

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Maestría

Identificación de Modelos Hammerstein-Wiener
Utilizando Métodos de Cálculo Fraccionario

presentado por

Ing. Luis Carlos Argüelles de los Ríos

como requisito para la obtención del grado de
**Maestro en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez

Codirector de tesis

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Cuernavaca, Morelos, México. Marzo de 2019.



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Mor., 25 de febrero de 2019.

OFICIO No. DIE/034/2019

Asunto: Aceptación de documento de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. Luis Carlos Argüelles de los Ríos**, con número de control **M17CE002** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"Identificación de Modelos Hammerstein-Wiener Utilizando Métodos de Cálculo Fraccionario"** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 8031070

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. José Francisco Gómez Aguilar
Doctor en Física
Cédula profesional 9124781

REVISOR 1

Dr. Carlos Daniel García Beltrán
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 8699605

REVISOR 2

Dr. Juan Reyes Reyes
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático
Cédula profesional 4214833

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares

Estudiante
Expediente
RFEJ/lrr.



Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

"2019, Año del Caudillo del Sur, Emiliano Zapata"

Cuernavaca, Morelos, **21/marzo/2019**

OFICIO No. SAC/139/2019

Asunto: Autorización de impresión de tesis

ING. LUIS CARLOS ARGÜELLES DE LOS RÍOS
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado "Identificación de Modelos Hammerstein-Wiener Utilizando Métodos de Cálculo Fraccionario", ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr



DEDICATORIA

A mi mamá **Mirtha Eva de los Ríos Pereyra**, por siempre estarme apoyando y recordando que todo en esta vida es posible si uno se lo propone y visualiza sus metas/sueños a corto, mediano y largo plazo, así como el insistirme siempre de la facilidad que tengo desde niño en ámbitos académicos y que no los desaproveche, gracias mamá!

A mi papá **Luis Francisco Argüelles Chimés**, por ser la persona más tranquila, ecuánime que conozco, y siempre estarte preocupando por mi, tu sencillez y humildad es lo que más admiro de ti papa, aunque no te lo diga eres mi ejemplo a seguir como persona, como amigo, como hombre y como padre en un futuro, gracias papá!

En general a mis papás, gracias por siempre estar atentos y preocupados por mí, así como también siempre me han brindado su apoyo incondicional en todo momento.

Y por último y no menos importante a mi hermano **Miguel Alejandro Argüelles de los Ríos** que no podía faltar, aunque quizás no seamos los mejores hermanos del mundo, considero que estos últimos años ha mejorado mucho nuestra relación, hay muchas cosas que sacaste de nuestro papá y me da mucho gusto eso, gracias por ser mi hermano menor y espero siempre luches por tus sueños y no te rindas.

AGRADECIMIENTOS

A toda mi familia que siempre me han motivado a superar los momentos más difíciles y creer en mi mismo.

A mis asesores el Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez y al Dr. José Francisco Gómez Aguilar, por todo su apoyo académico y orientación en las dudas que surgieron en el desarrollo de este trabajo de investigación.

A los miembros que conformaron mi comité de revisores: Dr. Carlos Daniel García Beltrán y el Dr. Juan Reyes Reyes, gracias por sus comentarios, observaciones y correcciones que fueron de mucha importancia en mi preparación, con el cual se enriqueció este trabajo de investigación.

A los profesores que me impartieron clases: Dr. Juan Reyes Reyes, Dr. Gloria Lilia Osorio Gordillo, Dr. José Francisco Gómez Aguilar, Dr. Carlos Daniel García Beltrán, Dr. Carlos Manuel Aztorga Zaragoza, Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez, Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, Dr. Enrique Quintero Mármol Márquez y al Dr. Luis Gerardo Vela Valdés por todos sus conocimientos brindados y transmitidos en mi estancia en la maestría.

A mis compañeros Alejandra, Alfonso, Ariel, David, Ian y Miguel gracias por brindarme su amistad y apoyo académico sobretodo en ese primer semestre. Considero que fuimos un grupo muy unido y siempre jalábamos todos parejo sin dejar a nadie en el camino.

También les estaré eternamente agradecidos por todo el apoyo que me brindaron en el accidente que tuve, siempre se vieron preocupados por mi y eso no lo olvidaré, aunque todos somos muy diferentes siempre nos hemos apoyado.

Hace 2 años llegue a Cuernavaca y conocí muy buenos compañeros... ahora que termino puedo decir que conocí grandes amigos!

A los compañeros de doctorado Juan Vázquez y Patricia Vázquez por resolver y apoyarme en algunas dudas relacionadas con mi tema de tesis.

A la Lic. Lorena Ruiz por todo el apoyo administrativo y la rapidez con la cual se realizó los trámites académicos, así como también la preocupación y el apoyo brindado en el accidente que tuve.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Tecnológico Nacional de México (TecNM) por el apoyo económico brindado para poder realizar y culminar mis estudios de maestría.

Y finalmente, agradezco de manera profunda al Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET) por brindarme los medios necesarios para mi formación académica, así como por cada una de las amables atenciones que recibí durante mi estancia.

RESUMEN EJECUTIVO

En el presente documento se utiliza una metodología alternativa para la identificación de sistemas Hammerstein-Wiener mediante el uso de derivadas fraccionarias no locales de tipo Riemann-Liouville.

La identificación de sistemas se realizó mediante la toma de datos muestreados de entrada y salida de tres sistemas dinámicos no lineales (dos tanques acoplados, brazo robot y una columna de destilación).

Tras obtener los modelos matemáticos de cada sistema, se realizó una comparación entre el modelo clásico y el modelo alternativo obtenido mediante la aplicación de la derivada de Riemann-Liouville y con ello determinar las ventajas y/o desventajas de estos modelos alternativos.

Así como también se realizó una comparativa entre los modelos Hammerstein-Wiener obtenidos y modelos Wiener-Hammerstein reportados en un trabajo previo en el CENIDET, tanto con el cálculo de orden entero como con el cálculo de orden no entero.

ABSTRACT

In the present research/document an alternative methodology for H-W systems identification is used by means of non-local Riemann-Liouville fractional derivatives.

The system identification was done with a series of input and output sampled data of three dynamic non linear systems (two coupled tanks, robot arm and a distillation column).

After obtaining each mathematical model, a comparison between the classical model and the alternative model using Riemann-Liouville derivatives was made in order to determine advantages and disadvantages of these alternative models.

Furthermore, a comparative between the obtained H-W model and a W-H model previously reported from a research of CENIDET was done, the comparison was done using whole order calculus and fractional calculus.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes.	1
1.2. Planteamiento del problema.	3
1.3. Propuesta de solución.	4
1.4. Objetivos.	4
1.4.1. General.	4
1.4.2. Específicos.	4
1.5. Metas.	5
1.6. Justificación.	5
1.7. Estado del arte.	5
1.8. Organización del documento.	8
2. Marco Teórico	9
2.1. Identificación de sistemas.	9
2.1.1. Sistemas dinámicos.	10
2.1.2. Estructuras de modelos.	11
2.1.2.1. Modelo Hammerstein.	12
2.1.2.2. Modelo Wiener.	12
2.1.2.3. Modelo Hammerstein-Wiener.	12
2.1.2.4. Modelo Wiener-Hammerstein.	13
2.1.3. Validación del modelo.	13
2.1.3.1. FIT.	13
2.1.4. Métodos de optimización.	15
2.1.4.1. Gradiente Descendente.	16
2.1.4.2. Método de Newton.	16
2.1.4.3. Método Cuasi-Newton.	17
2.1.4.4. Levenberg-Marquardt.	18
2.2. Cálculo Fraccionario.	21
2.2.1. Derivada Fraccionaria.	21
2.2.1.1. Derivada de Riemann-Liouville.	22
2.2.1.2. Función Gamma.	23

- 2.2.1.3. Derivada de Grünwald-Letnikov. 23
- 2.2.2. Transformada de Laplace. 25
 - 2.2.2.1. Integral de Riemann-Liouville. 25
 - 2.2.2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. 25
- 2.2.3. CRONE. 27
 - 2.2.3.1. Funciones de CRONE utilizadas. 28
- 2.3. Modelos Hammerstein-Wiener enfoque por sobreparametrización. 29
 - 2.3.1. Introducción. 29
 - 2.3.2. Polinomios no lineales. 30
 - 2.3.3. Función de Transferencia. 30
 - 2.3.4. El problema de la Identificación. 32
 - 2.3.5. Enfoque por Sobreparametrización. 33
 - 2.3.5.1. Estimación de los parámetros \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} 35
 - 2.3.5.2. Ajuste de los parámetros. 36
 - 2.3.5.3. Comprobación de los parámetros. 36
 - 2.3.6. Ejemplo de una identificación Hammerstein-Wiener. 37
- 2.4. Modelos Hammerstein-Wiener enfoque iterativo. 40
 - 2.4.1. Sistemas Hammerstein-Wiener. 40
 - 2.4.2. Polinomios no lineales. 40
 - 2.4.3. Función de Transferencia. 41
 - 2.4.4. Predictor de un paso adelante. 41
 - 2.4.5. Estimación de los parámetros. 44
 - 2.4.6. Ejemplo de una identificación Hammerstein-Wiener. 45

3. Modelos Hammerstein-Wiener aplicando cálculo fraccionario **46**

- 3.1. Sistemas no lineales identificados. 46
 - 3.1.1. Dos tanques acoplados. 47
 - 3.1.1.1. Identificación con cálculo de orden entero (ordinario). 48
 - 3.1.1.2. Identificación con cálculo fraccionario. 50
 - 3.1.2. Brazo robot. 54
 - 3.1.2.1. Identificación con cálculo de orden entero (ordinario). 54
 - 3.1.2.2. Identificación con cálculo fraccionario. 57
 - 3.1.3. Columna de destilación. 59
 - 3.1.3.1. Identificación con cálculo de orden entero. 60
 - 3.1.3.2. Identificación con cálculo fraccionario. 62

3.1.3.3. Validación.	64
4. Simulaciones comparativas	66
4.1. Dos tanques acoplados.	66
4.1.1. Caso clásico.	66
4.1.2. Caso fraccionario.	66
4.2. Brazo robot.	69
4.2.1. Caso clásico.	69
4.2.2. Caso fraccionario.	70
5. Conclusiones	73
5.1. Trabajos futuros.	75
Bibliografía	76
A. Modelos Hammerstein-Wiener fraccionarios de diferentes órdenes y grados	80
A.1. Modelo 1.	80
A.2. Modelo 2.	80
A.3. Modelo 3.	81
B. Desarrollo analítico del algoritmo de Levenberg-Marquardt	83
B.1. Funcion costo.	84
B.2. Gradiente.	85
B.3. Hessiano.	85
C. Retenedor de orden cero (ZOH)	91
C.1. Retenedor de orden uno.	94
C.2. Retenedor de orden dos.	94

Índice de figuras

2.1.	Sistema dinámico, donde: 'u' es la entrada, 'w' es otra entrada que puede medirse pero no manipularse, 'v' son las perturbaciones (no pueden medirse ni manipularse), 'y' es la salida del sistema.	10
2.2.	Estructura de un modelo Hammerstein.	12
2.3.	Estructura de un modelo Wiener.	12
2.4.	Estructura de un modelo Hammerstein-Wiener.	12
2.5.	Estructura de un modelo Wiener-Hammerstein.	13
2.6.	Comparaciones entre los algoritmos de optimización, respecto a su velocidad computacional y la memoria requerida.	19
2.7.	Sistema Hammerstein-Wiener. Las no linealidades estáticas son representadas por los bloques f y g , la dinámica lineal es representada por el bloque $H(q)$	29
2.8.	Un modelo Hammerstein-Wiener con ruido aditivo. $v(k)$ es la fuente de ruido aditivo.	31
2.9.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de dos tanques acoplados, enfoque por sobreparametrización.	39
2.10.	Sistema Hammerstein-Wiener.	40
2.11.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de dos tanques acoplados, enfoque iterativo.	45
3.1.	Sistema de dos tanques acoplados.	47
3.2.	Entrada y salida del sistema de dos tanques acoplados.	48
3.3.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de dos tanques acoplados, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	50
3.4.	Iteraciones con el algoritmo de Levenberg-Marquardt.	53
3.5.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	54

3.6.	Entrada y salida del sistema del brazo robot.	55
3.7.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener del brazo robot, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	57
3.8.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario del brazo robot, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	59
3.9.	Entrada y salida del sistema de la columna de destilación. . .	60
3.10.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	62
3.11.	Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	64
3.12.	Validación del modelo Hammerstein-Wiener de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	65
3.13.	Validación del modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.	65
4.1.	Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de dos tanques acoplados.	67
4.2.	Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de dos tanques acoplados. . .	67
4.3.	Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario de dos tanques acoplados.	68
4.4.	Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario de dos tanques acoplados.	68
4.5.	Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein del brazo robot.	69
4.6.	Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein del brazo robot.	70
4.7.	Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario del brazo robot.	71
4.8.	Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario del brazo robot.	71

4.9. Modelo Hammerstein-Wiener de orden fraccionario del brazo robot, con un mayor número de órdenes.	72
A.1. Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, modelo N° 1. . .	81
A.2. Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, modelo N° 2. . .	82
A.3. Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, modelo N° 3. . .	82
B.1. Modelo matemático Hammerstein.	83
C.1. Operación de un retenedor de orden cero (ZOH).	91
C.2. Sistema de control mediante un convertidor analógico a digital seguido de un retenedor de orden cero (ZOH).	91
C.3. Conversión de una señal discreta en una continua mediante el retenedor de orden cero (ZOH).	92
C.4. Gráfica visual de un sistema discreto.	93
C.5. Gráfica de un sistema continuo obtenido con un retenedor de orden cero.	93
C.6. Gráfica de un sistema continuo obtenido con un retenedor de orden uno.	94
C.7. Gráfica de un sistema continuo obtenido con un retenedor de orden dos.	95

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes.

El término Identificación de sistemas fue establecido por Lofti Zadeh en el año de 1962 [1], y este decía:

Identificación es la determinación, en base a la entrada y la salida, de un sistema, dentro de una clase de sistemas especificados, al cual el sistema probado es equivalente.

Varios investigadores [2], [3], [4] indican que la identificación de sistemas se ha establecido como una ciencia de mucha importancia en el área del control automático.

En la actualidad debido al gran avance tecnológico existen muchos sistemas con modelos matemáticos muy complejos, dichos modelos son indispensables cuando se requiere aplicar un control al sistema, ya sea para diagnóstico de fallas, simulación o diseño de controladores [5].

La identificación de sistemas es la ciencia o el arte de construir u obtener modelos matemáticos de sistemas dinámicos mediante la toma de datos de entradas y salidas, que simulan de manera muy parecida el comportamiento de un sistema en particular [6].

Este procedimiento de identificación, va desde el diseño del experimento, la adquisición y tratamiento de los datos, la elección de la estructura del modelo y la selección de los parámetros, hasta concluir con la fase de validación del modelo.

Los sistemas dinámicos son abundantes en nuestro entorno y existe la ne-

cesidad de la obtención de un modelo matemático que se ajuste a nuestro sistema, por tal motivo las técnicas de identificación de sistemas tienen una amplia área de aplicación entre las cuales destacan las siguientes: sistemas electrónicos, sistemas biofísicos, procesos químicos, por mencionar algunos.

Hoy en día en el área de la identificación de sistemas uno de los problemas más habituales y frecuentes es la obtención de modelos matemáticos de sistemas dinámicos demasiado complejos [7], [2], [8], [9], [10].

El cálculo fraccionario es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar a los operadores diferenciales e integrales de orden no entero. A pesar de que los fundamentos matemáticos del cálculo fraccionario se establecieron hace más de 200 años, sigue siendo un tema novedoso y de gran importancia en la ciencia e ingeniería. Sin embargo, el cálculo de orden fraccionario no había sido utilizado en ingeniería debido a su complejidad y a la aparente descripción satisfactoria de los fenómenos con el cálculo de orden entero (ordinario), aunado al hecho de que no tiene una interpretación física y geométrica totalmente aceptable [11].

Sin embargo, debido al hecho de que representa con mayor precisión algunos comportamientos naturales relacionados con diferentes áreas de la ingeniería, se ha venido utilizando con mayor frecuencia. Por ello, este tipo de ecuaciones ha asumido un papel importante para modelar la dinámica anómala de numerosos procesos relacionados con los sistemas complejos en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería.

Para analizar el comportamiento dinámico de un sistema fraccionario se necesita el uso de una definición apropiada de derivada fraccionaria. La complejidad del cálculo fraccionario radica en las múltiples definiciones que lo describen. Algunas definiciones comunes se encuentran en [12]. De hecho, las definiciones de la derivada de orden fraccionario no son únicas y existen varias definiciones, incluyendo Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Weyl, Riesz y la representación de Caputo.

La teoría del cálculo fraccionario se remonta a las cartas entre Leibniz y L'Hôpital, donde ambos discutían el significado de una derivada de orden no entero. Estas notas llevaron a la aparición de una nueva teoría que involucra derivadas e integrales de orden arbitrario la cual tomo más o menos forma a finales del siglo XIX principalmente debido a: Liouville, Grünwald, Letnikov

y Caputo [13].

Debido a que el cálculo fraccionario permite considerar integrales y derivadas de cualquier orden real positivo, uno de los campos de aplicación más extensos de esta herramienta es la viscoelasticidad, ya que es posible modelar fenómenos hereditarios con larga memoria.

Las primeras aplicaciones del cálculo fraccionario en control se dieron a principios de los años 60. Estas primeras aplicaciones hacían uso del operador integral de orden no entero para el control de servos y de sistemas con saturación. Estos trabajos, probablemente sin conocimiento de los autores, hacían uso de las propiedades de la que Bode denominó *función de transferencia ideal en lazo abierto*, es decir era un integrador fraccionario.

1.2. Planteamiento del problema.

Como se ha mencionado anteriormente para obtener un modelo matemático es necesario conocer las leyes físicas o principios fundamentales que rigen a un sistema, en particular que describan el comportamiento de la dinámica del proceso; sin embargo resulta difícil determinar en muchas ocasiones cuando se trabaja con sistemas no lineales complejos, y es ahí cuando la identificación de sistemas es una buena opción para poder modelar y construir modelos matemáticos de dichos sistemas. Esto se debe a que en muchas ocasiones no existe un modelo matemático exacto del sistema que represente fielmente su comportamiento.

El modelo matemático obtenido tiene una respuesta y aproximación muy parecida al del sistema real, sin embargo puede llegar a tener comportamientos de una manera inesperada sobre todo si el sistema que se está intentando representar es no lineal.

Uno de los problemas en el resultado que se obtiene del modelo identificado es su complejidad, lo que implica un gran número de coeficientes y el orden elevado de sus derivadas.

Esto ocurre a menudo y de manera más habitual cuando el sistema del que se está haciendo referencia es demasiado complejo, posee varias no linealidades en su dinámica, y varios parámetros que determinan su comportamiento.

Debido a que el modelo matemático obtenido es muy robusto y complejo, se requiere utilizar algoritmos más sofisticados en el área de la identificación de sistemas que utilicen estructuras más compactas; en este sentido la aplicación de derivadas fraccionarias no locales permite reducir los modelos matemáticos ya que el orden de la derivada permite involucrar un grado de libertad adicional; esto implica obtener modelos matemáticos más precisos y compactos.

Ante lo dicho anteriormente se van a identificar tres sistemas SISO no lineales, en el que las señales de entrada y salida de dichos sistemas a trabajar van a estar muestreadas. La identificación será con una estructura matemática orientada a bloques Hammerstein-Wiener, el cual secciona el modelo en dos partes estáticas no lineales y una parte dinámica lineal, por su parte se tiene el inconveniente que al tratarse de sistemas no lineales complejos muchas veces la parte dinámica lineal consta de varios coeficientes obteniendo un modelo matemático demasiado grande.

1.3. Propuesta de solución.

En este trabajo de tesis se describe una metodología alternativa para construir modelos Hammerstein-Wiener involucrando operadores no locales fraccionarios de tipo Riemann-Liouville. El objetivo es reducir a su forma mínima el número de coeficientes involucrados en el modelo matemático obtenido, con ello se tendrán modelos más compactos (con pocos coeficientes) y más precisos, respecto a los modelos obtenidos utilizando operadores de orden entero.

1.4. Objetivos.

1.4.1. General.

Implementar métodos generalizados de identificación de sistemas para la obtención de modelos Hammerstein-Wiener de orden fraccionario.

1.4.2. Específicos.

- Desarrollo matemático de la estructura Hammerstein-Wiener de orden entero y fraccionario.
- Seleccionar, identificar y validar tres plantas mediante la estructura Hammerstein-Wiener.

- Comparativa de los modelos obtenidos, ventajas y desventajas de los modelos de orden entero y fraccionario.
- Comparar el desempeño de este trabajo contra trabajos previos realizados en el CENIDET utilizando modelos Wiener-Hammerstein fraccionarios.

1.5. Metas.

- Presentar los modelos Hammerstein-Wiener de tres plantas no lineales de orden entero y fraccionario.
- Utilizar dos librerías en la identificación de sistemas para modelos Hammerstein-Wiener de orden entero y fraccionario, optimizados con el algoritmo de Levenberg-Marquardt.

1.6. Justificación.

Hoy en día el cálculo fraccionario ha tomado mucha importancia en los ámbitos de la ingeniería y la tecnología, esto debido a las ventajas que ofrece respecto al cálculo de orden entero. Una de las más importantes al menos para el estudio y desarrollo de este tema es el de poder representar sistemas dinámicos de orden superior y fenómenos complejos no lineales utilizando un menor número de coeficientes debido a que el orden arbitrario de las derivadas le da un grado de libertad adicional que permite ajustarse a un comportamiento en específico.

1.7. Estado del arte.

Vázquez en [14] utilizó el cálculo de orden fraccionario para identificar sistemas dinámicos no lineales basados en datos de entrada-salida de un sistema real con una estructura Wiener-Hammerstein, usando 2 bloques lineales y en su centro un bloque no lineal.

Los modelos identificados son más precisos y compactos debido a que se logra manipular el orden arbitrario de la derivada dando como resultado un menor número de coeficientes con respecto a los modelos de orden entero y una respuesta inclusive más eficiente que con la identificación clásica.

Arteaga en [7] desarrolló la identificación de un sistema generador de energía eólica; utilizando una estructura Hammerstein-Wiener compara diferentes métodos de identificación para sistemas no lineales, como lo son los algoritmos CCA y N4SID, obteniendo una mejor respuesta con el modelo Hammerstein-Wiener. Este modelo también presenta un alto desempeño comparado con la identificación lineal, sin embargo su costo computacional es más elevado.

Gutiérrez [15] muestra una identificación del modelado de la dinámica glucosa-insulina que presenta una persona diabética (Diabetes Mellitus) tipo 1. El autor considera la entrada como la infusión subcutánea continua de insulina y la salida como la concentración de glucosa intersticial. La estructura Hammerstein-Wiener fue considerada para la identificación de su modelo. Como primer paso elige un esquema lineal ARX como estructura del modelo; sin embargo no obtuvo resultados satisfactorios, por lo que eligió estructuras no lineales tales como el NARMAX y la estructura Hammerstein-Wiener, teniendo mejores resultados con este último.

En la tesis de Garrido [5] se habla sobre la mejora de la resolución de los problemas de identificación y estimación de estados de sistemas dinámicos no lineales y el control adaptativo de los mismos. Se presenta un nuevo método el cual está basado en los algoritmos genéticos con una nueva técnica de búsqueda que Garrido denomina “Optimización Genética Restringida” (OGR). A partir de este algoritmo se tienen ventajas para la identificación de sistemas no lineales variantes en el tiempo con modelos lineales y no lineales. El algoritmo RGO también permite describir un nuevo estimador no lineal para el filtrado de sistemas con procesos y modelos de observación no lineales, basados en la optimización con RGO.

Arboleda en [16] modeló el sistema de combustión de un horno cementero rotatorio, utilizando un balance de energía y una identificación de orden fraccionaria, para así mismo poder diseñar su propio controlador de orden no entero así como también la metodología para encontrar sus ganancias proporcionales mediante un regulador lineal cuadrático “Linear Quadratic Regulator” (LQR). De tal manera que encuentra un modelo fraccionario para el proceso y diseña un controlador fraccionario para tener como mejora la optimización del uso del combustible, aprovechando el poder calorífico y reduciendo las emisiones de gases, que a su vez contribuye al medio ambiente y al calentamiento global.

Mohamed en [17] realizó varias identificaciones en el que la naturaleza de los sistemas tienen una dinámica o comportamiento de orden fraccionario, obteniendo muy buenos resultados, y esto debido a que en su trabajo empleó una estructura no lineal fraccionaria, como lo fue un modelo Hammerstein de orden fraccionario, donde el número de parámetros a optimizar se redujo, así como también el modelo matemático fue más compacto. La derivada fraccionaria que utilizó es la de Riemann-Liouville.

Finalmente concluye que este enfoque es especialmente usado cuando la información de la dinámica del sistema tiene comportamientos fraccionarios.

Pommier en [18] presenta un controlador de orden fraccionario mediante el uso del CRONE aplicado a un actuador hidráulico no lineal; y para ello primero logra una linealización entrada-salida bajo difeomorfismo y realimentación. La relevancia de esta linealización cuando los parámetros de la planta varían se analiza utilizando la representación de entrada-salida de Volterra en el dominio de la frecuencia, ya que reduce dichos efectos de la variación paramétrica de la planta.

El control basado en la diferenciación fraccional compleja finalmente se aplica para controlar la velocidad del modelo linealizado de entrada-salida cuando ocurren variaciones paramétricas, en el que los resultados finales demuestran la eficiencia del sistema de control propuesto por CRONE.

Lanusse en [19] propone el diseño de un controlador fraccionario mediante el uso de CRONE para un sistema hidráulico cuyo comportamiento es no lineal, para luego implementarlo en un controlador lógico programable (PLC). En donde la presión del aire del tanque es la variable controlada y con ello se valida todo el proceso del sistema hidráulico.

Las referencias mencionadas anteriormente se basan en dos grandes áreas, las cuales son trabajos realizados sobre identificación de sistemas con diferentes estructuras, entre las cuales se encuentran modelos Hammerstein-Wiener [7], [15] donde se puede concluir que los trabajos realizados con esta estructura han obtenido mejores resultados que otros modelos matemáticos, así como también se concluye la efectividad del cálculo fraccionario utilizado ya sea en controladores [16], [18], [19] como en la identificación de sistemas, donde tomando como antecedentes algunos trabajos similares [14], [17] que se encuentran en la literatura se llegó a la conclusión que el cálculo fraccionario puede ser usado en modelos matemáticos que consten de al menos una parte dinámica lineal, y esta se encuentra en la clase de modelos orientados a

bloques.

