

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E
INVESTIGACIÓN**

**Control de sistemas no lineales inciertos vía
inmersión e invariancia (I&I)**

Por

Ing. José Fernando Hernández Castañeda

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Jurado Zamarripa

ISSN 0188-9060



RIITEC: (05)-TMCIE-2014

Torreón, Coahuila de Zaragoza, México.
Junio 2014



Subsecretaría de Educación Superior
Dirección General de Educación Superior Tecnológica
Instituto Tecnológico de la Laguna

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Control de sistemas no lineales inciertos vía inmersión e invariancia (I&I)

Por

Ing. José Fernando Hernández Castañeda

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Jurado Zamarripa

ISSN 0188-9060



RIITEC: (05)-TMCIE-2014

Torreón, Coahuila de Zaragoza, México.

Junio 2014

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR TECNOLÓGICA
Instituto Tecnológico de la Laguna



"2014. Año de Octavio Paz"

Torreón, Coah., 03/Junio/2014
Dependencia: DEP/CPCIE
Oficio: DEPII/CPCIE/033/2014
Asunto: Autorización de
impresión de tesis.

C. JOSÉ FERNANDO HERNÁNDEZ CASTAÑEDA
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

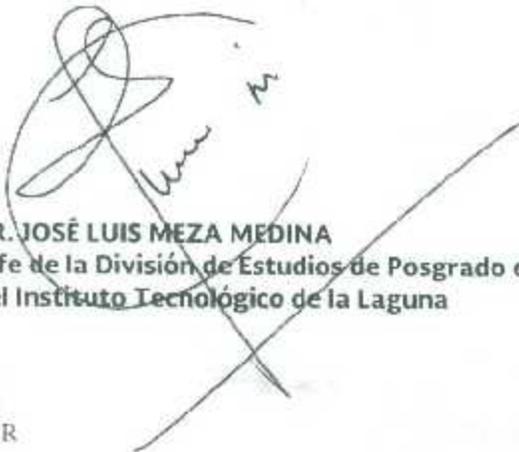
"Control de Sistemas No Lineales Inciertos Vía Inmersión e Invariancia"

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (05)-TMCIE-2014**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna


RHSR


SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
de la Laguna
División de Estudios de Posgrado
e Investigación



Bvd. Revolución y Cda. Cuauhtémoc s/n Col. Centro CP. 27000
Torreón, Coah. Tel. 7051313 e-mail: www.sei@italaguna.edu.mx
www.italaguna.edu.mx



ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

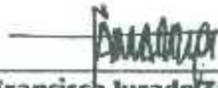
Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

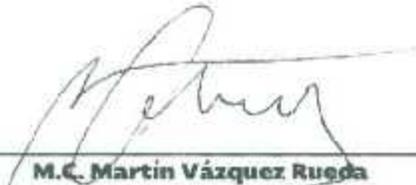
"Control de Sistemas No Lineales inciertos vía Inmersión e Invariancia"

Desarrollado por el **C. José Fernando Hernández Castañeda**, con número de control **M06130222** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN


Dr. Francisco Jurado Zamarripa
Asesor/Director

Dr. Alejandro E. Dzul López
Comité Tutorial

M.C. Martín Vázquez Rueda
Comité Tutorial

Dr. Víctor A. Santibáñez Dávila
Comité Tutorial

Dedicatoria

A la persona que, no conforme con darme la vida, me ha entregado la suya; mi Madre.

A mi padre, que con el ejemplo me ha enseñado a trabajar y llevar una vida digna.

A mis hermanos que han sido los mejores compañeros de la vida.

J. Fernando

Agradecimientos

A los profesores Dr. Ricardo E. Campa Cocom, Dr. Víctor A. Santibáñez, Dr. Alejandro Dzul, Dr. J. Alfonso Pámanes, Dr. Miguel Angel Llama, M.C. Edmundo Javier Ollervides y al Dr. José Luis Meza, por su paciencia y enseñanzas dentro y fuera del aula de clases,

Agradezco al Dr. Francisco Jurado Zamarripa por su confianza, apoyo y sobretodo por sus puntuales asesorías, sin las cuales me hubiera resultado muy difícil entender los temas desarrollados en el presente trabajo.

A mis compañeros el Ing. Pedro Zúñiga, Ing. Eduardo Cruz, M.C. Dena Ruiz, M.C. José Armando Sáenz, M.C. Jesús Eduardo Fierro y la Ing. Fo-Lyn Yong Primero, con quienes compartí más que un salón de clases.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para estudiar el posgrado.

*"Si he visto más allá que los demás, solo ha sido porque me he parado en
hombros de gigantes"*

Isaac Newton

Resumen

El presente documento es muestra del estudio y aplicación de la técnica de inmersión e invariancia (I&I) en el control de sistemas no lineales. En particular, se aborda el uso de la técnica para el problema de estabilización, por realimentación de estados, de un punto de equilibrio de un sistema no lineal, sin embargo, la técnica puede ser aplicada a una amplia clase de problemas de control referentes a estimación paramétrica, estimación de estados y estabilización por realimentación a la salida.

La técnica I&I fue propuesta por los reconocidos profesores Alessandro Astolfi y Romeo Ortega en el artículo "*Immersion and Invariance: A New Tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems*" [1], que después derivaría en la publicación del libro "*Nonlinear and Adaptive Control with Applications*" [2] y de los cuales está basado el contenido de la presente tesis. Se estudiaron y desarrollaron algunos de los problemas abordados en la obra en cuestión, además de validar el contenido de la misma mediante la réplica en simulación de algunos de los resultados.

El método I&I reduce el problema del diseño del controlador en otros subproblemas los cuales, en algunas ocasiones, pueden ser más fáciles de resolver. Éste difiere de muchas metodologías para el diseño de controladores por que no requiere, en principio, del conocimiento de una función de Lyapunov. Es muy deseado en situaciones donde un controlador de estabilización para modelos nominales de orden reducido es conocido y para el cual se desea hacerlo robusto con respecto a la dinámica de alto orden. Esto puede conseguirse mediante el diseño de una ley de control donde la dinámica completa de la planta quede inmersa en forma asintótica dentro de una dinámica de orden reducido.

Del presente estudio de tesis surge la propuesta del uso de la metodología I&I para el control de un robot manipulador de dos grados de libertad y cuyo desempeño es validado mediante simulación atendiendo dos casos: 1) para cuando no se considera la fricción y 2) para cuando se asume el conocimiento de la misma. Se propone además un controlador I&I en el control de seguimiento de trayectoria de un vehículo espacial cuyo desempeño es también validado mediante simulación.

Abstract

This document is a sample of the study and application of the Immersion and Invariance (I&I) technique for the control of nonlinear systems. In particular, the use of this technique for the stabilization problem of an equilibrium point of a nonlinear system, by state feedback, is addressed; however, the technique can be applied to a wide class of control problems concerning to parameter estimation, state estimation, and stabilization by output feedback.

The I&I technique was proposed by the renowned professors Alessandro Astolfi and Romeo Ortega in the paper "*Immersion and Invariance: A New Tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems*" [1], which would lead to the publication of the book "*Nonlinear and Adaptive Control with Applications*" [2] and from which, the content of this thesis is based. In order to get a better understanding of the I&I methodology, we retaken some of the problems included in this latter reference, reproducing in a detailed way, with respect to that given by the authors, the synthesis on the design of the I&I controllers.

The I&I approach reduces the controller design problem to other subproblems which, in some instances, might be easier to solve. It differs from most of the existing controller design methodologies because it does not require, in principle, the knowledge of a control Lyapunov function. It is well-suited to situations where a stabilising controller for a nominal reduced-order model is known, and we would like to robustify it with respect to higher-order dynamics. This is achieved by designing a control law that asymptotically immerses the full system dynamics into the reduced-order ones.

In this work, we explore the I&I methodology for the design of a control law for a robot manipulator with two degrees of freedom and whose performance is validated via simulation addressing two cases: 1) when friction between joints is neglected and 2) when friction is known. Furthermore, we propose an I&I controller for trajectory tracking of a spacecraft, whose performance is also validated via simulation.

Índice general

1. Introducción	1
2. Control I&I	7
2.1. Características principales	7
2.2. Perspectiva de estabilización por I&I	8
2.3. Estabilización I&I	9
2.3.1. Principio de estabilización I&I	10
2.3.2. Sistemas con estructuras especiales	13
2.3.2.1. Sistema singular perturbado	13
2.3.2.2. Sistema en la forma realimentada	14
2.3.2.3. Sistema en forma prealimentada	19
2.3.3. Aplicaciones físicas	27
2.3.3.1. Levitador magnético	27
2.3.3.2. Robot de articulaciones flexibles	33
2.3.3.3. Sistema carro-péndulo	38
3. Estabilización vía I&I de un robot manipulador de 2 g.d.l.	47
3.1. Modelo dinámico de un robot manipulador de n g.d.l.	47
3.2. Objetivo de control	48
3.3. Modelo dinámico de un robot manipulador de 2 g.d.l.	48
3.4. Diseño del controlador I&I-1	50
3.5. Resultados	52
3.6. Diseño del controlador I&I-2	55
3.7. Resultados	59
3.8. Comparación entre las leyes de control I&I-1, I&I-2 y PD+	61
3.9. Respuesta controlador I&I incluyendo fricción viscosa	63
4. Control de postura para un vehículo espacial vía I&I	67
4.1. Modelo dinámico de un vehículo espacial	67
4.1.1. Ecuaciones cinemáticas	68
4.1.2. Modelo dinámico	70
4.2. Objetivo de control	70
4.3. Diseño del controlador	70

Índice de figuras

1.1. Interpretación de la submersión de los métodos de diseño basados en Lyapunov.	2
2.1. Ilustración gráfica del mapeo entre las trayectorias del sistema a controlar y el sistema objetivo para $p = 2$ y $n = 3$	9
2.2. Ilustración gráfica del enfoque de I&I	10
2.3. Diagrama del sistema de levitación magnética	27
2.4. Desplazamiento x_1 vs x_{1*}	31
2.5. Entrada de control	32
2.6. Error de posición	32
2.7. Péndulo sobre un carro y la correspondiente dinámica objetivo	39
2.8. Trayectorias del sistema carro-péndulo (el área sombreada corresponde a la variedad invariante $z = 0$.)	43
2.9. Posición angular del péndulo.	44
2.10. Velocidad angular del péndulo.	44
2.11. Velocidad del carro.	44
2.12. Entrada de control.	45
3.1. Robot de 2 g.d.l	49
3.2. Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 1.	54
3.3. Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 2.	54
3.4. Dinámica z hacia la variedad.	55
3.5. Ilustración gráfica de la función $f(\xi)$ para $\xi \in \mathcal{R}^2$	56
3.6. Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 1.	60
3.7. Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 2.	60
3.8. Dinámica z hacia la variedad.	61
3.9. Par resultante leyes de control I&I-1, I&I-2 y PD+	62
3.10. Respuesta del sistema con y sin fricción para el eslabón 1 utilizando la ley de control I&I-1, I&I-1c indica la presencia de fricción en el modelo.	63
3.11. Respuesta del sistema con y sin fricción para el eslabón 2 utilizando la ley de control I&I-1, I&I-1c indica la presencia de fricción en el modelo.	64
3.12. Respuesta del sistema con y sin fricción para el eslabón 1 utilizando la ley de control I&I-2, I&I-2c indica la presencia de fricción en el modelo.	64

Índice de tablas

2.1. Parámetros utilizados para la simulación del sistema (2.36) con la ley de control dada en (2.39).	31
3.1. Parámetros del robot manipulador de 2 g.d.l.	53

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años hemos sido testigos de la aparición de una serie de problemas desafiantes en ingeniería de control los cuales exhiben dos características comunes: 1) el rango de interés de operación del sistema no está necesariamente cercano a un equilibrio, por lo tanto, los efectos no lineales deben ser explícitamente tomados en cuenta para un diseño exitoso del controlador y 2) a pesar de que el modelado físico permite identificar con precisión ciertos efectos no lineales bien definidos, el controlador tiene que hacer frente a un alto nivel de incertidumbres debidas a la falta de conocimiento de los parámetros del sistema y a la incapacidad de medir el estado completo del sistema. Esta situación justifica la necesidad de desarrollar herramientas para el diseño de controladores de sistemas no lineales inciertos. Recientemente, una nueva metodología basada en las nociones de inmersión del sistema [5, 6, 17] e invariancia de la variedad [5, 6, 26], las cuales son herramientas clásicas de la teoría de regulación no lineal y control geométrico no lineal [4, 37], para el diseño de controladores no lineales y adaptables para sistemas no lineales, ha sido reportada en la literatura como *Inmersión e Invariancia (I&I)* (*Immersion and Invariance, I&I*) [1, 2, 38]. La idea básica del enfoque I&I es conseguir el objetivo de control mediante la inmersión de la cinámica de la planta dentro de un sistema objetivo, posiblemente de orden menor, que capture el comportamiento deseado. El problema de control es luego reducido al diseño de una ley de control que garantice que el sistema controlado asintóticamente se comporte como el sistema objetivo.

El concepto de invariancia ha sido ampliamente usado en la teoría de control. El desarrollo de la teoría de control geométrico lineal y no lineal [4]-[6] ha demostrado que los subespacios invariantes y sus contrapartes no lineales como distribuciones invariantes, juegan un papel fundamental en la solución de muchos problemas de diseño. Variedades invariantes lentas y rápidas, las cuales surgen de manera natural en los sistemas singulares perturbados, han sido utilizadas para estabilización [7] y análisis de sistemas de adaptación lenta [8]. La noción de variedades invariantes es además crucial en el diseño de leyes de control estabilizadoras para sistemas no lineales. La teoría de variedad central [9] ha sido instrumento en el diseño de leyes de control estabilizadoras para sistemas con aproximación lineal no controlable [10] mientras que el concepto de dinámica cero y la fuertemente relacionada noción de variedad cero han sido explotadas en diversos métodos de estabili-

zación local y global, incluyendo el control basado en pasividad [11], *backstepping* [12] y *forwarding* [13]. La noción de inmersión tiene además una larga tradición en la teoría de control. Su idea básica es la de transformar el sistema en consideración a un sistema con propiedades específicas. Por ejemplo, el problema clásico de inmersión de un sistema no lineal genérico dentro de un sistema lineal y controlable por medio de una realimentación de estados estática o dinámica ha sido extensamente estudiada en [5, 6].

La observación de estados ha sido formulada en términos de la inmersión del sistema [16]. Más recientemente, la inmersión ha sido usada en la teoría del regulador no lineal en la obtención de condiciones necesarias y suficientes para regulación robusta. En particular, en [17, 18] se demuestra que la regulación robusta puede conseguirse considerando que el exosistema pueda ser inmerso dentro de un sistema lineal y observable. En [19], se muestra que un sistema dinámico, posiblemente de dimensión infinita, tiene un equilibrio estable si éste puede ser inmerso dentro de otro sistema dinámico con un equilibrio estable mediante el tan denominado mapeo de *preservación de estabilidad*.

Los métodos de diseño basados en Lyapunov son de alguna manera duales al enfoque descrito anteriormente. De hecho, en el diseño basado en Lyapunov uno busca una función $V(x)$ definida positiva y propia, si se busca luego probar estabilidad global, tal que el sistema $\dot{V} = \alpha(V)$, para alguna función $\alpha(\cdot)$, tenga un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en el origen. Note que la función $V : x \rightarrow I$, donde I es un intervalo del eje real, es una submersión y la dinámica objetivo, denominada *dinámica de la función de Lyapunov*, son unidimensionales (ver Figura 1.1).

La reformulación I&I del problema de estabilización está implícita en el control por modos deslizantes, donde las dinámicas objetivo son las dinámicas del sistema sobre la variedad deslizante, la cual es hecha atractiva por medio de una ley de control discontinua, en tanto que la entrada de control $v(x)$ es el tan denominado *control equivalente* [20].

Un procedimiento similar a I&I es propuesto en [21], con la diferencia fundamental de que p (dimensión del sistema dinámico objetivo) es igual a n (dimensión de la planta) y por consecuencia el mapeo $\pi(\cdot)$ definido en [1] no es una inmersión, sino un cambio de coordenadas.

La estabilización via I&I está además relacionada con el método de estabilización ba-

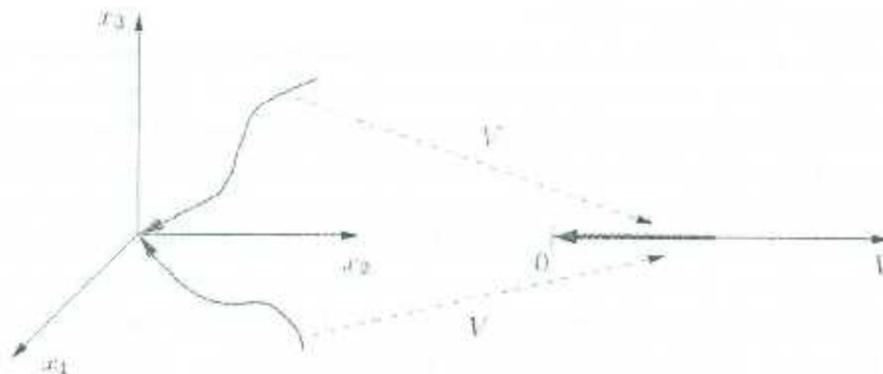


Figura 1.1: Interpretación de la submersión de los métodos de diseño basados en Lyapunov.

sado en pasividad [22, 23] y en la teoría de disipatividad [22]. En el control basado en pasividad la estabilización es conseguida encontrando una salida para la cual el sistema sea pasivo con alguna función de almacenamiento adecuada, *e.g.*, con un mínimo en el equilibrio a ser estabilizado. Si el sistema no es pasivo en lazo abierto, es necesario encontrar una señal de salida de grado relativo uno y cuya dinámica cero sea de fase mínima. Como se demuestra en [24], bajo adecuadas suposiciones existen condiciones necesarias y suficientes para que el sistema a ser realimentado sea equivalente a un sistema pasivo. Como se explicara posteriormente y con mayor detalle en el capítulo 2, en I&I la ley de control estabilizadora es obtenida comenzando por la selección de un sistema dinámico objetivo $\dot{\zeta} = -\alpha(\zeta)$, luego se calcula el mapeo $x = \pi(\zeta)$, se define la variedad \mathcal{V} , y finalmente diseñando una ley de control que conduzca la distancia $|\zeta|$ desde la variedad a cero. Es claro que como se vera en el capítulo 2 el sistema $\dot{x} = f(x) - g(x)u$ con salida ζ es de fase mínima y su dinámica cero son precisamente las dinámicas del sistema objetivo. Si el grado relativo de ζ es uno, luego el sistema será realimentado equivalente a un sistema pasivo.

La metodología I&I se basa en las nociones de inmersión del sistema [5, 6, 17] e invariancia de la variedad [5, 6, 26] la cual posee las siguientes características principales: 1) El método reduce el problema del diseño del controlador a otros sub-problemas, los cuales en algunas ocasiones pueden ser más fáciles de resolver; 2) este difiere de la mayoría de las metodologías existentes para el diseño de controladores porque no requiere, en principio, del conocimiento de una función de Lyapunov; 3) resulta adecuado para situaciones donde un controlador estabilizador para un modelo nominal de orden reducido es conocido y se desea hacerlo robusto con respecto a la dinámica de alto orden, esto se consigue mediante el diseño de una ley de control que asintóticamente inmersa la dinámica completa del sistema dentro de otra de orden reducido; 4) en problemas de control adaptable la metodología conduce a esquemas de estabilización que toman en cuenta el efecto de incertidumbres paramétricas adoptando una perspectiva de robustez en contraste con algunos de los diseños adaptables existentes, apoyados de ciertas condiciones de emparejamiento, que tratan estos términos como perturbaciones a ser rechazadas. La formulación I&I no invoca el principio de equivalencia cierta ni requiere de una parametrización lineal. Más aún, éste provee un procedimiento para sumar términos cruzados entre los parámetros estimados y los estados de la planta en la función de Lyapunov [2].

La metodología I&I requiere de la selección de un sistema dinámico objetivo, lo cual no es una tarea trivial ya que la solución del problema fundamental de diseño del control depende de tal selección. Las dinámicas objetivo clásicas para sistemas no lineales son lineales [5, 6]. La selección de la dinámica objetivo lineal para sistemas físicos no es necesariamente la más adecuada, ya que, por un lado, los diseños realizables podrían tomar en cuenta las restricciones impuestas por la estructura física y, por el otro lado, es bien sabido que muchos de los sistemas físicos no son linealizables por realimentación.

En problemas de control adaptable la metodología conduce a esquemas de estabilización que toman en cuenta el efecto de incertidumbres paramétricas adoptando una perspectiva de robustez en contraste con algunos de los diseños adaptables existentes, apoyados de ciertas condiciones de emparejamiento, que tratan estos términos como perturbaciones a ser

rechazadas. La formulación I&I no requiere de invocar el principio de equivalencia cierta ni de una parametrización lineal. Además, provee un procedimiento para sumar términos cruzados en la función de Lyapunov entre los parámetros estimados y los estados de la planta así como también de un marco de trabajo para la formulación y solución de problemas de diseño de observadores y de estabilización robusta por realimentación a la salida con observación del estado y estimación paramétrica tratadas de manera unificada. Esta metodología permite también formular y resolver el problema de diseño de controladores proporcional-integral no lineales para una clase de sistemas de bajo orden [1, 2, 38].

En [2] se presenta una serie de problemas de diseño de control para los cuales es posible definir alguna dinámica objetivo para luego explorar la formulación I&I. Los problemas de diseño en cuestión abordan sistemas físicos como un levitador magnético y un robot de articulaciones flexibles así como un sistema subactuado carro-péndulo. La técnica I&I es también aplicable a dos clases de sistemas con estructura especial, las cuales han atraído la atención de algunos investigadores, como lo son los sistemas dados en la forma realimentada y prealimentada.

En [32] se aborda el control de un misil autopiloteado basado en I&I. Un nuevo marco para el diseño de controladores adaptables vía I&I para sistemas no lineales no linealmente parametrizados es propuesto en [35]. En [34] se aborda el control adaptable vía I&I para un quadrotor. En [29] se estudia el control I&I de un sistema de suspensión magnética y se reportan resultados experimentales de la robustez del controlador no lineal diseñado. En [33] se analiza el control adaptable en tiempo discreto para sistemas estrictamente en forma realimentada, en la construcción del controlador se utiliza un algoritmo de control en tiempo discreto basado en *backstepping* junto con la metodología I&I. En [28] se aborda el uso de la técnica I&I para generar leyes de control estabilizadoras desde un enfoque constructivo para una clase de sistemas mecánicos subactuados. Como ejemplo, el enfoque es aplicado al sistema péndulo con rueda inercial y se revela una interesante conexión con la técnica de interconexión y asignación de amortiguamiento, control basado en pasividad (IDA-PBC). En [30] se propone un enfoque de control para una clase de sistemas electromecánicos basados en I&I, y en el cual se consideran dos casos: 1) cuando se conoce la información completa del sistema electromecánico y 2) cuando se desconocen ciertos parámetros del sistema. En [31] se introduce un observador basado en I&I para el cálculo de la velocidad y ángulo de rotación del sistema bola y barra.

Objetivo general

El objetivo general de la presente investigación consiste en el estudio de la metodología *Inmersión e Invariancia* (I&I) (*Immersion and Invariance*, I&I), propuesta recientemente en la literatura, en el diseño de controladores para sistemas no lineales.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos consisten en:

- El estudio de la metodología I&I;
- Estudio del resultado principal de la metodología I&I aplicada a la estabilización;
- La réplica de algunos de los resultados reportados en la literatura que exhiben el desempeño del controlador I&I;
- Aplicación del recurso I&I para el caso de regulación de un robot manipulador de 2 g.d.l.;
- Aplicación de la metodología I&I en el control de postura de una nave espacial.

Notación

En el presente estudio se consideran sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma [2]

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

el cual incluye sistemas invariantes en el tiempo y sistemas afines en el control, donde $x \in \mathcal{R}^n$ es el estado del sistema, $u \in \mathcal{R}^m$ es la señal de entrada y t denota el tiempo. Las trayectorias de la ecuación anterior se denotan por $x(t)$ donde $t \in [0, T)$ para $0 < T \leq \infty$. La transpuesta de una matriz A se denota por A^T e I representa la matriz identidad. La matriz diagonal de $n \times n$ es representada como $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, donde a_i son los elementos de la diagonal. Un vector columna consistente de subvectores x_1, \dots, x_n es representado como $\text{col}(x_1, \dots, x_n)$.

El valor absoluto de un escalar y es denotado como $|y|$. La norma p de un vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathcal{R}^n$, para $1 \leq p < \infty$, es definida como [39]

$$\|x\|_p \triangleq (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Note que si $n = 1$ luego $\|x\|_p = |x|$ para toda $1 \leq p < \infty$. En el presente documento se usa la norma euclidiana (o norma 2) en cuyo caso el subíndice p no es considerado, *i.e.*, $\|x\| \triangleq \|x\|_2$. La norma p inducida de una matriz A , para $1 \leq p < \infty$, está definida como

$$\|A\|_p \triangleq \sup \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, x \neq 0$$

donde \sup denota el supremo, *i.e.*, la mínima cota superior. Para $p = 2$ la definición anterior conduce a $\|A\| \triangleq \|A\|_2 = (\lambda_{\max}(A^T A))^{1/2}$, donde $\lambda_{\max}(A^T A)$ es el máximo eigenvalor de $A^T A$.

La norma \mathcal{L}_p de un vector $x(t)$, definida para toda $t \geq 0$, para $1 \leq p < \infty$, es definida como

$$\|x\|_p \triangleq \left(\int_0^\infty (\|x(t)\|_p)^p dt \right)^{1/p}.$$

\mathcal{L}_p denota el espacio de señales $x : \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{R}^n$ tal que $\|x\|_p$ existe y es finita ($\mathcal{R}_{\geq 0}$ denota el conjunto de los números reales no negativos); \mathcal{L}_∞ denota el espacio de señales $x : \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{R}^n$ que están acotadas, *i.e.*, $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\|$ existe y es finito.

Denotaremos a la clase de mapeos diferenciables n veces como \mathcal{C}^n [6], *i.e.*, sus derivadas parciales de orden n existen y son continuas. A lo largo del presente documento de tesis emplearemos el término *suave* (*smooth*) para resaltar mapeos que son \mathcal{C}^k [6], para alguna k grande tal que todas las derivadas requeridas estén bien definidas.

