

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“El problema de inmersión en el control de  
un quadrotor”**

POR

**Ing. Héctor Claudio Olivas Muñoz**

**TESIS**

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Francisco Jurado Zamarripa

ISSN: 0188-9060

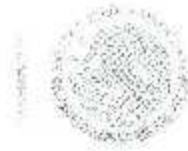


**RIITEC: (14)-TMCIE-2014**

Torreón, Coahuila, México  
Octubre 2014

SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
Instituto Tecnológico de La Laguna

2014, Año de Octavio Paz

Torrón, Coah. **27/Octubre/2014**  
Dependencia: DEPI/CPCIF  
Oficio: DEPI/CPCIE/134/2014  
Asunto: Autorización de  
impresión de tesis.


**C. HÉCTOR CLAUDIO OLIVAS MUÑOZ**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"EL PROBLEMA DE INMERSIÓN EN EL CONTROL DE UN QUADROTOR"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (14)-TMCIE-2014**, para que proceda a la impresión del mismo.

**ATENTAMENTE**  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACION

  
**DR. JOSÉ LUIS MEZA MEDINA**  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación  
del Instituto Tecnológico de la Laguna

JLMM/RHSR

  
SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA  
INSTITUTO TECNOLÓGICO  
de la Laguna  
División de Estudios de Posgrado  
e Investigación



Rvd. Revolución y Coah. Cuatrimor s/n Col. Centro C.P. 27000  
Torrón, Coah. Tel. 7051313, e-mail: [winaster@italaguna.edu.mx](mailto:winaster@italaguna.edu.mx)  
[www.italaguna.edu.mx](http://www.italaguna.edu.mx)



C. 



EDUCACIÓN  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

17913, Año de la Innovación

Torreón, Coah., 24/Octubre/2014

**DR. JOSE LUIS MEZA MEDINA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**


Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**""El problema de inmersión en el control de un quadrotor""**

Desarrollado por el **C. Héctor Claudio Olivas Muñoz**, con número de control **M1213024** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN




---

**Dr. Francisco Jurado Zamarripa**  
Asesor/Director de Tesis




---

**Dr. Alejandro H. Dzul López**  
Comité Tutorial




---

**Dr. Miguel A. Llana Leal**  
Comité Tutorial




---

**Dr. Víctor A. Santibañez Dávila**  
Comité Tutorial


*A mi hija Paula Estefanía y  
a mi esposa Nidia Fernanda.*

# Agradecimientos

A mi padre Dios por iluminarme y permitirme un logro más en mi vida.

A mi esposa Nidia Fernanda por apoyarme y alentarme a estudiar la maestría, sobre todo por su amor y cariño.

A mi padre y a mi madre por todo el esfuerzo y amor incondicional que nos han dado a mis hermanos y a mí para salir adelante.

A mi asesor de tesis el Dr. Francisco Jurado por su apoyo, paciencia y consejos durante la elaboración del presente trabajo, asimismo agradezco al Dr. Stefano D. Gemaro por su atención y comentarios referentes al problema de regulación robusta a la salida.

Al comité revisor, Dr. Víctor Santibañez, Dr. Enrique Ozul, y el Dr. Miguel A. Llama.

Al CONACYT por la beca otorgada.

Y por último pero no menos importante a mis compañeros de posgrado por el tiempo y experiencias compartidas, a Alejandro Flores, Ana García, Daniel Salomón, David Pérez, Guillermo Ávila, Heriberto Valdez, Luis A. Vázquez, Marco Rodríguez, Ramón Casanova y Sergio Salazar.

## Resumen

En este trabajo de tesis se presenta un estudio para la obtención del modelo matemático del helicóptero tipo quadrotor en términos de cuaterniones unitarios. En el diseño del controlador para vuelo estacionario y seguimiento de trayectoria se explora la estrategia del problema de regulación robusta a la salida para el caso de realimentación del error. Este controlador debe contener un modelo interno, para la solución de dicho problema, el cual se obtiene utilizando el concepto de inmersión. Se utiliza el paquete Matlab<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup> para verificar los resultados de desempeño del controlador propuesto cuando es aplicado al quadrotor.

**Palabras clave.** Cuaterniones, inmersión, modelo interno, parámetros de Euler, quadrotor, regulación a la salida, UAV.

## Abstract

This thesis work presents a study to obtain the mathematical model for a quadrotor in terms of unit quaternions. In the design of the controller for hovering and tracking, the robust output regulation problem approach is explored for the case of feedback error. This controller must contain an internal model for the solution of such problem, which is obtained under the concept of immersion. The software Matlab<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup> is used to verify the performance of the controller proposed when it is applied to the quadrotor.

**Keywords.** Euler parameters, immersion, internal model, output regulation, quadrotor, quaternions, UAV.

# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo de la tesis	6
1.1.1. Objetivo general	6
1.1.2. Objetivos específicos	6
1.2. Organización de la tesis	7
<b>2. Cuaterniones</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción	9
2.2. Definición de un cuaternión	12
2.3. Propiedades de los cuaterniones	13
2.4. Interpretaciones geométricas	18
2.4.1. Consideraciones algebraicas	19
2.4.2. Consideraciones geométricas	23
2.5. Algoritmo del operador	24
2.6. De cuaterniones a matrices	24
2.7. Las ecuaciones cinemáticas con cuaterniones	26
2.8. Velocidad espacial	28



2.8.1.	Ecuaciones dinámicas	29
2.8.2.	Ecuaciones cinemáticas	30
2.8.3.	Control de la orientación	31
2.8.3.1.	Selección de los estados	31
2.8.3.2.	Control de seguimiento	31
<b>3.</b>	<b>Quadrotor</b>	<b>37</b>
3.1.	Descripción física	37
3.2.	Descripción del modelo dinámico	39
3.3.	Ecuaciones cinemáticas	39
3.3.1.	Representación con ángulos de Euler	40
3.3.2.	Representación con cuaterniones	42
3.4.	Ecuaciones dinámicas	43
3.5.	Validación del modelo en cuaterniones	51
3.6.	Aproximación lineal	51
<b>4.</b>	<b>Controlador</b>	<b>59</b>
4.1.	El problema de regulación	59
4.1.1.	Problema de regulación a la salida con realimentación del vector de estados	62
4.1.2.	Problema de regulación a la salida con realimentación del error	63
4.2.	Regulación robusta	63
4.2.1.	Modelo interno y las immersiones	65
4.3.	Satélite	68
4.3.1.	Modelo del satélite	69
4.3.2.	Resultados	75
4.4.	Control del quadrotor	78
4.4.1.	Resultados	93
4.4.1.1.	Resultados de estabilización	93
4.4.1.2.	Resultados del seguimiento de trayectoria	99

5. Conclusiones	107
5.1. Trabajo futuro	108
Bibliografía	109



# Índice de figuras

2.1. Correspondencia: Vectores $\leftrightarrow$ cuaterniones	19
2.2. Operación de cuaterniones sobre vectores	22
2.3. Derivada de un vector en un marco rotatorio	26
2.4. Vehículo espacial usando ruedas de reacción	29
2.5. Trayectoria deseada $\vec{\varphi}_{r1}, \vec{\varphi}_{r2}, \vec{\varphi}_{r3}$	32
2.6. Seguimiento de trayectoria del vehículo espacial con cuaterniones	33
2.7. Seguimiento de trayectoria del vehículo espacial en ángulos de Euler	34
2.8. Pares de control del vehículo espacial	35
3.1. Arquitectura del Quadrotor	38
3.2. Dinámica de lazo abierto para ambos modelos del quadrotor	52
4.1. Variación de los parámetros $J_{11}, J_{22}$ y $J_{33}$	75
4.2. Posición angular del satélite	76
4.3. Cuaternión del error para el satélite	77
4.4. Entradas de control para el satélite	77
4.5. Estructura de control propuesta para el quadrotor	90
4.6. Posición, error y velocidad de traslación en $z_B$ para estabilización	94
4.7. Dinámica de la orientación para estabilización	95
4.8. Cuaternión del error para estabilización	96
4.9. Velocidades angulares del quadrotor para estabilización	97
4.10. Entradas de control para estabilización	98
4.11. Posición, error y velocidad de traslación en $z_B$ para seguimiento	100

4.12. Dinámica de la orientación para seguimiento	101
4.13. Cuaternión del error para seguimiento	102
4.14. Velocidades angulares de quadrotor para seguimiento	103
4.15. Entradas de control para seguimiento	104

## Acrónimos y símbolos

UAV	<i>Unmanned Aerial Vehicle/Vehículo aéreo no tripulado</i>
VTO	<i>Vertical Take Off and Landing/Despegue y aterrizaje vertical</i>
PD	Proporcional-Derivativo
GDL	Grados de libertad
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator/Regulador lineal cuadrático</i>
$SO(3)$	<i>Special Orthogonal Group/Grupo especial ortogonal</i>
TORA	<i>Translational Oscillator with Rotational Actuator/Oscilador traslacional con actuador rotacional</i>
RORP	<i>Robust Output Regulation Problem/El problema de regulación robusta a la salida</i>
I&I	Inmersión e Invariancia
BLDC	<i>Brushless Direct Current/Motor de corriente directa sin escobillas</i>
FIE	Francis-Isidori-Byrnes
TOS	Términos de orden superior
NL	Términos no lineales
PD+g	Proporcional-Derivativo con compensación de gravedad
<i>id est</i>	<i>id est/esto es</i>
<i>e.g.</i>	<i>exempli gratia/por ejemplo</i>
$(S)_f$	<i>Stability for the case of full information/Estabilidad para el caso donde se cuenta con la información completa</i>

$(R)_{FI}$	<i>Regulation for the case of full information/Regulación para el caso donde se cuenta con la información completa</i>
$(S)_{EF}$	<i>Stability for the case of error feedback/Estabilidad para el caso de la realimentación del error</i>
$(R)_{EF}$	<i>Regulation for the case of error feedback/Regulación para el caso de la realimentación del error</i>
$\otimes$	producto entre cuaterniones
$\in$	perteneciente a
$\subset$	subconjunto de
$\leftrightarrow$	equivalente a
$\Rightarrow$	implica
$\square$	fin de teorema

# Capítulo 1

## Introducción

La utilización de vehículos aéreos no tripulados no es una novedad histórica. Desde los papalotes y los globos acrostáticos, pasando por las bombas aéreas utilizadas en varios conflictos bélicos para el ataque, hasta las aeronaves automatizadas, han tenido que pasar varios siglos de innovaciones y esfuerzos tecnológicos en el campo de sensores, motores, microprocesadores, sistemas de comunicación inalámbrica y dispositivos de almacenamiento de energía. En las últimas décadas, con los vehículos aéreos autónomos (*Unmanned Aerial Vehicle, UAV*) un nuevo capítulo ha sido abierto en las áreas de aerodinámica, mecatrónica, robótica y de control, ya que no se trata solamente de máquinas controladas a distancia, sino de verdaderos sistemas autónomos capaces de evolucionar en un medio ambiente adaptándose al mismo.

Los UAVs pueden ser clasificados por su tamaño, su aplicación o ambos. El tamaño es un criterio dominante, y en este contexto, se pueden encontrar los vehículos conocidos como mini-UAVs que son caracterizados principalmente por sus reducidas dimensiones y propulsión eléctrica, lo que les permite realizar vuelos en espacios cerrados. Otra posibilidad de clasificar a los UAVs es en base a su funcionamiento aerodinámico. Así podemos encontrar a los vehículos de ala fija (aeroplanos), de ala rotatoria (helicópteros) y de ala flexible (parapente y ala delta).



Los estudios de los últimos años muestran que la investigación en robótica aérea se ha concentrado principalmente en los vehículos de ala rotatoria, helicópteros y arquitecturas con capacidad de despegue y aterrizaje vertical (*Vertical Take-Off and Landing, VTOL*). Esto es debido a la capacidad de dichos vehículos para realizar vuelos estacionarios, así como la gran movilidad, características importantes y necesarias en una gran cantidad de aplicaciones. Uno de los vehículos VTOL que ha atraído enormemente la atención es el helicóptero de cuatro rotores, conocido también con el nombre de quadrotor. Debido a su simetría, este vehículo es relativamente fácil de modelar y construir.

En general, el modelado cinemático y dinámico de sistemas de cuerpos rígidos se ha basado principalmente en los ángulos de Euler para representar la rotación. Es bien sabido que los tres ángulos no permiten una representación global de la rotación, debido a que existen singularidades. Euler propuso una solución para evitar este problema mediante la introducción de un conjunto de cuatro cantidades, los llamados parámetros de Euler, basados en la relación entre los ángulos de Euler. Más tarde, Hamilton (1844) inventó los cuaterniones, una extensión de los números complejos, y poco después se descubrió que las rotaciones pueden ser representadas por cuaterniones.

El helicóptero del tipo quadrotor se ha hecho popular para la investigación en lo referente al control de UAVs debido a su modelo relativamente simple, su alta maniobrabilidad, extrema estabilidad y el bajo costo involucrado en la construcción y operación de dicha plataforma experimental. El control de la postura es una característica importante, ya que permite al vehículo mantener una orientación deseada y, por lo tanto, impide que el vehículo se vuelque y se desplome. El problema de control de la postura de un cuerpo rígido ha despertado el interés de varios investigadores que han propuesto y desarrollado una amplia clase de controladores. Dwyer *et al.* [1] mostraron el uso de los parámetros de orientación de Cayley-Rodrigues como variables cinemáticas para producir un modelo globalmente linealizado y desacoplado de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo deformable, donde los estados de deformación estructural aparecen solamente en los coeficientes de la transformación inversa. Ellos demuestran como las maniobras preestablecidas

para la orientación multi-axial pueden ser codificadas como superficies de conmutación para la implementación de un control de estructura variable de los correspondientes pares de giro calculados, automáticamente modulados en respuesta únicamente para detectar los signos del error de la velocidad angular, para un seguimiento preciso en presencia de amortiguamientos separados o incluso de deformaciones estructurales (pero estables) no controladas. Wen y Krcutz-Delgado [2], presentaron un marco general para el análisis del problema de control para un seguimiento de la orientación de un cuerpo rígido. En contraste con el método que linealiza por realimentación la dinámica de la postura a una forma de doble integrador con respecto a algunas representaciones mínimas de la orientación, se obtienen un gran número de familias de leyes de control globalmente estables utilizando la representación de cuaterniones unitarios globalmente no singular en una función candidata de Lyapunov cuya forma se infiere de la consideración de la energía total del cuerpo rígido. Thicnel y Sanner [3], propusieron un algoritmo para la estimación constante de desviaciones en las mediciones de la velocidad angular por un giroscopio, demostrando que los resultados estimados convergen exponencialmente rápido a los valores de las desviaciones verdaderas. El observador es luego combinado con una estrategia de control no lineal para el seguimiento de la orientación. La combinación demostró, mediante análisis de Lyapunov, la presencia de una dinámica de lazo cerrado globalmente estable, con seguimiento asintóticamente perfecto para cualquier secuencia de orientación deseada. Mohammad y Ehsan [4], presentaron el diseño de un control difuso por modos deslizantes para el seguimiento de postura de un transbordador espacial en términos de cuaterniones. Para este fin, describen las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del transbordador espacial basándose en cuaterniones. Stingu y Lewis [5], describieron una implementación práctica de algoritmos de control simples (Proporcional-Derivative, PD) para el vuelo de un quadrotor de 6 grados de libertad (GDL), equipado con sensores no muy sofisticados, en un ambiente no controlado utilizando cuaterniones para especificar la orientación. Fritsch *et al.* [6] presentaron una linealización entrada-salida exacta de la dinámica de traslación de un helicóptero del tipo quadrotor. El método utiliza una representación de la orientación basada en cuaterniones y consta de dos etapas: realizan una linealización entrada-salida

de la posición  $z$  al empuje, seguido por una segunda linealización entrada-salida de la posición  $x$ - $y$  a los pares de control. Esta separación condujo a la denominada linealización por realimentación cuasi-estática que omite los estados adicionales del controlador. Honglei *et al.* [7] expresaron la dinámica del quadrotor basándose en el álgebra de cuaterniones. Propusieron un método de estabilización con estructura de control jerárquica. El método propuesto evita el problema de la singularidad del algoritmo en el marco del control geométrico. Sheng *et al.* [8] utilizaron cuaterniones para la representación de la orientación del vehículo y aseguraron la trayectoria global de la orientación sin singularidades. Analizaron la trayectoria de un control de seguimiento para UAVs del tipo VTOL empleando la técnica de backstepping filtrado. Reyes-Valeria *et al.* [9] presentaron un modelo dinámico no lineal basado en cuaterniones para la rotación, así como su correspondiente control LQR por ganancias programadas. El modelado se llevó a cabo siguiendo el formalismo de Newton-Euler.

Por otro lado, el problema de regulación a la salida es uno de los problemas centrales en la teoría de control. Este problema trata con el seguimiento asintótico de señales de referencia prescritas y/o rechazo asintótico de perturbaciones no decedidas a la salida de un sistema dinámico. La característica principal que distingue al problema de regulación a la salida de problemas convencionales de seguimiento y rechazo de perturbaciones es que en el primero la clase de señales de referencia y perturbaciones consiste en la solución de algún sistema autónomo de ecuaciones diferenciales. Este sistema es llamado *exosistema*. Las señales de referencia y/o perturbaciones generadas por el exosistema son denominadas *exoseñales*.

Para sistemas lineales el problema de regulación a la salida fue completamente resuelto en los 70s en los trabajos de B.A. Francis, W.M. Wonham, E.J. Davison y otros. El trabajo de investigación resultó en el denominado *principio del modelo interno* [10] y en la observación de que la solución del problema de regulación lineal a la salida está relacionado con la solución de las denominadas ecuaciones del regulador [11].

Siguiendo la tendencia en el desarrollo de la teoría de sistemas de control no lineal, en los 80s algunos autores comenzaron a estudiar el problema de regulación a la salida para sistemas no lineales. Un gran avance en el problema de regulación no lineal a la salida fue reportado en el trabajo de A. Isidori y C.L. Byrnes [12]. En dicha publicación los autores demostraron que bajo la suposición de la estabilidad neutral del exosistema y algunas otras suposiciones estándares de estabilidad/detectabilidad en el sistema, el problema de regulación local a la salida tiene solución si y sólo si cierta combinación de ecuaciones algebraicas y ecuaciones diferenciales tienen solución. Estas ecuaciones son las denominadas *ecuaciones del regulador* o ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes, las cuales son la contraparte no lineal de las ecuaciones del regulador para el problema de regulación lineal a la salida.

En los últimos años el problema de regulación para sistemas no lineales ha sido un campo de investigación muy productivo. En particular, Castillo-Toledo y Di Gennaro [13] presentaron un esquema de control para la regulación robusta de un sistema no lineal discretizado asegurando un comportamiento libre de rizados en el tiempo de intermuestras. Mostraron, como en el caso de sistemas lineales, que el controlador debe contener un modelo interno para asegurar que el error de seguimiento continuo de la salida decaiga asintóticamente a cero. En Sanposhi, *et al.* [14] implementaron exitosamente la teoría de regulación a la salida sobre un sistema subactuado: el pendubot. El objetivo del experimento sobre el pendubot fue llevar a cabo una trayectoria manteniendo el segundo eslabón en posición vertical. Zongli, *et al.* [15] presentaron una plataforma de pruebas experimentales para probar controladores de regulación a la salida no lineal, incluyendo regulación robusta a la salida. Kakirde, *et al.* [16] describieron la aplicación de la estrategia de regulación/servo mecanismo a UAVs para seguimiento de trayectoria. La estrategia de regulación a la salida es utilizada principalmente para el seguimiento preciso de la trayectoria de referencia. Este método está limitado a un solo tipo de seguimiento de trayectoria del UAV. Pavlov, *et al.* [17] presentaron resultados experimentales sobre el problema de regulación no lineal a la salida para un sistema mecánico de referencia, el denominado sistema TO-

RA, donde muestran la eficacia del método al igual que resaltan sus limitaciones prácticas. Zhang y Serrani [18] resolvieron el problema de regulación robusta semiglobal para una clase de sistemas no lineales que no satisfacen las condiciones estándares para la existencia de un modelo interno lineal, pero admiten la denominada inmersión generalizada. Zheng y Zhong [19] presentaron el diseño y resultados experimentales de la regulación robusta para la orientación de un helicóptero tipo quanser de 3 GDL. El objetivo de control es seguir asintóticamente las señales de referencia de elevación y cabeceo (*pitch*) generadas por un sistema exógeno, mientras se mantienen todos los estados acotados en lazo cerrado, incluso si existen incertidumbres desconocidas. Schmidt, *et al.* [20] consideraron una clase de problemas para el control de la orientación en la representación natural  $SO(3)$ , además presentaron una solución novedosa para el problema de regulación a la salida. Salman y Chang [21] mitigaron una falla de atasco para un actuador utilizando una formulación de servomecanismo donde el control exterior fallido se modela como una entrada exógena a la planta degradada.

## 1.1. Objetivo de la tesis

### 1.1.1. Objetivo general

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo la obtención del modelo dinámico de un helicóptero del tipo quadrotor en términos de cuaterniones unitarios (parámetros de Euler) así como el estudio del problema de regulación robusta a la salida (*Robust Output Regulation Problem, RORP*) en la implementación de un controlador robusto para el modelo dinámico en cuestión.

### 1.1.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos del presente estudio consisten en:

- Estudio de los cuaterniones

- Modelado dinámico del quadrotor en términos de cuaterniones
- Estudio del problema de regulación robusta a la salida
- Implementación en simulación del regulador bajo estudio sobre el modelo dinámico del quadrotor en términos de cuaterniones.

## 1.2. Organización de la tesis

El contenido de la tesis está distribuido de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2** se muestra el estudio de los cuaterniones, invención, álgebra, utilización y aplicación para definir la orientación de un cuerpo rígido. Posteriormente, se lleva a cabo la representación del modelo de un vehículo espacial en términos de los cuaterniones, asimismo se define el cuaternión de referencia para el seguimiento de trayectoria.

En el **Capítulo 3** se dedica al estudio y obtención del modelo matemático del quadrotor, primero en representación de los ángulos de Euler y luego en cuaterniones. En este mismo capítulo se lleva a cabo la aproximación lineal del modelo en cuaterniones.

En el **Capítulo 4** se brinda la teoría del problema de regulación a la salida. Luego, se desarrollan los pasos y se presentan los resultados en simulación de problema de regulación robusta a la salida para el ejemplo de un satélite rígido. Al final de este capítulo, se aplica esta misma metodología para el control del quadrotor en *hovering* (vuelo estacionario), igualmente se exhiben los resultados de simulación.

En el **Capítulo 5** se comentan las conclusiones generales de los resultados derivados del presente trabajo de tesis, así como algunos aspectos para futuros trabajos.



## Capítulo 2

# Cuaterniones

### 2.1. Introducción

En el presente capítulo la información referente a cuaterniones fue recopilada principalmente de [22]-[25].

Cuando un grupo de brillantes matemáticos está interesado en el mismo tema no es raro descubrir que dos de ellos lleguen a la misma invención al mismo tiempo. A pesar de que dichos individuos tengan diferente fortaleza matemática, ellos tendrían acceso a la misma edificación del conocimiento matemático acumulado y ser conscientes de los problemas que hayan sido resueltos y de aquellos que esperan una solución.

Es bien sabido que Wessel y Argand inventaron el plano complejo y lo utilizaron para visualizar los números complejos. Es lamentable que ambos hombres no tuvieran acceso a la red de publicación de hoy en día. Sin embargo, la prioridad fue y sigue siendo decidida mediante quien realiza la primer impresión. Pero como le aconteció a Wessel, incluso siendo el primero en la impresión no le garantizó la fama.

Una historia similar rodea la invención de los cuaterniones. Sir William Rowan Hamilton es reconocido como el inventor del álgebra del cuaternión, la cual se convirtió en la primer álgebra no conmutativa. Se puede imaginar la euforia que sintió cuando encontró la solución a un problema en el que había estado pensando durante una década.



La invención proporcionó el primer sistema matemático para manipular cantidades vectoriales, aunque esto fue redefinido por el físico teórico, químico y matemático americano, Josiah Willard Gibbs (1839-1903). A pesar de que Hamilton había llegado a su invención a través de una ruta algebraica, fue obvio para él que los cuaterniones tuvieran un muy significativo potencial geométrico e inmediatamente comenzó a explorar sus propiedades vectoriales y de rotación.

El desconocimiento de Hamilton, y virtualmente para todos los demás en ese momento, el reformador social francés y brillante matemático recreacional Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851) ya había publicado un trabajo en 1840 describiendo cómo representar dos rotaciones sucesivas alrededor de diferentes ejes a través de una sola rotación alrededor de un tercer eje. Lo que es más, Rodrigues expresó su solución usando un escalar y un eje en 3 dimensiones que adelantaba al propio método de Hamilton por tres años.

La existencia misma de los números complejos presentó una pregunta tentadora para los matemáticos de los siglos 18 y 19. ¿Podría existir un equivalente en 3D? La respuesta a esta pregunta no fue obvia y muchos matemáticos talentosos incluyendo a Gauss, Möbius, Grassmann y Hamilton ya habían estado buscando la respuesta.

La investigación de Hamilton está bien documentada y cubre un período comprendido entre los años 1830 a 1843, cuando inventó los cuaterniones, y durante otros 22 años, hasta su muerte en 1865, preocupado por el tema. Para 1833 había demostrado que los números complejos forman un álgebra de parejas, *i.e.* pares ordenados.

Al igual que un número complejo en 2D se representa por  $a + bi$ , Hamilton supuso que un número complejo en 3D podría ser representado por la tripleta  $a + bi + cj$ , donde  $i$  y  $j$  son cantidades imaginarias y que al cuadrado es  $-1$ . Sin embargo, el producto de dos de dichas tripletas plantea un problema con su expansión algebraica.

Considere el par de tripletas  $z_1 = a_1 + b_1i + c_1j$  y  $z_2 = a_2 + b_2i + c_2j$ . Evaluando el

producto entre éstas resulta

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j)(a_2 + b_2 i + c_2 j) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 + b_1 c_2 ij + c_1 a_2 j + c_1 b_2 ji + c_1 c_2 j^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i + (a_1 c_2 + c_1 a_2)j + b_1 c_2 ij + c_1 b_2 ji, \end{aligned}$$

donde se puede apreciar que la operación casi cierra, *i.e.* casi resulta otra triplete, excepto por los términos que involucran  $ij$  y  $ji$ . Incluso si se supusiera que  $ji = -ij$  aún resultaría la expresión  $(b_1 c_2 - c_1 b_2)ij$ .

Esto presentó un problema para Hamilton y se esforzó durante una década intentando resolverlo. Luego, el 16 de octubre de 1843, mientras caminaba con su esposa, Lady Hamilton, por el canal Real en Irlanda para presidir una reunión de la Real Academia Irlandesa, un destello de inspiración le vino cuando vio la solución como un cuarteto. En lugar de utilizar dos términos imaginarios, los tres términos proporcionaron las permutaciones extras necesarias para resolver los productos  $ij$ .

La solución fue  $a + bi + cj + dk$  donde cada  $i, j, k$  al cuadrado resulta como  $-1$  y es debido a estos cuatro términos que Hamilton le dio el nombre de *cuaternion*. Hamilton tomó la oportunidad de registrar el evento en piedra, tallando las reglas en la pared del puente Broome, por donde pasaba en aquel momento. Aunque su inscripción original no ha resistido el clima de Irlanda, una placa más resistente ahora lo reemplaza.

Cuando Hamilton inventó los cuaterniones también creó toda clase de nombres tales como *teasor*, *versor* y *vector* para describir sus atributos. Siendo Hamilton el inventor de los cuaterniones tuvo la primicia de elegir el nombre que quisiera, dichos nombres fueron asociados con la notación del periodo. Por ejemplo,  $\hat{c}$  designó a la parte real del cuaternion como *escalar* y a la parte imaginaria como *vector*. Sin embargo hoy en día un vector no tiene ninguna asociación imaginaria, lo cual ha confundido ligeramente el como interpretar a los cuaterniones. Hamilton también observó que los términos  $i, j, k$  podrían representar los tres vectores unitarios cartesianos  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  que tendrían que poseer las cualidades imaginarias, *i.e.*  $\mathbf{i}^2 = -1$ .

Simon Altman había estado muy consciente de estos problemas y ayudó a aclarar esta

confusión sometiendo el álgebra de cuaterniones a un estrecho control, que, hasta ahora, le faltaba. Esta rigurosidad algebraica emplea la idea de pares ordenados, que son fáciles de entender, y revelan la estrecha relación entre cuaterniones y números complejos.

El álgebra del cuaternión es definitivamente imaginaria, sin embargo, simplemente aislando la parte vectorial e ignorando las reglas imaginarias Gibbs fue capaz de revelar una nueva rama de las matemáticas que estalló en el análisis vectorial.

Hamilton y sus partidarios no pudieron convencer a sus compañeros de que los cuaterniones podrían representar cantidades vectoriales y eventualmente la notación de Gibbs triunfó y los cuaterniones desaparecieron de la escena.

En años recientes los cuaterniones han sido redescubiertos por la industria de simulación de vuelos y por la comunidad de gráficos por computadora, donde son utilizados para rotar vectores alrededor de un eje arbitrario. En los años intermedios, varias personas han tenido la oportunidad de investigar el álgebra y proponer nuevas formas de aprovechar sus cualidades [22].

## 2.2. Definición de un cuaternión

De aquí en adelante, un cuaternión será denotado por alguna letra mayúscula, ya sea  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  o  $\mathcal{R}$ . Se usarán letras en negritas para denotar vectores en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . En particular, se utilizará  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  para denotar las bases ortonormales estándar para  $\mathbb{R}^3$ . Los vectores en el espacio tridimensional (3D) pueden ser escritos como tripletas de números reales, luego así se escribirán estas bases ortonormales como

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Un cuaternión, como su nombre lo sugiere, puede ser considerado como un cuarteto de números reales, *i.e.*, como un elemento de  $\mathbb{R}^4$ . En este caso se escribe

$$\mathcal{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3),$$

donde  $q_0, q_1, q_2$  y  $q_3$  son simplemente números reales [23].

A continuación se describen las tres formas de denotar un cuaternión  $Q$ :

$$Q = s + xi + yj + zk, \quad (2.1a)$$

$$Q = s + \mathbf{v}, \quad (2.1b)$$

$$Q = [s, \mathbf{v}], \quad (2.1c)$$

donde  $s, x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  e  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ .

En (2.1a) se tiene la definición original de Hamilton con sus términos imaginarios y sus correspondientes reglas asociadas. En (2.1b) se utiliza el signo “+” para agregar un escalar a un vector. En (2.1c) se tiene un par ordenado comprometiéndolo un escalar y un vector [22].

## 2.3. Propiedades de los cuaterniones

En la presente sección se brinda una breve introducción al álgebra de cuaterniones y se destacan sus propiedades. Asimismo, se realiza una descripción del producto entre dos cuaterniones ilustrando cómo interpretar las reglas de Hamilton.

**(i) Propiedad de la adición.** La adición de dos cuaterniones  $\mathcal{P} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  y  $\mathcal{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$  se define añadiendo los componentes correspondientes, *i.e.*,

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k.$$

La adición de cuaterniones, definida de esta forma, es exactamente la misma que para los cuartetos de números reales satisfaciendo así las propiedades de campo<sup>1</sup>, ya que éstas se aplican a la suma. La suma de dos cuaterniones es de nuevo un cuaternión, *i.e.*, el conjunto de cuaterniones es *cerrado* bajo la suma. Existe también un cuaternión *cero*, en el cual cada componente es 0. Cada cuaternión  $Q$  tiene un inverso aditivo, denotado como  $-Q$ .