1.8. Organización del documento.

El presente documento está organizado de la siguiente manera:

Capítulo 2.- Se explica detalladamente las definiciones y conceptos que involucran la identificación de sistemas y el cálculo fraccionario con el fin de ubicar al lector con los temas relacionados a dichas metodologías, así como también se desarrolla 1 ejemplo de identificación no lineal involucrando una estructura Hammerstein-Wiener mediante el enfoque por sobreparametrización, y 1 ejemplo más con la misma estructura mediante el enfoque iterativo, así como el procedimiento y los algoritmos utilizados con estos dos enfoques.

Capítulo 3.- Se desarrollan 3 ejemplos de identificación no lineal utilizando la estructura Hammerstein-Wiener, aplicando cálculo de orden entero y fraccionario a cada uno de ellos.

Capítulo 4.- En este capítulo se hace una comparativa entre los modelos obtenidos y la estructura Wiener-Hammerstein tanto para el orden entero como para el fraccionario.

Capítulo 5.- En este capítulo se mencionan las conclusiones obtenidas con el desarrollo de la tesis, así como también las aportaciones de la misma.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Identificación de sistemas.

En general existen dos formas de obtener un modelo matemático, una de ellas es a través del conocimiento previo del comportamiento del sistema, es decir utilizando leyes físicas sobre un fenómeno o un proceso. La otra forma es la identificación de sistemas.

En identificación de sistemas se busca construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos basados en datos observados entrada-salida del sistema, que describan su dinámica en un cierto rango de operación.

El proceso de identificación de sistemas se puede resumir como sigue:

- Generación de un conjunto de datos.
- Elección de la estructura del modelo.
- Elección del criterio de ajuste entre los datos y el modelo.
- Elección de una forma de evaluar el sistema, proceso conocido como validación del modelo.

Para la *generación de datos*, una condición que debe cumplir la señal de entrada $u(t)$ es lo que se denomina *convergencia de excitación*. La entrada debe tener suficientes datos como para excitar todos los modos dinámicos del sistema. Solo pueden identificarse los modos que son observables desde las salidas y son suficientemente excitados desde las entradas [20].

En cuanto a la elección de la estructura de modelo, básicamente, en la identificación de sistemas se suele hablar de modelos de caja blanca, gris y negra.

En los primeros, todos los parámetros del sistema tienen un significado físico. Los modelos tipo caja negra son útiles en los casos en que el sistema a identificar es desconocido o de ecuaciones de muy compleja resolución, como consecuencia los parámetros no tienen significado físico.

En el presente trabajo de tesis, cuando se utilicen métodos de identificación de sistemas fraccionarios, se estaría aplicando un modelo tipo caja gris.

2.1.1. Sistemas dinámicos.

De manera general se puede decir que un sistema es un objeto en el cual interactúan variables y se producen señales observables. Estas señales observables que son de nuestro interés son usualmente llamadas salidas, y los estímulos externos que pueden ser manipulados por un usuario se denominan entradas. Existen otros estímulos externos que no pueden ser controlados por el usuario que se denominan perturbaciones [2].

En un *sistema dinámico* el valor de la señal de salida en un instante depende, no solo de los estímulos en ese instante, sino también de los estímulos anteriores. Un sistema se denomina *estacionario* si la respuesta del sistema a una misma entrada es la misma independientemente del instante en que se le aplica. Un sistema se dice *causal* cuando las salidas no dependen de estímulos futuros.

Un sistema lineal cumple con el principio de superposición, es decir, que la respuesta a una combinación lineal de una serie de entradas dadas se corresponden con la combinación lineal de las salidas individuales respectivas.

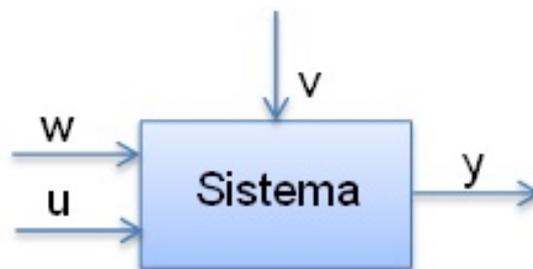


Figura 2.1: Sistema dinámico, donde: 'u' es la entrada, 'w' es otra entrada que puede medirse pero no manipularse, 'v' son las perturbaciones (no pueden medirse ni manipularse), 'y' es la salida del sistema.

Construir modelos para sistemas desconocidos es un objetivo importante de la ingeniería de control. Estos modelos necesitan simular el comportamiento real en los casos en que existe un conocimiento previo limitado de la estruc-

tura del sistema.

El enfoque de la identificación se puede realizar en función de la estructura del modelo, y del comportamiento físico o no físico del mismo. Se puede distinguir:

- Caja blanca: La estructura del modelo se obtiene a partir de leyes fundamentales. Los parámetros tienen una interpretación física [21].
- Caja gris: Algunas partes del sistema son modeladas basándose en principios fundamentales, y otras como una caja negra. Algunos de los parámetros del modelo pueden tener una interpretación física; a este tipo de modelos también se les conoce como “Tailor-made” estimando solo los parámetros no conocidos.
- Caja negra: Los parámetros del modelo no tienen una interpretación física. Un modelo basado en leyes fundamentales es muy complicado o se desconoce.

2.1.2. Estructuras de modelos.

En el conjunto de candidatos para determinar la estructura del modelo se pueden encontrar modelos lineales como AR, ARX, ARMA, ARMAX, Box-Jenkins, entre otros; sin embargo la mayoría de los sistemas físicos requieren de una representación no lineal.

Para ello se pueden tomar diferentes estructuras no lineales tales como: NARX, NARMAX, modelos de Hammerstein, Wiener, y la combinación de estos 2 últimos; Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein.

La identificación de sistemas no lineales se considera un problema difícil. La razón es que identificar un sistema no lineal requiere de algoritmos más sofisticados para la obtención de los parámetros, en donde muchas veces el sistema no puede ser identificado para ciertas estructuras o arquitecturas matemáticas, por la naturaleza a la que pertenece el sistema.

Una desventaja de los sistemas no lineales es que son más complejos matemáticamente para realizar el control o la estimación de los parámetros; ya que las técnicas más estudiadas están dadas para sistemas lineales.

2.1.2.1. Modelo Hammerstein.

El modelo Hammerstein es un sistema de bloques orientados que permiten resolver el problema de la no linealidad en la identificación de modelos no lineales a través de una no linealidad estática.

Su estructura consiste en un bloque con un modelo no lineal estático seguido por un bloque de un modelo lineal dinámico.

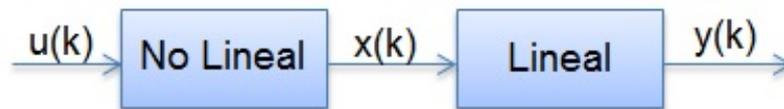


Figura 2.2: Estructura de un modelo Hammerstein.

2.1.2.2. Modelo Wiener.

El modelo de Wiener tiene una estructura en sentido contrario que el modelo de Hammerstein, es decir el bloque de la dinámica lineal seguido por el bloque de la no linealidad estática.

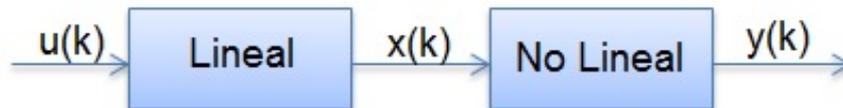


Figura 2.3: Estructura de un modelo Wiener.

2.1.2.3. Modelo Hammerstein-Wiener.

El modelo Hammerstein-Wiener al igual que el modelo Hammerstein, es un sistema de bloques orientados que a través de dos no linealidades estáticas permite resolver el problema de la no linealidad en la identificación de modelos no lineales.



Figura 2.4: Estructura de un modelo Hammerstein-Wiener.

2.1.2.4. Modelo Wiener-Hammerstein.

Por último se tiene el modelo Wiener-Hammerstein, que es un sistema de bloques orientados el cual cuenta con 2 linealidades dinámicas y 1 no linealidad estática.



Figura 2.5: Estructura de un modelo Wiener-Hammerstein.

2.1.3. Validación del modelo.

Existen pruebas para verificar si el modelo es adecuado y si es válido para su propósito. Estas pruebas son conocidas como validación del modelo. Estas involucran varios procedimientos para validar considerando como el modelo relaciona los datos observados con la aplicación del modelo al sistema. Un comportamiento deficiente del modelo en estos términos nos hace rechazarlo, mientras que un buen desempeño nos hará desarrollar cierta confianza en dicho modelo.

Un modelo no puede ser nunca aceptado como una descripción final y real del sistema, sin embargo, puede ser reconocido como una descripción lo suficientemente buena de ciertos aspectos que son de nuestro particular interés.

Para llevar a cabo la validación se necesita de algunos cálculos para poder comparar las respuestas, una de las más conocidas e utilizadas es el ajuste (FIT).

2.1.3.1. FIT.

FIT proviene de la palabra en inglés y significa ajuste y en identificación de sistemas se refiere a la aproximación de una señal estimada con respecto a la señal original y su medida es proporcionada en porcentaje, la cual está dada por

$$FIT = 100 \left(1 - \frac{\|\tilde{y} - \hat{y}\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}} \right), \quad (2.1)$$

donde:

- $\tilde{\mathbf{y}}$ es el vector de los datos muestreados de la salida del sistema $\in \mathfrak{R}^N$.
- $$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}.$$
- $\hat{\mathbf{y}}$ es el vector de la salida estimada del sistema $\in \mathfrak{R}^N$.
 - $\|\tilde{\mathbf{y}}\|$ se refiere a la norma euclidiana del vector de los datos muestreados de la salida del sistema.
 - $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i$ correspondiente al valor promedio de la salida del sistema.
 - N es el número total de datos.

Se tienen 4 casos en los que el FIT puede ser grande, pequeño, cero o una indeterminación. A continuación se plantean estos diferentes escenarios.

Se tiene un FIT grande cuando

- $\|\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|$ es pequeño.
- $\sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}$ es grande.

En este escenario se plantea un FIT alto, el cual es lo óptimo o lo que se busca en un modelo matemático, porque mientras más alto sea este más parecido tendrá la señal estimada con el sistema real.

Se tiene un FIT pequeño cuando

- $\|\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\|$ es grande.
- $\sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}$ es pequeño.

Este escenario quiere decir que si existe un FIT bajo el modelo matemático casi no tendrá similitud o una dinámica parecida al del sistema real.

El FIT es cero cuando

- $\|\tilde{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}$.

Cuando se obtiene un FIT igual a cero quiere decir que el modelo matemático no tiene absolutamente ninguna similitud con el sistema real.

El FIT se indetermina cuando

- $\sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{y}_i - \bar{y})^2} = 0$.
- $\tilde{y}_i = \bar{y}, \forall i = 1, 2, \dots, N$.

El escenario en el que el FIT se indetermina es aquel en donde el sistema real es una contante; esto quiere decir que su dinámica es la misma en el transcurso del tiempo.

2.1.4. Métodos de optimización.

Cuando se conoce la estructura del modelo es necesario aplicar técnicas de optimización para determinar el vector de parámetros ($\theta = \hat{\theta}$) de tal manera que el modelo resultante pueda describir el sistema apropiadamente.

Antes de iniciar con cualquier algoritmo de optimización se necesita definir una función objetivo $E(\theta)$, que es la descripción matemática de lo que se desea optimizar (que el error tienda a cero), la elección más común es el error cuadrático medio, y este se define como

$$E(\theta) = \frac{1}{2} e(\theta_k)^2, \quad (2.2)$$

donde:

- e es la diferencia que existe entre la salida del sistema y la salida estimada, como se muestra en la ecuación (2.3).

$$e(\theta_k) = \tilde{y} - \hat{y}, \quad (2.3)$$

- \tilde{y} es el vector de los datos muestreados de la salida del sistema $\in \mathfrak{R}^N$.
- \hat{y} es el vector de la salida estimada del sistema $\in \mathfrak{R}^N$.
- θ_k el vector de parámetros del modelo a identificar.

En general, la función objetivo $E(\theta)$ es una función no lineal, por lo que no se dispone de algoritmos sencillos y exactos para encontrar sus mínimos. En consecuencia, se tiene que hacer uso de una búsqueda a través del espacio de parámetros que idealmente, se aproxime de forma iterada a un error mínimo del sistema para los parámetros adecuados.

De esta forma, se comienza una identificación con algún vector inicial de parámetros (algunas veces elegido al azar), después se genera un nuevo vector

de parámetros, esperando que con ellos la función objetivo se reduzca (aunque dependiendo del método elegido, no es obligatorio, y temporalmente se puede admitir un incremento del error siempre y cuando conduzca a una disminución posterior más adecuada).

Este proceso se repite, normalmente hasta haber reducido el error a un margen tolerable, o cuando se satisfaga una condición específica de parada.

2.1.4.1. Gradiente Descendente.

El gradiente descendente es el algoritmo de entrenamiento más simple, también el más extendido y conocido a pesar de su lenta convergencia, esto debido a su aparente simplicidad. Este método, solo hace uso del vector gradiente, y por ello se dice que es un método de primer orden. En la ecuación (2.4) se muestra la fórmula para obtener el gradiente descendente.

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta g, \quad (2.4)$$

donde:

- $\eta > 0$ corresponde al coeficiente de aprendizaje.
- θ_k, θ_{k+1} es la sucesión de vectores de parámetros que se construye con el proceso iterado por cualquiera de los métodos de optimización.
- g es el gradiente de la función objetivo $E(\theta)$, mostrado en la siguiente ecuación.

$$g(\theta_{k+1}) = \frac{\partial(E(\theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_{k+1}}. \quad (2.5)$$

Idealmente se desea encontrar el valor de $\theta_{k+1} = \theta_k$ que satisfaga

$$g(\theta_{k+1}) = \frac{\partial(E(\theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_{k+1}} = 0. \quad (2.6)$$

2.1.4.2. Método de Newton.

El método de Newton es uno de los algoritmos conocidos como de segundo orden, ya que hace uso del Hessiano. Tiene como objetivo encontrar las mejores direcciones de variación de los parámetros haciendo uso de las segundas derivadas de la función objetivo $E(\theta)$.

Para ello, se hace uso del desarrollo de las series de Taylor que se pueden aproximar alrededor del conjunto inicial de parámetros.

$$E(\theta) = E(\theta_k) + g^T(\theta - \theta_k) + \frac{1}{2}((\theta - \theta_k)^T H(\theta - \theta_k)), \quad (2.7)$$

donde:

- H es el Hessiano de $E(\theta)$, es decir la segunda derivada parcial de $E(\theta)$.

Si tenemos en cuenta que g (el gradiente de $E(\theta)$) debe ser $\mathbf{0}$ para el mínimo de $E(\theta)$, obtenemos la siguiente ecuación

$$g + H(\theta - \theta_k) = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Asumiendo que la inversa de H existe, se despeja θ

$$\theta = \theta_k - H^{-1}g. \quad (2.9)$$

En general, el método de Newton requiere menos pasos que el gradiente descendente para encontrar el mínimo de la función objetivo $E(\theta)$. Sin embargo, tiene el inconveniente de que el cálculo del Hessiano y su inversa tienen un costo computacional muy elevado.

2.1.4.3. Método Cuasi-Newton.

Como se ha visto, el método de Newton es muy costoso desde el punto de vista computacional, ya que requiere muchas operaciones para calcular el Hessiano y su inversa. Los métodos alternativos que se han construido para resolver este problema se conocen genéricamente como métodos Cuasi-Newton.

En estos métodos, en lugar de calcular el Hessiano directamente y después su inversa, se construye una aproximación de la inversa en cada iteración utilizando sólo información sobre las primeras derivadas de la función objetivo.

Si llamamos a esta aproximación C , la fórmula de Cuasi-Newton se puede expresar como

$$\theta_{k+1} = \theta_k - (Cg)\eta. \quad (2.10)$$

Los dos métodos más utilizados para la aproximación de la inversa del Hessiano son la fórmula de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) y la fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [22].

Este es el método por defecto para usar en la mayoría de los casos, ya que es más rápido que el método del Gradiente Descendente y no conlleva el inconveniente del alto costo computacional por el cálculo del Hessiano y su inversa.

2.1.4.4. Levenberg-Marquardt.

Debido a que H corresponde al Hessiano, es decir la segunda derivada parcial de $E(\theta)$, existe la posibilidad que la matriz H sea definida negativa o cero y por consecuencia envíe a un máximo local, para evitar dicho problema se debe asegurar que H sea definida positiva, el Hessiano puede ser alterado adicionando una matriz λI y de esta manera hacer $(H + \lambda I)$ definida positiva asegurando que se llegue a un mínimo local. Los que representaron este concepto fueron Levenberg en [23] y Marquardt en [24].

$$\theta_{k+1} = \theta_k - (H + \lambda I)^{-1}g, \quad (2.11)$$

donde:

- I es la matriz identidad.
- $\lambda > 0$ corresponde al coeficiente de aprendizaje.

Se busca seleccionar una λ de manera que la matriz $H + \lambda I$ sea positiva definida. La ecuación (2.11) se aproxima al método del gradiente descendente si $\lambda \rightarrow \infty$ y al método de Newton si $\lambda \rightarrow 0$.

Por ello, λ se inicializa para que sea grande, de modo que las primeras actualizaciones sean pequeños pasos en la dirección del gradiente descendente. Si alguna iteración falla, entonces λ se incrementa por algún factor, si no, a medida que disminuye el error λ disminuye, de manera que el algoritmo de Levenberg-Marquardt se aproxima al método de Newton. Este proceso

normalmente acelera la convergencia al mínimo.

Este algoritmo es un método adaptado para funciones de un tipo particular, lo que hace que sea muy rápido cuando se entrenan redes neuronales medidas con ese tipo de errores. Sin embargo, este algoritmo tiene algunas desventajas. El primero es que no puede aplicarse a funciones objetivo que tengan expresiones distintas, así como también para conjuntos de datos muy grandes, ya que la matriz jacobiana aumenta su dimensión, y por lo tanto requiere mucha memoria computacional.

El algoritmo de Levenberg-Marquardt, también es conocido como el *método de mínimos cuadrados amortiguado*.

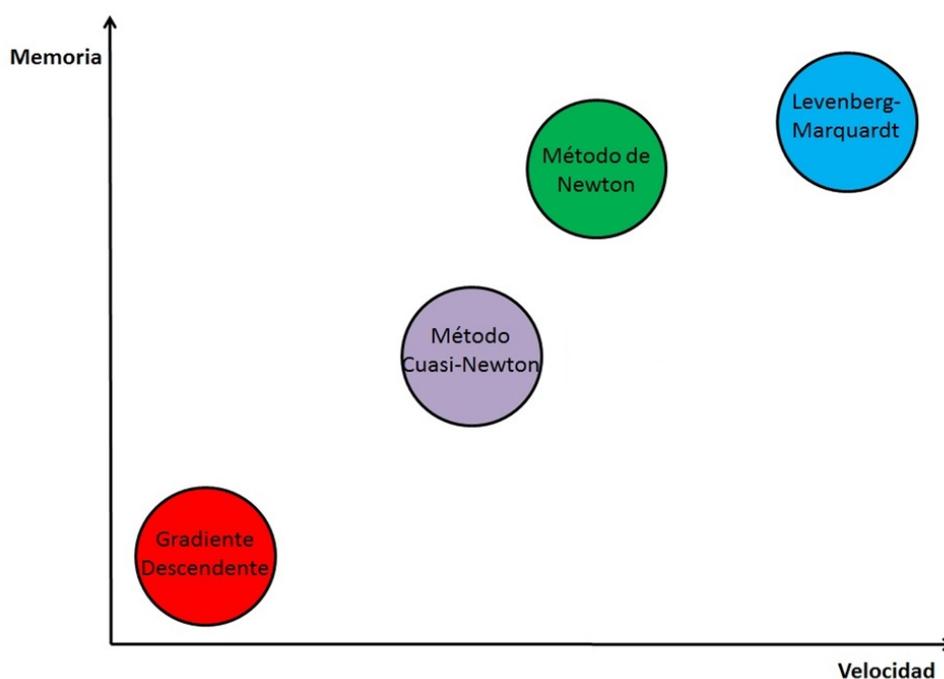


Figura 2.6: Comparaciones entre los algoritmos de optimización, respecto a su velocidad computacional y la memoria requerida.

Como refleja el gráfico, el algoritmo de entrenamiento más lento es el del gradiente descendente, pero es el que requiere menos memoria [25]. Por el contrario, el más rápido puede llegar a ser el algoritmo de Levenberg-Marquardt, pero normalmente requiere mucha memoria y solo compensará en casos en los que el entrenamiento se hace muy laborioso.

Una buena elección podría ser el método Cuasi-Newton, que consigue una mejora considerable en la velocidad con respecto al gradiente descendente,

sin necesidad de incrementar el consumo de memoria de forma dramática.

En el **Apéndice B** se desarrolló un ejemplo analítico del algoritmo de Levenberg-Marquardt, en donde se realizaron las derivadas parciales para el gradiente, así como también las segundas derivadas parciales para la matriz Hessiana.

2.2. Cálculo Fraccionario.

La palabra cálculo fraccionario es la denominación acuñada para la extensión del cálculo que permite considerar la integración y la derivación de cualquier orden, no necesariamente entero. En el dominio del tiempo, los operadores de derivadas e integral fraccionarios vienen definidos por la operación de convolución, por lo que están especialmente indicados para describir fenómenos de memoria; en el dominio de Laplace dichos operadores se corresponden con el operador s^α , $\alpha \in \mathbb{R}$ [26].

Los primeros escritos que se tienen del nacimiento del cálculo fraccionario datan del 30 de septiembre de 1695, cuando L'Hopital le plantea por primera vez a Leibniz en una carta sobre la posibilidad de obtener la derivada de la función $d^n f(x)/dx^n$ cuando $n = 1/2$, posteriormente el cálculo fraccionario se siguió investigando por matemáticos reconocidos, entre los principales podemos mencionar a Euler, Laplace, Lacroix, Fourier, Riemann, Hardy y Littlewood, sin embargo las aun extensas investigaciones en cálculo ordinario no permitieron profundizar de manera esperada en el planteamiento de técnicas alternativas e innovadoras.

Sin embargo, fue hasta el año de 1832 cuando el francés Joseph Liouville destacó con su trabajo, siendo este el primero en considerar la posibilidad de cálculo fraccional, para convertirse en uno de los principales científicos investigadores en ese rubro, y además ser considerado como el creador de las bases del cálculo de orden no entero o fraccionario.

A partir de ese entonces, y con especial énfasis en las últimas cuatro décadas, el cálculo fraccionario se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y sistemas físicos estudiados en multitud de campos de la ciencia y la ingeniería, como por ejemplo el procesamiento de señales.

En el área del control automático fue Oustaloup en [27] quien introdujo la idea de controladores de orden no entero en su trabajo *Commande Robuste d'Ordre Non Entier* (CRONE).

2.2.1. Derivada Fraccionaria.

La rama de las matemáticas que estudia la teoría de las integrales y derivadas de orden arbitrario que unifican y generalizan las nociones de orden entero es el cálculo fraccionario [28].

Una ecuación diferencial fraccionaria es una ecuación que contiene derivadas de orden no entero; y una ecuación integral fraccionaria es una ecuación que contiene integrales de orden no entero.

Un sistema de orden fraccionario significa un sistema descrito por una ecuación diferencial fraccionaria o una ecuación integral fraccionaria o por un sistema de tales ecuaciones.

El nombre corto para las derivadas de orden arbitrario son las derivadas fraccionarias.

El cálculo fraccionario no cuenta con una sola definición de derivada fraccionaria tal como lo hace el cálculo de orden entero sino de diversas expresiones matemáticas que cumplen con las características necesarias para definirse como derivada fraccionaria.

A continuación se presentan algunas de las más conocidas definiciones de derivadas fraccionarias.

2.2.1.1. Derivada de Riemann-Liouville.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de $x(t)$ se define como

$${}^RL D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{x(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (2.12)$$

donde:

- n es un número natural (entero) que satisfaga que $n - 1 < \alpha \leq n$.
- α es el orden de derivación fraccionario.

La forma clásica de cálculo fraccional está dada por la integral de Riemann-Liouville, y su definición para una función real continua $x(t)$ está establecida por la forma

$${}^RL I_b^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{x(\tau)}{(t - \tau)^{1 - \alpha}} d\tau, \quad (2.13)$$

donde:

- $b > a$.
- α es el orden de integración fraccionario.
- $\Gamma(\alpha)$ es la *función Gamma de Euler*.

2.2.1.2. Función Gamma.

La función Gamma representa la generalización de los factoriales $n!$, lo que permite que n considere cualquier número real. Por lo que la función Gamma es una de las más importantes funciones en el área del cálculo fraccionario [29].

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(z) > 0$, su expresión matemática es representada en la ecuación (2.14)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.14)$$

Por lo que la función Gamma es continua para los números reales positivos. Una propiedad básica de la función Gamma es

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (2.15)$$

Si z es un número natural, se tiene

$$\Gamma(z + 1) = z!.$$

De modo que si $z = n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$ y con el uso de la propiedad de la ecuación (2.15), se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n), \\ \Gamma(n + 1) &= n(n - 1)\Gamma(n - 1), \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n(n - 1)(n - 2) \cdots \Gamma(1) = n!. \end{aligned}$$

2.2.1.3. Derivada de Grünwald-Letnikov.

La definición de Grünwald-Letnikov es comúnmente utilizada para soluciones numéricas de derivadas fraccionarias [30].

Esta derivada es la representación discreta de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

La derivada de Grünwald-Letnikov para una función $x(t)$ está dada por

$${}_{t_0}^{GL}D_t^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-t_0}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t - jh), \quad (2.16)$$

donde:

- j es el incremento del tiempo, esta definición está formulada para cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
- α es el orden de derivación fraccionario.
- h es el paso de integración.

Una de las propiedades importantes que comparten ambas definiciones de derivadas fraccionarias es la no-localidad. Esto significa que el valor de D^α depende de todos los valores de x en el intervalo $[t_0, t]$, es decir de toda la información histórica de la función t [30].

La ventaja de utilizar sistemas de orden fraccionario respecto a los sistemas de orden entero es que los primeros tienen memoria infinita, mientras que los otros tienen una memoria finita. Esta es la principal ventaja del uso del cálculo fraccionario en comparación con los modelos clásicos de orden entero en los que tales efectos son de hecho despreciados.

Los coeficientes binomiales son el kernel de la derivada de Grünwald-Letnikov.

Todas las definiciones de derivadas fraccionarias son no locales, porque poseen una integral asociada en su definición (excepto la derivada de Grünwald-Letnikov) la cual evalúa en una vecindad o una región de puntos, dando como resultado el concepto de memoria en el cálculo fraccionario, a diferencia del cálculo clásico el cual solo evalúa en un punto.