Para toda función \mathcal{C}^1 , $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ y cualquier campo vector $f : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^n$, $L_f V(x)$ denota la *derivada de Lie* de V a lo largo de f en x , *i.e.*,

$$L_f V(x) \triangleq \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u, t).$$

Organización del documento

El presente documento de tesis está organizado de la siguiente manera: El capítulo 1 trata con el estado del arte y establece el objetivo general así como los objetivos específicos a perseguir en el presente estudio de investigación. Se establece también la notación y conceptos a considerar en el presente trabajo. El capítulo 2 trata sobre el control I&I, su enfoque y características principales. Se aborda el resultado básico de la estabilización I&I y para el cual se destaca el conjunto de condiciones suficientes para la construcción de leyes de control por realimentación estática de estados, estabilizadoras, de forma asintótica y global para sistemas no lineales afines en el control. Se aborda el estudio de algunas aplicaciones de la técnica I&I sobre sistemas con estructuras especiales como sistemas singulares, sistemas en forma realimentada, sistemas en forma prealimentada y algunos sistemas con aplicaciones físicas como un levitador magnético, un robot con articulaciones flexibles y el sistema carro-péndulo. En el capítulo 3 se trata con el diseño del control de regulación vía I&I para un robot manipulador de n grados de libertad y se exhiben los resultados del desempeño del controlador en cuestión, obtenidos mediante simulación, sobre un robot manipulador de 2 g.d.l. El problema del control de postura de un vehículo espacial, en el cual se busca que describa una trayectoria de postura deseada, se aborda en el capítulo 4 siguiendo la metodología I&I y se ilustra el desempeño del controlador I&I como resultado de la validación en simulación. Las conclusiones del presente estudio se asientan al final del documento de tesis.

Capítulo 2

Control I&I

Un nuevo método para el diseño de controladores no lineales y adaptables para sistemas no lineales (inciertos) es presentado. El método se basa en las nociones de sistemas de inmersión y variedad invariante, las cuales son herramientas clásicas de la teoría de regulación no lineal y control geométrico no lineal, pero éstas son usadas desde una perspectiva diferente. Esta nueva metodología es llamada como *Inmersión e Invariancia* (I&I) (*Immersion and Invariance*, I&I). La idea básica del enfoque de I&I es lograr el objetivo de control mediante la inmersión de la dinámica de la planta dentro de un sistema objetivo, posiblemente de orden inferior, que capture el comportamiento deseado.

2.1. Características principales

Las características principales de la metodología I&I son destacadas a continuación.

- El método reduce el problema del diseño del controlador en otros subproblemas los cuales, en algunas ocasiones, pueden ser más fáciles de resolver.
- Este difiere de muchas metodologías para el diseño de controladores por que no requiere, en principio, del conocimiento de una función de Lyapunov.
- Es muy deseado en situaciones donde un controlador de estabilización para modelos nominales de orden reducido es conocido, y nos gustaría hacerlo robusto con respecto a la dinámica de alto orden. Esto es logrado diseñando una ley de control que inmersa asintóticamente la dinámica completa de la planta dentro de una de orden reducido.
- En problemas de control adaptable, la metodología lleva a esquemas de estabilización que cuentan con el efecto de parámetros inciertos, adoptando una perspectiva robusta, lo cual está en contraste con algunos diseños adaptables existentes que tratan estos términos (dependiendo de ciertas condiciones de emparejamiento) como perturbaciones a ser rechazadas. El método de inmersión e invariancia no invoca el principio de equivalencia cierta, no requiere una parametrización lineal. Además, éste

proporciona un procedimiento para sumar términos cruzados entre parámetros estimados y los estados de la planta en la función de Lyapunov.

2.2. Perspectiva de estabilización por I&I

A continuación se ilustra el enfoque I&I con el problema básico de estabilización por realimentación de estados de un punto de equilibrio de un sistema no lineal. El problema de estabilización por realimentación de estados es elegido para facilidad de la presentación, sin embargo, el enfoque es aplicable a una amplia clase de problemas de control en los que se incluye seguimiento, estimación paramétrica, estimación de estados y estabilización por realimentación a la salida.

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.1)$$

con $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$ y el problema de encontrar, de ser posible, una ley de control por realimentación de estados $u = v(x)$ tal que el sistema en lazo cerrado posea un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en el origen. Este problema puede abordarse considerando el problema de encontrar un sistema dinámico objetivo

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad (2.2)$$

con $\xi \in \mathcal{R}^p$ y $p < n$, el cual posea un equilibrio (globalmente) asintóticamente estable en el origen, un mapeo $x = \pi(\xi)$ suave y una ley de control $v(x)$ tal que

$$\pi(\xi(0)) = x(0), \quad (2.3)$$

$$\pi(0) = 0, \quad (2.4)$$

y

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))v(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (2.5)$$

Si las condiciones anteriores se cumplen luego toda trayectoria $x(t)$ del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(x) \quad (2.6)$$

es la imagen, a través del mapeo $\pi(\cdot)$, de una trayectoria $\xi(t)$ del sistema objetivo (2.2), como se ilustra en la figura 2.1. De (2.4) y del hecho de que el equilibrio del origen del sistema objetivo es asintóticamente estable, esto implica que $x(t)$ converja al origen. Así el problema de estabilización para el equilibrio cero del sistema (2.1) puede ser reformulado como el problema de resolver la ecuación diferencial parcial (2.5) con las condiciones de frontera (2.3) y (2.4).

Enseguida se brinda una interpretación geométrica de (2.3)-(2.5). Considere el sistema en lazo cerrado (2.6) y una variedad en el espacio de estados de dimensión n definida por

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{R}^n | x = \pi(\xi), \xi \in \mathcal{R}^p\},$$

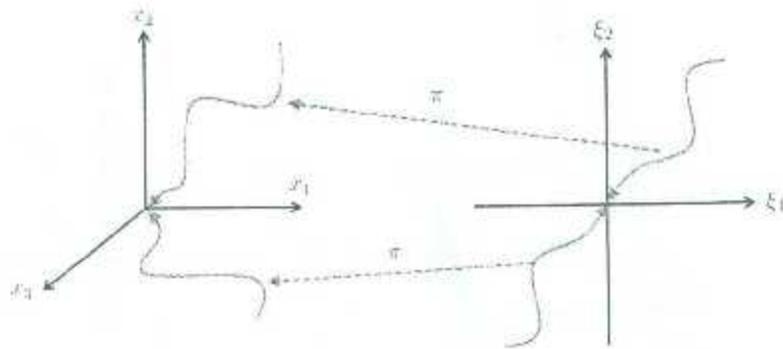


Figura 2.1: Ilustración gráfica del mapeo entre las trayectorias del sistema a controlar y el sistema objetivo para $p = 2$ y $n = 3$.

y tal que (2.3) y (2.4) se cumplan. De (2.5), la variedad \mathcal{V} es invariante¹ con dinámica interna (2.2), por lo tanto todas las trayectorias $x(t)$ que comienzan sobre la variedad permanecerán allí y asintóticamente convergerán al punto $\pi(0)$, el cual es el origen, por (2.4). Además, la condición (2.3) garantiza que el estado inicial de (2.6) descansa sobre la variedad \mathcal{V} .

La formulación anterior resulta impráctica por dos razones. Primero, de (2.3) y (2.5), el mapeo $\pi(\cdot)$ y el control $v(\cdot)$ dependen, en general, de las condiciones iniciales. Segundo, pudiera ser imposible encontrar un mapeo $\pi(\xi)$, para cualquier $x(0) \in \mathcal{R}^n$, tal que (2.3), (2.4) y (2.5) sean satisfechas.

Estos obstáculos pueden evadirse determinando una solución de (2.4) y (2.5) únicamente y por modificación de la ley de control $u = v(x)$ tal que para todas las condiciones iniciales las trayectorias del sistema (2.6) permanezcan acotadas y converjan asintóticamente a la variedad $x = \pi(\xi)$, *i.e.*, que \mathcal{V} sea atractiva.

La atracción de la variedad \mathcal{V} puede expresarse en términos de la distancia

$$|\zeta| = \text{dist}(x, \mathcal{V}),$$

la cual deberá ser llevada a cero. Cabe resaltar que la distancia $|\zeta|$ puede no definirse de manera única. Esto provee un grado de libertad adicional en el diseño del control.

Una ilustración gráfica del enfoque I&I para $p = 2$ y $n = 3$ es mostrada en la figura 2.2. Note que $\pi(\cdot)$ mapea una trayectoria sobre el espacio ζ a una trayectoria sobre el espacio de estados x , lo cual se restringe a que la variedad \mathcal{V} contenga el origen. Además, todas las trayectorias que comienzan fuera de la variedad \mathcal{V} , *i.e.* con $|\zeta| \neq 0$, convergerán al origen.

2.3. Estabilización I&I

En la presente sección se enuncian las condiciones de suficiencia para la construcción de una ley de control por realimentación de estados, estática, globalmente asintóticamente

¹Una variedad $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$ es invariante si $x(0) \in \mathcal{V} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{V}$ para todo $t > 0$, vea definición A.7 al final del documento.

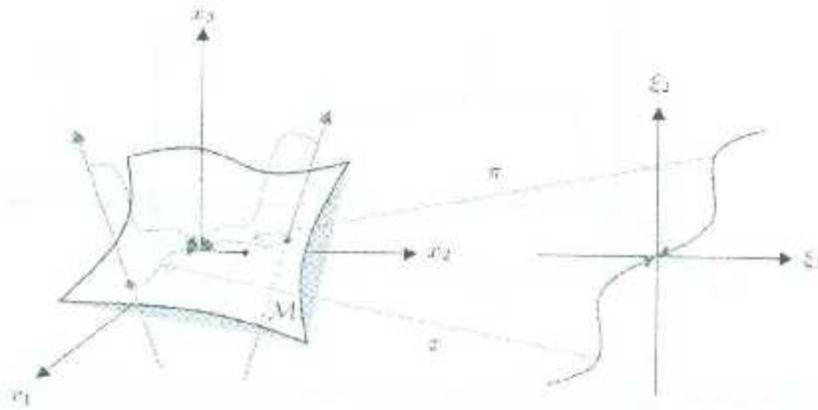


Figura 2.2: Ilustración gráfica del enfoque de I&I

estabilizadora para sistemas no lineales afines en el control, las cuales son parte del resultado básico de la estabilización por I&I. Sin embargo, consideraciones similares pueden plantearse para sistemas no afines y para el problema de seguimiento.

Para ilustrar este resultado se analiza una serie de ejemplos en los que se incluyen sistemas singulares perturbados y sistemas tanto en la forma realimentada como en la forma prealimentada, así como un sistema mecánico con modos flexibles, un sistema electromecánico con dinámica parásita en el actuador y un sistema mecánico subactuado.

2.3.1. Principio de estabilización I&I

El principio de estabilización de un punto de equilibrio de un sistema no lineal vía I&I, es asentado en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. [2] Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.7)$$

con $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$ y un punto de equilibrio $x^* \in \mathcal{R}^n$ a ser estabilizado. Asuma que existen mapeos suaves $\alpha : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^p$, $\pi : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^n$, $\phi : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n-p}$, $c : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^m$ y $\psi : \mathcal{R}^{n \times (n-p)} \rightarrow \mathcal{R}^m$, con $p < n$, tales que sostengan lo siguiente:

(A1) El sistema objetivo

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad (2.8)$$

con $\xi \in \mathcal{R}^p$ posee un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\xi^* \in \mathcal{R}^p$ y

$$x^* = \pi(\xi^*).$$

(A2) Para todo $\xi \in \mathcal{R}^p$,

$$f(\pi(\xi)) + g(\pi(\xi))c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi). \quad (2.9)$$

(A3) El conjunto identidad

$$\{x \in \mathcal{R}^n | \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{R}^n | x = \pi(\xi), \xi \in \mathcal{R}^p\} \quad (2.10)$$

se satisface.

(A4) Todas las trayectorias del sistema

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)v(x, z)), \quad (2.11)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, z), \quad (2.12)$$

están acotadas y (2.11) posee un equilibrio globalmente uniformemente asintóticamente estable en $z = 0$.

Luego x^* es un equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v(x, \phi(x)), \quad (2.13)$$

Prueba: vea [2].

Los resultados del teorema 2.1 son interpretados de la siguiente manera: Dado el sistema (2.7) y el sistema dinámico objetivo (2.8), el objetivo es encontrar una variedad \mathcal{V} , descrita implícitamente por $\{x \in \mathcal{R}^n | \phi(x) = 0\}$, y en forma parametrizada por $\{x \in \mathcal{R}^n | x = \pi(\xi), \xi \in \mathcal{R}^p\}$, la cual pueda hacerse invariante y asintóticamente estable tal que la restricción en lazo cerrado del sistema para \mathcal{V} sea descrita por $\dot{\xi} = \alpha(\xi)$.

Cabe resaltar que el control u que haga la variedad invariante no será único, ya que este está únicamente definido solo sobre \mathcal{V} , *i.e.*, $v(\pi(\xi), 0) = c(\pi(\xi))$. De todos los posibles controles se deberá seleccionar aquel que lleve las coordenadas z , fuera de la variedad, a cero y mantenga acotadas las trayectorias del sistema, *i.e.*, tal que (A4) sea satisfecha.

Las siguientes observaciones referentes a las suposiciones (A1)-(A4) del teorema 2.1 son dadas en forma ordenada.

1. En la mayoría de las aplicaciones del teorema 2.1 el sistema dinámico objetivo será definido *a priori*, por lo que la condición (A1) se satisface de manera automática.

2. Si el objetivo de control consiste en describir una trayectoria dada, luego el teorema 2.1 tiene que ser reformulado en términos del error de seguimiento y el sistema dinámico objetivo debería generar la trayectoria de referencia.

3. Dado el sistema dinámico objetivo (2.8), la ecuación (2.9) de la condición (A2) define una ecuación diferencial parcial en la función desconocida $\pi(\cdot)$, donde $c(\cdot)$ es un parámetro libre. En general, encontrar una solución para esta ecuación es una tarea difícil. A pesar

de esto, una adecuada selección de la dinámica objetivo siguiendo las consideraciones físicas y teóricas del sistema, permitirá simplificar esta tarea. En algunos casos es posible entrelazar los pasos de la dinámica objetivo (2.8) y la generación de la variedad (2.10) viendo la ecuación (2.9) como una ecuación algebraica relacionando $\alpha(\cdot)$ con $\pi(\cdot)$, y sus derivadas parciales, y seleccionando luego expresiones adecuadas para $\pi(\cdot)$ que aseguren las propiedades de estabilidad deseadas de la dinámica objetivo.

4. La suposición **(A3)** establece que la imagen del mapeo $\pi(\cdot)$ puede ser expresada como el conjunto de nivel cero de una función $\phi(\cdot)$ suave. En términos generales, esta es una condición sobre la invertibilidad del mapeo que se traduce en una restricción de rango sobre $\frac{\partial \pi}{\partial \xi}$. En el caso lineal, donde $\pi(\xi) = T\xi$ con alguna matriz $T \in \mathcal{R}^{n \times p}$ constante, se tiene $\phi(x) = T^+x$, donde $T^+T = 0$, y **(A3)** se mantiene si y solo si T es de rango pleno. En general, si $\pi : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^n$ es una inmersión inyectiva y propia² luego la imagen de $\pi(\cdot)$ es una subvariedad de \mathcal{R}^n . Por lo tanto **(A3)** requiere que tal subvariedad pueda ser descrita (globalmente) como el conjunto de nivel zero de la función $\phi(\cdot)$. Finalmente, note que si existe una partición de $x = \text{col}(x_1, x_2)$, con $x_1 \in \mathcal{R}^p$ y $x_2 \in \mathcal{R}^{n-p}$, y una correspondiente partición de $\pi(\xi) = \text{col}(\pi_1(\xi), \pi_2(\xi))$ tal que $\pi_1(\xi)$ es un difeomorfismo global, luego la función $\phi(x) = x_2 - \pi_2(\pi_1^{-1}(x_1))$ será tal que **(A3)** se sostiene.

5. En muchos casos de interés práctico, tener convergencia asintótica de $x(t)$ hacia x^* es suficiente para requerir que el sistema (2.11) posea un equilibrio uniformemente globalmente estable en $z = 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(x(t))(u(x(t), z(t)) - u(x(t), 0)) = 0, \quad (2.14)$$

i.e., no necesariamente se requiere alcanzar la variedad. Este hecho, el cual distingue el presente enfoque de otros, tal como modos deslizantes, es un instrumento para el desarrollo de la teoría de control adaptable y de realimentación a la salida.

6. En el teorema 2.1 una ley de control estabilizadora se obtiene comenzando por la selección de un sistema dinámico objetivo. Desde otra perspectiva: dado el mapeo $x = \pi(\xi)$, por lo tanto el mapeo $z = \phi(x)$, encuentre (de ser posible) una ley de control que haga la variedad $z = 0$ invariante y asintóticamente estable y un vector campo $\dot{\xi} = \alpha(\xi)$, con un equilibrio ξ^* globalmente asintóticamente estable tal que la ecuación (2.9) se mantenga. De conseguirse este objetivo luego el sistema (2.7) con salida $z = \phi(x)$ es (globalmente) de fase mínima y su dinámica cero, *i.e.*, la dinámica sobre la variedad \mathcal{V} de salida cero, están dadas por (2.8). En este sentido, el resultado del teorema 2.1 puede ser considerado como un dual de los métodos clásicos de estabilización basados en la construcción de salidas pasivas o de fase mínima.

La siguiente definición es usada a lo largo del documento para proveer declaraciones concisas.

Definición 2.1. [2] Un sistema descrito por las ecuaciones de la forma (2.7) con dinámica objetivo (2.8) se dice que es (localmente) I&I estabilizable si las suposiciones **(A1)**-**(A4)** del teorema 2.1 se sostienen (localmente).

²Una inmersión es un mapeo $\pi(\cdot) : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^n$, con $p < n$. Esta es inyectiva si $\text{rango}(\pi) = p$ y es propia si la imagen inversa de cualquier conjunto compacto es también compacto.

2.3.2. Sistemas con estructuras especiales

En esta sección se aborda el estudio de la aplicación de la metodología I&I en el control de un sistema singular perturbado y sistemas en la forma realimentada y prealimentada.

2.3.2.1. Sistema singular perturbado

Se inicia el estudio mediante un ejemplo académico, con la finalidad de comprender la perspectiva de la formulación I&I.

Considere el sistema bidimensional [2]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2^3 \\ \epsilon \dot{x}_2 &= x_2 + u\end{aligned}\quad (2.15)$$

con $x_1(0) \geq 0$ y dinámica objetivo

$$\dot{\xi} = -\xi^5 \quad (2.16)$$

donde $\xi \in \mathcal{R}$. Estableciendo $\pi_1(\xi) = \xi$, las ecuaciones (2.9) resultan,

$$\xi \pi_2(\xi)^3 = -\xi^5 \quad (2.17)$$

$$\pi_2(\xi) + c(\xi) = -\epsilon \frac{\partial \pi_2}{\partial \xi} \xi^5. \quad (2.18)$$

De (2.17) se obtiene $\pi_2(\xi) = -\xi^{4/3}$, la cual está definida para $\xi \geq 0$, mientras que el mapeo $c(\cdot)$ es definido por (2.18). La variedad $x = \pi(\xi)$ puede ser descrita implícitamente por $\phi(x) = x_2 - x_1^{4/3} = 0$ y la dinámica (2.11) fuera de la variedad está dada por

$$\epsilon \dot{z} = v(x, z) + x_2 + \frac{4}{3} \epsilon x_1^{4/3} x_2^3. \quad (2.19)$$

El diseño I&I se completa eligiendo $v(x, z) = -x_2 - \frac{4}{3} \epsilon x_1^{4/3} x_2^3 - z$, la cual conduce a la dinámica en lazo cerrado

$$\epsilon \dot{z} = -z,$$

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2^3, \quad (2.20)$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = -\frac{4}{3} \epsilon x_1^{4/3} x_2^3 - z.$$

De la primera ecuación en (2.20) es claro que el subsistema z tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en cero, por lo que para completar la prueba basta solo demostrar que todas las trayectorias del sistema (2.20) están acodadas. Para este fin, considere el cambio (parcial) de coordenadas $\eta = x_2 + x_1^{4/3}$ lo que conduce a

$$\epsilon \dot{z} = -z,$$

$$\dot{x}_1 = x_1 (\eta - x_1^{4/3})^3, \quad (2.21)$$

$$\epsilon \dot{\eta} = -z,$$

donde $z(t)$ y $\eta(t)$ están acotadas para todo t . El acotamiento de $x_1(t)$ se prueba observando que la dinámica de x_1 puede ser expresada en la forma

$$\dot{x}_1 = -x_1^5 + \rho(x_1, \eta),$$

para alguna función $\rho(\cdot)$ satisfaciendo $|\rho(x_1, \eta)| \leq k(\eta)|x_1|^4$ para alguna $k(\eta) > 0$ y $|x_1| > 1$. Finalmente, la ley de control resultante está dada por

$$u = v(x, \phi(x)) = -2x_2 - x_1^{4/3} \left(1 + \frac{4}{3} \epsilon x_2^3\right).$$

Como resultado, el sistema (2.15) es estabilizable vía I&I con dinámica objetivo (2.16) en su dominio de definición.

Un resultado global de estabilización puede obtenerse si en lugar de (2.16) se escoge la dinámica objetivo $\dot{\xi} = -|\xi|^3 \xi$. Luego, la solución (2.17)-(2.18) es $\pi_1(\xi) = \xi$ y $\pi_2(\xi) = -|\xi|$. Como resultado, la variedad toma la forma $\phi(x) = x_2 + |x_1| = 0$ y ésta puede hacerse globalmente atractiva manteniendo todas las trayectorias acotadas mediante la ley de control $u = -2x_2 - \epsilon|x_1|x_2^3 - |x_1|$.

2.3.2.2. Sistema en la forma realimentada

Considere el sistema descrito en la forma realimentada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{2.22}$$

con $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}$, $u \in \mathcal{R}$ y $f(0, 0) = 0$, donde el sistema

$$\dot{x}_1 = f(x_1, 0)$$

tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen. Una elección sensible para el sistema dinámico objetivo está dada por

$$\dot{\xi} = f(\xi, 0) \tag{2.23}$$

lo que implica que el mapeo $\pi(\cdot) = \text{col}(\pi_1(\cdot), \pi_2(\cdot))$ es tal que $x_1 = \pi_1(\xi) = \xi$.

La siguiente proposición resume la aplicación de la metodología I&I para la clase de sistemas en la forma realimentada.

Proposición 2.1. [2] Considere un sistema descrito por las ecuaciones (2.22) con $f(0, 0) = 0$ y suponga que el sistema $\dot{x}_1 = f(x_1, 0)$ tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en cero. Luego el sistema (2.22) es (globalmente) I&I estabilizable con dinámica objetivo (2.23).

Prueba 2.1. [2]. Para establecer la afirmación se requiere probar que las condiciones (A1)-(A4) del teorema 2.1 se mantienen. Para esto, note que la condición (A1) se satisface de forma trivial, mientras que los mapeos

$$\begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c(\pi) = 0, \quad \phi(x_1, x_2) = x_2,$$

son tales que las condiciones **(A2)**-**(A3)** se satisfacen.

Note ahora que la variable $z = x_2$ fuera de la variedad puede ser usada como una coordenada parcial, por lo que en lugar de verificar **(A4)** simplemente se necesita demostrar que es posible seleccionar u tal que las trayectorias del sistema en lazo cerrado se encuentran acotadas y $z = x_2$ converge a cero.

Para esto, sea $u = -K(x_1, x_2)x_2$, con $K(x_1, x_2) \geq k > 0$ para todo (x_1, x_2) y para alguna $k > 0$, y considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= -K(x_1, x_2)x_2.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Note que x_2 converge a cero. Para probar el acotamiento de x_1 , elija alguna $M > 0$ y sea $V(x_1)$ una función definida positiva y propia tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) < 0\tag{2.25}$$

para toda $\|x_1\| > M$. Note que tal función $V(x_1)$ existe, por la estabilidad global y asintótica del equilibrio del sistema $\dot{x}_1 = f(x_1, 0)$ en cero, pero $V(x_1)$ no es necesariamente una función de Lyapunov para $\dot{x}_1 = f(x_1, 0)$. Considerando ahora la función

$$W(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2\tag{2.26}$$

definida positiva y propia, y notando que para alguna función $F(x_1, x_2)$ y para alguna función suave $\gamma(x_1) > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \frac{\partial V}{\partial x_1} F(x_1, x_2)x_2 - K(x_1, x_2)x_2^2 \\ &\leq \frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \frac{1}{\gamma(x_1)} \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\|^2 + \gamma(x_1) \|F(x_1, x_2)\|^2 x_2^2 - K(x_1, x_2)x_2^2.\end{aligned}$$

Cabe resaltar que aunque en [2] no se detallan los pasos en el acotamiento de la función \dot{W} , en el presente estudio se lleva a cabo el procedimiento en cuestión con fines de comprobación.

Suponga que se puede separar la función $f(x_1, x_2)$ en dos términos, tal que uno de estos sea igual a la función $f(x_1, 0)$ cuando el estado x_2 es cero, i.e.,

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) + F(x_1, x_2)x_2.$$

La derivada \dot{W} de W a lo largo de las trayectorias del sistema (2.24) resulta

$$\dot{W} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \frac{\partial V}{\partial x_1} F(x_1, x_2)x_2 - K(x_1, x_2)x_2^2.$$

De la desigualdad de Young, la cual establece que

$$x^T y \leq \frac{\epsilon}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|y\|^2$$

se cumple para cualquier valor de $\epsilon > 0$, $x \in \mathcal{R}^n$ y $y \in \mathcal{R}^n$, seleccionando $x^I = \frac{\partial V}{\partial x_1}$ y $y = F(x_1, x_2)x_2$ se tiene que el término $\frac{\partial V}{\partial x_1} F(x_1, x_2)x_2$ puede acotarse superiormente como

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} F(x_1, x_2)x_2 \leq \frac{1}{\gamma(x_1)} \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\|^2 + \gamma(x_1) \|F(x_1, x_2)x_2\|^2.$$

Teniendo en cuenta que x_2 es un escalar, entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} F(x_1, x_2)x_2 \leq \frac{1}{\gamma(x_1)} \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\|^2 + \gamma(x_1) \|F(x_1, x_2)\|^2 x_2^2.$$

Seleccionando $\gamma(x_1)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \frac{1}{\gamma(x_1)} \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\|^2 < 0$$

para toda $\|x_1\| > M$ y seleccionando

$$K(x_1, x_2) > \gamma(x_1) \|F(x_1, x_2)\|^2$$

lo anterior conduce a cumplir la proposición.

Aunque el sistema (2.22) es estabilizable bajo el enfoque *backstepping*, la ley de control obtenida usando *backstepping* difiere de la ley de control sugerida por la proposición 2.1. La primera requiere del conocimiento de una función de Lyapunov para el sistema $\dot{x}_1 = f(x_1, 0)$ tal que en lazo cerrado la variedad $x_2 = 0$ no sea invariante, mientras que para esta última se requiere solo del conocimiento de una función $V(x_1)$ que satisfaga la ecuación (2.25) para una $\|x_1\|$ suficientemente grande y que haga la variedad $x_2 = 0$ invariante y atractiva de forma global.

