-Leffler se optimizaron mediante el uso de algoritmos genéticos con el fin de proporcionar cálculos de fricción precisos, respecto a los que proporciona la ecuación de Colebrook.

---

# Abstract

---

The use of pipelines as mean of transportation of fluids has been of vital importance for many countries, such that only in Mexico exist approximately 70,000 kilometers of pipelines for transporting pretroleum products, therefore, failures in this system of transportation must be identified with the highest possible speed, and for this purpose, many researchers around the world have developed various methods for the detection and location of leaks in pipelines, wich mostly are based in analytical models of the system.

The purpose of this work is the obtention of a lumped parameters generalized model for describing the fluid dynamics in a pipeline, and that such model can be used in the design of diagnosis algorithms. The model is formulated from the partial differential equations of momentum and continuity, wich describe the fluid dynamics. Because this equations are nonlinear, they will be numerically solved in order to obtain an approximation of the solution of the model. Some methods used for obtaning the lumped parameters model are the method of characteristics, the finite-differences method and the ortogonal collocation method. Due to the fact that the fluid behavior in the pipeline exhibits anomalous, viscoelastic and, in general, highly complex dynamics, in this thesis is proposed the application of fractional order calculus, in order to modeling fluid dynamics in a pipeline. In particular, the ordinary model is generalized applying conformables derivatives and fractional derivatives of the Caputo - Fabrizio type. The numerical solutions are obtained using a numerical method based on Lagrange interpolations.

On the other hand, the determination of the viscose friction factor in pipes, is essential to a variety of industrial applications, such as the oil industry, in the design of gas and pretroleum pipelines; in civil engineering, for the calculation of ater distribution systems, drainage and ventilation systems; in chemical engineering and in any other field where the flow of fluids takes place. The most accurate equation used for the calculation of this parameter is the Colebrook's equation, and it has become the acceptable standard for calculation of the friction factor in turbulent regimes, however, the implicit form that this equation presents is its main disadvantage, so that various explicit approximations have been proposed over the last 60 years.

In this thesis an explicit approximation of the friction factor by means of the Mittag-Leffler function is presented, the use of such function is based on its reported capacity to capture the behavior of various types of processes, including such practically important cases as monotonic processes, oscillatory behavior, and damped oscillations. The parameters that constitute this approximation where optimized through the use of genetic algorithms, in order to provide accurate calculations of the friction factor, with respect to those provided by Colebrook's equation.

---

# Índice general

---

<b>Índice de tablas</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes. . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema. . . . .	2
1.3. Objetivo general. . . . .	3
1.3.1. Objetivos específicos. . . . .	3
1.4. Metas. . . . .	3
1.5. Justificación. . . . .	4
1.6. Alcances. . . . .	4
1.7. Hipótesis. . . . .	5
1.8. Organización del documento. . . . .	5
<b>2. Marco teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Hidrodinámica del ducto: Ecuaciones de golpe de ariete. . . . .	6
2.1.1. Modelado de la fricción. . . . .	7
2.1.2. Discretización en diferencias finitas. . . . .	7
2.2. Cálculo conformable. . . . .	8
2.3. Cálculo fraccionario. . . . .	9
2.4. Observadores de estado. . . . .	10
2.4.1. Observabilidad de sistemas no lineales. . . . .	10
2.4.2. Observador de alta ganancia (OAG). . . . .	12
2.5. Función de Mittag-Leffler. . . . .	13
2.6. Algoritmos de optimización genéticos. . . . .	14
2.6.1. Terminología del algoritmo genético. . . . .	14
2.6.2. Funcionamiento del algoritmo genético. . . . .	15
<b>3. Estado del arte</b>	<b>16</b>
<b>4. Simulación de la hidrodinámica de un ducto</b>	<b>18</b>
4.1. Caso de estudio. . . . .	18
4.2. Simulación del modelo finito clásico. . . . .	18
4.2.1. Resultados obtenidos. . . . .	19
4.3. Simulación modelo finito conformable. . . . .	25
4.3.1. Resultados obtenidos. . . . .	25
4.4. Simulación del modelo finito fraccionario. . . . .	29
4.4.1. Resultados obtenidos. . . . .	30
4.5. Análisis de error de modelado. . . . .	34



<b>5. Diseño del algoritmo de diagnóstico</b>	<b>39</b>
5.1. Algoritmo de diagnóstico clásico. . . . .	39
5.1.1. Resultados obtenidos. . . . .	41
5.2. Algoritmo de diagnóstico conformable. . . . .	43
5.2.1. Resultados obtenidos. . . . .	43
5.3. Algoritmo de diagnóstico fraccionario. . . . .	46
5.3.1. Resultados obtenidos. . . . .	46
<b>6. Aproximación del factor de fricción</b>	<b>49</b>
6.1. Resultados obtenidos. . . . .	50
<b>7. Conclusiones</b>	<b>52</b>
7.1. Aportaciones. . . . .	52
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>
<b>Anexo A: Funciones de interpolación de <math>\hat{f}</math></b>	<b>57</b>

---

# Índice de tablas

---

2.1. Parámetros y variables físicas del modelo del fluido. . . . .	6
4.1. Parámetros del modelo finito. . . . .	18
4.2. Parámetros de simulación del modelo finito. . . . .	19
4.3. Condiciones de frontera establecidas en cada simulación. . . . .	19
5.1. Características del ducto. . . . .	41
5.2. Prámetros de la fuga. . . . .	41
6.1. Cuantificación del error. . . . .	51

---

# Índice de figuras

---

2.1.	Esquema de la discretización del ducto mediante el MDF. . . . .	8
2.2.	Principio de operación de un observador de estado. . . . .	11
4.1.	<b>Simulación I.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	20
4.2.	<b>Simulación I.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_1(t)$ . . .	20
4.3.	<b>Simulación I.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	20
4.4.	<b>Simulación I.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_{31}(t)$ . .	20
4.5.	<b>Simulación I.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . . .	21
4.6.	<b>Simulación II.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	21
4.7.	<b>Simulación II.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_1(t)$ . .	21
4.8.	<b>Simulación II.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	21
4.9.	<b>Simulación II.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_{31}(t)$ . .	22
4.10.	<b>Simulación II.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	22
4.11.	<b>Simulación III.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	22
4.12.	<b>Simulación III.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_1(t)$ . .	22
4.13.	<b>Simulación III.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	23
4.14.	<b>Simulación III.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_{31}(t)$ . .	23
4.15.	<b>Simulación III.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	23
4.16.	<b>Simulación IV.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	23
4.17.	<b>Simulación IV.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_1(t)$ . .	24
4.18.	<b>Simulación IV.</b> Flujo en la sección 11 del ducto. . . . .	24
4.19.	<b>Simulación IV.</b> Variación del coeficiente de fricción en función del flujo $Q_{11}(t)$ . .	24
4.20.	<b>Simulación IV.</b> Comportamiento del flujo a largo del ducto. . . . .	24
4.21.	<b>Simulación IV.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	25
4.22.	<b>Simulación I.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	26
4.23.	<b>Simulación I.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	26
4.24.	<b>Simulación I.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . . .	27
4.25.	<b>Simulación II.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	27
4.26.	<b>Simulación II.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	27
4.27.	<b>Simulación II.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	27
4.28.	<b>Simulación III.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	28
4.29.	<b>Simulación III.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	28
4.30.	<b>Simulación III.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	28
4.31.	<b>Simulación IV.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	28
4.32.	<b>Simulación IV.</b> Flujo en la sección 11 del ducto. . . . .	29
4.33.	<b>Simulación IV.</b> Comportamiento del flujo a largo del ducto. . . . .	29
4.34.	<b>Simulación IV.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	29
4.37.	<b>Simulación I.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . . .	31
4.38.	<b>Simulación II.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	31
4.35.	<b>Simulación I.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	31

4.36. <b>Simulación I.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	31
4.39. <b>Simulación II.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	32
4.40. <b>Simulación II.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	32
4.41. <b>Simulación III.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	32
4.42. <b>Simulación III.</b> Flujo en la sección 31 del ducto. . . . .	32
4.43. <b>Simulación III.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	33
4.44. <b>Simulación IV.</b> Flujo en la sección 1 del ducto. . . . .	33
4.45. <b>Simulación IV.</b> Flujo en la sección 11 del ducto. . . . .	33
4.46. <b>Simulación IV.</b> Comportamiento del flujo a largo del ducto. . . . .	33
4.47. <b>Simulación IV.</b> Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto. . .	34
4.48. <b>Simulación II.</b> Error MSE entre las cargas de presión $H_i$ del modelo finito clásico y las cargas de presión $H_i$ del modelo finito conformable. . . . .	35
4.49. <b>Simulación II.</b> Error MSE entre los flujos $Q_i$ del modelo finito clásico y los flujos $Q_i$ del modelo finito conformable. . . . .	35
4.50. <b>Simulación III.</b> Error MSE entre las cargas de presión $H_i$ del modelo finito clásico y las cargas de presión $H_i$ del modelo finito conformable. . . . .	35
4.51. <b>Simulación III.</b> Error MSE entre los flujos $Q_i$ del modelo finito clásico y los flujos $Q_i$ del modelo finito conformable. . . . .	36
4.52. <b>Simulación IV.</b> Error MSE entre las cargas de presión $H_i$ del modelo finito clásico y las cargas de presión $H_i$ del modelo finito conformable. . . . .	36
4.53. <b>Simulación IV.</b> Error MSE entre los flujos $Q_i$ del modelo finito clásico y los flujos $Q_i$ del modelo finito conformable. . . . .	36
4.54. <b>Simulación II.</b> Error MSE entre las cargas de presión $H_i$ del modelo finito clásico y las cargas de presión $H_i$ del modelo finito fraccionario. . . . .	37
4.55. <b>Simulación II.</b> Error MSE entre los flujos $Q_i$ del modelo finito clásico y los flujos $Q_i$ del modelo finito fraccionario. . . . .	37
4.56. <b>Simulación III.</b> Error MSE entre las cargas de presión $H_i$ del modelo finito clásico y las cargas de presión $H_i$ del modelo finito fraccionario. . . . .	37
4.57. <b>Simulación III.</b> Error MSE entre los flujos $Q_i$ del modelo finito clásico y los flujos $Q_i$ del modelo finito fraccionario. . . . .	38
4.58. <b>Simulación IV.</b> Error MSE entre las cargas de presión $H_i$ del modelo finito clásico y las cargas de presión $H_i$ del modelo finito fraccionario. . . . .	38
4.59. <b>Simulación IV.</b> Error MSE entre los flujos $Q_i$ del modelo finito clásico y los flujos $Q_i$ del modelo finito fraccionario. . . . .	38
5.1. <b>Caso I.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	41
5.2. <b>Caso I.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	42
5.3. <b>Caso II.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	42
5.4. <b>Caso II.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	42
5.5. <b>Caso III.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	42
5.6. <b>Caso III.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	43
5.7. <b>Caso I.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	44
5.8. <b>Caso II.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	44
5.9. <b>Caso I.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	44
5.10. <b>Caso II.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	45
5.11. <b>Caso III.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	45
5.12. <b>Caso III.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	45
5.13. <b>Caso I.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	46
5.14. <b>Caso I.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	47

5.15. <b>Caso II.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	47
5.16. <b>Caso II.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	47
5.17. <b>Caso III.</b> Comportamiento del flujo en el ducto. . . . .	47
5.18. <b>Caso III.</b> Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto. . . . .	48
6.1. Diagrama de Moody. . . . .	49
6.2. Aproximación del coeficiente de fricción mediante la función de Mittag-Leffler. . . . .	51

---

# Nomenclatura

---

## Letras mayúsculas

$A_f$	Área del orificio de la fuga en el ducto
$A_r$	Área de sección transversal del ducto
$C_f$	Coefficiente de descarga
$D$	Diámetro del ducto
$E_\alpha(\cdot)$	Función de Mittag-Leffler uniparamétrica
$E_{\alpha,\beta}(\cdot)$	Función de Mittag-Leffler de dos parámetros
$E_{\alpha,\beta}^\gamma(\cdot)$	Función de Mittag-Leffler de tres parámetros
$H$	Carga de presión
$J$	Función costo
$L$	Longitud del ducto
$N$	Número de secciones
$Q$	Flujo
$Q_i$	Flujo en la sección espacial discretizada $i$
$Qf_i$	Flujo de extracción
$Y_i$	Datos de simulación del modelo finito clásico
$\hat{Y}_i$	Datos de simulación del modelo finito conformable/fraccionario

## Letras minúsculas

$b$	Velocidad de onda
$f$	Factor de fricción
$\hat{f}$	Aproximación del factor de fricción
$g$	Constante de aceleración de gravedad
$t$	Coordenada del tiempo
$x$	Coordenada del espacio

## Letras griegas

$\alpha$	Orden de las derivadas conformables/fraccionarias
$\Delta H_i$	Aproximación de la carga de presión por diferencias finitas
$\Delta Q_i$	Aproximación del flujo por diferencias finitas
$\Delta x_f$	Posición de la fuga en el ducto
$\Delta x_i$	Sección espacial discretizada
$\varepsilon$	Rugosidad absoluta
$\varepsilon_r$	Rugosidad relativa
$\mu$	Viscosidad del fluido
$\mu(\cdot)$	Función que considera el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach
$\rho$	Densidad del fluido
$\sigma_f$	Coefficiente de la fuga

## Subíndices

$f$	Denota relación con una fuga en el ducto
$i$	Número de sección espacial discretizada/ $i$ -ésimo elemento de un vector o matriz
$j$	$j$ -ésimo elemento de un vector o matriz

## Marcas diacríticas

$\cdot$	Derivada respecto al tiempo
$\hat{\phantom{x}}$	Estimado

## Caracteres especiales

$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales

## Abreviaturas

AC	Algoritmo clásico
AG	Algoritmo genético
ABC	Atangana-Baleanu en el sentido de Liouville-Caputo
CF	Cálculo fraccionario
CFC	Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo
LC	Liouville-Caputo
MC	Método de características
MCO	Método de colocación ortogonal
MDF	Método de diferencias finitas
MG	Método de Garlekin
MPC	Modelo de parámetros concentrados
MRE	Error relativo promedio
MSE	Error medio cuadrático
OAG	Observador de alta ganancia
RL	Riemann-Liouville
RNA	Red neuronal artificial

# Capítulo 1

---

## Introducción

---

Las redes de distribución de fluidos son sistemas de gran interés, puesto que en ellas se transporta: agua potable, gases, hidrocarburos o fluidos de alto valor económico que son utilizados para procesos industriales. Estas redes pueden llegar a ser sistemas complejos por su gran escala, tal es el caso de los ductos que transportan derivados del petróleo a grandes distancias. En nuestro país se cuenta con aproximadamente 70,000 kilómetros de ductos.

La gran mayoría de los sistemas de ductos están expuestos a sufrir fallas, ya sea por daños de fabricación, envejecimiento, falta de mantenimiento, corrosión en la pared, por bloqueos parciales físicos (componentes) o químicos (debido a deposición de minerales), grietas, tomas clandestinas, una mala instalación, por fenómenos naturales, entre otros factores. Por estas razones se pueden presentar fugas. Estos eventos deben identificarse y localizarse a tiempo para evitar: pérdidas económicas y humanas, o daños ecológicos, cuando el fluido derramado es tóxico. Por ende, los sistemas de distribución de fluidos deben estar en constante vigilancia mediante métodos avanzados de automatización, tanto con supervisión y monitoreo de procesos, como con detección y diagnóstico de fallas, para garantizar la seguridad y una operación eficiente.

Los algoritmos de diagnóstico pueden utilizarse usando información analítica sobre el proceso, basándose en modelos matemáticos del sistema. Debido a la importancia de estos modelos, es primordial que los parámetros del modelo matemático del sistema estén caracterizados para evitar falsas alarmas o información errónea del sistema. Debido a que los sistemas dinámicos de orden fraccionario son no conservativos e involucran operadores no locales, proporcionan nueva información sobre su comportamiento, adicionalmente, se ha observado que fenómenos físicos relacionados con electromagnetismo, propagación de energía en sistemas disipativos, estrés térmico, viscoelasticidad y termoelasticidad, son descritos satisfactoriamente mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

El presente trabajo de tesis está enfocado en la generalización de un modelo matemático que describa la dinámica del fluido en un ducto hidráulico mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, el modelo generalizado es apropiado para el diseño de algoritmos de diagnóstico de fugas como caso de estudio.

### 1.1. Antecedentes.

El modelado matemático de un ducto hidráulico, para la concepción de algoritmos de diagnóstico de fugas, es un tema que ha llamado la atención de investigadores de diversas áreas, quienes han propuesto diversas metodologías.

En [9], se presenta un modelo general del flujo del fluido en un ducto hidráulico sin fugas o



extracciones, en el cual se asume que cambios convectivos en la velocidad de onda son despreciables para tuberías grandes, y que la densidad del líquido es constante; dicho modelo se compone de las ecuaciones de momento y continuidad mostradas a continuación:

$$\begin{aligned} b^2 \cdot \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + gA_r \cdot \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + gA_r \cdot \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \mu(Q) \cdot Q(x,t) |Q(x,t)| &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $t$  y  $x$  son coordenadas del tiempo [s] y espacio [m], respectivamente,  $H(x,t)$  la carga de presión [m],  $Q(x,t)$  el flujo [ $m/s^3$ ],  $b$  es la velocidad de onda en el fluido [ $m/s$ ],  $g$  la constante de aceleración de la gravedad [ $m/s^2$ ],  $A_r$  el área de sección transversal del ducto [ $m^2$ ] y  $\mu(Q)$  es una función que considera el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach.

Hasta el día de hoy no existe una solución analítica general para las ecuaciones que conforman el sistema (1.1), por lo que es necesario utilizar métodos numéricos para aproximar la solución.

Entre los métodos más empleados para resolver las ecuaciones de continuidad y momento, se encuentra el método de características (MC), el cual es más general y efectivo respecto a otros métodos numéricos. El MC se ha utilizado especialmente en la simulación de sistemas descritos por ecuaciones parabólicas e hiperbólicas, entre sus ventajas destacan la facilidad de programación y bajo costo computacional [9]. Sin embargo, la solución obtenida mediante éste método, es un modelo que presenta una estructura muy compleja para ser utilizado en el diseño de algoritmos de diagnóstico basados en modelos.

En [10], los autores presentan un modelo formulado mediante el método de colocación ortogonal (MCO), dicho modelo representa adecuadamente los efectos de posibles fugas en un ducto, y en consecuencia, se demuestra su utilidad para la detección de dichos eventos. Este método es un caso especial de los denominados, métodos de residuos ponderados, comúnmente empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Finalmente, en [11, 12, 13], se formularon modelos del flujo de fluido de un ducto basados en el método de diferencias finitas (MDF) para resolver las ecuaciones del sistema (1.1), este método consiste en discretizar el sistema en el espacio, para obtener una representación en espacio de estados no lineal, ideal para el diseño de algoritmos de diagnóstico basados en modelos analíticos del sistema.

## 1.2. Planteamiento del problema.

En la actualidad los ductos son ampliamente usados para transportar cualquier tipo de fluido, el resultado son complejos sistemas de distribución compuestos por miles de kilómetros de tuberías, a su vez, constituidas por ductos individuales unidos mediante bridas. Dichas tuberías están expuestas a condiciones climáticas cambiantes y adicionalmente, en el caso de estar bajo tierra, se encuentran en constante tensión, por lo que es común que se produzcan fugas en la red, en las conexiones y accesorios, a causa del deterioramiento de dichas estructuras, se producen agujeros causados por la corrosión, aumentos de presión no predecibles, mantenimientos inadecuados e incluso extracciones ilícitas.

Estos eventos son responsables de una pérdida importante del fluido transportado; en consecuencia los costos de operación aumentan. Así mismo, la calidad del fluido corre el riesgo

de degradarse al pasar por un ducto con filtraciones, debido a la entrada de agentes externos. Tratándose de sistemas de distribución de agua, los derrames pueden suponer un riesgo para los cimientos de diversas construcciones, perjudicando además, caminos y carreteras. Adicionalmente, la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA) reporta que persisten mermas importantes por pérdida de agua en las redes de distribución entre el 30 y 50 por ciento, principalmente, a causa de la antigüedad de las tuberías, falta de control de la presión y mala calidad de los materiales empleados. Se han realizado estudios para conocer, de forma precisa, cual es el impacto de las fugas en la calidad del agua, en términos de costos y energía [14]. No obstante, si el fluido contenido en los ductos es inflamable o tóxico, las fugas pueden ocasionar graves alteraciones al medio ambiente que comprometen la seguridad de la población y provocan pérdidas humanas, tal es el caso de la fuga de gas de Bhopal en la India en 1986, que produjo en el momento del accidente cerca de diez mil muertos y más de veinte mil en los siguientes veinte años.

En diversos informes se ha reportado la existencia de fugas y múltiples fallas, debido a tomas clandestinas o fenómenos naturales, como temblores y huracanes, y en general, a causa de toda actividad que implique excavación, pues se producen daños en múltiples puntos de las redes de distribución.

Como consecuencia, tanto por razones económicas, como sociales, es necesario desarrollar algoritmos de diagnóstico que permitan localizar e identificar estos eventos a tiempo. Una opción para llevar a cabo dicha tarea, es el uso de modelos analíticos del sistema como base de diseño, por lo que surge la importancia de obtener modelos que describan con precisión la hidrodinámica en un ducto.

### 1.3. Objetivo general.

Obtener el modelo de un ducto hidráulico empleando derivadas temporales de orden fraccionario, que sea apropiado para el diseño de algoritmos de diagnóstico basados en modelos.

#### 1.3.1. Objetivos específicos.

- Expresar las ecuaciones espacio-temporales de continuidad y momento de orden generalizado, que describen la hidrodinámica de un ducto en el espacio y el tiempo.
- Encontrar una solución aproximada, mediante un método numérico, de las ecuaciones diferenciales fraccionarias que describen la dinámica del flujo de fluido en un ducto.
- Comparar las respuestas del modelo fraccionario con las respuestas del modelo de orden entero obtenido mediante la simulación por diferencias finitas, y hacer un análisis de error de modelado.

### 1.4. Metas.

- Implementar la solución numérica de las ecuaciones clásicas de continuidad y momento.
- Implementar la solución numérica de las ecuaciones conformables y generalizadas de continuidad y momento.
- Diseñar un algoritmo de diagnóstico basado en observadores de estado clásicos.
- Diseñar un algoritmo de diagnóstico basado en observadores de estado conformables y fraccionarios.

- Formular una aproximación del coeficiente de fricción viscosa en un ducto hidráulico mediante la Función de Mittag-Leffler.

### 1.5. Justificación.

Como se mencionó en la sección 1.1 del presente documento, la hidrodinámica de un ducto horizontal cerrado, sin tomas laterales, es descrita mediante la ecuación (1.1), para la cual, no existe, hasta el día de hoy, una solución analítica, sin embargo, es posible utilizar métodos numéricos para aproximar una solución. Los métodos más empleados para este problema son el método de Garlekin (MG), el MC, el MDF y el MCO.

Cada una de las soluciones provistas por estos métodos es un modelo que naturalmente tiene ventajas y desventajas. Por ejemplo, el modelo obtenido mediante el MC es muy complejo para ser utilizado en el diseño de algoritmos de detección de fallas basados en modelos, no obstante, el modelo obtenido mediante el MDF es apropiado, ya que puede representarse en espacio de estados, lo que es muy conveniente para diseñar algoritmos de diagnóstico.

Por otro lado, surge una problemática importante relacionada con el coeficiente de fricción, un parámetro presente en la ecuación de momento del sistema (1.1). Dicho parámetro puede ser calculado mediante la ecuación de Colebrook [15], la cual es considerada la ecuación más exacta para este propósito; no obstante, tienes dos desventajas importantes:

- Es implícita (ver sección 2.2), por lo que se tiene que resolver mediante un método numérico, lo cual supone un costo computacional mayor.
- Depende de la rugosidad relativa, la cual varía en el tiempo y el espacio en una tubería y no se puede medir fácilmente.

En el presente trabajo se propone, como primer caso de estudio, modelar la dinámica del fluido en un ducto hidráulico mediante el uso de ecuaciones diferenciales conformables y fraccionarias, estableciendo el coeficiente fricción como un parámetro constante, y comparar los resultados obtenidos (mediante un análisis de error de modelado), con el modelo compuesto por ecuaciones diferenciales de orden entero, en el cual, el coeficiente de fricción se considerará como un parámetro que es función del flujo.

En el segundo caso de estudio, como se estableció en la sección 1.4, se propone obtener una aproximación explícita del coeficiente de fricción, mediante la función de Mittag-Leffler, lo cual supondrá la obtención de valores precisos de dicho parámetro, respecto a los valores que proporciona la ecuación de Colebrook. Esto debido a que la función de Mittag-Leffler generaliza a la función exponencial.

### 1.6. Alcances.

Se establecerá un caso de estudio, en el cual se definirán puntualmente cada uno de los parámetros físicos de los que se componen las ecuaciones de continuidad y momento, las cuales gobiernan la hidrodinámica del fluido en el ducto. Posteriormente, se aproximará una solución a dichas ecuaciones, mediante el MDF, obteniendo tres modelos de parámetros concentrados, compuestos por ecuaciones diferenciales de orden entero, conformables y de orden fraccionario; respectivamente, para finalmente, comparar las respuestas de dichos modelos, mediante un análisis de error de modelado, con el objetivo de demostrar las ventajas que supone el uso del cálculo

de orden arbitrario en éste caso de estudio y, posteriormente, demostrar la utilidad de dichos modelos en el diseño de algoritmos de diagnóstico, mediante la síntesis de observadores de alta ganancia para la estimación del coeficiente y posición de una fuga en el ducto.

Adicionalmente, la aproximación explícita del coeficiente de fricción, obtenida mediante la función de Mittag-Leffler, se validará con los resultados que proporciona la ecuación de Colebrook en el cálculo de este parámetro.

### 1.7. Hipótesis.

La hipótesis de este trabajo de tesis se compone de dos afirmaciones:

- Es posible obtener un modelo de orden fraccionario, que describa con precisión la hidrodinámica del fluido en un ducto y que sea apropiado para el diseño de algoritmos de diagnóstico, estableciendo el coeficiente de fricción como un término invariante en el tiempo.
- Es posible aproximar el coeficiente de fricción, mediante una ecuación explícita, formulada a partir de una o más funciones de Mittag-Leffler, que proporcione precisión, y demande un bajo costo computacional para calcular dicho parámetro.

### 1.8. Organización del documento.

En el Capítulo 2 se proporcionan conceptos y definiciones fundamentales relacionadas con la hidrodinámica de un ducto y el método de diferencias finitas aplicado a las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan dicha dinámica. Además, se presentan algunas definiciones importantes del cálculo conformable y del cálculo fraccionario, específicamente, las definiciones de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, Liouville-Caputo, Caputo-Fabrizio, y Atangana-Baleanu. Así mismo, se brindan conceptos básicos relacionados con la observabilidad de sistemas no lineales para la concepción de observadores de estado de alta ganancia. Finalmente, se describe el funcionamiento de los algoritmos de optimización genéticos.

En el Capítulo 3 se presenta una revisión del estado del arte, donde se describen brevemente investigaciones relacionadas con esta tesis, es decir, trabajos que abordan el modelado del flujo de fluido en un ducto para la síntesis de algoritmos de diagnóstico; trabajos que presentan el diseño de observadores de estado de orden fraccionario y algunas investigaciones de relevancia relacionadas con el cálculo del coeficiente de fricción viscosa en un ducto, mediante aproximaciones explícitas de la ecuación de Colebrook.

En los Capítulos 4, 5 y 6 se muestran los resultados obtenidos a partir de la simulación de los modelos de parámetros concentrados obtenidos en esta investigación; el diseño de algoritmos de diagnóstico para la estimación de parámetros relacionados con una fuga en el ducto y la aproximación del coeficiente de fricción viscosa mediante la función de Mittag-Leffler, respectivamente.

Finalmente, en el Capítulo 7 se proporcionan las conclusiones generales formuladas a partir de los resultados obtenidos y se mencionan las aportaciones de este trabajo.

# Capítulo 2

---

## Marco teórico

---

En este capítulo se presentan las definiciones y conceptos que brindan el sustento teórico de este trabajo de investigación.

### 2.1. Hidrodinámica del ducto: Ecuaciones de golpe de ariete.

El modelo clásico que describe la dinámica del fluido en un ducto hidráulico es expresado mediante las ecuaciones denominadas de golpe de ariete, las cuales son dos ecuaciones diferenciales parciales, no lineales e hiperbólicas que representan la *continuidad* y *movimiento* del fluido en el ducto.