<sup>1</sup>Se puede decir que un campo es un conjunto de números que es cerrado para las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división (diferente de cero).

en donde cada componente es negativo al componente correspondiente de  $\mathcal{Q}$ . Como puede verificarse fácilmente, la adición de cuaterniones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa, ya que la suma de números reales posee dichas propiedades.

(ii) **Propiedad del producto.** El producto de dos cuaterniones es más complicado. Debe darse de tal manera que los siguientes productos fundamentales especiales se satisfagan:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = k = -ji,$$

$$jk = i = -kj,$$

$$ki = j = -ik.$$

Estos productos no cumplen con la propiedad conmutativa, por lo que el producto entre dos cuaterniones, en general, no será conmutativo. Utilizando reglas ordinarias para la multiplicación algebraica junto con los productos fundamentales anteriores, es fácil verificar que el producto entre dos cuaterniones toma la estructura (2.2) [24]. También se demostrará que  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  pueden ser representados mediante pares ordenados

$$\mathcal{P} = [p_0, \mathbf{p}],$$

$$\mathcal{Q} = [q_0, \mathbf{q}],$$

con  $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ . El producto entre cuaterniones  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$  se expande a

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} &= [p_0, \mathbf{p}] [q_0, \mathbf{q}] = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k), \\ &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) \\ &\quad + (p_0 q_1 + q_0 p_1 + p_2 q_3 - q_2 p_3) i \\ &\quad + (p_0 q_2 + q_0 p_2 + p_3 q_1 - q_3 p_1) j \\ &\quad + (p_0 q_3 + q_0 p_3 + p_1 q_2 - q_1 p_2) k. \end{aligned} \tag{2.2}$$

La expresión (2.2) toma la forma de otro cuaternión y confirma que el producto entre cuaterniones es cerrado. En esta etapa, Hamilton convirtió los términos imaginarios  $i$ ,

$j$ ,  $k$  en vectores cartesianos unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  y transformó (2.2) a una forma vectorial. El problema con este método es que los vectores conservan sus raíces imaginarias. La sugerencia de Simon Altmann fue sustituir los términos imaginarios por pares ordenados:

$$i = [0, \mathbf{i}], \quad j = [0, \mathbf{j}], \quad k = [0, \mathbf{k}],$$

los cuales siguen siendo cuaterniones denominados como *cuaterniones unitarios*. La idea de definir un cuaternión en términos de cuaterniones unitarios es exactamente la misma en como se define un vector en términos de sus vectores cartesianos unitarios; esto permite que existan los vectores sin alguna asociación imaginaria. Sustituyendo estos cuaterniones unitarios en (2.2) junto con  $[1, \mathbf{0}] = 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} = [p_0, \mathbf{p}][q_0, \mathbf{q}] &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) [1, \mathbf{0}] \\ &+ (p_0q_1 + q_0p_1 + p_2q_3 - q_2p_3) [0, \mathbf{i}] \\ &- (p_0q_2 + q_0p_2 + p_3q_1 - q_3p_1) [0, \mathbf{j}] \\ &+ (p_0q_3 + q_0p_3 + p_1q_2 - q_1p_2) [0, \mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Luego, desarrollando (2.3) considerando las reglas previamente definidas resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} = [p_0, \mathbf{p}][q_0, \mathbf{q}] &= [p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \mathbf{0}] \\ &+ [0, (p_2q_3 - q_0p_1 + p_2q_3 - q_2p_3)\mathbf{i}] \\ &+ [0, (p_0q_2 + q_0p_2 + p_3q_1 - q_3p_1)\mathbf{j}] \\ &+ [0, (p_0q_3 + q_0p_3 + p_1q_2 - q_1p_2)\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Agrupando términos semejantes y factorizando se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} &= [p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \mathbf{0}] \\ &+ [0, p_0(q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + q_0(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}) \\ &+ (p_2q_3 - q_2p_3)\mathbf{i} + (p_3q_1 - q_3p_1)\mathbf{j} + (p_1q_2 - q_1p_2)\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La expresión (2.5) contiene dos pares ordenados que pueden combinarse, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} &= [p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, \\ & p_0(q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) + q_0(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}) \\ & + (p_2q_3 - q_2p_3)\mathbf{i} + (p_3q_1 - q_3p_1)\mathbf{j} + (p_1q_2 - q_1p_2)\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{q} &= q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en (2.6) se tiene

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} = [p_0 \cdot \mathbf{p}] [q_0 \cdot \mathbf{q}] = [p_0q_0 - \mathbf{p}\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\mathbf{q}, p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}], \quad (2.7)$$

el cual define el producto del cuaternión. De aquí en adelante las reglas de Hamilton ya están incluidas, por lo tanto los vectores no contienen asociaciones imaginarias [22].

(iii) **La no conmutatividad del cuaternión.** Considere la siguiente identidad:

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} - \mathcal{Q} \otimes \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

es evidente que, en general,

$$\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \neq \mathcal{Q} \otimes \mathcal{P}. \quad (2.9)$$

(iv) **La norma del cuaternión.** La norma del cuaternión se define como la suma de cada uno de sus componentes al cuadrado:

$$\text{norm}(\mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^3 q_i^2. \quad (2.10)$$

(v) **La norma de un producto.** Utilizando la definición de la norma y las operaciones vectoriales, es fácil demostrar que la norma de un producto es igual al producto de las normas individuales:

$$\text{norm}(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) = \text{norm}(\mathcal{P}) \times \text{norm}(\mathcal{Q}). \quad (2.11)$$

(vi) **Propiedad asociativa sobre la multiplicación.** La propiedad asociativa

$$(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}) \otimes \mathcal{R} = \mathcal{P} \otimes (\mathcal{Q} \otimes \mathcal{R}) \quad (2.12)$$

se ha demostrado de una manera directa.

(vii) **La inversa del cuaternión.** Considere el producto

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \\ (q_0 \mathbf{q} - q_0 \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum q_i^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Note que la multiplicación de un cuaternión por otro cuaternión, que se diferencian solo por un cambio de signo de la parte vectorial, produce un cuaternión solo con la parte escalar. Un cuaternión de la última forma tendrá propiedades muy simples en la multiplicación (*i.e.*, multiplicación por una constante) y cuando se divide por la norma del cuaternión servirá como cuaternión unitario. Por lo tanto, la inversa de un cuaternión se define mediante

$$\mathcal{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\text{norm}(\mathcal{Q})} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Sin embargo, se trabajará totalmente con cuaterniones con norma unitaria, así se simplificarán muchas expresiones.

(viii) **La inversa de un producto.** La inversa del producto entre cuaterniones se calcula mediante el producto de las inversas individuales en orden inverso. Esto se lleva a cabo de la siguiente manera [25]:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})^{-1} &= \frac{1}{\text{norm}(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})} \begin{bmatrix} p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ -(p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{\text{norm}(\mathcal{Q})} \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p_0 \\ -\mathbf{p} \end{bmatrix} \frac{1}{\text{norm}(\mathcal{P})}. \end{aligned}$$



por lo tanto,

$$(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})^{-1} = \mathcal{Q}^{-1} \otimes \mathcal{P}^{-1}. \quad (2.15)$$

## 2.4. Interpretaciones geométricas

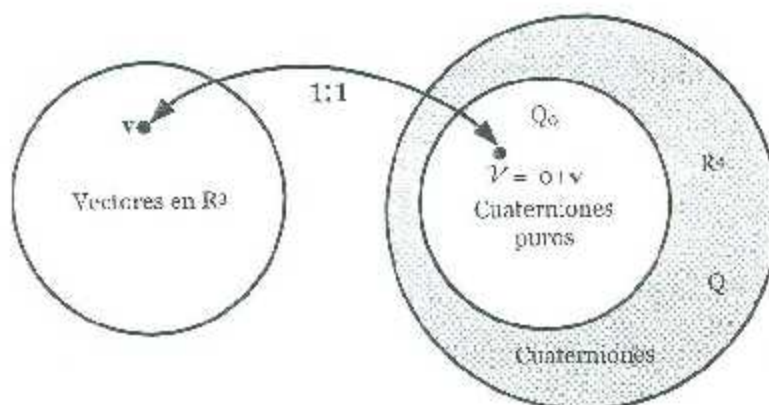
Una rotación en  $\mathbb{R}^3$  puede representarse por una matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  siempre que la matriz sea ortogonal y su determinante igual a la unidad. Alternativamente, dicha matriz  $A$  puede interpretarse geoméricamente como un operador de rotación en  $\mathbb{R}^3$ . Con el fin de encontrar el vector  $\mathbf{w}$  el cual es la imagen del vector  $\mathbf{v}$  bajo tal rotación, simplemente se representa el vector  $\mathbf{v}$  mediante una columna, cuyas entradas son los componentes de  $\mathbf{v}$ , al cual se le multiplica por la izquierda la matriz de rotación, *i.e.*,

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Es bien sabido que el producto de una secuencia de operadores de rotación es nuevamente un operador de rotación, y que se han desarrollado algoritmos para encontrar el eje y el ángulo de dicha rotación compuesta.

Los cuaterniones juegan un papel importante en una *forma alternativa* para un operador de rotación, el cual es muy distinto del operador matricial que utiliza funciones trigonométricas. Un cuaternión es un cuarteto de números mientras que una matriz de rotación tiene nueve elementos. Por lo tanto, los cuaterniones suelen ser muy eficientes para analizar ciertas situaciones en donde se involucran rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ . No obstante, el definir un operador de rotación con cuaterniones no está del todo claro y por lo tanto se debe dedicar algo de tiempo y esfuerzo en explorar y entender como se pretende estructurar dicho operador. Posteriormente, se verificará que este operador puede ser interpretado geoméricamente como una rotación en  $\mathbb{R}^3$  al especificar los ejes y el ángulo de rotación, lo cual es relativamente fácil. Se comenzará estudiando al operador de rotación con cuaterniones desde el punto de vista del álgebra de cuaterniones desarrollado anteriormente.

## 2.4.1. Consideraciones algebraicas

Figura 2.1: Correspondencia: Vectores  $\leftrightarrow$  cuaterniones

La preocupación más importante en este momento está en el desarrollo de métodos matemáticos para determinar la orientación de un objeto en el espacio 3D, es decir, en  $\mathbb{R}^3$ . Un objeto en este espacio puede ser considerado como un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Se pueden identificar fácilmente estos puntos como vectores en  $\mathbb{R}^3$  de modo que la orientación del objeto puede ser estudiada realizando operaciones apropiadas sobre estos vectores.

Un cuaternión que existe en  $\mathbb{R}^4$  puede operar sobre un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  siempre y cuando a este último vector se le trate como un cuaternión puro, es decir, como un cuaternión con parte real cero. Sea  $Q$  el conjunto de todos los cuaterniones y  $Q_0$  que represente el conjunto de los cuaterniones puros, con esto es posible identificar vectores en  $\mathbb{R}^3$  con los elementos del conjunto  $Q_0$ . Por lo menos, quizás se puede definir una correspondencia en el que un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  corresponde al cuaternión puro  $\mathcal{V} = 0 + \mathbf{v} \in Q_0$  (Ver figura 2.1), *i.e.*,

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathcal{V} = 0 + \mathbf{v} \in Q_0 \subset Q. \quad (2.17)$$

Es fácil verificar dicha correspondencia cuando se realiza la suma y multiplicación por un escalar. Por ejemplo, la suma de dos vectores en  $\mathbb{R}^3$  corresponde a la suma de cada uno de sus correspondientes cuaterniones *puros* en  $Q_0$ .

Ahora, en este punto pudiera parecer razonable suponer que un operador de rotación que está definido en términos de un cuaternión tiene la misma forma que el operador familiar de rotación matricial. Si es así, significaría que un cuaternión  $Q \in Q$  de alguna forma representa una rotación, y además se puede encontrar la imagen  $w \in \mathbb{R}^3$  utilizando la regla del producto

$$w = Qv. \quad (2.18)$$

Dicha regla significa que el producto de un cuaternión  $Q$  con un vector  $v$  no siempre estaría definida, pero el resultado sería *un vector*. Se puede definir el producto de un cuaternión con un vector utilizando la correspondencia uno a uno entre vectores en  $\mathbb{R}^3$  y cuaterniones puros  $Q_0$  descrito anteriormente. En el producto entre cuaterniones (2.7) en lugar de un vector  $v$  simplemente se usa su cuaternión correspondiente  $V = 0 + v$ . De esta manera, dado algún cuaternión  $Q = q_0 + \mathbf{q} \in Q$  y un vector  $v \in \mathbb{R}^3$  se tiene

$$\begin{aligned} Qv &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + v), \\ &= q_0 \cdot 0 - \mathbf{q} \cdot v + 0 \cdot \mathbf{q} + q_0 v + \mathbf{q} \times v, \\ &= -\mathbf{q} \cdot v + q_0 v + \mathbf{q} \times v. \end{aligned} \quad (2.19)$$

El cálculo anterior muestra que el resultado no necesariamente está en  $Q_0$  y en general el resultado no corresponde a un vector en  $\mathbb{R}^3$ , excepto en el caso especial cuando  $\mathbf{q} \cdot v = 0$ , lo que significa que  $\mathbf{q}$  y  $v$  son ortogonales. Por lo tanto, no se puede pretender que el operador de rotación en términos del cuaternión consista simplemente de un solo cuaternión.

No obstante, a pesar de la dificultad con el producto del cuaternión, en lo que sigue no se abandonará la correspondencia necesaria uno a uno entre vectores y cuaterniones puros. De ahora en adelante se debe de considerar que cuando se utilice la notación vectorial en el producto del cuaternión el vector está implícitamente representado por su correspondiente cuaternión puro. De esta manera, el producto de cuaterniones implica que los vectores tengan sentido.

En (2.19) se analizó que el producto en cuestión no necesariamente resulta en un vector en  $\mathbb{R}^3$ , por consiguiente,  $vQ$  tampoco resultará en un vector en  $\mathbb{R}^3$  ya que la conmutación

de los factores no cambia la parte real de dicho producto. Esta observación nos conduce a suponer que el operador deseado pudiera implicar tripletas o tal vez productos de mayor orden. Luego así, se podría asegurar que la salida del operador sería un vector siempre que la entrada fuese otro vector.

Debido a que se desea operar sobre vectores utilizando cuaterniones, sea  $\mathcal{P}$  uno de los factores, en un producto triple de cuaterniones, un cuaternión puro representando el vector  $\mathbf{p}$  en cuestión. Suponga ahora que se tienen dos cuaterniones  $\mathcal{Q}$  y  $\mathcal{R}$ , del conjunto  $Q_1$  y un tercer cuaternión  $\mathcal{P}$  como cuaternión puro del conjunto  $Q_0$  representando algún vector. Existen seis posibles productos que implican a estos tres cuaterniones dados por:  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} \otimes \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R} \otimes \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{R} \otimes \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{R} \otimes \mathcal{Q} \otimes \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{R} \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}$  y  $\mathcal{Q} \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{R}$ .

Una de las propiedades de los cuaterniones es que el conjunto  $Q$  es cerrado, a pesar de que  $Q_0$  no lo sea, al emplear la operación de multiplicación. En consecuencia, los primeros cuatro productos  $\mathcal{Q}\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}\mathcal{Q}$  serán simplemente cuaterniones, lo que significa que estos cuatro productos son esencialmente productos *dobles*. Dichos productos no son adecuados para definir al operador que se busca y por lo tanto se descartan como posibilidades. Por simplicidad en la escritura se omitirá  $\otimes$  en la multiplicación entre cuaterniones.

Además de insistir que  $\mathcal{P}$  debe de considerarse como un cuaternión puro, de este modo se representa un vector, no se hace distinción entre los cuaterniones  $\mathcal{Q}$  y  $\mathcal{R}$ , así que no hay necesidad de distinguir los dos productos restantes de la lista. Como consecuencia, la última posibilidad es el triple producto  $\mathcal{Q}\mathcal{P}\mathcal{R}$ .

Siendo  $\mathcal{P} = 0 - \mathbf{p}$ ,  $\mathcal{Q} = q_0 + \mathbf{q}$  y  $\mathcal{R} = r_0 + \mathbf{r}$  no es difícil verificar, aunque los detalles sean un poco tediosos, que según la regla (2.7) la *parte real* de este producto triple está dada por

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}.$$

Usando las reglas del álgebra vectorial se puede reescribir esta parte real de la forma

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}.$$

Considerando que el operador debe ser tal que la salida sea un cuaternión puro, tal que represente un vector, se requiere que esta parte real sea cero. Esto se puede conseguir

suponiendo que  $r_0 = q_0$ . Esta parte real puede entonces reescribirse de la forma

$$-q_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}.$$

Claramente esta parte real será cero, como se requiere, si  $\mathbf{r} = -\mathbf{q}$ . Sin embargo, esto simplemente significaría que

$$\mathcal{R} = r_0 + \mathbf{r} = q_0 - \mathbf{q} = Q^* \rightarrow Q = \mathcal{R}^*.$$

Del análisis en cuestión se obtienen los dos productos triples del cuaternión  $Q\mathcal{P}Q^*$  y  $Q^*\mathcal{P}Q$ . Estos dos productos triples producen un cuaternión puro cada vez que el factor  $\mathcal{P}$  sea un cuaternión puro. En términos de un vector de entrada  $\mathbf{v}$  se tienen luego dos posibles operadores del triple producto con cuaterniones definidos como

$$\mathbf{w}_1 = Q\mathbf{v}Q^* \quad (2.20)$$

y

$$\mathbf{w}_2 = Q^*\mathbf{v}Q. \quad (2.21)$$

La acción algebraica de la ecuación (2.20) se ilustra en la figura 2.2. En resumen, hasta este punto se ha comentado la forma de manejar vectores en el espacio de cuaterniones y se han encontrado dos operadores con cuaterniones los cuales toman vectores dentro de vectores.

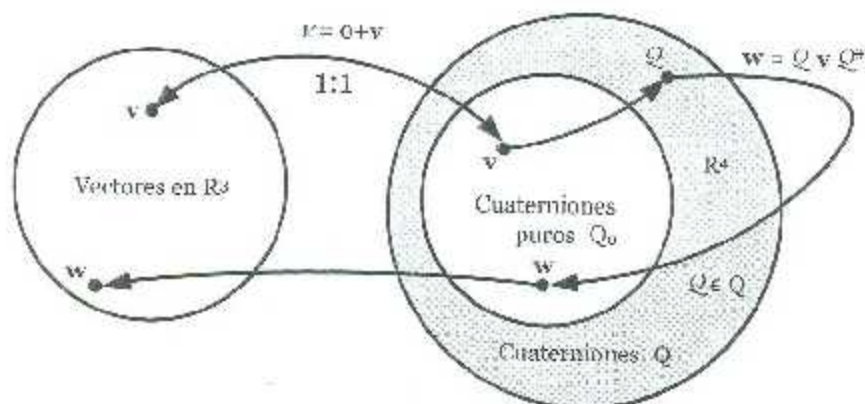


Figura 2.2: Operación de cuaterniones sobre vectores

### 2.4.2. Consideraciones geométricas

La búsqueda para la interpretación geométrica del triple producto con cuaterniones en la ecuación (2.20) y (2.21) conduce a la cuestión de cómo asociar un ángulo con un cuaternión semejante a la forma en que se asocia un ángulo con una matriz de rotación. Esto se llevará a cabo utilizando un cuaternión unitario, i.e., un cuaternión con norma unitaria, luego así se pretende asociar un ángulo con los dos operadores anteriores.

De ahora en adelante el cuaternión  $\mathcal{Q}$ , usado para definir el operador, será considerado un cuaternión *unitario* o *normalizado*. Téngase en cuenta el cuaternión

$$\mathcal{Q} = q_0 + \mathbf{q}, \quad (2.22)$$

que por definición tiene norma unitaria, entonces

$$q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 = 1. \quad (2.23)$$

No obstante, ya que para cualquier ángulo es bien sabido que

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$$

debe de existir algún ángulo  $\theta$  tal que

$$\cos^2 \theta = q_0^2$$

y

$$\operatorname{sen}^2 \theta = |\mathbf{q}|^2.$$

Este ángulo  $\theta$  puede ser definido únicamente si se ajusta a la restricción apropiada en su dominio, i.e.,  $-\pi < \theta \leq \pi$ . De esta manera se tiene un ángulo  $\theta$  asociado con el cuaternión  $\mathcal{Q}$ . Será conveniente escribir el cuaternión unitario  $\mathcal{Q} = q_0 + \mathbf{q}$  en términos de este ángulo.

Suponga que se define un vector unitario  $\mathbf{u}$ , el cual representa la dirección de  $\mathbf{q}$  escribiendo

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{\mathbf{q}}{\operatorname{sen} \theta}. \quad (2.24)$$

Luego se puede escribir el cuaternión unitario  $Q$  en términos del ángulo  $\theta$  y el vector unitario  $\mathbf{u}$  como

$$q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta. \quad (2.25)$$

Note que para un cuaternión expresado en la forma anterior, reemplazando  $-\theta$  por  $\theta$ , cualquier significado geométrico que  $\theta$  pudiera tener, se consigue el conjugado complejo de  $Q$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) + \mathbf{u} \sin(-\theta) &= \cos \theta + \mathbf{u}(-\sin \theta), \\ &= \cos \theta - \mathbf{u} \sin \theta = Q^*. \end{aligned}$$

Utilizando esta forma para el cuaternión  $Q$  se desarrolla una interesante propiedad geométrica, aunque algo limitada, del producto del cuaternión; aquella que fortalece la impresión de que el cuaternión está de alguna manera relacionado a las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.5. Algoritmo del operador

Será útil, para referencias futuras, tener una fórmula general para el vector de salida cuando el operador con cuaterniones de (2.20) sea aplicado a un vector de entrada  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Si se tiene el cuaternión  $Q = q_0 + \mathbf{q}$  y el vector  $\mathbf{v}$ , correspondiente al cuaternión puro  $\mathcal{V} = 0 + \mathbf{v}$ , puede a continuación verificarse

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= Q\mathcal{V}Q^* = (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{v})(q_0 - \mathbf{q}) \\ &= (2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

o

$$\mathbf{w} = Q\mathcal{V}Q^* = (q_0^2 - \mathbf{q}^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} - 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}). \quad (2.26)$$

## 2.6. De cuaterniones a matrices

Desarrollando los tres términos de (2.26)

$$(2q_0^2 - 1)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} (2q_0^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (2q_0^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (2q_0^2 - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

$$2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2q_1^2 & 2q_1q_2 & 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 & 2q_2^2 & 2q_2q_3 \\ 2q_1q_3 & 2q_2q_3 & 2q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -2q_0q_3 & 2q_0q_2 \\ 2q_0q_3 & 0 & -2q_0q_1 \\ -2q_0q_2 & 2q_0q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

resulta luego una matriz la cual es a menudo más conveniente de usar en simulaciones relacionadas con el movimiento de un cuerpo rígido.

La suma de estas tres componentes resulta

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 & 2q_0q_3 & 2q_1q_2 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_3^2 - 1 + 2q_3^2 & 2q_3^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

i.e.,

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}\mathbf{v}\mathbf{Q}^* = \mathbf{R}(\mathbf{Q})\mathbf{v}. \quad (2.27)$$

Un resultado similar se obtiene para el operador del cuaternión en (2.21) i.e.,

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}^*\mathbf{v}\mathbf{Q} = \mathbf{R}(\mathbf{Q})^T\mathbf{v}. \quad (2.28)$$

Observe que (2.27) y (2.28) representan los dos operadores de (2.20) y (2.21) expresadas en términos de las matrices  $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$  y  $\mathbf{R}(\mathbf{Q})^T$ , respectivamente. En resumen se tiene que  $\mathbf{Q}\mathbf{v}\mathbf{Q}^* = \mathbf{R}(\mathbf{Q})\mathbf{v}$  y  $\mathbf{Q}^*\mathbf{v}\mathbf{Q} = \mathbf{R}(\mathbf{Q})^T\mathbf{v}$  donde  $\mathbf{Q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$  y

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_3^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Estos algoritmos ofrecen una mayor ventaja en relación a los dos operadores con cuaterniones, que en realidad son operadores de rotación [24].



## 2.7. Las ecuaciones cinemáticas con cuaterniones

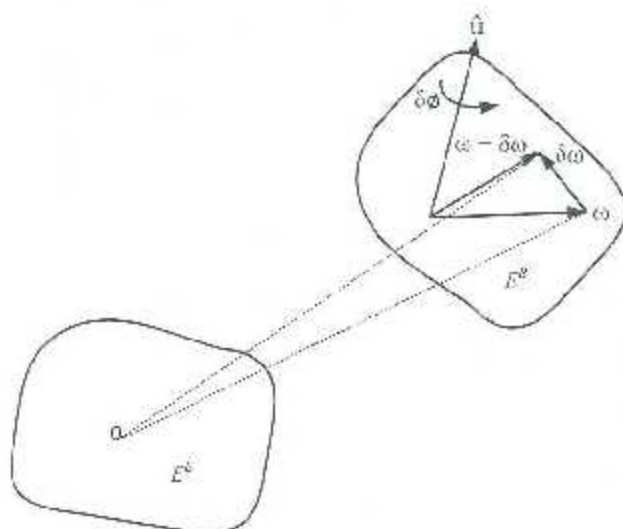


Figura 2.3: Derivada de un vector en un marco rotatorio

Cuando dos marcos están en movimiento angular relativo y se desea realizar un seguimiento de la orientación relativa por medio de un cuaternión se requiere de un método para actualizar continuamente dicho cuaternión. El cuaternión toma la forma de una ecuación diferencial determinando los coeficientes a partir de las velocidades angulares relativas. La ecuación es análoga a las ecuaciones cinemáticas de Euler y Poisson.

Sea la orientación de un marco rotatorio  $E^B$ , con respecto a un marco de referencia  $E^E$ , representada mediante el cuaternión  $Q_{B/E}(t)$ . Sea la velocidad angular instantánea de  $E^B$  en la dirección de un vector unitario  $\hat{u}$  con magnitud  $\omega$  como se muestra en la figura 2.3.

Luego, en un intervalo pequeño de tiempo  $\delta t$ , el cuaternión  $\delta Q_{B/E}$ , el cual describe la rotación de coordenadas en incrementos alrededor de  $\hat{u}$ , se puede encontrar utilizando aproximaciones angulares pequeñas con  $Q = \left[ \cos(\phi/2) \quad \text{sen}(\phi/2) \hat{u} \right]^T$ :

$$\delta Q_{B/E}(\delta t) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u}^B \frac{\omega \delta t}{2} \end{bmatrix}$$

En el tiempo  $t + \delta t$  la rotación está dada mediante el cuaternión  $Q_{B/E}(t + \delta t)$  donde

$$Q_{B/E}(t + \delta t) = Q_{B/E}(t) \delta Q_{B/E}(\delta t).$$

Por definición la derivada de  $Q_{B/E}(t)$  es, omitiendo temporalmente los subíndices,

$$\frac{dQ}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t) [\delta Q - I_Q]}{\delta t},$$

donde  $I_Q$  es el cuaternión identidad. Sustituyendo por  $\delta Q$  se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} Q(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u}^y \omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2} Q(t)_{B/E} \omega_{B/E}^{\otimes}$$

Este resultado puede ser escrito formalmente como [25]

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} E(Q) \omega = \frac{1}{2} D(\omega) Q, \quad (2.30)$$

donde

$$E(Q) = \begin{bmatrix} -q^T \\ q_0 I + S(q) \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -S(\omega) \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

La inversa de (2.30) está dada por [26]

$$\omega = 2 E^T(Q) \dot{Q}. \quad (2.33)$$

Luego, desarrollando (2.30) en forma matricial<sup>2</sup> y utilizando los componentes del sis-

<sup>2</sup>En las ecuaciones (2.31)-(2.32), y durante todo el escrito, se ha adoptado el operador antisimétrico  $S(\cdot)$ . Para un vector genérico  $k$  de dimensión tres, la matriz antisimétrica de  $k$   $S(k)$  se define como:

$$S(k) = -S^T(k) = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_3 & k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

tema del cuerpo de  $\omega$  se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q^T \\ q_0 I + S(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Esta última ecuación es ampliamente utilizada en simulaciones del movimiento de un cuerpo rígido y en su versión discreta se utiliza en sistemas digitales para el control de la postura (e.g., para satélites) y para el procesamiento digital de navegación inercial [25].

## 2.8. Modelo de un vehículo espacial

El propósito del presente análisis es el de aplicar la ley de control propuesta por la metodología de inmersión e invariancia (I&I) sobre un vehículo espacial pero ahora tratando con el modelo dinámico del mismo en términos de cuaterniones. Se considerará el control de la orientación del vehículo impulsado por ruedas de reacción. En la práctica, el vehículo espacial también puede estar equipado con sistemas de inyección de gas (utilizado para controlar el movimiento de traslación del sistema para compensar los impulsos de traslación distintos de cero impartidos por la carga o para no saturar las ruedas de reacción).

El vehículo es tratado como un cuerpo rígido cuya orientación es descrita mediante ecuaciones *cinemáticas* y ecuaciones *dinámicas*. El desarrollo se puede aplicar directamente al caso de un vehículo espacial teniendo rigídamente asegurada una gran carga con propiedades de masa desconocidas. Los resultados también son aplicados directamente a un vehículo espacial que tiene en sí propiedades de masa no del todo conocidas debido a,

por ejemplo, una reconfiguración, variaciones del combustible en los sistemas de reacción a gas, deformación térmica, etc.

### 2.8.1. Ecuaciones dinámicas

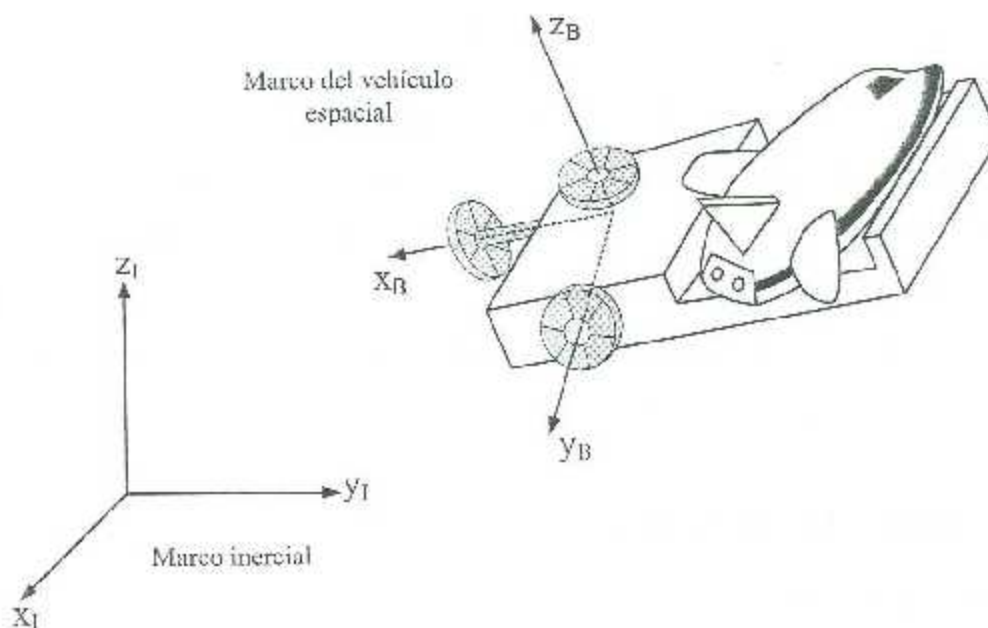


Figura 2.4: Vehículo espacial usando ruedas de reacción

Primero se analizarán los marcos de referencia en los cuales el problema para el control de la orientación será descrito. Se asume que los pares de control son aplicados a través de un conjunto de tres ruedas de reacción a lo largo de tres ejes ortogonales (Figura 2.4). Basándose en estos ejes, se define un marco arbitrario de referencia ortonormal vinculado al vehículo espacial, al cual se hará referencia como el *marco del vehículo espacial*. El origen de este marco no es necesariamente el centro de masa del sistema, ni son necesariamente los ejes principales del vehículo espacial. Se define un *marco inercial* arbitrario, ya sea fijo respecto a las estrellas o a una referencia que se pueda considerar inercial durante la maniobra de la orientación (como por ejemplo una estación espacial).