Para ilustrar el resultado de la proposición 2.1 y compararlo con el control *backstepping* en cuestión, considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \lambda x_1^3 x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \tag{2.27}$$

La ley de control estabilizadora basada en *backstepping* resulta dada por

$$u = -\lambda x_1^4 - x_2,$$

en tanto que una aplicación directa del procedimiento descrito en la prueba de la proposición 2.1 muestra que la ley de control estabilizadora I&I resulta como

$$u = -(2 + x_1^8)x_2.$$

Esta última no requiere del conocimiento del parámetro λ , sin embargo, en general, ésta es más agresiva debido a la alta potencia en x_1 .

A pesar de que en [2] no se muestra a detalle el desarrollo en la obtención de la ley estabilizadora I&I utilizando la proposición 2.1, como exigencia del presente estudio se ilustra a continuación el procedimiento que conduce al resultado anterior.

Considere nuevamente el sistema (2.27). Para el sistema en cuestión, la función $f(x_1, x_2)$ queda definida de la siguiente manera

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) + F(x_1, x_2)x_2 = -x_1 + \lambda x_1^3 x_2,$$

de la cual se tiene

$$f(x_1, 0) = -x_1,$$

$$F(x_1, x_2) = \lambda x_1^3.$$

Luego, habrá de seleccionarse una $V(x_1)$ definida positiva y propia tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) < 0$$

se cumpla para toda $|x_1| \geq M$ con $M > 0$.

Eligiendo $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$ su derivada está dada por

$$\dot{V}(x_1) = x_1 \dot{x}_1,$$

la cual, evaluada a lo largo de las trayectorias de (2.27) resulta

$$\dot{V}(x_1) = x_1(-x_1 + \lambda x_1^3 x_2)$$

de donde se observa que

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) = -x_1^2 < 0$$

se cumple para todo $|x_1| > 0$.

Posteriormente, partiendo de la desigualdad

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \frac{1}{\gamma(x_1)} \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\|^2 < 0$$

y reemplazando términos se tiene

$$-x_1^2 + \frac{1}{\gamma(x_1)} |x_1|^2 < 0$$

lo que equivale a

$$-x_1^2 + \frac{1}{\gamma(x_1)} x_1^2 < 0.$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $\frac{1}{x_1^2}$ resulta

$$-1 + \frac{1}{\gamma(x_1)} < 0.$$

Atendiendo luego las propiedades para las desigualdades se tiene

$$\frac{1}{\gamma(x_1)} < 1,$$

lo que equivale a seleccionar

$$\gamma(x_1) > 1$$

donde la función $\gamma(x_1) = \frac{x_1^8 + 1}{\lambda^2 x_1^6}$ satisface la desigualdad anterior para cualquier valor de $|x_1| > 0$ con $\frac{1}{\lambda^2} \geq 1$. Por otra parte, habrá de seleccionarse una $K(x_1, x_2)$ tal que satisfaga la siguiente condición

$$K(x_1, x_2) > \gamma(x_1) |F(x_1, x_2)|^2.$$

Reemplazando términos se tiene

$$K(x_1, x_2) > \frac{(x^8 + 1)}{\lambda^2 x_1^6} |\lambda x_1^3|^2$$

lo que equivale a

$$K(x_1, x_2) > \frac{(x^8 + 1)}{\lambda^2 x_1^6} \lambda^2 x_1^5$$

de donde

$$K(x_1, x_2) > (x^8 + 1).$$

Para cumplir con lo anterior se elige $K(x_1, x_2) = x_1^8 + 2$, lo que finalmente conduce a la ley estabilizadora I&I

$$u = -(x_1^8 + 2)x_2.$$

Considere ahora el siguiente sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A(\theta)x_1 + F(x_1, x_2)x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \tag{2.28}$$

con $x_1 \in \mathcal{R}^n$ y $\theta \in \mathcal{R}^s$ un vector constante desconocido. Suponga que la matriz $A(\theta)$ es Hurwitz para toda θ . Luego el sistema es estabilizable I&I con dinámica objetivo $\dot{\xi} = A(\theta)\xi$. Una ley de control I&I estabilizable está dada por

$$u = -(1 + x_1^2) \|F(x_1, x_2)\|^2 x_2 - x_2,$$

la cual no requiere del conocimiento de una función de Lyapunov para el sistema $\dot{x}_1 = A(\theta)x_1$ o del conocimiento del parámetro θ .

Siguiendo la metodología de la proposición 2.1, $f(x_1, x_2)$ queda definida de la siguiente manera

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, 0) + F(x_1, x_2)x_2 = A(\theta)x_1 + F(x_1, x_2)x_2$$

donde

$$f(x_1, 0) = A(\theta)x_1.$$

Proponiendo $V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$, su derivada \dot{V} con respecto al tiempo resulta

$$\dot{V}(x_1) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1.$$

Evaluando \dot{V} a lo largo de las trayectorias del sistema (2.28) se tiene

$$\dot{V}(x_1) = x_1^T A(\theta)x_1 + x_1^T F(x_1, x_2)x_2$$

de donde

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) = x_1^T A(\theta)x_1 < 0$$

debido a que la matriz $A(\theta)$ es Hurwitz para toda θ . En la búsqueda de alguna función $\gamma(\cdot)$ suave que cumpla con la desigualdad

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1, 0) + \frac{1}{\gamma(x_1)} \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\|^2 < 0,$$

equivalente a

$$x_1^T A(\theta)x_1 + \frac{1}{\gamma(x_1)} x_1^T x_1 < 0,$$

se tiene que para una $\gamma(x_1) = x_1^T x_1 + 1 = x_1^2 + 1$, con $\|x_1\| > M$, la desigualdad anterior es satisfecha. Luego, de la desigualdad

$$K(x_1, x_1) > \gamma(x_1) \|F(x_1, x_2)\|^2,$$

equivalente a

$$K(x_1, x_1) > (x_1^2 + 1) \|F(x_1, x_2)\|^2,$$

seleccionando $K(x_1, x_2) = (x_1^2 + 1) \|F(x_1, x_2)\|^2 + 1$ se llega a la ley de control realimentada

$$u = -[(x_1^2 + 1) \|F(x_1, x_2)\|^2 + 1]x_2$$

la cual, desarrollando términos equivale a

$$u = -(x_1^2 + 1) \|F(x_1, x_2)\|^2 x_2 - x_2.$$

2.3.2.3. Sistema en forma prealimentada

Considere la clase de sistemas en forma prealimentada descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h(x_2), \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + g(x_2)u, \end{aligned} \tag{2.29}$$

con $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}$, $h(0) = 0$ y $f(0) = 0$, donde se asume que el equilibrio del sistema $\dot{x}_2 = f(x_2)$ es globalmente asintóticamente estable. En vista de esta suposición, una elección natural para el sistema dinámico objetivo es

$$\dot{\xi} = f(\xi), \tag{2.30}$$

lo que implica que el mapeo $\pi(\cdot) = \text{col}(\pi_1(\cdot), \pi_2(\cdot))$ es tal que $x_2 = \pi_2(\xi) = \xi$.

Proposición 2.2. [2] Considere el sistema descrito por las ecuaciones de la forma (2.29) y suponga que el equilibrio del sistema $\dot{x}_2 = f(x_2)$ es globalmente asintóticamente estable. Asuma también que existe una función $M(x_2)$ suave tal que, para toda x_2 , $L_f M(x_2) = h(x_2)$, el conjunto $\mathcal{S} = \{x_2 \in \mathcal{R}^n | L_f M(x_2) = 0\}$ está compuesto por puntos aislados y $0 \notin \mathcal{S}$. Luego el sistema (2.29) es globalmente I&I estabilizable con dinámica objetivo (2.30).

A pesar de que en [2] no se muestra a detalle el desarrollo de la prueba para la proposición anterior, como exigencia del presente estudio la prueba es ilustrada con detenimiento a continuación.

Prueba 2.2. Vea [2]. Para que la proposición 2.2 sea en efecto válida, es necesario demostrar que las condiciones (A1)-(A4) del teorema 2.1 se cumplen. Para esto, debido a las propiedades del sistema $\dot{x}_2 = f(x_2)$, una elección natural para el sistema dinámico objetivo es

$$\dot{\xi} = f(\xi),$$

con lo que la condición (A1) es satisfecha.

Desarrollando la condición (A2), utilizando el mapeo $x = [\pi_1(\xi), \pi_2(\xi)]^T$ y las funciones descritas en el sistema (2.29), se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_1(\xi) &= h(\pi_2(\xi)) \\ \dot{\pi}_2(\xi) &= f(\pi_2(\xi)) + g(\pi_2(\xi))c(\xi)\end{aligned}$$

de donde seleccionado $\tau_2(\xi) = \xi$, debido a las propiedades de estabilidad del sistema dinámico objetivo (2.30) conduce a

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_1(\xi) &= h(\xi), \\ \dot{\xi} &= f(\xi) + g(\xi)c(\xi).\end{aligned}$$

Sustituyendo algunos términos se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1(\xi)}{\partial \xi} f(\xi) &= h(\xi), \\ f(\xi) &= f(\xi) + g(\xi)c(\xi).\end{aligned}$$

Utilizando la notación de la *Derivada de Lie* para las derivadas y sustituyendo $\pi_1(\cdot) = M(\cdot)$ se tiene

$$\begin{aligned}L_f M(\xi) &= h(\xi), \\ f(\xi) &= f(\xi) + g(\xi)c(\xi),\end{aligned}$$

de donde se observa de la primera ecuación una de las condiciones descritas en la proposición 2.2 y de la segunda ecuación se observa que la condición (A2) se cumple solo si la función $c(\xi) = 0$, con lo que el mapeo $\pi(\cdot)$ queda finalmente definido como

$$\begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\xi) \\ \xi \end{bmatrix}.$$

La variedad implícita que describe la condición **(A3)** es obtenida de la siguiente igualdad

$$\phi(x) = x_1 - \pi_1(\pi_2^{-1}(x_2)) = 0$$

para la cual, al sustituir los valores del mapeo $\pi(\cdot)$ puede reescribirse como

$$\phi(x) = x_1 - M(x_2) = 0.$$

Definiendo ahora

$$z = \phi(x) = x_1 - M(x_2)$$

la dinámica fuera de la variedad queda descrita como

$$\dot{z} = \dot{x}_1 - \dot{M}(x_2)$$

o equivalentemente

$$\dot{z} = \dot{x}_1 - \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} \dot{x}_2,$$

donde la derivada evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema (2.29) está dada por

$$\dot{z} = h(x_1) - \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} [f(x_2) + g(x_2)u].$$

Desarrollando el lado derecho de esta última ecuación, puede reescribirse como

$$\dot{z} = h(x_1) - \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} f(x_2) - \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} g(x_2)u$$

o equivalentemente, utilizando la notación de la *Derivada de Lie*, como

$$\dot{z} = h(x_1) - L_f M(x_2) - L_g M(x_2)u.$$

De la condición establecida en **(A2)**, donde $L_f M(x_2) = h(x_1)$, la dinámica fuera de la variedad es descrita como

$$\dot{z} = -L_g M(x_2)u.$$

Para completar la prueba, resta verificar la condición **(A4)** o alternativamente la condición más débil (2.14). Para este fin, sea

$$u = \epsilon \frac{1}{1 + \|g(x_2)\|} \cdot \frac{L_g M(x_2)}{1 + \|L_g M(x_2)\|} \cdot \frac{z}{1 + \|z\|},$$

con $\epsilon = \epsilon(x_2) > 0$ y considere el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\epsilon \frac{1}{1 + \|g(x_2)\|} \cdot \frac{(L_g M(x_2))^2}{1 + \|L_g M(x_2)\|} \cdot \frac{z}{1 + \|z\|}, \\ \dot{x}_1 &= h(x_2), \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + \epsilon \frac{g(x_2)}{1 + \|g(x_2)\|} \cdot \frac{L_g M(x_2)}{1 + \|L_g M(x_2)\|} \cdot \frac{z}{1 + \|z\|}. \end{aligned}$$

Note ahora de la primer ecuación que z está acotada debido a que el término

$$\frac{1}{1 + \|g(x_2)\|} \cdot \frac{(L_g M(x_2))^2}{1 + \|L_g M(x_2)\|}$$

es siempre positivo, y en tanto que ϵ sea lo suficientemente pequeño también x_2 estará acotada. Además, x_2 converge a cero debido a que z tiende a cero, ya que cuando esto sucede el término $\epsilon \frac{g(x_2)}{1 + \|g(x_2)\|} \cdot \frac{L_g M(x_2)}{1 + \|L_g M(x_2)\|} \cdot \frac{z}{1 + \|z\|} = 0$, lo que permite que la dinámica de x_2 sea gobernada exclusivamente por la función $f(\cdot)$, y debido a las propiedades de estabilidad de este último sistema, se asegura que las trayectorias de x_2 tiendan a cero. Note además que, si ϵ es lo suficientemente pequeño, z convergerá exponencialmente a cero. Como resultado, $\eta = x_1 - M(x_2)$ está acotado por lo que x_1 está también acotada para todo t , lo que garantiza la demostración.

Enseguida se repasan un par de problemas tomados de [2] con el fin de asimilar la proposición 2.2. Cabe destacar que aunque para estos no se presenta un desarrollo detallado para su solución en la obra en cuestión, por la exigencia del presente estudio nos dimos a la tarea de verificar los resultados con mayor detenimiento y cuyo desarrollo se exhibe a detalle a continuación.

Considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_{21}^3, \\ \dot{x}_{21} &= x_{22}^3, \\ \dot{x}_{22} &= -x_{21}^3 - x_{22}^3 + u. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Por analogía con el sistema (2.29) se observa que

$$\begin{aligned} h(x_2) &= x_{21}^3, \\ f(x_2) &= \begin{bmatrix} x_{22}^3 \\ -x_{21}^3 - x_{22}^3 \end{bmatrix}, \\ g(x_2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como primer paso en la aplicación de la proposición 2.2, es necesario demostrar que el sistema

$$\dot{x}_2 = f(x_2)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{x}_{21} &= x_{22}^3 \\ \dot{x}_{22} &= -x_{21}^3 - x_{22}^3 \end{aligned} \tag{2.32}$$

tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable. Con este fin, considere la función

$$V(x_2) = \frac{1}{4}x_{21}^4 + \frac{1}{4}x_{22}^4$$

definida positiva y propia, *i.e.*, $V(x_2) > 0$ para toda $x_2 \neq 0$ y $V(0) = 0$, y radialmente desacotada. La derivada $\dot{V}(x_2)$ de $V(x_2)$ está dada por

$$\dot{V}(x_2) = x_{21}^3 \dot{x}_{21} + x_{22}^3 \dot{x}_{22}$$

la cual, evaluada a lo largo de las soluciones del sistema resulta como

$$\dot{V}(x_2) = x_{21}^3 x_{22}^3 + x_{22}^3 (-x_{21}^3 - x_{22}^3).$$

Desarrollando el término de la derecha se tiene

$$\dot{V}(x_2) = x_{21}^3 x_{22}^3 - x_{21}^3 x_{22}^3 - x_{22}^6$$

lo que conduce a

$$\dot{V}(x_2) = -x_{22}^6$$

la cual es definida negativa para toda $x_2 \neq 0$ con $\dot{V}(0) = 0$, lo que demuestra la estabilidad asintótica global del sistema (2.32).

Como lo establece la proposición 2.2, ahora es necesario encontrar una función $M(x_2)$ suave tal que la siguiente relación se cumpla

$$L_f M(x_2) = h(x_2)$$

1 o equivalentemente

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} f(x_2) = h(x_2).$$

Sustituyendo los valores de las funciones del sistema (2.31) se tiene

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} \begin{bmatrix} x_{22}^3 \\ -x_{21}^3 - x_{22}^3 \end{bmatrix} = x_{21}^3;$$

desarrollando luego,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_{21}} & \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_{22}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_{22}^3 \\ -x_{21}^3 - x_{22}^3 \end{bmatrix} = x_{21}^3.$$

Realizando la multiplicación vectorial se obtiene

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_{21}} x_{22}^3 + \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_{22}} (-x_{21}^3 - x_{22}^3) = x_{21}^3.$$

Seleccionando $M(x_2) = -x_{21} - x_{22}$ conduce a

$$\frac{\partial[-x_{21} - x_{22}]}{\partial x_{21}} x_{22}^3 + \frac{\partial[-x_{21} - x_{22}]}{\partial x_{22}} (-x_{21}^3 - x_{22}^3) = x_{21}^3;$$

evaluando las derivadas parciales resulta

$$-x_{22}^3 - (-x_{21}^3 - x_{22}^3) = x_{21}^3.$$

Desarrollando la ecuación anterior se tiene

$$-x_{22}^3 + x_{21}^3 + x_{22}^3 = x_{21}^3$$

lo que conduce a

$$x_{21}^3 = x_{21}^3$$

satisfaciendo la relación $L_f M(x_2) = h(x_2)$ y donde la variedad queda descrita implícitamente como

$$\dot{z} = \phi(x) = x_1 - M(x_2)$$

o en forma explícita

$$z = \phi(x) = x_1 - (-x_{21} - x_{22})$$

equivalente a

$$z = \phi(x) = x_1 + x_{21} + x_{22}.$$

La dinámica fuera de la variedad está dada por

$$\dot{z} = -L_g M(x_2)u$$

o equivalentemente

$$\dot{z} = -\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} g(x_2)u.$$

Desarrollando la expresión anterior,

$$\dot{z} = -\left[\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_{21}} \quad \frac{\partial M(x_2)}{\partial x_{22}} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

y sustituyendo $M(x_2)$ se obtiene

$$\dot{z} = -\left[\frac{\partial(-x_{21}-x_{22})}{\partial x_{21}} \quad \frac{\partial(-x_{21}-x_{22})}{\partial x_{22}} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Evaluando las derivadas parciales resulta

$$\dot{z} = -\left[-1 \quad -1 \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

donde finalmente

$$\dot{z} = u.$$

Seleccionando $u = -z$ conduce a que el sistema anterior posea un equilibrio globalmente asintóticamente estable en cero. El sistema (2.31) satisface todas las suposiciones de la proposición 2.2 con $M(x_2) = M(x_{21}, x_{22}) = -x_{21} - x_{22}$. Como resultado, su equilibrio cero es I&I estabilizable por la ley de control $u = -z$ con $z = x_1 + x_{21} + x_{22}$.

Considere ahora el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + (1 - x_2^2)u.\end{aligned}\tag{2.33}$$

El primer paso a seguir de acuerdo a lo establecido en la proposición 2.2, consiste en demostrar que el sistema dinámico

$$\dot{x}_2 = f(x_2)$$

o equivalentemente

$$\dot{x}_2 = -x_2^3,\tag{2.34}$$

posea un equilibrio globalmente asintóticamente estable. Para esto, es fácil notar que seleccionando

$$V(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2,$$

la cual es una función definida positiva y propia, su derivada evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema (2.34), i.e.,

$$\dot{V}(x_2) = -x_2^4,$$

es una función definida negativa, lo que garantiza la estabilidad asintótica y global del subsistema (2.34). El siguiente paso en el diseño del controlador para el sistema (2.33) consiste en encontrar una función $M(x_2)$ suave tal que

$$L_f M(x_2) = h(x_2)$$

se satisfaga. Para esto, note que

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} f(x_2) = h(x_2)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} (-x_2^3) = x_2^3,$$

donde se observa que seleccionando $M(x_2) = -x_2$ se cumple que

$$\frac{\partial[-x_2]}{\partial x_2} (-x_2^3) = x_2^3$$

resultando en

$$-1(-x_2^3) = x_2^3$$

lo que equivale a

$$x_2^3 = x_2^3.$$

Observe ahora que el conjunto $\mathcal{S} = \{x_2 \in \mathcal{R}^n \mid L_g M(x_2) = 0\}$ queda definido por

$$\mathcal{S} = \{x_2 = 1, x_2 = -1\}$$

y la dinámica fuera de la variedad como

$$\dot{z} = -L_g M(x_2)u$$

equivalente a

$$\dot{z} = -\frac{\partial M(x_2)}{\partial x_2} g(x_2)u.$$

Reemplazando los términos $M(x_2)$ y $g(x_2)$

$$\dot{z} = -\frac{\partial[-x_2]}{\partial x_2} (1 - x_2^2)u$$

y desarrollando se tiene

$$\dot{z} = -(-1)(1 - x_2^2)u$$

lo que conduce a

$$\dot{z} = (1 - x_2^2)u.$$

Ahora deberá seleccionarse una entrada de control u tal que la solución $z(t)$ del sistema tenga un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen, para esto, eligiendo

$$u = -\frac{1 - x_2^2}{(1 + x_2^4)} z$$

es la entrada que produce que la coordenada z describa el siguiente comportamiento

$$\dot{z} = -\frac{(1 - x_2^2)^2}{(1 + x_2^4)} z,$$

de donde se observa la estabilidad del sistema debido a que el término $\frac{(1 - x_2^2)^2}{(1 + x_2^4)} > 0$. Así, se concluye que el sistema dinámico (2.33) con dinámica objetivo (2.34) es I&I estabilizable por la ley de control

$$u = -\frac{1 - x_2^2}{(1 + x_2^4)}(x_1 + x_2).$$

2.3.3. Aplicaciones físicas

2.3.3.1. Levitador magnético

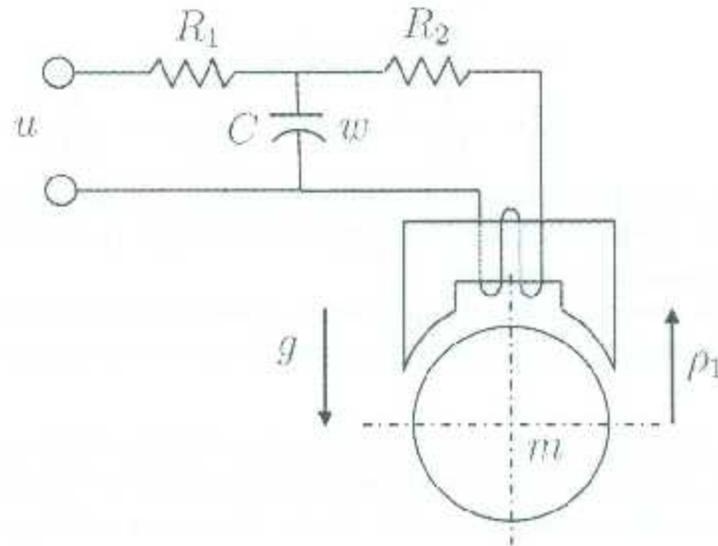


Figura 2.3: Diagrama del sistema de levitación magnética

Considere un sistema de levitación magnética que consiste en una bola de acero dentro de un campo magnético vertical creado por un electromagneto (vea figura 2.3) y cuyo modelo, con dominio de validez $-\infty < \rho_1 < 1$, se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{1}{m} \rho_2 \\ \dot{\rho}_2 &= \frac{1}{2k} \rho_3^2 - mg \\ \dot{\rho}_3 &= -\frac{1}{k} R_2 (1 - \rho_1) \rho_3 + w \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde el vector de estado ρ consiste en la posición de la bola ρ_1 , su momento ρ_2 y el flujo en la inductancia ρ_3 , w es la tensión aplicada al electromagneto, m es la masa de la bola, g es la aceleración de la gravedad, R_2 es la resistencia del cableado y k es una constante positiva que depende del número de vueltas del bobinado.

En aplicaciones de baja potencia es común rechazar la cinámica del actuador, por lo que se asume que w es la variable manipulada. En aplicaciones de media a alta potencia la tensión w es generada utilizando un rectificador que incluye una capacitancia. La dinámica de este actuador puede ser descrita por el circuito RC mostrado en la Figura 2.3, donde la tensión de control es u mientras que R_1 y C modelan la resistencia y capacitancia parásitas, respectivamente. El modelo del sistema incluyendo la dinámica del actuador

está dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{m}\dot{x}_2, \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{2k}x_3^2 - mg \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{1}{k}R_2(1-x_1)x_3 + x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{1}{Ck}(1-x_1)x_3 - \frac{1}{R_1C}x_4 + \frac{1}{R_1C}u
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

donde $x_1 = \rho_1$, $x_2 = \rho_2$, $x_3 = \rho_3$ y $x_4 = w$ representa la tensión a través del capacitor. Note que (2.35) es el modelo reducido de (2.36) al considerar la constante de tiempo parásita R_1C como un parámetro pequeño.

Considere el sistema (2.36) y el problema de estabilizar (localmente) la bola alrededor de una posición dada. Una solución a este problema es expresada en la siguiente proposición.

Proposición 2.3. [2] El modelo de orden completo (2.36) es I&I estabilizable con dinámica objetivo (2.35), donde $w = w(\rho)$ es alguna realimentación de estados estabilizadora tal que (2.35) en lazo cerrado con $w(\rho(t)) + c(t)$, donde $c(t)$ es una señal acotada, tiene trayectorias acotadas.

Prueba 2.3. Vea [2]. Como (A1) se satisface de forma automática al seleccionar (2.35), únicamente verificaremos las condiciones (A2)-(A4) del teorema 2.1. Primero, una solución de la ecuación (2.9) está dada por el mapeo $\pi(\rho) = \text{col}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, w(\rho))$. Esta solución puede ser obtenida fijando $\pi_1(\rho) = \rho_1$ y $\pi_3(\rho) = \rho_3$, la cual captura el objetivo de control.

Verificando la condición (A2) se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_1 &= \frac{1}{m}\pi_2(\rho), \\
 \dot{\rho}_2(\rho) &= \frac{1}{2k}\rho_3^2 - mg, \\
 \dot{\rho}_3 &= -\frac{1}{k}R_2(1-\rho_1)\rho_3 + \pi_4(\rho), \\
 \dot{\rho}_4(\rho) &= -\frac{1}{Ck}(1-\rho_1)\rho_3 - \frac{1}{R_1C}\pi_4(\rho) + \frac{1}{R_1C}c(\pi(\rho)).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de la dinámica objetivo $\dot{\rho} = \alpha(\rho)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m}\rho_2 &= \frac{1}{m}\pi_2(\rho), \\
 \dot{\rho}_2 &= \frac{1}{2k}\rho_3^2 - mg, \\
 -\frac{1}{k}R_2(1-\rho_1)\rho_3 + w &= -\frac{1}{k}R_2(1-\rho_1)\rho_3 + \pi_4(\rho), \\
 \dot{w} &= -\frac{1}{Ck}(1-\rho_1)\rho_3 - \frac{1}{R_1C}w + \frac{1}{R_1C}c(\pi(\rho)).
 \end{aligned}$$

Por analogía, de la primera ecuación puede apreciarse que $\pi_2(\rho) = \rho_2$. De la tercera ecuación se tiene $\pi_4(\rho) = w$.