Asumiendo que la distribución de velocidad es uniforme, que el flujo es unidimensional, que la densidad del líquido y área son constantes, y que se trata de un ducto horizontal cerrado, sin tomas laterales, dichas ecuaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \frac{b^2}{gA_r} \cdot \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{A_r} \cdot \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} - \frac{f(Q) \cdot Q(x, t) |Q(x, t)|}{2DA_r^2} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Con  $(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$ , como coordenadas del el espacio [m] y el tiempo [s]. Los parámetros que intervienen en el conjunto conformado por la ecuación (2.1) se enlistan en la Tabla (2.1).

Símbolo	Parámetro	Unidad
$g$	Gravedad	$[m/s^2]$
$b$	Velocidad de Onda	$[m/s]$
$D$	Diámetro	$[m]$
$L$	Longitud	$[m]$
$A_r$	Área Transversal	$[m^2]$
$f$	Factor de Fricción	-
$Q(x, t)$	Flujo	$[m^3/s]$
$H(x, t)$	Carga de Presión	$[m]$

Tabla 2.1: Parámetros y variables físicas del modelo del fluido.

El comportamiento dinámico del fluido se especifica al considerar las condiciones iniciales del flujo  $Q(x, 0)$  y la presión  $H(x, 0)$  para todo el tramo, y las condiciones de frontera en los extremos del ducto.

### 2.1.1. Modelado de la fricción.

El coeficiente de fricción  $f$ , depende del número de Reynolds  $Re$  y la rugosidad relativa de la tubería  $\varepsilon_r$ . La ecuación implícita de Colebrook describe el valor de este coeficiente, para una tubería de diámetro  $D$ , mediante [15]:

$$\frac{1}{\sqrt{f(Q)}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{\text{Re}(Q) \sqrt{f(Q)}} + \frac{\varepsilon_r}{3.7} \right), \quad (2.2)$$

donde el número de Reynolds puede ser calculado mediante:

$$\text{Re}(Q) = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D \mu}, \quad (2.3)$$

donde  $\rho$ , es la densidad del fluido y  $\mu$ , viscosidad del fluido. Sin embargo, resulta importante mencionar que al tratarse de una ecuación implícita, ésta no es fácil de implementar, por lo tanto, una aproximación explícita puede ser utilizada, dicha aproximación es la ecuación Swamee-Jain[16]:

$$f(Q) = 1.325 \left\{ \ln \left[ 0.27 (\varepsilon_r) + 5.74 \left( \frac{1}{\text{Re}(Q)} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2}. \quad (2.4)$$

Esta ecuación es valida para  $10^{-8} < \varepsilon_r < 0.01$  y  $5000 < \text{Re} < 10^8$ .

### 2.1.2. Discretización en diferencias finitas.

Existen diversas formas de discretización en diferencias finitas. En el presente trabajo se propone emplear una discretización explícita [9]. La aproximación de las derivadas parciales por diferencias finitas de primer orden esta dada por [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x,t)}{\partial x} &\approx \frac{\Delta H_i(t)}{\Delta x_i} = \frac{H_i(t) - H_{i+1}(t)}{\Delta x_i}, \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} &\approx \frac{\Delta Q_i(t)}{\Delta x_i} = \frac{Q_i(t) - Q_{i+1}(t)}{\Delta x_i}, \\ \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} &\cong \frac{\partial H_i(t)}{\partial t} := \dot{H}_i, \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} &\cong \frac{\partial Q_i(t)}{\partial t} := \dot{Q}_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $i$  representa la sección espacial discretizada. La notación  $H_i := H_i(t) \approx H(x,t)$  representa el cabezal de presión aguas arriba de la sección  $i$ , y  $Q_i := Q_i(t) \approx Q(x,t)$ , el flujo en la sección  $i$ . Para llevar a cabo dicha discretización, el ducto es dividido en  $N$  secciones, como se muestra en la Figura 2.1. En cuanto a las condiciones de frontera, éstas pueden ser elegidas entre las siguientes: presión de entrada  $H_{in} := H(0,t)$ , presión de salida  $H_{out} := H(L,t)$ , flujo de entrada  $Q_{in} := Q(0,t)$  y flujo de salida  $Q_{out} := Q(L,t)$ . En este trabajo se seleccionaron  $H_{in}$  y  $H_{out}$ .

Por lo tanto, el modelo finito resultante es un conjunto de  $M$  ecuaciones diferenciales ordinarias, donde  $M = 2N - 1$ , con condiciones de frontera  $H_{in} = H_1$  y  $H_{out} = H_{N+1}$ .

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= a_1 \left( \frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i} \right) + \mu(Q_i) \cdot Q_i |Q_i|; \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ \dot{H}_{i+1} &= a_2 \left( \frac{Q_i - Q_{i+1}}{\Delta x_i} \right); \quad \forall i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.6)$$

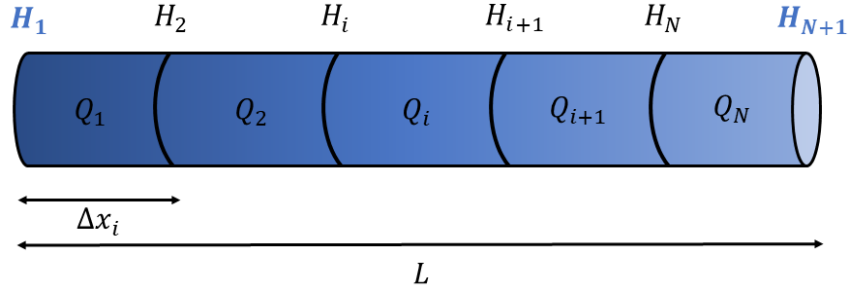


Figura 2.1: Esquema de la discretización del ducto mediante el MDF.

donde  $a_1 = gA_r$ ,  $a_2 = \frac{b^2}{gA_r}$  y  $\mu(Q_i) = -\frac{f(Q_i)}{2DA_r}$ . Por otro lado, para considerar en el sistema (2.6) el efecto de una fuga en una determinada sección  $i$  del ducto, se debe incluir el flujo de extracción:

$$Qf_i = \sigma_f \cdot \sqrt{H_i}, \quad (2.7)$$

donde  $\sigma_f = A_f C_f$ , es el coeficiente de la fuga, donde  $A_f$  es el área del orificio de la fuga [ $m^2$ ] y  $C_f$  el coeficiente de descarga [-].

Cuando se presenta una extracción  $Qf_i$  entre las secciones  $\Delta x_i$  y  $\Delta x_{i+1}$ , la conservación de la masa se expresa como:  $Q_i - Q_{i+1} - Qf_i = 0$ . Así pues, en cada punto de fuga, la relación de los flujos entre secciones:

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta x_i} = \frac{Q_i - Q_{i+1}}{\Delta x_i},$$

se reemplaza por:

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta x_i} = \frac{Q_i - Q_{i+1} - Qf_i}{\Delta x_i}.$$

De esta manera, la dinámica del flujo en un ducto con fugas se describe mediante:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= a_1 \left( \frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i} \right) + \mu(Q_i) \cdot Q_i |Q_i|; \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ \dot{H}_{i+1} &= a_2 \left( \frac{Q_i - Q_{i+1} - Qf_i}{\Delta x_i} \right); \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para el caso de una discretización espacial uniforme  $\Delta x_i = \Delta x$ . Los conjuntos de ecuaciones (2.6) y (2.8) son válidos a lo largo de la tubería en  $0 < x < L$  con  $H(x, 0)$  y  $Q(x, 0)$  como condiciones iniciales.

## 2.2. Cálculo conformable.

En [18], Khalil presenta una nueva definición de derivada e integral de orden arbitrario, la derivada conformable, ésta definición se puede considerar como una extensión natural de la derivada clásica y por ende satisface todas las propiedades de las derivadas convencionales. La derivada conformable se describe en la **Definición 2.2.1**. La definición de la **integral conformable** se presenta en la **Definición 2.2.2**.

**Definición 2.2.1.** Dada una función  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces la derivada conformable de  $f$ , de orden  $\alpha$ , es definida por:

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{t \rightarrow \varepsilon} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad (2.9)$$

para todo  $t > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Definición 2.2.2.** Dada una función  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces la integral conformable de  $f$ , de orden  $\alpha$ , es definida por:

$$I_\alpha^a(f)(t) = I_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} dt, \quad (2.10)$$

para todo  $t > 0$ ,  $a \geq 0$  y  $\alpha \in (0, 1)$ .

### 2.3. Cálculo fraccionario.

El cálculo fraccionario (CF) generaliza el concepto del operador de derivada de orden entero, el orden de un operador fraccionario puede ser real o complejo; dicha formulación matemática fue desarrollada por Fourier, Liouville, Abell, Riemann, Lacroix, Grünwald, Riesz, entre otros. Los sistemas dinámicos de orden fraccionario son no conservativos e involucran operadores no locales, que producen nueva información sobre su comportamiento, diversos problemas de la física, electromagnetismo, electroquímica, difusión y teoría general de transporte pueden ser resueltos mediante el enfoque del CF, se ha demostrado que el modelado de orden fraccionario es particularmente útil para representar sistemas donde los efectos de memoria tienen un importante papel, esta cualidad es la ventaja más significativa. A continuación, se presentan algunas definiciones básicas de operadores de derivada de orden fraccionario con kernel de potencia, exponencial y de Mittag-Leffler.

**Definición 2.3.1.** La derivada fraccionaria Riemann-Liouville (RL) se define como:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t -\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2.11)$$

donde  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}^{RL}D_t^\alpha$  es la derivada de RL respecto a  $t$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es el orden de la derivada fraccionaria y  $\Gamma(\cdot)$  representa la función gamma.

**Definición 2.3.2.** La derivada fraccionaria de Liouville-Caputo (LC) se define como:

$${}^{LC}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2.12)$$

donde  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}^{LC}D_t^\alpha$  es la derivada de LC respecto a  $t$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es el orden de la derivada fraccionaria y  $\Gamma(\cdot)$  representa la función gamma.

**Definición 2.3.3.** La derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio en el sentido de Liouville-Caputo (CFC) se define como:

$${}^{CFC}D_t^\alpha x(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \dot{f}(\tau) \exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right] d\tau, \quad (2.13)$$

donde  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}^{CFC}D_t^\alpha$  es la derivada de CFC respecto a  $t$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es el orden de la derivada fraccionaria y  $M(\alpha)$  es una función de normalización, tal que  $M(0) = M(1) = 1$ .



**Definición 2.3.4.** La derivada fraccionaria de Atangana-Baleanu en el sentido de Liouville-Caputo (ABC) se define como:

$${}_0^{ABC}D_t^\alpha x(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \dot{f}(\tau) E_\alpha \left[ -\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad (2.14)$$

donde  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}_0^{ABC}D_t^\alpha$  es la derivada de ABC respecto a  $t$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es el orden de la derivada fraccionaria,  $B(\alpha)$  es una función de normalización, tal que  $B(0) = B(1) = 1$  y  $E_\alpha(\cdot)$  es la función de Mittag-Leffler uniparamétrica.

Cada una de las definiciones presentadas, tiene ciertas ventajas y desventajas, por ejemplo, la definición de Riemann-Liouville engloba condiciones iniciales físicamente inaceptables (condiciones iniciales de orden fraccionario); contrariamente, para la representación de Liouville-Caputo, las condiciones iniciales son expresadas en términos de derivadas de orden entero, teniendo un sentido físico directo, sin embargo, ambas definiciones tienen la desventaja de que su kernel presenta una singularidad cuando  $t = \tau$ , dicho kernel incluye los efectos de memoria, por lo tanto, ambas definiciones no pueden describir con precisión el efecto completo de la memoria en un determinado sistema.

Debido a este inconveniente, Michele Caputo y Mauro Fabrizio, presentan en [19], una definición sin kernel singular, esta derivada posee propiedades muy interesantes, por ejemplo, la posibilidad de describir fluctuaciones y estructuras con diferentes escalas. Sin embargo, ésta definición posee un kernel local, para resolver este problema, Atangana y Baleanu proponen en [20], una definición basada en la función generalizada de Mittag-Leffler, este kernel es no local y no singular, y permite representar comportamientos descritos por la ley de potencia y la ley exponencial, preservando de esta forma, los beneficios de los operadores de Riemann-Liouville, Liouville-Caputo y Caputo-Fabrizio.

Adicionalmente, para cada una de las definiciones mencionadas, si  $\alpha = 1$ , se recupera la definición clásica del operador de derivada.

## 2.4. Observadores de estado.

En la literatura de control, el problema general de estimar o reconstruir las variables de estado de un sistema, recibe el nombre de *observación*. Un *observador* es un sistema dinámico capaz de reconstruir o estimar el valor de los estados de un proceso, a partir de las entradas  $u(t)$  y las salidas disponibles  $y(t)$ .

En la Figura 2.2, se muestra un diagrama a bloques que ilustra el principio de operación de un observador. En dicha figura,  $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ , representa el error de estimación, es decir, la diferencia entre la salida del proceso  $y(t)$  y la salida estimada  $\hat{y}(t)$ . El objetivo del observador es hacer converger el error  $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$  a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  (en la práctica se desea que el error  $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$  sea mínimo un en tiempo lo suficientemente corto).

### 2.4.1. Observabilidad de sistemas no lineales.

En esta sección se presentan algunas definiciones fundamentales relacionadas con la observabilidad de sistemas no lineales de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t), \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \quad (2.15)$$

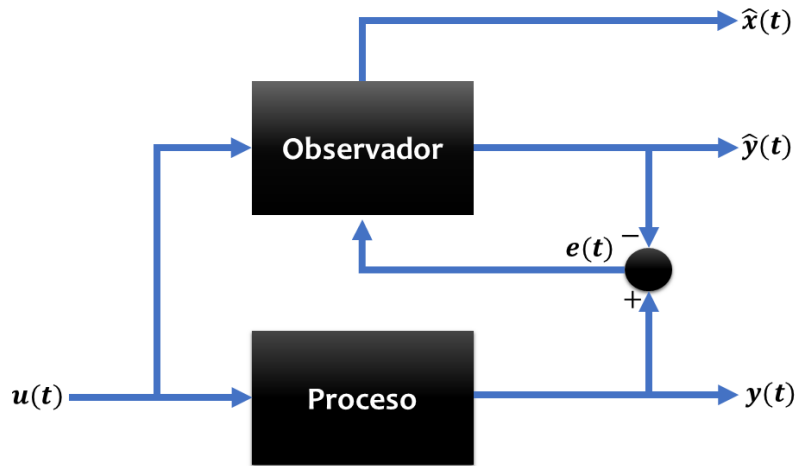


Figura 2.2: Principio de operación de un observador de estado.

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$ ,  $f(x(t)) \in \mathbb{R}^n$  y  $g(x(t)) \in \mathbb{R}^n$ .

Como se mencionó en la sección 2.4, en el diseño de observadores de estado, se desea que el error  $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$  converja a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ , sin embargo, para que lo anterior suceda es necesario que el sistema bajo estudio cumpla con la propiedad de observabilidad. A continuación se presenta una definición de observabilidad dada en [21]:

**Definición 2.4.1.** El estado  $x(t)$  es observable si dada cualquier entrada  $u(t)$  existe un tiempo finito  $t_f \leq t_o$ , tal que el conocimiento de  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  para  $t_o \leq t \leq t_f$ , son suficientes para determinar  $x(t)$ .

A diferencia de los sistemas lineales en donde la observabilidad es una propiedad global, que no depende de valores específicos de  $x(t)$ ,  $u(t)$  o  $y(t)$ , en los sistemas no lineales, esta propiedad si depende de los valores de  $u(t)$ . A continuación, se presentan algunas definiciones que profundizan en el concepto de observabilidad.

**Definición 2.4.2. Distinguibilidad:** Sea  $u(t)$  una entrada,  $x(0)$  y  $x'(0)$  dos condiciones iniciales distintas y sus trayectorias de salida correspondientes  $y(t, x(0), u(t))$ ,  $y'(t, x'(0), u(t))$  son también distintas, se dice que  $u(t)$  distingue a  $x(0)$  de  $x'(0)$ . En caso de que a condiciones iniciales diferentes, se presenten trayectorias de salida iguales, se dice que los estados iniciales son indistinguibles.

De lo anterior, la observabilidad del sistema (2.15) puede definirse como:

**Definición 2.4.3. Observabilidad:** Un sistema no lineal es observable si no tiene algún par de estados indistinguibles.

**Definición 2.4.4. Entrada universal:** Una función de entrada  $u(t)$  es universal para un sistema en un intervalo de tiempo  $[0, t]$ , si dos estados iniciales distintos  $x(0)$  y  $x'(0)$  son distinguibles.

**Definición 2.4.5. Entrada singular:** Una función de entrada  $u(t)$  es singular para un sistema en un intervalo de tiempo  $[0, t]$ , si dos estados iniciales distintos  $x(0)$  y  $x'(0)$  son indistinguibles. Una entrada no universal es llamada singular.

**Definición 2.4.6. Observabilidad uniforme:** Un sistema para el cual, todas las entradas son universales, es uniformemente observable.

**Definición 2.4.7. Matriz de Observabilidad:** Una matriz para verificar la observabilidad de un sistema no lineal de la forma (2.15) está conformada por la matriz Jacobiana de  $\Phi(x)$ , definida en la ecuación (2.17). Si la matriz de observabilidad es de rango completo, implica una observabilidad local. Cuando ésta matriz no esta en función de las entradas del sistema, se dice que el sistema es observable para cualquier entrada.

### 2.4.2. Observador de alta ganancia (OAG).

En [22], Gauthier presenta la síntesis de un observador conocido como de *alta ganancia*, el cual fue diseñado para sistemas no lineales uniformemente observables, afines a la señal de control, con una sola salida. En [23], se muestra que estos sistemas pueden ser transformados en una forma *canónica observable*, a través de un cambio de coordenadas. Dicha forma canónica se compone de un término dinámico lineal fijo y de un término controlado (afectado por las entradas) triangular.

El observador es diseñado bajo la condición global de Lipschitz en el término controlado. La sintonización o calibración del observador se realiza mediante el ajuste de un único parámetro de ganancia y la estabilidad se asegura mediante la solución única de una ecuación de Lyapunov. Una extensión del diseño de un OAG, para el caso de sistemas con múltiples salidas es presentada en [24].

A continuación se presenta el procedimiento de diseño de un OAG. Considérese el siguiente sistema no lineal, uniformemente observable, afín al control y con una sola salida de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t)g_i(x(t)), \\ y(t) &= h(x(t)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u_i(t) \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, m$ , donde  $m$  es el número de entradas,  $f(x(t)) \in \mathbb{R}^n$  y  $g_i(x(t)) \in \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales suaves y  $y(t) \in \mathbb{R}$  la salida del sistema.

El sistema (2.16) posee la propiedad de poder ser transformado en una forma triangular a través del cambio de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde  $L_f h(x)$  representa la derivada de Lie de la función  $h(x)$  en dirección de  $f$ . Por definición, la derivada de Lie esta dada por:

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x). \quad (2.18)$$

Se define entonces  $\Phi(x) = z$ , donde  $\Phi(x)$  es una transformación no lineal, por lo tanto, la forma triangular obtenida es mostrada a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi(z(t)) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^m u_i(t)\Psi_i(z(t)), \\ y(t) &= Cz(t) = z_1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Tal forma triangular, también conocida como forma canónica de observabilidad, da lugar a la síntesis de un OAG, el cual tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\hat{z}} = \mathbf{A}(\hat{z}) + \varphi(\hat{z}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i \Psi(\hat{z}(t)) + \mathbf{S}_\lambda^{-1} \mathbf{C}^T [C\hat{z}(t) - y(t)]. \quad (2.20)$$

Regresando el observador a las coordenadas originales se obtiene:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t) + \left[ \frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial x} \right]^{-1} \mathbf{S}_\lambda^{-1} \mathbf{C}^T [\hat{y}(t) - y(t)] \quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{S}_\lambda$  es una matriz simétrica, positiva definida y solución única de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\lambda \mathbf{S}_\lambda + \mathbf{A}^T \mathbf{S}_\lambda + \mathbf{S}_\lambda \mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}, \quad (2.22)$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro de diseño, y las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  son tomadas de la ecuación (2.17). Generalizando, los coeficientes de la matriz  $\mathbf{S}_\lambda$  pueden obtenerse mediante:

$$S_\lambda(i, j) = \frac{(-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1}}{\lambda^{i+j-1}}, \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.23)$$

donde  $C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ . En [23], se demostró que el error de estimación  $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$  converge exponencialmente a cero, si el parámetro  $\lambda$  es elegido lo suficientemente grande, sin embargo, se debe tener en cuenta que la elección de un valor de  $\lambda$  grande asegura una rápida convergencia del observador, no obstante, esto producirá un problema de sobretiro durante la convergencia, además de que el observador puede volverse sensible al ruido, por lo tanto, es importante establecer un compromiso entre una convergencia rápida, un rechazo al ruido y una atenuación del sobretiro.

## 2.5. Función de Mittag-Leffler.

La función  $E_\alpha(\cdot)$  lleva el nombre del gran matemático sueco Gostä Magnus Mittag-Leffler (1846-1927) quien la definió, mediante la serie de potencias [25]:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.24)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ . Dicha función es la generalización de la función exponencial, y juega en el cálculo fraccionario el mismo rol fundamental que juega la función exponencial en el cálculo clásico y las ecuaciones diferenciales. Existen, adicionalmente, dos casos más de la función de Mittag-Leffler, la función de Mittag-Leffler de dos y tres parámetros:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.25)$$

para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ .

$$E_{\alpha, \beta}^\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)} \cdot z^n, \quad (2.26)$$

donde  $(\gamma)_n = \gamma(\gamma + 1)\dots(\gamma + n - 1)$  y  $\text{Re}(\alpha) > 0$ ,  $\text{Re}(\beta) > 0$ .

## 2.6. Algoritmos de optimización genéticos.

En los años 1970, de la mano de John Henry Holland, surgió una de las líneas más prometedoras de la inteligencia artificial, la de los algoritmos genéticos (AG) (formalmente definidos en [26]), los cuales consisten en un método para solucionar problemas de optimización con o sin restricciones, basándose en un proceso de selección natural que imita la evolución biológica. Este algoritmo modifica repetidamente una *población* de soluciones individuales. En cada paso, el algoritmo genético selecciona *individuos* de la población actual aleatoriamente y los utiliza como *padres* para producir los *hijos* de la siguiente generación. Tras varias *generaciones* sucesivas, la población *evoluciona* hacia una solución óptima.

El AG se puede aplicar para solucionar problemas que no se adaptan bien a los algoritmos de optimización estándar, incluidos aquellos problemas en los que la función objetivo es discontinua, no diferenciable, estocástica o altamente no lineal. Este algoritmo difiere de un algoritmo de optimización clásico (AC) basado en derivadas, de dos formas principales, tal y como se resume en los siguientes puntos:

- El AC genera un único punto en cada iteración, y la secuencia de puntos se aproxima a una solución óptima. El AG genera una población de puntos en cada iteración, y el mejor punto de la población se aproxima a una solución óptima.
- El AC selecciona el siguiente punto de la secuencia mediante un cálculo determinista. El AG selecciona la siguiente población mediante un cálculo que emplea generadores de números aleatorios.

### 2.6.1. Terminología del algoritmo genético.

Con la finalidad de una mejor comprensión del funcionamiento de los AG, se presentan a continuación algunas definiciones básicas:

- **Funciones de adaptabilidad:** Una función de adaptabilidad es la función que se desea optimizar. Para el caso de algoritmos de optimización estándares, es lo que se conoce como una *función objetivo*.
- **Individuos:** Un individuo es cualquier punto en el que la función de adaptabilidad puede ser evaluada. El valor de la función de adaptabilidad para un individuo, es lo que determina su *puntuación*. Por ejemplo, si la función de adaptabilidad es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 1)^2 + (3x_2 + 4)^2 + (x_3 - 2),$$

el vector  $(2, -3, 1)$ , cuya dimensión es  $n = 3$ , donde  $n$  es el número de variables en el problema de optimización, es un individuo. La puntuación del individuo  $(2, -3, 1)$  es  $f(2, -3, 1) = 51$ .

- **Poblaciones y generaciones:** Una población es un arreglo de individuos. Por ejemplo, si el tamaño de la población  $m = 100$ , y el número de variables  $n$  de la función de adaptabilidad es  $n = 3$ , la representación de la población es una matriz  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . En cada iteración, el AG realiza una serie de cálculos en la población actual con el fin de producir una nueva población. Cada población sucesiva es denominada como una nueva *generación*.

- **Diversidad:** Se refiere a la distancia promedio entre los individuos de una población. Una población tendrá una alta diversidad si dicha distancia promedio es grande, de lo contrario tendrá una diversidad baja. La diversidad es esencial para el AG, debido a que permite al algoritmo buscar individuos en un espacio de soluciones mayor.
- **Valores de adaptabilidad y mejores valores de adaptabilidad:** El valor de adaptabilidad de un individuo es el valor de la función de adaptabilidad para dicho individuo. Si se busca encontrar el mínimo de una función, el mejor valor de adaptabilidad para una población, es el valor de adaptabilidad más pequeño de un determinado individuo en la población.
- **Padres e hijos:** Para crear la siguiente generación, el AG selecciona ciertos individuos en la población actual, denominados *padres*, y los utiliza para crear los individuos de la siguiente generación, denominados *hijos*. Típicamente, es más probable que el algoritmo seleccione como padres, a los individuos con mejores valores de adaptabilidad.

### 2.6.2. Funcionamiento del algoritmo genético.

A continuación se explica en términos generales el funcionamiento del AG:

1. El algoritmo comienza por crear una población inicial aleatoria.
2. Posteriormente, el algoritmo genera una secuencia de nuevas poblaciones. En cada iteración, el algoritmo emplea los individuos en la población actual para generar la siguiente, llevando a cabo los siguientes pasos:
  - a) Se obtiene la puntuación de cada miembro de la población actual mediante el cálculo de su valor de adaptabilidad correspondiente. Dichos valores son denominados puntuaciones en bruto.
  - b) Se escalan las puntuaciones en bruto para convertirlas en un rango de valores de mayor utilidad. Dichos valores son denominados valores de expectación.
  - c) Se seleccionan los padres, en función de los valores de expectación de cada individuo.
  - d) Los individuos con mejores valores de adaptabilidad son seleccionados como individuos de *élite*, dichos individuos pasarán directamente a la siguiente generación.
  - e) Se generan *hijos* a partir de los *padres*, éstos son producidos ya sea realizando cambios aleatorios a un padre (*mutación*), o mediante la combinación de una pareja de padres (*cruce*).
  - f) Se reemplaza la población actual con los hijos generados, para formar la siguiente generación.
3. El AG se detiene cuando algún criterio de detención se haya cumplido, por ejemplo, que se hayan obtenido un determinado número de generaciones, o que el cambio promedio en los valores de la función de adaptabilidad calculados sea menor al que se predefine, etcétera.

# Capítulo 3

---

## Estado del arte

---

La obtención de modelos analíticos que describan la dinámica del fluido en un ducto hidráulico para la concepción de algoritmos de diagnóstico de una o múltiples fugas, es un tema que ha sido ampliamente abordado por la comunidad del control automático. La discretización espacial del ducto es empleada, principalmente, en dos métodos que aproximan una solución a las ecuaciones de golpe de ariete, el MDF y el MCO.

En [27], se presenta un modelo del ducto obtenido a partir del MDF, se enfatiza que la elección de dicho método se fundamenta en su simplicidad, y porque la estructura del modelo resultante es apropiada para el diseño de observadores no lineales, los cuales son la base del algoritmo de diagnóstico que se propone. Se abordan dos problemáticas: Estimar la posición de una fuga, estableciendo el coeficiente de fricción como un parámetro constante; y estimar la posición de una fuga, al mismo tiempo que se estima la magnitud del coeficiente de fricción, ambos casos se validaron experimentalmente con éxito. Una metodología similar es empleada en [28], cuyo caso de estudio se centra en un ducto de gas licuado del petróleo (GLP), y se aproxima una solución igualmente mediante el MDF, para la concepción de una serie de sub-observadores conectados en cascada, cuya función es la de localizar en que región del ducto se encuentra la fuga, y una vez identificada dicha región, un observador dedicado es utilizado para estimar con mayor precisión la posición de la fuga y su coeficiente de descarga, los resultados fueron validados experimentalmente en un ducto industrial de GLP.

Por otro lado, en las investigaciones realizadas en [10] y [29], se demuestra la efectividad de discretizar espacialmente el ducto para la aproximación de una solución a las ecuaciones de continuidad y momento, mediante el MCO, y se menciona que este método permite tomar en cuenta los efectos de posibles fugas en puntos de colocación específicos, lo cual lo convierte en una opción viable para el desarrollo de algoritmos de detección de fugas, adicionalmente se demuestra que los modelos propuestos sirven de base para el diseño de esquemas de observación que producen resultados aceptables, respecto a esquemas estándares basados en el MDF.