Sea  $\omega$  el vector de velocidad del vehículo espacial, expresado en el marco del vehículo. La ecuación que describe la evolución de  $\omega$  en el tiempo está dada por

$$\mathbf{H} \dot{\omega} = \mathbf{p} \times \omega + \tau, \quad (2.36)$$

La matriz de inercia  $\mathbf{H}$  es simétrica definida positiva y puede ser escrita como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 - \mathbf{H}^A \quad (2.37)$$

donde  $\mathbf{H}^0$  es la matriz inercial referida al centro del vehículo espacial con ruedas de reacción,  $\mathbf{H}^A$  es la matriz diagonal inercial de las ruedas axiales y  $\mathbf{p}$  es el momento angular total del vehículo, todo expresado en coordenadas del vehículo espacial. Observe que, debido a que  $\tau$  es el vector de pares aplicados al vehículo espacial mediante las ruedas de reacción,  $-\tau$  es el vector de pares aplicados efectivamente por los motores de las ruedas de reacción.

### 2.8.2. Ecuaciones cinemáticas

La posición angular del cuerpo se puede describir de diferentes formas. Sin embargo, en este ejemplo se pretende implementar (2.36) para describir la orientación del vehículo espacial en términos de los cuaterniones.

Utilizando dicha representación, el momento  $\mathbf{p}$  puede ser expresado como una función de  $\mathcal{Q}$ , esto es,

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathcal{Q}) \mathbf{p}^I \quad (2.38)$$

donde  $\mathbf{p}^I$  es el momento angular inercial constante y la matriz  $\mathbf{R}(\mathcal{Q})$  representa la transformación de coordenadas del marco inercial al marco del vehículo espacial, esto es,

$$\mathbf{R}(\mathcal{Q}) = \mathbf{I} + 2q_0 \mathbf{S}(\mathbf{q}) + 2\mathbf{S}(\mathbf{q})^2, \quad (2.39)$$

Note que (2.39) es la forma compacta de (2.29) y además  $\mathbf{R}(\mathcal{Q})^{-1} = \mathbf{R}(\mathcal{Q})^T = \mathbf{R}(-\mathcal{Q})$ .

En resumen, las ecuaciones que describen la orientación de un vehículo espacial están dadas por

$$\begin{aligned} H \dot{\omega} &= p \times \omega + \tau, \\ \dot{Q} &= U \omega, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $U = 1/2 E(Q)$ . La orientación también puede ser representada por los ángulos de Euler con  $\gamma = (\phi, \theta, \psi)$  o por el vector Gibbs  $\xi = \tan(\rho/2) e$ , ambos de representación mínima con tres parámetros.

### 2.8.3. Control de la orientación

#### 2.8.3.1. Selección de los estados

Considere el sistema (2.40) eligiendo como coordenadas de espacio de estados las componentes  $[q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ . Derivando  $\dot{Q}$  las ecuaciones de movimiento pueden reescribirse como

$$H^*(Q) \ddot{Q} + C^*(Q, \dot{Q}) \dot{Q} = F \quad (2.41)$$

con

$$\tau = U^T F, \quad (2.42)$$

$$H^*(Q) = U^{-T} H(Q) U^{-1}, \quad (2.43)$$

$$C^*(Q, \dot{Q}) = -U^{-T} H U^{-1} \dot{U} U^{-1} - U^{-T} S(p) U^{-1}. \quad (2.44)$$

#### 2.8.3.2. Control de seguimiento

Para el control de seguimiento del sistema (2.40) se utiliza la metodología I&L, ésta consiste en la captura del comportamiento deseado del sistema a ser controlado, en este caso el vehículo espacial, introduciendo un sistema dinámico objetivo. El problema de control es luego reducido al diseño de una ley de control que garantice que el sistema controlado se comporte asintóticamente como el sistema objetivo [27]. Siguiendo la metodología en

cuestión para el control de seguimiento de un vehículo espacial, cuyo modelo dinámico en el presente estudio está dado en términos de cuaterniones, de [28] resulta la ley de control:

$$F = H^* (-G\iota - K\dot{e} + \ddot{Q}_o) + C^* \dot{Q}. \quad (2.45)$$

## Resultados

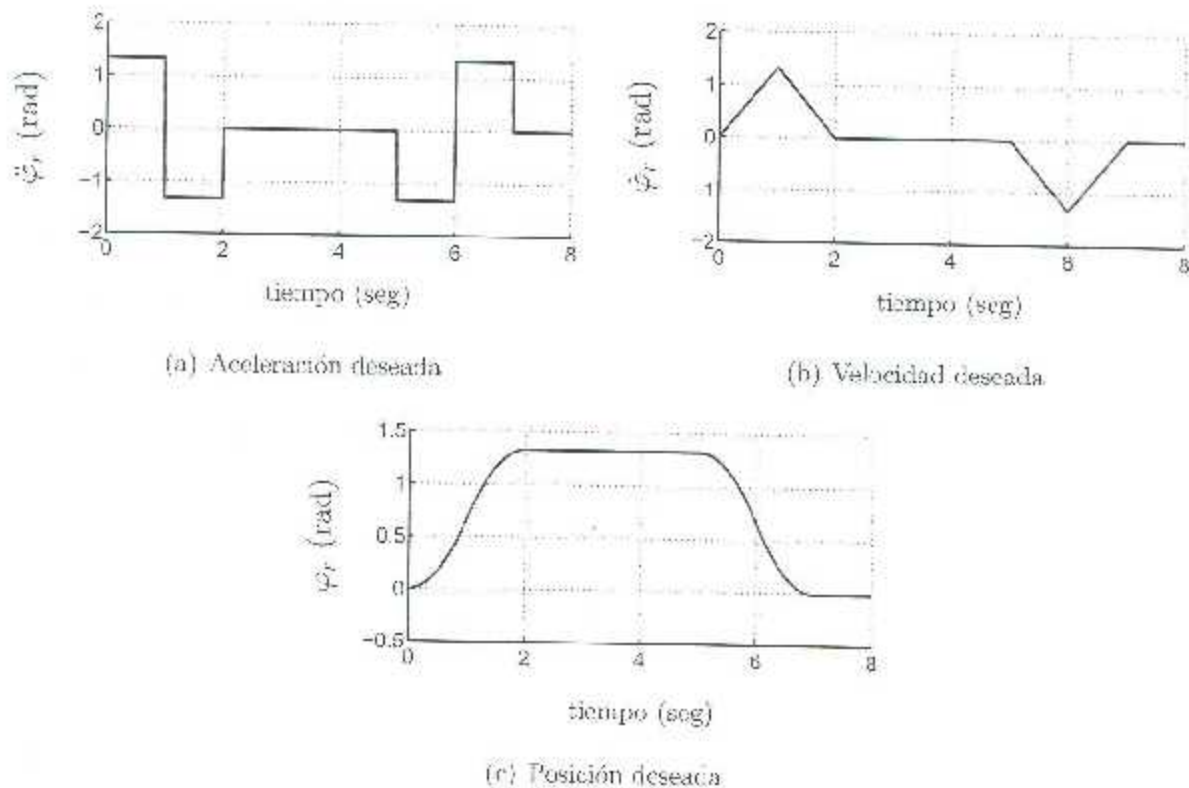


Figura 2.5: Trayectoria deseada  $\ddot{\varphi}_r$ ,  $\dot{\varphi}_r$ ,  $\varphi_r$

Suponga que se requiere que el vehículo espacial, inicialmente en  $Q(0) = [1, 0, 0, 0]^T$ , describa una trayectoria de orientación hipotética que consta de cinco partes, teniendo presente que  $Q_r = \cos(\varphi_r) + u \sin(\varphi_r)$ , una fase de aceleración constante de 1 seg para  $\varphi_r(1) = 0.6665 \text{ rad}$ , una fase de desaceleración constante de 1 seg para  $\varphi_r(2) = 1.333 \text{ rad}$ , una fase de orientación constante de 3 seg, y la trayectoria de regreso a la orientación original con  $u = [-0.271, -0.924, -0.271]^T$ , tal como se exhibe en la figura 2.5.

La ley de control, expresada en términos de los pares de control aplicados a las ruedas de reacción, puede reescribirse de (2.42) y (2.45) como

$$\tau = U^T \left\{ H^T (-G\iota - K\dot{e} + \ddot{Q}_r) + C^* \dot{Q} \right\} \quad (2.46)$$

donde  $\iota$  es el vector de estados del sistema objetivo,  $G = K = 5I_{4 \times 4}$  son los parámetros del controlador. Suponga que la matriz de inercia central está dada por

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 20 \end{bmatrix}$$

El vehículo tiene un momento angular inercial  $p^I = [1, -1, 0]^T$  (impartida, e.g., por el giro original de la carga) [29]. Los resultados de simulación son mostrados en las figuras 2.6-2.8.

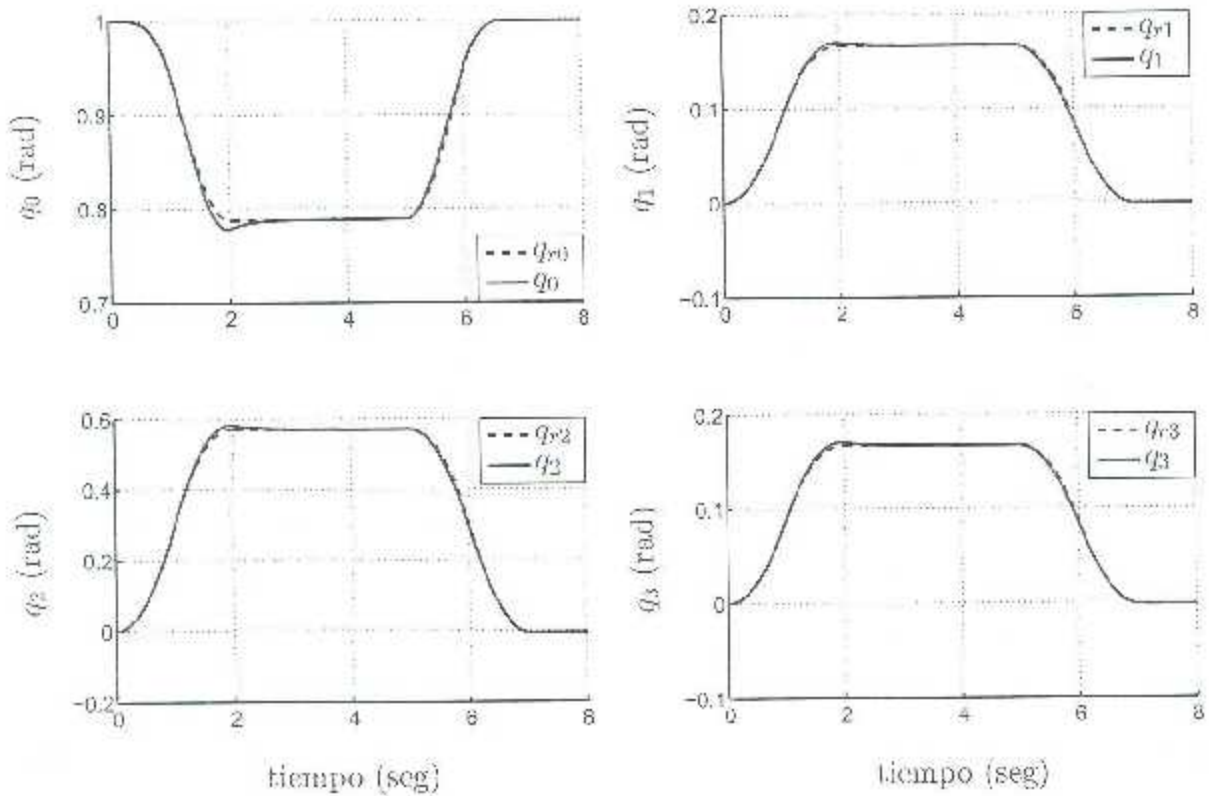


Figura 2.6: Seguimiento de trayectoria del vehículo espacial con cuaterniones



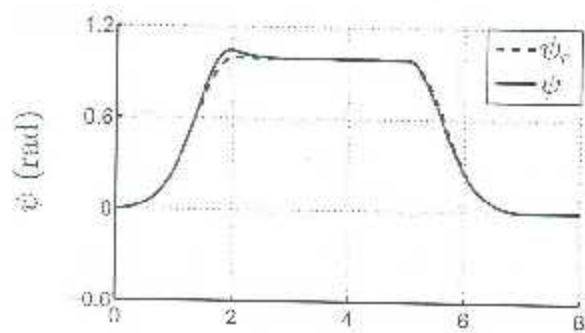
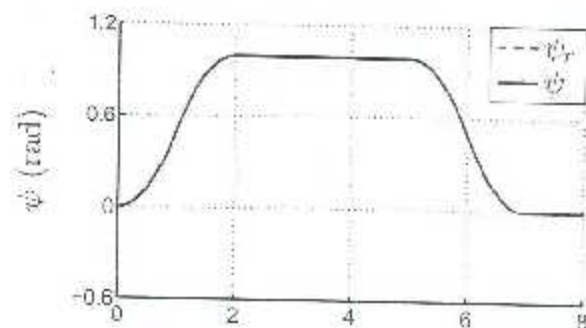
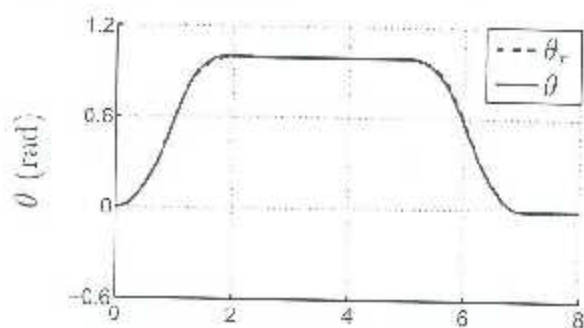
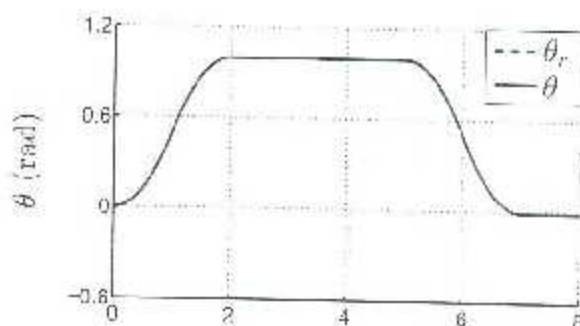
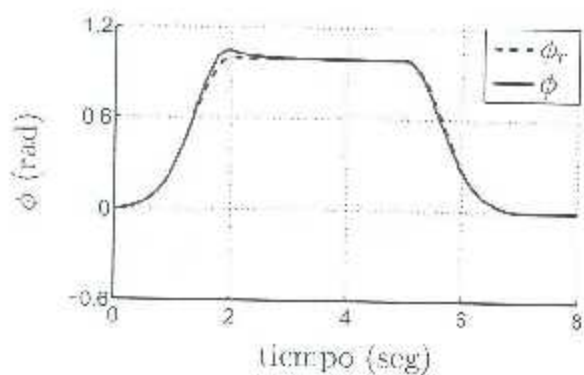
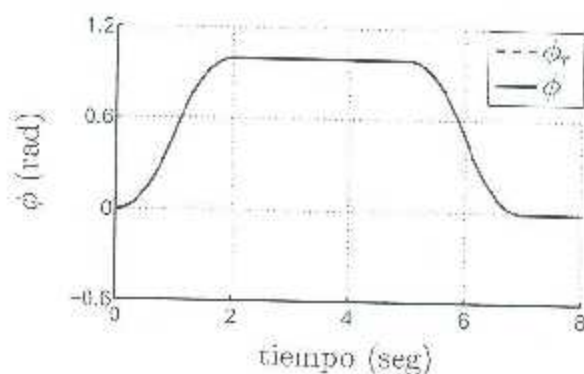
(a) Ángulo  $\psi$  obtenido de la transformación del sistema con cuaterniones(b) Ángulo  $\psi$  del sistema con ángulos de Euler(c) Ángulo  $\theta$  obtenido de la transformación del sistema con cuaterniones(d) Ángulo  $\theta$  del sistema con ángulos de Euler(e) Ángulo  $\phi$  obtenido de la transformación del sistema con cuaterniones(f) Ángulo  $\phi$  del sistema con ángulos de Euler

Figura 2.7: Dinámica del controlador (2.46) en el seguimiento de trayectoria para el modelo del vehículo espacial descrito en cuaterniones pero transformados a ángulos de Euler (columna izquierda) con respecto al modelo en cuestión descrito en ángulos de Euler (columna derecha)

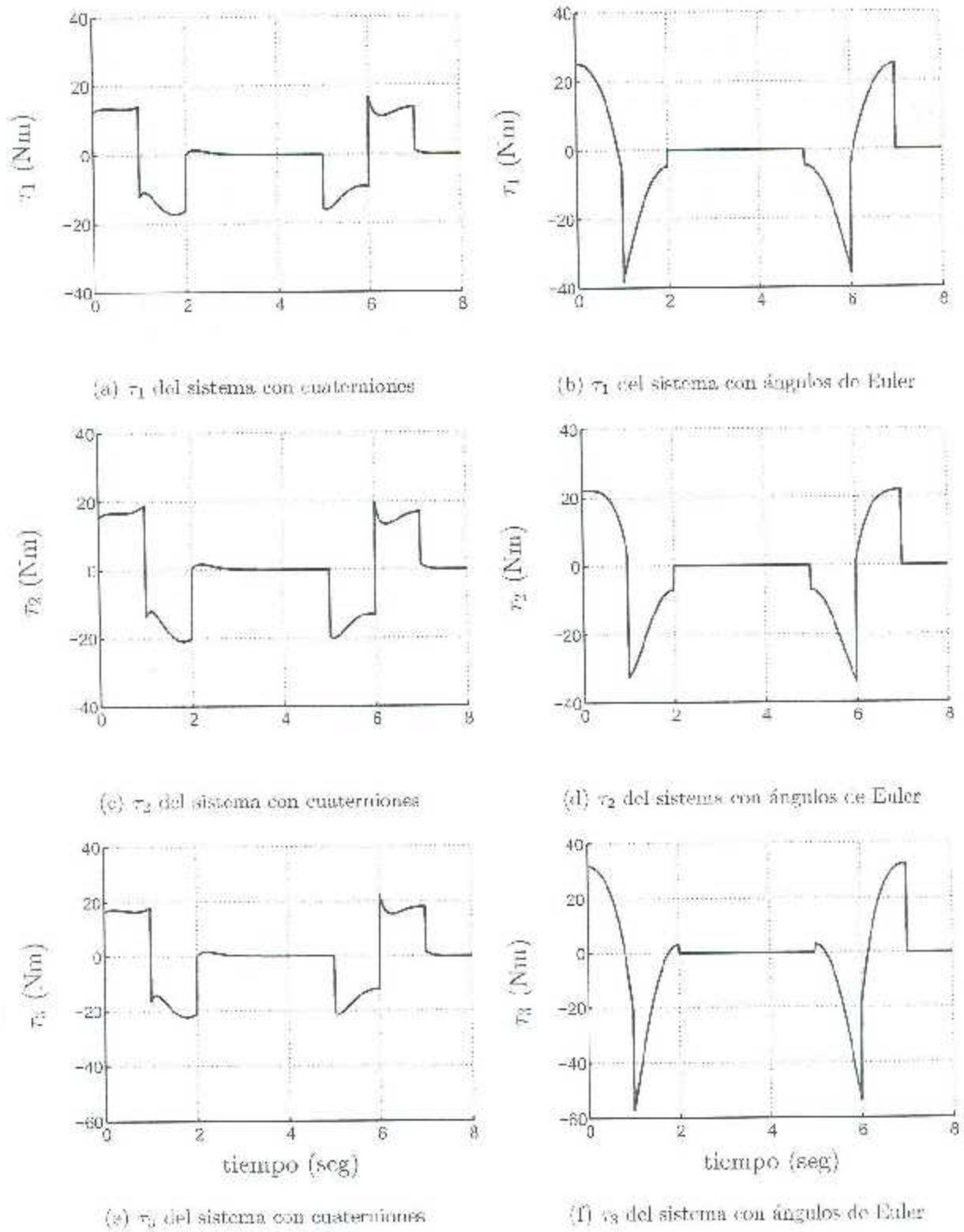


Figura 2.8: Pares de control generados por las ruedas de reacción del vehículo espacial.

La figura 2.6 ilustra la dinámica de orientación en cuaterniones en el seguimiento de trayectoria del vehículo espacial. Las gráficas de las figuras 2.7-2.8 muestran los resultados de la comparación del desempeño del controlador (2.46) sobre el modelo del vehículo espacial descrito en cuaterniones (2.40) pero transformado a ángulos de Euler (ver sección 3.5) con respecto al modelo descrito en ángulos de Euler [29] bajo condiciones similares. La ventaja al utilizar los cuaterniones para la representación de la orientación de dicho vehículo, aparte de evitar las singularidades de los ángulos de Euler, es el ahorro de energía que se consigue al llevar a cabo el seguimiento de la trayectoria prescrita como se observa en la figura 2.8.

## Capítulo 3

# El modelo dinámico de un quadrotor

### 3.1. Descripción física

El quadrotor mostrado en la Fig. 3.1, posee cuatro rotores para generar las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  a través de hélices. Cada rotor consiste en un motor de corriente directa sin escobillas BLDC (*Brushless Direct Current*) y una hélice con inclinación fija. La aeronave está constituida por dos rotores que giran en sentido horario, mientras que el par restante gira en sentido antihorario. Con el fin de aumentar solo la altitud de la aeronave es necesario incrementar la velocidad de los cuatro rotores en la misma cantidad [30]. El avance hacia adelante se consigue incrementando la velocidad del rotor trasero mientras que simultáneamente se reduce la velocidad del rotor delantero. Similarmente se puede ejecutar el desplazamiento hacia atrás, hacia la izquierda y hacia la derecha, mientras que el movimiento de guiñada (*yaw*) se puede realizar mediante la aceleración o ralentización de los rotores que giran en sentido horario, dependiendo de la dirección del ángulo deseado [31].

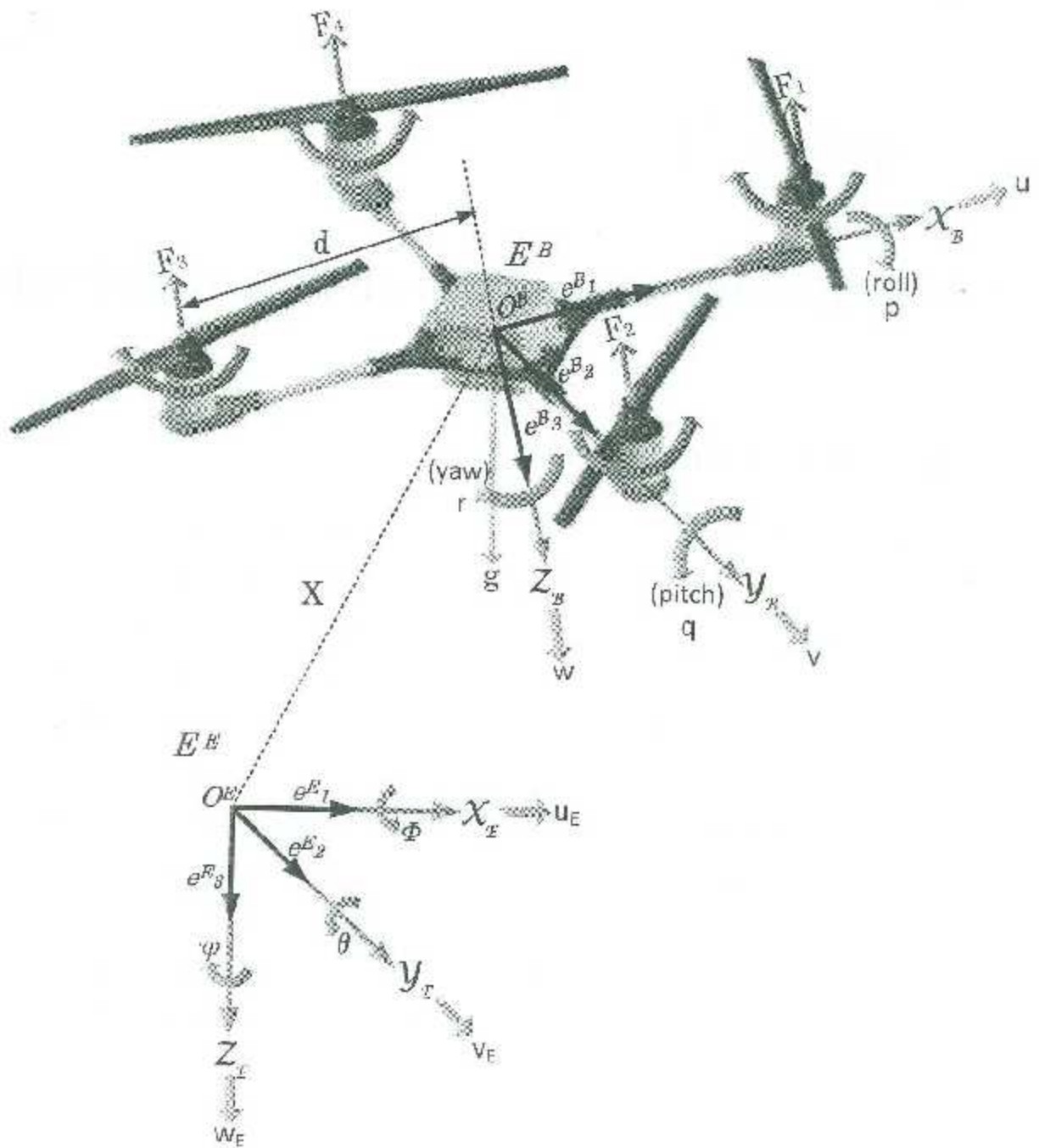


Figura 3.1: Quadrotor

## 3.2. Descripción del modelo dinámico

A continuación, se da una breve descripción sobre el método y procedimientos utilizados para la obtención del modelo cinámico del quadrotor en términos de cuaterniones.

El modelo dinámico se obtiene bajo las siguientes consideraciones [30]:

- La estructura es rígida.
- La estructura es simétrica.
- El centro de masa coincide con el origen del marco fijo al cuerpo.
- Las hélices son rígidas.

## 3.3. Ecuaciones cinemáticas

Para sistemas móviles que se desplazan en el espacio tridimensional las ecuaciones dinámicas de movimiento son usualmente separadas en movimientos de traslación y de rotación [32]. El modelo cinemático describe la relación geométrica entre un marco inercial fijo a tierra y un marco de referencia fijo al cuerpo [33]. La posición se especifica mediante un vector de tres elementos, mientras que en la literatura se han discutido varias formas de representar la orientación. Las representaciones más frecuentemente aplicadas son las convenciones de los ángulos de Euler, las cuales todas ellas son representaciones mínimas de tres parámetros. La popularidad de la convención *roll*, *pitch* y *yaw* se debe probablemente a su fácil interpretación física y del hecho de que los ángulos de Euler pueden medirse directamente con un sistema de giroscopios.

Las dos desventajas de la representación de la orientación empleando los ángulos de Euler son: (1) Se trata de representaciones con tres parámetros y por lo tanto contienen puntos singulares y (2) el aplicar los ángulos de Euler para generar las matrices de rotación  $\mathbb{R} \in SO(3)$ , i.e. el grupo *ortogonal especial* de orden 3, implica numerosos cálculos con funciones trigonométricas.

Los parámetros de Euler, o cuaterniones unitarios, han sido utilizados en diferentes contextos para el control de la orientación de naves espaciales, satélites, aeronaves y helicópteros [32]. A continuación, se describe la cinemática de rotación mediante la convención ZYX de los ángulos de Euler, esto con el fin de tener una interpretación real de la orientación para luego utilizar los cuaterniones con el fin de evitar las desventajas que se tienen al emplear los ángulos de Euler.

### 3.3.1. Representación de la orientación mediante ángulos de Euler

La ecuación que describe la posición y orientación de un helicóptero tipo quadrotor es básicamente la de un cuerpo rígido con 6 GDL. Considérense ahora dos marcos principales de referencia (Ver Fig. 3.1). El marco de referencia inercial  $E^E(O^E, \vec{e}_1^E, \vec{e}_2^E, \vec{e}_3^E)$  fijo a la tierra y el marco de referencia  $E^B(O^B, \vec{e}_1^B, \vec{e}_2^B, \vec{e}_3^B)$  fijo al cuerpo en el centro de gravedad del quadrotor. La posición absoluta del quadrotor se describe mediante  $\overline{O^E O^B} = \mathbf{X} = [x_E, y_E, z_E]^T$  y su orientación mediante los tres ángulos de Euler  $\boldsymbol{\eta} = [\psi, \theta, \phi]^T$ , estos tres ángulos respectivamente llamados ángulo de guiñada (*yaw*) ( $-\pi \leq \psi < \pi$ ), ángulo de alabeo (*roll*) ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) y ángulo de cabeceo (*pitch*) ( $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ ). La velocidad lineal expresada en el marco de referencia  $E^E$  se define mediante  $\mathbf{V}_E = [u_E, v_E, w_E]^T$ .

El quadrotor está limitado con los siguientes 6 GDL según el marco de referencia  $E^B$ : tres para la traslación  $\mathbf{V}_B = [u, v, w]^T$  y tres de rotación  $\boldsymbol{\Omega} = [p, q, r]^T$ , los cuales son la velocidad lineal y angular de la aeronave, respectivamente. La relación entre los vectores de velocidad generalizada  $(\mathbf{V}_B, \boldsymbol{\Omega})$  y  $(\dot{\mathbf{X}}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$  está dada por [30]

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}_{\Theta} \boldsymbol{\nu} \quad (3.1)$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  es el vector de velocidad generalizada con respecto al marco  $E^E$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector de velocidad generalizada con respecto al marco  $E^B$  y  $\mathbf{J}_{\Theta}$  es la matriz generalizada que relaciona ambos marcos.