Luego el mapeo completo de $\pi(\cdot)$ queda definido como

$$x = \pi(\rho) = \begin{bmatrix} \pi_1(\rho) \\ \pi_2(\rho) \\ \pi_3(\rho) \\ \pi_4(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ w(\rho) \end{bmatrix}.$$

La variedad $x = \pi(\rho)$ parametrizada puede ser implícitamente definida como $\phi(x) = x_4 - w(x_1, x_2, x_3) = 0$, lo que satisface la condición **(A3)**. Esta variedad es obtenida mediante la partición de los estados definida en el resultado principal de estabilización como sigue

$$x = \begin{bmatrix} \chi_1 \in \mathcal{R}^p \\ \chi_2 \in \mathcal{R}^{n-p} \end{bmatrix},$$

donde n es la dimensión del sistema a controlar y p es el orden del sistema dinámico objetivo, en nuestro caso $n = 4$ y $p = 3$. Podemos definir la variedad mediante la siguiente fórmula

$$\phi(x) = \chi_2 - \zeta_2(\zeta_1^{-1}(\chi_1))$$

donde, para nuestro caso,

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y $\chi_2 = x_4$ con

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} \pi_1(\cdot) \\ \pi_2(\cdot) \\ \pi_3(\cdot) \end{bmatrix}$$

y

$$\zeta_2 = \pi_4(\cdot)$$

por lo que nuestra variedad resulta definida como

$$\phi(x) = x_4 - w(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Finalmente, resta elegir una función $v(x, z)$ tal que mantenga acotadas las soluciones y establezca asintóticamente el equilibrio de la dinámica fuera de la variedad (2.11). Para este fin, se define

$$z = \phi(x).$$

La dinámica fuera de la variedad es obtenida derivando con respecto al tiempo esta última ecuación, resultando como

$$\dot{z} = \dot{\phi}(x)$$

lo que equivale a

$$\dot{z} = \dot{x}_4 - \dot{w}(x_1, x_2, x_3)$$

de donde

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{Ck}(1-x_1)x_3 - \frac{1}{R_1C}(x_4 - v(x, z))$$

por lo que para este problema la dinámica fuera de la variedad está dada como

$$\dot{z} = -\frac{1}{Ck}(1-x_1)x_3 - \frac{1}{R_1C}(x_4 - v(x, z)) - \dot{w}, \quad (2.37)$$

donde \dot{w} es evaluada sobre la variedad, por lo que es calculable para la dinámica de orden completo (2.36). Una selección simple y obvia está dada por

$$v(x, z) = x_4 - z + R_1C\dot{w} + \frac{R_1}{k}(1-x_1)x_3,$$

la cual conduce al sistema

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\frac{1}{R_1C}z, \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{m}x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2k}x_3^2 - mg \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R_2}{k}(1-x_1)x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{R_1C}z + \dot{w}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para completar la prueba de la proposición, resta probar que para una $w(\cdot)$ dada, las soluciones de (2.38) están acotadas. Para este fin, note que en las coordenadas (z, x_1, x_2, x_3, η) , con $\eta = x_4 - w(x_1, x_2, x_3)$, el sistema es descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\frac{1}{R_1C}z, \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{m}x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2k}x_3^2 - mg \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R_2}{k}(1-x_1)x_3 + w(x_1, x_2, x_3) + \dot{\eta}, \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{R_1C}z, \end{aligned}$$

de lo cual se concluye que z converge exponencialmente a cero, por lo que η está acotada. La prueba se completa invocando la supuesta propiedad de robustez con respecto a perturbaciones de entrada acotadas. Finalmente, la ley de control estabilizadora vía I&I está dada por

$$u = w(x_1, x_2, x_3) + R_1C\dot{w} + \frac{R_1}{k}(1-x_1)x_3. \quad (2.39)$$

Tabla 2.1: Parámetros utilizados para la simulación del sistema (2.36) con la ley de control dada en (2.39).

Parámetro	Valor
m	0.0844 Kg
k	6.4042×10^{-5}
R_1	1 ohm
R_2	2.25 ohms
C	$10 \times 10^{-6} F$
c	0.005
g	$9.81 \frac{m}{s^2}$
k_p	200.7
α	33.4

Los resultados en simulación para el sistema de levitación con la ley de control I&I (2.39) son exhibidos en las figuras (2.4)-(2.6), donde se ha utilizado una ley de control $w(\cdot)$ estabilizadora por interconexión y asignación de amortiguamiento (IDA) para el sistema dinámico objetivo descrito en [25] como

$$w(x_1, x_2, x_3) = \frac{R_2}{k}(c - x_1)x_3 - k_p\left(\frac{1}{\alpha}\tilde{x}_1 + \dot{x}_3\right) - \frac{\alpha}{m}x_2 - \frac{R}{\alpha}\left(\frac{1}{2k}x_3^2 - mg\right)$$

donde $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{1*}$ y $\tilde{x}_3 = x_3 - x_{3*}$, con x_{1*} y x_{3*} la posición deseada y flujo magnético deseado, respectivamente. Los parámetros del sistema y del controlador utilizados en simulación son mostrados en la tabla 2.1.

La simulación consiste en llevar la bola de su posición de reposo en $x_1(0) = 0$ a una posición de $2 \cdot 10^{-3}$ mts durante cuatro segundos, luego a $3 \cdot 10^{-3}$ mts durante cinco segundos y finalmente regresar a $2 \cdot 10^{-3}$ mts durante cuatro segundos. Las figuras 2.4-2.6 muestran los resultados obtenidos en simulación.

La figura 2.4 muestra el desplazamiento de la bola de acero bajo el efecto del campo magnético generado por el actuador (inductancia). En ésta se observa como la bola parte de

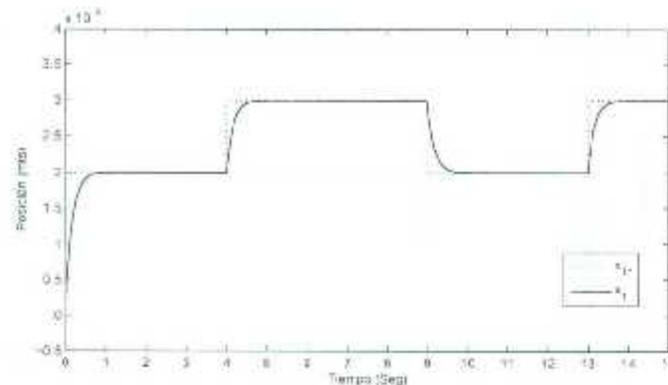


Figura 2.4: Desplazamiento x_1 vs x_{1*} .

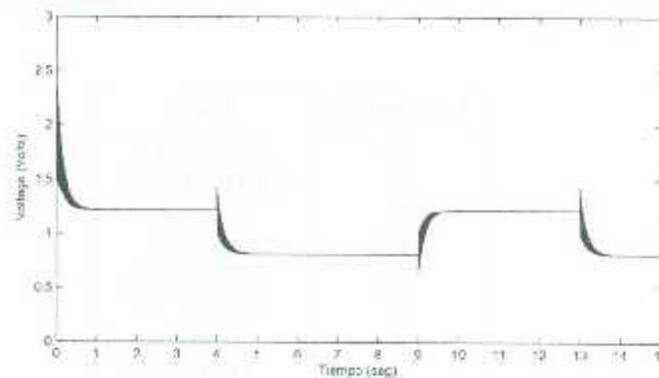


Figura 2.5: Entrada de control

la posición de reposo $x(0) = 0$ y de forma suave se eleva a la posición deseada $x_{1*} = 2 \cdot 10^{-3}$ mts. Después de transcurridos los primeros cuatro segundos, la señal de referencia para la posición deseada es establecida en $x_{1*} = 3 \cdot 10^{-3}$ mts y la cual es alcanzada por la bola de forma suave. Transcurridos los cinco segundos, la posición de referencia deseada es nuevamente establecida en $x_{1*} = 2 \cdot 10^{-3}$ mts, la cual es alcanzada por la bola. Transcurridos cuatro segundos, la señal de referencia se vuelve a establecer a $x_{1*} = 3 \cdot 10^{-3}$ mts y la bola, sin problemas, vuelve a seguir la referencia deseada hasta dar por terminada la simulación al término de quince segundos. En la figura 2.5 se ilustra la tensión aplicada a la inductancia, donde se observa que la tensión aumenta y disminuye según se cambia la referencia para la posición deseada para la bola. En la figura 2.6 se ilustra el error de posición de la bola, de la cual se observa que el error en estado estacionario es prácticamente cero y los picos máximos de error fluctúan entre $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ mts según cambia la señal de referencia.

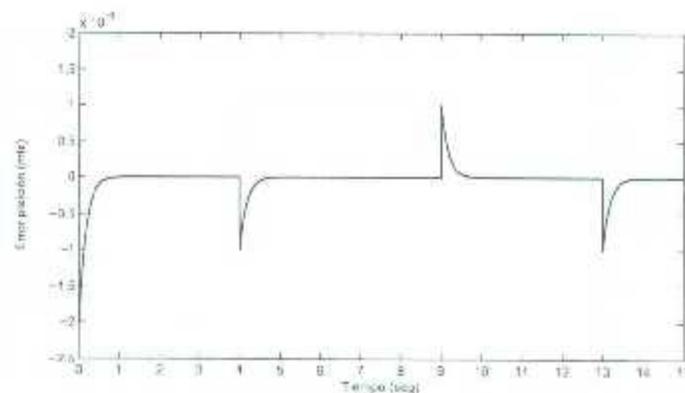


Figura 2.6: Error de posición

2.3.3.2. Robot de articulaciones flexibles

Considere el modelo de un robot con articulaciones flexibles de n grados de libertad (n -DOF)

$$\begin{aligned} D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K(q - \theta) &= 0, \\ J\ddot{\theta} + K(\theta - q) &= u, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $q \in \mathcal{R}^n$ y $\theta \in \mathcal{R}^n$ son los ángulos del eslabón y del eje del motor respectivamente, $D(q) = D(q)^T > 0$ es la matriz de inercias del brazo rígido, J es la matriz de inercias diagonal constante de los actuadores, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de fuerzas gravitacionales del brazo rígido, $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n) > 0$ es la matriz de rigidez en las articulaciones y u es el vector de dimensión n de pares aplicados al eje del motor. La representación del modelo en espacio de estados está dada como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -D^{-1}(x_1)[C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) + K(x_1 - x_3)], \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -J^{-1}(K(x_3 - x_1) - u), \end{aligned} \quad (2.41)$$

con $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$. Descuidando los modos flexibles del robot, resulta luego el modelo de orden reducido

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -D(\xi_1)^{-1}(C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) - w(\xi_1, \xi_2)), \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $w(\cdot)$ es el vector de pares aplicados a los eslabones y definido como una función de ξ_1 y ξ_2 . Note que (2.41), con salida $y = x_3 - x_1 - K^{-1}w(x_1, x_2)$, tiene un vector de grado relativo $(r_1, \dots, r_n) = (2, \dots, 2)$ y la dinámica cero está dada por la dinámica objetivo (2.42).

Considere ahora el problema de seguimiento global para el robot de articulaciones flexibles de n -DOF. A continuación se presenta un procedimiento para robustificar algún controlador de seguimiento global por realimentación de estados diseñado para el robot rígido.

Proposición 2.4. [2]. El modelo (2.41) del robot con articulaciones flexibles es I&I estabilizable con dinámica objetivo (2.42), donde $w = w(\xi, t)$ es alguna realimentación de estados variable en el tiempo que asegure que las soluciones $\xi_1(t)$ de (2.42) sigan globalmente cualquier trayectoria $\xi_1^*(t)$ acotada y cuatro veces diferenciable con la propiedad adicional de que en lazo cerrado con $w(\xi, t) + c(t)$, donde $c(t)$ es una señal acotada, las trayectorias permanezcan acotadas.

Prueba 2.4. [2]. Dado que el objetivo de control consiste en seguir una trayectoria de referencia, (A1) es reemplazada por una condición sobre la trayectoria del sistema dinámico objetivo (2.42). Por lo tanto, para establecer la afirmación se deberá verificar que las condiciones (A2)-(A4) del teorema 2.1 sean satisfechas. Una solución para las ecuaciones (2.9) está dada por el mapeo

$$\pi(\xi, t) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_1 + K^{-1}w(\xi, t) \\ \pi_4(\xi, t) \end{bmatrix}$$

donde $\pi_4(\xi, t) = \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi} \dot{\xi}$, con una $\dot{\xi}$ como se definió en (2.42). Esta solución sigue inmediatamente considerando (2.41) y fijando $\pi_1(\xi) = \xi_1$, como se requiere por el objetivo control. La definición anterior del mapeo $\pi(\xi)$ es obtenida aplicando la condición de inmersión donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \pi(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \pi_2(\xi) \\ \pi_3(\xi) \\ \pi_4(\xi) \end{bmatrix}.$$

Desarrollando la condición de inmersión para nuestro sistema se tiene

$$\dot{\xi}_1 = \pi_2(\xi) \quad (2.43)$$

$$\dot{\pi}_2(\xi) = -D^{-1}(\xi_1)(C(\xi_1, \pi_2(\xi))\pi_2(\xi) + G(\xi_1) + K(\xi_1 - \pi_3(\xi))), \quad (2.44)$$

$$\dot{\pi}_3(\xi) = \pi_4(\xi) \quad (2.45)$$

$$\dot{\pi}_4(\xi) = -J^{-1}(K(\pi_3(\xi) - \xi_1) - u). \quad (2.46)$$

De la ecuación (2.43) se obtiene el mapeo $\pi_2(\xi)$, debido a que se conoce el valor de $\dot{\xi}_1$ definido en el sistema dinámico objetivo como

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$

i.e.,

$$\pi_2(\xi) = \xi_2.$$

El mapeo $\pi_3(\xi)$ se deduce de la ecuación (2.44) al considerar que $\dot{\pi}_2(\xi) = \xi_2$ i.e.,

$$\dot{\xi}_2 = -D^{-1}(\xi_1)(C(\xi_1, \pi_2)\pi_2 + G(\xi_1) - K(\xi_1 - \pi_3(\xi)))$$

luego, del modelo de orden reducido (2.42) para $\dot{\xi}_2$ se tiene

$$-D^{-1}(\xi_1)(C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) - w(\xi, t)) = -D^{-1}(\xi_1)(C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) + K(\xi_1 - \pi_3(\xi)))$$

del cual, al multiplicar por la izquierda ambos lados por $-D(\xi_1)$ resulta

$$C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) - w(\xi, t) = C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) + K(\xi_1 - \pi_3(\xi)).$$

Despejando $w(\xi, t)$, se tiene

$$-w(\xi, t) = C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) + K(\xi_1 - \pi_3(\xi)) - C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 - G(\xi_1)$$

y de la propiedad del inverso aditivo se llega a

$$-w(\xi, t) = K(\xi_1 - \pi_3(\xi)).$$

Multiplicando luego por la izquierda ambos lados de la identidad por K^{-1} resulta

$$-K^{-1}w(\xi, t) = \xi_1 - \pi_3(\xi).$$

De lo anterior se deduce:

$$\pi_3(\xi) = \xi_1 + K^{-1}w(\xi, t).$$

Luego, $\pi_4(\xi)$ es obtenida directamente de la ecuación (2.45) como

$$\pi_4(\xi) = \dot{\pi}_3(\xi)$$

y considerando que $\pi_3(\xi)$ está en función del tiempo, debido al término $w(\xi, t)$, se tiene

$$\pi_4(\xi, t) = \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial t}$$

i.e.,

$$\pi_4(\xi, t) = \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 + \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial t}$$

equivalente a

$$\pi_4(\xi, t) = \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_2 + \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial \xi_2} \left[-D^{-1}(\xi_1)(C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) - w(\xi, t)) \right] + \frac{\partial \pi_3(\xi)}{\partial t}.$$

Considerando el mapeo $\pi_3(\xi)$ y desarrollando resulta

$$\begin{aligned} \pi_4(\xi, t) &= \xi_2 + K^{-1} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial \xi_1} \xi_2 \\ &\quad + K^{-1} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial \xi_2} \left[-D^{-1}(\xi_1)(C(\xi_1, \xi_2)\xi_2 + G(\xi_1) - w(\xi, t)) \right] \\ &\quad - K^{-1} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

De esta manera, $\pi(\xi)$ queda definida como

$$\pi(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_1 + K^{-1}w(\xi, t) \\ \pi_4(\xi, t) \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Lo que sigue es obtener la variedad **(A3)**, para lo cual se parte de la siguiente definición

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = x$$

con $\chi_1 \in \mathcal{R}^p$ y $\chi_2 \in \mathcal{R}^{n-p}$, donde n es la dimensión del sistema dinámico no lineal y p es la dimensión del sistema dinámico objetivo. De la definición anterior podemos encontrar la variedad aplicando la siguiente identidad

$$\phi(x) = \chi_2 - \zeta_2(\zeta_1^{-1}(\chi_1)) = 0 \quad (2.48)$$

con

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \chi_2 &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ \zeta_1 &= \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \\ \zeta_2 &= \begin{bmatrix} \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Evaluando la ecuación (2.48) en la determinación de la variedad se tiene

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_3(\pi_1^{-1}(x_1), \pi_2^{-1}(x_2)) \\ \pi_4(\pi_1^{-1}(x_1), \pi_2^{-1}(x_2)) \end{bmatrix}$$

donde se ha sustituido χ_1 , χ_2 , ζ_1 y ζ_2 . Ahora, como los mapeos $\pi_1(\cdot)$ y $\pi_2(\cdot)$ son funciones cuyos codominios son iguales a sus dominios, resulta ser que las funciones inversas de estos mapeos también tienen esta propiedad, *i.e.*, $\pi_1^{-1}(x_1) = x_1$ y $\pi_2^{-1}(x_2) = x_2$, lo que lleva a

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi_3(x_1, x_2) \\ \pi_4(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 + K^{-1}w(x, t) \\ \pi_4(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Ahora, si

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

luego

$$\phi_1 = x_3 - x_3 - K^{-1}w(x, t)$$

y

$$\phi_2 = x_4 - \pi_4(x_1, x_2).$$

Esta última ecuación equivalente a

$$\begin{aligned}\phi_2 = & x_4 - x_2 - K^{-1} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_1} x_2 \\ & - K^{-1} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_2} \left[-D^{-1}(x_1)(C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) - w(x, t)) \right] \\ & - K^{-1} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Esta última definición de ϕ_2 no es utilizada por la complicación posterior de los cálculos. Por otro lado se utiliza la siguiente definición

$$\phi(x, t) = \left[\begin{array}{c} x_3 - x_1 - K^{-1}w(x, t) \\ x_4 - x_2 - K^{-1} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} D^{-1}(x_1)(C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) + K(x_1 - x_3)) + \frac{\partial w}{\partial t} \right] \end{array} \right], \quad (2.49)$$

Es importante resaltar que, mientras que $\phi_1(x, t)$ es obtenida de la selección

$$\phi_1(x, t) = x_3 - \pi_3(\xi, t)|_{\xi_1=x_1, \xi_2=x_2},$$

el término $\phi_2(x, t)$ no es definido de la misma manera. Sin embargo, el conjunto identidad (2.10) es satisfecho de igual forma por esta última definición. Para verificar esto observe que

$$x_4 - \pi_4(\xi, t)|_{\xi_1=x_1, \xi_2=x_2} = \phi_2(x, t) + K^{-1} \frac{\partial w}{\partial x_2} D^{-1}(x_1)K(x_3 - x_1 - K^{-1}w(x, t)),$$

utilizando $\phi_2(x, t)$ como se describe en su última definición, se observa que el último término de la derecha es precisamente $\phi_1(x, t)$. El interés en definir $\phi_2(x, t)$ de esta manera es que $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2$, simplificando la tarea de estabilizar el equilibrio de las dinámicas fuera de la variedad, las cuales están dadas por

$$\dot{z} = \phi(x)$$

derivando

$$\dot{z} = \dot{\phi}(x)$$

equivalentemente

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}$$

luego, sustituyendo los valores de $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, se tiene

$$\dot{\phi}_1 = \dot{x}_3 - \dot{x}_1 - K^{-1}\dot{w}(x, t) \quad (2.50)$$

y

$$\dot{\phi}_2 = \dot{x}_4 - \dot{x}_2 - K^{-1} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} D^{-1}(x_1)(C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) + K(x_1 - x_3)) + \frac{\partial w}{\partial t} \right]. \quad (2.51)$$

Sustituyendo (2.40) en (2.50), se tiene

$$\dot{\phi}_1 = \dot{x}_1 - x_2 - K^{-1} \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right]$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \dot{x}_1 - x_2 - K^{-1} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_1} x_2 \\ &+ K^{-1} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_2} \left[D^{-1}(x_1) [C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) + K(x_1 - x_3)] \right] \\ &- K^{-1} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.40) en (2.51), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= -J^{-1}(K(x_3 - x_1) - u) \\ &+ D^{-1}(x_1) [C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) + K(x_1 - x_3)] \\ &- K^{-1} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial w}{\partial x_2} D^{-1}(x_1) (C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) + K(x_1 - x_3)) + \frac{\partial w}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Lo que nos lleva a la siguiente definición para las dinámicas fuera de la variedad

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= m(x, t) - J^{-1}v(x, z, t) \end{aligned}$$

donde $m(x, t)$ puede ser calculada via diferenciación de $\phi_2(x, t)$. Resulta luego una tarea trivial el seleccionar una ley de control $v(x, z, t)$ que asintóticamente establezca el equilibrio del sistema z , siendo una simple y obvia selección

$$v(x, z, t) = -J(m(x, t) + K_1 z_1 + K_2 z_2),$$

con matrices arbitrarias K_1 y K_2 definidas positivas. Para completar la prueba es necesario demostrar que todas las soluciones del sistema en lazo cerrado con estados (x, z) están acotadas. Para este fin, es suficiente reescribir el sistema en las coordenadas (x_1, x_2, z_1, z_2) y usar argumentos similares a los utilizados en la prueba de la proposición 2.3.

2.3.3.3. Sistema carro-péndulo

Considere el sistema carro-péndulo descrito en la figura 2.7 y asuma que una linealización por realimentación parcial de estados ha sido aplicada. Después de una normalización ésta conduce al modelo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1) - u \cos(x_2) \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{2.52}$$

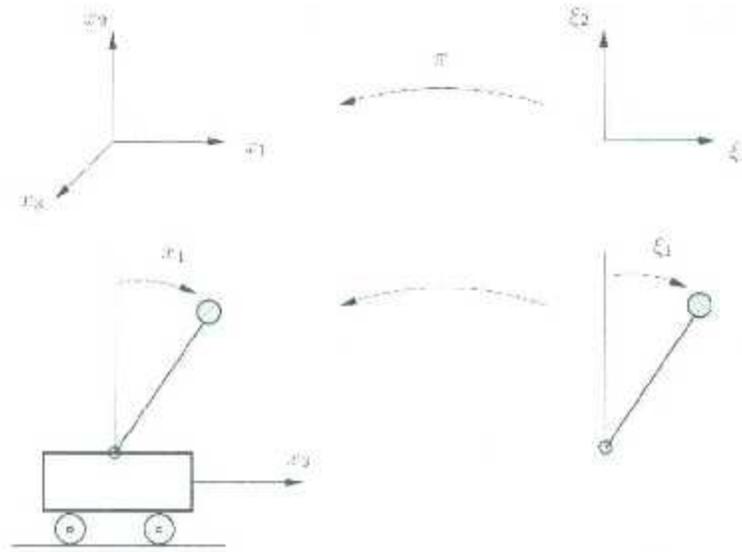


Figura 2.7: Péndulo sobre un carro y la correspondiente dinámica objetivo

donde $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}$ son el ángulo del péndulo (con respecto a la vertical hacia arriba) y su respectiva velocidad, $x_3 \in \mathcal{R}$ es la velocidad de carro y $u \in \mathcal{R}$ es la entrada. El equilibrio a ser estabilizado es para la posición vertical hacia arriba para el péndulo, con velocidad de cero para el carro, lo que corresponde a $x^* = 0$.

Para los sistemas mecánicos subactuados, un sensible sistema objetivo es la parte subactuada del mecanismo, posiblemente con un control por realimentación. En esta situación la definición del sistema objetivo, la cual no es única y provee un grado de libertad para el diseño, puede usarse para la solución del problema por I&I. Para el sistema en cuestión, la idea clave es sumergir el sistema de tercer orden dentro de un sistema de segundo orden, cuya energía potencial y funciones de amortiguamiento pueden considerarse como opciones de diseño. Las dinámicas objetivo pueden considerarse como dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -V'(\xi_1) - R(\xi_1, \xi_2)\xi_2\end{aligned}\tag{2.53}$$

las cuales son las ecuaciones del péndulo completamente actuado con función de energía $H(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\xi_2^2 + V(\xi_1)$ y función de amortiguamiento $R(\cdot)$, posiblemente no lineal, definida como una función de ξ_1 y ξ_2 . Para asegurar que el sistema objetivo tenga un equilibrio localmente asintóticamente estable en el origen, se asume que la función de energía potencial $V(\xi_1)$ satisface $V'(0) = 0$ y $V''(0) > 0$, y la función de amortiguamiento es tal que $R(0, 0) > 0$.

El siguiente enunciado describe un procedimiento para generar las leyes por realimentación I&I estabilizadoras sin la necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales parciales (2.9).

Proposición 2.5. [2] Sea $\pi_3(\cdot) : \mathcal{S} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que $\frac{\partial \pi_3}{\partial \xi_2}$ sea únicamente una función de ξ_1 y

$$V'(\xi_1) = -\frac{\text{sen}(\xi_1)}{\Delta(\xi_1)}, \quad R(\xi_1, \xi_2) = \frac{\cos(\xi_1)}{\Delta(\xi_1)} \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi_2} \quad (2.54)$$

con

$$\Delta(\xi_1) = 1 + \cos(\xi_1) \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi_2}. \quad (2.55)$$

Asuma que las funciones $\Delta(\xi_1)$ y $R(\xi_1, \xi_2)$ son tales que $\Delta(0) < 0$ y $R(0, 0) > 0$. De esta manera el sistema (2.52) en lazo cerrado con el controlador I&I

$$v(x, \phi(x)) = \frac{1}{\Delta(x_1)} \left(-\gamma \phi(x) + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_2} \text{sen}(x_1) \right), \quad (2.56)$$

con $\gamma > 0$ y $\phi(x) = x_3 - \pi_3(x_1, x_2)$ tiene un equilibrio localmente asintóticamente estable en cero, *i.e.*, el origen.