Resulta importante mencionar que los trabajos realizados en [30] y [31], son referencias importantes para este trabajo de investigación, pues exponen y ejemplifican con detalle la metodología necesaria para obtener un MPC de un ducto hidráulico a partir del MDF. Así mismo, las investigaciones presentadas en [2], [32] y [33] motivaron el uso de operadores de derivadas fraccionarias, al reportar el éxito que proporcionan en el modelado sistemas y fenómenos de difusión y viscoelasticidad, entre otros.

Por otra parte, trabajos que abordan el diseño de observadores fraccionarios para la estimación o reconstrucción de los estados de un sistema han sido reportados en la literatura. Por ejemplo, en [34], se estudia una clase de sistemas fraccionarios, y se proponen observadores de

orden arbitrario para estimar las variables de estado del sistema, y se garantiza la convergencia del error de estimación a cero, mediante el enfoque fraccionario de Lyapunov. Así mismo, en [35], un observador de modos deslizantes fraccionario es presentado como solución al problema de estimación de estados en sistemas no lineales fraccionarios con incertidumbre, el análisis de estabilidad es realizado, igualmente, mediante el criterio de Lyapunov fraccionario. En ambas investigaciones, se presentan ejemplos ilustrativos para demostrar la validez y efectividad de los esquemas de observación propuestos, a nivel de simulación. Finalmente, en [36], los autores proponen un esquema tolerante a fallas basado en la aplicación de observadores de estado fraccionarios, estableciendo como caso de estudio un intercambiador de calor de doble tubería. El propósito del esquema es la detección de fallas en los sensores, y proporcionar una señal que reemplace la señal con falla que proporciona el sensor, mediante un banco de observadores de alta ganancia fraccionarios. Los resultados fueron validos experimentalmente.

La obtención de ecuaciones explícitas para el cálculo del coeficiente de fricción, sigue siendo hasta el día de hoy, un problema abierto, en [37] y [38], se realizó un análisis de las ecuaciones explícitas existentes para el cálculo de dicho parámetro, llevando a cabo una comparación de dichas ecuaciones con la de Colebrook, a través del cálculo del error relativo promedio, error positivo máximo, error negativo máximo, entre otros. Se llegó a la conclusión de que las mejores aproximaciones, en términos del error, son las ecuaciones de Swamme-Jain [16] y Zigrang-Sylvester [39].

Por otra parte, en una reciente investigación [40], se propone el uso de una red neuronal artificial (RNA) para el cálculo de la fricción, compuesta por una capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida, con 2, 50 y 1 parámetros, respectivamente. Tras un análisis comparativo, se concluye que la RNA propuesta, produce el error relativo promedio más pequeño, respecto a las mejores aproximaciones explícitas de la ecuación de Colebrook existentes.

Finalmente, el trabajo presentado en [41] motivó fuertemente el objetivo de emplear la función de Mittag-Leffler, como herramienta matemática para obtener una aproximación explícita de la ecuación de Colebrook, pues en dicha investigación, se menciona que la función de Mittag-Leffler es capaz de capturar el comportamiento de varios tipos de procesos, entre los que se pueden destacar: procesos monotónicos, comportamiento oscilatorio, oscilaciones amortiguadas y exponenciales estrechos.



# Capítulo 4

---

## Simulación de la hidrodinámica de un ducto

---

En este capítulo se muestran los resultados de las simulaciones realizadas a partir de la implementación de la solución numérica de las ecuaciones de golpe de ariete, mediante el método de diferencias finitas, se presentan tres modelos de parámetros concentrados denominados: modelo finito clásico, modelo finito conformable y modelo finito fraccionario.

### 4.1. Caso de estudio.

En la sección 2.1.2 del presente documento se muestran las ecuaciones diferenciales ordinarias que componen el modelo finito del ducto hidráulico (ver ecuación 2.6). En la Tabla 4.1, se caracterizan los parámetros físicos que componen el caso de estudio que se aborda en este trabajo.

Símbolo	Parámetro	Valor	Unidad
$g$	Gravedad	9.8	$[m/s^2]$
$b$	Velocidad de Onda	1200	$[m/s]$
$D$	Diámetro	0.3	$[m]$
$L$	Longitud	2000	$[m]$
$A_r$	Área Transversal	0.0707	$[m^2]$

Tabla 4.1: Parámetros del modelo finito.

### 4.2. Simulación del modelo finito clásico.

Una vez definida la topología del modelo finito del ducto, se llevó a cabo la simulación de las ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando el espacio de trabajo de MATLAB®, los parámetros de simulación se muestran en la Tabla 4.2. Las condiciones de frontera empleadas en cada simulación, se detallan en la Tabla 4.3. Adicionalmente, el coeficiente de fricción es calculado mediante la ecuación de Swamee-Jain [16].

Como se observa en la Tabla 4.3, para la simulación IV, se establecieron las mismas condiciones de frontera que en la simulación I, sin embargo, para esta simulación se considerarán los efectos de una fuga, mediante el flujo de extracción:

$$Q_{f20}(t) = 0.001 \cdot \sqrt{H_{20}(t)}. \quad (4.1)$$

Parámetros de simulación	
$N$	31 secciones
Tiempo de Simulación	150 segundos
Método de Integración	Runge - Kutta de 4to orden
Paso de Integración	0.01 segundos

Tabla 4.2: Parámetros de simulación del modelo finito.

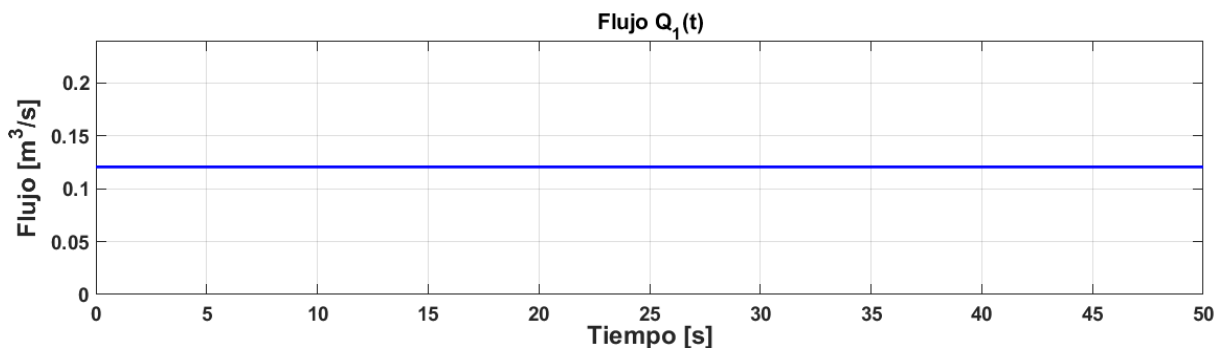
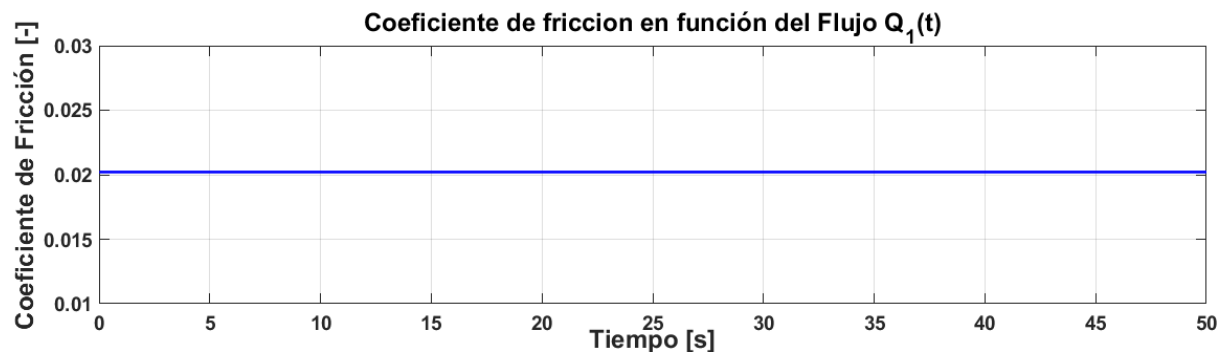
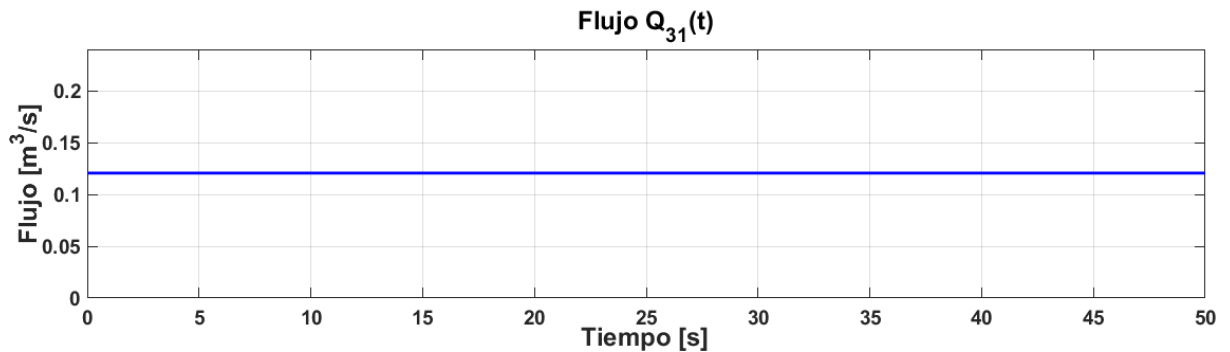
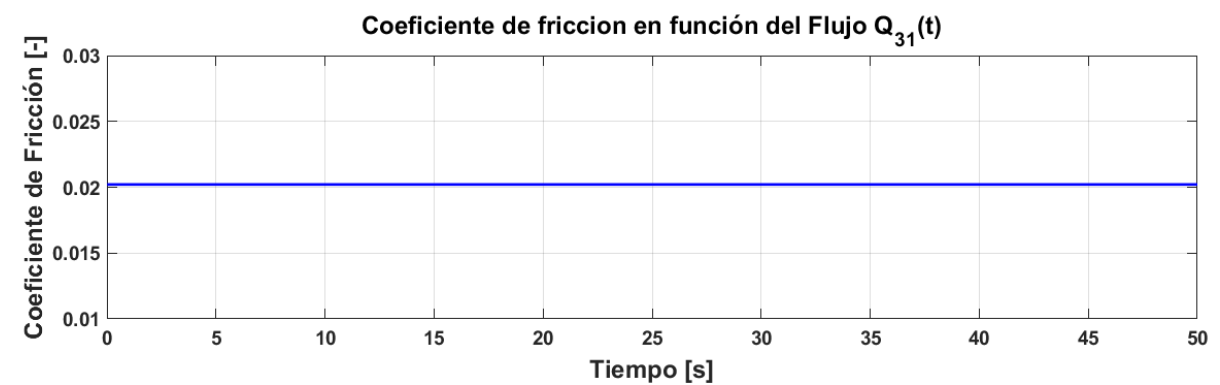
	$H_{in}[m]$	$H_{out}[m]$
Simulación I	30	10
Simulación II	30 para $0 \leq t < 50$ , 25 para $t \geq 50$	10
Simulación III	$\sin(\pi t) + 30$	10
Simulación IV	30	10

Tabla 4.3: Condiciones de frontera establecidas en cada simulación.

#### 4.2.1. Resultados obtenidos.

Empleando los parámetros presentados en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3, se obtuvieron los resultados de simulación que se enlistan a continuación.

- **Simulación I:** En las Figuras 4.1 - 4.5, se muestran las respuestas obtenidas para el flujo de entrada  $Q_1(t)$ , el coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_1(t)$ , el flujo de salida  $Q_{31}(t)$ , el coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_{31}(t)$  y la carga de presión  $H(x, t)$ , respectivamente. Al no existir ninguna fuga en el ducto, y habiéndose establecido condiciones de frontera constantes, no se observan variaciones en los flujos o en la carga de presión.
- **Simulación II:** Análogamente a lo realizado en la simulación anterior, se obtuvieron los resultados que se presentan en las Figuras 4.6 - 4.10, en las que, como se esperaba, se observa un cambio de magnitud tanto en los flujos como en la carga de presión en  $t = 50$  segundos, a causa de la variación de  $H_{in}$ , de 30 a 25 metros, en dicho instante de tiempo. En las Figuras 4.7 y 4.9 puede observarse la variación de la fricción en función de los flujos.
- **Simulación III:** Siguiendo la misma metodología y empleando los parámetros de simulación correspondientes, se obtuvieron los resultados que se ilustran en las Figuras 4.11 - 4.15.
- **Simulación IV:** Finalmente, los resultados de esta simulación se presentan en las Figuras 4.16 - 4.21. Al existir una fuga caracterizada mediante la ecuación (4.1), se observa un cambio en la magnitud de los flujos en el ducto, a partir del flujo  $Q_{11}(t)$ , en adelante, es decir en  $x = 641.5$  m, como puede apreciarse en la Figura 4.20. La variación del coeficiente de fricción, en función de los flujos, se muestra en las Figuras 4.17 y 4.19.

Figura 4.1: **Simulación I.** Flujo en la sección 1 del ducto.Figura 4.2: **Simulación I.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_1(t)$ .Figura 4.3: **Simulación I.** Flujo en la sección 31 del ducto.Figura 4.4: **Simulación I.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_{31}(t)$ .

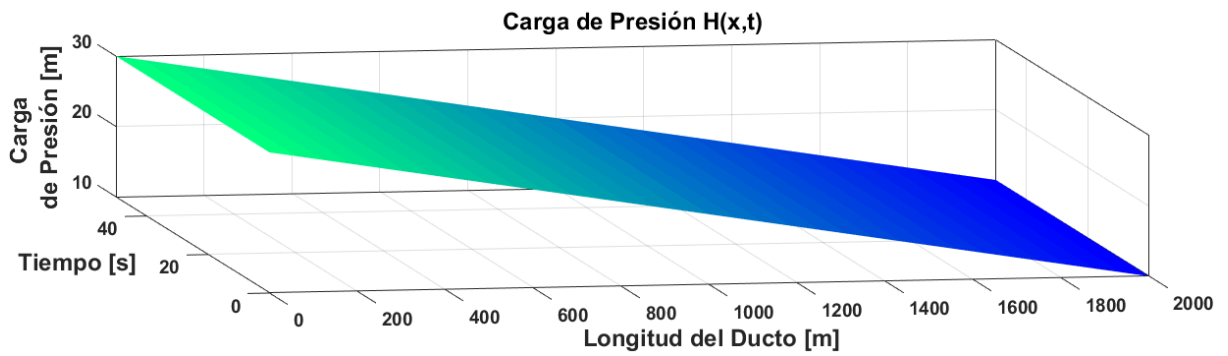


Figura 4.5: **Simulación I.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

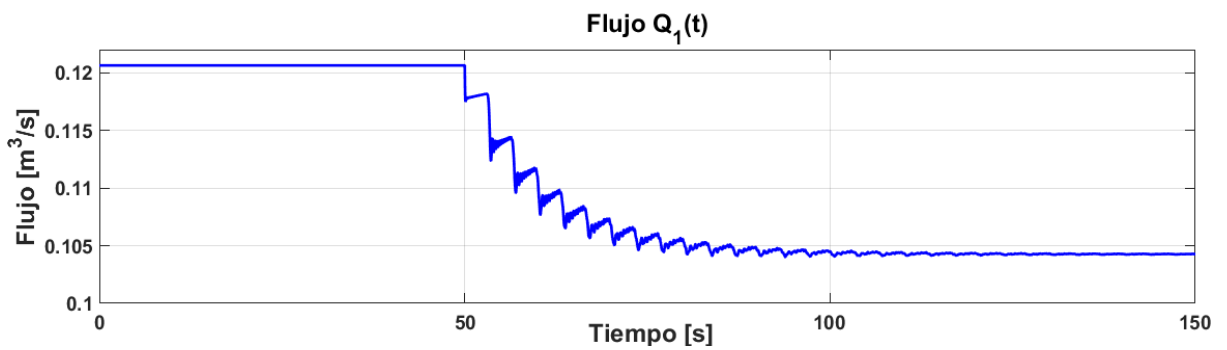


Figura 4.6: **Simulación II.** Flujo en la sección 1 del ducto.

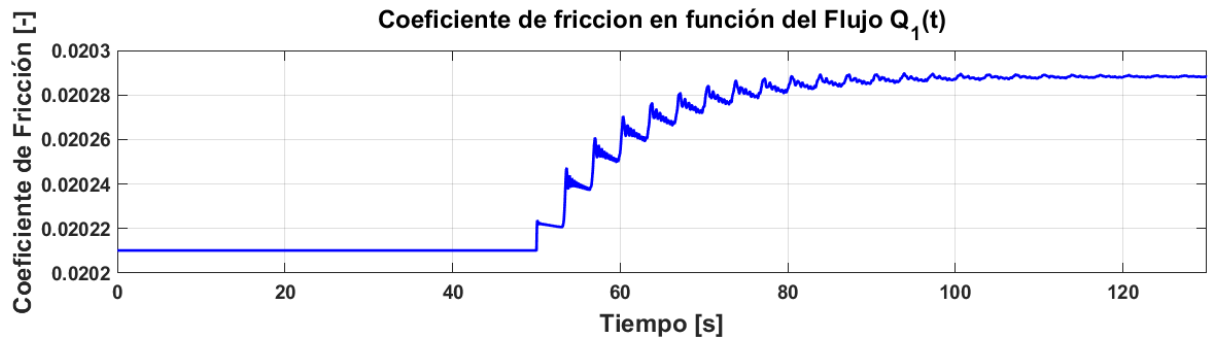


Figura 4.7: **Simulación II.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_1(t)$ .

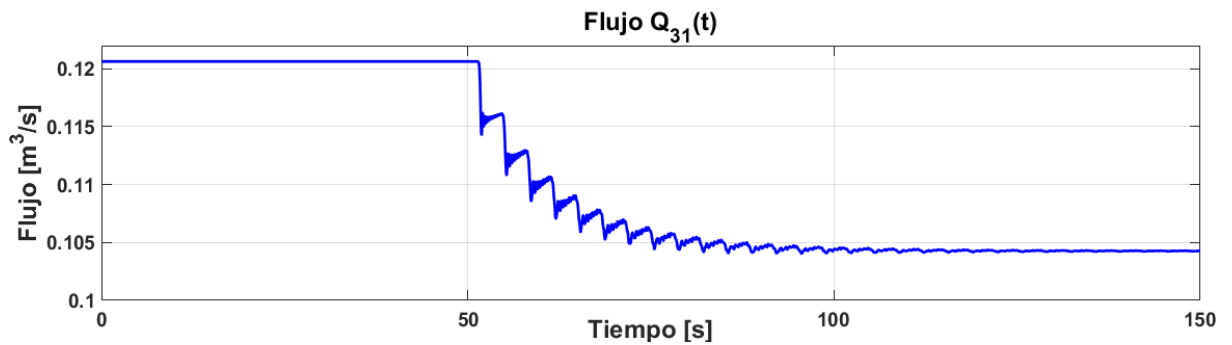


Figura 4.8: **Simulación II.** Flujo en la sección 31 del ducto.

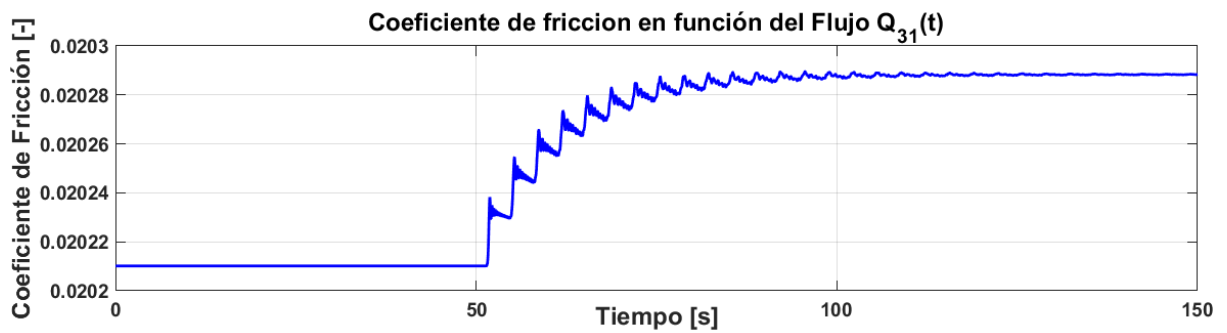


Figura 4.9: **Simulación II.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_{31}(t)$ .

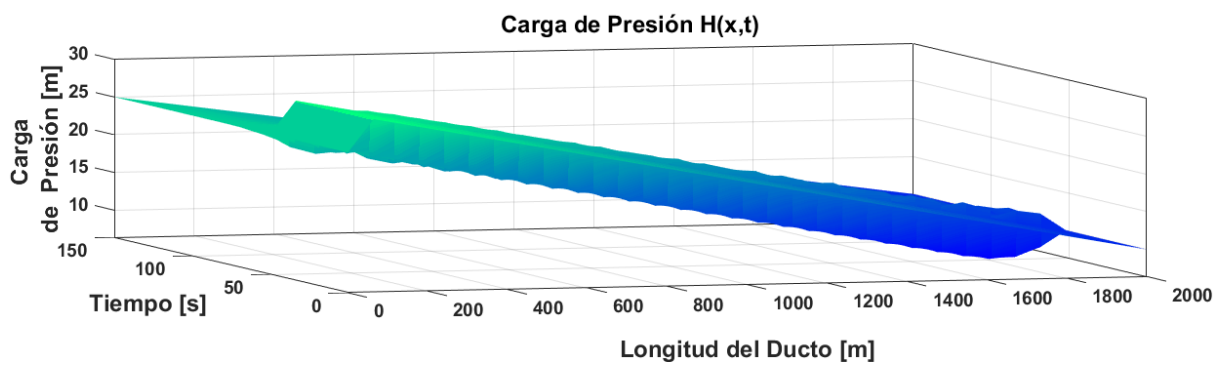


Figura 4.10: **Simulación II.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

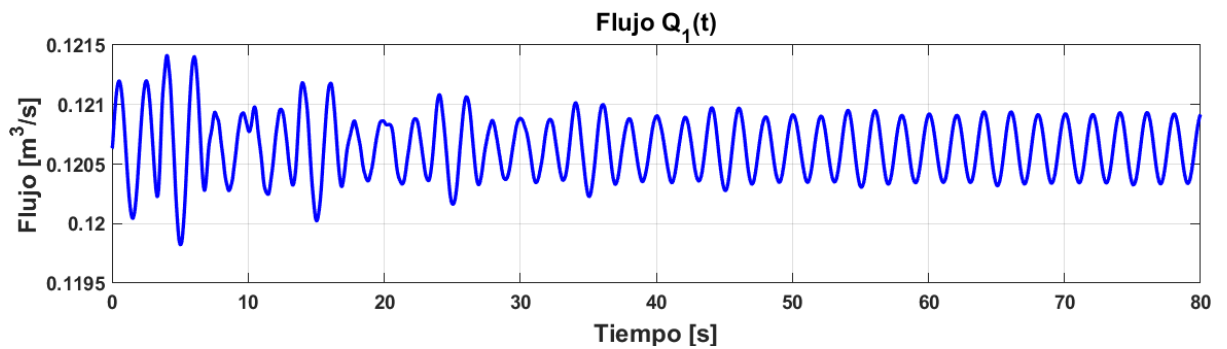


Figura 4.11: **Simulación III.** Flujo en la sección 1 del ducto.

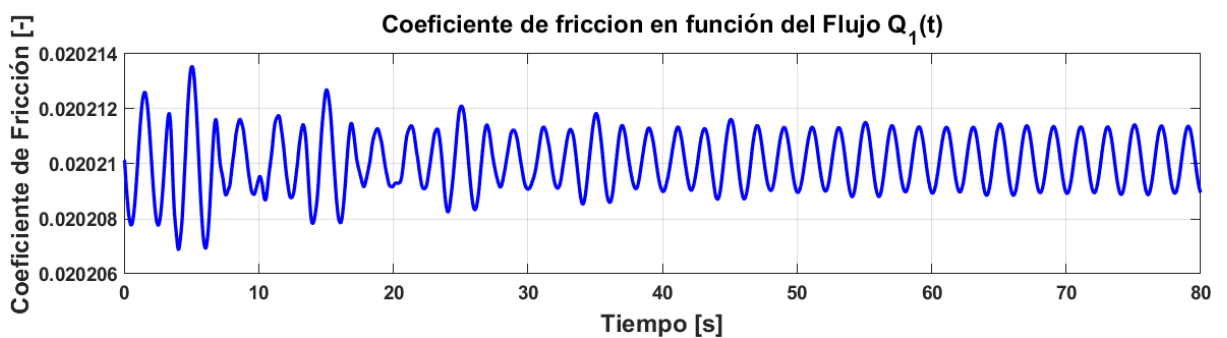


Figura 4.12: **Simulación III.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_1(t)$ .

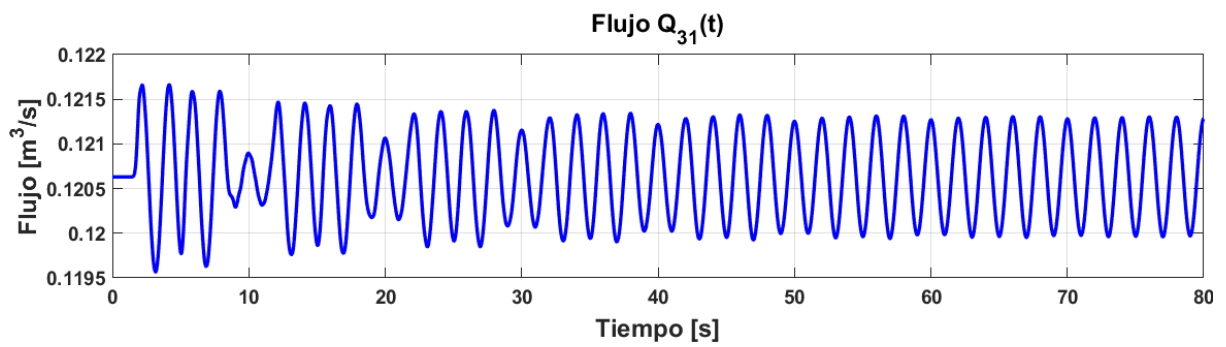


Figura 4.13: **Simulación III.** Flujo en la sección 31 del ducto.

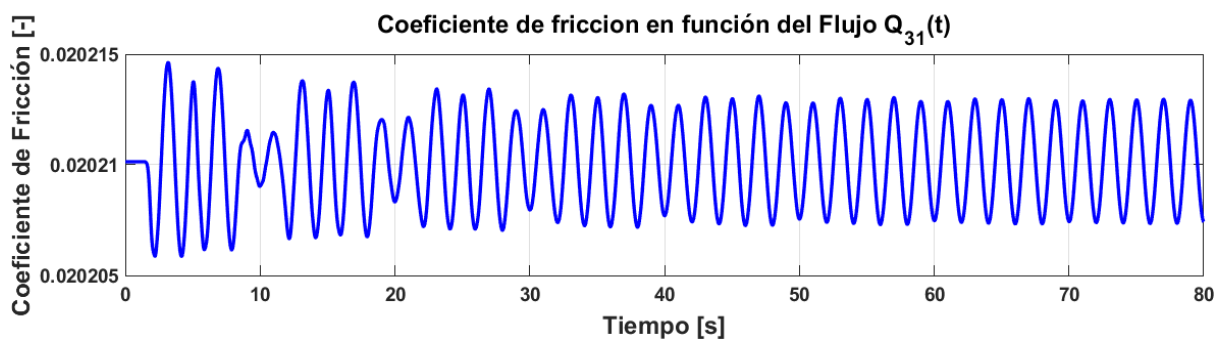


Figura 4.14: **Simulación III.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_{31}(t)$ .