Solamente existe un caso en el que todas las definiciones de derivadas fraccionarias son iguales y esto es cuando el orden de derivación $\alpha = 1$ ya que se recupera el caso clásico.

Las derivadas fraccionarias tienen un operador el cual está compuesto de 5 elementos, por ejemplo en la ecuación (2.12): RL es el sentido de la derivada

(Riemann-Liouville), a y t son los límites o rangos en el que se está evaluando la derivada, α es el orden de la derivada y $x(t)$ es la función que se desea derivar.

2.2.2. Transformada de Laplace.

Los distintos operadores fraccionarios admiten una representación en el dominio de la frecuencia, mediante la aplicación de la transformada de Laplace [31]. A continuación, se mostrará la transformada de Laplace para el operador de Riemann-Liouville.

2.2.2.1. Integral de Riemann-Liouville.

La integral de Riemann-Liouville puede expresarse mediante una convolución

$$I^\alpha x(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * x(t),$$

con lo que aplicando la propiedad de convolución se obtiene

$$\mathcal{L}\{I^\alpha x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} \mathcal{L}\{x(t)\}.$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$, se obtiene

$$\mathcal{L}\{I^\alpha x(t)\} = s^{-\alpha}F(s).$$

2.2.2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Por la definición $D^\alpha x(t) = D^m I^{m-\alpha} x(t)$, por lo tanto

$$\mathcal{L}\{D^\alpha x(t)\} = \mathcal{L}\{D^m I^{m-\alpha} x(t)\},$$

considerando $g(t) = I^{m-\alpha} x(t)$ y aplicando la fórmula de Laplace de orden entero m se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^m g(t)\} &= s^m G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{(m-k-1)}(0) = s^m G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{(m-k-1)}(0) = \\ &= s^m G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} g^{(k)}(0), \end{aligned}$$

donde $g^{m-k-1}(t) = D^{m-k-1}I^{m-\alpha}x(t) = D^{\alpha-k-1}x(t)$.

En virtud al resultado obtenido para la integral fraccionaria, se tiene que

$$\mathcal{L}\{I^{m-\alpha}x(t)\} = s^{-(m-\alpha)}F(s),$$

con lo que resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^\alpha x(t)\} &= \mathcal{L}\{D^m I^{m-\alpha}x(t)\} = s^m s^{-(m-\alpha)}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1}x(t)]_{t=0} = \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [D^{\alpha-k-1}x(t)]_{t=0}, \end{aligned}$$

donde $(m-1 \leq \alpha \leq m)$.

Se hace notar la inexistencia de una interpretación física de los valores de las derivadas fraccionarias para $t = 0$, es decir las condiciones iniciales de la derivada fraccionaria.

Desarrollando un ejemplo de lo antes mencionado, el modelo de un sistema fraccionario considerando un sistema SISO lineal invariante en el tiempo, puede ser descrito mediante la siguiente ecuación diferencial

$$a_0 D^{\beta_0} y(t) + a_1 D^{\beta_1} y(t) + \dots + a_n D^{\beta_n} y(t) = b_0 D^{\alpha_0} u(t) + b_1 D^{\alpha_1} u(t) + \dots + b_m D^{\alpha_m} u(t), \quad (2.17)$$

donde:

- $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ son los coeficientes de la ecuación diferencial.
- $u(t)$ y $y(t)$ son las señales de entrada y salida respectivamente, las cuales son diferenciables en órdenes reales (enteros o no enteros).
- $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ son los órdenes de las derivadas, las cuales pertenecen al conjunto de los números reales.

La transformada de Laplace de $D^{\beta_0} y(t)$ y $D^{\alpha_0} u(t)$ es $s^{\beta_0} Y(s)$ y $s^{\alpha_0} U(s)$, respectivamente, considerando las condiciones iniciales iguales a cero, por lo que aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2.17) se tiene

$$a_0 s^{\beta_0} Y(s) + a_1 s^{\beta_1} Y(s) + \dots + a_n s^{\beta_n} Y(s) = b_0 s^{\alpha_0} U(s) + b_1 s^{\alpha_1} U(s) + \dots + b_m s^{\alpha_m} U(s). \quad (2.18)$$

Una vez que las ecuaciones diferenciales están en el dominio de la frecuencia, se puede obtener su representación en función de transferencia de la siguiente manera

$$(a_0 s^{\beta_0} + a_1 s^{\beta_1} + \dots + a_n s^{\beta_n})Y(s) = (b_0 s^{\alpha_0} + b_1 s^{\alpha_1} + \dots + b_m s^{\alpha_m})U(s), \quad (2.19)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{\alpha_0} + b_1 s^{\alpha_1} + \dots + b_m s^{\alpha_m}}{a_0 s^{\beta_0} + a_1 s^{\beta_1} + \dots + a_n s^{\beta_n}}. \quad (2.20)$$

Estas definiciones matemáticas mencionadas son la base del modelo Hammerstein-Wiener de orden fraccionario, en la parte del bloque lineal.

En la mayoría de las metodologías encontradas en la literatura sobre la identificación de modelos Hammerstein-Wiener [3], [32], [33] el bloque dinámico lineal se encuentra en tiempo discreto, sin embargo para poder aplicar el uso del cálculo fraccionario en este tipo de modelos a bloques, **la función de transferencia necesita estar en tiempo continuo** [17], [14].

2.2.3. CRONE.

Los resultados del trabajo de esta tesis se encuentran en el capítulo tres; en el que los órdenes no enteros de la función de transferencia fueron desarrollados con la paquetería CRONE, la cual es una caja de herramientas de Matlab y Simulink dedicada al cálculo fraccionario [34].

Una versión clásica de la caja de herramientas contiene tres módulos principales:

- El «módulo matemático» implementa varios algoritmos para el cálculo fraccionario.
- El «módulo de identificación del sistema» extiende la frecuencia común de la identificación del sistema y las herramientas en el dominio del tiempo a los modelos de orden fraccionario.
- El módulo «CRONE Control-System Design» utiliza órdenes fraccionarios como parámetros de diseño de alto nivel para facilitar el diseño de sistemas de control robustos.

2.2.3.1. Funciones de CRONE utilizadas.

Para el desarrollo del capítulo tres de esta tesis se utilizaron dos comandos de la paquetería CRONE, los cuales se muestran a continuación

frac_poly_exp(coef,order)

Del inglés *explicit fractional polynomials* (polinomios fraccionarios explícitos),
donde

- *coef* se refiere a los coeficientes de los polinomios.
- *order* se refiere al orden de cada coeficiente.

Por ejemplo

```
frac_poly_exp([2 1 3],[1.2 0.5 0])
```

Da como resultado

$$2s^{1,2} + s^{0,5} + 3.$$

frac_tf(num,den)

Proporciona una función de transferencia fraccionaria; es una clase que permite la representación de sistemas fraccionarios.

Se construye con dos argumentos; numerador y denominador los cuales son polinomios de orden fraccionario, un ejemplo se muestra a continuación

```
frac_tf(frac_poly_exp([3 2 4],[3.2 1.75 0]),frac_poly_exp([1 2 1],[1.2 0.7 0.3]))
```

Da como resultado

$$\frac{3s^{3,2} + 2s^{1,75} + 4}{s^{1,2} + 2s^{0,7} + s^{0,3}}$$

2.3. Modelos Hammerstein-Wiener enfoque por sobreparametrización.

2.3.1. Introducción.

Existe una gran necesidad en los modelos no lineales para mejorar la calidad del control de la planta. Una buena opción o propuesta son los modelos orientados a bloques, que separan las partes no lineales y lineales invariantes en el tiempo (LTI) en bloques. Las estructuras en bloques más simples son los modelos Wiener y los modelos Hammerstein. Estos ya se usan en un amplio dominio de aplicaciones que van desde amplificadores de potencia, procesos químicos, hasta sistemas fisiológicos.

Una estructura en bloques más general es el modelo Hammerstein-Wiener como se muestra en la Figura 2.7. Y estos modelos son utilizados en un amplio rango de aplicaciones tales como procesos químicos, detección submarina, entre otros [8]-[9].

Diferentes enfoques de identificación son propuestos para identificar modelos Hammerstein-Wiener o modelos con estructuras muy parecidas.

Entre los cuales se encuentran:

- El enfoque iterativo.
- El enfoque por sobreparametrización.
- Métodos en el dominio de la frecuencia.
- Métodos por subespacios.
- Algoritmos estocásticos.

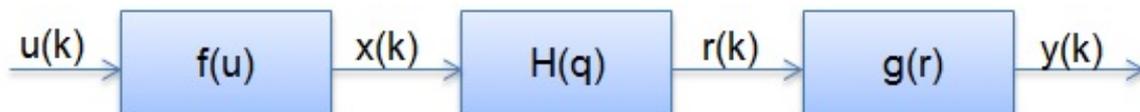


Figura 2.7: Sistema Hammerstein-Wiener. Las no linealidades estáticas son representadas por los bloques f y g , la dinámica lineal es representada por el bloque $H(q)$.

2.3.2. Polinomios no lineales.

La entrada no lineal f del sistema puede ser modelado como una combinación de funciones básicas f_t

$$\begin{aligned} x(k) &= f(u(k)), \\ x(k) &= \sum_{t=1}^m c_t f_t(u(k)), \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde:

- m es el número de funciones básicas usadas.
- $u(k)$ es la señal de entrada tomada en la muestra k (dato actual).
- c_t son los coeficientes a estimar del polinomio no lineal de entrada.
- f_t son las funciones básicas con respecto a la entrada.

La salida no lineal g del sistema es considerada a ser invertible (g^{-1}) por lo que también puede ser escrita como una combinación de funciones básicas g_l

$$\begin{aligned} y(k) &= g(r(k)), \\ r(k) &= g^{-1}(y(k)), \\ r(k) &= \sum_{l=1}^p d_l g_l(y(k)), \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde:

- p es el número de funciones básicas usadas.
- $y(k)$ es la señal de salida tomada en la muestra k (dato actual).
- d_l son los coeficientes a estimar del polinomio no lineal de salida.
- g_l son las funciones básicas con respecto a la salida.

2.3.3. Función de Transferencia.

El bloque lineal invariante en el tiempo $H(q^{-1})$ es modelado usando la siguiente ecuación en diferencias

$$H(q^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}}{a_0 - a_1 q^{-1} - a_2 q^{-2} - \dots - a_{n_a} q^{-n_a}} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}, \quad (2.23)$$

donde:

- n_a es el orden del denominador.
- n_b es el orden del numerador.
- q es el operador de atraso.

En la estructura de un modelo Hammerstein-Wiener, estos bloques no se pueden identificar de manera única a partir de los datos de entrada y salida del sistema. Infinidad de realizaciones pueden ser obtenidas para el modelo, intercambiando factores de ganancia entre el bloque lineal y las no linealidades estáticas.

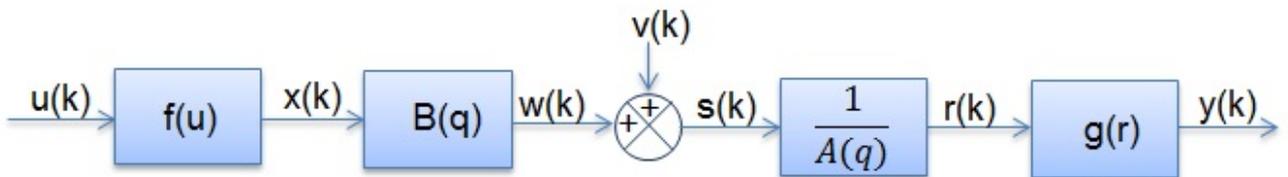


Figura 2.8: Un modelo Hammerstein-Wiener con ruido aditivo. $v(k)$ es la fuente de ruido aditivo.

Las estructuras de un modelo Hammerstein-Wiener ya están estudiadas en la literatura. Uno de los enfoques más populares para su identificación es presentado en [4].

El modelo Hammerstein-Wiener estudiado en Bai es descrito por la siguiente ecuación de entrada y salida

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i \left\{ \sum_{l=1}^p d_l g_l[y(k-i)] \right\} + \sum_{j=0}^{n_b} b_j \left\{ \sum_{t=1}^m c_t f_t[u(k-j)] \right\} + v(k), \quad (2.24)$$

donde:

- $\sum_{j=0}^{n_b} b_j \left\{ \sum_{t=1}^m c_t f_t[u(k-j)] \right\}$ corresponde al primer polinomio no lineal, el cual se ve involucrado por el numerador de la función de transferencia.
- $\sum_{i=1}^{n_a} a_i \left\{ \sum_{l=1}^p d_l g_l[y(k-i)] \right\}$ corresponde al polinomio no lineal de salida, el cual se ve involucrado por el denominador de la función de transferencia.
- $v(k)$ es la fuente de ruido aditivo.

2.3.4. El problema de la Identificación.

Como se mencionó anteriormente existen muchos métodos para identificar un modelo Hammerstein-Wiener. La salida de este modelo esta dada por

$$y(k) = g(H(q)f(u(k))). \quad (2.25)$$

Esto muestra que la identificación de los parámetros resulta un problema de optimización que es no lineal en dichos parámetros.

Este problema puede ser reescrito usando las expresiones matemáticas de los polinomios no lineales y de la función de transferencia. Como se muestra en la Figura 2.8 la señal intermedia $s(k)$ del sistema puede ser escrita de dos formas, como una función de la señal de entrada $u(k)$

$$s(k) = \sum_{j=0}^{n_b} b_j \left\{ \sum_{t=1}^m c_t f_t[u(k-j)] \right\} + v(k). \quad (2.26)$$

Y también como una función de la señal de salida $y(k)$

$$s(k) = \sum_{l=1}^p a_0 d_l g_l[y(k)] + \sum_{i=1}^{n_a} a_i \left\{ \sum_{l=1}^p d_l g_l[y(k-i)] \right\}. \quad (2.27)$$

Igualando la ecuación (2.26) y la ecuación (2.27), para después despejar a modo de dejar todo igualado a cero, se tiene

$$\sum_{j=0}^{n_b} b_j \left\{ \sum_{t=1}^m c_t f_t[u(k-j)] \right\} + v(k) = \sum_{l=1}^p a_0 d_l g_l[y(k)] + \sum_{i=1}^{n_a} a_i \left\{ \sum_{l=1}^p d_l g_l[y(k-i)] \right\}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n_b} b_j \left\{ \sum_{t=1}^m c_t f_t[u(k-j)] \right\} - \sum_{l=1}^p a_0 d_l g_l[y(k)] - \sum_{i=1}^{n_a} a_i \left\{ \sum_{l=1}^p d_l g_l[y(k-i)] \right\} + v(k) &= 0, \\ \sum_{j=0}^{n_b} \left\{ \sum_{t=1}^m b_j c_t f_t[u(k-j)] \right\} - \sum_{l=1}^p a_0 d_l g_l[y(k)] - \sum_{i=1}^{n_a} \left\{ \sum_{l=1}^p a_i d_l g_l[y(k-i)] \right\} + v(k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Esta expresión es bilineal en los parámetros a , b , c y d . Este problema bilineal puede ser convertido a un problema lineal, usando el enfoque por **Sobreparametrización**.

2.3.5. Enfoque por Sobreparametrización.

El problema de la bilinealidad en los parámetros de un modelo Hammerstein-Wiener puede ser resuelto usando el enfoque por sobreparametrización [32].

Por ejemplo la ecuación (2.29) es la expresión matemática de un modelo Hammerstein-Wiener y puede ser reescrita en una forma sobreparametrizada, de tal manera que la expresión matemática de dicho modelo quede acomodado en matrices, y sea lineal en los parámetros, los cuales representan el producto de los originales.

$$0 = \sum_{j=0}^{n_b} \left\{ \sum_{t=1}^m b_j c_t f_t[u(k-j)] \right\} - \sum_{l=1}^p a_0 d_l g_l[y(k)] - \sum_{i=1}^{n_a} \left\{ \sum_{l=1}^p a_i d_l g_l[y(k-i)] \right\} + v(k),$$

$$0 = \Phi(k)\theta + v(k), \tag{2.30}$$

donde $\Phi(k)$ y θ están dados por

$$\Phi_1(k) = [f_1(u(k)) \quad f_2(u(k)) \quad \cdots \quad f_m(u(k))],$$

$$\Phi_2(k) = \begin{bmatrix} f_1(u(k-1)) & f_2(u(k-1)) & \cdots & f_m(u(k-1)) & f_1(u(k-2)) \\ f_2(u(k-2)) & \cdots & f_m(u(k-2)) & \cdots & f_1(u(k-n_b)) \\ f_2(u(k-n_b)) & \cdots & f_m(u(k-n_b)) & \cdots & \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3(k) = [-g_1(y(k)) \quad -g_2(y(k)) \quad \cdots \quad -g_p(y(k))],$$

$$\Phi_4(k) = \begin{bmatrix} -g_1(y(k-1)) & -g_2(y(k-1)) & \cdots & -g_p(y(k-1)) & -g_1(y(k-2)) \\ -g_2(y(k-2)) & \cdots & -g_p(y(k-2)) & \cdots & -g_1(y(k-n_a)) \\ -g_2(y(k-n_a)) & \cdots & -g_p(y(k-n_a)) & \cdots & \end{bmatrix},$$

$$\Phi(k) = [\Phi_1(k) \quad \Phi_2(k) \quad \Phi_3(k) \quad \Phi_4(k)], \tag{2.31}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} b_0 c_1 & b_0 c_2 & \cdots & b_0 c_m & b_1 c_1 & b_1 c_2 & \cdots & b_1 c_m & \cdots \\ b_{n_b} c_1 & b_{n_b} c_2 & \cdots & b_{n_b} c_m & a_0 d_1 & a_0 d_2 & \cdots & a_0 d_p & a_1 d_1 \\ a_1 d_2 & \cdots & a_1 d_p & \cdots & a_{n_a} d_1 & a_{n_a} d_2 & \cdots & a_{n_a} d_p \end{bmatrix}^T. \quad (2.32)$$

De esta forma se obtiene que los parámetros de θ sean lineales, como se muestra en la ecuación (2.32).

Para poder construir la matriz $\Phi(k)$ se necesita conocer las muestras actuales de $f(u(k))$ y $g(y(k))$, y para eso se escoge **el valor más alto que hay entre n_a y n_b y a dicho valor se le suma la unidad, siendo esta la posición inicial** y actual en la tira de datos de las funciones f y g .

Una vez que ya se conoce la posición inicial en la tira de datos y se estima $\Phi(k)$, se adelanta una posición, pasando a ser la nueva muestra actual y con ello una nueva $\Phi(k)$. Este proceso se repite hasta llegar al último valor en la tira de datos, como se muestra en la ecuación (2.34)

$$\Phi(k) = \Phi(\text{máx}(n_a, n_b) + 1), \quad (2.33)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(\text{máx}(n_a, n_b) + 1) \\ \Phi(\text{máx}(n_a, n_b) + 2) \\ \vdots \\ \Phi(N) \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

donde:

- N es el número total de datos.

Los parámetros de θ pueden ser estimados aplicando la descomposición en valores singulares (SVD)

$$\Phi = U \Sigma V^T = \sum_{l=1}^L \sigma_l u_l v_l^T, \quad (2.35)$$

$$L = (n_b + 1)m + (n_a + 1)p,$$

$$\Sigma = \text{diag} [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_L].$$

Dada la descomposición en valores singulares \mathbf{u}_L , el cual corresponde al L -ésimo vector singular izquierdo, \mathbf{v}_L es el L -ésimo vector singular derecho y la matriz Σ es la que contiene los valores singulares, siendo σ_L el valor singular más pequeño.

La estimación de los parámetros del vector θ está dado por

$$\theta = \mathbf{v}_L. \quad (2.36)$$

En donde la norma euclidiana de dicho vector es igual a 1. Esto permite obtener una solución única para la sobreparametrización lineal en el vector θ .

2.3.5.1. Estimación de los parámetros \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} .

Una vez que θ es estimada, los parámetros son reacomodados en las siguientes matrices

$$\theta_{bc} = \begin{bmatrix} b_0 c_1 & b_1 c_1 & \cdots & b_{n_b} c_1 \\ b_0 c_2 & b_1 c_2 & \cdots & b_{n_b} c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0 c_m & b_1 c_m & \cdots & b_{n_b} c_m \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\theta_{ad} = \begin{bmatrix} a_0 d_1 & a_1 d_1 & \cdots & a_{n_a} d_1 \\ a_0 d_2 & a_1 d_2 & \cdots & a_{n_a} d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 d_p & a_1 d_p & \cdots & a_{n_a} d_p \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Los parámetros \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} son calculados aplicando nuevamente la descomposición en valores singulares a las matrices θ_{bc} y θ_{ad}

$$\theta_{bc} = \sum_{l=1}^{\min(n_b, m)} \delta_l \beta_l \gamma_l^T, \quad (2.39)$$

$$\theta_{ad} = \sum_{l=1}^{\min(n_a, p)} \varphi_l \lambda_l \omega_l^T. \quad (2.40)$$

Donde β es una matriz que contiene los vectores singulares izquierdos, y γ es una matriz que contiene los vectores singulares derechos de θ_{bc} . Así como

λ es una matriz que contiene los vectores singulares izquierdos, y ω es una matriz que contiene los vectores singulares derechos de θ_{ad} .

Los valores singulares de θ_{bc} y θ_{ad} están dados por δ_l y φ_l respectivamente.

Por lo tanto los parámetros \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} están dados por

$$\hat{a} = \varphi_1 \omega_1, \quad (2.41)$$

$$\hat{b} = \delta_1 \gamma_1, \quad (2.42)$$

$$\hat{c} = \beta_1, \quad (2.43)$$

$$\hat{d} = \lambda_1. \quad (2.44)$$

2.3.5.2. Ajuste de los parámetros.

Los parámetros \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} se ajustan con la norma euclidiana de la siguiente manera

$$\alpha = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$a = s_a \frac{\hat{a}}{\|\alpha\|} \sqrt{\frac{\|\hat{d}\|}{\|\hat{c}\|}}, \quad (2.46)$$

$$b = s_a s_c s_d \frac{\hat{b}}{\|\alpha\|} \sqrt{\frac{\|\hat{c}\|}{\|\hat{d}\|}}, \quad (2.47)$$

$$c = s_c \frac{\hat{c}}{\|\hat{c}\|}, \quad (2.48)$$

$$d = s_d \frac{\hat{d}}{\|\hat{d}\|}, \quad (2.49)$$

donde:

- s_a , s_c , s_d denotan el signo del primer elemento no cero de \hat{a} , \hat{c} , \hat{d} , respectivamente.

2.3.5.3. Comprobación de los parámetros.

Para tener una descripción única de un modelo Hammerstein-Wiener, se deben comprobar los parámetros a , b , c y d de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\|c\| &= 1, & c &= [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_m]^T, \\
\|d\| &= 1, & d &= [d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_p]^T, \\
\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\| &= 1, & a &= [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n_a}]^T, \\
& & b &= [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n_b}]^T.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

2.3.6. Ejemplo de una identificación Hammerstein-Wiener.

En base al método por sobreparametrización, se prosigue a realizar una identificación con los datos muestreados de entrada y salida de **dos tanques acoplados**.

Primero se establece la cantidad de funciones básicas a utilizar tanto en el polinomio de entrada, como en el polinomio de salida, así como también el número de polos y ceros de la función de transferencia, quedando de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
n_a &= 2, & n_b &= 2, \\
m &= 1, & p &= 1.
\end{aligned}$$

Basándose en las ecuaciones (2.21) y (2.22) se prosigue a construir las señales de los polinomios no lineales de entrada y salida

$$\begin{aligned}
x(k) &= c_1 f_1(u(k)), \\
r(k) &= d_1 g_1(y(k)).
\end{aligned}$$

Las funciones básicas $f_t(u(k))$ y $g_l(y(k))$ quedarán de la siguiente manera

$$f_t(u(k)) = u^t(k), \tag{2.51}$$

$$g_l(y(k)) = y^l(k). \tag{2.52}$$

Por lo que se obtiene en las señales de los polinomios no lineales de entrada y salida las siguientes ecuaciones

$$x(k) = c_1 u(k), \quad (2.53)$$

$$r(k) = d_1 y(k). \quad (2.54)$$

Se continúa a construir la matriz $\Phi(k)$ la cual se conforma de las funciones de entrada y salida, tanto actuales como retrasadas, como se muestra en la ecuación (2.31), para luego construir la matriz Φ tomando como referencia la ecuación (2.34).

Una vez formada la matriz Φ se le aplica la descomposición en valores singulares, para posteriormente estimar los parámetros de θ (ecuaciones (2.35) y (2.36)).

Por lo que se obtiene el siguiente vector

$$\theta = [3,5581 \times 10^{-4} \quad -6,76306 \times 10^{-4} \quad 3,4153 \times 10^{-4} \quad 0,4142 \quad -0,8163 \quad 0,4025]^T.$$

Una vez calculado θ se continúa con la metodología por sobreparametrización, y en base a las ecuaciones (2.41)-(2.44) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{a} &= [-0,4142 \quad 0,8163 \quad -0,4025]^T, \\ \hat{b} &= [-3,5581 \times 10^{-4} \quad 6,7630 \times 10^{-4} \quad -3,4153 \times 10^{-4}]^T, \\ \hat{c} &= [-1]^T, \\ \hat{d} &= [-1]^T. \end{aligned}$$

Por último se ajustan los parámetros \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} como se muestra en las ecuaciones (2.46)-(2.49)

$$\begin{aligned}
 a &= [0,4142 \quad -0,8163 \quad 0,4025]^T, \\
 b &= [3,5581 \times 10^{-4} \quad -6,7630 \times 10^{-4} \quad 3,4153 \times 10^{-4}]^T, \\
 c &= [1]^T, \\
 d &= [1]^T.
 \end{aligned}$$

Una vez estimados todos los parámetros se calcula la norma euclidiana a cada uno de dichos vectores, obteniendo como resultado la unidad (ver ecuación (2.50)), con lo cual se valida la eficiencia de los parámetros.

En la Figura 2.9 se muestra el resultado del modelo matemático obtenido por el enfoque por sobreparametrización, obteniendo un FIT del 62.76 % con respecto a la salida del sistema de dos tanques acoplados.