Prueba 2.5. [2] Procediendo a verificar las hipótesis (A1)-(A4) del teorema 2.1, de la hipótesis de que el sistema objetivo (2.53) tiene un equilibrio localmente asintóticamente estable en el origen, (A1) es satisfecha. Dados los objetivos de control y la elección de la dinámica objetivo, una selección natural del mapeo $\pi(\cdot)$ es

$$\pi(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \pi_3(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

donde $\pi_3(\cdot)$ es una función por definir. Con esta elección de $\pi(\cdot)$ y de la dinámica objetivo, la ecuación diferencial parcial (2.9) se reduce a

$$\text{sen}(\xi_1) - \cos(\xi_1) c(\pi(\xi)) = -V'(\xi_1) - R(\xi_1, \xi_2) \xi_2 \quad (2.58)$$

$$c(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi_1} \xi_2 - \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi_2} (V'(\xi_1) + R(\xi_1, \xi_2) \xi_2). \quad (2.59)$$

Reemplazando $c(\cdot)$ de (2.59) en (2.58), conduce a la ecuación diferencial parcial

$$\left(\cos(\xi_1) \frac{\partial \pi_3}{\partial \xi_1} - R(\xi_1, \xi_2) \Delta(\xi_1) \right) \xi_2 = \text{sen}(\xi_1) + \Delta(\xi_1) V'(\xi_1), \quad (2.60)$$

donde $\Delta(\cdot)$ ha sido definida en (2.55). Claramente, (2.60) se mantiene por (2.54), por lo que (A2) también se satisface.

La condición de variedad implícita (A3) se verifica notando que la variedad \mathcal{V} puede ser descrita implícitamente por $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{R}^3 | \phi(x) = 0\}$ con $\phi(x) = x_3 - \pi_3(x_1, x_2)$. La dinámica fuera de la variedad es

$$\dot{z} = -\frac{\partial \pi_3}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \pi_3}{\partial x_2} \text{sen}(x_1) + \Delta(x_1) v(x, z). \quad (2.61)$$

Seleccionando

$$v(x, z) = \frac{1}{\Delta(x_1)} \left(-\gamma z + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \pi_3}{\partial x_2} \sin(x_1) \right), \quad (2.62)$$

la cual, por hipótesis, está bien definida localmente alrededor de cero conduce a $\dot{z} = -\gamma z$, lo que permite probar la condición **(A4)**. Finalmente, reemplazando $z = \phi(x)$ en la ecuación anterior conduce al controlador (2.56). Para completar la prueba se muestra que para un conjunto de condiciones iniciales contenidas en una vecindad del origen, las soluciones del sistema (2.11)-(2.13), *i.e.*,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\gamma z, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_1) - \cos(x_1)u(x, z), \\ \dot{x}_3 &= u(x, z) \end{aligned} \quad (2.63)$$

con $v(\cdot)$ dada por (2.56), están acotadas. Para este fin, note que de (2.55) y (2.54) existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que, localmente alrededor de cero,

$$\Delta(x_1) \leq -\epsilon_1, \quad R(x_1, x_2) \geq \epsilon_2. \quad (2.64)$$

Usando ahora las funciones $V'(\cdot)$ y $R(\cdot)$ definidas en (2.54), las primeras tres ecuaciones de (2.63) pueden reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\gamma z, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -V'(x_1) - R(x_1, x_2)x_2 - \frac{\gamma \cos(x_1)}{\Delta(x_1)} z. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Considerando la función $H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + V(x_1) + \frac{\gamma}{2\epsilon_2\epsilon_1^2}z^2$ y notando que, de (2.54), $V'(0) = 0$ y $V''(0) = -\frac{1}{\Delta(0)} > 0$, por lo tanto la función $H(x_1, x_2)$ es definida positiva con un mínimo local en cero. Derivando a lo largo de las trayectorias de (2.65) resulta

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -R(x_1, x_2)x_2^2 + \frac{\gamma \cos(x_1)}{\Delta(x_1)} x_2 z - \frac{\gamma^2}{\epsilon_2\epsilon_1^2} z^2 \\ &\leq -\epsilon_2 x_2^2 + \frac{\epsilon_2}{2} x_2^2 + \frac{\gamma^2}{2\epsilon_2\epsilon_1^2} z^2 - \frac{\gamma^2}{\epsilon_2\epsilon_1^2} z^2 \\ &\leq -\frac{\epsilon_2}{2} x_2^2 - \frac{\gamma^2}{2\epsilon_2\epsilon_1^2} z^2, \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde se ha usado (2.64) y la desigualdad de Young. De lo anterior se deduce que existe una vecindad del origen tal que las trayectorias $(x_1(t), x_2(t), z(t))$ que comienzan en este conjunto permanecen acotadas y asintóticamente convergen a $(0, 0, 0)$. El acotamiento de x_3 se deduce del hecho de que $x_3(t) = z(t) + \pi_3(x_1(t), x_2(t)) - z(0) + x_3(0)$ y el lado derecho está acotado.

Para completar el diseño, se proponen mapeos $\pi_3(\cdot)$ que confirmen las suposiciones $\Delta(0) < 0$ y $R(0,0) > 0$ las cuales, en vista de (2.54) y (2.55), imponen que $\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1}(0) < 0$ y $1 + \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2}(0) < 0$. Los dos posibles mapeos son

$$\pi_3(x_1, x_2) = -k_1 x_2 - k_2 x_2 \quad (2.67)$$

y

$$\pi_3(x_1, x_2) = -k_1 x_1 - \frac{k_2}{\cos(x_1)} x_2, \quad (2.68)$$

donde $k_1 > 0$ y $k_2 > 1$ son las ganancias de sintonización.

Alternativamente, para asegurar un comportamiento particular sobre la dinámica objetivo se puede fijar la energía potencial $V(\cdot)$ deseada y luego trabajar hacia atrás en el cálculo de $\pi_3(\cdot)$, $\Delta(\cdot)$ y $R(\cdot)$. Una elección particularmente interesante es $V(x_1) = \frac{k_1}{2} \tan^2(x_1)$ con $k_1 > 0$, la cual tiene un mínimo único en cero y es radialmente desacotada sobre el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Reemplazando en (2.54) conduce a $\Delta(x_1) = -\frac{1}{k_1} \cos^3(x_1)$, la cual satisface la suposición $\Delta(0) < 0$.

De (2.55) y después de algunos cálculos resulta

$$\pi_3(x_1, x_2) = - \left(\frac{1}{\cos(x_1)} + \frac{1}{k_2} \cos^2(x_1) \right) x_2 + \psi(x_1)$$

donde $\psi(\cdot)$ es una función libre. Puede verificarse que $R(0,0) = -k_1 \psi'(0)$, por lo que $\psi(\cdot)$ deberá elegirse tal que $\psi'(0) < 0$ para asegurar un amortiguamiento positivo, e.g., $\psi(x_1) = -k_2 x_1$ con $k_2 > 0$.

Así, para (2.68) se tiene

$$u = \frac{1}{k_2 - 1} \left[\gamma \left(x_3 + k_1 x_1 + \frac{k_2}{\cos(x_1)} x_2 \right) + k_1 x_2 + k_2 \tan(x_1) \left(\frac{x_2^2}{\cos(x_1)} + 1 \right) \right].$$

Cabe resaltar que el controlador en cuestión presenta una singularidad en $\pm \frac{\pi}{2}$. Las siguientes gráficas exhiben la dinámica del sistema carro-péndulo y el desempeño del controlador como resultado de la validación en simulación. La simulación ha sido llevada a cabo para condiciones iniciales $x(0) = (\frac{\pi}{2} - 0.1, 0, 0)$ donde se han supuesto como cero las velocidades iniciales lineal y angular del carro y del péndulo, respectivamente. El péndulo ha sido colocado cerca de la horizontal y los parámetros del controlador establecidos como $k_1 = 3$ y $k_2 = 4$ para $\gamma = 1$. Los resultados claramente muestran el comportamiento en lazo cerrado deseado: primero, convergencia hacia la variedad $z = 0$ a una velocidad determinada por γ y luego, una vez cercano a la variedad, donde el sistema carro-péndulo se comporta como un péndulo simple, se consigue la convergencia hacia el equilibrio. De la figura 2.8 se observa que incrementando γ se incrementa la velocidad de convergencia hacia la variedad y esto no necesariamente conduce a una respuesta transitoria más rápida.

En la figura 2.9 se puede observar como el péndulo comienza en una posición cerca de la horizontal con valor de 1.4708 rad y rápidamente oscila de ésta, a una posición de -1.389 rad en 2.7 seg y luego a 0.66 rad en 6.7 seg, terminando su trayecto cercano a

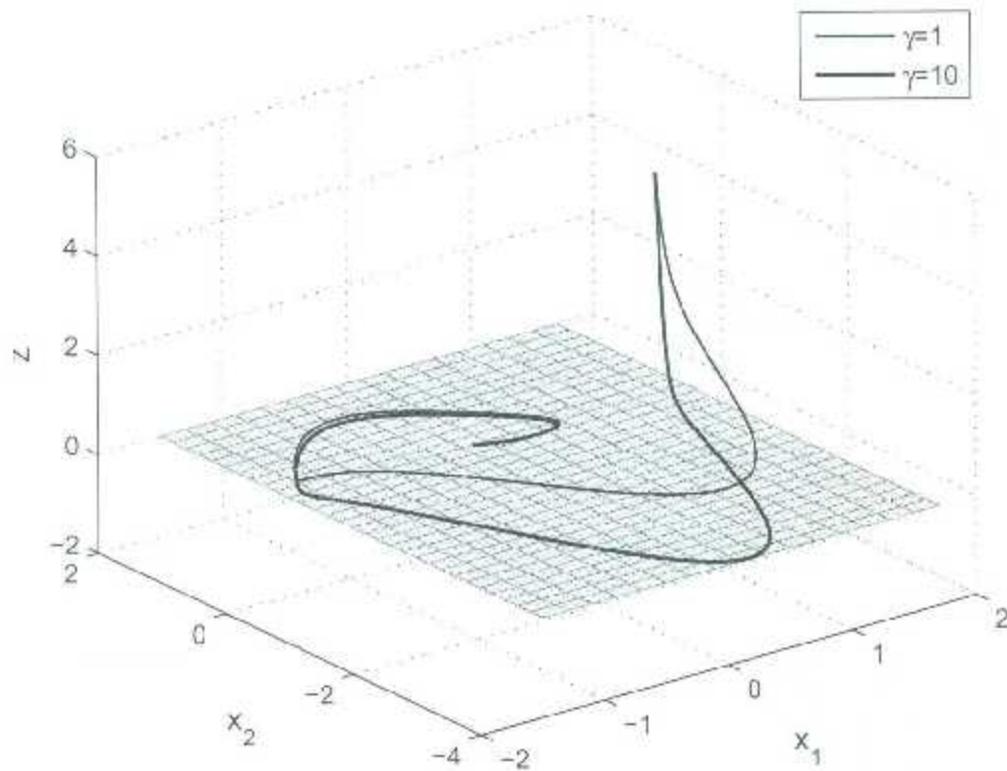


Figura 2.8: Trayectorias del sistema carro péndulo (el área sombreada corresponde a la variedad invariante $z = 0$.)

0 rad transcurridos aproximadamente 16 seg. De la figura 2.10 se puede observar como la velocidad angular del péndulo se incrementa rápidamente hasta un valor de $-3.7 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ en 1.18 seg y después regresa cambiando el sentido hasta llegar a una velocidad de $1.27 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ transcurridos 4.57 seg, terminando su trayecto con una velocidad de $0 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ en estado estable a partir de los 16 segundos aproximadamente. De la figura 2.11 se puede observar como la velocidad del carro comienza en $0 \frac{\text{mts}}{\text{seg}}$ y rápidamente se incrementa a $16.14 \frac{\text{mts}}{\text{seg}}$ en 1.18 seg, para después disminuir y cambiar el sentido hasta llegar a un valor de $-4.3 \frac{\text{mts}}{\text{seg}}$ en 4.67 seg terminando en la posición de equilibrio $0 \frac{\text{mts}}{\text{seg}}$ transcurridos aproximadamente 16 seg. Por último de la figura 2.12 correspondiente a la entrada de control del sistema, se observa como la señal de control fluctúa entre valores máximos de 16 y -9.4 para después tender a 0 conforme el tiempo tiene a 20 seg.

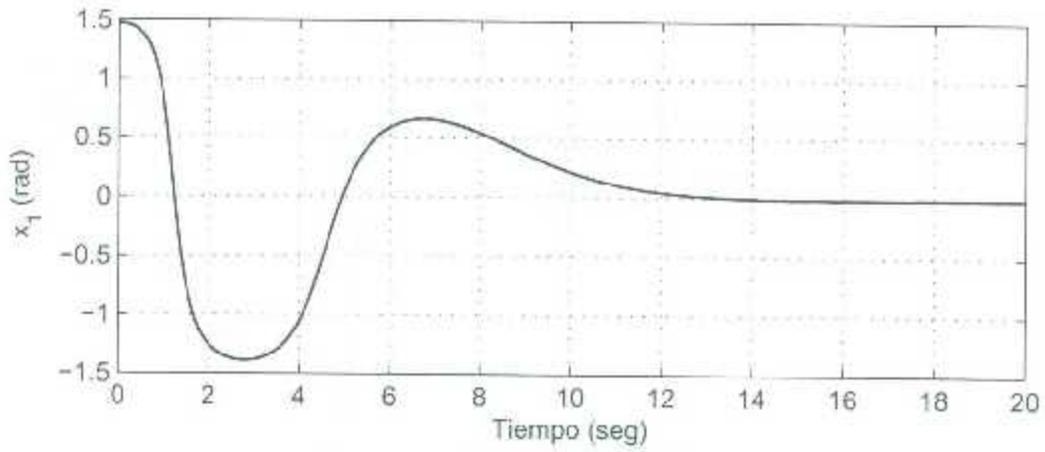


Figura 2.9: Posición angular del péndulo.

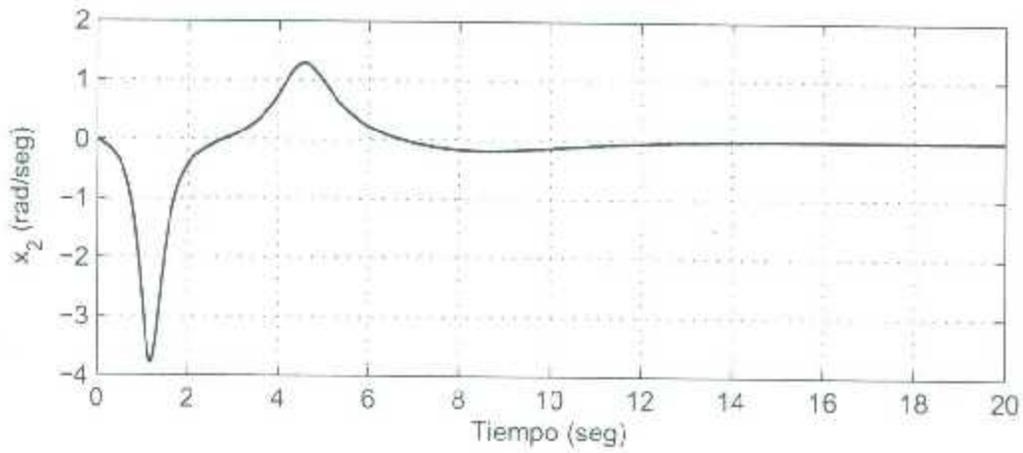


Figura 2.10: Velocidad angular del péndulo.

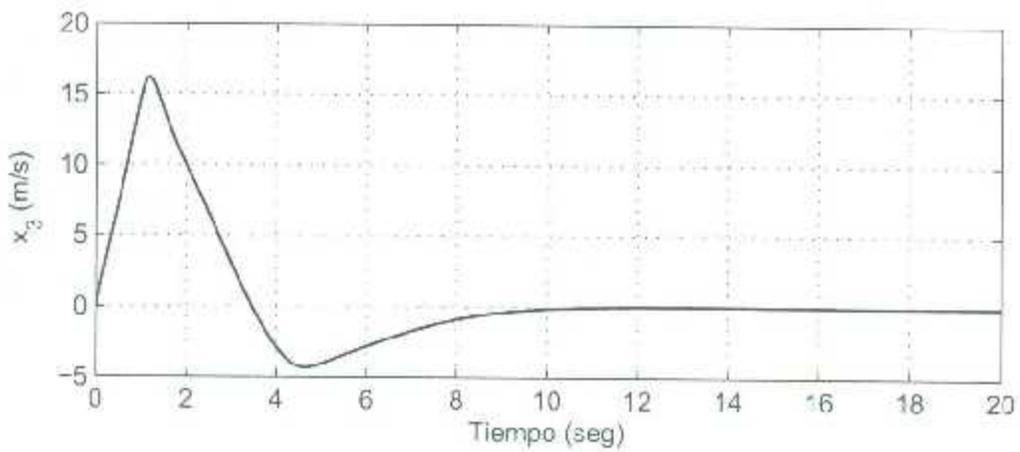


Figura 2.11: Velocidad del carro.

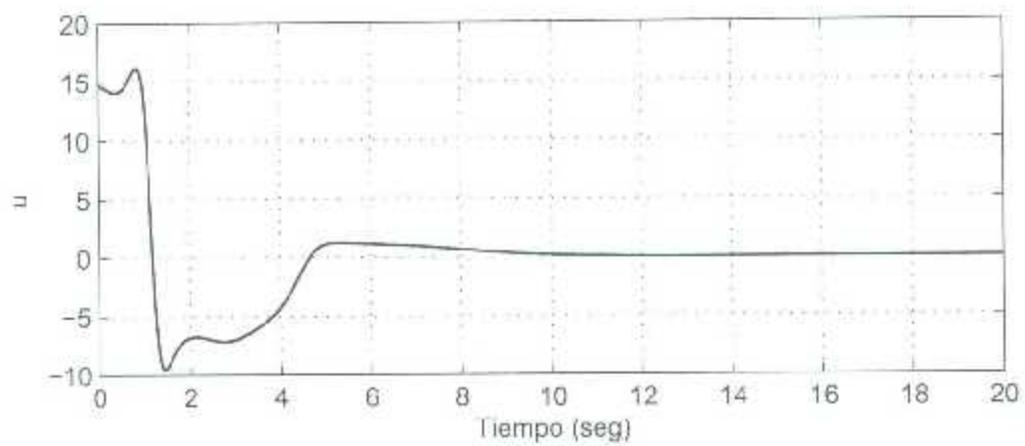


Figura 2.12: Entrada de control.

Capítulo 3

Estabilización vía I&I de un robot manipulador de 2 g.d.l.

En el presente capítulo se aborda el diseño del control de regulación por realimentación estática de estados para un modelo matemático, en el cual se desprecia la fricción, de un robot manipulador de 2 g.d.l. vía I&I. La idea fundamental del diseño consiste en seleccionar una dinámica objetivo, de menor orden que el orden del sistema dinámico del robot, que dependa de los errores de posición de cada una de las articulaciones, para luego utilizar de forma conveniente una variedad que permita llevar los estados del sistema a la misma y hacerla invariante, de tal forma que una vez dentro de la variedad el sistema completo imite el comportamiento del sistema dinámico objetivo.

3.1. Modelo dinámico de un robot manipulador de n g.d.l.

El modelo dinámico de un robot manipulador de n g.d.l., está descrito por la siguiente ecuación

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.1)$$

donde $M(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q) \in \mathcal{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales, y $\tau \in \mathcal{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares externos. Los vectores $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathcal{R}^n$ representan las posiciones, velocidades y aceleraciones de las variables articulares del robot, respectivamente.

El modelo dinámico de un robot manipulador de n g.d.l. puede representarse en términos del espacio de estados renombrando las variables articulares como $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$, lo que nos lleva a la siguiente representación

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= M(x_1)^{-1}[u - C(x_1, x_2)x_2 - g(x_1)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde se ha reemplazado τ por $u \in \mathcal{R}^n$. Aplicando un cambio de variables al sistema se

define el vector del error de posición articular de la siguiente manera

$$e = \dot{x}_d - x_1 \quad (3.3)$$

donde $e \in \mathcal{R}^n$ y $x_d \in \mathcal{R}^n$ son el vector de errores articulares y el vector constante de posiciones articulares deseadas, respectivamente. De la definición anterior podemos entonces reescribir el sistema (3.2) como

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= M(x_d - e)^{-1}[u - C((x_d - e), x_2)x_2 - g(x_d - e)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= -\chi_2 \\ \dot{\chi}_2 &= M(x_d - \chi_1)^{-1}[u - C((x_d - \chi_1), \chi_2)\chi_2 - g(x_d - \chi_1)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

con vector de estado $\chi = [e^T \quad x_2^T]^T = [\chi_1 \quad \chi_2]^T$.

3.2. Objetivo de control

Considere el modelo en espacio de estados descrito por el sistema (3.5). El objetivo consiste en encontrar una ley de control estática por realimentación de estados $u(e, x_2, z) = u(\chi_1, \chi_2, z)$ tal que las trayectorias del sistema en lazo cerrado $\chi(t) \in \mathcal{R}^{2n}$, partiendo de cualquier condición inicial diferente de cero, sean llevadas al punto de equilibrio $\chi^* = [0 \quad 0]^T$, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi_1 = c(t) = 0 \quad (3.6)$$

lo que implica que $u(0, 0, 0) = \tau^*$ con $\tau^* = g(x_d)$, lo que lleva a cumplir el objetivo de control de posición.

3.3. Modelo dinámico de un robot manipulador de 2 g.d.l.

El modelo dinámico de un brazo robot manipulador del tipo serial de 2 g.d.l. es descrito en la presente sección. El brazo manipulador consiste de 2 eslabones rígidos de longitudes l_1 y l_2 y masas m_1 y m_2 , respectivamente. Los desplazamientos del robot se realizan en el plano vertical x - y a través de uniones del tipo revolución como se muestra en la Figura 3.1. La distancia entre los ejes de giro y los centros de masa es denotada por l_{c1} y l_{c2} . I_1 e I_2 corresponden a los momentos de inercia de los eslabones con respecto al eje que pasa a través de sus centros de masas y que es perpendicular al plano x - y . Los grados de libertad son asociados a los ángulos q_1 , el cual es medido desde la posición vertical hacia abajo, y

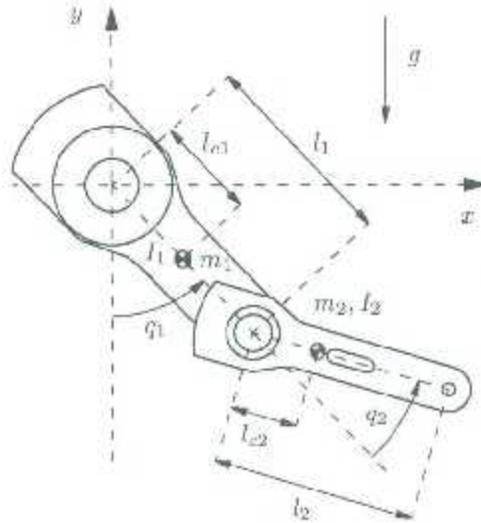


Figura 3.1: Robot de 2 g.d.l

q_2 , medido a partir de la extensión del eslabón 1 hasta el eslabón 2, siendo ambos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Las ecuaciones dinámicas que modelan el robot manipulador son obtenidas utilizando el recurso de Lagrange [3] y están dadas como

$$\begin{aligned} \tau_1 = & [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ & + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\ & - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ & + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 \\ & + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ & + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Obedeciendo a la notación definida en (3.1) para un robot manipulador de n g.d.l., las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y el vector $g(q)$ quedan estructuradas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \\ g(q) &= \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_1 + I_2 \\
 M_{12}(q) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2 \\
 M_{22}(q) &= m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_2 \\
 M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\
 C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\
 C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\
 C_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \\
 C_{22}(q, \dot{q}) &= 0 \\
 g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) \\
 g_2(q) &= m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).
 \end{aligned}$$

3.4. Diseño del controlador I&I-1

A continuación se describe el diseño de una ley de control por realimentación de estados que cumple el objetivo de control anteriormente expuesto utilizando la metodología I&I. Aplicando la formulación propuesta en el teorema 2.1, se comienza por seleccionar la dinámica objetivo.

(A1) Sistema dinámico objetivo.

Se define el siguiente sistema dinámico objetivo

$$\dot{\xi} = -K\xi \quad (3.9)$$

donde $\xi \in \mathcal{R}^n$ y $K > 0$ es una matriz diagonal de coeficientes constantes, *i.e.* $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$, y cuyo sistema (3.9) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en $\xi^* = 0 \in \mathcal{R}^n$.

(A2) Condición de inmersión.

Se define el siguiente mapeo

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde el mapeo $\pi_1(\xi) = \xi$ es seleccionado debido a que se desea que la coordenada χ_1 , que es el vector de errores articulares, se comporte como el sistema dinámico objetivo, *i.e.*, que presente un comportamiento exponencial decreciente, por lo que solo resta seleccionar el mapeo $\pi_2(\xi)$ aplicando la formulación descrita en (2.9).

Sustituyendo (3.10) en (3.5) tenemos

$$\dot{\xi} = -\pi_2(\xi) \quad (3.11)$$

$$\dot{\pi}_2(\xi) = M(x_d - \xi)^{-1} [c(\xi) - C((x_d - \xi), \pi_2(\xi))\pi_2(\xi) - g(x_d - \xi)] \quad (3.12)$$

donde se observa de la primera ecuación que $\dot{\xi}$ es conocida, por lo que sustituyendo (3.9) en (3.11) resulta

$$-K\xi = -\pi_2(\xi) \quad (3.13)$$

$$\dot{\pi}_2(\xi) = M(x_d - \xi)^{-1} [c(\xi) - C((x_d - \xi), \pi_2(\xi))\pi_2(\xi) - g(x_d - \xi)]. \quad (3.14)$$

De la ecuación (3.13) se observa que

$$\pi_2(\xi) = K\xi,$$

por lo que ahora el mapeo $\pi(\xi)$ es definido por completo como

$$\pi(\xi) = \begin{bmatrix} \xi \\ K\xi \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

cumpliendo con la definición descrita en (A2) del teorema 2.1.

(A3) Variedad implícita.

Acorde a la identidad (2.10) se define la siguiente variedad implícita

$$\mathcal{V} \triangleq \{\chi \in \mathcal{R}^{2n} | \phi(\chi) = 0\} = \{\chi \in \mathcal{R}^{2n} | \chi_1 = \xi, \chi_2 = K\xi \ \forall \xi \in \mathcal{R}^n\}, \quad (3.16)$$

donde se satisface que $n < 2n$, i.e., el orden del sistema dinámico objetivo (3.9) es menor que el orden del sistema (3.5). Luego, si χ es descrita por los siguientes componentes

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \in \mathcal{R}^n \\ \chi_2 \in \mathcal{R}^n \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

la siguiente ecuación cumple con las condiciones descritas en la definición (3.16)

$$\phi(\chi) = \chi_2 - \pi_2(\pi_1^{-1}(\chi_1)) = 0. \quad (3.18)$$

Sustituyendo el mapeo inverso $\pi_1^{-1}(\cdot)$, obtenido de (3.15), en (3.18) se tiene

$$\phi(\chi) = \chi_2 - \pi_2(\chi_1) = 0.$$

Luego, sustituyendo $\pi_2(\cdot)$ de (3.15) se tiene

$$\phi(\chi) = \chi_2 - K\chi_1 = 0 \quad (3.19)$$

o equivalentemente

$$\phi(\chi) = x_2 - Ke = 0, \quad (3.20)$$

con lo que queda definida la variedad \mathcal{V} de forma explícita.