Asimismo,  $\boldsymbol{\xi}$  se compone de los vectores para la posición lineal  $\mathbf{X}$  (m) y posición angular

$\eta$  (rad) con respecto al marco  $E^E$ ,

$$\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \eta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_E & y_E & z_E & \psi & \theta & \phi \end{bmatrix}^T, \quad (3.2)$$

y  $\dot{\xi}$  es el vector de velocidad generalizada con respecto al marco  $E^E$ ,

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} & \dot{\eta} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_E & v_E & w_E & \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T. \quad (3.3)$$

Del mismo modo,  $\nu$  está compuesto de los vectores para la velocidad lineal  $\mathbf{V}_B$  (m/s) y velocidad angular  $\Omega$  (rad/s) del quadrotor con respecto al marco de referencia  $E^B$ , i.e.,

$$\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_B & \Omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u & v & w & p & q & r \end{bmatrix}^T. \quad (3.4)$$

La matriz generalizada  $\mathbf{J}_\Theta$  está compuesta de cuatro submatrices dada por [33]

$$\mathbf{J}_\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{EB} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde la notación  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  indica que se trata de una submatriz de dimensión  $3 \times 3$  con todos sus elementos igual a 0, mientras que  $\mathbf{R}_{EB}$  y  $\mathbf{M}$  son las matrices de transformación y de rotación, respectivamente, entre  $E^E$  y  $E^B$  dadas como [30]

$$\mathbf{R}_{EB} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & C_\psi S_\theta S_\phi - C_\theta S_\psi & S_\theta S_\psi + C_\theta C_\psi S_\phi \\ C_\theta S_\psi & C_\psi C_\theta + S_\theta S_\phi S_\psi & C_\theta S_\theta S_\psi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & S_\psi S_{\phi_0} & C_\psi S_{\phi_0} \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 1 & S_\psi T_\phi & C_\psi T_\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\psi & C_\psi C_\phi \\ 0 & C_\theta & C_\theta S_\phi \\ 1 & 0 & -S_\psi \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

donde  $S(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$ ,  $T(\cdot)$  y  $Sec(\cdot)$  son respectivamente las abreviaciones de  $\sin(\cdot)$ ,  $\cos(\cdot)$ ,  $\tan(\cdot)$  y  $\sec(\cdot)$ . A causa de que  $\mathbf{R}_{EB}$  es una matriz ortogonal normalizada, es decir que su determinante es la unidad, su inversa  $\mathbf{R}_{EB}^{-1}$  es igual a la traspuesta  $\mathbf{R}_{EB}^T$ .



Por lo tanto, reescribiendo (3.1) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{EB} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_B \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

y desarrollando (3.8) se llega a las ecuaciones cinemáticas que están expresadas con respecto al marco  $E^E$ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= (C_\psi C_\phi) u + (C_\psi S_\phi S_\psi - C_\psi S_\psi) v + (S_\psi S_\phi + C_\psi C_\psi S_\phi) w, \\ \dot{y}_E &= (C_\theta S_\phi) u + (C_\theta C_\phi + S_\theta S_\theta S_\phi) v + (C_\theta S_\theta S_\psi - C_\theta S_\psi) w, \\ \dot{z}_E &= -(S_\theta) u + (C_\theta S_\phi) v + (C_\theta C_\phi) w, \\ \dot{\phi} &= (S_\psi S_{e_\theta}) q + (C_\psi S_{e_\theta}) r, \\ \dot{\theta} &= (C_\psi) q - (S_\psi) r, \\ \dot{\psi} &= p + (S_\psi T_\theta) q + (C_\psi T_\theta) r. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3.2. Representación de la orientación mediante cuaterniones

Los cuaterniones representan otra manera de describir la dinámica de un vehículo móvil. Este tipo de representación se utiliza como una alternativa para modelar la dinámica de la orientación con el fin de evitar las singularidades que se presentan con los ángulos de Euler o parámetros de Rodrigues. El cuaternión está basado en una representación de cuatro parámetros que da una parametrización más global; sin embargo, falla para una rotación de  $180^\circ$  alrededor de algunos ejes [26].

De (2.29) y (2.35), (3.1) se puede reescribir como

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{J}_Q \boldsymbol{\nu} \quad (3.10)$$

donde  $\boldsymbol{\chi}$  es el nuevo vector de velocidades generalizadas con respecto al marco  $E^E$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  sigue siendo el vector de velocidades generalizadas con respecto al marco  $E^B$  y  $\mathbf{J}_Q$  es la nueva matriz generalizada. Por consiguiente,  $\boldsymbol{\chi}$  está compuesto del vector de posición lineal  $\mathbf{X}(m)$  y posición angular  $\mathcal{Q}(\text{rad})$ , *i.e.*

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathcal{Q} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_E & y_E & z_E & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T, \quad (3.11)$$

y con  $\dot{\mathbf{X}}$  se tiene el vector de velocidad generalizada, ambos con respecto al marco  $E^B$ ,

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} & \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} u_E & v_E & w_E & \dot{q}_0 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T. \quad (3.12)$$

Luego, la ecuación equivalente a (3.8) queda de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{Q}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_B \\ \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{Q} = [q_0, \mathbf{q}^T]^T = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$  es el cuaternión unitario que representa la orientación. Los elementos del cuaternión unitario  $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}$ , en honor a Hamilton, son llamados los parámetros de Euler, los cuales satisfacen

$$q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (3.14)$$

La matriz de transformación  $\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}$  de dimensión  $7 \times 6$  tiene rango pleno, *i.e.* rango  $[\mathbf{J}_{\mathbf{Q}}] = 6 \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{H}$ . Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas no contienen puntos singulares. Los cálculos de las ecuaciones cinemáticas solamente involucran sumas y multiplicaciones, no hay necesidad de evaluar funciones. Además, las ecuaciones cinemáticas de rotación son lineales en  $\mathbf{Q}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  [32].

Finalmente, desarrollando (3.13) se obtiene el conjunto de ecuaciones cinemáticas en términos de cuaterniones para la traslación y rotación del quadrotor:

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)u + (2q_1q_2 - 2q_0q_3)v + (2q_1q_3 + 2q_0q_2)w, \\ \dot{y}_E &= (2q_1q_2 + 2q_0q_3)u + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)v + (2q_2q_3 - 2q_0q_1)w, \\ \dot{z}_E &= (2q_1q_3 - 2q_0q_2)u + (2q_2q_3 + 2q_0q_1)v + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)w, \\ \dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - r q_3), \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(pq_0 - q_3q_3 + r q_2), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(pq_3 + q_2q_0 - r q_1), \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-pq_2 + q_1q_1 + r q_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.4. Ecuaciones dinámicas

La dinámica de un cuerpo rígido de 6 GDL toma en cuenta la masa del cuerpo y su matriz de inercias [33]. Aplicando la segunda ley de Newton alrededor del centro de masa

del quadrotor resultan luego las ecuaciones dinámicas <sup>4</sup> [30]

$$\begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_B \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \times (m \mathbf{V}_B) \\ \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \boldsymbol{\tau}_B \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde  $m$  (kg) y  $\mathbf{J} = \text{diag}[I_x, I_y, I_z]$  (Nms<sup>2</sup>) son la masa y la matriz de inercias del quadrotor, respectivamente. La notación  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  representa una matriz identidad de dimensión  $3 \times 3$ , la rotación  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  representa una matriz con todos sus elementos igual a cero,  $\dot{\mathbf{V}}_B$  (m/s<sup>2</sup>) es el vector de aceleración lineal del quadrotor con respecto al marco  $E^B$  mientras que  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  (rad/s<sup>2</sup>) es el vector de aceleración angular del quadrotor con respecto al marco  $E^B$ .  $\mathbf{F}_B$  (N) es el vector de fuerzas externas y  $\boldsymbol{\tau}_B$  (Nm) es el vector de pares externos, ambos desarrollados en el centro de masa del quadrotor según la dirección del marco de referencia  $E^B$ .

Defínase un vector de fuerzas generalizadas

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B & \boldsymbol{\tau}_B \end{bmatrix}^T \quad (3.17)$$

Luego, (3.16) puede reescribirse en la forma matricial [33]

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{M}_B \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} \quad (3.18)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector de aceleración generalizado con respecto al marco  $E^B$ ,  $\mathbf{M}_B$  es la matriz inercial del sistema y  $\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, estas dos últimas con respecto al marco  $E^B$ , definidas como

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m \mathbf{S}(\mathbf{V}_B) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Nótese que  $\mathbf{M}_B$  es una matriz diagonal constante y  $\mathbf{S}(\cdot)$  es el operador antisimétrico definido en (2.34). La ecuación (3.16) es genérica y válida para todos los cuerpos rígidos que

<sup>4</sup>El símbolo “ $\times$ ” indica el producto vectorial usual

cumplen con las suposiciones establecidas en la sección 3.2. En este trabajo se utilizó (3.16) para modelar el helicóptero tipo quadrotor, por lo tanto el vector definido como  $\mathbf{A}$  contiene la información acerca de su dinámica y puede ser dividido en tres componentes según la naturaleza de las contribuciones del quadrotor.

El primer componente a definir en  $\mathbf{A}$  es el vector de gravedad dado por la aceleración debido a la gravedad  $g$  ( $\text{m/s}^2$ ), *i.e.*,

$$\mathbf{G}_B(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G^B \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{Q})^{-1} \mathbf{F}_G^E \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2q_1q_3 - 2q_0q_2) mg \\ (2q_2q_3 + 2q_0q_1) mg \\ (1 - 2q_1^2 - 2q_2^2) mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{F}_G^E$  (N) es el vector de fuerzas gravitacionales con respecto al marco  $E^E$  y  $\mathbf{F}_G^B$  (N) es el vector con respecto al marco  $E^B$ ;  $\mathbf{0}_{3 \times 1}$  es un vector columna que contiene ceros;  $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$  es la matriz ortogonal normalizada en términos del cuaternión unitario y su inversa  $\mathbf{R}(\mathbf{Q})^{-1}$  es igual a la transpuesta  $\mathbf{R}(\mathbf{Q})^T$ . Es importante hacer notar que  $\mathbf{G}_B(\xi)$  solo afecta a las ecuaciones lineales y no a las ecuaciones angulares, ya que se trata de una fuerza y no de un par [33].

El segundo componente de  $\mathbf{A}$  es el vector de fuerzas y pares aerodinámicos definido como

$$\mathbf{O}_B(\Delta) = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z & A_p & A_q & A_r \end{bmatrix}^T \quad (3.22)$$

Las fuerzas aerodinámicas son altamente no lineales y dependen de numerosas variables físicas tal como el ángulo entre la velocidad del aire, el marco fijo al cuerpo y la forma geométrica del helicóptero. Luego,  $\mathbf{O}_B(\Delta)$  puede ser calculado del coeficiente aerodinámico  $C_i$  como

$$A_i = \frac{1}{2} \rho_{\text{aire}} C_i \Delta^2 \quad (3.23)$$

donde  $\rho_{\text{aire}}$  es la densidad del aire y  $\Delta$  es la velocidad del helicóptero con respecto al viento [30].

El tercer y último componente a definir para  $\Lambda$  toma en cuenta las fuerzas y pares producidos directamente por las entradas principales de movimiento. De las consideraciones aerodinámicas, se deduce que tanto las fuerzas y pares son proporcionales a la velocidad de las hélices al cuadrado [33]. Por lo tanto, el empuje total generado por los cuatro rotores y los pares no conservativos generados por la acción de la diferencia de fuerzas de empuje de cada par de rotores están dados por el vector de movimiento

$$\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 |L_i| \\ db(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ db(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ c(\omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_1^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

donde  $L_i = -b\omega_i^2$  es la fuerza de elevación generada por el rotor  $i$  (expresada en el sistema del cuerpo),  $\omega_i$  indica la velocidad angular del rotor  $i$ ,  $c > 0$  es el factor de arrastre,  $b > 0$  es el factor de empuje,  $d$  representa la distancia de los rotores al centro de masa del quadrotor. Los factores de arrastre y empuje dependen de la densidad del aire así como del radio, la forma y la inclinación del ángulo de la hélice, entre otros factores [34].

Partiendo de (3.24) es posible identificar una matriz constante  $\mathbf{E}_B$  que multiplicada por el vector de velocidad de las hélices al cuadrado  $\boldsymbol{\omega}^2$  produce el vector de movimiento  $\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\omega})$ . La ecuación (3.25) muestra la matriz de movimiento y el vector de velocidad de las hélices al cuadrado, respectivamente.

$$\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -b & b & -b \\ 0 & db & 0 & -db \\ db & 0 & -db & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

De lo anterior se tiene

$$E_H \omega^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ db(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ db(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ c(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} = U_B(\omega), \quad (3.26)$$

De (3.18) es posible describir la dinámica del quadrotor. Considerando (3.21), (3.22) y (3.26) se tiene

$$M_B \dot{\nu} + C_B(\nu)\nu = G_H(\xi) + O_B(\Delta) + U_B(\omega). \quad (3.27)$$

Luego, la derivada del vector generalizado  $\dot{\nu}$  con respecto al marco  $E^B$  resulta

$$\dot{\nu} = M_B^{-1} \left( -C_B(\nu)\nu + G_H(\xi) + O_B(\Delta) + U_B(\omega) \right) \quad (3.28)$$

equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (vr - wq) - g(2q_1q_3 - 2q_2q_2) + \frac{A_x}{m}, \\ \dot{v} &= (wp - ur) + g(2q_2q_1 + 2q_3q_3) + \frac{A_y}{m}, \\ \dot{w} &= (uq - vp) + g(1 - 2q_1^2 - 2q_2^2) - \frac{1}{m}u_1 + \frac{A_z}{m}, \\ \dot{p} &= \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) qr + \frac{d}{I_x}u_2 + \frac{A_p}{I_x}, \\ \dot{q} &= \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) pr + \frac{d}{I_y}u_3 + \frac{A_q}{I_y}, \\ \dot{r} &= \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) pq + \frac{1}{I_z}u_4 + \frac{A_r}{I_z}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde las entradas de velocidad de las hélices están dadas por

$$\begin{aligned}
 v_1 &= b (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2), \\
 v_2 &= b (w_2^2 - w_4^2), \\
 v_3 &= b (w_1^2 - w_3^2), \\
 v_4 &= c (w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 - w_4^2).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

El sistema dinámico del quadrotor en (3.29) corresponde al marco fijo al cuerpo. Sin embargo, en este caso es útil expresar las dinámicas del quadrotor con respecto a un sistema híbrido compuesto de las ecuaciones lineales con respecto al marco  $E^E$  y las ecuaciones angulares con respecto al marco  $E^B$ . Las siguientes ecuaciones se expresan en el nuevo marco híbrido  $E^H$ . Se adopta esta nueva referencia ya que es fácil expresar las dinámicas combinadas con el control, en particular para la posición vertical en el marco inercial de la tierra. El vector de velocidad generalizado  $\zeta$  con respecto al marco  $E^H$  es definido como

$$\zeta = \begin{bmatrix} \dot{X} & \Omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{x}_E & \dot{y}_E & \dot{z}_E & p & q & r \end{bmatrix}^T. \tag{3.31}$$

La dinámica del sistema en el marco  $E^H$  puede reescribirse en forma matricial como

$$M_H \dot{\zeta} + C_H(\zeta)\zeta = G_H + O_H(\Delta) + U_H(\omega) \tag{3.32}$$

donde  $\dot{\zeta}$  es el vector de aceleración generalizado del quadrotor con respecto al marco  $E^H$ , con matriz inercial  $M_H$  del sistema dada por

$$M_H = M_B = \begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J} \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

la matriz de fuerzas centrífuga y de Coriolis  $C_H(\nu)$  para el nuevo marco  $E^H$  está dada

por

$$\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathcal{S}(\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}) \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

El vector gravitacional  $\mathbf{G}_H(\boldsymbol{\zeta})$  es reescrito en el marco  $E^H$  como

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} F_G^E & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad (3.35)$$

el vector de fuerzas y pares aerodinámicos no cambia en el marco  $E^H$ , *i.e.*, está dado como

$$\mathbf{O}_H(\Delta) = \mathbf{O}_B(\Delta) = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z & A_p & A_q & A_r \end{bmatrix}^T. \quad (3.36)$$

El nuevo vector de entradas de movimiento en el marco  $E^H$  se escribe como

$$\mathbf{U}_H(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathcal{Q}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{E}_B \boldsymbol{\omega}^2, \quad (3.37)$$

donde la entrada  $u_1$  afecta los primeros tres elementos de  $\mathbf{U}_H(\boldsymbol{\omega})$ , a través de la matriz de relación  $\mathbf{R}(\mathcal{Q})$ , y no solo a la tercera como en (3.26). Desarrollando la expresión anterior se tiene

$$\mathbf{U}_H(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} (2q_1q_3 + 2q_0q_2)u_1 \\ -(2q_2q_3 - 2q_0q_1)u_1 \\ -(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)u_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

De (3.32) el vector de aceleración generalizada  $\dot{\boldsymbol{\zeta}}$  con respecto al marco  $E^H$  resulta en [33]

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}_H^{-1} \left( -\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{G}_H + \mathbf{O}_H(\Delta) + \mathbf{E}_H \boldsymbol{\omega}^2 \right). \quad (3.39)$$



Desarrollando (3.39) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_E &= -\frac{1}{m} (2q_1q_3 + 2q_0q_2) u_1 - \frac{A_x}{m}, \\
 \dot{v}_E &= -\frac{1}{m} (2q_2q_3 - 2q_0q_1) u_1 + \frac{A_y}{m}, \\
 \dot{w}_E &= -\frac{1}{m} (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) u_1 + \frac{A_z}{m} + g, \\
 \dot{p} &= \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) qr + \frac{d}{I_x} u_2 + \frac{A_r}{I_x}, \\
 \dot{q} &= \left( \frac{I_x - I_z}{I_y} \right) pr - \frac{d}{I_y} u_3 - \frac{A_l}{I_y}, \\
 \dot{r} &= \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) pq + \frac{1}{I_z} u_4 + \frac{A_r}{I_z}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

La dinámica no lineal completa dada por (3.15) y (3.40) puede representarse en la forma de espacio de estados [30]

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{3.41}$$

i.e.,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \\ \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{u}_E \\ \dot{v}_E \\ \dot{w}_E \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_E \\ v_E \\ w_E \\ \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - rq_3) \\ \frac{1}{2}(pq_0 - qq_3 - rq_2) \\ \frac{1}{2}(pq_3 + qq_0 - rq_1) \\ \frac{1}{2}(-pq_2 + qq_1 - rq_0) \\ \frac{A_x}{m} \\ \frac{A_y}{m} \\ \frac{A_z}{m} + g \\ \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{A_r}{I_x} \\ \frac{I_x - I_z}{I_y} pr + \frac{A_l}{I_y} \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq + \frac{A_r}{I_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{m}(q_1q_3 - q_0q_2) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{m}(q_2q_3 - q_0q_1) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

con vector de estado

$$x = [x_E, y_E, z_E, q_0, q_1, q_2, q_3, u_E, v_E, w_E, p, q, r]^T \quad (3.43)$$

### 3.5. Validación del modelo en cuaterniones

Para comprobar que el modelo (3.42) tiene un comportamiento similar al modelo dado en ángulos de Euler [31] las entradas aplicadas para ambos modelos en lazo abierto serán establecidas como  $u_1 = 6.867 \text{ N}$ ,  $u_2 = -0.05 \text{ Nm}$ ,  $u_3 = -0.015 \text{ Nm}$  y  $u_4 = -0.01 \text{ Nm}$ . Se utilizan las ecuaciones

$$\psi = \arctan(r_{31}/r_{11}) \quad (3.44)$$

$$\theta = -\arcsin(r_{31}) \quad (3.45)$$

$$\phi = \arctan(r_{32}/r_{33}) \quad (3.46)$$

para llevar a cabo la conversión del modelo en cuaterniones a los ángulos de Euler para luego comparar ambas dinámicas (Ver fig. 3.2). Cabe mencionar que estas ecuaciones sólo aplican para la convención ZYX donde  $r_{ij}$  son los elementos del operador matricial (2.29).

Analizando la figura 3.2 se puede verificar que la respuesta en lazo abierto para ambos modelos producen la misma dinámica, lo que valida la representación del modelo del quadrotor en términos de cuaterniones.

### 3.6. Aproximación lineal del modelo del quadrotor

Una aproximación lineal de un sistema no lineal es un método útil no sólo en el análisis sino, en particular, en el diseño de estrategias de control que mantengan la evolución del sistema en un entorno alrededor de un punto de equilibrio nominal. Una representación lineal del modelo no lineal (3.42) que aproxime el comportamiento del quadrotor puede obtenerse empleando la expansión en series de Taylor.

Las ecuaciones de estado para sistemas no lineales tienen la forma general

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (3.47)$$

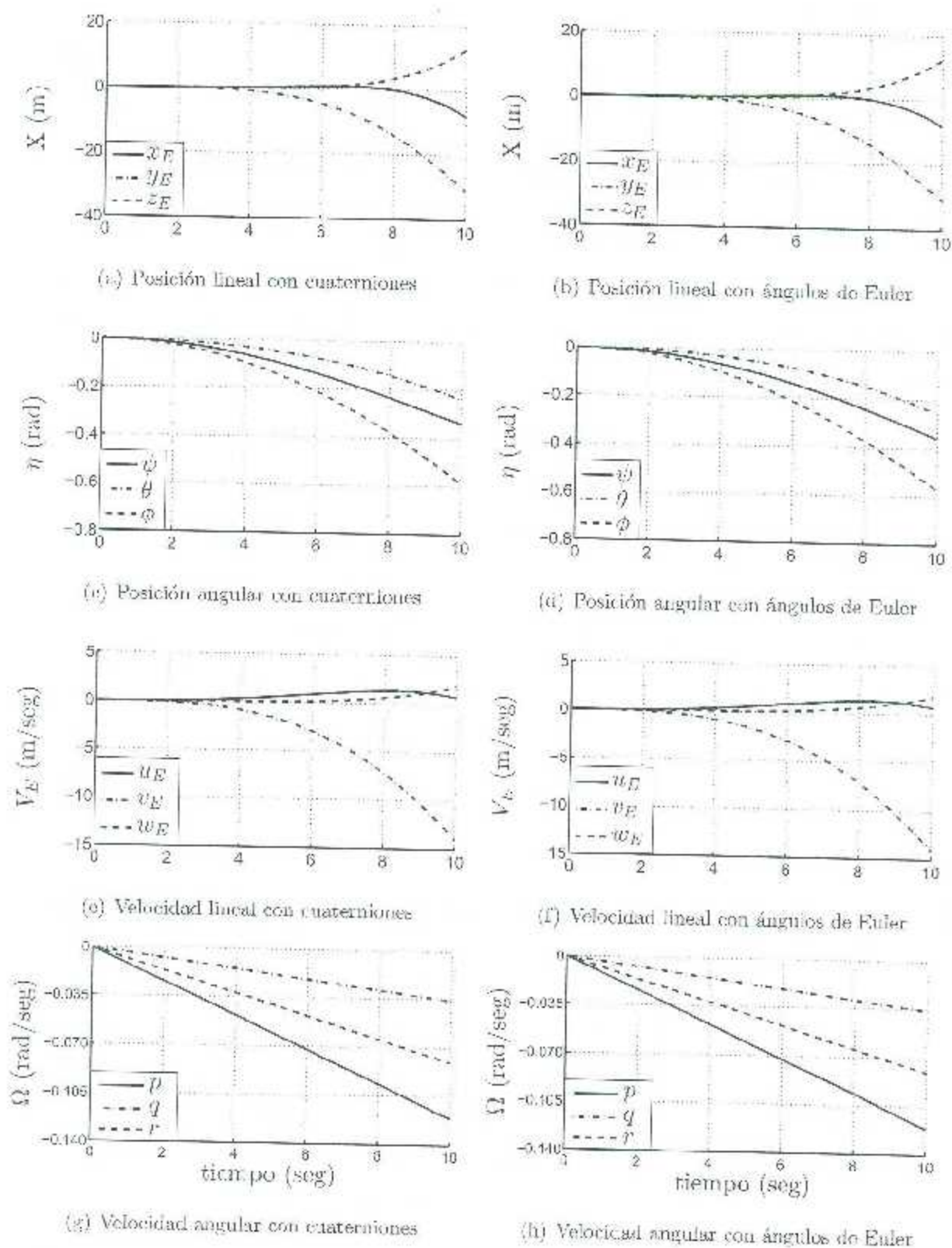


Figura 3.2: Dinámica de lazo abierto para ambos modelos del quadrotor.

Suponga que esta ecuación es lo suficientemente suave, i.e. que tenga derivadas continuas hasta cierto orden deseado, para obtener una aproximación en series de Taylor alrededor de un punto de interés  $(x_0, u_0)$  dada por

$$f(x(t), u(t), t) = f(x_0(t), u_0(t), t) + f_x(t)\delta x(t) + f_u(t)\delta u(t) + \text{TOS} \quad (3.48)$$

conde

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t), \quad (3.49)$$

$$u(t) = u_0(t) + \delta u(t), \quad (3.50)$$

con matrices Jacobianas

$$f_x(t) = \left. \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}, \quad (3.51)$$

$$f_u(t) = \left. \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}. \quad (3.52)$$

Si los términos de orden superior (TOS) en (3.48) son despreciados, luego

$$\delta \dot{x} = f(x(t), u(t), t) - f(x_0(t), u_0(t), t) \quad (3.53)$$

donde

$$\delta \dot{x} = f_x(t)\delta x(t) + f_u(t)\delta u(t) \quad (3.54)$$

representa el modelo linealizado denominado como ecuación de perturbaciones pequeñas y el cual es la base de la forma lineal estándar

$$\delta \dot{x} = A \delta x(t) + B \delta u(t). \quad (3.55)$$

La ecuación anterior describe los pequeños movimientos para las desviaciones  $\delta x(t)$  [35]. El modelo dinámico no lineal del quadrotor puede ser escrito como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z & f_w \end{bmatrix}^T \quad (3.56)$$

en la cual  $f_{xt}$ ,  $f_{xr}$ ,  $f_{xt}$ ,  $f_{xr}$  son funciones relacionadas con la cinemática de traslación, cinemática de rotación, dinámica de traslación y dinámica de rotación, respectivamente, donde

$$f_{xt} = \begin{bmatrix} \dot{u}_E & \dot{v}_E & \dot{w}_E \end{bmatrix}^T, \quad (3.57)$$

$$f_{xr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - r^2q_3) \\ \frac{1}{2}(pq_1 - qq_3 + r^2q_2) \\ \frac{1}{2}(pq_3 + qq_0 - r^2q_1) \\ \frac{1}{2}(-pq_2 + qq_1 - r^2q_0) \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

$$f_{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{m}(q_1q_3 + q_2q_2)u_1 + \frac{A_2}{m} \\ -\frac{2}{m}(q_2q_3 - q_0q_1)u_1 + \frac{A_2}{m} \\ -\frac{1}{m}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)u_1 + \frac{A_2}{m} + g \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$f_{dr} = \begin{bmatrix} \left(\frac{I_x - I_z}{I_x}\right)qr + \frac{d}{I_x}u_2 + \frac{A_r}{I_x} \\ \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right)pr + \frac{d}{I_y}u_3 + \frac{A_r}{I_y} \\ \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)pq - \frac{1}{I_z}u_4 - \frac{A_r}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Luego, descomponiendo el vector de estados (3.56) en términos de la cinemática y dinámica, *i.e.*

$$x_{ct} = \begin{bmatrix} x_E & y_E & z_E \end{bmatrix}, \quad x_{cr} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}, \quad x_{dt} = \begin{bmatrix} u_E & v_E & w_E \end{bmatrix}, \quad x_{dr} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix},$$

la matriz  $A$  del sistema lineal (3.56) es definida como

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{xt}}{\partial x_{ct}} & \frac{\partial f_{xt}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{xt}}{\partial x_{dt}} & \frac{\partial f_{xt}}{\partial x_{dr}} \\ \frac{\partial f_{xr}}{\partial x_{ct}} & \frac{\partial f_{xr}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{xr}}{\partial x_{dt}} & \frac{\partial f_{xr}}{\partial x_{dr}} \\ \frac{\partial f_{dt}}{\partial x_{ct}} & \frac{\partial f_{dt}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{dt}}{\partial x_{dt}} & \frac{\partial f_{dt}}{\partial x_{dr}} \\ \frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{ct}} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{dt}} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{dr}} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

cuyos elementos están dados por

- Matriz Jacobiana de la cinemática de traslación

$$\frac{\partial f_{ct}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

- Matriz Jacobiana de la cinemática de rotación

$$\frac{\partial f_{cr}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p) & \frac{1}{2}(r) & \frac{1}{2}(r) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-q_1) & \frac{1}{2}(-q_2) & \frac{1}{2}(-q_3) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p) & 0 & \frac{1}{2}(r) & \frac{1}{2}(-r) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(q_1) & \frac{1}{2}(-q_2) & \frac{1}{2}(q_3) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(r) & \frac{1}{2}(-r) & 0 & \frac{1}{2}(p) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(q_1) & \frac{1}{2}(q_2) & \frac{1}{2}(-q_3) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(r) & \frac{1}{2}(r) & \frac{1}{2}(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(-q_1) & \frac{1}{2}(q_2) & \frac{1}{2}(q_3) \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

- Matrices Jacobianas de la dinámica de traslación

$$\frac{\partial f_{at}}{\partial x_{ct}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial f_{at}}{\partial x_{cr}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{m}(q_2)u_1 & -\frac{2}{m}(q_3)u_1 & -\frac{2}{m}(q_0)u_1 & -\frac{2}{m}(q_1)u_1 \\ \frac{2}{m}(q_1)u_1 & \frac{2}{m}(q_0)u_1 & -\frac{2}{m}(q_3)u_1 & -\frac{2}{m}(q_2)u_1 \\ -\frac{2}{m}(q_0)u_1 & \frac{2}{m}(q_1)u_1 & \frac{2}{m}(q_2)u_1 & -\frac{2}{m}(q_3)u_1 \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial f_{at}}{\partial x_{dr}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial f_{at}}{\partial x_{br}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

- Matrices Jacobianas de la dinámica de rotación

$$\frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{ct}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{cl}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{dr}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{dr}} = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{l_y - l_z}{l_x}\right)r & \left(\frac{l_y - l_z}{l_x}\right)q \\ \left(\frac{l_z - l_x}{l_y}\right)r & 0 & \left(\frac{l_x - l_z}{l_y}\right)p \\ \left(\frac{l_x - l_z}{l_y}\right)q & \left(\frac{l_x - l_y}{l_z}\right)p & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

La matriz B en (3.55) es definida como

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{cl}}{\partial u} & \frac{\partial f_{cr}}{\partial u} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial u} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial u} \end{bmatrix}^T \quad (3.72)$$

cuyos elementos están dados por

- Matriz Jacobiana de empuje total  $u_1$

$$\frac{\partial f_{cl}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

- Matriz Jacobiana de diferencia de empuje  $u_2$

$$\frac{\partial f_{cr}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

- Matriz Jacobiana de diferencia de empuje  $u_3$

$$\frac{\partial f_{dr}}{\partial u} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{m}(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{m}(q_2 q_3 - q_0 q_1) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

- Matriz Jacobiana de diferencia de par  $u_4$

$$\frac{\partial f_{dr}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$





# Capítulo 4

## Controlador

### 4.1. El problema de regulación

Un problema clásico en la teoría de control es el diseño de una ley de realimentación con el propósito de imponer una respuesta de estado estable prescrita a la salida. Esto puede incluir, por ejemplo, el problema de forzar la salida  $y(\cdot)$  de una planta controlada que siga asintóticamente cualquier salida de referencia prescrita  $y_{ref}(\cdot)$  en alguna familia de señales así como el problema de rechazar asintóticamente perturbaciones  $w(\cdot)$  no deseadas a la salida  $y(\cdot)$  dentro de cierta clase de perturbaciones. En ambos casos, el objetivo es asegurar que la función

$$e(t) = y_{ref}(t) - y(t), \quad (4.1)$$

conocida como *error de seguimiento*, sea una función del tiempo que decaiga a cero asintóticamente para cualquier salida de referencia y para cada perturbación no deseada dentro de una familia prescrita de funciones. En otras palabras, el objetivo es imponer que el sistema de control describa para cada comando externo (en una familia de soluciones de un sistema autónomo) una respuesta de estado estable, para el cual el error de seguimiento asociado sea igual a cero.