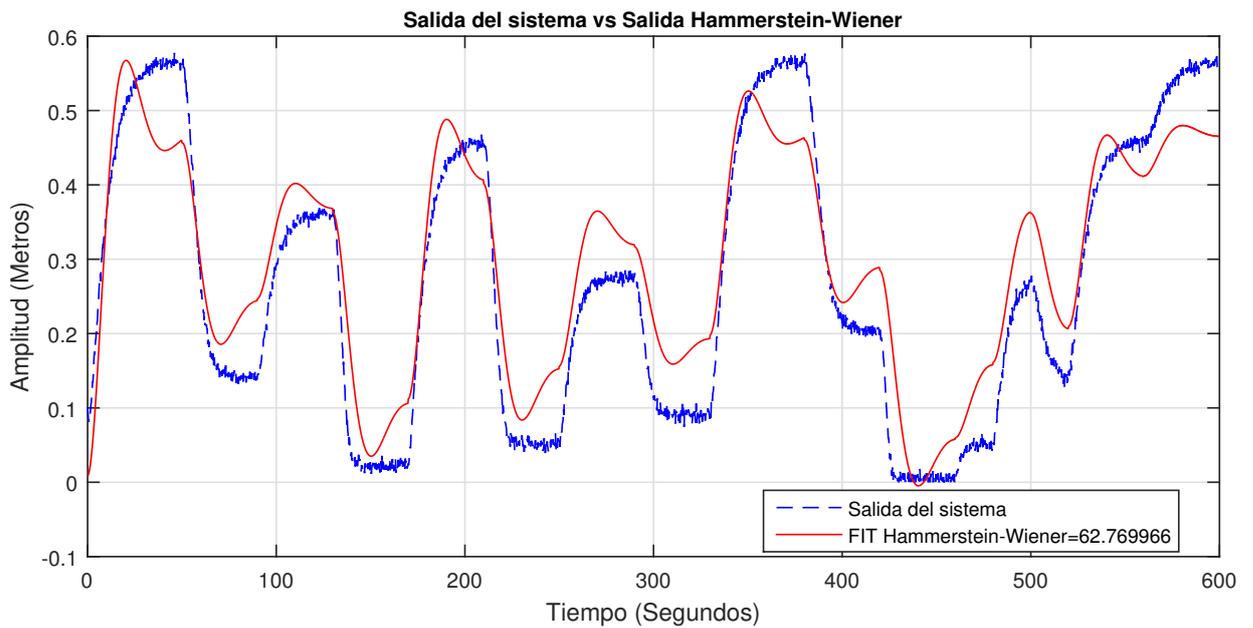


Figura 2.9: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de dos tanques acoplados, enfoque por sobreparametrización.

2.4. Modelos Hammerstein-Wiener enfoque iterativo.

2.4.1. Sistemas Hammerstein-Wiener.

Un sistema Hammerstein-Wiener esta dado por la conexión en cascada de un bloque no lineal estático seguido por un bloque dinámico lineal que a su vez es seguido por otro bloque no lineal estático, como se muestra en la Figura 2.10:

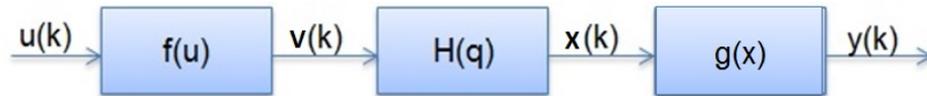


Figura 2.10: Sistema Hammerstein-Wiener.

El primer bloque no lineal se representa por la siguiente ecuación:

$$v(k) = f(u(k)). \quad (2.55)$$

Donde $u(k)$ y $v(k)$ son la entrada y salida respectivamente del primer bloque no lineal.

Por su parte el segundo bloque no lineal se representa por:

$$y(k) = g(x(k)). \quad (2.56)$$

Donde $x(k)$ y $y(k)$ son la entrada y salida respectivamente del segundo bloque no lineal.

2.4.2. Polinomios no lineales.

Los bloques no lineales pueden ser aproximados por propios polinomios de grados propuestos, como se muestra a continuación.

$$v(k) = f(u(k)) = \sum_{l=1}^p f_l u^l(k), \quad (2.57)$$

$$y(k) = g(x(k)) = \sum_{l=1}^r g_l x^l(k). \quad (2.58)$$

2.4.3. Función de Transferencia.

La función de transferencia es modelada por la relación entre las ecuaciones (2.60) y (2.59) que son polinomios escalares con el operador de atraso q^{-1} . En donde $v(k)$ y $x(k)$ son la entrada y salida respectivamente del bloque dinámico lineal.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}, \quad (2.59)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m}, \quad (2.60)$$

$$H(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}. \quad (2.61)$$

2.4.4. Predictor de un paso adelante.

El cálculo de $\hat{x}(k)$ se desarrolla con la fórmula del predictor de un paso adelante muy conocida en el área de la identificación de sistemas, como se muestra en la ecuación (2.62).

$$\hat{x}(k) = B(q^{-1})v(k) + [1 - A(q^{-1})]x(k). \quad (2.62)$$

En el que el vector x toma valores iniciales de cero hasta llegar a la muestra actual $x(k)$.

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x(k) \end{bmatrix},$$

donde:

- $x(k) = x(\text{máx}(m, n) + 1)$, que corresponde a la muestra actual de x el cual también se inicializa en cero.

Una vez formado el vector \mathbf{x} de ceros se desarrolla la ecuación (2.62), para posteriormente anexar dicho valor en \mathbf{x} ; se repite este proceso hasta generar un vector final \mathbf{x} .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}.$$

En un modelo Hammerstein-Wiener las variables $u(k)$ y $y(k)$ son medibles, mientras que las variables internas $v(k)$ y $x(k)$ no lo son.

La descripción de entrada-salida de un modelo Hammerstein-Wiener resultando de la sustitución de la ecuación (2.55) en la ecuación (2.62), y este en la ecuación (2.56), el resultado sería una expresión altamente no lineal tanto en los parámetros como en las variables, por lo que no es muy apropiado para la estimación de los parámetros. Sin embargo, la sustitución mencionada será aplicada con el objetivo de derivar a una forma más simple la descripción del modelo [3].

Basándose en la ecuación (2.56), el segundo bloque no lineal puede ser descompuesto y reescrito de la siguiente manera:

$$y(k) = g_1 x(k) + g'(x(k)). \quad (2.63)$$

En donde la variable interna $x(k)$ es separada en 2 términos. Por su parte la ecuación del predictor de un paso adelante o del bloque dinámico lineal también puede ser reescrito como:

$$\hat{x}(k) = b_o v(k) + [B(q^{-1}) - b_o]v(k) + [1 - A(q^{-1})]x(k). \quad (2.64)$$

Donde la variable interna $v(k)$ es separada. Después de reescribir estas 2 ecuaciones ahora si se puede completar la descomposición para la salida del modelo Hammerstein-Wiener.

Resultando de la sustitución de la ecuación (2.55) en la ecuación (2.64) (solamente en el primer término de $v(k)$) para posteriormente ser sustituido en

la ecuación (2.63) (de igual forma solo en el primer término de $x(k)$), por lo que la ecuación de salida de un modelo Hammerstein-Wiener será:

$$y(k) = g_1[b_o f(u(k)) + [B(q^{-1}) - b_o]v(k) + [1 - A(q^{-1})]x(k)] + g'(x(k)). \quad (2.65)$$

En el que las características de los bloques son directamente proyectadas hacia la descripción del modelo, siendo f para el primer bloque no lineal, $A(q^{-1})$ y $B(q^{-1})$ para el bloque lineal, y g' para el segundo bloque no lineal.

La descripción de 2 bloques no lineales pueden simplificar significativamente la ecuación de salida del modelo, y con ello la linealidad en todos los parámetros del mismo.

Como un sistema Hammerstein-Wiener consiste en la conexión en cascada de 3 subsistemas, la parametrización de la ecuación (2.65) no es única porque muchas combinaciones de parámetros pueden ser encontrados [33].

Por lo tanto un parámetro en al menos dos bloques tiene que ser arreglado en la matemática del modelo para poder ser único. Por lo que las elecciones de $g_1 = 1$ y $b_o = 1$ en la ecuación (2.65) simplificarán la descripción del modelo Hammerstein-Wiener, dando como resultado que la ecuación final de salida de dicho modelo sea

$$y(k) = \sum_{l=1}^p f_l u^l(k) + [B(q^{-1}) - 1]v(k) + [1 - A(q^{-1})]x(k) + \sum_{l=2}^r g_l x^l(k). \quad (2.66)$$

Las ecuaciones (2.57) y (2.62) definen las variables internas $v(k)$ y $x(k)$ respectivamente, y la ecuación (2.66) representa la salida de un modelo Hammerstein-Wiener.

El modelo es lineal en parámetros para $u(k)$, $v(k)$ y $x(k)$, y puede ser escrito en forma vectorial

$$\hat{y}(k) = \Phi(k)\theta. \quad (2.67)$$

Donde el vector de parámetros y el vector de datos están dados por

$$\theta = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_p & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & a_1 \\ a_2 & \cdots & a_n & g_2 & g_3 & \cdots & g_r \end{bmatrix}^T, \quad (2.68)$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} u(k) & u^2(k) & \cdots & u^p(k) & v(k-1) & v(k-2) & \cdots & v(k-m) \\ -x(k-1) & -x(k-2) & \cdots & -x(k-n) & x^2(k) & x^3(k) & \cdots & x^r(k) \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

2.4.5. Estimación de los parámetros.

El modelo Hammerstein-Wiener contiene 2 variables que no son medibles, por lo que la estimación de los parámetros no pueden ser desarrollados directamente con la ecuación (2.67). Por lo tanto será apropiado aplicar el enfoque iterativo, en el que los parámetros tendrán un valor inicial escogido al azar, y las variables internas serán actualizadas en la ecuación (2.69) después de cada iteración.

Sustituyendo las ecuaciones (2.59) y (2.60) en la ecuación del predictor de un paso adelante (ecuación (2.62)) se obtiene la expresión matemática final de esta ecuación.

$$\hat{x}(k) = v(k) + \sum_{i=1}^m b_i v(k-i) - \sum_{i=1}^n a_i x(k-i). \quad (2.70)$$

El algoritmo iterativo se basa en el uso de las estimaciones precedentes de los parámetros del modelo para la estimación de las variables internas, las cuales se irán calculando iteración tras iteración con las ecuaciones (2.57) y (2.70).

El error va ser minimizado en n-iteraciones con algún método de optimización (ver ecuaciones (2.4), (2.9), (2.10), (2.11)) para la obtención de los parámetros que mejor se ajusten a la dinámica del sistema a identificar basándose en una función objetivo.

El error está dado por:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k). \quad (2.71)$$

2.4.6. Ejemplo de una identificación Hammerstein-Wiener.

En base al método iterativo, se desarrolló una identificación con los datos muestreados de entrada y salida de **dos tanques acoplados**.

Para este ejemplo, se establecieron los siguientes ordenes del modelo matemático a obtener:

$$\begin{aligned}n &= 3, & m &= 3, \\p &= 3, & r &= 3.\end{aligned}$$

En la Figura 2.11 se muestra el resultado del modelo matemático obtenido por el enfoque iterativo, obteniendo un FIT del 89.87% con respecto a la salida del sistema de dos tanques acoplados.

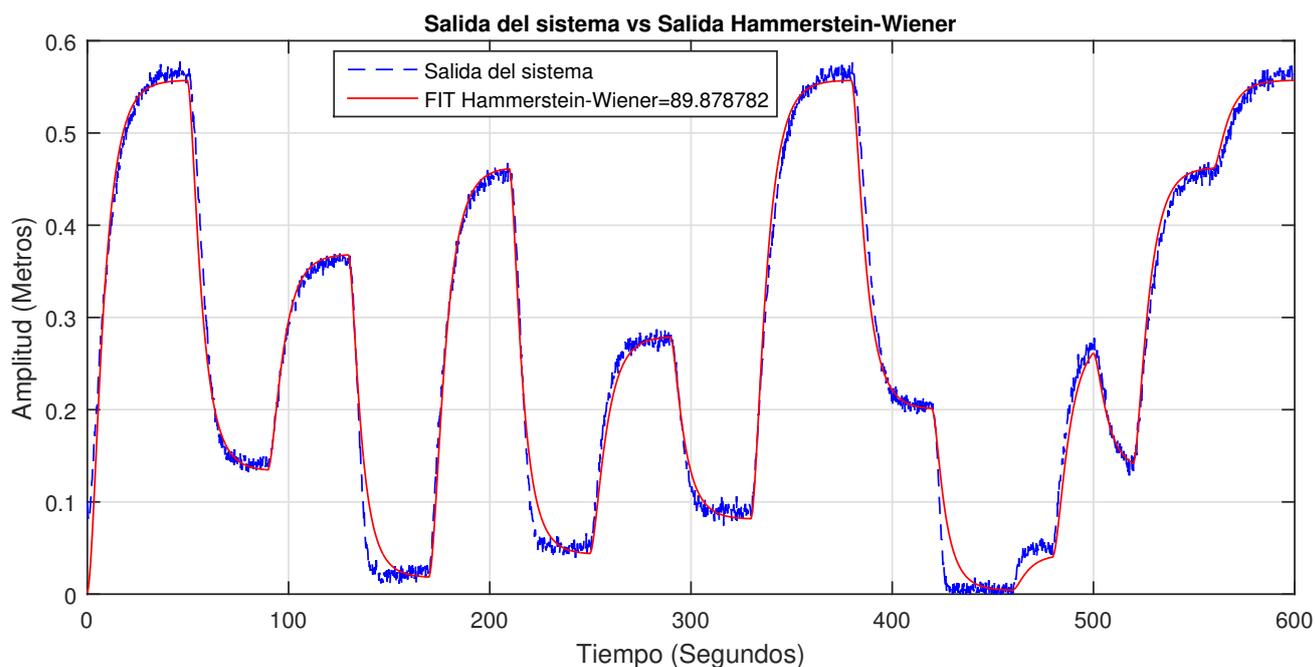


Figura 2.11: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de dos tanques acoplados, enfoque iterativo.

Capítulo 3

Modelos Hammerstein-Wiener aplicando cálculo fraccionario

3.1. Sistemas no lineales identificados.

Se continua la identificación con la estructura orientada a bloques Hammerstein-Wiener, tanto con el cálculo de orden entero como para el cálculo de orden no entero.

Se llevará a cabo la identificación con 3 sistemas no lineales y un enfoque iterativo en el que los parámetros se inicializarán aleatoriamente, y en cada iteración se aplicará un método de optimización no lineal, en esta tesis se considera el algoritmo de Levenberg-Marquardt, el cual se basa en una función objetivo que trata de minimizar el error.

También se podrán ver las diferencias entre los 2 modelos matemáticos finales, de dichos sistemas identificados.

Para poder mezclar las señales discretas del sistema real en el modelo matemático que cuenta con una función de transferencia que es continua, se usa un retenedor de orden cero para que las señales discretas de entrada y salida del sistema real se mantengan constantes entre muestra y muestra; de esta forma se convierten en señales continuas, ver **Apéndice C**.

El desarrollo de los órdenes fraccionarios de la función de transferencia se realizó con las funciones de CRONE mencionadas y explicadas en el **capítulo 2.2.3**.

Los sistemas no lineales a identificar serán:

- Dos tanques acoplados.
- Brazo robot.
- Columna de destilación.

3.1.1. Dos tanques acoplados.

El primer sistema a identificar consiste en un par de tanques, en el cual el agua fluye a través de una tubería al tanque 1 y desemboca en el tanque 2, el nivel de agua del sistema es ajustado a través de un pequeño orificio en el fondo del tanque 2; la entrada al sistema es la alimentación aplicada a la bomba que alimenta al tanque 1 (en volts) y la salida es la altura del agua en el tanque 2 (en metros), como se muestra en la Figura 3.1. Este sistema fue tomado del manual de identificación de Matlab, con el objetivo de poner a prueba a las estructuras no lineales desarrolladas, el conjunto de datos utilizado de entrada-salida es de 3000 muestras.

En la Figura 3.2 se muestra la entrada y la salida del sistema de dos tanques acoplados.

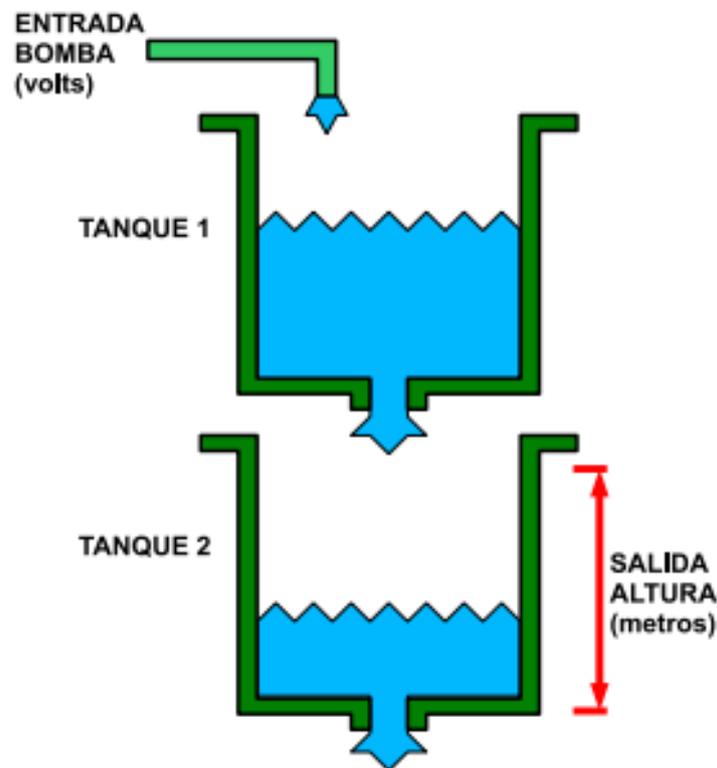
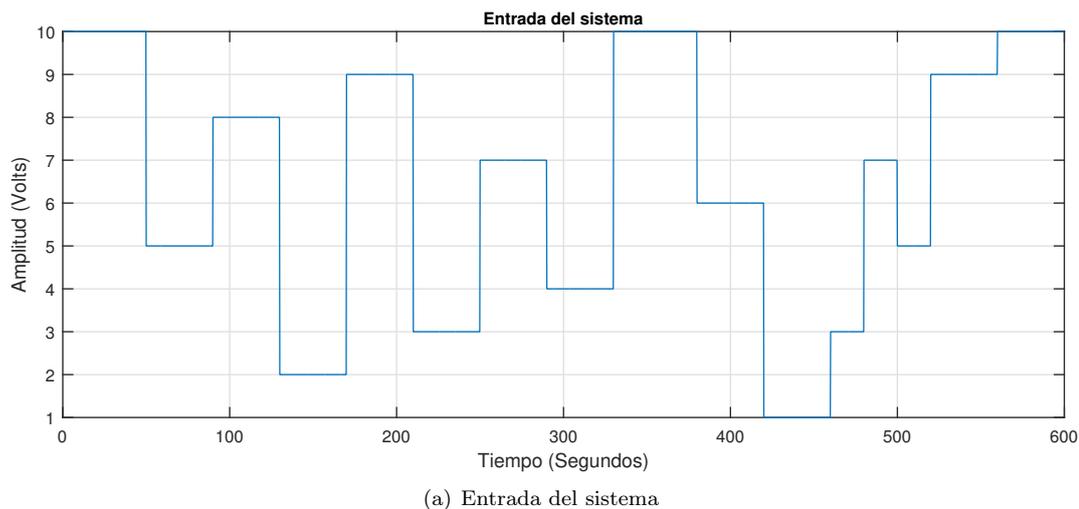
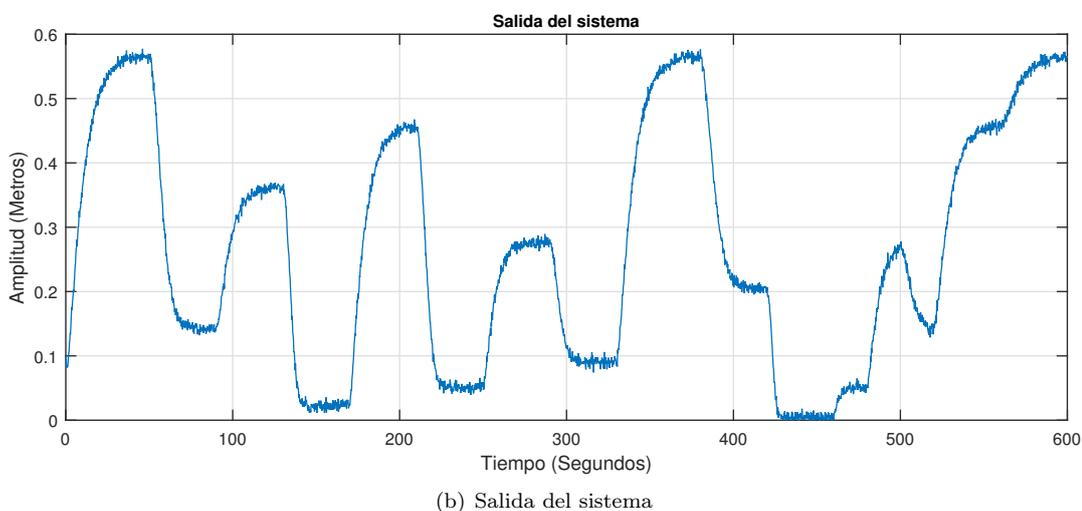


Figura 3.1: Sistema de dos tanques acoplados.



(a) Entrada del sistema



(b) Salida del sistema

Figura 3.2: Entrada y salida del sistema de dos tanques acoplados.

3.1.1.1. Identificación con cálculo de orden entero (ordinario).

Para la obtención del modelo matemático se consideran 2 polinomios de grado 3 para los bloques estáticos y una función de transferencia con 5 polos y 4 ceros para la parte del bloque dinámico.

$$\begin{aligned} n &= 5, & m &= 4, \\ p &= 3, & r &= 3. \end{aligned}$$

Quedando su expresión matemática de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 v(t) &= f(u(t)) = \sum_{l=0}^p f_l u^l(t), \\
 \hat{y}(t) &= g(x(t)) = \sum_{l=0}^r g_l x^l(t), \\
 A(s) &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n, \\
 B(s) &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m,
 \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Donde el vector de parámetros θ está dado por

$$\theta = [f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_p \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \\
 b_m \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad g_0 \quad g_1 \quad g_2 \\
 \dots \quad g_r]^T.$$

El vector de parámetros θ se inicializó aleatoriamente, posteriormente se programó y con ayuda del algoritmo de optimización no lineal de Levenberg-Marquardt se estimaron dichos parámetros de tal manera en que el error se minimice lo más cercano a cero.

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

Lo cual se realizó de forma iterativa obteniendo el siguiente modelo matemático identificado:

$$v(t) = -0,8999 + 0,9553u(t) - 0,00703u^2(t) + 0,0031u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{1,653s^4 - 36,51s^3 + 344,4s^2 - 6797s + 7548}{s^5 + 5,567s^4 + 346,5s^3 + 1020s^2 + 22560s + 3026},$$

$$\hat{y}(t) = 0,0098 + 0,0013x(t) + 0,0013x^2(t) - 0,000023x^3(t).$$

En la Figura 3.3 se puede observar el resultado y la comparación del modelo matemático obtenido por el enfoque iterativo, en el que se tiene un FIT del 89.82 % con respecto a la salida del sistema de dos tanques acoplados.

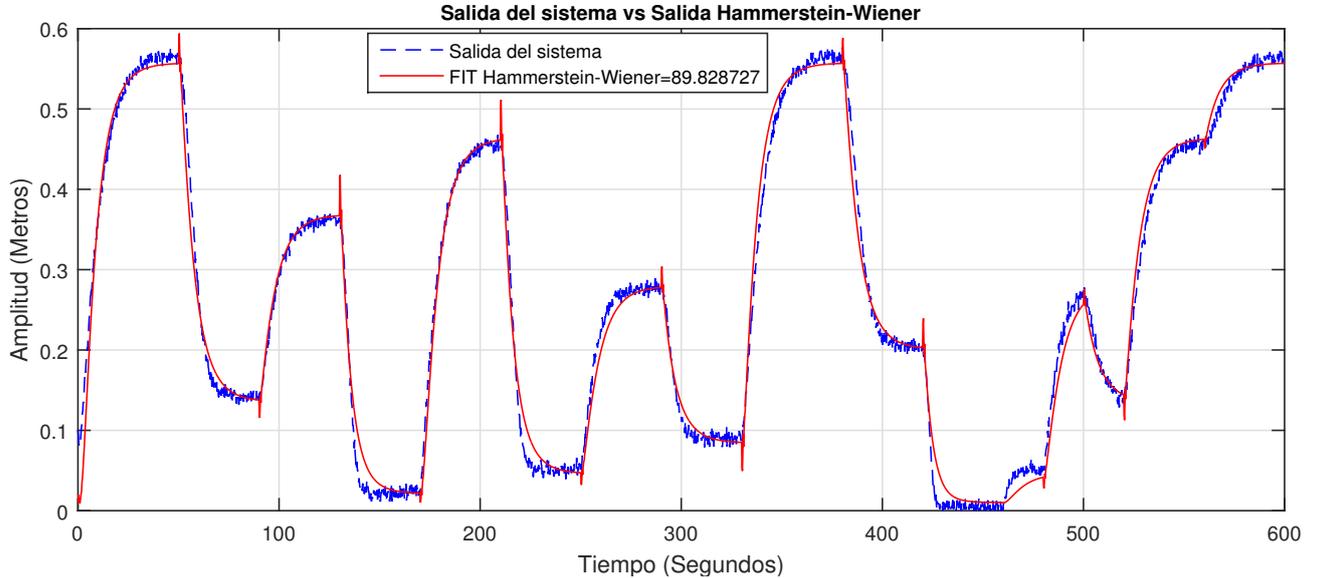


Figura 3.3: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de dos tanques acoplados, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

3.1.1.2. Identificación con cálculo fraccionario.

Para la obtención del modelo matemático fraccionario se aumentaron el número de parámetros a estimar, ya que ahora también se deben estimar los órdenes fraccionarios del bloque dinámico lineal, también se estimaron de forma iterativa dichos parámetros de θ con el algoritmo de Levenberg-Marquardt.

Para la identificación fraccionaria se utilizó la derivada de Riemann-Liouville, los polinomios igualmente se consideraron de grado 3.

$$\begin{aligned} n &= 1, & m &= 1, \\ p &= 3, & r &= 3. \end{aligned}$$

Quedando su expresión matemática de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 v(t) &= f(u(t)) = \sum_{l=0}^p f_l u^l(t), \\
 \hat{y}(t) &= g(x(t)) = \sum_{l=0}^r g_l x^l(t), \\
 A(s) &= a_0 s^{\beta_0} + a_1 s^{\beta_1} + a_2 s^{\beta_2} + \dots + a_n s^{\beta_n}, \\
 B(s) &= b_0 s^{\alpha_0} + b_1 s^{\alpha_1} + b_2 s^{\alpha_2} + \dots + b_m s^{\alpha_m},
 \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

donde:

- $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ son los órdenes de derivación fraccionarios, los cuales se encuentran entre 2 números enteros consecutivos reales.

El vector de parámetros θ está dado por

$$\theta = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_p & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_m & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & g_0 & g_1 & g_2 \\ \dots & g_r & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m & \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}^T.$$

El vector de parámetros θ se inicializó aleatoriamente, posteriormente se programó y con ayuda del algoritmo de optimización no lineal de Levenberg-Marquardt se estimaron dichos parámetros de tal manera en que el error se minimice lo más cercano a cero.

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

Lo cual se realizó de forma iterativa obteniendo el siguiente modelo matemático identificado:

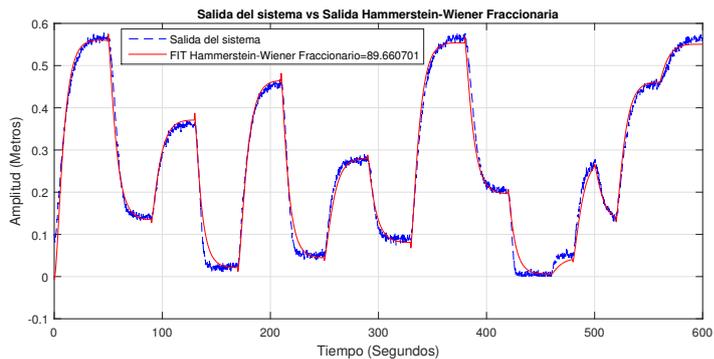
$$v(t) = 0,9384 - 0,3183u(t) + 0,0159u^2(t) - 0,0012u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{-0,3549s^{-1,3183} + 0,4882s^{-1,7339}}{0,8652s^{-0,63705} + 0,1187s^{-1,7474}},$$

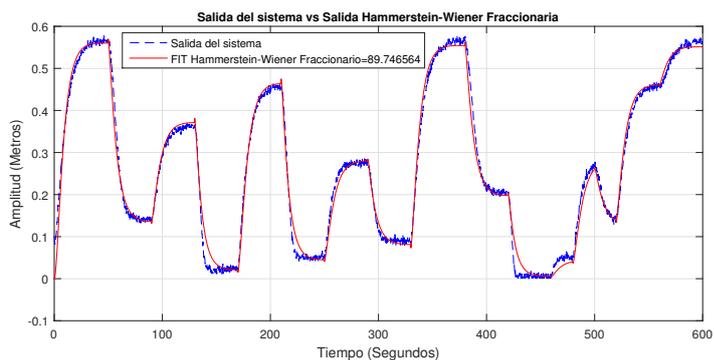
$$\hat{y}(t) = 0,0593 - 0,0447x(t) + 0,0085x^2(t) + 0,000609x^3(t).$$

En la Figura 3.4 se muestran 4 gráficas, cada una de ellas corresponde a cierto número de iteraciones del modelo matemático (40, 80, 120 y 160 iteraciones), respectivamente. La Figura 3.5 corresponde a la iteración número 200, la cual es la última iteración del modelo matemático.

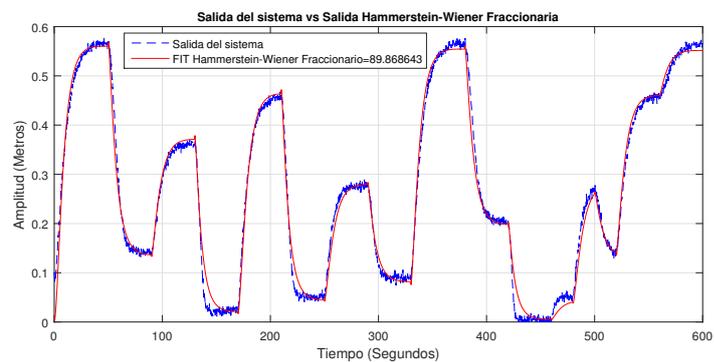
En la Figura 3.5 se puede observar el resultado y la comparación del modelo matemático fraccionario obtenido por el enfoque iterativo, en el que se tiene un FIT del 90.95 % con respecto a la salida del sistema de dos tanques acoplados.



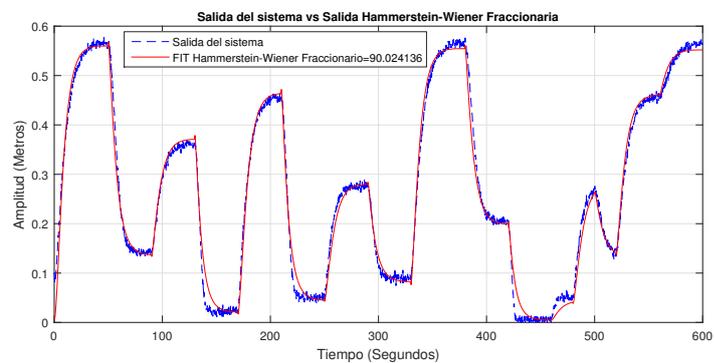
(a) Iteración número 40



(b) Iteración número 80



(c) Iteración número 120



(d) Iteración número 160

Figura 3.4: Iteraciones con el algoritmo de Levenberg-Marquardt.

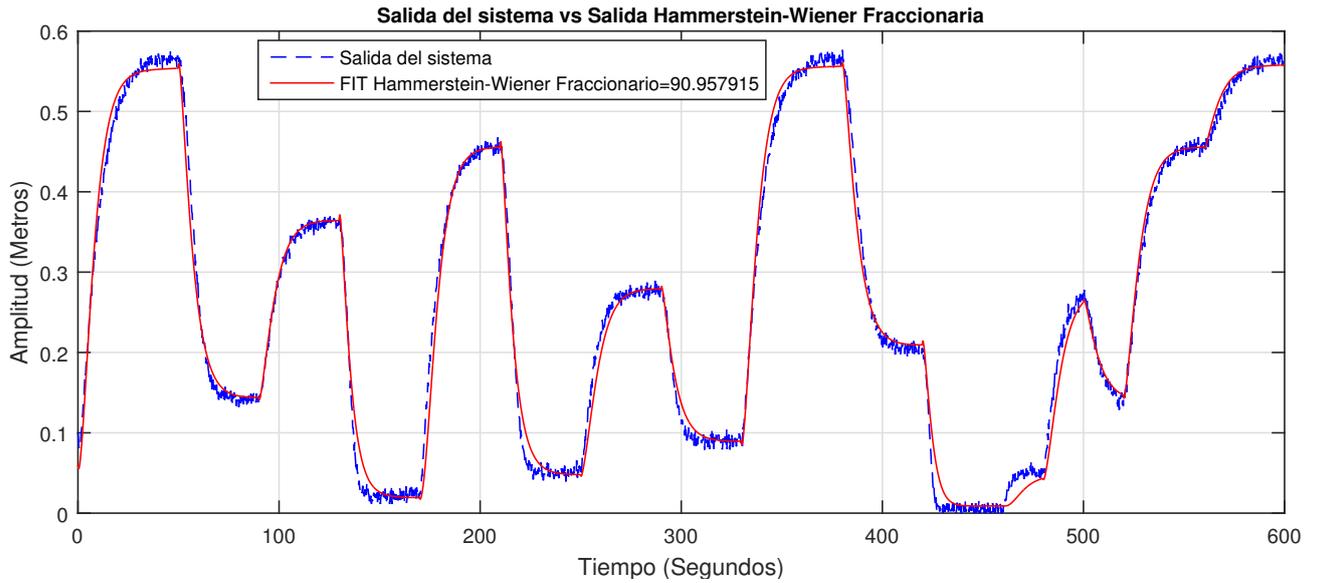


Figura 3.5: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

3.1.2. Brazo robot.

El siguiente sistema se obtuvo de la base de datos de identificación de sistemas DaISy, los cuales corresponden a un brazo robot. El brazo está instalado en un motor eléctrico. La salida corresponde a la aceleración angular del brazo flexible y es adquirida midiendo desde el par de reacción del brazo y la entrada aplicada es un barrido sinusoidal periódico, tanto la salida como la entrada se pueden apreciar en la Figura 3.6.

3.1.2.1. Identificación con cálculo de orden entero (ordinario).

Para la obtención del modelo matemático se consideran 2 polinomios de grado 3 para los bloques estáticos y una función de transferencia con 4 polos y 3 ceros para la parte del bloque dinámico.

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 3, \\ p &= 3, & r &= 3. \end{aligned}$$

Quedando su expresión matemática de la siguiente manera.

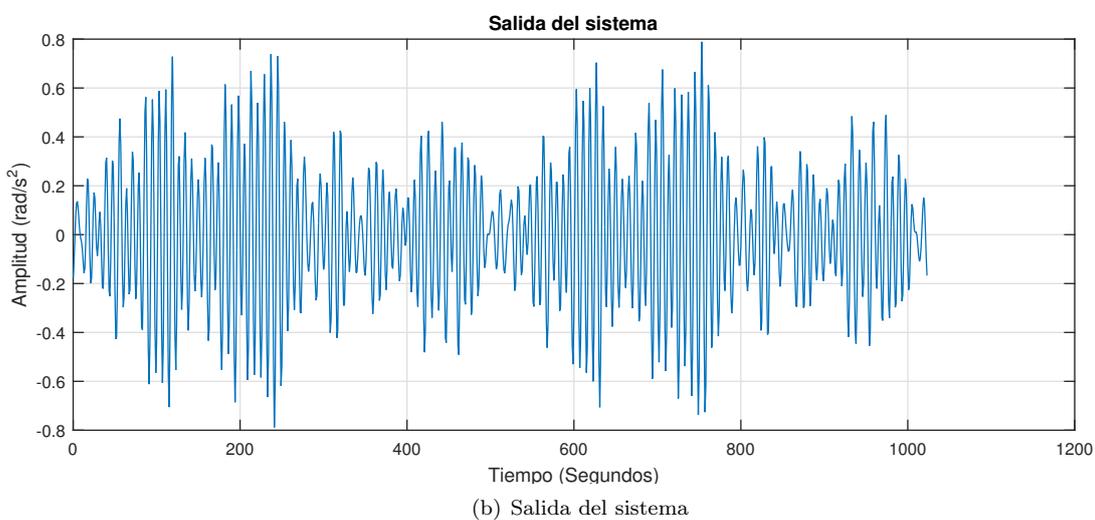
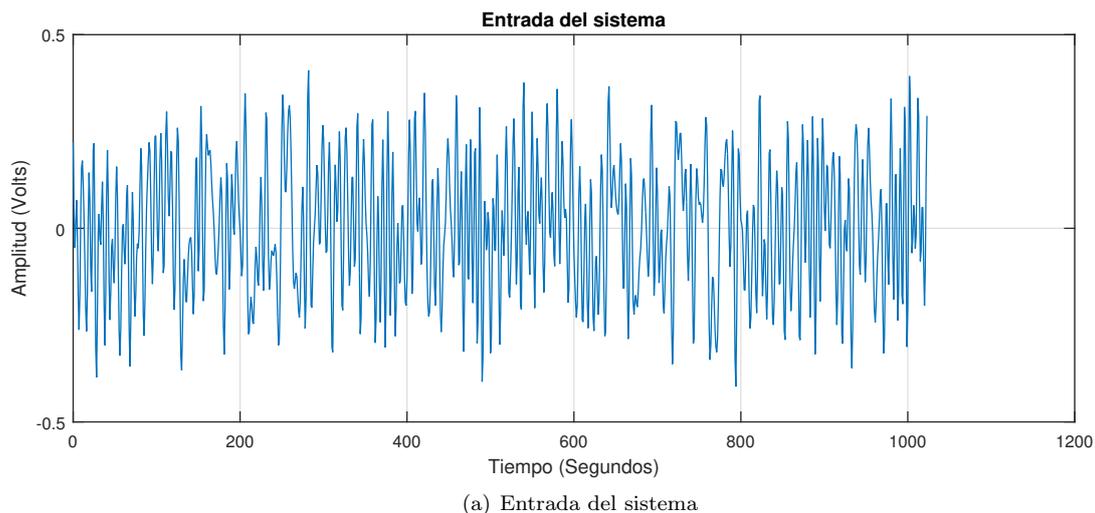


Figura 3.6: Entrada y salida del sistema del brazo robot.

$$v(t) = f(u(t)) = \sum_{l=1}^p f_l u^l(t),$$

$$\hat{y}(t) = g(x(t)) = \sum_{l=1}^r g_l x^l(t),$$

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n,$$

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m,$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Donde el vector de parámetros θ está dado por

$$\theta = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_p & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & g_1 & g_2 & \cdots & g_r \end{bmatrix}^T.$$

El vector de parámetros θ se inicializó aleatoriamente, posteriormente se programó y con ayuda del algoritmo de optimización no lineal de Levenberg-Marquardt se estimaron dichos parámetros de tal manera en que el error se minimice lo más cercano a cero.

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

Lo cual se realizó de forma iterativa obteniendo el siguiente modelo matemático identificado:

$$v(t) = 0,3606u(t) - 0,049u^2(t) + 0,078u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{0,08248s^3 - 1,952s^2 - 0,009379s + 0,03217}{2,708s^4 + 0,03041s^3 + 2,082s^2 + 0,008639s + 0,2321},$$

$$\hat{y}(t) = 0,5028x(t) + 0,00066272x^2(t) - 0,0027x^3(t).$$

En la Figura 3.7 se puede observar el resultado y la comparación del modelo matemático obtenido por el enfoque iterativo, en el que se tiene un FIT del 85.95 % con respecto a la salida del sistema del brazo robot.

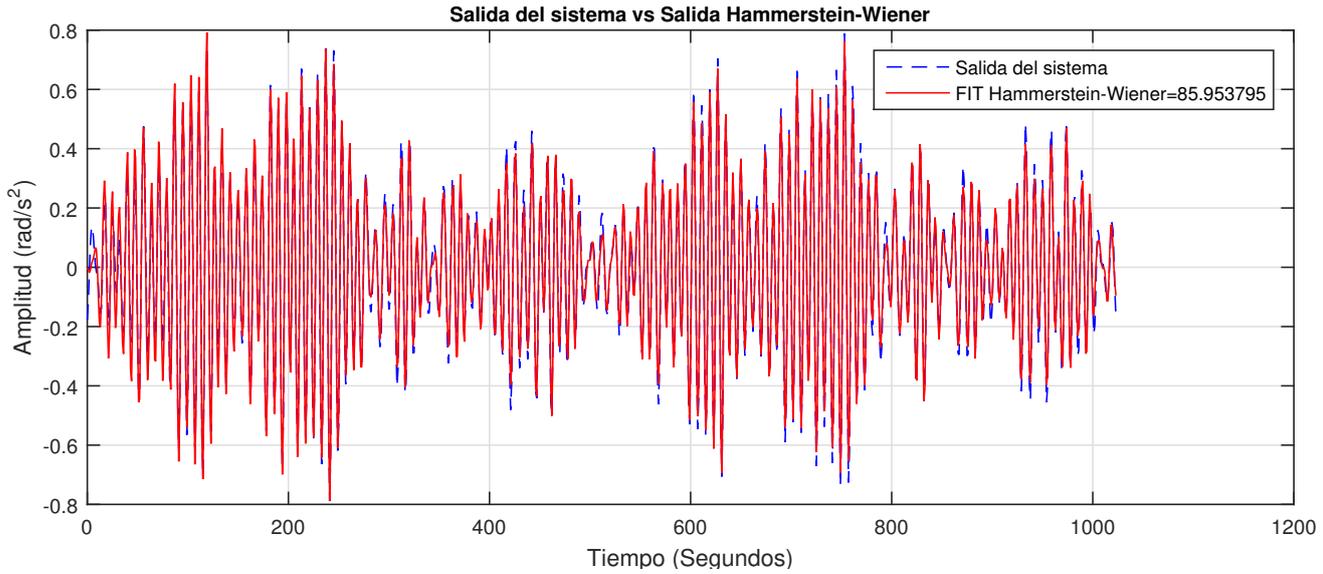


Figura 3.7: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener del brazo robot, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

3.1.2.2. Identificación con cálculo fraccionario.

Para la obtención del modelo matemático fraccionario se aumentaron el número de parámetros a estimar, en este caso los órdenes fraccionarios del bloque dinámico lineal, de igual manera se estimaron de forma iterativa dichos parámetros de θ con el algoritmo de Levenberg-Marquardt.

La identificación fraccionaria se realizó con el uso de la derivada de Riemann-Liouville, los polinomios igualmente se consideraron de grado 3.

$$\begin{aligned} n &= 4, & m &= 3, \\ p &= 3, & r &= 3. \end{aligned}$$

Quedando su expresión matemática de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} v(t) &= f(u(t)) = \sum_{l=1}^p f_l u^l(t), \\ \hat{y}(t) &= g(x(t)) = \sum_{l=1}^r g_l x^l(t), \\ A(s) &= a_0 s^{\beta_0} + a_1 s^{\beta_1} + a_2 s^{\beta_2} + \dots + a_n s^{\beta_n}, \\ B(s) &= b_0 s^{\alpha_0} + b_1 s^{\alpha_1} + b_2 s^{\alpha_2} + \dots + b_m s^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

donde:

- $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ son los órdenes de derivación fraccionarios, los cuales se encuentran entre 2 números enteros consecutivos reales.

El vector de parámetros θ está dado por

$$\theta = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_p & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & g_1 & g_2 & \dots & g_r \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}^T.$$

El vector de parámetros θ se inicializó aleatoriamente, posteriormente se programó y con ayuda del algoritmo de optimización no lineal de Levenberg-Marquardt se estimaron dichos parámetros de tal manera en que el error se minimice lo más cercano a cero.

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

Lo cual se realizó de forma iterativa obteniendo el siguiente modelo matemático identificado:

$$v(t) = 2,1577u(t) - 0,3255u^2(t) - 0,4069u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{-0,08891s^{3,5595} + 0,09957s^{3,3559} + 0,07627s^{-0,2205} + 0,003486s^{-2,1975}}{1,562s^{2,6782} + 1,086s^{2,4611} + 1,233s^{-0,0066016} + 0,3521s^{-0,044313} + 0,1405s^{-2,3104}},$$

$$\hat{y}(t) = -3,192x(t) - 0,0013x^2(t) + 0,0036x^3(t).$$

En la Figura 3.8 se puede observar el resultado y la comparación del modelo matemático fraccionario obtenido por el enfoque iterativo, en el que se tiene un FIT del 89.65 % con respecto a la salida del sistema del brazo robot.

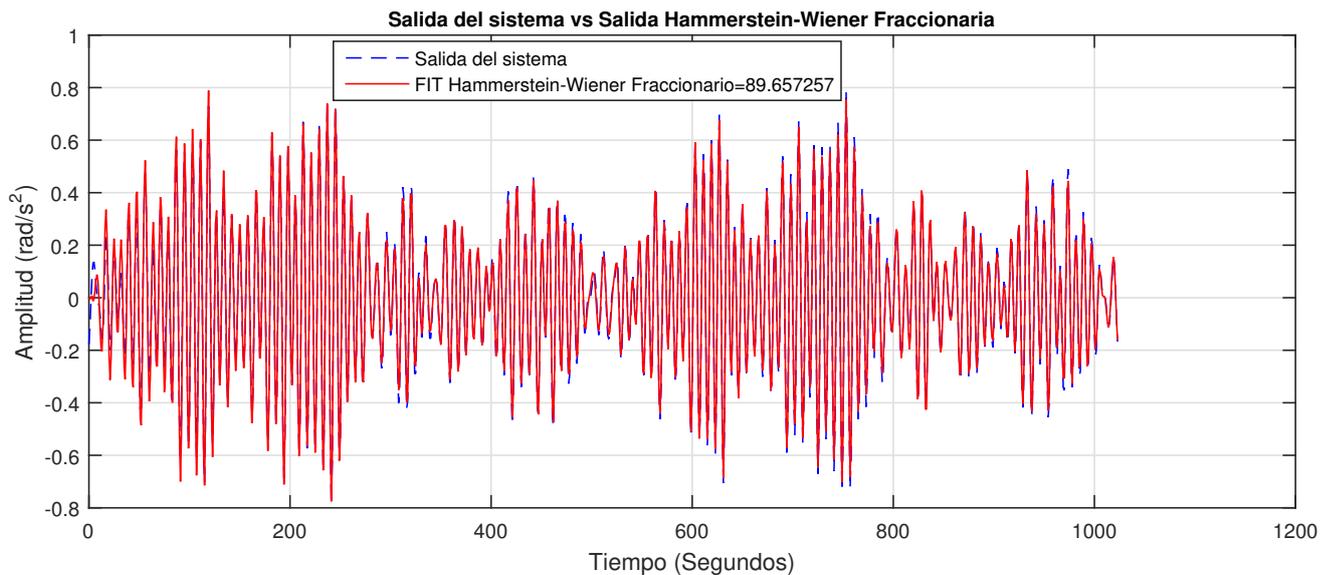
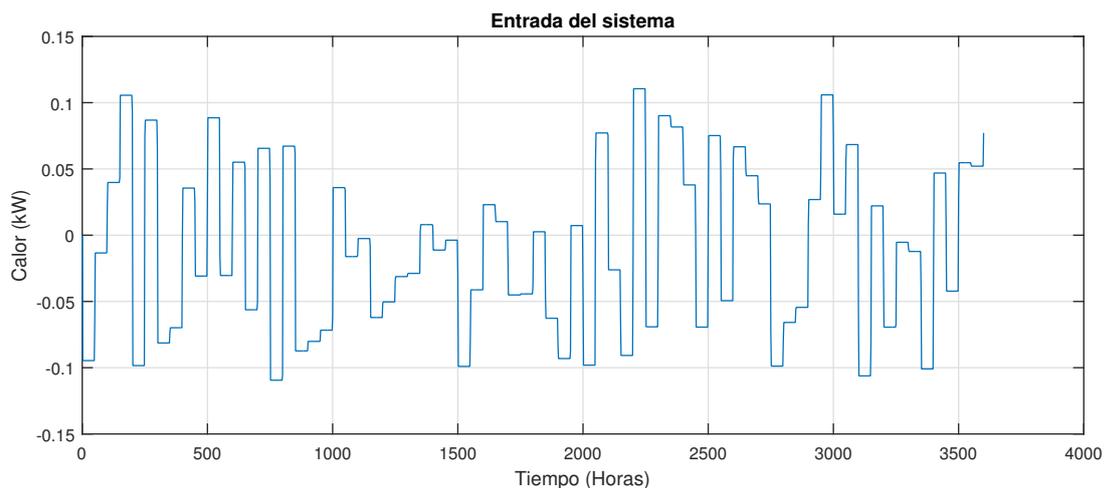


Figura 3.8: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario del brazo robot, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

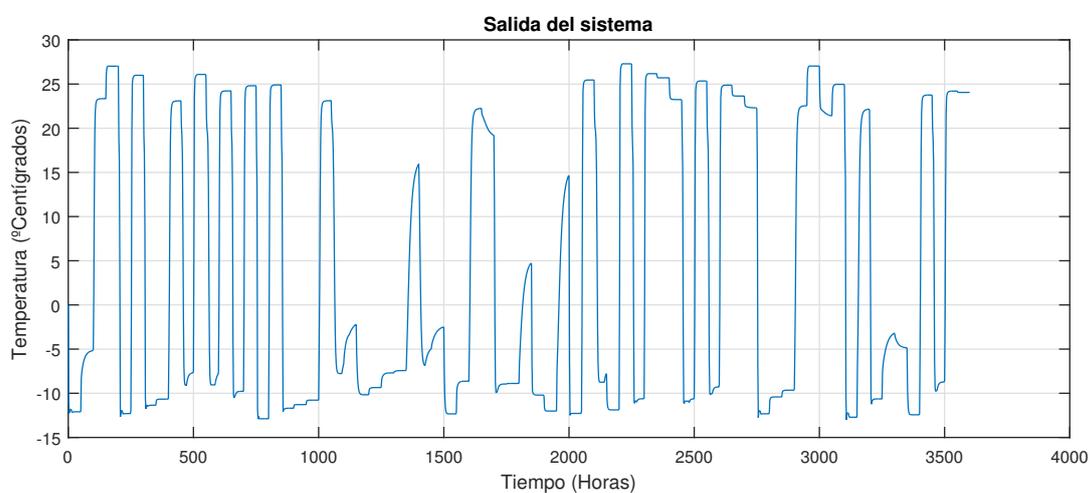
3.1.3. Columna de destilación.

Para este tercer sistema los datos muestreados que son identificados están en valores de desviación estándar, los cuales son de 2,23188 y 104,868 para la entrada y la salida respectivamente.

En la Figura 3.9 se muestra la entrada y la salida del sistema de la columna de destilación.



(a) Entrada del sistema



(b) Salida del sistema

Figura 3.9: Entrada y salida del sistema de la columna de destilación.

3.1.3.1. Identificación con cálculo de orden entero.

Para la obtención del modelo matemático se consideró 2 polinomios de grado 3 para los bloques estáticos y una función de transferencia con 4 polos y 3 ceros para la parte del bloque dinámico.

$$\begin{aligned}
 n &= 4, & m &= 3, \\
 p &= 3, & r &= 3.
 \end{aligned}$$

Quedando su expresión matemática de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}v(t) &= f(u(t)) = \sum_{l=0}^p f_l u^l(t), \\ \hat{y}(t) &= g(x(t)) = \sum_{l=0}^r g_l x^l(t), \\ A(s) &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n, \\ B(s) &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m,\end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Donde el vector de parámetros θ está dado por

$$\theta = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_p & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_m & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & g_0 & g_1 & g_2 \\ \dots & & & & & & & & g_r \end{bmatrix}^T.$$

El vector de parámetros θ se inicializó aleatoriamente, posteriormente se programó y con ayuda del algoritmo de optimización no lineal de Levenberg-Marquardt se estimaron dichos parámetros de tal manera en que el error se minimice lo más cercano a cero.

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

Lo cual se realizó de forma iterativa obteniendo el siguiente modelo matemático identificado:

$$v(t) = 0,0035 + 0,1588u(t) + 0,1045u^2(t) - 8,2185u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{120,6s^3 + 11,46s^2 + 25s + 1,968}{s^4 + 0,3698s^3 + 0,2358s^2 + 0,076s + 0,004019},$$

$$\hat{y}(t) = -7,4727 + 5,7121x(t) + 1,6407x^2(t) - 0,2845x^3(t).$$

En la Figura 3.10 se puede observar el resultado y la comparación del modelo matemático obtenido por el enfoque iterativo, en el que se tiene un FIT del 80.38 % con respecto a la salida del sistema de la columna de destilación.

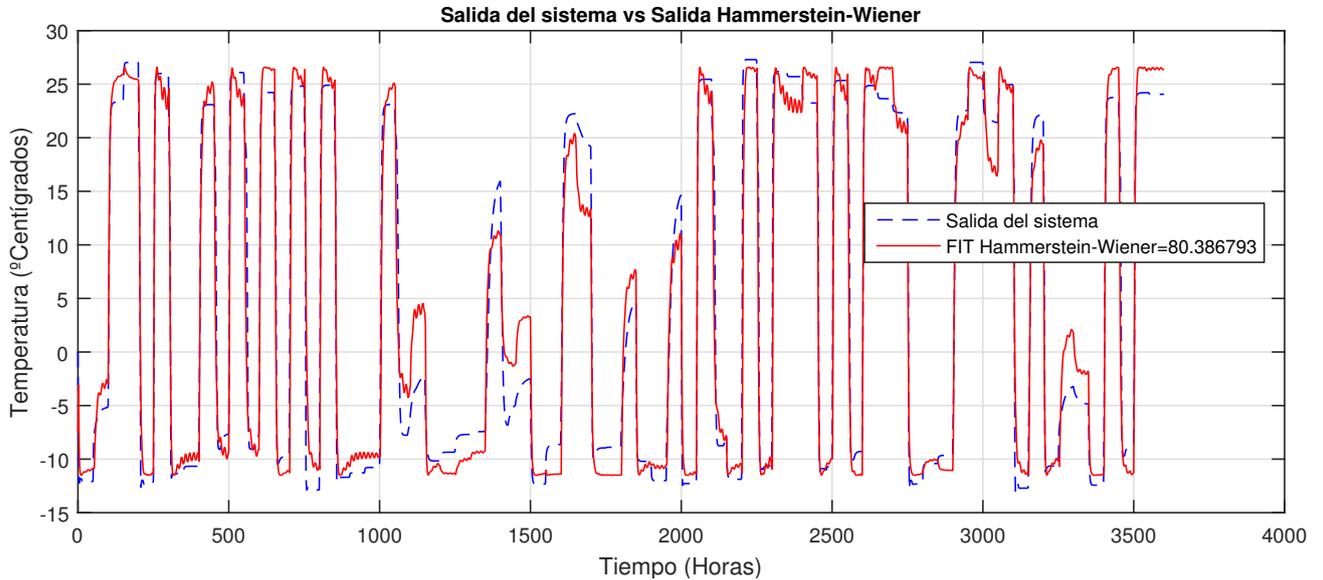


Figura 3.10: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

3.1.3.2. Identificación con cálculo fraccionario.

Para la obtención del modelo matemático fraccionario se aumentaron el número de parámetros a estimar, en este caso los órdenes fraccionarios del bloque dinámico lineal, de igual manera se estimaron de forma iterativa dichos parámetros de θ con el algoritmo de Levenberg-Marquardt.

La identificación fraccionaria se realizó con el uso de la derivada de Riemann-Liouville, los polinomios igualmente se consideraron de grado 3.

$$\begin{aligned} n &= 1, & m &= 1, \\ p &= 3, & r &= 3. \end{aligned}$$

Quedando su expresión matemática de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 v(t) &= f(u(t)) = \sum_{l=0}^p f_l u^l(t), \\
 \hat{y}(t) &= g(x(t)) = \sum_{l=0}^r g_l x^l(t), \\
 A(s) &= a_0 s^{\beta_0} + a_1 s^{\beta_1} + a_2 s^{\beta_2} + \dots + a_n s^{\beta_n}, \\
 B(s) &= b_0 s^{\alpha_0} + b_1 s^{\alpha_1} + b_2 s^{\alpha_2} + \dots + b_m s^{\alpha_m},
 \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Donde:

- $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ son los órdenes de derivación fraccionarios, los cuales se encuentran entre 2 números enteros consecutivos reales.

El vector de parámetros θ está dado por

$$\theta = [f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_p \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad g_0 \quad g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_r \quad \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_m \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n]^T.$$

El vector de parámetros θ se inicializó aleatoriamente, posteriormente se programó y con ayuda del algoritmo de optimización no lineal de Levenberg-Marquardt se estimaron dichos parámetros de tal manera en que el error se minimice lo más cercano a cero.

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

Lo cual se realizó de forma iterativa obteniendo el siguiente modelo matemático identificado:

$$v(t) = 0,00097 + 0,0631u(t) + 0,0402u^2(t) - 3,2296u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{1,003s^{-0,76359} + 1,178s^{-0,7714}}{0,003181s^{0,21826} + 0,0007013s^{-0,75624}},$$

$$\hat{y}(t) = -4,0095 + 2,6821x(t) + 0,1628x^2(t) - 0,0144x^3(t).$$

En la Figura 3.11 se puede observar el resultado y la comparación del modelo matemático fraccionario obtenido por el enfoque iterativo, en el que se tiene un FIT del 80.46 % con respecto a la salida de la columna de destilación.

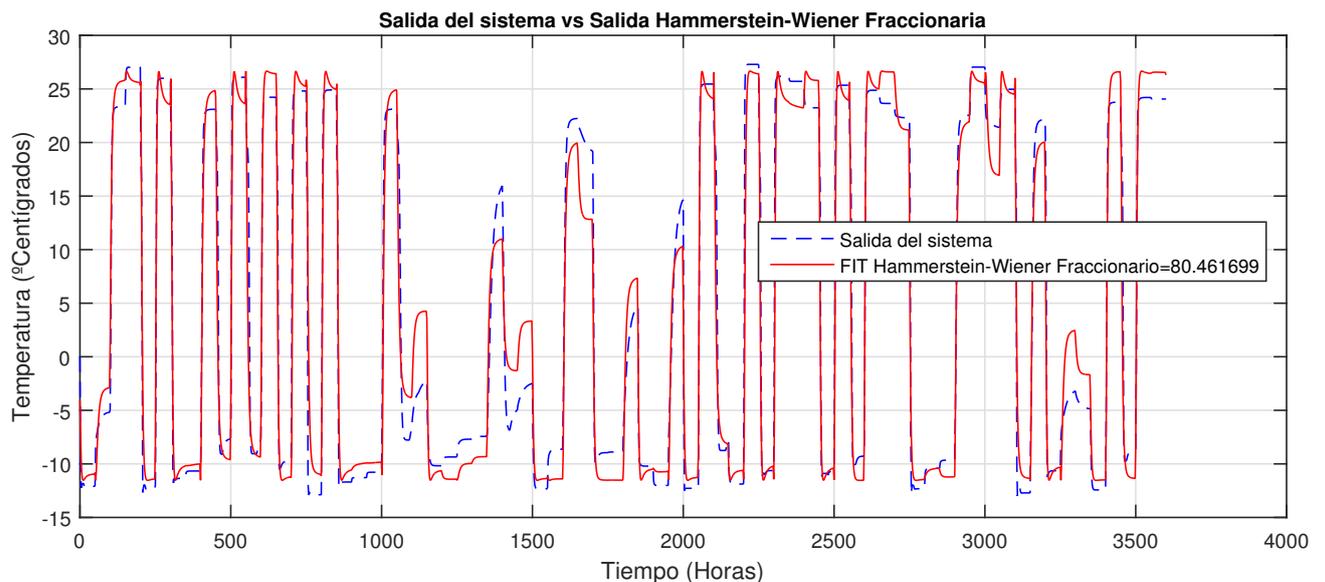


Figura 3.11: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

3.1.3.3. Validación.

Una de las maneras de asegurarse de tener un modelo matemático que represente fielmente la dinámica o comportamiento de un sistema, es mediante la validación.

Esto consta en una segunda toma de datos de entrada-salida limpios, los cuales van a tener alguna variación respecto a la primer toma de datos, por las condiciones tanto del sistema como del medio que lo rodea.

Posteriormente se evalúa en el modelo matemático identificado de la primer toma de datos. para obtener una respuesta a la salida prácticamente igual a la primer respuesta ya obtenida.

Para el caso clásico se obtuvo un FIT del 77.01% como se muestra en la Figura 3.12, lo cual da validez al modelo matemático identificado ya que con la primer toma de datos se obtuvo un FIT del 80.38%.

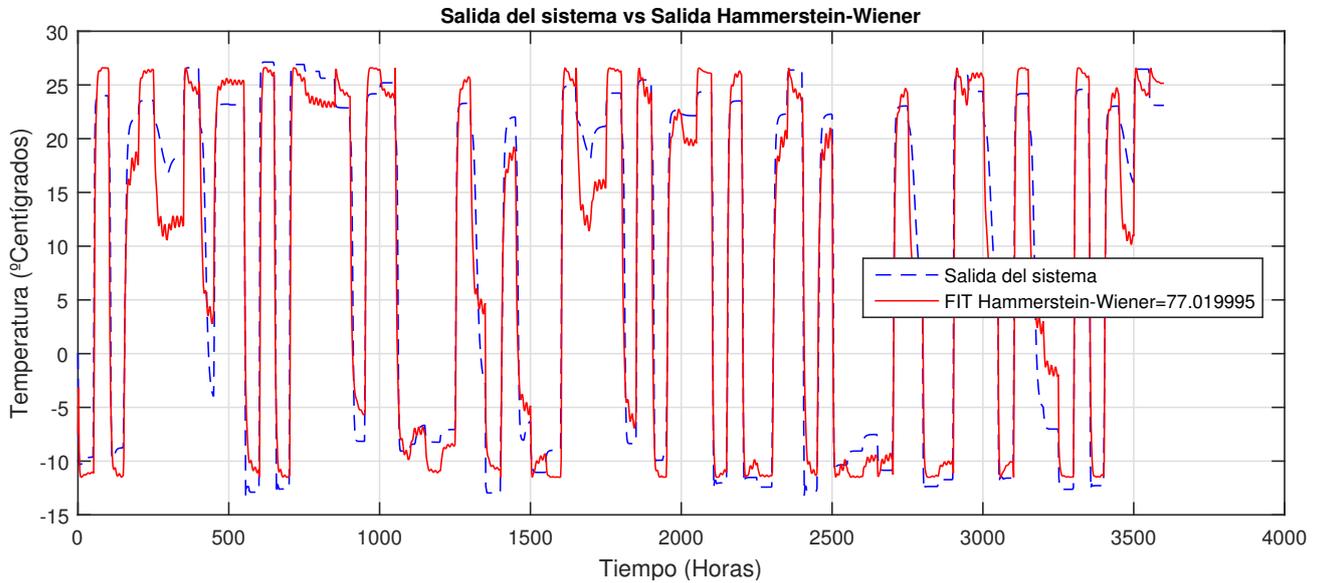


Figura 3.12: Validación del modelo Hammerstein-Wiener de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

Para el caso fraccionario se obtuvo un FIT del 77.68% como se muestra en la Figura 3.13, lo cual da validez al modelo matemático identificado ya que con la primer toma de datos se obtuvo un FIT del 80.46%.

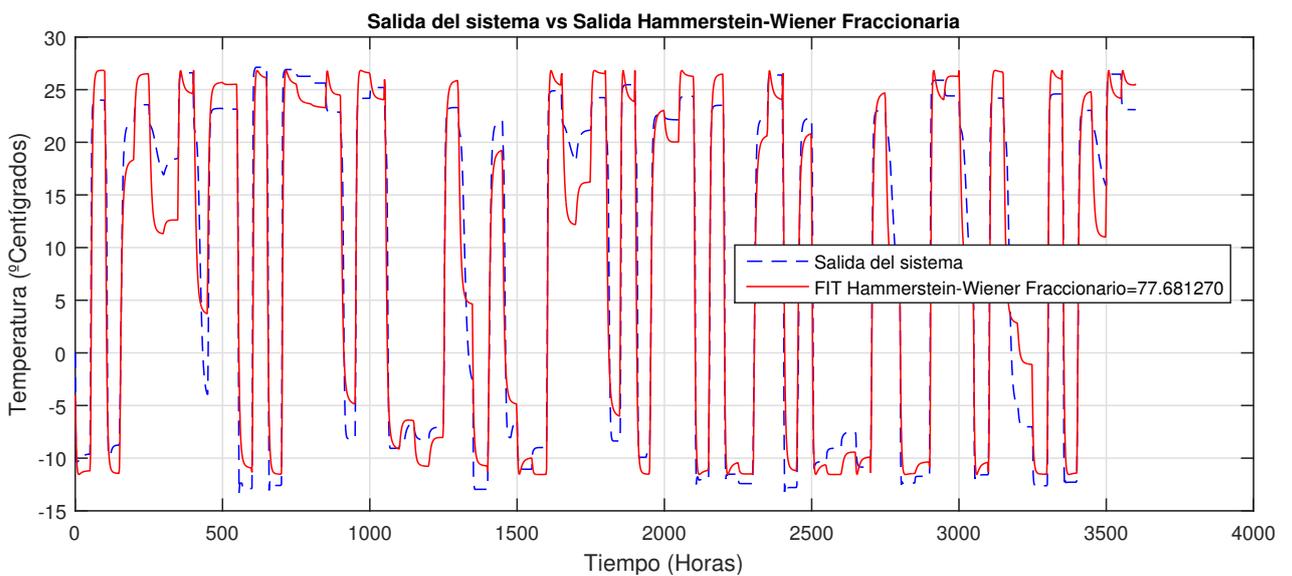


Figura 3.13: Validación del modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de la columna de destilación, enfoque iterativo aplicando Levenberg-Marquardt.

Capítulo 4

Simulaciones comparativas

En este capítulo se va a comparar la metodología Hammerstein-Wiener utilizada en el presente trabajo de tesis contra modelos Wiener-Hammerstein reportados en un trabajo previo desarrollado en el CENIDET, se consideran 2 sistemas o plantas en común, tanto para el caso clásico como con el fraccionario.

4.1. Dos tanques acoplados.

4.1.1. Caso clásico.

El modelo matemático orientado a bloques Wiener-Hammerstein reportado en la tesis de Patricia Vázquez [14] es el siguiente.

$$W(s) = \frac{0,03758s + 1,776}{-0,09868s^2 + 0,9309s + 0,7992},$$

$$x(t) = 1,2798 - 0,32324v(t) + 0,70239v^2(t),$$

$$H(s) = \frac{-0,00002429s + 0,0003066}{0,8705s^2 + 1,279s + 0,1873}.$$

En las Figuras 4.1 y 4.2 se puede observar la comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein, en donde el primer modelo mencionado tiene una mejor aproximación con la señal real del sistema.

4.1.2. Caso fraccionario.

El modelo matemático orientado a bloques Wiener-Hammerstein fraccionario reportado en la tesis de Patricia Vázquez [14] es el siguiente.

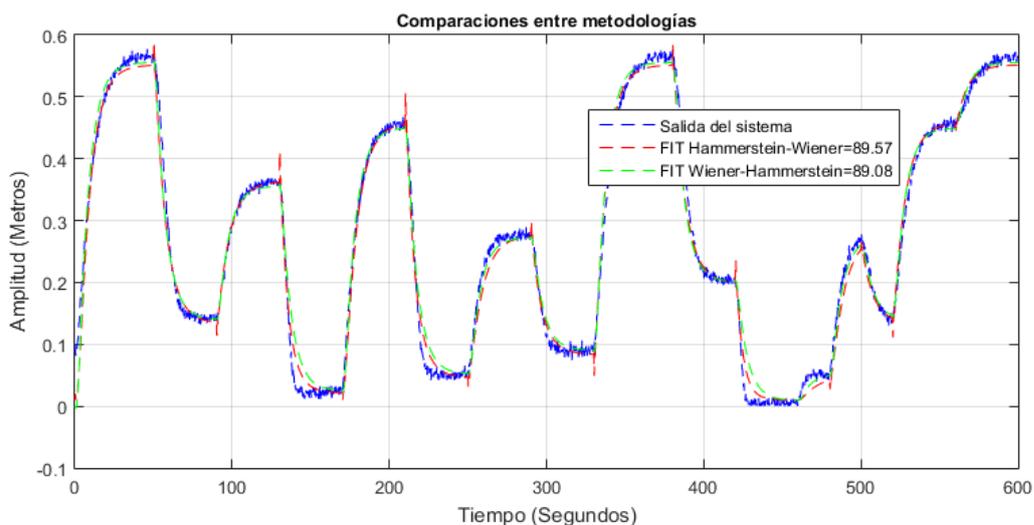


Figura 4.1: Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de dos tanques acoplados.

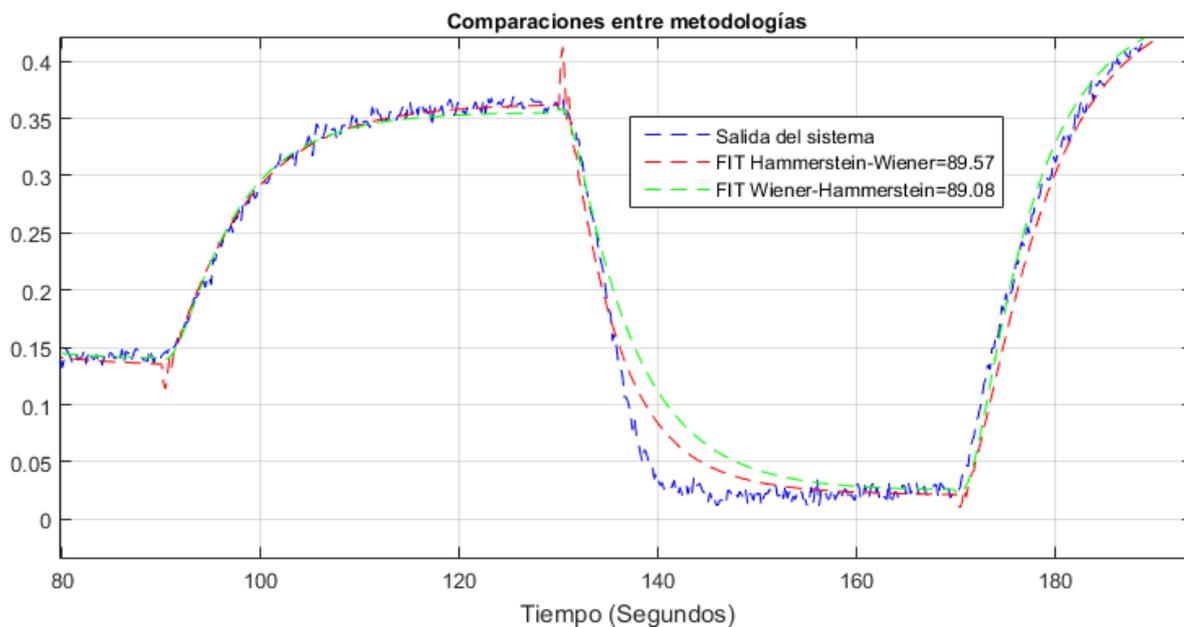


Figura 4.2: Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de dos tanques acoplados.

$$W(s) = \frac{0,2529s^{2,5673} - 1,016}{0,009337s^{4,0329} + 1,587s^{0,95668} + 0,2041},$$

$$x(t) = 1,5847 - 0,53779v(t) + 0,50313v^2(t),$$

$$H(s) = \frac{0,00004288s^{0,26359} + 0,0001349}{1,119s^{1,4163} - 1,661s^{0,0005} + 1,986}.$$

En las Figuras 4.3 y 4.4 se puede observar la comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario, en donde el segundo modelo mencionado tiene una mejor aproximación con la señal real del sistema, y esto se debe a que tiene más grados de libertad por los órdenes, ya que cuenta con 2 funciones de transferencia.

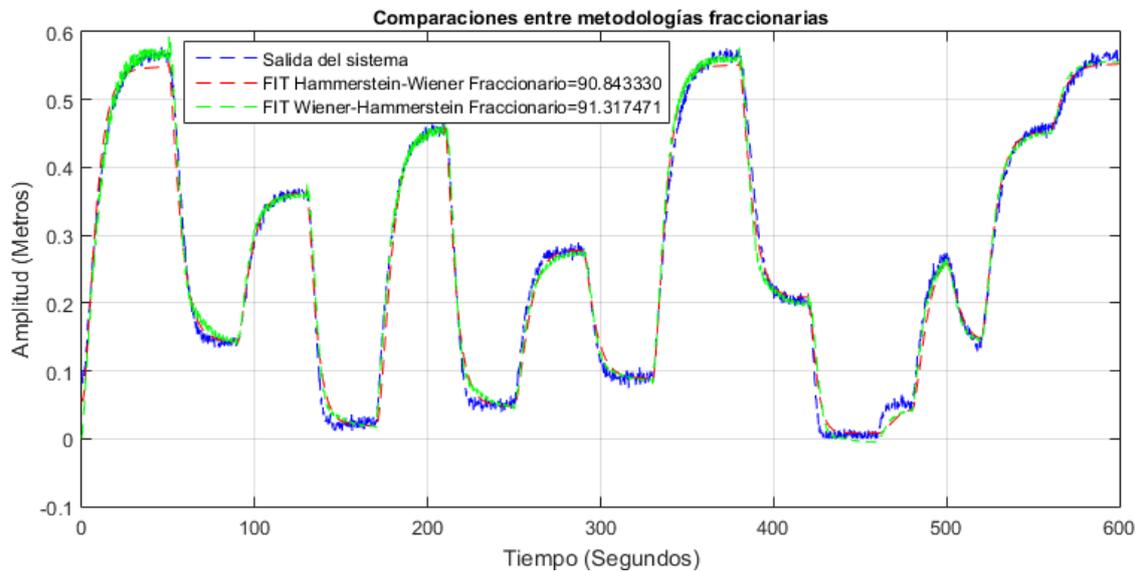


Figura 4.3: Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario de dos tanques acoplados.

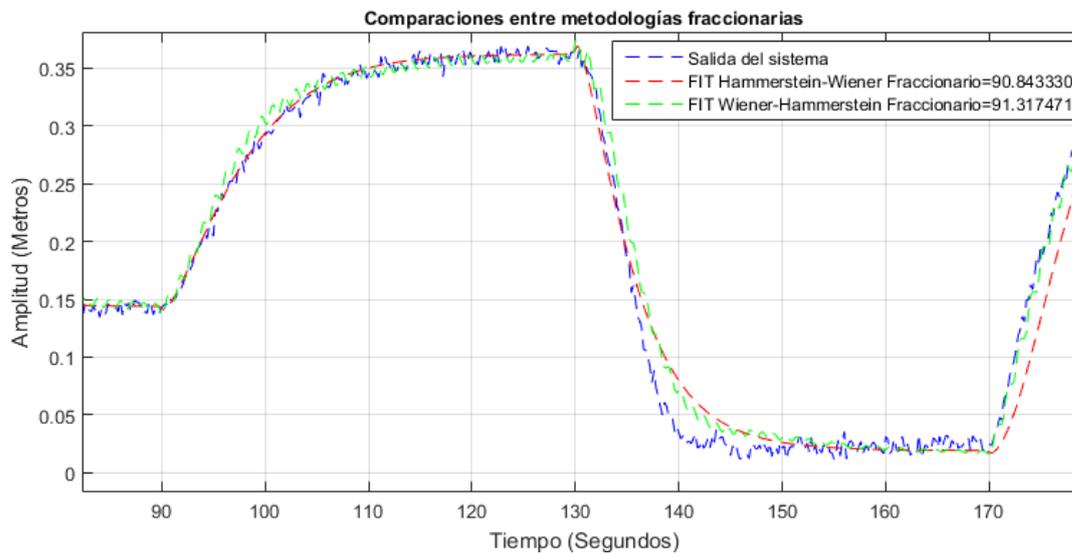


Figura 4.4: Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario de dos tanques acoplados.

4.2. Brazo robot.

4.2.1. Caso clásico.

El modelo matemático orientado a bloques Wiener-Hammerstein reportado en la tesis de Patricia Vázquez [14] es el siguiente.

$$W(s) = \frac{0,2487s^4 - 0,2139s^3 + 0,3466s^2 + 0,1603s + 0,001803}{-0,9303s^5 + 1,916s^4 + 0,08211s^3 - 0,03078s^2 + 0,8702s + 0,007968},$$

$$x(t) = -0,0047119 + 0,857694v(t) + 0,024615v^2(t),$$

$$H(s) = \frac{-0,199s^4 + 1,073s^3 - 1,4s^2 + 0,02678s - 0,05864}{-0,1849s^5 + 0,3973s^4 + 1,92s^3 + 0,3703s^2 + 0,1937s + 0,07631}.$$

En las Figuras 4.5 y 4.6 se puede observar la comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein, en donde el segundo modelo mencionado tiene una mejor aproximación con la señal real del sistema.

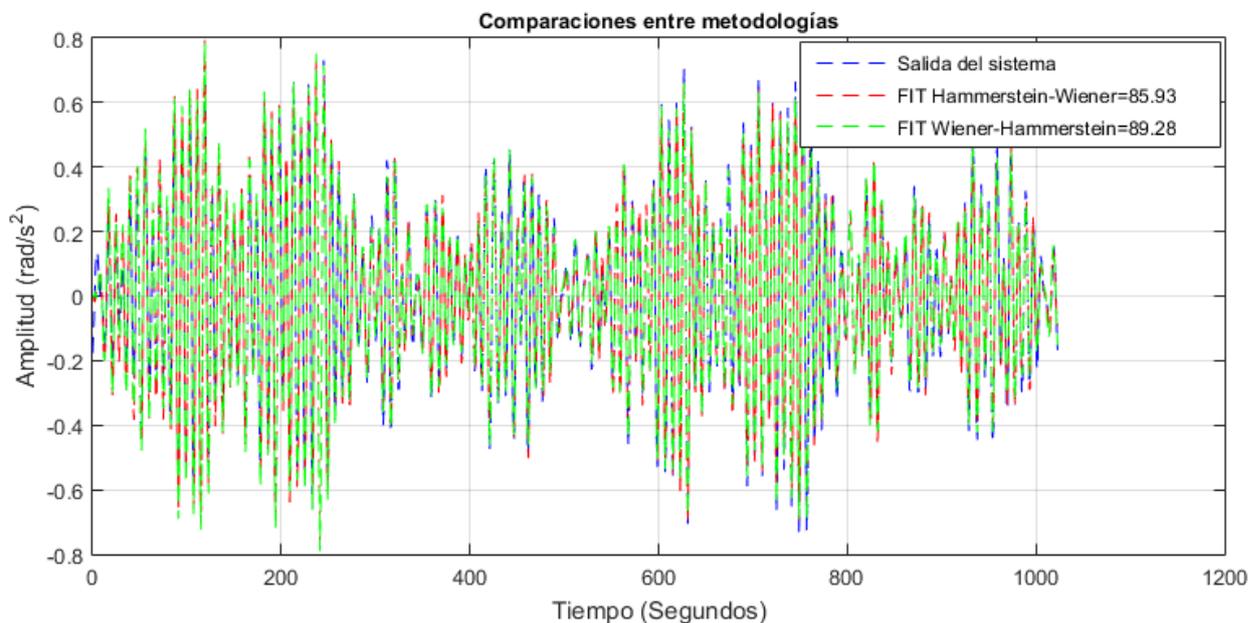


Figura 4.5: Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein del brazo robot.

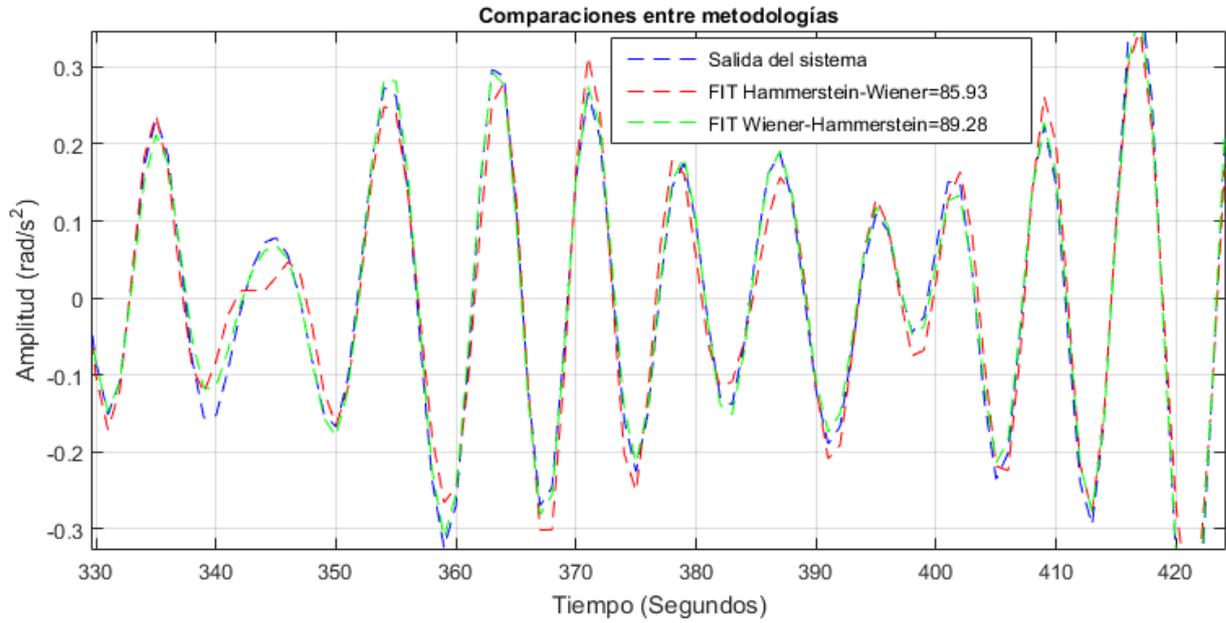


Figura 4.6: Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein del brazo robot.

4.2.2. Caso fraccionario.

El modelo matemático orientado a bloques Wiener-Hammerstein fraccionario reportado en la tesis de Patricia Vázquez [14] es el siguiente.

$$W(s) = \frac{0,3828s^{4,98} - 0,402s^{4,8} + 0,115s^{3,8} + 0,073s^{1,89} + 0,0033}{-0,52s^{4,13} + 0,64s^{2,88} + 0,77s^{2,88} + 0,673s^{2,88} + 0,29s^{0,68} + 0,0011},$$

$$x(t) = -0,021876 + 0,85186v(t) + 0,5221v^2(t),$$

$$H(s) = \frac{1,086s^{4,02} - 1,05s^{2,94} - 0,241s^{2,75} - 0,256s^{0,77} + 0,00066}{1,013s^{6,28} + 0,769s^{4,05} + 0,031s^3 + 0,015s^{2,82} + 0,248s^{2,05} + 0,022}.$$

En las Figuras 4.7 y 4.8 se puede observar la comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario, en donde el segundo modelo mencionado tiene una mejor aproximación con la señal real del sistema, y esto se debe a que tiene más grados de libertad por los órdenes, ya que cuenta con 2 funciones de transferencia.

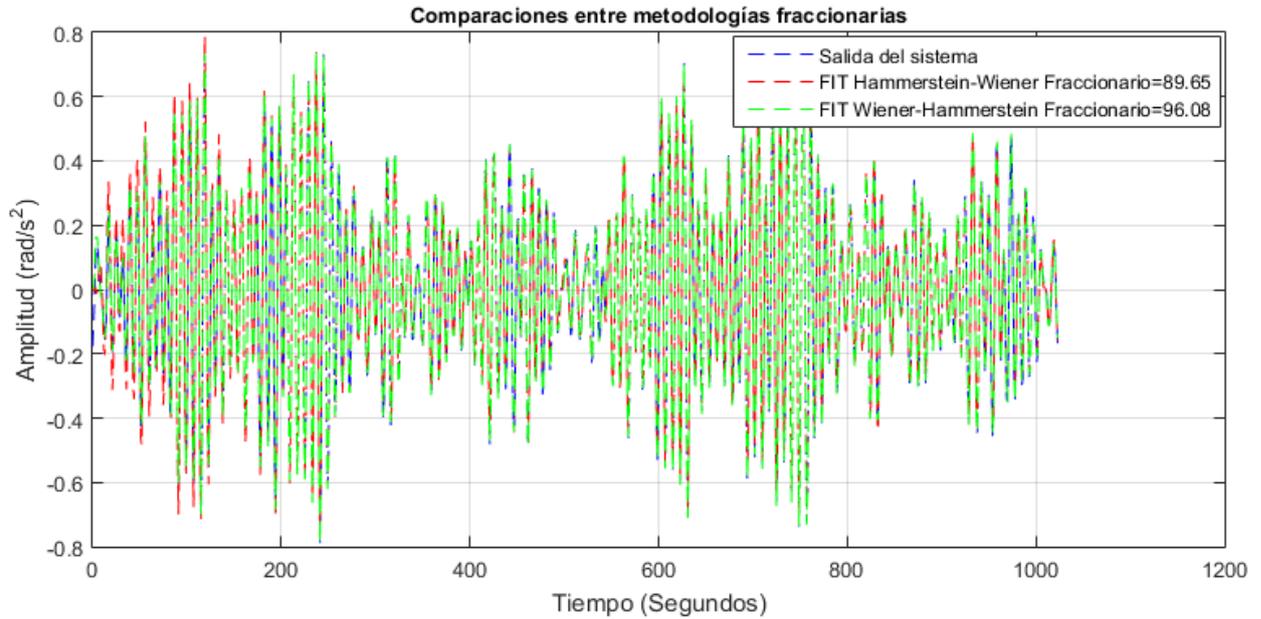


Figura 4.7: Comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario del brazo robot.

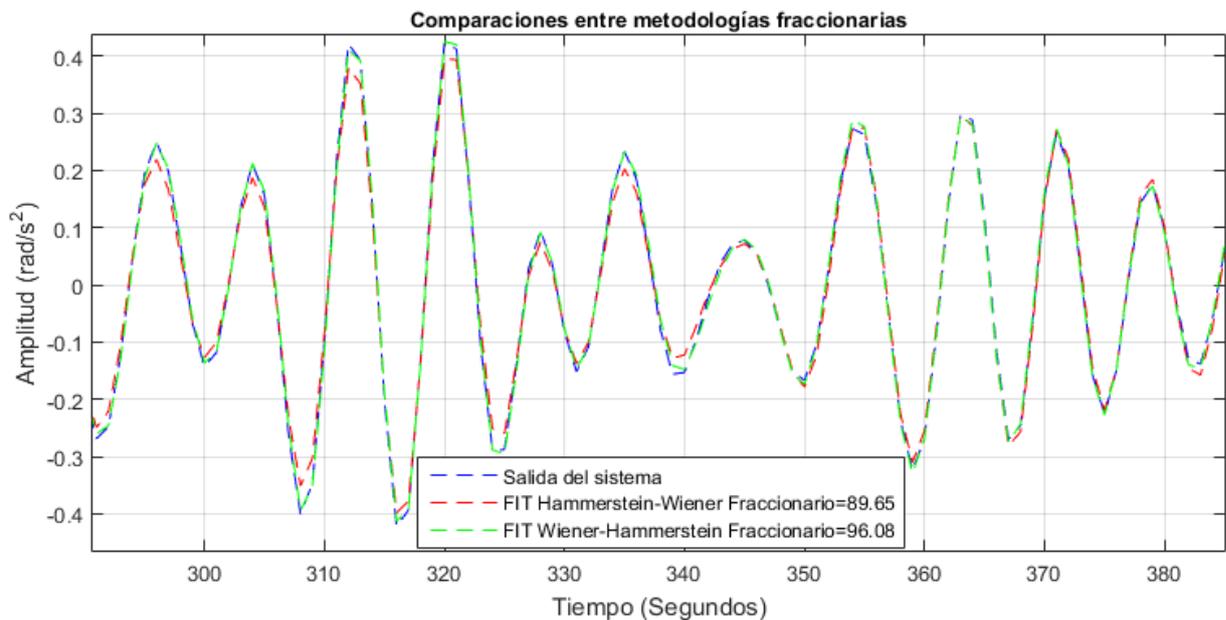


Figura 4.8: Comparación y acercamiento entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein de orden fraccionario del brazo robot.

En este último sistema (brazo robot) hay una notable diferencia entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein fraccionarios, y como ya se explicó se debe a que tiene más órdenes fraccionarios el segundo modelo mencionado.

El modelo Wiener-Hammerstein tiene un total de 18 coeficientes con órdenes fraccionarios en sus dos funciones de transferencia, con lo que se identificó un

modelo Hammerstein-Wiener con el mismo número de órdenes fraccionarios en su única función de transferencia.

El modelo matemático identificado es el siguiente.

$$B(s) = -1,031s^{1,59} + 0,4971s^{0,907} + 0,4502s^{0,891} + 0,234s^{0,856} + 0,1224s^{0,746} - 0,527s^{0,226} - 0,6652s^{0,119} - 0,75s^{-0,529} - 0,073s^{-2,294},$$

$$A(s) = -0,3382s^{3,3255} + 2,979s^{2,6151} + 0,6868s^{1,929} + 0,1719s^{1,751} + 0,4247s^{1,744} - 0,3149s^{0,542} + 2,429s^{-0,208} + 0,2051s^{-2,504},$$

$$v(t) = 0,0842 - 0,4049u(t) + 0,0258u^2(t) + 0,3459u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

$$\hat{y}(t) = 0,0129 + 1,9295x(t) + 2,6151x^2(t) - 2,5043x^3(t).$$

En la figura 4.9 se puede observar el resultado y la comparación del modelo matemático Hammerstein-Wiener fraccionario aumentando el número de órdenes, en el que se tiene un FIT del 90.69% con respecto a la salida del sistema del brazo robot.

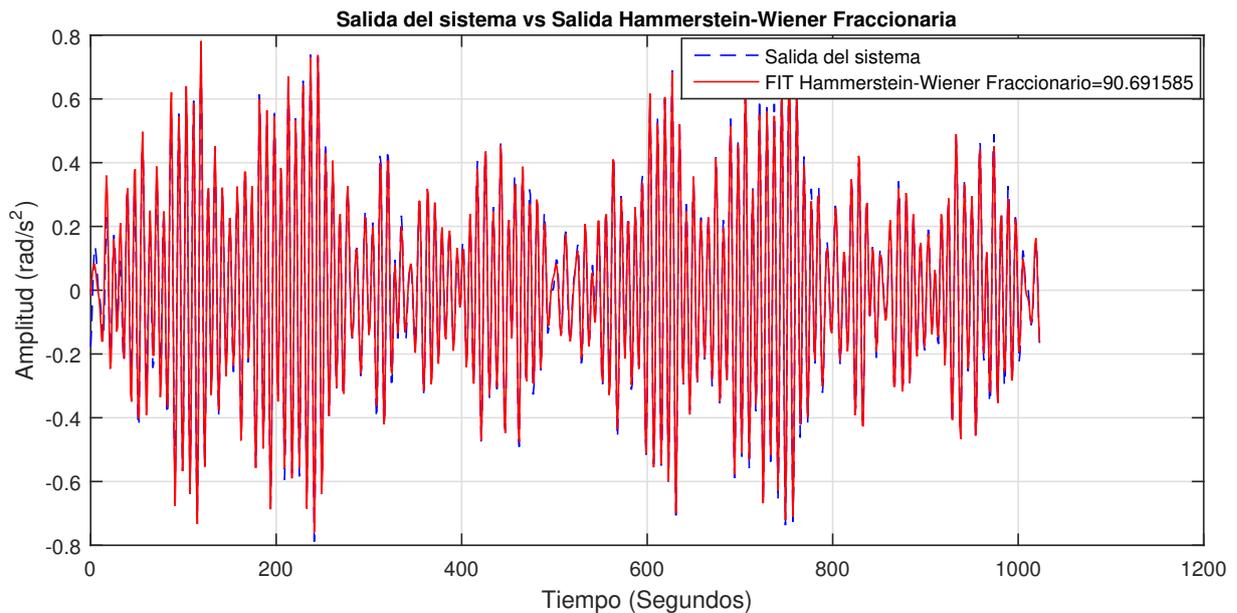


Figura 4.9: Modelo Hammerstein-Wiener de orden fraccionario del brazo robot, con un mayor número de órdenes.

Capítulo 5

Conclusiones

La estructura orientada a bloques Hammerstein-Wiener es una muy buena alternativa a la hora de identificar sistemas altamente no lineales, por la capacidad de seccionar o dividir su modelo matemático en partes no lineales y una parte lineal.

Sin embargo alguno de los inconvenientes es la obtención de modelos matemáticos muy grandes, sobre todo en la parte lineal que se representa por una función de transferencia la cual actúa como un filtro.

En el presente documento de tesis se abordó la idea de implementar el cálculo de orden fraccionario aplicado al área de identificación de sistemas; se consideraron 3 sistemas dinámicos no lineales (dos tanques acoplados, brazo robot y una columna de destilación) basados únicamente en datos muestrados de entrada-salida de dichos sistemas, el objetivo fue generar un modelo matemático que represente lo más fielmente la dinámica de los sistemas antes mencionados.

Los resultados que se reportan en el presente documento fueron obtenidos con el uso de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Para la programación de esta derivada se utilizaron las funciones de CRONE con la herramienta de apoyo de Matlab.

Los modelos Hammerstein-Wiener implementados con las bases del cálculo fraccionario son una excelente alternativa para identificar sistemas altamente no lineales, ya que se obtuvieron resultados satisfactorios, entre los cuales destacan 2 aportaciones muy importantes:

- La obtención de un mejor FIT a la respuesta de la dinámica del sistema identificado.
- Obtener un modelo matemático más compacto en la parte del bloque lineal.

Estos resultados se deben a que se aumenta el número de parámetros a optimizar con el algoritmo de Levenberg-Marquardt en la parte de los órdenes de la función de transferencia, ya que no se restringe el orden en ser solamente números enteros, sino que se abre la ventana o posibilidad que entre 2 números enteros consecutivos el orden de la derivada pueda tomar varios valores y con ello un mejor ajuste, así como también el de reducir el número de coeficientes a optimizar en la función de transferencia, por los grados de libertad adicional que se obtienen al poder modificar o manipular dichos órdenes de la derivada.

Lo antes mencionado se debe a que en muchas ocasiones la naturaleza del sistema pertenece a la clase de modelos con dinámica fraccionaria [35], abriendo así la posibilidad de futuras investigaciones sobre la interpretación física de dichos modelos obtenidos.

También se hizo una comparación entre los modelos Hammerstein-Wiener y Wiener-Hammerstein tanto para el caso clásico como para el fraccionario, en el que se obtuvo una mejor respuesta con los segundos modelos antes mencionados, y esto se debe a que este modelo cuenta con dos funciones de transferencia y con ello un mayor número de órdenes no enteros.

Por su parte se identificó un modelo Hammerstein-Wiener con el mismo número de órdenes que el modelo Wiener-Hammerstein ya reportado en la literatura; en donde se mejoró la respuesta pero esta no llega al mismo FIT que el modelo Wiener-Hammerstein. Esto se debe a que no todas las estructuras matemáticas se acoplan a todos los sistemas reales.

Así como también se concluye el uso de un algoritmo alternativo a lo que normalmente se encuentra en la literatura, como lo es el cálculo fraccionario aplicado en la identificación de sistemas.

La unión de ambos enfoques representa una aportación importante para la ciencia y la tecnología, pues explota lo mejor de dos líneas de investigación diferentes, con el único objetivo de garantizar mejores resultados.

5.1. Trabajos futuros.

Debido a que existen múltiples definiciones de derivadas fraccionarias, las cuales tienen diferentes propiedades y con ello permiten una mejor descripción del sistema, se podrían involucrar derivadas que contemplen kernels no singulares locales y no locales en la metodología antes descrita.

También podría considerarse el uso de operadores locales conformables en la parte de la linealidad del modelo matemático.

El diseño de controladores de orden fraccionario es una tarea muy interesante que también puede abordarse.

Bibliografía

- [1] Lotfi A Zadeh. From circuit theory to system theory. *Proceedings of the IRE*, 1962.
- [2] L Ljung. System identification-theory for the user 2nd edition ptr prentice-hall. *Upper Saddle River, USA*, 1999.
- [3] Jozef Vörös. An iterative method for hammerstein-wiener systems parameter identification. *Journal of electrical engineering*, 55(11-12):328–331, 2004.
- [4] Er-Wei Bai. An optimal two-stage identification algorithm for hammerstein–wiener nonlinear systems. *Automatica*, 34(3):333–338, 1998.
- [5] Santiago Garrido, Luis Moreno, and Carlos Balaguer. *Identificación, estimación y control de sistemas no-lineales mediante RGO*. PhD thesis, Universidad Carlos III, 1999.
- [6] Cristian Kunusch. *IDENTIFICACIÒN DE SISTEMAS DINÈMICOS*. PhD thesis, Universidad Nacional de la Plata, Cátedra de control y servomecanismos, 2003.
- [7] Mario Alejandro Useche Arteaga. *Identificación de sistemas no lineales con un modelo Hammerstein-Wiener aplicado a un generador eólico*. PhD thesis, Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Ingenierías Eléctrica, Electrónica, Física y Ciencias de la Computación. Ingeniería Eléctrica., 2013.
- [8] Irene Alvarado Tabacchi. Tesis de maestría: Identificación de modelos wiener y hammerstein aplicados al diseño de un control pid predictivo de ph. *Universidad de Piura*, 2019.
- [9] JY Rumbo-Morales, G Lopez-Lopez, VM Alvarado, JS Valdez-Martinez, FDJ Sorcia-Vázquez, and JA Brizuela-Mendoza. Simulación y control de un proceso de adsorción por oscilación de presión para deshidratar etanol. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 17(3):1051–1081, 2018.

- [10] Ricardo Valverde Gil and Diego Gachet Páez. Identificación de sistemas dinámicos utilizando redes neuronales rbf. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial RIAI*, 4(2):32–42, 2007.
- [11] José Francisco Gómez Aguilar and José Roberto Razo Hernández. Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario. *Investigación y Ciencia*, 22(61), 2014.
- [12] Yan Li, YangQuan Chen, and Igor Podlubny. Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8):1965–1969, 2009.
- [13] Antonio Coronel Escamilla, José Francisco Gómez Aguilar, Gerardo Vicente Guerrero Ramirez, Flor Lizeth Torres Ortiz, and Ricardo Fabricio Escobar Jiménez. Comportamiento dinámico de un péndulo simple y doble, enfoque basado en derivadas fraccionarias. *AMCA*, 2015.
- [14] Patricia Vázquez Guerrero. Tesis de maestría: Identificación de modelos wiener-hammerstein utilizando calculo fraccionario. *CENIDET*, 2016.
- [15] CP Flores Gutiérrez, G Quiroz, and R Femat. Identificación de un modelo para diseño de control en dmt1. *AMCA*, 2009.
- [16] Omar Dario Hernandez Arboleda. *Metodología para modelar y controlar un sistema de combustion utilizando calculo fraccional*. PhD thesis, Instituto Tecnológico Metropolitano, 2014.
- [17] Mohamed Aoun, Rachid Malti, Olivier Cois, and Alain Oustaloup. System identification using fractional hammerstein models. In *15th IFAC World Congress*, volume 2, 2002.
- [18] Valerie Pommier, Jocelyn Sabatier, Patrick Lanusse, and Alain Oustaloup. Crone control of a nonlinear hydraulic actuator. *Control Engineering Practice*, 10(4):391–402, 2002.
- [19] Patrick Lanusse and Jocelyn Sabatier. PLC implementation of a crone controller. *fractional calculus and Applied analysis*, 14(4):505–522, 2011.
- [20] Ramiro Miguel Irastorza. *Identificación de sistemas. Aplicación a la evaluación in vitro de la calidad ósea en tejido trabecular humano*. PhD thesis, Universidad Nacional de La Plata. Facultad Ingeniería. Departamento de Electrotecnia., 2010.
- [21] Javier Sedano Franco and José Ramón Villar Flecha. Introducción a la identificación de sistemas. *Tecnica Industrial*, Marzo, 2005.

- [22] Robby Haelterman. *Analytical study of the least squares quasi-Newton method for interaction problems*. PhD thesis, Ghent University, 2009.
- [23] Kenneth Levenberg. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, 2(2):164–168, 1944.
- [24] Donald W Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- [25] Ubaldo Flores Acoltzi. Tesis de maestría: Identificación de sistemas no lineales mediante las estructuras narx y hammerstein-wiener. *CENIDET*, 2011.
- [26] Blas M Vinagre and Concepción A Monje. Introducción al control fraccionario. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 3(3):5–23, 2009.
- [27] Alain Oustaloup. On the crone control. *Diversity and Non-Integer Differentiation for System Dynamics*, pages 139–164, 1991.
- [28] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Elsevier, 1998.
- [29] Víctor Fabián Morales Delgado. Tesis de maestría: Ecuaciones de evolución-difusión de tipo dirac y su aplicación a vigas. *UAGro*, 2016.
- [30] Kenneth S Miller and Bertram Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *Wiley-Interscience*, 1993.
- [31] Victor Hugo Sauchelli and Sergio Laboret. Cálculo fraccional aplicado a control automático. *Mecánica Computacional*, 26:3308–3327, 2007.
- [32] Maarten Schoukens, Er-Wei Bai, and Yves Rolain. Identification of hammerstein-wiener systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(16):274–279, 2012.
- [33] Er-Wei Bai. A blind approach to the hammerstein–wiener model identification. *Automatica*, 38(6):967–979, 2002.
- [34] A Oustaloup, P Melchior, P Lanusse, O Cois, and F Dancla. The crone toolbox for matlab. In *CACSD. Conference Proceedings. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (Cat. No. 00TH8537)*, pages 190–195. IEEE, 2000.

- [35] Igor Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2001.
- [36] Ioan Doré Landau and Gianluca Zito. *Digital control systems: design, identification and implementation*. Springer Science & Business Media, 2007.

Apéndice A

Modelos Hammerstein-Wiener fraccionarios de diferentes órdenes y grados

En este anexo A se muestran varios modelos matemáticos de orden fraccionario del sistema de dos tanques acoplados, en el que se probó variar la cantidad de coeficientes de la función de transferencia, así como también el grado de los polinomios no lineales.

A continuación se muestran 3 escenarios diferentes.

A.1. Modelo 1.

El siguiente modelo matemático fraccionario mantiene el mismo número de coeficientes en la función de transferencia con respecto al modelo matemático reportado en el capítulo 3, sin embargo se redujo el grado de los polinomios no lineales, obteniendo un FIT del 90.36 % con respecto a la salida del sistema de dos tanques acoplados, como se muestra en la Figura A.1.

$$v(t) = 0,0804 - 0,0217u(t) - 0,000096u^2(t),$$

$$H(s) = \frac{-1,387s^{1,9264} + 1,495s^{1,5944}}{1,181s^{2,6854} + 0,1745s^{1,5549}},$$

$$\hat{y}(t) = 0,0765 - 0,3259x(t) + 0,2615x^2(t).$$

A.2. Modelo 2.

El siguiente modelo matemático fraccionario aumenta el número de coeficientes en la función de transferencia con respecto al modelo matemático

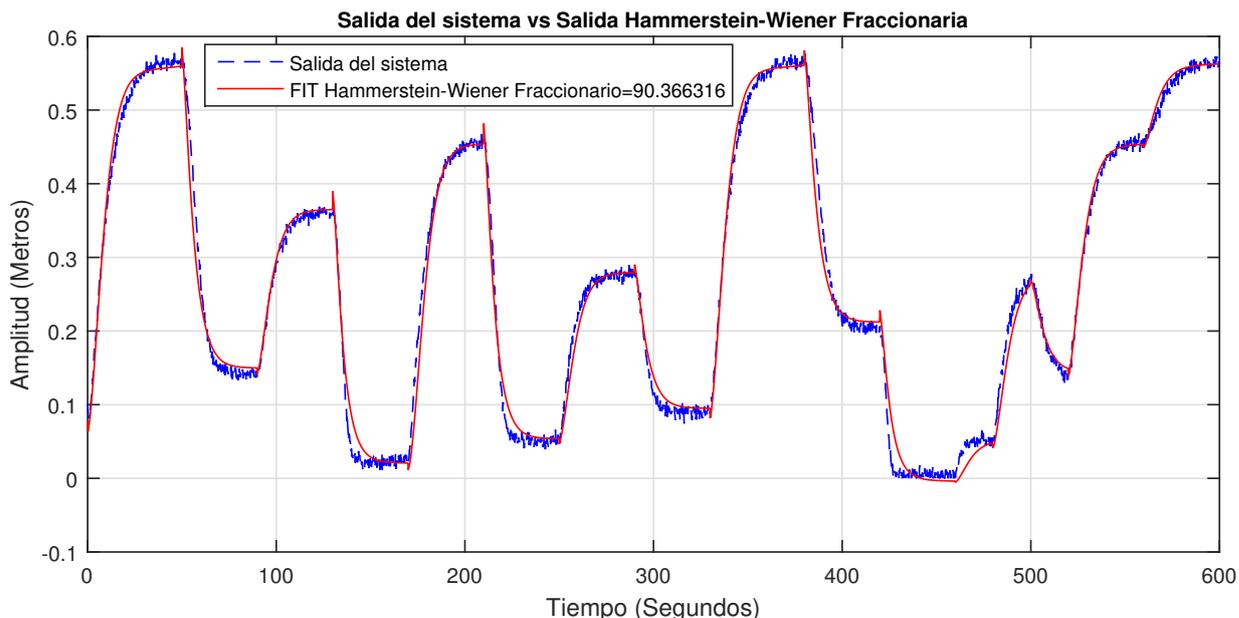


Figura A.1: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, modelo N° 1.

reportado en el capítulo 3, a su vez también se aumentó el grado de los polinomios no lineales, obteniendo un FIT del 91.06 % con respecto a la salida del sistema de dos tanques acoplados, como se muestra en la Figura A.2.

$$v(t) = -0,1638 + 0,0664u(t) - 0,0083u^2(t) + 0,00105u^3(t) - 3,9116u^4(t),$$

$$H(s) = \frac{-0,7301s^{0,5692} + 0,2257s^{-0,15842} + 1,628s^{-0,22094}}{1,215s^{1,7722} + 0,7899s^{1,0523} + 0,7337s^{0,69717} + 0,1725s^{-0,21181}},$$

$$\hat{y}(t) = 0,0564 + 0,0931x(t) + 0,0358x^2(t) - 0,0109x^3(t) + 0,0013x^4(t).$$

A.3. Modelo 3.

El siguiente modelo matemático fraccionario reduce el número de coeficientes en la función de transferencia con respecto al modelo matemático reportado en el capítulo 3, por su parte mantiene el mismo grado de los polinomios no lineales, obteniendo un FIT del 72.72 % con respecto a la salida del sistema de dos tanques acoplados, como se muestra en la Figura A.3.

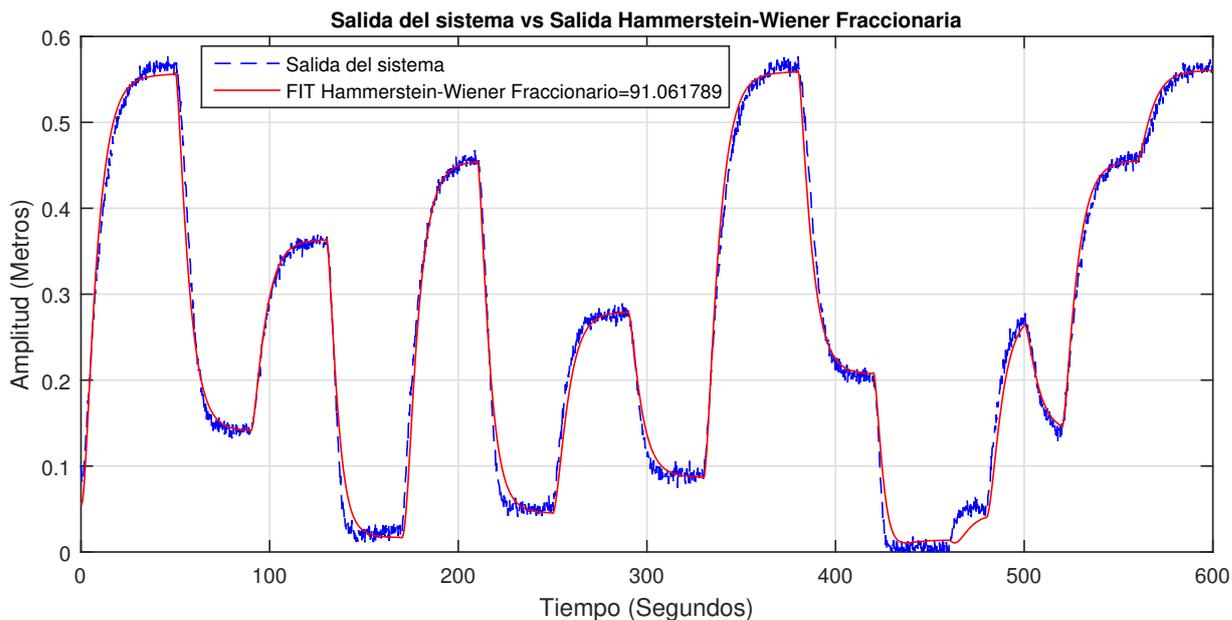


Figura A.2: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, modelo N° 2.

$$v(t) = 2,3688 + 0,0269u(t) - 0,0945u^2(t) + 0,0025u^3(t),$$

$$H(s) = \frac{-0,02277s^{-2,7178}}{0,7049s^{-2,4103}},$$

$$\hat{y}(t) = 0,0726 + 0,6681x(t) + 1,8007x^2(t) - 2,5208x^3(t).$$

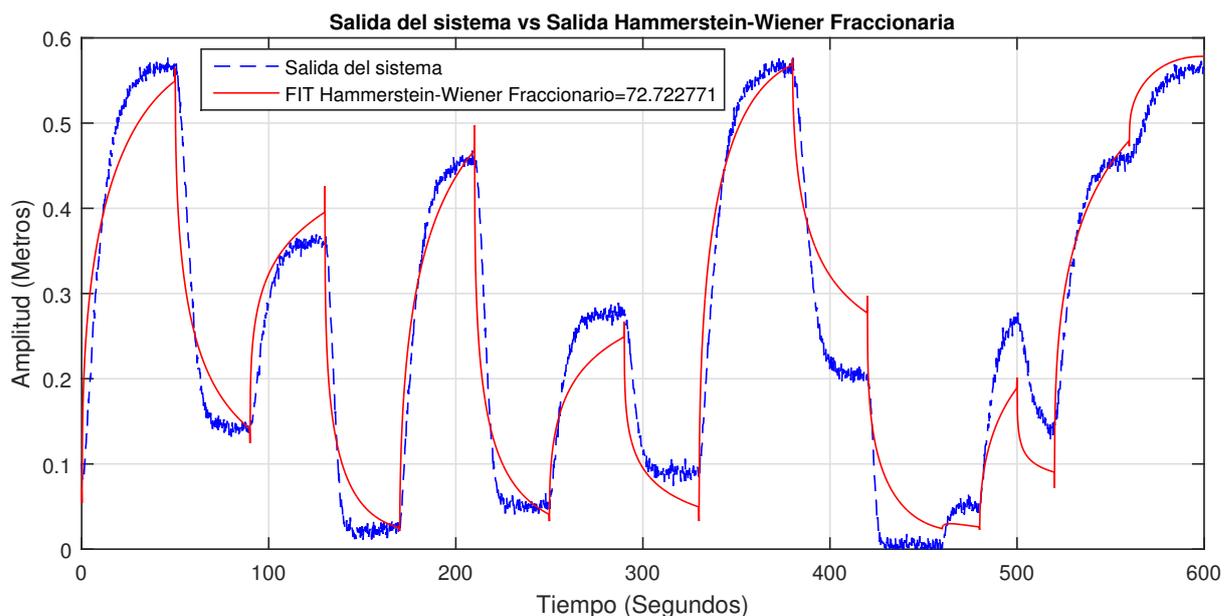


Figura A.3: Comparación entre la salida del sistema y el modelo Hammerstein-Wiener fraccionario de dos tanques acoplados, modelo N° 3.

Apéndice B

Desarrollo analítico del algoritmo de Levenberg-Marquardt

A continuación se desarrolla un ejemplo de un sistema a bloques con la estructura Hammerstein, en el que se van a estimar los parámetros de dicho modelo matemático el cual consta de 6, mediante el desarrollo analítico del algoritmo de optimización no lineal de Levenberg-Marquardt.

Los parámetros iniciales están dados en el siguiente vector

$$\theta_{inicial} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En donde el modelo matemático consta de la siguiente estructura

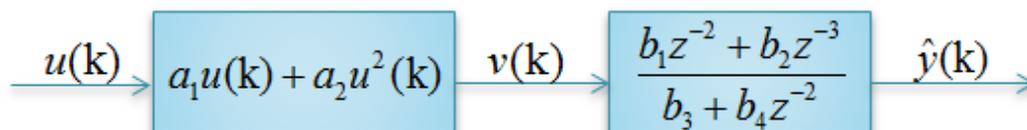


Figura B.1: Modelo matemático Hammerstein.

$$v(k) = a_1 u(k) + a_2 u^2(k),$$

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-2} + b_2 z^{-3}}{b_3 + b_4 z^{-2}}.$$

Quedando el modelo matemático inicial de la siguiente manera

$$v(k) = 5u(k) + 4u^2(k),$$

$$H(z^{-1}) = \frac{2z^{-2} + 10z^{-3}}{6 + 4z^{-2}}.$$

La salida del modelo matemático se deja expresado en una sola ecuación para poder desarrollar las derivadas parciales con cada uno de los parámetros, como se muestra a continuación

$$\frac{\hat{y}(k)}{v(k)} = \frac{b_1z^{-2} + b_2z^{-3}}{b_3 + b_4z^{-2}},$$

$$\hat{y}(k)(b_3 + b_4z^{-2}) = v(k)(b_1z^{-2} + b_2z^{-3}),$$

$$b_3\hat{y}(k) + b_4\hat{y}(k-2) = b_1v(k-2) + b_2v(k-3),$$

$$\hat{y}(k) = \frac{1}{b_3}[b_1v(k-2) + b_2v(k-3) - b_4\hat{y}(k-2)].$$

Se sustituye el valor del polinomio no lineal "v"

$$\hat{y}(k) = \frac{1}{b_3}[a_1b_1u(k-2) + a_2b_1u^2(k-2) + a_1b_2u(k-3) + a_2b_2u^2(k-3) - b_4\hat{y}(k-2)].$$

En donde el error se define como la diferencia que existe entre la salida del sistema y la salida estimada

$$e(\theta_k) = y(k) - \hat{y}(k).$$

B.1. Funcion costo.

Posteriormente se establece la función costo $E(\theta)$, que es la descripción matemática de lo que se desea optimizar (que el error tienda a cero), la elección fue el error cuadrático medio, el cual se define como

$$E(\theta) = \frac{1}{2}e(\theta_k)^2,$$

$$E(\theta) = \frac{1}{2}(y(k) - \hat{y}(k))^2,$$

$$E(\theta) = \frac{1}{2}(y(k) - \frac{1}{b_3}[a_1b_1u(k-2) + a_2b_1u^2(k-2) + a_1b_2u(k-3) + a_2b_2u^2(k-3) - b_4\hat{y}(k-2)])^2.$$

B.2. Gradiente.

Se desarrolla el gradiente, el cual consta de las derivadas parciales de la función costo con respecto a cada uno de los 6 parámetros que se van a estimar.

$$g = \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta},$$

$$g = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_2} \\ \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_1} \\ \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_2} \\ \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_3} \\ \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_4} \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b_3}[b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] * [y(k) - \hat{y}(k)] \\ -\frac{1}{b_3}[b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] * [y(k) - \hat{y}(k)] \\ -\frac{1}{b_3}[a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] * [y(k) - \hat{y}(k)] \\ -\frac{1}{b_3}[a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] * [y(k) - \hat{y}(k)] \\ \frac{1}{(b_3)^2}[a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - b_4 \hat{y}(k-2)] * [y(k) - \hat{y}(k)] \\ \frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) * [y(k) - \hat{y}(k)] \end{bmatrix}.$$

B.3. Hessiano.

Posteriormente se desarrolla el Hessiano, el cual se considera un sistema de segundo orden, ya que consta de las segundas derivadas parciales de la función costo, las cuales son con respecto a cada uno de los 6 parámetros que se van a estimar.

$$H = \frac{\partial^2 E(\theta)}{\partial \theta^2},$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_1} & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_1} & \frac{\partial}{\partial b_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_1} & \frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_1} & \frac{\partial}{\partial b_3} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_1} & \frac{\partial}{\partial b_4} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_2} & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_2} & \frac{\partial}{\partial b_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_2} & \frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_2} & \frac{\partial}{\partial b_3} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_2} & \frac{\partial}{\partial b_4} \frac{\partial E(\theta)}{\partial a_2} \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial b_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial b_3} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial b_4} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_1} \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial b_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial b_3} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial b_4} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_2} \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_3} & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_3} & \frac{\partial}{\partial b_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_3} & \frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_3} & \frac{\partial}{\partial b_3} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_3} & \frac{\partial}{\partial b_4} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_3} \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_4} & \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_4} & \frac{\partial}{\partial b_1} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_4} & \frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_4} & \frac{\partial}{\partial b_3} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_4} & \frac{\partial}{\partial b_4} \frac{\partial E(\theta)}{\partial b_4} \end{bmatrix}.$$

A continuación se muestra el resultado de las 36 derivadas parciales

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right)^2, \\
 H_2 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right), \\
 H_3 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u(k-2) \right), \\
 H_4 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u(k-3) \right), \\
 H_5 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + \right. \\
 &\quad \left. + a_2 b_2 u^2(k-3) - b_4 \hat{y}(k-2)] \right) + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right), \\
 H_6 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right), \\
 H_7 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right), \\
 H_8 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right)^2, \\
 H_9 &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u^2(k-2) \right), \\
 H_{10} &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u^2(k-3) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + \right. \\
 &\quad \left. + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - b_4 \hat{y}(k-2)] + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [b_1 u^2(k-2) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + b_2 u^2(k-3)] \right) \right), \\
 H_{12} &= \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right), \\
 H_{13} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u(k-2) \right), \\
 H_{14} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u^2(k-2) \right), \\
 H_{15} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right)^2, \\
 H_{16} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right), \\
 H_{17} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + \right. \\
 &\quad \left. + a_2 b_2 u^2(k-3) - b_4 \hat{y}(k-2)] + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) \right), \\
 H_{18} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right), \\
 H_{19} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u(k-3) \right), \\
 H_{20} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) + \\
 &\quad + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{b_3} u^2(k-3) \right), \\
 H_{21} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{22} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right)^2, \\
 H_{23} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + \right. \\
 &\quad \left. + a_2 b_2 u^2(k-3) - b_4 \hat{y}(k-2)] + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) \right), \\
 H_{24} &= \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right), \\
 H_{25} &= \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \hat{y}(k-2)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right) + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [b_1 u(k-2) + \right. \\
 &\quad \left. + b_2 u(k-3)] \right), \\
 H_{26} &= \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \hat{y}(k-2)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right) + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [b_1 u^2(k-2) + \right. \\
 &\quad \left. + b_2 u^2(k-3)] \right), \\
 H_{27} &= \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \hat{y}(k-2)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right) + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 u(k-2) + \right. \\
 &\quad \left. + a_2 u^2(k-2)] \right), \\
 H_{28} &= \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \hat{y}(k-2)] \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right) + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 u(k-3) + \right. \\
 &\quad \left. + a_2 u^2(k-3)] \right), \\
 H_{29} &= \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \hat{y}(k-2)] \right)^2 + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{2}{(b_3)^3} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + \right. \\
 &\quad \left. + a_2 b_2 u^2(k-3) - b_4 \hat{y}(k-2)] \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{30} &= \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \hat{y}(k-2)] \right) \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right) + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{(b_3)^2} \hat{y}(k-2) \right), \\
 H_{31} &= \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3)] \right), \\
 H_{32} &= \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right) \left(-\frac{1}{b_3} [b_1 u^2(k-2) + b_2 u^2(k-3)] \right), \\
 H_{33} &= \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-2) + a_2 u^2(k-2)] \right), \\
 H_{34} &= \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right) \left(-\frac{1}{b_3} [a_1 u(k-3) + a_2 u^2(k-3)] \right), \\
 H_{35} &= \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right) \left(\frac{1}{(b_3)^2} [a_1 b_1 u(k-2) + a_2 b_1 u^2(k-2) + a_1 b_2 u(k-3) + a_2 b_2 u^2(k-3) - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \hat{y}(k-2)] \right) + [y(k) - \hat{y}(k)] \left(-\frac{1}{(b_3)^2} \hat{y}(k-2) \right), \\
 H_{36} &= \left(\frac{1}{b_3} \hat{y}(k-2) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Quedando el Hessiano de la siguiente forma

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 \\ H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & H_{17} & H_{18} \\ H_{19} & H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{25} & H_{26} & H_{27} & H_{28} & H_{29} & H_{30} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \end{bmatrix}.$$

Se define el valor de λ el cual corresponde al coeficiente de aprendizaje y este tiene que ser positivo, para evitar que el Hessiano sea definido negativo o cero, y conlleve a un máximo local.

El valor de λ escogido para las primeras iteraciones fue de 50, de modo que al ser un valor alto se aproxima al método del gradiente descendente; esto

hace que los parámetros ideales estén en una vecindad local cercana, posteriormente se cambió el valor de λ a 1 para las siguientes iteraciones, de modo que al ser un valor muy pequeño se aproxima al método de Newton; al ya estar los parámetros en una vecindad local cercana hace que la convergencia sea al máximo.

Una vez calculado el gradiente y el Hessiano, se desarrolla el algoritmo de Levenberg-Marquardt, el cual se define como

$$\theta_{k+1} = \theta_k - (H + \lambda I)^{-1} g,$$

donde:

- θ_k corresponde al vector de parámetros a optimizar con los valores iniciales o actuales.
- θ_{k+1} corresponde al nuevo vector de parámetros, luego de una iteración.
- I es una matriz identidad de las dimensiones del Hessiano.

Una vez desarrollado el algoritmo, se repite el mismo proceso para la siguiente iteración, en el que el gradiente y el Hessiano van a tomar nuevos valores por la estimación de los nuevos parámetros de θ , y en el que θ_{k+1} obtenida de la primera iteración va pasar a ser θ_k durante la segunda iteración.

Apéndice C

Retenedor de orden cero (ZOH)

El retenedor de orden cero o por sus siglas en ingles "zero order hold"(ZOH) permite mantener una señal discreta constante hasta la siguiente señal de muestreo y así sucesivamente con todas las muestras, convirtiendo de esta manera un sistema discreto en uno continuo [36].

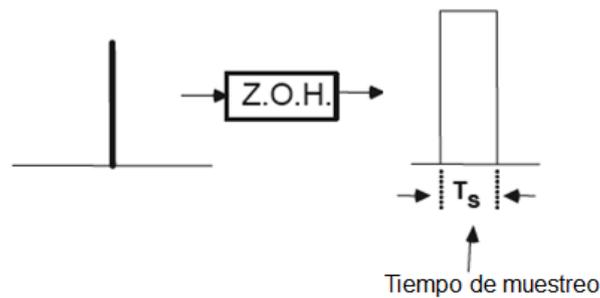


Figura C.1: Operación de un retenedor de orden cero (ZOH).

En un sistema controlado por computadora, el control aplicado a la planta no es continuo, es constante entre los instantes de muestreo (efecto del retenedor de orden cero) y varía discontinuamente en los instantes de muestreo, un ejemplo de lo antes mencionado se refleja en la Figura C.2

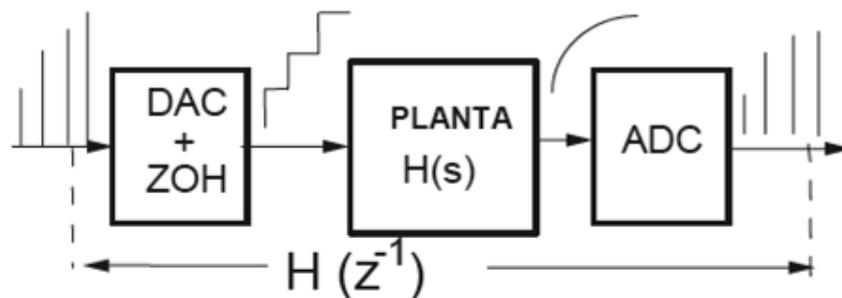


Figura C.2: Sistema de control mediante un convertidor analógico a digital seguido de un retenedor de orden cero (ZOH).

donde

- DAC es un convertidor de señal digital a analógica.
- ADC es un convertidor de señal analógica a digital.

La retención convierte un pulso de Dirac dado por el convertidor de digital a analógico en el muestreo instantáneo en un pulso rectangular de duración T_s , que puede interpretarse como la diferencia entre un paso y el mismo paso desplazado por T_s . Como el paso es la integral del impulso de Dirac, se deduce que la función de transferencia de retenedor de orden cero es

$$H_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}. \quad (C.1)$$

La ecuación (C.1) permite considerar la retención de orden cero como un filtro teniendo una respuesta de frecuencia dada por

$$H_{ZOH}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{j\omega} = T_s \frac{\text{sen}(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2} e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}. \quad (C.2)$$

Por lo que la función de transferencia en tiempo continuo global será

$$H'(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} H(s), \quad (C.3)$$

a la que se asocia una función de transferencia de pulsos.

En la Figura C.3 se muestra como una señal discreta pasa a ser una señal continua en el tiempo.

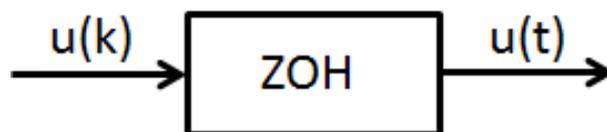


Figura C.3: Conversión de una señal discreta en una continua mediante el retenedor de orden cero (ZOH).

A continuación se muestra una gráfica de como se visualizan varias señales discretas al ser convertidas en señales continuas con el retenedor de orden

cero.

Las señales muestreadas se mantienen constantes hasta la siguiente muestra, y este comportamiento se debe por el orden cero del retenedor; ya que cualquier valor elevado al exponente cero da como resultado la unidad, y esto se representa en que la señal se mantiene constante entre muestra y muestra; no tiene cambios.

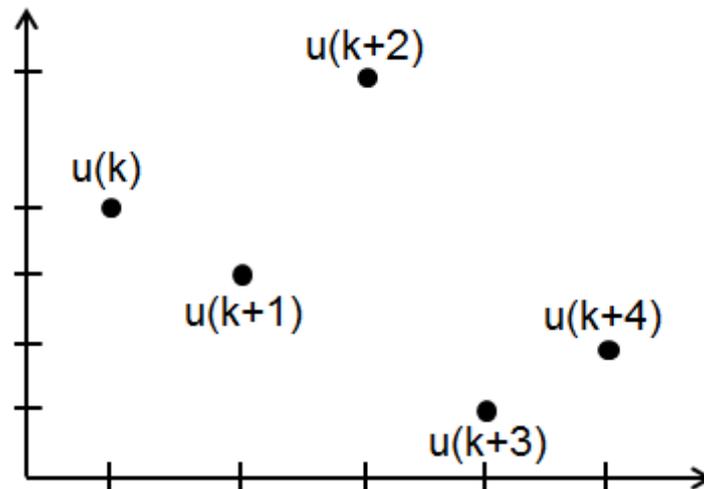


Figura C.4: Gráfica visual de un sistema discreto.

Aplicando un retenedor de orden cero al sistema de la Figura C.4 se obtiene el siguiente sistema continuo

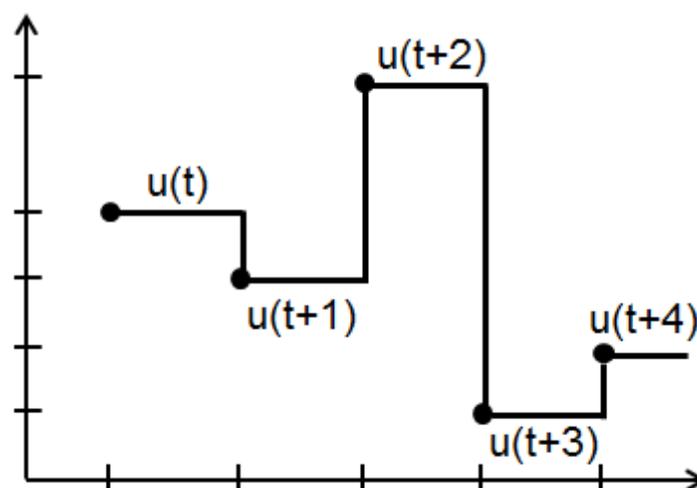


Figura C.5: Gráfica de un sistema continuo obtenido con un retenedor de orden cero.

C.1. Retenedor de orden uno.

A continuación se muestra una gráfica de como se visualizan varias señales discretas al ser convertidas en señales continuas con el retenedor de orden uno.

Las señales muestreadas se intersectan de punto a punto o de muestra a muestra volviéndose un sistema continuo, y este comportamiento se debe por el orden uno del retenedor; ya que da como resultado respuestas lineales entre segmento y segmento.

Aplicando un retenedor de orden uno al sistema de la Figura C.4 se obtiene el siguiente sistema continuo

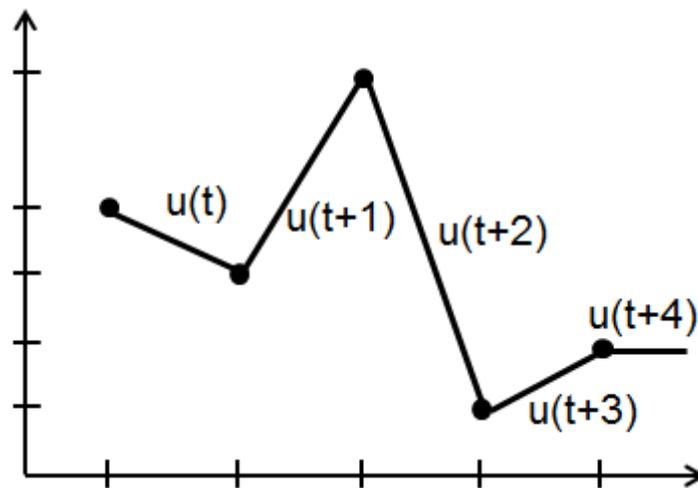


Figura C.6: Gráfica de un sistema continuo obtenido con un retenedor de orden uno.

C.2. Retenedor de orden dos.

A continuación se muestra una gráfica de como se visualizan varias señales discretas al ser convertidas en señales continuas con el retenedor de orden dos.

Las señales muestreadas se intersectan entre ellas en forma de parábola, volviéndose así un sistema continuo, y este comportamiento se debe por el orden dos del retenedor; ya que da como resultado respuestas parabólicas entre muestra y muestra.

Aplicando un retenedor de orden dos al sistema de la Figura C.4 se obtiene el siguiente sistema continuo

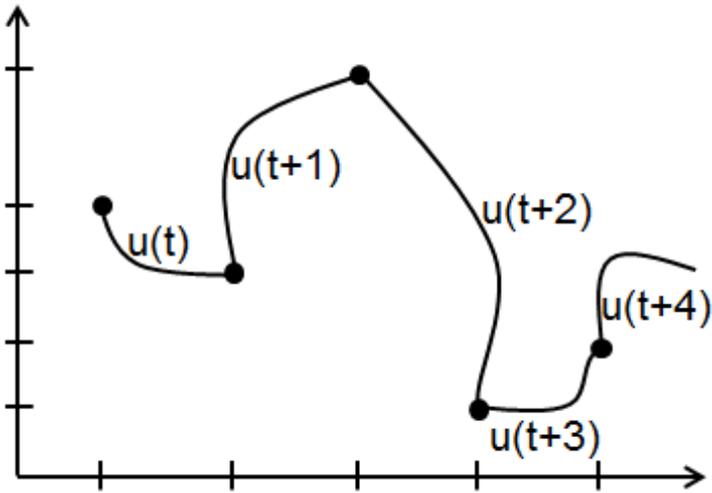


Figura C.7: Gráfica de un sistema continuo obtenido con un retenedor de orden dos.