(A4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones.

La dinámica fuera de la variedad se obtiene a partir de la siguiente definición

$$z \triangleq \phi(\chi)$$

con $\phi(\chi)$ como se obtuvo de (3.19), donde la derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (3.5) resulta como

$$\dot{z} = \dot{\phi}(\chi) = \dot{\chi}_2 - K\dot{\chi}_1. \quad (3.21)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.21) obtenemos

$$\dot{z} = M(x_d - \chi_1)^{-1} [u - C((x_d - \chi_1), \chi_2)\chi_2 - g(x_d - \chi_1)] + K(\chi_2). \quad (3.22)$$

Luego, el diseño es completado seleccionando una entrada de control u tal que el subsistema (3.22) tenga un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0,$$

y que las trayectorias del sistema resultante estén acotadas. Para este fin, se selecciona de todos los posibles controladores que estabilicen el sistema (3.22) la siguiente ley de control

$$u = M(x_d - \chi_1)[- \Gamma z - K\chi_2] + C((x_d - \chi_1), \chi_2)\chi_2 + g(x_d - \chi_1) \quad (3.23)$$

donde $\Gamma > 0$ es una matriz diagonal de coeficientes constantes $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Esta elección es debida a que esta ley de control conduce a la siguiente dinámica

$$\dot{z} = -\Gamma z \quad (3.24)$$

para la coordenada z , la cual resulta de sustituir (3.23) en (3.22), donde se observa, por las propiedades de la matriz Γ y el signo negativo, que el sistema (3.40) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen.

Ahora bien, al sustituir (3.23) en (3.5) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= -\chi_2 \\ \dot{\chi}_2 &= -\sigma z - K\chi_2 \\ \dot{z} &= -\sigma z \end{aligned} \quad (3.25)$$

en función de las coordenadas (χ, z) , donde se observa que las trayectorias de $z(t)$ están acotadas y tienden a cero de forma exponencial, por lo que la dinámica de la coordenada $\chi_2(t)$ en algún momento en el tiempo solo dependerá del término $-K\chi_2$, el cual debido al signo negativo y a que $K > 0$ permitirá que las trayectorias de $\chi_2(t)$ estén acotadas y, más aún, tiendan a cero, por lo que también las trayectorias de $\chi_1(t)$ se mantendrán acotadas debido a su dependencia directa con la coordenada χ_2 , con lo que la condición (A4) del teorema 2.1 es satisfecha.

3.5. Resultados

Con el fin de ilustrar el desempeño del controlador (3.23), se llevó a cabo la implementación en simulación del mismo utilizando el modelo dinámico (3.5) de un robot manipulador

de 2 grados de libertad con articulaciones rotacionales mostrado en la figura 3.1. Para propósitos posteriores de comparación, la ley de control (3.23) propuesta es aquí denominada como ley de control I&I-1. La simulación es llevada a cabo bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_2(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las posiciones deseadas para los eslabones son definidas como:

$$x_d = \begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

Cabe considerar que los actuadores del robot manipulador están limitados a los siguientes valores admisibles:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 150 \text{ N} \cdot \text{m} \\ \pm 15 \text{ N} \cdot \text{m} \end{bmatrix}.$$

Los valores de los parámetros del robot manipulador se muestran en la tabla 3.1. Las ganancias utilizadas en el controlador están dadas por

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Los resultados obtenidos en simulación utilizando la ley de control I&I-1 (3.23) son mostrados en las figuras 3.2-3.4.

Tabla 3.1: Parámetros del robot manipulador de 2 g.d.l.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.450	mts
Longitud eslabón 2	l_2	0.450	mts
Distancia a centro de masa(Eslabón 1)	l_{c1}	0.091	mts
Distancia a centro de masa(Eslabón 2)	l_{c2}	0.048	mts
Masa eslabón 1	m_1	23.902	kg
Masa eslabón 2	m_2	3.880	kg
Inercia eslabón 1	I_1	1.266	kg · m ²
Inercia eslabón 2	I_2	0.093	kg · m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/seg ²

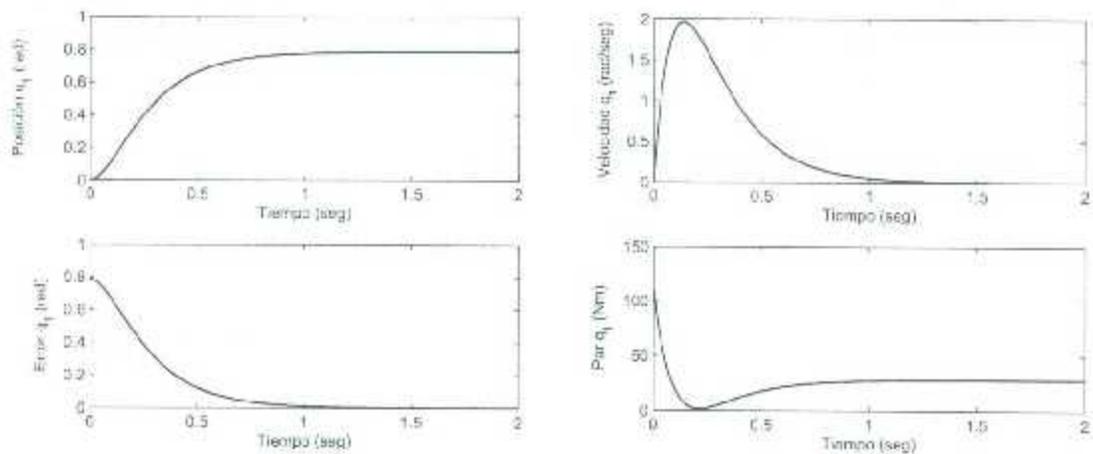


Figura 3.2: Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 1.

De los resultados en cuestión, se observa de la figura 3.2, que el eslabón 1 alcanza la posición deseada de $\frac{\pi}{4}$ rad en 1.471 seg, presentándose una respuesta suave (críticamente amortiguada), la velocidad angular no supera los $2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$, el error de posición decrece y a partir de 1.471 seg éste no supera un valor de 0.001 rad. El par no sobrepasa en ningún momento los valores admisibles, comienza en 110.6 Nm y decrece para después mantenerse en un par en estado estacionario con valor de 28.49 Nm. Un comportamiento similar es ilustrado en la figura 3.3 para el eslabón 2, donde se observa que este alcanza la posición deseada de $\frac{\pi}{2}$ rad en menos de dos segundos, 1.667 seg para ser exactos, la velocidad angular se mantiene por debajo de los $4 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$, el error de posición no supera los 0.001 rad

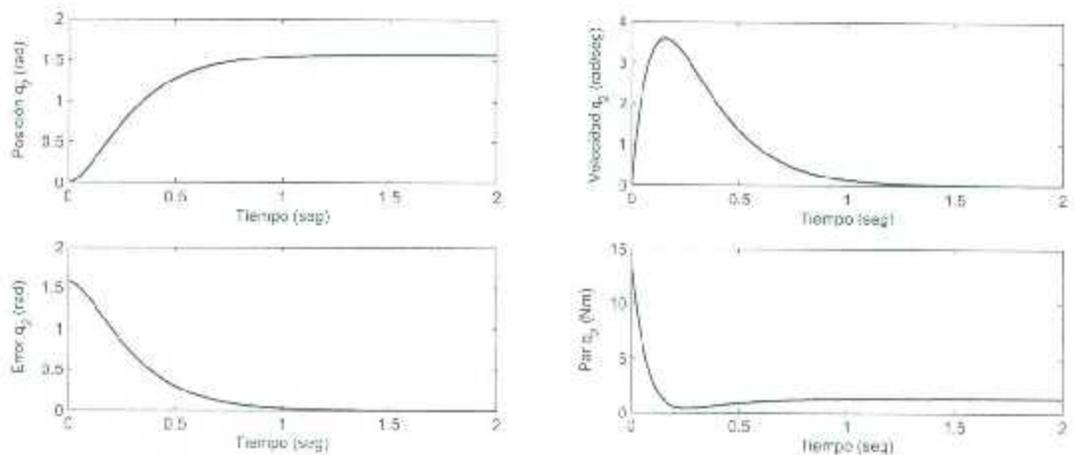
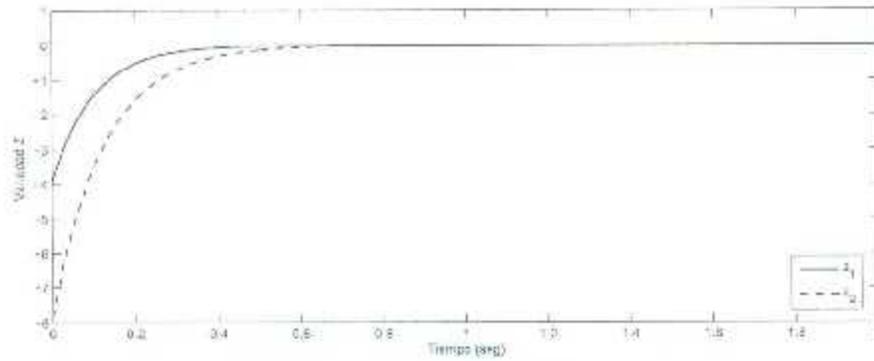


Figura 3.3: Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 2.

Figura 3.4: Dinámica z hacia la variedad.

pasados 1.67 seg y también el par generado no supera los límites admisibles, éste comienza en 13.7 Nm y disminuye hasta llegar a un valor en estado estacionario de 1.292 Nm. En la figura 3.4 se ilustra la respuesta de la coordenada z , la cual está compuesta por dos elementos y en donde se observa que estos tienden a cero de forma exponencial y lo hacen en poco menos de un segundo.

3.6. Diseño del controlador I&I-2

La ley de control (3.23) desarrollada en la sección 3.4 se obtuvo seleccionando una dinámica objetivo (3.9) cumpliendo con las condiciones descritas en el teorema 2.1, sin embargo, la selección del sistema dinámico objetivo no es única, este es uno de los grados de libertad que permite la metodología I&I. Con el fin de ilustrar y hacer uso de este grado de libertad, se selecciona otro sistema dinámico objetivo y se aplica la metodología I&I en el diseño de un nuevo controlador, el cual es comparado posteriormente con el controlador (3.23). Considerando la metodología I&I se parte luego de la selección de una nueva dinámica objetivo.

(A1) Dinámica objetivo.

Se define el siguiente sistema dinámico objetivo:

$$\dot{\xi} = -K \frac{1}{1 + \|\xi\|} \xi \quad (3.26)$$

con $\xi \in \mathcal{R}^n$ y $K > 0$ una matriz diagonal de coeficientes constantes $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$, donde la función $f(\xi) = \frac{1}{1 + \|\xi\|}$ es una función escalar $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{D}$ con $\mathcal{D} \in (0, 1]$. Una ilustración gráfica de la función $f(\xi)$ es mostrada en la figura 3.5.

De las propiedades de la matriz K y de la definición para la función $f(\xi)$, el sistema (3.26) tiene un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen.

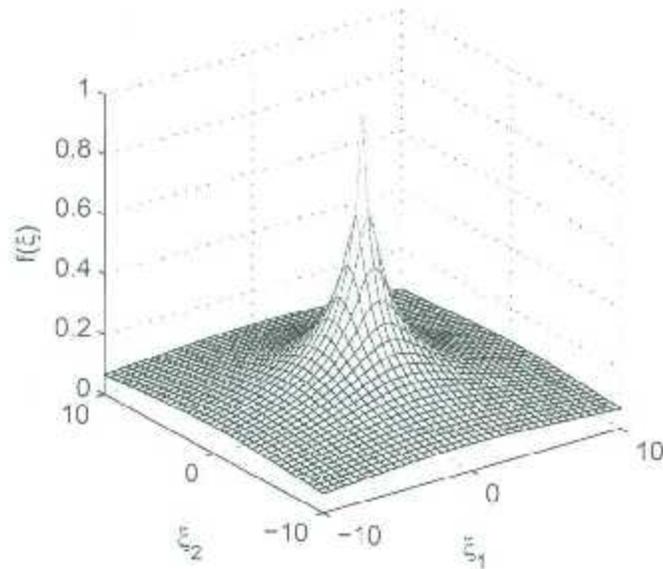


Figura 3.5: Ilustración gráfica de la función $f(\xi)$ para $\xi \in \mathcal{R}^2$.

(A2) *Condición de inmersión.*

Se define el siguiente mapeo

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

donde se ha seleccionado el mapeo $\pi_1(\xi) = \xi$ debido a que cumple con el objetivo de control. La condición de inmersión impone encontrar un mapeo $\pi_2(\xi)$ utilizando el sistema dinámico (3.5) como se muestra en (2.9). Para esto, considere nuevamente el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= -\chi_2 \\ \dot{\chi}_2 &= M(x_d - \chi_1)^{-1} [u - C((x_d - \chi_1), \chi_2)\chi_2 - g(x_d - \chi_1)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde sustituyendo el mapeo (3.27) resulta

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\pi_2(\xi) \\ \dot{\pi}_2(\xi) &= M(x_d - \xi)^{-1} [u - C((x_d - \xi), \pi_2(\xi))\pi_2(\xi) - g(x_d - \xi)]. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor conocido de $\dot{\xi}$ impuesto por el sistema dinámico objetivo resulta

$$\begin{aligned} -K \frac{1}{1 + \|\xi\|} \xi &= -\pi_2(\xi) \\ \dot{\pi}_2(\xi) &= M(x_d - \xi)^{-1} [u - C((x_d - \xi), \pi_2(\xi))\pi_2(\xi) - g(x_d - \xi)] \end{aligned}$$

de donde se observa de la primera ecuación que

$$\pi_2(\xi) = K \frac{1}{1 + \|\xi\|} \xi$$

con lo que el mapeo $\pi(\xi)$ queda definido como

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ K \frac{1}{1+\|\xi\|} \xi \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

con lo que se cumple la condición (A3) del teorema 2.1.

(A3) Variedad implícita.

Se define la siguiente variedad implícita acorde a (2.10) como sigue

$$\mathcal{V} \triangleq \{\chi \in \mathcal{R}^{2n} | \phi(\chi) = 0\} = \{\chi \in \mathcal{R}^{2n} | \chi_1 = \xi, \chi_2 = K \frac{1}{1+\|\xi\|} \xi \quad \forall \xi \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.30)$$

donde se satisface que $n < 2n$, i.e., el orden de la dinámica del sistema objetivo (3.26) es menor que el orden del sistema (3.28). Luego, si χ es descrita por los siguientes componentes

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \in \mathcal{R}^n \\ \chi_2 \in \mathcal{R}^n \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

la siguiente ecuación

$$\phi(\chi) = \chi_2 - \pi_2(\pi_1^{-1}(\chi_1)) = 0 \quad (3.32)$$

cumple con las condiciones descritas en la definición (3.30). Sustituyendo el mapeo inverso $\pi_1^{-1}(\cdot)$, obtenido utilizando (3.29), en (3.32) se obtiene

$$\phi(\chi) = \chi_2 - \pi_2(\chi_1) = 0.$$

Luego, sustituyendo $\pi_2(\cdot)$ obtenido en (3.29) resulta

$$\phi(\chi) = \chi_2 - K \frac{1}{1+\|\chi_1\|} \chi_1 = 0 \quad (3.33)$$

o equivalentemente

$$\phi(\chi) = \chi_2 - K \frac{1}{1+\|\chi_1\|} \chi_1 = 0, \quad (3.34)$$

con lo que queda definida de forma explícita la variedad \mathcal{V} .

(A4) Dinámica fuera de la variedad y acotamiento de soluciones.

La dinámica fuera de la variedad se obtiene a partir de la siguiente definición

$$z \triangleq \phi(\chi)$$

con $\phi(\chi)$ como se obtuvo en (3.33), donde la derivada a lo largo de las soluciones del sistema (3.28) resulta como

$$\dot{z} = \dot{\phi}(\chi) = \dot{\chi}_2 - K \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{1+\|\chi_1\|} \chi_1 \right] \quad (3.35)$$

o equivalentemente

$$\dot{z} = \dot{\chi}_2 - K \left[f(\chi_1)\chi_1 + \dot{f}(\chi_1)\dot{\chi}_1 \right] \quad (3.36)$$

con $f(\chi_1) = \frac{1}{1+\|\chi_1\|}$ y su respectiva derivada dada por $\dot{f}(\chi_1) = -\frac{\dot{\chi}_1^T \chi_1}{\|\chi_1\|(1+\|\chi_1\|)^2}$. Sustituyendo (3.28) en (3.36) obtenemos

$$\dot{z} = M(x_d - \chi_1)^{-1} [u - C((x_d - \chi_1), \chi_2)\chi_2 - g(x_d - \chi_1)] - K \left[\frac{\chi_2^T \chi_1}{\|\chi_1\|(1+\|\chi_1\|)^2} \chi_1 - \frac{\chi_2}{1+\|\chi_1\|} \right]. \quad (3.37)$$

Simplificando el último término de la derecha para la expresión anterior se tiene

$$\dot{z} = M(x_d - \chi_1)^{-1} [u - C((x_d - \chi_1), \chi_2)\chi_2 - g(x_d - \chi_1)] - K \left[\frac{\|\chi_1\|}{(1+\|\chi_1\|)^2} - \frac{1}{1+\|\chi_1\|} \right] \chi_2. \quad (3.38)$$

Luego, el diseño es completado seleccionando una entrada de control u tal que el subsistema (3.38) tenga un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen, *i.e.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0,$$

y que las soluciones del sistema resultante estén acotadas. Con este fin, se selecciona de todos los posibles controladores que estabilicen el sistema (3.38) la siguiente ley de control

$$u(\chi_1, \chi_2, z) = M(x_d - \chi_1) \left[-\Lambda z + K \left(\frac{\|\chi_1\|}{(1+\|\chi_1\|)^2} - \frac{1}{1+\|\chi_1\|} \right) \chi_2 \right] + C((x_d - \chi_1), \chi_2)\chi_2 + g(x_d - \chi_1) \quad (3.39)$$

donde $\Lambda > 0$ es una matriz diagonal de coeficientes constantes $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ésta elección es debida a que esta ley de control conduce a la siguiente dinámica para la coordenada z , la cual al sustituir (3.39) en (3.38) conduce a

$$\dot{z} = -\Lambda z \quad (3.40)$$

donde se observa, por las propiedades de la matriz Λ y el signo negativo, que el sistema (3.40) posee un equilibrio globalmente asintóticamente estable en el origen.

Sustituyendo (3.39) en (3.28) se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\chi}_1 = -\chi_2 \quad (3.41)$$

$$\dot{\chi}_2 = -\Lambda z - K \left(\frac{1}{1+\|\chi_1\|} - \frac{\|\chi_1\|}{(1+\|\chi_1\|)^2} \right) \chi_2 \quad (3.42)$$

$$\dot{z} = -\Lambda z \quad (3.43)$$

del cual se observa de la tercera ecuación que z está acotada y tiende a cero de forma exponencial, el acotamiento de χ_2 se garantiza observando que el término $\frac{1}{1+\|\chi_1\|} - \frac{\|\chi_1\|}{(1+\|\chi_1\|)^2}$ satisface

$$0 < \frac{1}{1+\|\chi_1\|} - \frac{\|\chi_1\|}{(1+\|\chi_1\|)^2} \leq 1, \quad \forall \chi_1 \in \mathcal{R}^n$$

por lo que este término es siempre un escalar positivo que depende de los errores de posición del robot manipulador y además, debido a $K > 0$ y al signo negativo, sabiendo que $z(t)$ converge a cero, se concluye que las trayectorias de $x_2(t)$ están acotadas y tienden a cero, por lo que también las trayectorias de $x_1(t)$ estén acotadas.

3.7. Resultados

Con el fin de ilustrar el desempeño del controlador (3.39) se llevó a cabo la implementación en simulación del mismo utilizando el modelo dinámico de un robot manipulador de 2 grados de libertad con articulaciones del tipo revolución mostrado en la figura 3.1. Para propósitos de comparación, la ley de control (3.39) es aquí denominada como ley de control I&I-2. La simulación es llevada a cabo considerando las siguientes condiciones iniciales para el brazo manipulador:

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_2(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las posiciones deseadas para los eslabones son establecidas como

$$x_d = \begin{bmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/2 \end{bmatrix},$$

con ganancias

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

para el controlador. Los valores de los parámetros del robot manipulador son los mostrados en la tabla 3.1. Los resultados obtenidos en simulación son mostrados en las graficas 3.6-3.8.

De la figura 3.6 se observa que el eslabón 1 alcanza la posición deseada $\frac{\pi}{4}$ rad en 1.8 seg, teniendo una respuesta suave (críticamente amortiguada). La velocidad angular no supera los $1.125 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$, el error de posición decrece y a partir de 1.8 seg éste no supera el valor de 0.001 rad. El par no sobrepasa en ningún momento el valor límite especificado de 150 Nm, comienza en 40.13 Nm y decrece hasta alcanzar un valor en estado estacionario de 28.46 Nm.

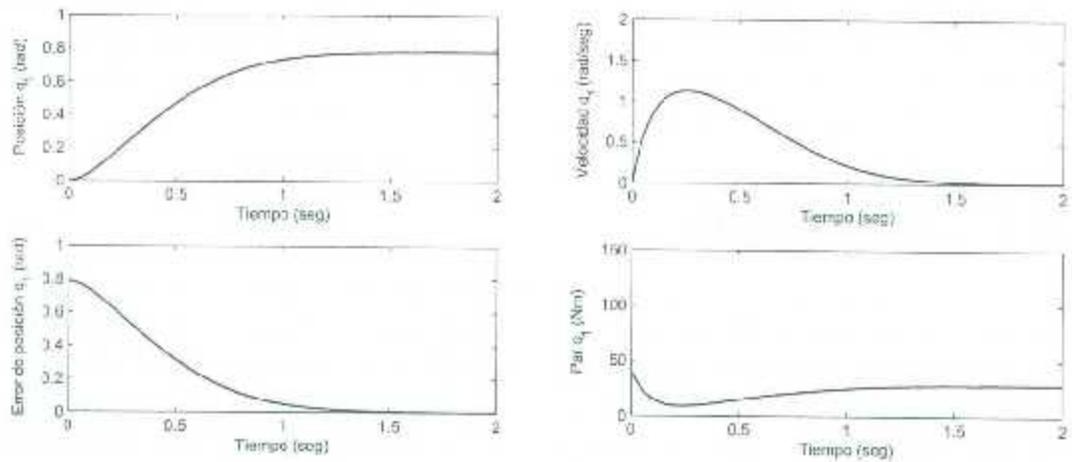


Figura 3.6: Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 1.

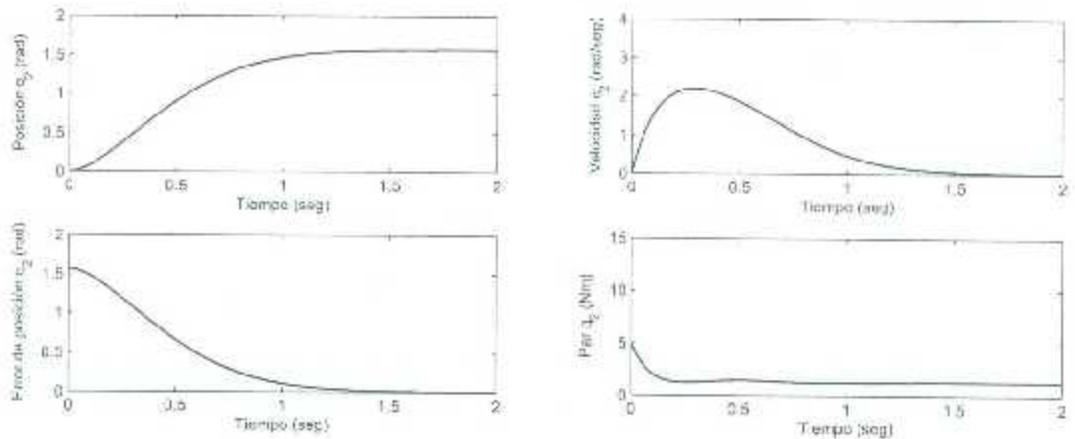
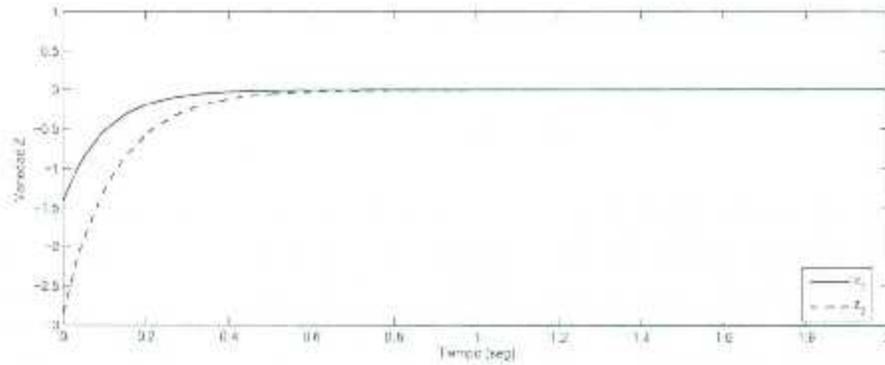


Figura 3.7: Posición, velocidad, error y par correspondientes al eslabón 2.

Un comportamiento similar es ilustrado en la figura 3.7 para el eslabón 2, donde se observa que éste alcanza la posición deseada $\frac{\pi}{2}$ rad en 1.95 seg, la velocidad angular se mantiene por debajo de los $2.2 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$, el error para la posición no supera los 0.001 rad pasados 1.95 seg y el par ejercido no supera los límites especificados para la tarea, éste comienza en 4.97 Nm y disminuye hasta alcanzar un valor en estado estacionario de 1.292 Nm. En la figura 3.8 se ilustra la respuesta de la dinámica z en donde se observa que ésta tiende a cero de forma exponencial en poco menos de un segundo.

Figura 3.8: Dinámica z hacia la variedad.

3.8. Comparación entre las leyes de control I&I-1, I&I-2 y PD+

Considere la ley de control PD más compensación de gravedad para un robot manipulador de 2 g.d.l. descrito en [3], dada por:

$$u = K_p \chi_1 - K_v \chi_2 + g(x_d - \chi_1) \quad (3.44)$$

donde K_p y K_v son matrices de diseño definidas positivas, asociadas a las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. La ley de control (3.44) será desde ahora denominada como PD+. Se ha utilizado el modelo dinámico (3.1) del robot manipulador de 2 g.d.l. descrito en la sección 3.3 cuyos parámetros son descritos en la tabla 3.1. Las condiciones iniciales utilizadas para la simulación son las establecidas en las secciones 3.5 y 3.7.

Con la finalidad de realizar una comparación en igualdad de condiciones entre los controladores I&I-1, I&I-2 y PD+, se han sintonizado las ganancias de cada uno de estos controladores para que efectúen la misma tarea de control. Esta tarea consiste en que el eslabón 1 del manipulador tenga una respuesta críticamente amortiguada y llegue a la posición deseada de $\frac{\pi}{7}$ rad en 1.5 segundos, tomando como referencia que se ha llegado a la posición deseada cuando el error de posición se encuentre entre ± 0.001 rad. De igual manera, el eslabón 2 deberá tener una respuesta críticamente amortiguada y llegar a la posición deseada de $\frac{\pi}{2}$ rad en 2 segundos. De esta forma se supone que los tres controladores tienen la capacidad de realizar en tiempo y forma la misma tarea de control de posición, cuyos parámetros están dados por:

$$K_p = \begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 9.4 \end{bmatrix}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

para la ley de control PD+;

$$K = \begin{bmatrix} 4.85 & 0 \\ 0 & 3.9 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

para la ley de control I&I-1 y

$$K = \begin{bmatrix} 6.4 & 0 \\ 0 & 4.8 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

para la ley de control I&I-2. Los resultados de la validación comparativa en simulación se exhiben a continuación. De la figura 3.9 se observa que el consumo inicial de par para el eslabón 1, en las leyes de control PD+ e I&I-1 es similar, teniendo un valor inicial de 86.39 Nm y 107.3 Nm, respectivamente. Por el contrario, el consumo inicial de par para la ley de control I&I-2 del eslabón 1 es mucho menor, teniendo un valor inicial de 51.02 Nm disminuyendo suavemente hasta llegar a un valor constante en estado estacionario de 28.49 Nm. Un comportamiento similar es observado para el eslabón 2; donde el par inicial para las leyes de control PD+ e I&I-1 es 14.77 Nm y 13.32 Nm, respectivamente, y el par con el que inicia el controlador I&I-2 es 6.176 Nm, iniciando muy por debajo de los demás controladores, para después establecerse en la posición en estado estacionario con valor de 1.291 Nm. Con esto se observa que aunque los tres controladores estudiados cumplen el

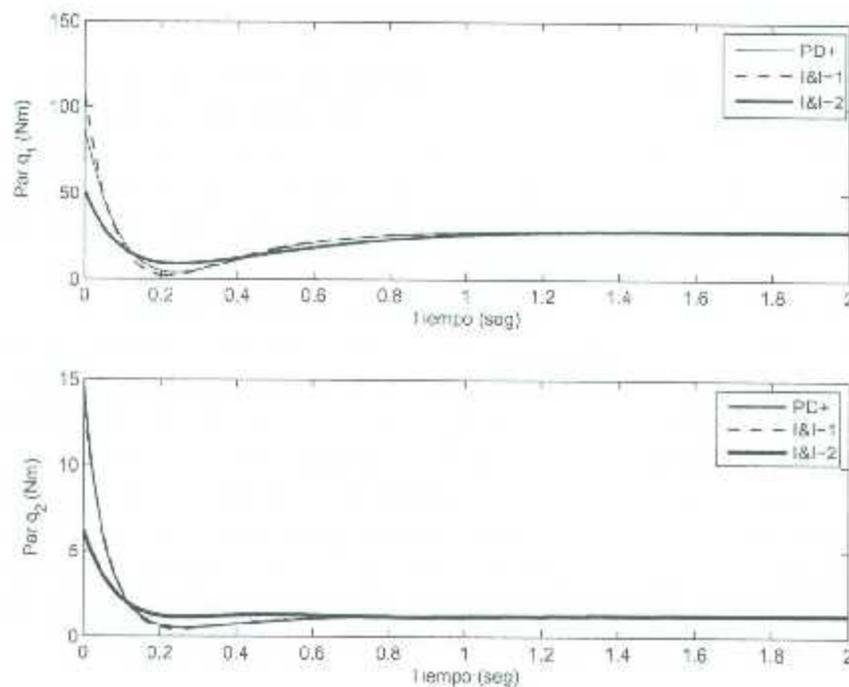


Figura 3.9: Par resultante leyes de control I&I-1, I&I-2 y PD+

objetivo de control de posición, el controlador I&I-2 lo hace ejerciendo significativamente una menor cantidad de par.

3.9. Respuesta controlador I&I incluyendo fricción viscosa

Con el objetivo de observar el comportamiento del sistema dinámico de un robot manipulador bajo la presencia de fricción, en esta sección se llevó a cabo la simulación de la aplicación de la ley de control I&I-1 e I&I-2 obtenidas en las secciones 3.4 y 3.6 para el caso del robot manipulador mostrado en la sección 3.3 incluyendo fricción viscosa. Considerando un modelo estático de fricción en las uniones rotacionales, la ecuación dinámica general del manipulador está dada por:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau \quad (3.45)$$

donde $f(\dot{q}) = F_v\dot{q}$ es el término de fricción viscosa y F_v es una matriz diagonal de coeficientes constantes correspondientes a los coeficientes de fricción viscosa de cada una de las articulaciones del manipulador $F_v = \text{diag}(fv_1, \dots, fv_n)$. Los coeficientes de fricción viscosa utilizados en simulación son :

$$F_v = \begin{bmatrix} 2.288 & 0 \\ 0 & 0.175 \end{bmatrix}$$

Las siguientes gráficas muestran los resultados obtenidos en simulación para las leyes de control I&I-1 e I&I-2 al incluir el término de fricción viscosa en el modelo dinámico del robot.

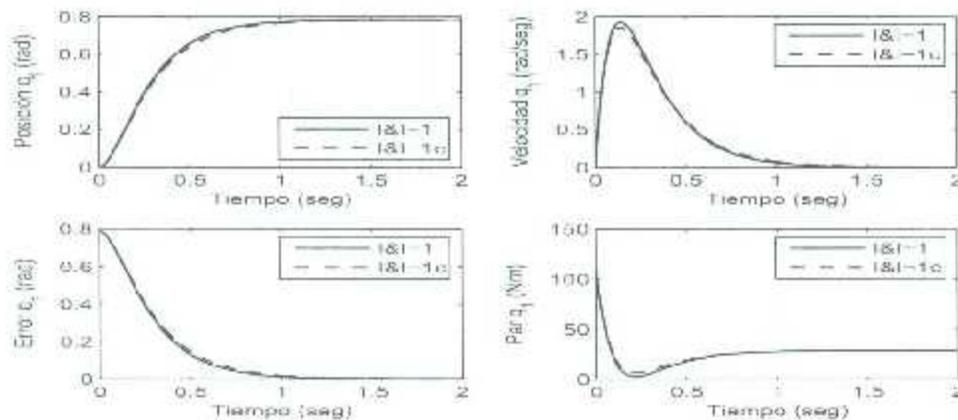


Figura 3.10: Respuesta del sistema con y sin fricción para el eslabón 1 utilizando la ley de control I&I-1, I&I-1c indica la presencia de fricción en el modelo.

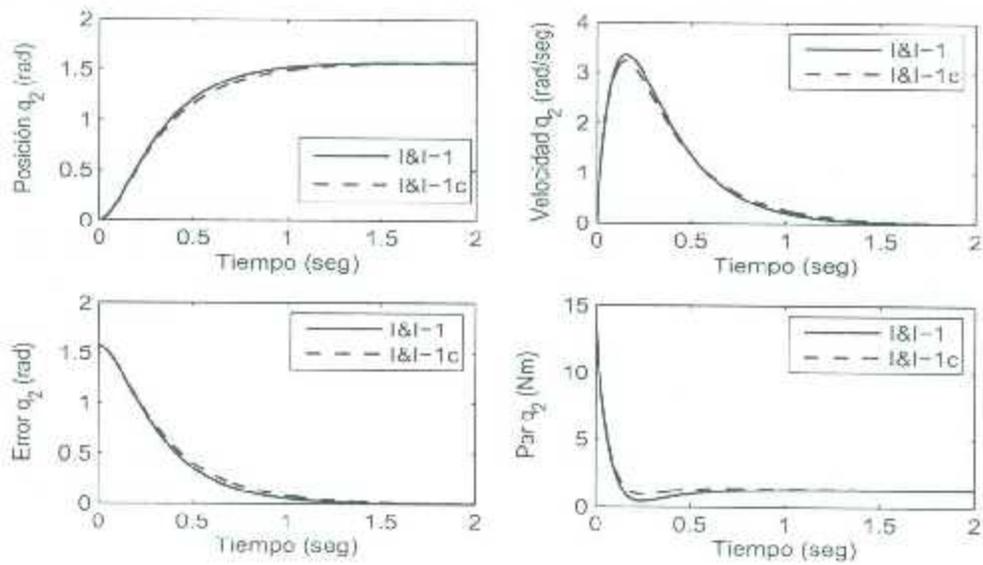


Figura 3.11: Respuesta del sistema con y sin fricción para el eslabón 2 utilizando la ley de control I&I-1, I&I-1c indica la presencia de fricción en el modelo.

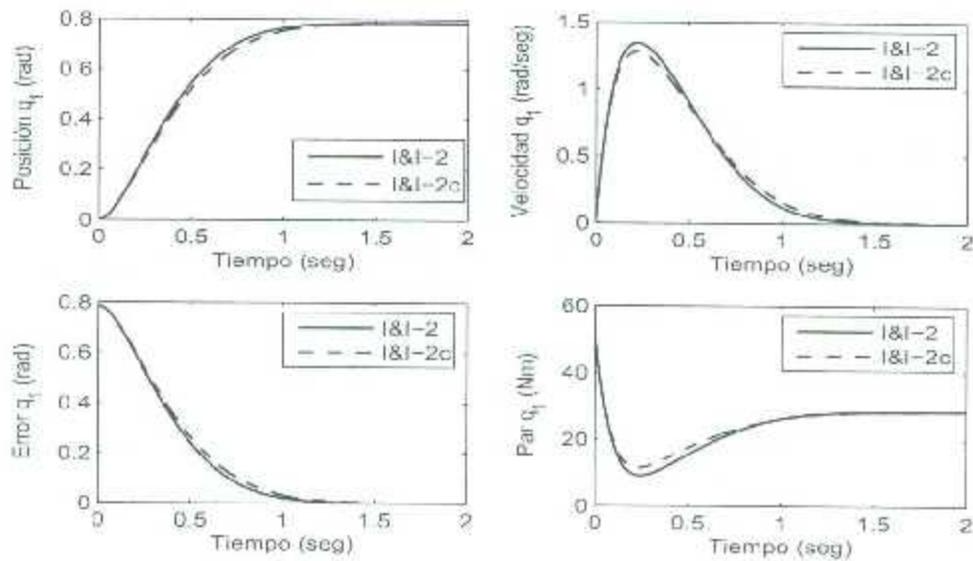


Figura 3.12: Respuesta del sistema con y sin fricción para el eslabón 1 utilizando la ley de control I&I-2, I&I-2c indica la presencia de fricción en el modelo.

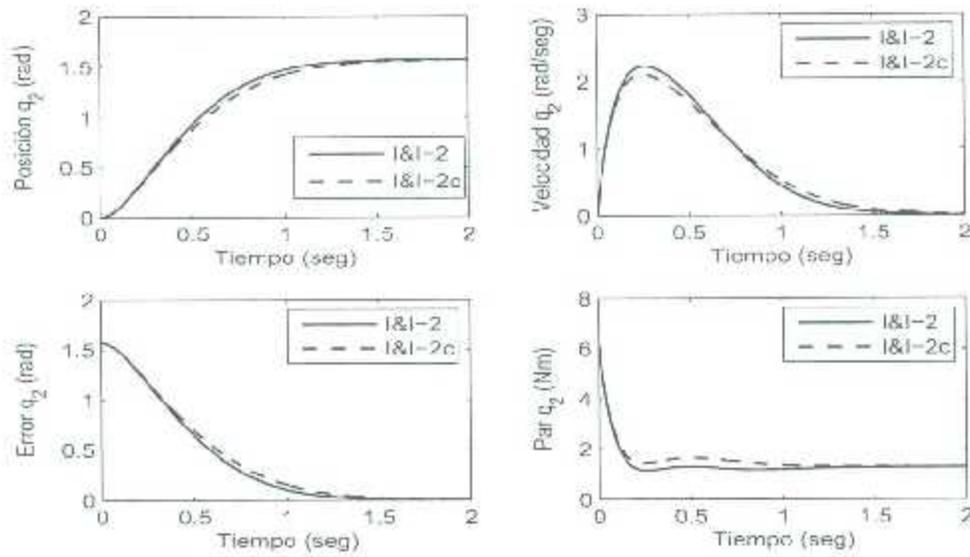


Figura 3.13: Respuesta del sistema con y sin fricción para el eslabón 2 utilizando la ley de control I&I-2. I&I-2c indica la presencia de fricción en el modelo.

Se observa de las figuras 3.10-3.13 que el comportamiento del sistema ante la presencia de fricción es muy parecido y no es de extrañarse, debido a que sólo se ha incluido el modelo de fricción viscosa cuyos valores son relativamente bajos como para representar un gran cambio en la respuesta del sistema.

Capítulo 4

Control de postura para un vehículo espacial vía I&I

Una nave espacial o satélite es un vehículo diseñado para funcionar más allá de la atmósfera terrestre. Los vehículos espaciales robóticos potencialmente representan una alternativa económica y segura o complementaria para el hombre en la construcción, mantenimiento y operación de estructuras espaciales. Sin embargo, estos representan problemas de control específicos y difíciles, en gran parte debido a las dinámicas no lineales.

En este capítulo se aborda el control de seguimiento de postura vía I&I de un vehículo espacial operado por ruedas de reacción. En la práctica, los vehículos espaciales pueden además estar equipados con sistemas de propulsión de gas que se usan para controlar el movimiento traslacional del sistema o compensar el momento traslacional impartido por las cargas o evitar saturación en las ruedas de reacción.

4.1. Modelo dinámico de un vehículo espacial

Un vehículo espacial es considerado como un cuerpo rígido cuya postura puede ser descrita por las ecuaciones cinemáticas, las cuales relacionan las derivadas temporales de las coordenadas para la posición angular con la velocidad angular, y las ecuaciones de la dinámica, las cuales describen la evolución de la velocidad angular.

Primeramente habrán de definirse los marcos de referencia para los cuales será descrito el problema de control de postura. Se asume que los pares de control serán aplicados a través de un conjunto de ruedas de reacción a lo largo de tres ejes ortonormales, ver figura 4.1. Basados en estos ejes se define un marco de referencia ortonormal arbitrario ligado al vehículo espacial, al cual nos referiremos como *marco del vehículo espacial*. El origen del marco del vehículo espacial no necesariamente deberá coincidir con el centro de masa del mismo ni los ejes serán necesariamente los ejes principales del vehículo espacial. Asuma la definición de un marco de referencia inercial arbitrario con respecto a, ya sea, algún conjunto fijo de estrellas o alguna referencia que pueda ser considerada como inercial durante la maniobra de postura, como por ejemplo alguna estación espacial.

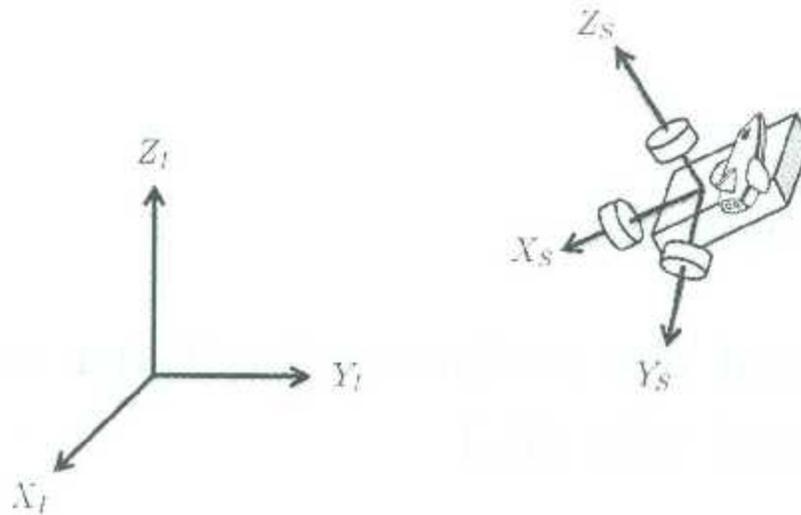


Figura 4.1: Marcos de referencia en el control de postura, a través de ruedas de reacción, de un satélite.

El vector de velocidades angulares del vehículo espacial es denotado por w . Las ecuaciones que describen la evolución de w en el tiempo son descritas como

$$H\dot{w} = p \times w + \tau \quad (4.1)$$

con la matriz de inercias H simétrica y definida positiva, la cual, puede ser escrita como

$$H = H^0 - H^A \quad (4.2)$$

dónde H^0 es la matriz de inercias central total, la cual incluye la inercia del vehículo espacial y la inercia de las ruedas de reacción, H^A es la matriz diagonal de inercia de las ruedas axiales y p es el momento angular total del vehículo espacial, todos expresados en las coordenadas del vehículo espacial. τ es el vector de pares aplicados al vehículo espacial a través de las ruedas de reacción (τ es el vector de pares de control actual aplicado por los motores de las ruedas de reacción). El operador " \times " denota la operación producto vectorial. La notación $[v \times]$ se refiere a la matriz antisimétrica que define el producto vector por un vector v [27], i.e.,

$$[v \times] = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.1.1. Ecuaciones cinemáticas

La posición angular del cuerpo puede ser descrita de varias formas. Por ejemplo, podemos considerar el tan conocido vector de Gibbs

$$\xi = \tan(\rho/2)e$$

el cual resulta de una parametrización de cuaterniones. El vector ξ representa el resultado de una rotación virtual de ρ radianes alrededor de un eje unitario virtual e , con referencia al inercial. En este caso se puede escribir

$$\dot{\xi} = Z(\xi)w$$

donde

$$Z(\xi) = \frac{1}{2}[I + \xi\xi^T + \xi \times]$$

con $I \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$. Esta descripción es válida para $-\pi < \rho < \pi$. Empleando ésta representación el momento p puede expresarse como una función de ξ al notar que

$$p = C(\xi)p^I \quad (4.4)$$

donde p^I es el momento angular inercial constante y la matriz $C(\xi)$ representa la transformación de coordenadas del marco inercial al marco del vehículo espacial

$$C(\xi) = 2(1 + \xi^T \xi)^{-1}[I + \xi^T \xi \quad \xi \times] - I$$

teniendo en cuenta que $C^{-1}(\xi) = C^T(\xi) = C(-\xi)$.

Alternativamente, la postura del cuerpo puede ser descrita usando la clásica representación de los ángulos de Euler, la cual consiste de las rotaciones angulares sucesivas en el sentido horario de los ángulos ϕ , θ , y ψ (balanceo, cabeceo y guiñada), permite alinear el marco de referencia inercial con el marco del vehículo espacial. En este caso se tiene

$$\dot{\gamma} = M(\gamma)w \quad (4.5)$$

donde $\gamma = (\phi, \theta, \psi)^T$, con

$$M(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix}$$

cuya descripción es válida en la región $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ (otras representaciones usan cuatro parámetros de Euler para evitar tales singularidades). Usando ésta última representación podemos escribir para p una expresión similar a (4.4), como

$$p = R(\gamma)p^I \quad (4.6)$$

donde $R(\gamma)$ representa la matriz de transformación de coordenadas del marco inercial a las coordenadas del vehículo espacial

$$R(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \cos\psi \sin\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\phi & \cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \\ \sin\psi \cos\theta & \sin\psi \sin\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \\ -\sin\psi & \cos\psi \sin\theta & \cos\psi \cos\phi \end{bmatrix}.$$

4.1.2. Modelo dinámico

Las ecuaciones que describen la postura de un vehículo espacial están dadas en forma sintética como

$$\begin{aligned} H\dot{w} &= p \times w + \tau \\ \dot{x} &= J(x)w \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde dependiendo de la representación utilizada para las ecuaciones de la cinemática, el vector x puede ser el vector γ para la postura o el vector ξ de Gibbs, con $R(\gamma) = C(\xi)$. Por consiguiente, la matriz J representa ya sea la matriz M o la matriz Z .

Considere el sistema descrito por (4.7) y utilice como coordenadas en el espacio de estados las componentes de los vectores x y \dot{x} . Esta elección resulta bien definida, debido a que la matriz $J(x)$ permanece invertible en el dominio de validez de la representación para la cinemática. Diferenciando la expresión de \dot{x} , las ecuaciones de movimiento pueden ser descritas como

$$H^*(x)\ddot{x} + C^*(x, \dot{x})\dot{x} = F \quad (4.8)$$

con

$$\tau = J^T(x)F$$

$$H^*(x) = J^{-T}(x)HJ^{-1}(x) \quad (4.9)$$

$$C^*(x, \dot{x}) = -J^T(x)HJ^{-1}(x)\dot{J}(x)J^{-1}(x) - J^{-T}(x)[p \times]J^{-1}(x) \quad (4.10)$$

4.2. Objetivo de control

El objetivo de control consiste en encontrar una ley estabilizadora por realimentación de estados F , tal que, según el sistema de coordenadas cinemáticas utilizado, la trayectoria de postura del vehículo espacial $x(t)$ siga una trayectoria deseada $x_d(t)$, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_e(t) = 0 \quad (4.11)$$

donde x_e describe el error de seguimiento y está definido como $x_e = x_d(t) - x(t)$ bajo el supuesto que las trayectorias de seguimiento $x_d(t)$ están acotadas.

4.3. Diseño del controlador

Para la obtención de la ley de control por realimentación estática de estados vía I&I es necesario reescribir el sistema (4.8) de forma conveniente para luego utilizar el teorema 2.1 en la búsqueda del objetivo de control. Para este fin, el sistema (4.8) puede reescribirse en términos de los estados $x_1 = x$, y $x_2 = \dot{x}$ como sigue

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.12)$$

$$\dot{x}_2 = H^*(x_1)^{-1}[F - C^*(x_1, x_2)x_2] \quad (4.13)$$

Definiendo ahora el error de posición como

$$x_e = x_d - x_1 \quad (4.14)$$

el sistema queda descrito como

$$\dot{x}_e = \dot{x}_d - x_2 \quad (4.15)$$

$$\dot{x}_2 = H^*(x_d - x_e)^{-1} F - C^*(x_d - x_e, x_2)x_2 \quad (4.16)$$

donde x_d y \dot{x}_d son los vectores de posición y velocidad deseadas, respectivamente. Con el sistema (4.8) descrito en términos del vector de error de posición, podemos abordar el diseño del controlador aplicando el Teorema 2.1, para lo cual empezamos por seleccionar la dinámica objetivo.

(A1) *Propuesta de la dinámica objetivo.*

Se define el siguiente sistema objetivo

$$\dot{\xi} = -K\xi \quad (4.17)$$

donde $K \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ con $K > 0$ es una matriz de diseño diagonal de coeficientes constantes $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$ y $\xi \in \mathcal{R}^3$. Este sistema tiene un equilibrio asintóticamente estable de forma global y uniforme en el origen $\xi^* = 0$. La elección de este sistema dinámico objetivo es debido a que se desea que el comportamiento del error de posición sea igual al del sistema (4.17), *i.e.*, que el error de posición converja a cero de forma asintótica como lo describe el sistema objetivo.

(A2) *Condición de inmersión.*

Se define el mapeo $\pi(\cdot)$ como sigue

$$\begin{bmatrix} x_e \\ x_2 \end{bmatrix} = \pi(\xi) = \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

donde el mapeo π_1 deberá seleccionarse de tal manera que imite el comportamiento de ξ , ya que deseamos que la evolución en el tiempo de x_e sea gobernada por el sistema dinámico objetivo (4.17), por lo que el mapeo $\pi(\cdot)$ es definido como

$$\pi(\xi) = \begin{bmatrix} \xi \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

por lo que solo nos resta encontrar el mapeo $\pi_2(\xi)$. Sustituyendo el mapeo (4.19) en el sistema (4.15)-(4.16).

$$\dot{\pi}_1(\xi) = \dot{\xi} = -K\xi = \dot{x}_d - \pi_2(\xi) \quad (4.20)$$

$$\dot{\pi}_2(\xi) = H^*(x_d - \xi)^{-1} F - C^*(x_d - \xi, \pi_2(\xi))\pi_2(\xi) \quad (4.21)$$

se obtiene de (4.20) el mapeo $\pi_2(\xi)$, por lo que el mapeo completo de $\pi(\xi)$ está dado como

$$\pi(\xi) = \begin{bmatrix} \pi_1(\xi) \\ \pi_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{x}_d + K\xi \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Una vez obtenido el mapeo (4.22), el siguiente paso en el diseño del controlador I&I consiste en la determinación de una variedad que satisfaga la condición (A3) del teorema 2.1.

(A3) Variedad implícita.

Se define el siguiente conjunto identidad

$$\{x_e, x_2 \in \mathcal{R}^3 | \phi(x_e, x_2) = 0\} = \{x_e, x_2 \in \mathcal{R}^3 | x_e = \pi_1(\xi), x_2 = \pi_2(\xi) \forall \xi \in \mathcal{R}^3\} \quad (4.23)$$

el cual incluye una función $\phi(x_e, x_2)$, ésta puede ser obtenida utilizando la siguiente ecuación

$$\phi(x_e, x_2) = x_2 - \pi_2(\pi_1^{-1}(x_e)) = 0,$$

la cual cumple con la definición (4.23). Sustituyendo $\pi_1^{-1}(x_e) = x_e$ obtenemos

$$\phi(x_e, x_2) = x_2 - \pi_2(x_e) = 0;$$

sustituyendo el mapeo $\pi_2(\cdot)$ descrito en (4.22) resulta

$$\phi(x_e, x_2) = x_2 - \dot{x}_d - Kx_e = 0.$$

Una vez establecida la identidad para la función anterior, el siguiente paso en el diseño del controlador I&I consiste en llevar los estados del sistema que se encuentren fuera de la variedad descrita en el conjunto identidad (4.23) a esta misma y hacerla invariante, i.e., que una vez que los estados se encuentren dentro de la variedad, estos no la abandonen.

(A4) Acotamiento de trayectorias para la dinámica fuera de la variedad.

Se define la siguiente coordenada fuera de la variedad

$$z = \phi(x_e, x_2) \quad (4.24)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (4.15)-(4.16) resulta

$$\dot{z} = \dot{x}_2 - \ddot{x}_d - K\dot{x}_e. \quad (4.25)$$

Sustituyendo (4.15)-(4.16) en (4.25) obtenemos

$$\dot{z} = H^*(x_d - x_e)^{-1} [F - C^*(x_d - x_e, x_2)x_2] - \ddot{x}_d - K[\dot{x}_d - x_2] \quad (4.26)$$

de donde habrá de seleccionarse una ley de control F tal que las trayectorias del sistema (4.26) estén acotadas y tiendan a cero. Más aun, habrá de seleccionarse una ley de control que lleve a la coordenada z a cero, de forma exponencial. Dicha ley de control está dada por

$$F = H^*(x_d - x_e)^{-1} [-\gamma z + \ddot{x}_d + K\dot{x}_d - Kx_2] + C^*(x_d - x_e, x_2)x_2 \quad (4.27)$$

Con esta selección, la dinámica del sistema z resulta

$$\dot{z} = -\gamma z \quad (4.28)$$

donde $\gamma \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$, con $\gamma > 0$, es una matriz de diseño diagonal de coeficientes constantes $\gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Substituyendo (4.27) en el sistema (4.15)-(4.16) se obtiene

$$\dot{z} = -\gamma z \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_e = \ddot{x}_d - x_2 \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_2 = -\gamma z + \ddot{x}_d + K\dot{x}_d - Kx_2 \quad (4.31)$$

de donde ahora solo resta demostrar que las trayectorias del sistema dinámico descrito por las ecuaciones (4.29)-(4.31) están acotadas. Para esto, se define la siguiente coordenada

$$x_{ep} = \dot{x}_d - x_2 \quad (4.32)$$

con lo que el sistema queda descrito como

$$\dot{z} = -\gamma z \quad (4.33)$$

$$\dot{x}_e = x_{ep} \quad (4.34)$$

$$\dot{x}_{ep} = \gamma z - Kx_{ep} \quad (4.35)$$

de donde se observa de la ecuación (4.33) que la coordenada z tiende exponencialmente a cero y en consecuencia las trayectorias del sistema dinámico descrito en la ecuación (4.35) se encuentran acotadas y más aún, éstas tienden a cero, lo que implica que el sistema (4.34) está acotado, satisfaciéndose de esta manera **(A4)** del teorema 2.1.

4.4. Resultados

Con el fin de ilustrar el comportamiento de controlador (4.27), se ha realizado la simulación del mismo utilizando como coordenadas de postura los ángulos de Euler descritos en las ecuaciones cinemáticas (4.5) y (4.6) [14].

La aceleración, velocidad y posición, que describen la trayectoria que deberán seguir cada una de las coordenadas de postura del vehículo espacial, se muestran en la figura 4.2. La trayectoria consiste en seis fases. Una primera fase de aceleración constante durante un segundo hasta llegar a una posición $x_d = [0.5, 0.5, 0.5]^T$; una segunda fase de desaceleración constante durante un segundo hasta llegar a la posición $x_d = [1, 1, 1]^T$; una tercera fase sin aceleración durante tres segundos en los que la posición se mantiene constante; una cuarta fase de desaceleración constante durante un segundo para llegar de nuevo a la posición $x_d = [0.5, 0.5, 0.5]^T$; una quinta fase de aceleración constante durante un segundo para regresar a la posición de inicio $x_d = [0, 0, 0]^T$ y una sexta fase que consiste en tres segundos sin aceleración. Los parámetros del sistema utilizados en simulación están dados por

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{bmatrix}, \quad F^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

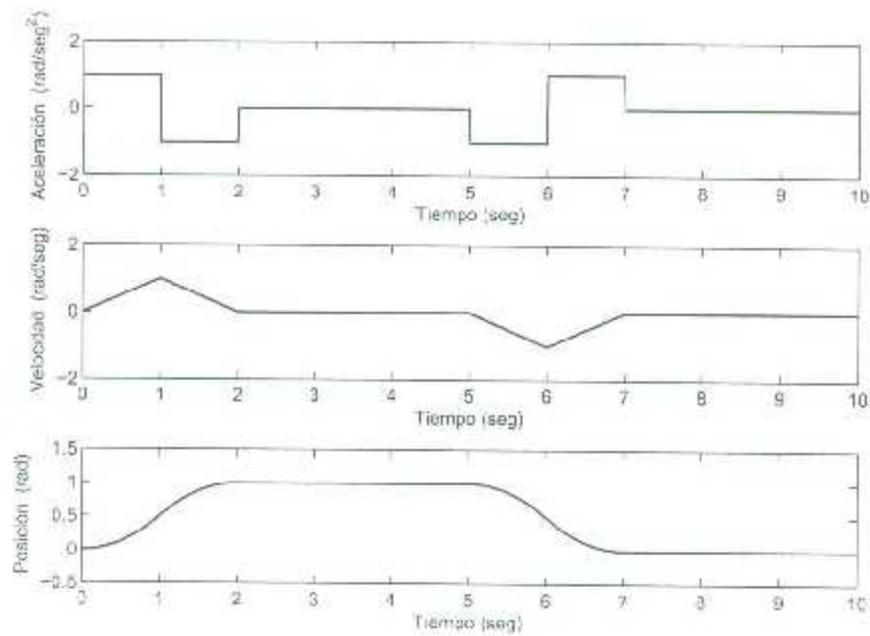


Figura 4.2: Aceleración, velocidad y posición que describen la trayectoria de seguimiento para las tres coordenadas de orientación del vehículo espacial.

La postura inicial del vehículo espacial es establecida como

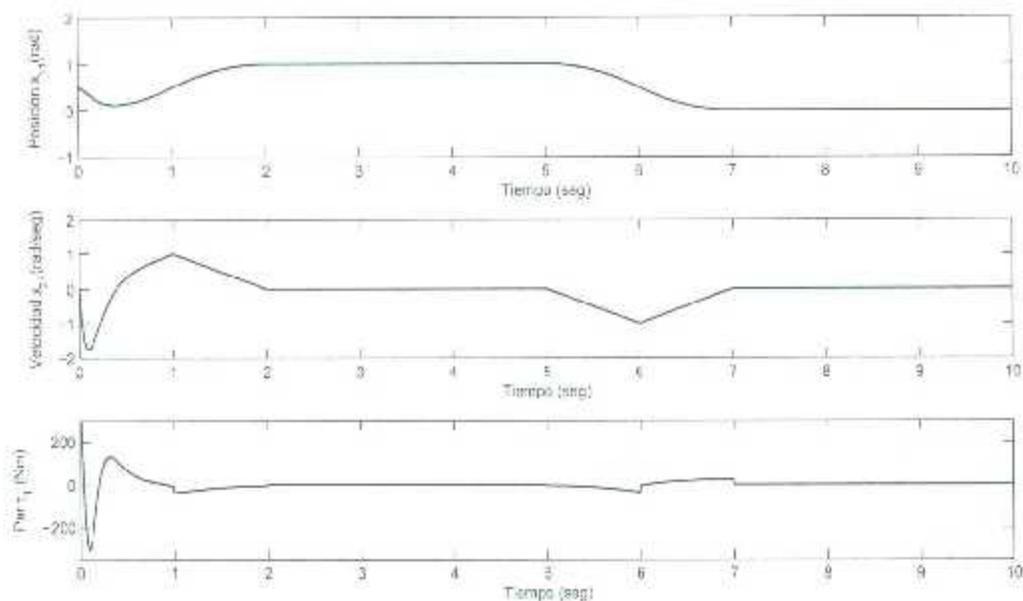
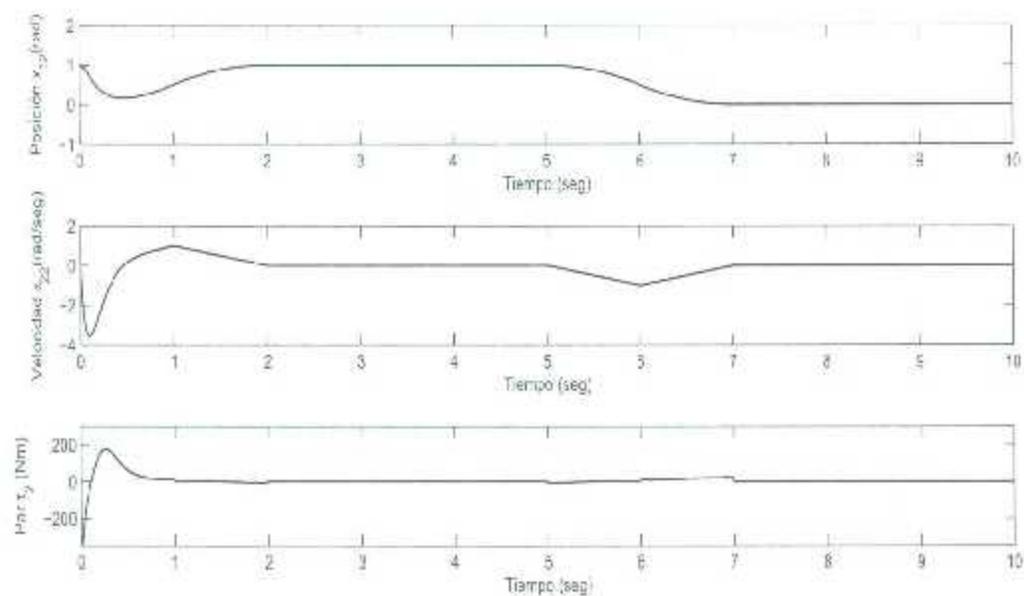
$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

con parámetros del controlador dados por

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Los resultados obtenidos en simulación son mostrados en las figuras 4.3-4.6.

Figura 4.3: Respuesta coordinada de postura x_{11} .Figura 4.4: Respuesta coordinada de postura x_{12} .

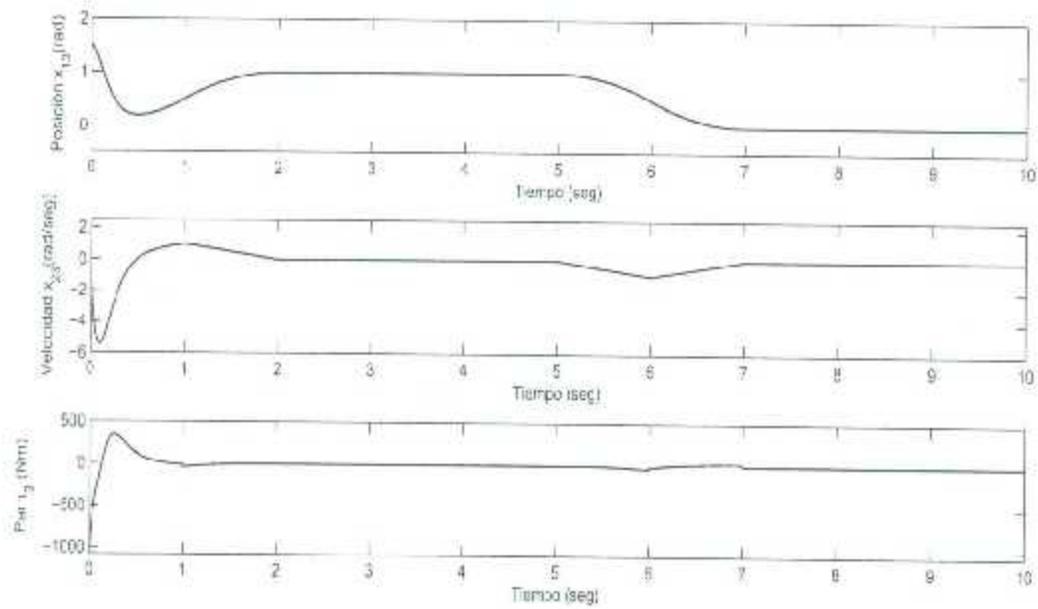


Figura 4.5: Respuesta coordinada de postura x_{13} .

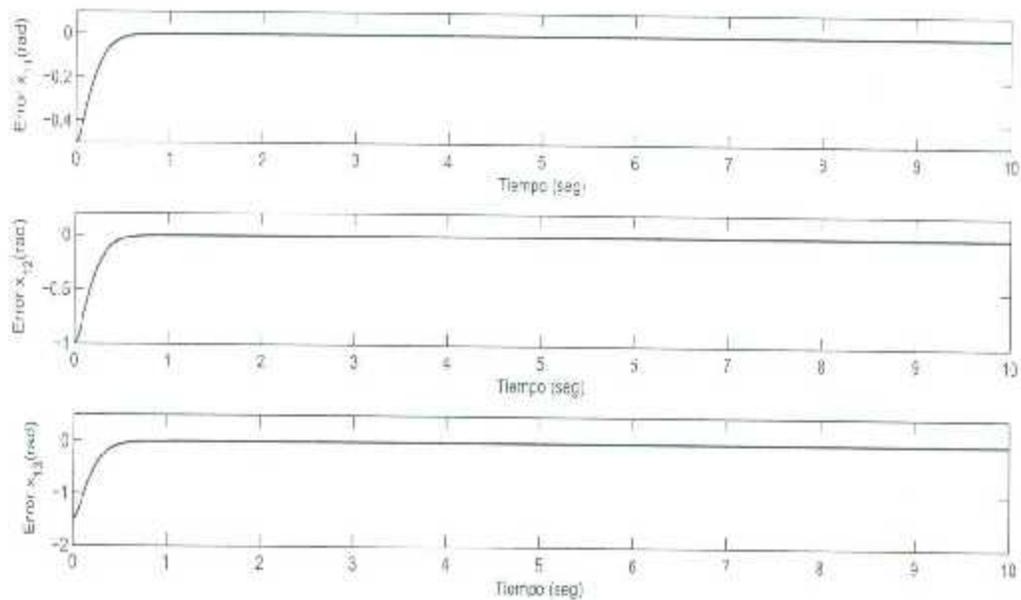


Figura 4.6: Errores de postura.

Se observa de la figura 4.3 que la posición de la coordenada x_{11} comienza en un valor de 0.5 rad y transcurridos 0.8 seg ya se encuentra describiendo la trayectoria deseada; lo mismo sucede con la velocidad que comienza en cero y alcanza un valor negativo de $-1.8 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ para después aumentar y transcurridos aproximadamente 0.8 seg ya se comporta como lo exige la trayectoria deseada. El par comienza en aproximadamente 300 Nm y disminuye hasta -300 Nm para después comportarse como lo requiere la trayectoria deseada. Un comportamiento similar es observado para las demás coordenadas de postura y de la figura 4.6 se observa que los errores de posición tienden a cero y lo hacen en aproximadamente 0.8 seg cumpliéndose el objetivo de control de seguimiento de trayectoria.

Capítulo 5

Conclusiones

Se estudia y aplica la metodología de I&I propuesta en [1, 2] para la obtención de leyes de control estáticas estabilizadoras por realimentación de estados para sistemas no lineales. El enfoque que propone esta metodología consiste en seleccionar un sistema dinámico objetivo con ciertas propiedades de estabilidad, de menor orden en comparación con el sistema dinámico a controlar y buscar luego, sumergir la dinámica del sistema completo dentro de la del sistema objetivo. La principal dificultad de este enfoque se encuentra en la inmersión, la cual consiste en encontrar un mapeo a través del sistema, resolviendo una serie de ecuaciones diferenciales parciales que en la mayoría de las ocasiones son difíciles de resolver. Estas dificultades pueden ser reducidas seleccionando un sistema objetivo que facilite esta resolución, al dejar algunos términos del sistema objetivo como funciones de diseño que serán seleccionadas posteriormente para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, sin que el sistema objetivo pierda sus propiedades de estabilidad.

En cuanto al control de regulación de un robot manipulador de n -g.d.l. vía I&I, resulta evidente que la obtención de la ley de control (3.23), utilizando como sistema dinámico objetivo (3.9), es relativamente más simple en comparación con otras leyes de control, al no tener que lidiar con la prueba de estabilidad en el sentido de Lyapunov para el sistema completo además de que propone partir el problema de control en otros subproblemas que en algunas ocasiones resultan más fáciles de resolver. De los resultados obtenidos en la sección 3.5 se demuestra que la ley de control (3.23) cumple el objetivo de control. Uno de los grados de libertad que permite el enfoque de la metodología I&I es que la selección del sistema dinámico objetivo no es única, esta ventaja es analizada en la sección 3.6 donde se selecciona otro sistema dinámico objetivo (3.26) para el sistema (3.5) con lo que se obtiene la ley de control (3.39), de donde, por los resultados obtenidos en la sección 3.7, se permite concluir que esta ley cumple con el objetivo de control.

El control de postura en acción de seguimiento para un vehículo espacial es mostrado en la sección 4.3, donde se utiliza el sistema dinámico objetivo (4.17) cuya elección es debida a que se busca que los errores de posición de las coordenadas operacionales, según la cinemática seleccionada, tiendan a cero de forma exponencial; con esta elección y desarrollando los pasos descritos por la metodología I&I resulta en la ley de control (4.27), la cual, como se observó en la sección 4.4, cumple con el objetivo de control de seguimiento.

Preliminares matemáticos

Estabilidad de Lyapunov y convergencia

Definición A.1

Una función continua $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ se dice que es definida positiva (semidefinida) si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ ($V \geq 0$) para toda $x \neq 0$; se dice que es definida (semidefinida) negativa si $-V(\cdot)$ es definida (semidefinida) positiva.

Definición A.2

Una matriz P real se dice que es definida positiva (semidefinida) si ésta es simétrica y la función $V(x) = x^T P x$ es definida positiva (o semidefinida positiva). Note que $P = P^T$ es positiva definida (o semidefinida positiva) si y solo si todos los eigenvalores de P son positivos (no negativos).

Definición A.3

Una función continua $\gamma : \mathcal{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$ se dice que es de clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\gamma(0) = 0$; se dice que ésta es de clase \mathcal{K}_∞ si además ésta es desacotada, i.e., $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty$.

Definición A.4

Una función continua $\beta : \mathcal{R}_{\geq 0} \times \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$ se dice que es de clase \mathcal{KL} si, para cada t , la función $\beta(s, t)$ es de clase \mathcal{K} y, para cada s , la función $\beta(s, t)$ es decreciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$.

Definición A.5

Una función continua definida positiva $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ se dice que es radialmente desacotada (o propia) si existe una función $\alpha(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ tal que $V(x) \geq \alpha(\|x\|)$ para toda $x \in \mathcal{R}^n$.

Lema A.1

Sea $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ una función continua definida positiva (y radialmente desacotada). Luego existen funciones $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ de clase \mathcal{K}_∞ tales que $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$.

Usando las definiciones anteriores la estabilidad de Lyapunov puede ser formulada como sigue.

Teorema A.1

Considere el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, donde $x \in \mathcal{R}^n$ y $t \geq t_0$, con un punto de equilibrio $x = 0$, y se supone que existe una función $V(x, t)$, \mathcal{C}^1 tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -\kappa(\|x\|),$$

donde $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ son funciones de clase \mathcal{K}_∞ y $\kappa(\cdot)$ es una función definida positiva. Luego $x = 0$ es globalmente estable. Si además la función $\kappa(\cdot)$ es de clase \mathcal{K} , luego $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable (GAS).

Definición A.6

Una función $V(x, t)$ satisfaciendo las condiciones del Teorema A.1 es denominada una función de Lyapunov para el sistema $\dot{x} = f(x, t)$.

Los siguientes teoremas debidos a LaSalle son usados para probar convergencia asintótica para un equilibrio incluso aún cuando la función $\kappa(\cdot)$ es únicamente semidefinida positiva.

Teorema A.2

Considere el sistema $\dot{x} = f(x)$, donde $x \in \mathcal{R}^n$, y sea $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ un conjunto compacto positivamente invariante, i.e., $x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega, \forall t \in \mathcal{R}$. Sea $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ una función \mathcal{C}^1 tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el más grande conjunto invariante en E . Luego toda trayectoria comenzando en Ω alcanzará a M conforme t tiende a ∞ .

Teorema A.3

Considere el sistema $\dot{x} = f(x, t)$, donde $x \in \mathcal{R}^n$ y $t \geq t_0$, con un punto de equilibrio $x = 0$, donde $f(x, t)$ es localmente Lipschitz uniformemente en t , y suponga que existe una función $V(x, t)$, \mathcal{C}^1 tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -W(x) \leq 0,$$

donde $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$ son funciones de clase \mathcal{K}_∞ y $W(\cdot)$ es una función \mathcal{C}^0 . Luego $x = 0$ es globalmente estable y, más aún,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0$$

Variedades invariantes e inmersión de sistemas

En esta sección se da la definición de variedad invariante [26] y sistema en inmersión [27].

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \quad y = h(x), \quad (5.1)$$

con estado $x \in \mathcal{R}^n$ y salida $y \in \mathcal{R}^m$.

Definición A.7

La variedad $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{R}^n | s(x) = 0\}$, con $s(x)$ suave, se dice que es (positivamente) invariante para $\dot{x} = f(x)$ si $s(x(0)) = 0$ implica $s(x(t)) = 0$, para todo $t \geq 0$.

Considere ahora el sistema (objetivo)

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi), \quad \zeta = \beta(\xi), \quad (5.2)$$

con estados $\xi \in \mathcal{R}^p$ ($p < n$) y salida $\zeta \in \mathcal{R}^m$.

Definición A.8

El sistema (5.2) se dice que está inmerso dentro del sistema (5.1) si existe un mapeo suave $\pi : \mathcal{R}^p \mapsto \mathcal{R}^n$ satisfaciendo $x(0) = \pi(\xi(0))$ y $\beta(\xi_1) \neq \beta(\xi_2) \mapsto h(\pi(\xi_1)) \neq h(\pi(\xi_2))$ y tal que

$$f(\pi(\xi)) = \frac{\partial \pi}{\partial \xi} \alpha(\xi)$$

y

$$h(\pi(\xi)) = \beta(\xi)$$

para todo $\xi \in \mathcal{R}^p$.

Por lo tanto, en términos generales, un sistema Σ_1 se dice que está inmerso dentro de un sistema Σ_2 si el mapeo entrada-salida de Σ_2 es una restricción del mapeo entrada-salida de Σ_1 , i.e., cualquier respuesta de salida generada por Σ_2 es además una respuesta de salida de Σ_1 para un conjunto limitado de condiciones iniciales, vea *e.g.*, [17, 36].

Bibliografía

- [1] A. Astolfi and R. Ortega. Immersion and Invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 48(4):590-606, 2003.
- [2] A. Astolfi, D. Karagiannis and R. Ortega. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag London Ltd., London, 2008.
- [3] R. Kelly, y V. Santibañez. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Madrid: Pearson Education, 2003. 344p ISBN 9788420538310.
- [4] W.M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1985.
- [5] H. Nijmeijer and A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [6] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1995.
- [7] P.V. Kokotovic. Recent trends in feedback design: an overview. *Automatica*, 21(3) :225-236, 1985.
- [8] B.D. Riedle and P.V. Kokotovic. Integral manifolds of slow adaptation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 31(4):316-324, 1986.
- [9] J. Carr. *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag, 1981.
- [10] D. Aeyels. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. *Systems & Control Letters*, 5(5):289-294, 1985.
- [11] R. Ortega, A. Lorfa, P.J. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag, London, 1998.
- [12] M. Krstic, I. Karellakopoulos, and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [13] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

- [14] J.J.E. Slotine, W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall Int. Editions, ISBN 0-13 040049-1, 1991.
- [15] A. Astolfi, R. Ortega, and R. Sepulchre. Stabilization and disturbance attenuation of nonlinear systems using dissipativity theory. *European Journal of Control*, 8(5):408-431, 2002.
- [16] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5):241-247, 1998.
- [17] C.I. Byrnes, F. Delli Priscoli, and A. Isidori. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhauser, Boston, 1997.
- [18] A. Isidori. A remark on the problem of semiglobal nonlinear output regulation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 42(12):1734-1738, 1997.
- [19] A.N. Michel, K. Wang, and B. Hu. *Qualitative Theory of Dynamical Systems: The Role of Stability Preserving Mappings*. Marcel Dekker, New York, 2nd edition, 2001.
- [20] V.I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [21] N. Kazantzis and C. Kravaris. Singular PDEs and the single-step formulation of feedback linearization with pole placement. *Systems & Control Letters*, 39(2):115-122, 2000.
- [22] C.I. Byrnes, A. Isidori, and J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(11):1228-1240, 1991.
- [23] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer-Verlag, London, 1998.
- [24] C.I. Byrnes, A. Isidori, and J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(11):1228-1240, 1991.
- [25] H. Rodríguez, H. Singuerdjane and R. Ortega. Experimental comparison of linear and nonlinear controllers for a magnetic suspension. *International Conference of Control Applications*, Anchorage, Alaska, USA September 25-27, 2000.
- [26] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [27] B. Etkin, Lloyd D. Reid. *Dynamics of Flight: Stability and Control*, Third edition, John Wiley & Sons, 1996.
- [28] I. Sarras, J.A. Acosta, R. Ortega and A.D. Mahindrakar. Constructive Immersion and Invariance Stabilization for a Class of Underactuated Mechanical Systems. *Automatica*, 49(5):1442-1448, 2013.

- [29] Emanuel Hristea, Houria Siguerdidjane. Stabilization of a Magnetic Suspension by Immersion and Invariance and Experimental Robustness Study. Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011.
- [30] Tarek Rabai, Chaouki Mnasri, Raoudha Ben Khaled and Moncef Gasmi. Adaptive Immersion and Invariance Control for a Class of Electromechanical Systems.
- [31] Philipp Rapp, Oliver Sawodny, and Cristina Tarin. An Immersion and Invariance based Speed and Rotation Angle Observer for the Ball and Beam System. 2013 American Control Conference (ACC) Washington, DC, USA, June 17-19, 2013.
- [32] Anli Shang, Wen-jin Gu and Dehai Yu and Yong Liang. Design of Missile Autopilot Applying The Immersion and Invariance Algorithm. Proceedings of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation, June 15-19, Hangzhou, P.R. China, 2004.
- [33] Yaprak Yalcin and Alessandro Astolfi. Discrete Time Immersion and Invariance Adaptive Control for Systems in Strict Feedback Form. 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC) Orlando, FL, USA, December 12-15, 2011.
- [34] Keigo Fujimoto, Makoto Yokoyama, and Yuji Tanabe. I&I-based adaptive control of a four-rotor mini helicopter. IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society.
- [35] Xiangbin Liu, Romeo Ortega, Hongye Su, and Jian Chu. Immersion and Invariance Adaptive Control of Nonlinearly Parameterized Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on automatic control*, september 2010.
- [36] P. Jouan. Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM J. Control and optimization*, 41(6):1756-1778, 2003.
- [37] R. Marino and P. Tomci. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. Prentice-Hall, London, 1995.
- [38] A. Astolfi, G. Escobar, R. Ortega, and A.M. Stankovic. An adaptive controller for the TCSC based on the immersion and invariance design technique. *In Proc. 14th Conf. Power Systems Computation, Seville, Spain, 2002*.
- [39] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Third edition. Prentice Hall, 2002.