La teoría del regulador considera sistemas con ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad (4.2a)$$

$$e = h(x, w). \quad (4.2b)$$

La dinámica de la planta es descrita por (4.2a), cuyo estado  $x$  está definido en una vecindad  $U$  del origen en  $\mathbb{R}^n$  con entrada de control  $u \in \mathbb{R}^m$  y sujeto a un conjunto de variables de entrada exógenas (externas)  $w \in \mathbb{R}^r$ , las cuales incluyen perturbaciones, a ser rechazadas, y/o referencias a seguir. La variable del error  $e \in \mathbb{R}^m$  está definida por (4.2b) expresada como una función del estado  $x$  y de la entrada exógena  $w$ . Como hipótesis de inicio se supondrá que la familia de entradas exógenas  $w(\cdot)$ , las cuales afectan la planta y para la cual el error se aproxima asintóticamente a cero, es la familia de todas las funciones del tiempo las cuales son la solución de una ecuación diferencial homogénea, posiblemente no lineal,

$$\dot{w} = s(w) \quad (4.3)$$

con condición inicial  $w(0)$  dentro de alguna vecindad  $W$  del origen de  $\mathbb{R}^r$ . Este sistema es visto como el modelo matemático de un "generador" de todas las posibles funciones de entrada exógenas y es conocido como *exosistema*.

Como es usual, se supone que  $f(x, u, w)$ ,  $h(x, w)$  y  $s(w)$  son funciones suaves, además de considerar que  $f(0, 0, 0) = 0$ ,  $s(0) = 0$  y  $h(0, 0) = 0$ . Por lo tanto, para  $u = 0$  el sistema compuesto (4.2)-(4.3) tiene un estado de equilibrio  $(x, w) = (0, 0)$  que genera un error igual a cero.

La acción de control para (4.2) será suministrada por un *controlador en realimentación*, el cual procesa la información recibida de la planta para generar la entrada de control apropiada. La estructura del controlador usualmente depende de la cantidad de información disponible para realimentación. La situación más favorable, desde el punto de vista del diseño de la realimentación, ocurre cuando el conjunto de variables medidas incluye todos los componentes del estado  $x$  y de las entradas exógenas  $w$ . En este caso se dice que el controlador está provisto de la información completa, donde dicho controlador es

un sistema sin memoria, cuya salida

$$u(t) = \alpha(x, w) \quad (4.4)$$

es una función de los estados de la planta y del exosistema.

La interconexión de (4.2) y (4.4) genera un sistema en lazo cerrado descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)), \\ \dot{w} &= s(w). \end{aligned} \quad (4.5)$$

En particular se supone  $\alpha(0, 0) = 0$ , de manera que el sistema en lazo cerrado (4.5) tiene un punto de equilibrio en  $(x, w) = (0, 0)$ .

Un caso común y más real se presenta cuando sólo los componentes del error  $e$  están disponibles para su medición. En este caso se dice que el controlador está provisto de la realimentación del error, donde este último es un sistema dinámico no lineal, modelado por las ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, e), \\ \dot{u} &= \theta(\xi), \end{aligned} \quad (4.6)$$

con estado interno  $\xi$  definido en una vecindad  $\Psi$  del origen en  $\mathbb{R}^n$ . La interconexión de (4.2) y (4.6) genera en este caso un sistema en lazo cerrado caracterizado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \theta(\xi)), \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, w)), \\ \dot{w} &= s(w). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Suponga que  $\eta(0, 0) = 0$  y  $\theta(0) = 0$  de tal forma que la tripleta  $(x, \xi, w) = (0, 0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (4.7).

El propósito de control consiste en obtener un sistema en lazo cerrado en el cual para cada entrada exógena  $w(\cdot)$ , en una familia prescrita, y para cada condición inicial, en alguna vecindad del origen, la salida  $e(\cdot)$  se aproxime asintóticamente a cero. Cuando se da este caso se dice que el sistema en lazo cerrado tiene la *propiedad de la regulación a la salida*.

Dentro de las hipótesis de inicio se agregará la propiedad de estabilidad neutral<sup>1</sup> para el exosistema además de la estabilidad en primera aproximación de la planta conjunta con el controlador. Estas hipótesis conducen a la caracterización formal de los dos problemas descritos a continuación [36].

#### 4.1.1. Problema de regulación a la salida con realimentación del vector de estados

Dado un sistema no lineal de la forma (4.2) y un exosistema neutralmente estable (4.3) encontrar, de ser posible, un mapeo  $\alpha(x, w)$  tal que

- Estabilidad para cuando se tiene la información completa  $((S)_{PI})$ , el punto de equilibrio  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, w))$  es asintóticamente estable en la primera aproximación,
- Regulación para cuando se tiene la información completa  $((R)_{PI})$ , existe una vecindad  $V \subset U \times W$  de  $(0, 0)$  tal que, para cada condición inicial  $(x(0), w(0)) \in V$ , la solución de (4.5) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), w(t)) = 0.$$

<sup>1</sup>La hipótesis de estabilidad neutral implica que la matriz

$$S = \left[ \frac{\partial s}{\partial w} \right]_{w=0} \quad (4.8)$$

la cual caracteriza la aproximación lineal del campo vector  $s(w)$  en  $w = 0$ , tiene todos sus eigenvalores sobre el eje imaginario. De hecho, ningún eigenvalor de  $S$  puede tener parte real positiva, porque de lo contrario el equilibrio  $w = 0$  podría ser inestable. Además, la estabilidad de Poisson asume que cada punto en una vecindad de  $w = 0$  indica que ninguna trayectoria del exosistema puede converger a  $w = 0$  conforme el tiempo tiende a infinito, y esto, a su vez, implica la ausencia de eigenvalores de  $S$  con parte real negativa. De hecho, si  $S$  tiene eigenvalores con parte real negativo, el exosistema podría tener una variedad invariante estable cercana al equilibrio; y las trayectorias originadas sobre esta variedad pudieran converger a  $w = 0$  conforme  $t$  tiende a infinito.

### 4.1.2. Problema de regulación a la salida con realimentación del error

Dado un sistema no lineal de la forma (4.2) y un exosistema neutralmente estable (4.3) encontrar, de ser posible, un número entero positivo  $v$  y dos mapeos  $\theta(\xi)$  y  $\eta(\xi, e)$  tal que

- Estabilidad para el caso de la realimentación del error ((S)<sub>EP</sub>), el punto de equilibrio  $(x, \xi) = (0, 0)$  de  $\dot{x} = f(x, 0, \theta(\xi))$  y  $\dot{\xi} = \eta(\xi, h(x, 0))$  es asintóticamente estable en la primera aproximación.
- Regulación para el caso de la realimentación del error ((R)<sub>EF</sub>), existe una vecindad  $V \subset U \times \Psi \times W$  de  $(0, 0, 0)$ , tal que, para cada condición inicial  $(x(0), \xi(0), w(0)) \in V$ , la solución de (4.7) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), w(t)) = 0. \quad (4.9)$$

Una vez definidos los problemas anteriores, este análisis se enfocará en el problema de la regulación por realimentación del error dada su relación con el problema en estudio.

## 4.2. Planteamiento del problema de regulación estructuralmente robusta

Por conveniencia se considerará el caso de una familia de plantas modeladas por ecuaciones de la forma (4.2)-(4.3), donde ahora se introduce explícitamente un vector  $\mu \in \mathbb{R}^q$  de parámetros desconocidos, i.e.,

$$\dot{x} = f(x, u, w, \mu), \quad (4.10a)$$

$$\dot{w} = s(w), \quad (4.10b)$$

$$e = h(x, w, \mu). \quad (4.10c)$$

Es importante destacar que el exosistema (4.10b) no depende de  $\mu$ . Dado el sistema (4.10), el problema de regulación por realimentación del error se define como el problema

de seguir las señales de referencia y/o rechazar las señales de perturbación manteniendo la propiedad de estabilidad en lazo cerrado. Para el caso de la regulación estructuralmente robusta también se requiere que estas condiciones se cumplan cuando los parámetros varían en una vecindad de sus valores nominales, *i.e.*, el problema de regulación estructuralmente robusta consiste en encontrar, de ser posible, un controlador dinámico de la forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \varphi(z, e), \\ u &= \delta(z),\end{aligned}\tag{4.11}$$

tal que para todos los valores admisibles de  $\mu$  en una vecindad  $\mathcal{D}$  de sus valores nominales las siguientes condiciones se cumplan.

**N1 Estabilidad:** El punto de equilibrio  $(x, z) = (0, 0)$  del sistema en lazo cerrado sin perturbaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, v(z), 0, \mu), \\ \dot{z} &= \varphi(z, 0),\end{aligned}\tag{4.12}$$

es asintóticamente estable.

**N2 Regulación:** Para cada condición inicial  $(x(0), z(0), w(0))$ , en una vecindad del origen, la solución del sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, v(z), w, \mu), \\ \dot{z} &= \varphi(z, h(x, w, \mu)), \\ \dot{w} &= s(w),\end{aligned}\tag{4.13}$$

satisface la condición  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  es asintóticamente estable.

Este problema de regulación puede formularse como el problema de determinar una cierta subvariedad del espacio de estado  $(x, w)$  donde el error de seguimiento sea cero, que sea atractiva e invariante por realimentación. En este caso, se dice que es estructuralmente robusta, ya que se sabe que existe una vecindad en la cual se cumplen las condiciones N1 y N2; sin embargo, no se conoce con exactitud dicha vecindad.

El caso abordado en este trabajo trata con la solución al problema de regulación robusta empleando un controlador compuesto de dos partes:

- La primera constituye un control de estabilización que conduzca el sistema a la subvariedad del estado donde el error es cero.
- Por otro lado, la segunda parte consta de un control de seguimiento que encuentre la subvariedad en la que el error sea igual a cero y la vuelva invariante para todos los valores admisibles de los parámetros  $\mu$  en una vecindad de sus valores nominales,  $\varphi \subset \mathbb{R}^p$ .

De esta forma, se pretende diseñar un controlador que cumpla con las condiciones de estabilidad y regulación.

#### 4.2.1. Solución basada en el principio del modelo interno e inmersión

Para encontrar la subvariedad en la que el error de seguimiento es cero, es bien sabido que una solución local supone la existencia de los mapeos no lineales

$$x_{ss} = \pi(w, \mu), \quad u_{ss} = \gamma(w, \mu) = \begin{bmatrix} \gamma_1(w, \mu) \\ \vdots \\ \gamma_m(w, \mu) \end{bmatrix}$$

con  $\pi(0, \mu) = 0$  y  $\gamma(0, \mu) = 0$  para todo  $\mu \in \varphi$ , ambas definidas en una vecindad del origen  $(w, \mu) = (0, 0)$ , que resuelven las ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes (FIB)

$$\frac{\partial \pi(w, \mu)}{\partial w} = f(\pi(w, \mu), \gamma(w, \mu), w, \mu), \quad (4.14a)$$

$$0 = h(\pi(w, \mu), w, \mu), \quad (4.14b)$$

para todos los valores admisibles de  $\mu \in \varphi$ . En este caso, si las ecuaciones (4.14) tienen solución, la subvariedad del estado en la que el error de seguimiento es cero está dada por el mapeo  $\pi(w, \mu)$  mientras que la entrada requerida para mantener dicho error igual a cero es el mapeo  $\gamma(w, \mu)$ . Sin embargo, esta entrada depende tanto de los estados del exosistema (4.10b), que incluyen las perturbaciones desconocidas, como de los parámetros inciertos  $\mu$ , por lo cual no puede emplearse directamente en un controlador robusto. Por



este motivo en muchos trabajos se propone utilizar un sistema dinámico observable libre de parámetros inciertos  $\mu$  cuya solución para ciertas condiciones iniciales es precisamente  $\gamma(w, \mu)$ . Este sistema dinámico se conoce como inmersión, ya que se genera un espacio de mayor dimensión que  $\gamma(w, \mu)$  en el cual se encuentra inmerso el exosistema y todos los posibles valores de  $\mu \in \wp$  para así producir  $\gamma(w, \mu)$  a pesar de la incertidumbre y las variaciones paramétricas.

Esta inmersión se puede obtener gracias al hecho de que la entrada en estado estacionario<sup>2</sup>  $\gamma(w, \mu)$  puede generarse independientemente de los valores del vector de parámetros inciertos  $\mu$  a través de un sistema dinámico que puede ser lineal o no lineal, siempre y cuando este sistema sea observable. De manera general, esta inmersión tiene la forma

$$\dot{z} = \delta(z, w), \quad (4.15a)$$

$$\gamma(w, \mu) = \alpha(z, w), \quad (4.15b)$$

denominada inmersión generalizada; sin embargo, existen algunos casos particulares en los que la inmersión obtenida es un sistema lineal, como el resultante en el presente trabajo. En el siguiente teorema se explica cuándo se pueden obtener este tipo de inmersiones lineales observables.

**Teorema 1.** Sea el par  $(A_0, B_0)$  estabilizable y el par  $(A_0, C_0)$  detectable, donde

$$A_0 = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\substack{x=0 \\ u=0 \\ w=0}}, \quad B_0 = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{\substack{x=0 \\ u=0 \\ w=0}}, \quad C_0 = \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{\substack{x=0 \\ u=0}}$$

es la linealización del sistema (A.10). Dado el mapeo  $\gamma(w, \mu)$ , donde  $w$  son los estados del exosistema descrito por (A.10b) y  $\mu$  un vector de parámetros inciertos, si para cada  $i = 1, \dots, m$  existe un grupo de números reales  $a_{0,i}, a_{1,i}, \dots, a_{r_i-1,i}$ , que satisfagan la expresión

$$L_s^{r_i} \gamma_i(w, \mu) = a_{0,i} \gamma_i(w, \mu) + a_{1,i} L_s \gamma_i(w, \mu) + \dots + a_{r_i-1,i} L_s^{r_i-1} \gamma_i(w, \mu) \quad (4.16)$$

<sup>2</sup>Para este estudio, estado estacionario significa que los estados se encuentran en la subvariedad del error de seguimiento igual a cero.

donde  $L_s^q \gamma_i(w, \mu)$  son las derivadas de Lie definidas como  $L_s^q \gamma_i(w, \mu) = \left[ \frac{\partial L_s^{q-1} \gamma_i(w, \mu)}{\partial w} \right] s(w)$  para  $q \geq 1$  y  $L_s^0 \gamma_i(w, \mu) = \gamma_i(w, \mu)$ , y más aún, la matriz

$$\begin{bmatrix} A_1 - \lambda I & B_{0,i} \\ C_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

es no singular para cualquier raíz  $\lambda$ , con parte real no negativa, del polinomio

$$\mu_i(\lambda) = a_{0,i} + a_{1,i}\lambda + \dots + a_{r_i-1,i}\lambda^{r_i-1} - \lambda^{r_i}. \quad (4.18)$$

Luego, el exosistema (4.10b) queda inmerso en el sistema dinámico lineal

$$\dot{z} = \Phi z, \quad (4.19)$$

$$\gamma(w, \mu) = H z, \quad (4.20)$$

con

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}, \quad \Phi = \text{diag}[\Phi_1, \dots, \Phi_m], \quad H = \text{diag}[H_1, \dots, H_m],$$

$$z_i = \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ \vdots \\ z_{i,r_i} \end{bmatrix}, \quad \Phi_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{r_i,i} & a_{1,i} & a_{2,i} & \dots & a_{r_i-1,i} \end{bmatrix}, \quad H_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times r_i}$$

$$\text{y } z_i(t) = \left[ \gamma_i(w, \mu) \ L_s \gamma_i(w, \mu) \ \dots \ L_s^{r_i-1} \gamma_i(w, \mu) \right]^T. \quad \square$$

En el caso particular en que para el sistema (4.10) se obtiene un mapeo  $\gamma(w, \mu)$  cuya inmersión es lineal y tiene la forma (4.19), el problema de regulación robusta se resuelve mediante el controlador

$$\dot{z}_1(t) = (A_0 + B_0 K - G_1 C_0) z_1(t) + G_1 e(t), \quad (4.21a)$$

$$\dot{z}_2(t) = -G_2 C_0 z_1(t) - \Phi z_2(t) + G_2 e(t), \quad (4.21b)$$

$$u(t) = K z_1(t) + H z_2(t), \quad (4.21c)$$

donde  $K$  y  $G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix}^T$  son tal que el par de matrices

$$[A_0 + B_0K], \quad \begin{bmatrix} A_0 - G_1C_0 & -B_0H \\ -G_2C_0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

son Hurwitz. Obviamente los pares

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \end{bmatrix}, \quad \left[ \begin{bmatrix} A_0 & -E_0H \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & 0 \end{bmatrix} \right], \quad (4.23)$$

deben ser controlable y observable, respectivamente. Además,  $z_1 \in \mathbb{R}^n$  es un observador para el error definido como  $x = \pi(w, \mu)$  mientras que  $z_2 \in \mathbb{R}^{r_1+r_2+\dots+r_m}$  es un observador para la inmersión que encuentra la entrada necesaria para permanecer en la subvariedad en la cual el error de seguimiento es cero. Mientras que la entrada  $u(t)$  se compone de dos términos de los cuales  $Kz_1(t)$  es una realimentación del error y  $H z_2(t)$  tiende precisamente a  $\gamma(w, \mu)$  [37].

### 4.3. Seguimiento robusto con movimientos de precesión para un satélite rígido

En esta sección se resuelve el problema de control para la orientación de un satélite mediante el uso de la teoría de regulación robusta. Es común referirse al sistema

$$\dot{x} = f(x, w, u, \mu), \quad (4.24)$$

$$\dot{w} = s(w), \quad (4.25)$$

$$e = h(x, w, \mu), \quad (4.26)$$

donde (4.24) representa la planta a ser controlada, (4.25) el tan denominado exosistema que genera las referencias a seguir y/o las perturbaciones a ser eliminadas y (4.26) el error de seguimiento a la salida. Con  $\mu$  se indican los parámetros desconocidos o que varían lentamente. Cuando  $\mu = 0$  se asume que los parámetros desconocidos se encuentran en sus valores nominales.

### 4.3.1. Modelo del satélite

La dinámica del satélite rígido en términos de los cuaterniones unitarios está definida mediante las expresiones

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} E(Q) \omega, \quad (4.27)$$

$$J \dot{\omega} = \mathbf{u} - (\omega \times J \omega), \quad (4.28)$$

donde (4.27) es la ecuación cinemática con cuaterniones definida en (2.30),  $\omega$  representa el vector de velocidad angular del satélite,  $J$  es la matriz de inercias del satélite y  $\mathbf{u}$  el vector de pares externos.

El problema de regulación robusta tiene solución si:

1. La planta es estabilizable y detectable en la primera aproximación;
2. Existen dos mapeos, la subvariedad de salida cero en estado estable  $x_{ss} = \pi(w, \mu)$  y la entrada en estado estable  $u_{ss} = \gamma(w, \mu)$  que resuelven las ecuaciones de regulación

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(w, \mu)}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w, \mu), w, \gamma(w, \mu), \mu), \\ 0 &= h(\pi(w, \mu), w, \mu), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$\forall (w, \mu) \in W_0 \times \mathcal{P}$  con  $W_0$  y  $\mathcal{P}$  en la vecindad de  $w = 0$ ,  $\mu = 0$ ; respectivamente.

3. El mapeo  $\gamma(w, \mu)$  satisface

$$L_s^q \gamma(w, \mu) = a_0 \gamma(w, \mu) + \dots + a_{q-1} L_s^{q-1} \gamma(w, \mu). \quad (4.30)$$

$\forall (w, \mu) \in W_0 \times \mathcal{P}$ , para algunos números reales  $a_0, \dots, a_{q-1}$  donde  $L_s \gamma$  denota la derivada de Lie;

4. Para cualquier raíz, con parte real no negativa, del polinomio  $p(\lambda) = \lambda^q + a_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$  la matriz

$$\begin{bmatrix} A(0) - \lambda I & B(0) \\ C(0) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

es no singular, donde

$$A(0) = \partial J / \partial x|_{(0,0,0,0)}, \quad B(0) = \partial f / \partial u|_{(0,0,0,0)}, \quad C(0) = \partial h / \partial x|_{(0,0,0)}.$$

En el caso bajo estudio se considera una trayectoria de referencia descrita mediante los cuaterniones de referencia con

$$\epsilon_r(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_r(t) = \varphi_r, \quad (4.32)$$

donde  $\varphi_r$  y  $\omega_0$  son constantes. Dichos cuaterniones de referencia describen un movimiento de precesión alrededor del eje  $z$ , el cual es un caso interesante en el control de la orientación, ya que el satélite debe mantener una orientación fija a pesar del movimiento de precesión. Las componentes del vector unitario  $\epsilon_r(t)$  son generadas mediante el exosistema lineal

$$\dot{w} = S w = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} w, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Considerando las condiciones iniciales

$$w(0) = \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

se tiene

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Luego,

$$q_0 = \cos \frac{\varphi_r}{2} = \text{const.}, \quad q = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{sen} \frac{\varphi_r}{2}. \quad (4.36)$$

así

$$w_1^2(t) + w_2^2(t) = 1 \quad \forall t \geq 0. \quad (4.37)$$

Con el fin de mostrar la parte lineal del sistema, *i.e.* la ecuación cinemática en términos de los cuaterniones (4.27), observe que el punto de equilibrio de interés está dado por

$$q_0 = 1, \quad \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \quad (4.38)$$

Considerando la traslación  $\rho = 1 - q_0$ , luego el origen es un equilibrio. Por lo tanto, la cinemática puede reescribirse como

$$\dot{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} \rho_1 & -\rho_3 & \rho_2 \\ \rho_3 & -\rho_0 & -\rho_1 \\ -\rho_2 & \rho_1 & -\rho_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \quad (4.39)$$

con ecuación del error

$$\mathbf{e} = q_{r0} \mathbf{q} - \mathbf{q}_r + q_0 \mathbf{q}_r - \mathbf{q} \times \mathbf{q}_r. \quad (4.40)$$

Por consiguiente,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{Q}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \rho \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + B \mathbf{u} + \text{NL}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{e} = C \begin{bmatrix} \rho \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \text{NL}, \quad (4.42)$$

donde "NL" representa los términos no lineales que desaparecen en el origen y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} q_{r0} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Claramente, los pares  $(A, B(0))$  y  $(A, C)$  son estabilizable y detectable, respectivamente.

El mapeo  $\pi(w)$ , en el cual la subvariedad de la salida en estado estable es cero, está compuesto por  $\pi_1(w)$  y  $\pi_2(w)$ . Luego, para obtener  $\pi_1(w)$  se impone a cero el error, *i.e.*,

$$\pi_1(w) = \begin{bmatrix} \pi_{1,1}(w) \\ \pi_{1,2}(w) \\ \pi_{1,3}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \sin \frac{\varphi_r}{2} \\ w_2 \sin \frac{\varphi_r}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Por otra parte, debido a que la matriz  $E(Q)$  en (4.27) tiene inversa luego

$$\omega = 2 E(Q)^T Q, \quad (4.45)$$

por lo que es posible obtener  $\pi_2(w)$  dada como

$$\pi_2(w) = \begin{bmatrix} \pi_{2,1}(w) \\ \pi_{2,2}(w) \\ \pi_{2,3}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0 w_2 \sin \varphi_r \\ \omega_0 w_1 \sin \varphi_r \\ 2\omega_0 \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

De lo anterior, el mapeo  $\pi(w)$  tiene la forma

$$x_{ss} = \pi(w) = \begin{bmatrix} \pi_1(w) \\ \pi_2(w) \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Observe que los mapeos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  no dependen de los parámetros del sistema.

La entrada en estado estable  $u_{ss}$  sobre  $x_{ss} = \pi(w)$  puede ser calculada de (4.28). De hecho

$$u = J\dot{\omega} + \omega \times J\omega \quad (4.48)$$

tal que

$$u_{ss} = \gamma(w, \mu) = \begin{bmatrix} A_1 w_1 \\ A_2 w_2 \\ A_3 w_1 w_2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

donde

$$A_1 = \omega_0^2 \sin \varphi_r \left[ 2(J_{22} - J_{33}) \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} - J_{11} \right], \quad (4.50)$$

$$A_2 = \omega_0^2 \sin \varphi_r \left[ 2(J_{11} - J_{33}) \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} - J_{22} \right], \quad (4.51)$$

$$A_3 = \omega_0^2 \sin^2 \varphi_r (J_{11} - J_{22}). \quad (4.52)$$

Note que  $u_{ss} = \gamma(w, \mu)$  es la entrada en estado estable que hace invariante a  $\pi(w, \mu)$ .

Enseguida, habrán de determinarse los números reales  $a_0, a_1, \dots, a_{q-1}$  tal que la condición 3 de la sección 4.3.1 sea satisfecha. Esto conduce a la determinación de la siguiente inmersión

$$\dot{\xi}_{11} = \xi_{12}, \quad (4.53)$$

$$\dot{\xi}_{12} = -\omega_0 \xi_{11}, \quad (4.54)$$

$$\dot{\xi}_{21} = \xi_{22}, \quad (4.55)$$

$$\dot{\xi}_{22} = -\omega_0^2 \xi_{21}, \quad (4.56)$$

$$\dot{\xi}_{31} = \xi_{32}, \quad (4.57)$$

$$\dot{\xi}_{32} = -4\omega_0^2 \xi_{31}, \quad (4.58)$$

$$u_{ss} = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \xi_{31} \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \gamma_1(w) = A_1 w_1, \\ \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} = -\omega_0 A_1 w_2, \\ \dot{\xi}_{12} &= -\omega_0^2 A_1 w_1 = -\omega_0^2 \xi_{11}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \xi_{21} &= \gamma_2(w) = A_2 w_1, \\ \dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} = \omega_0 A_2 w_1, \\ \dot{\xi}_{22} &= -\omega_0^2 A_2 w_2 = -\omega_0^2 \xi_{21}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \xi_{31} &= \gamma_3(w) = A_3 w_1 w_2, \\ \dot{\xi}_{31} &= \xi_{32} = \omega_0 A_3 (w_1^2 - w_2^2), \\ \dot{\xi}_{32} &= -4\omega_0^2 A_3 w_1 w_2 = -4\omega_0^2 \xi_{31}. \end{aligned} \quad (4.62)$$



Los polinomios correspondientes, basándose en (4.16), son  $p_1(\lambda) = p_2(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$  y  $p_3(\lambda) = \lambda^2 + 4\omega_0^2$ .

Finalmente, es fácil verificar que la matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B(0) \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

es de rango pleno para cada raíz de  $p_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , con parte real no negativa.

La estructura del controlador que resuelve el RORP está dada como

$$\dot{\zeta}_1 = (A + B(0)K - G_1C)\zeta_1 + G_1e, \quad (4.64a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = -G_2C\zeta_1 + \Phi\zeta_2 + G_2e, \quad (4.64b)$$

$$u = K\zeta_1 - \Gamma\zeta_2, \quad (4.64c)$$

donde

$$\Phi = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.65)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

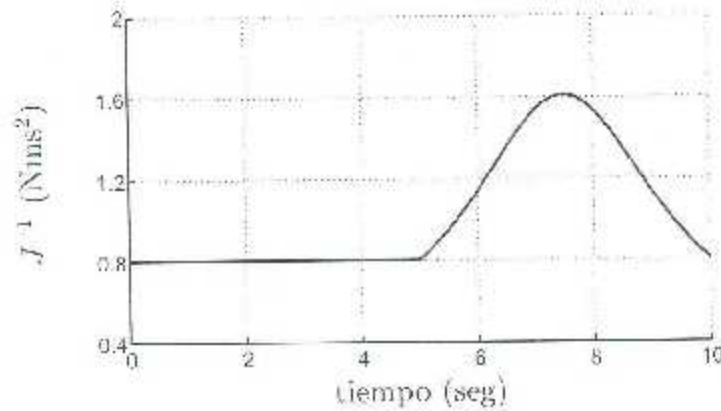
$K$ ,  $G_1$  y  $G_2$  son tal que las matrices

$$(A + B(0)K), \quad \begin{bmatrix} A & -B(0)\Gamma \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

sean estables

**Nota:** El requisito de estabilidad puede obtenerse a partir de un criterio de desempeño deseado. Debido que aquí el interés se centró en la estabilidad estructural del sistema en lazo cerrado, simplemente se impondrá que las matrices (4.67) sean Hurwitz.

## 4.3.2. Resultados

Figura 4.1: Variación de los parámetros  $J_{11}$ ,  $J_{22}$  y  $J_{33}$ 

En esta sección se exhiben los resultados en simulación del desempeño del controlador RORP, el cual estabiliza el satélite en el punto de interés (4.38).

La condición inicial, para la orientación del satélite, está definida por el cuaternión  $Q(0) = [0.8498, 0.4126, -0.1534, 0.2898]^T$  (rad) cuya transformación a ángulos de Euler, para una mejor comprensión física de la orientación, está dado por los siguientes valores  $\psi(0) = 25^\circ$ ,  $\theta(0) = -30^\circ$  y  $\phi(0) = 45^\circ$ . El comportamiento en la variación de los parámetros  $J_{11} = J_{22} = J_{33} = 1.2416$  (Nms<sup>2</sup>) se ilustra en la figura 4.1.

Para que las matrices (4.67) sean Hurwitz se eligen las ganancias

$$K = \begin{bmatrix} 273.1520 & 0 & 0 & -26.0736 & 0 & 0 \\ 0 & 139.0592 & 0 & 0 & -18.6240 & 0 \\ 0 & 0 & 134.0928 & 0 & 0 & -18.6240 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 58.588 & -0.32804 & -0.99501 \\ -0.39050 & 56.183 & 0.71368 \\ -0.80847 & 0.70635 & 58.929 \\ -2588.7 & 29.456 & 89.742 \\ 34.561 & -2355.7 & -61.477 \\ 72.906 & -60.641 & -2585.4 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 31177 & -543.82 & -1665.3 \\ 110730 & -2654.5 & -8178.2 \\ -629.38 & 27048 & 1089.9 \\ -3031.0 & 91377 & 5108.1 \\ -1346.3 & 1066.0 & 30769 \\ -6365.5 & 4775.6 & 101140 \end{bmatrix}$$

Las figuras 4.2-4.4 ilustran el desempeño del controlador RORP para reorientar la postura del satélite. La figura 4.2 describe la dinámica de la posición angular en cuaterniones y en 4.3 se observan los errores de postura. La figura 4.4 muestra la energía requerida para estabilizar dicho satélite. Por lo tanto, el controlador RORP realiza un desempeño satisfactorio aún cuando varían los valores para la matriz de inercias (Ver Fig. 4.1).