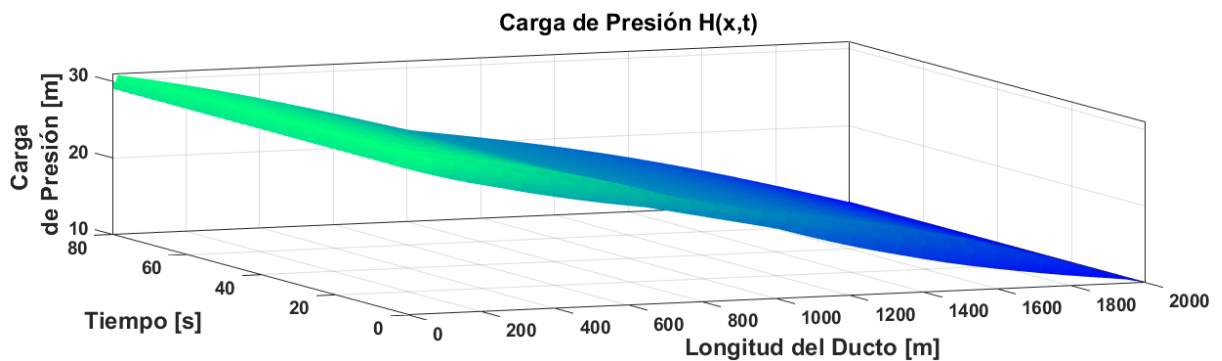


Figura 4.15: **Simulación III.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

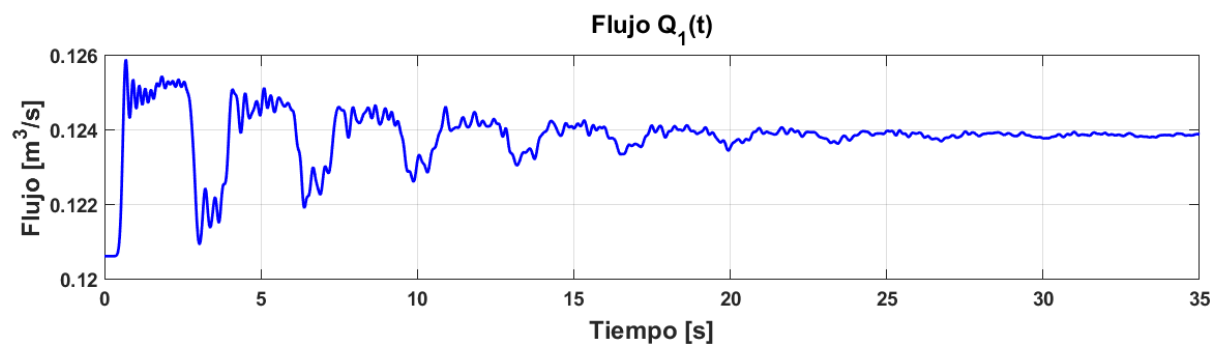


Figura 4.16: **Simulación IV.** Flujo en la sección 1 del ducto.



Figura 4.17: **Simulación IV.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_1(t)$ .

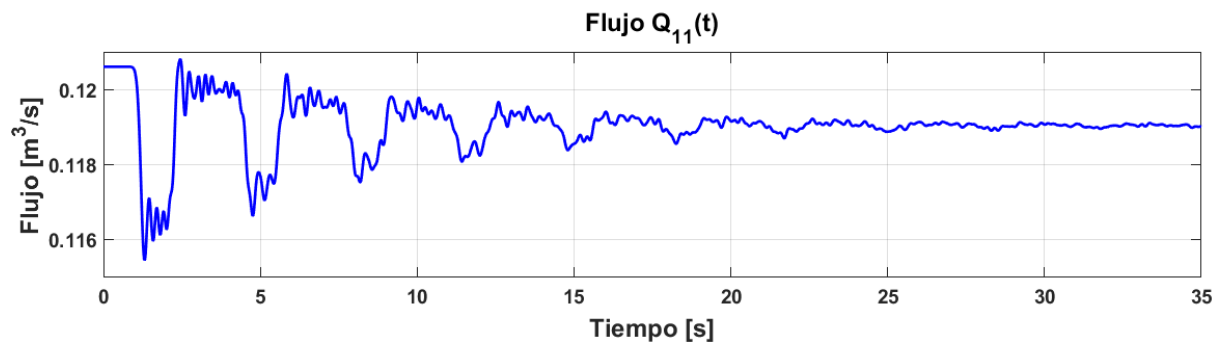


Figura 4.18: **Simulación IV.** Flujo en la sección 11 del ducto.

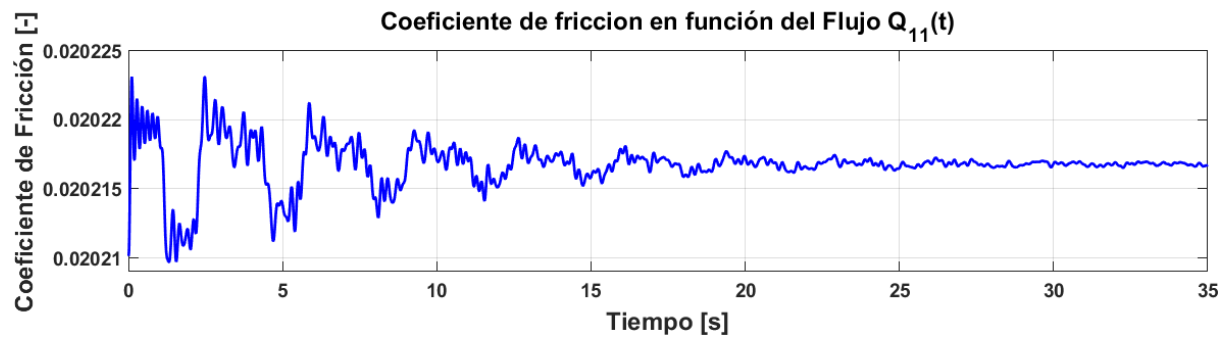


Figura 4.19: **Simulación IV.** Variación del coeficiente de fricción en función del flujo  $Q_{11}(t)$ .

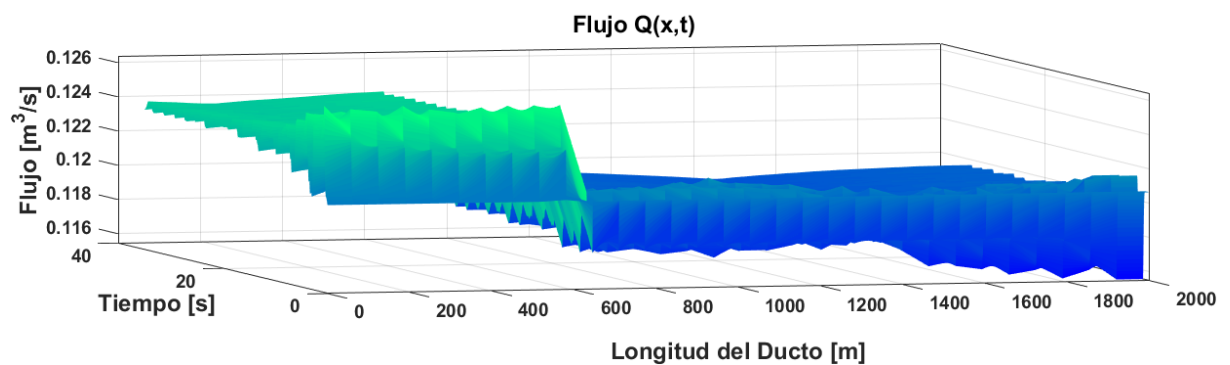


Figura 4.20: **Simulación IV.** Comportamiento del flujo a largo del ducto.

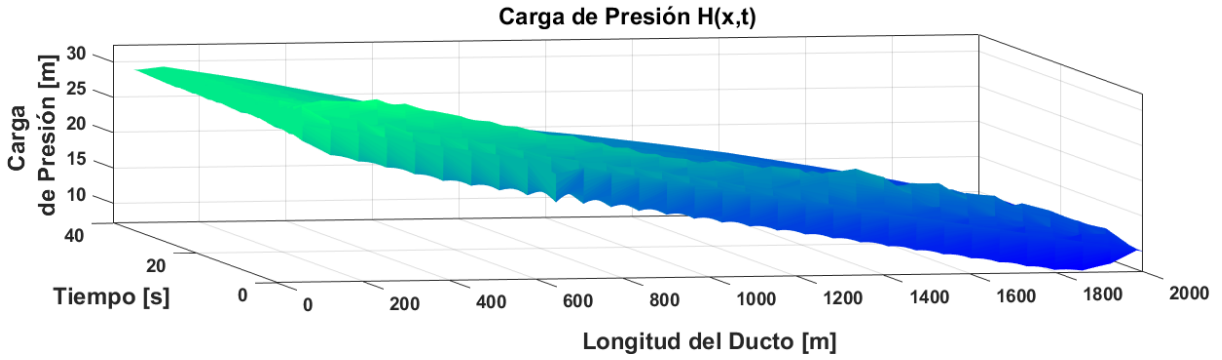


Figura 4.21: **Simulación IV.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

### 4.3. Simulación modelo finito conformable.

A partir del modelo finito definido en el conjunto de ecuaciones (2.6), se formuló el siguiente modelo finito del ducto, empleando la definición de la derivada conformable.

$$\begin{aligned} T_\alpha(Q_i)(t) &= a_1 \left( \frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i} \right) + \mu(Q_i) \cdot Q_i |Q_i|; & \forall i = 1, \dots, N, \\ T_\alpha(H_{i+1})(t) &= a_2 \left( \frac{Q_i - Q_{i+1}}{\Delta x_i} \right); & \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A partir del modelo finito presentado en el sistema (2.8), se obtuvo el siguiente modelo de parámetros concentrados (MPC), el cual considera los efectos de una fuga en la sección  $i$  del ducto.

$$\begin{aligned} T_\alpha(Q_i)(t) &= a_1 \left( \frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i} \right) + \mu(Q_i) \cdot Q_i |Q_i|; & \forall i = 1, \dots, N, \\ T_\alpha(H_{i+1})(t) &= a_2 \left( \frac{Q_i - Q_{i+1} - Qf_i}{\Delta x_i} \right); & \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Los coeficientes de los sistemas (4.2) y (4.3), el número total de ecuaciones  $M$ , así como las condiciones iniciales y de frontera, son las mismas que se definieron en el modelo finito estructurado con el enfoque del cálculo clásico y establecidas en la Tabla 4.2.

Así mismo, la metodología y parámetros de simulación, son los mismos que se detallan en las Tablas 4.1 y 4.3, con la única diferencia de que la fricción  $f$ , se establece como un parámetro constante, de valor  $f = 0.0202101$ .

#### 4.3.1. Resultados obtenidos.

Empleando los parámetros presentados en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3, se obtuvieron los resultados de simulación que se enlistan a continuación. El orden  $\alpha$  de las derivadas conformables es 0.99 para todas las simulaciones, éste orden fue elegido después de realizar diversas simulaciones utilizando distintos valores; dicho valor es el que mejor representa las dinámicas deseadas.

- **Simulación I:** En las Figuras 4.22 - 4.24 se muestran la respuestas obtenidas, para el flujo de entrada  $Q_1(t)$ , el flujo de salida  $Q_{31}(t)$ , y la carga de presión  $H(x, t)$ , respectivamente. Al no existir ninguna fuga en el ducto, y habiéndose establecido condiciones de frontera constantes, no se observan variaciones en los flujos o en las presiones.



- **Simulación II:** Análogamente a lo realizado en la simulación anterior, se obtuvieron los resultados que se presentan en las Figuras 4.25 - 4.27, en las que, como se esperaba, se observa un cambio de magnitud tanto en los flujos como en la carga de presión en  $t = 50$  segundos, a causa de la variación de  $H_{in}$ , de 30 a 25 metros, en dicho instante de tiempo.
- **Simulación III:** Siguiendo la misma metodología, y empleando los parámetros de simulación correspondientes, se obtuvieron los resultados que se ilustran en las Figuras 4.28 - 4.30.
- **Simulación IV:** Finalmente, los resultados de esta simulación, se presentan en las Figuras 4.31 - 4.34. Al existir una fuga caracterizada mediante la ecuación (4.1), se observa un cambio en la magnitud de los flujos en el ducto, a partir del flujo  $Q_{11}(t)$  en adelante, es decir en  $x = 641.5$  m, como puede apreciarse en la Figura 4.34.

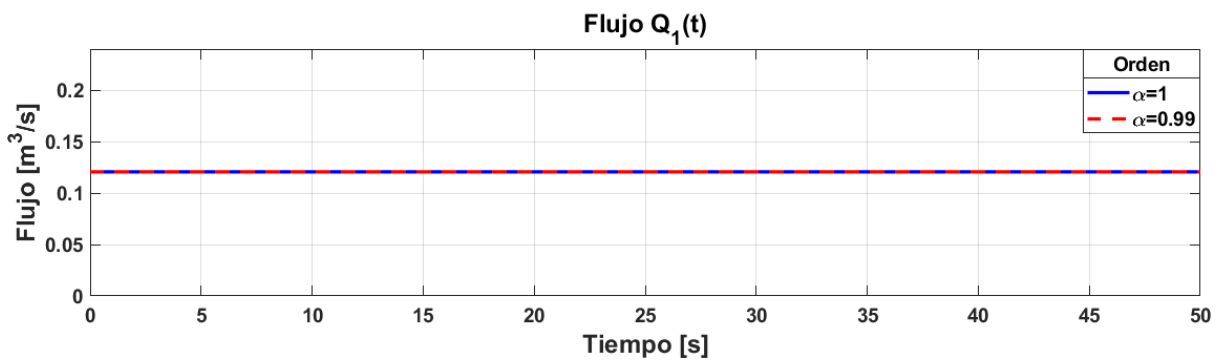


Figura 4.22: **Simulación I.** Flujo en la sección 1 del ducto.

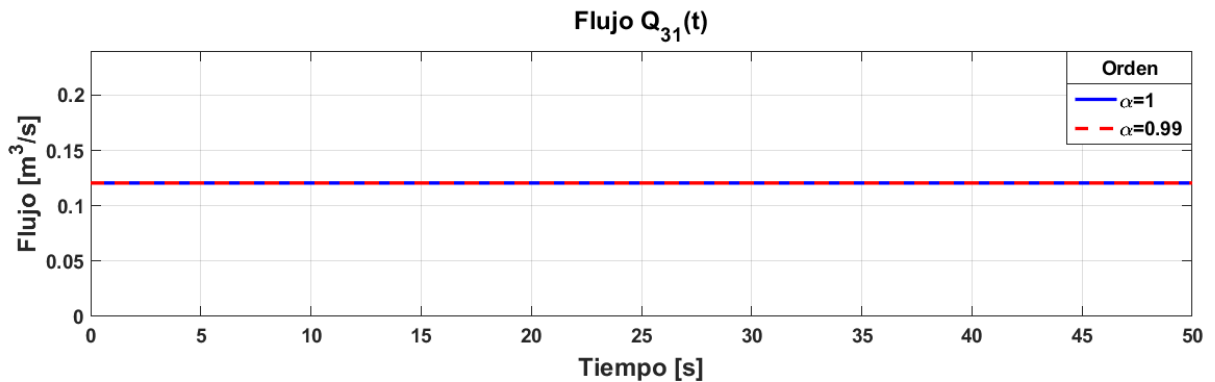


Figura 4.23: **Simulación I.** Flujo en la sección 31 del ducto.

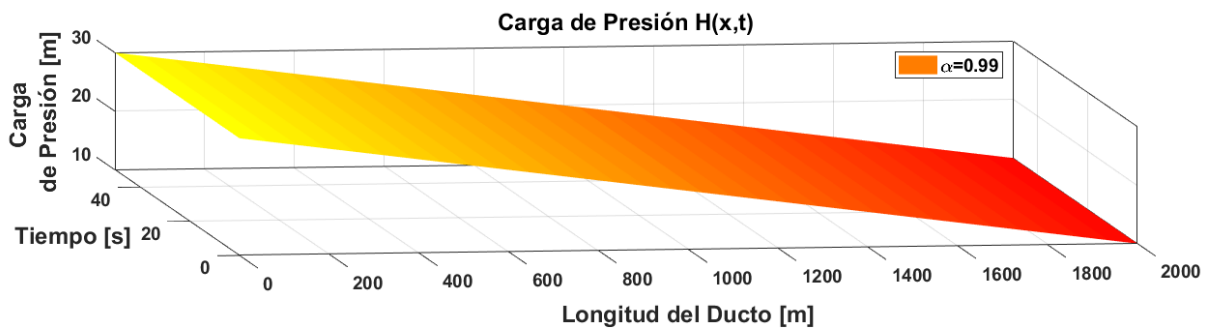


Figura 4.24: **Simulación I.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

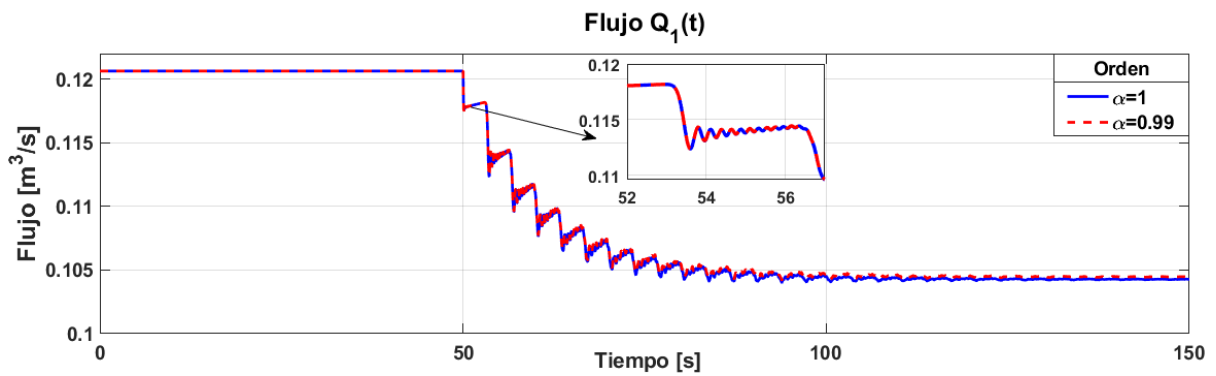


Figura 4.25: **Simulación II.** Flujo en la sección 1 del ducto.

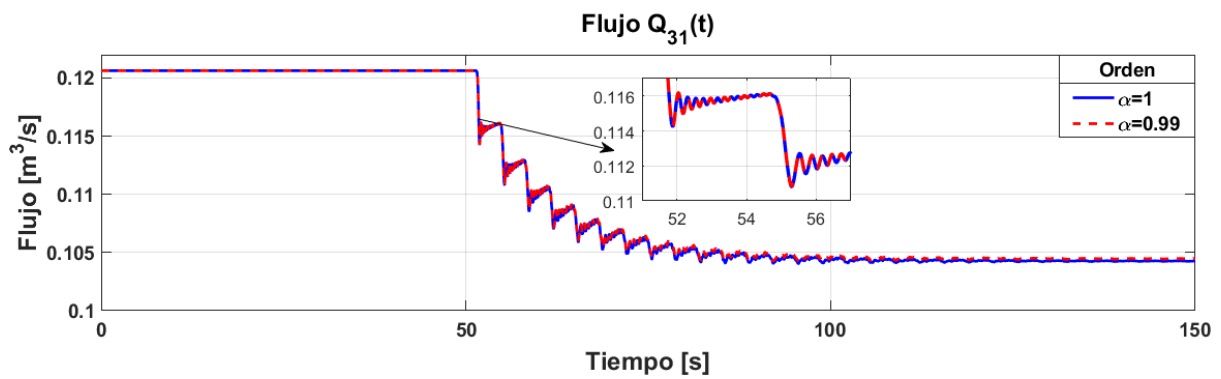


Figura 4.26: **Simulación II.** Flujo en la sección 31 del ducto.

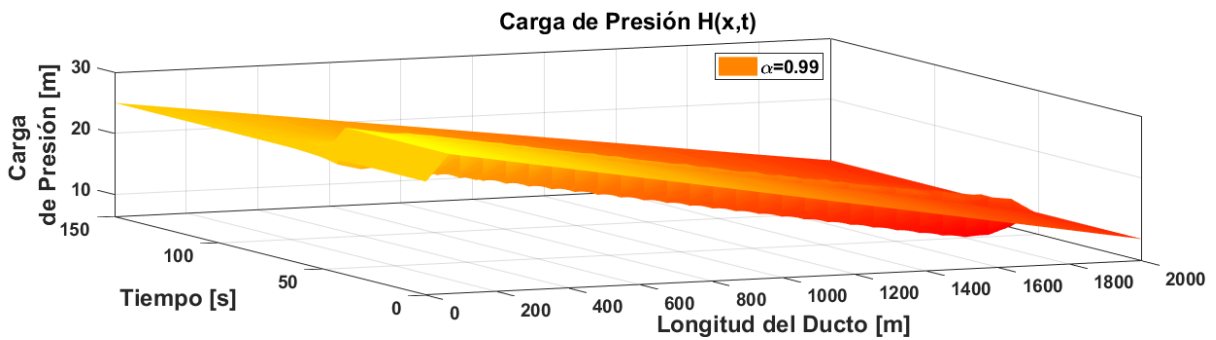


Figura 4.27: **Simulación II.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

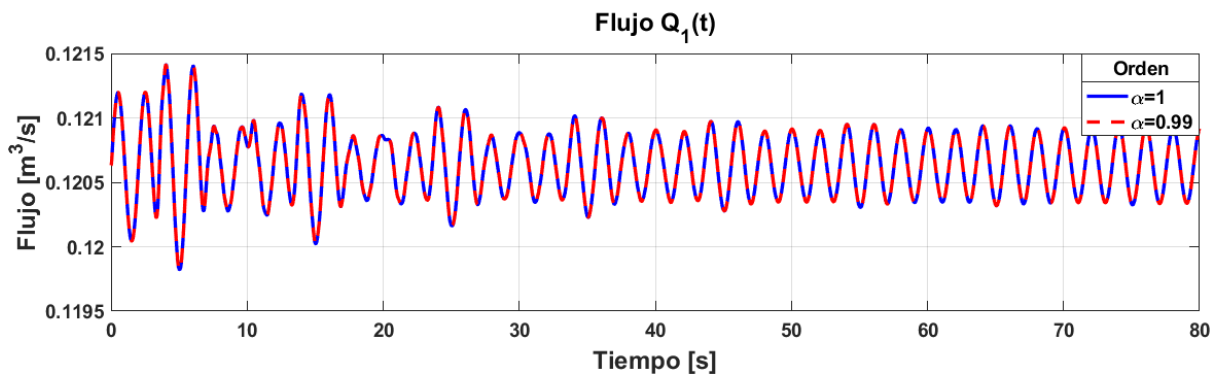


Figura 4.28: **Simulación III.** Flujo en la sección 1 del ducto.

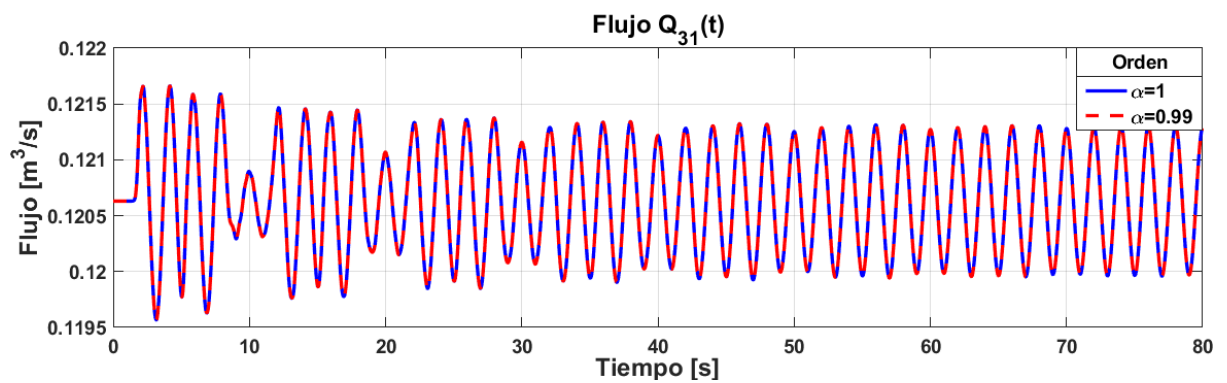


Figura 4.29: **Simulación III.** Flujo en la sección 31 del ducto.

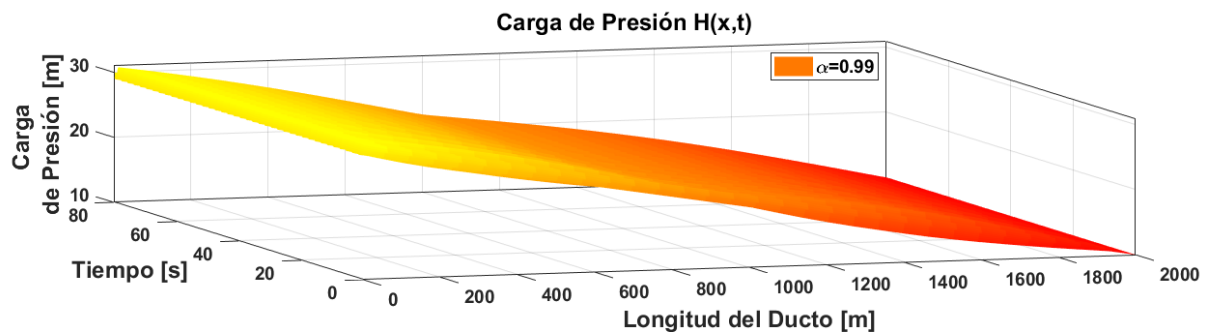


Figura 4.30: **Simulación III.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

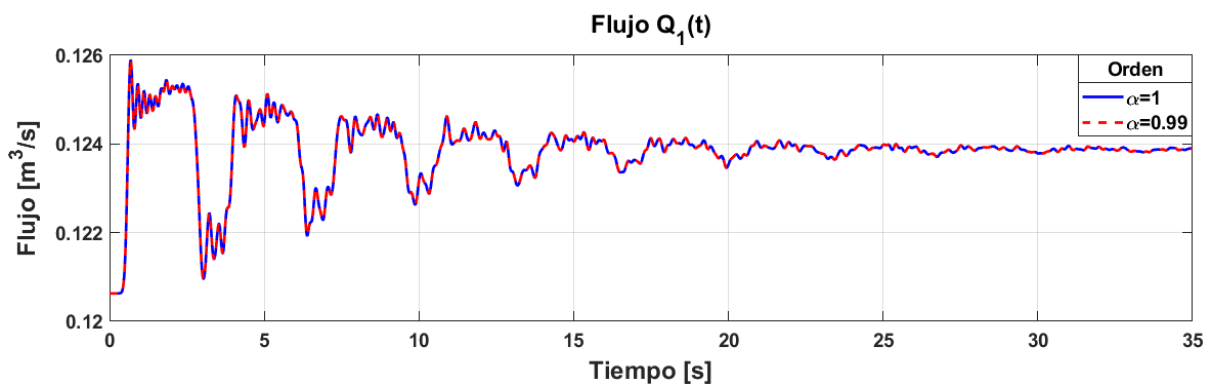


Figura 4.31: **Simulación IV.** Flujo en la sección 1 del ducto.

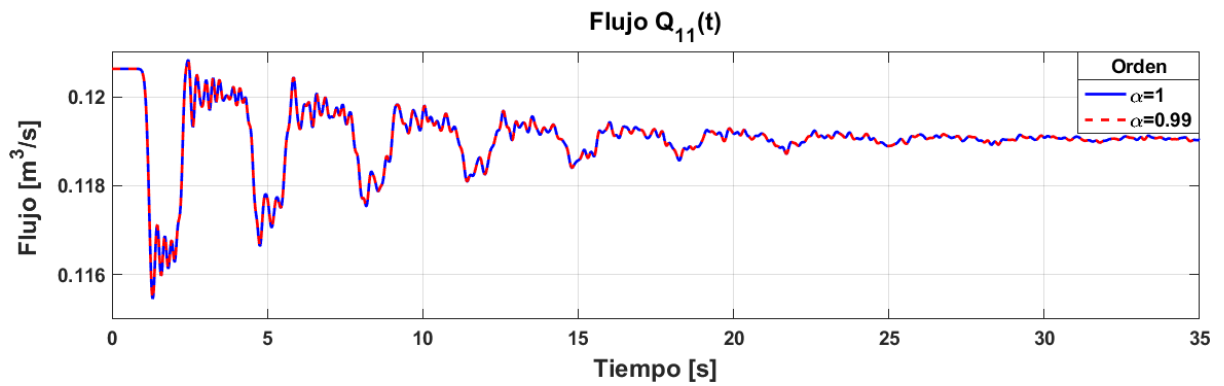


Figura 4.32: **Simulación IV.** Flujo en la sección 11 del ducto.

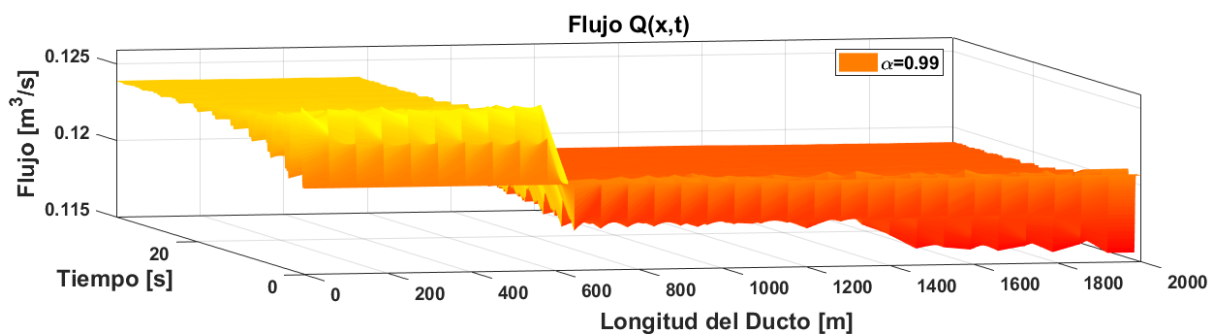


Figura 4.33: **Simulación IV.** Comportamiento del flujo a largo del ducto.

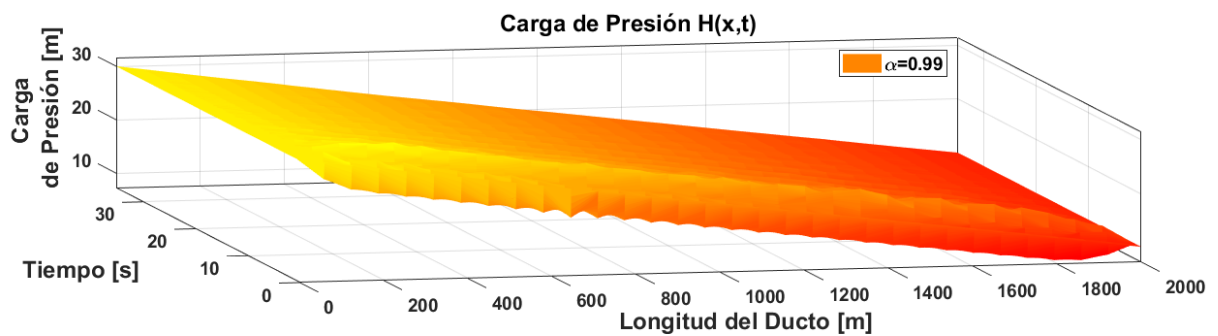


Figura 4.34: **Simulación IV.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

#### 4.4. Simulación del modelo finito fraccionario.

A partir del modelo finito definido en el conjunto de ecuaciones (2.6), se formuló el siguiente MPC, empleando la definición de la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio-Caputo.

$$\begin{aligned} {}_0^{CFC}D_t^\alpha Q_i(t) &= a_1 \left( \frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i} \right) + \mu(Q_i) \cdot Q_i |Q_i|, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ {}_0^{CFC}D_t^\alpha H_{i+1}(t) &= a_2 \left( \frac{Q_i - Q_{i+1}}{\Delta x_i} \right). \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A partir del modelo finito presentado en el sistema (2.8), se obtuvo el siguiente MPC, el cual

considera los efectos de una fuga en la sección  $i$  del ducto.

$$\begin{aligned} {}_0^{CFC}D_t^\alpha Q_i(t) &= a_1 \left( \frac{H_i - H_{i+1}}{\Delta x_i} \right) + \mu(Q_i) \cdot Q_i |Q_i|, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ {}_0^{CFC}D_t^\alpha H_{i+1}(t) &= a_2 \left( \frac{Q_i - Q_{i+1} - Qf_i}{\Delta x_i} \right). \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Los parámetros físicos de los modelos finitos (4.4) y (4.5), son los mismos que se especificaron en la sección 4.1, así como el esquema de simulación llevado a cabo en el espacio de trabajo de MATLAB®, descrito en la sección 4.2. El coeficiente de fricción se establece, igualmente, como un término constante de magnitud  $f = 0.0202101$ .

El método numérico empleado para resolver las ecuaciones diferenciales de los sistemas (4.4) y (4.5) es el presentado por Toufik y Atangana en [42], el cual optimiza las limitaciones del método de Adams-Bashfort, y consiste en un esquema numérico basado en la interpolación de Lagrange. Dicho método es preciso, eficiente y directo, y a diferencia del esquema de Adams-Bashfort, un paso pequeño de discretización no es necesario, por lo tanto, el costo computacional es reducido [43].

#### 4.4.1. Resultados obtenidos.

Empleando los parámetros presentados en las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3, se obtuvieron los resultados de simulación que se enlistan a continuación. El orden  $\alpha$  de las derivadas fraccionarias es 0.99 para todas las simulaciones, éste orden fue elegido después de realizar diversas simulaciones utilizando distintos valores; dicho valor es el que mejor representa las dinámicas deseadas.

- **Simulación I:** En las Figuras 4.35 - 4.37 se muestran la respuestas obtenidas, para el flujo de entrada  $Q_1(t)$ , el flujo de salida  $Q_{31}(t)$ , y la carga de presión  $H(x, t)$ , respectivamente. Al no existir ninguna fuga en el ducto, y habiéndose establecido condiciones de frontera constantes, no se observan variaciones en los flujos o en las presiones.
- **Simulación II:** Análogamente a lo realizado en la simulación anterior, se obtuvieron los resultados que se presentan en las Figuras 4.38 - 4.40, en las que, como se esperaba, se observa un cambio de magnitud tanto en los flujos como en la carga de presión en  $t = 50$  segundos, a causa de la variación de  $H_{in}$ , de 30 a 25 metros, en dicho instante de tiempo.
- **Simulación III:** Siguiendo la misma metodología, y empleando los parámetros de simulación correspondientes, se obtuvieron los resultados que se ilustran en las Figuras 4.41 - 4.43.
- **Simulación IV:** Finalmente, los resultados de esta simulación, se presentan en las Figuras 4.44 - 4.47. Al existir una fuga caracterizada mediante la ecuación (4.1), se observa un cambio en la magnitud de los flujos en el ducto, a partir del flujo  $Q_{11}(t)$  en adelante, es decir en  $x = 641.5$  m, como puede apreciarse en la Figura 4.46.

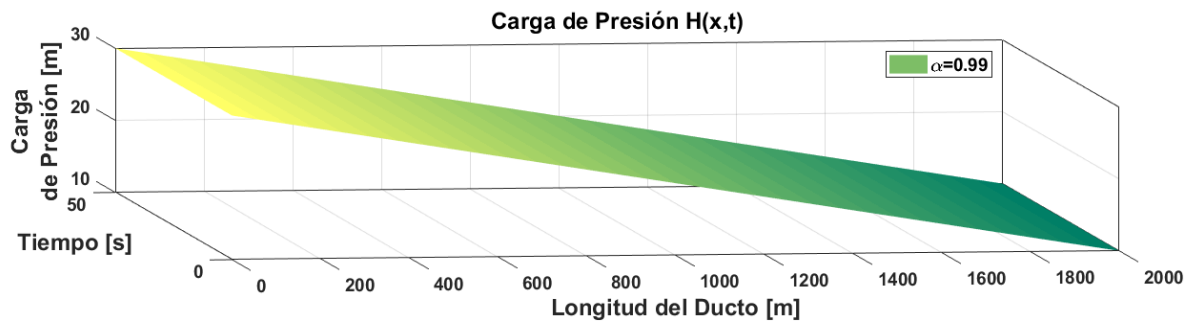


Figura 4.37: **Simulación I.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

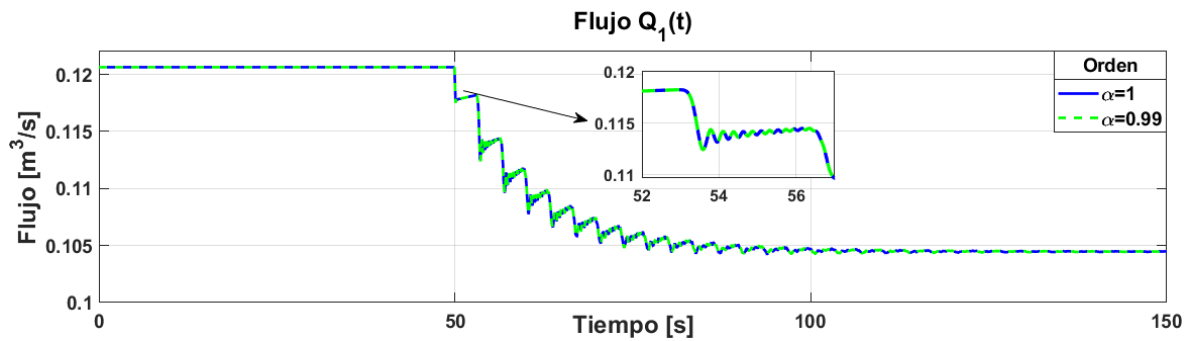


Figura 4.38: **Simulación II.** Flujo en la sección 1 del ducto.

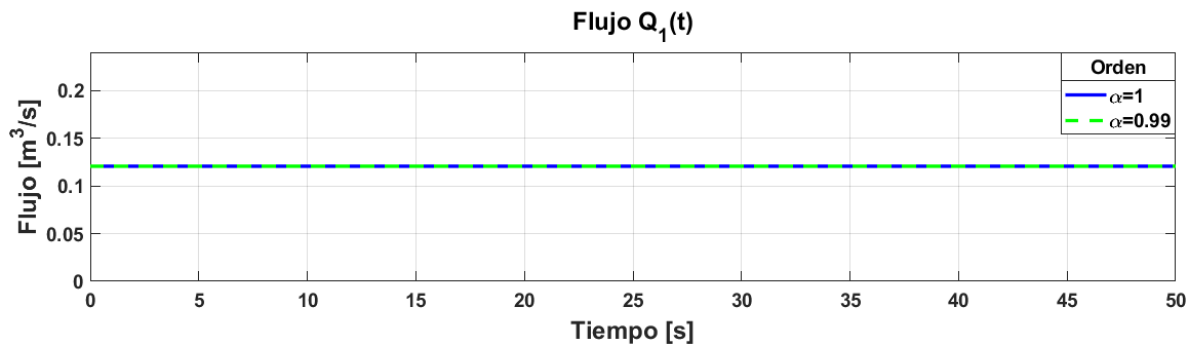


Figura 4.35: **Simulación I.** Flujo en la sección 1 del ducto.

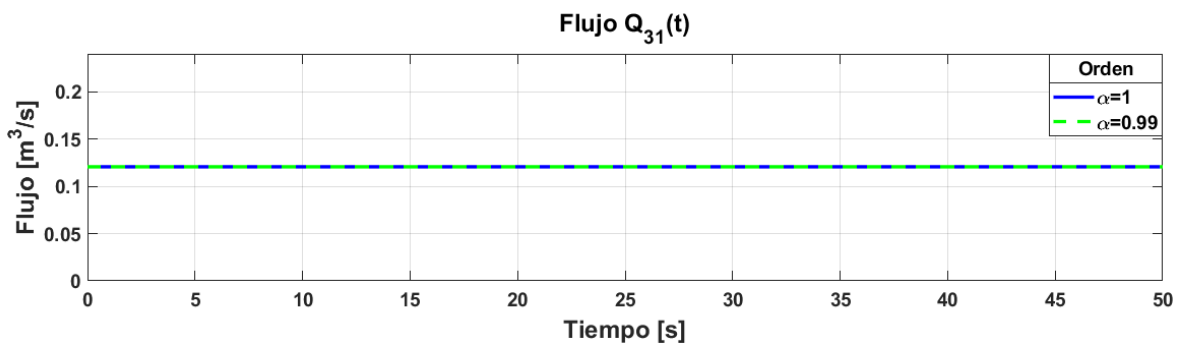


Figura 4.36: **Simulación I.** Flujo en la sección 31 del ducto.

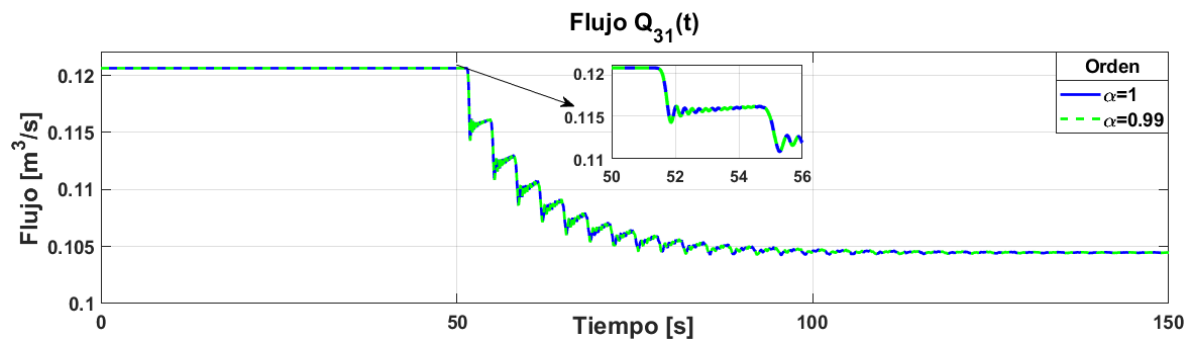


Figura 4.39: **Simulación II.** Flujo en la sección 31 del ducto.

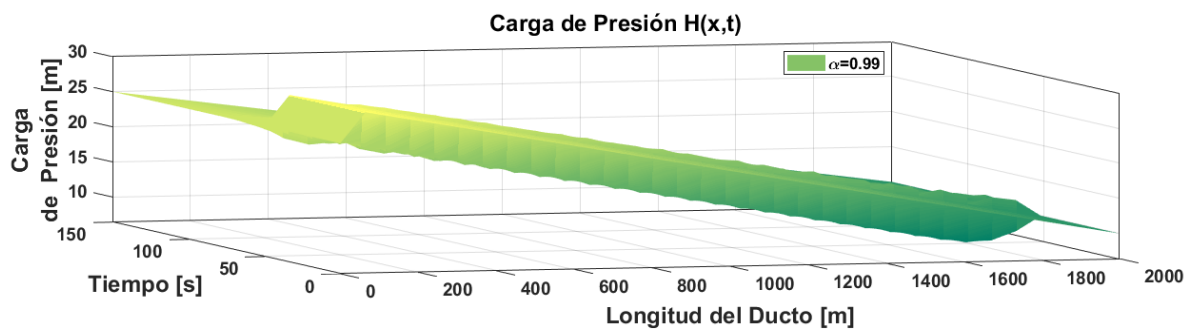


Figura 4.40: **Simulación II.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

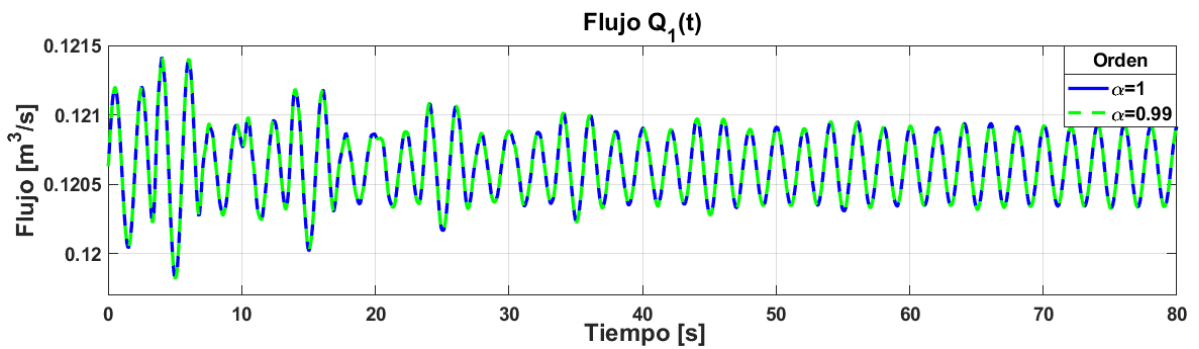


Figura 4.41: **Simulación III.** Flujo en la sección 1 del ducto.

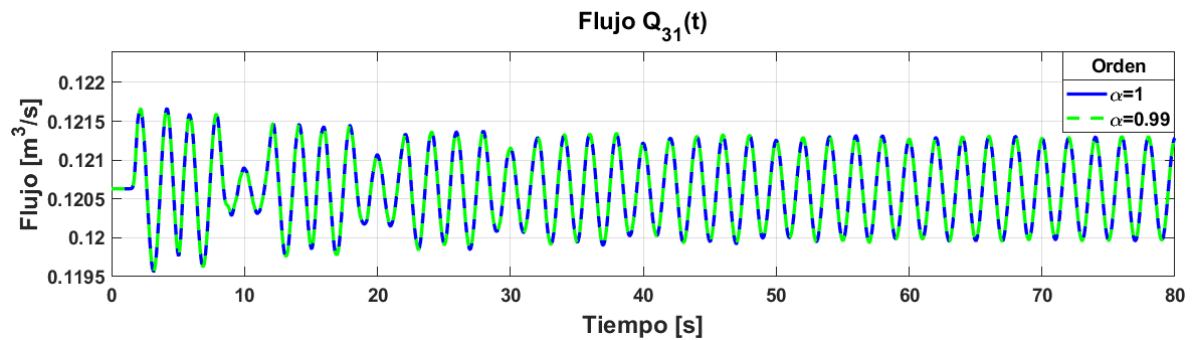


Figura 4.42: **Simulación III.** Flujo en la sección 31 del ducto.

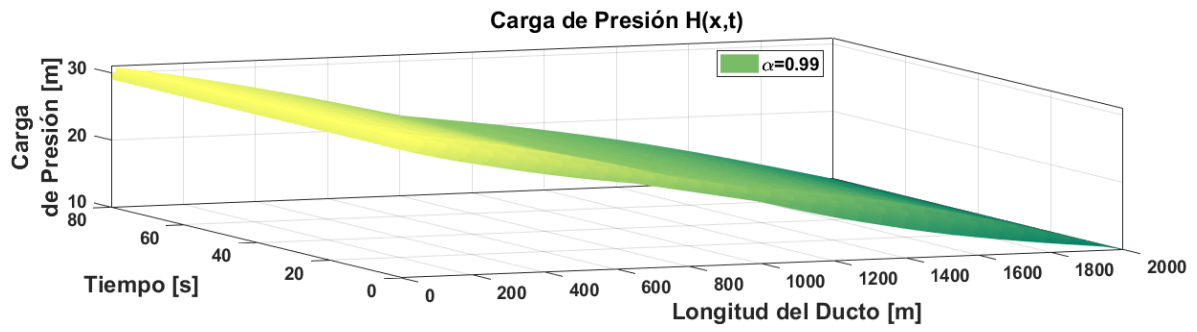


Figura 4.43: **Simulación III.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

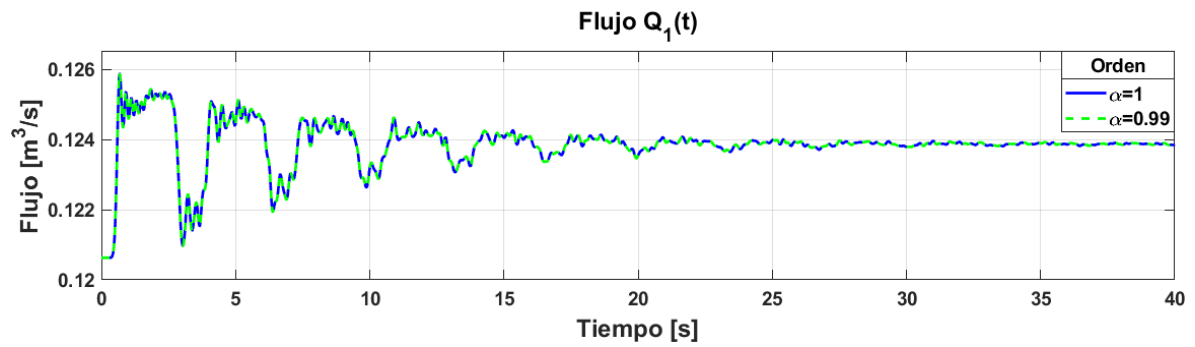


Figura 4.44: **Simulación IV.** Flujo en la sección 1 del ducto.

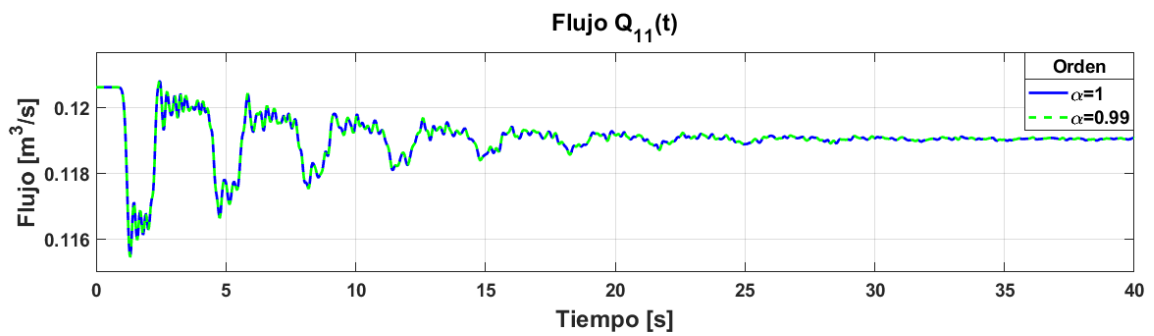


Figura 4.45: **Simulación IV.** Flujo en la sección 11 del ducto.

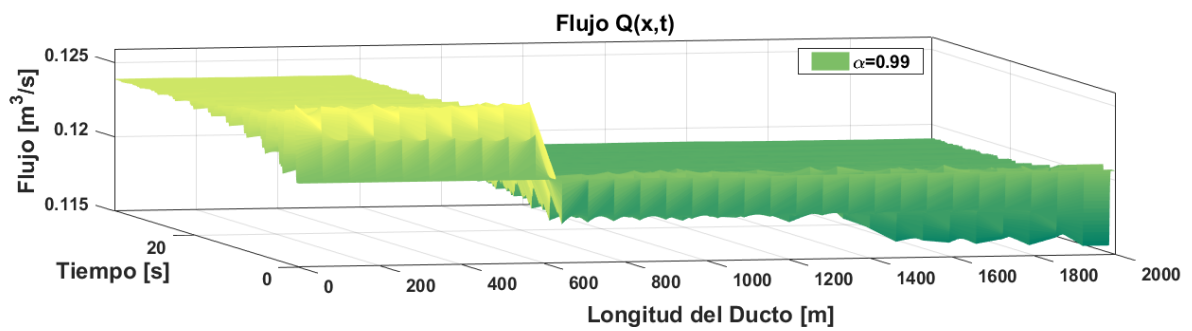


Figura 4.46: **Simulación IV.** Comportamiento del flujo a largo del ducto.



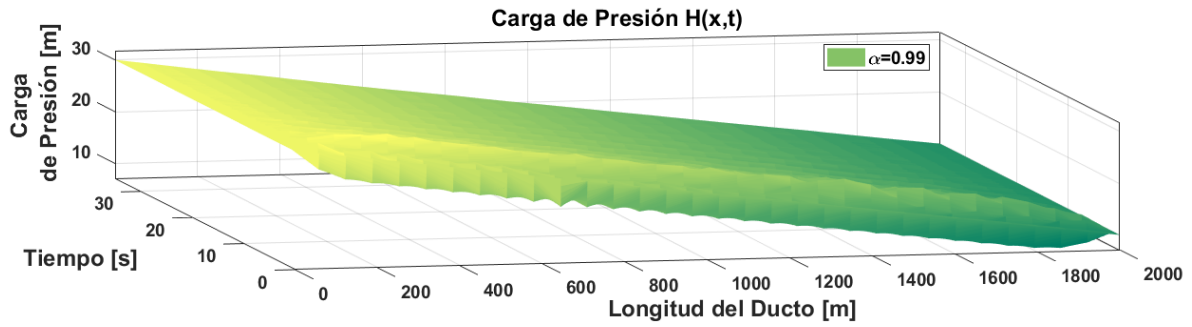


Figura 4.47: **Simulación IV.** Comportamiento de la carga de presión a lo largo del ducto.

#### 4.5. Análisis de error de modelado.

Como puede observarse en las Figuras 4.22 - 4.34 (simulación del modelo finito con el enfoque del cálculo conformable), es apreciable un ajuste adecuado entre cada una de las dinámicas que proporciona este modelo y las que proporciona el modelo finito con el enfoque clásico, a excepción de los resultados obtenidos en la simulación II (ver Figuras 4.25 y 4.26), donde es clara la existencia de cierto error en estado estable entre los flujos  $Q_1(t)$  y  $Q_{31}(t)$  de ambos modelos.

Por otra parte, en las Figuras 4.35 - 4.47 (simulación del modelo finito con el enfoque del cálculo fraccionario), es apreciable un excelente ajuste entre todas las dinámicas que producen el enfoque clásico y el fraccionario, sin embargo, resulta necesario cuantificar dicho ajuste mediante un análisis de error de modelado, en este trabajo se seleccionó el error medio cuadrático (MSE) para cumplir con dicho objetivo. La fórmula para calcular dicho error se muestra en la ecuación (4.6)

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2, \quad (4.6)$$

donde  $Y_i$  denota los datos obtenidos a partir de la simulación del modelo finito con el enfoque clásico,  $\hat{Y}_i$  los datos del modelo finito simulado mediante el enfoque del cálculo conformable o fraccionario (según corresponda), y  $n$ , el número total de datos.

En las Figuras 4.48 - 4.59 se muestran gráficas donde se puede visualizar la magnitud del error MSE calculado en las simulaciones II, II y IV del modelo finito conformable y fraccionario, recordando que al haber discretizado uniformemente el ducto en  $N = 31$  secciones, se obtiene que  $H_i \approx H(x, t) \quad \forall i = 2, \dots, 31$  y  $Q_i \approx Q(x, t) \quad \forall i = 1, \dots, 31$ , donde el subíndice  $i$  denota la sección espacial discretizada.

Como se observa en las Figuras 4.54 - 4.59, el modelo finito fraccionario con fricción constante, proporciona el mejor ajuste a las dinámicas del modelo finito clásico, en las que la fricción se calcula en función del flujo, pues proporciona errores MSE en la escala de  $10^{-26}$  (para el caso de  $Q_i$ ) y de  $10^{-19}$  (para el caso de  $H_i$ ), por lo que puede concluirse que este modelo representa fielmente las dinámicas del fluido en el ducto producidas por el modelo ordinario.

Se seleccionó al modelo finito clásico como estándar de validación, pues la metodología empleada para formular dicho modelo ha sido aplicada en diversas investigaciones que abordan el diseño e implementación de algoritmos de diagnóstico en ductos, ver p. ej. [11, 27, 28, 30].

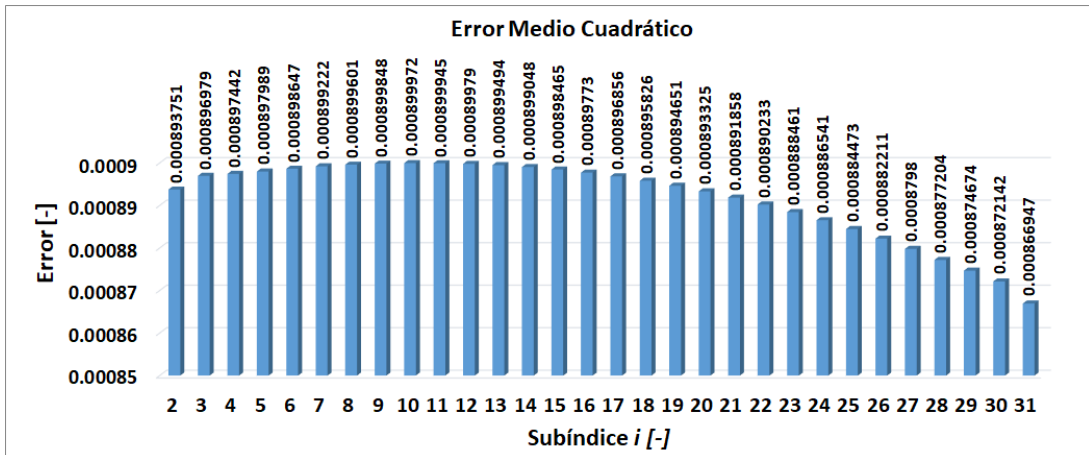


Figura 4.48: **Simulación II.** Error MSE entre las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito clásico y las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito conformable.

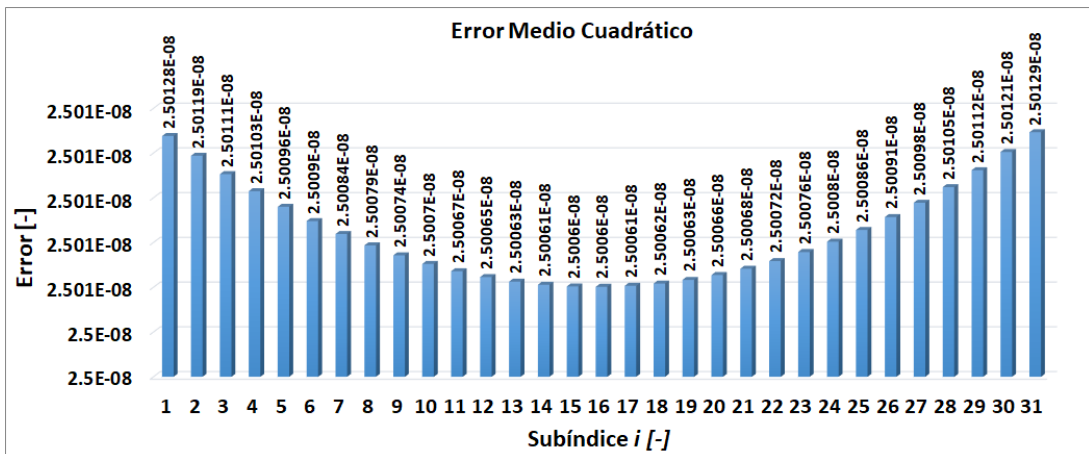


Figura 4.49: **Simulación II.** Error MSE entre los flujos  $Q_i$  del modelo finito clásico y los flujos  $Q_i$  del modelo finito conformable.