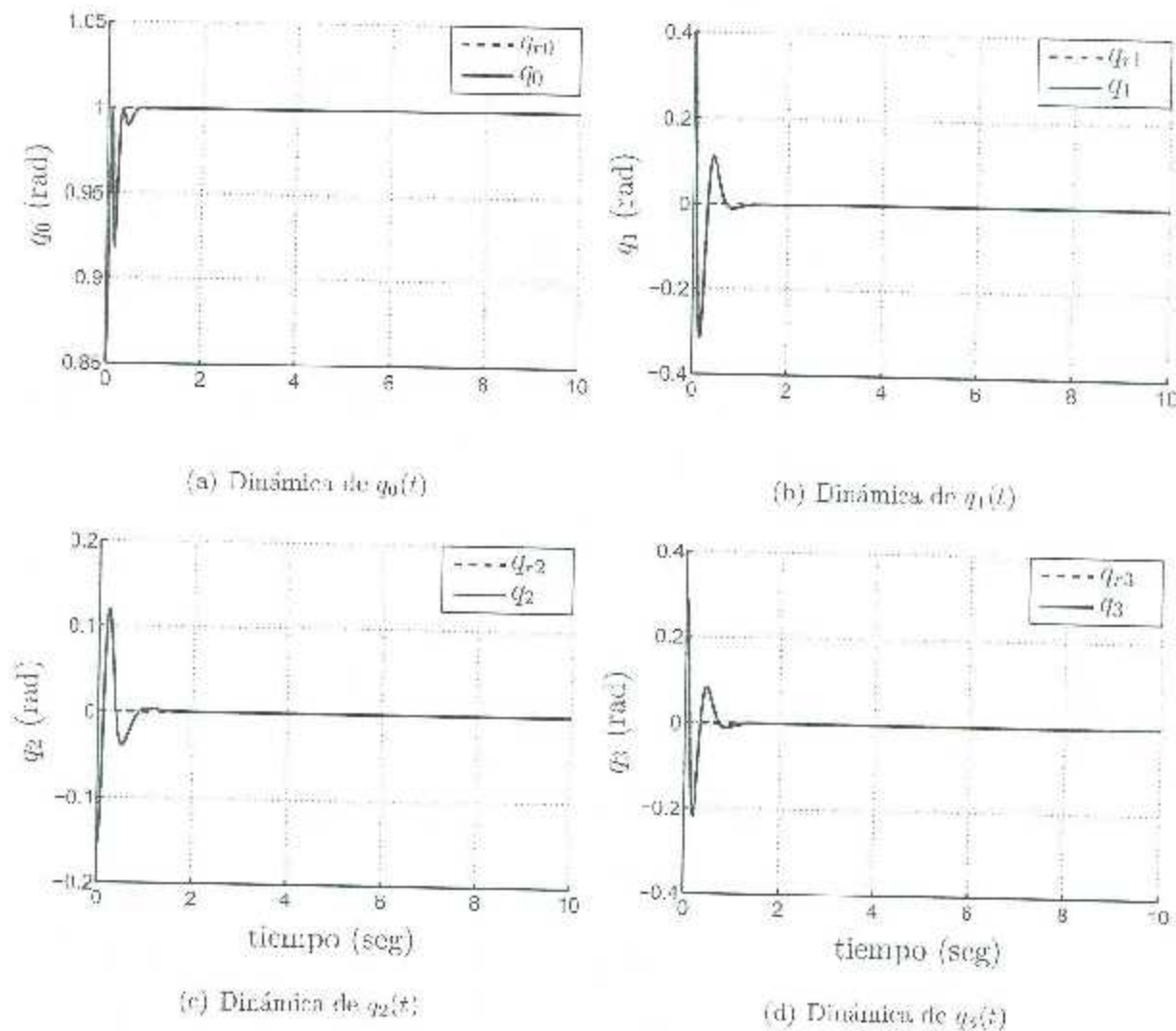


Figura 4.2: Posición angular del satélite

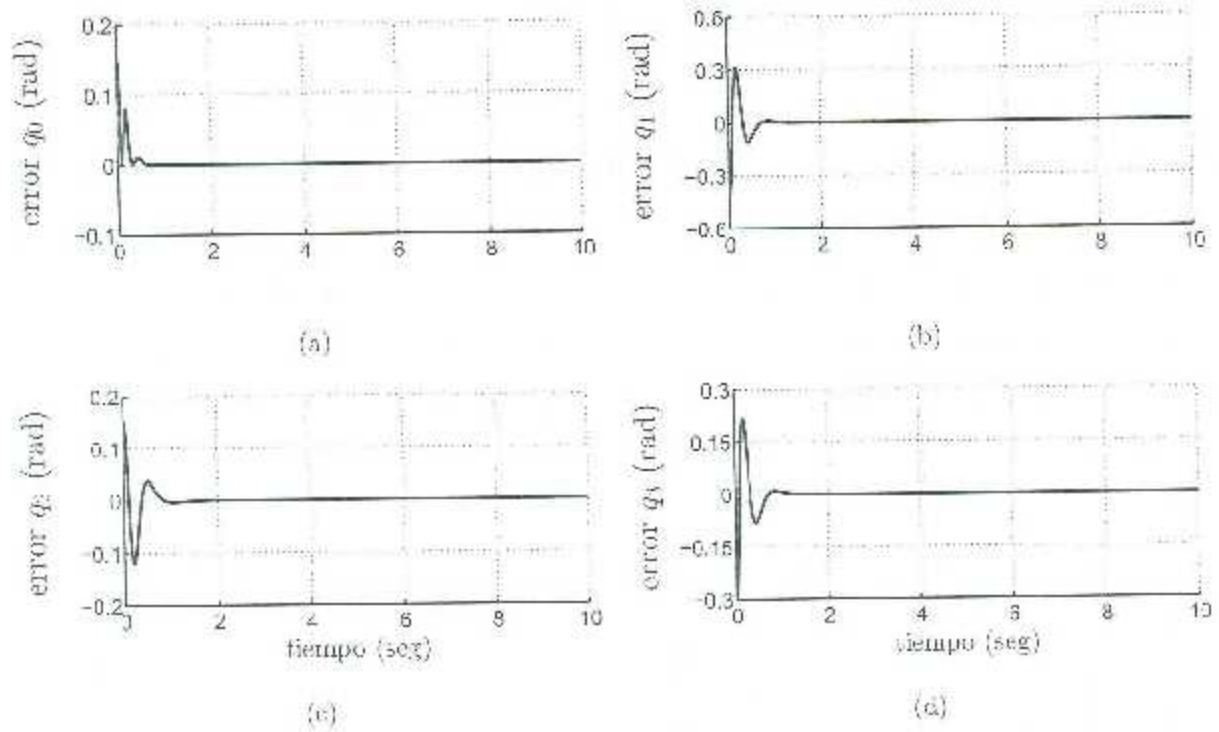


Figura 4.3: Cuaternión del error

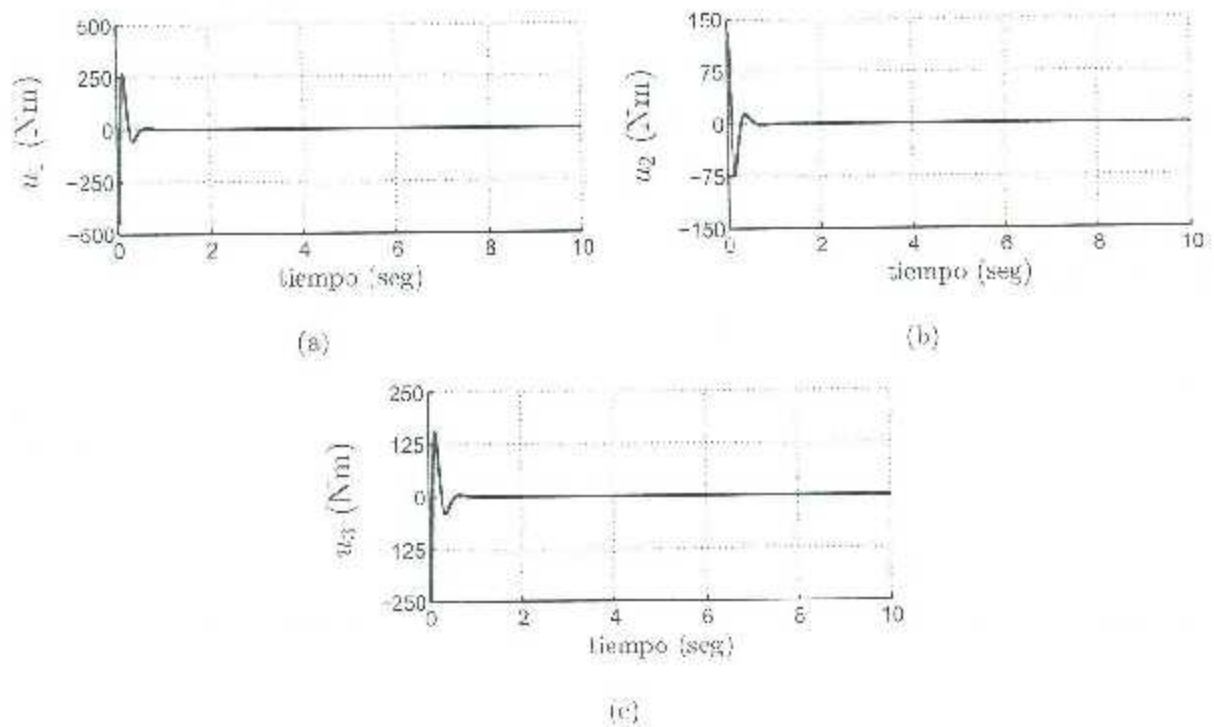


Figura 4.4: Entradas de control

## 4.4. Control del quadrotor

En esta sección se implementará el control, mediante el problema de regulación robusta a la salida, al modelo del quadrotor (3.42). El objetivo del presente trabajo consiste en estabilizar el quadrotor para vuelo estacionario (*hovering*). Los estados involucrados para llevar a cabo dicha tarea son  $[z_E, y_0, q_1, q_2, q_3, w_E, p, q, r]^T$ , ya que al controlar la orientación del vehículo se consigue controlar la traslación. Por lo tanto, de (3.42) es posible omitir la cinemática y dinámica de traslación lineal en  $x$  y  $y$  obteniendo así el siguiente modelo

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_E \\ \dot{y}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{w}_E \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_E \\ \frac{1}{2}(-pq_1 - qq_2 - rq_3) \\ \frac{1}{2}(pq_0 - qq_3 + rq_2) \\ \frac{1}{2}(pq_3 + qq_0 - rq_1) \\ \frac{1}{2}(-pq_2 + qq_1 - rq_0) \\ \frac{\Delta_z}{m} + y \\ \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{\Delta_p}{I_x} \\ \frac{I_x - I_z}{I_y} pr + \frac{\Delta_q}{I_y} \\ \frac{I_x - I_z}{I_z} pq + \frac{\Delta_r}{I_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Una vez definido lo anterior, la metodología a aplicarse se centra en los pasos de la sección 4.3.1.

La trayectoria de referencia para la orientación será descrita por el cuaternión unitario  $Q_r = \left[ \cos \frac{\varphi(t)}{2}, \epsilon_r(t) \sin \frac{\varphi(t)}{2} \right]^T$  con

$$\epsilon_r(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\varphi}(t) = \varphi_r, \quad (4.69)$$

donde  $\varphi_r$  y  $\omega_0$  son constantes.

La referencia  $z_{E,r}$  para la traslación a lo largo del eje  $z_E$  será descrita por

$$z_{E,r}(t) = \sin \alpha t \quad (4.70)$$

donde  $\alpha$  es constante.

Las componentes del vector unitario  $\epsilon_r(t)$  y el elemento  $z_{Dr}$  (altura) son generadas mediante el exosistema lineal

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix} w = S w, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Considerando como condiciones iniciales

$$w(0) = \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \\ w_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

se tiene

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \alpha t \\ \text{sen } \alpha t \\ \cos \omega_0 t \\ \text{sen } \omega_0 t \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Por lo tanto,

$$z_{Dr} = w_1(t), \quad q_{r0} = \cos \frac{\varphi_r}{2} = \text{const}, \quad q_r = \begin{bmatrix} w_3(t) \\ w_4(t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{sen } \frac{\varphi_r}{2}. \quad (4.74)$$

Para conseguir el vuelo estacionario en el sistema (4.68) a una altura fija se define el punto de equilibrio como

$$z_D = 0, \quad w_D = 0, \quad q_c = 1, \quad q = 0, \quad \omega = 0. \quad (4.75)$$

Considerando la traslación  $g = 1 - g_0$  luego el origen es un equilibrio [38]. La cinemática de rotación

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} E(Q) \omega \quad (4.76)$$

puede ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \\ (1 - \rho_0) \mathbf{I} + S(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{I} + (S(\mathbf{q}) - \rho_0 \mathbf{I}) \right] \boldsymbol{\omega},$$

i.e.,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix} -\rho_0 & q_3 & q_2 \\ q_3 & -\rho_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & -\rho_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}; \quad (4.77)$$

mientras que la ecuación del error

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \bar{\mathbf{Q}}_r \otimes \mathbf{Q}, \\ &= \begin{pmatrix} q_{r0} \\ -\mathbf{q}_r \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{e0} \\ \dot{\mathbf{q}}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{r0} q_0 + \mathbf{q}_r \times \mathbf{q} \\ q_{r0} \mathbf{q} - q_0 \mathbf{q}_r - \mathbf{q}_r \times \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

resulta como

$$\dot{\mathbf{q}}_e = q_{r0} \mathbf{q} - \mathbf{q}_e + \rho_0 \mathbf{q}_r - \mathbf{q}_r \times \mathbf{q}. \quad (4.79)$$

En la implementación del problema de regulación robusta a la salida es necesario comprobar que la planta sea estabilizable y detectable en la primera aproximación. Sin embargo, en base a la cinemática de rotación (4.77) se reescribe nuevamente el sistema

(4.68) como

$$\dot{z}_E = w_E, \quad (4.80a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}p - p\varrho_0 - q\varrho_3 + r\varrho_2, \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}q + r\varrho_3 - q\varrho_0 - r\varrho_1, \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}r - p\varrho_2 + q\varrho_1 - r\varrho_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.80b)$$

$$\dot{w}_E = \frac{\Delta_x}{m} + g - \frac{1}{m} (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) w_1, \quad (4.80c)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \frac{I_x - I_z}{I_x} q r + \frac{\Delta_x}{I_x} + \frac{d}{I_x} u_2, \\ \dot{q} &= \frac{I_x - I_z}{I_x} p r - \frac{\Delta_x}{I_y} + \frac{d}{I_y} u_3, \\ \dot{r} &= \frac{I_x - I_z}{I_x} p q + \frac{\Delta_x}{I_z} - \frac{1}{I_z} u_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.80d)$$

Consecuentemente, se modifica el sistema lineal (3.55) como

$$\delta \dot{x} = A \delta x(t) + B \delta u(t) \quad (4.81)$$

donde  $\tilde{x} = [f_{z_E(t)}, f_{x_{cr}}, f_{w_E(t)}, f_{dr}]^T$  y el vector de estados  $x = [z_E, x_{cr}, w_E, x_{dr}]$ , con  $x_{cr} = [q_1, q_2, q_3]$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{z_E(t)}}{\partial z_E} & \frac{\partial f_{z_E(t)}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{z_E(t)}}{\partial w_E} & \frac{\partial f_{z_E(t)}}{\partial x_{dr}} \\ \frac{\partial f_{x_{cr}}}{\partial z_E} & \frac{\partial f_{x_{cr}}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{x_{cr}}}{\partial w_E} & \frac{\partial f_{x_{cr}}}{\partial x_{dr}} \\ \frac{\partial f_{w_E(t)}}{\partial z_E} & \frac{\partial f_{w_E(t)}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{w_E(t)}}{\partial w_E} & \frac{\partial f_{w_E(t)}}{\partial x_{dr}} \\ \frac{\partial f_{dr}}{\partial z_E} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{cr}} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial w_E} & \frac{\partial f_{dr}}{\partial x_{dr}} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

y

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{z_E(t)}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{x_{cr}}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{w_E(t)}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{dr}}{\partial u} \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$



Al evaluar las derivadas parciales en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se obtienen los resultados para la primera aproximación de la planta, i.e.,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & -q & 0 & q_0 - \frac{1}{2} & -q_3 & q_2 \\ 0 & r & 0 & p & 0 & q_3 & q_0 - \frac{1}{2} & -q_1 \\ 0 & q & -p & 0 & 0 & -q_2 & q_1 & q_0 - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{m} q_1 u_1 & \frac{2}{m} q_2 u_1 & -\frac{2}{m} q_3 u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{I_x - I_z}{I_x}\right) r & \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{I_x - I_z}{I_y}\right) r & 0 & \left(\frac{I_y - I_z}{I_y}\right) p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{I_x - I_z}{I_x}\right) q & \left(\frac{I_z - I_y}{I_x}\right) p & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

y

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{I_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{I_x} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Evaluando el par  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  en el punto de interés (4.75) se tiene

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & \mathcal{L} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ \mathcal{J} \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

donde  $\mathcal{L} = \text{diag}[1, 1/2, 1/2, 1/2]$  y  $\mathcal{J} = \text{diag}[-1/m, d/I_x, d/I_y, d/I_x]$ . Del estudio de la estabilidad para el sistema (4.86) se tiene que el sistema es de repeticibilidad 2 con polos

en el origen. Se dice que una realización, en este caso en la forma canónica controlable, es *estabilizable* si todos los eigenvalores, aquellos con parte real no negativa, pueden ser reubicados arbitrariamente mediante realimentación de estados [39]. Para reubicar dichos eigenvalores es necesario que la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

y observabilidad (4.90)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

sean de rango pleno.

La matriz de controlabilidad está dada como

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{L}\mathcal{J} \\ \mathcal{J} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

y la de observabilidad por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

Analizando la matriz (4.91) se observa que el elemento  $\mathcal{C}_{2,1} \neq 0$  y el  $\det(\mathcal{C}) = -\mathcal{J}^2 \mathcal{L}$ , por lo tanto, el rango de  $\mathcal{C} = 2$ . El rango para la matriz (4.92) es también de rango pleno, por lo que las condiciones de estabilidad y detectabilidad son satisfechas en la primera aproximación.

Posteriormente, se habrá de determinar el mapeo  $x_{ss} = \pi(w, \mu)$ , donde la subvariedad de la salida en estado estable es cero, imponiendo el error a cero. De (4.70) y (4.79) se

tiene

$$\begin{aligned}
 e &= \begin{bmatrix} e \\ q_{e1} \\ q_{e2} \\ q_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{1,1}(w) - w_1 \\ \tau_{1,2}(w) - w_3 \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \\ \tau_{1,3}(w) - w_4 \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \\ \tau_{1,4}(w) - 0 \end{bmatrix}, \\
 \pi_1(w) &= \begin{bmatrix} \tau_{1,1}(w) \\ \tau_{1,2}(w) \\ \tau_{1,3}(w) \\ \tau_{1,4}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_3 \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \\ w_4 \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.93}
 \end{aligned}$$

Por otra parte,  $\pi_{2,1}(w, \mu)$  se obtiene mediante sustituciones, *i.e.*,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{\partial \pi_{1,1}(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial \pi_{1,1}(w)}{\partial w_2} & \frac{\partial \pi_{1,1}(w)}{\partial w_3} & \frac{\partial \pi_{1,1}(w)}{\partial w_4} \\ \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_2} & \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_3} & \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha w_2 \\ \alpha w_1 \\ -\omega_0 w_4 \\ \omega_0 w_3 \end{bmatrix} &= \\
 \begin{bmatrix} \pi_{2,1}(w) \\ -\frac{1}{m} (\cos^2 \frac{\varphi_r}{2} - w_3^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} - w_4^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2}) \gamma_{1,1}(w, \mu) + g \end{bmatrix}. & \tag{4.94}
 \end{aligned}$$

Desarrollando (4.94) resulta

$$\frac{\partial \pi_{1,1}(w)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial \pi_{1,1}(w)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) + \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) = \pi_{2,1}(w).$$

Sustituyendo luego el valor para el mapeo se tiene

$$\frac{\partial(w_1)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial(w_1)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial(w_1)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) + \frac{\partial(w_1)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) = \pi_{2,1}(w).$$

La evaluación de las derivadas parciales y la suma de términos conduce a

$$(-\alpha w_2) = \pi_{2,1}(w).$$

Finalmente resulta

$$\pi_{2,1}(w) = -\alpha w_2. \tag{4.95}$$

Por otra parte,  $\pi_{2,2}(w)$ ,  $\pi_{2,3}(w)$  y  $\pi_{2,4}(w)$  se obtienen a partir de (4.76) considerando que  $E(Q)$  tiene inversa, i.e.

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \begin{bmatrix} -q^T \\ q_0 I + S(q) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \\ &= 2 \begin{bmatrix} -q_1 \dot{q}_0 + q_0 \dot{q}_1 + q_3 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_3 \\ -q_2 \dot{q}_0 - q_3 \dot{q}_1 + q_0 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_3 \\ -q_3 \dot{q}_0 + q_2 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_2 + q_0 \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

Desarrollando la expresión anterior para  $q_0 = \cos \frac{\varphi_r}{2}$ ,  $q_1 = w_3(t) \sin \frac{\varphi_r}{2}$ ,  $q_2 = w_4(t) \sin \frac{\varphi_r}{2}$  y  $q_3 = 0$  resulta

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 q_0 \dot{q}_1 - 2 q_1 \dot{q}_0 \\ 2 q_0 \dot{q}_2 - 2 q_2 \dot{q}_0 \\ 2 q_2 \dot{q}_1 - 2 q_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Luogo, para cada elemento de (4.97) en el espacio de estado  $(x, w)$  se tiene

$$\begin{aligned} \pi_{2,2}(w) &= 2 \left( \cos \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ w_3(t) \sin \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) - 2 \left( w_3(t) \sin \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ \cos \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ \cos \omega_0 t \sin \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \sin \frac{\varphi_r}{2} \left\{ -(\omega_0) \sin \omega_0 t \right\} \right) \\ &= -\omega_0 \underbrace{\sin \omega_0 t}_{w_4(t)} \underbrace{2 \cos \frac{\varphi_r}{2} \sin \frac{\varphi_r}{2}}_{\sin 2(\frac{\varphi_r}{2})} \\ &= -\omega_0 w_4 \sin \varphi_r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{2,3}(w) &= 2 \left( \cos \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ w_4(t) \sin \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) - 2 \left( w_4(t) \sin \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ \cos \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ \sin \omega_0 t \sin \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) \\ &= 2 \left( \cos \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \sin \frac{\varphi_r}{2} \left\{ (\omega_0) \cos \omega_0 t \right\} \right) \\ &= \omega_0 \underbrace{\cos \omega_0 t}_{w_3(t)} \underbrace{2 \cos \frac{\varphi_r}{2} \sin \frac{\varphi_r}{2}}_{\sin 2(\frac{\varphi_r}{2})} \\ &= \omega_0 w_3 \sin \varphi_r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{2,1}(w) &= 2 \left( w_4(t) \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ w_3(t) \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) - 2 \left( w_3(t) \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ w_4(t) \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) \\
&= 2 \left( \operatorname{sen} \omega_0 t \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ \cos \omega_0 t \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) - \\
&\quad - 2 \left( \cos \omega_0 t \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{sen} \omega_0 t \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) \\
&= 2 \left( \operatorname{sen} \omega_0 t \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \{ -(\omega_0) \operatorname{sen} \omega_0 t \} \right) - \\
&\quad - 2 \left( \cos \omega_0 t \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \right) \left( \operatorname{sen} \frac{\varphi_r}{2} \{ (\omega_0) \cos \omega_0 t \} \right) \\
&= -2 \omega_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \operatorname{sen}^2 \omega_0 t - 2 \omega_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \cos^2 \omega_0 t \\
&= -2 \omega_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \left( \operatorname{sen}^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t \right) \\
&= -2 \omega_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2}.
\end{aligned}$$

De lo anterior, el mapeo  $\pi_2(w)$  queda definido de la siguiente forma

$$\pi_2(w) = \begin{bmatrix} \pi_{2,1}(w) \\ \pi_{2,2}(w) \\ \pi_{2,3}(w) \\ \pi_{2,4}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha w_2 \\ -\omega_0 w_4 \operatorname{sen} \varphi_r \\ \omega_0 w_3 \operatorname{sen} \varphi_r \\ -2 \omega_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

Note que los elementos de  $\pi_1(w)$  y  $\pi_2(w)$  no dependen de los parámetros del sistema.

La entrada en estado estable  $u_{ss}$  sobre  $x_{ss} = \pi(w)$  se calcula de (4.94) y de (4.80d).

Llevando a cabo las operaciones del segundo renglón de (4.94) se obtiene  $\gamma_1(w, \mu)$ , i.e.,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) - \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) + \frac{\partial \pi_{2,1}(w)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\
&= -\frac{1}{m} \left( \cos^2 \frac{\varphi_r}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} (w_3^2 + w_4^2) \right) \gamma_{1,1}(w, \mu) + g \\
&\frac{\partial (-\alpha w_2)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial (-\alpha w_2)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial (-\alpha w_2)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) + \frac{\partial (-\alpha w_2)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\
&= -\frac{1}{m} \underbrace{\left( \cos^2 \frac{\varphi_r}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \right)}_{\cos^2 \frac{\varphi_r}{2}} \gamma_{1,1}(w, \mu) + g \\
(-\alpha w_1^2) &= -\frac{1}{m} (\cos \varphi_r) \gamma_{1,1}(w, \mu) + g \\
\gamma_1(w, \mu) &= \frac{\alpha w_1^2 m - m g}{\cos \varphi_r}. \quad (4.99)
\end{aligned}$$

Reescribiendo (4.80d) con los coeficientes aerodinámicos  $A_u = A_q = A_r = 0$ , los cuales representan los momentos que actúan sobre el quadrotor, se tiene

$$u_2 = \frac{I_x}{d} \dot{p} + \left( \frac{I_z - I_y}{d} \right) q r, \quad (4.100a)$$

$$u_3 = \frac{I_y}{d} \dot{q} + \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) p r, \quad (4.100b)$$

$$u_4 = I_x \dot{r} + (I_y - I_x) p q. \quad (4.100c)$$

Expresando las ecuaciones anteriores en el espacio  $(x, w)$  y desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_2(w, \mu) &= \frac{I_x}{d} \dot{\pi}_{2,2}(w) + \left( \frac{I_z - I_y}{d} \right) \pi_{2,3}(w) \pi_{2,4}(w) \\ &= \frac{I_x}{d} \left( \frac{d}{dt} \left\{ -\omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t \operatorname{sen} \varphi_r \right\} \right) + \left( \frac{I_z - I_y}{d} \right) \left( \omega_0 w_3 \operatorname{sen} \varphi_r \right) \left( -2\omega_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \right) \\ &= \frac{I_x}{d} \left( -\omega_0 \operatorname{sen} \varphi_r \left\{ \underbrace{(\omega_0) \cos \omega_0 t}_{w_3} \right\} \right) + \left( \frac{I_z - I_y}{d} \right) \left( -2\omega_0^2 w_3 \operatorname{sen} \varphi_r \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \right) \\ &= \frac{I_x}{d} \omega_0^2 w_3 \operatorname{sen} \varphi_r + 2 \left( \frac{I_y - I_z}{d} \right) \omega_0^2 w_3 \operatorname{sen} \varphi_r \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \\ &= \omega_0^2 w_3 \operatorname{sen} \varphi_r \left[ -\frac{I_x}{d} + 2 \left( \frac{I_y - I_z}{d} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \right] \\ &= \omega_0^2 w_3 \operatorname{sen} \varphi_r \left[ 2 \left( \frac{I_y - I_z}{d} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} - \frac{I_x}{d} \right]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(w, \mu) &= \frac{I_y}{d} \dot{\pi}_{2,3}(w) + \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \pi_{2,2}(w) \pi_{2,4}(w) \\ &= \frac{I_y}{d} \left( \frac{d}{dt} \left\{ \omega_0 \cos \omega_0 t \operatorname{sen} \varphi_r \right\} \right) + \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \left( -\omega_0 w_4 \operatorname{sen} \varphi_r \right) \left( -2\omega_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \right) \\ &= \frac{I_y}{d} \left( \omega_0 \operatorname{sen} \varphi_r \left\{ -\underbrace{(\omega_0) \operatorname{sen} \omega_0 t}_{w_4} \right\} \right) + \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \left( 2\omega_0^2 w_4 \operatorname{sen} \varphi_r \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \right) \\ &= \omega_0^2 w_4 \operatorname{sen} \varphi_r \frac{I_y}{d} + 2\omega_0^2 w_4 \operatorname{sen} \varphi_r \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \\ &= \omega_0^2 w_4 \operatorname{sen} \varphi_r \left[ -\frac{I_y}{d} + 2 \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} \right] \\ &= \omega_0^2 w_4 \operatorname{sen} \varphi_r \left[ 2 \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_r}{2} - \frac{I_y}{d} \right]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_4(w, \mu) &= I_x \ddot{\pi}_{2,4}(w) + (I_y - I_x) \pi_{2,2}(w) \pi_{2,3}(w) \\
&= I_x \left( \frac{d}{dt} \left\{ -2\omega_0 \omega_3 \omega_4 \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} \right\} \right) + (I_y - I_x) \left( -\omega_0 \omega_4 \sin \varphi_r \right) \left( \omega_0 \omega_3 \sin \varphi_r \right) \\
&= (I_y - I_x) \left( -\omega_0^2 \omega_3 \omega_4 \sin^2 \varphi_r \right) \\
&= \omega_0^2 \omega_3 \omega_4 \sin^2 \varphi_r (I_x - I_y).
\end{aligned} \tag{4.103}$$

De lo anterior se tiene

$$\begin{bmatrix} \gamma_2(w, \mu) \\ \gamma_3(w, \mu) \\ \gamma_4(w, \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 \omega_3 \sin \varphi_r \left[ 2 \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} - \frac{I_x}{d} \right] \\ \omega_0^2 \omega_4 \sin \varphi_r \left[ 2 \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} - \frac{I_x}{d} \right] \\ \omega_0^2 \omega_3 \omega_4 \sin^2 \varphi_r (I_x - I_y) \end{bmatrix}, \tag{4.104}$$

Simplificando (4.104) se definen

$$\begin{aligned}
A_1 &= \omega_0^2 \sin \varphi_r \left[ 2 \left( \frac{I_y - I_z}{d} \right) \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} - \frac{I_x}{d} \right], \\
A_2 &= \omega_0^2 \sin \varphi_r \left[ 2 \left( \frac{I_x - I_z}{d} \right) \sin^2 \frac{\varphi_r}{2} - \frac{I_y}{d} \right], \\
A_3 &= \omega_0^2 \sin^2 \varphi_r (I_x - I_y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u_{ss} = \gamma(w, \mu) - \begin{pmatrix} \frac{\alpha \omega_1^2 m + m g}{\cos \varphi_r} \\ A_1 \omega_3 \\ A_2 \omega_4 \\ A_3 \omega_3 \omega_4 \end{pmatrix}. \tag{4.105}$$

Continuando con el desarrollo para la solución del problema de regulación es necesario determinar los números reales  $a_0, a_1, \dots, a_{q-1}$  de tal manera que se satisfaga la condición 3 de la sección 4.3.1. Esto conduce a la determinación de la siguiente inmersión

$$u_{ss} = \begin{pmatrix} \gamma_2(w, \mu) \\ \gamma_3(w, \mu) \\ \gamma_4(w, \mu) \\ \gamma_1(w, \mu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\alpha \omega_1^2 m + m g}{\cos \varphi_r} \\ A_1 \omega_3 \\ A_2 \omega_4 \\ A_3 \omega_3 \omega_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \xi_{31} \\ \xi_{41} \end{pmatrix}. \tag{4.106}$$

A partir de que  $L_q^2 \gamma(w, \mu) = a_0 \gamma(w, \mu) + \dots + a_{q-1} L_q^{q-1} \gamma(w, \mu)$  con  $q = 2$ , se realiza el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} L_{\alpha}^2 \gamma(w, \mu) &= \frac{\partial \left( \frac{\alpha w_1^2 m + m g}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) - \frac{\partial \left( \frac{\alpha w_1^2 m + m g}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial \left( \frac{\alpha w_1^2 m + m g}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) \\ &\quad + \frac{\partial \left( \frac{\alpha w_1^2 m + m g}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\ &= \frac{2 \alpha^2 w_1 w_2 m}{\cos \varphi_r} \end{aligned} \quad (4.107a)$$

$$\begin{aligned} L_{\alpha}^2 \gamma(w, \mu) &= \frac{\partial \left( -\frac{2 \alpha^2 w_1 w_2 m}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial \left( \frac{2 \alpha^2 w_1 w_2 m}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial \left( \frac{2 \alpha^2 w_1 w_2 m}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_3} \\ &\quad (-\omega_0 w_4) - \frac{\partial \left( -\frac{2 \alpha^2 w_1 w_2 m}{\cos \varphi_r} \right)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\ &= 2 \alpha^2 \left( \frac{\alpha w_1^2 m}{\cos \varphi_r} \right) + \alpha^2 w_2 \left( -\frac{2 \alpha^2 w_2 m}{\cos \varphi_r} \right) \end{aligned} \quad (4.107b)$$

$$\begin{aligned} L_{\omega}^2 \gamma(w, \mu) &= \frac{\partial (A_1 w_3)}{\partial w_1} (\alpha w_2) - \frac{\partial (A_1 w_3)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial (A_2 w_3)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) \\ &\quad - \frac{\partial (A_2 w_1)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\ &= -\omega_0 A_1 w_4 \end{aligned} \quad (4.108a)$$

$$\begin{aligned} L_{\omega}^2 \gamma(w, \mu) &= \frac{\partial (-\omega_0 A_1 w_4)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) - \frac{\partial (-\omega_0 A_1 w_4)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial (-\omega_0 A_1 w_4)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) \\ &\quad + \frac{\partial (-\omega_0 A_2 w_2)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\ &= -\omega_0^2 A_1 w_4 \end{aligned} \quad (4.108b)$$

$$\begin{aligned} L_{\omega}^2 \gamma(w, \mu) &= \frac{\partial (A_2 w_4)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial (A_2 w_4)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial (A_2 w_4)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) \\ &\quad + \frac{\partial (A_2 w_4)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\ &= \omega_0 A_2 w_3 \end{aligned} \quad (4.109a)$$

$$\begin{aligned} L_{\omega}^2 \gamma(w, \mu) &= \frac{\partial (\omega_0 A_2 w_3)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial (\omega_0 A_2 w_3)}{\partial w_2} (\alpha w_1) - \frac{\partial (\omega_0 A_2 w_3)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) \\ &\quad + \frac{\partial (\omega_0 A_2 w_3)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\ &= -\omega_0^2 A_2 w_4 \end{aligned} \quad (4.109b)$$



$$\begin{aligned}
 L_{\alpha} \gamma_2(w, \mu) &= \frac{\partial (A_3 w_2 w_4)}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial (A_3 w_2 w_4)}{\partial w_2} (\alpha w_1) + \frac{\partial (A_3 w_3 w_4)}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) \\
 &\quad + \frac{\partial (A_3 w_3 w_4)}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\
 &= \omega_0 A_3 w_3^2 - \omega_0 A_3 w_4^2.
 \end{aligned} \tag{4.110a}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha}^2 \gamma_4(w, \mu) &= \frac{\partial (\omega_0 A_3 (w_3^2 - w_4^2))}{\partial w_1} (-\alpha w_2) + \frac{\partial (\omega_0 A_3 (w_3^2 - w_4^2))}{\partial w_2} (\alpha w_1) \\
 &\quad + \frac{\partial (\omega_0 A_3 (w_3^2 - w_4^2))}{\partial w_3} (-\omega_0 w_4) - \frac{\partial (\omega_0 A_3 (w_3^2 - w_4^2))}{\partial w_4} (\omega_0 w_3) \\
 &= -4\omega_0^2 A_3 w_3 w_4.
 \end{aligned} \tag{4.110b}$$

Desafortunadamente, la expresión  $\gamma_1(w, \mu)$  no puede ser sumergida en un sistema lineal observable, debido a que (4.107b) difiere de la expresión  $L_{\alpha}^2 \gamma_{1,1}(w, \mu) = a_0 \gamma_{1,1}(w, \mu) - a_1 L_{\alpha} \gamma_1(w, \mu)$ , y consecuentemente la expresión (4.30) de la condición 3 no puede ser satisfecha en lo que se refiere a la altitud. Por el contrario, se consigue la inmersión para  $\gamma_2(w, \mu)$ ,  $\gamma_3(w, \mu)$  y  $\gamma_4(w, \mu)$  referente a la orientación, por lo tanto se realizará un control PD+g, por simplicidad, para la traslación en  $z_E$  y se continuará con la metodología RORP solo para la orientación  $(q_0, q_1, q_2, q_3)$ . (Ver Fig. 4.5).