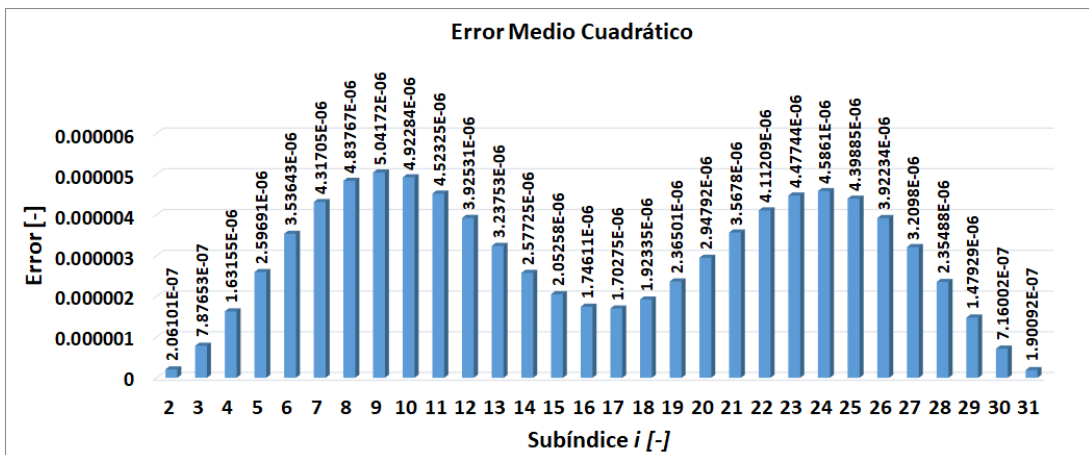


Figura 4.50: **Simulación III.** Error MSE entre las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito clásico y las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito conformable.

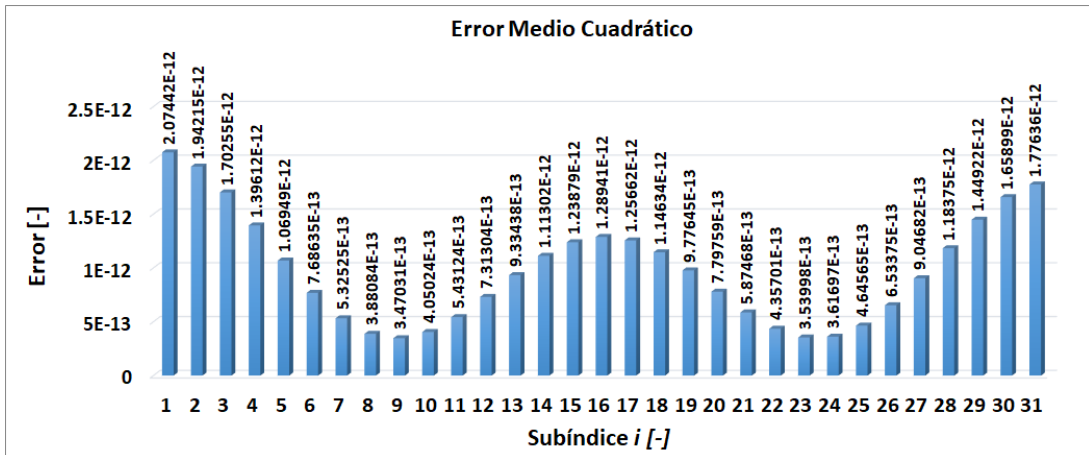


Figura 4.51: **Simulación III.** Error MSE entre los flujos  $Q_i$  del modelo finito clásico y los flujos  $Q_i$  del modelo finito conformable.

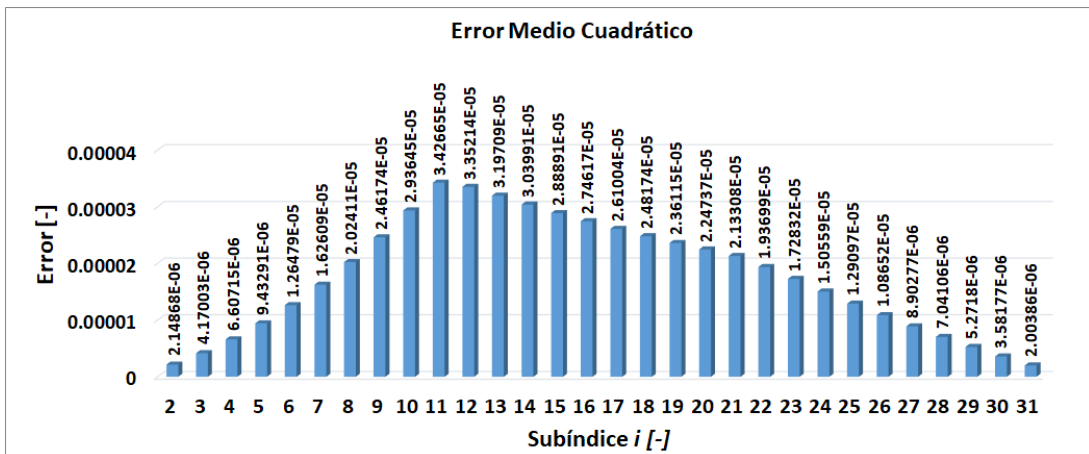


Figura 4.52: **Simulación IV.** Error MSE entre las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito clásico y las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito conformable.

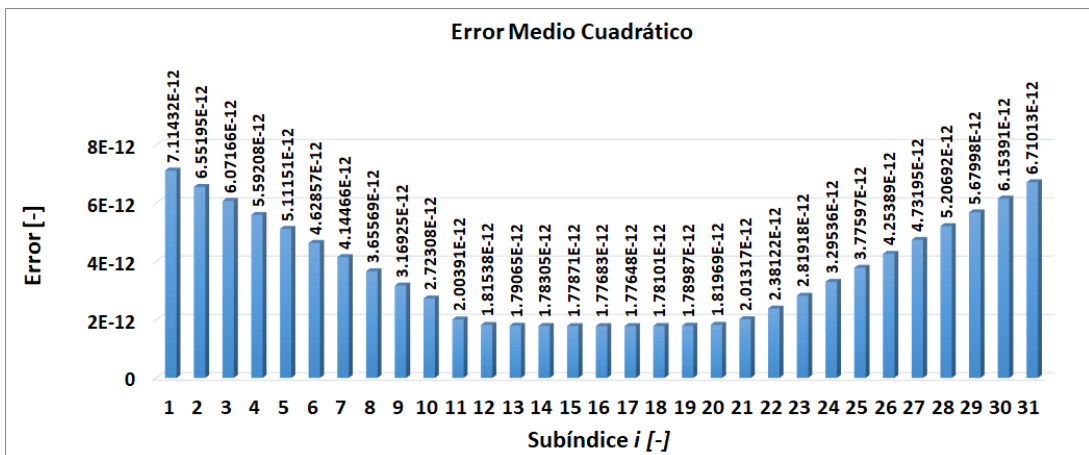


Figura 4.53: **Simulación IV.** Error MSE entre los flujos  $Q_i$  del modelo finito clásico y los flujos  $Q_i$  del modelo finito conformable.

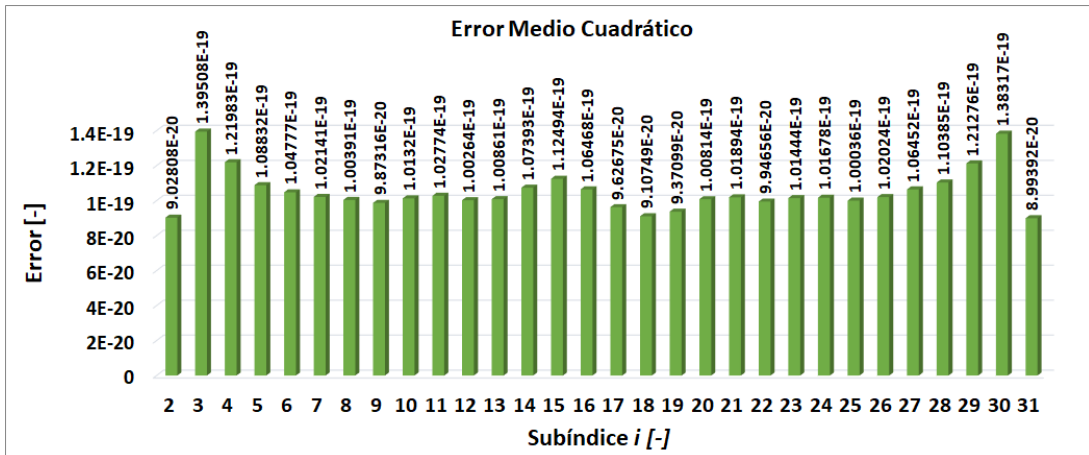


Figura 4.54: **Simulación II.** Error MSE entre las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito clásico y las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito fraccionario.

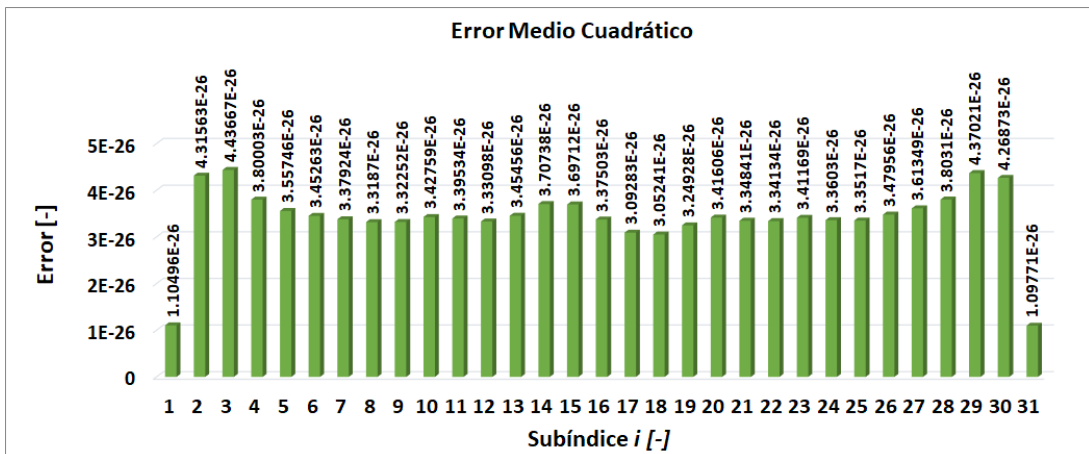


Figura 4.55: **Simulación II.** Error MSE entre los flujos  $Q_i$  del modelo finito clásico y los flujos  $Q_i$  del modelo finito fraccionario.

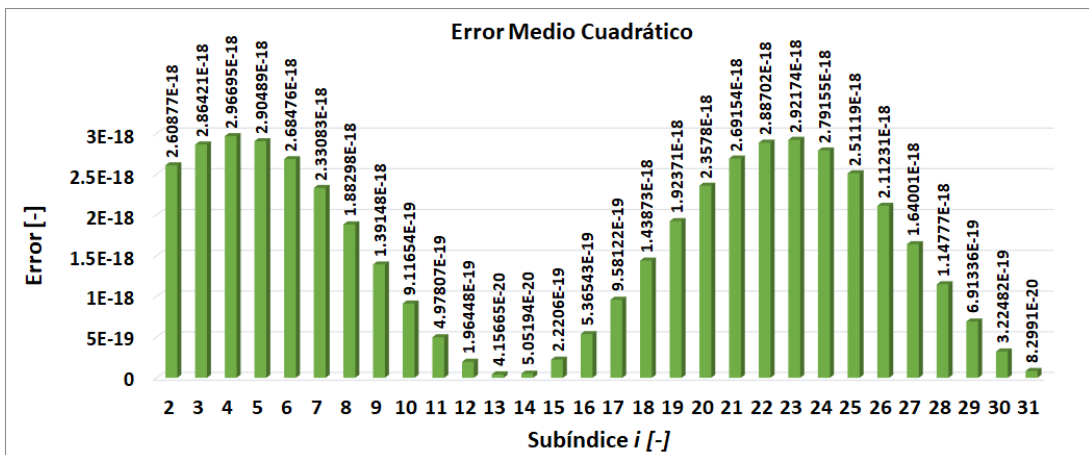


Figura 4.56: **Simulación III.** Error MSE entre las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito clásico y las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito fraccionario.

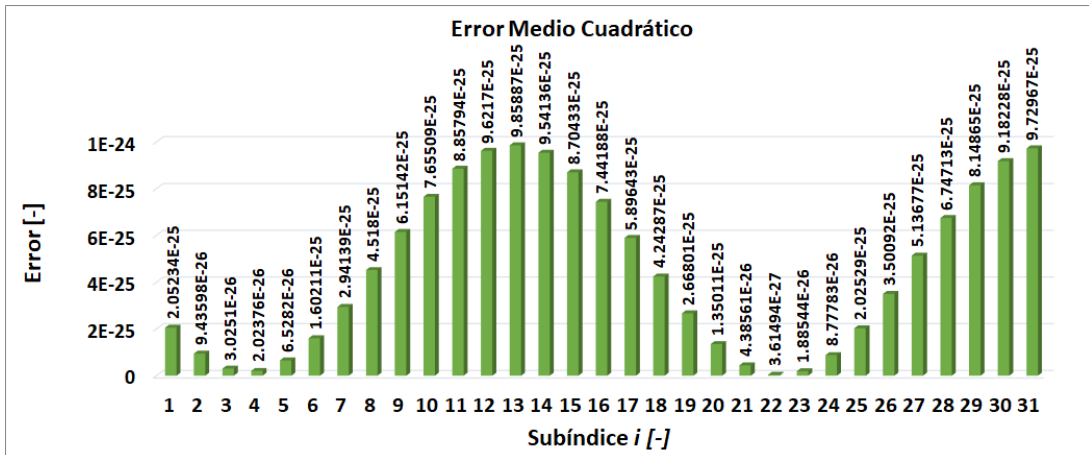


Figura 4.57: **Simulación III.** Error MSE entre los flujos  $Q_i$  del modelo finito clásico y los flujos  $Q_i$  del modelo finito fraccionario.

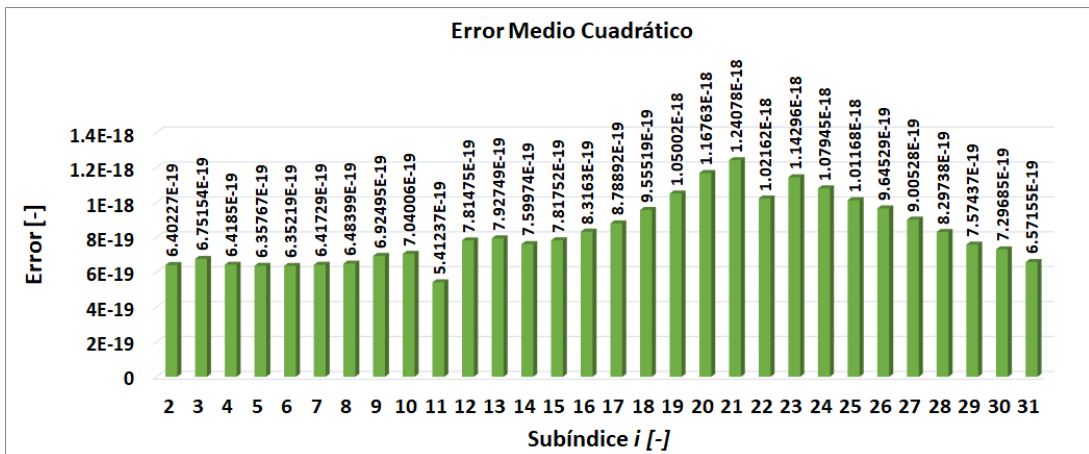


Figura 4.58: **Simulación IV.** Error MSE entre las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito clásico y las cargas de presión  $H_i$  del modelo finito fraccionario.

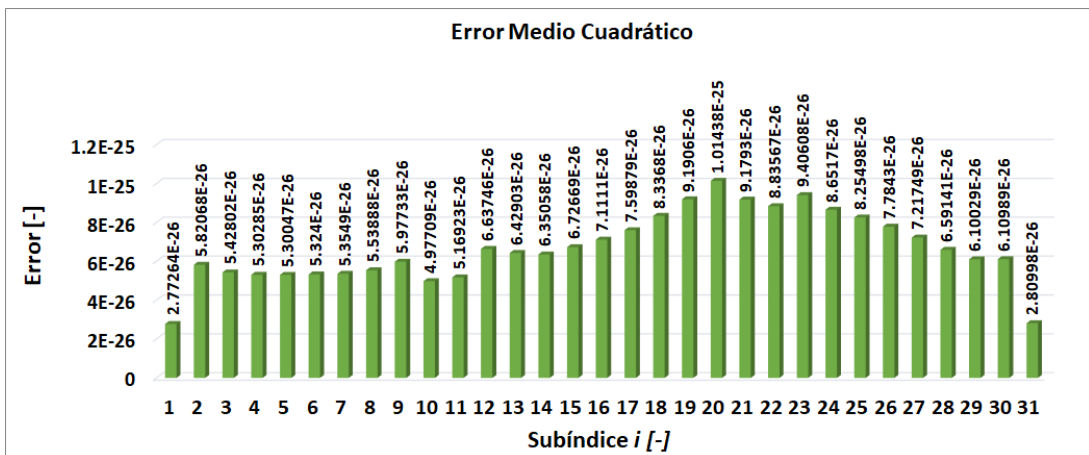


Figura 4.59: **Simulación IV.** Error MSE entre los flujos  $Q_i$  del modelo finito clásico y los flujos  $Q_i$  del modelo finito fraccionario.

# Capítulo 5

---

## Diseño del algoritmo de diagnóstico

---

En este capítulo se presenta, como primer caso de estudio, el diseño de un algoritmo de diagnóstico para la detección de una fuga en un ducto hidráulico, utilizando el cálculo clásico, posteriormente se generaliza el algoritmo de diagnóstico aplicando derivadas conformables y derivadas de tipo Caputo-Fabrizio, como segundo y tercer caso de estudio.

### 5.1. Algoritmo de diagnóstico clásico.

Utilizando las ecuaciones del sistema (2.6) con  $N = 2$ , se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \frac{a_1}{\Delta x_f} (H_{in} - H_2) + \mu(Q_1) \cdot Q_1 |Q_1|, \\ \dot{H}_2 &= \frac{a_2}{\Delta x_f} (Q_1 - Q_3 - \sigma_f \cdot \sqrt{H_2}), \\ \dot{Q}_2 &= \frac{a_1}{L - \Delta x_f} (H_2 - H_{out}) + \mu(Q_2) \cdot Q_2 |Q_2|,\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde las dos secciones se renombraron como  $\Delta x_1 = \Delta x_f$  y  $\Delta x_2 = L - \Delta x_f$ , por lo tanto, la posición de la fuga en el ducto está dada por el tamaño de la sección  $\Delta x_f \in [0, L]$ .

Con el objetivo de estimar los parámetros relacionados con la existencia de una fuga en el ducto, a partir de un número limitado de mediciones disponibles (comúnmente ubicadas en los extremos de la tubería), el sistema (5.1) puede extenderse con las *dinámicas* de dichos parámetros, y por lo tanto, observadores no lineales pueden ser diseñados para el sistema aumentado resultante (y la *ecuación de salida* correspondiente, que representa las mediciones disponibles). Asumiendo que los flujos en los extremos de la tubería son medidos directamente, se obtiene la siguiente ecuación de salida:

$$y(t) = [Q_1 \quad Q_2]^T.\tag{5.2}$$

El problema de detección y aislamiento de una fuga en la tubería, puede ser abordado a partir de las ecuaciones (5.1) y (5.2), mediante la estimación directa de los parámetros de la fuga, es decir, su posición  $\Delta x_f$  y su coeficiente  $\sigma_f$ . Para dicho objetivo, se consideran las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}_f &= 0, \\ \dot{\sigma}_f &= 0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Por lo tanto el vector de estado del sistema (5.1) se convierte en:

$$x(t) = [Q_1 \quad H_2 \quad Q_2 \quad \Delta x_f \quad \sigma_f]^T\tag{5.4}$$

Estableciendo las cargas de presión de la ecuación (5.1) como entradas del sistema en el vector  $u(t) = [H_{in} \ H_{out}]^T$ , puede obtenerse una representación en espacio de estados no lineal, con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t), \\ y(t) &= h(x(t)) = [h_1(x(t)) \ h_2(x(t))]^T.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Para el caso de cargas de presión constantes o de dinámica lenta  $u(t) = u_0$ , por lo tanto, la ecuación de estados puede reescribirse como:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_0) = F_{u_0}(x(t)), \quad (5.6)$$

cuya observabilidad puede comprobarse definiendo la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto z = \Phi(x),\end{aligned}\quad (5.7)$$

con

$$\Phi(x) = [h_1(x) \ L_{F_{u_0}} h_1(x) \ h_2(x) \ L_{F_{u_0}} h_2(x) \ L_{F_{u_0}}^2 h_2(x)]^T, \quad (5.8)$$

donde  $L_{F_{u_0}} h(x)$  denota la derivada de Lie de la función  $h(x)$  en dirección de  $F_{u_0}$ . La elección de  $\Phi(x)$  se fundamenta en que cualquier transformación de coordenadas puede emplearse, siempre que se preserven las propiedades de observabilidad necesarias para el diseño de un OAG [24].

Por lo tanto, el determinante de la matriz jacobiana de  $\Phi(x)$  es:

$$\Delta\Phi(x) = \frac{a_1^3 a_2 \cdot \sqrt{H_2} (\Delta x_f H_{out} + H_{in} L - H_{in} \Delta x_f - H_2 L)}{\Delta x_f^4 (L - \Delta x_f)^2}, \quad (5.9)$$

el cual es igual a cero cuando,

$$\Delta x_f (H_{in} - H_{out}) = L (H_{in} - H_2).$$

Esta condición muestra ser inconsistente con el sistema (5.1) en estado estable, y con la existencia de una fuga, razón por la cual puede concluirse que para cualquier entrada constante, el sistema es uniformemente observable. Por lo tanto, un observador de alta ganancia puede ser diseñado mediante:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t)) u(t) - K(\hat{x}(t)) \cdot [y(\hat{x}(t)) - y(x(t))]. \\ K(\hat{x}(t)) &= \left[ \frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial x} \right]^{-1} S_\lambda^{-1} C^T.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Como puede apreciarse en la ecuación (5.10), el algoritmo de observación consiste en una copia del modelo y un término de corrección  $K(\hat{x}(t))$  que asegura la convergencia del mismo, donde  $\frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial x}$  es la matriz Jacobiana de  $\Phi(x(t))$ , y  $\Phi(\hat{x}(t)) = \Phi(x(t))|_{x(t)=\hat{x}(t)}$ .

Debido a que  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ , las matrices  $S_\lambda$  y  $C$  son matrices diagonales por bloques dadas por  $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_p)$  y  $S_\lambda = \text{diag}(S_{\lambda_1}, \dots, S_{\lambda_p})$ , donde:

$$\begin{aligned}C_k &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad \forall k = 1, \dots, p, \\ S_{\lambda_k}(i, j) &= \frac{(-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1}}{\lambda^{i+j-1}} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n_k, \quad k = 1, \dots, p.\end{aligned}$$

Donde  $C_b^a = \frac{a!}{(a-b)!b!}$  y  $\lambda > 0$  es un parámetro de diseño.

### 5.1.1. Resultados obtenidos.

Considerando una tubería piloto con las características que se muestran en la Tabla 5.1, se llevó a cabo la simulación del algoritmo de diagnóstico clásico en el espacio de trabajo de MATLAB®. Se consideraron 3 casos de estudio, para los cuales se establecieron distintas posiciones y coeficientes de una fuga en el ducto, los cuales se presentan en la Tabla 5.2.

Tabla 5.1: Características del ducto.

$L$	$D$	$A_r$	$b$	$g$
132.56 m	0.105 m	0.08569 m <sup>2</sup>	1250 m/s	9.8 m/s <sup>2</sup>

Tabla 5.2: Prámetros de la fuga.

Caso	$\Delta x_f$ [m]	$\sigma_f$ [m <sup>2</sup> ]
I	45	0.0005
II	60	0.001
III	75	0.002

Estableciendo el **coeficiente de fricción** como un **parámetro que es función del flujo**, y el parámetro de ajuste  $\lambda = 4.888$  para todos los casos de estudio, se obtuvieron los resultados que se muestran en las Figuras 5.1-5.6.

En las Figuras 5.1, 5.3 y 5.5 se puede apreciar el incremento del flujo de entrada  $Q_1(t)$  y el decremento del flujo de salida  $Q_2(t)$ , a causa de la fuga existente en el ducto. Por otro lado, en las Figuras 5.2, 5.4 y 5.6 se puede apreciar la correcta estimación de la posición y el coeficiente de la fuga, correspondientes a cada caso de estudio.

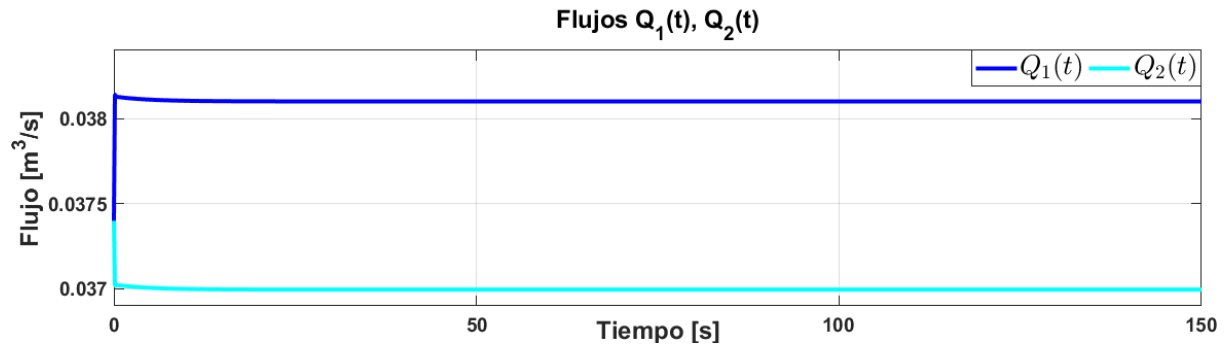


Figura 5.1: **Caso I.** Comportamiento del flujo en el ducto.



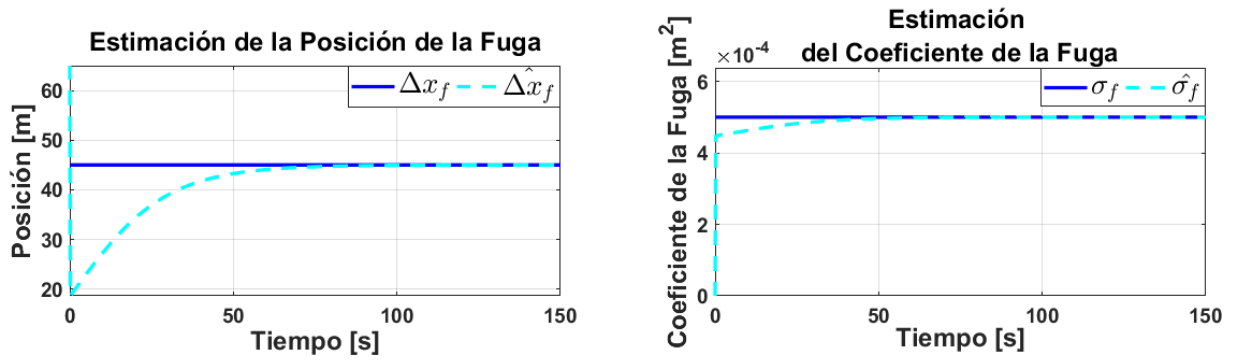


Figura 5.2: **Caso I.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

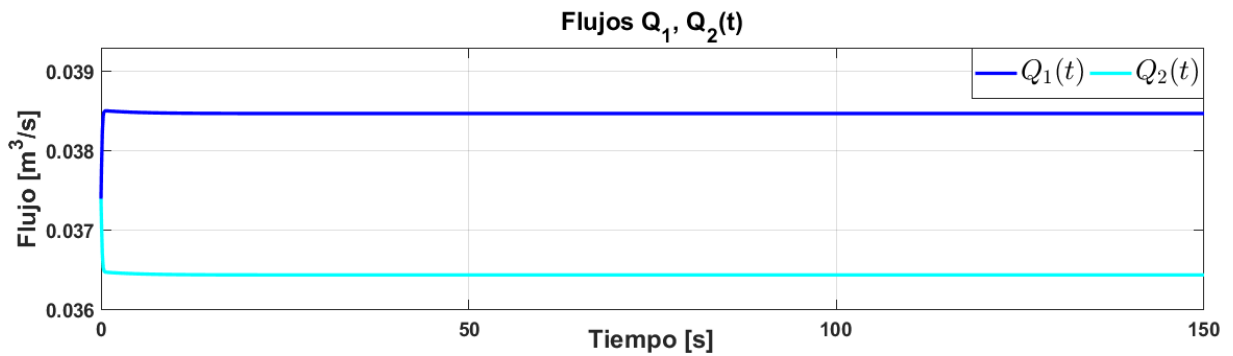


Figura 5.3: **Caso II.** Comportamiento del flujo en el ducto.