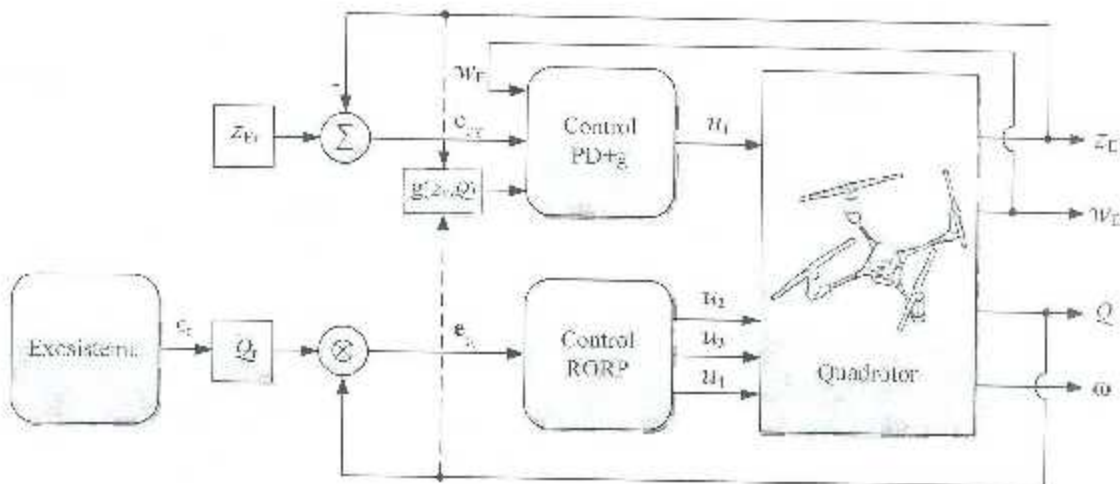


Figura 4.5: Estructura de control propuesta

La ley de control con compensación de gravedad está representada por

$$u_1 = K_p \tilde{z}_E + K_v \dot{\tilde{z}}_E + g(z_E, \mathcal{Q}) \quad (4.111)$$

donde  $K_p, K_v \in \mathbb{R}$  son valores escalares positivos y  $\tilde{z}_E = z_E - z_E^*$  denota el error de posición. A diferencia del control PD sin gravedad, que no requiere conocimiento alguno sobre la estructura del modelo de la planta, el controlador (4.111) hace uso explícito del conocimiento parcial del modelo de la planta, específicamente de  $g(z_E, \mathcal{Q})$ . Por lo tanto, basta con analizar la expresión (4.80c) para obtener el término de gravedad dado como

$$g(z_E, \mathcal{Q}) = -\frac{m g}{(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)} \quad (4.112)$$

La ecuación que describe el comportamiento en lazo cerrado está dada por

$$(-m \ddot{z}_E + m g) \left( \frac{1}{(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)} \right) = - \left( k_p \tilde{z}_E - k_v \dot{\tilde{z}}_E - \frac{m g}{(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)} \right)$$

o bien, en términos del vector de estado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_E \\ \dot{\tilde{z}}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_E \\ \tilde{z}_E - \left[ g - \frac{m}{(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)} \right] \left( -k_p \tilde{z}_E - k_d \dot{\tilde{z}}_E + \frac{m g}{(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)} \right) \right] \end{bmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para que el origen  $[\tilde{z}_E \ \dot{\tilde{z}}_E]^T = 0 \in \mathbb{R}^2$  sea equilibrio de la ecuación en lazo cerrado es que la posición deseada  $z_E^*$  satisfaga

$$m \ddot{z}_E^* = 0,$$

para cualquier condición inicial  $[z_E \ \dot{z}_E]^T \in \mathbb{R}^2 [40]$ .

Por otro lado, se reescriben los resultados de la inmersión (4.108), (4.109a) y (4.110) en el nuevo sistema de coordenadas

$$\dot{\xi}_{21} = A_1 w_3 \quad (4.113a)$$

$$\dot{\xi}_{21} = \xi_{22} - \omega_0 A_1 w_3 \quad (4.113b)$$

$$\dot{\xi}_{22} = -\omega_0^2 A_1 w_3 = -\omega_0^2 \xi_{21} \quad (4.113c)$$

$$\xi_{31} = A_2 w_4, \quad (4.114a)$$

$$\dot{\xi}_{31} = \xi_{32} = \omega_0 A_2 w_3, \quad (4.114b)$$

$$\dot{\xi}_{32} = -\omega_0^2 A_2 w_4 = -\omega_0^2 \xi_{31}, \quad (4.114c)$$

$$\xi_{41} = A_3 w_3 w_4, \quad (4.115a)$$

$$\dot{\xi}_{41} = \xi_{42} = \omega_0 A_3 (w_3^2 - w_4^2), \quad (4.115b)$$

$$\dot{\xi}_{42} = -4\omega_0^2 A_3 w_3 w_4 = -4\omega_0^2 \xi_{41}; \quad (4.115c)$$

por lo que los polinomios correspondientes están dados por

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2, \quad (4.116)$$

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2, \quad (4.117)$$

$$p_3(\lambda) = \lambda^2 + 4\omega_0^2. \quad (4.118)$$

Finalmente, la matriz

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & d/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & d/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1/I_z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

siempre será de rango pleno para cada raíz de  $p_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , con parte real no negativa.

La estructura del controlador que resuelve el RORP está dada por

$$\dot{\zeta}_1 = (A + B(0)K - G_1 C) \zeta_1 - G_1 e, \quad (4.120a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = -G_2 C \zeta_1 + \Phi \zeta_2 + G_2 e, \quad (4.120b)$$

$$u = K \zeta_1 + \Gamma \zeta_2, \quad (4.120c)$$

donde

$$\Phi = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.121)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.122)$$

con  $K$ ,  $G_1$  y  $G_2$  de tal manera que las matrices

$$(A + B(0)K), \quad \begin{pmatrix} A & -B(0)\Gamma \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} (C \ 0), \quad (4.123)$$

sean estables.

Nuevamente, el criterio de estabilidad se consigue con un desempeño deseado, *i.e.*, con ganancias  $K$ ,  $G_1$  y  $G_2$  tal que los eigenvalores para las matrices (4.123) posean parte real negativa, *e.g.*,

$$P_K = [-3, -4, -5, -3, -4, -5],$$

$$P_G = [-3, -4, -5, -6, -7, -8, -3, -4, -5, -6, -7, -8].$$

#### 4.4.1. Resultados

A continuación se ponen en evidencia los resultados de la teoría del problema de regulación robusta a la salida para la orientación y la del controlador PD+g para la altitud mediante simulaciones en Matlab/Simulink. La primer simulación corresponde a la estabilización del quadrotor en un punto fijo de interés en donde  $\varphi_r = 0$  rad en (4.74). Luego, la segunda trata con la descripción de una trayectoria de referencia donde el ángulo  $\varphi_r = 0.3142$  rad en (4.74).

##### 4.4.1.1. Resultados de estabilización para el quadrotor

En la presente sección se muestran los resultados referentes a la estabilización del UAV del tipo quadrotor para vuelo estacionario. La postura de vuelo deseada para la validación

del desempeño de los controladores RORP y PD+g es definida como  $\mathcal{Q}_r = [1, 0, 0, 0]^T$  rad para la orientación y  $z_{E,r} = 1$  m para la traslación en el eje  $z_E$ . Los momentos aerodinámicos que son externos a la aeronave estarán dentro de un conjunto de valores conocidos, e.g.  $A_p = 0.1 \sin(\pi/5 t)$ ,  $A_q = 0.1 \cos(\pi/5 t)$  y  $A_r = 0.15 \cos(\pi/5 t)$ .

En la simulación, el quadrotor se encontrará inicialmente en vuelo con las siguientes condiciones iniciales:  $q_0(0) = 0.8825$ ,  $q_1(0) = 0.337$ ,  $q_2(0) = -0.1781$  y  $q_3(0) = 0.2754$  y  $z_E(0) = 0.5$  m e igualmente para una representación en ángulos de Euler se tiene que  $\psi(0) = 25^\circ$ ,  $\theta(0) = -30^\circ$ ,  $\phi(0) = 35^\circ$ . Esta última representación es útil para tener en mente una interpretación física de la orientación. Los parámetros del quadrotor están dados como  $m = 0.7$  Kg,  $d = 0.3$  m,  $I_x = I_y = I_z = 1.2416$  Kg m<sup>2</sup> [31].

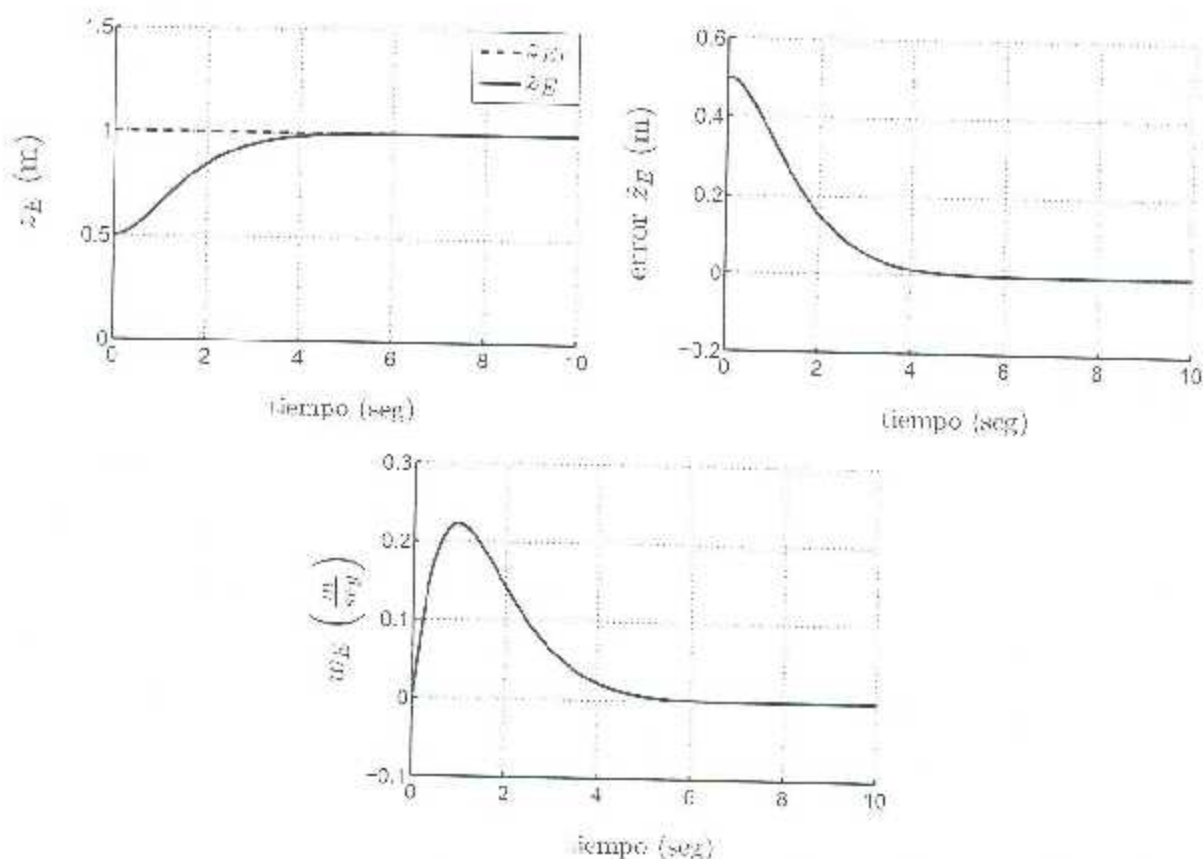


Figura 4.6: Posición, error y velocidad de traslación en  $z_E$

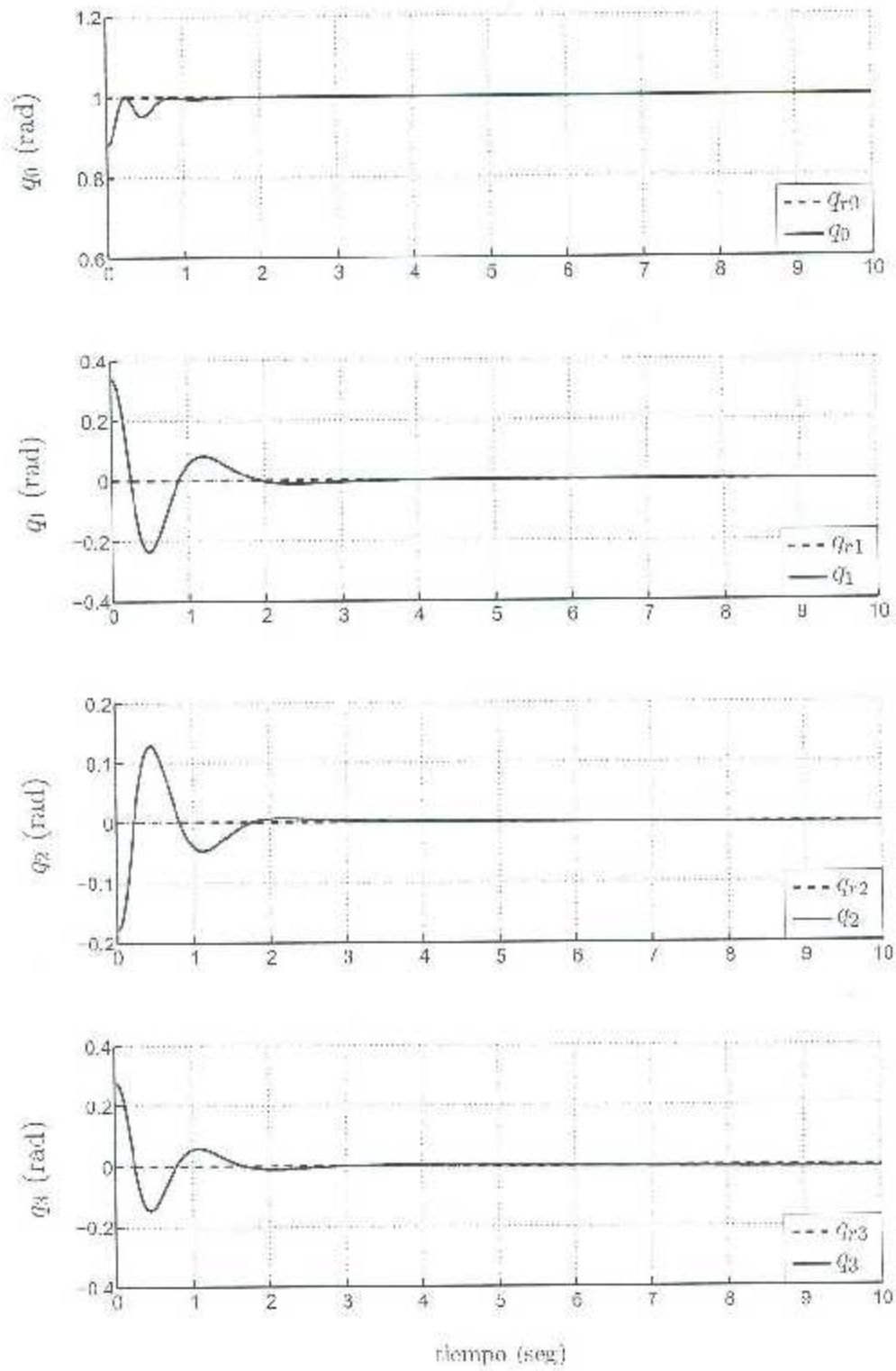
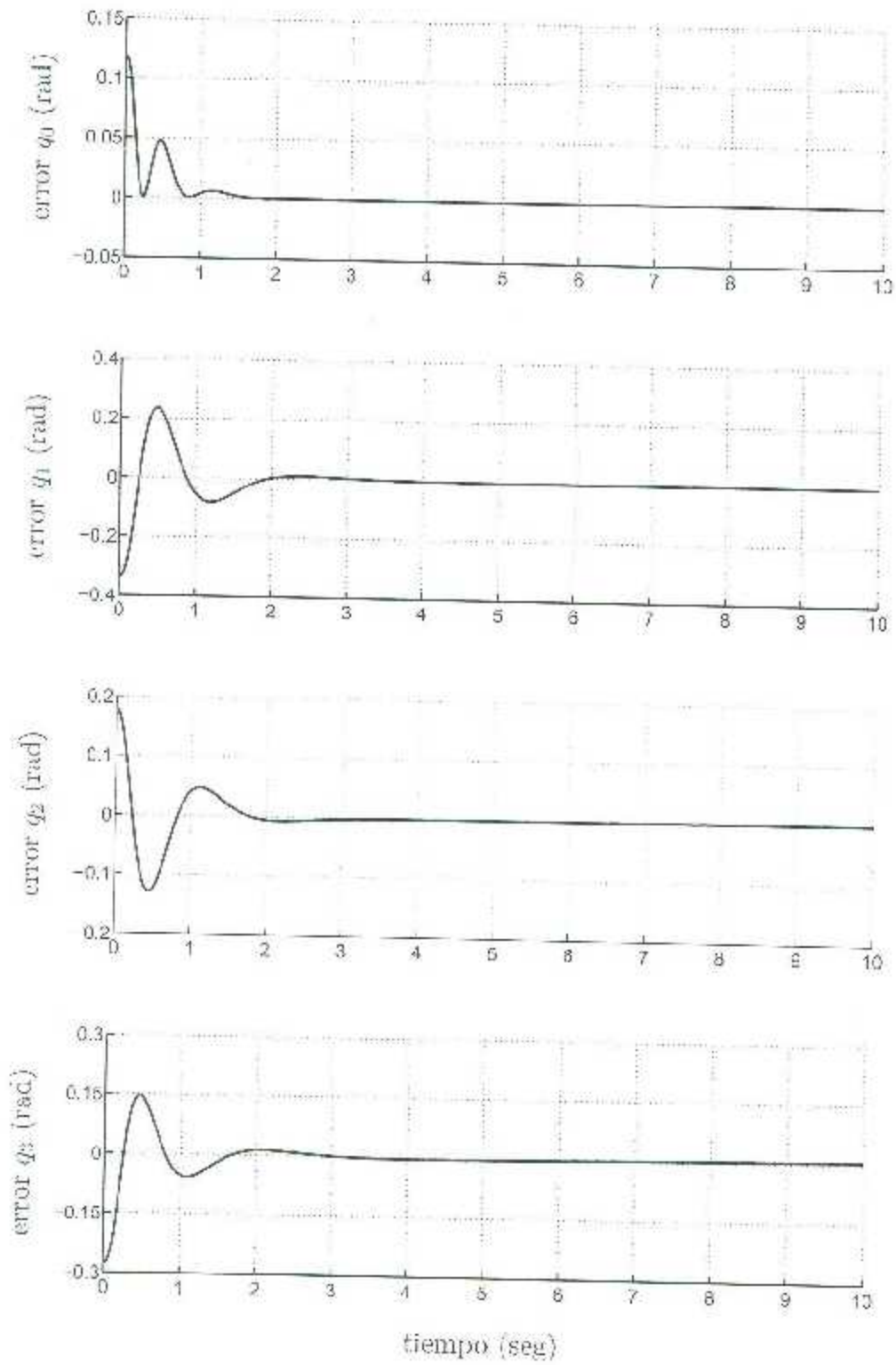


Figura 4.7: Dinámica de la orientación  $Q(t)$

Figura 4.8: Cuaternión del error  $Q_e(t)$

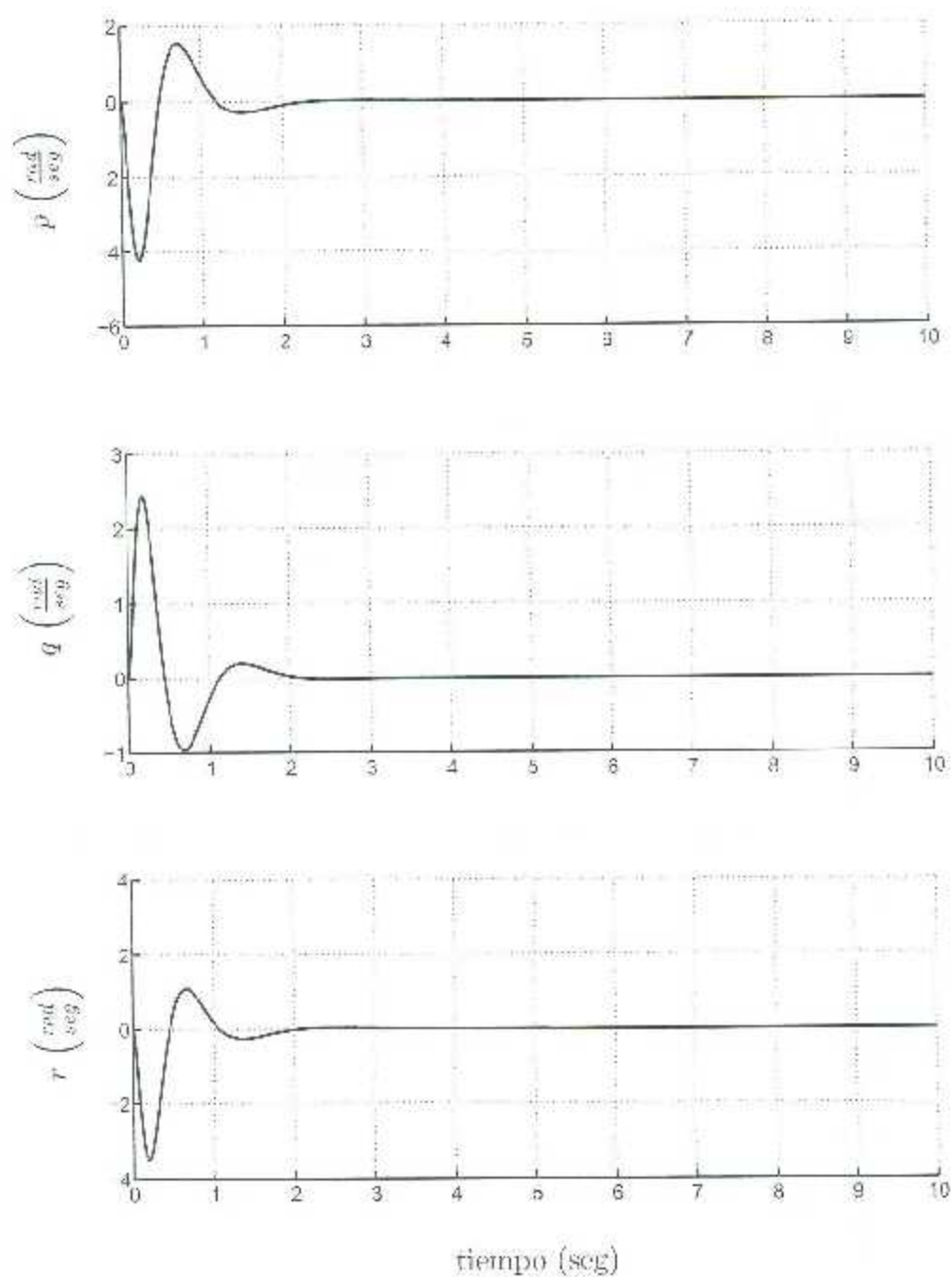


Figura 4.9: Velocidades angulares



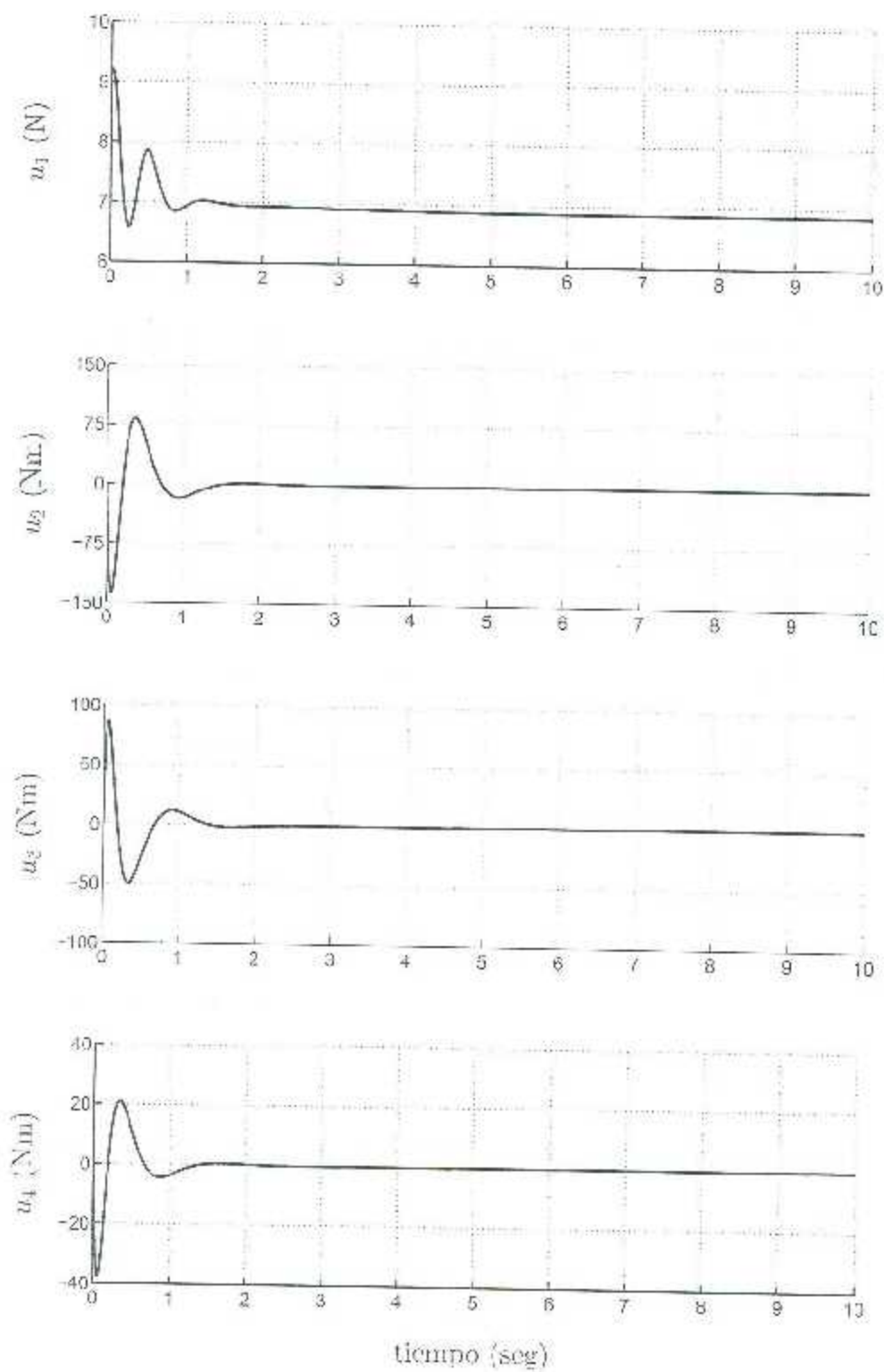
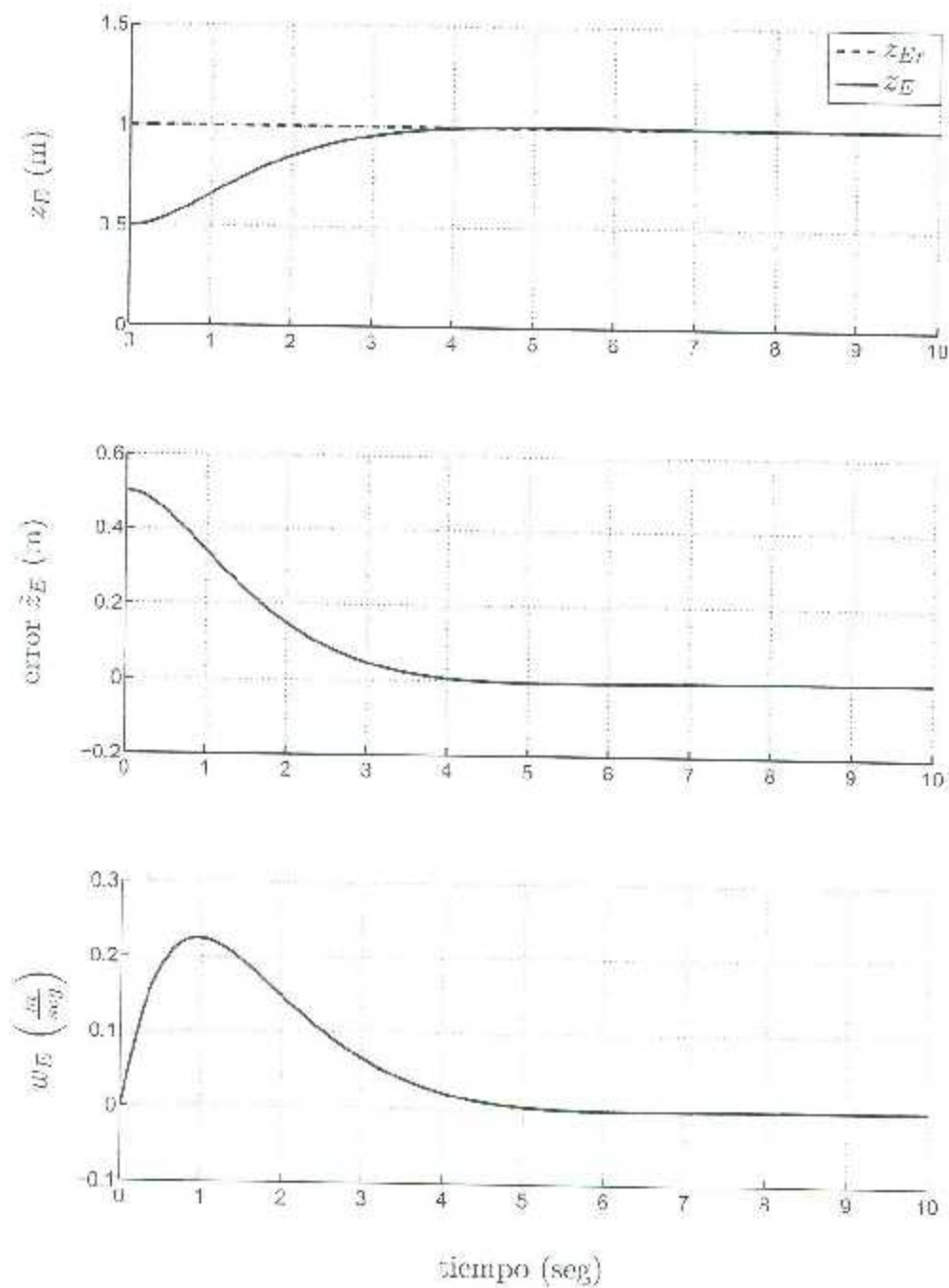