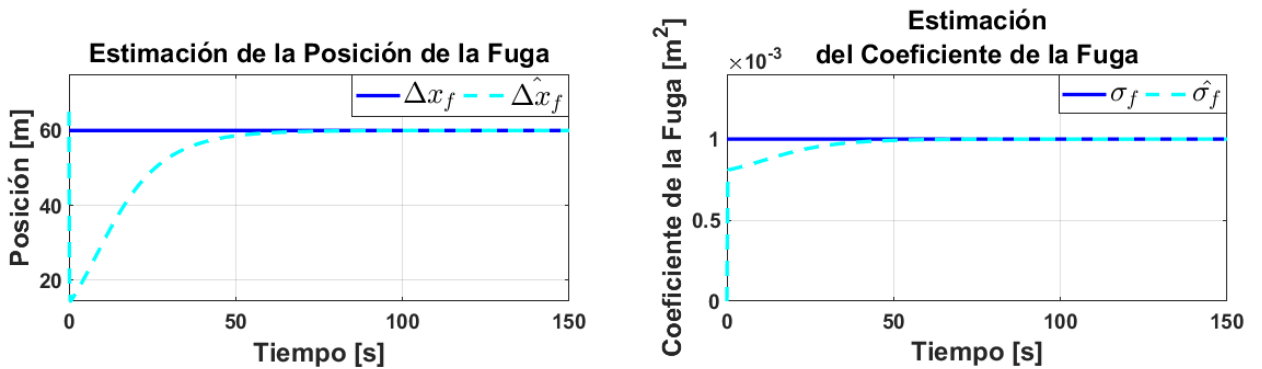


Figura 5.4: **Caso II.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

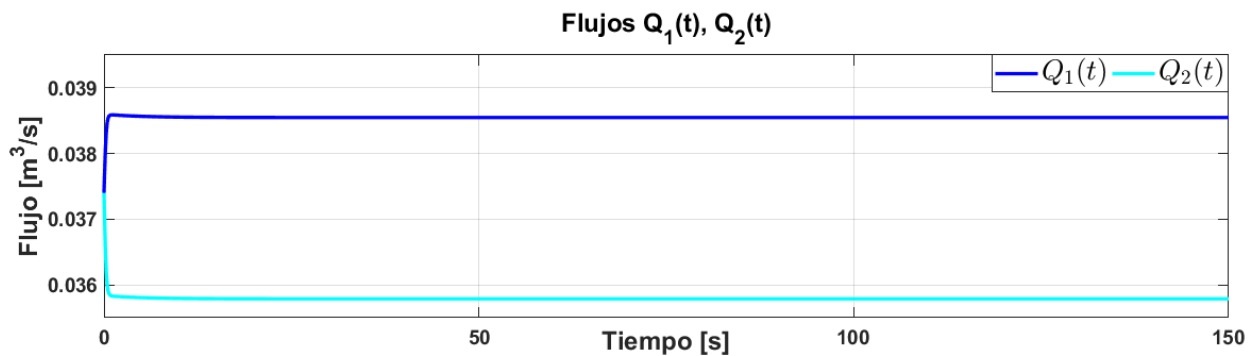


Figura 5.5: **Caso III.** Comportamiento del flujo en el ducto.

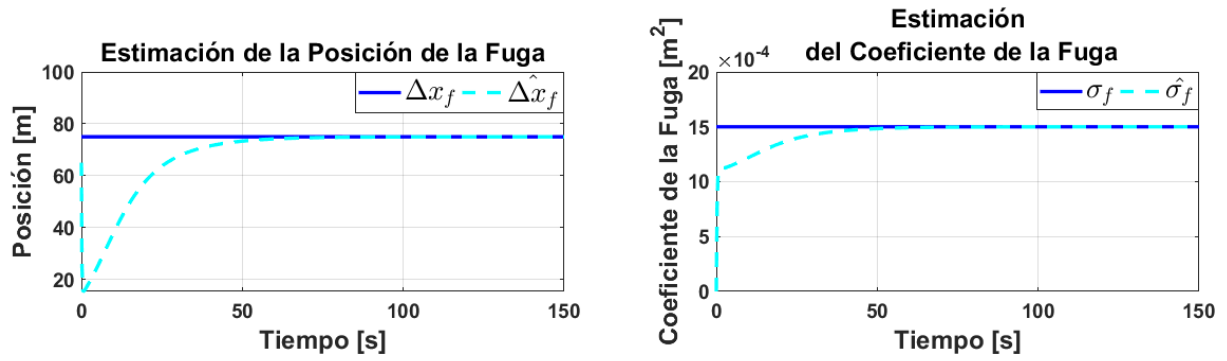


Figura 5.6: **Caso III.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

Como puede apreciarse en la Figura 5.2, el error de estimación es considerablemente pequeño (menor al 1%, correspondiente a  $e_1(t) = \Delta x_f - \hat{\Delta x}_f \leq 0.5 \text{ m}$ , o  $e_2(t) = \sigma_f - \hat{\sigma}_f \leq 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ), en  $t \approx 70$  segundos para el caso de la estimación de la posición de la fuga en el ducto, y en  $t \approx 40$  segundos para la estimación del coeficiente de la fuga. Para el segundo caso de estudio, en la Figura 5.4 puede observarse que  $e(t)$  es lo suficientemente pequeño, en  $t \approx 65$  segundos para la estimación de la posición de la fuga, y en  $t \approx 45$  segundos para el caso del coeficiente de la fuga. Finalmente, en la Figura 5.6 se puede observar que el error de estimación es lo suficientemente pequeño en  $t \approx 70$  segundos, y en  $t \approx 50$  segundos, para el caso de la estimación de la posición y el coeficiente de la fuga, respectivamente.

## 5.2. Algoritmo de diagnóstico conformable.

A partir del modelo del ducto definido en el sistema (4.3), se obtiene el siguiente modelo finito, empleando la definición de la derivada conformable:

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(Q_1)(t) &= \frac{a_1}{\Delta x_f} (H_{in} - H_2) + \mu Q_1 |Q_1|, \\
 T_\alpha(H_2)(t) &= \frac{a_2}{\Delta x_f} (Q_1 - Q_3 - \sigma_f \cdot \sqrt{H_2}), \\
 T_\alpha(Q_2)(t) &= \frac{a_1}{L - \Delta x_f} (H_2 - H_{out}) + \mu Q_2 |Q_2|.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Considerando el vector de estados (5.4), el vector de entradas  $u(t) = [H_{in} \ H_{out}]^T$  y la ecuación de salida (5.2), puede obtenerse la siguiente representación en espacio de estados no lineal:

$$\begin{aligned}
 T_\alpha(x)(t) &= f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t), \\
 y(t) &= h(x(t)) = [h_1(x(t)) \ h_2(x(t))]^T.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (5.12) y la metodología de diseño descrita en la sección 5.1, se obtuvo el siguiente algoritmo de observación:

$$T_\alpha(\hat{x}(t)) = f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t)) u(t) - \left[ \frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial x} \right]^{-1} S_\lambda^{-1} C^T [\hat{y}(t) - y(t)]. \tag{5.13}$$

### 5.2.1. Resultados obtenidos.

Considerando la tubería piloto caracterizada en la Tabla 5.1, se llevó a cabo la simulación del algoritmo de diagnóstico conformable en el espacio de trabajo de MATLAB®, estableciendo los

casos de estudio abordados en la sección 10.1 y presentados en la Tabla 5.2. Por lo tanto, especificando el **coeficiente de fricción** como un **parámetro constante** de magnitud  $f = 0.005$ , el orden de las derivadas conformables  $\alpha = 0.99$  y el parámetro de ajuste  $\lambda = 4.888$  en todas las simulaciones, se obtuvieron los resultados que se muestran en las Figuras 5.7-5.12.

En las Figuras 5.7, 5.9 y 5.11 se puede apreciar el incremento del flujo de entrada  $Q_1(t)$  y el decremento del flujo de salida  $Q_2(t)$ , a causa de la fuga existente en el ducto. Por otro lado, en las Figuras 5.8, 5.10 y 5.12 se puede apreciar la correcta estimación de la posición y el coeficiente de la fuga, correspondientes a cada caso de estudio.

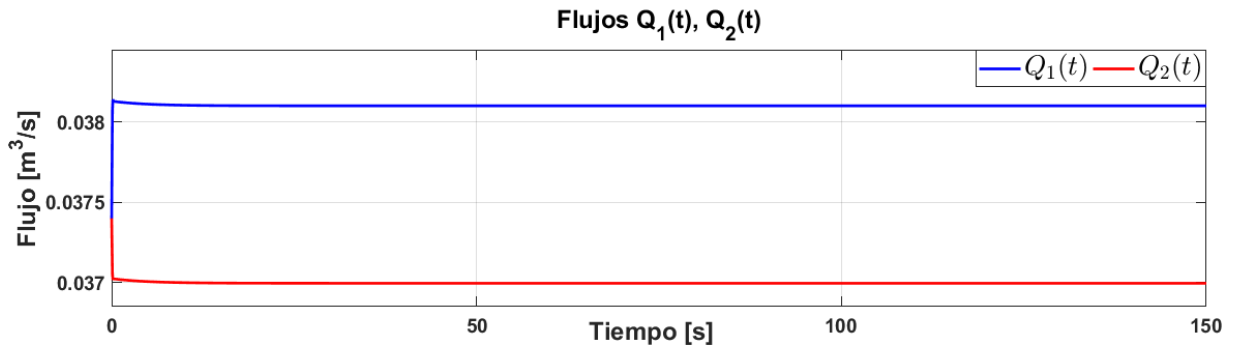


Figura 5.7: **Caso I.** Comportamiento del flujo en el ducto.

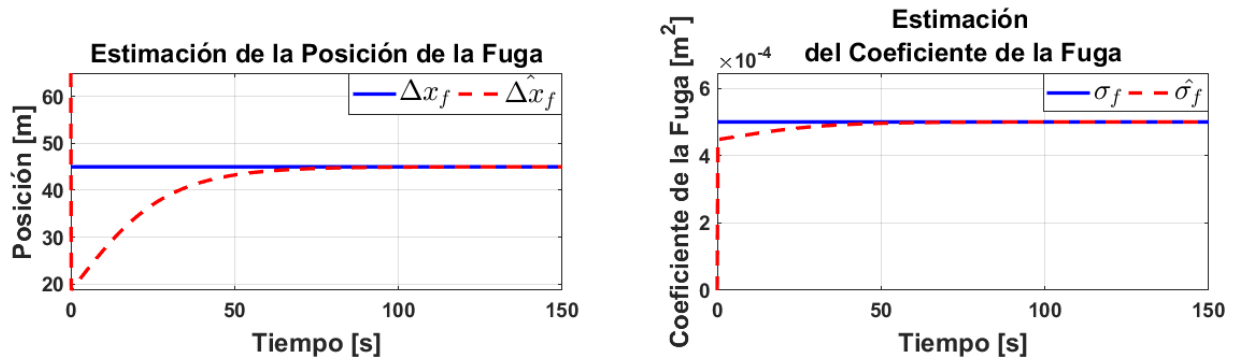


Figura 5.8: **Caso II.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

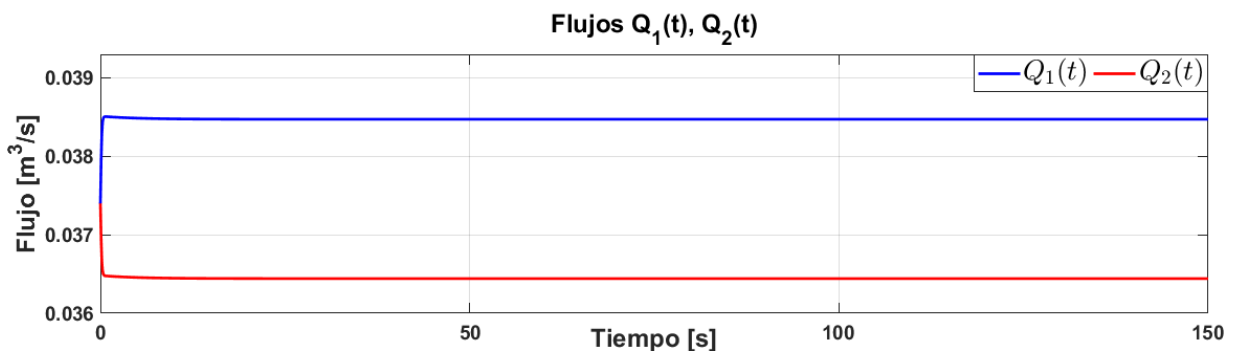


Figura 5.9: **Caso I.** Comportamiento del flujo en el ducto.

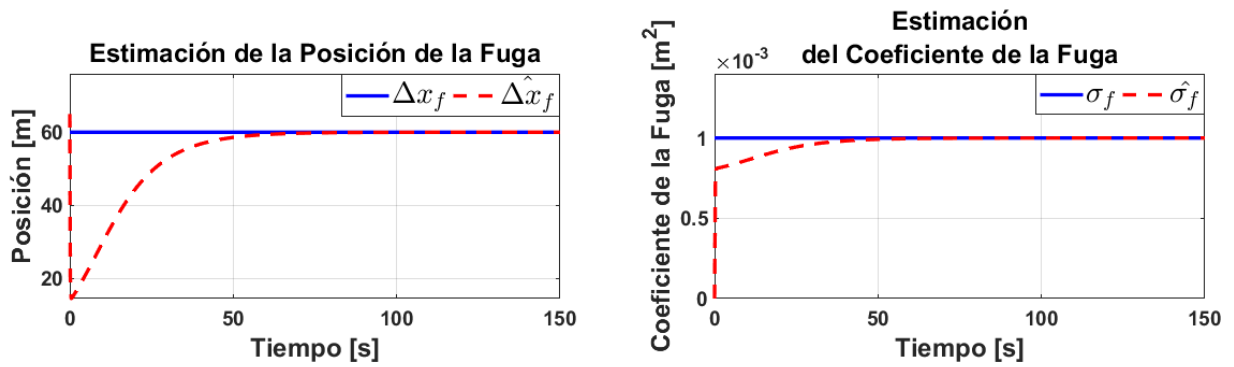


Figura 5.10: **Caso II.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

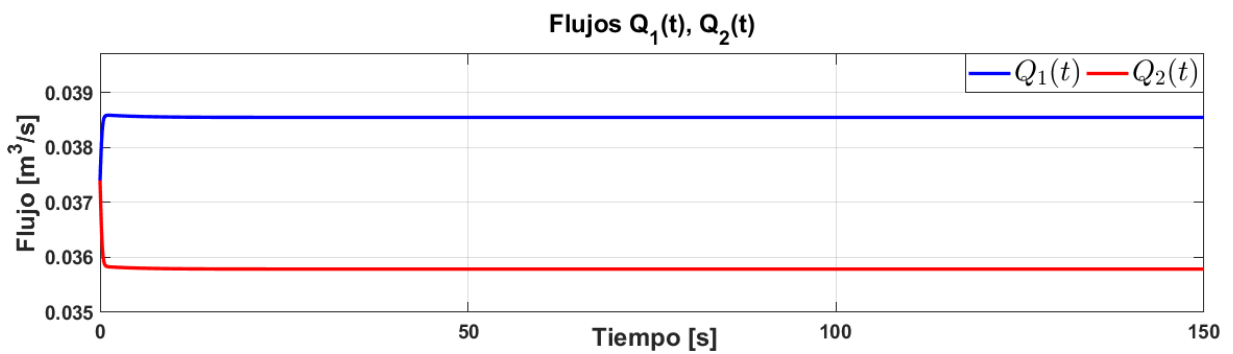


Figura 5.11: **Caso III.** Comportamiento del flujo en el ducto.

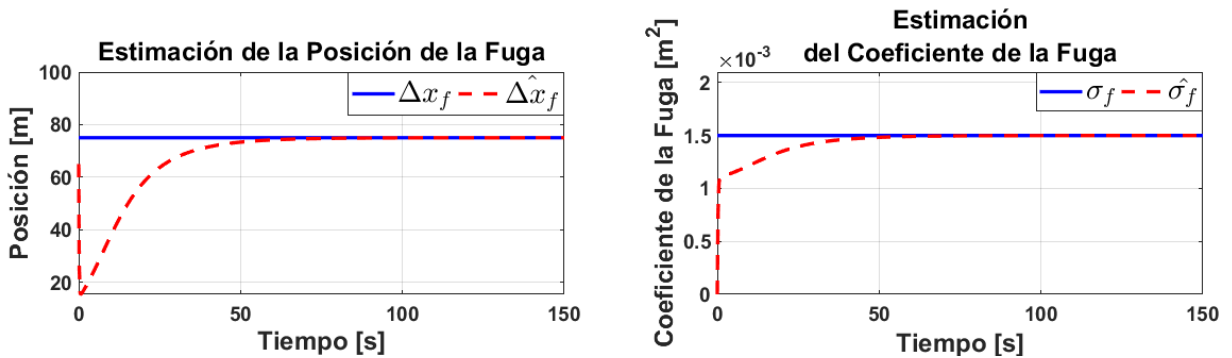


Figura 5.12: **Caso III.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

Como puede apreciarse en la Figura 5.8, el error de estimación es considerablemente pequeño (menor al 1%, correspondiente a  $e_1(t) = \Delta x_f - \hat{\Delta x}_f \leq 0.5 \text{ m}$ , o  $e_2(t) = \sigma_f - \hat{\sigma}_f \leq 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ), en  $t \approx 70$  segundos para el caso de la estimación de la posición de la fuga en el ducto, y en  $t \approx 40$  segundos para la estimación del coeficiente de la fuga. Para el segundo caso de estudio, en la Figura 5.10 puede observarse que  $e(t)$  es lo suficientemente pequeño, en  $t \approx 65$  segundos para la estimación de la posición de la fuga, y en  $t \approx 45$  segundos para el caso del coeficiente de la fuga. Finalmente, en la Figura 5.12 se puede observar que el error de estimación es lo suficientemente pequeño en  $t \approx 70$  segundos, y en  $t \approx 50$  segundos, para el caso de la estimación de la posición y el coeficiente de la fuga, respectivamente.

### 5.3. Algoritmo de diagnóstico fraccionario.

A partir del modelo del ducto definido en el sistema (4.5), se obtiene el siguiente modelo finito, empleando la definición de la derivada fraccionario de Caputo-Fabrizio-Caputo:

$$\begin{aligned} {}_0^{CF}D_t^\alpha Q_1(t) &= \frac{a_1}{\Delta x_f} (H_{in} - H_2) + \mu Q_1 |Q_1|, \\ {}_0^{CF}D_t^\alpha H_2(t) &= \frac{a_2}{\Delta x_f} (Q_1 - Q_3 - \sigma_f \cdot \sqrt{H_2}), \\ {}_0^{CF}D_t^\alpha Q_2(t) &= \frac{a_1}{L - \Delta x_f} (H_2 - H_{out}) + \mu Q_2 |Q_2|. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Considerando el vector de estados (5.4), el vector de entradas  $u(t) = [H_{in} \ H_{out}]^T$  y la ecuación de salida (5.2), puede obtenerse la siguiente representación en espacio de estados no lineal:

$$\begin{aligned} {}_0^{CF}D_t^\alpha x(t) &= f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t), \\ y(t) &= h(x(t)) = [h_1(x(t)) \ h_2(x(t))]^T. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (5.15) y la metodología de diseño descrita en la sección 5.1, se obtuvo el siguiente algoritmo de observación:

$${}_0^{CF}D_t^\alpha \hat{x}(t) = f(\hat{x}(t)) + g(\hat{x}(t)) u(t) - \left[ \frac{\partial \Phi(\hat{x}(t))}{\partial x} \right]^{-1} S_\lambda^{-1} C^T [\hat{y}(t) - y(t)]. \quad (5.16)$$

#### 5.3.1. Resultados obtenidos.

Considerando la tubería piloto caracterizada en la Tabla 5.1, se llevó a cabo la simulación del algoritmo de diagnóstico fraccionario en el espacio de trabajo de MATLAB®, estableciendo los casos de estudio abordados en la sección 10.1 y presentados en la Tabla 5.2. Por lo tanto, considerando el **coeficiente de fricción** como un **parámetro constante** de magnitud  $f = 0.005$ , el orden de las derivadas fraccionarias  $\alpha = 0.99$  y el parámetro de ajuste  $\lambda = 4.888$  en todas las simulaciones, se obtuvieron los resultados que se muestran en las Figuras 5.13 - 5.18.

En las Figuras 5.13, 5.15 y 5.17 se puede apreciar el incremento del flujo de entrada  $Q_1(t)$  y el decremento del flujo de salida  $Q_2(t)$ , a causa de la fuga existente en el ducto. Por otro lado, en las Figuras 5.14, 5.16 y 5.18 se puede apreciar la correcta estimación de la posición y el coeficiente de la fuga, correspondientes a cada caso de estudio.

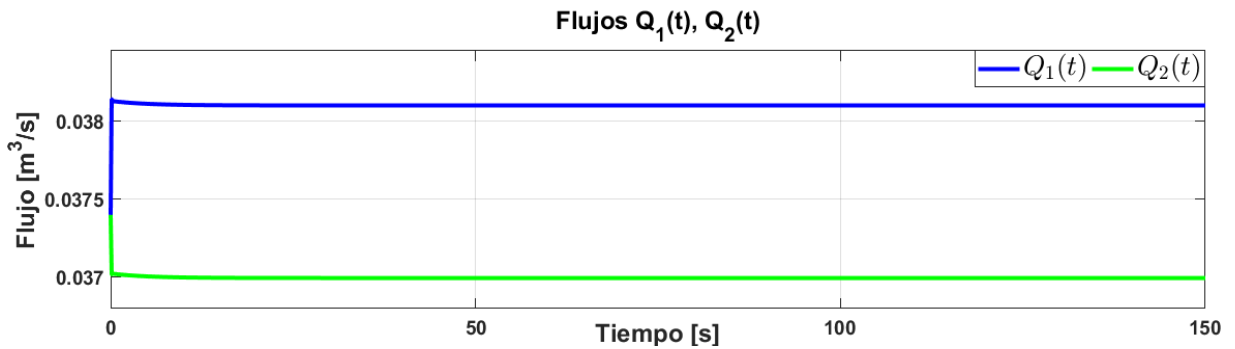


Figura 5.13: **Caso I.** Comportamiento del flujo en el ducto.

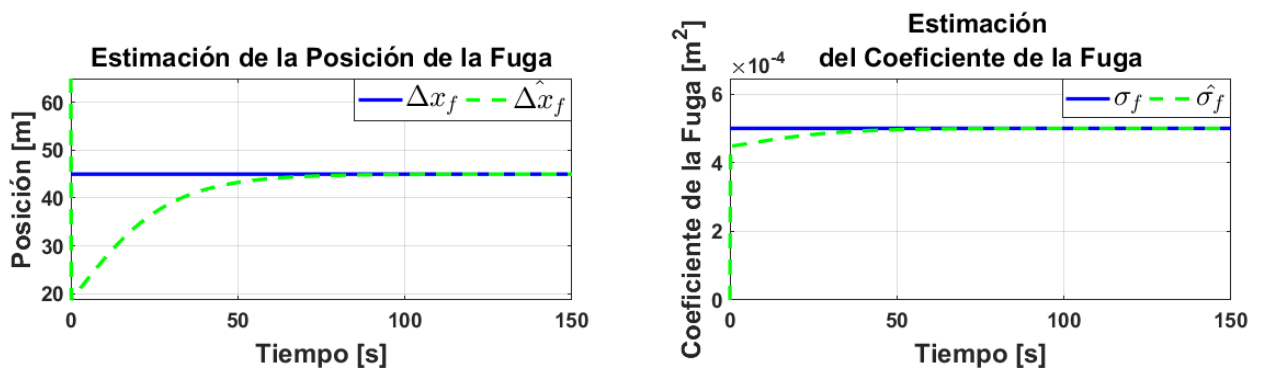


Figura 5.14: **Caso I.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

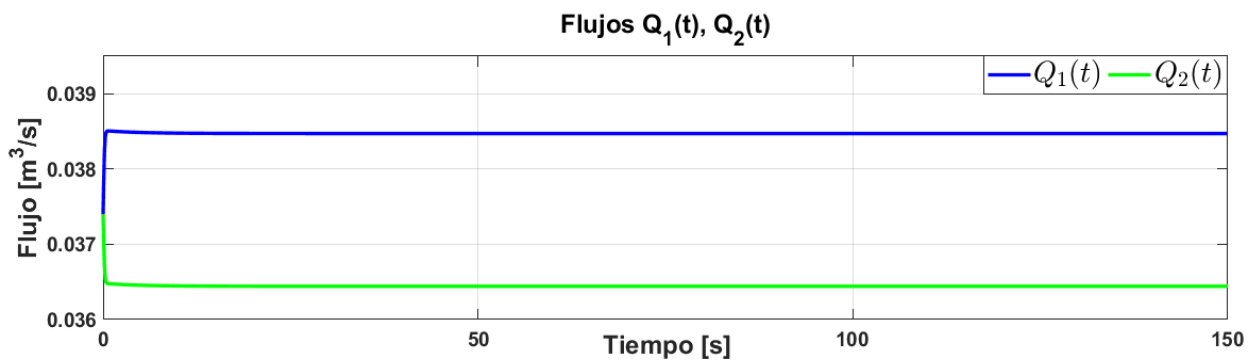


Figura 5.15: **Caso II.** Comportamiento del flujo en el ducto.

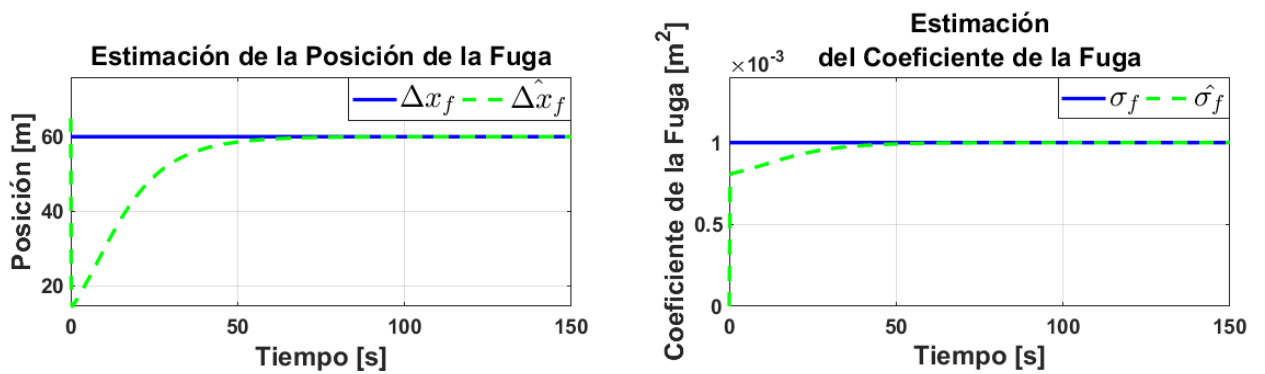


Figura 5.16: **Caso II.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

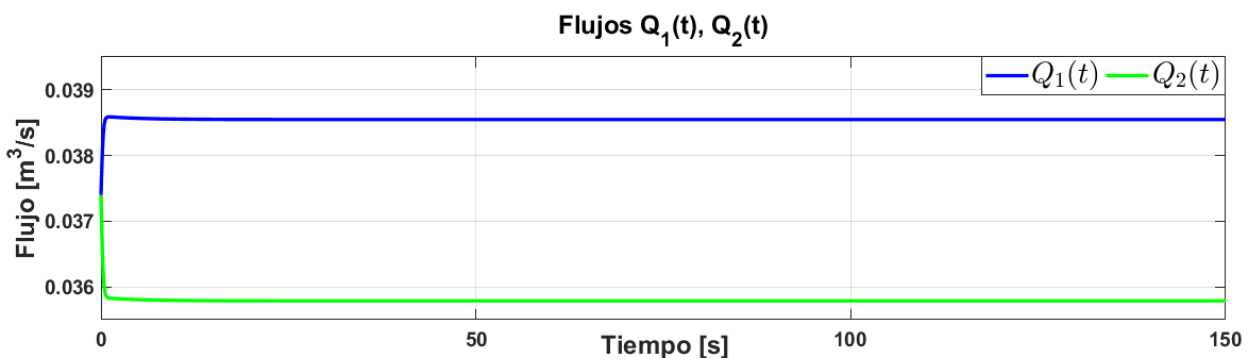


Figura 5.17: **Caso III.** Comportamiento del flujo en el ducto.