Figura 4.10: Entradas de control

Los resultados en simulación para estabilizar y mantener el quadrotor en vuelo estacionario a una altura fija son mostradas en las figuras 4.6-4.10, en donde los rotores deben de ejercer y mantener una fuerza igual a 3.867 N para vencer la gravedad. 4.6(a) muestra que el control PD+g para la altitud cumple con el objetivo de control al llevar el quadrotor a una altura deseada cuando se le envía un nuevo comando; En 4.6(b) y 4.6(c) se muestra el error de posición y la dinámica de velocidad a lo largo del eje  $z_D$ , respectivamente. La figura 4.7 ilustra la respuesta de la orientación del controlador RORP para condiciones iniciales  $\mathcal{Q}(0) = [0.8825, 0.337, -0.1781, 0.2754]^T$ , estabilizando el quadrotor aún cuando existen perturbaciones externas. En la figura 4.8 se muestra el error de posición angular en cuaterniones y la figura 4.9 ilustra la velocidad angular del quadrotor. En la figura 4.10 se observa la fuerza y los pares de control aplicados al quadrotor.

#### 4.4.1.2. Resultados del seguimiento de trayectoria para el quadrotor

En esta sección se dan a conocer los resultados para el seguimiento de trayectoria del quadrotor. Las condiciones iniciales son las mismas que en la simulación para estabilizar el quadrotor, *i.e.*,  $q_0(0) = 0.8825$ ,  $q_1(0) = 0.337$ ,  $q_2(0) = -0.1781$ ,  $q_3(0) = 0.2754$  y  $z_D(0) = 0.5\text{m}$ , la referencia para la orientación será descrita por el cuaternión  $\mathcal{Q}_r = [\cos \frac{\varphi_r}{2}, w_3(t) \sin \frac{\varphi_r}{2}, w_4(t) \sin \frac{\varphi_r}{2}, 0]^T$  donde  $\varphi_r = 0.3142\text{rad}$ . Los elementos  $w_3(t)$  y  $w_4(t)$  corresponden a la solución del exosistema lineal (4.71). Las perturbaciones se siguen considerando como  $A_p = 0.1 \sin(\pi/5 t)$ ,  $A_v = 0.1 \cos(\pi/5 t)$  y  $A_r = 0.15 \cos(\pi/5 t)$ .

Figura 4.11: Posición, error y velocidad de traslación en  $z_E$ .

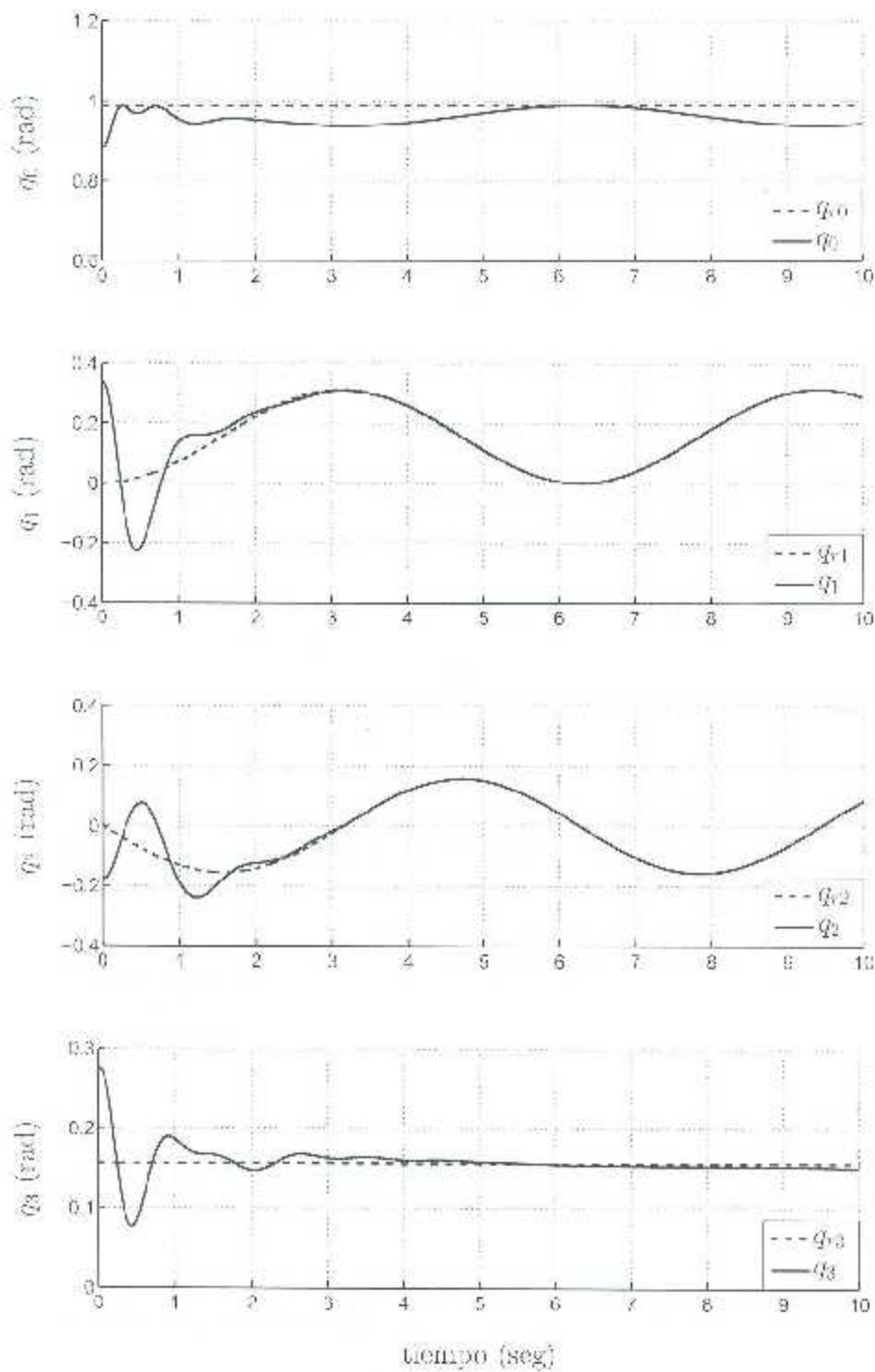
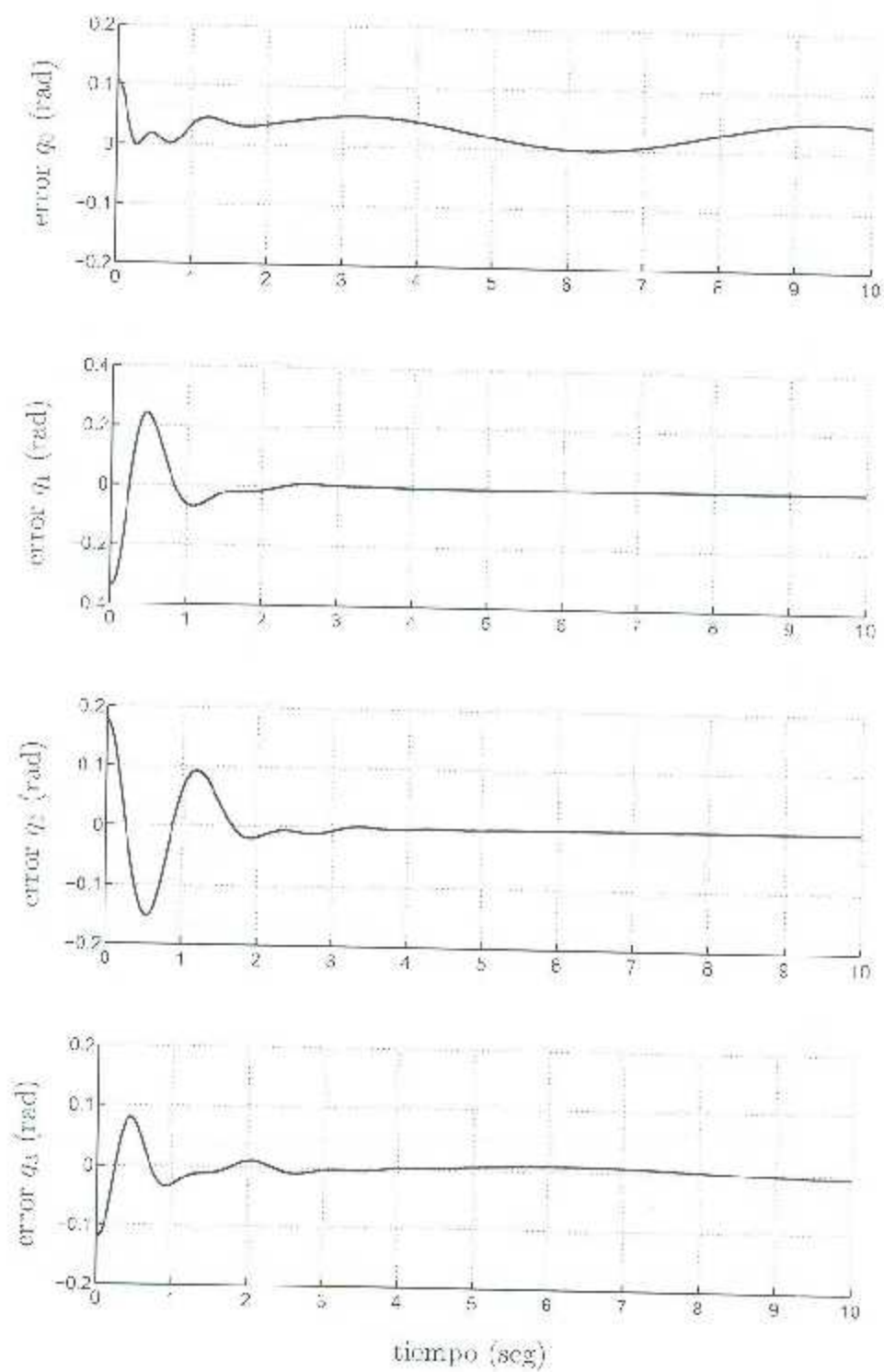


Figura 4.12: Dinámica de la orientación  $Q(t)$

Figura 4.13: Cuaternión del error:  $Q_e(t)$

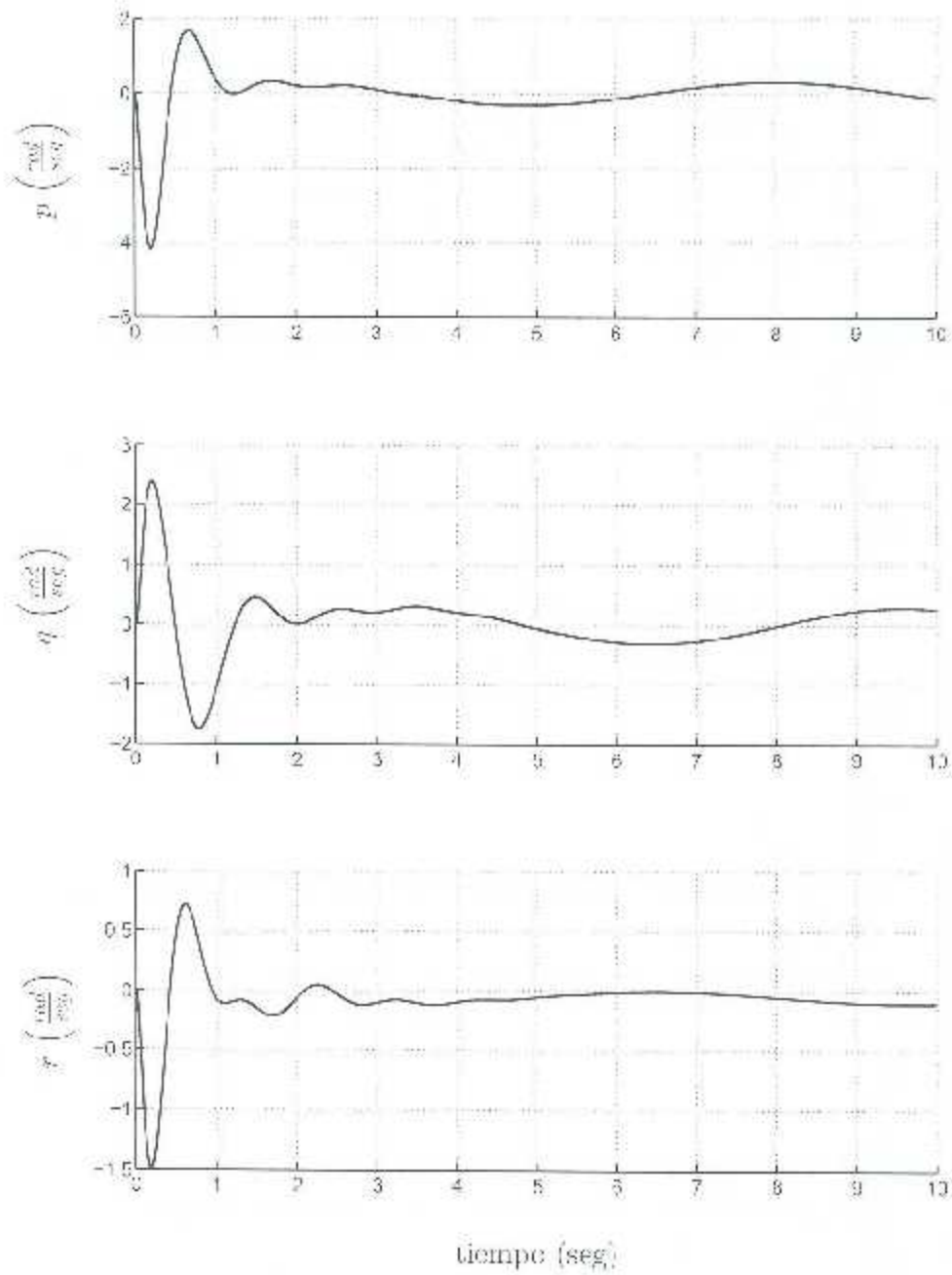


Figura 4.14: Velocidades angulares

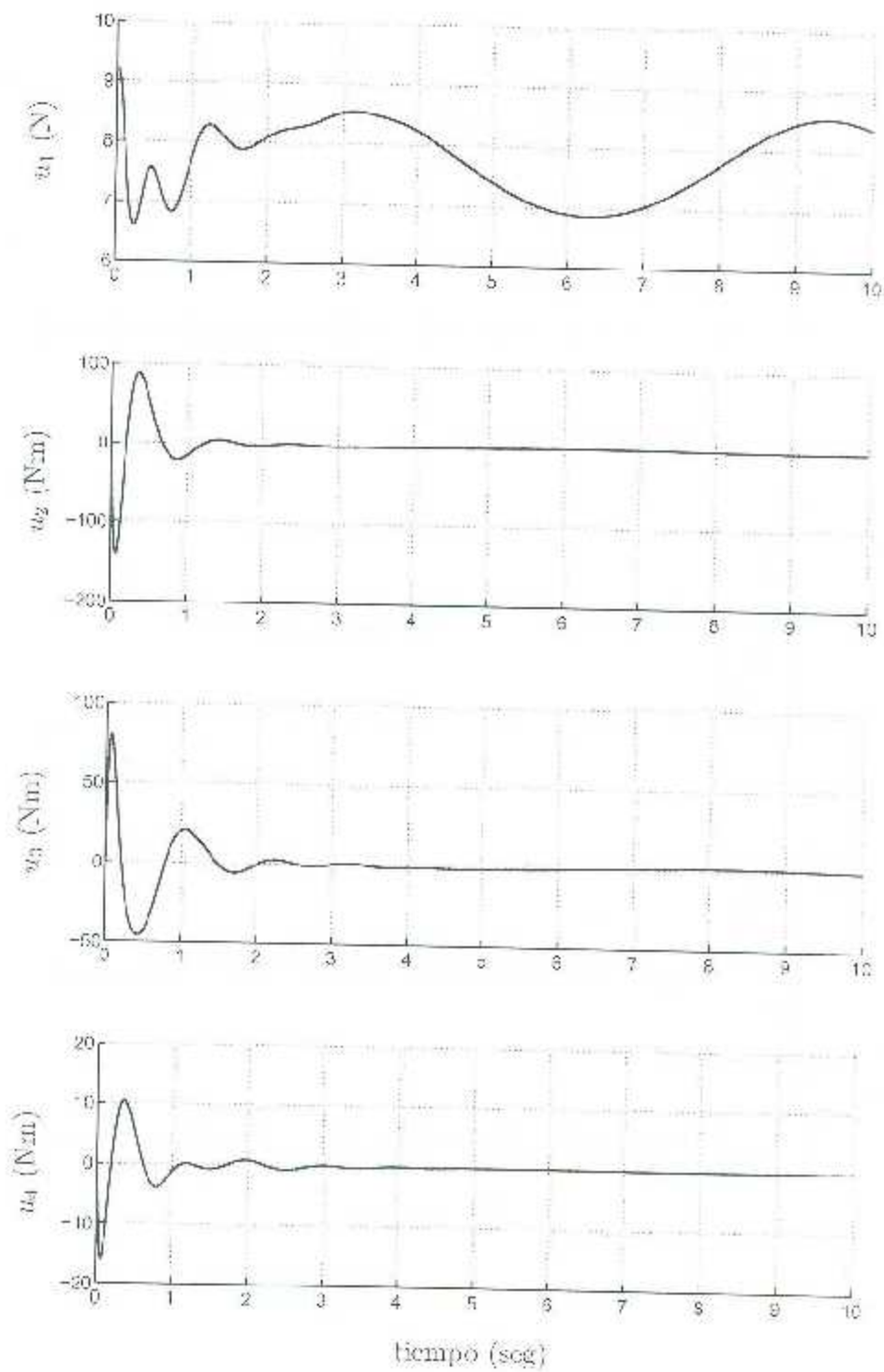


Figura 4.15: Entradas de control

Los resultados de las figuras 4.11-4.15 corresponden, nuevamente, al desempeño de los controladores (4.111) y (4.120). Las gráficas de la figura 4.11 muestran que el controlador PD  $g$  tiene el mismo comportamiento que en el control para estabilizar el quadrotor, debido a que el seguimiento de trayectoria se lleva a cabo a la misma altura deseada de  $1m$ . Por otra parte, en la figura 4.12 se observa la trayectoria que describe la orientación del quadrotor; se debe prestar atención en que la cinemática de rotación (4.77) sólo toma en cuenta la parte vectorial del cuaternión, es por ello la discrepancia entre  $q_0$  y  $q_6$ . Además, es notorio que en  $q_1$  y  $q_2$  las perturbaciones son rechazadas debido a que ésta es una característica del exosistema el cual también genera las trayectorias de referencia mediante  $w_3(t)$  y  $w_4(t)$ . En las figuras 4.13 y 4.14 se ilustra el cuaternión del error y las velocidades angulares, respectivamente. Finalmente, en la figura 4.15 se muestra la fuerza y los pares de control necesarios para que el quadrotor se mantenga a una altura fija y además describa la trayectoria de referencia.





## Capítulo 5

### Conclusiones

El objetivo del presente estudio consistió en representar el modelo del quadrotor en términos de cuaterniones para luego mediante el diseño de un controlador robusto conseguir la tarea de estabilización del mismo en vuelo estacionario (*hovering*). Por tal motivo se realizó un estudio sobre el álgebra de cuaterniones para una mejor comprensión del tema y sus aplicaciones. A partir de dicho estudio se desprendió el trabajo para el vehículo espacial. Seguidamente, la estrategia de control a ser estudiada en la búsqueda del objetivo de estabilización del quadrotor fue la del tan conocido problema de regulación robusta a la salida.

En la búsqueda del objetivo en cuestión, se partió de la representación en cuaterniones para el modelo dinámico de un vehículo espacial y al mismo tiempo se definió un cuaternión de referencia para la trayectoria de seguimiento. Cabe destacar que la ley de control fue tomada de [28], sin embargo el modelo y la trayectoria de referencia se desprenden del presente estudio. Al analizar las gráficas del error con ángulos de Euler se puede observar que con el controlador I&I se obtienen resultados satisfactorios. A pesar de ello, con la representación en cuaterniones se consiguió optimizar aún más el desempeño de este controlador para un ahorro significativo en el consumo de energía del vehículo espacial.

A través del trabajo del satélite rígido con movimientos de precesión se efectuó el estudio de la estrategia del problema de regulación robusta a la salida para posteriormente

orientarlo al control de un quadrotor, ya que el modelo dinámico rotacional para este último es similar al modelo del satélite. Esta estrategia es utilizada debido a que permite una mayor confiabilidad y estabilidad para el seguimiento preciso de trayectorias de referencia. Desafortunadamente, la condición de inmersión no fue satisfecha y a pesar de ello se prosiguió con el método para controlar la orientación en tanto que para la altitud se diseñó un controlador PD+g. El controlador de altitud fue capaz de mantener al quadrotor en *hovering*. Los resultados vía simulación validan el objetivo de esta tesis al obtener resultados satisfactorios.

## 5.1. Trabajo futuro

Los resultados derivados de la presente tesis pueden extenderse a las siguientes propuestas:

- Implementar el esquema de control propuesto en una plataforma experimental
- Aplicar la metodología del problema de regulación robusta a la salida para el caso en el que todos los estados están disponibles para la medición.

## Bibliografía

- [1] T. A. W. Dwyer, H. Sira-Ramirez, S. Monaco, and S. Stornielli, "Variable structure control of globally feedback-decoupled deformable vehicle maneuvers," *26th IEEE Conf. on Decision and Control*, vol. 26, pp. 1281–1287, USA, Dec. 1987.
- [2] J. T. Y. Wen and K. Kreutz-Delegado, "The attitude control problem," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, pp. 1148–1152, 1991.
- [3] J. Thienel and R. M. Sanner, "A coupled nonlinear spacecraft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, pp. 2011–2015, 2003.
- [4] A. Mohammad and S. S. Ehsan, "Fuzzy sliding mode controller design for spacecraft attitude tracking in terms of quaternion," *27th Chinese Control Conf.*, pp. 753–757, China, Jul. 2008.
- [5] E. Stingu and F. Lewis, "Design and implementation of a structured flight controller for a 6DOF quadrotor using quaternions," pp. 1233–1238, Greece, Jun. 2009.
- [6] O. Fritsch, P. D. Monte, M. Buhl, and B. Lehmann, "Quasi-static feedback linearization for the translational dynamics of a quadrotor helicopter," *American Control Conf.*, pp. 125–130, Canada, Jun. 2012.
- [7] A. Honglei, L. Jie, M. Hongxu, and C. Kewei, "Quaternion based geometric control of quadrotor UAV," *24th Chinese Control and Decision Conf.*, pp. 1366–1370, China, May. 2012.

- [8] Z. Sheng, W. Dong, and J. A. Farrell, "Quaternion-based trajectory tracking control of VTOL-UAVs using command filtered backstepping," *American Control Conf.*, pp. 1018–1023, USA, Jun. 2013.
- [9] E. Reyes-Valeria, Enriquez Caldera, S. Camacho-Lars, and J. Guichard, "LQR control for a quadrotor using unit quaternions: Modeling and simulation," *International Conf. on Electronics, Communications and Computing*, pp. 172–178, México, Mar. 2013.
- [10] B. A. Francis, "The internal model principle of control theory," *Automatica*, vol. 12, pp. 457–465, 1976.
- [11] B. A. Francis, "The linear multivariable regulator problem," *SIAM J. Control Optimization*, vol. 14, pp. 486–505, 1977.
- [12] A. Isidori and C. Byrnes, "Output regulation of nonlinear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 35, pp. 131–140, 1990.
- [13] B. Castillo-Toledo and S. Di Genaro, "On the nonlinear ripple free sampled-data robust regulator," *Europ. J. of Contr.*, vol. 8, pp. 44–55, 2002.
- [14] P. Sanpoh, T. J. Tarn, and D. Cheng, "Theory and experimental results on output regulation for nonlinear systems," *Proc. of the 2002 American Control Conf.*, vol. 1, pp. 96–101, Canada, 2002.
- [15] L. Zongli, M. Clauser, H. Tingshu, and P. E. Allaire, "Magnetically suspended balance beam with disturbances: A test rig for nonlinear output regulation," *43rd IEEE Conf. on Decision and Control*, vol. 5, pp. 4577–4582, The Bahamas, Dec. 2004.
- [16] N. P. Kakirde, A. Davari, and N. J. Wang, "Trajectory tracking of unmanned aerial vehicle using servomechanism strategy," *Proc. of the Thirtieth Seventh Southeastern Symp. on System Theory*, pp. 163–166, Mar. 2005.

- [17] A. Pavlov, B. Janssen, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, "Experimental output regulation for the tora system," *44th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf.*, pp. 1108–1113, Spain, Dec. 2003.
- [18] Z. Zhang and A. Serrani, "Semiglobal robust output regulation with generalized immersion," *American Control Conference*, pp. 375–376, USA, Jun. 2008.
- [19] B. Zheng and Y. Zhong, "Robust attitude regulation of a 3-DOF helicopter benchmark: Theory and experiments," *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, vol. 58, pp. 660–670, Feb. 2011.
- [20] G. S. Schmidt, C. Ebenbauer, and F. Allgower, "Output regulation for attitude control: A global approach," *American Control Conference (ACC)*, pp. 5251–5256, USA, Jun. 2013.
- [21] M. U. Salman and B. Chang, "Aircraft control surface failure accommodation utilizing linear regulation and switching control," *10th IEEE Int. Conf. on Control and Automation*, pp. 1561–1566, China, Jun. 2013.
- [22] J. Vince, *Quaternions for Computer Graphics*. Springer-Verlag, London, 2011.
- [23] B. L. Stevens and F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. Second edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.
- [24] A. J. Hanson, *Visualizing Quaternions*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, 2005.
- [25] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences: a primer with application to orbits, aerospace, and virtual reality*. Princeton University Press, Oxford, 2002.
- [26] R. Lozano, *Unmanned Aerial Vehicles: Embedded Control*. John Wiley & Sons, London, UK, 2010, Chap. 1, pp. 10–13.
- [27] A. Astolfi, D. Karagiannis, and R. Ortega, *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer, London, 2008.

- [28] J. F. Hernández, "Control de sistemas no lineales inciertos vía inmersión e invariancia". Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna, México, junio 2014.
- [29] E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [30] B. Etkin, *Dynamics of Flight*. John Wiley & Sons, USA, 1996.
- [31] V. Mistler and A. Benallegue, "Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback," *Proc. of the 10th IEEE Int. Workshop on Robot and Human Interactive Communication*, Paris, Sep. 2001.
- [32] O. Fjellstad, "Position and attitude tracking of UAVs: A quaternion feedback approach." *IEEE J. of Oceanic Engineering*, vol. OE-19(4), pp. 512-518, Oct. 1994.
- [33] T. Brescioni, "Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter". M.Sc. Thesis, Lund University Department of Automatic Control, Sweden, october 2008.
- [34] A. Tayebi, "Attitude Stabilization of a VTOL Quadrotor Aircraft," *IEEE Trans. on Control Syst. Tech.*, vol. 14, no. 3, pp. 562-571, Santa Barbara, CA, May 2006.
- [35] F. Jurado, *Non-Linear Control of a Vertical Take-off Vehicle*. Ph.D. Thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) Unidad Guadalajara, México, 2010.
- [36] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, 1995.
- [37] J. P. García, *El problema de la Regulación Robusta utilizando inmersiones: Aplicación a Reactores*. Ph.D. Thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) Unidad Guadalajara, México, 2006.
- [38] S. Di Gennaro, "Passive attitude control of flexible spacecraft from quaternion measurements," *J. of Optimization Theory and Applications*, vol. 116, pp. 41-60, 2003.
- [39] T. Kailath, *Linear Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

- [40] R. Kelly and V. Santibañez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson Educación, S. A., Madrid, 2003.







Vertical text on the right edge of the page, possibly a page number or margin note.

Faint, illegible text located at the bottom center of the page.