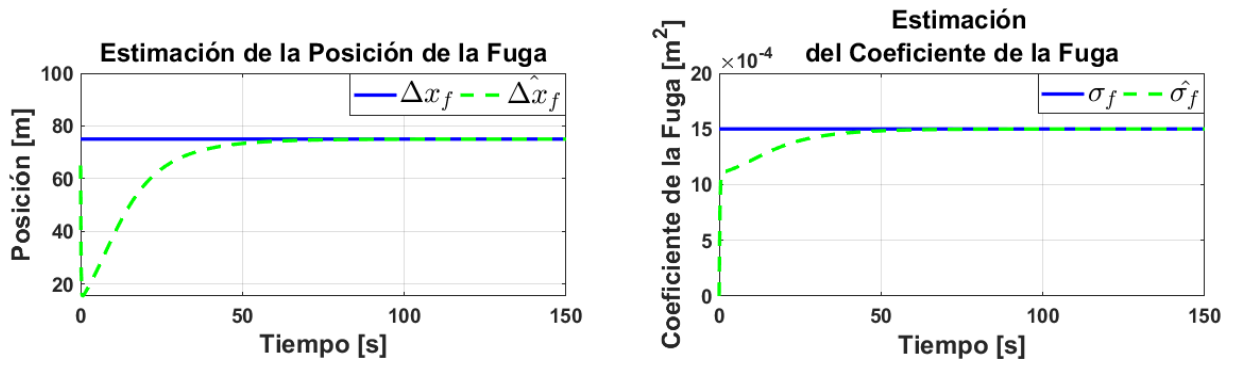


Figura 5.18: **Caso III.** Estimación de la posición y el coeficiente de la fuga en el ducto.

Como puede apreciarse en la Figura 5.14, el error de estimación es considerablemente pequeño (menor al 1%, correspondiente a  $e_1(t) = \Delta x_f - \hat{\Delta x}_f \leq 0.5 \text{ m}$ , o  $e_2(t) = \sigma_f - \hat{\sigma}_f \leq 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ), en  $t \approx 70$  segundos para el caso de la estimación de la posición de la fuga en el ducto, y en  $t \approx 40$  segundos para la estimación del coeficiente de la fuga. Para el segundo caso de estudio, en la Figura 5.16 puede observarse que  $e(t)$  es lo suficientemente pequeño, en  $t \approx 65$  segundos para la estimación de la posición de la fuga, y en  $t \approx 45$  segundos para el caso del coeficiente de la fuga. Finalmente, en la Figura 5.18 se puede observar que el error de estimación es lo suficientemente pequeño en  $t \approx 70$  segundos, y en  $t \approx 50$  segundos, para el caso de la estimación de la posición y el coeficiente de la fuga, respectivamente.

# Capítulo 6

## Aproximación del factor de fricción

En la Figura 6.1 se muestra el denominado diagrama de Moody [44], el cual es la representación gráfica en escala doblemente logarítmica del factor de fricción en función del número de Reynolds ( $Re$ ) y la rugosidad relativa de una tubería ( $\epsilon_r$ ). Se pueden distinguir dos situaciones diferentes, el caso en que el flujo sea laminar y el caso en que el flujo sea turbulento.

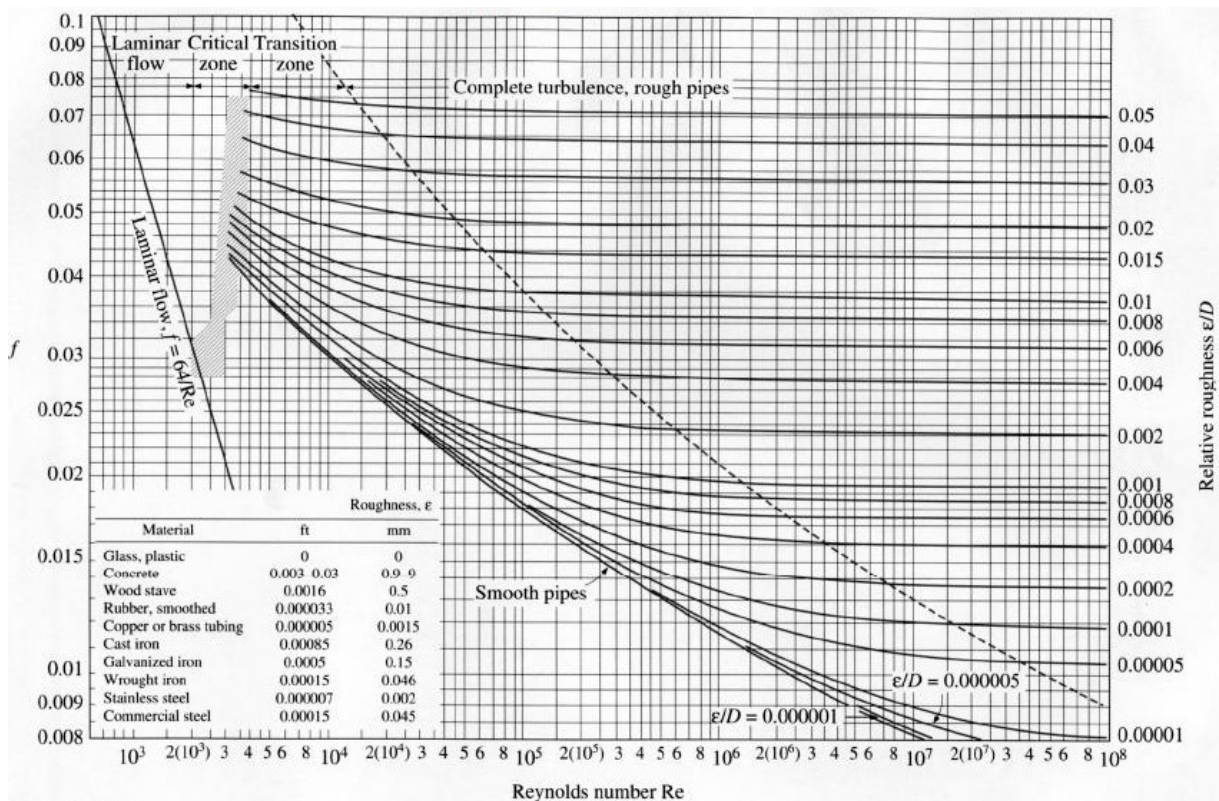


Figura 6.1: Diagrama de Moody.

En el caso de flujo laminar ( $Re \leq 2100$ ), el factor de fricción depende únicamente del número de Reynolds, y se usa la ecuación de Hagen-Poiseuille para calcularlo:

$$f = 64/Re. \quad (6.1)$$

En el caso de flujo turbulento ( $Re \geq 4 \times 10^3$ ), el factor de fricción depende tanto del número de Reynolds, como de la rugosidad relativa de la tubería, por esta razón, se representa mediante una familia de curvas, una para cada valor del parámetro  $\epsilon_r = \epsilon/D$ , donde  $\epsilon$  es el valor de la



rugosidad absoluta, es decir la longitud (habitualmente en milímetros) de la rugosidad directamente medible en la tubería; se puede utilizar la ecuación de Colebrook para generar dichas curvas, pues como se ha mencionado previamente, la ecuación más exacta para calcular el coeficiente de fricción en un ducto, es la ecuación del Colebrook, sin embargo, ya se han expuesto las desventajas que presenta, así como las diversas propuestas de aproximaciones explícitas de dicha ecuación, para el cálculo de éste parámetro.

En este trabajo, se propone la siguiente aproximación explícita del coeficiente de fricción, utilizando la función de Mittag - Leffler:

$$\hat{f} = C_1 \cdot E_{\alpha_1, \beta_1} (a_1 \text{Re}^{\alpha_1}) + C_2 \cdot E_{\alpha_2, \beta_2} (a_2 \varepsilon_r^{\alpha_2}), \quad (6.2)$$

donde  $\text{Re}$  es el número de Reynolds,  $\varepsilon_r$  la rugosidad relativa, y los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ , son términos constantes que deberán optimizarse para obtener una aproximación precisa del coeficiente de fricción. Para llevar a cabo dicha tarea se propone la siguiente metodología:

- Seleccionar un número  $n$  de valores de rugosidades relativas en el rango de  $0 \leq \varepsilon_r \leq 0.05$ . En este trabajo se seleccionó  $n = 13$ . Por lo tanto:  
 $\varepsilon_r \in \{0, 1 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 0.001, 0.002, 0.005, 0.01, 0.02, 0.04, 0.05\}$ .

- Calcular  $f$  para todo el rango completo de número de Reynolds, es decir, para  $4000 \leq \text{Re} \leq 1 \times 10^8$ , con un paso de discretización  $\Delta \text{Re} = 1 \times 10^4 \text{ Re}$ ; utilizando la ecuación de Colebrook.

- Optimizar los parámetros que componen la aproximación explícita  $\hat{f}$ , mediante la función costo:

$$J(f_i, \hat{f}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|f_i - \hat{f}_i|}{f_i}. \quad (6.3)$$

- Interpolan los parámetros que componen  $\hat{f}$ , pues estos tendrán un valor distinto para cada valor de  $\varepsilon_r$ .

## 6.1. Resultados obtenidos.

Aplicando la metodología previamente expuesta, mediante el uso de algoritmos genéticos de optimización, se obtuvo la siguiente aproximación del coeficiente de fricción:

$$\hat{f} = C_1(\varepsilon_r) \cdot E_{\alpha_1(\varepsilon_r), \beta_1(\varepsilon_r)} [a_1(\varepsilon_r) \text{Re}^{\alpha_1(\varepsilon_r)}] + C_2(\varepsilon_r) \cdot E_{\alpha_2(\varepsilon_r), \beta_2(\varepsilon_r)} [a_2(\varepsilon_r) \varepsilon_r^{\alpha_2(\varepsilon_r)}], \quad (6.4)$$

donde  $\alpha_1(\varepsilon_r)$ ,  $\alpha_2(\varepsilon_r)$ ,  $\beta_1(\varepsilon_r)$ ,  $\beta_2(\varepsilon_r)$ ,  $\mathbf{a}_1(\varepsilon_r)$ ,  $\mathbf{a}_2(\varepsilon_r)$ ,  $\mathbf{C}_1(\varepsilon_r)$ ,  $\mathbf{C}_2(\varepsilon_r)$ , son las funciones de interpolación que proporcionan el valor de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ , respectivamente, en función del valor de  $\varepsilon_r$  que se emplee. Dichas funciones pueden consultarse en el Anexo A del presente documento.

En la Figura 6.2, se muestra una gráfica en la cual se compara el coeficiente de fricción calculado mediante la ecuación de Colebrook y la aproximación explícita aquí propuesta, generando un total de 26 curvas, en las que pueden apreciarse los valores de  $f$  y  $\hat{f}$  calculados para 13 valores de  $\varepsilon_r$ , en el rango completo de  $\text{Re}$ . En la Tabla 6.1 se cuantifican los errores MSE y MRE para cada caso.

Como se observa en Figura 6.2 y en la Tabla 6.1, la aproximación aquí obtenida proporciona valores de fricción precisos, pues los errores que produce, respecto a los valores de fricción calculados mediante la ecuación de Colebrook, son pequeños.

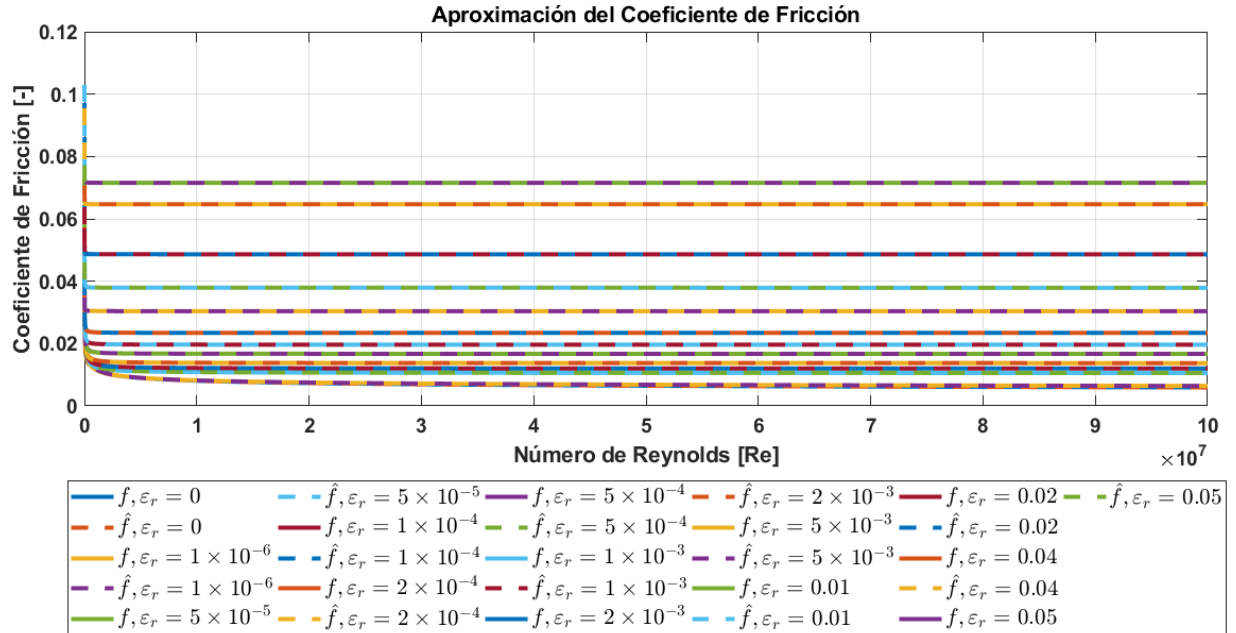


Figura 6.2: Aproximación del coeficiente de fricción mediante la función de Mittag-Leffler.

$\varepsilon_r$	Error	
	MSE	MRE(%)
0	$1.8140 \times 10^{-8}$	0.0589
$1 \times 10^{-6}$	$6.1648 \times 10^{-9}$	0.1455
$5 \times 10^{-5}$	$4.9768 \times 10^{-7}$	0.1539
$1 \times 10^{-4}$	$3.8789 \times 10^{-7}$	0.098
$2 \times 10^{-4}$	$3.3468 \times 10^{-7}$	0.0631
$5 \times 10^{-4}$	$1.1818 \times 10^{-7}$	0.0271
0.001	$5.3656 \times 10^{-8}$	0.0143
0.002	$2.4376 \times 10^{-8}$	0.012
0.005	$1.2664 \times 10^{-8}$	0.0119
0.01	$6.4391 \times 10^{-10}$	0.0017
0.02	$6.5533 \times 10^{-9}$	0.0046
0.04	$3.0479 \times 10^{-9}$	0.0023
0.05	$7.1088 \times 10^{-12}$	$3.3246 \times 10^{-4}$

Tabla 6.1: Cuantificación del error.

# Capítulo 7

---

## Conclusiones

---

Se obtuvieron 3 modelos de parámetros concentrados que describen la hidrodinámica de un ducto satisfactoriamente, dichos modelos se formularon mediante el método de diferencias finitas. El primer modelo emplea la definición de derivada clásica y el coeficiente de fricción es variante en el tiempo, remarcando este factor, el análisis de error de modelado realizado, demuestra que utilizar el enfoque del cálculo conformable, con fricción constante, produce resultados aceptables, sin embargo, no los mejores, en comparación con el enfoque del cálculo fraccionario, pues al utilizar la definición de derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, en el sentido de Liouville-Caputo, se obtuvo un mejor ajuste a las dinámicas deseadas en términos del error, remarcando el hecho de que el coeficiente de fricción se estableció, igualmente, como un parámetro constante.

Por otro lado, los resultados obtenidos a partir de la simulación de los tres algoritmos de diagnóstico diseñados en este trabajo, muestran una correcta estimación de los parámetros relacionados con una fuga en el ducto, en tiempos relativamente cortos y sin presentar sobretiros durante la convergencia, por lo que esto supone un adecuado rechazo al ruido en la práctica. Demostrando, de esta forma, que los modelos obtenidos en este trabajo de investigación son apropiados para el diseño de algoritmos de diagnóstico.

Por último, la aproximación explícita de la ecuación de Colebrook, formulada mediante la función de Mittag-Leffler, produjo errores considerablemente pequeños, lo cual, la convierte en una opción viable para el cálculo del coeficiente de fricción, sin embargo, las funciones de interpolación que parametrizan dicha aproximación, son complejas, no obstante, es posible concluir que incrementar el número de  $n$  valores de  $\varepsilon_r$ , será un factor primordial para obtener funciones de interpolación más compactas, y de ésta manera subsanar dicha desventaja.

### 7.1. Aportaciones.

El modelo finito conformable obtenido, supone una opción factible en la descripción del comportamiento dinámico del fluido en un ducto, pues permite considerar el efecto de posibles fugas, y el costo computacional requerido para integrar las ecuaciones diferenciales que lo componen, es bajo. Sin embargo, la principal desventaja que tiene reside en el hecho de que cuando se imponen ciertas condiciones de frontera, se observa cierta discrepancia con la dinámica del modelo finito clásico (el cual considera los efectos de la fricción a lo largo del tiempo), no obstante, al cuantificar dicha discrepancia, en términos del error relativo promedio y el error medio cuadrático, se observa que la diferencia entre ambos modelos sigue siendo pequeña.

El modelo finito fraccionario, por otro lado, representa una excelente opción para describir la hidrodinámica del ducto, pues aun habiéndose establecido diversas condiciones de frontera en el esquema de simulación, la discrepancia existente con el modelo finito clásico, es sumamente pe-

queña, en términos del error; recalando que sus principales ventajas residen en el hecho de que no requiere del cálculo de la fricción, y adicionalmente, el costo computacional que demanda el método numérico empleado para integrar las ecuaciones diferenciales que lo constituyen, es bajo.

Finalmente, la aproximación del coeficiente de fricción obtenida en éste trabajo de investigación, produce errores bastante pequeños, por lo que se le puede atribuir la característica de ser precisa, y aunque las funciones de interpolación que la componen son ciertamente complejas, la programación de las mismas, en cualquier software de simulación no es difícil, y el esfuerzo computacional es, desde luego, muy bajo.

---

# Bibliografía

---

- [1] F. Mainardi. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 15(4):712–717, 2012.
- [2] J. F. Gómez-Aguilar, M. Miranda-Hernández, M. G. López-López, V. M. Alvarado-Martínez, and D. Baleanu. Modeling and simulation of the fractional space-time diffusion equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 30:115–127, 2016.
- [3] J. A. Machado and M. A. Lopes. Analysis of natural and artificial phenomena using signal processing and fractional calculus. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 18(2):459–478, 2015.
- [4] V. Kiryakova. The multi-index Mittag-Leffler functions as an important class of special functions of fractional calculus. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5):1885–1895, 2010.
- [5] R. Garra, A. Giusti, F. Mainardi, and G. Pagnini. Fractional relaxation with time-varying coefficient. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 17(2), 2014.
- [6] J. F. Gómez-Aguilar and D. Baleanu. Solutions of the telegraph equations using a fractional calculus approach. *Proceedings of the Romanian Academy*, 15(1):27–34, 2014.
- [7] V. Kiryakova. From the Hyper-Bessel operators of dimovski to the generalized fractional calculus. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 17(4):977–1000, 2014.
- [8] J. F. Gómez-Aguilar and D. Baleanu. Fractional transmission line with losses. 2014.
- [9] M. Hanif Chaudhry. *Applied hydraulic transients*. Springer, third edition, 2014.
- [10] L. Torres, G. Besançon, and D. Georges. A collocation model for water-hammer dynamics with application to leak detection. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3890–3894, 2008.
- [11] C. Verde. Minimal order nonlinear observer for leak detection. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 126(September 2004):467–472, 2004.
- [12] C. Verde. Accommodation of multi-leak location in a pipeline. *Control Engineering Practice*, 13:1071–1078, 2005.
- [13] M. A. Al-Khomairi. Use of the steady-state orifice equation in the computation of transient flow through pipe leaks. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 30(1B):33–45, 2005.
- [14] A. Colombo, B. Karney, and M. Asce. Energy and costs of leaky pipes: Toward comprehensive picture. *Journal of Water Resources Planning and Management*, (December):441–450, 2002.

- 
- [15] C. F. Colebrook. Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 11(4):133–156, 1939.
- [16] P. K. Swamee and A. K. Jain. Explicit equations for pipe-flow problems. *Journal of the Hydraulics Division*, 102(5):674–677, 1976.
- [17] R. LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations*. SIAM, third edition, 2007.
- [18] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70, 2014.
- [19] M. Caputo and M. Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications, An International Journal*, 85(2):73–85, 2015.
- [20] A. Atangana and D. Baleanu. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *The Journal Thermal Science*, 2016.
- [21] R. Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22(5):728–740, 1977.
- [22] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and Othman S. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(14):2287–2300, 1992.
- [23] J.P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any  $\mathcal{S}_u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(4):922–926, 1981.
- [24] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 130–140, 1991.
- [25] R. Gorenflo, A. Kilbas, F. Mainardi, and S. Rogosin. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2014.
- [26] J.H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. MIT Press, second edition, 1992.
- [27] L. Torres, G. Besançon, A. Navarro, O. Begovich, and D. Georges. Examples of pipeline monitoring with nonlinear observers and real-data validation. *8th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, 2011.
- [28] L. Torres, C. Verde, G. Besançon, and O. González. High-gain observers for leak location in subterranean pipelines of liquefied petroleum gas. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012.
- [29] L. Torres and D. Georges. Multi-leak estimator for pipelines based on an orthogonal collocation model. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, pages 410–415, 2009.
- [30] L. Torres, C. Verde, R. Carrera, and R. Cayetano. Algoritmos de diagnóstico para fallas en ductos. *Tecnología y Ciencias del Agua*, V:57–78, 2014.

- [31] C. Verde and L. Torres. *Modeling and monitoring of pipelines and networks*. Springer International Publishing, 1 edition, 2017.
- [32] J. F. Gómez-Aguilar, H. Yépez-Martínez, C. Calderón-Ramón, I. Cruz-Rrduña, R. F. Escobar-Jiménez, and V. H. Olivares-Peregrino. Modeling of a mass-spring-damper system by fractional derivatives with and without a singular Kernel. *Entropy*, 17:6289–6303, 2015.
- [33] J. F. Gómez-Aguilar, M. G. López-López, V. M. Alvarado-Martínez, J. Reyes-Reyes, and M. Adam-Medina. Modeling diffusive transport with a fractional derivative without singular kernel. *Physica A*, 447:467–481, 2016.
- [34] S. Dadras and H.R. Momeni. A new fractional order observer design for fractional order nonlinear systems. *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference*, pages 1–6, 2011.
- [35] Sara Dadras and Hamid Reza Momeni. Fractional sliding mode observer design for a class of uncertain fractional order nonlinear systems. (April 2014), 2011.
- [36] M. Alegría-Zamudio, R. F. Escobar-Jiménez, and J. F. Gómez-Aguilar. Fault tolerant system based on non-integer order observers: Application in a heat exchanger. *ISA Transactions*, (May):1–11, 2018.
- [37] S. Genic, I. Arandjelovic, P. Kolendic, M. Jaric, N. Budimir, and V. Genic. A review of explicit approximations of Colebrook’s equation. *FME Transactions*, 39(2):67–71, 2011.
- [38] D. Brkic. Review of explicit approximations to the Colebrook relation for flow friction. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 77:34–48, 2011.
- [39] D. J. Zigrang and N. D. Sylvester. An explicit approximation for the friction factor – Reynolds number relation for rough and smooth pipes. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 58(1):122–123, 1980.
- [40] D. Brkic and Z. Cojbasic. Intelligent flow friction estimation. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2016, 2016.
- [41] I. Podlubny, I. Petrás, and T. Skovránek. Fitting of experimental data using Mittag-Leffler function. *13th Carpathian Control Conference (ICCC)*, pages 578–581, 2012.
- [42] M. Toufik and A. Atangana. New numerical approximation of fractional derivative with non-local and non-singular kernel: Application to chaotic models. *The European Physical Journal Plus*, 132:1–16, 2017.
- [43] J. E. Solís-Pérez, J. F. Gómez-Aguilar, and A. Atangana. Novel numerical method for solving variable-order fractional differential equations with power, exponential and Mittag-Leffler laws. *Chaos, Solitons and Fractals*, 114:175–185, 2018.
- [44] L.F. Moody. Friction factor for pipe flow. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 66:671– 678, 1944.

---

# Anexo A: funciones de interpolación de $\hat{f}$

---

$$\alpha_1(\varepsilon_r) = \begin{cases} -8.05 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 0.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 4.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 1.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 2.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 1.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 0.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -4.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ -4.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 184.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ -1.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\alpha_2(\varepsilon_r) = \begin{cases} 9.63 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 1.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 9.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 7.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 7.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 8.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 3.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -2.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ 6.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 784.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ 3.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\beta_1(\varepsilon_r) = \begin{cases} -6.075 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 0.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 4.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 1.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 2.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 1.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 0.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -4.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ -4.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 184.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ -1.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.3)$$



$$\beta_2(\varepsilon_r) = \begin{cases} 4.05 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 0.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 4.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 1.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 2.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 1.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 0.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -4.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ -4.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 184.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ -1.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.4)$$

$$a_1(\varepsilon_r) = \begin{cases} -1.05 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 0.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 4.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 1.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 2.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 1.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 0.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -4.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ -4.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 184.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ -1.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.5)$$

$$a_2(\varepsilon_r) = \begin{cases} 6.089 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 0.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 4.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 1.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 2.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 1.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 0.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -4.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ -4.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 184.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ -1.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.6)$$

$$C_1(\varepsilon_r) = \begin{cases} 9.23 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 0.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 4.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 1.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 2.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 1.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 0.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -4.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ -4.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 184.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ -1.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.7)$$

$$C_2(\varepsilon_r) = \begin{cases} 4.12 \times 10^{16}\varepsilon^3 + 7.8585 \times 10^{10}\varepsilon^2 + 1.0631 \times 10^5\varepsilon + 0.2058 & \text{para } 0 \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-6} \\ 2.8034 \times 10^{12}\varepsilon^3 - 4.0879 \times 10^8\varepsilon^2 + 2.1978 \times 10^4\varepsilon + 0.3102 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-5} \\ 1.1933 \times 10^{11}\varepsilon^3 - 2.4215 \times 10^7\varepsilon^2 + 2.1099 \times 10^3\varepsilon + 0.7354 & \text{para } 1 \times 10^{-6} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-4} \\ 1.3855 \times 10^{10}\varepsilon^3 - 3.6642 \times 10^6\varepsilon^2 + 5.8333 \times 10^2\varepsilon + 0.7953 & \text{para } 1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-4} \\ -4.2192 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.043 \times 10^5\varepsilon^2 + 2.6613 \times 10^2\varepsilon + 0.830 & \text{para } 2 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-4} \\ 1.2732 \times 10^8\varepsilon^3 - 1.3387 \times 10^5\varepsilon^2 + 89.6323\varepsilon + 0.8899 & \text{para } 5 \times 10^{-4} \leq \varepsilon < 1 \times 10^{-3} \\ -4.4103 \times 10^7\varepsilon^3 - 4.0526 \times 10^4\varepsilon^2 + 51.2567\varepsilon + 0.9171 & \text{para } 1 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 2 \times 10^{-3} \\ 1.7731 \times 10^7\varepsilon^3 - 7.9789 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9648 & \text{para } 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 5 \times 10^{-3} \\ -4.2982 \times 10^6\varepsilon^3 + 3.2237 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.7255 & \text{para } 5 \times 10^{-3} \leq \varepsilon < 0.01 \\ 7.3839 \times 10^5\varepsilon^3 - 1.1076 \times 10^4\varepsilon^2 + 0.9941 & \text{para } 0.01 \leq \varepsilon < 0.02 \\ 184.6915\varepsilon^3 + 137.2318\varepsilon^2 + 0.6249 & \text{para } 0.02 \leq \varepsilon < 0.04 \\ -1.6495 \times 10^5\varepsilon^3 - 4.2683 \times 10^3\varepsilon^2 + 5.7109x + 0.6813 & \text{para } 0.04 \leq \varepsilon < 0.05 \end{cases} \quad (7.8)$$



**TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO**

---

***cenidet***<sup>®</sup>  
*Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico*