

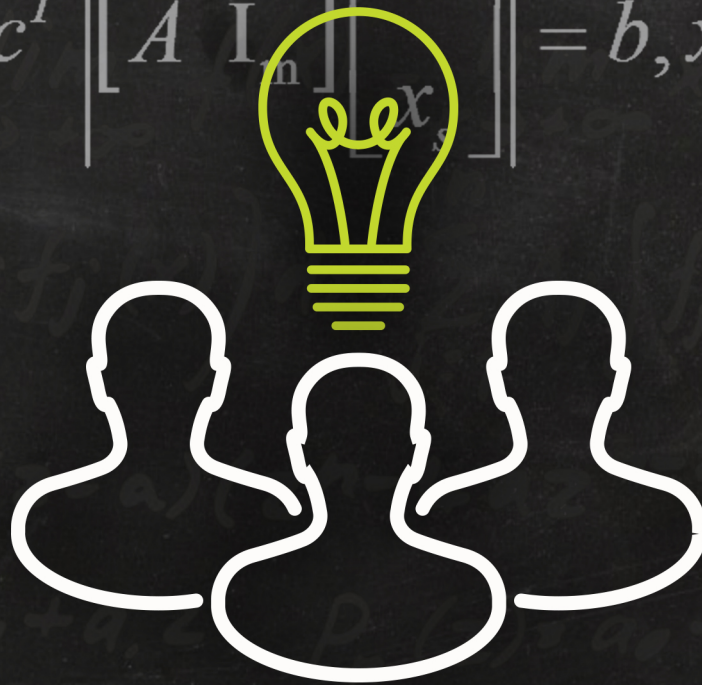
Tecnológico Nacional de México

Instituto Tecnológico de Ensenada

# INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Un proyecto sustentado en el arte y  
la ciencia de las matemáticas aplicadas

$$\text{Max} \left\{ c^T \left[ \begin{array}{c|c} & x \\ \hline A & I_n \\ \hline & x_s \end{array} \right] = b, x \geq 0 \right\}$$



**SAMUEL HIDALGO**

**Tecnológico Nacional de México**  
**Instituto Tecnológico de Ensenada**

# **INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES**

*Un proyecto sustentado en el arte y la  
ciencia de las matemáticas aplicadas*

**SAMUEL HIDALGO**

**Prólogo: Dr. Federico González Santoyo**

*A mi familia:*

*Lupe, Nadia, Enya, Ian y Kendra*

# Índice

<b>Prólogo</b>	<b>4</b>
<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>Semblanza del autor</b>	<b>10</b>
<b>Capítulo I</b>	
Historia de la investigación de operaciones	<b>12</b>
<b>Capítulo II</b>	
Programación lineal	<b>73</b>
<b>Capítulo III</b>	<b>153</b>
Modelos de redes	
<b>Capítulo IV</b>	<b>230</b>
Programación no lineal	
<b>Capítulo V</b>	<b>323</b>
Modelos de inventarios	
<b>Capítulo VI</b>	<b>394</b>
Líneas de espera	

# Prólogo

Hoy día en el mundo empresarial, la toma de decisiones debe ser racional, eficiente y eficaz en virtud de que las empresas se desarrollan en un mercado global y de competencia perfecta, en el que la aplicación de la ciencia, la tecnología y la innovación son parte fundamental para su desarrollo. Por ello se demanda de la aplicación de metodologías de alto impacto en la solución de sus problemas.

La base fundamental para fortalecer este proceso, es la aplicación del método científico, un ejemplo práctico de ello es la aplicación de la *Investigación de Operaciones*, la aplicación de esta área del conocimiento permite dar claridad y certeza en la solución de problemas en cualquier sistema en análisis, además de dar claridad y certidumbre en el diseño, manejo y solución de problemas, así contribuir a tener control del sistema que se interviene y disminuir la leyenda de que “*si el modelo usado en la solución de un problema no se ajusta a la realidad, peor para la realidad*”.

Por ello en este proceso de optimización, en el que se busca hacer más con menos haciendo uso de la optimización de recursos escasos usados para la producción de bienes y/o servicios, buscando obtenerlos con el menor costo, menor precio de venta, con el más alto nivel de calidad y por ello ofrecerlos al mercado con el más alto nivel de servicio, esto permitirá obtener altos niveles de productividad y por tanto generación de riqueza para el sector empresarial en el que se aplique plenamente la Investigación de Operaciones, así como posicionar a las organizaciones como de clase mundial.

Para atender el proceso de solución de problemas haciendo uso de modelos cualitativos en las empresas públicas y privadas productoras de bienes y servicios.

El libro ***Investigación de Operaciones: un proyecto sustentado en el arte y la ciencia de las matemáticas aplicadas*** de la autoría del Profesor. Dr. Samuel de Jesús Hidalgo Orellana, es un excelente apoyo para dar solución de problemas empresariales en las diferentes áreas funcionales de la organización, atendiendo problemas en el que sus soluciones pueden ser fraccionales, enteras o bien en las que se aceptan estas con una parte entera y otra fraccional. Así mismo se presentan algoritmos estratégicos para la solución de problemas de logística como la distribución de productos, determinación de rutas óptimas, de asignación de recursos escasos, de inventarios, de líneas de espera. Así como problemas en los que su función objetivo y restricciones tienen un comportamiento no lineal.

El libro ***Investigación de Operaciones: un proyecto sustentado en el arte y la ciencia de las matemáticas aplicadas***. Está estructurado en 6 apartados descritos como: Capítulo.1. Historia de la Investigación de Operaciones, Capítulo.2. Programación Lineal, Capítulo. 3. Análisis de Redes, Capítulo.4. Programación no Lineal, CAp.5. Modelos de Inventarios, Cap.6. Líneas de Espera.

Nunca es posible agotar un área del conocimiento, en este libro el Dr. Hidalgo hace un pequeño esfuerzo al presentar algunas técnicas de la Investigación de Operaciones, que permitan facilitar el análisis y obtención de soluciones óptimas en diversos problemas empresariales, en los que es posible hacer aplicaciones de esta área del conocimiento buscando que dichas soluciones sean eficientes y eficaces.

El presente libro es un material de gran valía para estudiantes de las área de Ingeniería Industrial, Ingeniería en Sistemas Computacionales, Ingeniería en Gestión Empresarial y la Licenciatura en Administración, así como para empresarios dispuestos a cambiar y buscar él como aplicar mejores metodologías que vayan más allá de la simple experiencia, estas les permitirán correr en tiempo real  $n$  escenarios que orienten los esfuerzos para que el gerente tome decisiones eficientes y eficaces.

Con la esperanza de siempre de que este trabajo sea de utilidad en el medio académico y empresarial y lectura formativa, para su construcción y formación de seres humanos más felices que orienten sus esfuerzos al diseño de un mundo más igualitario, equitativo y mejor que permita un uso racional y óptimo de sus recursos.

Diciembre del 2017

**Dr. Federico González Santoyo**

Miembro Representativo para México de la  
Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras –RACEF (España)

# Introducción

Aprender el arte y la ciencia de la investigación de operaciones, requiere de un gran esfuerzo, de liderazgo académico, de conocimientos profundos sobre el campo en particular, de establecer en el aula métodos del aprendizaje cooperativo entre estudiantes y entre estudiantes y el profesor, entre otros aspectos relevantes.

Hay un nuevo paradigma nuevo en el sistema de educación superior: los conocimientos deben ser construidos entre los estudiantes y el profesor, el alumno debe ser constructor, descubridor y transformador activo de su propio conocimiento; los profesores deben ser capaces de desarrollar las capacidades y talentos de los estudiantes, deben fomentar las relaciones personales entre estudiantes y entre estudiantes y el profesor.

La enseñanza es compleja y requiere de una capacitación considerable.

Somos responsables de preparar a los estudiantes para triunfar en el campo laboral, académico o de investigación, enseñarles tanto las habilidades humanas como el contenido de las materias o asignaturas.

Hoy en día, dotar a los estudiantes solamente de conocimientos curriculares (es decir, habilidades cuantitativas), ya no es suficiente. Los estudiantes deben exigir que se les enseñen las habilidades que necesitan en el campo laboral.

Transcurrido casi un año, sale a la luz este libro de texto, fruto de muchas horas de trabajo, de consultar decenas de artículos, libros, páginas de la red internet, manuales, apuntes, software especializado, que en la mayoría de los casos está escrito en inglés.

Esta obra es única, no existe otra igual, pero, es fruto de los conocimientos y experiencias de muchas personas que se han dedicado a lo largo de toda su vida a cultivar y profundizar en algunos campos de la investigación de operaciones. A todos ellos se le ha dado el crédito correspondiente mediante las citas de su obra y en las referencias bibliográficas seleccionadas que se indican al final de cada capítulo de este libro.

Los programas Maple, Matlab, Mathematica, Lindo, Lingo, Excel y Geogebra, fueron de gran utilidad para resolver la gran mayoría de los problemas contenidos en este libro. Se utilizó el programa Geogebra para diseñar la región de factibilidad de los problemas de dos variables de los modelos de programación lineal, el programa Maple fue una valiosa herramienta en todos los capítulos, pero principalmente en los

modelos más complejos que requerían desarrollos más elaborados como en los modelos de programación no lineal, en los modelos de inventarios y en modelos estocásticos de líneas de espera. Los programas Lindo y Lingo fueron útiles para resolver algunos problemas de programación lineal, y para modelos de redes, en especial para los casos de modelos de transporte, asignación, ruta crítica y algunos modelos de la ruta más corta, principalmente. El programa Excel, y su complemento Solver, fue de gran utilidad para analizar modelos de programación lineal y para analizar las distintas iteraciones del algoritmo simplex para modelos de pequeña y mediana instancia.

El libro consta de seis partes, la primera parte es una línea del tiempo sobre el origen y desarrollo de la investigación de operaciones. Saúl Gass, entrañable pionero en el campo de la investigación de operaciones, elaboró, en conjunto con Assad parte de la historia de la investigación de operaciones, desde sus inicios, hasta el año 2010. Antes de su fallecimiento, Saúl Gass y Assad A, desarrollaron estudios mucho más profundos sobre la historia de este campo tan maravilloso. El crédito principal es de ellos en la primera parte de este libro.

La segunda parte, contempla el tema de la programación lineal, se desarrolla parte de la teoría necesaria para el entendimiento del tema, se muestran las diferentes soluciones geométricas para problemas de dos variables. Para resolver y analizar los modelos y problemas se utilizaron distintos programas de cómputo. El tema de programación lineal presenta modelos y procedimientos específicos de solución, tales como el método gráfico, el algebraico, y mediante algoritmos especializados como el algoritmo simplex y sus variantes como el algoritmo simplex de penalización. Al final del capítulo se presentan problemas resueltos y propuestos que permitirán al alumno aprender y poder demostrar lo aprendido mediante la resolución de los casos sugeridos.

En la tercera parte se abordan algunos casos especiales de la teoría de redes, entre ellos el problema de transporte, el problema de asignación, el caso especial del problema de transporte llamado el problema de transbordo, el problema de la ruta más corta, y problemas de las redes Pert-Cpm o método de la ruta crítica. En este apartado se utilizan Excel, Maple, Lindo y Lingo. En cada caso, se presentan problemas resueltos y propuestos para que el estudiante logre los objetivos educativos y los aprendizajes del tema. De igual forma, al final de cada subtema se proponen un conjunto de ejercicios para que sean desarrollados y resueltos por parte de los alumnos.

La cuarta parte se dedica al estudio la programación no lineal. Se inicia con los conceptos básicos y clave del tema, para posteriormente presentar algunas aplicaciones prácticas con modelos no lineales. El concepto de funciones convexas y



cóncavas se introduce en esta unidad debido a la importancia que reviste el tema para comprender la optimización no lineal. Varios métodos de solución se tocan en esta sección: el método de búsqueda restringida, el método de la sección oro, el método de interpolación cuadrática y el método de Newton Raphson para modelos de una variable. Con la finalidad de mostrar la importancia que reviste el cálculo diferencial en el modelado y solución de problemas de optimización no lineal, se introduce el tema de máximos y mínimos y puntos de inflexión para problemas de una y dos variables. Finalmente, el capítulo concluye con el tema de modelos de programación no lineal restringidos. Para este último tema, se utiliza el concepto de multiplicadores de Lagrange. Se utiliza el programa Maple para resolver la mayoría de los ejemplos numéricos indicados en el libro.

La sección quinta corresponde a los modelos de inventarios. Esta sección inicia con los conceptos más importantes del tema, dando paso a la definición y desarrollo de las variables y expresiones necesarias para el contenido. Se utiliza el programa Maple para obtener, en todos los casos, los modelos básicos de inventarios, tales como: la cantidad óptima de pedido o modelo EOQ, el modelo de inventarios cuando se permiten faltantes, el modelo de inventarios para lotes de producción de un solo producto, y el modelo de inventarios cuando existe escasez y se permiten faltantes. Con la finalidad de cubrir los temas del programa, se utilizó bibliografía adecuada para el tema.

En el capítulo seis tratamos una serie de modelos de colas elementales. Se presta atención a los métodos de análisis de estos modelos, así como a las aplicaciones de los modelos de colas mediante un conjunto de problemas numéricos.

En la primera parte del tema se discuten una serie de conceptos básicos sobre la teoría de colas, una breve historia del tema. Posteriormente se aborda el modelo de colas relevante y más simple, y su versión multiservidor se trata en las siguientes secciones de este capítulo. De igual forma se muestran algunas variaciones en los modelos de líneas de espera con determinadas características como el modelo de líneas de espera de pérdida. En cada sección se resuelve un ejemplo numérico por lo menos. El texto contiene una gran cantidad limitada de ejercicios y se insta al lector a probar estos ejercicios utilizando programas como Maple, Matlab, Mathematica, Excel, entre otros.

Deseo recalcar un asunto importante: la investigación de operaciones es tan basta y amplia que se requieren varios años para poder dominar algunas de sus ramas, mencionaré algunas para colocar en su debido contexto a esta disciplina. Programación lineal, programación lineal entera, programación no lineal, programación multiobjetivo, programación dinámica, teoría de redes, programación por metas, líneas de espera, inventarios, series de tiempo, cadenas de markov, teoría

de decisiones, entre otras. De igual forma, para lograr el aprendizaje de cada una de ellas, es necesario dominar los conceptos del álgebra lineal, del cálculo diferencial e integral, de la teoría de la probabilidad, de la teoría general de sistemas, etc. Además de poseer habilidad para construir y elaborar modelos formales o matemáticos que permitan abstraer la esencia del problema.

En la actualidad, no se concibe la enseñanza de la investigación de operaciones sin el uso de la computadora. En el mercado existe una gama amplia de programas de propósito general que ayudan a resolver muchos de los problemas que se modelan. Algunos de los programas son: Matlab, Maple, Mathematica, Lindo, Lingo, Julia, Excel, Gams, entre muchos.

Finalmente, mi agradecimiento sincero a la institución, al centro de trabajo donde cada día me complace ayudar a muchos de mis alumnos a aprender las técnicas de la investigación de operaciones. Mi reconocimiento y gratitud al Instituto Tecnológico de Ensenada por darme esta gran oportunidad de contribuir a engrandecer y a desarrollar al Tecnológico Nacional de México.

# Semblanza del autor

El **Dr. Samuel de Jesús Hidalgo Orellana**, es profesor de carrera titular en el Instituto Tecnológico de Ensenada, realizó estudios de ingeniería mecánica y eléctrica con énfasis en área industrial en la Universidad Nacional Autónoma de México, posteriormente se especializó y realizó estudios de posgrado en el campo de la investigación de operaciones en la misma máxima casa de estudios.

Ha publicado diversos artículos relacionados con el campo de la optimización lineal, la teoría de las decisiones y la programación matemática, la programación lineal multiobjetivo, la teoría de las decisiones y el trabajo colaborativo. De igual forma, ha presentado diversos trabajos de investigación en el seno de la Ilustre Academia Iberoamericana de Doctores.

Ha impartido diversos cursos en distintas universidades e institutos tecnológicos federales y estatales sobre optimización y matemáticas aplicadas usando programas especializados como Matlab, Maple, Mathematica, Geogebra, Microsoft Excel, Linear Interactive Discrete Optimization, entre otros.

Su experiencia docente se remite a los mejores programas de posgrado en diversas instituciones del país, algunos tópicos especializado impartidos en programas de posgrado son: Teoría y técnicas de optimización en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, teoría general de sistema en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Química, matemáticas aplicadas en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración, todas ellas de la Universidad Nacional Autónoma de México. En Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México, impartió cursos sobre diseño y el análisis de experimentos y análisis de regresión, análisis de decisiones e investigación de operaciones avanzadas en la Universidad Autónoma Metropolitana.

En el Sistema de Educación Superior Tecnológica se ha desempeñado como profesor visitante en los programas de posgrado en ingeniería industrial en el Tecnológico de Estudios Superiores de Cajeme, Sonora, de igual forma como profesor visitante en el Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco, Estado de México.

En el campo administrativo ha desempeñado diversos cargos en el sector académico: supervisor en la Dirección General de Educación Superior Tecnológica y como coordinador académico de la Dirección de Institutos Tecnológicos Descentralizados.

Sus publicaciones especializadas están sustentadas en el campo de la investigación de operaciones usando herramientas y programas especializados como proyecto sustentado en el arte y la ciencia de las matemáticas aplicadas.

# Capítulo I

## Historia de la investigación de operaciones

- I. Una perspectiva histórica de la evolución de la Investigación de Operaciones
- II. Los precursores de la Investigación de Operaciones (1564-1873)
- III. Los precursores de la Investigación de Operaciones (1881-1935)
- IV. Una línea del tiempo de la investigación de operaciones (1936-1946)
- V. La expansión de la investigación de operaciones (1947-1950)
- VI. El desarrollo profesional de la investigación de operaciones: matemáticas y algoritmos (1951-1956)
- VII. El desarrollo de algoritmos, aplicaciones y algunas actividades internacionales de la investigación de operaciones (1957-1963)
- VIII. Publicaciones, métodos y aplicaciones de la investigación de operaciones (1964-1978)
- IX. Métodos, aplicaciones y tecnología de la investigación de operaciones (1979-2004)
- X. Los primeros programas universitarios en investigación de operaciones.

## **I. Una perspectiva histórica de la evolución de la Investigación de Operaciones.**

El 17 de marzo de 2013 fallece Saúl I. Gass. Gass, pionero en el campo de la investigación de operaciones (IO), fue, junto a George B. Dantzing, impulsor de la investigación de operaciones a nivel internacional.

Gass realizó muchas aportaciones a la investigación de operaciones, incluyendo publicaciones de libros, enciclopedias y artículos relacionados en el campo.

Toma de decisiones, modelos y algoritmos, una guía ilustrada de la programación lineal, son, entre otras publicaciones, las realizadas a lo largo de su prolífica carrera académica.

Junto con Carl Harris publican en 1996 Enciclopedia of Operations Research and Management Science, editada por Kluwer Academic Publishers, Boston.

Gass, se mantuvo vigente en el estudio de la investigación de operaciones como profesor emérito en la Universidad de Maryland en la escuela de negocios Robert H. Smith como profesor y director del departamento de ciencias de la gestión y las estadísticas en 1975.

Después de la Segunda Guerra Mundial, se utiliza la metodología e ideas de la investigación de operaciones en el mundo civil.

Gass, considera que en esos tiempos se reconoció el nuevo campo llamado investigación de operaciones, y en donde había grupos del ámbito privado y público que pedían su aplicación fuera del campo de batalla en los campos más diversos de la empresa y la industria.

De acuerdo a Gass (2011):

*«[...] para mí, es bastante sorprendente que dentro de los primeros 20 años después de su nacimiento, se haya establecido internacionalmente como un importante campo científico, que se demostró en el nuevo frente de batalla formado por las necesidades de las empresas y la industria. ¿Qué sucedió y qué resultó en la práctica?»*

*«Soy consciente de que la actual visión de esta disciplina no se considera como una ciencia en la opinión de muchos académicos y profesionistas. A mi juicio, sin embargo, creo que la investigación de operaciones ha tenido una evolución, un crecimiento inicial y un desarrollo que se debe a la formación y conocimientos de los científicos durante la Segunda Guerra Mundial. La fuerza propulsora fue su clásica formación científica y su visión clarividente de cómo las nuevas ideas de la investigación de operaciones como una ciencia aplicada que podría hacer una diferencia en el mundo real de la toma de decisiones humanas»*

Se considera a Patrick Blackett, como el padre de la investigación de operaciones, quien fue el responsable de desarrollar nuevas tácticas para el uso de armas antiaéreas y tratar de destruir los submarinos alemanes.

Blackett en el año de 1950, analizó si era o no la investigación de operaciones una ciencia y señaló que estaba implícita, obteniéndose por primera vez la definición de esta disciplina. (Assad y Gass, 2011)

En el año de 1947 es cuando se define a la IO durante la II Guerra Mundial por parte de Goodeve en el año de 1948, modificada posteriormente por Kirby (2003), definiéndose:

«La Investigación de Operaciones es un método científico que proporciona al ejecutivo una base cuantitativa para las decisiones con respeto a las operaciones bajo su control»

Existe una característica distintiva en esta materia, que ha sido oficialmente llamada Investigación de Operaciones (IO): su base científica y tecnológica para resolver problemas en donde el factor humano es importante.

Hay muchas definiciones de investigación de operaciones: la ciencia de la toma de decisiones, investigación operativa, administración científica, o ciencia de la elección.

¿La investigación de operaciones comenzó con Adán y Eva? Pero, ¿qué acontecimientos se han combinado para formar lo que hoy llamamos la investigación de operaciones, o la ciencia que ayuda en la resolución de problemas mediante la toma de decisiones humanas? (Gass, 2011).

Como cualquier campo científico, la investigación de operaciones tiene su propia pre-historia e historia, compuesta de una serie de hechos, personas, ideas y métodos que han contribuido al estudio de la toma de decisiones, incluso antes del nacimiento oficial de esta rama de la ciencia.



## **II. Los precursores de la Investigación de Operaciones (1564-1873)**

De acuerdo a Gass y Assad (2005)

### **1564 El Libro de Juegos de Azar (Girolamo Cardano)**

Médico milanés, matemático y jugador, se cita a menudo como el primer matemático para estudiar el juego. Su libro, El Libro de Juegos de Azar, está dedicado a los aspectos prácticos y teóricos de los juegos de azar.

### **1654 Valor Esperado (Blaise Pascal)**

Describe cómo calcular el valor esperado de una apuesta. En su carta del 29 de julio de 1654 a Pierre de Fermat, Pascal utilizó la idea clave de la igualdad del valor del juego a su esperanza matemática, calculada como la probabilidad de una victoria multiplicada por la ganancia de la apuesta.

### **1662 Probabilidades empíricas de las estadísticas vitales (John Graunt)**

Él utilizó los datos de las facturas de mortalidad para calcular las probabilidades empíricas para eventos tales como la peste, la muerte y las tasas de mortalidad por enfermedades diferentes.

### **1665 Sir Isaac Newton**

Al igual que con la mayoría de los campos de la ciencia, muchas ciencias han sido influenciadas por la obra de Sir Isaac Newton. En particular, dos de los descubrimientos matemáticos de Newton se destacan: la búsqueda de las raíces de una ecuación y las condiciones de primer orden.

### **1713 La ley de los grandes números (Jakob Bernoulli I)**

Jakob Bernoulli I demostró lo que ahora se conoce como la ley de Bernoulli de los grandes números. Mostró cómo medir la proximidad, en términos de una declaración de probabilidad, entre la media de una muestra aleatoria y la media verdadera desconocida de la población a medida que aumenta el tamaño de muestra.

### **1713 La paradoja de San Petesburgo (Nicolaus Bernoulli II)**

Bernoulli II plantea cinco problemas de probabilidad para el matemático francés Pierre Rémond de Montmort.

### **1715 Series de Taylor**

A principios del siglo XVIII, los matemáticos se dieron cuenta de que las expansiones de diversas funciones trascendentes elementales son casos especiales de la serie general que hoy se conoce como Serie de Taylor.

### **1718 The Doctrine of Chances (Abraham de Moivre)**

Las tres ediciones de este libro clásico de Abraham de Moivre muestran el curso de la teoría de la probabilidad desde 1718 hasta 1756. El libro consta de una introducción con los teoremas elementales de la probabilidad, seguido de una colección de problemas.

### **1733 Primera aparición de la distribución normal (Abraham de Moivre)**

Se define el teorema del límite central al introducir la aproximación normal a la distribución binomial.

### **1733 Inicios de la probabilidad geométrica (George-Louis Leclerc)**

Conde de Buffon, tenía amplios intereses en la historia natural, las matemáticas y la estadística.

### **1736 Problema del puente de Königsberg (Leonard Euler)**

Matemático suizo se le atribuye la creación de la teoría de grafos

### **1755 Desviación absoluta mínima en regresión lineal simple (Rogerius Josefo Boscovich)**

Profesor de matemáticas en el Collegium Romanum en Roma, desarrolló el primer procedimiento objetivo para ajustar un conjunto de observaciones a una relación lineal

### **1763 Regla de Bayes (Thomas Bayes)**

El reverendo propuso una regla (fórmula) para estimar una probabilidad  $p$  mediante la combinación de un conocimiento a priori de  $p$  con la información contenida en un número finito de  $n$  ensayos independientes.

### **1788 Multiplicadores de Lagrange (Joseph-Louis de Lagrange)**

El célebre libro: Mecánica Analítica, incluye un poderoso método para la búsqueda de valores extremos en funciones sujetas a restricciones de igualdad.

### **1789 Principio de utilidad (Jeremy Bentham)**

Jurista y filósofo inglés, publicó: Introducción a los principios de la moral y la legislación en la que proclama que la humanidad se rige por el dolor y el placer. Propuso un principio de utilidad.

### **1795 Método de los Mínimos Cuadrados (Carl Friedrich Gauss y Adrien Marie Legendre)**

Al matemático alemán y al matemático francés, respectivamente se les acredita al mismo tiempo el descubrimiento, pero por separado y de forma independiente del método de los mínimos cuadrados. El trabajo de Gauss data de 1795 y el de Legendre que publica sus resultados en el año de 1805.

### **1810 El Teorema General del Límite Central (Pierre-Simón Laplace)**

Deriva el teorema general del límite central: La suma de un número suficientemente grande de variables aleatorias independientes sigue una distribución aproximadamente normal. Su trabajo dio un impulso sin precedentes con nuevas técnicas analíticas para influir en la teoría de probabilidades.

### **1811 Kriegsspiel (juegos de guerra)**

Basado en reglas (rígidas), es un proceso basado en operaciones militares reales que utiliza un mapa, piezas movibles que representan tropas, dos jugadores y un árbitro. Fue inventado por el Consejero prusiano von Reisswitz y su hijo, un teniente de la armada de Prusia.

### **1826 Solución de desigualdades (Jean-Baptiste-Joseph Fourier)**

Matemático francés a quien se le atribuye ser el primero en declarar formalmente un problema que puede ser interpretado como un problema de programación lineal.

### **1826 Solución de ecuaciones lineales (Carl Friedrich Gauss)**

Usa operaciones elementales de fila (eliminación) para transformar una matriz cuadrada de  $(n \times n)$ , asociada con un conjunto de ecuaciones lineales, en una matriz triangular superior  $U$ .

### **1833 Máquina Analítica (Charles Babbage)**

Matemático e inventor inglés, se le atribuye ser el primero en concebir un ordenador de propósito general (máquina analítica). Aunque nunca se construyó en su totalidad, su diseño empleaba tarjetas perforadas para los datos y para la definición de un conjunto de instrucciones (programa).

### **1837 La aproximación de Poisson (Siméon Denis Poisson)**

El matemático francés era conocido por su «Ley de los grandes números» que contaba la proporción de éxitos en dichas secuencias, cuando la probabilidad  $p$  puede variar de un ensayo a otro. Hoy en día, el nombre de Poisson es más fácilmente asociados con la aproximación a la distribución binomial que cuenta el número de éxitos en  $n$  ensayos independientes de Bernoulli con la misma probabilidad  $p$ .

### **1839 Fundación de The American Statistical Society (ASA)**

ASA, fue fundada en Boston en 1839, convirtiéndose en la segunda más antigua de la sociedad profesional en los Estados Unidos. La misión de ASA era promover la práctica estadística, las aplicaciones y la investigación; publicar revistas sobre estadísticas, mejorar la enseñanza de la estadística, y avanzar en la profesión estadística. Su primer presidente fue Richard Fletcher.

### **1845 Ecuaciones de flujo en red (Gustav Kirchhoff R.)**

El físico alemán, descubre dos famosas leyes que describen el flujo de la electricidad a través de una red de cables. Las Leyes de Kirchhoff, la conservación de flujo en un nodo (en un circuito eléctrico, las corrientes que entran en una unión deben ser iguales a las corrientes que salen de la unión), y la ley de voltajes (alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito eléctrico la suma algebraica de las diferencias de voltaje es igual a cero), tienen una aplicación directa a las gráficas y redes modernas.

### **1846 Prueba sobre la distribución de las poblaciones sociales (Adolphe Quetelet)**

En su libro, *Sur l'homme et le développement de ses facultés* (1835), el belga estadístico Adolphe Quetelet presentó sus ideas sobre la aplicación de la teoría de la probabilidad para el estudio de las poblaciones humanas y su concepto de hombre promedio.

### **1856 Ciclos Hamiltoniano**

Dado un grafo de aristas y vértices, una trayectoria cerrada que recorre todos los vértices de un grafo exactamente una vez, se llama un ciclo Hamiltoniano. ¿Cómo encontrar ese ciclo es un importante problema en el análisis de redes?

### **1873 Solución de ecuaciones con no negatividad de las variables**

La importancia de las soluciones no negativas en los conjuntos de desigualdades y ecuaciones no fue evidente hasta el desarrollo de la programación lineal. Un trabajo anterior, que viene bajo el título de los teoremas de transposición, es ilustrado por el matemático alemán como el teorema P. Gordan's.

### **1873 Galton quincunx (caja de Galton)**

El inglés estadístico Francis Galton diseñó el quincunx para ilustrar cómo la distribución normal podría surgir debido a sucesos aleatorios. El nombre se deriva de una disposición de cinco objetos, uno en cada esquina de un rectángulo o cuadrado y uno en el centro.

### III. Los precursores de la Investigación de Operaciones (1881-1935)

De acuerdo a Gass y Assad (2005)

#### **1881 Scientific Management / Estudio de tiempos (Frederick W. Taylor)**

Frederick W. Taylor, ingeniero estadounidense y consultor de gestión, es llamado «el padre de la administración científica». Taylor presentó su método de estudio de tiempos en 1881, mientras trabajaba como capataz general de la planta para la Midvale Steel Company.

#### **1885 Scientific Management / Estudio de Movimientos (Frank B. Gilbreth)**

Más o menos coincidente con los estudios de tiempo Frederick W. Taylor fue el desarrollo de estudio de movimientos de Frank B. Gilbreth.

#### **1896 La Geometría de números (Hermann Minkowski)**

El matemático ruso, alemán es considerado el padre del análisis convexo. En su tratado innovador sobre la geometría de números, Minkowski usó las herramientas de la convexidad para acercarse a la teoría de los números desde un punto de vista geométrico.

#### **1896 La Representación de poliedros convexos**

El Teorema de representación declara que cualquier punto de  $P$  puede ser representado como una combinación convexa de sus puntos extremos más una combinación no negativa de sus direcciones extremas. Este resultado es central en la programación lineal y en los aspectos computacionales del método simplex.

#### **1900 Gráficas de Gantt (Henry L. Gantt)**

Henry L. Gantt, un asociado de Frederick Taylor, ideó un método de planificación de proyectos por el cual los administradores podrían representar, mediante una secuencia de barras en un gráfico, las actividades interrelacionadas de un proyecto, el programa de relaciones de precedencia entre las actividades, indicar los horarios de finalización, y el desempeño real del proyecto. Todavía es una herramienta de gestión actual, especialmente en la industria de la construcción.

#### **1900 Movimiento Browniano aplicado al mercado de valores (Louis Bachelier)**

Un estudiante de Henri Poincaré, Louis Bachelier, en su tesis doctoral, *Théorie de la speculation*, propuso la aplicación de «el cálculo de probabilidades a las operaciones

del mercado de valores». Este trabajo contiene el primer tratamiento del movimiento Browniano a los mercados de valores, ofreciendo tres diferentes caracterizaciones.

### **1901 Solución de sistemas de desigualdades**

El teorema de la dualidad de la programación lineal que relaciona la solución de los problemas primal y dual fue probado por primera vez por David Gale, Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker en 1951, utilizando el teorema de 1902 del matemático húngaro Julius (Gyula) Farkas.

### **1906 Solución óptima de Pareto (Vilfredo Pareto)**

El economista italiano Vilfredo Pareto propone que en situaciones competitivas una solución no es óptima (eficiente) si no se puede mejorar la satisfacción de otros actores sin bajar (degradar) el nivel de satisfacción de por lo menos el de otros. Es decir, no se puede robar a Pedro para pagarle a Pablo. En situaciones de objetivos múltiples, un grado óptimo de Pareto es una solución factible para la cual un aumento del valor de un objetivo puede ser alcanzado sólo mediante una disminución en el valor de al menos un otro objetivo.

### **1907 Cadenas y procesos de Markov (Andrei Andreevich Markov)**

El matemático ruso Andrei Andreevich Markov desarrolló el concepto de proceso de Markov a partir de sus estudios sobre secuencias de experimentos.

### **1908 Distribución t Student's (William Sealy Gosset)**

Mejor conocido por su *nom de plume* «Student,» descubrió la distribución t y su uso.

### **1909 Erlang y el tráfico telefónico (Agner Krarup Erlang)**

A principios del decenio de 1900, A. K. Erlang, un ingeniero de telefonía danés inicio un estudio de las aglomeraciones y de los tiempos de espera que ocurrían en la obtención de llamadas telefónicas. Desde entonces, la teoría de las colas se ha vuelto mucho más elaborada y se le ha aplicado a una amplia gama de situaciones que implican líneas de espera. Anderson, Sweeney y Williams (2011).

### **1909 Localizar un servicio (Pierre de Fermat)**

El matemático francés del siglo, Pierre de Fermat, en su tratado sobre máximos y mínimos, propuso en 1643 un problema que puede ser interpretado como un problema de localización de servicios: «*El que no esté de acuerdo con mi método*

*intente la solución del siguiente problema - dados tres puntos en un plano, encontrar un cuarto punto tal que la suma de sus distancias a los tres puntos dados sea un mínimo»*

### **1910 Teorema del punto fijo de Brouwer (Luistzen E. J. Brouwer)**

El Teorema de Brouwer establece que, para ciertas condiciones sobre el dominio, una función continua de un conjunto en sí mismo tiene al menos un punto fijo, es decir, tiene al menos una solución a la ecuación  $f(x) = x$ .

Podemos hacer la siguiente analogía del teorema con el mundo real. Tome una taza de agua y revuelva el contenido con una cuchara, muy suavemente. Entonces deje reposar el agua hasta que se detenga completamente. El movimiento suave de la cuchara simula la acción de una función continua, mientras que el agua definitivamente va de la taza en la taza. No importa cuánto se revuelva el agua, el Teorema de Brouwer nos asegura que de entre todas las partículas de agua en la taza, al menos una de ellas volverá a su posición original cuando termine el proceso. (Pérez, 2008).

### **1912 Juegos con información perfecta (Ernst Zermelo)**

Un juego con información perfecta se caracteriza de la siguiente manera: los jugadores conocen de todas las reglas, las opciones posibles y un historial pasado del juego por parte de los jugadores. Ajedrez, backgammon, tic tac toe son ejemplos de este tipo de juegos. El alemán, Ernst Zermelo, demostró lógicamente en su artículo, que tenía el primer Teorema general de la de la teoría de juegos. Que los juegos con información perfecta están estrictamente determinados, es decir, existe una solución en la que ambos jugadores tienen solo estrategias óptimas.

### **1913 Modelo de cantidad económica del pedido (EOQ) (F. W. Harris)**

F. W. Harris determinó la fórmula matemática para la cantidad óptima del pedido. Fue la primera aplicación de métodos cuantitativos en el área de manejo de inventarios. La fórmula EOQ determina la cantidad de pedido óptima, balanceando el costo de retención anual y el costo anual de ordenar. (Anderson, Sweeney y Williams, 2011)

### **1914 Ecuaciones de Lanchester's (Frederick W. Lanchester)**

El ingeniero aeronáutico británico, Frederick W. Lanchester, quien, entre otras cosas, construyó el primer automóvil en el Reino Unido, se trasladó al estudio de las operaciones militares mediante el análisis matemático. Lanchester formula un conjunto de ecuaciones diferenciales que se ocupan de la relación entre la concentración de fuerzas y la fuerza efectiva de las fuerzas de oposición, cuya solución determina los resultados esperados en un combate. Su análisis produjo  $N^2$  leyes.



### **1915 Solución positiva de las ecuaciones lineales (E. Stiemke)**

Las condiciones para la existencia de una solución positiva de un conjunto de ecuaciones lineales fueron investigadas por el matemático alemán E. Stiemke.

### **1920 Método de máxima verosimilitud**

La noción de la estimación de un parámetro mediante la maximización de una función apropiada construido a partir de las observaciones se remonta a Daniel Bernoulli, Euler Leonhard, Johann Heinrich Lambert y Joseph-Louis de Lagrange. Sin embargo, fue el estadista Inglés Ronald Aylmer Fisher, que en uno de sus trabajos más influyentes (1922), estableció un eje fundamental de razonamiento estadístico, proponiendo el método de máxima verosimilitud como un procedimiento general para la estimación de momentos.

### **1921 Estrategias minimax para dos personas, juegos simétricos (Émili Borel)**

Para dos personas, juego simétrico, de suma cero, Émile Borel definió el marco de la teoría de juegos y el concepto de un "método de juego" (estrategia) como un código que determina "para todas las circunstancias posibles... lo que la persona debe hacer."

Luego siguió una estrategia óptima y derivó las soluciones minimax para juegos con tres o cinco estrategias posibles.

### **1922 Condición suficiente para el Teorema del Límite Central**

Si bien la declaración del Teorema del Límite Central (CLT) se remonta a Pierre-Simon Laplace en 1810, la primera prueba rigurosa que se le dio fue en 1901 por el matemático Ruso Alexander M. Liapanov, un estudiante de Pafnuty L. Chebyshev.

### **1925 Generación de dígitos aleatorios**

Dígitos aleatorios fueron generados de forma sistemática por vez primera por Leonard H.C Tippett para confirmar los resultados de su artículo publicado en 1925. Tippett muestreo al azar 5,000 observaciones extraídas con reemplazo de una bolsa que contenía 1,000 tarjetas. Los números de las tarjetas seguían una distribución normal. También utilizó 40,000 datos registradas en los censos británicos y los combinó para obtener 10,000 números del 0000 a 9,999 de forma aleatoria.

**1925 Métodos estadísticos para investigadores, Ronald A. Fisher, Oliver y Boyd, Londres.**

Este libro del célebre estadista inglés y genetista Ronald Aylmer Fisher cubre sus actividades estadísticas en la Estación Experimental de Rothamsted para la investigación agrícola.

**1926 Probabilidad subjetiva**

Los grados o noción de creencia, que está vinculada con el tema que ahora se llama probabilidad subjetiva, se remonta a las primeras investigaciones de Jakob Bernoulli I (*Ars Conjectandi*, 1713), y fue proseguido por Émile Borel, John Venn, y John Maynard Keynes, entre otros. Frank P. Ramsey cree que la única manera de medir los grados de creencia es observar la conducta manifiesta que se manifiesta en la elección. De este modo se ligan la probabilidad subjetiva con el concepto de utilidad y elección explícita.

**1927 Aplicaciones de la teoría de la probabilidad a la ingeniería telefónica**

Edward C. Molina, investigador autodidacta, hizo contribuciones fundamentales a la teoría del tráfico telefónico. La primera central telefónica automática se había instalado en La Porte, Indiana en 1892 y dio lugar al problema de la expansión de las centrales telefónicas. Son los primeros intentos de utilizar la teoría de probabilidades para el análisis de centrales telefónicas.

**1927 El análisis estadístico de las series de tiempo**

El estudio de las series de tiempo fue propuesto por el estadístico Británico George Udny Yule y el economista y estadístico Ruso Eugene Slutsky. Se observa que, a partir de una serie de números aleatorios, se pueden tomar sumas o diferencias de tales números para producir nueva serie que presentan las propiedades cíclicas que aparecen con frecuencia en la serie de tiempo.

**1928 Prueba de la existencia de una estrategia de equilibrio para dos personas en una matriz de juegos.**

Dos publicaciones de John von Neumann aparecieron en 1928 con la prueba minimax para la matriz de dos personas con juego de suma cero. La primera fue una comunicación a É. Borel, en la que von Neumann anunció que había resuelto el problema de encontrar una estrategia óptima para dos personas en el juego de suma cero.

## **1929 procedimiento de muestreo secuencial**

Para una gran cantidad de unidades, (por ejemplo, las piezas fabricadas), el muestreo implica la extracción de una muestra aleatoria y se acepta el lote si la muestra contiene menos de un número determinado de unidades defectuosas. El muestreo puede ser exhaustivo, por lo que todos los artículos son examinados, pero esto suele ser muy costoso y consume mucho tiempo.

## **1929 Caracterización de los grafos planares**

El matemático Polaco Kazimierz Kuratowski mostró que si un grafo es no plano debe contener el gráfico completo en 5 nodos ( $K_5$ ) o en el grafo bipartito 6 nodos ( $K_{3,3}$ ) como subgrafos.

## **1930 Límites de confianza**

El uso implícito de los límites de confianza para proporcionar un rango de valores posibles de los parámetros estimados se remonta a Laplace y Gauss, pero, dado que los límites derivados eran aproximaciones, la lógica subyacente del procedimiento permaneció en la oscuridad.

## **1930 Fundación de The Econometric Society**

The Econometric Society, es una sociedad internacional para el avance de la teoría económica y su relación con las estadísticas y las matemáticas, fue fundada en 1930. Muchos de sus miembros han hecho contribuciones fundamentales a la investigación de operaciones, y algunos documentos importantes teóricos y aplicados de IO han aparecido en su principal revista *Econometrica*. Su primer presidente fue Irving Fisher.

## **1930 Formula de Pollaczek para el modelo de colas $M / G / 1$**

Félix Pollaczek fue un pionero en el estudio de sistemas de colas. Desarrolló la fórmula para el tiempo promedio de espera de un cliente en un sistema de colas  $M/G/1$ . (Llegadas mediante una distribución de probabilidad Poisson, Distribución de probabilidad general para el tiempo de servicio, un servidor).

## **1931 Gráficos de control de calidad**

Walter A. Shewhart se unió a Western Electric Company en 1918 y fue transferido a los Laboratorios Bell Telephone en 1925. Allí permaneció hasta su jubilación en 1956. En la década de 1920, trabajó en las gráficas de control iniciadas en la Western

Electric como parte de una visión de toda la empresa para el aseguramiento de la calidad basada en principios científicos.

### **1931 Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov**

Antes de 1930, los procesos aleatorios estudiados en la teoría de probabilidades utilizaban generalmente parámetros de tiempo discreto. Esto cambió con la publicación de un artículo titulado: «Métodos Analíticos» de Andrei N. Kolmogorov (1931) sobre los procesos de tiempo aleatorio continuos. En resumen, sus resultados sentaron las bases sobre los procesos de Markov.

### **1932 Prueba de hipótesis**

Durante el período de 1926-1933, Jerzy Neyman y Egon S. Pearson desarrollaron la teoría de la prueba de hipótesis en respuesta al enfoque ad hoc de Ronald A. Fisher. Su teoría permitió identificar mediante ensayos óptimos la especificación de la hipótesis alterna y el reconocimiento de los dos tipos básicos de error.

### **1933 Nacimiento de la estadística matemática**

Stephen M. Stigler, un historiador de las estadísticas, selecciona al año de 1933 como el nacimiento de la estadística matemática. Se aclara que esta fecha no se refiere al nacimiento de los diferentes conceptos que integran el tema (muchas de ellas se remontan a los primeros siglos), sino al "nacimiento de la estadística matemática como disciplina." Institucionalmente, Stigler observa que Harry C. Carver funda la revista *Annals of Mathematical Statistics* en 1930, "en términos generales, bajo los auspicios de the American Statistical Association (ASA).

### **1933 Análisis de Componentes Principales**

Aunque el método de componentes principales se remonta a Karl Pearson (1901), el procedimiento general es debido al trabajo pionero de Harold Hotelling O. (1933), profesor de economía en Columbia University. Los componentes principales son una secuencia no correlacionadas de combinaciones lineales de las mediciones originales, cada uno con una varianza menor que la anterior, que colectivamente preserva la variación total de las mediciones originales. Hotelling demostró cómo estos componentes se pueden encontrar a partir de los vectores propios de la matriz de covarianza de la población.

### **1933 Fundamentos de la Teoría de la Probabilidad**

En este libro el célebre, Andrei Kolmogorov desarrolla de forma axiomática la teoría de la probabilidad en términos de la teoría de la medida. Este libro se convirtió en el

símbolo de la moderna teoría de la probabilidad, que sustituye a todos los enfoques anteriores. Una novedad importante ha sido el tratamiento de los procesos estocásticos.

### **1935 Martingalas**

Las investigaciones de Paul Lévy's sobre los conceptos abstractos unificadores de la teoría de probabilidades le llevó a una sucesión de variables aleatorias, donde la esperanza de la siguiente variable en la secuencia es siempre igual al valor de la última. Lévy utiliza el término martingala para tal secuencia.

### **1935 Matroides**

En un artículo clásico, el matemático Hassler Whitney presenta los axiomas de una estructura algebraica que llamó matroides. Un matroide  $M$  es un conjunto finito  $S$  y una colección  $F$  de subconjuntos de  $S$ , llamados conjuntos independientes, que desempeñan un rol análogo a las bases de un espacio vectorial.

### **1935 El Diseño de Experimentos**

Durante 1924 - 1926, Fisher desarrolló estos principios básicos del diseño experimental como diseños factoriales, cuadrados latinos, técnicas de confusión y el análisis de la covarianza. Fisher es considerado como el padre de la estadística moderna.

#### **IV. Una línea del tiempo de la investigación de operaciones (1936-1946)**

De acuerdo a Gass y Assad (2005)

##### **1936 Tiempo cero: Aplicaciones de la investigación de operaciones. Ejército británico**

La mayoría de la bibliografía coincide en que el inicio de esta rama de la ciencia surge a finales de los años 30's (1936), continuando durante el periodo de la Segunda Guerra Mundial, extendiéndose posteriormente a los Estados Unidos de América tras el ataque a Pearl Harbor.

El nombre de Investigación de Operaciones se inicia con los militares británicos, ayudados por científicos civiles, sobre la investigación de cómo debería ser desplegado el nuevo invento del radar y operado para la defensa de la patria.

Tales estudios, se amplían a la guerra antisubmarina, utilizando un convoy como protección, así como la utilización de tácticas de bombardeo con aviones con gran éxito. (Gass, 2011)

##### **1936 Solución de desigualdades lineales (Theodore S. Motzkin)**

Antes de 1936, existían pocos trabajos que se ocupaban de la solución de sistemas de desigualdades lineales. La tesis doctoral de 1936 del matemático Alemán Theodore S. Motzkin fue citada en 42 artículos. El Teorema de trasposición de Motzkin para las desigualdades lineales es una forma más general que los teoremas de Gordan y de trasposición de Stiekme que se pueden derivar. También se puede utilizar para probar el teorema de dualidad de la programación lineal.

##### **1936 Economía interindustrial (Wassily W. Leontief)**

Wassily W. Leontief (en 1973 el Premio Nobel de Economía), economista ruso, y que se había incorporado recientemente a la facultad de la Universidad de Harvard, se crea el campo de la economía interindustrial. Para una economía, los coeficientes muestran la cantidad necesaria (entrada) que una industria necesita para producir una unidad (salida) de cada uno de los sectores de la economía. Aunque la matriz de Leontief asume linealidad (entrada y salida son proporcionales) y no dinámica, las aplicaciones de interindustrial (input-output) en la economía para analizar el impacto de la política económica de un gobierno y los cambios en la actividad de los consumidores han demostrado ser de gran valor. Los coeficientes insumo producto han sido utilizados por los Estados Unidos, por el Departamento de Estadísticas del Trabajo, por el Banco Mundial y por las Naciones Unidas.

### **1936 Máquinas de Turing (Alan M. Turing)**

David Hilbert hizo la pregunta: ¿Existe un procedimiento fijo capaz de decidir si una afirmación matemática es verdadera para cada afirmación matemática que puede ser formalmente establecida? Esta cuestión, llamado el problema de decisión (Entscheidungs problem), atrajo la atención de Alan M. Turing en 1935, cuando era un estudiante en King's, College, Cambridge. En 1936, escribió el célebre documento que responde a la pregunta en sentido negativo. En este artículo, Turing formaliza la noción de computabilidad (acción de ser computable) e introduce la máquina de Turing como un modelo para una máquina de computación universal.

El concepto de una máquina de Turing es la base formal de trabajos posteriores en la teoría de la complejidad, incluida la definición de las clases P y NP.

### **1936 La teoría de grafos infinitos y finitos (Dénes König)**

Doscientos años después del trabajo pionero de Euler sobre el problema de los puentes de Königsberg, el trabajo de Dénes König desarrolla un estudio completo sobre la teoría de grafos estableciéndolo como subcampo de las matemáticas.

### **1937 El problema del agente viajero (Merrill M. Flood)**

Merrill M. Flood se acredita con la popularización de este famoso problema combinatorio: Un vendedor ambulante quiere visitar a cada una de las  $n$  ciudades exactamente una vez y luego regresar a su ciudad natal, y si la distancia (costo) de viajar de ciudad  $i$  la ciudad  $j$  es  $c_{ij}$  ¿qué recorrido (tour, circuito) deberá tomar el vendedor para minimizar la distancia total recorrida?

### **1939 Condiciones de optimalidad para programación no lineal (William Karush)**

Como parte de su tesis de maestría en el departamento de matemáticas de la Universidad de Chicago, William Karush determino las condiciones de optimalidad para programación no lineal, un resultado idéntico a la conocida pero posterior declaración de Kuhn Tucker (1951). El trabajo de Karush no fue publicado y permaneció desapercibido durante muchos años.

### **1939 Métodos Matemáticos de Organización y Planificación de la Producción (Leonid V. Kantorovich)**

El matemático ruso y economista, Leonid V. Kantorovich, dio una descripción matemática de un problema de asignación de la producción que puede ser interpretada como la primera declaración de estos problemas como un programa

lineal. También propuso un procedimiento de cálculo (resolución de multiplicadores) para resolverlo, y, además, señaló que estas estructuras matemáticas podrían ser utilizadas para analizar los problemas en las refinerías de petróleo, en la utilización de los tipos de combustible, en la distribución de la carga sobre una red, y en la distribución óptima de la tierra arable para cultivos agrícolas diferentes.

#### **1940 Blackett «Circus» (Patrick M.S. Blackett)**

Bajo la dirección del físico Patrick M.S. Blackett, un grupo multidisciplinario (tres psicólogos, un físico general, dos físicos matemáticos, dos matemáticos, un astrofísico, un oficial del ejército y un topógrafo) fue creado bajo el título formal de *The Anti-Aircraft Command Research Group*, de la Royal Air Force, para estudiar el uso del radar en artillería antiaérea. Conocido como el Circo de Blackett, estableció el concepto de equipo multidisciplinario de investigación de operaciones, demostrando el valor y la eficacia de estos equipos cuando se aplica a complejos problemas del mundo real.

#### **1941 El Problema de Transporte (Frank L. Hitchcock)**

El primer desarrollo del clásico problema de transporte (el envío de mercancías desde un origen  $i$  a un destino  $j$  a un costo mínimo) se debe a Frank L. Hitchcock publicado en un artículo de 1941 en la que esboza un procedimiento de solución. Durante la Segunda Guerra Mundial, el economista Tjalling C. Koopmans, mientras trabajaba para el Consejo de la *British American Combined*, de forma independiente investigaba y resolvía el mismo problema, por lo que el problema se le conoce como el problema de transporte Hitchcock- Koopmans.

#### **1942 U.K. naval operational research (Patrick M.S. Blackett)**

En diciembre de 1941, cuando Patrick M.S. Blackett fue consultado acerca de la formación de una sección de Investigación de Operaciones por parte del Ministerio de Marina del Reino Unido, escribió un memorando titulado «Los científicos en el nivel operacional», que resultó ser muy influyente en ambos lados del Atlántico, y que proporcionó un impulso para la formación de un Grupo de Investigación de Operaciones en la Marina de los Estados Unidos para la Guerra Antisubmarina (ASWORG).

#### **1942 U.S. Navy Antisubmarine Warfare Operations Research (ASWORG)**

ASWORG fue la primera organización civil con personal comprometido en operaciones militares en los Estados Unidos. Fue organizada por la Marina y por el físico Philip M. Morse a principios de la Segunda Guerra Mundial. Comenzó con 15 científicos civiles asignados a la Oficina del Jefe de Operaciones Navales, el almirante Ernest J. King. Al finalizar la guerra, había casi 100 analistas empleados para la



solución de problemas general de la Investigación de Operaciones (ORG), con ASWORG como uno de sus subgrupos.

### **1942 U.S. Air Force operations research**

En octubre de 1942, en el apogeo de la Segunda Guerra Mundial, el primer contingente de analistas de Investigación de Operaciones de los Estados Unidos llegó a Inglaterra para trabajar con Air Force's Eighth Bomber Command (más tarde designado la Octava Fuerza Aérea). Ellos fueron: James Alexander, el matemático del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Leslie H. Arps y John M. Harlan, los abogados de la firma de abogados de Nueva York de la matriz, Ballantine, Harlan, Bushby y Palmer; H.P. Robertson, un físico de Princeton University; W. Norris Tuttle, director de investigación de General Radio Company, William J. Youden, bioquímico y estadístico, y Boyce Thompson, del Plant Research Institute. Harlan fue jefe de Staff de la recién formada Sección de Investigación de Operaciones.

### **1942 Teoría de búsqueda (Bernard O. Koopman)**

«Search and Screening» por Bernard O. Koopman, fue la primera publicación para describir un enfoque probabilístico basado en la asignación óptima para los esfuerzos de búsqueda.

### **1943 Las Redes Neuronales (Warren S. McCulloch y Walter H. Pitts)**

Warren S. McCulloch y Walter H. Pitts, introdujeron la noción de una red neuronal como una abstracción de las propiedades fisiológicas del sistema nervioso. Su artículo principal sobre el tema inicia con la siguiente afirmación: "Debido al carácter de todo o nada de la actividad nerviosa, los eventos neurales y las relaciones entre ellos pueden ser tratados por la lógica proposicional."

### **1944 Suavización exponencial (Robert G. Brown)**

Tal como fue concebido por Robert G. Brown, el suavizamiento exponencial utiliza un promedio ponderado de valores de series de tiempo pasadas como pronóstico. La suavización exponencial es simple y tiene pocos requisitos. Por tanto, es un enfoque económico y útil para empresas que hacen muchos pronósticos en cada periodo. (Anderson, Sweeney y Williams, 2011).

### **1944 Teoría moderna de la utilidad**

La Teoría de la utilidad es el estudio sistemático y la representación cuantitativa de las estructuras sobre preferencias. La idea de la utilidad se remonta a Daniel Bernoulli

(1738), con el término popularizado por Jeremy Bentham en 1789. La evolución del concepto se puede encontrar también en Savage en 1954 y en las lecturas recogidas por Page en 1968. John von Neumann y Oskar Morgenstern proporcionan el primer tratamiento axiomático de la utilidad en la segunda edición de su obra clásica *Theory of Games and Economic Behavior*.

#### **1944 Teoría de Juegos y Comportamiento Económico (John von Neumann, Oskar Morgenstern)**

En el libro *Theory of Games and Economic Behavior* se establecen los conceptos básicos de las estrategias del juego y su aplicación a la teoría económica y social. La edición revisada de 1947 es considerada como modelo de referencia que incluye, como apéndice, los primeros axiomas de la teoría de la utilidad numérica.

#### **1945 Proyecto RAND**

Al término de la Segunda Guerra Mundial, era necesario contar con los servicios de los científicos que podrían trabajar en la planificación militar y en los problemas relacionados con el gobierno de los Estados Unidos. Con este fin, el gobierno estableció el Proyecto RAND (Research and Development) en diciembre de 1945 debido a un contrato con la Douglas Aircraft Company.

#### **1945 U.S Navy Operations Evaluation Group (OEG)**

Debido a la menor actividad submarina por parte del enemigo y a la necesidad de aplicar aún más la Investigación de Operaciones a los problemas de la marina de guerra, el equipo que conformaba el (ASWORG), fue rebautizado como Operations Evaluation Group (OEG) y asignado a la Sede de la Flota del Atlántico

#### **1945 El problema de la dieta (George Stigler)**

El economista George Stigler, plantea y analiza el problema siguiente: Para un hombre moderadamente activo (un economista) que pesa 154 libras, ¿qué cantidad de cada uno de los 77 alimentos debe consumir este hombre a diario para que absorba los nueve nutrientes (incluyendo calorías) que sea por lo menos igual a la cantidad diaria recomendada por *the National Reseach Council* en 1943 para que el costo de la dieta sea mínimo? Stigler elaboró este problema de optimización en términos de un conjunto de  $(9 \times 77)$  desigualdades lineales simultáneas. Como esto era antes de la formalización de la programación lineal de George B. Dantzig, Stigler no contaba con procedimiento exacto para encontrar la solución de costo mínimo. Él, astutamente se las arregló para encontrar una solución que no era la óptima de \$ 39.93. En 1947 Dantzig formula el problema de Stigler como uno de programación lineal y lo utiliza para probar el método simplex que funcionará bien para un problema «a gran escala».

Una solución, usando una calculadora de bolsillo requirió 120 días-persona de esfuerzo, y se encontró con el costo óptimo de \$ 39,69 dólares. Stigler en 1982 recibió el premio Noble de Economía por sus estudios de las estructuras industriales, el funcionamiento de los mercados y las causas y efectos de la regulación pública.

### **1946 La computadora digital**

El año 1946 vio la inauguración de lo que se considera la primera computadora digital moderna de propósito general, el ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer). El campo de la investigación de operaciones no se habría expandido como lo hizo en la década de 1940 y 1950 sin la influencia sinérgica de la computadora, por ejemplo, el desarrollo y la utilización de Monte Carlo y la simulación discreta, y la solución de problemas de programación lineal en el gobierno y la industria mediante el método simplex.

### **1946 Simulación de Monte Carlo (Stanislaw Ulam)**

El método de Monte Carlo fue idea del matemático y físico teórico Stanislaw Ulam, que reflexionaba y meditaba en él mientras jugaba solitario durante una enfermedad en 1946.

### **1946 Métodos Matemáticos de Estadística (Harald Cramér)**

El propósito de este libro fue para unir la moderna teoría matemática de la probabilidad con la ciencia estadística, desarrollada por Ronald A. Fisher y sus contemporáneos británicos y americanos. Harald Cramér fue conocido por la brillantez de sus conferencias y escritos. Las raíces de este libro se remontan a sus clases en el aula en la década de 1930, pero el texto fue escrito principalmente durante 1942-1944. Las dos primeras partes del libro desarrollan las bases, mientras que la tercera parte, que comprende más del 40% del contenido, se dedica a la inferencia estadística.

### **1946 Métodos de Investigación de Operaciones (Philip M. Morse, George E. Kimball)**

La versión no clasificada introdujo los conceptos básicos de la investigación de operaciones en la industria, empresa, ejecutivos del gobierno no militares de los Estados Unidos, así como para la comunidad académica. Se cita y populariza una definición temprana de la investigación de operaciones: La "Investigación de Operaciones es un método científico para poner al alcance de los departamentos ejecutivos una base cuantitativa para las decisiones relativas a las operaciones bajo su control.

## V. Expansión de la investigación de operaciones (1947-1950)

De acuerdo a Gass y Assad (2005)

### **1947 Proyecto SCOP (U.S. Air Force Scientific Computation of Optimal Programs)**

Proyecto SCOP (Scientific Computation of Optimal Programs). Pentágono, Fuerza Aérea de los estados Unidos. Grupo de investigación formado en junio de 1947. Fue nombrado oficialmente proyecto SCOP en octubre de 1948 y disuelto en 1955. Encabezado por el economista Marshall K. Wood, con George B. Dantzig como matemático en jefe. El objetivo principal del proyecto SCOP era desarrollar respuestas más adecuadas al problema de las necesidades de programación de la Fuerza Aérea.

### **1947 El problema de programación lineal**

Los problemas de programación se refieren al uso eficiente o la asignación de los limitados recursos para alcanzar los objetivos deseados. Ejemplos típicos son las operaciones de las refinerías que transforman el petróleo crudo en los distintos combustibles, el transporte de materiales de muchas fuentes para muchos destinos y la producción de bienes para satisfacer la demanda.

El nombre de "programación lineal" fue sugerido a Dantzig por el economista Tjalling C. Koopmans.

Koopmans y Kantorovich fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía en 1975 por sus contribuciones a la teoría de la asignación óptima de los recursos.

### **1947 El Método Simplex**

El algoritmo simplex (primal) fue inventado por George B. Dantzig como un procedimiento de solución para resolver problemas de la programación lineal (PL).

Se ha utilizado para resolver una amplia gama de problemas de forma más eficaz en todo tipo de computadoras digitales.

El algoritmo comienza con una solución básica factible y luego busca en una secuencia finita otras soluciones básicas factibles hasta que encuentra una que satisfaga las condiciones de optimalidad. Desde entonces, otros métodos para la solución de problemas de PL se han desarrollado, en particular el método de puntos

interiores, pero el método simplex es el caballo de batalla de la PL. El método simplex fue elegido como uno de los diez algoritmos más importantes del siglo XX.

### **1947 Se funda The Association for Computing Machinery (ACM)**

The Association for Computing Machinery es una organización científica internacional y educativa dedicada a la promoción del arte, la ciencia, la ingeniería y la aplicación de tecnologías de la información. Su primer presidente fue John H. Curtis.

### **1947 La definición de la Investigación de Operaciones**

El trabajo de Charles Kittel (1947) es uno de los primeros documentos que trajeron las ideas de la IO a la comunidad científica de los Estados Unidos. Como Kittel expreso: «Se espera que la publicación de este documento sirva para estimular la creación de grupos de investigación de operaciones en los Estados Unidos para el avance de objetivos pacíficos». Esta nueva y poderosa herramienta debe encontrar un lugar en el gobierno y la industria.

### **1948 Investigación de Operaciones en el sector industrial: British Iron and Steel Industry Research Association**

The National Coal Board of Great Britain, creada en 1948, estableció un grupo de Investigación en el campo de la IO encabezado por Hugh Patrick Berwyn Rivett. Los principales estudios realizados por este grupo incluían organización de las minas de carbón, las comunicaciones y el transporte subterráneo, la distribución de carbón, y el análisis de la mano de obra. El año 1948 también marcó la formación del British Iron and Steel Industry Research Association (BISRA) con Sir Charles Goodeve como director. BISRA empleaba la IO para hacer frente a los problemas de toda la industria y también ayudó a las empresas más grandes de la industria para establecer su propio grupo de IO.

En particular, Stafford Beer encabezó más de 70 grupos de profesionales de IO para United Steel.

### **1948 The RAND Corporation**

En febrero de 1948, el Proyecto RAND se convirtió en una corporación independiente sin fines de lucro. A través de los años, los investigadores de RAND contribuyeron en gran medida en muchas áreas de la IO: la teoría de juegos, programación lineal, programación dinámica, análisis de sistemas, simulación, flujos en redes, y el método Delphi.

### **1948 Johns Hopkins U.S. Army Operations Research Office (ORO)**

Durante la Segunda Guerra Mundial, la investigación de operaciones militares en los Estados Unidos fue llevada a cabo principalmente por elementos de Army Air Corps and The Navy (Cuerpo Aéreo del Ejército y la Marina). Fue sólo después de la guerra que el Ejército de los Estados Unidos, estableció formalmente una actividad de la IO, la Oficina General de Investigación, bajo la dirección de los administradores de la Universidad Johns Hopkins, ubicada en el Fuerte McNair, Washington, DC. El nombre fue cambiado luego a Operations Research Office (Oficina de Investigación de Operaciones), y, en 1951, después de un tiempo ORO trasladó su sede a Chevy Chase, MD. El director y fundador único de ORO fue el geofísico Ellis A. Johnson. ORO fue disuelta en 1961.

### **1948 Club de Investigación Operaciones de Gran Bretaña**

El Club de IO fue inaugurado en abril de 1948 en Londres con Sir Charles Goodeve como su presidente. La génesis del Club fue la necesidad de formar un grupo de apoyo mutuo para la introducción de la IO en la industria.

### **1949 Conferencia de la Comisión Cowles**

Del 20 al 24 de junio, de 1949, en la Universidad de Chicago, la Comisión Cowles para la Investigación en Economía patrocinó una conferencia sobre "Análisis de la actividad de producción y distribución." Esta conferencia es notable, ya que fue aquí donde George B. Dantzig, Tjalling C. Koopmans, Harold W. Kuhn, Albert W. Tucker, y Marshall K. Wood, entre otros, presentaron los trabajos que ayudarían a establecer los aspectos teóricos y aplicados de la programación lineal y sus extensiones.

### **1949 Teorema de imposibilidad de (Kenneth Arrow)**

Cuando se tienen tres o más alternativas para que un cierto número de personas elijan entre ellas (o establezcan un orden de prioridad entre ellas), no es posible diseñar un sistema de elección que permita generalizar las preferencias de los individuos hacia una "preferencia social" de toda la comunidad.

Arrow fue galardonado con el premio Nobel en 1972, compartido con John R. Hicks, por sus contribuciones pioneras a la teoría general del equilibrio económico y la teoría del bienestar.

### **1949 Extrapolación, interpolación y suavizado de series de tiempo estacionarias (Norbert Wiener)**

Escrito con un enfoque en aplicaciones de ingeniería, este libro se convirtió en piedra angular del trabajo futuro en la predicción y el control óptimo. Su propósito era el de unir la teoría y la práctica de la ingeniería de comunicaciones y el análisis de las series de tiempo. La mayor parte del trabajo refleja aportaciones originales de Wiener.

### **1950 Estadística de la Teoría de las decisiones**

Este marco para la toma de decisiones se desarrolló en la década de 1950 y puede ser visto como un precursor del moderno análisis de decisión.

En el proceso de toma de decisiones individual bajo incertidumbre, una elección debe realizarse sobre un conjunto de acciones  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , y cada decisión depende del estado de la naturaleza  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . En el proceso de toma de decisiones se conoce el estado de la naturaleza y la recompensa o pago asociado a cada par  $(A_i, S_j)$ .

### **1950 Primera solución del problema de transporte en una computadora**

El algoritmo simplex, adaptado para la resolución de la estructura especial del problema de transporte de programación lineal, se codificó para el National Bureau of Standards SEAC digital computer, bajo los auspicios del proyecto US AF's SCOOP. Un código general con el algoritmo simplex fue desarrollado para el SEAC en 1950.

### **1950 Post Segunda Guerra Mundial: el control de calidad**

W. Edwards Deming fue un físico matemático en la Oficina de Química y Suelos, del Departamento de Agricultura de los Estados Unidos, donde jugó un rol decisivo en la introducción de las ideas modernas del conocimiento estadístico.

### **1950 El dilema del prisionero**

Una historia simple que habla de un juego de suma no cero no cooperativo. El juego ha generado numerosos libros, y artículos de investigación, y ha influido en el pensamiento científico social. La historia, contada por primera vez por Albert W. Tucker a un grupo de estudiantes de psicología en la Universidad de Stanford, se basa en un juego de estrategia desarrollado por Merrill Flood y Melvin Dresher de la RAND Corporation. Se trata de dos supuestos socios en un delito.

## **1950 La primera revista (Journal) sobre Investigación de Operaciones**

Bajo los auspicios de British OR Club, la primera revista académica de IO, *The Operational Research Quarterly*, se publicó en marzo de 1950. En 1978, su nombre fue cambiado a *Journal the Operational Research Society*.

## **1950 Equilibrio de Nash**

Todo juego finito (es decir, finitos jugadores y finitas estrategias de cada jugador) tiene al menos un equilibrio de Nash, aunque involucre ciertas probabilidades objetivas de juego de las estrategias por parte de los jugadores (Monsalve, 2003).

Nash, junto con John C. Harsanyi y Reinhard Selten, recibió en 1994 el Premio Nobel de Economía por sus análisis pioneros del equilibrio en la teoría de juegos no cooperativos (Gass 2005).

## **1950 Programación dinámica (Richard Bellman)**

La programación dinámica, desarrollada por Richard Bellman, es una técnica de optimización para problemas de decisión multietapa basada en el principio de optimalidad: para cualquier política óptima, sea cual sea la decisión del estado actual y vigente, las restantes decisiones deben constituir una política óptima para el estado que resulta de la decisión actual. Bellman acuñó dos nombres: programación dinámica y el principio de optimalidad

## **1950 La Investigación de Operaciones en la agricultura**

En 1946, Charles W. Thornwaite, climatólogo de consultoría, se unió a Seabrook Farms, Nueva Jersey. Seabrook fue la primera empresa en congelar rápidamente sus verduras. Era una empresa de agricultura integrada: siembra, cosecha, procesamiento, congelación rápida, almacenamiento y distribución. Al darse cuenta de que siete mil hectáreas de chícharos estaban madurando al mismo tiempo, lo que representaba una carga pesada para su personal y sistema de congelación de Seabrook. Thornwaite estudió todos los aspectos de crecimiento de chícharos y desarrolló un calendario climático que mostró cuándo se debía sembrar y cuándo cosechar. El calendario fue utilizado para desarrollar un programa que permitió la siembra de chícharos maduros para ser cosechados a una velocidad que era de común acuerdo con la programación de personal y la capacidad de procesamiento de la fábrica.



## **VI. Desarrollo profesional de la investigación de operaciones: matemáticas y algoritmos (1951-1956)**

De acuerdo a Gass y Assad (2005)

### **1951 Mezcla de gasolinas para la aviación**

La mejor manera de combinar las gasolinas para la aviación de manera óptima, son problemas básicos de las compañías petroleras. No fue sino hasta la década de 1940 y principios de 1950 cuando los economistas y matemáticos se unieron para aplicar las nuevas ideas de la programación lineal y los procedimientos relacionados con las matemáticas y la computación. Los métodos de optimización se han desarrollado con éxito para los problemas de mezclas.

### **1951 Primera computadora basada en el algoritmo simplex**

El algoritmo simplex general fue codificado por el National Bureau of Standards SEAC digital computer, bajo los auspicios del proyecto SCOOP de la USAF. La primera aplicación fue resolver un problema de programación que tratará con el despliegue y mantenimiento de aviones de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos.

### **1951 Programación no lineal**

En un artículo muy influyente, se estableció la "programación no lineal", Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker dan el nombre del campo y las bases matemáticas para el análisis de estos problemas.

### **1951 La Investigación de Operaciones en la empresa**

Una de las primeras, si no la primera empresa en formar un grupo interno de IO. Courtaulds Britain's, era el mayor productor británico de hilos. El grupo, bajo la dirección de A.W. Swan, se enfocó en los problemas económicos y técnicos, como el uso óptimo de las bobinas y la duración óptima de las series de producción. En los Estados Unidos, las organizaciones consultoras como Arthur D. Little formaron una división de IO cuyos miembros trabajaban en los problemas de Sears, Roebuck, Republic Steel, y Simplex Wire & Cable.

### **1951 La política óptima de inventario dinámico**

El trabajo de Kenneth Arrow, Theodore Harris y Marschak Jacob mostraron cómo determinar valores óptimos de la política de inventario para un sistema de revisión periódica con demanda aleatoria.

## **1951 Se introducen las cadenas de Markov en los sistemas de análisis de líneas de espera (colas)**

David G. Kendall hizo un importante avance metodológico mediante el poderoso método de introducir cadenas de Markov para analizar el sistema de análisis de colas.

## **1951 Primeros programas universitarios en Investigación de Operaciones**

Los primeros programas en Investigación de Operaciones (maestría y doctorado) se establecieron en el Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio. Los primeros graduados fueron: 1955 (Maestría, M.S) - Lawrence Friedman, Maurice Sasieni, 1957 (Doctorado, PhD.) Eliezer Naddor, Maurice Sasieni.

En la siguiente sección de esta tesis abordaremos el papel relevante de este instituto para impulsar la investigación de operaciones a nivel nacional e internacional, incluyendo a México.

## **1951 Primer Simposio sobre «Desigualdades lineales y programación»**

Bajo el patrocinio conjunto del U.S. Department of the Air Force (proyecto SCOOD) y the National Bureau of Standards, el Simposio sobre las Desigualdades Lineales y Programación se llevó a cabo en Washington, DC, del 14 al 16 de junio, 1951.

Su propósito era dar a conocer los trabajos técnicos en el campo de la logística, la teoría de juegos, el análisis cuantitativo de las actividades de la economía (las relaciones interindustriales), entre otros trabajos. Muchos aspectos importantes de la programación lineal se presentaron por primera vez en el simposio: «El teorema de dualidad basado en el método simplex», George B. Dantzig, Alex Orden; «Aplicaciones del método simplex a una variedad de problemas matriciales», Alex Orden; «Mezcla de gasolinas para la aviación de fusión, un estudio de programación interdependiente», Abraham Charnes, William W. Cooper, Bob Mellon, entre otros trabajos relevantes.

Este simposio es considerado como el Primer Simposio de Programación Matemática.

## **1952 Ecuación de Lindley**

A partir de una relación elemental entre los tiempos de espera de los  $n$  y  $(n + 1)$  clientes un modelo de cola general  $GI/G/1$ , Dennis V. Lindley demuestra que los tiempos de espera tienen una distribución limitante. Él deriva una ecuación integral del tipo Wiener-Hopf para esta distribución que lleva su nombre.

### **1952 Se establece MIT Committe on Operations Reseach (ORC)**

Debido al interés de los profesores y estudiantes en el nuevo campo, el MIT nombra a Philip M. Morse como presidente del Committe on Operations Reseach para coordinar la educación y la investigación en IO. A partir de 1953, la Comisión patrocinó 15 seminarios anuales de verano que ayudaron a traer las últimas investigaciones y aplicaciones prácticas para la comunidad académica. En 1955, bajo la dirección de Morse, el Comité se transformó en un Centro de Investigación Operaciones (ORC) que apoyaba a los estudiantes de posgrado y les permitió trabajar en tesis aceptables de IO.

### **1952 Se funda Operations Reseach Society of America (ORSA)**

La reunión de fundación de Operations Reseach Society of America (ORSA) se celebró del 26 hasta 27 mayo del año 1952 en Harriman, Nueva York, en Arden House, la antigua finca de la familia Harriman operada por la Columbia University para reuniones académicas. A ella asistieron 71 personas que representaban a una amplia gama de negocios, industrias, académicos, consultores, militares y organizaciones no gubernamentales. Philip M. Morse fue elegido presidente.

### **1952 Primer Journal (revista) en Investigación de Operaciones en los Estados Unidos.**

El Volumen 1, número 1 de la Revista *The Journal of The Operations Research Society of America* fue publicado en noviembre de 1952. El primer editor fue Thornton Paige. El nombre de la revista fue cambiado a *Operations Reseach* en febrero de 1956 en la edición del volumen 4, número 1. En la actualidad se publica como *Operations Research and The Management Science* (INFORMS).

### **1952 Análisis de la cartera (Harry M. Markowitz)**

La primera formulación de un modelo de programación lineal que permite a un inversionista obtener de forma óptima el equilibrio entre la rentabilidad esperada y el riesgo en la selección de una cartera de inversiones se debe a Harry M. Markowitz.

Markowitz recibió el premio Nobel de Economía 1990, compartido con Merton H. Miller y William F. Sharpe, por su trabajo pionero en la teoría de la economía financiera.

### **1952 Programación paramétrica**

La Programación paramétrica considera problemas de programación lineal en el que (1) los coeficientes de la función objetivo o (2) los valores del lado derecho son

funciones lineales de un parámetro. Estos problemas surgieron de aplicaciones específicas y se investigaron de forma independiente por investigadores del Proyecto SCOOP y de la Corporación RAND. Variaciones directas del método simplex aplicado a este tipo de problemas producen soluciones que son óptimas para la gama de parámetros asociados.

### **1952 Se instala UNIVAC I en El Pentágono para resolver problemas de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos mediante la programación lineal.**

Como parte del proyecto SCOOP, la Fuerza Aérea de los Estados Unidos instala la computadora UNIVAC I en abril de 1952. El código simplex fue escrito por el personal staff de la Rama matemática de la Fuerza Aérea en la UNIVAC bajo la dirección de Emil D. Schell.

El código simplex en la UNIVAC I resolvía problemas de programación lineal del orden de (250 x 500). En ese entonces se consideraban problemas de gran escala.

### **1952 Se funda The Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)**

The Society for Industrial and Applied Mathematics tenía por objetivo el apoyar las interacciones entre las matemáticas y otras comunidades científica y tecnológicas para avanzar en la aplicación de las matemáticas y la ciencia computacional en la ingeniería, la industria, la ciencia y la sociedad, promover investigaciones que conducirán a la eficacia de los nuevos métodos matemáticos y computacionales y técnicas para la ciencia, la ingeniería, la industria y la sociedad, y proporcionar los medios para el intercambio de información e ideas entre los matemáticos, ingenieros, y científicos. William E. Bradley, Jr. fue el primer presidente de SIAM.

### **1953 Se funda The Institute of Management Science (TIMS)**

TIMS fue fundado en 1953 como una organización internacional de profesionales de la investigación de operaciones y académicos. En 1951-1952, Melvin Savelson inicia conversaciones y reuniones para explorar el interés en esta idea. TIMS fue fundada el 1 de diciembre de 1953, en una reunión en Columbia University, organizada por Merrill Flood y David Hertz. Participaron alrededor de 100 personas. El primer presidente de TIMS fue William W. Cooper, Abraham Charnes, Vicepresidente, y el Merrill Flood, Presidente Electo, C. West Churchman fue elegido como el editor fundador de *Management Science*, publicada por primera vez en octubre de 1954.

### **1953 The RAND programa de logística**

El Departamento de logística The RAND se formó en 1953 como parte de la División de Economía, que incluía el análisis de la economía y el análisis de los costos. Por

recomendación de George B. Dantzig, Murray A. Geisler, que había trabajado con Dantzig en SCOOP Project, fue seleccionado en 1954 para encabezar el programa de investigación de The RAND logistics.

Las primeras investigaciones se ocuparon de la aplicación de la teoría económica y de las nociones de costo-efectividad en la logística. Una aplicación muy fructífera surgió en el análisis de los equipos para la aviación utilizados por Strategic Air Command desplegados en el extranjero.

### **1953 Clasificación de los sistemas de colas (David G. Kendall)**

La notación utilizada para clasificar los sistemas de colas se debe a David G. Kendall. La notación básica usa tres características principales de un sistema de colas: el proceso de llegada, la distribución de tiempo de servicio y el número de servidores y se escribe como  $A / S / c$ . Una cuarta y quinta letra se emplean a veces para indicar el número máximo de clientes que pueden estar en la cola o en el servicio ( $K$ ) y ( $Q$ ) como la disciplina de cola.

### **1953 Se funda Operational Research Society (UK)**

El 10 de noviembre de 1953, los miembros del Club de Investigación de Operaciones en Inglaterra votaron para convertirse en la Operational Research Society (ORS) con membresía abierta a cualquier persona involucrada en la investigación de operaciones. El primer presidente de la sociedad fue O.H Wansbrough-Jones.

### **1953 Método simplex revisado**

El método simplex revisado es un procedimiento sistemático para implementar los pasos del método simplex en un arreglo más pequeño, ahorrando así espacio de almacenamiento. Bazaraa (1997)

### **1953 El método de Metrópolis**

Un problema común en la física estadística es encontrar la energía y la configuración del estado de menor energía para un sistema compuesto de muchas partículas. Un enfoque para encontrar este estado de equilibrio es alterar aleatoriamente la posición de cada partícula y volver a calcular la energía resultante. Si la energía muestra una disminución, la posición nueva se acepta. El procedimiento continúa hasta que la energía no cambia más.

Nicholas Metrópolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, y Augusta H. Teller modificaron este procedimiento cuando el sistema tiene una temperatura conocida.

### **1953 La paradoja de Allais (Maurice Allais)**

El economista francés Maurice Allais propuso situaciones de decisión donde se preguntaba si los axiomas de la teoría de la utilidad se aplican en la práctica. En 1952, Allais presentó una serie de ejemplos de decisiones a prominentes economistas teóricos con los resultados que muestran que sus decisiones implican un ordenamiento de preferencias inconsistente, es decir, los economistas no se comportan de acuerdo con los axiomas de la teoría de la utilidad. Sus resultados se muestran en Allais (1953). Las discusiones sobre lo que desde entonces se ha llamado «La paradoja de Allais» se dan en Savage (1954) y Raiffa (1968).

Allais ganó el Nobel de economía en 1988, cuando la Academia Real Sueca de las Ciencias lo elogió por «hacer contribuciones pioneras a la teoría de los mercados y al uso eficiente de recursos» CNN Expansión (2010).

### **1954 Planos de corte para el problema del agente viajero**

En un artículo destacado, «Solución del problema del agente viajero de gran escala (tamaño o instancia)» George B. Dantzing, D. Ray Fulkerson, y Selmer M. Johnson demostraron la efectividad de los planos de corte. Alan J. Hoffman y Philip Wolfe comentan sobre este artículo: «...una de las grandes aportaciones de todos los tiempos para la optimización combinatoria». En este artículo se muestra cómo se resuelve un problema de 49 ciudades del problema del agente viajero con una buena solución. Bastaron solo 25 cortes para demostrar la optimalidad.

En este trabajo se mostró la importancia de los planos de corte para programación entera.

### **1954 Naval Research Logistics Quarterly patrocinada por la Oficina de Investigación Naval**

Esta revista tuvo un fuerte impacto para la investigación teórica y aplicada de la logística, así como para una gama amplia de temas de la IO. Seymour Selig fue el primer editor. Ahora es publicado por Wiley Interscience bajo el nombre de Naval Research Logistics.

### **1954 Management Science, revista de The Institute of Management Science**

El volumen 1, número 1 de la revista fue patrocinada por TIMS. Management Science, se publicó en octubre de 1954. C. West Churchman fue el primer editor. Ahora es publicada por The Institute of Operations and the Management Sciences (INFORMS)

### **1954 Método Dual Simplex**

Resuelve el problema dual directamente sobre el tablero simplex (primal). En cada iteración, el método se mueve de una solución básica factible del problema dual a una solución básica factible mejorada, hasta alcanzar la optimalidad del dual (y también del primal). O bien hasta concluir que el dual es no acotado y que el primal es no factible. Bazaraa (1997)

### **1954 Ramificación y Acotamiento**

En 1954 el trabajo sobre el problema del agente viajero (TSP) estudiado y presentado por George B. Dantzig, Ford Lester, y Ray Fulkerson es considerado como la primera obra para utilizar el enfoque de ramificación y acotamiento. El procedimiento de ramificación y acotamiento es la base para resolver algunos problemas de programación entera, incluyendo el problema del agente viajero.

### **1954 Primer premio Frederick W. Lanchester**

Este premio, creado por the Operations Research Society (ORSA), se otorga cada año al mejor artículo en investigación de operaciones al mejor reporte sobre un caso en investigación de operaciones. Se entregó por primera vez a Leslie C. Edie por su trabajo «Traffic delays at toll booths», *Operations Research*, 2, 2, 1954, 107-138. Desde 1954-1960, el premio fue patrocinado conjuntamente por ORSA y Johns Hopkins University. El premio se otorga cada año por The Institute of Operations and the Management Sciences (INFORMS) al mejor artículo o libro elaborado en inglés. Edie fue el primer presidente de ORSA en 1972.

### **1954 Corporación para la Investigación Económica e Industrial (CEIR)**

Fundada en el año de 1954, Washington, DC. CEIR fue una de las primeras empresas que proporcionaba una amplia gama de servicios informáticos basada en consulta de investigación de operaciones para clientes del gobierno y empresas comerciales. Era el centro independiente de informática comercial, utilizaba una IBM 704 y computadoras IBM 709 para analizar, entre otras aplicaciones, gran cantidad de problemas de gran escala de problemas de programación lineal. Su presidente fue el economista Herbert W. Robinson, y su personal de staff, que incluía a Harold Fassberg, Saúl I. Gass, Hellerman Eli, Moshman Jack y William Orchard Hays.

### **1954 El estado del arte de la toma de decisiones**

Ward Edwards realiza un artículo donde muestra el estado del arte de la teoría de las decisiones, realiza una revisión del estado de la técnica de la teoría de la decisión de 1930 a 1950.

Ha demostrado ser un invaluable trabajo documental en donde se puede valorar el trabajo en el campo de la toma de decisiones posterior a la Segunda Guerra Mundial.

### **1955 Teoría de la Racionalidad limitada y la satisfacción**

La teoría económica neoclásica asume que el hombre económico toma decisiones basado en la racionalidad perfecta y la sapiencia. Es decir, los individuos, al hacer elecciones racionales entre las alternativas posibles, maximizan la utilidad esperada. Por el contrario, Herbert A. Simon promulga el principio de la racionalidad limitada: Los seres humanos carecen de los conocimientos y las habilidades de cálculo necesarios para tomar decisiones de una manera compatible con las ideas económicas de la racionalidad objetiva.

Herbert A. Simon recibe el premio Nobel de economía 1978 por su investigación pionera en el proceso de toma de decisiones en las organizaciones económicas. ORSA le otorgó el premio von Neumann en 1988.

### **1955 Computadoras basadas en heurísticos para resolver problemas**

La colaboración de Herbert A. Simon y Allen Newell dio a luz a un ordenador basado en la resolución de problemas de forma heurística, es decir, la forma de programar una computadora para ser una "máquina de pensar". Simon se había reunido con Newell y J.C. Shaw (Cliff) en el the System Research Laboratory of the RAND Corporations.

Simon y Newell (1958) predijeron que los siguientes eventos sucederían dentro de los próximos 10 años posteriores a 1957: 1) una computadora digital sería campeón del mundo de ajedrez, (2) una computadora digital descubriría y probaría un nuevo e importante teorema matemático, (3) una computadora digital escribiría música, entre otros eventos.

### **1955 Programación estocástica**

El problema estándar de programación lineal asume que todos los datos son deterministas. En contraste, la programación estocástica, o programación bajo incertidumbre, supone que los datos están sujetos a variaciones aleatorias. Los primeros trabajos en la formulación y resolución de problemas se deben a G.B. Dantzig y E.M.L Beale.

### **1955 La teoría cinemática de flujo de tráfico**

M.J. Lighthill y G.B. Whitham propusieron un modelo de flujo de tráfico donde observaron el tráfico como un líquido especial que obedecía a dos principios



fundamentales: (1) la conservación del flujo y (2) una relación funcional entre el flujo de tráfico y la densidad del tráfico. A partir de estos dos principios, se deriva la relación entre la propagación de ondas en el flujo de tráfico y la cola causada por la obstrucción de la circulación del tráfico. Esta teoría fundamental ha dado lugar a numerosas aplicaciones y adaptaciones.

### **1955 El problema de presupuesto de capital**

El problema de presupuesto de capital implica la selección de un portafolio óptimo de inversiones de un conjunto de proyectos de inversión disponibles que son independientes o interdependientes, con una disponibilidad de presupuesto que se opone a la selección de todas las inversiones. Cuando la función objetivo y las restricciones son lineales, el problema se reduce a un problema de programación lineal o entera que puede ser resuelto fácilmente. El problema de racionamiento de capital es un caso especial que surge cuando el monto total de capital disponible para las inversiones es limitado, cuando los proyectos son independientes, y no hay créditos o préstamos disponibles. Este problema fue presentado por James H. Lorie y Leonard J. Savage.

### **1955 El método húngaro para el problema de asignación y transporte**

Los problemas de asignación y transporte se pueden resolver sin tener que recurrir al método simplex. El método húngaro se basa en la teoría de grafos y matrices. Fue desarrollado por los matemáticos húngaros, D. König y E. Egerváry, y se debe a Harold W. Kuhn.

### **1955 El primer congreso internacional sobre el tráfico telefónico**

El Primer Congreso Internacional sobre la aplicación de la teoría de la probabilidad en la ingeniería y la administración telefónica se llevó a cabo en Copenhague, a propuesta de Arne Jensen. La elección de Copenhague estaba destinada a honrar Agner K. Erlang que realizó la investigación fundamental de la teoría de colas, mientras trabajaba para the Copenhagen Telephone Company.

Los trabajos de esta conferencia influyeron para establecer la teoría de la probabilidad como la metodología preeminente en el análisis de problemas de tráfico telefónico.

### **1956 Problema Trim (cortes stock)**

Esta fue una de las primeras aplicaciones industriales de la programación lineal. Se refiere al corte de ancho estándar de rollos de papel en rollos de anchura más pequeños para satisfacer la demanda de los diferentes tamaños de los cortes y minimizar las pérdidas (rollos sobrantes cuyos anchos son tan pequeños para ser utilizados).

## **1956 Programación cuadrática**

Muchos problemas de optimización (por ejemplo, selección de cartera de inversiones, mecánica estructural, análisis de regresión, redes eléctricas) se pueden formular matemáticamente en términos de restricciones lineales y con las variables no negativas, pero con una función objetivo que es cuadrática en las variables (no lineal). Por lo general, la función objetivo es convexa y entonces el problema puede ser transformado en un programa lineal y resolverse mediante una adaptación con el método simplex.

## **1956 Árbol de expansión mínima**

Se tienen los nodos de una red, pero no las ligaduras. En su lugar se proporcionan las ligaduras potenciales y la longitud positiva de cada una si se insertan en la red (distancia, costo tiempo). Se desea diseñar la red con suficientes ligaduras para satisfacer el requisito de que haya un camino entre cada par de nodos. El objetivo es satisfacer este requisito de manera que se minimice la longitud total de las ligaduras insertadas en la red. Hiller (2010).

## **1956 Problema de la ruta más corta**

Edsger W. Dijkstra publica el primer algoritmo eficiente,  $O_n^2$ , para el problema del camino más corto, en gráficos con  $n$  nodos y costos no negativo en los arcos, así como un algoritmo de solución para el problema. Según Dijkstra, su algoritmo del camino más corto «sólo estaba diseñado para una demostración». El algoritmo pretendía demostrar el poder de la computadora ARMAC en su inauguración oficial en Ámsterdam en 1956. Durante el período de 1957-1962, se propusieron una serie de algoritmos del camino más corto. Maurice Pollack y Walter Wiebenson dieron el crédito del primer algoritmo a George J. Minty, que tenía una complejidad de  $O_n^3$ . Otros enfoques incluyen los de Richard Bellman, George B. Dantzig, Lester R. Ford, Jr., y E.F. Moore.

## **1956 Se funda Société Franchise de Recherche Opérationelle (SOFRO)**

La sociedad, SOFRO, fue fundada en enero de 1956, con Georges Guilbaud Teódulo como su primer presidente. En 1964, se fusionó con SOFRO la Association du Droit de l'Informatique et de traitement de l'Information (AFCALTI) para convertirse en la Association Française de l'Informatique et de la Recherche Opérationelle (AFIRO). Ahora se llama the Association Francaise de Recherche et d'Aide Opérationelle la décision (ROADEF).

### **1956 Arbeitskreis Operational Research (AKOR)**

AKOR, fue fundada en 1956 por un grupo de profesionales, aunque su membresía estaba abierta a todos. Su primer presidente fue Helmut Kregeloh. En 1961, se formó, la Deutsche Gesellschaft für Unternehmensforschung (DGU) con Henry Görtler como su primer presidente. AKOR y DGU se fusionaron el 1 de enero de 1972 para formar la Deutsche Gesellschaft für Operations Research (DGOR) con Hans Jürgen Zimmerman como su primer presidente. El 1 de enero de 1998, se fusionó con el DGOR Gesellschaft für Mathematik, Ökonometrie und Operations Research (GMÖOR, fundada alrededor de 1979), para formar la Gesellschaft für Operations Research (GOR), con Peter Kleinschmidt como su primer presidente.

### **1956 The Theory of Games and Linear Programming (La Teoría de Juegos y Programación Lineal), Steven Vajda.**

Esta monografía es la primera en presentar una exposición sistemática y exhaustiva de la teoría de juegos matriciales y la programación lineal. Fue traducido al alemán, francés, japonés y ruso, y ayudó a introducir estos temas en estos países y más allá.

## **VII. El desarrollo de algoritmos, aplicaciones y algunas actividades internacionales de la investigación de operaciones (1957-1963)**

De acuerdo a Gass y Asaad (2005)

### **1957 Primera Conferencia Internacional sobre investigación de operaciones**

La primera conferencia internacional en investigación de operaciones se celebró en Oxford, Inglaterra, del 2 al 6 de septiembre de 1957. A ella asistieron 250 delegados de 21 países. Fue organizado por OR societies of the U.K., Estados Unidos y Canadá. El tema de la conferencia fue para unificar y extender la ciencia de la investigación de operaciones.

### **1957 Administración de Proyectos**

Muy a menudo, hay investigaciones científicas simultáneas e independientes de problemas similares. La fecha exacta de cada desarrollo puede ser un poco incierta. Un ejemplo de ello es el tratamiento de la IO de un problema que llegó a la vanguardia en las investigaciones de administración científica de Frederick Taylor y Henry Gantt en la década de 1900: cómo gestionar un proyecto complejo y dinámico. Los enfoques de la IO para este tipo de problemas son: Técnica de Evaluación y Revisión de Programa (PERT), Método de la Ruta Crítica (CPM), y el Método de los Potencial Metra (MPM).

Con sus variaciones, cada enfoque ha contribuido a la administración real de los proyectos. Estos métodos se utilizan en todo el mundo, especialmente en el sector de la construcción.

### **1957 Problema de asignación cuadrática (QAP)**

El QAP, definido por primera vez por T.C. Koopmans y M. Beckmann (1957), consiste en asignar  $n$  facilidades a  $n$  lugares de tal forma que se minimice el costo total de transporte de cierto artículo entre las facilidades. Ortega (1989)

### **1957 El problema de la mochila (The knapsack problema)**

El problema de la mochila, el primero en estudiarlo y llamarlo así fue George B. Dantzig. Se presenta en muchas aplicaciones industriales y comerciales, tales como la selección de un conjunto de proyectos sujetos a una restricción presupuestaria. De igual forma, se presenta como un sub-problema de otros problemas.

### **1958 Programación entera y planos de corte**

El gran avance teórico y computacional para resolver problemas de programación entera se debió a Ralph E. Gomory, al demostrar que el problema lineal entero podía resolverse mediante una secuencia de "planos de corte" (restricciones) y encontrar la solución por medio del método simplex, haciéndolo converger a una solución óptima entera.

### **1958 Descomposición Dantzig-Wolfe**

La estructura de las restricciones de muchos problemas grandes de programación lineal está formada por subconjuntos independientes que están "atados" junto con una pequeña serie de restricciones adicionales. Por ejemplo, los subconjuntos pueden representar instalaciones de una empresa de fabricación de producción, cada uno. Independientemente de la producción, el almacenamiento y el envío de productos de la compañía, el empate en las restricciones aseguraría entonces que los productos de la compañía se están produciendo con el fin de satisfacer la demanda total de cada producto dentro de las restricciones de presupuesto, mano de obra, almacenamiento y envío

### **1958 Se funda Canadian Operational Research Society (CORS)**

La reunión para fundar Canadian Operational Research Society (CORS) se celebró el 14 de abril de 1958 en Toronto. Osmond M. Solandt fue su primer presidente. Cuenta con una liga activa en la dirección electrónica: [www.cors.ca](http://www.cors.ca)

### **1959 Se funda International Federation of Operational Research Societies (IFORS)**

IFORS se dedica al desarrollo de la investigación de operaciones como una ciencia unificada y hacerla avanzar en todas las naciones del mundo. Los miembros fundadores fueron the Operations Research Society of America (ORSA), the British Operational Research Society (ORS) y la francesa Société Française de Recherche Opérationnelle (SOFRO). Sir Charles Goodeve fue elegido primer secretario honorario.

### **1960 Airline Group of the International Federation of Operations Research Societies (AGIFORS)**

La industria aérea formó el grupo IFORS debido al interés especial en este campo y en reconocimiento al valor de la investigación de operaciones (OR/MS, por sus siglas en inglés). El simposio anual de AGIFORS documentó las aplicaciones de la (OR/MS) en la industria aérea.

## **1960 International Abstracts in Operations Research (IAOR)**

Patrocinado por International Abstracts in Operations Research, IAOR reúne artículos relevantes de la IO de unas 150 revistas y los clasifica por procesos, aplicaciones y metodologías. Para cada artículo, IAOR ofrece un resumen, con título, autor, información bibliográfica y descriptores. Cuenta con una liga activa en la dirección electrónica: [www.palgrave-journals.com](http://www.palgrave-journals.com)

## **1961 Árboles de decisión**

Los árboles de decisión se utilizaban de forma regular en los cursos impartidos por Howard Raiffa y Robert O. Schlaifer en Harvard Business School. Raiffa (2002) relata: "Debido a que muchos de nuestros alumnos eran brillantes, pero poco sofisticados matemáticamente, formulé la mayoría de los problemas en términos de árboles de decisión, que se convirtieron en uso normal en los cursos.

## **1961 Ecuaciones de flujo de Little**

Las ventajas de las ecuaciones de flujo de Little es que muestran las relaciones que existen entre las características de operación  $L, L_q, W, W_q$ , en cualquier sistema de línea de espera. Las llegadas y los tiempos de servicio no tienen que seguir una distribución de probabilidad específica para que se puedan aplicar las ecuaciones de flujo. Anderson, (2011)

## **1961 Programación por metas**

La programación por metas es una herramienta utilizada ampliamente en la resolución de problemas de programación lineal multiobjetivo. Los primeros en trabajar con problemas de programación por metas fueron A. Charles y W.W. Cooper al inicio de los años 50's pero su campo comenzó a desarrollarse hasta 1961. López (1996).

## **1961 Programación geométrica**

Muchos problemas de diseño en ingeniería pueden formularse como un problema de optimización (programación geométrica).

## **1961 La teoría de las subastas**

En cualquier subasta, los licitadores tienen que navegar entre los peligros similares de una oferta demasiado alta (y pagar más que el valor real que atribuyen al ítem) o muy baja (de modo que el elemento se desplace a otro postor).

## **1961 Industrial Dynamics (Dinámica industrial) Jay W. Forrester**

En 1956, Jay W. Forrester renunció a sus proyectos activos en ingeniería de sistemas computacionales para unirse al MIT Sloan School of Management como profesor de ingeniería industrial y de organización. Su nuevo interés en la dinámica industrial surgió después de este cambio.

## **1962 Método de partición de Benders**

Este es un procedimiento para resolver problemas de programación lineal entera mixta de la forma  $Max Z = cx + dy, Ax + By \leq b, x \geq 0$  y entera,  $y \geq 0$ .

## **1962 El problema del cartero chino**

El matemático chino Kwan Mei-Ko es el primero en plantear el problema de encontrar a un costo menor un recorrido cerrado de un gráfico no Euleriano (un gráfico que no contenga un ciclo que atravesase cada arista exactamente una vez). Kwan trato de minimizar la longitud de un recorrido que incluyera a cada arista al menos una vez, por lo tanto, deseaba encontrar una ruta de menor costo para un cartero que debería viajar (para entregar el correo) a lo largo de cada arista.

## **1962 Fuzzy set theory**

La noción de los conjuntos borrosos se debe a Lotfi A. Zadeh.

## **1963 Método Delphi**

A menudo es difícil tener un grupo o comité de expertos que tenga una visión de consenso y que todos estén de acuerdo. El Método Delphi tiende a superar los problemas de dinámica de grupos.

## **1963 Enumeración implícita**

Propuesto por vez primera por Egon Balas, es una técnica especializada para resolver problemas de programación línea entera en el que todas las variables se limitan a ser binarias (0 o 1). Este procedimiento ha demostrado ser muy eficaz computacionalmente

## **VIII. Publicaciones, métodos y aplicaciones de la investigación de operaciones (1964-1978)**

De acuerdo a Gass y Assad (2005)

### **1964 Problema de complementariedad**

El Problemas de complementariedad lineal y no lineal han encontrado aplicación en la economía, la ingeniería, la teoría de juegos, y las finanzas.

### **1964 Problema de enrutamiento de vehículos**

El problema de enrutamiento de vehículos (VRP) es un problema de optimización combinatoria de gran importancia en diferentes entornos de la logística. Para atender los clientes se cuenta con una flota de vehículos que parten desde un centro de depósito. El problema consiste en asignar a cada vehículo la ruta de clientes, de manera que se minimice el costo de transporte.

### **1965 Teoría de la Complejidad**

En su papel pionero en el problema de la concordancia, Jack Edmonds planteó la cuestión más amplia de lo que es un «buen" algoritmo».

### **1965 Redistribución política**

La primera aplicación de la investigación de operaciones para este tipo de problemas fue por parte de Sidney W. Hess, J.B. Weaver, H.J., Siegfeltdt, J.N. Whelan y P.A Zitlau

### **1965 Los Sistemas expertos**

Los Sistemas expertos utilizan un conjunto de conocimientos almacenados y un motor de inferencia para ofrecer asesoramiento sobre problemas difíciles. Los primeros sistemas expertos típicamente tenían dominios estrechos de aplicación.

### **1966 Análisis de decisiones**

En 1964, Raiffa impartió un curso de posgrado en análisis de decisiones en el departamento de economía y comenzó a preparar el material para un libro con ese título. En Stanford, Ronald Howard había adoptado el nombre de análisis de decisión debido a un programa de investigación.



### **1966 Criminal Justice: President's Crime Commission Science and Technology Task Force**

Saúl I. Gass (IBM) y Richard C. Larson (MIT) y un grupo de especialistas elaboraron un informe donde muestran cómo utilizar mediante el enfoque sistémico la investigación de operaciones para analizar y resolver algunos problemas en los tribunales para la aplicación de la ley.

### **1967 Juegos con información incompleta**

¿Cómo pueden los modelos de la teoría de juegos extenderse para manejar situaciones competitivas cuando algunos jugadores tienen información incompleta sobre algunos parámetros importantes del juego, tales como funciones de pago, las estrategias de otros jugadores, y la información disponible sobre el juego a otros jugadores? John C. Harsanyi respondió a esta pregunta importante en una serie de tres artículos en *Management Science*.

### **1968 Procedimiento ELECTRE para la toma de decisiones multicriterio**

En los problemas de decisión multicriterio, una alternativa  $i$  se dice que supera a otra alternativa  $j$  si se puede concluir que  $i$  es al menos tan buena como la  $j$ . Este concepto está incorporado en los métodos ELECTRE desarrollados por Bernard Roy. Los resultados de un análisis ELECTRE es una clasificación de las alternativas.

### **1968 Se funda Decision Sciences Institute (DSI)**

Originalmente fundada como The American Institute for Decision, the Decision Science Institute es una asociación multidisciplinaria internacional dedicada a fomentar el conocimiento y mejorar la enseñanza en todas las disciplinas de los negocios y disciplinas afines.

### **1969 New York City RAND Institute (NYCRI)**

La Corporación RAND estableció el NYCRI para ayudar en la resolución de una serie de problemas de orden público. Ayudó a demostrar cómo la investigación de operaciones y los métodos relacionados analíticos, basados en computadoras podría ser de gran valor para los municipios.

### **1969 Primer sitio ARPANET / INTERNET**

En 1966, The Advanced Research Projects (ARPA) reclutó a Lawrence G. Roberts del MIT para liderar el desarrollo y la instalación del proyector de red de datos ARPA.

## **1970 Comienza la publicación de Interfaces**

El objetivo principal de esta revista, patrocinada por TIMS, fue la publicación de monografías que tratarán sobre los problemas operativos que usan la ciencia de la gestión. El primer ejemplar fue publicado bajo el título de The Bulletin. Leonard S. Simon fue su primer editor.

## **1971 Los problemas NP y NP-completo**

La clase P contiene aquellos problemas de decisión que pueden ser resueltos en tiempo polinómico por una Máquina de Turín (MT) determinista, esto es, aquellas en las que para cada par estado y símbolo exista a lo sumo una posibilidad de ejecución. Los problemas de complejidad polinómica son tratables, es decir, en la práctica se pueden resolver en un tiempo razonable.

## **1971 La Sociedad de Programación Matemática (MPS)**

Esta sociedad internacional fomenta la investigación teórica, las aplicaciones y desarrollos computacionales de todos los aspectos de la optimización con restricciones. Patrocina el Simposio Internacional de Programación Matemática. George B. Dantzig fue el primer Presidente de la Sociedad

## **1971 Se publica Network**

En 1970, Howard Frank, Ivan T. Frisch, y Richard Van Slyke formaron the Network Analysis Corporation, una empresa consultora con experiencia en la solución de problemas de redes. La compañía se convirtió en un centro para los investigadores interesados en las aplicaciones de redes. La idea de tener una revista dedicada a redes fue idea de Frank, Frisch, y David Rosenbaum. Frisch se desempeñó como editor en jefe hasta 1978, junto con Frank T. Boesch y Daniel J. Kleitman como editores.

## **1972 Metodología de sistemas suaves**

Uno de los autores que en la actualidad goza de un mayor reconocimiento es Peter B. Checkland, gracias a las novedosas formas de estudio que ha planteado, destacan sus aportaciones metodológicas y conceptuales para la definición del sistema bajo estudio (modelo conceptual) y el uso que da a éste en la investigación de una situación problemática. Fuentes (1995).

### **1972 Se establece el premio Franz Edelman Award for Management Science Practice**

The College of Practice de TIMS estableció el Premio Edelman para reconocer ejemplos destacados de la investigación de operaciones en la práctica. Se trata de un concurso en el que las organizaciones presentan sus logros a un conjunto de jueces que evalúan dichos trabajos, seleccionando a un reducido grupo de los aspirantes para participar en el tramo final del concurso.

### **1974 Primera publicación de Computers and Operations Research**

La revista internacional, Computers and Operations Research, fue fundada para enfatizar "las aplicaciones nuevas e interesantes de la IO a problemas de interés mundial y e interés general." Samuel J. Raff se desempeñó como editor de la revista desde sus inicios hasta 2002.

### **1974 Lenguaje de simulación GASP**

GASP es un lenguaje flexible elaborado en FORTRAN para realizar simulación basada en el uso de eventos de control de programación desarrollado por Alan Pritsker y sus compañeros de trabajo.

### **1974 Se establece la investigación de operaciones en Federal Express Corporation**

Poco después de que oficialmente comenzó sus operaciones en 1973, Federal Express estableció un departamento de IO que dependía directamente de Frederick W. Smith, presidente.

### **1974 Primera reunión conjunta entre ORSA y TIMS**

La primera reunión conjunta nacional de ORSA y TIMS se celebró del 22 a 24 abril de 1974, en Boston. Esto dio inicio a la serie de reuniones nacionales anuales conjuntas, la reunión de primavera TIMS - ORSA y la reunión de otoño de ORSA- TIMS.

### **1974 Interfaces realiza la primera publicación conjunta entre TIMS y ORSA**

*Interfaces* busca mejorar la comunicación entre los profesionales y los administradores en OR/MS para la publicación de artículos que describan la práctica y la aplicación de OR/MS en el comercio, la industria, el gobierno, o la educación.

### **1975 Algoritmos genéticos**

Un algoritmo genético es un procedimiento heurístico en el que la búsqueda aleatoria imita los mecanismos de la selección natural. John H. Holland desarrolló por primera vez tales procedimientos en 1962 cuando investigó la evolución de los sistemas adaptativos complejos caracterizados por los genes que interactúan. La aplicación de los algoritmos genéticos para la optimización combinatoria ha crecido en forma sostenida desde mediados de 1980.

### **1975 Se establece el Premio John von Neumann**

El Premio John von Neumann se otorga en reconocimiento a las contribuciones fundamentales en campo de la investigación de operaciones o en la administración científica. El primer premio fue para George B. Dantzig por el desarrollo de la programación lineal y el método simplex (1975). El premio fue establecido conjuntamente por ORSA y TIMS, pero ahora es otorgado por INFORMS.

### **1975 La Medalla Goodeve**

Este premio, creado por la the Operationan Research Society en honor de Sir Charles Goodeve, se otorga en reconocimiento a la contribución más destacada en la filosofía, la teoría o la práctica de la investigación de operaciones publicada en las revistas de la sociedad.

### **1976 Calidad robusta**

Para Genichi Taguchi y la noción de calidad implica la conformidad con parámetros óptimos o ideales para medir las tolerancias de esos parámetros. La idea clave es que cualquier desviación de estos objetivos óptimos causa una pérdida total para la sociedad que implica no sólo al fabricante, sino a la cadena total de los involucrados que estén en contacto con el producto.

### **1977 Regla anti- ciclos para problemas de programación lineal**

Robert Bland sugirió una regla que previene el ciclado. Se trata de una regla muy sencilla, pero que restringe la elección de la variable de entrada y de la variable de salida. Bazaraa (1997).

## **IX. Métodos, aplicaciones y tecnología de la investigación de operaciones (1979-2004)**

De acuerdo a Gass y Assad (2005)

### **1979 Teoría de la Perspectiva**

Daniel Kahneman y Amos Tversky comenzaron sus investigaciones sobre la psicología del juicio humano en la década de 1970, con especial atención a las desviaciones de la racionalidad y de juicio heurístico. Estas heurísticas, identificadas por Kahneman y Tversky, son «reglas de oro» que la gente utiliza para hacer frente a un problema difícil de juzgar cuando carecen de los mecanismos cognitivos para resolver fácilmente el problema con precisión.

La Teoría de la Perspectiva tiene base empírica y aspira a reflejar cómo la gente se comporta en realidad, no cómo debiera hacerlo si fuera racional. No es, pues, una teoría normativa, sino empírica y positiva. Sus diferencias esenciales con la Teoría de la Utilidad Esperada se refieren a tres grandes cuestiones: la definición de las alternativas sobre las que versan nuestras decisiones humanas; la valoración que les damos; y la ponderación que, a la vista de su probabilidad, les atribuimos.

### **1979 Hojas electrónicas de cálculo e investigación de operaciones**

La primera computadora con hoja de cálculo en una VisiCalc, se introdujo en octubre de 1979. Fue concebida por Daniel Bricklin, con la ayuda de Robert Frankston, y comercializada por Personal Software, Inc., dirigida por Daniel Fylstra. Desde entonces, las técnicas relacionadas con la IO y han sido incluidas en los principales programas de hojas de cálculo como Excel, Lotus 1-2-3 y Quattro Pro.

### **1980 Sistemas de fabricación flexibles**

Un sistema de fabricación flexible (FMS) se compone de varias máquinas herramientas controladas por un ordenador, cada una es capaz de realizar muchas operaciones, y que están vinculadas con equipos automatizados de manejo de materiales. Las técnicas de la IO (redes, líneas de espera, programación lineal, programación entera, la programación no lineal, la simulación, y los algoritmos heurísticos) se han utilizado para resolver los problemas de planificación FMS (decisiones de configuración) y problemas de programación FMS (programación en tiempo real de las piezas fabricadas)

## **1980 Programación con restricciones**

La programación con restricciones (programación con restricción lógica) se originó en las ciencias de la computación e inteligencia artificial. Es una técnica de programación con restricciones que ha demostrado ser eficaz para la resolución de problemas de optimización, especialmente aquellos que surgen en la secuenciación y programación, y, en general, en problemas combinatorios estructurados (programación entera).

## **1980 El Proceso Analítico Jerárquico**

Procedimientos para la resolución de problemas de decisión multicriterio. Estos procedimientos se basan a menudo en lo que parecen ser, al menos para los desarrolladores, heurística "razonable" y / o procedimientos matemáticos.

## **1980 Software LINDO (Optimización lineal y discreta)**

Concebido y desarrollado por Linus E. Schrage para resolver problemas de programación lineal y entera tuvo una fuerte influencia en la aplicación y el desarrollo futuro del software de optimización. PC LINDO, desarrollado por Kevin Cunningham, estuvo disponible en 1982, con mucho éxito, especialmente en el aula escolar.

## **1980 Administración del rendimiento (ingresos)**

Los productos perecederos como los boletos de avión son inútiles si no se utilizan por el tiempo de vuelo. La idea detrás de la gestión del rendimiento es, en base a los datos de demandas pasadas y futuras, de forma dinámica cambiar los precios de los productos perecederos a fin de maximizar los ingresos. Implementado por American Airlines en la década de 1980, ha demostrado ser un procedimiento eficaz que combina la IO y los procedimientos de la inteligencia artificial. El proceso ha sido utilizado por otros proveedores de productos perecederos, tales como hoteles, líneas de cruceros, y los ferrocarriles de pasajeros.

## **1981 La computadora personal**

Aunque el prototipo y computadoras personales estaban disponibles en el mercado antes de 1981 (Atari, Apple), el lanzamiento de la computadora personal de IBM el 12 de agosto 1981 cambió la visión del mundo de cómo las computadoras pueden estar al servicio de la población en general. Desde una perspectiva de la IO, la computadora personal fue un maravilloso recurso para los profesionales, académicos y estudiantes. De igual forma, la proliferación de software relacionado con la IO, basado en la PC ha tenido un beneficio positivo para el usuario (experto y novato) al disponer de una herramienta útil para el análisis de los problemas de la IO.

## **1981 Recocido simulado**

El recocido simulado es un método de optimización regido por los principios de la física estadística. Los sistemas físicos pueden ser dirigidos hacia un estado de energía mínima global por un proceso de recocido, por lo que la temperatura se reduce lentamente, permitiendo así que el sistema alcance un equilibrio meta estable para cada temperatura. La aplicación de este principio a los problemas de optimización combinatoria, donde el Estado mínimo corresponde con el valor mínimo de una función objetivo. Este procedimiento fue propuesto y utilizado por S. Kirkpatrick, C.D Gelatt y M.P Vecchi.

## **1982 lenguajes y modelado**

La alta velocidad de las computadoras, los avances en el tamaño de memoria, y las mejoras en los sistemas de programación matemática (solvers) nos permiten resolver problemas de programación matemática del mundo real con miles de restricciones y muchos miles de variables. Surge la pregunta: ¿Cómo generamos este tipo de problemas para que sean aceptados por el software y estén diseñados de forma tal que le permite a uno demostrar que el problema (modelo) es el correcto? Es una tarea imponente para combinar los datos y las restricciones del problema en una forma explícita y luego introducirlos en la computadora.

Para resolver un problema de gran instancia se requiere un planteamiento del problema en forma explícita. Los lenguajes para el modelado algebraico permiten cerrar la brecha entre el modelador y la computadora mediante la adopción de una enunciación algebraica y concisa del problema y los datos, y, de esta forma, generar el formato requerido para la programación matemática. El primero de esos lenguajes fue General Algebraic Modeling System (GAMS) desarrollado por Johannes Bisschop y Alexander Meeraus. Otros lenguajes algebraicos incluyen AIMMS (J. Bisschop, R. Entriker); LINGO (K. Cunningham, L. Schrage); AMPL (R. Fourer, D.M. Gay, B.W. Kernighan); MathPro (D. Hirschfeld); MPL (B. Kristjansson).

El lenguaje algebraico permite al analista hacer crecer el modelo mediante etapas, de tamaño pequeño a grande, lo que facilita la comprobación de que la declaración final del problema es la correcta.

## **1982 Tiempo promedio de ejecución del método simplex**

Aunque se ha demostrado que el método simplex es un algoritmo de tiempo exponencial, su uso en la práctica indica que es muy eficiente. Como un indicador de este comportamiento, Karl Heinz Borgwardt mostró que en promedio el método simplex es un algoritmo de tiempo polinomial.

### **1982 El arte y la ciencia de la negociación (Howard Raiffa)**

A finales de la década de los años 70's Howard Raiffa fruto de un ciclo de conferencias H. Rowan Gaither en Ciencia de los Sistemas, impartidas en 1980 en la Universidad de California en Berkeley, elabora este libro dedicado a la memoria de uno de los fundadores y primer presidente del Consejo de Administración, de la RAND Corporation. Raiffa (1996).

### **1983 Programación entera con número fijo de variables**

Usando métodos de la geometría de los números, Hendrik W. Lenstra, Jr. diseñó un algoritmo eficiente para la reducción de la base. Luego resultó que para cualquier  $n$  fijo, el problema de programación entera:  $Max Z = cx, s. a Ax \leq b, x \text{ entero}$ , pueden ser resueltos en tiempo polinomial.

### **1984 Método de puntos interiores**

El método simplex, habiendo experimentado considerables refinamientos y sofisticación, no tuvo competencia sino hasta 1984, cuando N. Karmarkar propuso un nuevo algoritmo cuya complejidad computacional es polinomial y que resultó altamente competitivo frente al método simplex para resolver problemas de programación lineal de gran tamaño. Bazaraa (1997).

### **1984 Redes neuronales para optimización (redes de Hopfield)**

John J. Hopfield introdujo una red neuronal conocida desde entonces como red de Hopfield, y entre sus méritos se encuentra el haber promocionado el resurgimiento del estudio de las redes neuronales artificiales. La red en cuestión es capaz de resolver problemas de optimización. Lahoz (2004).

### **1984 La Medalla Ramsey**

El premio más importante del Grupo Especial ORSA en el análisis de decisiones, la Medalla Ramsey, reconoce contribuciones distinguidas en el campo del análisis de la decisión. Howard Raiffa fue el primer medallista de Ramsey en 1984. Frank P. Ramsey fue un filósofo con un amplio interés en los fundamentos. Él generó la primera demostración rigurosa de la hipótesis de la utilidad esperada propuesta por Daniel Bernoulli en 1732.



### **1984 What's Best: Takes Your Spreadsheet Beyond «What If» (¿Qué es mejor?):**

El primer sistema basado en la computadora que combina el poder de las hojas de cálculo con los procedimientos de optimización para resolver problemas de programación lineal y no lineal.

### **1985 Procedimiento Branch and cut (Bifurcación y corte) para optimización combinatoria.**

Se presentaron técnicas mejoradas para resolver problemas de programación entera binaria. Tornos (2003).

### **1986 Búsqueda Tabú**

El nombre tabú se refiere a la utilización de estructuras de memoria para excluir ciertas soluciones, o regiones del espacio de soluciones, de la zona de búsqueda. El tema central de la búsqueda tabú es el diseño de estructuras de memoria que refuercen las acciones que conduzcan a buenas soluciones y desalienten las acciones que resultan en un rendimiento inferior. El artículo de Fred Glover 1986 fue el primero en utilizar el término de búsqueda tabú.

### **1986 El Premio Harold Larnder**

Este premio, creado por the Canadian Operational Research Society (CORS), se otorga cada año a una persona que ha alcanzado la distinción internacional en IO. El primer ganador fue Robert E. (Gene) D. Woolsey. Harold Larnder era un canadiense que trabajaba en Gran Bretaña en the Bawdsey Manor Research antes y durante la Segunda Guerra Mundial. Se le considera un co-desarrollador del radar, y ayudó a convertirlo en un sistema eficaz de la defensa aérea durante la Batalla de Inglaterra. Fue Presidente de CORS en 1966-1967.

### **1988 American Airlines Decision Technologies (AADT)**

A partir de 1982, bajo la dirección de Thomas M. Cook, el staff de IO en American Airlines fue pionero en la instrumentación de la mayor aplicación de la investigación de operaciones en esta compañía. En 1988, el grupo de IO fue establecido como una división por separado, llamado American Airlines Decision Technologies (AADT). A Robert Crandall, Director General de la empresa matriz de American Airlines, se le atribuye una larga lista de métodos basados en la IO y en el desarrollo de sistemas en AADT como clave para la fuerte posición de AA en la industria. La lista incluye: mejora en los rendimientos, la reasignación de viajes y un programa de mejora, la asignación de turnos de llegada y la programación de vuelos. Cook fue presidente de INFORMA en 2003.

### **1988 An Introduction to Queueing Networks, Jean Walrand**

Este texto fue uno de los primeros dedicados enteramente al tema de las redes de líneas de espera. Sus numerosos ejemplos ilustran el uso de redes de líneas de espera para modelar sistemas informáticos, redes de comunicación, y las operaciones de fabricación. Walrand recibió el premio Lanchester en 1989 por este libro.

### **1989 Administración de la cadena de suministro**

La administración de la cadena de suministro tiene el propósito de sincronizar las funciones de una empresa con sus proveedores, a fin de acoplar el flujo de materiales, servicios e información, con la demanda del cliente. La administración de la cadena de suministro tiene consecuencias estratégicas porque el sistema de suministro puede usarse para satisfacer prioridades competitivas importantes. También implica la coordinación de funciones clave de la empresa como mercadotecnia, finanzas, ingeniería, sistemas de información, operaciones y logística. Krajewski y Ritzman (2000).

### **1989 Primera publicación de ORSA Journal of Computing**

En reconocimiento a su fuerte interrelación, esta publicación está dedicada a la publicación de trabajos sobre la interrelación de la investigación de operaciones y la informática. Su fundador y primer director fue Harvey J. Greenberg. Ahora es publicado por INFORMS.

### **1990 Investigación de Operaciones y la Operación Tormenta del Desierto**

The U.S. Military Airlift Command (MAC), mediante el análisis y las técnicas de la investigación de operaciones planificó y programó las tripulaciones y cargas de vuelos, moviendo 155,000 toneladas de equipo y 164,000 personas a Arabia Saudita en 75 días. El puente aéreo continuó durante las operaciones Escudo del Desierto. Para el final de la Guerra del Golfo Pérsico, se usó una nueva herramienta de planificación de transporte aéreo, programando más de 11,500 misiones y transportando a más de 350,000 pasajeros. Durante la primera etapa de 40 días de la Guerra del Golfo Pérsico, los analistas usaron la metodología de la investigación de operaciones para ayudar en la planificación y programación de más de 100,000 salidas.

### **1990 Ingeniería Financiera / mercados financieros**

La investigación de operaciones tiene una larga historia en lo que respecta a la aplicación práctica en una amplia gama de problemas financieros, por ejemplo, los primeros trabajos en el análisis de la cartera. Con el paso de los años, las nuevas

metodologías han sido desarrolladas y la velocidad de la computadora y su capacidad han crecido, muchos de los problemas financieros más amplios y más complejos han sido objeto de competencia por parte de los profesionales de la IO. Es difícil situar este campo (ingeniería financiera, mercados financieros) en la posición correcta en la línea de tiempo, pero el año elegido marca un momento que seguramente fue reconocido como importantes para la resolución de los problemas que se derivan del área conocida como la ingeniería financiera / mercados financieros. Además del análisis de la cartera, los problemas de interés como: precios derivados, tácticas de negociación, decisiones de financiación, problemas estratégicos, problemas regulatorios y legales. Entonces, la programación matemática y las técnicas de simulación de Monte Carlo son las herramientas principales de la IO, junto con la teoría de juegos, el análisis de redes, los árboles de decisión, el control de inventario, y las cadenas de Markov donde se encontrarán las aplicaciones correspondientes.

### **1991 Primer Premio ORSA otorgado**

El Premio ORSA, ahora Premio INFORMS se otorga a las empresas que de forma efectiva han integrado la investigación de operaciones en sus procesos de toma de decisiones organizacionales. Los primeros ganadores fueron American Airlines y Federal Express.

### **1994 Network-Enabled Optimization System (NEOS)**

Este sistema basado en la red Internet fue iniciado por Argonne National Laboratory y Northwestern University, con el objetivo de conectar a los usuarios por medio la tecnología de optimización y proporcionarles la información y la formulación de un problema de software. NEOS está organizado en tres partes: (1) NEOS Herramientas - Una biblioteca de software de optimización de libre disposición escrito por los investigadores en el proyecto NEOS, (2) NEOS -Guía -Una colección de material informativo y educativo sobre la optimización, incluyendo una guía de software de optimización , descripciones de algoritmos, estudios de casos de aplicación, preguntas más frecuentes para la programación lineal y no lineal, y una colección de problemas de prueba, así como los informes técnicos, (3) NEOS servidor - un centro para la resolución de problemas de optimización de forma remota a través de Internet. Cuenta con una liga electrónica en: [www.neos-server.org](http://www.neos-server.org)

### **1995 Fusión de ORSA y TIMS para formar INFORMS**

Desde 1974, las dos principales asociaciones profesionales en los Estados Unidos (ORSA y TIMS) que desarrollaron esfuerzos en la investigación de operaciones a partir de los inicios de la Segunda Guerra Mundial, se fusionan para formar the Instituto of Operations Research and Management Science, patrocinando

conjuntamente actividades y reuniones nacionales, así como para la publicación de algunas revistas.

### **1995 INFORMS Online (IOL)**

INFORMS en línea fue establecido inicialmente en la web de Jim Bean y Mohan Sodhi como medio de transmisión y recolección de información sobre INFORMS y la investigación de operaciones por y para sus miembros. Su primer director fue Michael Trick.

### **1999 Se publica Manufacturing & Service Operations**

Este INFORMS journal está dedicado a la publicación de artículos relacionados con la teoría o la práctica sobre la producción de bienes y servicios, en todos sus aspectos. Leroy B. Schwarz fue su primer editor.

### **2000 50º. Aniversario de la publicación de la Revista the Journal of Operational Research**

Para celebrar el aniversario de la Revista the Journal of Operational Research, el editor, John Ranyard, y el consejo editorial, seleccionan artículos influyentes que surgieron en los últimos 50 años.

### **2001 EURO grupo de trabajo PROMETHEUS sobre la ética y la Investigación de Operaciones**

El propósito de PROMETHEUS es inspirar a investigadores, profesores, estudiantes, consultores y tomadores de decisiones en la investigación de operaciones para integrar aspectos éticos en todas sus actividades. Fue concebido por Jean-Pierre Brans. Fue fundado en la XVIII Conferencia EURO en Rotterdam. La membresía está abierta a la comunidad de IO en todo el mundo.

### **2001 50º. Aniversario del programa en Investigación de Operaciones en The Naval Post Graduate School (NPGS)**

Hoy en día la población estudiantil the Naval Post Graduate School ha crecido hasta 1800 alumnos, con estudiantes procedentes de todas las ramas de U.S. defense community, así como los de Coast Guard, The National Oceanic and Atmospheric Administration, y los servicios de más de 25 naciones socias.

A través de los años, esta institución ha sido una fuerza motriz en la educación y la formación de oficiales militares en el análisis de la investigación de operaciones.

## **X. Los primeros programas universitarios en investigación de operaciones**

West era directa e indirectamente responsable por el seguimiento de avances significativos, durante ese periodo de seis años:

- 1) El establecimiento del primer programa académico en investigación de operaciones ofreciendo grados de maestría y doctorado. Este currículum fue adoptado por muchas otras universidades y esparciendo educación y entrenamiento, en este campo del conocimiento.
- 2) El desarrollo de la filosofía de la educación en investigación de operaciones, en la cual se aprende investigación de operaciones a través de una combinación de resolución de problemas reales de investigación de operaciones, cursos y la investigación de tesis de tópicos y métodos avanzados.
- 3) La impartición de conferencias y cursos cortos de investigación de operaciones dedicados a la presentación de métodos y técnicas de investigación de operaciones para la formulación y solución de problemas organizacionales en áreas claves de la administración.
- 4) El desarrollo de la filosofía, métodos y materiales abriendo paso al primer libro de texto internacional acerca de la investigación de operaciones.
- 5) El reclutamiento de un fuerte y multidisciplinario equipo facultativo para formar el grupo de investigación de operaciones en el Instituto de Tecnología Case, y establecimiento de una excelente atmósfera de trabajo dentro del mismo.
- 6) La cercana colaboración entre la facultad y los estudiantes graduados, resultado en la educación de numerosos graduados que, posteriormente, aceptarían posiciones dentro de las facultades de otras importantes universidades y que iniciarían futuros programas de investigación de operaciones

### **Antecedentes del Instituto CASE**

De acuerdo a Burton (1994) a partir de la década de los años 40's, el Instituto de Tecnología de Case, puso mayor énfasis en las ciencias aplicadas y la educación ingenieril, dedicando de alguna manera menos esfuerzo a los temas de negocios, economía e ingeniería industrial. El instituto Case consistía en aproximadamente 250 académicos y 5,000 estudiantes.

En 1947, Case formó un departamento de administración ingenieril e introdujo el grado de pasante en administración ingenieril. Subsecuentemente en 1941 se comenzó un programa de maestría en administración ingenieril, y en 1953, se inició el programa de doctorado en la misma. Durante este periodo, el programa de educación en administración evolucionó de un grado de pasante en ingeniería con opción a administración ingenieril a incluir también una licenciatura en administración ingenieril con una opción en ingeniería.

En 1950, Clay Hollyster un profesor dedicado a la enseñanza y la práctica de la IO, fue seleccionado jefe del departamento de administración ingenieril (Ackoff y Arnoff 1960). En ese tiempo el departamento consistía de seis miembros académicos.

### **Fundando el grupo de investigación de operaciones: 1951-1952**

Al inicio de 1951, la compañía ferroviaria de Chesapeake y Ohio quería formar un profesorado en investigación de operaciones, y el departamento de administración ingenieril se volvió el hogar de esta actividad. West Churchman fue seleccionado como profesor visitante en el departamento de IO. En 1951 condujo, para la compañía un estudio inicial de IO acerca del uso del muestreo estadístico en la estimación de costos de transportación para cargamentos ferroviarios interlíneas [Churchman 1952, 1955a]. También en los inicios de 1951, Russell L. Ackoff, se unió al proyecto de investigación Case de la Fuerza Aérea de los EUA.

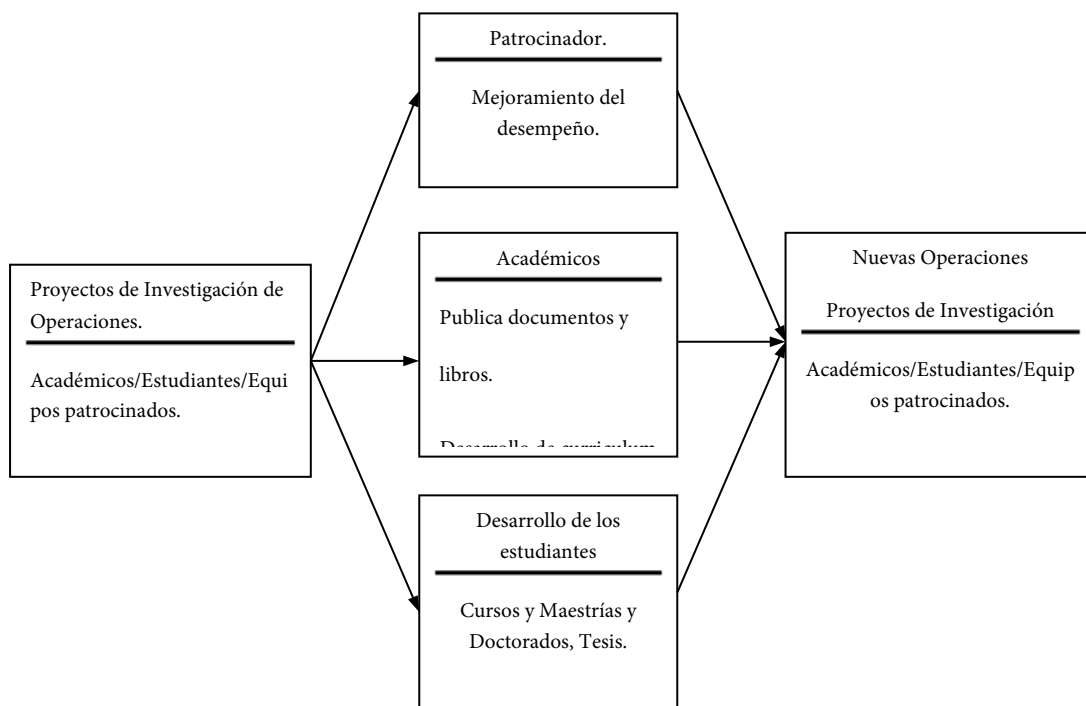
Durante 1951 y 1952, West Churchman y Russell Ackoff colaboraron en numerosas actividades, dando origen al establecimiento de un grupo de investigación de operaciones en Case. En noviembre de 1951, el Instituto Case, sostuvo una conferencia de tres días acerca de «la investigación de operaciones en los negocios y la industria», y que fue la primera conferencia en discutir como las organizaciones industriales estaban aplicando investigación de operaciones. El éxito abrumador y gran asistencia a esta conferencia animó al Instituto Case a formar el grupo de investigación de operaciones dentro de su departamento de administración ingenieril y bajo la dirección de West Churchman. Russell Ackoff se integró al grupo. En junio de 1952, el Instituto Case y varias organizaciones industriales condujeron durante una semana el primer curso corto de IO industrial. En 1955, el primer profesional con grado de maestría en IO se graduó y en 1957 el primero con grado de doctor.

### **Facultad multidisciplinaria y equipos de proyecto.**

Durante la década de los 50's el grupo de IO de Case, armó un equipo multidisciplinario de académicos y graduados asistentes en investigación. Para 1957 el grupo se había incrementado a treinta personas las cuales tenían antecedentes en matemáticas, estadística, física, química, psicología, economía, filosofía de la ciencia,

ingeniería -mecánica, industrial, y química-, mercadotecnia, e investigación de operaciones.

Alrededor de seis a ocho proyectos eran llevados en todo momento, con los académicos, asistentes graduados, y personal de las compañías conformando los equipos de proyecto. Los objetivos de cada equipo eran: (1) resolver un problema organizacional en particular, (2) introducir la filosofía, métodos y técnicas de la investigación de operaciones dentro de la organización, y (3) acrecentar la metodología de este campo y por lo tanto expandir las aplicaciones potenciales de la creciente disciplina de la investigación de operaciones.



*Figura 1: En los años 50's, el grupo del Instituto Case de Investigación de Operaciones condujo proyectos de investigación con equipos formados por miembros de la facultad, estudiantes graduados, y personal de las compañías, cada uno de los cuales lograba diferentes objetivos.*

El Instituto Case, utilizó los fondos generados por los proyectos para financiar a los Académicos y los asistentes graduados de investigación. Los representantes de los equipos proporcionaban asesoramiento administrativo al Comité de patrocinadores presentando regularmente reportes orales y escritos acerca de los resultados y el status de los proyectos.

Los Académicos y los asistentes en investigación que participaban en los proyectos se beneficiaban enormemente al involucrarse en el modelado y

mejoramiento de la solución del problema, para la toma de decisiones organizacionales. Los proyectos de IO, les proporcionaron los conceptos para desarrollar y probar métodos y técnicas para una útil administración de la solución de problemas. La actividad de los equipos originó mejoras en el desempeño de las compañías patrocinadoras, publicaciones de los académicos, desarrollo del currículum y un incremento del aprendizaje de los estudiantes, con base a la experiencia.

### **Conferencias de investigación de operaciones**

De 1951 a 1957 el grupo de investigación de operaciones de CASE condujo seis conferencias de tres días. Grandes audiencias asistieron. Burton (1994)

West Churchman dejó el instituto Case por la Universidad de California en Berkeley, en donde él fundó el programa de graduados en investigación de operaciones, y el centro para la investigación en Ciencias de la Administración, que posteriormente se convertirían en el centro para la investigación en la administración. como director del grupo de IO en Case comenzando en 1954. Burton (1994)



## **XI. Bibliografía**

- Assad, A., Gass, S. (2011). Profiles in Operations Research, Pionners and Innovators, Edit. Springer, Usa.
- Burton V. Dean (1994). West Churchman and Operations Research: Case Institute of Technology, 1951-1957, Interfaces Jul/Aug 1994
- Churchman, W., Ackoff, R., Arnoff, L. (1957). Introduction to Operations Research, Edit. Wiley, Usa.
- Gass, S. (2011) Model World: On the Evolution of Operations Research. Interfaces volumen 41, número 4, bimestre julio agosto del año 2011.
- Gass, S., Assad, A. (2005), An Annotated of Operations Reseach: An Informal History, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.
- Kittel, C. (1947). The Nature and Development of Operations Research, science 7 Vol. 105 no. 2719 pp. 150-153, [Recuperado de <http://www.sciencemag.org/content/105/2719/150.extract>, el 23 de abril de 2013]

# Capítulo II

## Programación lineal

- 2.1 Definiciones básicas
- 2.2 Variables de holgura y restricciones limitantes
- 2.3 Manipulación de un problema de programación lineal
- 2.4 Forma estándar y canónica de un problema de programación lineal
- 2.5 Formulación de modelos de programación lineal
- 2.6 Programación lineal, modelos y ejemplos
- 2.7 Formulación de modelos de programación lineal
- 3. Solución gráfica de los modelos de programación lineal
  - 3.1. Tipos de soluciones óptimas y regiones factibles de un problema de programación lineal
  - 3.2. Problemas resueltos y propuestos de programación lineal.
- 4. El método simplex
  - 4.1. El método simplex en formato de tableau
  - 4.2. El método simplex de la gran M (Método de penalización)
  - 4.3. Problemas propuestos para el algoritmo simplex
- 5. Aplicaciones diversas de programación lineal
- 6. Conclusiones del capítulo
- 7. Referencias y bibliografía

De acuerdo a Sierksma y Zwols (2017), en la literatura actual existen un gran rango de definiciones sobre la optimización lineal como rama de la investigación de operaciones. En general todas ellas consisten en una función objetivo con un conjunto de restricciones.

## 2.1 Definiciones básicas

Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeto a

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \geq b_1$$

$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \geq b_2$$

,

$$c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Donde  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  es la *función objetivo* (o función criterio) a minimizar y se denota por la letra  $Z$ . Los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son los *coeficientes de costos* (conocidos) y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las *variables de decisión* (variables, variables estructurales, o niveles de actividad) a determinar. Las desigualdades  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$  denotan la  $i$  – *ésima* restricción (o restricción o funcional, estructural o restricción tecnológica). Los coeficientes  $a_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  son llamados *coeficientes tecnológicos*. Estos coeficientes tecnológicos la matriz de restricciones **A**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El vector columna cuya  $i$  – *ésima* componente es  $b_i$ , se refiere al *vector del lado derecho*, representan los mínimos requerimientos a satisfacer. Las restricciones  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

Son las restricciones de *no negatividad*. Un conjunto de variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que satisfacen todas las restricciones es llamado un *punto factible* o un *vector factible*. El conjunto de todos estos puntos constituye la *región factible* o el *espacio factible*.

Usando la terminología citada, el problema de programación lineal puede plantearse se la siguiente forma: entre todos los vectores factibles, encontrar uno que minimice (o maximice) la función objetivo.

Usando el signo de sumatoria “ $\sum$ ”, el problema puede reescribirse como:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \text{ para } i = 1, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

En forma matricial, sea:

$$\mathbf{C} = [c_1 \quad \dots \quad c_n]^T \in R^n, \mathbf{b} = [b_1 \quad \dots \quad b_m]^T \in R^m, \mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T \in R^n$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in R^{m \times n}$$

El modelo anterior puede escribirse como:

$$\text{Min } Z = \{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

La región factible  $F$  del modelo de programación lineal satisface:  $\mathbf{F} = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Tomando como ejemplo el modelo de programación lineal siguiente, según Sierksma y Zwols (2015), para mostrar la forma matricial de los modelos de programación lineal.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para este caso, tenemos:

$$\mathbf{c} = [3 \ 2]^T \quad \mathbf{b} = [9 \ 18 \ 7 \ 6]^T, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T, \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

El modelo de programación lineal en su forma matricial puede escribirse como:

$$\text{Max} \left\{ [3 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 31 \\ 10 \\ 01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

## 2.2 Variables de holgura y restricciones limitantes

Si introducimos variables de holgura a nuestro problema de programación lineal, obtenemos el siguiente modelo:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 18$$

$$x_1 + x_5 = 7$$

$$x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

En este modelo,  $x_3, x_4, x_5, x_6$  son las variables de holgura no negativas del conjunto de restricciones. El número de variables de holgura será igual al número de restricciones con desigualdad menor o mayor que. En notación matricial el modelo es:

$$\text{Max} = \left\{ \begin{array}{l} [3 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Si  $I_m$  representa la matriz identidad con  $m$  renglones y  $m$  columnas ( $m \geq 1$ ), la forma general del problema de programación lineal con variables de holgura puede escribirse como:

$$\text{Max} \left\{ c^T \left[ A \quad I_m \right] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b, x \geq 0 \right\}$$

Con  $x \in R^n, x_s \in R^m, c \in R^n, A \in R^{m \times n}, I_m \in R^{m \times m}$  Hay que notar el valor de  $x_s$  (el vector de variables de holgura) satisface  $x_s = b - Ax$

De acuerdo a Bazaraa (1999) se requieren diversas hipótesis que están implícitas en el planteamiento de la programación lineal.

- Proporcionalidad

Dada una variable  $x_j$ , su contribución al costo total es  $c_j x_j$ , y su contribución a la  $i$ -ésima restricción es  $a_{ij} x_j$ .

- Aditividad  
Esta hipótesis garantiza que el costo total es la suma de los costos individuales, y que la contribución total a la  $i$ -ésima restricción es la suma de las contribuciones individuales de cada actividad.
- Divisibilidad  
Esta hipótesis asegura que las variables de decisión se pueden dividir en cualesquiera niveles fraccionarios, de modo que se permiten valores no enteros para las variables de decisión.
- Determinística

Todos los coeficientes  $c_j, a_{ij},$  y  $b_i$  se encuentran de manera determinística.

### 2.3 Manipulación de un problema de programación lineal

Mediante simples manipulaciones, el problema se puede transformar de una forma a otra forma equivalente. Las manipulaciones son muy útiles en la programación lineal.

#### *Desigualdades y ecuaciones*

Una desigualdad se puede transformar fácilmente en una ecuación. Por ejemplo,

considere las siguientes restricciones:  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ . Esta restricción se puede escribir en forma de ecuación sustrayendo la variable de exceso o de holgura no negativa  $x_{n+i}$

, obteniendo  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$  y  $x_{n+i} \geq 0$ . Similarmente, la restricción  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$  es equivalente a  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$  y  $x_{n+i} \geq 0$ .

### *No negatividad de las variables*

En casi todos los problemas prácticos, las variables representan cantidades físicas, por lo que deben ser no negativas.

Si una variable  $x_j$  no está restringida en su signo, entonces es posible reemplazarla por  $x'_j - x''_j$ , en donde  $x'_j \geq 0$  y  $x''_j \geq 0$ . Similarmente,  $x_j \geq l_j$ , entonces la nueva variable  $x'_j = x_j - l_j$  es no negativa de manera automática. También, si una variable  $x_j$  se restringe de modo que  $x_j \leq u_j$ , en donde  $u_j \leq 0$ , entonces la sustitución  $x'_j = u_j - x_j$  produce una variable no negativa  $x'_j$ .

### *Problemas de minimización y maximización*

Otra manipulación del problema consiste en convertir un problema de maximización en un problema de minimización y viceversa. Sobre cualquier región, se cumple:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\text{Min} \sum_{j=1}^n -c_j x_j$$



## 2.4 Forma estándar y canónica de un problema de programación lineal

De acuerdo a Bazaraa (1999) un problema puede expresarse en diferentes formas equivalentes por medio de manipulaciones adecuadas. Se trata de las formas estándar (o normal) y canónica. La forma estándar es útil para aplicar un algoritmo de solución: el método simplex. La forma canónica también es de utilidad, especialmente cuando se trata de aprovechar las características de las relaciones de dualidad. A continuación, se resumen en tabla No. 1, las formas estándar y canónica de un problema de programación lineal.

	<b>Problema de minimización</b>	<b>Problema de maximización</b>
<b>Forma estándar</b>	$\text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <p>Sujeta a: <math>\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m</math></p> $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$	$\text{Max} \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <p>Sujeta a: <math>\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m</math></p> $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$
<b>Forma canónica</b>	$\text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <p>Sujeta a: <math>\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m</math></p> $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$	$\text{Max} \sum_{j=1}^n c_j x_j$ <p>Sujeta a: <math>\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m</math></p> $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$

Tabla No. 1. Forma estándar y canónica de un problema de programación lineal

## **2.5 Formulación de modelos de programación lineal:**

Los siguientes pasos proporcionan una guía para el proceso de toma de decisiones en la construcción e implementación de modelos matemáticos.

Paso 1: Situación problemática

Paso 2: Definición del problema

Paso 3: Observación y análisis del problema

Paso 4: Diseñando un modelo conceptual

Paso 5: Formulando un modelo matemático

Paso 6: Resolviendo el modelo matemático

Paso 7: Tomando decisiones

Paso 8: Implementando la decisión

Paso 9: Evaluación

## **2.6 Programación lineal, modelos y ejemplos**

La optimización lineal se ha usado en una gran diversidad de aplicaciones, algunas son:

1. Problemas de transporte aéreo
2. Problemas de asignación
3. Problemas de transporte
4. Problemas de transbordo
5. Problemas de optimización en redes
6. Problemas de la ruta más corta
7. Problemas de la ruta crítica
8. Problemas de Finanzas
9. Problemas de procesos industriales
10. Manufactura: problemas de corte
11. Procesos industriales
12. Industria forestal
13. Problemas de agricultura
14. Exploración de gas y petróleo
15. Recursos naturales y políticas públicas
16. Procesamiento de alimentos
17. Comunicaciones y programas
18. Salud pública
19. Industria textil
20. Gobierno e industrial militar

## 2.7 Formulación de modelos de programación lineal

### Ejemplo No. 1

*Problema de mezcla de alimentos (Bazaraa, 1999)*

El personal técnico de un hospital desea desarrollar un sistema informatizado de planificación de menús. Para empezar, se busca un menú de almuerzo. El menú se divide en tres categorías principales: verduras, carne y postre. Se desea por lo menos una porción equivalente de cada categoría. El costo por porción de algunos artículos sugeridos, así como su contenido de carbohidratos, vitaminas, proteínas y grasas se resume a continuación en la Tabla No. 2:

Alimento	Carbohidratos	Vitaminas	Proteínas	Grasa	Costo en \$/ración
<b>Vegetables</b>					
Chicharos	1	3	1	0	0.10
Ejotes	1	5	2	0	0.12
Quingombó	1	5	1	0	0.13
Maíz	2	6	1	2	0.09
Macarrones	4	2	1	1	0.10
Arroz	5	1	1	1	0.07
<b>Carnes</b>					
Pollo	2	1	3	1	0.70
Res	3	8	5	2	1.20
Pescado	3	6	6	1	0.63
<b>Postres</b>					
Naranja	1	3	1	0	0.28
Manzana	1	2	0	0	0.42
Budín	1	0	0	0	0.15
Gelatina	1	0	0	0	0.12

*Tabla No. 2. Datos del problema de mezcla de alimentos.*

Suponga que los requerimientos mínimos de carbohidratos, vitaminas, proteínas, y grasas por comida son respectivamente 5, 10, 10 y 2. Formule un modelo de programación lineal para la planeación del menú.

Solución:

Sea  $x_1, \dots, x_{13}$  la cantidad de porción de comida de chicharos, ejotes, ..., budín, gelatina respectivamente. Función de costo mínimo:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 0.1x_1 + 0.12x_2 + 0.13x_3 + 0.09x_4 + 0.1x_5 + 0.07x_6 + 1.2x_8 + 0.63x_9 \\ & + 0.28x_{10} + 0.42x_{11} + 0.15x_{12} + 0.12x_{13} \end{aligned}$$

Sujeto a:

Inclusión de cada categoría de cada alimento: legumbres, carnes y postres, respectivamente

$$\sum_{i=1}^6 x_i \geq 1, \quad \sum_{i=7}^9 x_i \geq 1, \quad \sum_{i=10}^{13} x_i \geq 1$$

Requerimientos de carbohidratos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 3x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5$$

Requerimientos mínimos de vitaminas:

$$3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 + 8x_8 + 6x_9 + 3x_{10} + 2x_{11} \geq 10$$

Requerimientos mínimos de proteínas:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 + 5x_8 + 6x_9 + x_{10} \geq 10$$

Requerimientos mínimos de grasas:

$$2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + x_9 \geq 2$$

Condiciones de no negatividad:

$$x_1, x_2, \dots, x_{13} \geq 0$$

## Ejemplo No. 2

*Problema de producción (Bazaraa, 2010)*

Un fabricante de acero produce cuatro tamaños de vigas: pequeña, mediana, larga y extra larga. Estas vigas se pueden producir en cualquiera de tres tipos de máquinas: A, B y C. A continuación, se indican en la Tabla No. 3, las longitudes (en pies) de las vigas que pueden producir las máquinas por hora.

	MAQUINA		
VIGA	A	B	C
Pequeña	350	650	850
Mediana	250	400	700
Larga	200	350	600
Extra Larga	125	200	325

*Tabla No. 3. Datos del problema de producción*

Suponga que cada máquina se puede usar hasta 50 horas por semana, y que los costos de operación por hora de estas máquinas son \$30.00, \$50.00 y \$80.00, respectivamente. Además, suponga que semanalmente se requieren 12,000, 6,000, 5,000 y 7,000 pies de los distintos tamaños de las vigas. Formule el problema de programación de máquinas como un programa de programación lineal.

Sea  $x_{ij}$  = horas de máquina  $i$  para la producción del tamaño de viga  $j$ .  $i=1,2,3$  correspondiente a la máquina A, B, C.  $j=1,2,3,4$  correspondiente al tamaño de viga pequeña, mediana, larga y extra larga.

Solución:

Función objetivo o criterio (minimizar los costos de operación):

$$\text{Min } 30 \left( \sum_{j=1}^4 x_{1j} \right) + 50 \left( \sum_{j=1}^4 x_{2j} \right) + 80 \left( \sum_{j=1}^4 x_{3j} \right)$$

Sujeto a:

Disponibilidad de horas por máquina (por semana)

$$\text{Máquina A: } \sum_{j=1}^4 x_{1j} \leq 50, \text{ Máquina B: } \sum_{j=1}^4 x_{2j} \leq 50, \text{ Máquina C: } \sum_{j=1}^4 x_{3j} \leq 50$$

Demanda mínima semanal de cada tipo de viga (en función la capacidad de producción por cada tipo de máquina)

$$\text{Demanda viga pequeña: } 350x_{11} + 650x_{21} + 850x_{31} \geq 12,000$$

$$\text{Demanda viga mediana: } 250x_{12} + 400x_{22} + 700x_{32} \geq 6,000$$

$$\text{Demanda viga larga: } 200x_{13} + 350x_{23} + 600x_{33} \geq 5,000$$

$$\text{Demanda viga extra larga: } 125x_{14} + 200x_{24} + 325x_{34} \geq 7,000$$

$$\text{Condiciones de no negatividad: } \forall x_{ij} \geq 0$$

### **Ejemplo No. 3**

*Problema de planeación de la producción (Bazaraa, 2010)*

Un gerente de producción está planeando la programación de tres productos en cuatro máquinas. Cada producto se puede manufacturar en cada una de las máquinas. A continuación, se resumen en la Tabla No. 4, los costos de producción por unidad (en \$)

	<b>MÁQUINA</b>			
<b>PRODUCTO</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	4	4	5	7
<b>2</b>	6	7	5	6
<b>3</b>	12	10	8	11

*Tabla No. 4. Costos de producción del problema*

De igual forma, a continuación, se resume en la Tabla No. 5, el tiempo (en horas) requerido para producir cada unidad de producto en cada una de las máquinas.

	<b>MÁQUINA</b>			
<b>PRODUCTO</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	0.3	0.25	0.2	0.2
<b>2</b>	0.2	0.3	0.2	0.25
<b>3</b>	0.8	0.6	0.6	0.5

*Tabla No. 5. Tiempo de producción del problema de producción*

Suponga que se requieren 3,000, 6,000 y 4,000 unidades de los productos, y que las horas máquina disponibles son 1,500, 1,200, 1,500 y 2,000, respectivamente. Formule el problema de planeación de la producción como un problema lineal.



Solución:

Definición de las variables

Sea  $x_{ij}$  = # de unidades del producto  $i$  manufacturado en la máquina  $j$ .

Función objetivo (minimizar los costos de producción):

$$\text{Min } (4x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14}) + (6x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 6x_{24}) + (12x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 11x_{34})$$

Sujeto a:

Demanda por producto

$$\text{Producto 1: } \sum_{j=1}^3 x_{1j} \geq 3,000, \quad \text{Producto 2: } \sum_{j=1}^3 x_{2j} \geq 6,000, \quad \text{Producto 3: } \sum_{j=1}^3 x_{3j} \geq 4,000$$

Disponibilidad de horas máquina (en función del tiempo requerido para el proceso de producción):

$$0.3x_{11} + 0.2x_{21} + 0.8x_{31} \leq 1,500$$

$$0.25x_{12} + 0.3x_{22} + 0.6x_{32} \leq 1,200$$

$$0.2x_{13} + 0.2x_{23} + 0.6x_{33} \leq 1,500$$

$$0.2x_{14} + 0.25x_{24} + 0.5x_{34} \leq 2,000$$

Condiciones de no negatividad:

$$\forall x_{ij} \geq 0$$

#### **Ejemplo No. 4**

*Problema de gestión de una de una cartera de inversión (Powell y Baker, 2009)*

Un banco local quiere construir una cartera de bonos a partir de un conjunto de cinco bonos con 1 millón de dólares disponibles para la inversión. La rentabilidad anual esperada, la rentabilidad anual más desfavorable de cada bono y la duración de cada bono se presentan en la siguiente tabla No. 6 (La duración de un bono es una medida de la sensibilidad del bono a los cambios en las tasas de interés).

	<b>Rendimiento esperado</b>	<b>Retorno en el peor</b>	<b>Duración de cada</b>
Bono 1	12.5%	8.0%	8
Bono 2	11.5%	7.5%	7
Bono 3	10.5%	6.8%	6
Bono 4	9.5%	7%	5
Bono 5	8.5%	7.4%	3

*Tabla No. 6. Datos del problema de inversiones*

El banco quiere maximizar el rendimiento esperado de sus inversiones en bonos, sujeto a tres condiciones:

- La rentabilidad media de la cartera en el peor de los casos debe ser de al menos un 7.2 por ciento.
- La duración media de la cartera debe ser como máximo de 6.
- Debido a los requisitos de diversificación, casi el 40 por ciento del total de la inversión puede ser invertido en un solo bono

Formule el problema de cartera de inversiones como un problema de programación lineal.

Solución:

Sea  $x_i$  el bono de inversión tipo  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  a seleccionar para maximizar el rendimiento esperado de la cartera de inversiones.

Función criterio (Máximo rendimiento esperado):

$$\text{Max } Z = 0.125x_1 + 0.115x_2 + 0.105x_3 + 0.095x_4 + 0.085x_5$$

Sujeto a:

Rentabilidad media:

$$0.8x_1 + 0.3x_2 - 0.4x_3 - 0.2x_4 + 0.2x_5 \geq 0$$

Duración media de la cartera de inversión:

$$2x_1 + x_2 - x_4 - 3x_5 \leq 0$$

Recursos disponibles para la inversión:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1,000,000$$

Diversificación de las inversiones en un solo bono (restricciones por tipo de bono):

$$\begin{array}{r} 0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.4x_3 - 0.4x_4 - 0.4x_5 \leq 0 \\ -0.4x_1 + 0.6x_2 - 0.4x_3 - 0.4x_4 - 0.4x_5 \leq 0 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 + 0.6x_3 - 0.4x_4 - 0.4x_5 \leq 0 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 - 0.4x_3 + 0.6x_4 - 0.4x_5 \leq 0 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 - 0.4x_3 - 0.4x_4 + 0.6x_5 \leq 0 \end{array}$$

Condiciones de no negatividad:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

## Problema No. 5

*Problema de programación de la producción de automóviles (Powell y Baker 2009)*

La Auto Compañía de América (ACA) produce cuatro tipos de automóviles: subcompacto, compacto, intermedio y de lujo. ACA también produce camiones y furgonetas. Las capacidades de los proveedores limitan la capacidad total de producción a, como máximo, 1.2 millones de vehículos al año. Los subcompactos y los compactos se construyen juntos en una instalación con una capacidad total anual de 620,000 automóviles. Los coches intermedios y de lujo se producen en otra instalación con capacidad de 400,000; las camiones y camionetas (Van) tienen una capacidad de 275,000. La estrategia de mercadotecnia de ACA requiere que los subcompactos y compactos deben constituir al menos la mitad de la mezcla de productos para los cuatro tipos de automóviles. Los estándares de la Economía de Combustible Promedio previsto en la Ley de Política y Conservación de la Energía requieren una economía promedio de combustible de por lo menos 27 millas por galón. Los márgenes de los beneficios, el potencial del mercado y las eficiencias del combustible se resumen a continuación en la Tabla No. 7:

Datos	Sub compacto	Compacto	Intermedio	De lujo	Camión	Camioneta
Utilidad	150	225	250	500	400	200
Mercadotecnia	600	400	300	225	325	100
Eficiencia (millas por galón)	40	34	15	12	20	25
Objetivo eficiencia combustible	<b>27 millas por galón</b>					

*Tabla No. 7. Datos del problema de programación de la producción*

Formule el problema de producción de automóviles como un problema de programación lineal.

Solución:

Sea  $x_i$  el tipo de automóvil tipo  $i$  a fabricar,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , correspondiente al modelo sub compacto, compacto, intermedio, de lujo, camión y camioneta, respectivamente.

Función objetivo o criterio

$$\text{Max } Z = 150x_1 + 225x_2 + 250x_3 + 500x_4 + 400x_5 + 200x_6$$

Sujeto a:

Capacidad de producción total por año:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1,200,000$$

Capacidad instalada por planta para determinados tipos de autos

Planta 1 (sub compactos y compactos):

$$x_1 + x_2 \leq 620,000$$

Planta 2 (intermedio y de lujo):  $x_3 + x_4 \leq 400,000$

Planta 3 (camiones y camionetas):  $x_5 + x_6 \leq 275,000$

Mezcla de productos:  $x_1 + x_2 \geq x_3 + x_4$

Eficiencia en combustible (en función del objetivo de la empresa y de las regulaciones de gobierno):

$$13x_1 + 7x_2 \geq 12x_3 + 15x_4 + 7x_5 + 2x_6$$

Ventas subcompacto:  $x_1 \leq 600,000$

Ventas compacto:  $x_2 \leq 400,000$

Ventas Intermedio:  $x_3 \leq 300,000$

Ventas de lujo:  $x_4 \leq 225,000$

Ventas camión:  $x_5 \leq 325,000$

Ventas camioneta:  $x_6 \leq 100,000$

Condiciones de no negatividad:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

## **Problema No. 6**

### *Caso práctico1: American Sporting Equipment I (Lapin 1996)*

La compañía de equipo deportivo americano es fabricante de artículos para practicar deportes la cual abástese a equipos profesionales. La compañía fue fundada en los 40's por Millar Russel, poco después de recibir licencia del ejército, en donde había organizado ligas recreativas de béisbol. La experiencia de Russel, con varias heridas producidas por bates rotos, lo dirigió a buscar nuevos materiales y diseños. Sus bates fueron un éxito, y con tan solo un año en el negocio, Millar Russel tuvo contratos para abastecer de bates, a varios equipos de ligas menores de béisbol. La compañía pronto empezó a proveer otros equipos y ha crecido hasta convertirse en uno de los mayores fabricantes de equipo deportivo.

La compañía continúa produciendo bates a la medida para el béisbol profesional. El mercado primario para los bates es la madera. La empresa vende su producción completa a precios previamente negociados, y la disponibilidad de los recursos esenciales – especialmente de madera- indica las cantidades finales en el proceso productivo mensual. Los bates están hechos de pedazos de 4 x 4 pulgadas de madera dura de la más alta calidad. Existen 6 modelos, de acuerdo a las medidas. El Sr. Millar Russel, se encuentra bastante ocupado al dirigir su conglomerado, así que ha delegado en su hija Sandra Russel Davis el manejo operativo. Ella continúa revisando los calendarios mensuales de producción de la mayoría de las líneas productivas y muestra un vivo interés en los bates de béisbol hechos en la carolina del sur de la propia organización. La programación lineal ha probado ser útil en mantener la eficiencia operativa.

La mayoría de los materiales que se requieren para producir bates son abundantes y pueden ser obtenidos en cantidades ilimitadas. Sin embargo, existen severas limitantes con respecto a la madera, equipo y mano de obra que se necesita para el proceso.

*Tabla No. 8 datos de marzo bates de béisbol*

	<b>Largo de los bates (pulgadas)</b>						<b>Cantidad máxima Disponible</b>	<b>Costos</b>
	<b>30</b>	<b>32</b>	<b>34</b>	<b>36</b>	<b>38</b>	<b>40</b>		
<b>Materia prima</b>								
<b>Madera</b>	<b>30</b>	<b>32</b>	<b>34</b>	<b>36</b>	<b>38</b>	<b>40</b>	<b>10,000 pulgadas</b>	\$0.08 por pulgada
<b>Recursos usados para el proceso de producción de bates</b>								
Tiempo en el torno	10	10	11	11	12	12	5,000 minutos	\$0.05 por minuto
Tiempo en el acabado	25	27	29	31	33	35	8,000 minutos	\$0.02 por minuto
Tiempo de cura	1	1	1	1	1	1	500 horas	\$0.50 por hora

Tiempo en el molido	2	2	2	3	3	3	1,000 minutos	\$ .30 por minuto
Revestimiento	5	5	6	6	7	7	2,000 minutos	\$ .25 por minuto

Los datos que aparecen en la tabla número 8 son útiles para establecer el programa de programación lineal para la producción de bates planeada en marzo.

Las restricciones adicionales del sistema son:

1. El número de bates de 34" no pueden exceder el total combinado de bates de los modelos de 30" y 32".
2. El número de bates de 38" no puede exceder el combinado total de los modelos de 32" y 34".
3. El número de bates de 30" debe ser menor o igual al número total de los de 36" y 38". Se aplican los siguientes costos:

Otros costos directos son \$2 por bate, sin importar el y tamaño. Los precios de venta son \$21 el de 30" y 32", \$22 los modelos de 34" y 36", y \$25 para los modelos de 38" y 40". La tabla 2 muestra la utilidad por bate considerando los costos por bate por recursos utilizados en proceso de producción.

Tabla No.9

	Utilidad y costo por cada tipo de bate					
	<u>Modelos</u>					
Medida del Bate (pulgadas)	30	32	34	36	38	40
Costos totales por bate	\$7.75	\$7.95	\$8.45	\$8.95	\$9.45	\$9.65
<b>Otros costos</b>	<b>\$2.00</b>	<b>\$2.00</b>	<b>\$2.00</b>	<b>\$2.00</b>	<b>\$2.00</b>	<b>\$2.00</b>
Precio de venta	\$21	\$21	\$22	\$22	\$25	\$25
<b>Utilidad total por bate</b>	<b>\$13.25</b>	<b>\$13.05</b>	<b>\$13.55</b>	<b>\$13.05</b>	<b>\$15.55</b>	<b>\$15.35</b>

Solución:

Sean  $x_{30}$ ,  $x_{32}$ ,  $x_{34}$ ,  $x_{36}$ ,  $x_{38}$ ,  $x_{40}$  el modelo de bate a producir correspondiente a la medida de 30, 32, 34, 36, 38 y 40 pulgadas, respectivamente.

Función objetivo (maximizar la utilidad por tipo de bate producido:

$$\text{Max } Z = 13.25x_{30} + 13.05x_{32} + 13.55x_{34} + 13.05x_{36} + 15.55x_{38} + 15.35x_{40}$$

Sujeto a:

Materia prima (Madera):

$$30x_{30} + 32x_{32} + 34x_{34} + 36x_{36} + 38x_{38} + 40x_{40} \leq 10,000$$

Tiempo en torno, tiempo en acabado, tiempo de cura, tiempo en molido y revestimiento, respectivamente:

$$10x_{30} + 10x_{32} + 11x_{34} + 11x_{36} + 12x_{38} + 12x_{40} \leq 5,000$$

$$25x_{30} + 27x_{32} + 29x_{34} + 31x_{36} + 33x_{38} + 35x_{40} \leq 8,000$$

$$x_{30} + x_{32} + x_{34} + x_{36} + x_{38} + x_{40} \leq 500$$

$$2x_{30} + 2x_{32} + 2x_{34} + 3x_{36} + 3x_{38} + 3x_{40} \leq 1,000$$

$$5x_{30} + 5x_{32} + 6x_{34} + 6x_{36} + 7x_{38} + 7x_{40} \leq 2,000$$

Restricciones adicionales del sistema:

$$x_{34} \leq x_{32} - x_{30}, \quad x_{38} \leq x_{32} + x_{34}, \quad x_{30} \leq x_{36} + x_{38}$$

Condiciones de no negatividad:  $x_{30}, x_{32}, x_{34}, x_{36}, x_{38}, x_{40} \geq 0$



### 3. Solución gráfica de los modelos de programación lineal

Ahora se describirá un procedimiento geométrico para resolver un problema de programación lineal. Aunque este método solo es idóneo para problemas con un número reducido de variables, proporcionan bastante información para comprender el problema de programación lineal.

Considere el siguiente problema:  $Min \{c\mathbf{x} | A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ . La región factible consta de todos los vectores  $\mathbf{x}$  tales que  $A\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ . Entre todos estos puntos, se desea encontrar un punto que minimice el valor de  $c\mathbf{x}$ .

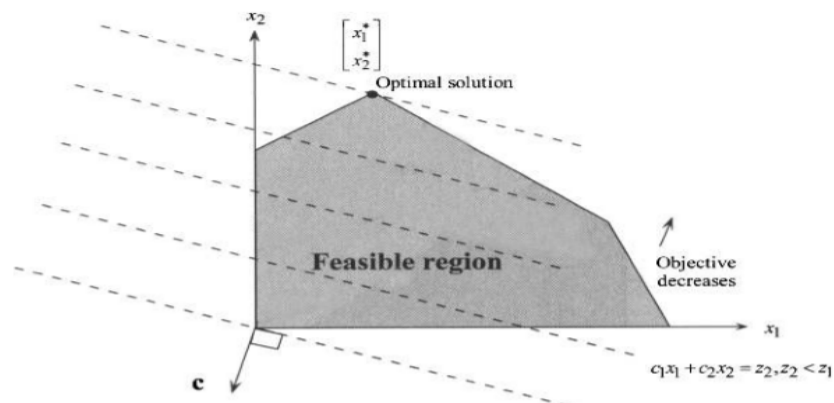
#### 3.1. Tipos de soluciones óptimas y regiones factibles de un problema de programación lineal

En muchas ocasiones un modelo de programación lineal puede tener más de una solución óptima.

Los tipos de regiones factibles de un modelo de programación lineal pueden ser:

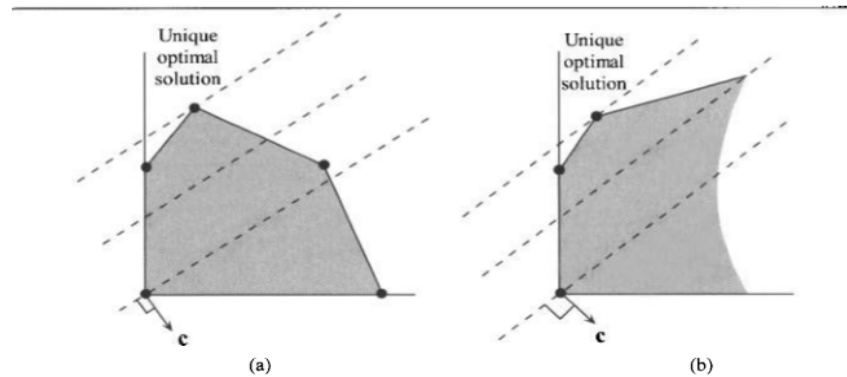
- *Solución óptima finita única.* Si la solución óptima finita es única, entonces ocurre en un punto extremo. La solución óptima finita puede presentarse en una región factible acotada o no. Sin embargo, en cada caso la solución óptima única es finita.

En la siguiente gráfica No. 1, se muestra una región de factibilidad acotada con óptimo único. (Bazaraa, 1997)



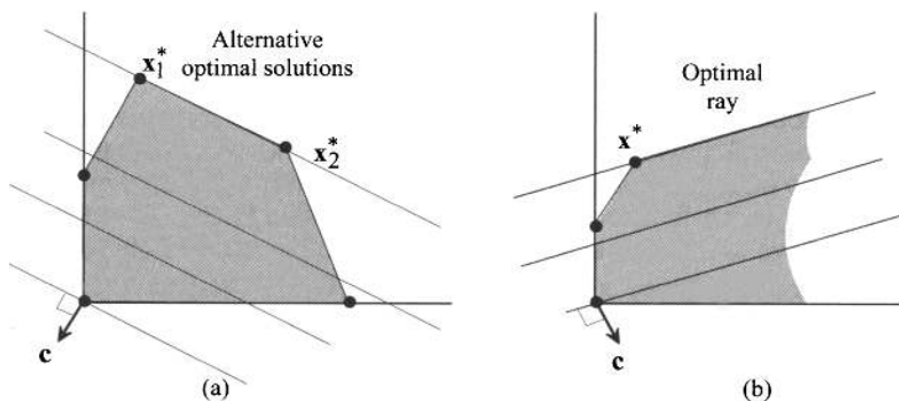
Gráfica No. 1. Solución óptima finita única en una región acotada. Fuente: Bazaraa (2010)

La siguiente gráfica No. 2, muestra un problema de programación lineal contiene una solución óptima finita en una región acotada y una solución óptima finita en una región no acotada.



Gráfica No. 2. Óptimos únicos en una región acotada y no acotada. Fuente: Bazaraa (2010)

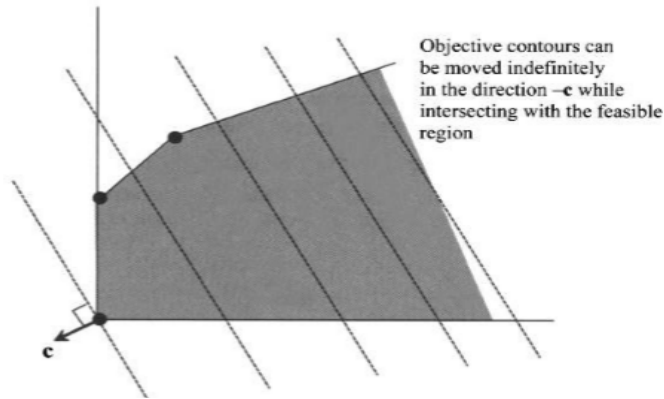
- *Soluciones óptimas finitas alternativas.* En estos casos existen dos vértices que son óptimos. La región factible puede ser acotada o no acotada. Para el primer caso (región acotada) existen óptimos alternativos cuya solución es la misma. Para el segundo caso (región no acotada) existe un punto extremo, que es óptimo, y un conjunto de puntos factibles en un rayo óptimo. La siguiente gráfica No. 3, muestra ambos casos.



Gráfica No. 3. Óptimos alternativos en una región acotada y no acotada. Fuente: Bazaraa (2010)

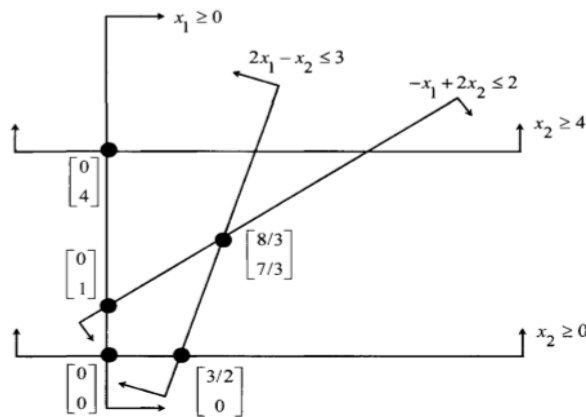
- *Solución óptima no acotada.* En este caso la región factible y la solución óptima no están acotadas. En este caso el objetivo decrece o crece infinitamente y no existe

solución óptima. La gráfica siguiente gráfica No. 5, muestra una solución óptima no acotada.



Gráfica No. 5. Solución óptima no acotada. Fuente: Bazaraa (2010)

- *Región factible vacía.* En este caso, el sistema de ecuaciones y/o desigualdades que definen la región factible es inconsistente. La siguiente gráfica No. 6, muestra una región factible vacía.



Gráfica No. 6. Ejemplo de región factible vacía. Fuente: Bazaraa (2010)

### 3.2. Problemas resueltos y propuestos de programación lineal.

#### Problema No. 1

**Venkataraman (2002).** Resuelva el siguiente problema de dos variables, elabore la gráfica del problema y encuentre la solución utilizando el procedimiento de solución geométrico o gráfico.

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Sujeto a:

$$3x_1 - x_2 \leq 3$$

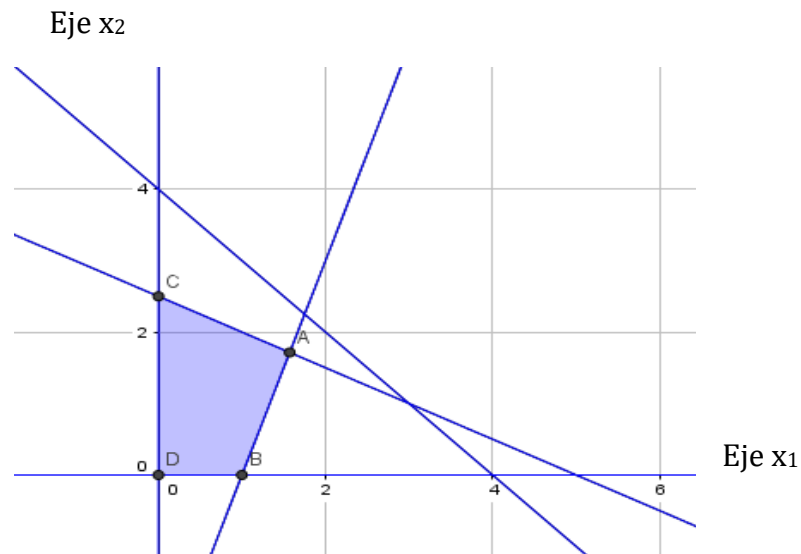
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución:

Región de factibilidad y puntos extremos:



Puntos extremos:

$$A = \left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right), B = (1, 0), C = \left(0, \frac{5}{2}\right), D = (0, 0)$$

Evaluando en cada punto extremo para obtener el punto óptimo:

$$f\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right) = \frac{23}{7} = 3\frac{2}{7} \quad \text{Solución óptima del problema de maximización}$$

$$f(1,0) = 0$$

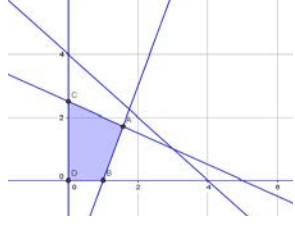
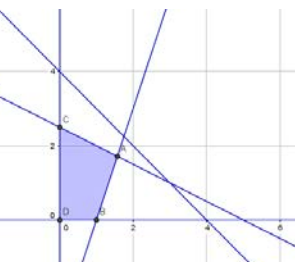
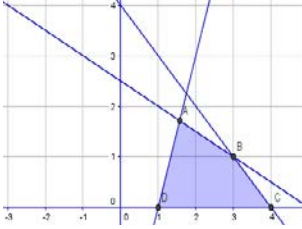
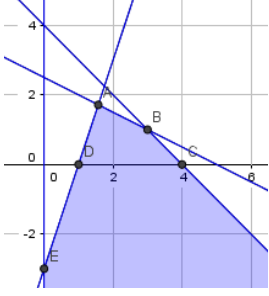
$$f\left(0, \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$f(0,0) = 0$$

El punto óptimo para el problema de minimización es el punto  $D$  (*el origen*), con coordenadas  $(x_1, x_2) = (0,0)$ .

Si el problema es maximización, entonces la solución óptima es el punto  $A = (11/7, 12/7)$ , con  $f^* = 3\frac{2}{3}$ .

**Problema No. 2: Venkataraman (2002).** Para el siguiente conjunto de problemas repita las instrucciones del problema anterior

Modelo	Gráfica de la región factible	Puntos Extremos de la región factible	Evaluación en cada punto extremo y solución óptima del problema (asterisco)
<p><math>Max f(x_1, x_2) = x_1 + x_2</math>                      Sujeto a:  <math>3x_1 - x_2 \leq 3</math>  <math>x_1 + 2x_2 \leq 5</math>  <math>x_1 + x_2 \leq 4</math>  <math>x_1, x_2 \geq 0</math></p>		<p><math>A = \left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right)</math>,  <math>B = (1, 0)</math>,  <math>C = \left(0, \frac{5}{2}\right)</math>,  <math>D = (0, 0)</math></p>	<p><math>f\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right) = \frac{23}{7}^*</math>  <math>f(1, 0) = 1</math>  <math>f\left(0, \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}</math>  <math>f(0, 0) = 0</math></p>
<p><math>Min f(x_1, x_2) = x_1 - x_2</math>                      Sujeto a:  <math>3x_1 - x_2 \leq 3</math>  <math>x_1 + 2x_2 \leq 5</math>  <math>x_1 + x_2 \leq 4</math>  <math>x_1, x_2 \geq 0</math></p>		<p><math>A = \left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right)</math>,  <math>B = (1, 0)</math>,  <math>C = \left(0, \frac{5}{2}\right)</math>,  <math>D = (0, 0)</math></p>	<p><math>f\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right) = -\frac{1}{7}</math>  <math>f(1, 0) = 1</math>  <math>f\left(0, \frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2}^*</math>  <math>f(0, 0) = 0</math></p>
<p><math>Max f(x_1, x_2) = x_1 + x_2</math>                      Sujeto a:  <math>3x_1 - x_2 \geq 3</math>  <math>x_1 + 2x_2 \leq 5</math>  <math>x_1 + x_2 \leq 4</math>  <math>x_1, x_2 \geq 0</math></p>		<p><math>A = \left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right)</math>  <math>B = (3, 1)^*</math>  <math>C = (4, 0)^*</math>  <math>D = (1, 0)</math></p>	<p><math>f(A) = \frac{23}{7}</math>  <math>f(B) = 4^*</math>  <math>f(C) = 4^*</math>  <math>f(D) = 1</math>                      Óptimos alternos</p>
<p><math>Min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2</math>                      Sujeto a:  <math>3x_1 - x_2 \leq 3</math>  <math>x_1 + 2x_2 \leq 5</math>  <math>x_1 + x_2 \leq 4</math>  <math>x_1 \geq 0, x_2</math> no restringida</p>		<p><math>A = \left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}\right)</math>  <math>B = (3, 1)</math>  <math>C = (4, 0)</math>  <math>D = (1, 0)</math>  <math>E = (0, -3)^*</math></p>	<p><math>f(A) = \frac{23}{7}</math>  <math>f(B) = 4</math>  <math>f(C) = 4</math>  <math>f(D) = 1</math>  <math>f(E) = -3^*</math></p>

**Problema No. 3***Griva, Nash y Sofer (2009). Resuelva los siguientes problemas gráficamente.*

<b>a)</b>	<b>b)</b>	<b>c)</b>
$Min Z = 3x_1 + x_2$  Sujeto a:  $x_1 - x_2 \leq 1$ $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ $2x_1 + 3x_2 \leq 3$ $-2x_1 + 3x_2 \geq 9$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Max Z = x_1 + 2x_2$  Sujeto a:  $2x_1 + x_2 \geq 12$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $-x_1 + 3x_2 \leq 3$ $6x_1 - x_2 \geq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Min Z = x_1 - 2x_2$  Sujeto a:  $x_1 - 2x_2 \geq 4$ $x_1 + x_2 \leq 12$ $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$

<b>d)</b>	<b>e)</b>	<b>f)</b>
$Min Z = -x_1 - x_2$  Sujeto a:  $x_1 - x_2 \geq 1$ $x_1 - 2x_2 \geq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Min Z = x_1 - x_2$  Sujeto a:  $x_1 - x_2 \geq 2$ $2x_1 + x_2 \geq 1$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Min Z = 4x_1 - x_2$  Sujeto a:  $x_1 + 2x_2 \leq 6$ $x_1 - x_2 \geq 3$ $-x_1 + 2x_2 \geq 2$ $x_1, x_2 \geq 0$

<b>g)</b>	<b>h)</b>	<b>i)</b>
$Max Z = 6x_1 - 3x_2$  Sujeto a:  $3x_1 + 2x_2 \leq 40$ $2x_1 + 5x_2 \geq 10$ $x_1, x_2 \leq 15$	$Min Z = x_1 + 9x_2$  Sujeto a:  $2x_1 + x_2 \leq 100$ $x_1 + x_2 \leq 80$ $x_1 \leq 40$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Min Z = -5x_1 - 7x_2$  Sujeto a:  $-3x_1 + 2x_2 \leq 30$ $-2x_1 + x_2 \leq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$

Para el siguiente conjunto de problemas elabore el modelo de programación lineal. Si el modelo es de dos variables, use el método gráfico para resolver el problema. Use el programa Geogebra para graficar la región de factibilidad y obtener los puntos extremos.

**Problema No. 4**

**Anderson y Sweeney (2011).** *Problema de producción.* Par, Inc. es un pequeño fabricante de equipo y material de golf. El distribuidor de Par cree que existe un mercado tanto para una bolsa de golf de precio moderado, llamada modelo estándar, como para una bolsa de golf de un precio alto, llamada modelo de lujo. El distribuidor tiene tanta confianza en el mercado que, si Par puede fabricar las bolsas a un precio competitivo, comprará todas las bolsas que Par fabrique durante los tres meses siguientes. Un análisis detallado de los requerimientos de manufactura dio como resultado la tabla siguiente, la cual muestra los requerimientos de tiempo de producción para las cuatro operaciones de manufactura requeridas y la estimación que hizo el departamento de contabilidad de la contribución a las utilidades por bolsa:

	Tiempo de producción (horas)				
Producto	Corte y	Costura	Terminado	Inspección y	Utilidad por
Estándar	$\frac{7}{1}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{4}$	\$10
De lujo	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	\$9

El director de manufactura estima que se dispondrá de 630 horas de corte y teñido, 600 horas de costura, 708 horas de acabado y 135 horas de inspección y empaque para la producción de las bolsas de golf durante los tres meses siguientes. a) Si la empresa quiere maximizar la contribución total a las utilidades, ¿cuántas bolsas de cada modelo debe fabricar? b) ¿Qué contribución a las utilidades puede obtener Par con estas cantidades de producción? c) ¿Cuántas horas de tiempo de producción se programarán para cada operación? d) ¿Cuál es el tiempo de holgura en cada operación?



### **Problema No. 5**

**Anderson y Sweeney (2011).** *Nuevo problema de producción.* Kelson Sporting Equipment, Inc. fabrica dos tipos diferentes de guantes de béisbol: un modelo regular y un modelo para catcher. La empresa dispone de 900 horas de tiempo de producción en su departamento de corte y confección, 300 horas en su departamento de acabados y 100 horas en su departamento de empaque y envío. Los requerimientos de tiempo de producción y la contribución a las utilidades por guante se proporcionan en la tabla siguiente:

Modelo	Tiempo de producción (horas)			Utilidad por guante
	Corte y confección	Acabados	Empaque y envío	
Modelo regular	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	\$5
Modelo para catcher	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	\$8

Suponiendo que la empresa está interesada en maximizar la contribución total a las utilidades, responda lo siguiente: a) ¿Cuál es el modelo de programación lineal para este problema? b) Encuentre la solución óptima utilizando el procedimiento de solución gráfica. ¿Cuántos guantes de cada modelo debe fabricar Kelson? c) ¿Qué contribución total a las utilidades puede obtener Kelson con las cantidades de producción dadas? d) ¿Cuántas horas de tiempo de producción se programarán en cada departamento? e) ¿Cuál es el tiempo de holgura en cada departamento?

### **Problema No. 6**

**Anderson y Sweeney (2011).** *Problema de inversiones.* National Insurance Associates tiene un portafolio de inversión de acciones, bonos y otras alternativas de inversión. Actualmente cuenta con \$200,000 en fondos y debe considerar nuevas oportunidades de inversión. Las cuatro opciones de acciones que National considera y los datos en materia de finanzas relevantes son los siguientes:

	<b>Acción</b>			
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
Precio por acción	100	50	80	40
Tasa de rendimiento anual	0.12	0.08	0.06	0.10
Medida de riesgo por dólar invertido				

La medida del riesgo indica la incertidumbre relativa asociada con la acción en función de que se logre el rendimiento anual proyectado; los valores más altos indican un riesgo mayor. El asesor de finanzas de la empresa proporciona las medidas del riesgo.

La gerencia ejecutiva de National ha estipulado los siguientes lineamientos de inversión: la tasa de rendimiento anual para el portafolio debe ser por lo menos 9%, y ninguna acción debe corresponder a más de 50% de la inversión total.

a) Utilice la programación lineal para elaborar un portafolio de inversión que minimice el riesgo. b) Si la empresa ignora el riesgo y utiliza una estrategia de rendimiento máximo sobre la inversión, ¿cuál es el portafolio de inversión?

c) ¿Cuál es la diferencia en dinero entre los portafolios de los incisos a y b? ¿Por qué la empresa desea la solución desarrollada en el inciso a?

**Problemas de programación lineal en forma estándar.**

*Convierta los siguientes problemas lineales a su forma estándar*

<b>Problema No. 1</b>	<b>Problema No. 2</b>	<b>Problema No. 3</b>
$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3$ <p style="text-align: center;"><i>Sujeto a:</i></p> $7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4$ $-2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -3$ $5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9$ $x_1 \geq 1$ $x_2 \leq 7$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$ <p style="text-align: center;"><i>Sujeto a:</i></p> $2x_1 + x_2 \geq 12$ $x_1 + x_2 \geq 5$ $-x_1 + 3x_2 \leq 3$ $6x_1 - x_2 \geq 12$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Min } Z = x_1 - 2x_2$ <p style="text-align: center;"><i>Sujeto a:</i></p> $x_1 - 2x_2 \geq 4$ $x_1 + x_2 \leq 12$ $2x_1 + 3x_2 \leq 8$ $x_1, x_2 \text{ libres}$

**Problemas conceptuales**

**Bazaraa (2010).** *Resuelva los siguientes problemas utilizando el método gráfico:*

<b>Problema No. 1</b>	<b>Problema No. 2</b>
$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2$ <p style="text-align: center;"><i>Sujeto a:</i></p> $x_1 - 3x_2 \leq 3$ $-2x_1 + x_2 \leq 2$ $-3x_1 + 4x_2 \leq 12$ $3x_1 + x_2 \geq 9$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Min } Z = x_1 - 2x_2$ <p style="text-align: center;"><i>Sujeto a:</i></p> $x_1 + x_2 \geq 2$ $-x_1 + x_2 \geq 1$ $x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$

**Sierksma y Zwols (2015).** Resuelva los siguientes problemas de programación lineal usando el método de solución gráfica.

Problema No. 3	Problema No. 4	Problema No. 5
$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$ <p>Sujeto a:</p> $-x_1 + 2x_2 \leq 4$ $3x_1 + x_2 \leq 9$ $x_1 + 4x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Min } Z = 11x_1 + 2x_2$ <p>Sujeto a:</p> $x_1 + x_2 \leq 4$ $15x_1 - 2x_2 \geq 0$ $5x_1 + x_2 \geq 5$ $2x_1 + x_2 \geq 3$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\text{Min } Z = 12x_1 + 5x_2$ <p>Sujeto a:</p> $x_1 + 2x_2 \geq 4$ $5x_1 + 6x_2 \leq 7$ $8x_1 + 9x_2 = 5$ $x_1, x_2 \geq 0$

Problema No. 6	Problema No. 7
$\text{Min } Z = 25x_1 + 17x_2$ <p>Sujeto a:</p> $0.21x_1 + 0.55x_2 \geq 3$ $0.50x_1 + 0.30x_2 \geq 7$ $0.55x_1 + 0.10x_2 \geq 5$ $x_1, x_2 \text{ libres}$	$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4$ <p>Sujeto a:</p> $x_1 + x_2 \leq 6$ $25x_3 + 3x_4 \leq 12$ $-x_3 + x_4 \geq -2$ $2x_1 - x_2 \leq 4$ $2x_3 - x_4 \geq -1$ $x_2 \leq 2$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

#### 4. El método simplex

En esta sección se aborda el estudio del método simplex, que fue creado en el verano de 1947 por George Dantzing para resolver problemas de programación lineal. La primera aplicación importante de este método ocurrió poco después del verano de 1947, cuando J. Lideran resolvió, un programa lineal de planeación de una dieta con nueve restricciones de igualdad en 27 variables no negativas. Usando una calculadora de escritorio, para resolver este problema se requirieron 120 días – hombre. Actualmente, usando computadoras modernas y una implementación sofisticada del método simplex, es fácil resolver problemas lineales con miles de variables y restricciones. Aunque se han desarrollado muchas variantes del método simplex y se han propuesto otros nuevos algoritmos competidores, el método simplex sigue siendo un medio viable y popular para resolver problemas de programación lineal.

##### 4.1. El método simplex en formato de tableau

(Problema de minimización)

###### Paso inicial

Se encuentra una solución básica inicial con base  $\mathbf{B}$  y se forma el siguiente tablero inicial.

	z	$x_B$	$x_N$	LD
z	1	$\mathbf{0}$	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B \bar{b}$
$x_B$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$B^{-1} N$	$\bar{b}$

###### Paso principal

Sea  $z_k - c_k = \text{Máximo} \{z_j - c_j : j \in R\}$ . Si  $z_k - c_k \leq 0$ , entonces el proceso ha terminado; la solución actual es óptima. En caso contrario, se analiza  $y_k$ . Si  $y_k \leq 0$ , entonces el proceso ha terminado; la solución óptima es no acotada a lo largo del rayo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

En donde  $e_k$  es un vector de ceros excepto por 1 en la  $k$ -ésima posición. Si  $y_k$  no es menor o igual que cero, entonces el índice  $r$  se determina como sigue:

$$\frac{b_r}{y_{rk}} \equiv \text{Minimo}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

El tableu se actualiza pivoteando sobre  $y_{rk}$ . Se actualizan las variables básicas y no básicas, en donde  $x_k$  entra a la base y  $x_{B_r}$  sale de la base, y se repite el paso principal.

A continuación, se muestra un ejemplo numérico con la finalidad de mostrar el método simplex paso a paso. Bazaraa (2010)

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

*Sujeto a:*

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Se introducen las variables de holgura no negativas  $x_4, x_5, x_6$ . El problema se convierte en el siguiente modelo de programación lineal en su forma estándar.

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

*Sujeto a:*

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Con lo anterior se obtiene el siguiente tablero inicial. Posteriormente, las correspondientes iteraciones.

### Iteración 1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Lado Derecho	Razón mínima
$z$	-1	-1	4*	0	0	0	0	
$x_4$	1	1	2	1	0	0	9	4.5
$x_5$	1	1	-1	0	1	0	2	
$x_6$	-1	1	<u>1</u>	0	0	1	4	4*

### Iteración 2

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Lado Derecho	Razón mínima
$z$	3*	-5	0	0	0	-4	-16	
$x_4$	<u>3</u>	-1	0	1	0	-2	1	0.3333*
$x_5$	0	2	0	0	1	1	6	
$x_3$	-1	1	1	0	0	1	4	

### Tablero óptimo

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Lado Derecho
$z$	0	-4	0	-1	0	-2	-17
$x_1$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_5$	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

Este es el tablero óptimo, debido  $z_k - c_k \leq 0$ . La solución óptima está dada por:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{13}{3} \text{ con } z = -17$$

Ahora, con la finalidad de observar la motivación geométrica del método simplex analizaremos un problema y lo resolveremos con el método gráfico y posteriormente utilizaremos el algoritmo simplex.

Resuelva el siguiente problema. Gráficamente y utilizando en algoritmo simplex. Utilice el programa Geogebra para resolver mediante el método algebraico y Excel para el método simplex. Verifique que con ambos procedimientos se obtiene el mismo resultado.

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\-2x_1 + x_2 &\leq 4 \\5x_1 + 3x_2 &\leq 15\end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución: construyendo la región de factibilidad y obteniendo los puntos extremos con Geogebra y sustituyendo los puntos extremos de la región de factibilidad en el modelo de programación lineal, se obtiene la solución que se indica a continuación:



<u>Modelo de programación lineal</u>	<u>Gráfica de la región factible</u>	<u>Puntos Extremos de la región factible</u>	<u>Evaluación en cada punto extremo y solución óptima del problema (asterisco)</u>
$\text{Max } f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$ <p>Sujeto a:</p> $x_1 + 2x_2 \leq 6$ $-2x_1 + x_2 \leq 4$ $5x_1 + 3x_2 \leq 15$ $x_1, x_2 \geq 0$		$A = (0,0)$ $B = (0,3)$ $C = \left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)^*$ $D = (3,0)$	$f(A) = 0$ $f(B) = 12$ $f(C) = 17\frac{1}{7}^*$ $f(D) = 15$

### Resolviendo el problema con el algoritmo simplex.

Se introducen las variables de holgura no negativas  $x_3, x_4, x_5$ . El problema se convierte en el siguiente modelo de programación lineal en su forma estándar.

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_5 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Tablero inicial:

**Inicialización**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Lado Derecho	Razón mínima
$z$	-5*	-4	0	0	0	0	
$x_3$	1	2	1	0	0	6	6
$x_4$	-2	1	0	1	0	4	
$x_5$	5	3	0	0	1	15	3*

**Iteración 1**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Lado Derecho	Razón mínima
$z$	0	-1*	0	0	1	15	
$x_3$	0	7/5	1	0	-1/5	3	15/7*
$x_4$	0	11/5	0	1	2/5	10	50/11
$x_1$	<u>1</u>	3/5	0	0	1/5	3	5

**Iteración 2**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Lado Derecho
$z$	0	0	5/7	0	6/7	120/7
$x_2$	0	1	5/7	0	-1/7	15/7
$x_4$	0	0	-11/7	1	5/7	37/7
$x_1$	1	0	-3/7	0	2/7	12/7

Tablero óptimo, debido a que  $z_k - c_k \geq 0$ , la solución óptima está dada por:

$$x_1 = \frac{12}{7}, x_2 = \frac{15}{7}, x_3 = \frac{37}{7} \text{ con } z = 17\frac{1}{7}$$

Ahora, resolvamos el problema 3.2.4.1 de Anderson y Sweeney (2010), problema de producción utilizando el método simplex.

Solución:

Sea  $x_1$  = número de bolsas modelo estándar a fabricar y  $x_2$  = número de bolsas modelo de lujo a fabricar. Los datos del problema se muestran a continuación:

	Tiempo de producción (horas)				
Producto	Corte y teñido	Costura	Terminado	Inspección y empaque	Utilidad por bolsa
Estándar	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{10}$	\$10
De lujo	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	\$9
máximo de horas por departamento	630	600	708	135	

Función criterio: máxima utilidad por bolsa:  $Max Z = 10x_1 + 9x_2$

Restricciones del sistema: Tiempo de producción por departamento y horas disponibles máximas

Departamento de corte y teñido:  $\frac{7}{10}x_1 + x_2 \leq 630$

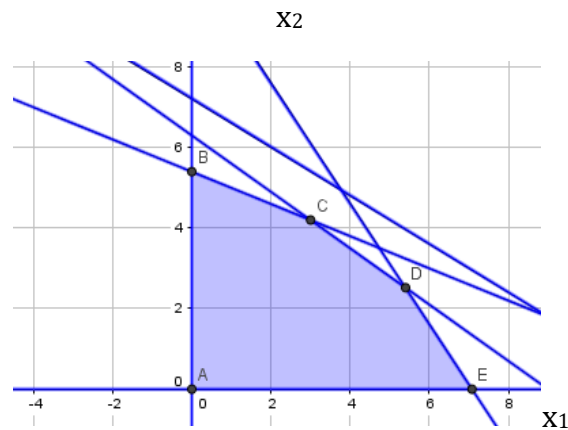
Departamento de costura:  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 \leq 600$

Departamento de terminado:  $x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 708$

Departamento de inspección y empaque:  $\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 135$

Condiciones de no negatividad:  $x_1, x_2 \geq 0$

Región de factibilidad y puntos extremos del modelo de programación lineal:



Puntos extremos: A= (0,0), B= (0,540), C= (300,420), D= (540,252) y E= (708,0)

Evaluación de cada punto extremo en la función objetivo y determinación de la solución del problema.

$$\text{Max } Z_A = 0, \text{Max } Z_B = 4,860, \text{Max } Z_C = 6,780, \text{Max } Z_D = 7,668, \text{Max } Z_E = 7,080$$

En consecuencia, la solución óptima es el punto extremo D = (540,252) y valor objetivo Z= 7,668.

Es decir: prodúzcanse 540 bolsas modelo estándar y 252 bolsas modelo de lujo. La utilidad con los niveles de producción anteriores será de \$7,668 unidades monetarias.

### Utilizando el algoritmo simplex

Se introducen las variables de holgura no negativas  $x_3, x_4, x_5, x_6$  . El problema se convierte en el siguiente modelo de programación lineal en su forma estándar.

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 9x_2$$

Sujeto a:

$$\frac{7}{10}x_1 + x_2 + x_3 = 630$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + x_4 = 600$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_5 = 708$$

$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + x_6 = 135$$

$$x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tablero inicial:

**Inicialización**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Lado Derecho	Razón mínima
$z$	-10*	-9	0	0	0	0	0	
$x_3$	7/10	1	1	0	0	0	630	900
$x_4$	1/2	5/6	0	1	0	0	600	1,200
$x_5$	1	2/3	0	0	1	0	708	708*
$x_6$	1/10	1/4	0	0	0	1	135	1,350

**Iteración 1**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	LD
$z$	0	-2 1/3	0	0	10	0	7,080
$x_3$	0	8/15	1	0	- 7/10	0	134 2/5
$x_4$	0	1/2	0	1	- 1/2	0	246
$x_2$	1	2/3	0	0	1	0	708
$x_6$	0	11/60	0	0	- 1/10	1	64 1/5

**Iteración 2**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	LD
$z$	0	0	4 3/8	0	6 15/16	0	7,668
$x_2$	0	1	1 7/8	0	-1 5/16	0	252
$x_4$	0	0	-15/16	1	5/32	0	120
$x_1$	1	0	-1 1/4	0	1 7/8	0	540
$x_6$	0	0	-11/32	0	9/64	1	18

Tablero óptimo , debido a que  $z_k - c_k \geq 0$  , la solución óptima está dada por:

$$x_1 = 540, x_2 = 252 , \text{ con } z = 7,668$$

## 4.2. El método simplex de la gran M (Método de penalización)

También llamado el método de las variables artificiales en donde a la función objetivo se le penaliza con un valor muy grande (problemas de minimización) o muy pequeño (para problemas de maximización)

Suponga que se desea resolver el siguiente problema de programación lineal, en el que  $b \geq 0$ .

El método de la doble fase se utiliza cuando se tienen problemas de programación lineal con la siguiente estructura:

$$\text{Min (Max)} Z = c^T x$$

Sujeto a

$$Ax (\geq, =) b$$

$$x \geq 0$$

Si no se conoce una base conveniente, entonces se introduce el vector artificial  $x_a$ , con lo cual se obtiene el siguiente sistema:

$$Ax + x_a = b, x, x_a \geq 0$$

La solución básica factible inicial está dada por  $x_a = b$  y  $x = 0$ . Para reflejar la inconveniencia de un vector artificial distinto de cero, la función objetivo se modifica de modo que se pague un castigo o una pena muy alta (para un problema de minimización) cuando se tenga una solución de este tipo. Más específicamente, considere el siguiente problema.

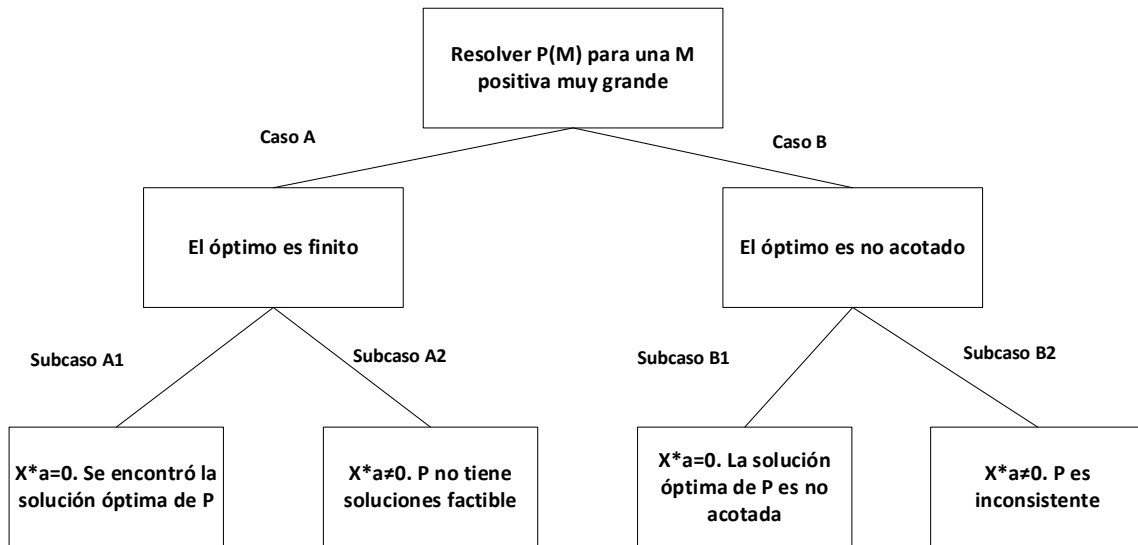
$$\text{Min } Z = cx + Mx_a$$

Sujeto a

$$Ax + x_a = b, x, x_a \geq 0$$

En donde  $M$  es un número positivo muy grande. El término  $Mx_a$  se puede interpretar como una penalización (o multa) que es necesario pagar por cualquier solución con  $x_a \neq 0$ . Por lo tanto, el mismo algoritmo simplex tratará de sacar de la base las variables artificiales, y después continuará hasta encontrar la solución óptima del problema original.

La gráfica siguiente muestra un análisis del método de penalización. En este caso, P(M) es el problema penalizado y P el problema original



En los siguientes ejemplos numéricos se ilustrará el método de penalización (o método de la gran M). Fuente: Bazaraa (2010)

### Ejemplo numérico 1. (Bazaraa, 2010)

$$\text{Min } Z = x_1 - 2x_2$$

Sujeto a

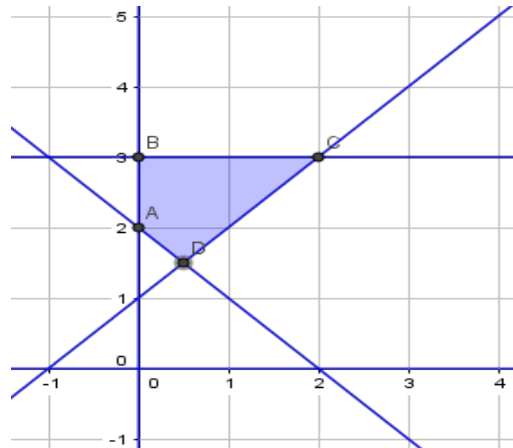
$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La región de factibilidad y los puntos extremos del problema se muestran en la siguiente gráfica.



Note que la región de factibilidad no contiene como punto extremo al origen. En este caso, el problema se deberá de utilizar el algoritmo simplex de penalización o de variables artificiales. Los puntos extremos del problema son:

$A = (0,2)$ ,  $B = (0,3)$ ,  $C = (2,3)$  y  $D = (1/2, 3/2)$ , respectivamente.

Evaluación de cada punto extremo en la función objetivo y determinación de la solución del problema.

$$\text{Min } Z_A = -4, \quad \text{Min } Z_B = -6, \quad \text{Min } Z_C = -4, \quad \text{Min } Z_D = -\frac{5}{2}, \quad Z_B = -6$$

### Utilizando el algoritmo simplex de penalización o gran M

Se introducen las variables de holgura no negativas  $x_3, x_4, x_5$ . De igual forma, se introducen las variables artificiales no negativas  $x_6, x_7$ . El problema se convierte en el siguiente modelo de programación lineal en su forma estándar.

$$\text{Min } Z = x_1 - 2x_2 + Mx_6 + Mx_7$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

La función objetivo es penalizada con un número  $M$  positivo muy grande. Lo anterior conduce a la siguiente sucesión de tableros simplex. A continuación, se muestra en tablero inicial y los subsecuentes.



### **Inicialización:**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	-1	2	0	0	0	$-M$	$-M$	0
$x_6$	1	1	-1	0	0	1	0	2
$x_7$	-1	1	0	-1	0	0	1	1
$x_5$	0	1	0	0	1	0	0	3

Los renglones 1 y 2 se multiplican por  $M$  y el resultado se suma al renglón 0.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	-1	$2+2M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$3M$
$x_6$	1	1	-1	0	0	1	0	2
$x_7$	-1	$1^*$	0	-1	0	0	1	1
$x_5$	0	1	0	0	1	0	0	3

### **Iteración 1**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	$1+2M$	0	$-M$	$2+2M$	0	0	$-2-2M$	$-2+M$
$x_6$	$2^*$	0	-1	1	0	1	-1	1
$x_2$	-1	1	0	-1	0	0	1	1
$x_5$	1	0	0	1	1	0	-1	2

### **Iteración 2**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	0	0	$1/2$	$3/2$	0	$-1/2-M$	$-3/2-M$	$-5/2$
$x_1$	1	0	$-1/2$	$1/2^*$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
$x_2$	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$3/2$
$x_5$	0	0	$1/2$	1	1	$-1/2$	$3/2$	$3/2$

### **Iteración 3**

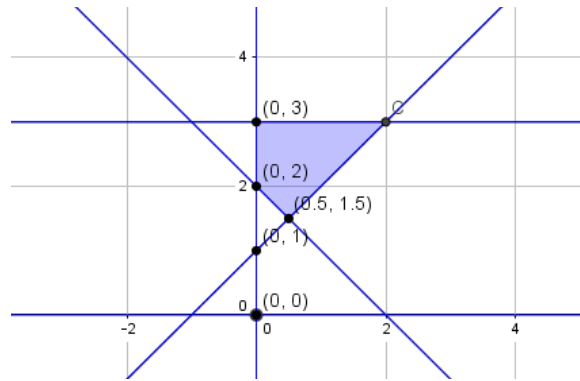
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	-3	0	2	0	0	$-2-M$	$-M$	-4
$x_4$	2	0	-1	1	0	1	-1	1
$x_2$	1	1	-1	0	0	1	0	2
$x_5$	-1	0	$1^*$	0	1	-1	0	1

### Iteración 4

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	-1	0	0	0	-2	$-M$	$-M$	-6
$x_4$	1	0	0	1	1	0	-1	2
$x_2$	0	1	0	0	1	0	0	3
$x_3$	-1	0	1	0	1	-1	0	1

Tablero óptimo, debido a que  $z_k - c_k \leq 0$ , la solución óptima está dada por el punto  $(x_1, x_2)^* = (0, 3)^*$  con valor de  $Z^* = -6$ .

La secuencia de puntos generada en  $(x_1, x_2)$  se ilustra en la figura siguiente.  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1/2, 3/2)$ ,  $(0, 2)$  y  $(0, 3)$



### Ejemplo numérico 2. (Sierksma y Zwols, 2015)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

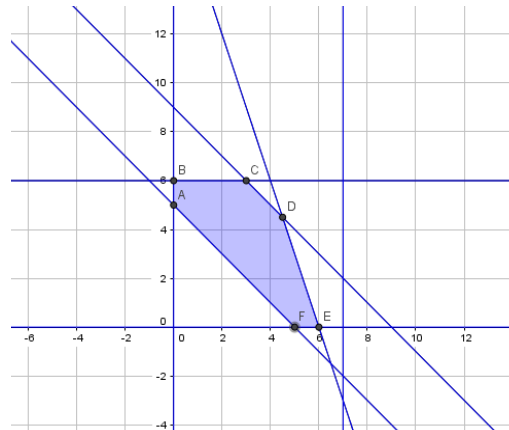
$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La región de factibilidad y los puntos extremos del problema se muestran en la siguiente gráfica.



Puntos extremos:  $A = (0,5)$ ,  $B = (0,6)$ ,  $C = (3,6)$ ,  $D = (9/2, 9/2)$ ,  $E = (6,0)$  y  $F = (5,0)$

Evaluación de cada punto extremo en la función objetivo y determinación de la solución del problema.

$Max Z_A = 10$ ,  $Max Z_B = 12$ ,  $Max Z_C = 21$ ,  $Max Z_D = 22\frac{1}{2}$ ,  $Max Z_E = 18$ ,  
 $Max Z_F = 15$ , entonces, la solución óptima está dada por el punto  $(x_1, x_2) * = (\frac{9}{2}, \frac{9}{2}) *$   
 con valor de  $Z * = 22\frac{1}{2}$

### Resolviendo con el algoritmo simplex de la gran M o de penalización

La función objetivo es penalizada con un número  $M$  positivo muy pequeño. Se introducen las variables de holgura no negativas  $x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  y la variable artificial  $x_8$  también no negativa, obteniéndose el problema de programación lineal en forma estándar.

$$Max Z = 3x_1 + 2x_2 - Mx_8$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 18$$

$$x_1 + x_5 = 7$$

$$x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1 + x_2 - x_7 + x_8 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Convirtiendo el problema a uno de minimización para facilitar el proceso. Lo anterior conduce a la siguiente sucesión de tableros simplex.

Tablero inicial:

### **Inicialización**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	Lado Derecho
$z$	3	2	0	0	0	0	0	$-M$	0
$x_3$	1	1	1	0	0	0	0	0	9
$x_4$	3	1	0	1	0	0	0	0	18
$x_5$	1	0	0	0	1	0	0	0	7
$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	6
$x_8$	1*	1	0	0	0	0	-1	1	5

Multiplicando el último renglón por  $M$  veces y sumándolo al primero, tenemos:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	Lado Derecho
$z$	$3+M*$	$2+M$	0	0	0	0	$-M$	0	$5M$
$x_3$	1	1	1	0	0	0	0	0	9
$x_4$	3	1	0	1	0	0	0	0	18
$x_5$	1	0	0	0	1	0	0	0	7
$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	6
$x_8$	1*	1	0	0	0	0	-1	1	5

### **Iteración 1**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	Lado Derecho
$z$	0	-1	0	0	0	0	3*	$-(3+M)$	-15
$x_3$	0	0	1	0	0	0	1	-1	4
$x_4$	0	-2	0	1	0	0	3*	-3	3
$x_5$	0	-1	0	0	1	0	1	-1	2
$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	0	6
$x_1$	1	1	0	0	0	0	-1	1	5

Entonces  $x_8 = 0$ , podemos dirigirnos a la solución del problema. Podemos borrar la columna correspondiente a  $x_8$ .

### Iteración 2

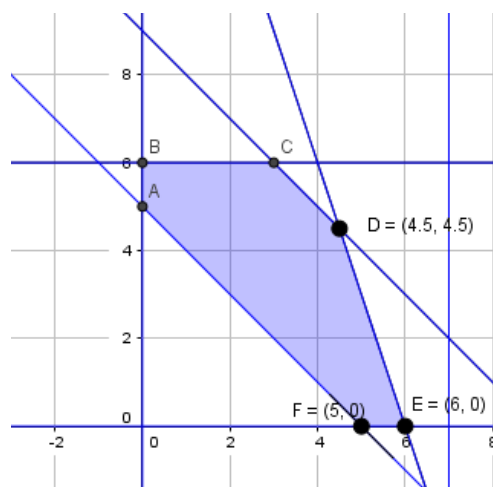
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	0	1*	0	-1	0	0	0	-18
$x_3$	0	2/3*	1	-1/3	0	0	0	3
$x_4$	0	-2/3	0	1/3	0	0	1	1
$x_5$	0	-1/3	0	-1/3	1	0	0	1
$x_6$	0	1	0	0	0	1	0	6
$x_1$	1	1/3	0	1/3	0	0	0	6

### Iteración 3

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	Lado Derecho
$z$	0	0	-3/2	-1/2	0	0	0	$-22\frac{1}{2}$
$x_2$	0	1	3/2	-1/2	0	0	0	9/2
$x_4$	0	0	1	0	0	0	1	4
$x_5$	0	0	1/2	-1/2	1	0	0	5/2
$x_6$	0	0	-3/2	1/2	0	1	0	3/2
$x_1$	1	0	-1/2	1/2	0	0	0	9/2

Tablero óptimo, debido a que  $z_k - c_k \leq 0$ , entonces, la solución óptima está dada por el punto  $(x_1, x_2)^* = (\frac{9}{2}, \frac{9}{2})^*$  con valor de  $Z^* = 22\frac{1}{2}$  (para el problema de maximización)

La secuencia de puntos F-E-D generada por el algoritmo simplex en  $(x_1, x_2)$  se ilustra en la figura siguiente.



### **4.3. Problemas propuestos para el algoritmo simplex**

En los Problemas siguientes, se muestran programas lineales que pueden dar como resultado una o más de las siguientes situaciones: solución óptima, solución inviable, solución óptima no acotada o soluciones óptimas alternativas

Para cada programa lineal, determine la situación de la solución utilizando el método simplex. Para los problemas con soluciones óptimas alternativas, calcule al menos dos soluciones óptimas.

**Problema No. 1**

$$Max = 4x_1 + 8x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Problema No. 2**

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 3x_2$$

Sujeto a:

$$2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 10$$

$$2x_1 \geq 4$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



**Problema No. 3**

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 30x_2$$

Sujeto a:

$$\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 20$$

$$\frac{1}{5}x_2 \leq 5$$

$$\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Problema No. 4 (Bazaraa, 2010)**

$$\text{Min } Z = -x_1 - 3x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Problema No. 5 (Bazaraa, 2010)**

Demuestre, utilizando el algoritmo simplex que el siguiente problema no tiene solución. Posteriormente, utilice Geogebra para verificar que no existe región de factibilidad, y que el problema es inconsistente.

$$\text{Min } Z = -2x_1 + 3x_2$$

Sujeto a:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Problema No. 6 (Bazaraa, 2010)**

Se proporciona el tablero inicial de un problema de programación lineal.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	Lado Derecho
$z$	-1	-1	4	0	0	0	0
$x_4$	1	1	2	1	0	0	9
$x_5$	1	1	-1	0	1	0	2
$x_6$	-1	1	1	0	0	1	4

- a) Obtenga el modelo de programación lineal con los datos proporcionados en el tablero anterior.
- b) Obtenga el modelo de programación lineal en su forma estándar
- c) Resuelva el problema utilizando el algoritmo simplex
- d) Utilice Microsoft Excel para realizar las iteraciones correspondientes
- e) Muestre la secuencia de soluciones para cada iteración
- f) Utilice Lindo y Lingo para obtener los tableros inicial y final que permitan verificar sus resultados

**Problema No. 7 (Bazaraa, 2010)**

Considere el siguiente problema

$$\text{Max } Z = x_1 + 3x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- a) Resuelva el problema gráficamente
- b) Resuelva el problema utilizando el algoritmo simplex

**Problema No. 8 (Bazaraa, 2010)**

Considere el siguiente problema

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- a) Resuelva el problema gráficamente. Verifique con el programa Geogebra que el problema tiene un vértice degenerado.
- b) Resuelva el problema original utilizando el algoritmo simplex.
- c) Resuelva el problema utilizando el método simplex quitando la restricción redundante que provoca la degeneración.

**Problema No. 9**

Utilice el algoritmo simplex para resolver el problema del caso práctico No. 1:  
American Sporting Equipment I (Lapin ,1996)

**Problema No. 10**

Resuelva el siguiente problema utilizando el algoritmo simplex. Utilice Excel para realizar todas las iteraciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, -x_1 + x_2 \leq 4, x_2 + 2x_3 \leq 8, x_1 \leq 3, x_2 \leq 5, x_3 \leq 4, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$



## 5. Aplicaciones diversas de programación lineal

### Problema No. 1

*Problema de la dieta (Cornuejols y Trick, 1998)*

¿Cuál es la dieta perfecta? Una dieta ideal cumpliría o excedería los requisitos nutricionales básicos, sería barato, tenía variedad y sería agradable al paladar. ¿Cómo podemos encontrar una dieta así? Supongamos que los únicos alimentos en el mundo son los siguientes:

Alimento	Tamaño de la porción	Energía (kcal)	Proteínas (g)	Calcio (mg)	Precio (centavos de dólar/ración)	Límite (ración/día)
Harina de avena	28 g	110	4	2	3	4
Pollo	100 g	205	32	12	24	3
Huevos	2 grandes	160	13	54	13	2
Leche	237 cc	160	8	285	9	8
Tarta de cereza	170 g	420	4	22	20	2
Cerdo y frijoles	260 g	260	14	80	19	2

Después de consultar con los nutriólogos, consideramos que una dieta satisfactoria debe tener por lo menos 2,000 kcal de energía, 55 g de proteína, y 800 mg de calcio (las vitaminas y el hierro son suministrados por las píldoras). Mientras que algunos de nosotros estaríamos contentos de subsistir con 10 porciones de carne de cerdo y frijoles, hemos decidido imponer la variedad por tener un límite en el número de porciones / día para cada uno de nuestros seis alimentos. ¿Cuál es la dieta menos costosa y satisfactoria?

Solución:

### **Construcción del modelo de programación lineal.**

Sea  $x_i$  = número de porciones de alimento tipo  $i$  en la dieta,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, y 6$

Nuestro objetivo es minimizar el costo, que puede escribirse de la forma siguiente:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

Tenemos limitaciones de energía, proteínas, calcio, y para cada porción / límite por día.

Esto da la formulación completa de un modelo de programación lineal:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

Sujeto a:

$$\text{(Energía)} \quad 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$$

$$\text{(Proteínas)} \quad 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$$

$$\text{(Calcio)} \quad 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$$

$$\text{(Límite harina)} \quad x_1 \leq 4$$

$$\text{(Límite pollo)} \quad x_2 \leq 3$$

$$\text{(Límite huevo)} \quad x_3 \leq 2$$

$$\text{(Límite leche)} \quad x_4 \leq 8$$

$$\text{(Límite tarta de cereza)} \quad x_5 \leq 2$$

$$\text{(Límite cerdo y frijoles)} \quad x_6 \leq 2$$

Condiciones de no negatividad de las variables:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

### **Discusión:**

La creación de dietas óptimas fue uno de los primeros usos de la programación lineal. Algunas de las dificultades con la programación lineal incluyen las diferencias en la formulación de requisitos de palatabilidad (gusto a los alimentos) y cuestiones de divisibilidad (nadie quiere comer la mitad de un grano verde) Estos modelos de programación lineal dan una idea sobre cuántos de estos requisitos de palatabilidad están costando en la dieta óptima.

## **Problema No. 2**

*Planeación de personal (Cornuejols y Trick, 1998)*

Considere un restaurante que está abierto los siete días de la semana. Sobre la base de la experiencia anterior, el número de trabajadores necesarios en un día determinado se da de la siguiente manera:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Número de trabajadores	14	13	15	16	19	18	11

Cada trabajador trabaja cinco días consecutivos y luego tarda dos días en repetir este patrón indefinidamente. ¿Cómo podemos minimizar el número de trabajadores que requiere el personal de staff del restaurante?

Solución:

Modelo de programación lineal

Un primer intento natural (¡y mal!) en este problema es dejar que  $x_i$  sea el número de personas que trabajan en el día  $i$ . Tenga en cuenta que tal definición variable no coincide con lo que necesitamos encontrar. No hace ningún bien saber que 15 personas trabajan el lunes, 13 personas el martes, y así sucesivamente porque no nos dice cuántos trabajadores son necesarios. Algunos trabajadores trabajarán el lunes y el martes, algunos sólo un día, algunos ninguno de esos días. En su lugar, que los días sean los números 1 a 7 y que  $x_i$  sea el número de trabajadores que comienzan su turno de cinco días el día  $i$ . Nuestro objetivo es claramente:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^7 x_i$$

Considere la restricción para el nivel de 14 del día  $x_1$  lunes. ¿Quién trabaja los lunes? Claramente aquellos que empiezan su turno el lunes ( $x_1$ ). Los que empiezan el martes ( $x_2$ ) no trabajan el lunes, ni tampoco los que empiezan el miércoles ( $x_3$ ). Los que empiezan el jueves ( $x_4$ ) trabajan el lunes, al igual que los que empiezan el viernes, sábado y domingo. Esto da la restricción:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14$$

Argumentos similares dan una formulación total:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^7 x_i$$

Sujeto a:

(lunes)  $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 14$

(martes)  $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$

(miércoles)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15$

(jueves)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 16$

(viernes)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$

(sábado)  $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 18$

(domingo)  $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$

Condiciones de no negatividad de las variables:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

### **Discusión.**

El modelado de mano de obra es un área bien desarrollada. Tenga en cuenta que nuestro modelo sólo tiene un tipo de cambio, pero el modelo se extiende fácilmente a otros tipos de turnos, con costos de desplazamiento diferentes.

### **Problema No. 3**

*Cartera de inversiones (Cornuejols y Trick, 1998)*

Definición del problema.

En sus cursos de formación, aprenderá una serie de técnicas para crear carteras óptimas. La optimización de una cartera depende en gran medida del modelo utilizado para determinar el riesgo y otros aspectos de los instrumentos financieros. He aquí un modelo particularmente sencillo que es susceptible a las técnicas de programación lineal. Considere a un equipo de inversores con \$ 100.000.000 de dólares para financiar varias inversiones. Hay cinco categorías de préstamos, cada uno con un retorno asociado y el riesgo (1-10, 1 mejor):

Préstamo/inversión	Tasa de retorno (%)	Riesgo
Primera inversión	9	3
Segunda inversión	12	6
Préstamos personales	15	8
Préstamos comerciales	8	2
Valores gubernamentales	6	1

Cualquier dinero no invertido entra en una cuenta de ahorros sin riesgo y un 3% de tasa de retorno. El objetivo para el equipo de la hipoteca es asignar el dinero a las categorías para:

- (a) Maximizar el rendimiento promedio por dólar
- (b) Tener un riesgo real de no más de 5 (todos los promedios y fracciones tomadas sobre el dinero invertido (No sobre la cuenta de ahorro)).
- (C) Invertir al menos el 20% en préstamos comerciales.
- (D) El monto en las segunda inversión y préstamos personales combinados no debe ser mayor que el monto en la primera inversión.

Solución:

Modelo de programación lineal:

Sea  $x_i$  = la cantidad invertida en el tipo de inversión  $i$ ,  $i = 1,2,3,4,5$

Sea  $x_s =$  la cantidad en la cuenta de ahorros

El objetivo es maximizar la tasa de retorno o rendimiento (beneficio)

$$\text{Max } Z = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 3x_s$$

Sujeto a:

(Disponibilidad de recursos)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_s = 100,000,000$

Ahora, veamos el riesgo promedio. Puesto que queremos tomar el promedio sobre sólo la cantidad invertida, una traducción directa de esta restricción es:

$$\frac{3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 2x_4 + x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 5$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene:

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 \leq 0$$

Similarmente necesitamos:

$$x_4 \geq 0.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

Simplificando, se tiene:

$$-0.2x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + 0.8x_4 - 0.2x_5 \geq 0$$

La restricción final es:

$$x_2 + x_3 - x_1 \leq 0$$

Condiciones de no negatividad de las variables:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_s \geq 0$

## Discusión

Los portafolios óptimos no sólo suceden: deben ser calculados, y hay una interacción constante entre los modelos y la solubilidad. Los modelos de programación lineal proporcionan un gran poder de modelado con un gran límite: el manejo del riesgo debe realizarse de forma lineal (como nuestros factores de riesgo aquí). Otros modelos que verá en finanzas es donde conocerá la covariancia de los rendimientos entre las inversiones, un efecto fundamentalmente no lineal. Esto puede dar lugar a modelos no lineales como los que tratan de minimizar la varianza en función de los requisitos de retorno. Es muy difícil incorporar restricciones con características tan específicas (como (c) y (d) aquí) en tales modelos.

#### **Problema No. 4**

*Un problema de transporte (Bazaraa, 2010)*

Un fabricante de muebles tiene tres plantas que requieren semanalmente 500, 700 y 600 toneladas de madera. El fabricante puede comprar la madera. El fabricante puede comprar la madera a 3 compañías madereras. Las dos primeras compañías madereras tienen virtualmente una oferta ilimitada, mientras que, por otros compromisos, la tercera compañía no puede surtir más de 500 toneladas por semana. La primera compañía maderera utiliza el ferrocarril como medio de transporte y no hay límite al peso que puede enviar a las fábricas de muebles. Por otra parte, las otras dos compañías madereras usan camiones, lo cual limita a 200 toneladas el peso máximo que puede enviar a cualquiera de las fábricas de muebles. En la tabla siguiente se proporciona el costo de transporte de las compañías madereras a las fábricas de muebles (\$ por tonelada).

COMPAÑÍA MADERERA	FÁBRICA DE MUEBLES		
	1	2	3
1	2	3	5
2	2.5	4	4.8
3	3	3.6	3.2

Formule este problema como un problema lineal (En el siguiente capítulo se pide al estudiante que resuelva este problema)

Solución:

Modelo de programación lineal:

Sea  $x_{ij}$  = toneladas de madera enviadas de la compañía  $i$  a la fábrica de muebles  $j$ .

El objetivo es minimizar el costo de transporte

$$\text{Min } Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2.5x_{21} + 4x_{22} + 4.8x_{23} + 3x_{31} + 3.6x_{32} + 3.2x_{33}$$

Sujeto a:

Demanda de madera:

$$\sum_{i=1}^3 x_{i1} = 500, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 700, \quad \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 600$$

Oferta compañía maderera:

$$\sum_{j=1}^3 x_{3j} \leq 500, \quad x_{ij} \leq 200, \quad i = 2,3, \quad j = 1,2,3$$

Condiciones de no negatividad:  $\forall x_{ij} \geq 0$



### **Problema No. 5**

*Problemas de programación lineal en ingeniería (costos en ingeniería). (Pacheco, 2011)*

Un contratista posee cinco máquinas capaces de hacer trabajos de excavación. Estas máquinas no tienen los mismos rendimientos y, por contratos previos, su disponibilidad es limitada. El contratista desea determinar que combinación de máquinas le permitirá excavar 5000 m<sup>3</sup> de material en una semana al menor costo. En la tabla siguiente se incluyen los costos, capacidades y velocidades de operación de los distintos equipos.

<b>Equipo</b>	<b>Capacidad</b>	<b>Costo</b>	<b>Disponibilidad</b>	<b>Tiempo de ciclo</b>
Cargador frontal	1.5	175	6.0	4.50
Excavadora hidráulica	2	400	6.0	1.00
Retroexcavadora A	1.2	275	6.0	1.00
Retroexcavadora B	0.8	220	8.0	1.00
Grúa con almeja	1.2	470	5.5	2.25

Obtenga el modelo de programación lineal que minimicé el costo del proyecto de tal forma que se obtenga la combinación de maquinaria óptima.

Solución:

Modelo de programación lineal:

Sea  $x_i =$  el tiempo de operación de la máquina  $i$ ,  $i = 1, \dots, 5$

El objetivo es minimizar el costo total

$$\text{Min } Z = 175x_1 + 400x_2 + 275x_3 + 220x_4 + 470x_5$$

Sujeto a:

Para ajustar las restricciones de disponibilidad a una unidad de tiempo común, multiplicamos la disponibilidad diaria de cada equipo por los 5 días laborables con los que se cuenta, es decir:

$$x_1 \leq 5(6.0), \quad x_2 \leq 5(6.0), \quad x_3 \leq 5(6.0), \quad x_4 \leq 5(8.0), \quad x_5 \leq 5(5.5)$$

Para definir la restricción de material total excavado, debemos encontrar el volumen por hora que remueve cada máquina, en este caso, tenemos que utilizar la siguiente relación, para cada una de las máquinas:

$$\text{Volumen/hora} = \text{Capacidad} \times 60 \text{ minutos} / \text{Tiempo de ciclo}$$

Máquina 1	$1.5m^3/\text{ciclo} * 60 \text{ min} / \text{hora} / 4.5 \text{ min} / \text{ciclo}$	$20m^3/\text{hora}$
Máquina 2	$2.0m^3/\text{ciclo} * 60 \text{ min} / \text{hora} / 1.0 \text{ min} / \text{ciclo}$	$120m^3/\text{hora}$
Máquina 3	$1.2m^3/\text{ciclo} * 60 \text{ min} / \text{hora} / 1.0 \text{ min} / \text{ciclo}$	$72m^3/\text{hora}$
Máquina 4	$0.8m^3/\text{ciclo} * 60 \text{ min} / \text{hora} / 1.0 \text{ min} / \text{ciclo}$	$48m^3/\text{hora}$
Máquina 5	$1.2m^3/\text{ciclo} * 60 \text{ min} / \text{hora} / 2.25 \text{ min} / \text{ciclo}$	$32m^3/\text{hora}$

La última restricción obtenida es:

$$20x_1 + 120x_2 + 72x_3 + 48x_4 + 32x_5 = 5000$$

El modelo de programación lineal completo es:

$$\text{Min } Z = 175x_1 + 400x_2 + 275x_3 + 220x_4 + 470x_5$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 30 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_3 &\leq 30 \\ x_4 &\leq 40 \\ x_5 &\leq 27.5 \end{aligned}$$

$$20x_1 + 120x_2 + 72x_3 + 48x_4 + 32x_5 = 5000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

## **Problema No. 6**

*Problema de ingeniería 2 (asignación e inspección). (Pacheco, 2011)*

Tras el embate de un huracán se requiere evaluar los daños en una ciudad costera. Para ello se creó una comisión de emergencia que inspeccionará daños en las instalaciones eléctricas, de gas, agua potable y drenaje en edificios públicos, fábricas y viviendas. Se requiere que los inspectores atiendan al menos 6 edificios públicos y 4 fábricas, que del total de inspecciones que realicen al menos 60% sean a vivienda. Se estima que los tiempos de inspección por edificio en horas se consumirán de la siguiente manera:

	Instalaciones	Instalaciones	Instalaciones
Viviendas	2	1	3
Edificios	4	1	2
Fábricas	6	3	1

Se han presupuestado 120 horas de inspección a instalaciones eléctricas, 80 a instalaciones de gas y 100 a instalaciones hidráulicas.

Formule un programa de programación lineal que permita optimizar el uso de los recursos disponibles y que satisfaga las restricciones indicadas.

Solución:

Modelo de programación lineal:

Sea:

$x_1 =$  el número de viviendas inspeccionadas

$x_2 =$  el número de edificios públicos inspeccionados

$x_3 =$  el número de fábricas inspeccionadas

El objetivo es encontrar el máximo beneficio o número máximo de instalaciones inspeccionadas.

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 + x_3$$

Sujeto a:

Mínimo requerido de edificios públicos inspeccionados:  $x_2 \geq 6$

Mínimo requerido de fábricas inspeccionadas:  $x_3 \geq 4$

Porcentaje de viviendas inspeccionadas en relación al total de inspecciones:  $\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3} \geq 0.6$

Simplificando, se tiene:

$$0.4x_1 - 0.6x_2 - 0.6x_3 \geq 0$$

Tiempos de inspección de las infraestructuras e instalación correspondiente:

Instalaciones eléctricas:  $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 120$

Instalaciones de gas:  $x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 80$

Instalaciones hidráulicas:  $3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 100$

Condiciones de no negatividad de las variables:  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

El modelo de programación lineal completo es:

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 + x_3$$

Sujeto a:

$$x_2 \geq 6$$

$$x_3 \geq 4$$

$$0.4x_1 - 0.6x_2 - 0.6x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 120$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 80$$

$$3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

### **Problema No. 7**

*Un problema de planificación de la producción e inventarios (Eiselt y Sandblom)*

Una empresa quiere planificar su producción para uno de sus productos para los próximos cuatro meses. El cuadro siguiente muestra la demanda pronosticada, las capacidades de producción y los costos unitarios de producción para los meses correspondientes, así como los costos de mantenimiento de inventario que se incurren en el transporte de una unidad de un mes a otro.

	Periodo			
	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4
<b>Demanda</b>	50	120	150	160
<b>Capacidad de producción</b>	100	100	160	150
<b>Costos unitarios de producción</b>	\$1	\$1.1	\$1.2	\$1.2
<b>Costos de inventario (por intervalo de tiempo entre meses)</b>	\$0.3		\$0.2	\$0.2

En la actualidad, no hay unidades en stock y después de los cuatro meses, no se desea tener ningún stock posterior. El problema puede ser escrito como un modelo de programación lineal.

Solución:

Modelo de programación lineal:

Sean:

$x_i =$  el número de unidades producida en el mes  $i, i = 1,2,3,4$

$I_j =$  costo de inventario en el periodo  $j, j = 1,2,3,4,5$

El objetivo es encontrar el costo mínimo de producción total (incluyendo el costo de mantener el inventario).

$$\text{Min } Z = x_1 + 1.1x_2 + 1.2x_3 + 1.2x_4 + 0.3I_2 + 0.2I_3 + 0.2I_4$$

Sujeto a:

Capacidad de producción por mes:

$$x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 100$$

$$x_3 \leq 160$$

$$x_4 \leq 150$$

Inventario en el periodo  $j$  :

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = 0 + x_1 - 50$$

$$I_3 = I_2 + x_2 - 120$$

$$I_4 = I_3 + x_3 - 150$$

$$I_5 = 0 = I_4 + x_4 - 160$$

$$I_5 = 0$$

Condiciones de no negatividad:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 \geq 0$$

El modelo de programación lineal completo puede ser expresado como:

$$\text{Min } Z = x_1 + 1.1x_2 + 1.2x_3 + 1.2x_4 + 0.3I_2 + 0.2I_3 + 0.2I_4$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 100$$

$$x_3 \leq 160$$

$$x_4 \leq 150$$

$$I_1 = 0$$

$$x_1 - I_2 = 50$$

$$x_2 + I_2 - I_3 = 120$$

$$x_3 + I_3 - I_4 = 150$$

$$x_4 + I_4 - I_5 = 160$$

$$I_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 \geq 0$$

## 6. Conclusiones del capítulo

La programación lineal, como uno de los temas de este libro, es un subconjunto de la programación matemática que, a su vez, es una parte de la investigación de operaciones (u operacional). La investigación de operaciones, también conocida como la ciencia de la gestión, es una disciplina que se ocupa de la optimización y el control de los sistemas. El término "programación" se utiliza aquí como sinónimo de optimización. Curiosamente, los problemas de optimización no son otra cosa que las versiones formalizadas del principio económico fundamental: o maximizan o minimizar un objetivo sujeto a un conjunto de restricciones del sistema. Dependiendo del problema en particular alguno de los dos casos o versiones del problema versiones se aplica depende del escenario específico y de la problemática en particular que presente el sistema. De igual forma, el criterio de maximizar o minimizar una función depende, en mucho del punto de vista del tomador de decisiones.

La historia de la programación lineal se remonta a los años treinta y cuarenta. La parte anterior de la historia es descrita por McCloskey (1987), mientras que una reciente explicación autorizada es proporcionada por Gass y Assad (2005). Aquí, ofrecemos sólo algunos de los aspectos más destacados que han impactado directamente en el campo de la programación lineal.

En la ciencia de la gestión, como en la mayoría de las ciencias, hay una interacción natural entre la teoría y la práctica. La teoría proporciona herramientas para el trabajo aplicado y sugiere enfoques viables para la resolución de problemas, mientras que la práctica añade un enfoque a la teoría al sugerir áreas para el desarrollo teórico en su búsqueda continua de la resolución de problemas y sus limitaciones o capacidades.

Es imposible entonces, comprender completamente la teoría o la práctica aisladamente, más bien, se necesitan entre sí para analizar la interacción mutua entre los componentes del sistema.

Habiendo establecido la programación lineal como base para la teoría de la programación lineal, ahora se está en condiciones de apreciar ciertos aspectos de la implementación de modelos de programación matemática. En los próximos capítulos, abordaremos varios temas de aplicaciones de la programación lineal en la teoría de

redes, como el problema de transporte, asignación y transbordo, el método de la ruta más corta, redes Pert-Cpm, seguido por un conjunto de aplicaciones específicas usando software especializado como Excel, Matlab, Maple, entre otros. Finalmente, se abordará en el tercer capítulo de este libro modelos de programación matemática más complicados, mediante al análisis de diversos problemas que caen en área de la programación no lineal. Posteriormente analizaremos problemas de inventarios y líneas de espera.



## 7. Referencias y bibliografía

- Anderson y Sweeney (2011). Métodos cuantitativos para los negocios, 11 edición, edit. Cengage learning, México.
- Bazaraa, Jarvis y Sherali (2010). Linear Programming and Network Flows, 4nd edition, edit. Wiley, Usa.
- Cornuejols y Trick (1998). Quantitative Methods for the Management Science, course notes, University, Pittsburg, Usa.
- Eiselt, H.A. & Sandblom, C.L. (2007). Linear Programming and its Applications, edit. Springer, New York, Usa.
- Griva, Nash y Sofer (2009). Linear and Nonlinear Optimization: Second Edition, edit. Siam, Usa.
- Lapin y Whisler (1996). Cases in Management Science, Edit. Duxbury Press, Uk.
- Pacheco (s/f). Ejercicios dirigidos y problemas resueltos de la teoría general de sistemas aplicada a la ingeniería civil. Recuperado de: <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/567/A4.pdf>
- Powell y Baker (2009). Management Science: The Art of Modeling with Spreadsheets, 3rd Edition, Edit. Wiley, Usa.
- Sierkama y Zwols (2015). Linear and Integer Optimization: Theory and Practice, 3nd edition, edit. Taylor & Francis Group, England.
- Venkataraman (2000). Applied Optimization with Matlab Programming, 2nd Edition, edit. Wiley, Usa.

# Capítulo III

## Modelos de redes

1. Conceptos básicos
2. El problema de transporte
  - 2.1. Definición del problema de transporte. Bazaraa (2010)
  - 2.2. El problema de transporte balanceado
3. El problema de asignación
4. El problema de transbordo
5. Problema de la ruta más corta
6. Programación de proyectos Pert-Cpm (Técnica de revisión y Evaluación de Programas y el Método del Camino Crítico)
7. Ejemplos de problemas de redes
8. Problemas propuestos
9. Conclusiones de capítulo
10. Referencias y Bibliografía

## 1. Conceptos básicos

De acuerdo a Obregón (2005), la teoría de redes es un área de conocimiento dentro del campo de la investigación de operaciones. Los problemas que estudia dicha teoría, son principalmente de naturaleza combinatoria, es decir, relaciona rutas, cortes, árboles y otros ejemplos. Para obtener las soluciones de estos problemas, se requiere diseñar algoritmos. Algunos son más eficientes que otros, y su selección depende de la característica del problema.

Los modelos de redes han ocupado un lugar muy importante en el progreso de la Investigación de Operaciones y de las Ciencias Administrativas. Estos modelos junto con la teoría de la programación lineal han mantenido una estrecha relación en su desarrollo. Lo que a su vez ha propiciado avances en el campo de la Programación Entera.

Otro aspecto es el adelanto de códigos más rápidos para los problemas de flujo en redes, lo cual favorece la relación entre la investigación de operaciones y las ciencias de la computación. Por otro lado, la investigación en modelos de redes a la par con la ciencia de la computación, ha propiciado la construcción de estructuras para el manejo de datos, haciendo más eficientes los algoritmos de redes.

La estructura de los problemas de redes se puede representar gráficamente. Esto ha permitido visualizar problemas en áreas como: telecomunicaciones, transporte, asignación, transbordo, distribución, planeación de proyectos, localización de instalaciones, flujo, entre otros.

Muchos modelos de optimización importantes tienen una representación gráfica natural en red. En este capítulo, discutimos algunos ejemplos específicos de modelos de red. Hay varias razones para distinguir modelos de red de otros modelos de programación lineal:

La estructura de red de estos modelos nos permite representarlos gráficamente de una manera intuitiva para los usuarios. Podemos utilizar esta representación gráfica como ayuda

En el desarrollo del modelo de hoja de cálculo. De hecho, para un libro de texto especial para los estudiantes de licenciatura, el mejor argumento para señalar los problemas de red para una consideración especial es el hecho de que pueden ser representados gráficamente. Muchas empresas tienen problemas reales, a menudo extremadamente grandes, que pueden representarse como modelos de red. De hecho, muchas de las mejores historias de éxito de la ciencia de la administración han involucrado modelos de redes grandes. Por ejemplo, y de acuerdo a Winston (2010),

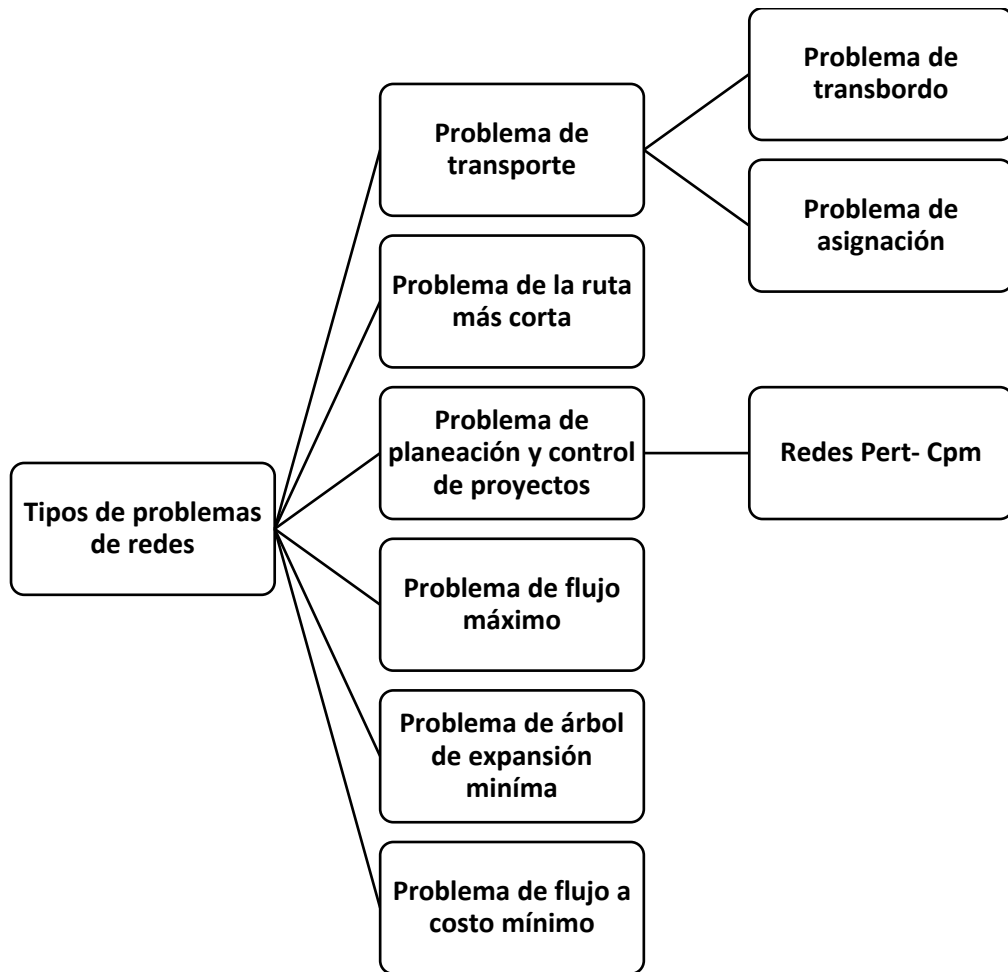
la empresa Delta Airlines desarrolló un modelo de red para programar toda su flota de aviones de pasajeros.

Algunas otras aplicaciones reales de modelos basados en red se enumeran en todo el capítulo, pero la lista no es en modo alguno exhaustiva. Una exploración rápida de los artículos en el diario de Interfaces indica que probablemente hay más aplicaciones basadas en la red reportadas que cualquier otro tipo.

Se han desarrollado técnicas especializadas de solución específicamente para modelos. Aunque no discutamos los detalles de estas técnicas de solución y no se implementan en Microsoft Excel Solver; son importantes en las aplicaciones del mundo real porque permiten a las empresas resolver problemas enormes que no pueden ser resueltos por los algoritmos de la programación lineal vistos en el primer capítulo de este libro de texto.

De acuerdo a Hiller y Lieberman (2011), los problemas de redes pueden clasificarse esencialmente en ocho áreas: problemas de transporte, problemas de asignación, ruta más corta, flujo máximo, árbol de expansión mínima, flujo a costo mínimo y planeación y control de proyectos.

El siguiente esquema muestra los diferentes tipos de problemas de redes que se abordan en la materia de investigación de operaciones en los programas de estudio de las carreras de ingeniería en sistemas computacionales, ingeniería industrial, gestión empresarial y la licenciatura en administración del Tecnológico Nacional de México.



## 2. El problema de transporte

Una característica central de las cadenas de suministro físicas es el movimiento del producto de uno o más ubicaciones de origen a un conjunto de destinos donde se produce la demanda. El costo de Unidades de producto, junto con el costo de fabricación del producto, representa la mayor parte del costo de obtener los productos al mercado. No es de extrañar, entonces, que una gran cantidad se presta atención al control de los costes que se producen en las cadenas de suministro. En este caso, se analizará una de las aplicaciones más frecuentes en los problemas de redes: el problema de transporte.

### 2.1. Definición del problema de transporte. Bazaraa (2010)

Se consideran  $m$  puntos de origen, en donde el origen  $i$  tiene una oferta de  $a_i$  unidades de un artículo (producto) específico. Además, existen  $n$  puntos de destino, en donde el destino  $j$  requiere  $b_j$  unidades del producto. Se supone que  $a_i, b_j > 0$ . Con cada enlace o arco  $(i, j)$  del origen  $i$  al destino  $j$  está asociado un costo unitario  $c_{ij}$  por transporte. El problema es determinar un «patrón de embarque» factible de los orígenes a los destinos que minimice el costo total de transporte.

De acuerdo a Sierksma y Zwols (2015), la formulación general del problema de transporte se define como:

Sea  $m (\geq 1)$  el número de orígenes y  $n (n \geq 1)$  el número de destinos a satisfacer. El costo de transporte del origen  $i$  al destino  $j$  es  $c_{ij}$ , la oferta del origen  $i$  es  $a_i$ , y la demanda de los destinos  $j$  es  $b_j$  ( $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$ ). El modelo puede ahora formularse como sigue:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \text{ para } j = 1, \dots, n$$

$x_{ij} \geq 0$ , y entera para  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$

## 2.2. El problema de transporte balanceado

Considere nuevamente el *problema de transporte* citado anteriormente. Si deseamos asegurarnos de que la demanda de todos los clientes este satisfecha, entonces la oferta total de varias plantas u orígenes debe ser al menos tan grande como la demanda total. Suponga ahora que la oferta y la demanda son totalmente iguales, por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

La ecuación anterior es llamada *ecuación de balance oferta –demanda*.

Si esta ecuación se mantiene, entonces debe quedar claro que ningún cliente puede recibir más que la demanda correspondiente, y cada depósito tiene que agotar su suministro. Esto significa que, bajo estas circunstancias, las desigualdades en las limitaciones tecnológicas del modelo pueden, sin pérdida de generalidad, ser reemplazadas por restricciones de igualdad. El modelo resultante se llama el *problema de transporte equilibrado*

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ y entera para } i = 1, \dots, m \text{ y } j = 1, \dots, n$$



### **Ejemplo de un problema de transporte. Sierksma y Zwols (2015)**

Una compañía de alquiler de camiones tiene tres depósitos, etiquetados 1, 2, 3, en los cuales un total de 8, 5 y 6 vehículos, respectivamente, están estacionados. Además, hay cinco clientes, etiquetados 1, ...,5, demandando 2, 3,5,2 y 7 vehículos, respectivamente. El costo de transporte (por vehículo) de los depósitos a los clientes se muestra en la tabla siguiente. El problema es transportar los vehículos de los depósitos a los clientes, asegurándose de que la demanda de los clientes está satisfecha y de tal manera que Los costos totales de transporte se minimizan. Un diagrama ilustra la situación mediante el gráfico de red de transporte.

	<b>Clientes</b>				
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Depósito 1</b>	4	3	8	7	9
<b>Depósito 2</b>	6	5	6	4	5
<b>Depósito 3</b>	7	4	7	5	4

Costos de transporte (x \$100)

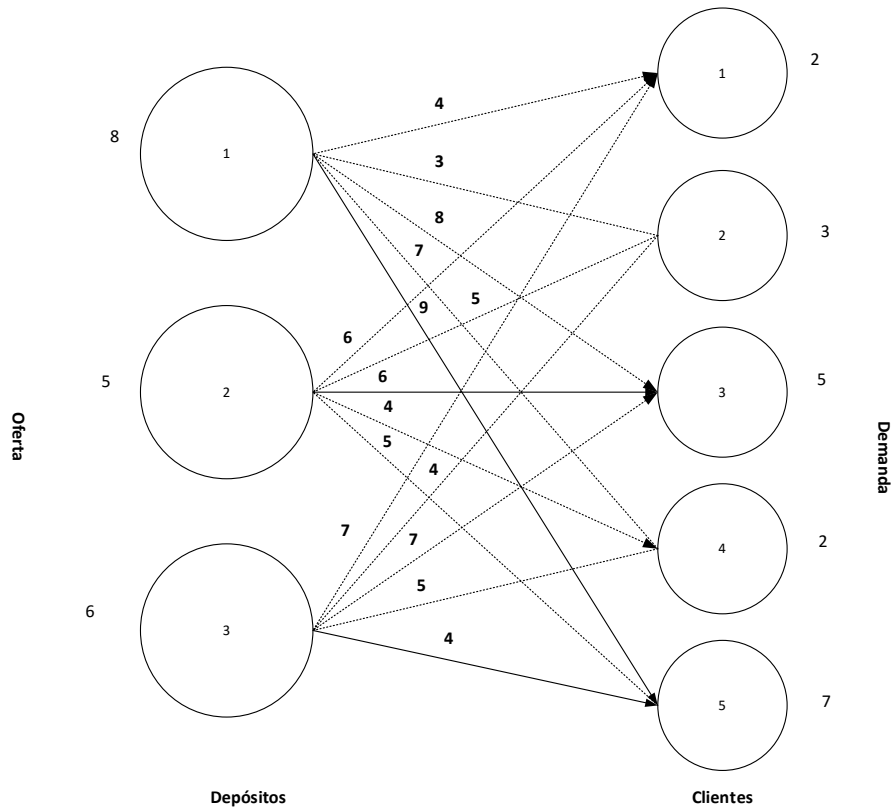


Diagrama del problema de transporte

Para  $i = 1,2,3$  y  $j = 1,2,3,4,5$ , sea  $c_{ij}$  el costo de transporte del depósito  $i$  al cliente  $j$ , y sea  $x_{ij}$  el número de vehículos que serán transportados del depósito  $i$  al cliente  $j$ ; el costo de transportar  $x_{ij}$  vehículos de  $i$  a  $j$  es por lo tanto  $c_{ij}x_{ij}$ . Además, sea  $a_i$  el número de vehículos en el depósito  $i$  (la oferta). Entonces,  $a_1 = 8, a_2 = 5, a_3 = 6$ .

Sea  $b_j$  el número de vehículos ordenados por el cliente  $j$  (la demanda). Entonces,  $b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 2, b_5 = 7$ . Este problema puede formularse como un modelo de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 4x_{11} + 3x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 9x_{15} + 6x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} + 4x_{24} \\ & + 5x_{25} + 7x_{31} + 4x_{32} + 7x_{33} + 5x_{34} + 4x_{35} \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 8$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 5$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 6$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 2$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 3$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 5$$

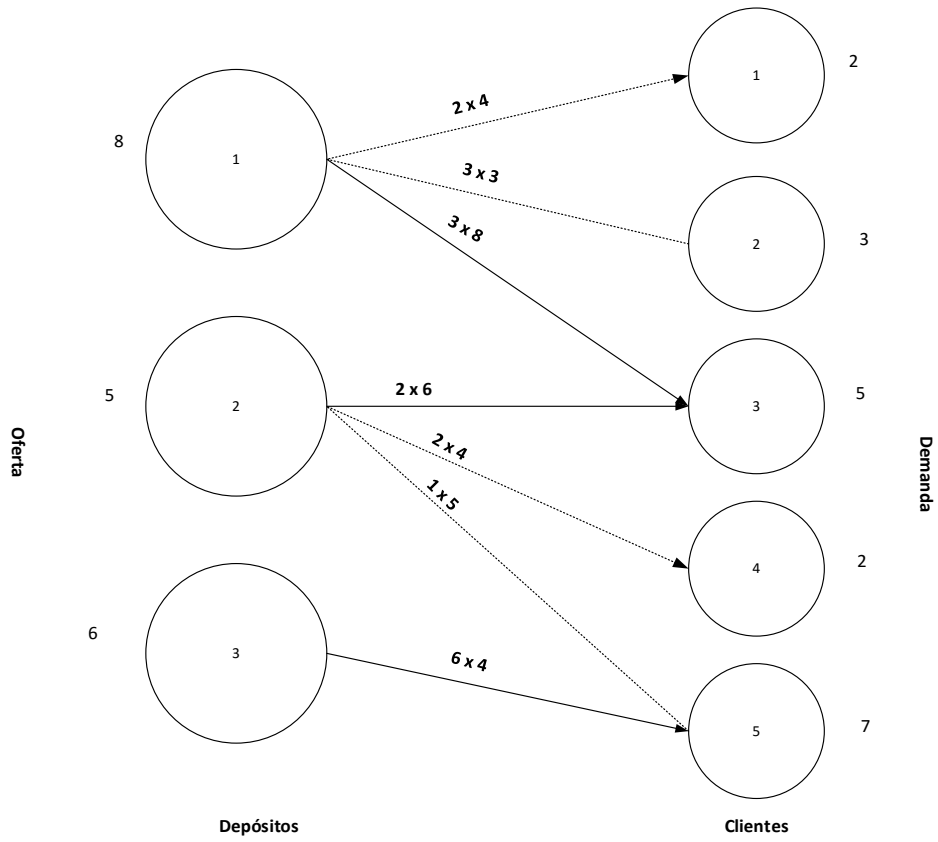
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 2$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 7$$

$$x_{11}, \dots, x_{35} \geq 0, \text{ y entera}$$

Las tres primeras restricciones expresan el hecho de que cada depósito sólo puede entregar tantos vehículos como tiene disponible y las otras cinco restricciones expresan el hecho de que los clientes deben recibir al menos el número de vehículos que demandan.

Utilizando un programa específico de computadora, por ejemplo, usando *GNU MathProg Modeling Language (o GMPL)*, podemos verificar que el costo mínimo de transporte es de \$9,000; los valores óptimos no nulos de las  $x_{ij}$ 's se unen a los arcos de la figura siguiente. Este problema se resuelve de forma más eficiente utilizando el algoritmo simplex de transporte.



Código de *GNU MathProg Modeling Language (o GMPL)* para resolver el problema de transporte anterior:

```

1. /* Variables de decisión */
2. var x11>=0;
3. var x12>=0;
4. var x13>=0;
5. ....;
6. Var x35>=0;

7. /* Función objetivo */

8. minimice Z: *x11+3*x12+8*x13+7*x14+...+4*x35;
9. /* restricciones */
10. /*Oferta depósito 1 */

11. subject to A11: x11+x12+x13+x14+x15<=8;
12. /*Oferta depósito 2 */
13. subject to A12: x21+x22+x23+x34+x25<=5;
14. ....;

15. /* Demanda cliente 1 */
16. subject to B11: x11+x21+x31>=2;
17. ....;
18. /* Demanda cliente 5 */
19. Subject to B15: x15+x25+x35>=7;

20. end;

```

La línea 1, 7, 9, 10, 12, 15 y 18 son comentarios. Los comentarios son ignorados por el programa y sirven únicamente para clarificar el problema. Las líneas 5, 14 y 17, son para generalizar en donde se han omitido variables y restricciones que deberán ser agregadas al programa para obtener el programa de programación línea completo. La línea 20 indica el fin de la captura de los parámetros del problema.

### 3. El problema de asignación

El problema de asignación puede formularse como sigue. Sea  $n \geq 1$ . Hay  $n$  trabajos a realizar por  $n$  personas. Cada persona tiene que hacer precisamente uno de los  $n$  trabajos, y cada trabajo tiene que ser hecho por una sola persona. Si el trabajo  $i$  es realizado por la persona  $j$ , entonces el costo asociado es  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). El objetivo es determinar una programación óptima, lo que significa que todos los trabajos son realizados por una persona, cada persona tiene precisamente un trabajo que realizar y el costo total debe ser lo mínimo posible.

Para formular este problema como uno de programación lineal, introducimos las variables binarias  $x_{ij}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ , con el siguiente significado:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo } i \text{ es realizado por la persona } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El problema de asignación puede modelarse de la siguiente forma:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

Hay que notar que el problema de asignación es un caso especial del problema de transporte.

### Ejemplo de un problema de asignación. Baker (2011)

Europa Auto Company es un fabricante de automóviles con seis plantas de fabricación y seis vehículos para producir este año. La empresa ha aprendido que tiene sentido producir cada vehículo en una planta única, aunque algunas de las plantas son más antiguas y menos eficientes que otras. Para cada posible asignación de un vehículo a una planta, la compañía ha estimado el costo anual (en millones de dólares) de implementar la asignación. Los datos de costos se muestran en la siguiente tabla, que identifica los productos por número. El objetivo del fabricante de automóviles es minimizar el costo total de la asignación.

Planta	Producto					
	Compacto 1	Coupé 2	Sedan 3	Deportivo 4	Camioneta 5	Van 6
1	80	56	43	62	46	58
2	94	50	88	64	63	52
3	94	46	50	40	55	73
4	98	79	71	65	91	59
5	61	59	89	98	45	52
6	77	49	65	95	72	91

Como tal, podemos construir un diagrama de flujo para representar el problema de decisión de la misma manera que el problema de transporte. El diagrama del ejemplo del fabricante de automóviles se muestra en la figura siguiente, donde cada uno de los 36 arcos del diagrama representa parte de una asignación potencial.

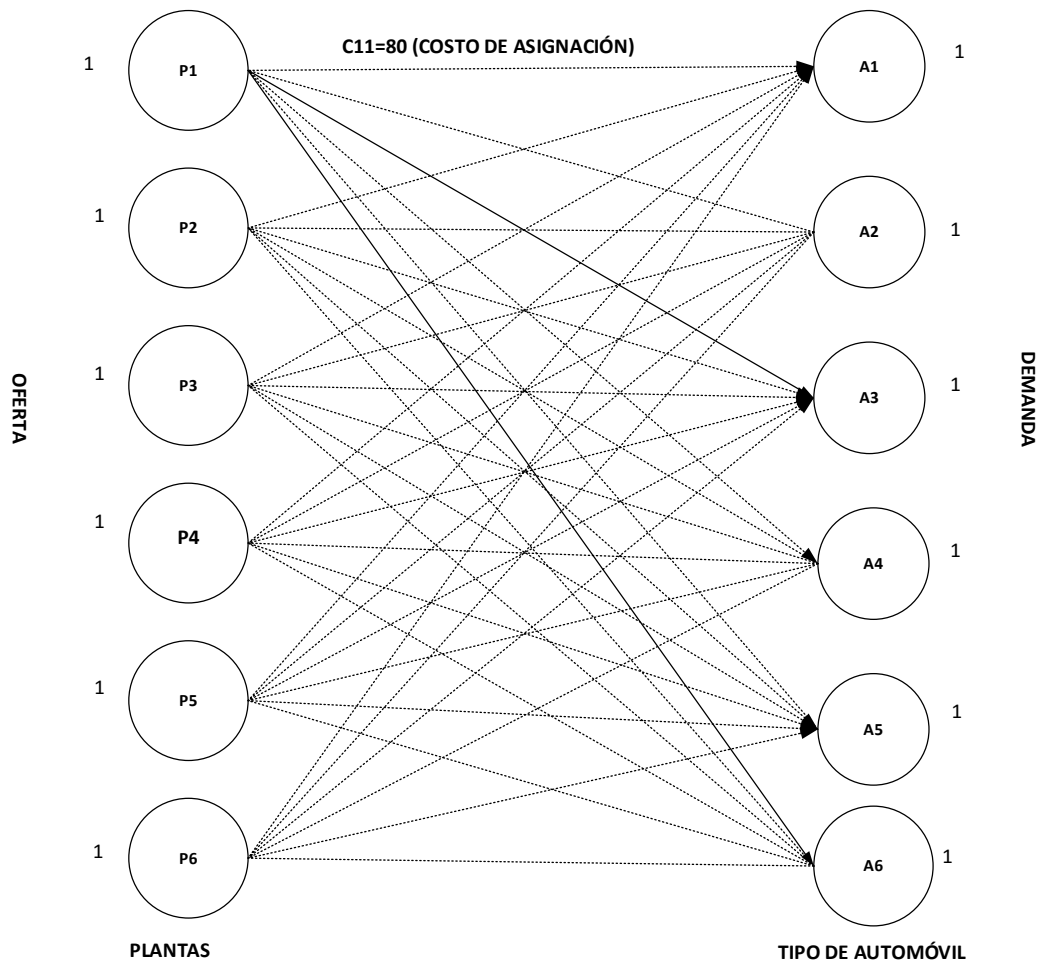


Diagrama de flujo para el problema de asignación

### Modelo de programación lineal par el problema de asignación

Para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  y  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , sea  $c_{ij}$  el costo de asignación de la planta  $i$  al tipo de auto  $j$ , y sea  $x_{ij}$  la variable binaria que corresponde a la asignación de la planta  $i$  para la fabricación del vehículo tipo  $j$ ; el costo de asignación de la variable binaria  $x_{ij}$  de la planta  $i$  para fabricar el tipo de auto  $j$  es por lo tanto  $c_{ij}x_{ij}$ . Además, sea  $a_i$  el número de plantas  $i$  (la oferta unitaria). Entonces,  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 1$ .



Sea  $b_j$  la demanda para fabricar el tipo de vehículos  $j$  (la demanda unitaria). Entonces,  $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$ . Este problema puede formularse como un modelo de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 80x_{11} + 56x_{12} + 43x_{13} + 62x_{14} + 46x_{15} + 58x_{16} + 94x_{21} + 506x_{22} \\ & + 88x_{23} + 64x_{24} + 63x_{25} + 52x_{26} + 94x_{31} + 46x_{32} + 50x_{33} \\ & + 40x_{34} + 55x_{35} + 73x_{36} + 98x_{41} + 79x_{42} + 71x_{43} + 65x_{44} \\ & + 91x_{45} + 59x_{46} + 61x_{51} + 59x_{52} + 89x_{53} + 98x_{54} + 45x_{55} \\ & + 52x_{56} + 77x_{61} + 49x_{62} + 65x_{63} + 95x_{64} + 72x_{65} + 91x_{66} \end{aligned}$$

Sujeto a:

Oferta unitaria (Plantas)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 1$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} = 1$$

Demanda unitaria (Tipo de auto)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 1$$

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} = 1$$

$$\forall x_{ij} \geq 0$$

Usando *GNU MathProg Modeling Language (o GMPL)*, podemos verificar que el costo mínimo de asignación es de \$314 millones de dólares; los valores óptimos no nulos de las  $x_{ij}$ 's se unen a los arcos de la figura siguiente. Este problema se resuelve de forma más eficiente utilizando el algoritmo húngaro de Kunh.

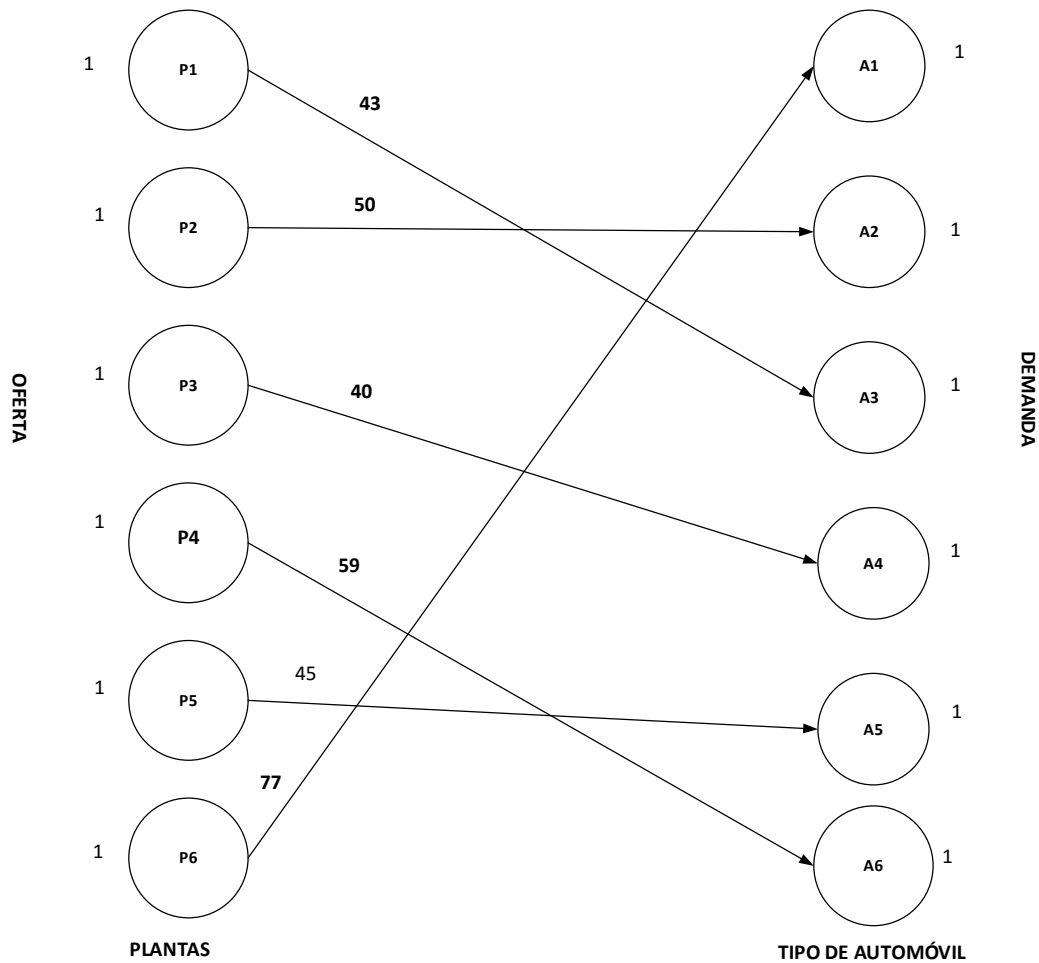


Diagrama de flujo óptimo para el problema de asignación

A continuación, se muestra el modelo de asignación en hoja electrónica de cálculo. Este problema puede ser resuelto de forma eficiente utilizando los parámetros de Microsoft Solver Excel.

## Redes: ejemplo de un problema de asignación

### Parámetros (costos)

Planta	Compacto 1	Coupé 2	Sedan 3	Deportivo 4	Camioneta 5	Van 6
1	80	56	43	62	46	58
2	94	50	88	64	63	52
3	94	46	50	40	55	73
4	98	79	71	65	91	59
5	61	59	89	98	45	52
6	77	49	65	95	72	91

### Decisiones (asignación)

Planta	Compacto 1	Coupé 2	Sedan 3	Deportivo 4	Camioneta 5	Van 6
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	1	0	0	0	0	0

### Objetivo (costo total)

\$314,000,000

El problema de asignación a menudo se presenta cuando existe la necesidad de asignar tareas a trabajadores, proyectos a jefes de proyecto, trabajadores a turnos, tripulaciones aéreas a vuelos, contratos de compra a licitaciones de proveedores, entre otras aplicaciones. De hecho, el problema de asignación es un caso particular del problema transporte.

En los problemas de transporte se supuso que cada punto es un origen, en que se dispone de los productos o bienes, o es un destino, en el que se requieren los productos. Ahora, supondremos que, además existen puntos intermedios en los que no se dispone ni se requiere de los productos, sino que éstos se transbordan. El problema de encontrar el patrón de embarque con costo mínimo se denomina el problema de transbordo y se analizará en la siguiente sección.

#### 4. El problema de transbordo

El problema de la asignación resultó ser una versión simplificada del problema de transporte, especializada en las demandas de la unidad y los suministros de la unidad. Por el contrario, el problema del transbordo es una versión complicada del problema del transporte, que contiene dos etapas de flujo en lugar de una sola. En la figura de nuestro diagrama para el problema del transporte el sistema contiene dos niveles orígenes y destinos, y todo el flujo tiene lugar en una sola etapa, desde origen hasta el destino. Sin embargo, en muchos sistemas logísticos existen tres niveles principales, por decir: plantas, centros de distribución y almacenes; en tales sistemas, el flujo a menudo tiene lugar en dos etapas.

El problema del transbordo es el problema de enviar un flujo a través de una red con costo mínimo. La red consta de un número de nodos de suministro, llamados nodos origen, un número de nodos de demanda, denominado nodo demanda y un número de nodos intermedios (o transbordos) sin oferta y demanda. Hay un costo de envío asociado con cada arco de la red.

De acuerdo a Bris (2011). El modelo de transbordo puede formularse de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{kj}$$

Sujeto a:

Oferta:

$$\sum_{k=1}^r x_{ik} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Demanda:

$$\sum_{k=1}^r x_{kj} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Ecuación de balance oferta demanda:

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{kj}$$

Condiciones de no negatividad:

$$x_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, r$$

$$x_{kj} \geq 0, \quad k = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n$$

### Ejemplo de un problema de transbordo. (Bris, 2011)

Considere un problema que abarca tres orígenes, es decir, tres fábricas y tres minoristas, es decir puntos de la demanda. Cada origen tiene una cierta capacidad máxima de mercancías, representadas por los nodos 1, 2 y 3, que son 500, 450 y 400, unidades, respectivamente. Cada punto de demanda requiere una cierta cantidad de dichos bienes por parte de un conjunto de minoristas, representados por los nodos 7, 8 y 9, respectivamente, que son 350, 350 y 650 unidades, respectivamente. Entre los nodos de origen y nodos de destino hay algunos nodos intermedios sobre los cuales las mercancías son enviadas como puntos intermedios a los nodos de destino. En este caso, son arcos (dirigidos desde el origen hasta el destino). El objetivo es encontrar el costo mínimo de transporte desde las plantas hasta los puntos de demanda.

Los datos de costos de transporte por unidad para el problema de transbordo se muestran en la siguiente tabla:

Fábrica (planta)	Nodo intermedio (almacén)			Nodo intermedio (almacén)	Nodo destino (demanda)		
	4	5	6		7	8	9
1	2	3	3	4	7	6	6
2	5	4	1	5	4	2	1
3	3	5	3	6	3	6	8

Como tal, podemos construir un diagrama de flujo para representar el problema de decisión de la misma manera que el problema de transporte. El diagrama del problema de transporte del ejemplo se muestra en la figura siguiente, donde cada uno de los 18 arcos del diagrama representa el flujo de mercancías a través de la red.

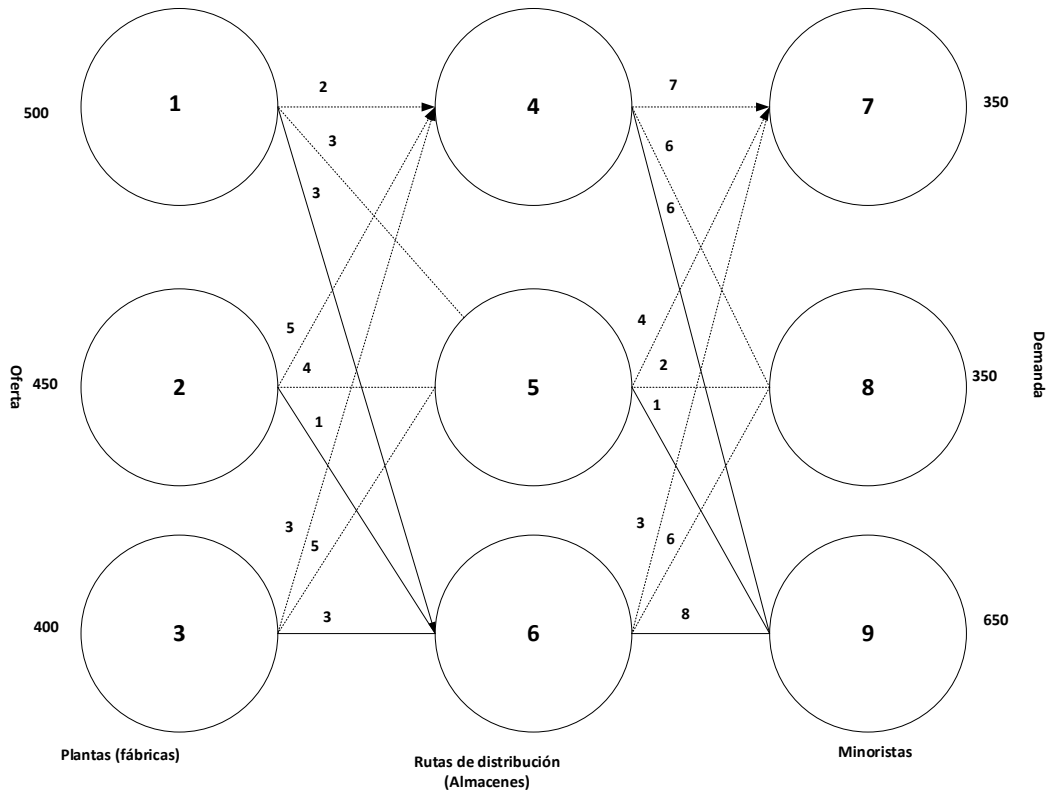


Diagrama del problema de transbordo

El modelo de programación lineal par el problema de transbordo del ejemplo, se plantea de la siguiente forma:

Para  $i = 1,2,3$  ;  $j = 7,8,9$  y  $k = 4,5,6$  sea  $c_{ik}$  el costo de transporte de la fábrica  $i$  al almacén  $k$  y sea  $x_{ik}$  el número de unidades enviadas del origen  $i$  al almacén  $k$ . Sea  $c_{kj}$  el costo de transporte del almacén  $k$  al destino  $j$  y, sea  $x_{kj}$  el número de unidades enviadas del almacén  $k$  al destino  $j$ . Además, sea  $a_i$  el número de unidades disponibles en el origen o depósito  $i$  (la oferta). Entonces,  $a_1 = 500, a_2 = 450, a_3 = 400$ , respectivamente.

Sea  $b_j$  el número de artículos ordenados por el cliente  $j$  (la demanda). Entonces,  $b_1 = 350$ ,  $b_2 = 350$ ,  $b_3 = 650$ , respectivamente. Este problema puede formularse como un modelo de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 2x_{14} + 3x_{15} + x_{16} + 5x_{24} + 4x_{25} + x_{26} + 3x_{34} + 5x_{35} + x_{36} + 7x_{47} + 6x_{48} \\ & + 6x_{49} + 4x_{57} + 2x_{58} + x_{59} + 3x_{67} + 6x_{68} + 8x_{69} \end{aligned}$$

Oferta plantas o fábricas:

Planta 1:

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 500$$

Planta 2:

$$x_{24} + x_{25} + x_{26} \leq 450$$

Planta 3:

$$x_{34} + x_{35} + x_{36} \leq 500$$

Demandas minoristas:

Demanda 1:

$$x_{47} + x_{57} + x_{67} = 350$$

Demanda 2:

$$x_{48} + x_{58} + x_{68} = 350$$

Demanda 3:

$$x_{49} + x_{59} + x_{69} = 650$$

Ecuaciones de balance oferta demanda:

Ingreso a nodo a nodo 4 = Salida nodo 4:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{47} - x_{48} - x_{49} = 0$$

Ingreso a nodo 5 = Salida nodo 5:

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} - x_{57} - x_{58} - x_{59} = 0$$

Ingreso a nodo 6 = Salida nodo 6:

$$x_{16} + x_{26} + x_{36} - x_{67} - x_{68} - x_{69} = 0$$

Condiciones de no negatividad:

$$x_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3; k = 1, \dots, 3$$

$$x_{kj} \geq 0, \quad k = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 3$$

Utilizando un programa específico de computadora, por ejemplo, usando el programa *Lingo*, de *Lindo, System Inc.*, podemos verificar que el costo mínimo de transporte para el problema de transbordo es de \$6,650; los valores óptimos de las  $x_{ik}$  y de las  $x_{kj}$  se unen a los arcos de la figura siguiente.

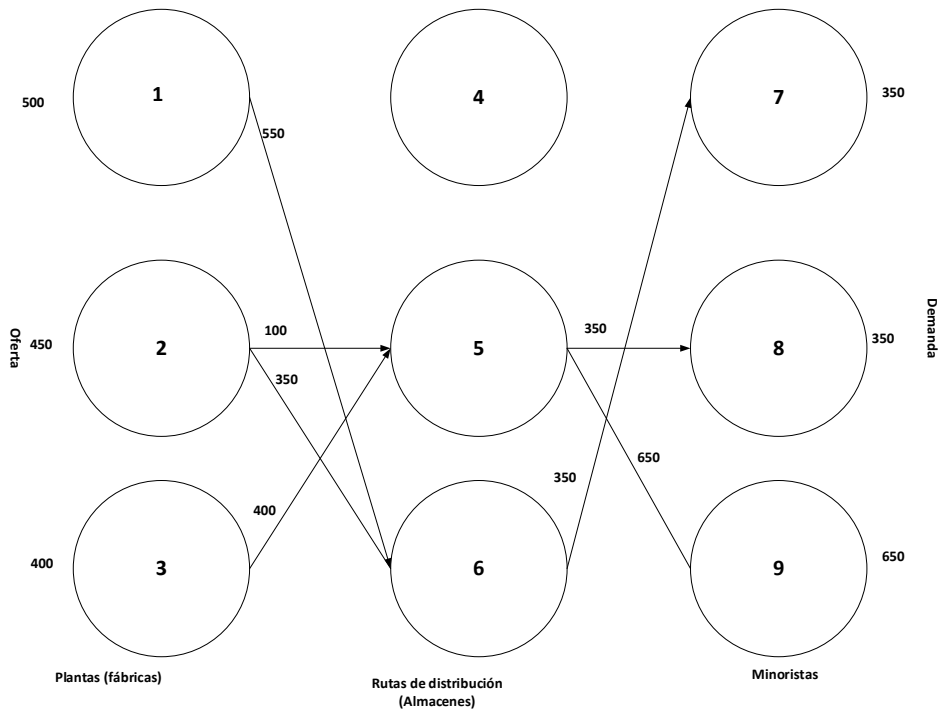


Diagrama de flujo óptimo para el problema de asignación



Código Lingo para el problema de transbordo:

Min =

$$2*x_{14}+3*x_{15}+3*x_{16}+5*x_{24}+4*x_{25}+x_{26}+3*x_{34}+5*x_{35}+3*x_{36}+7*x_{47}+6*x_{48}+6*x_{49}+4*x_{57}+2*x_{58}+x_{59}+3*x_{67}+6*x_{68}+8*x_{69};$$

$$x_{14}+x_{15}+x_{16}\leq 500;$$

$$x_{24}+x_{25}+x_{26}\leq 450;$$

$$x_{34}+x_{35}+x_{36}\leq 400;$$

$$x_{47}+x_{57}+x_{67}\leq 350;$$

$$x_{48}+x_{58}+x_{68}=350;$$

$$x_{49}+x_{59}+x_{69}=650;$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}-x_{47}-x_{48}-x_{49}=0;$$

$$x_{15}+x_{25}+x_{35}-x_{57}-x_{58}-x_{59}=0;$$

$$x_{16}+x_{26}+x_{36}-x_{67}-x_{68}-x_{69}=0;$$

end

## 5. Problema de la ruta más corta

El problema del camino más corto es un modelo de red particular que ha recibido mucha atención tanto por razones prácticas como teóricas. La esencia del problema se puede afirmar de la siguiente manera: Dada una red con distancia  $c_{ij}$  (o tiempo de viaje, o costo, etc.) asociada con cada arco, encuentre un camino a través de la red desde un origen particular a un destino que tiene la distancia total más corta. La simplicidad del enunciado del problema es un tanto engañosa, porque una serie de aplicaciones importantes pueden formularse como problemas de trayectoria más cortas (o más largas) cuando esta formulación no es obvia desde el principio. Estos incluyen problemas de reemplazo de equipos, inversión de capital, planificación de proyectos y planificación de inventarios.

El interés teórico en el problema se debe al hecho de que tiene una estructura especial, además de ser una red, que resulta en procedimientos de solución muy eficientes. Además, el problema de la trayectoria más corta ocurre a menudo como un sub-problema en situaciones más complejas, tales como los sub-problemas en la aplicación de la descomposición a los problemas de asignación de tráfico que a menudo son tratados mediante la teoría de la programación lineal entera.

En general, la formulación del problema de trayectoria (distancia) más corta es la siguiente:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

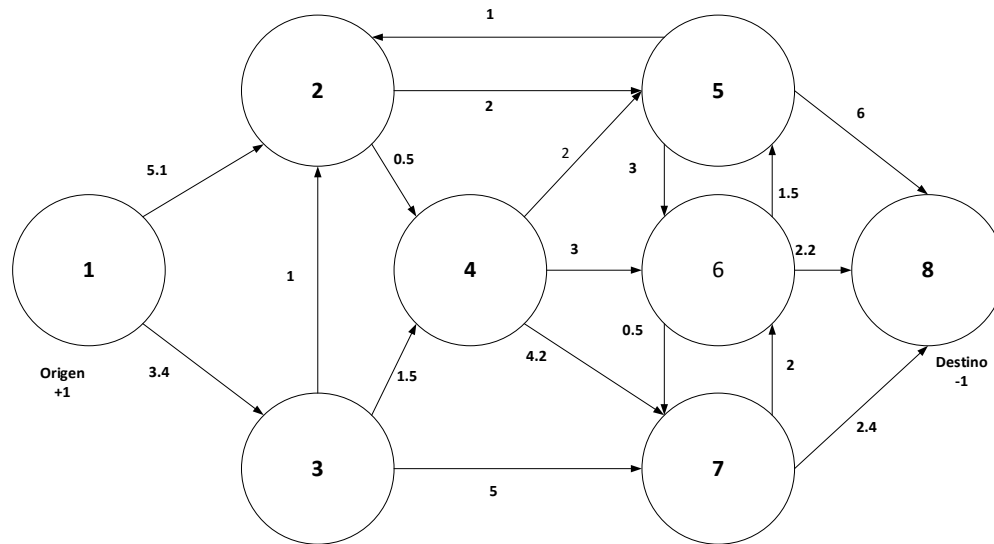
Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{k=1}^r x_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = s \text{ (origen)} \\ 0, & \text{otro caso} \\ -1, & \text{si } i = t \text{ (destino)} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{para todos los } (i,j) \text{ arcos en la red}$$

Podemos interpretar el problema del camino más corto como un problema de flujo de red muy fácilmente. Simplemente queremos enviar una unidad de flujo de la fuente al destino a un costo mínimo. En la fuente (origen), hay un suministro neto de una unidad; En el destino, hay una demanda neta de una unidad; y en todos los otros nodos no hay entrada neta o flujo de salida.

Consideremos un ejemplo de Bradley (1977), que se muestra en el esquema de red correspondiente, en donde queremos encontrar la distancia más corta entre el nodo 1 y el 8. Los números o pesos en los arcos son la distancia o el costo de usar ese arco. De igual forma, el modelo de programación lineal se muestra en un cuadro posterior al esquema de red citado anteriormente y que se elabora en un cuadro resumen donde se indican las variables de decisión, la función objetivo y el conjunto de restricciones del problema.



Flujo en red de la ruta más corta

El modelo de programación lineal par el problema de la ruta más corta del ejemplo, se plantea de la siguiente forma:

Sea  $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el arco del nodo } i \text{ está en la ruta más corta} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$c_{ij}$  = distancia, tiempo o costo asociado con el arco dese el nodo  $i$  hasta el  $j$

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 5.1x_{12} + 3.4x_{13} + 0.5x_{24} + 2x_{25} + x_{32} + 1.5x_{34} + 5x_{37} + 2x_{45} + 3x_{46} + 4.2x_{47} \\ & + x_{52} + 3x_{56} + 6x_{58} + 1.5x_{65} + 0.5x_{67} + 2.2x_{68} + 2x_{76} + 2.4x_{78} \end{aligned}$$

Sujeto a:

Nodo 1:  $x_{12} + x_{13} = 1$

Nodo 2:  $-x_{12} + x_{24} + x_{25} - x_{32} - x_{52} = 0$

Nodo 3:  $-x_{13} + x_{32} + x_{34} + x_{37} = 0$

Nodo 4:  $-x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 0$

Nodo 5:  $-x_{25} - x_{45} + x_{52} + x_{56} + x_{58} - x_{65} = 0$

Nodo 6:  $-x_{46} - x_{56} + x_{65} + x_{67} + x_{68} - x_{76} = 0$

Nodo 7:  $-x_{37} - x_{47} - x_{67} + x_{76} + x_{78} = 0$

Nodo 8:  $-x_{58} - x_{68} - x_{78} = -1$

$x_{ij} \geq 0$ , para todos los  $(i, j)$  arcos en la red

Utilizando un programa específico de computadora, por ejemplo, usando Microsoft Excel Solver., podemos verificar que la distancia mínima es de 10.1 y que la ruta más corta es:

Variable	x12	x13	x24	x25	x32	x34	x37	x45	x46	x47	x52	x56	x58	x65	x67	x68	x76	x78	Distancia			
	Mínima																					
	5.1	3.4	0.5	2	1	1.5	5	2	3	4.2	1	3	6	1.5	0.5	2.2	2	2.4	10.1			
Restricciones																						
Nodo 1	1	1																		Usado	Disponible	
Nodo 2	-1		1	1	-1						-1									1	=	1
Nodo 3		-1			1	1	1													0	=	0
Nodo 4			-1				1	1	1											0	=	0
Nodo 5				-1				-1			1	1	1	-1						0	=	0
Nodo 6									-1			-1		1	1	1	-1			0	=	0
Nodo 7							-1			-1					-1		1	1		0	=	0
Nodo 8													-1			-1		-1		-1	=	-1
Solución	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0				

Ruta más corta: (1-3) - (3-2) - (2-4) - (4-6) - (6-8)

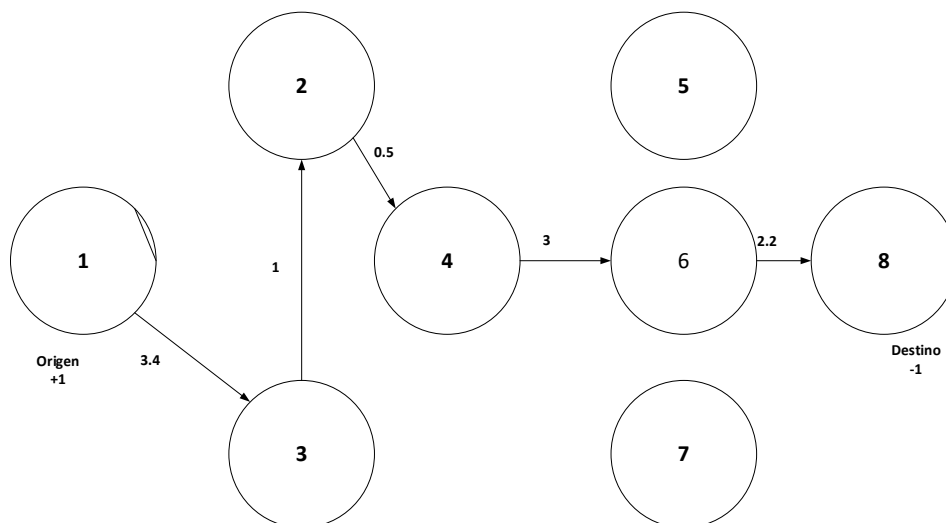


Diagrama de flujo óptimo para el problema de la ruta más corta

## **6. Programación de proyectos Pert-Cpm (Técnica de Revisión y Evaluación de Programas y el Método del Camino Crítico)**

El método del camino crítico (CPM), también conocido como el método de la ruta crítica es una técnica de gestión de proyectos que se utiliza ampliamente en el gobierno y la industria para analizar, planificar y programar las diversas tareas de proyectos complejos. El CPM es útil para identificar qué tareas son críticas para la ejecución del proyecto en general y para programar todas las tareas de acuerdo con sus relaciones de prioridad prescritas para minimizar la fecha total de finalización del proyecto o si se cumple una fecha objetivo con un costo mínimo.

Normalmente, el CPM puede aplicarse con éxito en grandes proyectos de construcción, como construir un aeropuerto o una carretera; en grandes proyectos de mantenimiento, como los que se encuentran en las centrales nucleares o en las refinerías de petróleo; y en complejos esfuerzos de investigación y desarrollo, tales como el desarrollo tecnológico, pruebas e introducción de un nuevo producto. Todos estos proyectos consisten en una lista bien especificada de tareas que deben ejecutarse en una determinada secuencia prescrita.

El método de la ruta crítica proporciona una metodología para definir las interrelaciones entre las tareas y determinar la forma más efectiva de programar su finalización.

De acuerdo a Sierksma y Slows (2015), un proyecto es una combinación de actividades interrelacionadas que deben llevarse a cabo. Cada actividad requiere de una cierta cantidad de tiempo, llamado el tiempo de ejecución de la actividad. Además, hay restricciones de precedencia, lo que significa que algunas actividades no pueden comenzar hasta que otras hayan sido completadas. Una actividad no tiene que iniciarse inmediatamente después de que las actividades precedentes necesarias sean completadas. De hecho, lo que se desea es construir un calendario que describa el orden en que las actividades deben llevarse a cabo, respetando las restricciones de precedencia.

Cada proyecto puede representarse mediante una estructura de red llamada red del proyecto, y que tiene las siguientes propiedades:

- a) Los nodos se refieren a las metas (o hitos)

- b) Cada actividad de un proyecto es representada precisamente por un arco en la red del proyecto
- c) La red no contiene un ciclo dirigido

El objetivo es determinar una calendarización de manera que se minimice el tiempo total requerido para ejecutar esta programación, el denominado tiempo total de terminación.

Aunque la formulación matemática del problema de programación presenta una estructura de red, esto no es obvio desde el principio.

Consideremos un caso que ejemplifica la forma en que se aborda un problema de esta naturaleza utilizando modelos de programación lineal. Posteriormente resolveremos problemas de la ruta crítica mediante un procedimiento algebraico.

De acuerdo a Bradley (1977), supongamos que consideramos la programación de las tareas involucradas en la construcción de una casa sobre una base que ya existe. Nos gustaría determinar en qué secuencia se deben realizar las tareas con el fin de minimizar el tiempo total requerido para ejecutar el proyecto. Todo lo que realmente sabemos es cuánto tiempo se tarda en llevar a cabo cada tarea y qué tareas deben completarse antes de comenzar cualquier tarea en particular. De hecho, estará claro que sólo necesitamos conocer las tareas que preceden inmediatamente a una tarea particular, ya que la realización de todas las tareas anteriores estará implícita en esta información. Las tareas que se deben realizar en la construcción de esta casa particular, sus predecesores inmediatos, y una estimación de su duración se dan en la Tabla que se muestra posteriormente.

Es evidente que no hay necesidad de indicar que el revestimiento debe ser colocado antes de que la pintura exterior pueda comenzar, ya que la colocación del revestimiento precede a la instalación de las ventanas, que precede a la pintura exterior. Siempre es conveniente identificar una tarea de "inicio", es decir, un predecesor inmediato de todas las tareas, que en sí mismo no tiene predecesores; y una tarea de "acabado", que tiene, como predecesores inmediatos, todas las tareas que en la actualidad no tienen sucesores.

No.	Tarea (actividad)	Predecesor inmediato	Tiempo (duración de la actividad)	Tiempo inicio más temprano
0	Inicio de obra	-----	0	-----
1	Estructura	0	2	t <sub>1</sub>
2	Cubierta	1	3	t <sub>2</sub>
3	Revestimiento	1	1	t <sub>2</sub>
4	Ventanas	3	2.5	t <sub>3</sub>
5	Plomería	3	1.5	t <sub>3</sub>
6	Sistema eléctrico	2, 4	2	t <sub>4</sub>
7	Acabado interior	5, 6	4	t <sub>5</sub>
8	Pintura exterior	2, 4	3	t <sub>4</sub>
9	Fin de la obra	7, 8	0	t <sub>6</sub>

Aunque no es necesario para realizar los cálculos necesarios asociados con el problema de programación de proyectos, a menudo es útil representar las interrelaciones entre las tareas de un proyecto dado por medio de un diagrama de red. En este diagrama, los nodos representan las tareas correspondientes del proyecto y los arcos representan las relaciones de prioridad entre las tareas. El diagrama de red para nuestro ejemplo se muestra en la figura siguiente:

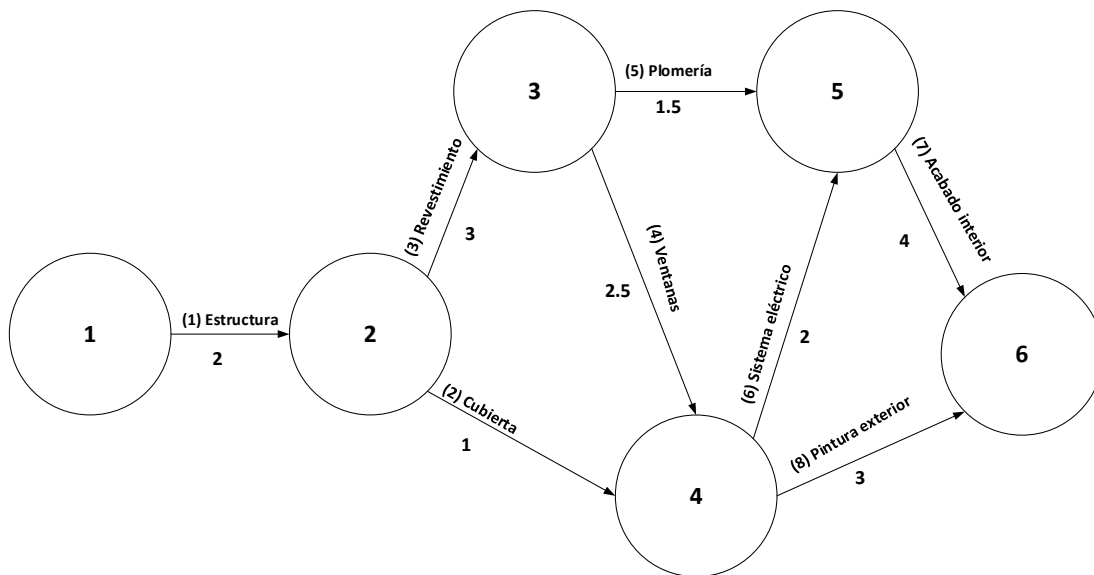


Diagrama de red orientada a eventos para nuestro ejemplo

Como podemos ver, hay seis nodos en la red, cada uno representando una tarea dada. Por esta razón, esta representación de red se denomina una red orientada a tareas (o actividades).

Si asumimos que nuestro objetivo es minimizar el tiempo transcurrido del proyecto, podemos formular un problema de programación lineal.

Si asumimos que nuestro objetivo es minimizar el tiempo transcurrido del proyecto, podemos formular un problema de programación lineal. En primer lugar, definimos las variables de decisión  $t_i$  para  $i = 1, \dots, 6$  como los primeros tiempos de inicio para cada una de las tareas. La tabla anterior proporciona los tiempos de inicio más tempranos donde el mismo tiempo de inicio más temprano se asigna a tareas con los mismos predecesores inmediatos. Por ejemplo, las tareas 4 y 5 tienen la tarea 3 como su predecesor inmediato. Obviamente, no pueden comenzar hasta que la tarea 3 esté terminada; Por lo tanto, deben tener el mismo tiempo de inicio más temprano. Permitiendo que  $t_6$  sea el tiempo de terminación más temprano de todo el proyecto, el objetivo es minimizar la duración del proyecto dado por:

$$\text{Min } Z = t_n - t_1$$

Sujeto a:

$$t_j - t_i \geq c_{(i,j)}$$

*para  $(i, j) \in a$  la red del proyecto*

Para nuestro ejemplo, estas relaciones de precedencia definen el programa de programación lineal siguiente:

$$\text{Min } Z = t_6 - t_1$$

Sujeto a:

$$t_2 - t_1 \geq 2$$

$$t_3 - t_2 \geq 3$$

$$t_4 - t_2 \geq 1$$

$$t_4 - t_3 \geq 2.5$$

$$t_5 - t_3 \geq 1.5$$



$$t_5 - t_4 \geq 2$$

$$t_6 - t_4 \geq 3$$

$$t_6 - t_5 \geq 4$$

para  $(i, j) \in a$  la red del proyecto

Utilizando un programa específico de computadora, por ejemplo, *Lindo, de Lindo, System, Inc.* Se tiene la siguiente solución:

El correspondiente valor de la función objetivo es  $Z^* = 13.5$

$$t_6 = 13.5, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = 5, \quad t_4 = 7.5, \quad t_5 = 9.5$$

Los gerentes de proyectos buscan procedimientos que les ayuden a responder preguntas importantes con respecto a la planeación, programación y control de los proyectos. A la luz de la información que nos da la solución del modelo de programación lineal.

El proyecto puede terminarse en 13.5 unidades de tiempo (días, semanas, meses, etc.)

La solución óptima del modelo contiene los tiempos de realización de las distintas metas. Sin embargo, no proporciona los arcos de la ruta crítica correspondiente. Estos arcos se obtienen resolviendo el modelo de programación dual del problema, es decir:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in A} c_{(i,j)} y_{(i,j)}$$

Sujeto a:

$$- \sum_{(1,j) \in A} y_{(1,j)} = -1$$

$$\sum_{(i,k) \in A} y_{(i,k)} - \sum_{(k,j) \in A} y_{(k,j)} = 0, \quad \text{para } k = 2, \dots, n-1$$

$$\sum_{(1,n) \in A} y_{(1,n)} = 1$$

$$y_{(i,j)} \geq 0, \quad \text{para } (i, j) \in A.$$

Entonces, para nuestro problema de la ruta crítica, tenemos la definición de las variables de decisión que nos permitirán construir el modelo.

Sea  $(i, j)$  el arco que  $\in$  a la red si y solo si la variable dual correspondiente a la restricción  $t_j - t_i \geq c_{(i,j)}$  tiene un valor óptimo que es estrictamente mayor que cero.

Por lo tanto, para los datos de nuestro problema, el modelo de programación lineal es:

$$\text{Min } Z = 2y_{(1,2)} + 3y_{(2,3)} + y_{(2,4)} + 2.5y_{(3,4)} + 1.5y_{(3,5)} + 2y_{(4,5)} + 3y_{(4,6)} + 4y_{(5,6)}$$

Sujeto a:

$$-y_{(1,2)} = -1$$

$$y_{(1,2)} - y_{(2,3)} - y_{(2,4)} = 0$$

$$y_{(2,3)} - y_{(3,4)} - y_{(3,5)} = 0$$

$$y_{(2,4)} + y_{(3,4)} - y_{(4,5)} - y_{(4,6)} = 0$$

$$y_{(3,5)} + y_{(4,5)} - y_{(5,6)} = 0$$

$$y_{(4,6)} + y_{(5,6)} = 1$$

$$y_{(i,j)} \geq 0, \quad \text{para } (i,j) \in A.$$

Utilizando un programa específico de computadora, por ejemplo, usando Microsoft Excel Solver, podemos verificar que la solución óptima del problema, se convierte en:

$$\begin{aligned} y_{(1,2)} &= 1, & y_{(2,3)} &= 1, & y_{(2,4)} &= 0, & y_{(3,4)} &= 1, & y_{(3,5)} &= 0, \\ y_{(4,5)} &= 1 \\ y_{(4,6)} &= 0, & y_{(5,6)} &= 1 \end{aligned}$$

De esta solución óptima, se deduce que los arcos  $(1,2)$ ,  $(2,3)$ ,  $(3,4)$ ,  $(4,5)$  y  $(5,6)$  están en la trayectoria o ruta crítica. El tiempo de conclusión del proyecto es de 13.5 semanas, tal como se obtuvo en el primer modelo para obtener solo la duración del proyecto.

El modelo en hoja electrónica de cálculo se muestra a continuación:

	y(1,2)	y(2,3)	y(2,4)	y(3,4)	y(3,5)	y(4,5)	y(4,6)	y(5,6)	Usado	Relación	Derecho	
	1								1	=	1	
	1	-1	-1						0	=	0	
		1		-1	-1				0	=	0	
			1	1		-1	-1		0	=	0	
					1	1		-1	0	=	0	
							1	1	1	=	1	
Tiempo actividad	2	3	1	2.5	1.5	2	3	4		=	13.5	ÓPTIMO
Solución	1	1	0	1	0	1	0	1			(Tiempo)	
ARCOS	(1,2)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(5,6)				

El diagrama de flujo para el problema de la ruta crítica, se muestra en la siguiente gráfica.

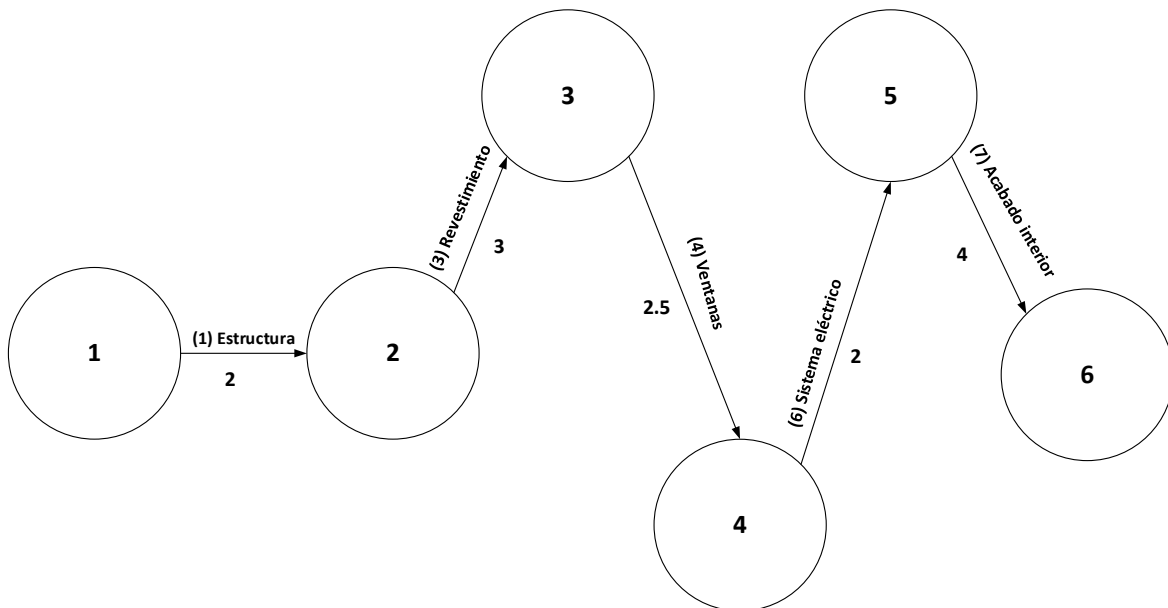
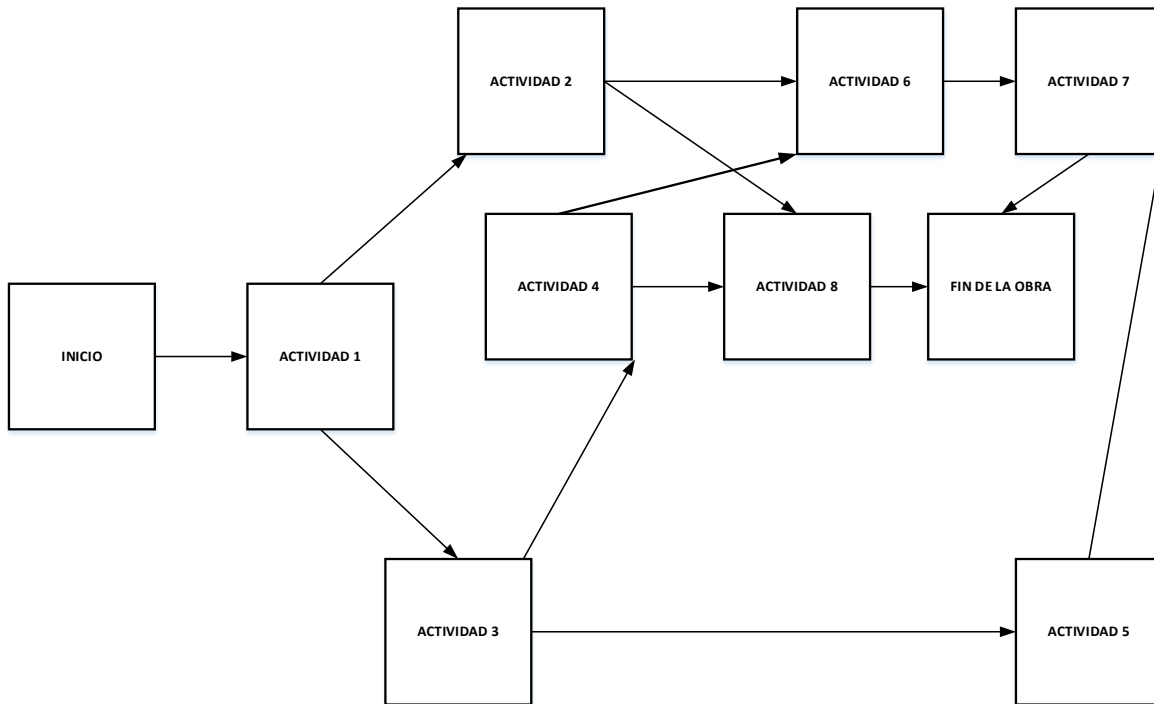


Diagrama de flujo óptimo con arcos (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) y (5,6) para el problema de la ruta crítica

Para facilitar los cálculos PERT/CPM, modificaremos la red del proyecto como se muestra en la figura siguiente. Observe que en el recuadro anexo la esquina superior de cada nodo contiene la letra o número de la actividad correspondiente. El tiempo aparece debajo de la letra o número, según sea el caso. Similarmente, se indican todos los tiempos que involucran la determinación de la ruta crítica.



Nombre Actividad	Tiempo de Inicio más Temprano	Tiempo de Terminación Más temprano
Duración De la Actividad	Tiempo de Inicio más Tardío	Tiempo de Terminación Más tardío

Para nuestro ejemplo, tenemos para la actividad 2:

<b>Cubierta</b>	<b>ES</b>	<b>EF</b>
<b>1</b>	<b>LS</b>	<b>LF</b>

## Determinación de la ruta crítica

Primero determinamos el tiempo de inicio más temprano y el tiempo de inicio más tardío de todas las actividades que componen la red. Sean

$$ES = \text{tiempo de inicio más temprano de una actividad}$$

$$EF = \text{tiempo de terminación más temprano de una actividad}$$

$$t = \text{tiempo de actividad}$$

**El tiempo de terminación más temprano** de cualquier actividad es:  $EF = ES + t$

El tiempo de inicio más temprano de una actividad es igual a los tiempos de terminación *más largos* de todas las predecesoras inmediatas.

El procedimiento llamado **paso hacia adelante** a través de la red, nos permitirá establecer los tiempos de inicio y terminación más tempranos de todas las actividades que componen la red.

De igual forma, para determinar la ruta crítica realizaremos un **paso hacia atrás** a través de la red, comenzamos el paso hacia atrás con un **tiempo de terminación más tardío**. Una vez que se conoce el tiempo de terminación más tardío de una actividad, el *tiempo de inicio más tardío* de una actividad se calcula como sigue. Sea

$$LS = \text{tiempo de inicio más tardío de una actividad}$$

$$LF = \text{tiempo de terminación más tardío de una actividad}$$

Entonces:

$$LS = LF - t$$

La siguiente regla puede usarse para determinar el tiempo de terminación más tardío de cada actividad en la red:

El tiempo de terminación más tardío de una actividad es el menor de los tiempos de inicio más tardíos de todas las actividades que inmediatamente siguen a la actividad.

Finalmente, después de realizar los pasos hacia adelante y hacia atrás, podemos determinar la cantidad de holgura asociada con cada actividad. Holgura es el lapso de tiempo que una actividad puede ser demorada sin que se incremente el tiempo de terminación del proyecto. La cantidad de holgura para una actividad se calcula como sigue:

$$\text{Holgura} = LS - ES = LF - EF$$

En general, las *actividades críticas* son las actividades con holgura cero.

Resumen del procedimiento de la ruta crítica. Anderson y Sweeney (2011)

**Paso 1.** Elabore una lista de las actividades que conforman el proyecto

**Paso 2.** Determine la(s) predecesora(s) inmediata(s) de cada actividad del proyecto.

**Paso 3.** Calcule el tiempo de terminación de cada actividad.

**Paso 4.** Trace una red de proyecto que ilustre las actividades y las predecesoras inmediatas mencionadas en los pasos 1 y 2.

**Paso 5.** Utilice la red del proyecto y las estimaciones de los tiempos de actividad para determinar los tiempos de inicio y terminación más tempranos de cada actividad avanzando un paso a través de la red. El tiempo de terminación más temprano de la última actividad del proyecto identifica el tiempo total requerido para terminarlo.

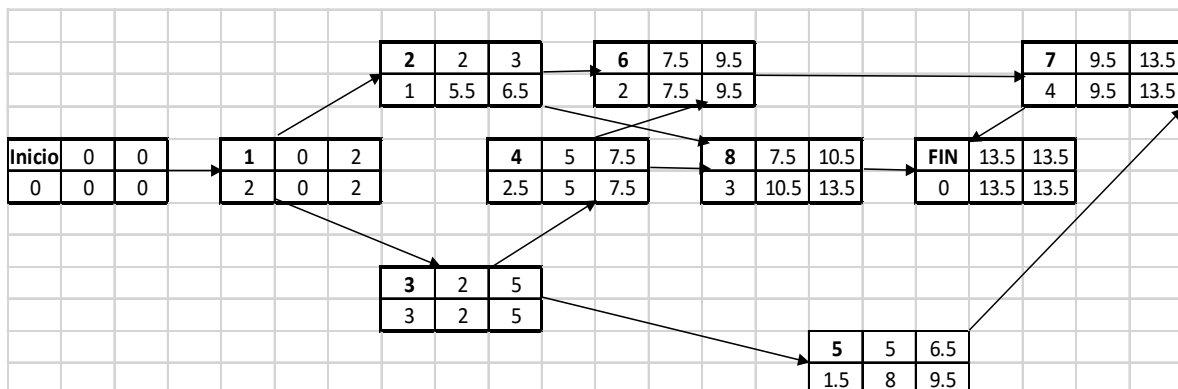
**Paso 6.** Utilice el tiempo de terminación del proyecto en el paso 5 como el tiempo de terminación más tardío de la última actividad, y retroceda un paso a través de la red para identificar los tiempos de inicio y terminación más tardíos de cada actividad.

**Paso 7.** Utilice la diferencia entre el tiempo de inicio más tardío y el tiempo de inicio más temprano de cada actividad para determinar su holgura.

**Paso 8.** Determine las actividades con holgura cero; ésta son las actividades críticas.

**Paso 9.** Utilice la información de los pasos 5 y 6 para desarrollar el programa de actividades dl proyecto.

Para nuestro ejemplo, tenemos:



Red del proyecto sobre la programación de las tareas involucradas en la construcción de una casa sobre una base que ya existe. Ruta crítica: Inicio- 1-3-4-6-7-Fin. Tiempo de terminación del proyecto = 13.5 unidades de tiempo.

A continuación, se muestra el programa detallado de actividades:

Actividad	Descripción	Inicio más temprano (ES)	Inicio más tardío (EF)	Terminación más temprana (LS)	Terminación más tardía (LF)	Holgura (LS-ES) (LF-EF)	Actividad crítica
<b>0</b>	Inicio de obra	0	0	0	0	0	
<b>1</b>	<b>Estructura</b>	0	2	0	2	0	<b>Si</b>
<b>2</b>	Cubierta	2	3	5.5	6.5	1	No
<b>3</b>	<b>Revestimiento</b>	2	5	2	5	0	<b>Si</b>
<b>4</b>	<b>Ventanas</b>	5	7.5	5	7.5	0	<b>Si</b>
<b>5</b>	Plomería	5	6.5	8	9.5	7	No
<b>6</b>	<b>Sistema</b>	7.5	9.5	7.5	9.5	0	<b>Si</b>
<b>7</b>	<b>Acabado</b>	9.5	13.5	9.5	13.5	0	<b>Si</b>
<b>8</b>	Pintura exterior	7.5	10.5	10.5	13.5	3	<b>No</b>
<b>9</b>	Fin de la obra	10.5	13.5	10.5	13.5	0	

Ruta crítica: Inicio-1-3-4-6-7-Fin. Tiempo de terminación del proyecto: 13.5 unidades de tiempo.

## 7. Ejemplos de problemas de redes

En esta sección presentaremos un número de problemas de redes y su solución usando distintos programas como Microsoft Excel, Maple, Lindo, Lingo o Matlab, según sea el caso o el problema en particular.

### **Problema No. 1**

*Problema de transporte. Parlar (2000)*

SunSno, una empresa multinacional que opera tres fábricas en (1) Jasper, Canadá, (2) Seúl, Corea, y (3) Toronto, Canadá. SunSno envía esquís a cuatro almacenes propiedad de la empresa en (1) Frankfurt, Alemania, (2) Nueva York, USA, (3) Paris, Francia, y (4) Yokohama, Japón. Las capacidades semanales de producción  $a_i, i = 1, 2, 3$  de las  $m$  fábricas y la demanda semanal  $b_j, j = 1, 2, 3, 4$  de los  $n$  almacenes se muestran en la siguiente tabla donde también se indica el costo unitario de transporte  $c_{ij}, i = 1, \dots, 3$  y  $j = 1, \dots, 4$  en negritas. (Problema de transporte balanceado)

De \ A	Frankfurt	Nueva York	Paris	Yokohama	Oferta
Jasper	<b>19</b>	<b>7</b>	<b>13</b>	<b>8</b>	100
Seúl	<b>15</b>	<b>21</b>	<b>18</b>	<b>6</b>	300
Toronto	<b>11</b>	<b>3</b>	<b>12</b>	<b>20</b>	200
Demanda	150	100	200	150	600

Para resolver este problema como un programa lineal, definimos  $x_{ij}$  como el número de unidades enviadas de la fábrica  $i$  al almacén  $j$  para las fábricas  $i = 1, \dots, m$  y los almacenes  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, el modelo de programa lineal del problema de transporte toma la siguiente forma:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m$$



$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\forall x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

Especializada está a la empresa en el proceso de decisión, obtenemos el siguiente modelo de programación lineal.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 19x_{11} + 7x_{12} + 13x_{13} + 8x_{14} + 15x_{21} + 21x_{22} + 18x_{23} + 6x_{24} \\ & + 11x_{31} + 3x_{32} + 12x_{33} + 20x_{34} \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 \quad (\text{Capacidad de Jasper})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300 \quad (\text{Capacidad de Seúl})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200 \quad (\text{Capacidad de Toronto})$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150 \quad (\text{Demanda de Frankfurt})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100 \quad (\text{Demanda de Nueva York})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200 \quad (\text{Demanda de Paris})$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 150 \quad (\text{Demanda de Yokohoma})$$

$$\forall x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 4$$

Observe que, en general, la formulación de un problema de transporte como un problema lineal resulta en  $m \times n$  variables de decisión y  $m + n$  restricciones. En este problema tenemos  $3 \times 4 = 12$  variables y  $3 + 4$  restricciones. Además, puesto que la oferta total de  $\sum_{i=1}^3 a_i = 600$  unidades es igual a la demanda  $\sum_{j=1}^4 b_j = 600$ , las fábricas estarán enviando todo lo que producen y las demandas de cada almacén o punto de orden estarán satisfechas en su totalidad. El problema de transporte donde  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$  se dice que son problemas equilibrados o balanceados.

Formulando y resolviendo este problema usando Maple de forma directa se introducen la función objetivo y el conjunto de restricciones. Una vez hecho esto,

volvemos a utilizar el paquete de optimización de Maple para encontrar la solución óptima del problema.

$$\text{Restricciones} := \{x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 100, x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 300, x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 200, 100 < x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2}, 150 < x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1}, 150 < x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4}, 200 < x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3}\}$$

$$\{x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 100, x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 300, x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 200, 100 < x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2}, 150 < x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1}, 150 < x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4}, 200 < x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3}\}$$

$$\text{Objetivo} := 19x_{1,1} + 7x_{1,2} + 13x_{1,3} + 8x_{1,4} + 15x_{2,1} + 21x_{2,2} + 18x_{2,3} + 6x_{2,4} + 11x_{3,1} + 3x_{3,2} + 12x_{3,3} + 20x_{3,4}$$

$$19x_{1,1} + 7x_{1,2} + 13x_{1,3} + 8x_{1,4} + 15x_{2,1} + 21x_{2,2} + 18x_{2,3} + 6x_{2,4} + 11x_{3,1} + 3x_{3,2} + 12x_{3,3} + 20x_{3,4}$$

with(Optimization);

[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve]

Minimize(19x11 + 7x12 + 13x13 + 8x14 + 15x21 + 21x22 + 18x23 + 6x24 + 11x31 + 3x32 + 12x33 + 20x34, {x11 + x12 + x13 + x14 = 100, x21 + x22 + x23 + x24 = 300, x31 + x32 + x33 + x34 = 200, 150 ≤ x11 + x21 + x31, 150 ≤ x14 + x24 + x34, 200 ≤ x13 + x23 + x33, 100 ≤ x12 + x22 + x32}, assume = nonnegative)

[5950.00000001136, [x11 = 0., x12 = 0., x13 = 100.000000002065, x14 = 0., x21 = 149.99999999656, x22 = 0., x23 = 0., x24 = 150.00000000344, x31 = 0., x32 = 100., x33 = 99.999999989674, x34 = 0.]]

Entonces, la solución óptima obtenida con un costo mínimo de  $z = \$5,950$ . Resumimos la solución óptima en la siguiente tabla:

De\ A	Frankfurt	Nueva York	Paris	Yokohama	Oferta
Jasper	0	0	100	0	100
Seúl	150	0	0	150	300
Toronto	0	100	100	0	200
Demanda	150	100	200	150	600

En algunos casos, la oferta no es igual a la demanda. Si la oferta excede a la demanda total, por ejemplo, cuando  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ , entonces solamente realizamos las modificación de la restricción de oferta como,  $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m$ . En este caso la oferta sobrepasa a la demanda. En este caso el exceso de oferta aparecería como una holgura, que debería interpretarse como la oferta no utilizada que no se envía a ningún sitio.

Cuando la oferta es menor que la demanda, por ejemplo,  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ , entonces la formulación del modelo de programación lineal será infactible. En este caso introducimos un nodo ficticio como una oferta artificial igual a  $\sum_{j=1}^n d_j - \sum_{i=1}^m a_i$ , como la diferencia entre la oferta y la demanda total.

Finalmente, cuando el número de orígenes y destinos no es excesivamente grande, un problema moderado de transporte puede resolverse utilizando el algoritmo simplex. Pero, para un problema real con , por decir,  $m = 200$  orígenes y  $n = 500$  destinos, tendríamos  $m + n = 700$  restricciones y  $m * n = 100,000$  variables. Entonces, para resolver este tipo de problemas necesitaremos un procedimiento más eficiente.

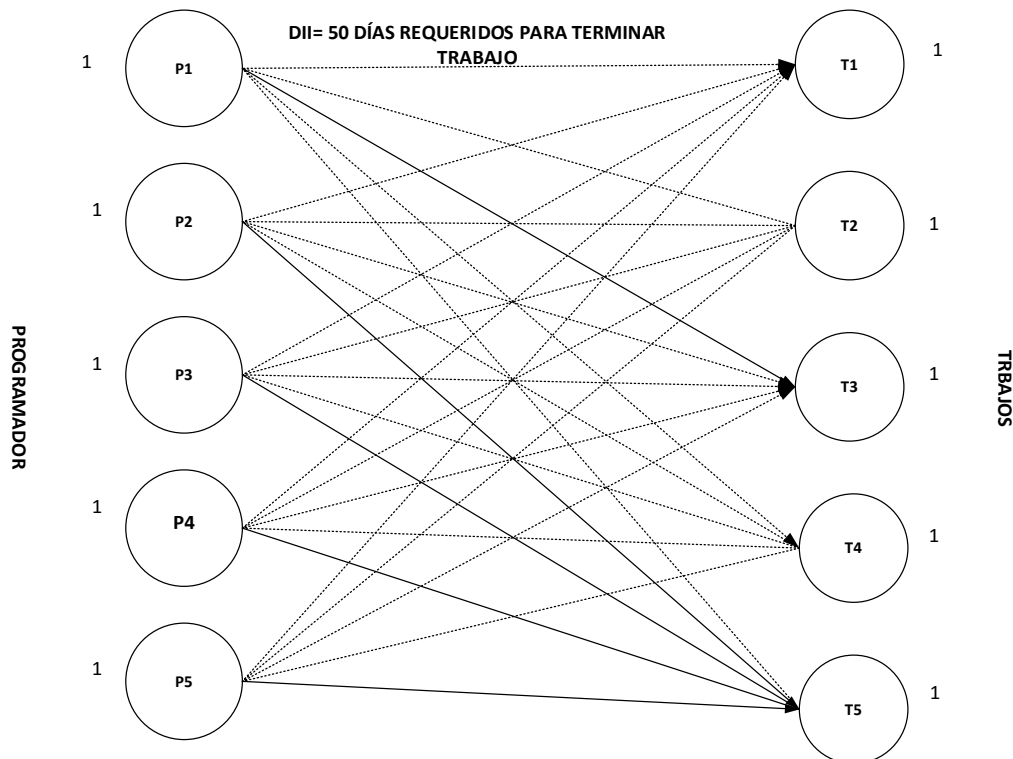
## Problema No. 2

*Un problema de asignación. Baker (2011)*

Asignación de tareas. Supongamos que un departamento de procesamiento de datos desea asignar cinco programadores a cinco tareas de programación (un programador para cada tarea). La gerencia ha estimado el número total de días que cada programador tomaría si es asignado a los diferentes trabajos, y estas estimaciones se resumen en la siguiente tabla.

	Trabajos	1	2	3	4	5
Programador	1	50	25	78	64	60
	2	43	30	70	56	72
	3	60	28	80	66	68
	4	54	29	75	60	70
	5	45	32	70	62	75

El diagrama de este ejemplo se muestra en la figura siguiente, donde cada uno de los 25 arcos del diagrama representa parte de una asignación potencial.



- Determine la asignación que minimiza los días totales de los programadores requeridos para completar los cinco puestos de trabajo.
- Muestre el diagrama de red correspondiente a la solución en (a). Es decir, etiquetar cada uno de los arcos en la solución y verificar que los flujos son consistentes con la información proporcionada.

Solución:

- El problema de asignación puede modelarse de la siguiente forma:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n$$

Usando los datos de la tabla, tenemos que el modelo de programación lineal se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 50x_{11} + 25x_{12} + 78x_{13} + 64x_{14} + 60x_{15} + 43x_{21} + 30x_{22} \\ & + 70x_{23} + 56x_{24} + 72x_{25} + 60x_{31} + 28x_{32} + 80x_{33} \\ & + 66x_{34} + 68x_{35} + 54x_{41} + 29x_{42} + 75x_{43} + 60x_{44} \\ & + 70x_{45} + 45x_{51} + 32x_{52} + 70x_{53} + 62x_{54} + 75x_{55} \end{aligned}$$

Sujeto a:

Oferta programadores:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1 \end{aligned}$$

Demanda trabajos:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1\end{aligned}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \text{ para } i, j = 1, \dots, 5$$

Resolviendo este problema de asignación utilizando el programa Lingo, cuyo código se muestra a continuación:

**MODEL:**

**! 5 Programadores, 5 Trabajos**

**Problema de Asignación;**

**SETS:**

PROGRAMADOR / P1, P2, P3, P4, P5/: OFERTA;

TRABAJOS / T1, T2, T3, T4, T5/: DEMANDA;

ROUTES (PROGRAMADOR, TRABAJOS): COSTO, VOLUMEN;

**ENDSETS**

**! La función objetivo;**

[OBJ] **MIN** = @SUM (ROUTES: COSTO \* VOLUMEN);

**! Las restricciones de demanda;**

@FOR (TRABAJOS(J): [DEM]

@SUM (PROGRAMADOR(I): VOLUMEN (I, J)) >= DEMANDA(J));

**! Las restricciones de oferta;**

@FOR (PROGRAMADOR(I): [SUP]

@SUM (TRABAJOS(J): VOLUMEN (I, J)) <= OFERTA(I));

**! Aquí los parámetros;**

**DATA:**

OFERTA = 1,1,1,1,1;

DEMANDA = 1,1,1,1,1;

COSTO = 50, 25, 78, 64,60,  
43, 30, 70, 56,72,

60, 28, 80, 66, 68,  
 54, 29, 75, 60, 70,  
 45, 32, 70, 62, 75;

ENDDATA, END

La solución del problema de asignación se muestra en la siguiente tabla:

	Trabajos	1	2	3	4	5
Programador	1					60
	2	43				
	3		28			
	4				60	
	5			70		

Valor óptimo: 261 días.

b) La red final del proyecto se muestra a continuación:

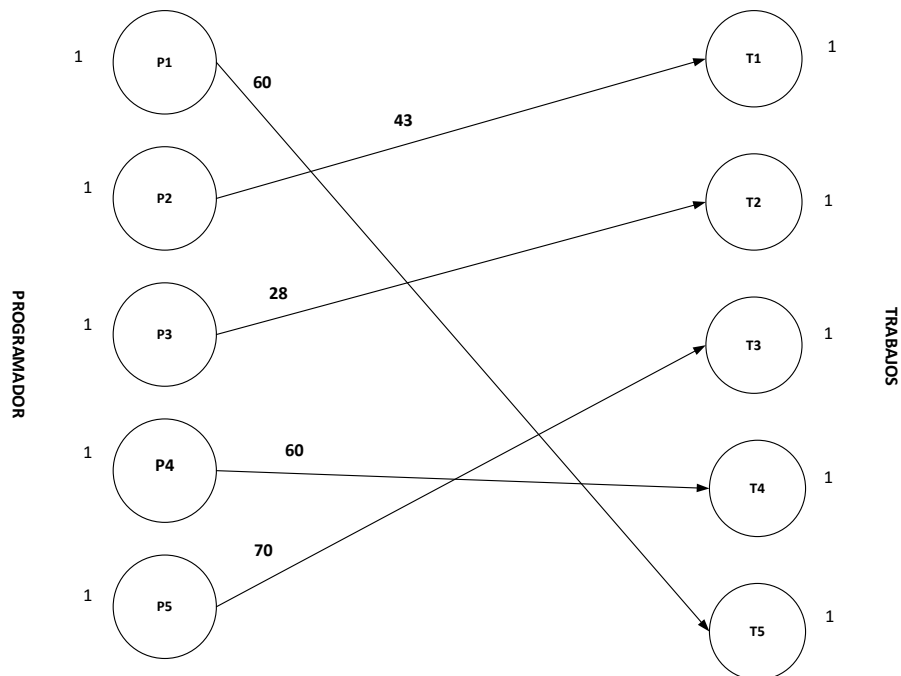


Diagrama de flujo óptimo para el problema de asignación

### **Problema No. 3**

*Un problema de transbordo. Anderson y Sweeney (2011)*

Diseño de un sistema de distribución. Una empresa fabrica y distribuye medidores que se usan para determinar el consumo de energía eléctrica. La empresa empezó con una pequeña planta de producción en El Paso y gradualmente construyó una base de clientes en todo Texas. Se estableció un centro de distribución en Fort Worth, Texas, y más tarde, conforme el negocio se extendió, se estableció un segundo centro de distribución en Santa Fe, Nuevo México.

La planta de El Paso se expandió cuando la empresa comenzó a comercializar sus medidores en Arizona, California, Nevada y Utah. Con el crecimiento del negocio en la Costa Oeste, la empresa abrió un tercer centro de distribución en Las Vegas y apenas hace dos años inauguró una segunda planta de producción en San Bernardino, California.

Los costos de manufactura difieren entre las plantas de producción de la empresa. El costo de cada medidor fabricado en la planta de El Paso es de \$10.50. La planta de San Bernardino utiliza equipo más nuevo y eficiente; como resultado, los costos de manufactura son \$0.50 por medidor menos que en la planta de El Paso.

Debido al rápido crecimiento de la empresa, no se ha presentado mucha atención a la eficiencia del sistema de distribución, pero la gerencia de la empresa decidió que es el momento de enfrentar este problema. El costo de enviar un medidor desde cada una de las tres plantas a cada uno de los centros de distribución se muestra en la tabla siguiente:

	<b>Centro de distribución</b>		
<b>Planta</b>	<b>Fort Worth</b>	<b>Santa Fe</b>	<b>Las vegas</b>
El Paso	\$3.20	\$2.20	\$4.20
San Bernardino	-----	\$3.90	\$1.20

Costos de envío por unidad desde las plantas de producción a los centros de distribución (en dólares)

La capacidad de producción trimestral es 30,000 medidores en la vieja planta de El Paso y 20,000 en la planta de San Bernardino. Observe que no se permiten envíos desde la planta de San Bernardino al centro de distribución de Fort Worth.



La empresa da servicio a nueve zonas de clientes desde los tres centros de distribución. El pronóstico de la cantidad de medidores que se necesitan en cada zona de clientes para el trimestre siguiente se muestra en la tabla siguiente:

<b>Zona de clientes</b>	<b>Demanda (medidores)</b>
Dallas	6,300
San Antonio	4,880
Wichita	2,130
Kansas City	1,210
Denver	6,120
Salt Lake City	4,830
Phoenix	2,750
Los Ángeles	8,580
San Diego	4,460

Pronóstico de la demanda trimestral.

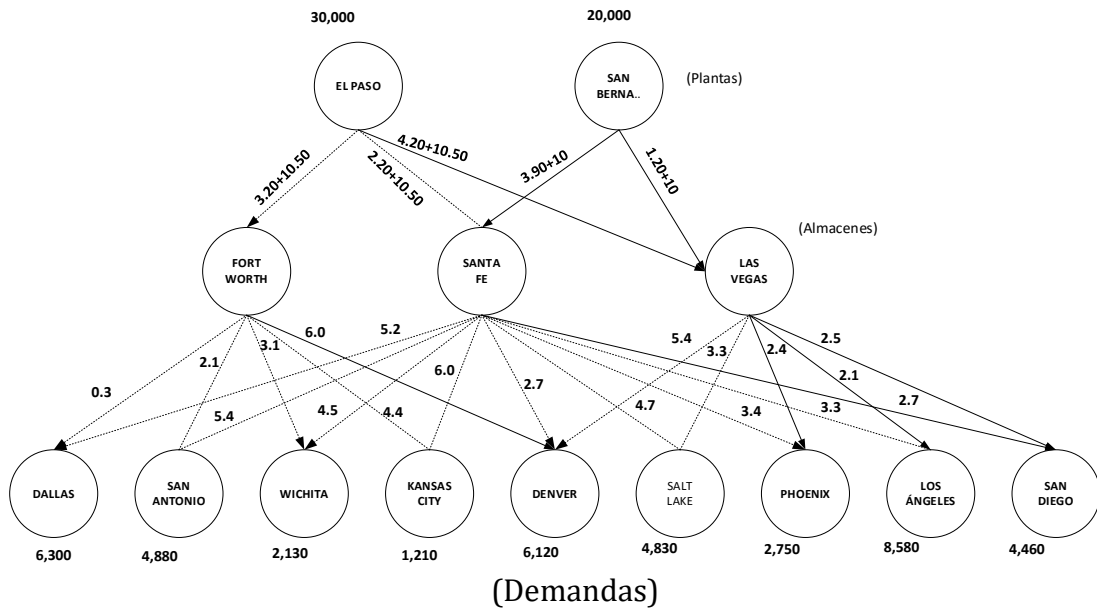
El costo de envío por unidad desde cada centro de distribución a cada zona de clientes se proporciona en la tabla siguiente; observe que algunos centros de distribución no pueden dar servicio a ciertas zonas de clientes.

En el sistema de distribución actual, la demanda en las zonas de clientes de Dallas, San Antonio, Wichita y Kansas City se satisface por medio de envíos desde el centro de distribución de Fort Worth. Asimismo, las zonas de clientes de Denver, Salt Lake City y Phoenix reciben servicio del centro de distribución de Santa Fe y las zonas de clientes de los Ángeles y San Diego son atendidas por el centro de distribución de Las Vegas.

Como estudiante del área de ingeniería realice las recomendaciones para mejorar el sistema de distribución. Elabore el diagrama de red del problema, el modelo de programación lineal, el modelo en hoja electrónica de cálculo, el diagrama de red óptima y la solución óptima del modelo de programación lineal.

Solución:

El modelo de red que representa el sistema de distribución, se muestra a continuación:



De acuerdo a Bris (2011). El modelo de transbordo puede formularse de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n c_{kj} x_{kj}$$

Sujeto a:

Oferta:

$$\sum_{k=1}^r x_{ik} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Demanda:

$$\sum_{k=1}^r x_{kj} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Ecuación de balance oferta demanda:

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} = \sum_{j=1}^n x_{kj}$$

Condiciones de no negatividad:

$$x_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, r$$

$$x_{kj} \geq 0, \quad k = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n$$

La formulación de programación lineal para el problema de sistema de distribución (En formato Lindo):

MIN 13.7EPFW + 12.7EPSF + 14.7EPLV + 13.9SBSF + 11.2SBLV + 0.3FWDA + 2.1FWSA + 3.1FWWI + 4.4FWKC + 6.0FWDE + 5.2SFDA + 5.4SFSA + 4.5SFWI + 6.0SFKC + 2.7SFDE + 4.7SFSL + 3.4SFPH + 3.3SFLA + 2.7SFSD + 5.4LVDE + 3.3LVSL + 2.4LVPH + 2.1LVLA + 2.5LVSD

Sujeto a:

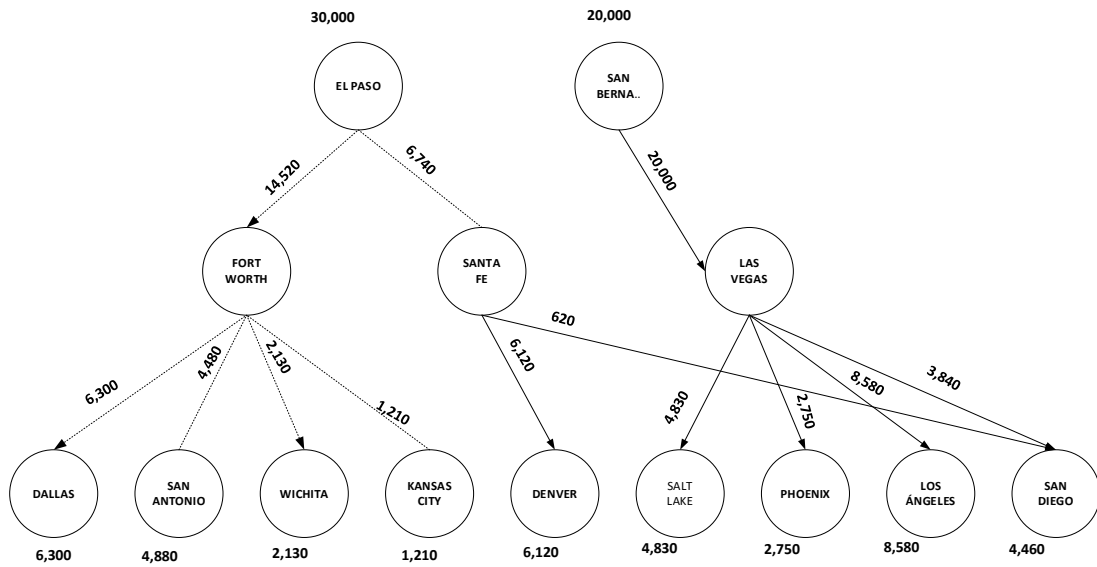
- 1) EPFW + EPSF + EPLV < 30000
- 2) SBSF + SBLV < 20000
- 3) FWDA + FWSA + FWWI + FWKC + FWDE - EPFW = 0
- 4) SFDA + SFSA + SFWI + SFKC + SFDE + SFSL + SFPH + SFLA + SFSD - EPSF - SBSF = 0
- 5) LVDE + LVSL + LVPH + LVLA + LVSD - EPLV - SBLV = 0
- 6) FWDA + SFDA = 6300
- 7) FWSA + SFSA = 4880
- 8) FWWI + SFWI = 2130
- 9) FWKC + SFKC = 1210
- 10) FWDE + SFDE + LVDE = 6120
- 11) SFSL + LVSL = 4830
- 12) SFPH + LVPH = 2750
- 13) SFLA + LVLA = 8580
- 14) SFSD + LVSD = 4460

Todas las variables  $\geq 0$

La solución para el problema de distribución, utilizando Lindo, se muestra a continuación:

<b>VARIABLE</b>	<b>VALOR</b>	<b>VALOR DE LA FUNCIÓN</b>
EPFW	14,520	<b>\$600,942</b>
EPSF	6,740	
EPLV	0	
SBSF	0	
SBLV	20,000	
FWDA	6,300	
FWSA	4,880	
FWWI	2,130	
FWKC	1,210	
FWDE	0	
SFDA	0	
SFSA	0	
SFWI	0	
SFKC	0	
SFDE	6,120	
SFSL	0	
SFPH	0	
SFLA	0	
SFSD	620	
LVDE	0	
LVSL	4,830	
LVPH	2,750	
LVLA	8,580	
LVSD	3,840	

El diagrama de flujo óptimo para el problema del sistema de distribución, se muestra a continuación:



A continuación, se proporciona un resumen de la solución óptima:

Costos	A Cualquier centro de distribución
Costos de manufactura	\$423,230
Costo de envío	\$177,712
Costo total	\$600,942

Variables de decisión:

Ruta	Unidades	Ruta	Unidades
El Paso-Fort Worth	14,520	Santa Fe - San Antonio	0
El Paso-Santa Fe	6,740	Santa Fe - Wichita	0
El Paso -Las Vegas	0	Santa Fe - Kansas City	0
San Bernardino-Santa	0	Santa Fe - Denver	6,120
San Bernardino-Las	20,000	Santa Fe - Salt Lake	0
Fort Worth -Dallas	6,300	Santa Fe - Phoenix	0
Fort Worth - San	4,880	Santa Fe - Los Ángeles	0
Fort Worth - Wichita	2,130	Santa Fe - San Diego	620
Fort Worth - Kansas	1,210	Las Vegas - Denver	0
Fort Worth - Denver	0	Las Vegas - Salt Lake	4,830
Santa Fe -Dallas	0	Las Vegas - Phoenix	2,750

**Discusión:**

Permitir que los clientes sean atendidos por cualquier centro de distribución reduce el costo total a \$ 600,942; el costo total consiste en \$ 423,230 de costo de fabricación y \$ 177,712 de costo de envío. Se trata de una disminución del 3.19% en el costo total y una disminución de 8.42% en el costo de envío. Solamente un cliente, San Diego, es servido por más de un centro de distribución.

#### **Problema No. 4**

*Un problema de redes sobre la ruta más corta*

Considere el siguiente ejemplo de transporte. Cada fila representa un camino (arco) entre dos ciudades (nodos). Las ciudades se identifican por letras y la distancia en kilómetros entre las ciudades se proporciona. Para este ejemplo, debemos asumir que todas las carreteras son de una sola vía desde la primera ciudad listada a la segunda. Estas referencias se recolectan en el conjunto de datos de la ruta más corta.

<b>Ciudad</b>	<b>Ciudad 2</b>	<b>Distancia (Km)</b>
A	B	6.8
A	D	6.2
B	C	9.1
B	D	8.5
B	E	7.2
C	E	10.3
D	E	8.8
D	F	5.6
E	F	2.5
E	G	9.4
F	G	12.3

En general, la formulación del problema de trayectoria (distancia) más corta es la siguiente:

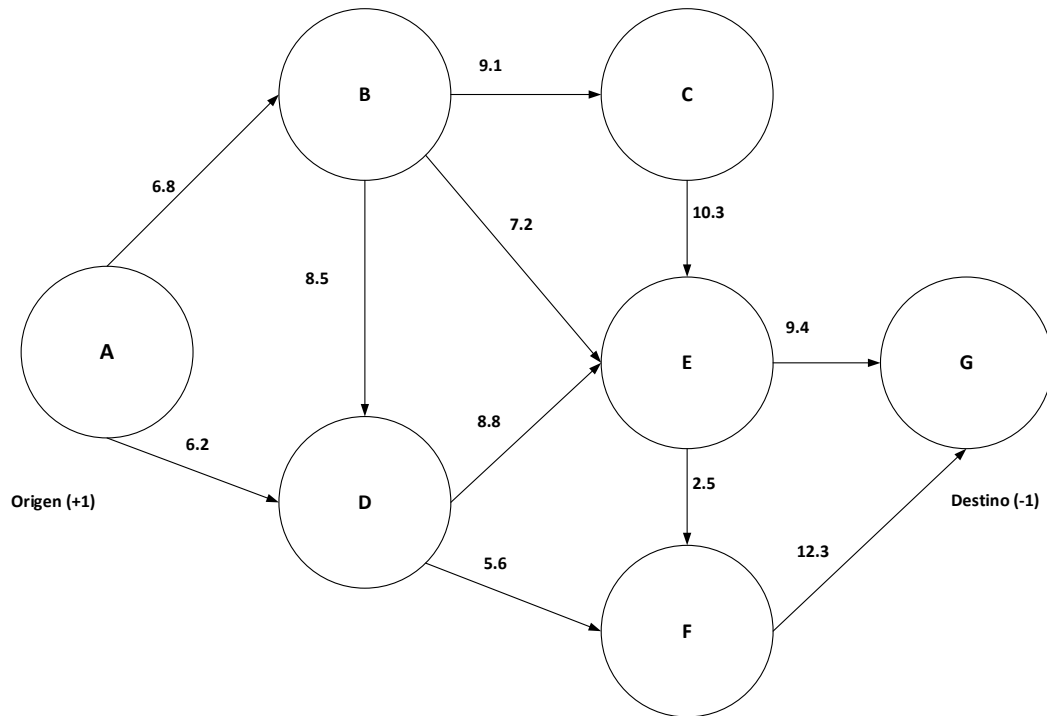
$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{k=1}^r x_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = s \text{ (origen)} \\ 0, & \text{otro caso} \\ -1, & \text{si } i = t \text{ (destino)} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{para todos los } (i,j) \text{ arcos en la red}$$

El flujo en red de la ruta más corta se muestra a continuación:



El modelo de programación lineal par el problema de la ruta más corta del ejemplo, se plantea de la siguiente forma:

Sea  $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el arco del nodo } i \text{ está en la ruta más corta} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$c_{ij} = \text{distancia con el arco dese el nodo } i \text{ hasta el } j$

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & 6.8x_{AB} + 6.2x_{AD} + 9.1x_{BC} + 8.5x_{BD} + 7.2x_{BE} + 10.3x_{CE} + 8.8x_{DE} + 5.6x_{DF} \\ & + 2.5x_{EF} + 9.4x_{EG} + 12.3x_{FG} \end{aligned}$$

Sujeto a:

Ciudad

$$(A) \quad x_{AB} + x_{AD} = 1$$

$$(B) \quad -x_{AB} + x_{BC} + x_{BD} + x_{BE} = 0$$



- (C)  $-x_{BC} + x_{CE} = 0$   
 (D)  $-x_{AD} - x_{BD} + x_{DE} + x_{DF} = 0$   
 (E)  $-x_{BE} - x_{CE} - x_{DE} + x_{EF} + x_{EG} = 0$   
 (F)  $-x_{DF} - x_{EF} + x_{FG} = 0$   
 (G)  $-x_{EG} - x_{FG} = -1$

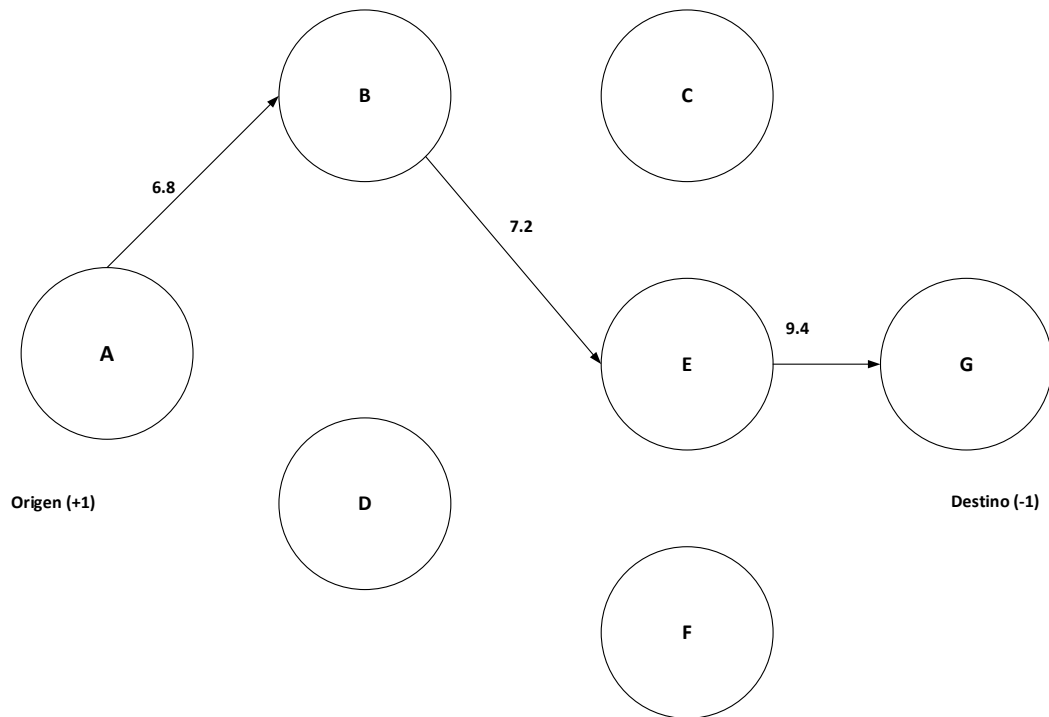
$$\forall x_{ij} \geq 0$$

Resolviendo el problema de la ruta más corta utilizando lindo. Se tiene la ruta más corta siguiente:

Valor de la función objetivo: 23.40

<u>Variable</u>	<u>Valor</u>
<b>XAB</b>	<b>1</b>
XAD	0
XBC	0
XBD	0
<b>XBE</b>	<b>1</b>
XCE	0
XDE	0
XDF	0
XEF	0
<b>XEG</b>	<b>1</b>

El diagrama de flujo óptimo para el problema de la ruta más corta se muestra a continuación:



Ruta más corta: A-B-E-G. Distancia total, 23.40 kilómetros

### **Problema No. 5**

*Usando Matlab para encontrar la gráfica y la ruta más corta de un problema de red*

Encontrar la ruta más corta en una gráfica dirigida. Considere el siguiente ejemplo:

- Definimos el vector fila  $W$  de pesos o distancias o costos en los arcos

$$W = [.41 .99 .51 .32 .15 .45 .38 .32 .36 .29 .21];$$

- Se utiliza el comando *sparse* para definir la unión de los nodos

$DG = \text{sparse} ([6 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 6 \ 1], [2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 4 \ 1 \ 6 \ 3 \ 4 \ 3 \ 5], W)$ , obteniéndose el vector DG:

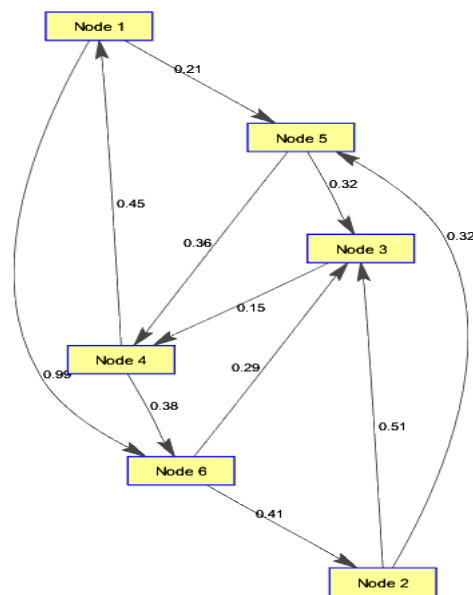
$$DG =$$

$$(4,1) \quad 0.4500$$

(6,2) 0.4100  
 (2,3) 0.5100  
 (5,3) 0.3200  
 (6,3) 0.2900  
 (3,4) 0.1500  
 (5,4) 0.3600  
 (1,5) 0.2100  
 (2,5) 0.3200  
 (1,6) 0.9900  
 (4,6) 0.3800

- Se utilizan los comandos *view* y *biograph* para obtener la gráfica

`h = view (biograph (DG, [], 'ShowWeights', 'on'))`



El diagrama de flujo óptimo para el problema de la ruta más corta utilizando Matlab

- Determinado la ruta más corta del nodo 1 al nodo 6. Utilizamos el comando de Matlab, tenemos:

`[dist,path,pred] = graphshortestpath(DG,1,6)`

dist = 0.9500 (que es la distancia más corta)

path = 1 5 4 6 (se define la ruta más corta)

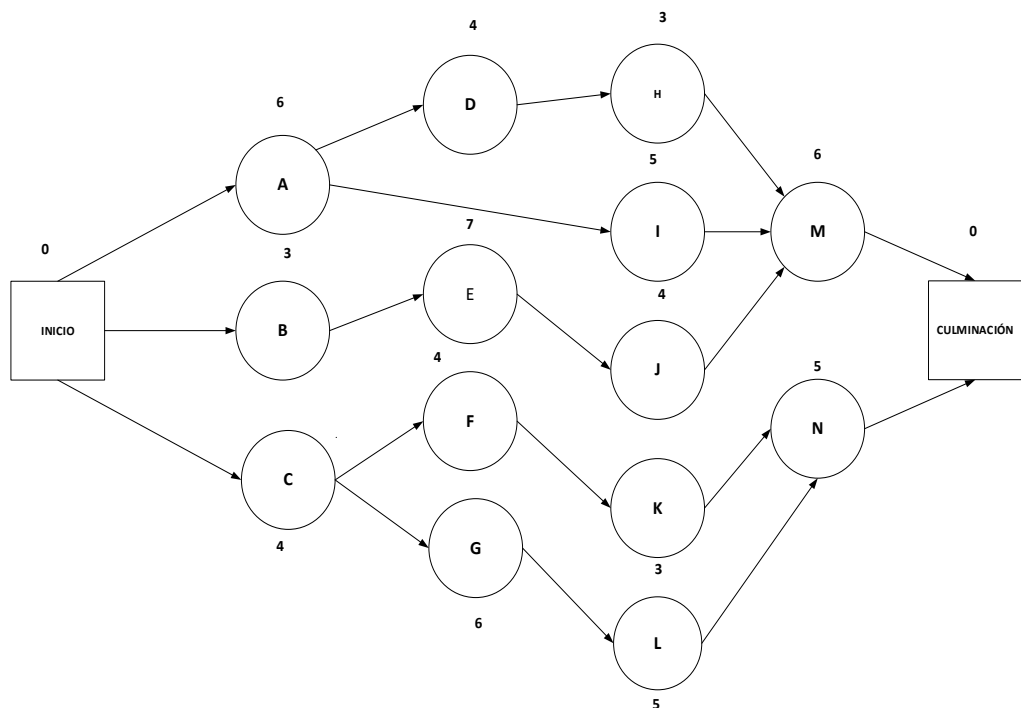
pred = 0 6 5 5 1 4

## **Problema No. 6**

*Un problema de redes PERT/CPM. Hiller y Lieberman (2015)*

Ken Johnston, el gerente de proceso de datos de Stanley Morgan Bank, está planeando un proyecto para instalar un nuevo sistema de información administrativo. Ahora está listo para iniciar el proyecto y desea terminarlo en 20 semanas.

Después de identificar las 14 actividades separadas que se necesitan para realizar este proyecto, así como sus relaciones de precedencia y duraciones estimadas (en semanas), Ken ha construido la siguiente red de proyecto:



- Encuentre todas las rutas y longitudes de rutas a través de esta red de proyecto. ¿Cuál de estas rutas es crítica?
- Encuentre los tiempos más tempranos, los tiempos más lejanos y la holgura de cada actividad. ¿Ken será capaz de cumplir con el plazo límite si no ocurren retrasos?
- Utilice la información del inciso b) para determinar cuál de las rutas es crítica. ¿Qué le dice esto a Ken acerca de en qué actividades debe enfocar más su atención para mantenerse dentro del programa?

- d) Utilice la información del inciso b) para determinar cuál será la duración del proyecto si el único retraso es que la actividad I toma dos semanas adicionales.  
 ¿Qué pasa si el único retraso es que la actividad H toma dos semanas adicionales?  
 ¿Qué pasa si el único retraso es que la actividad J toma dos semanas adicionales?

**Solución:**

Inciso a)

Inicio - A - D - H - M - Culminación. Longitud = 19 semanas

Inicio - B - E - J - M - Culminación. Longitud = 20 semanas. \*Ruta crítica

Inicio - C - F - K - N - Culminación. Longitud = 16 semanas

Inicio - A - I - M - Culminación. Longitud = 17 semanas

Inicio - C - G - L - N - Culminación. Longitud = 20 semanas. \*Ruta crítica

Inciso b)

Actividad	ES	EF	LS	LF	Holgura	Ruta crítica
Inicio	0	0	0	0	0	Si
A	0	6	1	7	1	No
B	0	3	0	3	0	Si
C	0	4	0	4	0	Si
D	6	10	7	11	1	No
E	3	10	3	10	0	Si
F	4	8	8	12	4	No
G	4	10	4	10	0	Si
H	10	13	11	14	1	No
I	6	11	9	14	3	No
J	10	14	10	14	0	Si
K	8	11	12	15	4	No
L	10	15	10	15	0	Si
M	14	20	14	20	0	Si
N	15	20	15	20	0	Si
Culminación	20	20	20	20	0	Si

Ken Johnston, el gerente de proceso de datos de Stanley Morgan Bank podrá cumplir con su plazo si no se producen retrasos.

Inciso c)

Las rutas críticas son:

Inicio – B – E – J – M- Culminación

Inicio – C – G- L – N – Culminación

Hay que centrar los esfuerzos en aquellas actividades que tiene holgura 0. Los del camino crítico.

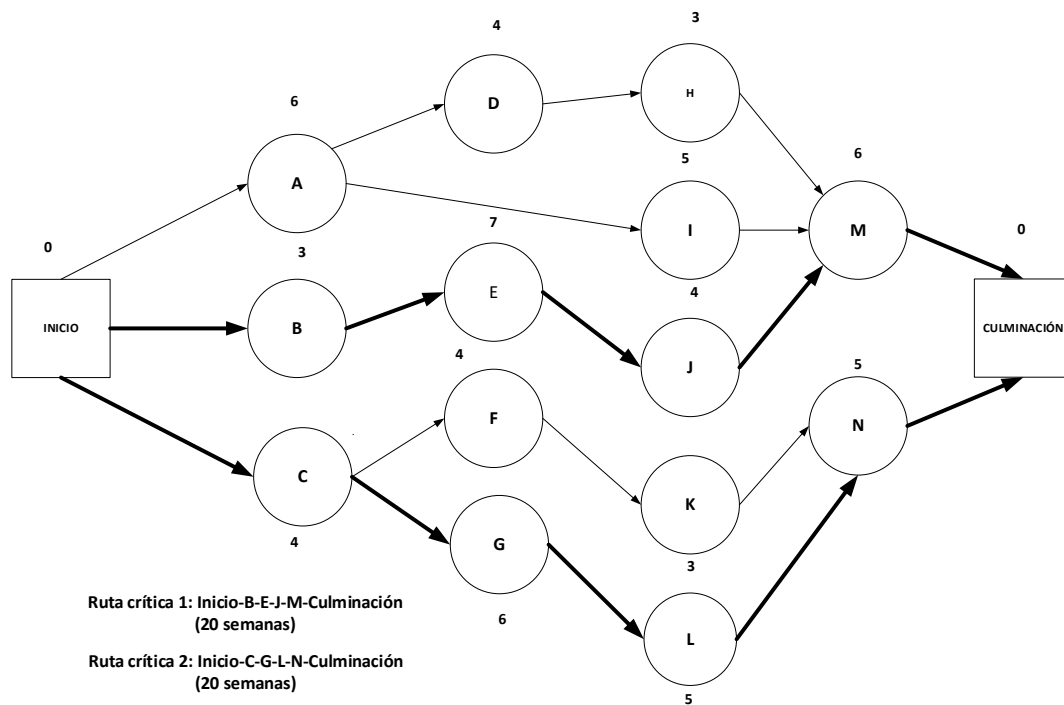


Diagrama de red final que muestra las dos rutas críticas.

Inciso d)

Si la actividad I tarda 2 semanas adicionales, no habrá ningún retraso porque su holgura es de 3 semanas. Si la actividad H toma 2 semanas adicionales, entonces habrá un retraso de 1 semana porque su holgura es de una semana. Si la actividad J toma 2 semanas adicionales habrá un retraso de 2 semanas porque no tiene holgura.

## 8. Problemas propuestos.

### Problema No. 1

*(Ruta más corta). Sierksma y Zwols (2015)*

La distancia entre cuatro ciudades se muestra en la siguiente tabla:

	Ciudades			
	1	2	3	4
Ciudad 1	0	6	3	9
Ciudad 2	6	0	2	3
Ciudad 3	3	2	0	6
Ciudad 4	9	3	6	0

Escriba un modelo de programación lineal que pueda usar para determinar la ruta más corta de la ciudad 1 a la ciudad 4; determine la ruta más corta de la ciudad 1 a la ciudad 4.

Use un programa de computadora para determinar la ruta más corta.



## **Problema No. 2**

*(Transbordo). Anderson y Sweeney (2011)*

La formulación de programación lineal siguiente es para un problema de transbordo:

$$\text{Min } Z = 11x_{13} + 12x_{14} + 10x_{21} + 8x_{34} + 10x_{35} + 11x_{42} + 9x_{45} + 12x_{52}$$

Sujeto a:

$$x_{13} + x_{14} - x_{21} \leq 5$$

$$x_{21} - x_{42} - x_{52} \leq 3$$

$$x_{13} - x_{34} - x_{35} = 6$$

$$-x_{14} - x_{34} + x_{42} + x_{45} \leq 2$$

$$x_{35} + x_{45} - x_{52} = 4$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{para toda } i, j$$

Muestre la representación en red para este problema y resuélvalo utilizando Microsoft Excel.

### **Problema No. 3**

*(Asignación). Anderson y Sweeney (2011)*

Una empresa utiliza un producto químico llamado Rbase en las operaciones de producción de cinco divisiones. Sólo seis de sus proveedores cumplen con los estándares de control de calidad de la empresa, y sólo estos proveedores pueden producir Rbase en cantidades suficientes para satisfacer a las necesidades de cada división. La cantidad de Rbase necesaria por cada división y el precio por galón que cobra cada proveedor son los siguientes:

<b>División</b>	<b>Demanda (miles de galones)</b>	<b>Proveedor</b>	<b>Precio por galón (\$)</b>
<b>1</b>	40	<b>1</b>	12.60
<b>2</b>	45	<b>2</b>	14.00
<b>3</b>	50	<b>3</b>	10.20
<b>4</b>	35	<b>4</b>	14.20
<b>5</b>	45	<b>5</b>	12.00
		<b>6</b>	13.00

El costo por galón (\$) para el envío desde cada proveedor hasta cada división se proporciona en la tabla siguiente:

	<b>Proveedor</b>					
<b>División</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	2.75	2.50	3.15	2.80	2.75	2.75
<b>2</b>	0.80	0.20	5.40	1.20	3.40	1.00
<b>3</b>	4.70	2.60	5.30	2.80	6.00	5.60
<b>4</b>	2.60	1.80	4.40	2.40	5.00	2.80
<b>6</b>	3.40	0.40	5.00	1.20	2.60	3.60

La empresa considera adecuado distribuir contratos entre sus proveedores, de modo que la empresa se vea menos afectada por los problemas de los proveedores (por ejemplo, las huelgas de trabajadores o la disponibilidad de recursos). La política de la empresa requiere que cada división tenga un proveedor separado.

- Para cada combinación de proveedor – división, calcule el costo total de satisfacer la demanda de la división.
- Determine la asignación óptima de proveedores a las divisiones.

#### **Problema No. 4**

*(Transporte). Anderson y Sweeney (2011)*

Una empresa fabrica la unidad central de procesamiento (CPU) de una computadora personal. Las CPU se fabrican en Seattle, Columbus y Nueva York y se envían a almacenes en Pittsburgh, Mobile, Denver, Los Ángeles y Washington, D.C. para su distribución posterior. La tabla siguiente muestra la cantidad de CPU disponibles en cada planta, la cantidad requerida por cada almacén y los costos de envío (dólares por unidad):

Planta	Almacén					CPU disponibles
	Pittsburgh	Mobile	Denver	Los Ángeles	Washington	
Seattle	10	20	5	9	10	9,000
Columbus	2	10	8	30	6	4,000
Nueva York	1	20	7	10	4	8,000
CPU requeridos	3,000	5,000	4,000	6,000	3,000	21,000

- a) Elabore una representación en red para este problema
- b) Elabore el modelo de programación correspondiente para este problema
- c) Determine la cantidad que debe enviarse desde cada planta a cada almacén para minimizar el costo total de envío. Use Lindo, Lingo y Excel para resolver el problema.
- d) El almacén de Pittsburgh acaba de incrementar su pedido en 1,000 unidades y la empresa autorizó a su planta de Columbus aumentar su producción en la misma cantidad. ¿este aumento en la producción conducirá a un incremento o a una disminución en los costos totales de envío? Calcule la nueva solución óptima.

### **Problema No. 5**

*(Ruta crítica). Sierksma y Zwols (2015)*

Una compañía ha firmado recientemente un contrato con un autor para publicar y comercializar un nuevo libro sobre optimización lineal. La administración desea saber la fecha de finalización más temprana posible del proyecto. Los datos pertinentes figuran en la tabla siguiente. Un total de ocho actividades, nombradas como A1, ..., A8, tienen que ser completadas. Las descripciones de estas actividades se dan en la segunda columna de esta tabla. En la tercera columna se enumeran los números estimados de semana necesarios para completar las actividades. Algunas actividades sólo se pueden iniciar cuando otras han finalizado. La última columna de la tabla lista los predecesores inmediatos de cada actividad.

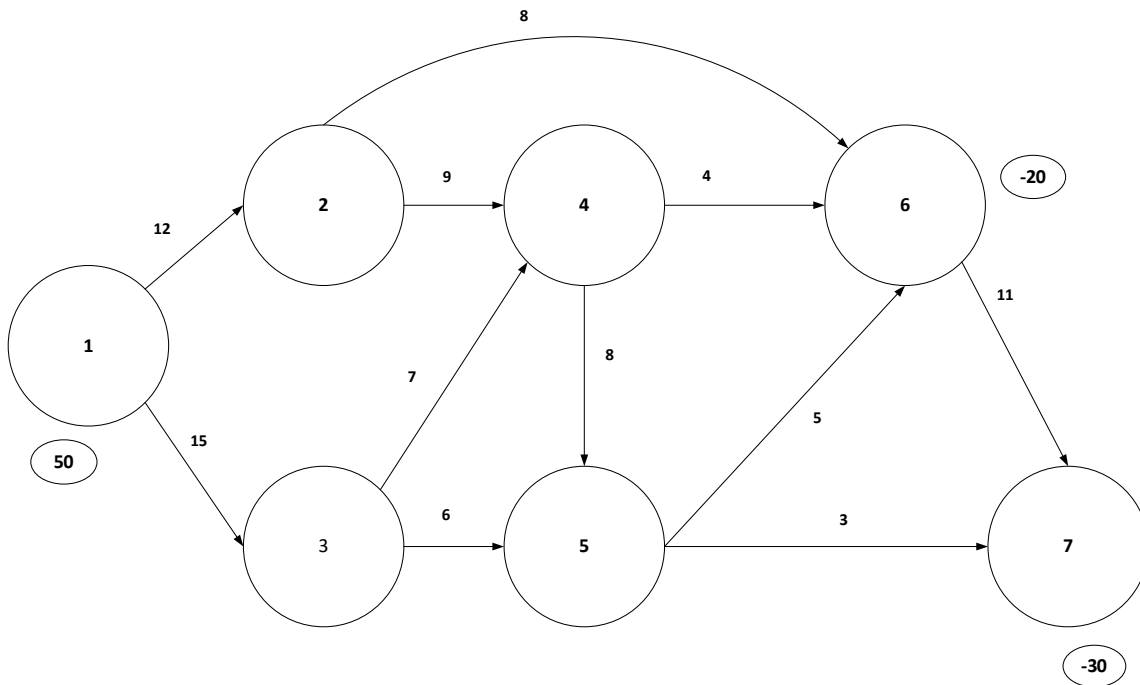
<b>Actividad</b>	<b>Descripción</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Inmediato</b>
A1	Preparación del manuscrito	25	Ninguna
A2	Editar y copiar el manuscrito	3	A1
A3	Corregir las pruebas de página	10	A2
A4	Obtener todos los derechos de autor	15	A1
A5	Diseñar los materiales de mercadotecnia	9	A1
A6	Elaborar los materiales de mercadotecnia	5	A5,A4
A7	Producir el libro final	10	A3,A4
A8	Organizar el envío	2	A6,A7

- Dibuje la red del proyecto de este problema
- Calcule el tiempo total de finalización del proyecto, junto con los tiempos de inicio más temprano y tiempo de inicio más tardío de todas las actividades.
- Calcule el tiempo de terminación más temprano y el tiempo de terminación más tardío de todas las actividades.
- ¿Cuál es la ruta crítica del proyecto? ¿Es única?

## Problema No. 6

(Transbordo). Griva, Nash y Sofer (2009)

Considere la red en la figura siguiente. La usamos para representar el flujo de petróleo a través de tuberías. Supongamos que se están produciendo 50 barriles de petróleo en el nodo 1 y que deben ser transportados a través de un sistema de tuberías al nodo 6 y 7 (20 barriles al nodo 6 y 30 barriles al nodo 7). El costo de bombeo de un barril de petróleo a lo largo de cada uno se marca en la figura. El flujo en cada arco tiene un límite inferior de cero y un límite superior de 30. El nodo 1 es una fuente y los nodos 6 y 7 son nodos de destino. Los otros nodos son nodos de transbordo. El coste asociado de transporte se muestra en cada uno de los arcos de la figura.

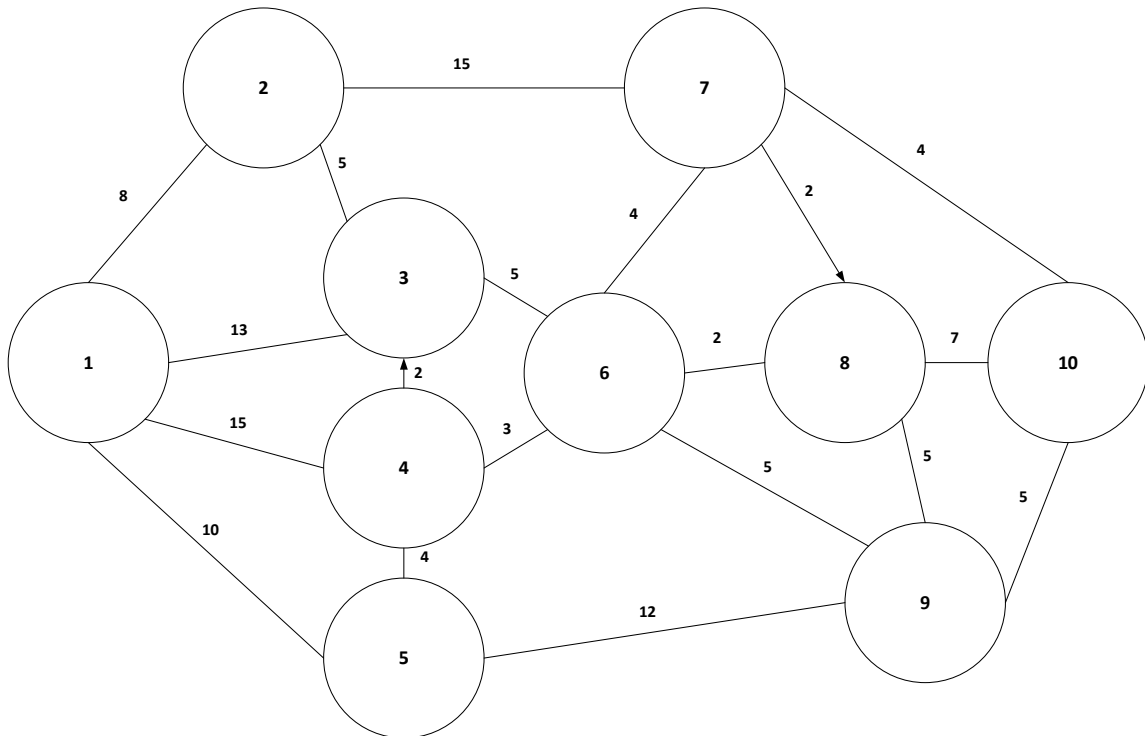


Elabore el correspondiente modelo de programación lineal de este problema. Resuelva el modelo de programación lineal utilizando algún programa de computadora. Determine cuál es el plan de envío óptimo para este problema.

### Problema No. 7

*(Ruta más corta). Anderson y Sweeney (2009)*

Una compañía identificó 10 sitios principales de recolección y entrega para los pasajeros de taxis en la ciudad de Nueva York. En un esfuerzo por minimizar el tiempo de viaje y mejorar el servicio al cliente y la utilización de la flota de taxis de la empresa, a la gerencia le gustaría que los conductores de taxis tomarán la ruta más corta entre sitios siempre que sea posible. Utilizando la red siguiente de carreteras y calles, ¿cuál es la ruta que un conductor uno debe tomar partiendo del sitio 1 para llegar al sitio 10? Los tiempos de recorrido en minutos se muestran en los arcos de la red. Observe que hay dos calles de un sentido con la dirección mostrada por las flechas.



### **Problema No. 8**

*(Ruta crítica). Sierksma y Zwols (2015)*

La compañía PHP fabrica instrumental médico, y ha decidido abrir una nueva planta. La gerencia ha identificado once actividades principales del proyecto, para ser terminado antes de que la producción real pueda comenzar. La dirección también ha especificado las actividades (los predecesores inmediatos) que deben ser completadas antes de que una actividad determinada pueda comenzar. Para cada una de las once actividades, se ha estimado el tiempo de ejecución. En el cuadro a continuación se indican los resultados

<b>Actividad</b>	<b>Descripción</b>	<b>Tiempo estimado</b>	<b>Predecesor inmediato</b>
A	Seleccionar el personal de Staff	13	Ninguno
B	Seleccionar la ubicación	26	Ninguno
C	Preparar los planes finales de construcción y la distribución	11	B
D	Seleccionar equipo	11	A
E	Trasladar los servicios al sitio	39	B
F	Interesados en entrevista e instrucciones de llenado	11	A
G	Compra de equipo	36	C
H	Construir el edificio	41	D
I	Desarrollar el sistema	16	A
J	Instalar el equipo	5	E,G,H
K	Capacitar al personal de Staff	8	F,I,J

- a) Dibuje la red del proyecto para este problema
- b) Formule el modelo de programación lineal de este problema, y resuélvalo utilizando un programa de computadora
- c) Formule el problema dual del problema del inciso b). Demuestre que la solución del dual corresponde a la longitud más larga de la red del proyecto.

- d) Calcule el tiempo total de finalización del proyecto, junto con los tiempos de inicio más temprano y tiempo de inicio más tardío de todas las actividades.
- e) Calcule el tiempo de terminación más temprano y el tiempo de terminación más tardío de todas las actividades.
- f) ¿Cuál es la ruta crítica para este problema?



## **Problema No. 9**

*(Estudio de caso práctico transporte). Lapin y Whisler (1996)*

La compañía Textil Internacional, Ltd., se encuentra en Hong Kong, se especializa en la distribución de textiles a todo el mundo. La compañía está integrada por la familia del Lao. Los planes del presente son permanecer en el Hong Kong a través de la transición en el gobierno. Si las personas de la República China desean continuar su crecimiento económico, la compañía espera usar la base actual al funcionamiento de la expansión al continente. La compañía Textil Internacional tiene los telares en la Bahamas, Hong Kong, Corea, Nigeria, y Venezuela, cada tejido de dicha prenda es de dos fibras como: algodón, poliéster, y/o seda. Los telares atienden a ocho compañías de distribución localizados cerca del cliente, en centros geográficos de actividad.

Debido a que los costos de transportación históricamente han estado por debajo del 10% de los gastos totales, la dirección ha prestado poca atención a mejorar la economía a través de la asignación de ruta adecuadas de embarques, Ching Lao está volviendo de los Estados Unidos, él ha completado su grado de maestría en mercadotecnia. Él cree que puede salvar a la compañía Textil Internacional ahorrando ciento de miles de millones de dólares simplemente con la asignación de ruta óptimas cada año de los Telares a los centros de la distribución.

Un ejemplo brillante de una asignación inadecuada es la asignación actual de la producción de telas para el centro de distribución de la ciudad de México procedente de Nigeria en lugar de partir de Venezuela, con menos de un tercio de la distancia entre dichas ciudades. De igual forma, el centro de Manila recibe la mayoría de sus textiles ahora de Nigeria y Venezuela, aunque los telares en el propio Hong Kong son más cercanos.

Por supuesto, el costo de enviar la tela no depende exclusivamente de la distancia. La tabla 1 proporciona los costos reales proporcionados al Sr. Lao de la oficina principal de la compañía. Las demandas de los centros de distribución son estacionales, para que un nuevo plan del embarque deba hacerse cada mes. La tabla 2 proporciona los requerimientos de tela para el mes de marzo. La compañía textil Internacional tiene diferentes capacidades en sus telares para producir varios tipos de tela. La tabla 3 muestra las cantidades que aplican durante el mes de marzo.

<b>Tabla No. 1</b>	<b>Datos de costos de envío (dólares por rollo)</b>							
	<b>Distribución central</b>							
<b>Telares (fábricas)</b>	<b>Los Ángeles</b>	<b>Chicago</b>	<b>Londres</b>	<b>México</b>	<b>Manila</b>	<b>Roma</b>	<b>Tokio</b>	<b>Nueva York</b>
Bahamas	2	2	3	3	7	4	7	1
Hong Kong	6	7	8	10	2	9	4	8
Corea	5	6	8	11	4	9	1	7
Nigeria	14	12	6	9	11	7	5	10
Venezuela	4	3	5	1	9	6	11	4

<b>Tabla No. 2</b>	<b>Demandas para el mes de marzo (rollos)</b>							
	<b>Distribución central</b>							
<b>Textil</b>	<b>Los Ángeles</b>	<b>Chicago</b>	<b>Londres</b>	<b>México</b>	<b>Manila</b>	<b>Roma</b>	<b>Tokio</b>	<b>Nueva York</b>
Algodón	500	800	900	900	800	100	200	700
Polyester	1,000	2,000	3,000	1,500	400	700	900	2,500
Seda	100	100	200	50	400	200	700	200

<b>Tabla No. 3</b>	<b>Capacidades de producción mes de marzo (rollos)</b>			
	<b>Capacidades de producción</b>			
<b>Fábrica</b>	<b>Algodón</b>		<b>Polyester</b>	<b>Seda</b>
Bahamas	1,000		3,000	0
Hong Kong	2,000		2,500	1,000
Corea	1,000		3,500	500
Nigeria	2,000		0	0
Venezuela	1,000		2,000	0

El sr. Lao quiere fijar la producción y los embarques de tal forma que se reduzcan los costos para los clientes porque cuando hay capacidad insuficiente y la eficiencia en las operaciones es menor a la capacidad es cuando la demanda se cae debajo de la máxima potencia productora.

Usted se ha involucrado en la compañía Internacional y ha decidido ayudar al señor Lao.

Encuentre la cantidad óptima de embarques a fijar en marzo y su costo de transportación total para cada uno de los siguientes telares o productos fabricados:

- a) Algodón
- b) Tela de poliéster
- c) Seda

### **Problema No. 10**

*(Ruta crítica). Lapin y Whisler (1996)*

Los datos para la construcción de una casa se muestran en la siguiente tabla:

<b>Actividad</b>	<b>Descripción</b>	<b>Actividad</b>	<b>Tiempo esperado para</b>
A	Clasificar	Ninguna	3
B	Excavar	Ninguna	4
C	Decorar	B	1
D	Cimientos	A,C	2
E	Vigas del piso	D	3
F	Instalación hidráulica	A,C	3
G	Piso	E,F	2
H	Instalación eléctrica	D	1
I	Paredes	G	10
J	Cableado	H,I	2
K	Líneas de comunicación	J	1
L	tuberías	I	5
M	Ventanas	L	2
N	Puertas	L	2
O	Tabla roca	K,L	3
P	Detalles interior	N,O	5
Q	Detalles exterior	N	4
R	Pintura	M,P,Q	3
S	Alfombra	R	1
T	Inspección del comprador	S	1

- a) Dibuje la red del proyecto para este problema
- b) Calcule el tiempo total de finalización del proyecto, junto con los tiempos de inicio más temprano y tiempo de inicio más tardío de todas las actividades.
- c) Calcule el tiempo de terminación más temprano y el tiempo de terminación más tardío de todas las actividades.
- d) ¿Cuál es la ruta crítica para este problema?

## 9. Conclusiones de capítulo

Existen varios tipos de modelos de programación lineal que exhiben una estructura especial que pueden ser utilizados para la construcción de algoritmos eficientes para su solución. La motivación para aprovechar su estructura generalmente ha sido la necesidad de resolver problemas más grandes de lo que de otra manera no sería posible resolver con la tecnología informática existente.

Históricamente, la primera de estas estructuras especiales a analizar era el problema de transporte, que es un tipo particular de problema de red. El desarrollo de un procedimiento de solución eficiente para este problema dio lugar a la primera aplicación generalizada de la programación lineal a problemas de logística industrial.

Más recientemente, el desarrollo de algoritmos para resolver eficientemente sistemas de redes se ha convertido en una preocupación importante en la programación matemática aplicada.

Los modelos de red son posiblemente aún los más importantes modelos con una estructura especial en la programación lineal. En este capítulo examinamos las características de los modelos de red, formulamos algunos ejemplos de estos modelos y utilizamos un enfoque para su solución.

El enfoque presentado aquí se deriva simplemente de especializar las reglas del método simplex para aprovechar la estructura de los modelos de red.

Los algoritmos resultantes son extremadamente eficientes y permiten la solución de modelos de red tan grandes que resultan imposibles de resolver mediante procedimientos de programación lineal ordinarios.

En este capítulo se presentaron los problemas de transporte, el problema de asignación, el problema de transbordo, el problema de la ruta más corta, y, finalmente, los problemas de red PERT-CPM o el método de la ruta crítica.

El procedimiento PERT/CPM para planear, programar y controlar una amplia variedad de proyectos. La clave de este procedimiento de programación de proyectos es el desarrollo de una red de proyecto PERT/CPM que ilustra las actividades y sus relaciones de precedencia. Con esta red y las estimaciones de tiempo y actividad, pudieron identificarse la ruta crítica de la red y las actividades críticas asociadas.

Durante el desarrollo del último tema, pudieron identificarse un programa de actividades que mostraron los tiempos de inicio y terminación más tempranos, los tiempos de inicio y terminación más tardíos y la holgura de cada actividad.

Reviste importancia el mencionar los siguiente: en los problemas de redes PERT/CPM las estimaciones de los tiempos de actividad precisas son importantes en el desarrollo de un programa de actividades. Sin embargo, cuando los tiempos de actividad son desconocidos, se precisa abordar el problema con tiempos de actividad desconocidos, en este caso, se agregan al problema, estimaciones de tiempo adicional: tiempo optimista, tiempo más probable y tiempo pesimista. Lo anterior permitirá que el problema de redes se aborde desde un enfoque diferente. Es decir, tomar en cuenta la incertidumbre al determinar la ruta crítica y el programa de actividades.

Para este caso, se sugiere abordar en clase, uno o dos problemas con los alumnos en donde se resuelva un problema con tiempos inciertos que le permitan comprender de forma amplia parte de la teoría del método del camino crítico.

En esta sección, se utilizaron distintos programas de cómputo, entre ellos: Lindo, Lingo, Maple, Matlab y Excel.

## 10. Referencias y Bibliografía

- Anderson y Sweeney (2011). Métodos Cuantitativos para los negocios. 11ª. Edición, Edit. Cengage, México.
- Baker, K. (2005). Optimization Modeling with Spreadsheets, 2nd. Edition. Edit. Wiley, USA.
- Bazaraa, M., Sherali, H., Jarvis, J. (2010). Linear Programming and Network Flows, 4th. Edition, Edit. Wiley, USA.
- Bradley, S., Hax, A., Magnanti, T., (2010). Edit. Addison-Wesley Publishing Company, USA.
- Bris, M. (2011). Transshipment model in the function of cost Minimization in a logistics system. Recuperado de: [http://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/osi/journal/PDF/Interdisciplinary Management Research VI/IMR6a04.pdf](http://ftp.repec.org/opt/ReDIF/RePEc/osi/journal/PDF/Interdisciplinary%20Management%20Research%20VI/IMR6a04.pdf)
- Griva, Nash y Sofer (2009). Linear and Nonlinear Optimization, 2nd. Edition, Edit. Siam, USA.
- Hiller y Lieberman (2010). Investigación de operaciones, 9ª. Edición. Edit. McGraw-Hill, México.
- Lapin y Whisler (1996). Cases in Management Science, Edit. Duxbury Press, London, UK.
- Obregón, B. (2005). Teoría de redes: el problema de la ruta más corta. Tesis de maestría, Unam. México.
- Parlar, M. (2000). Interactive Operations Research with Maple, Edit. Birkhäuser, Boston, USA.
- Sierksma y Zwols (2015). Linear and Integer Optimization: Theory and Paractice, Edit. CRC Press, London, UK.

# Capítulo IV

## Programación no lineal

1. Introducción
2. Conceptos básicos de programación no lineal
3. Aplicaciones de la programación no lineal
  - 3.1. Suministro de materia prima (inventarios)
  - 3.2. Manufactura
  - 3.3. Análisis de punto de equilibrio
  - 3.4. Logística
4. Máximos y mínimos
5. Funciones convexas y funciones cóncavas
  - 5.1. Funciones convexas
  - 5.2. Funciones cóncavas
6. Clasificación de los problemas de programación no lineal
7. Ilustración gráfica de problemas de programación no lineal
  - 7.1. Optimización de una variable
8. Búsqueda no restringida
9. Método de la sección dorada
10. Algoritmo de búsqueda de la sección dorada
11. Interpolación cuadrática
12. Método de Newton Raphson
13. Problemas de máximos y mínimos y puntos de inflexión con una sola variable. Taylor (2007)
14. Método de resolución de modelos de programación no lineal con una sola variable. Anderson y Sweeney (1993)

15. Problemas de programación lineal no restringidos con una sola variable (Resueltos con Maple)
16. Problemas propuestos de funciones no lineales con una sola variable. Dgarmo, Sullivan, Bontadelli y Wicks. (1997)
17. Problemas de máximos y mínimos y puntos de inflexión para dos variables. Miller (2000)
  - 17.1. Derivadas parciales, vector gradiente y matriz Hessiana
  - 17.2. Vectores gradiente
  - 17.3. Matrices Hessiana
  - 17.4 Máximos y mínimos para funciones  $f(x_1, x_2)$
  - 17.5 Problemas de programación lineal no restringidos para funciones  $f(x_1, x_2)$ . Miller (2000)
  - 17.6. Problemas propuestos de problemas no restringidos de funciones no lineales de dos variables. Miller (2000). Hidalgo (2017)
18. Modelos de programación no lineal restringidos.
19. Problemas propuestos de programación no lineal restringidos a igualdad.
20. Aplicaciones industriales utilizando modelos de programación no lineal
21. Problemas propuestos
22. Conclusiones del capítulo
23. Referencias y Bibliografía



## 1. Introducción

Numerosas aplicaciones de la programación matemática, incluyendo muchas vistas en los dos capítulos anteriores, se expresan naturalmente como programas lineales. Los supuestos o aproximaciones de programación lineal también pueden conducir a representaciones de problemas apropiadas sobre el rango de variables de decisión que se están considerando. En distintas ocasiones, sin embargo, las no linealidades en forma de funciones objetivo no lineales o restricciones no lineales son cruciales para representar correctamente una aplicación como un programa matemático. En este tercer capítulo del libro se proporciona un primer paso hacia el enfrentamiento de problemas no lineales; primero introduciendo varias características de programas no lineales y entonces tratando dichos problemas que pueden ser resueltos usando procedimientos especiales. Como consecuencia, las técnicas a discutir son principalmente basadas en el cálculo.

A medida que se desarrolla nuestra discusión sobre la programación no lineal, se invita a los alumnos y a los lectores a reflexionar sobre la teoría de la programación lineal y la teoría de redes que se ha desarrollado anteriormente, contrastando las dos teorías para entender por qué los problemas no lineales son intrínsecamente más difíciles de resolver. Al mismo tiempo, debemos tratar de entender las similitudes entre las dos teorías, en particular porque los resultados no lineales a menudo están motivados por, y son extensiones directas de, sus análogos lineales.

Las similitudes serán particularmente visibles para el material de este capítulo donde predominan las técnicas vistas en los dos capítulos anteriores.

Los métodos clásicos de optimización son útiles para encontrar la solución óptima de funciones continuas y diferenciables. Estos métodos son analíticos y hacen uso de las técnicas de cálculo diferencial para localizar los puntos óptimos. Dado que algunos de los problemas prácticos implican funciones objetivas que no son continuas y / o diferenciables, las técnicas clásicas de optimización tienen un alcance limitado en aplicaciones prácticas. Sin embargo, un estudio de los métodos de cálculo de optimización constituye una base para el desarrollo de la mayoría de las técnicas numéricas de optimización presentadas en los temas subsecuentes. En este capítulo presentamos las condiciones necesarias y suficientes para localizar la solución óptima de una función de una sola variable, una función multivariable sin restricciones y una función multivariable con restricciones de igualdad y desigualdad.

En la mayoría de las situaciones prácticas, la función objetivo y / o restricciones son no lineales. El método de solución para tratar con tales problemas se puede llamar como programación no lineal.

El presente capítulo se centra en la programación no lineal aplicada. Se presenta una introducción general que discute varias aplicaciones industriales o gerenciales. Se utilizan conceptos clave como funciones convexas y funciones cóncavas.

Mediante un conjunto de ejemplos se explican las funciones para variables simples y variables múltiples. Si bien la programación no lineal es muy extensa, los alcances del tema se acotan a lo establecido en el programa de estudios de la carrera de ingeniería en sistemas computacionales. Sin embargo, hay casos especiales que pueden ser abordados en estudios superiores, como el caso especial de programación no lineal entera o la programación geométrica. En ese sentido, se espera que el presente libro será una útil referencia o un libro de texto para profesionales y estudiantes de distintas carreras en el campo de la ingeniería, por ejemplo, ingeniería industrial, ingeniería en sistemas computacionales, ingeniería en gestión empresarial, e inclusive, personas interesadas en cursar en algún momento de su vida un programa en el campo de la investigación de operaciones o de la ciencia de la gestión.

## 2. Conceptos básicos de programación no lineal

Cualquier problema de optimización consiste esencialmente en una función objetivo (o criterio). Dependiendo de la naturaleza de la función objetivo, existe la necesidad de maximizar o minimizar eso. Por ejemplo,

- a) Maximizar el beneficio
- b) Maximizar la fiabilidad de un equipo
- c) Minimizar el costo
- d) Minimizar el peso de un componente o determinada estructura de ingeniería, Etcétera

Si se imponen ciertas limitaciones o restricciones, se hace referencia a un problema de optimización restringida. En ausencia de las limitaciones, es un problema no restringido.

Los métodos de la programación lineal son útiles cuando la función objetivo y el conjunto de restricciones son funciones lineales, tales problemas pueden ser resueltos utilizando el algoritmo simplex. La programación no lineal puede presentar los siguientes casos:

- a) Función objetivo no lineal y restricciones lineales
- b) Función objetivo lineal y restricciones no lineales
- c) Función objetivo no lineal no restringida

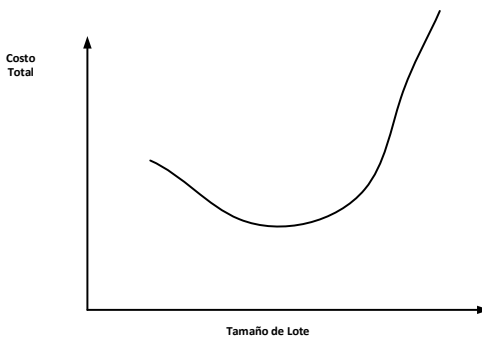
### 3. Aplicaciones de la programación no lineal

En el escenario industria de negocios, existen numerosas aplicaciones de la programación no lineal. Algunas de estas aplicaciones son las siguientes:

#### 3.1. Suministro de materia prima (inventarios)

Las industrias procuran contar regularmente con las materias primas o los insumos y /o componentes. Éstos se obtienen frecuentemente en tamaños de lote adecuados. El costo anual total oportuno es la suma del costo de ordenar y el costo de mantenimiento del inventario. Si el tamaño del lote es grande, entonces hay un menor número de órdenes en un año y por lo tanto el costo anual de ordenar. Pero al mismo tiempo, el costo de mantenimiento del inventario se incrementa. Considerando la tasa de demanda constante, la función de costo total es no lineal, tal como se muestra en la figura No. 1 siguiente:

Hay un tamaño correspondiente de lote apropiado del inventario en el cual el costo anual total está en el nivel mínimo. Después de formular la función no lineal de costo total en términos del tamaño del lote, se optimiza para evaluar la cantidad a adquirir deseada. Esta cantidad puede adquirirse periódicamente en cuanto la cantidad se acerque a nivel cero.



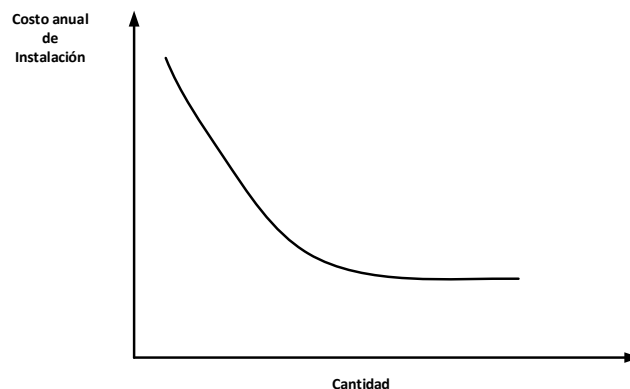
*Figura No. 1. Función de costo total con referencia al tamaño de lote*

#### 3.2. Manufactura

Si una máquina o instalación está configurada para un tipo particular de producto, entonces está lista para producir esa unidad. El costo de la instalación puede incluir salarios de los ingenieros y trabajadores durante ciertos períodos de tiempo,

mientras se está configurando la máquina. Además de esto, el costo de las pruebas de ejecución, etc., si las hay, pueden ser tomados en consideración.

Cualquier número de artículos pueden ser fabricados en una configuración antes de que se cambie para otra variedad de productos. Hay menos número de configuraciones en un año si la cantidad producida por configuración de unidad, son más. Se necesita un gran número de configuraciones en el caso de que haya menos número de unidades fabricadas y, en consecuencia, el costo anual de instalación será alto. Esta relación entre el costo anual de instalación y la cantidad se muestra en la Figura No. 2.



*Figura No. 2. Variación del coste de instalación con respecto a la cantidad*

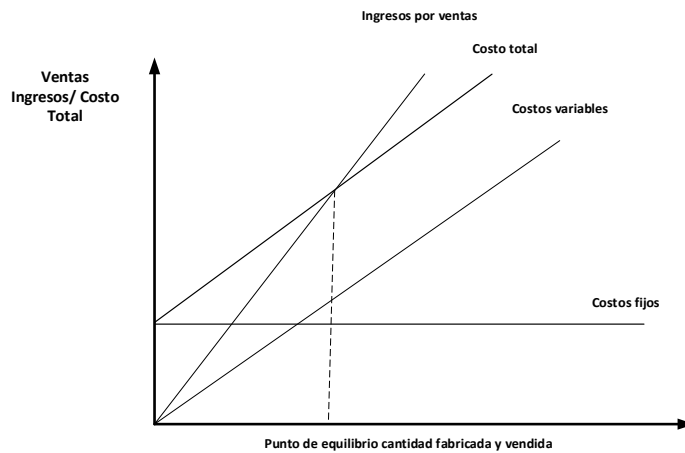
### **3.3. Análisis de punto de equilibrio**

Para el buen funcionamiento de cualquier industria, es de interés conocer el nivel de producción en el que no hay ganancia, y ninguna pérdida. Esto se conoce como punto de equilibrio. Si la cantidad fabricada y vendida es menor que este punto, hay pérdidas.

Los beneficios se obtienen si la cantidad producida y comercializada es mayor que el punto de equilibrio. El análisis de punto de equilibrio es la interacción de los ingresos por ventas y el costo total, donde el costo total es la suma del costo fijo y el costo variable.

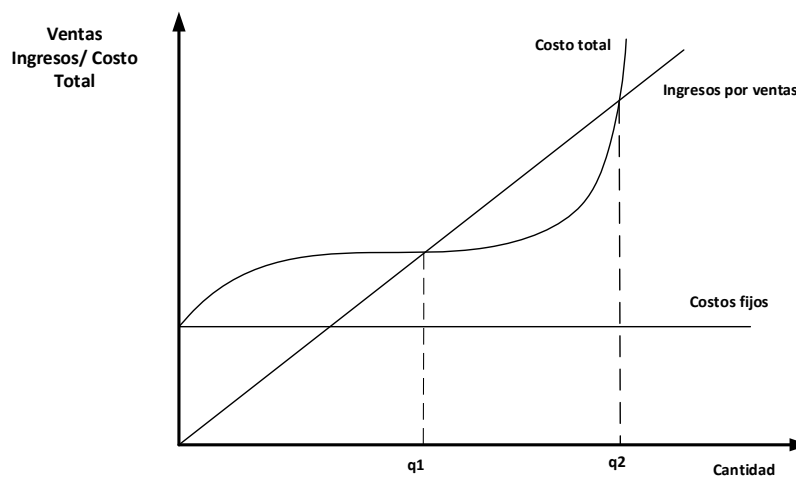
El costo fijo se refiere a las inversiones realizadas en bienes de capital tales como maquinaria e instalaciones o infraestructura. El costo variable se refiere al costo real de producción y es proporcional a la cantidad producida.

La línea de costo total se muestra en la Figura No. 3 junto con los ingresos por ventas. Los ingresos por ventas son la multiplicación de la cantidad vendida por el precio de venta por unidad.



*Figura No. 3. Interacción del costo total lineal y los ingresos por venta*

El costo total en la figura No. 3 se muestra como una función lineal. Sin embargo, en la práctica, y dependiendo de la naturaleza del costo variable y de otros factores, el costo total puede ser representado como una función no lineal como se muestra en la figura No. 4.



*Figura No. 4. Interacción entre el costo total no lineal y los ingresos por venta.*

La función de costo total no lineal y la línea de ingresos por ventas se intersecan en dos puntos, correspondientes a la cantidad  $q_1$  y  $q_2$ . Por lo tanto, existen dos puntos de equilibrio en el rango visible de la cantidad. Como el beneficio es igual = ingreso de ventas - costo total, es cero si se produce y se vende la cantidad  $q_1$  o  $q_2$ . Hay cierta cantidad que es más que  $q_1$  e inferior a  $q_2$ , en la que se puede lograr el máximo beneficio.

En situaciones más complejas, tanto el costo total como las funciones de ingresos por ventas pueden ser no lineales.

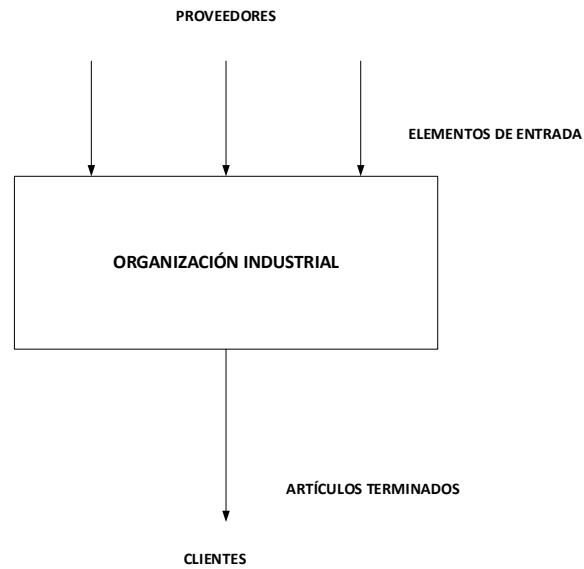
### **3.4. Logística**

La logística se asocia con la entrega oportuna de bienes y servicios en los lugares deseados. Un producto acabado requiere materias primas, componentes y diferentes elementos de entrada. Todos ellos son necesarios en determinado momento, y, por lo tanto, el transporte de ellos, se convierte en un problema significativo. El costo de transporte debe ser incluido en los modelos de forma explícita. De igual forma, el envío efectivo y adecuado de los artículos terminados es importante para satisfacer las necesidades del cliente con el objetivo central de minimizar los costos totales. La entrada y salida de los artículos terminados se muestra en la figura No. 5.

El apoyo logístico juega un rol importante en la gestión de la cadena de suministros. El énfasis en la cadena de suministros está en la integración de varias actividades incluyendo la adquisición, la fabricación, el envío de artículos finales a los almacenes o distribuidores, transporte, etc.

En la formulación del modelo de programación no lineal, se deberá de incluir la producción, los ítems de entrada, la frecuencia de las órdenes, entre otros aspectos del costo total.

Cuando existe descuento por adquisición de determinados productos, fruto de los periodos estacionales, la empresa toma ventajas de este momento, para comprar en grandes volúmenes, de tal forma que el descuento por la compra sea efectivo. En ese sentido, se puede maximizar el costo beneficio potencial.



*Figura No. 5. Entradas y salidas de los elementos del sistema*

En la siguiente parte se analizan algunas aplicaciones de la vida real en las que se formula una función objetivo no lineal. Estas funciones se maximizan o minimizan dependiendo del caso. El concepto de máximo y mínimo se explican a continuación.



#### 4. Máximos y mínimos

Considere una cualquier función  $f(x)$  como se muestra en la figura No. 6. Si  $f(x)$  se define en el intervalo de  $x$ ,  $[A, B]$ .  $f(x)$  tiene su valor máximo en  $x^*$  que es óptimo.

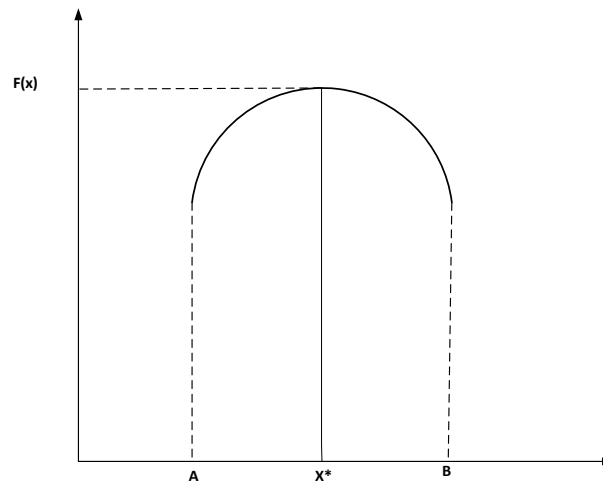


Figura No. 6. Una función  $f(x)$

La figura No. 7, representa el comportamiento de una función  $f(x)$ . Si  $f(x)$  se define en el intervalo de  $x$ ,  $[A, B]$ . Tres puntos máximos son visibles, marcados como 1, 2 y 3. Estos puntos son definidos como máximos locales o máximos relativos.

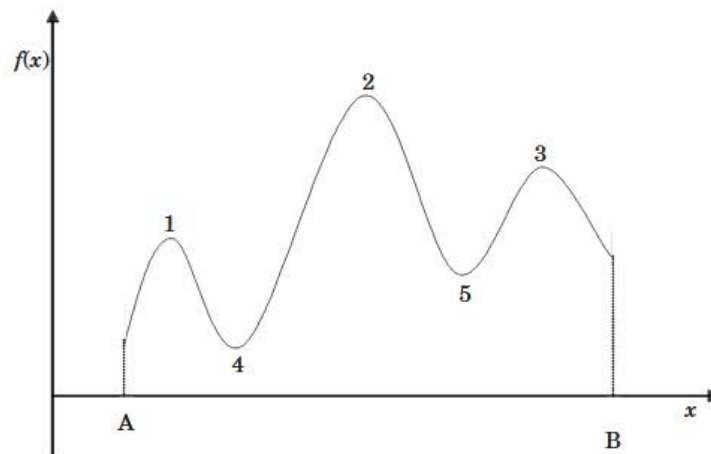


Figura No. 7. Máximos/mínimos locales y globales

El punto 2 de la función  $f(x)$ , que se encuentra entre los puntos 1 y 3 es el valor máximo. Este punto se denomina máximo global. Los puntos 1 y 3 son llamados máximos locales.

Similarmente, los puntos 4 y 5 son puntos mínimos de  $f(x)$ . El punto 4 es un mínimo global. El punto 5 es un mínimo local o relativo.

También se suele llamar a los máximos o mínimos locales como extremos locales.

Para un máximo o un mínimo,

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

Para la optimización, la derivada de segundo orden debe ser negativa, en el caso de máximos y positiva en el caso de mínimos, por ejemplo:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} < 0, \quad \text{para un máximo}$$

y

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0, \quad \text{para un mínimo}$$

Un ejemplo numérico que nos permite observar los máximos y mínimos global y locales del de la función:  $f(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{x}$  para  $0.15 \leq x \leq 1.75$ . La figura No. 8 muestra la gráfica de la función

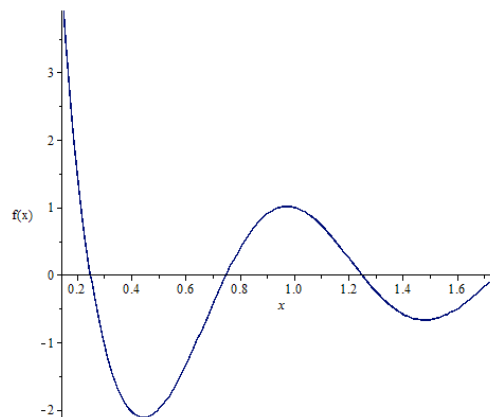


Figura No. 8. Gráfica de la función  $f(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{x}$

## 5. Funciones convexas y funciones cóncavas

### 5.1. Funciones convexas

Una función no lineal  $f(x)$  se muestra en la figura No. 9. Esta función es de tal naturaleza que la línea que une cualquiera de los puntos seleccionados en esta función, nunca estará por debajo de esta función. En otras palabras, viendo la gráfica desde abajo, esta función o curva se verá convexa.

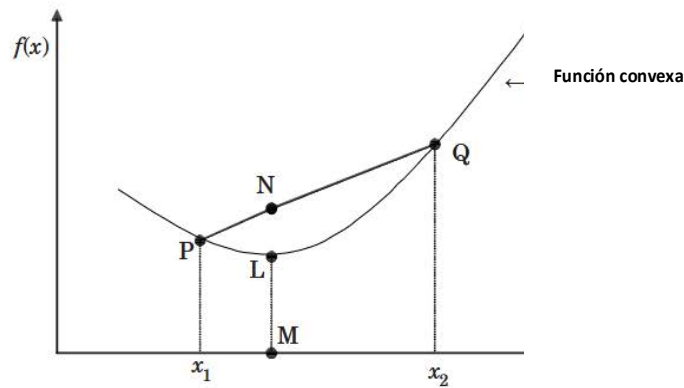


Figura No. 9. Función convexa

### 5.2. Funciones cóncavas

La figura No. 10 representa a una función no lineal  $f(x)$ . Seleccionando cualesquiera dos puntos, por ejemplo P y Q. La línea que une P y Q (o cualquier otro punto seleccionado de la función) nunca estará por encima de esta función  $f(x)$ . Esta función se conoce como función cóncava. Si observamos la gráfica desde la parte inferior se verá cóncava.

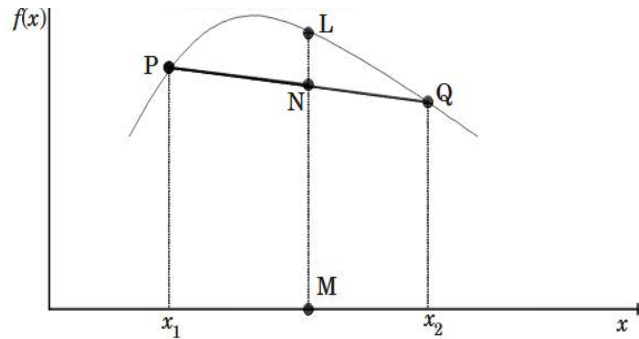


Figura No. 10. Función cóncava

La diferencia entre funciones entre funciones convexas y cóncavas se muestra en la tabla No. 1 y tabla No. 2.

Propiedades funciones convexas	Gráfica función convexa
<p>1) La línea que une cualquiera de los dos puntos anteriores nunca estará por debajo de esta función.</p> <p>2) <math>\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \geq f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2], 0 \leq \alpha \leq 1</math></p> <p>3) La derivada de segundo orden no negativa indica que se trata de una función convexa</p> <p>4) Para minimizar una función convexa, <math>\frac{df(x)}{dx} = 0</math> se obtiene la solución óptima</p> <p>5) Si <math>-f(x)</math> es cóncava, entonces <math>f(x)</math> es una función convexa</p>	

Tabla No. 1. Propiedades y gráfica de una función convexa

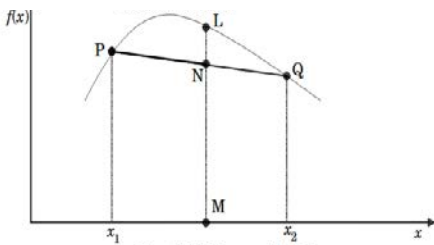
Propiedades funciones cóncavas	Gráfica función cóncava
<p>1) La línea que une cualquiera de los dos puntos anteriores nunca estará por encima de esta función.</p> <p>2) <math>\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2], 0 \leq \alpha \leq 1</math></p> <p>3) La derivada de segundo orden no positiva indica que se trata de una función cóncava</p> <p>4) Para maximizar una función cóncava, <math>\frac{df(x)}{dx} = 0</math> se obtiene la solución óptima</p> <p>5) Si <math>-f(x)</math> es convexa, entonces <math>f(x)</math> es una función cóncava</p>	

Tabla No. 2. Propiedades y gráfica de una función cóncava

### Ejemplo numérico No. 1 (resolviendo con Maple)

Pruebe que la función:  $f(x) = \frac{10018}{x} + \frac{1}{2}x$ , es una función convexa para valores positivos de  $x$ . Encuentre la solución óptima al minimizar  $f(x)$ . La figura No. 11 muestra la gráfica de la función.

$$y := \frac{(18 \cdot 10 \cdot 4)}{x} + \frac{x}{2}$$

$$f(x) \quad \frac{180000}{x} + \frac{1}{2}x$$

$$\text{Diff}(y, x) = \text{diff}(y, x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{180000}{x} + \frac{1}{2}x \right) = -\frac{180000}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{solve} \left( -\frac{180000}{x^2} + \frac{1}{2} = 0, x \right)$$

$$600, -600$$

$$\text{Diff}\left(-\frac{180000}{x^2} + \frac{1}{2}, x\right) = \text{diff}\left(-\frac{180000}{x^2} + \frac{1}{2}, x\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{180000}{x^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{360000}{x^3}$$

Como la segunda deriva es positiva, la función  $f(x)$  es convexa. Una solución óptima se obtiene al igualar a cero la primera derivada. El valor positivo de la primera derivada es  $x^* = 600$ .

Sustituyendo  $x^* = 600$  en  $f(x)$ , el valor óptimo es:  $\text{eval}\left(\frac{180000}{x} + \frac{1}{2}x, x=600\right)$ ,

$$f(x) = 600$$

La gráfica de la función :  $\text{Min } f(x) = \frac{10018}{x} + \frac{1}{2}x$  , cuando  $x$  es positiva, se muestra a continuación:

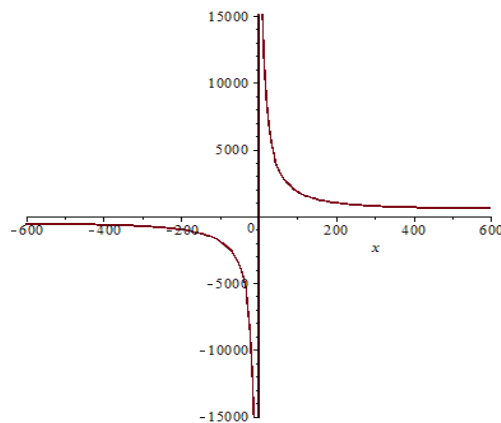


Figura No. 11. Gráfica de la función  $f(x) = \frac{10018}{x} + \frac{1}{2}x$  . Función convexa

### Ejemplo numérico No. 2 (Resolviendo con Maple)

Muestre que la función:  $f(x) = -\left(\frac{45,000}{x}\right) - 2x$ , es una función cóncava para valores positivos de  $x$  y obtenga la solución óptima al maximizar  $f(x)$  con los valores positivos de  $x$ .

$$y := f(x)$$

$$y := f(x)$$

$$y := \left(-\frac{45000}{x}\right) - 2 \cdot x$$

$$y := -\frac{45000}{x} - 2x$$

$Diff(y, x)$

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{45000}{x} - 2x \right)$$

$Diff(y, x) = diff(y, x)$

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{45000}{x} - 2x \right) = \frac{45000}{x^2} - 2$$

$solve\left(\frac{45000}{x^2} - 2 = 0, x\right)$

-150, 150

$Diff(y, x, x) = diff(y, x, x)$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( -\frac{45000}{x} - 2x \right) = -\frac{90000}{x^3}$$

$eval\left(-\frac{45000}{x} - 2 \cdot x, x = 150\right)$

-600

$plot\left(-\frac{45000}{x} - 2 \cdot x, x = -150..150\right)$

Como la segunda deriva es negativa, la función  $f(x)$  es cóncava. Una solución óptima se obtiene al igualar a cero la primera derivada. El valor positivo de la primera derivada es  $x^* = 150$ .

Sustituyendo  $x^* = 150$  en  $f(x)$ , el valor óptimo es:  $eval\left(-\frac{45000}{x} - 2 \cdot x, x = 150\right)$  ,

$f(x) = -600$

La figura No. 11 muestra la gráfica de la función :  $Max f(x) = -\left(\frac{45,000}{x}\right) - 2x$  , cuando  $x$  es positiva, se muestra a continuación:

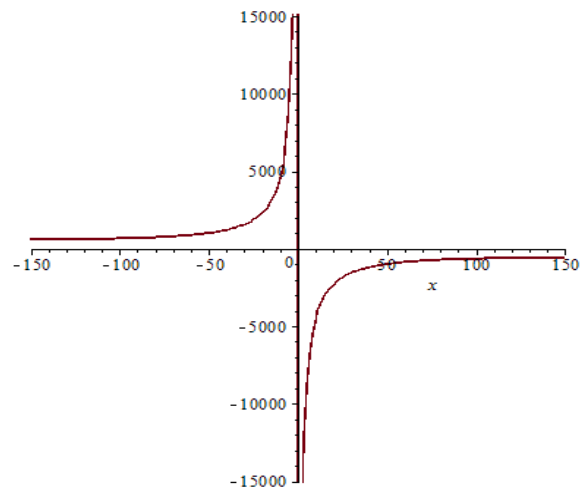


Figura No. 12. Grafica de la función  $f(x) = -\left(\frac{45,000}{x}\right) - 2x$ . Función cóncava



## 6. Clasificación de los problemas de programación no lineal

Con el fin de optimizar la función objetivo no lineal, en la práctica se utilizan varios métodos. La clasificación actual puede no ser exhaustiva. Sin embargo, dependiendo de varias consideraciones, estos métodos podemos clasificarse de la siguiente forma:

a) Según el número de variables

- i) Optimización de una sola variable
- ii) Optimización multivariable, si más de una variable está en la función objetivo

b) Dependiendo del procedimiento de búsqueda

La búsqueda del valor óptimo de cualquier variable comenzará desde un punto inicial adecuado. Después de cierto número de iteraciones, se espera que el objetivo se encuentre.

Algunos métodos son los siguientes:

- i) Búsqueda no restringida: cuando no hay ninguna noción disponible para el intervalo en el que puede haber una variable óptima, se realiza una búsqueda sin restricciones.
- ii) Búsqueda restringida.
- iii) Método de búsqueda de la sección dorada. Se conoce el intervalo inicial en el que se encuentra una variable y se optimiza una función unimodal (si solo tiene un óptimo absoluto o relativo)
- iv) Interpolación cuadrática: si cualquier función puede ser aproximada por la función cuadrática, entonces se obtiene un valor mínimo de  $x$  usando:  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
Posteriormente este valor mínimo se sustituye en la función real y se continua un proceso iterativo para alcanzar una precisión deseable.
- v) Métodos numéricos

c) Dependiendo de la presencia de restricciones en los modelos de programación no lineal

Si no hay restricciones en el modelo de programación no lineal, es decir si no se imponen restricciones a la función objetivo, entonces se denomina optimización sin

restricciones. En caso contrario, el problema de programación lineal puede ser el siguiente: optimización no lineal, sujeto a un conjunto de restricciones del tipo:

La forma más común de un modelo de optimización no lineal es:

$$\text{Max } f(x), \text{ sujeto a } x \in F,$$

Donde  $f: F \rightarrow R$  es la función objetivo,  $F$  es la región factible, y  $x$  es el vector de variables de decisión. Asumiremos que  $F \subseteq R^n$  para algunas  $n \geq 1$  enteras, y por lo tanto  $x$  es un vector de  $n$  números reales.

Asumimos que el conjunto  $F$  puede describir el conjunto de restricciones lineales o no lineales de la forma:

$g_j(x) = 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) y la restricción de desigualdad  $h_k(x) (\geq, \leq) 0$  ( $k = 1, \dots, q$ ) asumiremos que las funciones  $f, g_i$  y  $h_k$  ( $j = 1, \dots, p, k = 1, \dots, q$ ) son funciones diferenciales y continuas.

El conjunto  $F$  se expresa de la siguiente forma:

$$F = \left\{ x \in R^n \mid \begin{array}{l} g_j(x) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, p \\ h_k(x) \leq 0 \text{ para } k = 1, \dots, q \end{array} \right\}$$

En consecuencia, un modelo de programación no lineal con restricciones puede escribirse en la forma siguiente:

$$\text{Max } f(x)$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{l} g_j(x) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, p \\ h_k(x) \leq 0 \text{ para } k = 1, \dots, q \end{array}$$

d) Requisito de integralidad para las variables

Normalmente las soluciones obtenidas para un problema de optimización dan valores en fracciones tales como 14.3, 201.57, etc. Mientras que, en muchas aplicaciones de la vida real, las variables óptimas deben evaluarse en términos de enteros exactos. Ejemplos pueden ser:

- i) ¿Cuántos empleados recomendables se necesitan?
- ii) Número de componentes necesarios para la fabricación, que se utilizarán posteriormente en el ensamblaje de cualquier producto acabado.

- iii) Número de ciclos para la adquisición de insumos o materias primas en el contexto de la gestión de la cadena de suministro.
- iv) Un número óptimo de ciclos de producción en un año para que el costo mínimo total pueda ser alcanzado.

Los problemas de programación con números enteros no lineales pueden clasificarse de la siguiente manera:

1) Problemas de optimización con todas las variables enteras

Es el caso en donde todas las variables de diseño son necesarias. A este caso se le denomina optimización entero puro.

2) Problemas de optimización entera mixta

En este caso, no es necesario obtener el valor entero óptimo de todas las variables. El requisito de integridad se justifica solo para algunas variables. En otras palabras, algunas variables de un conjunto pueden tomar valores continuos, mientras que los restantes pueden tener valores enteros.

Los descrito anteriormente, puede resumirse brevemente en la siguiente figura No. 12

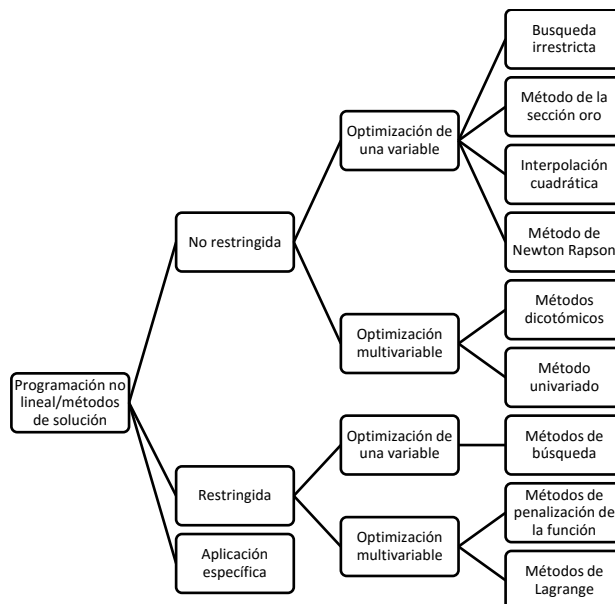


Figura No.12. Breve clasificación de los modelos de programación no lineal y sus métodos de solución

## 7. Ilustración gráfica de problemas de programación no lineal

### 7.1. Optimización de una variable

Si una función cualesquiera  $f(x)$  tiene solo una variable, su maximización o minimización se referirá a un problema univariable, por ejemplo:

$$\text{Max } Z = 4x - 7x^2$$

$$\text{Min } Z = 8x^2 - 3x$$

Estos son problemas de optimización de una sola variable sin restricciones. Si se imponen ciertas limitaciones, como:

a)  $\text{Max } Z = 4x - 7x^2$

Sujeto a:

$$x \geq 0.3$$

b)  $\text{Min } Z = 8x^2 - 3x$

Sujeto a:

$$x \leq 0.15$$

Esto dará origen a un problema de optimización de una variable con limitaciones.

De hecho, es posible agregar restricciones a un problema de optimización no restringido de una variable después de obtener el valor óptimo de una función.

Existen varios métodos para resolver un problema de optimización no restringido con una variable, algunos de los que se abordarán en este libro son:

- 1) Búsqueda irrestricta
- 2) Búsqueda de la sección oro
- 3) Interpolación cuadrática
- 4) Método de Newton Raphson

## 8. Búsqueda no restringida

Cuando no hay idea del intervalo en la que puede encontrarse una variable que sea óptima, la búsqueda del óptimo es irrestricta. Se necesita un punto inicial adecuado para iniciar el procedimiento de búsqueda. En la figura No. 13, se muestra un punto óptimo mediante el valor símbolo  $x^*$ . Supongamos que el valor inicial es  $x = 0$  desde donde se iniciará una búsqueda. Es como tratar de encontrar una dirección en una ciudad desconocida.

A partir del punto inicial, es decir,  $x = 0$ , se ha de decidir si se mueve en dirección positiva o negativa. El valor de  $x$  se incrementa o disminuye en la longitud adecuada hasta que no se obtiene un rango cercano a  $x^*$ , en la que pueda encontrarse un óptimo. Se obtiene un óptimo correcto en este intervalo acotado usando un valor de longitud más pequeño.

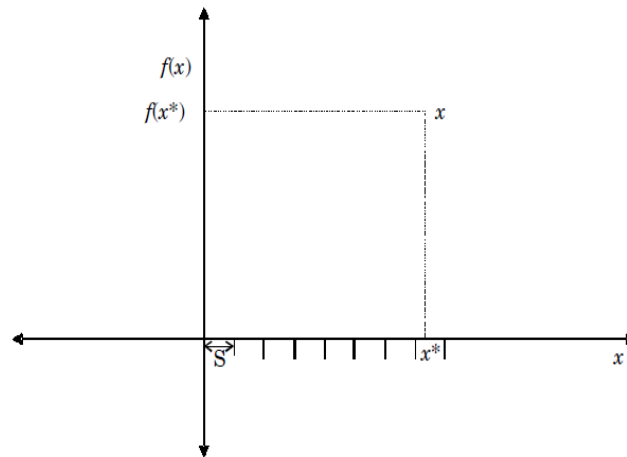


Figura No. 13. Búsqueda de un punto óptimo con longitud  $S$

### Ejemplo numérico No. 3. (Resolviendo con Maple y con el algoritmo de búsqueda no restringida)

$\text{Max } f(x) = 4x - 8x^2$ , considerando el punto inicial 0 y una longitud de 0.1.

Graficando la función  $f(x)$  con Maple, se tiene la siguiente Figura No. 14.

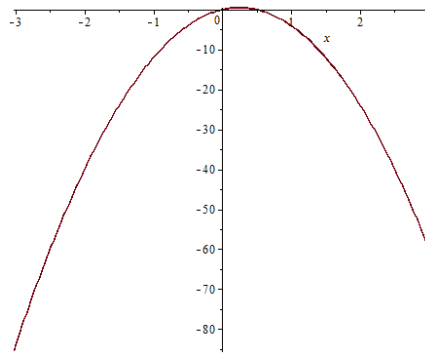


Figura No. 14. Gráfica de la función  $f(x) = -8x^2 + 4x$  en el intervalo  $-3.03 \leq x \leq 3.03$   
Resolviendo el problema mediante búsqueda no restringida:

Como la longitud del intervalo es 0.1, el valor de  $x$  en dirección negativa es  $0 - 0.1 = -0.1$  y su valor en dirección positiva es  $0 + 0.1 = +0.1$

$x$	$Max f(x) = 4x - 8x^2$
0	0
-0.1	-0.48
0.1	0.32

Como el objetivo es maximizar y  $0.32 > -0.48$ , es razonable proceder en dirección positiva.

$x$	$Max f(x) = 4x - 8x^2$
0	0
0.1	0.32
0.2	0.48
0.3	0.48

$f(0.3)$  no es mayor que  $f(0.2)$ , por lo tanto, un óptimo correcto puede encontrarse en el rango cercano de  $[0.2, 0.3]$ . A continuación se busca un intervalo de paso más pequeño, es decir 0.01 a partir de  $x = 0.2$ , después de encontrar la dirección adecuada.

$x$	$Max f(x) = 4x - 8x^2$
0.21	0.4872
0.22	0.4928
0.23	0.4968
0.24	0.4992
0.25	0.5000
0.26	0.4992

Por lo tanto,  $f(0.26)$  no es mayor que  $f(0.25)$ , por lo que el valor de  $x = 0.25$  hace máxima a nuestra función  $f(x) = 0.5$ .

Verificando con Maple:

$$y := f(x) = -8x^2 + 4x$$

*with(Optimization)*

*[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve]*

*Maximize(y, initialpoint = {x = 0.1})*

*[0.5000000000000000, [x = 0.2500000000000000]]*

Por lo que se comprueba que el procedimiento del método es adecuado para problemas de este tipo.  $Max f(x) = 0.5$ , con  $x = 0.25$

La figura No. 15 muestra el punto en donde la función derivada pasa por el valor de  $x$  es igual a 0.25, y tiene un valor máximo de  $f(x) = 0.5$

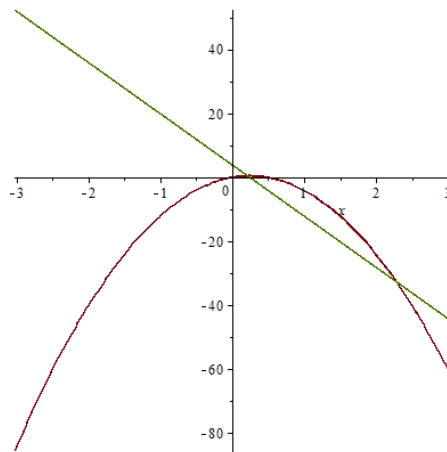


Figura No. 15. Gráfica de la función  $f(x) = 4x - 8x^2$  y su derivada.

#### Ejemplo numérico No. 4 (Resolviendo con Maple)

$Min f(x) = 8x^2 - 5.44x$ , usando un valor inicial de  $x = 0.5$  con una amplitud o longitud de 0.1 .

Graficando la función  $f(x)$  con Maple, se tiene la siguiente Figura No. 15.

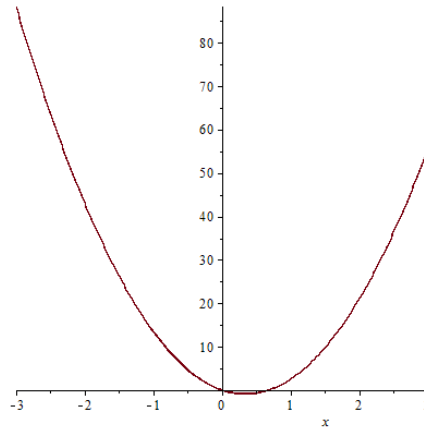


Figura No. 16. Gráfica de la función  $f(x) = 8x^2 - 5.44x$  en el intervalo  $-3 \leq x \leq 3$

Evaluando la función  $f(x) = 8x^2 - 5.44x$  en  $x = 0.5$ , se tiene que  $f(0.5) = -0.72$

Para encontrar una dirección adecuada, se incrementa y disminuye el valor de  $x$  con una amplitud de 0.1.

$x$	$Min f(x) = 8x^2 - 5.44x$
0.5	-0.720
0.6	-0.384
0.4	-0.896

Como la función tiene tendencia a decrecer en dirección negativa desde el valor inicial de 0.5, la búsqueda se realiza de la siguiente manera:

$x$	$Min f(x) = 8x^2 - 5.44x$
0.5	-0.720
0.4	-0.896
0.3	-0.912
0.2	-0.768

Como  $f(0.2)$  no es menor que  $f(0.3)$ , la búsqueda se detiene en este escenario. Se reinicia desde  $x = 0.3$  con una longitud menor, es decir, disminuimos la amplitud en 0.01, con el objetivo de encontrar una dirección adecuada para la movilidad.



En este caso, se tiene:

$x$	$Min f(x) = 8x^2 - 5.44x$
$0.3 - 0.01 = 0.29$	$-0.9048$
$0.3 + 0.01 = 0.31$	$-0.9176$

Otra mejora (desde el punto de vista de la minimización) es tomar una dirección positiva, por lo tanto, el proceso en el intervalo cerrado  $[0.3, 0.4]$  nos da una mejor precisión para obtener la solución del problema. Repetimos el proceso, y tenemos:

$x$	$Min f(x) = 8x^2 - 5.44x$
0.31	$-0.9176$
0.32	$-0.9216$
0.33	$-0.9240$
0.34	$-0.9248$
0.35	$-0.9240$

Como  $f(0.35)$  no es mayor que  $f(0.34)$ , el proceso se detiene en este estado.

Con este valor, es decir, a partir de  $x = 0.34$ , consideramos una longitud o amplitud de 0.001.

Sumando y restando 0.001 a  $x = 0.34$ , se obtiene:

$x$	$Min f(x) = 8x^2 - 5.44x$
$0.34 - 0.01 = 0.339$	$-0.92479$
$0.34 + 0.01 = 0.341$	$-0.92479$

En comparación con  $f(0.34) = -0.9248$ , no hay mejoras, por lo que el valor que hace mínima la función  $f(x) = 8x^2 - 5.44x$ , es  $x = 0.34$ . Por lo tanto,  $f(0.34) = -0.9248$ .

Verificando con Maple, tenemos:

$$y := 8x^2 - 5.44x$$

*with(Optimization)*

*[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]*

*Minimize(y, initialpoint = {x = 0.5})*

*[-0.9248000000000000, [x = 0.3400000000000000]]*

Por lo que se comprueba que el procedimiento del método es adecuado para problemas de este tipo.  $f(x) = 8x^2 - 5.44x$ , con  $x = 0.5$

La figura No. 16 muestra el punto en donde la función derivada pasa por el valor de  $x$  es igual a 0.34, y tiene un valor mínimo de  $f(x) = -0.9248$ .

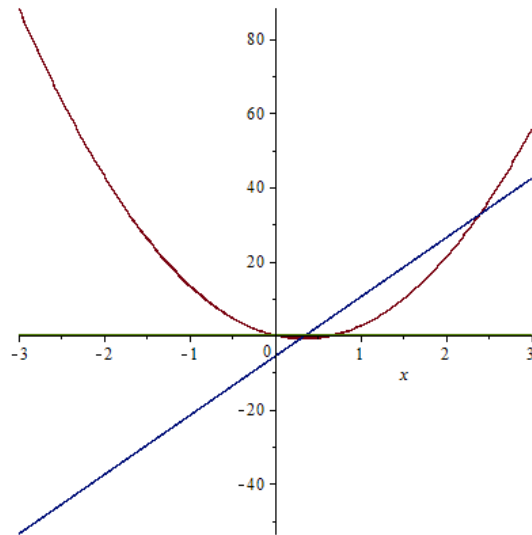


Figura No. 17. Gráfica de la función  $f(x) = 8x^2 - 5.44x$  en el intervalo  $-3 \leq x \leq 3$  y su derivada.

Es importante mencionar que, en el campo de la ingeniería, existen muchas situaciones prácticas, que están relacionadas con la determinación del rango inicial seleccionado para los problemas de programación no lineal, y en el que pueda encontrarse una variable que sea óptima, dicho rango inicial debe estar disponible, de tal forma que la búsqueda restringida se acote a ese rango exclusivamente. Por ejemplo, el diámetro del círculo de paso de un engranaje que se va a montar en el equipo no puede ser mayor de 200 milímetros. Similarmente, este diámetro no puede ser inferior a 50 milímetros, dependiendo de varios factores, tales como el rango de salida deseado, la fabricación, la exactitud y la capacidad de la máquina disponible para la fabricación del engranaje, etc.

El proceso de búsqueda puede estar restringido al intervalo cerrado de [50, 200] milímetros desde el principio.

Para ilustrar lo anterior, analicemos el siguiente problema:

### **Ejemplo numérico No. 5 (Resolviendo con Maple)**

Una industria manufacturera elabora múltiples artículos, mediante un proceso productivo. Cada artículo fabricado se produce mediante diferentes ciclos productivos. El costo total de producción anual, es la suma de los costos de mantenimiento del inventario y el costo de instalación de la maquinaria y equipo. Se estima que la función de costo total, está determinada por la función:  $f(x) = 1150x + 250/x$ .

Donde  $x$  es el tiempo de ciclo ordinario por año. El objetivo es minimizar la función de costo total  $f(x)$  y evaluar  $x$  óptimo para su implementación. Aplicar el procedimiento de búsqueda como se discutió anteriormente y considerar  $x = 0.45$  año con una longitud del intervalo 0.01 en la primera etapa de la búsqueda.

También resuelva el problema probando si la función es convexa y usando la propiedad de convexidad. Comente sobre la importancia de los procedimientos de búsqueda.

Solución:

$\text{Min } f(x) = 1150x + 250/x$ , usando un valor inicial de  $x = 0.45$  con una amplitud o longitud de 0.01 .

Graficando la función  $f(x)$  con Maple, se tiene la siguiente Figura No. 18.

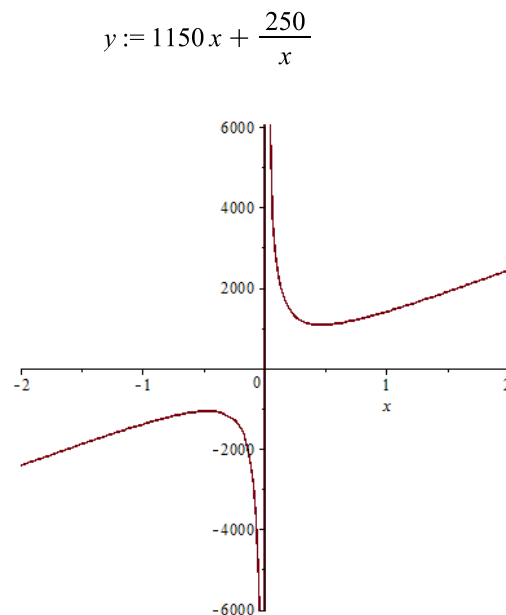


Figura No. 18. Gráfica de la función  $f(x) = 1150x - 250/x$  en el intervalo  $-2 \leq x \leq 2$

Evaluando la función  $f(x) = 1150x + 250/x$  en  $x = 0.45$ , se tiene:  $f(0.45) = 1073.06$

Entonces  $f(0.46) = 1972.47 < f(0.44) = 1074.18$ , y comparando con  $f(0.45) = 1073.06$ , tomando los datos en la dirección positiva se observa una mejora en la utilización de los costos.

$x$	$f(x) = 1150x + 250/x$
0.46	1072.47
0.47	1072.41
0.48	1072.83

A partir de 0.47 y usando una longitud de intervalo de 0.001, se elige la dirección negativa y se obtienen los siguientes resultados:

$x$	0.469	0.468	0.467	0.466	0.465
$f(x) = 1150x + 250/x$	1072.40	1072.39	1072.3819	1072.3807	1072.384

Por lo tanto, el tiempo de ciclo óptimo  $x$  se obtiene como  $x = 0.466$  años y el coste total relevante de 1072.38

Verificando con Maple, tenemos:

$$y := 1150x + \frac{250}{x}$$

*with(Optimization)*

*[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]*

*Minimize(y, initialpoint = {x = 0.45})*

*[1072.38052947636083, [x = 0.466252404114702]]*

Por lo que se comprueba que el procedimiento del método es adecuado para problemas de este tipo.  $f(x) = 1150x + 250/x$ , con  $x = 0.45$

La figura No. 19 muestra el punto en donde la función derivada pasa por el valor de  $x$  es igual a 0.4662, y tiene un valor mínimo de  $f(x) = 1072.380$ .

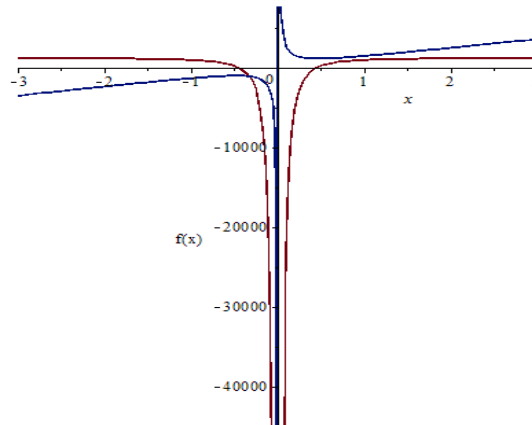


Figura No. 19. Gráfica de la función  $f(x) = 1150x + 250/x$  en el intervalo  $-2 \leq x \leq 2$  y su derivada en el mismo intervalo.

Con el fin de probar si la función es convexa, la primera y la segunda derivada de la función son, respectivamente:  $\frac{d}{dx} \left( 1150x + \frac{250}{x} \right) = 1150 - \frac{250}{x^2}$  y

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( 1150x + \frac{250}{x} \right) = \frac{500}{x^3} .$$

$\frac{500}{x^3} > 0$  para valores positivos de  $x$ . Por lo tanto, es una función convexa.

Usando las propiedades de convexidad, el óptimo puede obtenerse diferenciando a  $f(x)$  con respecto de  $x$  e igualando a cero, los cálculos realizados con Maple, se muestran a continuación:

$$\text{solve} \left( 1150 - \frac{250}{x^2} = 0 \right), \frac{1}{23} \sqrt{115}, -\frac{1}{23} \sqrt{115}, \quad \text{evalf} \left( \frac{1}{23} \sqrt{115} \right), 0.4662524039 .$$

El resultado es similar al obtenido mediante el procedimiento de búsqueda.

### Discusión:

Sin embargo, en muchos casos, es difícil probar si la función es convexa o cóncava. En otras palabras, es difícil diferenciar todas las funciones. Las propiedades de la función convexa o cóncava no pueden usarse para evaluar el óptimo si no es posible determinar el tipo de función.

En tales situaciones, los procedimientos de búsqueda se vuelven muy importantes para calcular el valor óptimo.

El siguiente ejemplo muestra como es difícil encontrar un punto máximo o mínimo global cuando la función contiene máximos y mínimos locales y puntos de inflexión. En la última sección se abordará lo relacionado al tema de máximos y mínimos.

### Ejemplo numérico No. 6 (Resuelto con Maple)

Determine los valores máximos y mínimos de la siguiente función:

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$$

La figura No. 20 se muestra a continuación:

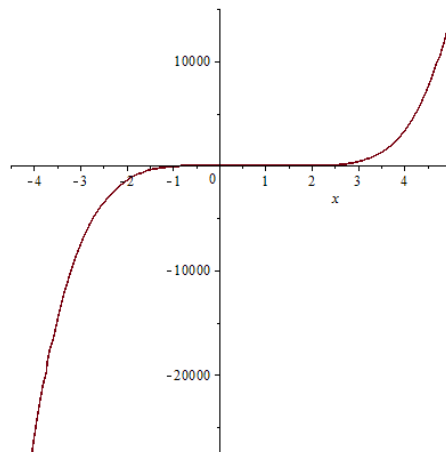


Figura No. 19. Gráfica de la función  $f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$

$$\frac{d}{dx} (12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5) = 60x^4 - 180x^3 + 120x^2$$

$$\text{Diff}(y, x, x) = \text{diff}(y, x, x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5) = 240x^3 - 540x^2 + 240x$$

$$\text{solve}(60x^4 - 180x^3 + 120x^2 = 0)$$

$$0, 0, 2, 1$$

$$f'(x) = 0, \quad \text{para } x = 0, 1, 2$$

$$\text{eval}(240x^3 - 540x^2 + 240x, x=1), \quad -60, \quad \text{eval}(12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5, x=1), \quad 12 \quad (\text{máximo relativo})$$

$$\text{eval}(240x^3 - 540x^2 + 240x, x=2), \quad 240, \quad \text{eval}(12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5, x=2), \quad 240 \quad (\text{mínimo relativo})$$

$eval(240x^3 - 540x^2 + 240x, x=0)$  , 0 , Ni máximo, ni mínimo, se procede a calcular la siguiente derivada.

$\frac{d^3}{dx^3} (12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5) = 720x^2 - 1080x + 240$  , en  $x = 0$ ,  $f'''(0) = 240$ , entonces  $f'''(x) \neq 0$ , entonces ni máximo ni mínimo, es un punto de inflexión.

Verificando con Maple, utilizando la función *Minimize* y *Maximize*.

*with(Optimization)*

*[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPsolve, QPSolve]*

*Minimize(12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5, x=0..2)* , *[-11., [x=2.]]*

*Maximize(12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5, x=0..2)* , *[12.0000000000000, [x=0.999999989032815]]*

## 9. Método de la sección dorada

Este método es adecuado para la situación en la que un máximo se encuentra en el intervalo dado y la función es unimodal en ese intervalo. Consideremos una función  $f(x)$  como se muestra en la figura No. 20. Existe una gama conocida de puntos  $[x_1, x_2]$  en la que se encuentra un  $x^*$  óptimo.

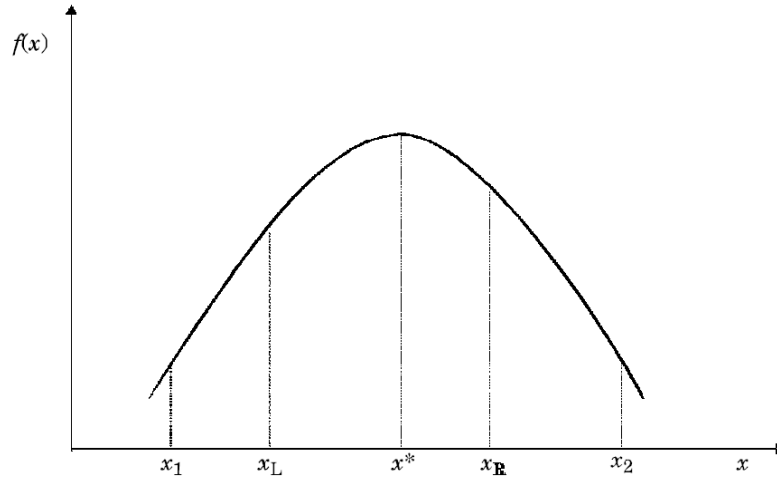


Figura No. 20. Óptimo  $x^*$  en el rango  $[x_1, x_2]$

Consideremos a dos puntos  $x_L$  y  $x_R$  en el rango o intervalo  $[x_1, x_2]$ , tales que:

$$\begin{aligned}x_L &= \text{punto a la izquierda} \\x_R &= \text{punto a la derecha}\end{aligned}$$

Pueden surgir tres posibilidades:

$$f(x_L) < f(x_R), \quad f(x_L) = f(x_R), \quad \text{y} \quad f(x_L) > f(x_R)$$

Clasificando en dos, tenemos:

- i)  $f(x_L) < f(x_R)$
- ii)  $f(x_L) \geq f(x_R)$

Tomando el primer caso, por ejemplo, cuando  $f(x_L) < f(x_R)$ . Esto puede ser cierto o verdadero en dos situaciones:

- a) Cuando  $x_L$  y  $x_R$  están a cada lado de  $x^*$  óptimo, tal como se muestra en la figura No. 20.



b) Cuando  $x_L$  y  $x_R$  están a un lado de  $x^*$  óptimo, tal como se muestra en la figura No. 21.

Para ambos casos, lo siguiente es aplicable la siguiente afirmación: «el valor óptimo debe estar en el rango  $[x_L, x_2]$  si  $f(x_L) < f(x_R)$ »

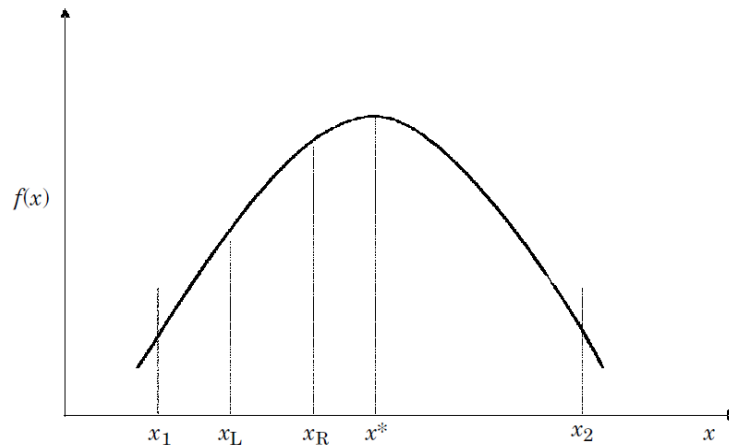


Figura No. 21. Cuando  $x_L$  y  $x_R$  están a un lado de  $x^*$  óptimo [ $f(x_L) < f(x_R)$ ]

Ahora tomemos el segundo caso, por ejemplo, cuando  $f(x_L) \geq f(x_R)$ .

Esto puede ser cierto en las tres situaciones que se muestran en las figuras No. 22(a), 22(b) y 22(c).

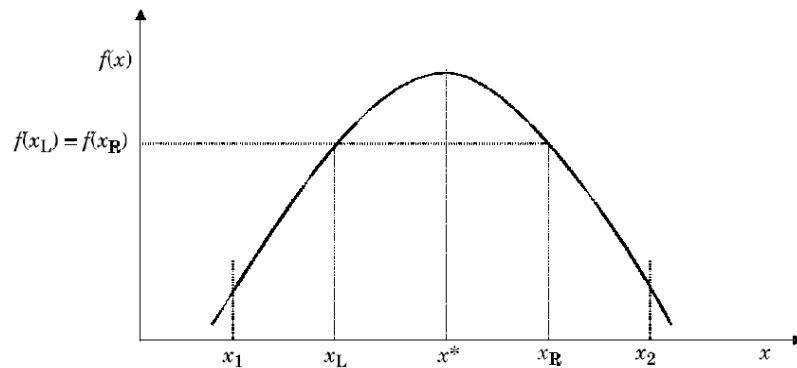


Figura No. 22 (a).  $f(x_L) = f(x_R)$ .  $x_L$  y  $x_R$  se encuentran a cada lado del valor óptimo  $x^*$

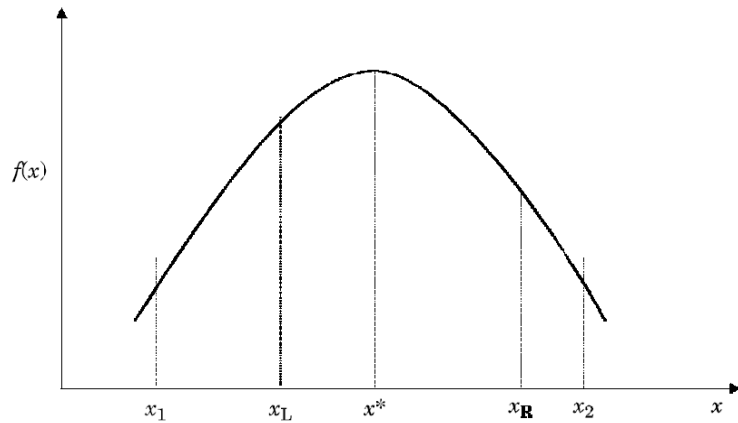


Figura No. 22 (b).  $f(x_L) > f(x_R)$ .  $x_L$  y  $x_R$  se encuentran a cada lado del valor óptimo  $x^*$

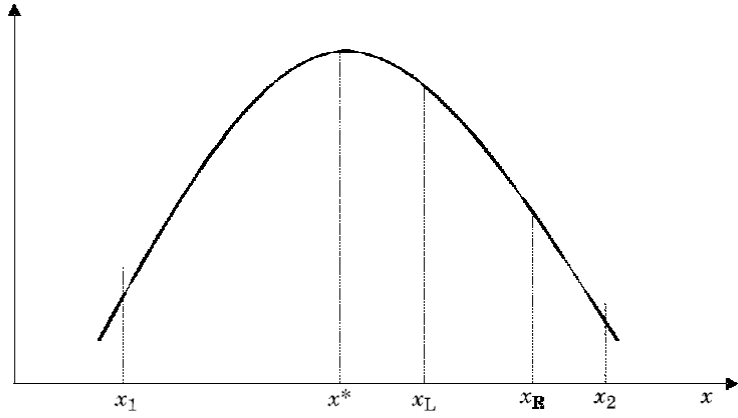


Figura No. 22 (c).  $f(x_L) > f(x_R)$ .  $x_L$  y  $x_R$  se encuentran en un solo lado del valor óptimo  $x^*$

## 10. Algoritmo de búsqueda de la sección dorada

El algoritmo de la búsqueda de la sección dorada se muestra en la figura No. 23 donde  $[x_1, x_2]$  es el rango en donde se encuentra el valor óptimo  $x^*$  y,

$$r = 0.5(\sqrt{5} - 1) = 0.618034 \cong 0.618$$

Este número tiene ciertas propiedades que se analizarán posteriormente.

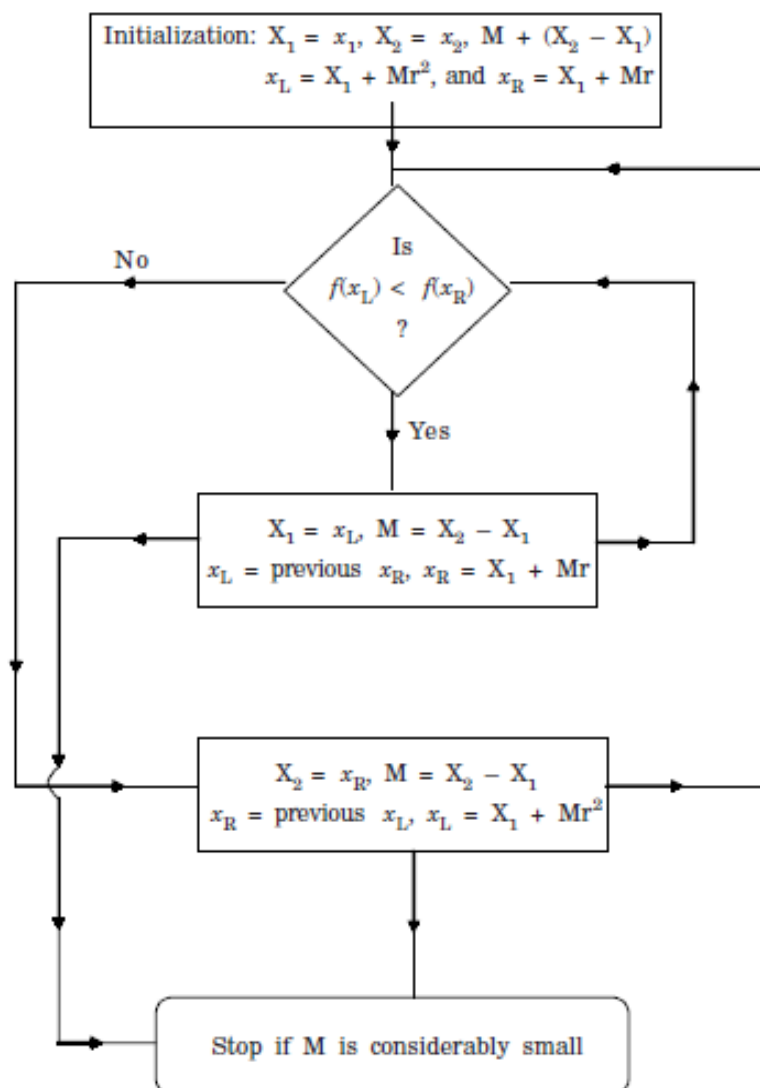


Figura No. 23. Algoritmo para el método de la sección dorada.

Después de inicializar como se indica en la figura No. 23, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1.-  $f(x_L)$  se compara con  $f(x_R)$  y dependiendo de esta comparación, debemos ir al paso 2 o al paso 3.

Paso 2.- Si  $f(x_L) < f(x_R)$ ,  $X_1 = x_L$  y  $M = X_2 - X_1$ ,  $x_L$  posterior a  $x_R$  y  $x_R = X_1 + M_r$

Ir al paso 1.

Paso 3.- Si  $f(x_L) \geq f(x_R)$ ,  $X_2 = X_R$  y  $M = X_2 - X_1$ ,  $x_R$  posterior a  $x_L$  y  $x_L = X_1 + M_{r^2}$

Ir al paso 1.

El procedimiento se detiene cuando  $M$  es considerablemente pequeño

### Ejemplo numérico No. 7. (Resuelto con Maple y con el algoritmo de la sección dorada)

Utilice el algoritmo de la sección dorada para el encontrar el valor máximo de la función  $Max f(x) = 4x - 8x^2$ . Use el rango inicial de  $[0,0.5]$  en el que se encuentra el valor óptimo. La Figura No. 24 muestra la gráfica de la función  $f(x)$

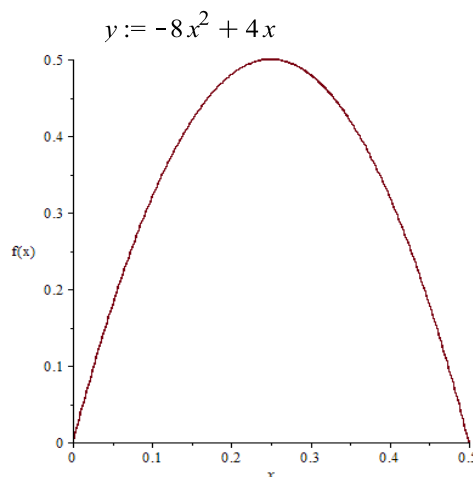


Figura No. 24. Grafica de la función  $f(x) = 4x - 8x^2$  en el intervalo  $[0,0.5]$

*with(Optimization)*

*[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]*

*Maximize(y, initialpoint = {x = 0.1})*

*[0.5000000000000000, [x = 0.2500000000000000]]*

Maximize(y, initialpoint = {x = 0.5})  
 [0.5000000000000000, [x = 0.2500000000000000]]

$$\text{Max } f(x) = 4x - 8x^2 = 0.5, \quad \text{con } x = 0.25$$

La figura No. 25 muestra la gráfica y el punto solución del problema utilizando el programa Maple.

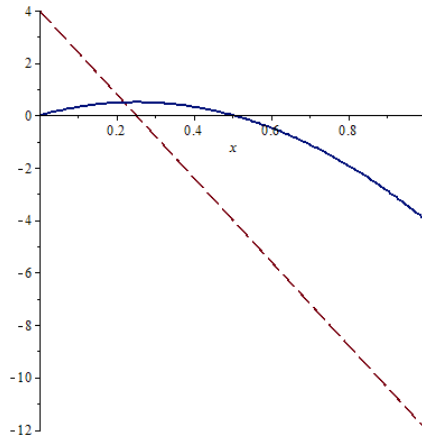


Figura No. 25. Gráfica de la función  $y := -8x^2 + 4x$  y su derivada  $\frac{d}{dx}(-8x^2 + 4x) = -16x + 4$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 1$ .

**Resolviendo el problema utilizando el algoritmo de la sección dorada, se tiene:**

**Solución:**

Ahora  $[X_1, X_2] = [0, 0.5]$

**Paso inicial:**

$$X_1 = x_1 = 0, X_2 = x_2 = 0.5$$

$$M = X_2 - X_1 = 0.5 - 0 = 0.5$$

$$x_L = X_1 + M_r^2 = 0 + (0.5 * 0.6182) = 0.19$$

$$x_R = X_1 + M_r = 0 + (0.5 * 0.618) = 0.31$$

**Primera iteración**

Paso 1

$$f(x_L) = f(0.19) = 0.47$$

$$f(x_R) = f(0.31) = 0.47$$

Cuando se satisface la condición  $f(x_L) \geq f(x_R)$  se aplica el paso no. 3

Paso 3

$$X_2 = 0.31 \text{ y } M = 0.31 - 0 = 0.31, x_R = 0.19 \text{ y } x_L = 0 + (0.31 * 0.6182) = 0.12$$

### Segunda iteración

Paso 1

$$f(x_L) = f(0.12) = 0.36$$

$$f(x_R) = f(0.19) = 0.47$$

Como  $f(x_L) < f(x_R)$ , el paso 2 es aplicable

Paso 2

$$X_1 = 0.12 \text{ y } M = X_2 - X_1 = 0.31 - 0.12 = 0.19$$

$$x_L = 0.19 \text{ y } x_R = 0.12 + (0.19 * 0.618) = 0.24$$

Puede observarse que un solo valor de  $x_L$  y  $x_R$  está cambiando realmente en cada iteración. Cualquier  $x_L$  o  $x_R$  tomará el valor previo o anterior de  $x_R$  o  $x_L$ , respectivamente.

En cualquier iteración  $i$ , el valor de  $M = r$  (Valor de  $M$  en la iteración,  $i - 1$ )

Alternativamente, el valor de  $M$  (o el rango en el cual se encuentra el óptimo) en cualquier iteración  $i = (x_2 - x_1) r^i$ .

Donde  $i = 1, 2, 3..$

$$\text{En iteración 1, } M = (0.5 - 0) * 0.618 = 0.31$$

$$\text{En iteración 2, } M = (0.5 - 0) * 0.6182 = 0.19$$

El proceso iterativo se continúa hasta que  $M$  es considerablemente pequeño

### Tercera iteración

$$\text{Paso 1: } f(x_L) = f(0.19) = 0.47, f(x_R) = f(0.24) = 0.50$$

$$\text{Paso 2: } X_1 = 0.19 \text{ y } M = 0.31 - 0.19 = 0.12, x_L = 0.24 \text{ y } x_R \\ = 0.19 + (0.12 * 0.618) = 0.26$$

### Cuarta iteración

$$\text{Paso 1: } f(x_L) = f(0.24) = 0.50, f(x_R) = f(0.26) = 0.50$$

$$\text{Paso 3: } X_2 = 0.26, M = 0.26 - 0.19 = 0.07, x_R = 0.24, x_L \\ = 0.19 + (0.07 * 0.6182) = 0.22$$

### Quinta iteración

$$\text{Paso 1: } f(x_L) = f(0.22) = 0.49, f(x_R) = f(0.24) = 0.50$$

$$\text{Paso 2: } X_1 = 0.22, M = 0.26 - 0.22 = 0.04, x_L = 0.24, x_R \\ = 0.22 + (0.04 * 0.618) = 0.24$$

El proceso se puede continuar con cualquier precisión deseada.

En la actualidad, el valor de  $M = 0.04$  con  $[X_1, X_2] = [0.22, 0.26]$ , lo que indica que el óptimo se encuentra entre los valores de 0.22 y 0.26.

Teniendo en cuenta que un intervalo pequeño, incluso un promedio entre los valores de las obras puede ser de 0.24 que está muy cerca de exacta del valor óptimo  $x^* = 0.25$  obtenido con la precisión del programa Maple.

En cualquier iteración  $i$ ,  $x_L - X_1 = X_2 - x_R$

Por ejemplo, en la iteración 3,

$$0.24 - 0.19 = 0.31 - 0.26 = 0.05$$

## 11. Interpolación cuadrática

Si es posible aproximar cualquier función por una función cuadrática o si está es difícil diferenciarla, entonces se analiza la función cuadrática para obtener un mínimo. El mínimo así obtenido se sustituye en la función original que ha de minimizarse y el proceso se continúa para alcanzar la precisión deseada.

Una función cuadrática es de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (Ecuación No. 1)

Tomando tres puntos cualesquiera:  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$  son seleccionados, y se tiene el siguiente sistema:

$$f(x_1) := ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$f(x_2) := ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$f(x_3) := ax_3^2 + bx_3 + c$$

Al resolver estas tres ecuaciones  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  y  $f(x_3)$ , los valores de  $a$  y  $b$  se obtienen de la siguiente manera:

$$a = - \left( \frac{(x_1 - x_2)f(x_3) + (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} \right) \quad \text{(Ecuación No. 2)}$$

$$b = \left( \frac{(x_1^2 - x_2^2)f(x_3) + (x_2^2 - x_3^2)f(x_1) + (x_3^2 - x_1^2)f(x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} \right) \quad \text{(Ecuación No. 3)}$$

Para obtener el valor mínimo de la función  $(x) = ax^2 + bx + c$ , se utiliza el criterio de la derivada, obteniéndose:

$$\frac{\partial}{\partial x} (ax^2 + bx + c) = 2ax + b, \text{ también, } 2ax + b = 0 \quad \text{(Ecuación No. 4). Por lo tanto:}$$

$$\text{Min } x^* = -\frac{b}{2a} \quad \text{(Ecuación No. 5)}$$

Sustituyendo los valores de  $a$  y  $b$  en la ecuación No. 5, se obtiene:

$$x^* = \frac{1}{2} \left( \frac{(x_1^2 - x_2^2)f(x_3) + (x_2^2 - x_3^2)f(x_1) + (x_3^2 - x_1^2)f(x_2)}{(x_1 - x_2)f(x_3)(x_2 - x_3)f(x_1)(x_3 - x_1)f(x_2)} \right) \quad \text{(Ecuación No. 6)}$$



Este mínimo  $x^*$  se utiliza en el proceso iterativo. Tres puntos  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , así como sus correspondientes valores en la función, son necesarios para determinar el valor óptimo  $x^*$ .

El procedimiento consiste en proporcionar un punto inicial  $x_1$ . Entonces  $x_2 = x_1 + \Delta$ , donde  $\Delta$  es la longitud de paso.

Como el objetivo es minimizar, un tercer punto  $x_3$  se selecciona como sigue:

- i)  $x_3 = x_1 - \Delta$ , si  $f(x_1) < f(x_2)$
- ii)  $x_3 = x_2 + \Delta = x_1 + 2\Delta$ , si  $f(x_2) < f(x_1)$

### Ejemplo numérico No. 8 (Resuelto con Maple y con el algoritmo de interpolación cuadrática)

Obtener el valor mínimo de la siguiente función usando interpolación cuadrática.

$$\text{Min } f(x) = 1200x + \frac{300}{x}$$

Comenzar con el punto inicial  $x_1 = 0.3$  y una longitud de paso de  $\Delta = 0.1$

Solución: (resolviendo primero de forma directa con el programa Maple)

La gráfica de la función  $y := 1200x + \frac{300}{x}$ , se muestra a continuación:

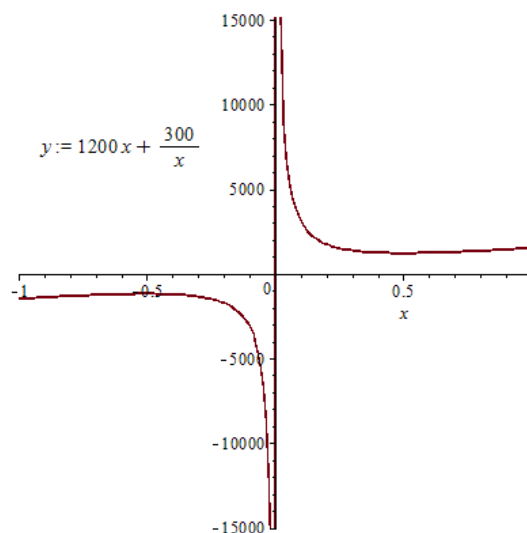


Figura No. 26. Gráfica de la función  $y := 1200x + \frac{300}{x}$  en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$

$\text{Minimize} \left( 1200 \cdot x + \frac{300}{x}, \text{initialpoint} = \{x = 0.01\} \right)$

[1200., [x = 0.5000000000000689]]

$$x^* = 0.50, \quad y f(x^*) = 1,200$$

Utilizando interpolación cuadrática:  $x_1 = 0.3$  y una longitud de paso de  $\Delta = 0.1$ .

Solución:

### Primera iteración

Ahora,  $x_1 = 0.3$  y  $f(0.3) = 1,360$ ,  $x_2 = x_1 + \Delta = 0.3 + 0.1 = 0.4$  y  $f(x_2) = 1,230$

Como  $f(x_2) < f(x_1)$ ,  $x_3 = x_1 + 2\Delta = 0.5$ , y  $f(x_3) = 1,200$

De la ecuación No. 6, se tiene que :  $x^* = 0.48$ , y  $f(x^*) = 1,201$

### Segunda iteración

Entonces,  $x^* = 0.48$  puede reemplazar el valor inicial de  $x_1$

Ahora,  $x_1 = 0.48$ ,  $f(x_1) = 1201$ ,  $x_2 = x_1 + \Delta = 0.48 + 0.1 = 0.58$  y  $f(x_2) = 1,213.24$

Como  $f(x_1) < f(x_2)$ ,  $x_3 = x_1 - \Delta = 0.48 - 0.1 = 0.38$ , y  $f(x_3) = 1,245.47$

De la ecuación No. 6, se tiene que:  $x^* = 0.508$ , y  $f(x^*) = 1,200.15$

Con el fin de conseguir la precisión deseada, el proceso puede continuar hasta que la diferencia entre valores consecutivos de  $x^*$  se haga muy pequeña.

La figura No. 27 muestra la gráfica de la función y su correspondiente derivada. El punto solución es en donde la derivada es cero.

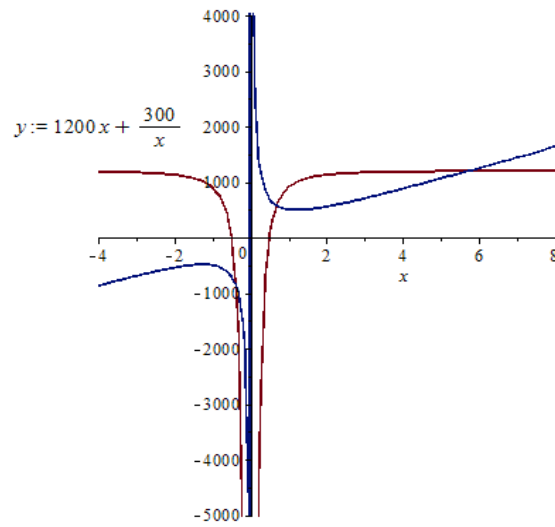


Figura No. 27. Gráfica de la función  $y := 1200x + \frac{300}{x}$  y la función derivada

$$\frac{d}{dx} \left( 1200x + \frac{300}{x} \right) = 1200 - \frac{300}{x^2} \text{ en el intervalo } -1 \leq x \leq 1.$$

## 12. Método de Newton Raphson

Considere  $x = a$  como un valor aproximado inicial del óptimo de una función  $f(x)$  y  $(a + h)$  como un valor mejorado.

Para averiguar el valor de  $h$ , expanda  $f(a + h)$  usando el teorema de Taylor e ignore las potencias superiores de  $h$ . Se pueden asumir las siguientes notaciones por conveniencia.

Sea:

$$f^1(x) = \text{Derivada de primer orden}$$

$$f^{11}(x) = \text{Derivada de segundo orden}$$

$$\text{Ahora, } f(a + h) = f^1(a) + hf^{11}(a) = 0$$

$$\text{Para el valor mínimo: } f^1(a + h) = f^1(a) + hf^{11}(a) = 0$$

$$\text{O, también: } h = \frac{-f^1(a)}{f^{11}(a)}$$

$$\text{Siguiente valor de } x = a - \frac{f^1(a)}{f^{11}(a)}$$

### Ejemplo numérico No. 9 (Resuelto con Maple y con el algoritmo de Newton Raphson)

Use el método de Newton Raphson para resolver el problema anterior, en el que:  $f(x) = 1200x + \frac{300}{x}$ , obtenga el mínimo considerando un valor inicial de  $x = 0.3$ .

#### Primera iteración

$$y := 1200x + \frac{300}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( 1200x + \frac{300}{x} \right) = 1200 - \frac{300}{x^2} \quad (\text{Derivada de primer orden})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( 1200x + \frac{300}{x} \right) = \frac{600}{x^3} \quad (\text{Derivada de segundo orden})$$

Sustituyendo el valor inicial  $x = 0.3$  en la derivada de primer y segundo orden, se tiene:

$$\text{eval}(\text{diff}(y, x), x = 0.3) = -2133.333333$$

$$\text{eval}(\text{diff}(y, x, x), x = 0.3) = 22222.22222$$

$$\text{Nuevo valor de } x^* = 0.3 + \frac{2133.333333}{22222.22222} = 0.396$$

Este valor se utiliza como un nuevo  $x^* = a$  en la siguiente iteración. Es decir,  $a = 0.396$

### Segunda iteración

Ahora,  $a = 0.396$

Sustituyendo el nuevo valor de  $a = 0.396$  en la derivada de primer y segundo orden, se tiene:

$$y := 1200 \cdot x + \frac{300}{x}$$

$$y := 1200x + \frac{300}{x}$$

$$\text{Diff}(y, x) = \text{diff}(y, x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( 1200x + \frac{300}{x} \right) = 1200 - \frac{300}{x^2}$$

$$\text{Diff}(y, x, x) = \text{diff}(y, x, x, x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( 1200x + \frac{300}{x} \right) = -\frac{1800}{x^4}$$

$$\text{eval}(\text{diff}(y, x), x = 0.396)$$

$$-713.070095$$

$$\text{eval}(\text{diff}(y, x, x), x = 0.396)$$

$$9661.970178$$

$$0.396 + \frac{713.070095}{9661.970178}$$

$$x^* = 0.4698017280$$

Ahora,  $a = 0.469801 \cong 0.47$

### Tercera iteración

Sustituyendo el nuevo valor de  $a = 0.47$  en la derivada de primer y segundo orden, se tiene:

$$\text{eval}(\text{diff}(y, x), x = 0.47) \quad -158.080580$$

$$\text{eval}(\text{diff}(y, x, x), x = 0.47) \quad 5779.066295$$

$$0.47 + \frac{158.080580}{5779.066295} \quad 0.4973540001$$

Este proceso continua hasta encontrar la precisión deseada del valor de  $x^*$ .

Verificando, nuevamente con Maple, obtenemos el valor óptimo de nuestra función.

$$\text{Minimize}\left(1200 \cdot x + \frac{300}{x}, \text{initialpoint} = \{x = 0.01\}\right) \\ [1200., [x = 0.500000000000689]], x^* = 0.50, y f(x^*) = 1,200$$

### Discusión:

En los modelos de inventarios, no se asume que los pedidos de productos faltantes estén totalmente demorados, sino una sola fracción de los pedidos no se encuentra acumulada.

En los modelos de inventarios, la función de costo anual total se formula como la suma del costo de adquisición más el costo de instalación, más costo de mantenimiento de inventario y costo del pedido posterior.

Después de sustituir la cantidad máxima de faltante (en términos de tamaño de lote de fabricación) en la derivada de primer orden de esta función con respecto al tamaño de lote e igualar a cero, se desarrolla una ecuación no lineal, que se formula en términos de variable única.

El método de Newton-Raphson puede aplicarse con éxito para obtener el tamaño de lote óptimo utilizando un valor inicial como tamaño de lote para la situación en la que se supone que todas las insuficiencias están completamente pendientes.

Si alguna función  $f(x)$  está en la forma  $f(x) = 0$  y el objetivo es encontrar el valor de  $x$  que satisfaga esto, entonces el método de Newton-Raphson puede ser usado de la forma siguiente:

$$f(a + h) = f(a) + hf^1(a) = 0$$

También:  $h = \frac{-f(a)}{f^1(a)}$ , el siguiente valor de  $x = a - \frac{f(a)}{f^1(a)}$

Este valor de  $x$  se usa en la siguiente iteración como un valor aproximado de  $a$ . El proceso se continúa hasta que la diferencia entre dos valores sucesivos de  $x$  sea muy pequeña o casi cero.

### **13. Problemas de máximos y mínimos y puntos de inflexión con una sola variable.** Taylor (2007)

En la práctica cotidiana, principalmente en los cursos de investigación de operaciones, se dedica más tiempo a la enseñanza de la programación lineal que en cualquier otro tema del programa o cualquier otro tema.

La programación lineal, es una técnica muy versátil que puede ser y ha sido aplicada a una amplia variedad de problemas.

Además de los capítulos dedicados específicamente a los modelos de programación lineal y aplicaciones, también hemos presentado distintas variaciones de uso de la programación lineal, como los problemas de programación lineal en enteros, además de aplicaciones en los problemas de transporte, asignación, transbordo, ruta más corta y redes PERT/CPM.

En todos estos casos, todas las funciones objetivo y el conjunto de restricciones eran lineales; es decir, formaron una recta o un plano en el espacio euclidiano. Sin embargo, muchos problemas empresariales realistas tienen relaciones que pueden ser modeladas sólo con funciones no lineales.

Cuando los problemas se ajustan al formato de problemas de programación lineal general, pero incluyen funciones no lineales, se les denomina problemas de programación no lineales.

Los problemas de programación no lineal se estudian por separado debido a que éstos se resuelven de una forma diferente a los problemas de programación lineal clásicos.

De hecho, la solución de un problema de programación no lineal es considerablemente más compleja y difícil que los problemas de programación lineal, en virtud de que, a menudo es difícil, si no imposible, determinar una solución óptima, incluso para un problema de pequeña instancia.

En los problemas de programación lineal, las soluciones se encuentran en las intersecciones de líneas o planos, y aunque puede haber un número muy grande de posibles puntos de solución, el número es finito, y una solución puede eventualmente ser encontrada.

Sin embargo, en la programación no lineal no puede haber intersección o puntos extremos; en su lugar, el espacio de solución puede ser una línea o una superficie ondulada, que incluye virtualmente un número infinito de puntos.



Para un problema realista, el espacio de la solución puede ser como una cordillera, con muchos picos y valles, y el punto de solución máximo o mínimo podría estar en la parte superior de cualquier pico o en el fondo de cualquier valle.

Lo que es difícil en la programación no lineal es determinar si el punto en la cima de un pico es sólo el punto más alto en el área inmediata (llamado óptimo local, en términos de cálculo) o el punto más alto de todos.

Las técnicas de solución para problemas de programación no lineales generalmente implican buscar en la superficie de la solución picos o valles, es decir, puntos altos o puntos bajos.

El problema de los métodos de solución de la programación no lineal, es que en muchas ocasiones tienen problemas para determinar si el punto cumbre (máximo) que han identificado es sólo una solución óptima local o la solución óptima global.

Por lo tanto, encontrar una solución es a menudo difícil y puede implicar matemáticas muy complejas que están más allá del alcance de este libro de texto.

En este capítulo presentamos la estructura básica de los problemas de programación no lineal y Maple para resolver modelos simples.

#### **14. Método de resolución de modelos de programación no lineal con una sola variable.** Anderson y Sweeney (1993)

##### **Regla No. 1** (condición necesaria)

La primera derivada de una función sin restricciones debe ser igual a cero en sus puntos máximos locales o mínimos locales.

##### **Regla No. 2** (condición suficiente)

Si se satisface la regla 1 en un punto, y

- a) Si la segunda derivada es mayor que cero, entonces el punto es un mínimo local.
- b) Si la segunda derivada es menor que cero, entonces el punto es un máximo local

El procedimiento general para encontrar el máximo o mínimo global para una función de una variable es el siguiente:

**Paso 1.** Encontrar los puntos que satisfagan las reglas 1 y 2. Estos son los candidatos para proporcionar la solución óptima del problema.

**Paso 2.** Si la solución está restringida a un intervalo específico, evaluar la función en los extremos del intervalo.

**Paso 3.** Comparar los valores de la función con todos los puntos que se encontraron en los pasos 1 y 2. El mayor de éstos es la solución global máxima; el menor de ellos es la solución global mínima.

## 15. Problemas de programación lineal no restringidos con una sola variable (Resueltos con Maple)

### Problema No. 1

Maximice la función  $f(x) = 12x - 6x^2 - 30$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 10$ . Anderson y Sweeney (1993)

Solución:

La función tiene un valor máximo en  $x = 1$ . El valor de la función máximo de la función es:  $f(1) = 12(1) - 6(-1)^2 - 30 = -24$ . El procedimiento, la gráfica y su derivada se muestran en la figura No. 28.

$$y := 12 \cdot x - 6 \cdot x \cdot 2 - 30$$

$$y := -6x^2 + 12x - 30$$

$$\text{Diff}(y, x) = \text{diff}(y, x)$$

$$\frac{d}{dx} (-6x^2 + 12x - 30) = -12x + 12$$

$$\text{solve}(-12 \cdot x + 12 = 0) \quad 1$$

$$\text{Diff}(y, x, x) = \text{diff}(y, x, x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (-6x^2 + 12x - 30) = -12$$

$$\text{eval}(y, x = 1)$$

$$-24$$

$$\text{plot}(y, x = -5..10)$$

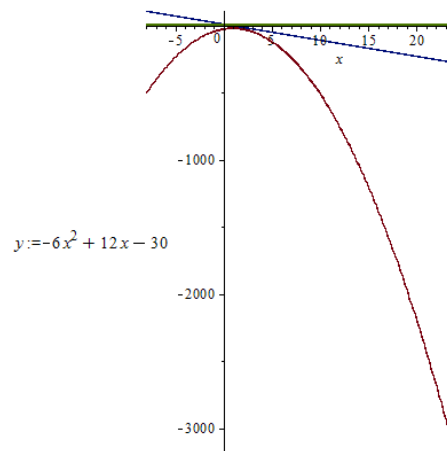


Figura No. 28. Gráfica de la función  $f(x) = 12x - 6x^2 - 30$  y su derivada

## **Problema No. 2**

Obtenga el mínimo de la función  $f(x) = 3x^3 - 20x^2 + 60$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 4$ .  
Anderson y Sweeney (1993)

Solución:

La gráfica de la función  $f(x)$ , se muestra a continuación:

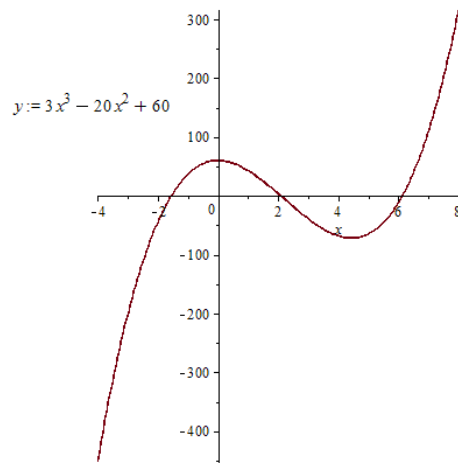


Figura No. 29. Gráfica de la función  $f(x) = 3x^3 - 20x^2 + 60$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 4$

Instrucción Maple	Resultado
$y := 3 \cdot x \cdot 3 - 20 \cdot x \cdot 2 + 60$	$y := 3x^3 - 20x^2 + 60$
$Diff(y, x) = diff(y, x)$	$\frac{d}{dx} (3x^3 - 20x^2 + 60) = 9x^2 - 40x$
$Diff(y, x, x) = diff(y, x, x)$	$\frac{d^2}{dx^2} (3x^3 - 20x^2 + 60) = 18x - 40$
$diff(y, x) = 0$	$9x^2 - 40x = 0$
$plot(y, x = -4 .. 8)$	$0, \frac{40}{9}$
$eval(y, x = 0)$	60
$eval\left(y, x = \frac{40}{9}\right)$	$-\frac{17420}{243}$
$evalf\left(-\frac{17420}{243}\right)$	-71.68724280
$eval(diff(y, x, x), x = 0)$	Entonces:
$-40 < 0,$	$con x = 0 produce un valor máximo$
	Entonces:
$eval\left(\left(diff(y, x, x), x = \frac{40}{9}\right)\right)$	$con x = \frac{40}{9} produce un valor mínimo$
$40 > 0$	60

$eval(y, x = 0)$	$-\frac{17420}{243}$
$eval\left(y, x = \frac{40}{9}\right)$	-71.68724280
$evalf\left(-\frac{17420}{243}\right)$	60
$eval(y, x = 0)$	-68
$eval(y, x = 4)$	
El valor mínimo es en el intervalo $0 \leq x \leq 4,$	-68

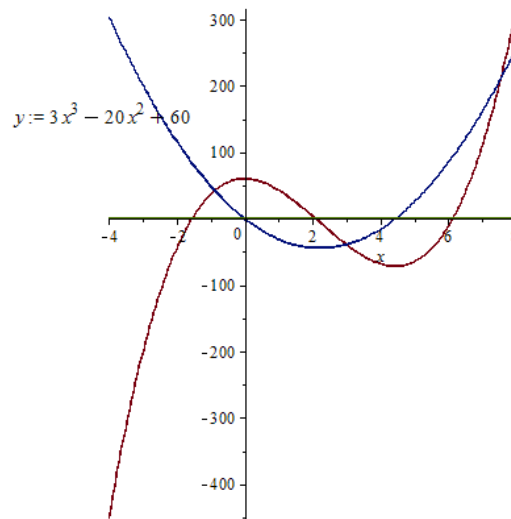


Figura No. 30. Grafica de la función  $f(x) = 3x^3 - 20x^2 + 60$  y su derivada  $f'(x) = 9x^2 - 40x$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 4$

### **Problema No. 3**

*Costos en ingeniería. DeGarmo, Sullivan, Bontadelli y Wicks (1997)*

El costo de operación de un aeroplano comercial (transporte de pasajeros) impulsado a reacción varía a una potencia de tres medios de su velocidad; específicamente,  $C_o = knx^{3/2}$ , donde  $n$  es la longitud del viaje en millas,  $k$  una constante de proporcionalidad, y  $v$  la velocidad en millas por hora. Se sabe que a 400 millas por hora el costo promedio de operación es de \$300 dólares por milla. La compañía que posee el aeroplano quiere minimizar el costo de operación, pero este debe balancearse con respecto al costo del tiempo de los pasajeros ( $C_c$ ), fijado a \$300,000 por hora.

- a) ¿A qué velocidad debe planearse el viaje para minimizar el costo total, el cual es la suma del costo de operación del aeroplano y el costo del tiempo de los pasajeros?
- b) Verifique su respuesta dada en el inciso anterior utilizando los criterios para valores máximos y mínimos.

Solución:

- a) La función de costo total está dada por la ecuación:  $C_T = 0.0375x^{3/2} + \frac{300,000}{x}$ .

Realizando y resolviendo el problema utilizando Maple, tenemos:

$$y := 0.0375x^{3/2} + \frac{300000}{x}$$

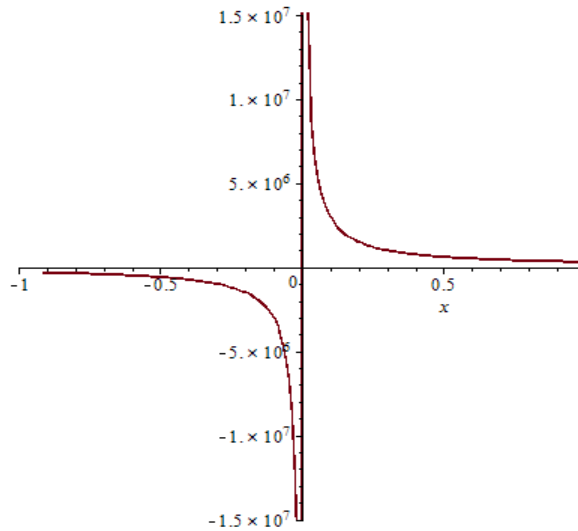


Figura No. 31. Gráfica de la función  $y := 0.0375x^{3/2} + \frac{300000}{x}$  en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ .

$$Diff'(y, x) = diff'(y, x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( 0.0375x^{3/2} + \frac{300000}{x} \right) = 0.05625000000\sqrt{x} - \frac{300000}{x^2}$$

$$diff'(y, x) = 0$$

$$0.05625000000\sqrt{x} - \frac{300000}{x^2} = 0$$

$$solve(diff'(y, x) = 0)$$

$$490.6812819, -396.9694959 + 288.4152211I, -396.9694959 - 288.4152211I$$

Se observa que  $x$  tiene cinco raíces, dos negativas, dos imaginarias y una real. Se toma el valor de la variable  $x$  real positiva, y no las imaginarias debido a que los problemas de optimización se trabaja con funciones reales de variable real. Por lo tanto,  $x = 490.6812819$  millas por hora es la velocidad que minimiza el costo total. El valor de  $-396.9694959$  se omite debido a que no tiene sentido hablar de velocidades negativas en este problema. Verificando la segunda derivada para confirmar una solución de costo mínimo.

$$Diff'(y, x) = diff'(y, x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( 0.0375x^{3/2} + \frac{300000}{x} \right) = 0.05625000000\sqrt{x} - \frac{300000}{x^2}$$

$$Diff'(y, x, x) = diff'(y, x, x)$$



$$\frac{d^2}{dx^2} \left( 0.0375x^{3/2} + \frac{300000}{x} \right) = \frac{0.02812500000}{\sqrt{x}} + \frac{600000}{x^3}, > 0, \text{ cuando } x > 0$$

eval(y, x = 490.6812819)

$$C_T = 0.0375x^{3/2} + \frac{300,000}{x} = \$1,018.991387 \text{ (Costo m\u00ednimo total)}$$

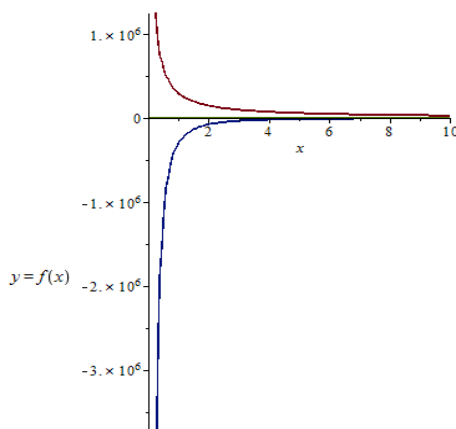


Figura No. 32. Gr\u00e1fica de la funci\u00f3n  $y := 0.0375x^{3/2} + \frac{300000}{x}$  y su derivada

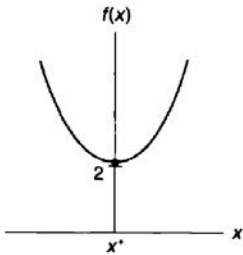
$$\frac{d^2}{dx^2} \left( 0.0375x^{3/2} + \frac{300000}{x} \right) = \frac{0.02812500000}{\sqrt{x}} + \frac{600000}{x^3} \text{ en el intervalo } 0 \leq x \leq 10$$

La tabla No. 3 muestra de forma general y de acuerdo a Miller (2000) la caracterizaci\u00f3n de un m\u00e1ximo o un m\u00ednimo en un punto  $x^*$  para una funci\u00f3n  $f(x)$  de una variable.

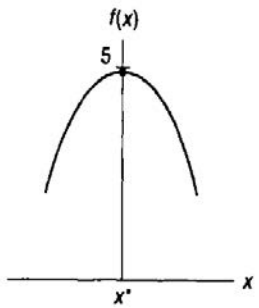
	M\u00e1ximo	M\u00ednimo
Condiciones necesarias de primer orden	$\frac{df(x)}{dx} = 0$	$\frac{df(x)}{dx} = 0$
Condiciones necesarias de segundo orden	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \leq 0$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \geq 0$
Condiciones suficientes	$\frac{df(x)}{dx} = 0$ y $\frac{d^2f(x)}{dx^2} < 0$	$\frac{df(x)}{dx} = 0$ y $\frac{d^2f(x)}{dx^2} > 0$

Tabla No. 3. Caracterizaci\u00f3n de un punto m\u00e1ximo o m\u00ednimo.

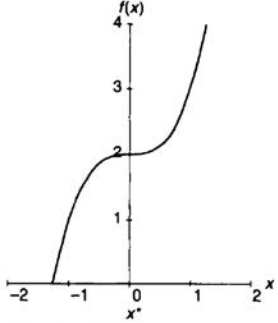
A continuación, en las tablas número 4, 5 y 6 veremos tres ejemplos que muestran de forma gráfica la caracterización de una función con valor máximo y valor mínimo. De igual forma, se muestra una función con un punto de inflexión.

<b>Función</b>	<b>Primera derivada</b>	<b>Segunda derivada</b>	<b>Gráfica (valor mínimo indiscutible en <math>x^* = 0</math>)</b>
$f(x) = x^4 + 2$	$f'(x) = 4x^3$  $f'(x) = 0$ $x^* = 0$	$f''(x) = 12x$  $f''(x) = 0$	 A Cartesian coordinate system with a vertical y-axis labeled f(x) and a horizontal x-axis labeled x. A parabola-like curve opens upwards, with its vertex at the point (0, 2). A small dot marks the vertex, and the number 2 is written on the y-axis at that point. The x-axis is labeled with x* at the origin.

*Tabla No. 4. Mínimo de una función*

<b>Función</b>	<b>Primera derivada</b>	<b>Segunda derivada</b>	<b>Gráfica (valor máximo en <math>x^* = 0</math>)</b>
$f(x) = -3x^4 + 5$	$f'(x) = -12x^3$  $f'(x) = 0$ $x^* = 0$	$f''(x) = -36x^2$  $f''(x) = 0$	 A Cartesian coordinate system with a vertical y-axis labeled f(x) and a horizontal x-axis labeled x. A parabola-like curve opens downwards, with its vertex at the point (0, 5). A small dot marks the vertex, and the number 5 is written on the y-axis at that point. The x-axis is labeled with x* at the origin.

*Tabla No. 5. Máximo de una función*

Función	Primera derivada	Segunda derivada	Gráfica (punto de inflexión en $x^* = 0$ )
$f(x) = x^3 + 2$	$f'(x) = 3x^2$  $f'(x) = 0$ $x^* = 0$	$f''(x) = 6x$  $f''(x^*) = 0$	

*Tabla No. 6. Punto de inflexión*

**16. Problemas propuestos de funciones no lineales con una sola variable.**  
**Dgarmo, Sullivan, Bontadelli y Wicks. (1997)**

- I. Una compañía produce tarjetas de circuitos que se utilizarán para poner al día el equipo de cómputo atrasado. El costo fijo es \$42,000 por mes y el costo variable es \$53 por tarjeta. El precio de venta por unidad es  $p = \$150 - 0.02D$ . La producción máxima de la planta es 4,000 unidades por mes.
- a) Determine la demanda óptima de este producto.
  - b) ¿Cuál es la utilidad máxima mensual?
  - c) ¿En qué volumen debe encontrarse el punto de equilibrio?
  - d) ¿Cuál es el rango de demanda lucrativa de la compañía?
- II. Una compañía estima que la relación entre precio unitario y demanda por mes para un nuevo producto potencial se calcula mediante  $p = \$100 - \$0.10D$ . La compañía puede fabricar el producto incrementando los costos fijos en \$17,500 por mes, y el costo variable estimado en \$40.00 por unidad. ¿Cuál es la demanda óptima,  $D^*$ ? Con base en esta demanda, ¿debe la compañía fabricar este nuevo producto? ¿Por qué?
- III. Una compañía produce y vende un producto de consumo, y hasta ahora ha sido capaz de controlar el volumen del producto variando el precio de venta. La compañía busca maximizar su utilidad neta. Se ha concluido que la relación entre precio y demanda, por mes, es aproximadamente  $D = 500 - 5p$ , donde  $p$  es el precio por unidad en dólares. El costo fijo es \$1,000 a mes, y el costo variable es \$20 por unidad. Responda, matemáticamente y gráficamente, a las siguientes preguntas:
- a) ¿Cuál es la cantidad óptima de unidades que debe producirse y venderse por mes?
  - b) ¿Cuál es la utilidad mensual máxima?

c) ¿Cuáles son las cantidades de ventas en punto de equilibrio (¿intervalo de volumen de demanda lucrativa?)

IV. Se debe buscar un sitio para los desechos sólidos municipales fuera de su ciudad o de cualquier otra. Después de la separación, una parte de los desperdicios se transportará a una planta de energía eléctrica donde se utilizará como combustible.

Lo datos para el acarreo de los desperdicios de cada ciudad a la planta de energía se muestran en la tabla No. 7.

	<b>Cualquier ciudad</b>	<b>Su ciudad</b>
Distancia de acarreo promedio	4 milla	3 millas
Cuota de renta anual de un lugar para desechos sólidos	\$5,000	\$100,000
Costo de acarreo	\$1.50 $yd^3/milla$	\$1.50 $yd^3/milla$

*Tabla No. 7. Datos para el acarreo de desperdicios sólidos municipales*

a) Si la planta de energía pagará \$8.00 por yarda cúbica de desechos clasificados entregada en la planta, ¿dónde debería estar el lugar para los desechos sólidos? Utilice el punto de vista de los ciudadanos y suponga que 200,000 yardas cúbicas de desperdicios se transportarán a la planta tan sólo en un año. Se debe seleccionar un lugar.

b) Respecto a la planta eléctrica anterior, el costo  $y$  en dólares por hora para producir electricidad es  $y = 12 + 0.2x + 0.27x^2$ , donde  $x$  está dado en megawatts. El ingreso en dólares por hora de suministro de electricidad es  $16x - 0.2x^2$ . Encuentre el valor de  $x$  que da la utilidad máxima.

V. Un granjero estima que, si cosecha su cultivo de soya ahora, obtendrá 1,000 bushels (27.22 toneladas métricas), que puede vender a \$3.00 por bushel. Sin embargo, estima que este cultivo aumentará en 1,200 bushels adicionales de soya por cada semana que atrase la cosecha, pero el precio caerá a una tasa de 50

centavos por bushel a la semana; además, es probable que sufra la descomposición de aproximadamente 200 bushels por cada semana que retrase la cosecha. ¿Cuándo debe cosechar su cultivo para obtener el rendimiento neto más grande de efectivo, y cuánto recibirá por este cultivo en este tiempo?

- VI. El costo de operación de un buque ( $C_O$ ) varía al multiplicar a cuadrado de su velocidad ( $v$ ) específicamente,  $C_O = knv^2$ , donde  $n$  es la longitud del viaje en millas y  $k$  es una constante de proporcionalidad. Se sabe que a 12 millas/hora el costo promedio de operación es \$100 por milla. El propietario del barco quiere minimizar el costo de operación, pero debe balancearlo contra el costo de la carga de productos perecederos ( $C_C$ ), que el cliente fija a \$1,500 por hora. ¿A qué velocidad debe planearse el viaje para minimizar el costo total ( $C_T$ ), que es la suma de operar el barco y el costo de la carga perecedera?

- VII. Griva, Nash y Sofer. (2009). Considere la siguiente función:

$$f(x) = 15 - 12x - 25x^2 + 2x^3$$

Use la primera y segunda derivada para encontrar el máximo y el mínimo local y demuestre que  $f$  no tiene ni máximo ni mínimo global.

- VIII. Griva, Nash y Sofer. (2009). Considere la siguiente función:

$$f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 15x - 3$$

Encuentre todos los puntos estacionarios de esta función y determine si son mínimos y máximos locales. ¿Esta función tiene un mínimo global o un máximo global?

- IX. Miller (2000). Examine las siguientes funciones para máximos, mínimos y puntos de inflexión, Sin utilizar la segunda derivada.

a)  $f(x) = 3x^2 + 12x + 10$

b)  $f(x) = 3x^2 - 12x + 10$

c)  $f(x) = -3x^2 + 12x + 10$

X. Miller (2000). Encuentre los máximo y mínimos para cada una de las siguientes funciones, utilizando la primera y segunda derivada. Indique en cada caso si los puntos son máximos o mínimos relativos o absolutos.

a)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 15$

b)  $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2$

c)  $f(x) = x^3$

d)  $f(x) = 3x^2 + 12x + 10$

e)  $f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$

f)  $f(x) = x^4 - 18x^2 + 15$

XI. Miller (2000) e Hidalgo (2017). Utilice Maple para explorar y analizar las siguientes funciones para máximos, mínimos y puntos de inflexión. Encuentre todas las raíces de la primera derivada de la función, también con Maple. Use esos valores para analizar el problema.

a)  $f(x) = 0.1(x + 1)^3(x - 2)^3 + 1$  (aquí la primera derivada es de orden 5 con tres raíces reales. Verifique esto usando Maple)

b)  $f(x) = (x + 3)^3(x - 2)^2 + 1$  (de igual forma, hay tres raíces reales para la primera derivada. Use Maple para resolver el problema)

## 17. Problemas de máximos y mínimos y puntos de inflexión para dos variables.

Miller (2000)

Consideremos ahora el caso en el que  $y$  depende de dos variables,  $x_1$  y  $x_2$ ;  $y = f(x_1, x_2)$ . Dado que solo son necesarias tres dimensiones, las condiciones para los puntos máximos y mínimos se visualizan fácilmente. Generalizar a funciones de cualquier número de variable es un tema que sale de los objetivos de ese libro, debido a que forma parte de estudios más avanzados en la materia.

Nuestra preocupación en todo estará en analizar funciones que son suaves y continuas, de modo que la diferenciación es posible en todas partes.

En todo caso, requerimos de derivadas por lo menos de segundo orden. Esto es lógico, ya que de lo contrario las "curvas" no tendrían curvatura; serían planos o líneas y la búsqueda de máximos y mínimos por medio de condiciones de primer orden (donde la tangente tiene una pendiente de cero) generalmente carecerían de sentido.

### 17.1. Derivadas parciales, vector gradiente y matriz Hessiana

Derivadas parciales con funciones de dos (o más) variables, el concepto de derivada parcial es necesario. Si  $y = f(x)$ , entonces  $dy/dx$  denota inequívocamente la derivada de  $f(x)$  con respecto a la única variable independiente,  $x$ . Cuando  $y = f(x_1, x_2)$ , un cambio en  $y$  cuando ambas variables cambian o cuando cualquiera de ellas cambia mientras que la otra permanece constante. Por lo tanto, es necesario especificar que variable está cambiando y cuál no; la notación que se suele usar es  $\frac{\partial y}{\partial x_1}$

y  $\frac{\partial y}{\partial x_2}$  (o  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ), leída como la derivada parcial de la función con respecto a  $x_1$  o  $x_2$ .

El uso de  $\frac{\partial y}{\partial x}$  en lugar de  $dy/dx$  indica la similitud del concepto.

Las derivadas parciales están diseñadas para medir un cambio en  $f(x_1, x_2)$  cuando todas las variables, excepto una permanece constante, la técnica de la diferenciación parcial es una extensión simple de la diferenciación ordinaria. Requiere que solamente la otra  $x$  (o  $x$ 's, si hay más de tres variables) se considere como constante.

Por ejemplo, si  $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^3$ , las dos posibles derivadas parciales son:



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 4x_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1 + 3x_2$$

Obsérvese que en general ambas variables aparecen en ambas derivadas parciales. En  $\frac{\partial y}{\partial x_1}$  particular para un valor para  $x_2$ , por ejemplo  $x_2^0$ , se asume, entonces que  $\frac{\partial y}{\partial x_1}$  (evaluada en  $x_2^0$ ) es solo una función de  $x_1$ . Similarmente,  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  es una función de  $x_2$  relativa a algún valor específico  $x_1^0$ . Como este el caso, es fácil visualizar las derivadas parciales como curvas en planos particulares en el espacio tridimensional  $x_1, x_2, y$  espacio.

Por ejemplo, sea la función:  $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 7$

Las derivadas parciales de  $\frac{\partial y}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ , calculadas con Maple, se muestran a continuación:

$$y := -(x1 - 1) \cdot 2 - (x2 - 2) \cdot 2 + 7$$

$$y := -(x1 - 1)^2 - (x2 - 2)^2 + 7$$

$$\text{Diff}(y, x1) = \text{diff}(y, x1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x1} (-(x1 - 1)^2 - (x2 - 2)^2 + 7) = -2x1 + 2$$

$$\text{Diff}(y, x2) = \text{diff}(y, x2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x2} (-(x1 - 1)^2 - (x2 - 2)^2 + 7) = -2x2 + 4$$

La gráfica de la función  $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 7$ , se muestra en la figura No. 33.

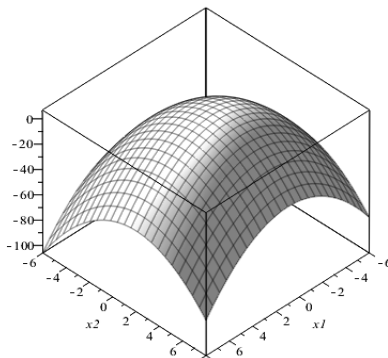


Figura No. 33. Gráfica de la función  $(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 7$  en el intervalo  $-6 \leq x_1 \leq 8$  y  $-6 \leq x_2 \leq 8$

Para obtener puntos máximos o mínimos en una función de dos o más variables, necesitamos obtener derivadas parciales de mayor orden. Son similares a las derivadas de orden superior de la misma forma que  $\frac{\partial y}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ . Entonces  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{\partial(\frac{\partial y}{\partial x_1})}{\partial x_1}$  es la segunda derivada parcial de  $f(x_1, x_2)$  con respecto de  $x_1$ .

Con funciones de dos o más variables, también es posible medir, por ejemplo, como la primera derivada parcial con respecto a  $x_1$  se ve afectada por un cambio en  $x_2$ . Por ejemplo, para la función  $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^3$ , las dos posibles derivadas parciales son:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_2^3 + 3x_1^2 + 4x_1x_2) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (x_2^3 + 3x_1^2 + 4x_1x_2) = 3x_2^2 + 4x_1$$

Entonces, las segundas derivadas parciales de  $f(x_1, x_2)$  con respecto a  $x_1$  y  $x_2$ , son, respectivamente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (x_2^3 + 3x_1^2 + 4x_1x_2) = 6$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (x_2^3 + 3x_1^2 + 4x_1x_2) = 6x_2$$

La notación para las derivadas parciales cruzadas es  $\frac{\partial(\frac{\partial y}{\partial x_1})}{\partial x_2}$  o  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$ . Las derivadas cruzadas son:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} (x_2^3 + 3x_1^2 + 4x_1x_2) = 4$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (x_2^3 + 3x_1^2 + 4x_1x_2) = 4$$

## 17.2. Vectores gradiente

El gradiente de una función es un vector que contiene las primeras derivadas parciales de una función. Se puede elegir un vector columna o un vector fila. Depende de las preferencias de cada autor. Para nuestro caso elegiremos un vector columna como vector gradiente.

La notación usual es  $\nabla f(x_1, x_2)$  o simplemente  $\nabla f$ .

$$\nabla f(x_1, x_2) \equiv \nabla f$$

Específicamente para:  $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^3$ ,  $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 3x_2^2 \end{bmatrix}$

Si las primeras derivadas parciales son evaluadas en un punto en particular, por ejemplo, en  $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  el gradiente en ese punto se denota por  $\nabla f(2,5) = \begin{bmatrix} 32 \\ 83 \end{bmatrix}$ .

### 17.3. Matrices Hessiana

Una función de dos variables independientes tendrá dos segundas derivadas parciales, denotadas por  $(f_{11}$  y  $f_{22})$  y dos (iguales) derivadas parciales cruzadas, denotadas por  $(f_{12}$  y  $f_{21})$ . Estos son los elementos de un vector gradiente para construir la matriz Hessiana. Entonces, para  $f(x_1, x_2)$ ,

$$\nabla^2 = H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

Las representaciones de gradiente y matriz Hessiana proporcionan una notación compacta para examinar las condiciones de máximo y mínimo para una función  $f(x_1, x_2)$ , y, en última instancia para instancias apropiadas, de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $n > 2$ .

### 17.4. Máximos y mínimos para funciones $f(x_1, x_2)$

La tabla No. 8, muestra los resultados para determinar los valores máximos y mínimos de una función de dos variables en un punto.

Función( $x_1, x_2$ )	Máximo	Mínimo
Condiciones necesarias de primer orden	$df(x^*) = 0$ 0, usando gradiente: $\nabla f(x^*) = 0$	
Condiciones necesarias de segundo orden	$d^2(x^*) \leq 0$ 0, usando los primeros menores del Hessiano $ H_1^*(1)  = f_{11}^* \leq 0$ $ H_1^*(2)  = f_{22}^* \leq 0$	$d^2(x^*) \geq 0$ 0, usando los primeros menores del Hessiano $ H_1^*(1)  = f_{11}^* \geq 0$ $ H_1^*(2)  = f_{22}^* \geq 0$
	Y, $ H_2^*  =  H^*  \geq 0$	
Condiciones suficientes	$df(x^*) = 0$ 0, usando gradientes $\nabla f(x^*) = 0$ Y,	
	$d^2(x^*) < 0$ 0, usando los principales menores del Hessiano $ H_1^*  < 0$	$d^2(x^*) > 0$ 0, Usando los principales menores del Hessiano $ H_1^*  > 0$
	Y, $ H_2^*  =  H^*  > 0$	

Tabla No. 8. Condiciones para un valor máximo o mínimo de una función  $f(x_1, x_2)$ .

**17.5. Problemas de programación lineal no restringidos para funciones  $f(x_1, x_2)$ . Miller (2000)**

**Problema numérico No. 1.**

Sea la función  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 7$

La gráfica de la función se muestra a continuación:

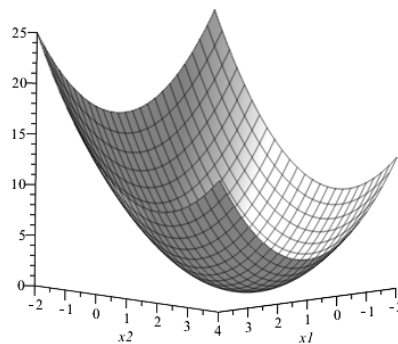


Figura No. 34. Gráfica de la función  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 7$  en el intervalo  $-2 \leq x_1 \leq 4$  y  $-2 \leq x_2 \leq 4$

Esta es una función convexa con una valor mínimo indiscutible en  $x_1^* = 1$  y  $x_2^* = 2$ . Las condiciones de primer orden se muestran en los resultados obtenidos con Maple.

a) Condiciones necesarias de primer orden:

$$y := (x1 - 1)^2 + (x2 - 2)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x1} ((x1 - 1)^2 + (x2 - 2)^2) = 2x1 - 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x2} ((x1 - 1)^2 + (x2 - 2)^2) = 2x2 - 4$$

$$\{x1 = 1, x2 = 2\}$$

El punto estacionario se identifica de la forma:  $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 - 2) \end{bmatrix} = 0$ . El hecho de que sea un mínimo se desprende del análisis de los principales menores del Hessiano. O del criterio del valor de la derivada parcial:  $d^2(x^*) \geq 0$ .

Los cálculos correspondientes realizados con Maple, se muestran a continuación:

$$y := (x_1 - 1) \cdot 2 + (x_2 - 2) \cdot 2$$

$$y := (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{Diff}(y, x_1) = \text{diff}(y, x_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2) = 2x_1 - 2$$

b) Condiciones necesarias de segundo orden:

$$\text{Diff}(y, x_2) = \text{diff}(y, x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2) = 2x_2 - 4$$

$$\text{Diff}(y, x_1, x_1) = \text{diff}(y, x_1, x_1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2) = 2$$

$$\text{Diff}(y, x_2, x_2) = \text{diff}(y, x_2, x_2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2) = 2$$

$$\text{solve}(\{2x_1 - 2 = 0, 2x_2 - 4 = 0\}, \{x_1, x_2\})$$

$$\{x_1 = 1, x_2 = 2\}$$

c) Condiciones suficientes:

$$\text{eval}(2x_1 - 2, x_1 = 1)$$

$$0$$

$$\text{eval}(2x_2 - 4, x_2 = 2)$$

$$0$$

$$\text{eval}(y, [x_1 = 1, x_2 = 2])$$

$$0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2) = 2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} ((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2) = 2$$

Por lo tanto, el punto  $(x_1, x_2) = (1, 2)$  es un valor mínimo global de la función  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 7$ .

**Problema numérico No. 2.**

Sea la función  $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 7$ . Entonces, esta es la negativa de la función del problema anterior. No es sorprendente que se trata de una función cóncava.

$f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$	<b>Máximo</b>
Condiciones necesarias de primer orden	$df(x^*) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x_1} (-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) = -2x_1 + 2$ $\frac{\partial}{\partial x_2} (-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) = -2x_2 + 4$ $eval(-2x_1 + 2, x_1 = 1) = 0$ $eval(-2x_2 + 4, x_2 = 2) = 0$  <b>0, usando gradiente: <math>\nabla f(x^*) = 0</math></b>
Condiciones necesarias de segundo orden	$d^2(x^*) \leq 0$ $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) = -2$ $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) = -2$  <b>0, usando los primeros menores del Hessiano</b> $ H_1^*(1)  = f_{11}^* \leq 0$  $ H_1^*(2)  = f_{22}^* \leq 0$
	<b>Y, <math> H_2^*  =  H^*  \geq 0</math></b> $H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 \geq 0$
	$df(x^*) = 0$

Condiciones suficientes	$y := -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2$ $(1, 2) = (x_1, x_2) = x^*$ O, usando gradientes $\nabla f(x^*) = 0$ Y,
	$d^2(x^*) < 0$ $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) = -2$ $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) = -2$ O, usando los principales menores del Hessiano $ H_1^*  < 0$
	Y, $ H_2^*  =  H^*  > 0, 4 > 0$

La gráfica de la función  $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 7$  se muestra a continuación:

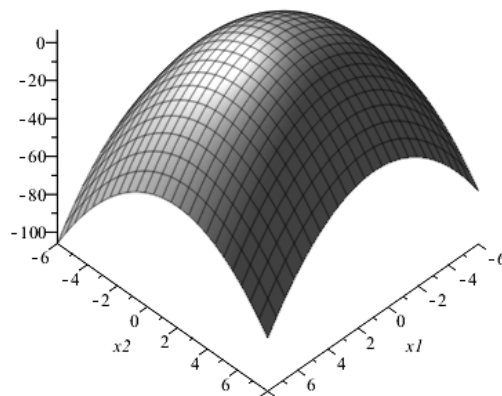


Figura No. 35. Gráfica de la función  $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 7$  en el intervalo  $-6 \leq x_1 \leq 8$  y  $-6 \leq x_2 \leq 8$

Por lo tanto, el punto  $(x_1, x_2) = (1, 2)$  es un valor máximo global de la función  $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2 + 7$ .



**17.6. Problemas propuestos de problemas no restringidos de funciones no lineales de dos variables. Miller (2000). Hidalgo (2017)**

1) Encuentre los máximos o mínimos para cada una de las siguientes funciones (Use el programa Maple para resolver los problemas):

a)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_2$

b)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + (3x_1 + 4x_2 - 26)^2$

c)  $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 18x_1 - 16x_2^2 - 64x_2 - 55$

d)  $f(x_1, x_2) = 16 - 2(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 7)^2$

e)  $f(x_1, x_2) = -2x_1^3 + 6x_1x_2 - x_2^2 - 4x_2 + 100$

2) Un barco de excursión se puede alquilar para 100 personas a \$ 10 dólares por persona. Para cada pasajero de más de 100, los propietarios de embarcaciones acuerdan reducir la tarifa (para todos los pasajeros) en 5 centavos. ¿Cuántos pasajeros maximizaría los ingresos totales de alquiler de los propietarios? ¿Cuánto es ese alquiler máximo?

3) Se ha demostrado que los costos,  $y$ , dependen de  $x_1$  y  $x_2$  (salidas totales de los productos 1 y 2, respectivamente):

$$y = x_1^2 + 4x_2^2 - 40x_1 + 500$$

a) ¿Qué cantidad de bienes 1 y 2 deben ser elaborados con el fin de minimizar los costos?

b) ¿Qué cantidad de bienes 1 y 2 debe ser producido con el fin de minimizar los costos,  
Si hay un límite superior de 12 en  $x_1$

4) Suponga que la función de costos en el problema 3) ha sido estimada incorrectamente; en realidad debería ser:

$$y = x_1^2 + 4x_2^2 - 40x_1 + 500 - 2x_1x_2$$

¿Cómo respondería ahora a la pregunta del problema 3)?

- 5) Suponga que la función del problema 4), y representa utilidad, no costos, como una función de  $x_1$  y  $x_2$ .
- ¿Qué cantidad de bienes 1 y 2 deben ser elaborados con el fin de maximizar la utilidad?
  - ¿Qué cantidad del bien 2 se debe producir si se decide que  $x_1$ , debe ser exactamente 12?
  - ¿Cómo respondería el inciso b) si  $x_2$  no puede exceder de 5?
- 6) Anderson y Sweeney (1993). El costo por lote de un cierto proceso de producción está relacionado con el ajuste de dos instrumentos de control. Supóngase que el costo total por lote está dado por:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 8x_1 - 6x_2 + 35$$

Determine los ajustes de los dos instrumentos que minimizan este costo.

- 7) Anderson y Sweeney (1993). Los precios de dos productos, denotados por  $p_1$  y  $p_2$ , están relacionados con las cantidades que se venden de los productos  $x_1$  y  $x_2$ , mediante la siguientes expresiones:

$$x_1 = 32 - 2p_1, x_2 = 22 - p_2$$

Además, el costo total (CT) de fabricar y vender el producto está relacionado con las cantidades que se venden, de acuerdo con la función:

$$CT(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 73$$

- Desarrolle un modelo matemático que muestre la utilidad como función de las cantidades que se fabrican.
  - Determine los precios y cantidades que maximizan las utilidades.
- 8) Anderson y Sweeney (1993). Una tienda de zapatos ha determinado que es posible aproximar sus ganancias  $G(x_1, x_2)$ , en millares de dólares, mediante una función de  $x_1$ , su inversión en inventario en millares de dólares, y  $x_2$ , sus gastos de publicidad, en millares de dólares:

$$G(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_2^2 + 30x_1 + 24x_2 - 86$$

Calcule las ganancias máximas, junto con el monto de gastos de publicidad e inversión e inventario que arrojan este máximo.

- 9) Considere la función  $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 - 12x_1^2 + 2x_1^2x_2 + x_2^2 - 4x_2 + 20$ . Determine si los puntos que se muestran enseguida son mínimos locales, máximos locales, puntos silla de montar, o ninguno de los anteriores.

$$\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{pmatrix}$$

- 10) Supóngase que se desea encontrar todos los puntos máximos y mínimos de la función que se muestra enseguida:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 10x_2^2 + 10x_1x_2 - 22x_1 - 26x_2 + 25$$

Utilice las condiciones necesarias de primer orden, las condiciones necesarias de segundo orden y las condiciones suficientes para encontrar un valor máximo o mínimo.

## 18. Modelos de programación no lineal restringidos.

Método de multiplicadores de Lagrange para modelo de programación lineal con restricciones de igualdad.

Considere el siguiente el siguiente modelo de programación no lineal multivariable con restricciones de igualdad

$$\text{Min } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sujeto a:

$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

La función objetivo consiste en  $n$  número de variables y  $m$  número de restricciones que le son impuestas. El conjunto de restricciones es de la forma «= 0». El método de multiplicadores de Lagrange es útil para optimizar este tipo de problemas. Se forma una nueva función, es decir, una función Lagrange,  $L$  con la siguiente estructura:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$  son llamados multiplicadores de Lagrange. En caso de tratarse de un problema de maximización, el signo de la ecuación anterior se cambia a negativo. La ecuación anterior es una función d  $(n + m)$  variables incluyendo el multiplicador de Lagrange.

Diferenciado parcialmente con respecto a cada variable e igualando a cero, produce los valores óptimos después de resolver. Resolvamos el siguiente conjunto de problemas:

**Problema numérico No. 1**, sea la función:  $\text{Min } f(x_1, x_2, x_3) = \frac{250}{x_1} + 1090x_1 - 7x_2 - 5x_3 + \frac{7x_2^2}{40x_1} + \frac{5x_3^2}{16x_1}$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 4 \\x_2 + x_3 &= 12\end{aligned}$$

Solución (resuelto con Maple):

Ambas restricciones se expresan de la forma:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 - 4 &= 0 \\x_2 + x_3 - 12 &= 0\end{aligned}$$

La función de Lagrange es:

$$\begin{aligned}L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{250}{x_1} + 1090x_1 - 7x_2 - 5x_3 + \frac{7x_2^2}{40x_1} + \frac{5x_3^2}{16x_1} + \lambda_1(x_1 + x_3 - 4) \\ &+ \lambda_2(x_2 + x_3 - 12)\end{aligned}$$

Ahora, Usando Maple (se utilizará a  $k_1$  y  $k_2$  como multiplicadores de Lagrange), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{250}{x_1} + 1090x_1 - 7x_2 - 5x_3 + \frac{7}{40} \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{5}{16} \frac{x_3^2}{x_1} + k_1(x_1 + x_3 - 4) + k_2(x_2 \right. \\ \left. + x_3 - 12) \right) &= -\frac{250}{x_1^2} + 1090 - \frac{7}{40} \frac{x_2^2}{x_1^2} - \frac{5}{16} \frac{x_3^2}{x_1^2} + k_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{250}{x_1} + 1090x_1 - 7x_2 - 5x_3 + \frac{7}{40} \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{5}{16} \frac{x_3^2}{x_1} + k_1(x_1 + x_3 - 4) + k_2(x_2 \right. \\ \left. + x_3 - 12) \right) &= -7 + \frac{7}{20} \frac{x_2}{x_1} + k_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{250}{x_1} + 1090x_1 - 7x_2 - 5x_3 + \frac{7}{40} \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{5}{16} \frac{x_3^2}{x_1} + k_1(x_1 + x_3 - 4) + k_2(x_2 \right. \\ \left. + x_3 - 12) \right) &= -5 + \frac{5}{8} \frac{x_3}{x_1} + k_1 + k_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k_1} \left( \frac{250}{x_1} + 1090x_1 - 7x_2 - 5x_3 + \frac{7}{40} \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{5}{16} \frac{x_3^2}{x_1} + k_1(x_1 + x_3 - 4) + k_2(x_2 \right. \\ \left. + x_3 - 12) \right) &= x_1 + x_3 - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k_2} \left( \frac{250}{x_1} + 1090x_1 - 7x_2 - 5x_3 + \frac{7}{40} \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{5}{16} \frac{x_3^2}{x_1} + k_1(x_1 + x_3 - 4) + k_2(x_2 \right. \\ \left. + x_3 - 12) \right) &= x_2 + x_3 - 12\end{aligned}$$

Igualando las derivadas parciales a cero, tenemos:

$$Eq1 := -\frac{250}{x1^2} + 1090 - \frac{7}{40} \frac{x2^2}{x1^2} - \frac{5}{16} \frac{x3^2}{x1^2} + k1 = 0$$

$$Eq2 := -7 + \frac{7}{20} \frac{x2}{x1} + k2 = 0$$

$$Eq3 := -5 + \frac{5}{8} \frac{x3}{x1} + k1 + k2 = 0$$

$$Eq4 := x1 + x3 - 4 = 0$$

$$Eq5 := x2 + x3 - 12 = 0$$

Resolviendo del sistema de ecuaciones mediante procedimientos algebraicos, la solución del problema es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 \\ 8.49 \\ 3.51 \\ -0.41 \\ 0.94 \end{pmatrix}, f(x_1, x_2, x_3) = 1000.92$$

**Problema numérico No. 2.** Minimice la siguiente función utilizando el método de Lagrange. (Usando Maple)

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 + \frac{96}{x_1} + 4\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 = 6$$

Modelo de programación no lineal restringido      Modelo con multiplicadores de Lagrange ( $k$  es el multiplicador de Lagrange)

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 + \frac{96}{x_1} + 4\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$$

$$L1 := 6 \cdot x1 + \frac{96}{x1} + \frac{4 \cdot x2}{x1} + \frac{x1}{x2} + k \cdot (x1 + x2 - 6)$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 = 6$$

Gráfica de la función objetivo

`plot3d(L, x1 = 1.9..9, x2 = 1.9..9)`

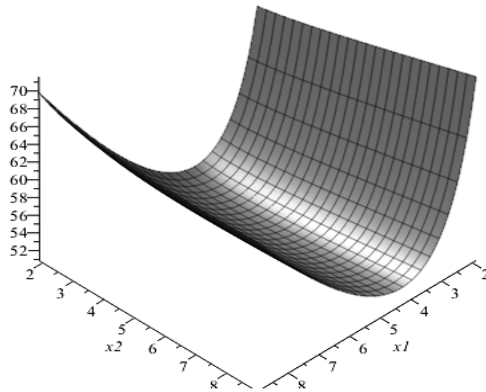


Figura No. 36. Gráfica de la función  $(x_1, x_2) = 6x_1 + \frac{96}{x_1} + 4\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$  en el intervalo  $1.9 \leq x_1 \leq 9$  y  $1.9 \leq x_2 \leq 9$

Ahora:

Instrucción y resultado con el programa Maple para obtener el sistema de ecuaciones al derivar la función de Lagrange

#  $k$  es el multiplicador de Lagrange

$$L1 := 6 \cdot x1 + \frac{96}{x1} + \frac{4 \cdot x2}{x1} + \frac{x1}{x2} + k \cdot (x1 + x2 - 6)$$

$$\text{diff}(L1, x1) = 0$$

$$6 - \frac{96}{x1^2} - \frac{4x2}{x1^2} + \frac{1}{x2} + k = 0$$

$$\text{diff}(L1, x2) = 0$$

$$\frac{4}{x1} - \frac{x1}{x2^2} + k = 0$$

$$\text{diff}(L1, k) = 0$$

$$x1 + x2 - 6 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones, utilizando el programa Maple.

#De ecuacion E3

`solve(E3, x2)`

`6 - x1`

`E4 := solve(E3, x2)`

`E4 := 6 - x1`

`E5 := \frac{4}{x1} - \frac{x1}{E4 \cdot 2} + k`

`E5 := \frac{4}{x1} - \frac{x1}{(6 - x1)^2} + k`

`k := -\frac{4}{x1} + \frac{x1}{(6 - x1)^2}`

`k := -\frac{4}{x1} + \frac{x1}{(6 - x1)^2}`



$$E6 := \text{simplify}\left(6 - \frac{96}{x1^2} - \frac{4E4}{x1^2} + \frac{1}{E4} + \left(-\frac{4}{x1} + \frac{x1}{(6-x1)^2}\right)\right) = 0$$

$$E6 := \frac{6(x1^4 - 12x1^3 + 17x1^2 + 240x1 - 720)}{x1^2(-6+x1)^2} = 0$$

*factor(E6)*

$$\frac{6(x1-4)(x1^3 - 8x1^2 - 15x1 + 180)}{x1^2(-6+x1)^2} = 0$$

$$\text{simplify}\left(\frac{6(x1-4)(x1^3 - 8x1^2 - 15x1 + 180)}{x1^2(-6+x1)^2}\right)$$

$$\frac{6(x1-4)(x1^3 - 8x1^2 - 15x1 + 180)}{x1^2(-6+x1)^2}$$

*solve(E6, x1)*

$$4, -\frac{1}{3}(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3} - \frac{109}{3(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3}} + \frac{8}{3}, \frac{1}{6}(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3} + \frac{109}{6(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3}} + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3} + \frac{109}{3(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3}}\right), \frac{1}{6}(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3} + \frac{109}{6(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3}} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3} + \frac{109}{3(1378 + 9\sqrt{7455})^{1/3}}\right)$$

*evalf(solve(E6, x1))*

4., -4.451806156, 6.225903079 - 1.292732832I, 6.225903079 + 1.292732832I . El único valor real de la ecuación E6 es 4. Por lo que el valor de  $x_1 = 4$ .

*eval(k, x1 = 4)* , 0

La solución del modelo de programación no lineal restringido, es:

$$x_1 = 4, x_2 = 2, y \lambda = 0, f(x_1, x_2)^* = 52$$

La figura No. 37 muestra la gráfica del modelo de programación no lineal restringido.

$$\text{plot3d}\left(\left\{6x1 + \frac{96}{x1} + \frac{4x2}{x1+x1} + \frac{x1}{x2}, x1 + x2 - 6\right\}, x1 = 1.8..9, x2 = 1.8..9\right)$$

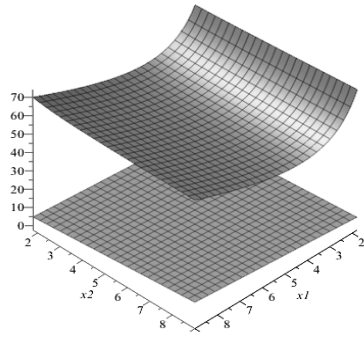


Figura No. 36. Gráfica de la función  $(x_1, x_2) = 6x_1 + \frac{96}{x_1} + 4\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$  Sujeto a  $x_1 + x_2 = 6$  en el intervalo  $1.8 \leq x_1 \leq 9$  y  $1.8 \leq x_2 \leq 9$ .

### 19. Problemas propuestos de programación no lineal restringidos a igualdad.

1) (De Anderson y Sweeney (1993).) Considere el problema:

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = x_1^2 - 14x_1 + x_2^2 - 16x_2 + 113$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

- a) Obtenga la solución óptima para este problema
  - b) ¿Cuánto esperaría que cambiara el valor de la solución si se aumenta el lado derecho de la restricción de 12 a 13?
- 2) (De Anderson y Sweeney (1993).) Considere el problema:

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 4x_2x_2 + 20x_1 - 5x_2^2 + 82x_2 - 397$$

Sujeto a:

$$2x_1^2 - 16x_1 + 9x_2^2 - 18x_2 + 5 = 0$$

Determine si el punto  $x_1 = 4, x_2 = 3$  produce o no una solución óptima.

- 3) Una compañía tiene dos instalaciones de producción que fabrican guantes de béisbol. Los costos de producción varían en las dos instalaciones debido a diferencias en los salarios, los impuestos locales a la propiedad, el tipo de equipo, la capacidad, etc. La planta 1 tiene costos de producción semanales que pueden expresar como función del número de guantes que se fabrican;

$$CT_1(x_1) = x_1^2 - x_1 + 5$$

En donde  $x_1$  es el volumen semanal de producción en millares de unidades y  $CT_1(x_1)$  es el costo en millares de unidades. Los costos semanales de producción de la planta 2 está dado por:

$$CT_2(x_2) = x_2^2 + 2x_2 + 3$$

En donde  $x_2$  es el volumen semanal de producción en millares de unidades y  $CT_2(x_2)$  es el costo, en millares de dólares. A la compañía le gustaría fabricar 8,000 guantes por semana al menor costo posible.

- a) Formule un modelo matemático que se pueda utilizar para determinar el número de guantes que se deben fabricar cada semana en cada instalación.
- b) Obtenga la solución matemática del modelo para determinar el número óptimo de guantes que se deben fabricar en cada instalación.

4) Resuelva el problema:

$$\text{Min } f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1 - 12x_2 + 34$$

Sujeto a:

$$x_1^2 + 2x_2^2 = 5$$

5) (De Griva, Nash y Sofer (2009).) Determine el mínimo/máximo de las siguientes funciones sujeto a la restricción proporcionada.

- i)  $f(x_1, x_2) = x_1x_2^3$ , sujeto a  $2x_1 + 3x_2 = 4$ .
- ii)  $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$ , sujeto a  $x_1^2 + x_2^2 = 25$ .
- iii)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ , sujeto a  $3x_1^2 + x_2^2 = 9$ .
- iv)  $f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + 2x_2^3$ , sujeto a  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ .
- v)  $f(x_1, x_2) = x_2$ , sujeto a  $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0$ .
- vi)  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ , sujeto a  $2x_1 + x_2 = 1$ .
- vii)  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2$ , sujeto a  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

6) (De Miller. (2000)).  $\text{Max } f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 5x_2^2$ , sujeto a  $x_1 + 5x_2 = 3$ .

7) (De Miller. (2000)). Minimice la función del problema 6 sujeto a la misma restricción

8) Encuentre el máximo o el mínimo de:

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1 + 6x_2 + 2x_3, \text{ Sujeto a: } 2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

9) Maximice o minimice la función:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - 3x_1x_2, \text{ sujeto a } 2x_1 + 3x_2 = 58.$$

10) Maximice o minimice la función:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 15 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 20\end{aligned}$$

## 20. Aplicaciones industriales utilizando modelos de programación no lineal

En el contexto del análisis no lineal, las funciones siguientes (y sus tipos) interactúan entre sí:

- i) Función de coste total no lineal y función de ingresos totales lineales (Fig. 37).
- ii) Función de coste total lineal y función de ingresos totales no lineales (Fig. 38).
- iii) Función de coste total no lineal y función de ingresos totales no lineales (Fig. 39)

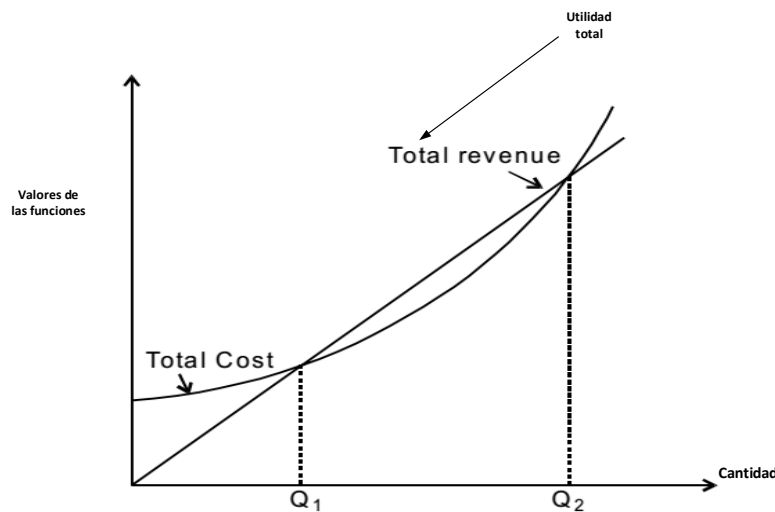


Figura No. 37. Costo total no lineal y función de ingresos lineales.

Como el beneficio es la diferencia entre ingresos y costos, es cero en la intersección de estas funciones. Como se muestra en la figura 37,  $Q_1$  y  $Q_2$  son la cantidad correspondiente a la cual el beneficio es cero. El beneficio máximo se obtiene en algún punto del rango  $[Q_1, Q_2]$ .

Del mismo modo, la función de ingresos lineales y los ingresos no lineales se muestran en la figura 38. En algunos de los casos, ambas funciones pueden ser no lineales. Esta situación está representada por la figura 39. La función de beneficio se determina y luego por igualar a cero, se obtienen dos puntos de equilibrio. El beneficio también puede maximizarse en el rango calculado de la cantidad.

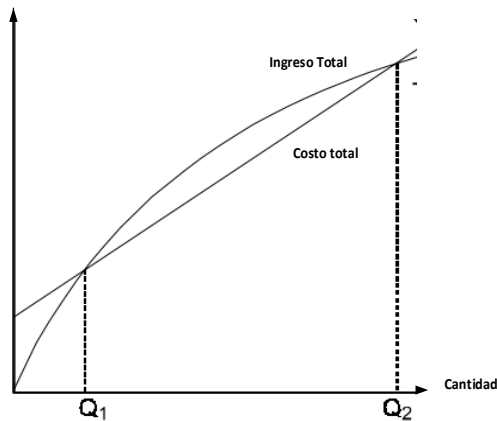


Figura No. 38. Costo total lineal y función de ingresos no lineales.

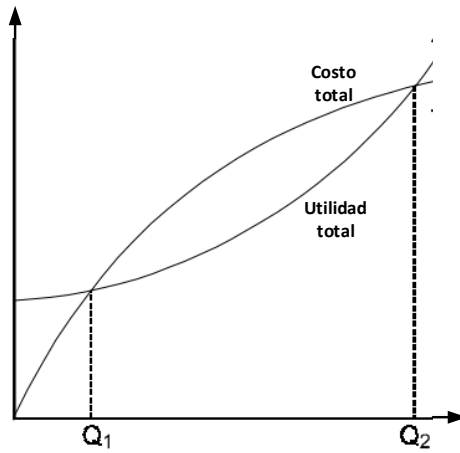


Figura No. 39. Costo no lineal y función de ingresos no lineales.

**Ejemplo numérico No. 1:** Considere las siguientes funciones usando la cantidad  $Q$ ,

la función de ingresos,  $U = 25Q$  y la función de coste total,  $C = 45 + Q + 2Q^2$ ,

obtenga los dos valores de punto de equilibrio y maximice el beneficio en ese rango. Solución. Este caso se refiere a la función de ingresos lineales y la función de coste total no lineal.

Solución (Usando Maple): Este caso se refiere a la función de ingresos lineales y la función de coste total no lineal.

En los puntos de equilibrio,  $U = 0$ , y por lo tanto

*#Problema industrial 1# #programación no lineal #Ejemplo adicional*

#Datos del problema #Utilidad

$$U := R - C, R := 25 \cdot Q, C := 45 + Q + 2 \cdot Q^2 \quad U = -2Q^2 + 24Q - 45$$

$$\{solve(-2Q^2 + 24Q - 45 = 0, Q)\}, \left\{6 - \frac{3}{2}\sqrt{6}, 6 + \frac{3}{2}\sqrt{6}\right\}, \{2.325765386, 9.674234614\}$$

Dos valores de puntos de equilibrio son 2.33 y 9.67 unidades. Con el fin de maximizar los beneficios,

$$Diff(U, Q) = diff(U, Q), \frac{d}{dQ} (-2Q^2 + 24Q - 45) = -4Q + 24$$

$$diff(U, Q) = 0, -4Q + 24 = 0, solve(\%) = 6$$

Q=6 unidades es el valor óptimo de la función. Verificando que es un máximo global utilizando el criterio de la segunda derivada, tenemos, entonces:

$$\frac{d^2}{dQ^2} (-2Q^2 + 24Q - 45) = -4, -4 < 0.$$



## 21. Problemas propuestos

### **Problema No. 1.**

Sea la función de ingresos,  $U = 55Q - 3Q^2$  y la función de coste total,  $C = 30 + 25Q$ . Resolver el problema mediante la obtención de puntos de equilibrio y la maximización de los beneficios.

### **Problema No. 2**

Calcular la cantidad en la que no hay pérdida de ganancia y la cantidad correspondiente al beneficio máximo de la función de ingresos,  $U = 71Q - 3Q^2$  y función de costo,  $C = 80 + Q + 2Q^2$ .

## 22. Conclusiones del capítulo

En esta sección, se asume que el alumno ya conoce los conceptos fundamentales del cálculo diferencial. Para funciones de una variable,  $f(x)$ , esto significa esencialmente la noción del concepto de derivada como la pendiente de una función (la pendiente de su tangente) en un punto. La aplicación que ésta tiene a la localización de puntos estacionarios de la función (puntos en los que la pendiente de la tangente es cero), y la clasificación de tales puntos como máximos o mínimos, mediante el uso del criterio de la segunda derivada. De igual forma, se asume que el alumno tiene la capacidad de aplicar las reglas más básicas de la diferenciación.

De igual forma, se abordaron problemas de funciones con dos variable  $f(x_1, x_2)$ , utilizando los conceptos de derivada parcial para obtener los valores máximos y mínimos de dicha función de dos variables.

Al inicio del capítulo se examinó las funciones mediante el criterio de la segunda derivada para analizar los conceptos de concavidad y convexidad de una función. Con los conceptos anteriores proporciono una base teórica sobre la cual se logró extender el capítulo para el análisis de problemas con más variables.

Al inicio del capítulo se presentaron algunos métodos para encontrar los valore máximos y mínimos de una función en los que se supone que las funciones derivables para determinar las condiciones de primer y segundo orden. En todo este capítulo vimos cómo el poder de las computadoras y los programas modernos como Maple y Matlab se utilizan para obtener de forma más precisa la solución de un problema de programación no lineal.

Si bien la programación no lineal es muy extensa, en cuanto a los tipos de problemas que suelen presentarse en la vida real, de igual forma existen una gran cantidad de métodos de solución para un conjunto específico de problemas, pero para fines de alcanzar los objetivos educacionales del tema, se utilizaron un conjunto discreto de métodos de solución, tales como: método de búsqueda irrestricta, búsqueda de la sección oro, interpolación cuadrática y el método de Newton Raphson.

Finalmente, analizamos problemas de programación no lineal restringida a un conjunto de igualdades. Para este caso se utilizó el método de Lagrange.

Por último, y con la finalidad de apoyar el proceso de aprendizaje de esta disciplina, en la mayoría de los temas y al final del subtema se propone a los alumnos resolver un conjunto de ejercicios en donde deberán de utilizar los conceptos teóricos vistos a lo largo de cada sección, recomendando auxiliarse de un programa computacional.

## 23. Referencias y Bibliografía

- Anderson, R., Sweeney, D., Williams, T. (1993). An Introduction to Management Science, 6<sup>a</sup> ed., edit. West Publishing Company, Usa.
- Degarmo, E., Sullivan, W., Bontadelli, J., y Wicks, E. (1997). Engineering Economy, 10<sup>a</sup>. Ed., edit. Prentice Hall, Usa.
- Griva., Nash, S., y Sofer, A. (2009). Linear and Nonlinear Optimization, edit. Siam, Usa.
- Miller, R. (2000). Optimization, Foundations and Applications, edit. Wiley, Usa.
- Parlar, M. (2000). Interactive operations research with Maple, edit. Birkhäuser, Usa.
- Pérez, C. (2016). Matlab: optimization Techniques, recuperado de. [www.it-ebooks.info](http://www.it-ebooks.info).
- Pérez, M. (2016). Técnicas de optimización con Matlab. Usa
- Sharma, S. (2006). Applied NonLinear Programming, edit. New Age International Publisher, New Delhi, India.
- Sierksma, G. y Zwols, Y. (2015). Linear and Integer Optimizations: Theory and Practice, 3<sup>a</sup>. Ed, edit. CRC Press, Usa.
- Venkataraman, P. (2002). Applied optimization with Matlab, edit. Wiley, Usa
- Taylor III, B. (2006). Introduction to Management Science, 9<sup>a</sup> ed. Edit. Prentice Hall, Usa.

# Capítulo V

## Modelos de inventarios

1. Conceptos relevantes
2. Objetivos del inventario
3. Taxonomía de un sistema de inventarios. Vrat (2014)
4. Funciones de los inventarios
5. Objetivos del capítulo
6. Definición de la cantidad económica de pedido (EOQ)
7. Variables utilizadas en el análisis
8. Derivación de la cantidad económica de la orden (pedido) (EOQ)
9. Problemas resueltos
10. Ajuste de la cantidad de pedido económico
11. Modelo de Cantidad Económica del Pedido (EOQ) cuando se permiten faltantes (déficit)
  - 11.1. Derivación del modelo de inventarios cuando existe déficit o faltantes planeados
  - 11.2 Derivación por medio del cálculo de  $Q^*$ ,  $S^*$ , y  $I^*$  para el modelo (EOQ) cuando se permiten faltantes.
12. Modelo de Cantidad Óptima del Pedido (EOQ) para lotes de producción: un solo producto
  - 12.1. Formulación del modelo
  - 12.2. Derivación de las reglas de decisión óptimas para el modelo de la cantidad óptima del pedido (EOQ) para lotes de producción: un solo producto
  - 12.3. Discusión y reflexión
  - 12.4. Problemas resueltos de la sección
13. Modelo de inventarios con escasez planeada y con pedidos pendientes

- 13.1. Pedidos atrasados y ventas perdidas
- 13.2. Pedidos atrasados
- 14. Conclusiones del capítulo
- 15. Referencias y bibliografía

## 1. Conceptos relevantes

Los gestores de inventario toman una serie de decisiones sobre el stock, ¿cómo mantener acciones y en qué tipo de instalaciones? Qué hacen los proveedores y los operadores de transporte ¿usamos? ¿Qué sistemas de información utilizamos? ¿Podemos formar alianzas?

Estos y todas las demás decisiones sobre acciones, establecen el contexto general.

Llega un punto, Sin embargo, cuando los gerentes de inventario tienen que tomar algunas decisiones inmediatas sobre sus existencias.

Habiendo establecido la escena con una serie de decisiones apropiadas, Son ahora responsables de algunas existencias reales, y tienen que empezar a cuidar de ellos. ¿Qué decisiones toman?

El inventario son las existencias de cualquier elemento, recurso o bien utilizado en una organización.

Un sistema de inventario es el conjunto de políticas y controles que monitorean los niveles de inventario y determinan qué niveles deben mantenerse, cuándo deben reponerse los inventarios y cuán grandes deben ser los pedidos.

Por conveniencia, el inventario de manufactura generalmente se refiere a artículos que pueden convertirse en parte de la producción de productos de una empresa. El inventario de fabricación suele clasificarse en materias primas, productos acabados, componentes, suministros y trabajos en proceso.

En la distribución, el inventario se clasifica como en tránsito, lo que significa que se está moviendo en el sistema y en el almacén, que es el inventario en un almacén o centro de distribución.

Los sitios minoristas llevan inventario para la venta inmediata a los clientes. En los servicios, el inventario se refiere generalmente a los bienes tangibles que se venden ya los suministros necesarios para administrar el servicio.

El objetivo básico del análisis de inventario, ya sea en la fabricación, distribución, venta al por menor, o servicios, es especificar (1) cuándo deben ordenarse los

artículos y (2) cuánto debe ser el pedido. Muchas compañías tienden a asociarse en una relación a largo plazo con los proveedores para abastecer sus necesidades de posiblemente todo el año. Esto cambia el "cuándo" y "cuántos a ordenar" a "cuándo" y "cuántos entregar".

## 2. Objetivos del inventario

Todas las empresas (incluidas las que operan el sistema Justo a Tiempo (JIT) mantienen un inventario por las siguientes razones:

a) Mantener la independencia de las operaciones.

Un suministro de materiales en una empresa permite flexibilidad de las operaciones en centro de trabajo.

Por ejemplo, debido a que hay costos para realizar cada nueva configuración del sistema de producción, este inventario permite a la administración reducir el número de clasificaciones.

La independencia de los puestos de trabajo es deseable en las líneas de montaje también.

El tiempo que tarda en realizar operaciones idénticas varía naturalmente de una unidad a la siguiente.

Por lo tanto, es deseable tener un stock de varias partes dentro de la estación de trabajo, de tal forma que los tiempos de funcionamiento más cortos pueden compensar tiempos de funcionamiento más largos.

De esta manera, la producción promedio puede ser bastante estable.

b) Satisfacer la variación en la demanda de productos. Si la demanda del producto se conoce con precisión, puede ser posible (aunque no necesariamente económico) para producir el producto para satisfacer exactamente la demanda.

Normalmente, sin embargo, no se conoce completamente la demanda, y se debe mantener una reserva de seguridad o amortiguador para absorber la variación.

c) Permitir flexibilidad en la programación de la producción.

Un stock de inventario alivia la presión sobre el sistema de producción para sacar las mercancías. Esto hace que los tiempos de entrega sean más largo, de tal forma que permiten la planificación de la producción dentro del sistema.



Los altos costos de nuevas disposiciones, por ejemplo, favorecen la producción de un mayor número de unidades una vez que se ha realizado la configuración.

### 3. **Taxonomía de un sistema de inventarios.** Vrat (2014)

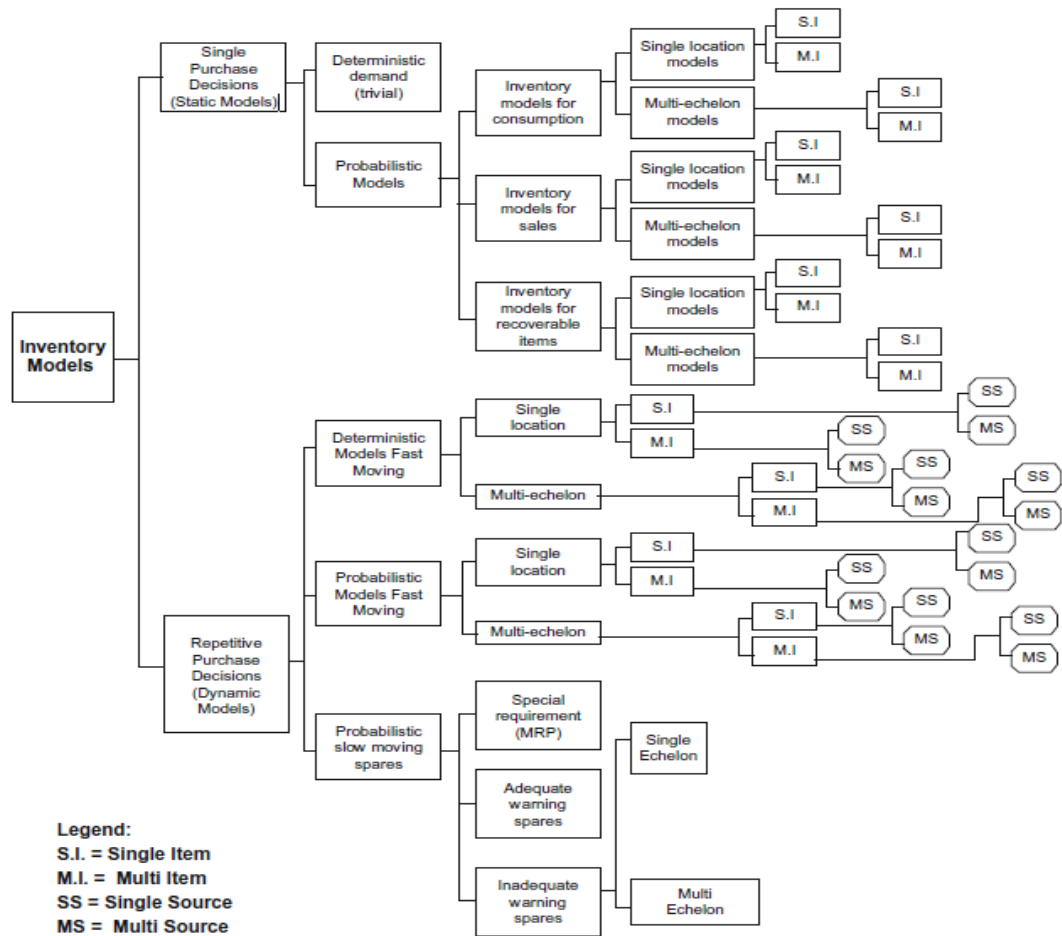
Hay una enorme cantidad de literatura científica disponible en los modelos de inventario. Es difícil compilar y presentar todos estos modelos en un solo tratado. Sin embargo, una descripción estructurada de la taxonomía de estos modelos ofrece una muy buena visión general de la abundancia de modelos de inventario disponibles en la gestión del inventario científico.

La figura No. 2, representa una taxonomía de este tipo en una estructura en forma de árbol.

Estos modelos pueden clasificarse ampliamente como modelos de compra única (estática) o modelos de compra repetitiva (dinámica); otros grupos importantes podrían ser modelos de inventario deterministas versus modelos de inventario probabilísticos.

La ramificación adicional se puede hacer sobre la base del número de elementos (único o múltiple), el número de fuentes de suministro (único o múltiple), el número de escalones (único o multi escalón) y otras variables de situación tales como descuentos por cantidad, limitaciones presupuestarias, etc.

En este capítulo, trataremos de discutir algunos de estos modelos de inventario, pero una cobertura exhaustiva del tema de inventarios no es posible ni deseable en un capítulo sobre el tema de inventarios. Desafortunadamente en la mayoría de los países en desarrollo estos modelos no son usados



**Legend:**  
 S.I. = Single Item  
 M.I. = Multi Item  
 SS = Single Source  
 MS = Multi Source

Figura No. 1. Taxonomía de un modelo de inventarios. Fuente: P. Vrat, *Materials Management*, Springer Texts in Business and Economics, DOI 10.1007/978-81-322-1970-5\_2.

#### **4. Funciones de los inventarios**

a) Suavizar las operaciones de una empresa.

Regularmente, los procesos de demanda sufren variaciones de alguna manera previsible, aunque no controlables. Estas fluctuaciones muchas veces ocurren de acuerdo a la temporada del año, o ciclos comerciales o fiscales, y se pueden resolver modificando la producción cada vez que se requiera, lo cual exige la existencia de materia prima, o bien produciendo y almacenando la demandas cumbre.

b) Explotación del mercado.

Frecuentemente, los movimientos en el mercado hacen que resulte económicamente ventajosa la creación de un inventario.

Las variaciones de precios de los bienes y productos de un mercado o bien de la materia prima, pueden motivar la adquisición prematura o la producción sobre pedido. La posibilidad de un incremento en los costos de la mano de obra puede hacer útil la constitución de un inventario.

c) Protección contra déficit de material

Al enfrentarnos a las fluctuaciones impredecibles en los procesos de oferta y demanda, se corre el riesgo de que, en un momento dado, exista escasez de material y se experimente una lucha con los clientes, interrupción en las operaciones, etc. Un inventario es un "seguro" contra dicha situación.

La necesidad de la existencia de tales inventarios aumenta de acuerdo al crecimiento de las fluctuaciones, y al tiempo que transcurre entre una fluctuación aleatoria y su compensación.

d) Economías de escala

Aún cuando los procesos de oferta y demanda se pudieran controlar de manera que fueran iguales e invariantes en el tiempo, no sería deseable hacerlo, puesto que implicaría un gran número de pequeñas remesas y desprendería las economías con pocas remesas, pero de gran tamaño, cuando ocurre que, en muchas ocasiones, se obtienen descuentos por volumen con un consecuente ahorro en el costo promedio por artículo.

e) Control económico

Un argumento a favor de los inventarios grandes, es que requieren menor control y que es más barato mantener grandes inventarios que revisar los niveles de inventario con mucha frecuencia.

Sin embargo, es importante saber cuanto se gasta en diseñar, implantar y mantener un inventario, para determinar su eficiencia y decidir la existencia del mismo. Algunas corrientes que consideran que lo óptimo es llegar a tener un inventario cero.

## 5. Objetivos del capítulo

Este capítulo presenta algunos modelos cuantitativos para el control de inventario. El primer modelo toma un stock idealizado y encuentra el tamaño de pedido fijo que minimiza los costes.

Esta es la cantidad de orden económico, que es la base de la mayoría de la demanda independiente

Los métodos, cálculos y extensiones relacionados con este modelo básico se desarrollan en las siguientes secciones.

El alumno después de analizar este capítulo, deberá ser capaz de concebir lo siguiente:

- Discutir el razonamiento detrás de la cantidad de orden económico;
- Derivar una ecuación para la cantidad del orden económico;
- Calcular la cantidad de orden económico para un artículo;
- Medir los efectos de alejarse de la cantidad del orden económico;
- Trabajar con tamaños de orden entero;
- Medir los efectos de errores y aproximaciones en los costos y prever la demanda;
- Calcular un nivel de reorden;
- Esbozar algunas limitaciones del nivel de reorden

En este cuarto capítulo del libro, se pondrá énfasis en lo siguiente:

- En los modelos cuantitativos (matemáticos) en el control de inventarios;
- cálculo de una cantidad económica de pedido para el tamaño de orden;
- Cálculo de un nivel de reorden para encontrar el momento de las órdenes.

## 6. Definición de la cantidad económica de pedido (EOQ)

Antecedentes del modelo

Patrón típico de nivel de existencias con el tiempo

Este capítulo describe uno de los análisis estándar del control de inventario. Muestra cómo podemos equilibrar los diferentes costos de la acción para responder a la pregunta, ¿Cuánto debemos ordenar?

El enfoque es construir un modelo de un sistema de inventario idealizado y calcular la cantidad de pedido fijo que minimiza los costos totales. El tamaño de pedido óptimo se denomina cantidad económica de pedido (EOQ).

El cálculo del (EOQ) es el análisis más importante del control de inventario, y sin duda uno de los resultados más importantes derivados en cualquier área de la investigación de operaciones. La primera referencia a la obra es de Harris (1915), pero el cálculo del (EOQ) a menudo se atribuye a Wilson (1934).

El nivel de existencias de un artículo varía con el tiempo, con un patrón típico como se muestra en figura No. 2.

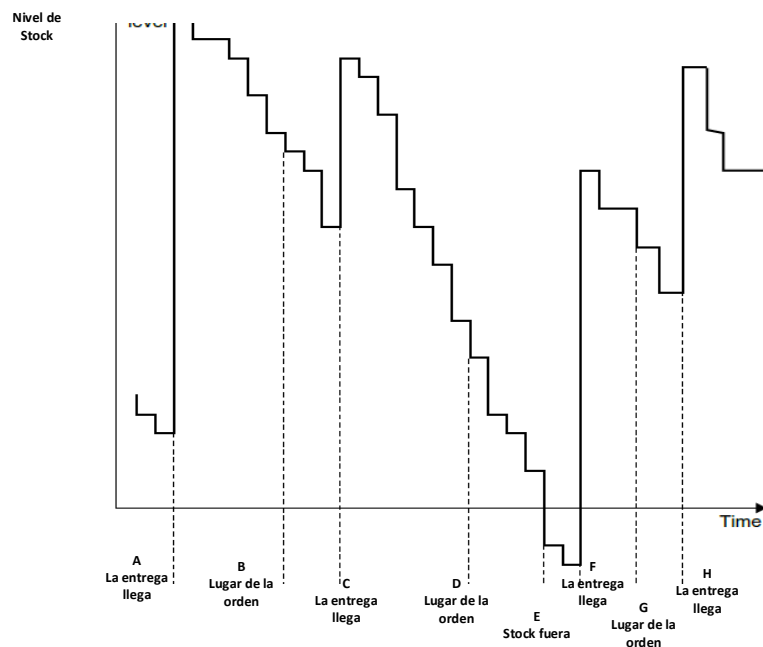


Figura No. 2. Modelo típico del nivel de stock (existencia o reservas) en el tiempo. Fuente: Waters, C. D. J. (C. Donald J.), 1949–Inventory control and management, Donald Waters.

## Descripción:

En algún período, A, llega una entrega y eleva el nivel de reservas o existencias.

Entonces, mientras que las unidades se eliminan para satisfacer las demandas de los clientes en otro período, B, una orden para la reposición se coloca con un proveedor y esto llega a tiempo C.

Este patrón general, con algunas variaciones a corto plazo, se repite siempre que el artículo se conserva en la acción.

A veces, una demanda inesperadamente alta o una entrega retardada significa que las existencias se agotan (como en el punto E) y luego podemos representar la escasez por niveles de stock negativos.

En otras ocasiones, una demanda inesperadamente baja o entrega rápida significa que las entregas llegan cuando no se necesitan realmente (como en los puntos C y H).

Podemos analizar este patrón, pero es bastante complicado, así que empezamos con un modelo base que hace una serie de suposiciones:

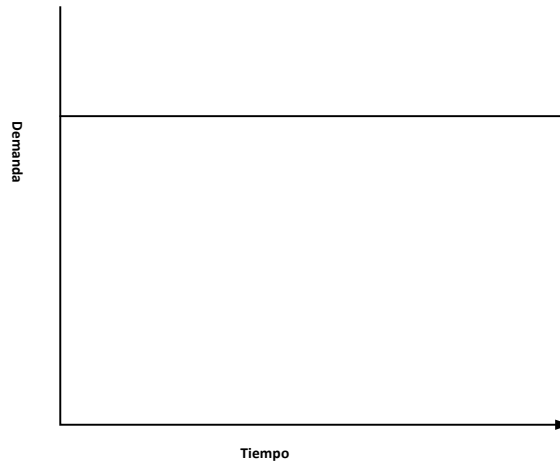
- 1) La demanda se conoce exactamente, es continua y es constante en el tiempo;
- 2) Todos los costos se conocen exactamente y no varían;
- 3) No se permite escasez;
- 4) El plazo de entrega es cero, por lo que la entrega se realiza tan pronto como se realiza el pedido.

Otras suposiciones están incluidas en el modelo (EOQ), tales como:

- 5) El precio de compra y los costos de reorden no varían con la cantidad solicitada;
- 6) Se realiza una entrega única para cada pedido;
- 7) La reposición es instantánea, de modo que todo un pedido llega en stock al mismo tiempo y se puede utilizar de inmediato.

Quizás la suposición más importante aquí es que la demanda es conocida exactamente, es continua y constante suficiente para el tiempo de muchos fines (como se muestra en la figura No. 3).





*Figura No. 3. La demanda es constante y continua en el tiempo.*

Esto, y los otros supuestos, puede parecer poco realista, pero debemos recordar dos cosas.

En primer lugar, todos los modelos son simplificaciones de la realidad y su objetivo es dar resultados útiles en lugar de representaciones exactas de las circunstancias reales. La cantidad de orden económico es ampliamente utilizada, y podemos inferir que es exacta.

Los resultados pueden no ser óptimos en el sentido matemático estricto, pero son buenas aproximaciones y, en el peor de los casos, dan pautas útiles.

En segundo lugar, este es un modelo básico que podemos extender de muchas maneras.

Los supuestos dan un patrón idealizado para un nivel de stock (existencias o reservas)

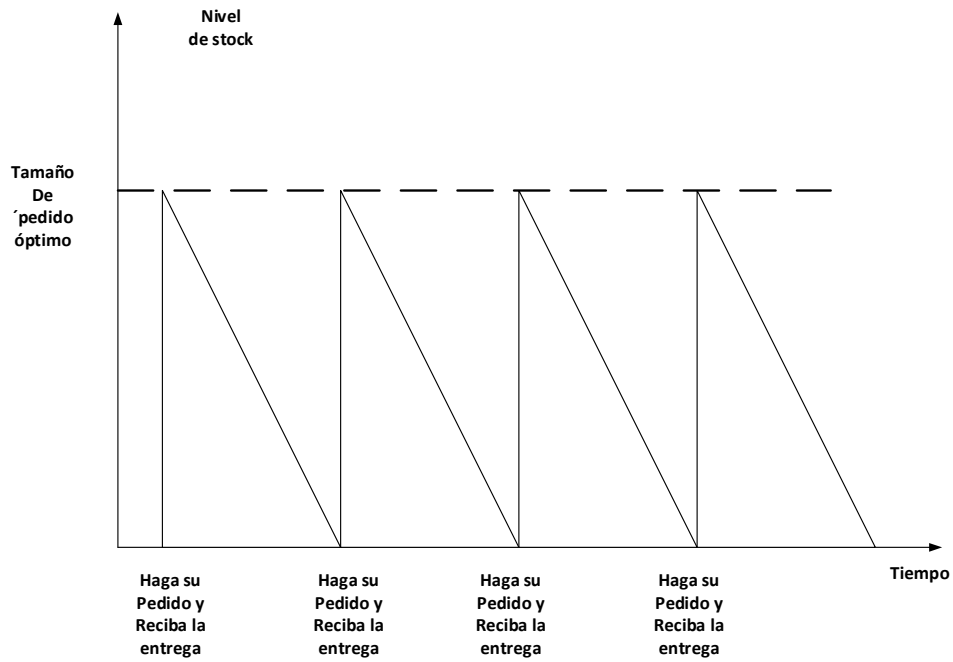
Una demanda continua significa que el nivel de stock disminuye constantemente en lugar de caer en una serie de pasos; una demanda constante significa que la disminución es siempre a la misma tasa.

Si el plazo de entrega es cero, nunca debemos realizar un pedido antes de que se agoten las existencias, ya que realizar un pedido cuando hay existencias restantes dejaría un residuo que nunca se utiliza y sólo incurre en gastos de mantenimiento.

La suposición de que no se permite escasez significa que el nivel de stock nunca cae por debajo de cero, y no hay ventas perdidas.

Por último, estamos buscando la cantidad de pedido fijo que minimice los costos, por lo que siempre realizar pedidos de exactamente este tamaño.

El patrón resultante se muestra en la figura No. 4



*Figura No. 4. Nivel de stock con un tamaño de pedido único.*

## 7. Variables utilizadas en el análisis

Ahora hemos sentado las bases de nuestro modelo y podemos introducir algunos detalles, comenzando con una lista de variables.

- 1) El costo unitario ( $CU$ ) es el precio cobrado por los proveedores por una unidad del artículo, o el costo total para la organización de adquirir una unidad.
- 2) El costo de reordenamiento ( $CR$ ) es el costo de realizar una orden de rutina para el artículo y puede incluir asignaciones para la elaboración de una orden, correspondencia, costos telefónicos, recepción, uso del equipo, expedición, entrega, controles de calidad, etc. Si el elemento se realiza internamente, esto puede ser un coste de configuración.
- 3) El costo de mantenimiento ( $CM$ ) es el costo de mantener una unidad del artículo en stock durante un período de tiempo. El período habitual para calcular los costos de las acciones es de un año, por lo que un costo de mantenimiento podría ser, digamos, \$ 10 por unidad al año.
- 4) Costo de escasez ( $CE$ ) es el costo de tener una escasez y no ser capaz de satisfacer la demanda de stock. En este análisis hemos dicho que no se permite escasez, por lo que no aparece  $CE$  (es tan grande que cualquier escasez sería prohibitivamente cara).

Si se analizamos la figura no. 4, puede observarse que existen otras tres variables, es decir:

- 5) Cantidad de pedido ( $Q$ ) que es el tamaño de pedido fijo que siempre utilizamos. El propósito de este análisis es encontrar un valor óptimo para esta cantidad de pedidos.
- 6) Tiempo de ciclo ( $T$ ) que es el tiempo entre dos reabastecimientos consecutivos. Esta depende de la cantidad de la orden, con órdenes más grandes que conducen a tiempos de ciclo más largos.
- 7) Demanda ( $D$ ) que establece el número de unidades a suministrar de la acción en un período de tiempo dado (por ejemplo, diez unidades a la semana). Aquí, suponemos que la demanda es continua y constante.

La única variable que está directamente bajo nuestro control es la cantidad del pedido ( $Q$ ), y podemos darle a este cualquier valor que nos guste.

Cuando fijamos la cantidad de pedido ( $Q$ ), esto fija la longitud del ciclo ( $T$ ).

Suponemos que todos los demás parámetros son fijos y están fuera de nuestro control.

Nuestro objetivo, entonces, es encontrar valores óptimos para  $Q$  y por tanto  $T$  en términos de estas otras constantes.

## 8. Derivación de la cantidad económica de la orden (pedido) (EOQ)

Esta derivación utiliza un enfoque estándar que es adecuado para muchos modelos de control de existencias (stock). Tiene tres pasos, como sigue:

1. Encuentre el costo total de un ciclo de inventario
2. Divida este costo total por la duración del ciclo para obtener un costo por unidad de tiempo
3. Minimizar este costo por unidad de tiempo.

Si tomamos un ciclo de stock de la figura No. 4, obtenemos el patrón mostrado en la siguiente figura No. 5.

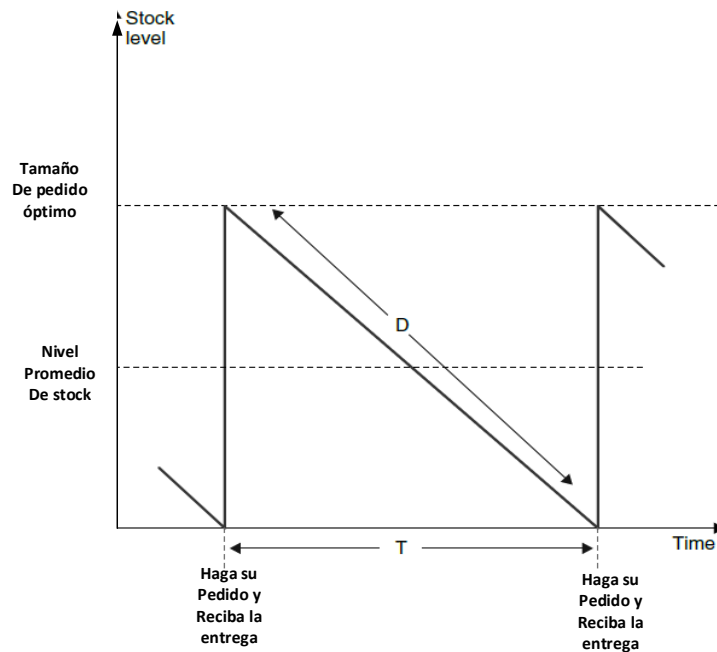


Figura No. 5. Características de un ciclo de stock

En algún punto ponemos una orden para una cantidad,  $Q$ , que llega instantáneamente y se usa a una velocidad constante,  $D$ .

Eventualmente no hay existencias y es hora de hacer otro pedido.

El ciclo tiene una longitud  $T$ . Sabemos que durante el ciclo la cantidad que entra en el stock es  $Q$ , mientras que la cantidad que sale es  $D \times T$ .

Estos deben ser iguales, ya que el nivel de stock en el inicio y final del ciclo es cero.

*Cantidad que entra en stock en ciclo = cantidad que deja stock en ciclo*  
 Así que:

$$Q = DT$$

$$(Cantidad\ de\ pedido\ (Q)) = (Demanda\ (D)\ por\ tiempo\ de\ ciclo\ (T))$$

El primer paso del análisis encuentra los costos totales para un ciclo, y lo encontramos añadiendo los tres componentes separados del costo de unidades, reordenamientos y tenencias (recordando que no hay costos de escasez). Por lo tanto:

<i>Costo total por ciclo</i>	=	<i>componente de costo unitario</i>	+ <i>componente de costo de reordenación</i>	+ <i>componente de costo de mantenimiento</i>
------------------------------	---	-------------------------------------	--	---

Podemos calcular estos componentes separados para un ciclo de la siguiente manera:

<i>Componente del costo unitario</i>	=	<i>Costo unitario (CU)</i>	<i>Número de unidades ordenadas (Q)</i>	= $(CU)(Q)$
--------------------------------------	---	----------------------------	---	-------------

<i>Componente del costo de reorden</i>	=	<i>Costo de reorden (CR)</i>	<i>Número de pedidos realizados (1)</i>	= $(CR)$
--	---	------------------------------	---	----------

<i>Componente del costo de mantenimiento</i>	=	<i>Costo de mantenimiento (CM)</i>	<i>Nivel promedio de stock (<math>\frac{Q}{2}</math>)</i>	<i>Tiempo retenido (T)</i>	= $(CM)(\frac{Q}{2})(T)$
--	---	------------------------------------	---	----------------------------	--------------------------

La suma de estos tres componentes proporciona el costo total por ciclo. Es decir:

$$\begin{aligned} \text{Costo total por ciclo} &= (CU)(Q) + (CR) + (CM)(\frac{Q}{2})(T) \\ &= (CU)(Q) + (CR) + (CM)(\frac{Q}{2})(T) \end{aligned}$$

Esto completa el primer paso del análisis. El segundo paso divide este coste por la longitud del ciclo,  $T$ , para dar un coste total por unidad de tiempo,  $CT$ :

$$\begin{array}{l} \text{Costo} \\ \text{total} \\ \text{por por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{array} CT = \frac{(CU)(Q)}{T} + \frac{(CR)}{T} + \frac{(CM)\left(\frac{Q}{2}\right)(T)}{T} = \frac{(CU)(Q)}{T} + \frac{(CR)}{T} + (CM)\left(\frac{Q}{2}\right)$$

Pero sabemos que:  $Q = DT$ , o, también que:  $D = \frac{Q}{T}$ , de igual forma,  $T = \frac{Q}{D}$ , y sustituyendo, tenemos:

$$CT = (CU)(D) + \frac{(CR)(D)}{Q} + \frac{(CM)(Q)}{2}$$

La demanda y todos los costos son fijos, por lo que la única variable en el lado derecho de esta ecuación es  $Q$ . Así podemos ver cómo el costo total por unidad de tiempo varía con la cantidad de pedido.

La manera más conveniente de hacer esto es trazar cada uno de los componentes de costo por separado contra  $Q$  y luego agregarlos juntos (como se muestra en la Figura No. 6).

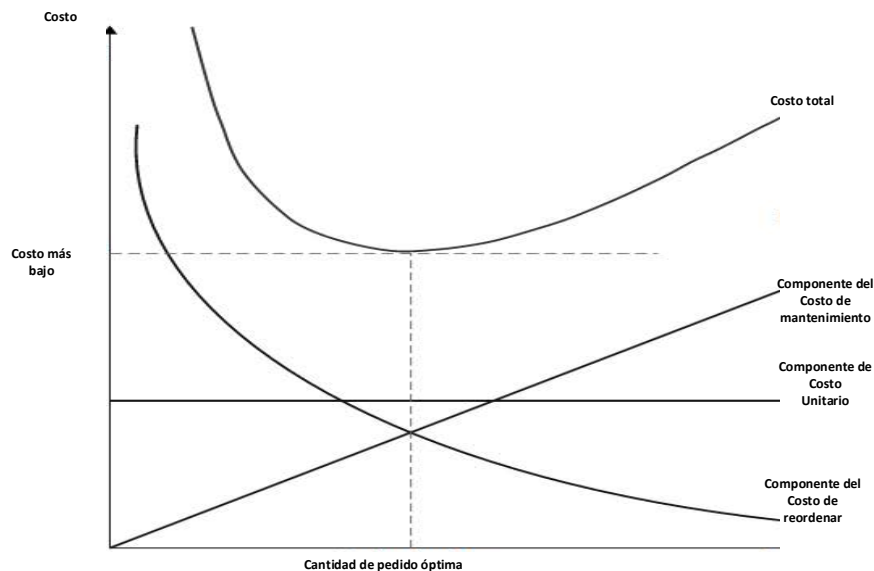


Figura No. 6. Cantidad de pedido óptima.

El componente de coste unitario ( $CU \times D$ ) es independiente de la cantidad de pedido y es «fijo».

Los otros dos componentes varían con la cantidad de la orden y forman el costo «variable» por unidad de tiempo. En particular, el componente de coste de mantenimiento aumenta linealmente con  $Q$  mientras que el componente de coste de reordenación disminuye a medida que  $Q$  aumenta.

La suma de los tres componentes juntos da una curva de costo total que es una forma simétrica «U» con un mínimo distinto. Este mínimo corresponde al tamaño de pedido óptimo.

Con órdenes de órdenes más pequeñas que esto, los costos aumentan debido al mayor componente de costo de reordenamiento; con órdenes mayores que esto, los costos aumentan debido al mayor componente de costo de tenencia.

El tercer paso de nuestro análisis encuentra el costo mínimo por unidad de tiempo. Para esto diferenciamos la ecuación para  $CT$  con respecto a  $Q$ , igualamos el resultado igual a cero:

Utilizando cálculo diferencial con Maple, tenemos:

#Sean

# $CT$ =costo total por unidad de tiempo , # $CTI$ =costo total (por ciclo) , # $CU$ =costo unitario ,

# $Q$ =número de unidades ordenadas , # $CR$ =costo de reorden , # $CM$ =costo de mantenimiento

# $\frac{Q}{2}$  = nivel promedio de stock , # $T$ =tiempo de ciclo , # $Q$ =cantidad de pedido

$$CTI := CU \cdot Q + CR + CM \cdot \left( \frac{Q}{2} \right) \cdot t$$

$$CTI := CUQ + CR + \frac{1}{2} CMQt$$

$$T := \frac{Q}{D}$$

$$T := \frac{Q}{D}$$

$$CT := \frac{CTI}{T}$$

$$CT := \frac{\left( CUQ + CR + \frac{1}{2} \frac{CMQ^2}{D} \right) D}{Q}$$

$$Diff(CT, Q) = diff(CT, Q)$$



$$\frac{\partial}{\partial Q} \left( \frac{\left( CUQ + CR + \frac{1}{2} \frac{CMQ^2}{D} \right) D}{Q} \right) = \frac{\left( CU + \frac{CMQ}{D} \right) D}{Q} - \frac{\left( CUQ + CR + \frac{1}{2} \frac{CMQ^2}{D} \right) D}{Q^2}$$

$$\text{diff}(CT, Q) = 0$$

$$\frac{\left( CU + \frac{CMQ}{D} \right) D}{Q} - \frac{\left( CUQ + CR + \frac{1}{2} \frac{CMQ^2}{D} \right) D}{Q^2} = 0$$

$$\left\{ \text{solve} \left( \frac{\left( CU + \frac{CMQ}{D} \right) D}{Q} - \frac{\left( CUQ + CR + \frac{1}{2} \frac{CMQ^2}{D} \right) D}{Q^2} = 0, \{Q\} \right) \right\}$$

$$\left\{ \left\{ Q = \frac{\sqrt{2} \sqrt{CMCRD}}{CM} \right\}, \left\{ Q = -\frac{\sqrt{2} \sqrt{CMCRD}}{CM} \right\} \right\}$$

Cuando lo reorganizamos obtendremos el tamaño de orden óptimo, o la cantidad económica de la orden (pedido), a la que llamaremos  $Q^*$ . Tomando la parte positiva, tenemos:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{(CM)}}$$

Este es el resultado más importante del análisis y responde a la pregunta «¿Cuánto debemos ordenar?» " Ahora podemos encontrar la longitud óptima correspondiente del ciclo de stock. Sabemos que  $Q = D \times T$ , y si sustituimos  $Q^*$  por  $Q$  encontramos la longitud óptima del ciclo,  $T^*$ .

$$T := \frac{Q}{D}, T^* := \frac{\frac{\sqrt{2} \sqrt{CMCRD}}{CM}}{D}$$

Reorganizando:

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2(CR)}{(D)(CM)}}$$

También podemos encontrar el coste óptimo por unidad de tiempo,  $CT^*$ , sustituyendo el valor de

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{(CM)}}$$

en la expresión:

$$CT = (CU)(D) + \frac{(CR)(D)}{Q} + \frac{(CM)(Q)}{2}$$

$$CT^* = (CU)(D) + \frac{(CR)(D)}{Q^*} + \frac{(CM)(Q^*)}{2}$$

El componente de coste unitario es fijo, por lo que podemos concentrarnos en los dos últimos términos que forman el costo variable ( $CV$ ). Entonces:

$$CV = \frac{(CR)(D)}{Q} + \frac{(CM)(Q)}{2}$$

Sustituyendo  $Q^*$  por  $Q$  para obtener el valor óptimo de  $CV^*$ :

$$CV^* = \sqrt{2(CR)(CM)(D)}$$

Si compara esto con la cantidad de orden económico, puede ver que:

Costo variable óptimo por unidad de tiempo:

$$CV^* = (CM)(Q^*)$$

Entonces, el costo total óptimo por unidad de tiempo es la suma de este costo variable y el costo fijo:

$$CT^* = (CU)(D) + CV^*$$

Para analizar las derivaciones del conjunto de expresiones del problema de inventarios, resolvamos el siguiente problema.

### Ejemplo numérico No. 1 (Waters, D. (2003))

Jaydeep (Trading) Company compra 6,000 unidades de un artículo cada año con un costo unitario de \$ 30.00. Cuesta \$ 125 para procesar una orden y arreglar la entrega, mientras que los intereses y los costos de almacenamiento ascienden a \$ 6 por año por cada unidad que se tiene. ¿Cuál es la mejor política de pedidos para el artículo?

Solución:

Describiendo los valores que indica nuestro problema, tenemos:

Sea:

*Demanda = D = 6,000 unidades al año*

*Costo Unitario = CU = \$30.00 por unidad*

*Costo de Reorden = CR = \$125.00 por orden*

*Costo de Mantenimiento = CM = \$6.00 una unidad al año*

La sustitución de estas cifras en la ecuación de la cantidad económica de la orden proporciona:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{(CM)}} = \sqrt{\frac{2(125)(6,000)}{(6)}} = 500 \text{ unidades}$$

El tiempo óptimo (tiempo de ciclo) entre pedidos es:

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2(CR)}{(D)(CM)}} = \frac{500}{6,000} = 0.083 \text{ años} = 1 \text{ mes}$$

El costo variable asociado es:

$$CV^* = (CM)(Q^*) = (6.00)(500) = \$3,000 \text{ en un año}$$

Esto da un costo total de:

$$CT^* = (CU)(D) + CV^* = (\$30.00)(6,000) + \$3,000 = \$183,000 \text{ al año}$$

La variación del coste total por unidad de tiempo con el tamaño del pedido se muestra en la Figura No. 7 y las variaciones en el costo total con respecto al nivel de stock (existencias), se muestra en la Figura No. 8.

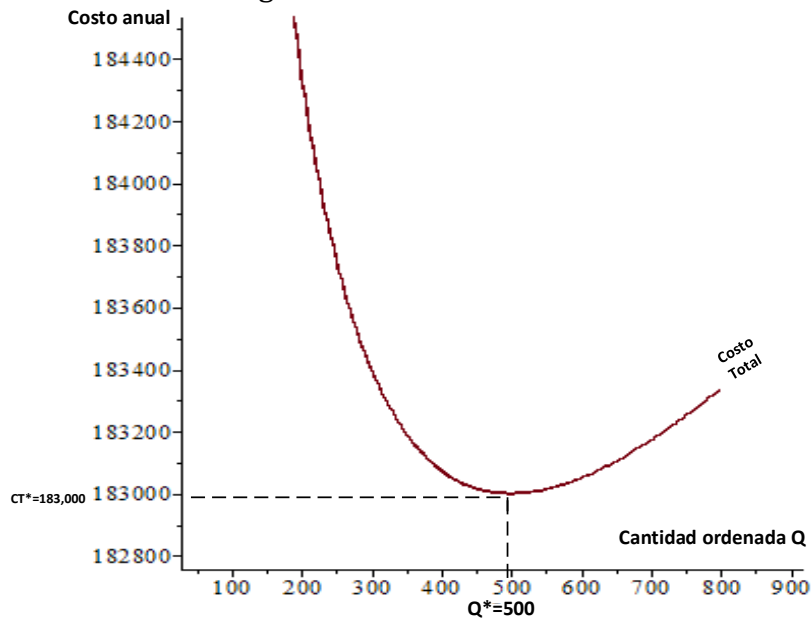


Figura No. 7. Variación del costo total por unidad de tiempo con respecto al tamaño del pedido.

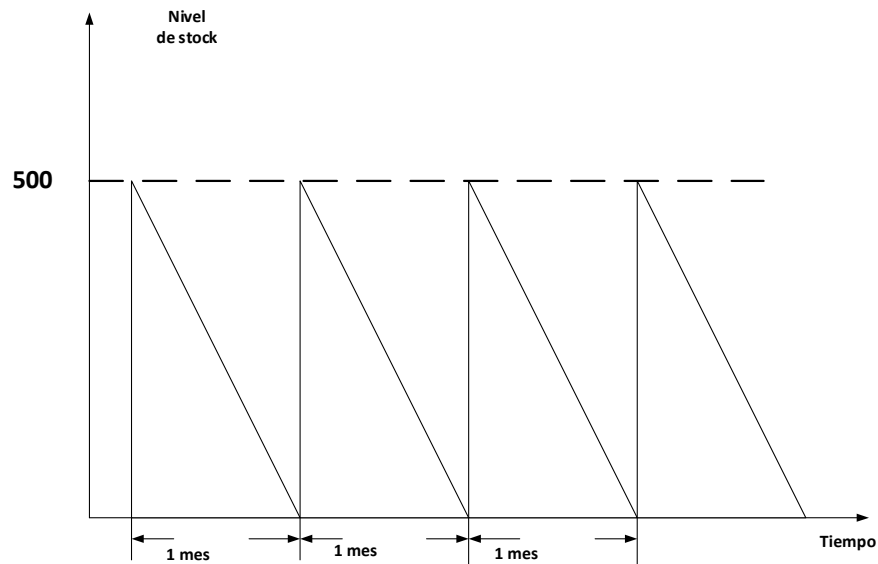


Figura No. 8. Variaciones en el costo total y nivel de stock (existencia o reservas)

### En conclusión:

La política óptima es pedir 500 unidades al mes, con costos anuales de \$ 183,000

### Ejemplo numérico No. 2 (Waters, D. (2003))

Sarah Brown trabaja para un empresario que fabrica piezas para motores marinos.

Las partes se hacen en lotes, y cada vez que se inicia un nuevo lote cuesta 1,640 dólares para la interrupción y la producción perdida y 280 dólares en salarios para los instaladores.

Un artículo tiene una demanda anual de 1,250 unidades con un precio de venta de 300 dólares, 60 por ciento de los cuales son materiales directos y costos de producción. Si la empresa busca un rendimiento del 20% anual sobre el capital, ¿cuál es el tamaño óptimo del lote para el artículo y los costos asociados?

Solución:

De la información proporcionada, tenemos:

1. La demanda anual ( $D$ ) es 1,250 unidades
2. Como el 60 por ciento del precio de venta se compone de costos directos, el costo unitario ( $CU$ ) se convierte en  $0.6 \times \$ 300 = \$ 18$
3. El costo anual de mantenimiento ( $CM$ ) es del 20 por ciento del costo unitario, o  $0.20 \times 180 = 36$  dólares.
4. Reordenamiento o, en este caso, preparación de lotes, el costo de reorden ( $CR$ ) tiene dos componentes para la producción perdida y los salarios directos y se convierte en  $1,640 + 280 = \$ 1,920$ .

La sustitución de éstos datos proporciona el tamaño óptimo del pedido (resolviendo con Maple). De igual forma, la gráfica que muestra la cantidad óptima del pedido en relación al costo total se muestra en la Figura No. 9.

#Sean , #Demanda , Demanda := 1250 , Demanda := 1250 , #Costo Unitario , CU := 180  
CU := 180 , #Costo de mantenimiento , CM := 36 , CM := 36 , #Costo de Reorden , CR := 1920 ,  
CR := 1920

#Cantidad economica de la orden ,  $Q := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot (CR) \cdot (Demanda)}{(CM)}\right)$  ,  $Q := \frac{200}{3} \sqrt{30}$

evalf(%) , 365.1483717 unidades (aproximadamente)

#El tiempo óptimo entre ordenes (Tiempo de ciclo) ,  $T := \frac{Q}{Demanda}$  ,  $T := \frac{4}{75} \sqrt{30}$

evalf(%) 0.2921186973 años = 15 semanas (aproximadamente)

#Costos variables óptimos ,  $CV := (CM) \cdot Q$  ,  $CV := 2400 \sqrt{30}$  , evalf(%) 13145.34138 =  
= \$13,145.34 dólares en un año

#Costo total óptimo ,  $CT := (CU) \cdot (Demanda) + CV$  ,  $CT := 225000 + 2400 \sqrt{30}$   
evalf(CT) ,  $2.381453414 \cdot 10^5$  = \$ 238,140 dólares en un año.

#gráfica de la función

$$CT := CU \cdot Demanda + \frac{CR \cdot Demanda}{QI} + \frac{CM \cdot QI}{2}$$

$$CT := 225000 + \frac{2400000}{QI} + 18 QI$$

plot(CT, QI = 0 ..500)

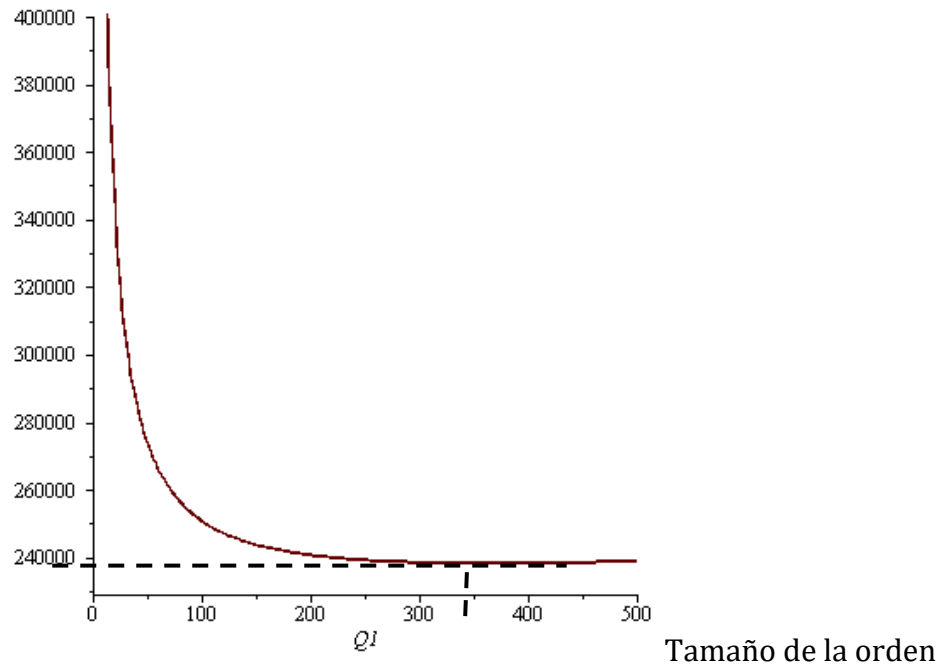


Figura No. 9. Tamaño óptimo de la orden que minimiza los costos totales.

$$Diff(CT, QI) = diff(CT, QI) ,$$

$$Diff\left(225000 + \frac{2400000}{QI} + 18 QI, QI\right) = -\frac{2400000}{QI^2} + 18$$

$$diff(CT, QI) = 0 , \quad -\frac{2400000}{QI^2} + 18 = 0 , \quad solve(CT, QI)$$

$$-6250 + \frac{50}{3} \sqrt{140145} , -6250 - \frac{50}{3} \sqrt{140145} , 180 \cdot 1250 = 225000$$

$$\frac{2400000}{18} , \frac{400000}{3} , evalf(\%) 1.333333333 \cdot 10^5 =$$

$$sqrt(\%) 365.1483716 = 365.14 \text{ unidades (cantidad óptima de pedido)}$$

#Costo total óptimo

$$CTI := (CU) \cdot (Demanda) + CV , CTI := 225000 + 2400 \sqrt{30} \quad evalf(CTI)$$

$$2.38145341410^5 = \$ 238,145$$

### **Comentarios:**

En la práctica, se ha desarrollado una gran cantidad de software para el control de inventarios. Gran parte de las compañías utiliza programas especializados, que pueden ser muy grandes y complicados. Sin embargo, el alumno puede encontrar software que haga parte del análisis o ilustre los principios. Las hojas electrónicas de cálculo, el programa Maple o Matlab pueden ser útiles durante el desarrollo del curso, como se ilustró en el problema No. 2, que muestra un cálculo básico de la cantidad económica de la orden.

### **Resumen**

Hemos construido un modelo de un sistema de inventario idealizado que relaciona el tamaño del pedido con los costos y la demanda. Esto demuestra que las órdenes grandes e particulares tienen un alto componente de costo de mantenimiento, por lo que el costo total es alto: las órdenes pequeñas y normales tienen un componente de costo de reorden alto, por lo que el costo total también es alto. Un compromiso encuentra el tamaño de pedido óptimo o la cantidad de pedido económico que minimiza los costos de inventario.



## 9. Problemas resueltos

### **Problema No. 1. (Waters, 2003)**

Preguntas conceptuales:

¿Qué suposiciones se hacen para calcular una cantidad económica de la orden?

- a) ¿Qué es el (EOQ)?
- b) Si hacemos pedidos que son mayores que el (EOQ), ¿por qué aumenta el costo total?
- c) ¿En qué varía el costo variable por unidad de tiempo?
- d) ¿Si utilizamos la cantidad económica del pedido, que es mayor, el componente de costo de reorden o el componente de costo de mantenimiento?

### **Respuestas**

- a. Los principales supuestos son: se considera un solo artículo, se conoce la demanda y es constante y continuo, el tiempo de espera es cero y la reposición es instantánea, los costos unitarios, de reorden y de mantenimiento se conocen con exactitud y se establecen, no se permite escasez. Hay una serie de otras suposiciones implícitas en el análisis.
- b. Es la cantidad económica del pedido, es el tamaño del pedido que minimiza el inventario total y los costos para un sistema de inventario simple.
- c. Debido a que los niveles de stock promedio son más altos, lo que da altos costos de tenencia. El aumento en el componente de costo de mantenimiento es mayor que la disminución en el componente de costo de reorden.
- d. En el tamaño del pedido.
- e. Ninguno en el (EOQ), el componente de costo de reorden es igual al componente de costo de mantenimiento.

## **Problema No. 2 (Waters, 2003)**

La demanda de un artículo es constante en 1,000 unidades al año. El costo unitario es de \$50.00, el costo de reorden es de \$ 100.00, el costo de mantenimiento es de 25 por ciento de valor al año y no se permite la escasez. Describa una política de inventario óptima para el elemento.

### **Solución. Resolviendo con Maple**

```
#Demanda d := 1000 , d := 1000 , #Costo Unitario , CU := 50 , CU := 50 , #Costo de Reorden ,  
CR := 100 , CR := 100 , #Costo de mantenimiento , CM := (0.25)·(CU) , CM := 12.50 ,  
#Cantidad optima de pedido , Q := sqrt( (2·CR·d / CM) ) , Q := 126.4911064 , #Costo variable ,  
CV := (CM)·Q , CV := 1581.138830 , #Costo total , CT := (CU)·d + CV , CT := 51581.13883  
#Tiempo optimo entre ordenes (tiempo de ciclo) , T := Q / d , T := 0.1264911064 , %·52 , 6.577537533  
(6.5 semanas aproximadamente)
```

**¿Qué tamaño de pedido dará un costo variable dentro del 10 por ciento de lo óptimo?**

```
#Sea QI la cantidad de pedido dará un costo variable dentro del 10 por ciento de lo óptimo  
CV·0.10 + CV , 1739.252713
```

$$\left\{ \text{solve} \left( \left\{ \left( \frac{(CR) \cdot d}{QI} \right) + \frac{12.5 \cdot QI}{2} = 1739.252713 \right\}, \{QI\} \right) \right\} ,$$

```
{{QI = 81.17471007}, {QI = 197.1057240}}
```

Entre 81 y 197 será la cantidad de pedido que responde a la pregunta

**¿Cuál es el costo si los proveedores sólo realizan entregas de 200 unidades?**

```
#¿Cuál es el costo si los proveedores sólo realizan entregas de 200 unidades?
```

```
#Q=200 , CT2 := (CU)·d + (CR·d / 200) + (CM·200 / 2) , CT2 := 51750.00
```

### **Problema No. 3 (Bonini, Ch., Hausman, W., Bierman, H. (1997))**

Los costos de colocar un pedido son \$150 dólares. Se estima que durante los 12 meses siguientes se utilizarán 1,000 unidades. El costo de mantenimiento por unidad por mes es de \$2.50 dólares.

- Calcular el tamaño óptimo del pedido (EOQ)
- Ahora, si la empresa pudiera reducir el costo de los pedidos a \$50 dólares; el costo del esfuerzo para lograr este cambio sería \$1,000. Suponer que el producto se venderá sólo durante los próximos dos años. Calcular la nueva cantidad de pedido óptima si se aplicara el costo más bajo del pedido, y determinar si la empresa debe invertir \$1,000 dólares en el programa de reducción de este costo.

### **Solución (Resolviendo con Maple)**

```
#Prblema No. 3 Bonini ,#Datos del problema ,
#Demanda (D), d=1000 unidades, Costos de ordenar (CR) = 150 dólares
#Costo de mantener (CM)=2.50 dólares por unidad, Costo unitario (CU)=50
#Respuesta a inciso a)

d := 1000 , d := 1000 , CR := 150 , CR := 150 , CM := 2.50 , CM := 2.50 , CU := 50 , CU := 50

#Cantidad óptima del pedido

Q1 := sqrt( (2·CR·d) / (12·CM) )
Q1 := 100.0000000 unidades

#Es necesario multiplicar el costo de mantener (CM) por 12 para convertir
#a las mismas unidades de tiempo que la demanda D.

#Respuesta al inciso b) , #Con Costos de reorden de (CR) = 50, tenemos
Q2 := sqrt( (50 / 150) ) · 100 , Q2 := (100 / 3) · sqrt(3) , evalf(%) 57.73502693 unidades

#El nuevo costo total (CT) es

CT1 := ( (Q2 / 2) ) · 12 · CM + CU · ( d / Q2 ) , CT1 := 1000.000000 · sqrt(3) , evalf(%) 1732.050808
#El valor previo del costo total CT (Para Q1=100)

CT2 := ( Q1 / 2 ) · 12 · CM + CR · ( d / Q1 ) , CT2 := 3000.000000
```

Por lo tanto, el ahorro es de \$1,268 ( $\$3,000 - \$1,732$ ) o \$2,536 durante dos años, y esto supera el costo de \$1000. (Si los ahorros se produjeron a lo largo de un período de tiempo más largo, sería prudente descontarlos de nuevo a un valor actual antes de hacer la comparación.)

#### **Problema No. 4 (Bonini, Ch., Hausman, W., Bierman, H. (1997))**

Una empresa utiliza una cierta pieza en el montaje de juegos de equipos electrónicos a una tasa de 8,000 por año. Cada pieza vale \$18 dólares. La empresa estima el costo de mantener el inventario en 20% del valor del artículo por año.

La empresa puede producir la pieza en una de dos máquinas. En la máquina A, el costo de configuración es \$200 dólares; en la máquina B es sólo \$100 dólares. Sin embargo, cuesta 10 centavos más por unidad producir el repuesto si se usa la máquina B que si se hace en la máquina A.

¿Cuál máquina debe usar la empresa? ¿Cuál es el tamaño del lote?

#### **Solución. Resolviendo con Maple**

```
#Solución problema No. 4, Bonini. , #Datos del problema,
#Demanda  $D=d=8,000$  por año, Costo de ordenar  $CR=200$  para la máquina A

#Cantidad Económica del pedido  $Q$  , #Costo de mantener el inventario = 0.20 de 18

#Definiendo datos en Maple, sean, Para la máquina A

 $d := 8000$  ,  $d := 8000$  ,  $CRA := 200$  ,  $CRA := 200$  ,  $CM := 0.20 \cdot 18$  ,  $CM := 3.60$ 

 $QA := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot CRA \cdot d}{CM}\right)$  ,  $QA := 942.8090415$  , #Costo total del inventario máquina A

 $CTA := \frac{QA \cdot CM}{2} + CRA \cdot \left(\frac{d}{QA}\right)$  ,  $CTA := 3394.112549$ 

#Para la máquina B

 $CRB := 100$  ,  $CRB := 100$  ,  $QB := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot CRB \cdot d}{CM}\right)$  ,  $QB := 666.6666666$ 

#Costo total de inventario máquina B

 $CTB := \frac{QB \cdot CM}{2} + CRB \cdot \left(\frac{d}{QB}\right)$  ,  $CTB := 2400.000000$ 
```

*#Sin embargo, a esto debe añadirse el costo variable incremental de 0,10 (\$8,000) = \$800  
# Así, el costo total con la máquina B es 3,200 , que es menor que A, por lo que B debe usarse*

### **Problema No. 5 (Bonini, Ch., Hausman, W., Bierman, H. (1997))**

ABC Company utiliza 10,000 unidades por año de un producto. El costo unitario de mantenimiento es de \$3 dólares por año. El costo de pedir un lote es de \$60 dólares.

- a) ¿Cuál es el tamaño óptimo del pedido?
- b) Si los costos de los pedidos fueran 60 centavos por pedido, ¿cuántas unidades deben pedirse de una sola vez?

### **Solución. Resolviendo con Maple**

*#Problema No. 5. Bonini.*

*#Datos del problema , #Sean: D=d=demanda= 100,000 unidades ,*

*#Costo de Ordenar=CR=60 dólares , #Costo de mantener el inventario=CM= 3 dólares por año*

*#inciso a)*

*d := 100000 , d := 100000 , CR := 60 , CR := 60 , CM := 3 , CM := 3*

*Q := sqrt( $\frac{2 \cdot d \cdot CR}{CM}$ ) , Q := 2000 unidades*

*#inciso b), si los costos de ordenar fueran de 60 centavos*

*Q := sqrt( $\frac{2 \cdot d \cdot 0.60}{CM}$ ) , Q := 200.0000000 unidades*

### **Problema No. 6 (Bonini, Ch., Hausman, W., Bierman, H. (1997))**

Dada la misma situación literal a) del problema No. 5, con la información adicional de que el costo de los pedidos puede reducirse de \$60 dólares a \$15 dólares por lote, si la empresa se une a una cooperativa de compras, pagando una cuota de afiliación anual de \$2,000 dólares.

- a) ¿Cuál sería el tamaño óptimo del pedido si la empresa decidiera unirse a la cooperativa?
- b) ¿Debe unirse la empresa a la cooperativa?

### **Solución. Resolviendo con Maple**

```
#Problema No. 6. Bonini. #Datos del problema , #Sean: D=d=demanda= 100,000 unidades
#Costo de Ordenar=CR=15 dólares , #Costo de mantener el inventario=CM= 3 dólares por año
#inciso a) d := 100000 , d := 100000 , CR := 15 , CR := 15 , CM := 3 CM := 3 ,
Q := sqrt( (2*d*CR) / CM ) , Q := 1000 , #Inciso b). El costo total utilizando el costo total anual, es
CT := (2000*CM) / 2 + (d*60) / 2000 , CT := 6000 ,
#El costo total usando el nuevo costo de pedido reducido es:
CT := 3000
#La reducción de costo es: 6000 - 3000 , 3000
#Como la reducción de 3000 excede la tarifa de afiliación de $2,000
#la empresa debe asociarse con la cooperativa y pedir lotes de Q
# = 1000 unidades.
```



## 10. Ajuste de la cantidad de pedido económico

Alejándose de la Cantidad Económica del Pedido (*EOQ*)

Las empresas manufactureras suelen tener un problema con el (*EOQ*). Cuando sus costos de configuración de lotes son altos, el (*EOQ*) puede sugerir lotes muy grandes lo que complica la programación de la producción, da largos plazos de entrega a los clientes, necesita almacenamiento excesivo y dejar demasiado capital en las existencias. Estos problemas pueden anularse poniendo un valor artificialmente elevado en el costo de tenencia, pero ilustra una debilidad del cálculo. Otros problemas surgen cuando:

El (*EOQ*) sugiere un valor fraccionario para las cosas que vienen en unidades discretas (una orden para 2.7 camiones, por ejemplo, no tiene sentido y compraríamos dos o tres); los proveedores no están dispuestos a dividir los tamaños estándar de los envases (227 kg de cemento, por ejemplo, se redondearían a los 50 kg más próximos);

Las entregas se efectúan con vehículos de capacidad fija, de modo que 12 toneladas, digamos, podrían caber en un camión, pero el (*EOQ*) de 13 toneladas necesitaría dos camiones y, por lo tanto, dos costes de entrega; es simplemente más conveniente redondear tamaños de orden a un número conveniente.

Esto plantea la cuestión de cuánto subirían los costos si no usamos el (*EOQ*).

Supongamos que tenemos los siguientes valores:

- Demanda, (*D*) = 6,000 unidades al año
- Costo unitario, (*CU*) = \$ 30 por unidad
- Costo de reorden, (*RC*) = \$ 125 una orden
- Costo de mantenimiento, (*CM*) = \$ 7 por unidad al año

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones estándar se obtiene:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(125)(6,000)}{(7)}} = \sqrt{\frac{2(125)(6,000)}{(6)}} = 462.91 \text{ unidades}$$

$$CV^* = (CM)(Q^*) = (7)(462.91) = \$3,240.37 \text{ en un año}$$

Es improbable que alguien ordene 463 unidades (y ciertamente no 462.91), por lo que sería útil saber lo sensible que es el costo de pequeños cambios alrededor de ( $Q^*$ ). Si nos movemos a una pequeña distancia del (EOQ), ¿el costo sube muy rápidamente, o es relativamente estable y sólo da pequeñas penalidades? ¿Qué sucede aquí si compramos en lotes de, digamos, 450 ó 500 unidades?

### Órdenes de 450 unidades. Resolviendo con Maple

*#Demanda* ,  $d := 6000$  ,  $d := 6000$  , *#Costo de Reorden* ,  $CR := 125$  ,  $CR := 125$   
*#Costo de Mantenimiento* ,  $CM := 7$  ,  $CM := 7$  , *#Cantidad de pedido (orden)1* ,  $Q1 := 450$   
 $Q1 := 450$  ,  $Q2 := 500$

*#Costo Variable 1 (para 450 unidades)* ,  $CV1 := \frac{(CR) \cdot (d)}{Q1} + \frac{(CM) \cdot Q1}{2}$  ,  $CV1 := \frac{9725}{3}$   
*evalf(%)* , \$3241.666667 (dólares)

### Órdenes de 500 unidades. Resolviendo con Maple.

Mismos datos anteriores excepto por

*#Cantidad de orden (pedido)2* ,  $Q2 := 500$  , *#Costo Variable 2 (para 500 unidades)*  
 $CV2 := \frac{(CR) \cdot d}{Q2} + \frac{(CM) \cdot Q2}{2}$  ,  $CV2 := 3250$  (dólares)

Los lotes de 450 unidades - que están con un 2.8 por ciento por debajo de óptimo - aumentan los costos variables en \$ 1.30 o 0.04 por ciento.

Los lotes de 500 unidades - que están en un 8 por ciento por encima del óptimo - aumentan los costos variables en \$ 9.63 o 0.3 por ciento.

En este caso el costo variable es claramente estable alrededor del valor óptimo. En la práctica, esto es siempre cierto, y podemos alejarnos un poco del (EOQ) y no obtener un costo significativamente mayor.

## 11. Modelo de Cantidad Económica del Pedido (EOQ) cuando se permiten faltantes (déficit)

En el modelo EOQ que se abordó en capítulos anteriores, se supuso que un pedido era recibido precisamente en el instante en el que el nivel de inventario llegaba a cero. No se toleraban faltantes, y así los costos de los faltantes se ignoraban en el modelo de decisión de inventario.

Aunque en muchas situaciones de inventarios los faltantes deben evitarse, hay casos en donde es económicamente justificable planear y permitir faltantes. Hablando prácticamente, estos tipos de situaciones existen cuando el valor por unidad del inventario es alto. Un ejemplo de este tipo de situación es el del individuo que compra un nuevo auto que no está disponible donde el distribuidor, quien lo pide posteriormente para el cliente.

Ahora aliviemos la situación de no faltantes (se permite déficit) y permitimos que ocurran.

Además, agregamos la suposición de que todas las demandas que no se satisfacen como resultado de los faltantes de inventario se piden de nuevo y eventualmente se cumplen. Las suposiciones del modelo clásico EOQ todavía se aplican excepto, naturalmente, la suposición que no permite faltantes.

El perfil de inventario, cuando hay faltantes de existencias se muestra en la figura No. 10.

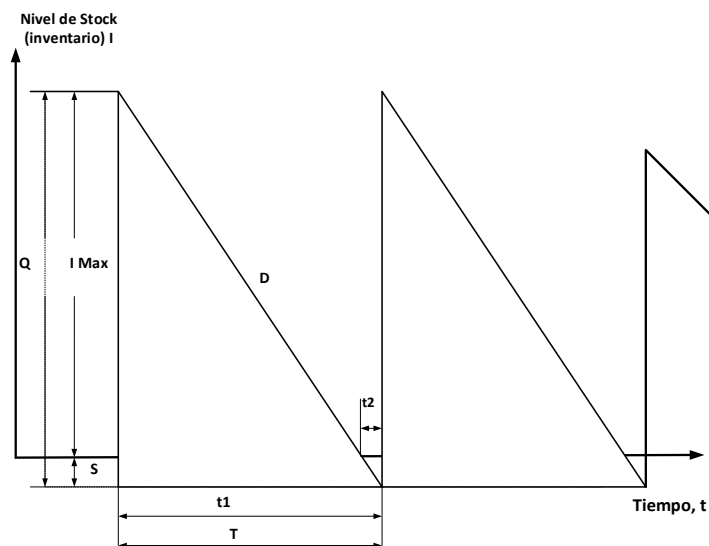


Figura No. 10. Perfil de inventario con faltantes planeados.

### 11.1. Derivación del modelo de inventarios cuando existe déficit o faltantes planeados

Además de la notación que se ha utilizado en secciones anteriores, definiremos los siguientes términos, sea:

$CS$  = Costo de penalización por pedidos pospuestos (faltantes), proporcionales tanto al número de pedidos pospuestos como al tiempo, costo del faltante por unidad de faltante por año.

$S$  = Número de faltantes por pedido (cantidad pospuesta)

$I_{MÁX}$  = Nivel máximo de inventario ( $Q - S$ )

$t_1$  = Tiempo durante el cual hay inventario disponible

$t_2$  = Tiempo durante el cual existen faltantes

$T$  = Tiempo entre los pedidos (tiempo de ciclo  $T = t_1 + t_2$ )

$Q$  = Cantidad pedida (unidades)

$D$  = Requisitos de demanda anual (\$ por unidad)

$CR$  = Costo de reorden (costo de pedir) (\$ por pedido)

$CM$  = Costo de mantener el inventario (\$ por unidad de tiempo; típicamente la unidad de tiempo es 1 año, pero puede ser cualquier unidad de tiempo siempre y cuando todas las unidades sean consistentes)

$CU$  = Costo unitario de compra (\$ por unidad)

$CT$  = Costo incremental total

Objetivo: Expresión total del costo

$$\text{Costo por pedir (costo de reorden)} = (CR) \left( \frac{D}{Q} \right)$$

$$\text{Costos de mantenimiento} = (CM) \frac{(Q - S)^2}{2Q}$$

$$\text{Costo del faltante} = \frac{(CS)(S)^2}{2Q}$$

$CT = \text{Costo por pedir(reorden)} + \text{Costo de mantener} + \text{Costo del faltante}$

$$CT = (CR) \left(\frac{D}{Q}\right) + (CM) \frac{(Q-S)^2}{2Q} + (CS) \frac{(S)^2}{2Q}$$

### 11.2 Derivación por medio del cálculo de $Q^*$ , $S^*$ , y $I^*$ para el modelo (EOQ) cuando se permiten faltantes.

Dados los parámetros del modelo ( $CR, CM, CS, D$ ) y la expresión anual del  $CT$ , podemos determinar las reglas de decisión óptimas para las variables de decisión:

- 1) La cantidad óptima de pedido  $Q^*$
- 2) El máximo nivel de inventario  $I_{m\acute{a}x}$

Usando Maple, tenemos:

$$CT := \frac{(CR) \cdot D}{Q} + \frac{(CM) \cdot (Q - S)^2}{2 \cdot Q} + \frac{(CS) \cdot S^2}{2 \cdot Q}$$

$$CT := \frac{CRD}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q}$$

$Diff(CT, Q)$

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left( \frac{CRD}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q} \right)$$

$diff(CT, Q) = 0$

$$-\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM(Q-S)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q^2} - \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q^2} = 0$$

$$\left\{ \text{solve} \left( \left\{ -\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM(Q-S)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q^2} - \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q^2} = 0 \right\}, \{Q\} \right) \right\}$$

$$\left\{ \left\{ Q = \frac{\sqrt{CM(CMS^2 + CSS^2 + 2CRD)}}{CM} \right\}, \left\{ Q = -\frac{\sqrt{CM(CMS^2 + CSS^2 + 2CRD)}}{CM} \right\} \right\}$$

Pero:  $S := \frac{Q \cdot CM}{(CM + CS)}$ ,  $S := \frac{CMQ}{CM + CS}$

$$CT, \frac{CRD}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CM \left( Q - \frac{CMQ}{CM + CS} \right)^2}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CS CM^2 Q}{(CM + CS)^2}$$

Diff(CT, Q)

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left( \frac{CRD}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CM \left( Q - \frac{CMQ}{CM + CS} \right)^2}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CS CM^2 Q}{(CM + CS)^2} \right)$$

diff(CT, Q) = 0

$$-\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM \left( Q - \frac{CMQ}{CM + CS} \right) \left( 1 - \frac{CM}{CM + CS} \right)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM \left( Q - \frac{CMQ}{CM + CS} \right)^2}{Q^2} + \frac{1}{2} \frac{CS CM^2}{(CM + CS)^2} = 0$$

$$\left\{ \text{solve} \left( \left\{ -\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM \left( Q - \frac{CMQ}{CM + CS} \right) \left( 1 - \frac{CM}{CM + CS} \right)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM \left( Q - \frac{CMQ}{CM + CS} \right)^2}{Q^2} + \frac{1}{2} \frac{CS CM^2}{(CM + CS)^2} = 0, \{Q\} \right\} \right) \right\}$$

$$\left\{ \left\{ Q = \frac{\sqrt{2} \sqrt{CMCS CRD (CM + CS)}}{CMCS} \right\}, \left\{ Q = -\frac{\sqrt{2} \sqrt{CMCS CRD (CM + CS)}}{CMCS} \right\} \right\}$$

Tomando la parte positiva y simplificando términos, la cantidad óptima de pedido que minimiza CT es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{CM}} \sqrt{\frac{(CM + CS)}{CS}}$$

que es el número de faltantes óptimo que minimiza el CT.  $I_{máx}^*$  se calcula simplemente de la relación:

$$I_{máx}^* = Q^* - S^*$$

Pero:  $S^* = Q \left( \frac{CS}{(CS)-(CM)} \right)$ , equivalente a:  $S^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)(CM)}{(CM)(CS)-(CS)^2}}$

Sustituyendo en Q la expresión obtenido, se tiene:

$$I_{m\acute{a}x}^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{CM}} \sqrt{\frac{(CM + CS)}{CS}} - Q \left( \frac{CM}{(CM + CS)} \right) = Q^* \left( \frac{(CS)}{(CS) - (CM)} \right)$$

El costo incremental total, es:

$$CT(Q^*) = \sqrt{2(CM)(CR)D} \sqrt{\frac{(CS)}{(CM + CS)}}$$

De igual forma:

$$S^* = Q^* - I_{m\acute{a}x}^*$$

Número óptimo de pedidos:

$$(\text{pedidos/año}) = (\text{Unidades/año}) / (\text{unidades/pedido}): N^* = \frac{D}{Q^*}$$

$$\text{Tiempo entre pedidos (denominado a menudo tiempo de ciclo): } T^* = \frac{Q^*}{D}$$

### Ejemplo:

Supongamos que una empresa está considerando la posibilidad de permitir que se presenten pedidos pospuestos para uno de sus artículos. La empresa estima el costo faltante (CS) basado en pérdida de prestigio, pérdidas potenciales de utilidad debido a pérdida de ventas y costos de retardo, en un valor cuatro veces el costo de mantenimiento, o sea \$8 por unidad por año y CR = \$9 por pedido.

Los datos del problema son:

$$\text{Costos de mantener el inventario por unidad} = (CM) = \$2$$

$$\text{Costo por pedido (Costo de Reorden)} = (CR) = \$9$$

$$\text{Número de pedidos por año} = D = 10,000$$

$$\text{Frecuencia de pedidos} = T = \frac{D}{Q^*}$$

## Utilizando Maple para resolver el problema para determinar la cantidad óptima del pedido (EOQ) cuando no se permiten faltantes.

#Problema de inventarios con demanda insatisfecha

#Demanda  $d = 10,000$  unidades por año , #Costo de Reorden  $CR = \$9$

#Costo de mantener  $CM = \$2$  por unidad por año ,

#Costo de faltante (4 veces costo de mantener)  $= CS = \$8$  por unidad por año

#Solución del problema cuando no se permiten faltantes

$$Q := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot d \cdot CR}{CM}\right), \sqrt{2} \sqrt{\frac{d \cdot CR}{CM}}, d := 10000, 10000, CR := 9, 9, CM := 2, 2$$

$Q$

$$\sqrt{2} \sqrt{45000}, \text{evalf}(\%), 300.0000000 \text{ unidades}, CT := \text{sqrt}(2 \cdot CR \cdot CM \cdot d), 600 = \$ 600$$

#Frecuencia de pedidos (tiempo de ciclo) ,

$$T := \frac{Q}{d}, \frac{1}{10000} \sqrt{2} \sqrt{45000}, \text{evalf}(\%), 0.03000000000,$$

#Suponiendo año de 350 días, se tiene

$$350 \cdot 0.030, 10.500 \text{ días}, \text{#Número de pedidos por año},$$

$$N := \frac{d}{Q}, \frac{1}{9} \sqrt{2} \sqrt{45000}, \text{evalf}(\%), 33.33333333 \text{ pedidos por año}$$

## De igual forma, cuando se permiten faltantes, tenemos:

#Solución del problema cuando se permiten faltantes (deficit)

#Demanda  $d = 10,000$  unidades por año , #Costo de mantener  $CM = \$2$  por unidad por año

#Costo de pedido (Reorden) =  $\$9$  por pedido ,

#Costo de faltante (costo de penalización)  $= CS = 4$  veces el Costo de mantener,  $4 \times CM = 4 \times \$2 = \$8$



#por unidad por año. , #sea  $Q1$  =cantidad óptima de pedido con deficit ,

$$Q1 := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot CR \cdot d}{CM}\right) \cdot \text{sqrt}\left(\frac{CM + CS}{CS}\right) , 300 \sqrt{\frac{2 + CS}{CS}} , CS := 8 , 8$$

$$Q1 , 75 \sqrt{5} \sqrt{4} , \text{evalf}(\%) , 335.4101966 \text{ unidades}$$

#Número de faltantes óptimo por pedido

$$S := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot CR \cdot d \cdot CM}{(CM) - (CS) - (CS)^2}\right) , \frac{60}{7} \sqrt{70} , \text{evalf}(\%) , 71.713716551 \text{ unidades}$$

#Nivel máximo de inventario

$$IMAX := Q1 - S , 75 \sqrt{5} \sqrt{4} - \frac{60}{7} \sqrt{70} , \text{evalf}(\%) , 335.4101966 - 71.713716551$$

$$335.4101 - 71.7337 , 263.6764 \text{ unidades}$$

#Costo incremental Total

$$CT := \text{sqrt}(2 \cdot CM \cdot CR \cdot d) \cdot \text{sqrt}\left(\frac{CS}{CM + CS}\right) , 240 \sqrt{5} , \text{evalf}(\%) , 536.6563145 = \$536.65$$

De igual forma:

$$T1 := \frac{Q1}{d} , \frac{3}{400} \sqrt{5} \sqrt{4} , \text{evalf}(\%) , 0.03354101966 , \% \cdot 350 , 11.73935688 \text{ días}$$

Así, si este modelo se implementa, el sistema comparado con el modelo clásico de la cantidad óptima del pedido (EOQ) tendrá las siguientes características:

<b>Características</b>	<b>(EOQ) Se permiten faltantes</b>	<b>(EOQ) No se permiten faltantes</b>
$Q^*$ (unidades)	335	300
$I^*$ máx (unidades)	263	300
$T^* = \frac{Q}{D}$ (días)	11.73	10.5
$CT^*$ (\$)	536.55	600.00

Así, en este ejemplo, el permitir faltantes se traduce en un ahorro de  $(\$600 - \$536.55 = \$63.45)$  o un poco más del 10% sobre el modelo sin faltantes (EOQ). La comparación anterior se basa en una asignación precisa del costo faltante, que en realidad es un parámetro muy difícil de estimar. Si a la compañía le preocupa mucho que los faltantes pueden deteriorar seriamente su prestigio y la pérdida de ventas, entonces las ganancias anticipadas no serían suficientes para garantizar el cambio de un modelo de inventario que permitía faltantes planeados. Un análisis de sensibilidad en CS sería un método útil para decidir en este caso.

## 12. Modelo de Cantidad Óptima del Pedido (EOQ) para lotes de producción: un solo producto

Consideraremos ahora el caso en donde los artículos se reciben para inventario a una tasa constante con el tiempo, al mismo tiempo que las unidades se consumen. Esto contrasta con el modelo de la cantidad óptima del pedido (*EOQ*), en donde la cantidad total pedida se recibe instantáneamente. Este modelo se diseña típicamente para situaciones de producción en que se coloca un pedido, la producción comienza y un número constante de unidades se suma al inventario cada día hasta completa el lote de producción. Al mismo tiempo, las unidades se demandan y consumen a una tasa constante. Se supone que la tasa de producción es mayor que la tasa de demanda. De otra manera, no se acumulará inventarios y se presentarán faltantes.

### 12.1. Formulación del modelo

Definamos los siguientes parámetros:

$p$  = *tasa de producción, esta tasa se asume constante*

$d$  = *tasa de demanda o utilización, también se asume constante*

$Q$  = *cantidad pedida (unidades)*

$T$  = *periodo de tiempo entre pedidos (tiempo de ciclo)*

$CR$  = *costo por pedir (preparación, o alistamiento) (\$ por pedido)*

$CM$  = *costo de mantener el inventario (\$ por unidad de tiempo). Un año*

$D$  = *requisitos de demanda anual (unidades por año)*

$N$  = *número de pedidos o lotes fabricados por año*

$CT$  = *costo incremental total*

#### Función objetivo:

$$CT = \text{costo de ordenar (costo de pedir)} + \text{costo de mantener}$$

El costo de pedir (ordenar) es como antes igual a:

$$\text{Costo por pedir (costo de reorden)} = (CR)\left(\frac{D}{Q}\right)$$

La interpretación del costo de pedir en una situación de producción se le conoce más adecuadamente, como el costo de producción de alistamiento. Este costo, que incluye horas hombre, material y costo de pérdida de producción en que se incurre mientras se prepara el sistema de producción para operación, es un costo fijo que ocurre para cada lote de producción, independientemente de la cantidad producida.

Los costos de preparación (reorden, pedir o alistamiento) representan los costos para desarrollar los planes de producción para el artículo, escribir los pedidos para la planta y realizar los trámites de papel necesarios, alistar las máquinas y controlar el flujo de pedido a lo largo de la planta manufacturera.

El costo de mantenimiento es también igual, como antes, al costo anual unitario de sostenimiento multiplicado por el inventario promedio, es decir:  $(CM)\left(\frac{Q}{2}\right)$ . Sin embargo, puesto que la producción de la cantidad total pedida  $Q$  tiene lugar sobre un periodo de tiempo (definido por la tasa de producción  $p$ ) y las partes ingresan al inventario, no en grandes tandas o cantidades (como en el modelo  $EOQ$ ), sino en pequeñas cantidades a medida que la producción y el consumo se realizan, obtenemos un patrón de inventario similar a la Figura No. 11.

El máximo nivel de inventario, y por consiguiente el nivel de inventario promedio, no será solamente una función del tamaño del lote como en el modelo clásico  $EOQ$ , sino también una función de la tasa de producción ( $p$ ) y de la tasa de ( $d$ ). Examinemos la figura No. 11 mostrada a continuación:

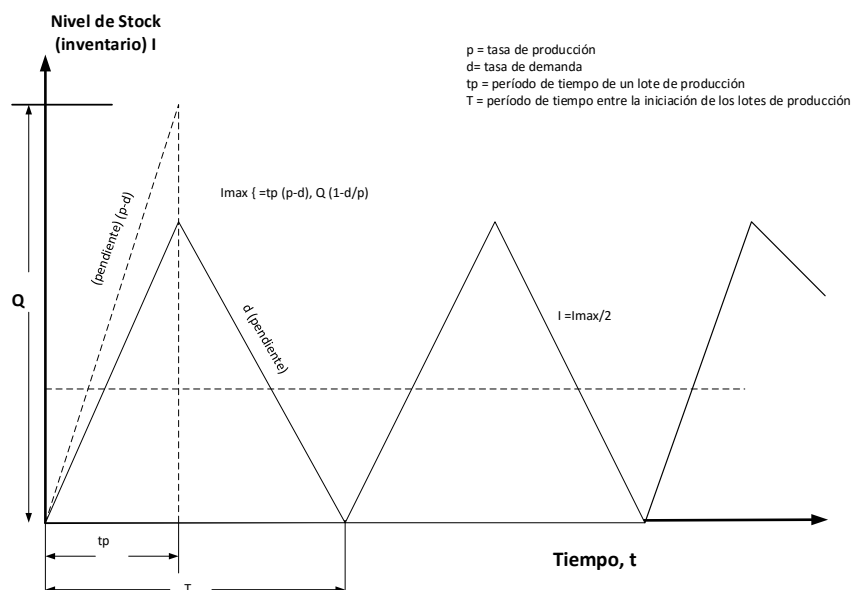


Figura No. 11. Perfil de inventario en función del tiempo, con recepción de artículos no instantánea.

Nivel máximo de inventario

$$I_{m\acute{a}x} = t_p(p - d)$$

donde  $(p - d)$  es la tasa de acumulación de inventario por unidad de tiempo ( $p$  se supone mayor que  $d$ ) y  $t_p$  es la duración total del lote de producción. Para obtener el nivel de inventario promedio en términos de la variable de decisión  $Q$ , reemplazamos  $(\frac{Q}{p})$  por  $t_p$ , obteniendo:

Inventario promedio:

$$\frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

El costo anual de mantenimiento es:

$$(CM) \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

La expresión del costo total es:

$$CT = (CR) \frac{D}{Q} + (CM) \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

## 12.2. Derivación de las reglas de decisión óptimas para el modelo de la cantidad óptima del pedido (EOQ) para lotes de producción: un solo producto

Dada la función objetivo

$$CT = (CR) \frac{D}{Q} + (CM) \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

Y los parámetros del modelo ( $CM, CR, D, d, p$ ), podemos derivar una regla de decisión óptima para  $Q^*$  por medio del cálculo diferencial. Los resultados utilizando Maple, son:

*#Derivación del tamaño de lote óptimo  $Q$ , #para el modelo de producción por tamaño de lote*

*#Formula del costo anual total*

$$CT := CR \cdot \left(\frac{DI}{Q}\right) + CM \cdot \left(\frac{Q}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right), \quad \frac{CRDI}{Q} + \frac{1}{2} CMQ \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

$$Diff(CT, Q) = diff(CT, Q)$$

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left( \frac{CRDI}{Q} + \frac{1}{2} CMQ \left(1 - \frac{d}{p}\right) \right) = -\frac{CRDI}{Q^2} + \frac{1}{2} CM \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

$$diff(CT, Q) = 0$$

$$-\frac{CRDI}{Q^2} + \frac{1}{2} CM \left(1 - \frac{d}{p}\right) = 0, \quad \frac{1}{2} CM \left(1 - \frac{d}{p}\right) = \frac{CR \cdot DI}{Q^2}$$

$$\frac{1}{2} CM \left(1 - \frac{d}{p}\right) = \frac{CRDI}{Q^2}$$

$$\frac{CR \cdot DI}{\frac{1}{2} CM \left(1 - \frac{d}{p}\right)} = Q^2, \quad \frac{2 CRDI}{CM \left(1 - \frac{d}{p}\right)} = Q^2$$

$$Q = \text{sqrt} \left( \frac{2 CRDI}{CM \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \right), \quad Q = \sqrt{2} \sqrt{\frac{CRDI}{CM \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = Q^*$$

Comprobando mediante el criterio de la segunda derivada, tenemos:

$$Diff(CT, Q, Q) = diff(CT, Q, Q),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Q^2} \left( \frac{CRDI}{Q} + \frac{1}{2} CMQ \left(1 - \frac{d}{p}\right) \right) = \frac{2 CRDI}{Q^3}$$

$$\text{diff}(CT, Q, Q), \frac{2CRD}{Q^3} > 0.$$

Puesto que el valor de la segunda derivada es mayor que cero para  $D$ ,  $CR$ , y  $Q$  mayores que cero,  $Q^*$  es la solución de costo mínimo.

Por lo que:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{CM(1-\frac{d}{p})}} = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{(CM)}} \sqrt{\frac{p}{(p-d)}}$$

También:

$$CT^* = \sqrt{2(CR)(CM)(D)(1 - \frac{d}{p})}$$

El número óptimo de lotes de producción de tamaño  $Q^*$  es, por consiguiente:

$$N^* = \frac{D}{Q^*}$$

Y el tiempo óptimo entre los lotes de producción es:

$$T^* = \frac{1}{N^*} = \frac{Q^*}{D}, = T^* = \sqrt{\frac{2(CR)}{(CM)(D)}} \sqrt{\frac{p}{(p-d)}}$$

El costo variable es:

$$CV^* = \sqrt{2(CR)(CM)(D)} \sqrt{\frac{(p-d)}{p}}$$

### Ejemplo numérico No. 1:

Supongamos que los artículos del ejemplo anterior fueran fabricados por una división de una compañía que tuviera una planta productora contigua a la empresa. Supongamos también que la tasa de producción  $p$  es de 15,000 unidades por año.

Admitamos que  $CM = \$2$ ,  $CR = \$9$ .

$$QI := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot 9 \cdot 10000}{2 \cdot \left(1 - \frac{10}{15}\right)}\right), 300\sqrt{3}, \text{evalf}(\%), 519.6152424 \text{ unidades.}$$

También:

$$CT := \text{sqrt}\left(2 \cdot CR \cdot CM \cdot DI \left(1 - \frac{p}{d}\right)\right), \sqrt{2} \sqrt{CR \cdot CM \cdot DI \left(1 - \frac{p}{d}\right)},$$

$$\text{sqrt}\left(2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 10000 \cdot \left(1 - \frac{10}{15}\right)\right), 200\sqrt{3}, \text{evalf}(\%), 346.4101616 = \$346.410$$

También,

$$N := \frac{10000}{519.6152}, 19.24501054 = \text{número óptimo de lotes de producción de tamaño}$$

$Q^*$

$$T := \frac{1}{N}, 0.05196152000, 0.0519615200 \cdot 350, 18.18653200 = 18.4 \text{ días (0.051 años x 350 días/año)}$$

Finalmente, realicemos la comparación entre reposición finita e instantánea. La tabla siguiente muestra las diferencias entre los modelos.

Comparación de reposición finita e instantánea		
	Tasa de reabastecimiento finita	Reembolso instantáneo (Para la cantidad de económica del pedido EOQ)
Cantidad ordenada	$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{(CM)}} \sqrt{\frac{p}{(p-d)}}$	$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)}{(CM)}}$
Tiempo de ciclo	$T^* = \sqrt{\frac{2(CR)}{(CM)(D)}} \sqrt{\frac{p}{(p-d)}}$	$T^* = \sqrt{\frac{2(CR)}{(CM)(D)}}$
Costo variable	$CV^* = \sqrt{2(CR)(CM)(D)} \sqrt{\frac{(p-d)}{p}}$	$CV^* = \sqrt{2(CR)(CM)(D)}$
Costo total	$CT^* = \sqrt{2(CR)(CM)(D)\left(1 - \frac{d}{p}\right)}$	$CT^* = (CU)(D) + CV^*$
Tiempo óptimo de producción	$TP^* = \frac{Q^*}{p}$	

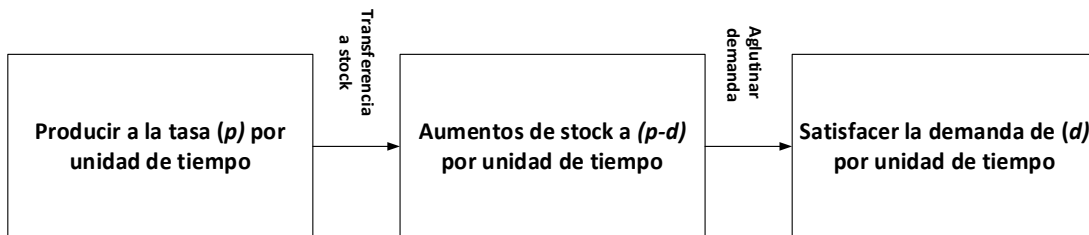


### 12.3. Discusión y reflexión:

Imagínese trabajando con un mayorista o minorista. Tienen entregas grandes que aumentan instantáneamente el nivel de bienes o mercancías, y luego una serie de demandas más pequeñas que lentamente la reducen.

Consideremos, sin embargo, las existencias de productos terminados al final de una línea de producción. Si la tasa de producción es mayor que la demanda, los bienes se acumularán a un ritmo finito, de modo que no hay reposición instantánea, sino una tasa de reposición finita.

Si la tasa de producción es menor que la demanda, cada unidad que llega es inmediatamente transferida a un cliente y no hay existencias. Los bienes sólo se acumulan cuando la tasa de producción es mayor que la demanda. Entonces el nivel de stock sube a un ritmo que es la diferencia entre producción y demanda. Si llamamos la tasa de producción  $p$ , las existencias se acumularán a una tasa  $(p - d)$ , como se muestra en la siguiente Figura No. 12.



*Figura No. 12. Tasa de reabastecimiento finita.*

Este aumento continuará mientras la producción continúe. Esto significa que tenemos que tomar una decisión en algún momento para detener la producción de este elemento y probablemente transferir la fabricación de otros elementos a otras instalaciones.

El objetivo de este análisis es encontrar el mejor momento para esta transferencia, lo que equivale a encontrar un tamaño de lote óptimo.

Supondremos que las otras suposiciones que hemos hecho para la cantidad de orden económico siguen siendo válidas, por lo que seguimos considerando un solo artículo, con demanda conocida, constante y continua, con costos conocidos y constantes, y sin escasez.

Así que tenemos reabastecimiento a una tasa  $p$  y la demanda a una tasa  $d$ , con el crecimiento de la población a una tasa  $(p - d)$ . Después de algún tiempo, decidimos detener la producción.

Entonces, el stock se utiliza para satisfacer la demanda y disminuye a una tasa  $d$ . Después de algún tiempo adicional,  $(T - tp)$ , en donde todas las existencias se han utilizado y debemos comenzar la producción de nuevo.

La Figura No. 11 muestra la variación resultante en el nivel de stock, donde asumimos que hay un valor óptimo para  $tp$  (que corresponde a un tamaño de lote óptimo) que usamos siempre.

#### 12.4. Problemas resueltos de la sección

##### Problema resuelto No. 1 (Waters, 2003)

La demanda de un artículo es constante en 1,800 unidades al año. El artículo se puede hacer a una tarifa constante de 3,500 unidades por año. El coste unitario es \$ 50, el coste de la reorden o de pedido de la producción es \$650, y el coste de mantener es el 30 por ciento del valor un año. ¿Cuál es el tamaño óptimo del lote o del artículo? Si el tiempo de preparación de la producción es de 2 semanas, ¿cuándo debería iniciarse?

Solución:

Listando las variables y datos proporcionados:

$$D = d = 1,800 \text{ unidades por año}$$

$$p = 3,500 \text{ unidades por año}$$

$$CU = \$50 \text{ por unidad}$$

$$CR = \$650 \text{ por lote}$$

$$CM = (30\% \text{ de } 50) = (0.30 \times 50 = 15 \text{ unidades por año})$$

Sustituyendo estos valores y utilizando Maple, tenemos:

*#Ejemplo resuelto No. 1*

*#Datos del problema*

#Costo de ordenar  $CR = 650$  por lote , #Demanda  $D = d = 1,800$  unidades por año

#Tasa de producción  $p = 3,500$  unidades por año , #Costo unitario  $CU = 50$  por unidad

#Costo de mantener  $CM = 15$  por unidad por año

#Cantidad óptima del pedido

$$Q := \text{sqrt}\left(\left(\frac{2 \cdot CR \cdot d}{CM}\right) \cdot \left(\frac{p}{p-d}\right)\right), \quad Q := \frac{100}{17} \sqrt{9282}, \quad CR := 650, \quad CR := 650$$

$$d := 1800, \quad d := 1800, \quad CM := 15, \quad CM := 15, \quad p := 3500, \quad p := 3500$$

$$Q, \quad \frac{100}{17} \sqrt{9282}, \quad \text{evalf}(\%), \quad \$566.7243339$$

#Tiempo de producción óptimo

$$TP := \frac{Q}{p}, \quad TP := \frac{1}{595} \sqrt{9282}, \quad \text{evalf}(\%), \quad 0.1619212383,$$

#Convirtiendo a semana:  $0.1619212383 \times 52$  semanas ,  $(0.1619212383) \cdot (52)$

**8.419904392** semanas

#La longitud óptima del ciclo es:

$$T := \text{sqrt}\left(\left(\frac{2 \cdot CR}{CM \cdot d}\right) \cdot \left(\frac{p}{p-d}\right)\right), \quad T := \frac{1}{306} \sqrt{9282}, \quad \text{evalf}(\%) \quad 0.3148468521$$

#Convirtiendo  $0.3148468521$  años a semanas

$(0.3148468521) \cdot (52)$  , **16.37203631** semanas

#El costo variable óptimo es:

$$CV := \text{sqrt}\left((2 \cdot CR \cdot CM \cdot d) \cdot \left(\frac{p-d}{p}\right)\right), \quad CV := \frac{300}{7} \sqrt{9282}, \quad \text{evalf}(\%) \quad \$4128.991576 \text{ por año}$$

#El costo total óptimo por unidad de tiempo es:

$$CU := 50, CU := 50, CT := CU \cdot d + CV, CT := 90000 + \frac{300}{7} \sqrt{9282}$$

evalf(%), \$94128.99158

Finalmente, si el tiempo de preparación de la producción es de 2 semanas, podemos encontrar el tiempo para comenzar desde el valor de reorden. El tiempo de ciclo es más largo que el tiempo de entrega, así que:

$$ROL := 2 \cdot \left( \frac{1800}{52} \right), ROL := \frac{900}{13}, \text{evalf}(\%) 69.23076923$$

#Redondeando al entero más cercano = 70

La mejor política es comenzar a hacer un lote de 567 unidades cada vez que las existencias caen a 70 unidades.

### **Ejemplo resuelto No. 2 (Waters, 2003)**

Los meteorólogos de Saloman Curtis han estimado la demanda de un artículo que importan de Taiwán a un promedio de 20 unidades al mes. Ellos pagan \$ 1,000 por cada unidad.

El año pasado, el Departamento de Compras y Transporte Interno organizó la entrega de 2,000 pedidos y tuvo costos de operación de \$ 5,000,000.

La Sección de Cuentas cita los costos anuales de tenencia como 20 por ciento del costo unitario por la pérdida de capital y oportunidad, 5 por ciento por espacio de almacenamiento, 3 por ciento por deterioro y obsolescencia y 2 por ciento por seguro.

Todos los demás costos asociados con el almacenamiento del artículo se combinan en un costo anual fijo de \$ 24,000. Calcule la cantidad de pedido económico para el artículo, el tiempo entre pedidos y el costo total correspondiente.

Al hacer que el artículo a una tasa de 40 unidades al mes Saloman Curtis podría evitar el costo fijo de \$ 24,000 al año, reducir el costo unitario a \$ 900 y tener un costo de ordenación de lote de \$ 1,000. ¿Sería mejor para la empresa hacer el artículo en sí en lugar de comprarlo?

Solución:

En primer lugar, podemos considerar la opción de comprar el artículo. Entonces conocemos las siguientes variables.

Listando las variables y datos proporcionados:

$$D = d = 20 \times 12 = 240 \text{ unidades por año}$$

$$p = 40 \times 12 = 480 \text{ unidades por año}$$

$$CU = \$1,000 \text{ por unidad}$$

$$CR = \frac{\$5,000,000}{2,000} = \$2,500 \text{ por orden}$$

$$CM = (0.2 + 0.05 + 0.02) \times 1,000 = 0.30 \times 100 = \$300 \text{ unidades por año}$$

### Resolviendo con Maple (reembolso instantáneo, para la cantidad de económica del pedido EOQ)

#Problema resuelto No. 2 (Waters) , # Datos del problema ,

#Demanda =  $20 \times 12 = 240$  unidades por año , #Costo unitario =  $CU = \$1,000$  por año

#Costo de ordenar  $CR = \left( \frac{5000000}{2000} \right) = \$2,500$  por orden

#Costo de mantener =  $CM = (0.2 + 0.05 + 0.03 + 0.02) \times 1,000 = \$300$  por unidad por año

#Tasa de producción =  $p = 40 \times 12 = 480$  unidades por año.

#Cantidad óptima del pedido

$$Q := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot CR \cdot d}{CM}\right), \quad Q := \sqrt{2} \sqrt{\frac{CR \cdot d}{CM}}, \quad CR := 2500, \quad CR := 2500, \quad d := 240, \quad d := 240$$

$$CM := 300, \quad CM := 300, \quad Q, \quad \sqrt{2} \sqrt{2000}, \quad \text{evalf}(\%) \quad 63.24555319 \text{ unidades}$$

#Tiempo entre ordenes (tiempo de ciclo). Un año = 52 semanas

$$T := \frac{Q}{d}, \quad T := \frac{1}{240} \sqrt{2} \sqrt{2000}, \quad \text{evalf}(\%) \quad 0.2635231383 \text{ años},$$

$$(0.2635231383) \cdot (52) \text{ #resultado obtenido por 52 semanas, } 13.70320319 \text{ semanas}$$

$$\text{\#Numero de pedidos por periodo} = \frac{D}{Q},$$

$$\frac{240}{Q}, \frac{3}{50} \sqrt{2} \sqrt{2000}, \text{evalf}(\%) 3.794733191, \#3.79 \text{ ordenes por año}$$

$$\#Inventario promedi \frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2000}, \text{evalf}(\%) \$31.62277660$$

*#Inversion media*

$$CU := 1000, CU := 1000, \frac{Q}{2} \cdot CU, 500 \sqrt{2} \sqrt{2000}, \text{evalf}(\%) \$31622.77660$$

*#Máximo stock (existencias)*

$$Q, \sqrt{2} \sqrt{2000}, \text{evalf}(\%) 63.24555319 \text{ unidades}$$

*#Inversión máxima*

$$Q \cdot CU, 1000 \sqrt{2} \sqrt{2000}, \text{evalf}(\%) \$63245.55319$$

*#Costos fijos unitarios*

$$d \cdot CU, \$240000,$$

*#Costos variables*

$$CV := \text{sqrt}(2 \cdot CR \cdot CM \cdot d), CV := 6000 \sqrt{10}, \text{evalf}(\%) \$18973.66596$$

*#Costo total de un periodo*

$$CT := CU \cdot d + CV, CT := 240000 + 6000 \sqrt{10}, \text{evalf}(\%) \$2.589736660 \cdot 10^5 = \$258,973$$

**Utilizando ahora la tasa de reabastecimiento finita y usando Maple, tenemos:**

*#Demanda = 20 x 12 = 240 unidades por año, #Costo unitario = CU= \$900 por año*

*#Costo de ordenar CR= \$1000 por orden, #Costo de mantener =CM=\$270 por unidad por año*

*#Tasa de producción = p = 40 x 12 = 480 unidades por año.*

$$p := 480, p := 480, d := 240, d := 240, CU := 900, CU := 900, CR := 1000, CR := 1000$$

$$CM := 270, CM := 270$$

*#Cantidad óptima del pedido con reabastecimiento finita*

$$QI := \text{sqrt}\left(\frac{2 \cdot CR \cdot d}{CM}\right) \cdot \text{sqrt}\left(\frac{p}{p-d}\right), QI := \frac{40}{3} \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ 59.62847937 unidades}$$

#Tiempo entre ordenes (tiempo de ciclo). Un año = 52 semanas

$$T := \frac{QI}{d}, T := \frac{1}{18} \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ 0.2484519975 años, } (\%) \cdot 52 \text{ 12.91950387 semanas}$$

$$\# \text{Numero de pedidos por periodo} = \frac{D}{QI}, \frac{d}{QI}, \frac{9}{10} \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ 4.024922359}$$

$$\# \text{Inventario promedi} \frac{QI}{2}, \frac{QI}{2}, \frac{20}{3} \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ 29.81423969 unidades}$$

$$\# \text{Inversion media} \frac{QI}{2} \cdot CU, \frac{QI}{2} \cdot CU, 6000 \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ \$26832.81572} = \$26,832.81572$$

#Máximo stock (existencias),  $QI$

$$\frac{40}{3} \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ 59.62847937 unidades}$$

#Inversión máxima,  $QI \cdot CU$

$$12000 \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ \$53665.63145} = \$53,665.63145$$

#Costos fijos unitarios,  $d \cdot CU$ ,  $\$216000 = \$216,000$

#Costos variables

$$CVI := \text{sqrt}(2 \cdot CR \cdot CM \cdot d) \cdot \text{sqrt}\left(\frac{(p-d)}{p}\right), CVI := 1800 \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ \$8049.844717}$$

#Costo total del periodo

$$CTI := d \cdot CU + CVI, CTI := 216000 + 1800 \sqrt{10} \sqrt{2}, \text{evalf}(\%) \text{ \$2.240498447 } 10^5 \\ = \$224,049.8447$$

## **13. Modelo de inventarios con escasez planeada y con pedidos pendientes**

### **13.1. Pedidos atrasados y ventas perdidas**

Los modelos descritos hasta el momento han supuesto que no se permiten escaseces y que toda demanda debe ser cumplida. Esta es una opinión razonable cuando la escasez es muy cara. Hay, sin embargo, circunstancias en las que la escasez planificada es beneficiosa. Un ejemplo obvio viene cuando el costo de mantener un artículo en la una sala de exposición es más alto que el beneficio de venderlo.

Cuando usted compra un automóvil nuevo, por ejemplo, en la sala de exhibición no se mantiene una exposición de cada versión en sus modelos de autos, pero usted elige las características que usted desea, la sala de exposiciones ordena esto al fabricante, y después usted espera el coche para que le sea entregado. En otro caso, si compra una computadora de la compañía Dell, usted visita su sitio web para diseñar un sistema y luego Dell lo fabrica y lo entrega con un plazo de entrega corto.

Cuando la demanda de los clientes de un artículo no puede ser satisfecha de las existencias, hay escasez. Entonces el cliente tiene una opción (como se muestra en la figura No. 13).

En primer lugar, pueden esperar a que el artículo entre en stock, en cuyo caso su demanda se cumple con un pedido pendiente. O pueden retirar su pedido y acudir en un futuro con otro proveedor, en cuyo caso se pierden ventas.

Es probable que los clientes que experimentan una escasez se desvíen por lo menos con algunos negocios similares o con proveedores más confiables. Las encuestas sobre las actitudes de los clientes sugieren que se necesita una mala experiencia para que un cliente cambie de proveedor, pero algo así como 14 buenas experiencias para restaurar su confianza.

Comenzaremos por mirar las órdenes atrasadas, donde los clientes están preparados para esperar, y en seguida pasar al análisis de las ventas perdidas.

La figura siguiente muestra las alternativas que tienen los clientes cuando su demanda no puede ser satisfecha de las existencias disponibles.



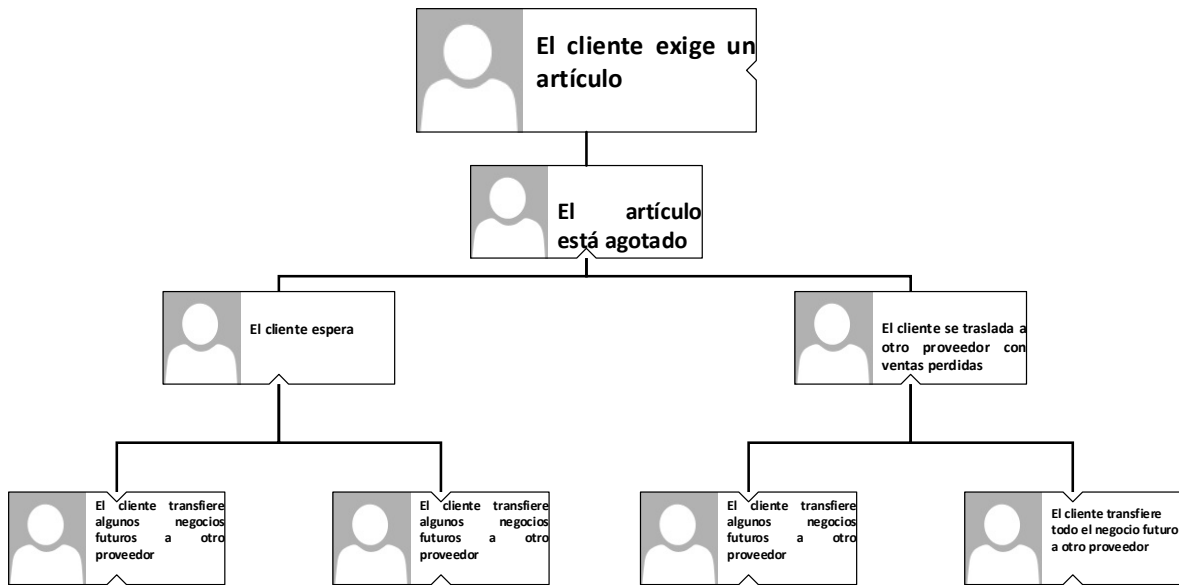


Figura No. 13. Alternativas para los clientes cuando su demanda no puede ser satisfecha de las existencias disponibles.

### 13.2. Pedidos atrasados

Una orden posterior se produce cuando un cliente exige un artículo que está fuera de las existencias, y luego debe esperar para recibir el artículo en la próxima entrega por parte de los proveedores.

Vemos estos casos en muchos minoristas, tales como salas de exposición de los muebles. Cada sala de exposición almacena una colección de muebles, pero no es suficiente para cubrir toda la demanda, y se pide a los clientes que esperen las entregas de proveedores o centros regionales de distribución. Esto sugiere que es más probable que la disposición posterior sea más alta cuando el costo unitario sea alto, que exista una amplia gama de elementos, que sea demasiado costoso mantener existencias de toda la gama, que los plazos de entrega de los proveedores sean razonablemente cortos, y los clientes están dispuestos a esperar.

Conoceremos el caso más común en el que se mantienen algunas existencias, pero no lo suficiente para cubrir toda la demanda. La pregunta clave es: ¿cuánto de la demanda se debe satisfacer de las existencias y cuánto de los pedidos atrasados?

La figura No. 14 muestra el nivel de existencias durante un ciclo cuando la escasez está pendiente.

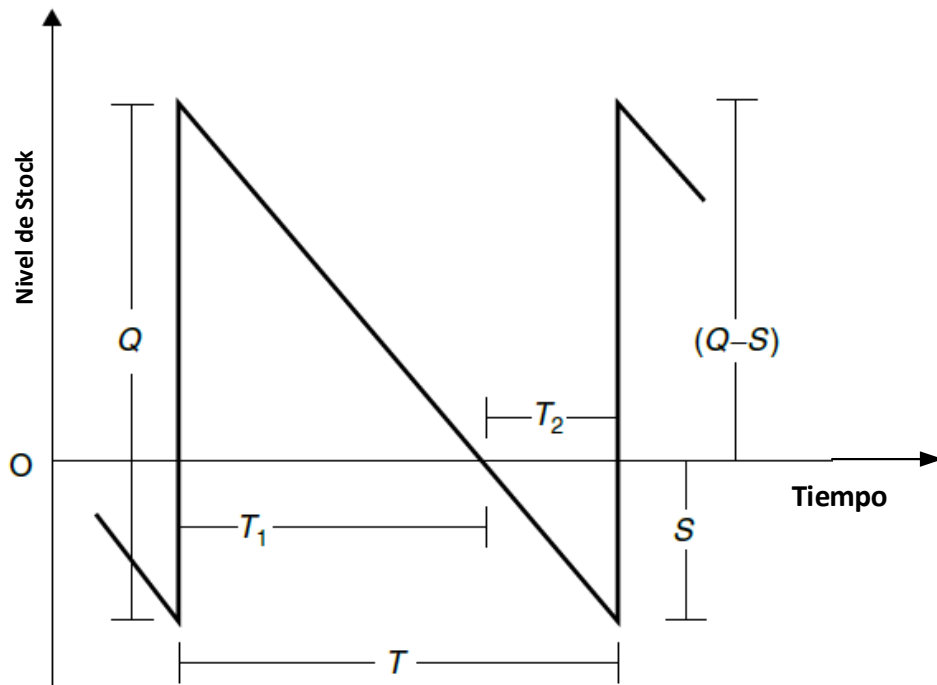


Figura No. 14. Un ciclo de reservas (stock) único con pedidos atrasados

Aquí los pedidos atrasados se muestran como existencias negativas, y vamos a usar el enfoque estándar de encontrar el costo para un solo ciclo y usarlo para calcular el tamaño óptimo del pedido.

El costo total para un solo ciclo proviene de la suma de los cuatro componentes de costo:

- Componente del costo unitario: momento del costo unitario =  $(CU)(Q)$
- Componente del costo de reorden (costo de pedir): = Costo de Ordenar multiplicado por el número de pedidos =  $(CR)$
- Componente del costo de mantener: = Stock promedio de  $\frac{(Q-S)}{2}$  mantenido durante un tiempo  $T_1$ .

$$= \frac{(CM)(Q-S)T_1}{2}$$

- Componente del costo de escasez: escasez promedio durante un tiempo  $T_2$ .

$$= \frac{(CS)(S)(T_2)}{2}$$

Si se suman estos datos, se obtiene el costo total por ciclo.

$$(CU)(Q) + (CR) + \frac{(CM)(Q-S)(T_1)}{2} + \frac{(CS)(S)(T_2)}{2}$$

Durante la primera parte del ciclo se satisface toda la demanda de existencias, por lo que la cantidad enviada a los clientes es  $(Q - S)$ , lo que equivale a la demanda de  $(D)(T_1)$ .

Durante la segunda parte del ciclo toda la demanda es ordenada de nuevo, por lo que la escasez,  $S$  es igual a la demanda no satisfecha  $(D)(T_2)$ . Sustituyendo:

$$T_1 = \frac{(Q-S)}{D} \text{ y } T_2 = \frac{S}{D}$$

Se obtiene el costo total por ciclo:

$$(CU)(Q) + (CR) + \frac{(CM)(Q-S)^2}{2(D)} + \frac{(CS)S^2}{2(D)}$$

Luego dividiendo por  $T$  y sustituyendo  $Q = (D)(T)$  se obtiene el coste total por unidad de tiempo:

$$CT = (CU)(D) + \frac{(CR)(D)}{Q} + \frac{(CM)(Q-S)^2}{2(Q)} + \frac{(CS)S^2}{2(Q)}$$

La ecuación tiene dos variables,  $Q$  y  $S$ , por lo que podemos diferenciar con respecto a Ambas variables e igualar a cero para obtener los resultados:

Usando Maple para derivar los valores óptimos:

$$CT := CU \cdot D + \frac{(CR) \cdot (D)}{Q} + \frac{(CM) \cdot ((Q - S)^2)}{2 \cdot Q} + \frac{(CS) \cdot (S) \cdot (S)}{2 \cdot Q}$$

$$CT := CUD + \frac{CRD}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q}$$

$$\text{Diff}(CT, Q) = \text{diff}(CT, Q)$$

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left( CUD + \frac{CRD}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q} \right) = -\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM(Q-S)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q^2} - \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q^2}$$

$$\text{diff}(CT, Q) = 0$$

$$-\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM(Q-S)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q^2} - \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q^2} = 0$$

$$Diff(CT, S) = diff(CT, S)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left( CUD + \frac{CRD}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CM(Q-S)^2}{Q} + \frac{1}{2} \frac{CSS^2}{Q} \right) = -\frac{CM(Q-S)}{Q} + \frac{CSS}{Q}$$

$$diff(CT, S) = 0, \quad -\frac{CM(Q-S)}{Q} + \frac{CSS}{Q} = 0$$

$$expand(\%), \quad -CM + \frac{CMS}{Q} + \frac{CSS}{Q} = 0$$

Después de alguna manipulación estas ecuaciones simultáneas pueden ser resueltas para dar valores óptimos:

*# Realizando algunas manipulaciones y resolviendo simultáneas,*

*#tenemos los siguientes valores óptimos*

$$solve\left(\left\{-CM + \frac{CMS}{Q} + \frac{CSS}{Q} = 0\right\}, \{S\}\right), \left\{S = \frac{CMQ}{CM+CS}\right\}, S := \frac{(CM) \cdot Q}{CM+CS}$$

$$S := \frac{CMQ}{CM+CS}$$

$$diff(CT, Q) = 0$$

$$-\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM\left(Q - \frac{CMQ}{CM+CS}\right)\left(1 - \frac{CM}{CM+CS}\right)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM\left(Q - \frac{CMQ}{CM+CS}\right)^2}{Q^2} + \frac{1}{2} \frac{CS CM^2}{(CM+CS)^2} = 0$$

$$\left\{ solve\left(\left\{-\frac{CRD}{Q^2} + \frac{CM\left(Q - \frac{CMQ}{CM+CS}\right)\left(1 - \frac{CM}{CM+CS}\right)}{Q} - \frac{1}{2} \frac{CM\left(Q - \frac{CMQ}{CM+CS}\right)^2}{Q^2} + \frac{1}{2} \frac{CS CM^2}{(CM+CS)^2} = 0\right\}, \{Q\}\right)\right\}$$

$$\left\{ \left\{ Q = \frac{\sqrt{2} \sqrt{CMCS CRD (CM+CS)}}{CMCS} \right\}, \left\{ Q = -\frac{\sqrt{2} \sqrt{CMCS CRD (CM+CS)}}{CMCS} \right\} \right\}$$

Tamaño del pedido óptimo (tomando la raíz positiva):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(CR)(D)(CM + CS)}{(CM)(CS)}}$$

Cantidad óptima de pedido pendiente:

$$S^* = \sqrt{\frac{2(CR)(CM)(D)}{(CS)(CM + CS)}}$$

Además, sabemos:

Tiempo durante el cual se satisface la demanda:

$$T_1 = \frac{(Q^* - S^*)}{D}$$

Tiempo durante el cual la demanda está pendiente:

$$T_2 = \frac{S^*}{D}$$

Tiempo de ciclo:

$$T_1 + T_2$$

## Discusión

A veces es útil tener escasez planificada, particularmente cuando la demanda del cliente no se pierde, pero puede ser satisfecha con pedidos atrasados. Estos pedidos pendientes inevitablemente tienen algún costo, que podemos expresar como un costo de escasez dependiente del tiempo. Podemos Utilice esto para encontrar valores óptimos para el tamaño del pedido y la cantidad que se ordenarán de nuevo.

Analicemos lo anterior mediante un ejemplo resuelto.

### Ejemplo resuelto. (Waters,2003)

La demanda de un artículo es constante a 100 unidades al mes. El costo unitario es de \$ 50, el costo de reorden es de \$ 50, el costo de mantenimiento es de 25 por ciento de

valor al año, el costo de escasez para los pedidos atrasados es de 40 por ciento de valor al año. Encuentre una política de inventario óptima para el elemento.

Solución:

Listando las variables que conocemos en unidades consistentes:

$$D = (100)(12) = 1,200 \text{ unidades por año}$$

$$CU = \$50 \text{ por unidad}$$

$$CR = \$50 \text{ por orden}$$

$$CM = (0.25)(\$50) = \$12.5 \text{ por unidad por año}$$

$$CS = (0.4)(\$50) = \$20 \text{ por unidad por año}$$

Entonces la sustitución da al resolver con Maple:

#Ejemplo resuelto , #Modelo de inventarios con faltantes planeados

$$Q := \frac{\sqrt{2} \sqrt{CM CS CR d (CM + CS)}}{CM CS}, \quad Q := \frac{20 \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{CM CS CR (CM + CS)}}{CM CS}$$

$$S := \frac{CM Q}{CM + CS}, \quad S := \frac{20 \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{CM CS CR (CM + CS)}}{CS (CM + CS)}$$

#Demanda = 1200 unidades por año

$d := 1200$  ,  $d := 1200$  , #Costo unitario = \$50 por unidad  $CU := 50$  ,  $CU := 50$

#Costo de reorden (de pedir) = CR = \$50 por orden  $CR := 50$  ,  $CR := 50$

#Costo de mantener  $CM = \$12.5$  por unidad por año ,  $CM := 12.5$   $CM := 12.5$

#Costo de la escasez  $CS = \$20$  por unidad por año  $CS := 20$  ,  $CS := 20$

$Q$  ,  $50.99019514 \sqrt{2} \sqrt{3}$  ,  $evalf(\%)$  ,  $124.8999600$  unidades

$S$  ,  $19.61161351 \sqrt{2} \sqrt{3}$  ,  $evalf(\%)$   $48.03844614$  unidades

*#Tiempo en el cual se satisface la demanda, años*

$$T1 := \frac{(Q - S)}{d}, T1 := 0.02614881802\sqrt{2}\sqrt{3}, \text{evalf}(\%) 0.06405126153$$

*#multiplicando por 52 semanas, tenemos*

$$(0.06405126153) \cdot (52), 3.330665600 \text{ semanas}$$

*#Tiempo durante el cual la demanda esta pendiente, años*

$$T2 := \frac{S}{d}, T2 := 0.01634301126\sqrt{2}\sqrt{3}, \text{evalf}(\%) 0.04003203845$$

*#multiplicando por 52 semanas, tenemos*

$$(0.04003203845) \cdot (52), 2.081665999 \text{ semanas}$$

*#Tiempo de ciclo = T1 + T2, semanas*

$$T := T1 + T2, T := 0.04249182928\sqrt{2}\sqrt{3}, \text{evalf}(\%) 0.1040833000, (0.1040833000) \cdot (52)$$

$$5.412331600 \text{ semanas}$$

## Conclusiones

En este ejemplo, el costo de escasez es relativamente bajo, por lo que el artículo está agotado casi el 40 por ciento del tiempo.

## 14. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ofrece una introducción íntegra a la gestión de inventarios de acuerdo al programa de trabajo presentado a la Dirección de docencia del Tecnológico Nacional de México. Se desarrolló el tema de inventarios desde los principios básicos hasta un material un poco avanzado con respecto a los objetivos y contenido del programa de estudios de la materia investigación de operaciones que se imparte en la carrera de ingeniería en sistemas computacionales, dejando al alumno y a los profesores e interesados en el tema a profundizar en el tema de inventarios con los desarrollos más recientes.

De hecho, no se aborda ningún conocimiento previo del tema, de tal forma que cualquiera que lea la sección de inventarios abordado en el libro de texto encontrará fácil construir una comprensión detallada del tema.

En esta parte del libro también se tiene el cuidado de no pedir ningún conocimiento específico sobre la ciencia de la gestión, investigación de operaciones, matemáticas avanzadas, contabilidad, o cualquier otra materia. Esto significa que una gran variedad de personas con distintos perfiles en su formación académica pueden leerlo útilmente, incluyendo a estudiantes que hacen un curso general en administración, negocios, comercio, o algún campo relacionado que requiera el conocimiento del tema.

También puede utilizarse para cursos más especializados en, por ejemplo, mercadotecnia, gestión de la cadena de suministro, gestión de operaciones, investigación de operaciones, ciencias de la gestión o producción.

Además, es útil para los administradores que quieren aprender más sobre la gestión de inventario y cómo las ideas pueden ser utilizadas en su trabajo. Cualquiera que sea su experiencia, puede utilizar la sección de este libro de forma accesible y fácil, de tal forma que este en posibilidad de usarlo para aprender sobre el pensamiento y las prácticas actuales en la gestión de inventario.

Es adecuado para muchos tipos de personas, incluidos los estudiantes del campo de la ingeniería industrial, ingeniería en sistemas computacionales, ingeniería en gestión empresarial y la licenciatura en administración. También es útil para personas que realizan una gama amplia de cursos sobre el tema, también es útil para los directores empresariales.

Las ideas sobre la gestión de inventario están cambiando muy rápidamente, y en esta sección del libro se ofrece una visión práctica del pensamiento sistémico en que se sustenta la investigación de operaciones.



Algo medular: los interesados en abordar problemas en el campo de aplicación de la investigación de operaciones, deben conocer las herramientas básicas del cálculo diferencial, la estadística, el álgebra lineal. De igual forma, es importante estar familiarizado con el uso de software especializado como Maple, Matlab, Excel, Mathematica u otro que le permita comprender los conceptos del tema, y facilitar las operaciones necesarias para resolver los problemas y proyectos propuestos.

## 15. Referencias y bibliografía

- Bierman, Harold, Jr. / Bonini, Charles P. / Hausman, Warren H. (1981). Quantitative Analysis for Business Decisions, Sixth Edition, Edit. Mc Graw-Hill, Usa
- Garvan, F. (2001). The Maple Book. Chapman and Hall/CRC; Edición, Usa.
- Moskowitz, Herbert; Wright, Gordon P; Franco G., Carlos A. (1981). Operations Research Techniques for Management, Edit. Prentice Hall, Usa.
- Parlar, M. (2000). Interactive Operations Research with Maple, edit. Birkhäuser, Usa.
- Thierau, R. (1970). Decision Making Through Operations Research (Management & Administration). Usa
- Vrat, P. (2014). Materials Management, Springer Texts in Business and Economics, Usa.
- Waters, D. (2003). Inventory Control and Management, 2<sup>a</sup>. Edición, Edit. John Wiley & Sons, Usa.

# Capítulo VI

## Líneas de espera

1. Introducción
2. Historia
3. Aplicaciones
4. Caracterización
5. Elementos de un sistema de líneas de espera (colas)
  - 5.1. Especificación de un sistema de colas
6. Notación
  - 6.1. Notación de Kendall
  - 6.2. Notación de Kendall para distintas distribuciones de probabilidad
7. Leyes de Little
  - 7.1. La tasa de llegada
  - 7.2. Tasa de finalización del servicio
8. PASTA.
9. Proceso de nacimiento y muerte
10. Sistema de colas (M/M/1)
  - 10.1 Distribución del tiempo de espera en el sistema de espera o cola modelo (M / M / 1)
11. Sistema de colas (M / M / 1 / c)
12. Sistema de colas (M / M / s)
13. Proceso de toma de decisiones en líneas de espera (Costo de la espera)
14. Sistemas de pérdida
  - 14.1 Modelo de líneas de espera de pérdida M/G/c

15. Problemas resueltos
16. Conclusiones del capítulo
17. Referencias y bibliografía

*Date prisa y espera.*  
Viejo refrán del ejército.

## **1. Introducción**

En general no nos gusta esperar. Pero la reducción del tiempo de espera suele requerir inversiones adicionales. Para decidir si invertir o no, es importante conocer el efecto de la inversión en el tiempo de espera. Necesitamos modelos y técnicas para analizar tales situaciones.

En este capítulo tratamos una serie de modelos de colas elementales. Se presta atención a los métodos de análisis de estos modelos, así como a las aplicaciones de los modelos de colas mediante un conjunto de problemas numéricos. Las áreas de aplicación importantes de los modelos de colas son sistemas de producción, sistemas de transporte y almacenamiento, sistemas de comunicación y sistemas de procesamiento de información. Los modelos de colas son particularmente útiles para el diseño de estos sistemas en términos de diseño, capacidades y control.

Esta sección, nuestra atención se restringe a los modelos con una cola. Las situaciones con múltiples colas se tratan en un tema avanzado llamado "Redes de colas", que queda fuera del alcance de nuestro curso. Las técnicas más avanzadas para el análisis exacto, aproximativo y numérico de los modelos de colas forman parte de un curso denominado «Métodos algorítmicos en la teoría de colas», que se imparten en niveles de maestría y doctorado en el campo de la investigación de operaciones.

Para tal efecto, la organización de esta unidad es la siguiente:

En la primera parte se discute primero una serie de conceptos básicos sobre la teoría de colas, una breve historia del tema. Posteriormente se aborda el modelo de colas relevante y más simple, y su versión multiservidor se trata en las siguientes secciones de este capítulo. De igual forma se muestran algunas variaciones en los modelos de líneas de espera con determinadas características como el modelo de líneas de espera de pérdida. En cada sección se resuelve un ejemplo numérico por lo menos. El texto contiene una gran cantidad de ejercicios y se insta al lector a probar estos ejercicios utilizando programas como Maple, Matlab, Minitab, Excel, entre otros. Esto es realmente necesario para adquirir habilidades para modelar y analizar nuevas situaciones.

## 2. Historia

La teoría de las colas como parte de la teoría de las probabilidades ha evolucionado desde la ingeniería clásica de las comunicaciones telefónicas en las últimas décadas. En 1909 A.K. Erlang, un ingeniero danés de una empresa telefónica, publicó un artículo titulado La teoría de las probabilidades y las conversaciones telefónicas. A principios de la década de 1920 desarrolló el famoso modelo Erlang para evaluar las probabilidades de pérdida de conversaciones punto a punto multicanal.

El modelo de Erlang se amplió para permitir el cálculo en situaciones de entrada de la fuente finita por Engset varios años más adelante conduciendo al modelo de Engset. En 1951 D.G. Kendall publicó su trabajo sobre las cadenas de Markov incrustadas, que es la base para el cálculo de sistemas de colas bajo condiciones de entrada bastante generales. También definió una convención de nomenclatura para los sistemas de cola que todavía se utiliza. Casi al mismo tiempo D.V. Lindley desarrolló una ecuación que permite los resultados de un sistema de colas bajo condiciones de entrada y de servicio bastante generales. En 1957 J.R. Jackson inició la investigación de las colas en red lo que conduce a los llamados modelos de red de colas. Con la aparición de las computadoras y las redes de procesadores, los sistemas de colas y las redes de colas han sido identificados como una potente herramienta de análisis y diseño para diversas aplicaciones.

De acuerdo a Moskowitz (1979), esta teoría es ahora una herramienta de valor en negocios debido a que muchos de sus problemas pueden caracterizarse, como problemas de congestión llegada-salida o llegada-partida.

### 3. Aplicaciones

Como se mencionó anteriormente, la teoría de colas permite el cálculo de un amplio espectro de aplicaciones. Éstas incluyen:

- En *los sistemas de fabricación*, las materias primas se transportan de estación en estación utilizando una banda transportadora. Con cada estación que ha realizado su tarea, el artículo se permite proceder a la siguiente estación. Si los tiempos de procesamiento en todas las estaciones son iguales y la banda transportadora se llena en la misma frecuencia en que los artículos pasan de una estación a otra, no puede haber espera, ya que la línea de montaje funciona en modo síncrono. En Modo asíncrono, puede haber colas para estaciones y claramente tiene un impacto en el rendimiento general.
- *Los sistemas informáticos* para realizar operaciones en tiempo real o de alta velocidad suelen estar sujetos a un mal rendimiento debido a un solo dispositivo de cuello de botella, como CPU, unidad de disco, tarjeta gráfica, puertos de comunicación o sistema de bus. Mediante el uso de modelos analíticos, el dispositivo de cuello de botella puede ser detectado y, como consecuencia, actualizado.
- *La ingeniería de Tráfico* se ocupa de la disponibilidad de estaciones, postes y líneas de interconexión. Aunque estos sistemas se caracterizan por dar forma más que por retraso, todavía pertenecen al mundo de los sistemas de cola. Con la introducción de nuevos medios en la ingeniería de tráfico el paradigma de retardo se vuelve más importante de nuevo. Ingeniería de tráfico ahora también tiene que cubrir un amplio espectro de nuevas unidades tales como tableros del anuncio, unidades interactivas de la respuesta de la voz, servidores de medios, medios y pasarelas de la señalización.
- *La administración de recursos humanos* se preocupa por la asignación más eficiente de personal. La aplicación de la teoría de colas en la gestión de la fuerza de trabajo es más visible en los centros de llamadas, donde los agentes tienen que asignarse según la carga de las llamadas. Basándose en otras técnicas como la previsión, la teoría de colas puede verse como otro ladrillo en la pared en una amplia gama de métodos de solución que se aplicarán para resolver problemas que aparecen en la administración de la fuerza de trabajo.

- Cajero automático. Aquí, usted espera en una cola de primer llegado, primero servido para utilizar el cajero automático para los servicios tales como hacer depósitos, comprobando saldos, y retirar efectivo (lo más probable el último, ¿verdad?).
- Impresora de la sala de ordenadores. Aquí, cada trabajo que envía a la impresora para su impresión se coloca en una cola de impresión, en la que suele esperar primero llegado, primero servido, aunque personas especiales como supe usuarios probablemente pueden anular esta disciplina de cola para dar prioridad a determinados trabajos. Una generalización de esto es la red de área local (LAN) que conecta los equipos cliente, servidores y periféricos en un edificio o en un campus.
- Aeropuerto. En el aeropuerto, hay muchos sistemas de cola. Hay colas en el mostrador de boletos y colas en el check-in de la puerta. Aún más importante son quizás las colas para usar las pistas de aterrizaje (en el suelo para despegar, y en el aire, aunque no sea una cola física, para el aterrizaje) ya veces las colas no vistas para usar las puertas. Otros sistemas de colas incluyen los carriles especiales para que los pasajeros sean llevados a otras salas utilizando dispositivos móviles especiales utilizando áreas en las terminales correspondientes. De igual forma suelen presentarse colas en el sistema de manejo de equipajes.
- Sistema de fabricación. Cada parte del sistema tiene que someterse a una serie de operaciones de fabricación en varias estaciones del sistema. Las colas son a menudo dispositivos físicos (tampones) donde las partes se mantienen en almacenamiento temporal mientras se espera la disponibilidad de la máquina particular requerida para realizar la operación en la estación.
- Red de telecomunicaciones. Los paquetes de mensajes, que contienen información de datos, voz y / o video, se envían a través de la red de área amplia (WAN) a través de conmutadores, en los que pueden existir memorias intermedias para almacenar paquetes mientras se espera el envío. (En muchas partes de los sistemas, no hay tampones, en cuyo caso los paquetes pueden perderse).

Obviamente, la lista anterior está lejos de ser completa y puede extenderse además de otras aplicaciones. Para más información, el alumno e interesado en profundizar sobre más aplicaciones puede remitirse a diversas publicaciones como *EEE Communications Magazine*, *IEEE Computers*, *Bell Labs Technical System Journal* o similar.



#### 4. Caracterización

Un sistema de colas puede ser descrito como un sistema, donde los clientes llegan de acuerdo con un proceso de llegada para ser atendidos por una instalación de servicio de acuerdo con un proceso de servicio. Cada instalación de servicio puede contener uno o más servidores. Generalmente se supone que cada servidor sólo puede atender a un cliente a la vez. Si todos los servidores están ocupados, el cliente tiene que hacer cola para obtener servicio. Si un servidor vuelve a estar libre, el siguiente cliente se selecciona de la cola de acuerdo con las reglas dadas por la disciplina de colas. Durante el servicio, el cliente podría pasar por una o más etapas de servicio, antes de salir del sistema. En la figura no. 1 se muestra una representación esquemática de dicho sistema de colas. Antes de entrar en más detalle, los aspectos más importantes de los sistemas de colas serán listados y brevemente descritos.

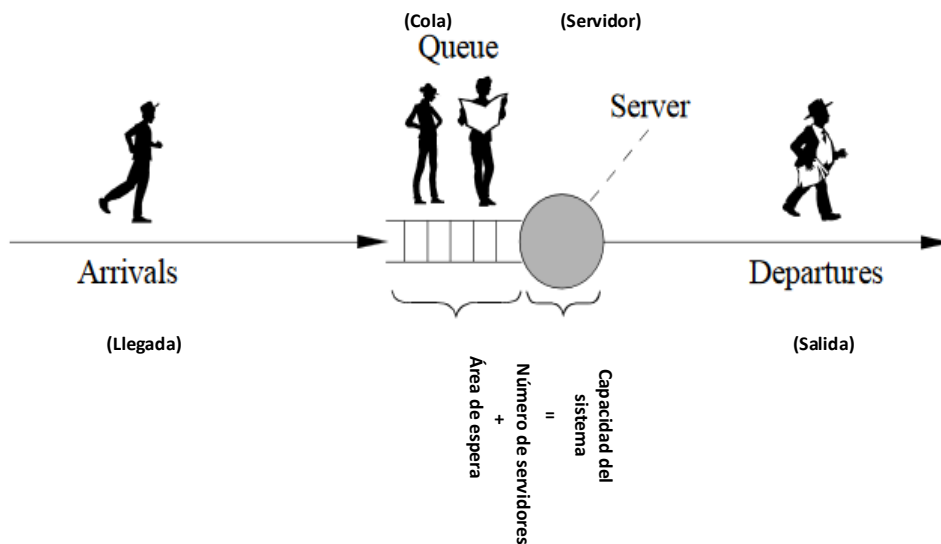


Figura No. 1. Representación esquemática de un sistema de colas. Fuente: *Stationary Queueing Models with Aspects of Customer Impatience and Retrial Behaviour*.

- El *proceso de llegada* se da por una distribución estadística y sus parámetros. Muy a menudo se supone que la distribución exponencial tiene como resultado que el patrón de llegada se mida como el número promedio de llegadas por unidad de tiempo. Cuando se determina la carga principal en un sistema telefónico privado (PBX), el patrón de llegada se da a menudo en llamadas por hora de ocupación. Los procesos de llegada más generales también se caracterizan por otro patrón. Estos incluyen las llegadas por grupos de llamadas y la dependencia del tiempo.

- El *proceso de servicio* se describe de forma similar al proceso de llegada. Una vez más, la exponencialidad se asume a menudo en la práctica debido a las dificultades al liberar estos supuestos. Frente al proceso de llegada, el proceso de servicio depende en gran medida del estado del sistema. En caso de que el sistema de colas esté vacío, la instalación de servicio estará inactiva.
- La *disciplina de la cola* se refiere a la forma en que los clientes son seleccionados para el servicio en condición de línea de espera. El más utilizado es el sistema de primero en llegar, primero en ser atendido (FCFS). Otros son el último en llegar, primero en ser atendido (LCFS), el servicio al azar y el prioritario.
- El *proceso de salida* rara vez se utiliza para describir un sistema de colas, ya que puede ser visto como resultado de la fila de disciplina, la llegada y el proceso de servicio. Bajo ciertas condiciones, el proceso de llegada y salida sigue la misma distribución estadística. Esto se ha convertido en un hecho muy importante en el modelado de la red de colas.
- La *capacidad del sistema* introduce un límite natural en los sistemas de colas. En los sistemas de vida, sólo hay número limitado de recursos, tales como las líneas troncales en un sistema telefónico privado (PBX), la memoria del ordenador o los buffers de una red. En las redes de colas, los nodos con capacidades finitas del sistema pueden bloquear a los clientes del nodo anterior, cuando se ha alcanzado el límite de capacidad del nodo.
- El *número de servidores* se refiere al número de nodos paralelos, que pueden atender a los clientes simultáneamente. En los sistemas de telefonía los servidores podrían describir líneas troncales, detectores de tonos, generadores de tono e intervalos de tiempo.
- El número y la estructura de las *etapas de servicio*, un cliente podría tener que visitar otras áreas antes de salir del sistema. En un sistema informático, por ejemplo, un trabajo puede requerir ser procesado en la CPU dos o más veces antes de apagar el sistema. En la práctica, existen muchas situaciones, que pueden ser modeladas por sistemas de cola complejos con etapas de servicio o redes computacionales sencillas.

## 5. Elementos de un sistema de líneas de espera (colas)

Los tres elementos principales de un sistema de colas son los siguientes:

- clientes;
- servidores;
- líneas o colas.

En un «sistema» de colas de un cajero automático de un banco, tenemos clientes, cajeros automáticos y sala de espera. En un sistema de fabricación, tenemos piezas, máquinas y amortiguadores. En una pista del aeropuerto, tenemos aviones, pistas de aterrizaje y áreas de espera (tanto en el cielo como en el suelo). En un taller de reparación de máquinas, tenemos máquinas (¡como clientes esta vez!), Personas encargadas de las reparaciones, y sala de espera o almacenamiento. En una red de comunicaciones (WAN o LAN), tenemos paquetes de datos, conmutadores, canales y búferes.

### 5.1. Especificación de un sistema de colas

Los elementos principales que especifican un sistema de colas son los siguientes:

- Fuentes de entrada (llamada población): tiempos de inter-arribo, proceso de llegada
- Colas: espacio finito o infinito; la disciplina de la cola, por ejemplo, FCFS (FIFO), LCFS (LIFO), tiempo de procesamiento más corto (SPT), aleatorio, prioridad, impaciente, etcétera.
- Por el proceso de servicio: número de servidores, características de los tiempos de servicio.
- Enrutamiento/ topología, redes de colas.
- Algunos factores que deben ser considerados en la aplicación de la teoría de colas, porque afectan a la complejidad del análisis: considerar los resultados solo en estado estacionario, el tiempo de espera solo será mediante las leyes de y fórmulas de Little (a excepción del modelo  $M/M/1$ )

## 6. Notación

En esta sección, resumimos la notación utilizada en este capítulo para un solo sistema de colas. Las tres primeras cantidades son parámetros de entrada, mientras que las otras son medidas de desempeño de salida.

$s$  = número de servidores (canales),

$\lambda_n$  = tasa de llegada cuando  $N(t) = n$ ,

$\mu_n$  = tasa de servicio cuando  $N(t) = n$ ,

$N(t)$  = número de clientes en el sistema en el tiempo  $t$

$p_n(t) = P(N(t) = n)$ , dado  $N(0) = 0$ ,

$W_i$  = tiempo en el sistema del cliente  $i$ ,

$(W_q)_i$  = tiempo en la cola del cliente  $i$ ,

$N$  = número de clientes en el sistema en estado estacionario (fila),

$p_n = P(N)$ ,

$L = E[N]$  = constante = número medio de clientes en el sistema,

$L_q$  = número medio de clientes en estado estacionario (clientes en la fila),

$q_n$  = número de clientes en el sistema encontrado por un cliente que llega en estado estacionario,

$w$  = tiempo estacionario en el sistema,

$W = E[w]$  = tiempo medio o promedio de estado estacionario en el sistema,

$w_q$  = tiempo estacionario en la fila o cola

$\rho = \text{utilización del sistema}$

Precaución: el término «tiempo de espera» se utiliza a menudo en la literatura de investigación de operaciones para indicar lo que llamamos tiempo del sistema; de forma similar, la «longitud de cola» se utiliza a menudo para denotar lo que llamamos el número en el sistema y no sólo el número en cola.

### 6.1. Notación de Kendall

Utilizaremos la siguiente notación para representar las colas de una sola estación:

$$. / . / . / . / . = A/B/X/Y/Z$$

1. La primera posición representa el proceso de llegada (distribución de tiempo entre llegadas).
2. La segunda posición representa la distribución del tiempo de servicio.
3. La tercera posición representa el número de servidores.
4. La cuarta posición representa el espacio en el sistema, que incluye cola más espacios en los servidores; si se omite, entonces el espacio se supone ilimitado ( $\infty$ ).
5. La quinta posición representa la población del sistema, es decir, el sistema se «agotará» después de que un determinado número de clientes hayan sido atendidos; si esto se omite, entonces la población se supone ilimitada ( $\infty$ ).

Por lo tanto, siempre habrá al menos los tres primeros indicadores utilizados en la notación. Los tres últimos indicadores son enteros positivos, mientras que los dos primeros son letras que representan distribuciones. Las distribuciones que utilizaremos serán las siguientes:

*M: Distribución exponencial (Markoviana)*

*U: Distribución uniforme*

*D: Determinista, lo que significa que el tiempo no es una variable aleatoria, sino un número conocido,*

$E_k$ : Distribución Erlang, donde debemos recordar que esta tiene la siguiente f. d. p

$$f(t) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t}, \text{ con media } \frac{1}{\mu} \text{ y varianza } \frac{1}{(k\mu^2)}$$

$G$ : Distribución general, lo que significa que no hemos especificado ninguna distribución en particular.

## 6.2. Notación de Kendall para distintas distribuciones de probabilidad

Los símbolos estándar comúnmente utilizados en los sistemas de colas se presentan en la tabla siguiente.

La notación de Kendall ( $A/B/X/Y/Z$ ) se ha extendido de varias maneras.

Características	Símbolo	Descripción
<p><math>A</math> – Distribución de probabilidad para el arribo o llegada al sistema</p>	<p><math>D</math> <math>C_k</math> <math>E_k</math> <math>G</math> <math>GI</math> <math>GEO</math> <math>H_k</math> <math>M</math> <math>PH</math></p>	<p>Determinística Cox (<math>k</math> fases) Erlang (<math>k</math> fases) General General Independiente Geométrica (discreta) Hiperexponencial Exponencial (Markov) Tipo Fase</p>
<p><math>B</math> – Distribución de probabilidad para el tiempo de servicio</p>	<p><math>D</math> <math>C_k</math> <math>E_k</math> <math>G</math> <math>GI</math> <math>GEO</math> <math>H_k</math> <math>M</math> <math>PH</math></p>	<p>Determinística Cox (<math>k</math> fases) Erlang (<math>k</math> fases) General General Independiente Geométrica (discreta) Hiperexponencial Exponencial (Markov) Tipo Fase</p>
<p><math>X</math> – Número de servidores en paralelo</p>		<p><math>1, 2, \dots, \infty</math></p>

<i>Y – Capacidad del sistema</i>	<i>1,2,...,∞</i>	
<i>Z – Disciplina de la cola</i>	<i>FCFS</i>	<i>Primero en llegar, primero en ser atendido</i>
	<i>RSS</i>	<i>Selección aleatoria del servicio</i>
	<i>PRI</i>	<i>Prioridad</i>
	<i>RR</i>	<i>Round Robín</i>
	<i>PS</i>	<i>Compartir durante proceso</i>
	<i>GD</i>	<i>General</i>

Tabla. Notación de Kendall para un sistema de líneas de espera

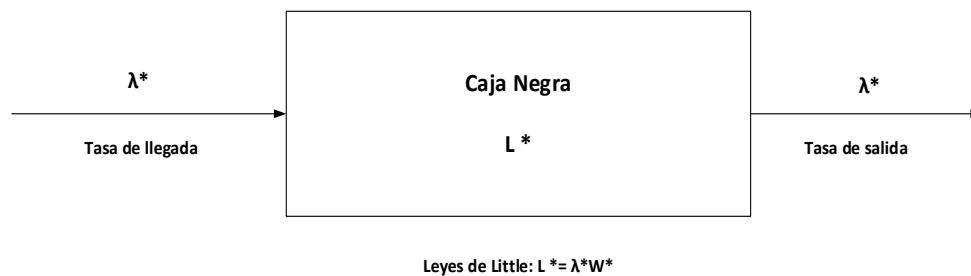
### Ejemplos:

- $M / M / 1$  : sistema de colas de un solo servidor con tiempos exponenciales entre llegadas (proceso de llegada de Poisson) y los tiempos de servicio exponenciales, no hay límite en la longitud de cola o de la población de clientes.
- $G / G / 1$  : sistema de colas con tiempos de llegada general y tiempos de servicio general, sin límite en la longitud de la cola o población de clientes.
- $M / G / 1$ : sistema de colas con proceso de llegada de Poisson y tiempos de servicio general, sin límite de longitud de cola o población de clientes.
- $D / U / 2$ : sistema de colas con dos servidores con proceso de llegada determinista y tiempos de servicio uniformemente distribuidos, sin límite en la longitud de cola o población de clientes.
- $M / G / s / s$ : sistema de colas de  $s$  servidores con proceso de llegada Poisson y los tiempos de servicio general, sin colas (todos los clientes en servicio, de lo contrario abandonan el sistema) y sin límite en la población de los clientes.
- $M / M / s / c / c, (c \geq s)$ : sistema de colas de  $s$  servidores con proceso de llegadas Poisson y tiempo de servicio exponencial, sistema y población de tamaño  $c$ .

## 7. Leyes de Little

Las leyes de Little son un concepto muy simple, pero también muy potente. Dibuje una «caja negra» alrededor de la porción del sistema en la que se encuentra el interés (que podría ser todo el sistema), y sea  $\lambda^*$  la tasa de arribo (llegada) en la caja negra, sea  $L^*$  el número promedio en la caja negra, y  $W^*$  el tiempo promedio que se pasa en la caja negra. La Ley de Little dice lo siguiente:

Si el sistema es estable, entonces:



- La tasa de salida de la caja negra es igual a la tasa de entrada  $\lambda^*$ .
- $L^* = \lambda^* W^*$

**Nota importante:** La Ley de Little no requiere suposiciones sobre los procesos de Poisson ni sobre tiempos de servicio distribuidos exponencialmente. Por lo tanto, ¡es un resultado muy general que es independiente de las distribuciones! La clave para aplicar la Ley de Little es asegurarse de que se definen correctamente las cantidades  $\lambda^*$ ,  $L^*$ ,  $W^*$ , especialmente la tasa de llegada que realmente entra en la caja negra y no la tasa de llegada nominal.

Ejemplo: para un sistema completo, tenemos la caja negra que es el sistema, y  $\lambda$  es la tasa total en el sistema, por lo que:

$$L = \lambda W$$

que es la manera en que la ley de Little se resume generalmente. Aplicado sólo a la porción de la cola, tenemos:

$$L_q = \lambda W_q$$



Aplicado sólo a la porción de servicio, tenemos:

$$L_s = \lambda E[X]$$

Donde  $L_s$  representa el número medio en servicio. (Claramente, por definición,  $L = L_s + L_q$ )

### 7.1. La tasa de llegada

La aplicación de la Ley de Little requiere una cuidadosa consideración de la tasa de llegada, que puede tener algunas complicaciones como las siguientes:

- La tasa de llegada «nominal» no es la tasa que realmente entra en el sistema, porque hay rechazos, obsesivo, etcétera.
- La tasa de llegada depende del estado, por ejemplo, en una población de clientes finitos, es proporcional al número de clientes pendientes.

En general, la tasa media de llegada es dada por:

$$\bar{\lambda} = \sum_{\text{para todo } i} \lambda_i p_i$$

Precaución: Como se discutió anteriormente, el  $\lambda_i$  aquí es la tasa en el estado  $i$ ; en redes, utilizamos la misma notación para indicar la tasa de llegada total a la estación  $i$ . El significado debe ser claro desde el contexto, pero no se confunda por el uso dual de la notación. Desde una perspectiva de trayectoria de muestra, la tasa de llegada se puede encontrar por:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_a(t)}{t}$$

Donde  $N_a(t)$  es el número de llegadas en el tiempo  $t$ .

## 7.2. Tasa de finalización del servicio

La tasa de salida (salida) suele ser la suma de las diversas tasas de terminación de servicio en las estaciones de un sistema. Viendo cada estación por separado, la estabilidad asegura que la tasa de llegada a una estación es igual a la tasa de terminación del servicio. Si  $p_n$  es la probabilidad de que haya  $n$  en la estación, y  $\mu_n$  es la tasa de servicio cuando hay  $n$  en la estación, entonces la tasa de terminación de servicio es dada por:

$$\sum_{n \geq 1} \mu_n p_n$$

Si la tasa de servicio es independiente del número de clientes en la estación, como en una cola de un solo servidor, tenemos una simplificación:

$$\sum_{n \geq 1} \mu_n p_n = \mu(1 - p_0)$$

Puesto que, para un sistema estable, la tasa de llegada debe ser igual a la tasa de finalización del servicio, por lo tanto, tenemos el siguiente resultado general para una cola de un solo servidor:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$$

sin necesidad de supuestos exponenciales en las llegadas o salidas.

## 8. PASTA.

PASTA significa «Arribo tipo Poisson» (Promedios de tiempo), y fue acuñado no por alguien de origen italiano, sino por alguien con un nombre alemán (Wolff). La idea es muy simple, una vez que entendemos la diferencia entre un promedio de tiempo y un promedio de clientes. PASTA sólo dice que, si los clientes siguen un proceso de llegada Poisson, entonces estas dos cantidades son las mismas. La idea es que las llegadas de Poisson toman una mirada «al azar» en el sistema.

Ejemplo: Modelo de cola  $(M / M / 1)$ , pronto, resolveremos el sistema de colas  $(M / M / 1)$  usando un modelo de cadena de markov. Encontraremos todas las probabilidades de estado estacionario para el número en el sistema, a partir de las cuales podemos determinar otras medidas de rendimiento de interés. Pero primero, derivamos el tiempo medio en la cola directamente aplicando tres conceptos importantes: la expectativa condicional, PASTA, y la Ley de Little. Además, aplicamos la propiedad sin memoria de la distribución exponencial. Definamos  $\lambda$  como tasa de llegada,  $\mu$  como la tasa de servicio (de ahí el tiempo de servicio medio  $1 / \mu$ ),  $L_q^*$  como el número encontrado en el sistema por un cliente que llega, y  $S_r^*$  como el tiempo de servicio restante para el cliente en servicio encontrado por un cliente que llega. Luego, condicionando el número encontrado en el sistema por un cliente que llega,  $L_q^*$ , tenemos:

$$W_q = E[S_r^*] + \frac{E[L_q^*]}{\mu}$$

es decir, la espera de un cliente consiste en esperar que el cliente en servicio termine (si lo hay) más todos los clientes en la cola. En primer lugar, calculamos el tiempo de servicio restante esperado de un cliente condicionando el estado del servidor. Dado que los tiempos de servicio son exponenciales, por la propiedad sin memoria, el tiempo de servicio restante encontrado por un cliente que llega es un tiempo de servicio completo si el servidor está ocupado y 0 de lo contrario. La probabilidad de que el servidor esté ocupado es de PASTA igual a  $1 - p_0 = \rho$ , así que tenemos:

$$E[S_r^*] = \frac{\rho}{\mu}$$

Aplicando PASTA y las leyes de Little, tenemos:

$$E[L_q^*] = L_q = \lambda W_q$$

Sustituyendo, tenemos:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu} + \frac{L_q}{\mu} = \frac{\rho}{\mu} + \frac{\lambda W_q}{\mu}$$

Entonces,

$$W_q = \frac{\frac{\rho}{\mu}}{1 - \rho}$$

Esta derivación particular es interesante por sí misma, porque reunió tres resultados / técnicas muy importantes que hemos aprendido:

- Esperanza condicional
- PASTA
- Leyes de Little

## 9. Proceso de nacimiento y muerte

Una sistema de nacimiento-muerte es simplemente un sistema de colas que se puede representar por un proceso de nacimiento-muerte, donde los nacimientos corresponden a llegadas, las muertes corresponden a las salidas, y  $N(t)$  es el estado en el tiempo  $t$ , que representa el número de clientes en el sistema:

- población  $\leftrightarrow$  clientes en el sistema
- nacimiento  $\leftrightarrow$  llegada
- muerte  $\leftrightarrow$  partida
- tasas de natalidad  $\leftrightarrow$  tasa de llegada (posiblemente dependiente de la población del cliente)
- tasas de mortalidad  $\leftrightarrow$  tasas de servicio (dependiendo del número de servidores)

Dado que un proceso de nacimiento-muerte es un tipo especial de cadena de markov en tiempo continuo (CTMC), en el que las transiciones sólo a los estados vecinos, podemos utilizar la técnica usual CTMC de equilibrio de flujo y normalización para resolver las probabilidades de estado estacionario. Por lo tanto, el proceso para analizar una cola de muerte-muerte es el siguiente:

1. Defina el estado del sistema.
2. Determine el diagrama de velocidad de transición de estado o matriz.
3. Usar el balance de flujo donde la suma de las probabilidades deben sumar 1, para resolver todas las probabilidades  $p_0, p_1 \dots p_n$
4. Expresar las medidas de rendimiento que se puede en términos de  $p_0, p_1 \dots p_n$
5. Utilice la Ley de Little y / o PASTA para determinar otras medidas de desempeño.

## 10. Sistema de colas (M/M/1)

1. El estado del sistema es el número en el sistema
2.  $\lambda$  del estado  $i$  al estado  $i + 1$  y  $\mu$  del estado  $i$  al estado  $i - 1$ , donde  $\lambda$  es la tasa de llegada y  $\mu$  es la tasa de servicio.
3. El balance de flujo dado por  $p_n = \rho^n p_0$ ,  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , también  $p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$ , la normalización dada por  $p_0 = 1 - \rho$ , si  $\rho < 1$
4.  $L = \sum_{i=0}^{\infty} np_n$
5. La Ley de Little y otras relaciones pueden usarse para encontrar  $W, W_q, L_q$ .

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$W = \frac{E[X]}{1 - \rho} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = W - E[X] = \frac{\rho E[X]}{1 - \rho} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda \rho}{\mu - \lambda} = \rho L$$

La estabilidad requiere:

$$\rho < 1 \text{ o } \lambda < \mu$$

### Ejemplo numérico:

En un cajero automático único de un banco, las llegadas siguen un proceso de Poisson a una velocidad de 10 por hora, los tiempos de servicio distribuidos exponencialmente con una media de 4 minutos. Analice las características del sistema.

Resolviendo con Maple.

*#Ejemplo numérico no. 1 , #Teoría de colas , #Modelo M.M.1*

*#Datos del problema , #Tasa de llegada (numero de unidades por unidad de tiempo)*

*#Lamda = 10 unidades por hora , #Tasa de servicio #Miu = 15 unidades por hora*

$$\lambda := 10, \mu := 15, \rho := \frac{\lambda}{\mu}, L := \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}, L := 2 \text{ unidades},$$

$$Lq := \frac{\lambda \cdot \rho}{(\mu - \lambda)}, Lq := \frac{4}{3} \text{ unidades}, Wq := \frac{\rho}{(\mu - \lambda)}, Wq := \frac{2}{15} \text{ horas} = 8 \text{ minutos},$$

$$W := \frac{1}{(\mu - \lambda)}, W := \frac{1}{5} \text{ horas} = 12 \text{ minutos}$$

Si la tasa de llegada aumenta en un 20%, volvemos a trabajar el problema.

$$\lambda = \frac{12}{\text{hora}} \text{ y } \mu = \frac{15}{\text{hora}}$$

Entonces,  $\rho = 4/5$ , y tenemos que  $L = 4 \text{ unidades}$ ,  $Lq = \frac{16}{5} = 3.2 \text{ unidades}$ ,  $Wq = \frac{4}{15} \text{ horas} = 16 \text{ min}$ ,  $W = \frac{1}{3} \text{ hora} = 20 \text{ minutos}$ .

Con Maple:

$$\lambda := 12, \mu := 15, \rho := \frac{\lambda}{\mu}, \rho := \frac{4}{5}, L := \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}, L := 4,$$

$$Lq := \frac{\lambda \cdot \rho}{(\mu - \lambda)}, Lq := \frac{16}{5}, Wq := \frac{\rho}{(\mu - \lambda)}, Wq := \frac{4}{15}, W := \frac{1}{(\mu - \lambda)}, W := \frac{1}{3}$$

¡El tiempo promedio en el sistema y el número en el sistema se han duplicado! En los ejemplos numéricos, ¡asegúrese de mantener consistencia en sus unidades de forma correcta en todas las fases del problema! Por ejemplo, sea coherente en el uso de horas o minutos en todo el proceso, con el fin de obtener el factor de utilización  $\rho$  correctamente. Además, interprete la tasa versus la media correctamente.

### 10.1. Distribución del tiempo de espera en el sistema de espera o cola modelo (M / M / 1)

Por PASTA, tenemos que:

$$P(w_q = 0) = p_0 = 1 - \rho$$

Suponiendo que  $t > 0$ , observamos que:

$$P(w_q > t) = P(w_q > t | w_q > 0)P(w_q > 0) + P(w_q > t | w_q = 0)P(w_q = 0)$$

La distribución del tiempo del sistema puede derivarse condicionando el número de clientes encontrados a la llegada por un cliente,  $q_n$ , y aplicando PASTA para usar  $p_n$  en su lugar. Entonces, la probabilidad se reduce a la probabilidad de la suma de los tiempos de servicio exponenciales:

$$P(w > t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i > t\right)$$

El álgebra es bastante desconcertada, y así saltamos directamente a los resultados:

$$P(w > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad P(w_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$$

Así, la variable aleatoria del tiempo del sistema también tiene una distribución exponencial (con media  $\mu - \lambda$ ).

#### Ejemplo numérico

En el problema del cajero único de un banco, las llegadas siguen un proceso de Poisson a una velocidad o tasa de 10 por hora, los tiempos de servicio distribuidos exponencialmente con una media de 4 minutos. Encuentre las siguientes cantidades:

1. El porcentaje de tiempo que el cajero automático está inactivo;
2. El número medio o promedio de personas en el cajero automático;
3. El tiempo promedio de espera en la línea;
4. El número promedio de personas atendidas por hora;
5. La probabilidad de que pasará más de 10 minutos en el cajero automático.

Solución:



La primera, y en muchos sentidos más importante, paso consiste en ser capaz de “traducir” los requisitos anteriores en las respectivas cantidades matemáticas que se encuentran:  $p_0$ ;  $L$ ;  $W_q$ ;  $\lambda$ ;  $P\left(w > \frac{1}{6}\right)$

Entonces, como antes, tenemos  $\lambda = 10/\text{hora}$ ,  $\mu = 15/\text{hora}$ ,  $\rho = \frac{2}{3}$ , y

Usando Maple para resolver el problema:

$$\begin{aligned} \lambda &:= 10, \mu := 15, \rho := \frac{\lambda}{\mu}, \rho := \frac{2}{3}, L := \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}, L := 2 \\ Lq &:= \frac{\lambda \cdot \rho}{(\mu - \lambda)}, Lq := \frac{4}{3}, Wq := \frac{\rho}{(\mu - \lambda)}, Wq := \frac{2}{15} \\ W &:= \frac{1}{(\mu - \lambda)}, W := \frac{1}{5}, p_0 := 1 - \rho, p_0 := \frac{1}{3}, 2.300975891 \\ t &:= \frac{1}{6}, P\left(w > \frac{1}{6}\right) := \exp(-\mu(1 - \rho) \cdot t), P\left(\frac{1}{6} < w\right) := e^{-\frac{5}{2}}, 0.08208499862 \end{aligned}$$

Resolviendo:

1.  $p_0 := 1 - \rho, p_0 := \frac{1}{3} = 33.33\%$
2.  $L := \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}, L := 2$  personas
3.  $Wq := \frac{\rho}{(\mu - \lambda)}, Wq := \frac{2}{15}$  horas = 8 minutos
4.  $\lambda := 10$  por hora
5.  $w := \frac{1}{6}, P\left(w > \frac{1}{6}\right) := \exp(-\mu(1 - \rho) \cdot t), P\left(\frac{1}{6} < w\right) := e^{-\frac{5}{2}}, 0.0820 = 8.20\%$

## 11. Sistema de colas (M / M / 1 / c)

Consideremos ahora una cola de un solo servidor con una capacidad limitada de  $c$  espacios en el sistema, donde el proceso de llegada es Poisson con tasa  $\lambda$  y los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos exponencialmente (i.i.d) con la tasa  $\mu$ .

Como un sistema colas con proceso de nacimiento y muerte, el análisis es idéntico a la cola  $M / M / 1$ , excepto que el espacio de estado es ahora finito en lugar de infinito. Las ecuaciones del balance de flujo no cambian, pero la normalización es sobre una suma finita en lugar de una infinita.

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad \sum_{n=0}^c p_n = 1$$

Resolviendo, obtenemos:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{c+1}}, \quad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad p_n = \rho^n p_0$$

$$L = \sum_{n=0}^c n p_n = \frac{\rho[1 - (c+1)\rho^c + c\rho^{c+1}]}{(1-\rho^{c+1})(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(c+1)\rho^{c+1}}{(1-\rho^{c+1})}$$

$$L_s = 1 - p_0, \quad L_q = L - L_s$$

Tenga en cuenta que, dado que el sistema tiene capacidad limitada, no hay ningún problema con la estabilidad (ya que se supone que los clientes que encuentran el sistema completo se van). De hecho, un caso especial es aquel en el que  $\lambda = \mu$ , en el que tenemos que cada estado es igualmente probable. De tal forma que el promedio en el sistema está medio lleno:

$$p_n = \frac{1}{c+1}, \quad L = \frac{c}{2}$$

Además, suponiendo que  $W$  y  $W_q$  se refieren sólo a los clientes que entran realmente en el sistema, no tenemos la versión habitual de las leyes de Little, es decir,  $L \neq \lambda W$ .

ya que  $\lambda$  es la tasa nominal de clientes, ya que algunos clientes realmente no entran en el sistema si el sistema está lleno. Por PASTA, sabemos que la tasa de clientes que no entran en el sistema viene dada por  $\lambda q_c = \lambda p_c$ , por lo que podemos aplicar la Ley de Little para la tasa dada por  $\lambda(1 - p_c)$  para obtener

$$W = \frac{L}{\lambda(1-p_c)}, \quad W_q = \frac{Lq}{\lambda(1-p_c)}$$

### Ejemplo numérico

Ejemplo Considere una barbería de un hombre con 10 asientos (incluyendo el asiento de corte). Supongamos que los clientes potenciales llegan según un proceso de Poisson en promedio cada 3 minutos, y los tiempos de corte de pelo del barbero se distribuyen exponencialmente con un tiempo promedio de 12 minutos. Encuentre lo siguiente (promedio a largo plazo):

1. El número de cortes de pelo dados por el peluquero por hora;
2. El tiempo de espera que pasó un cliente en la barbería;
3. Porcentaje de tiempo que el barbero está ocupado;
4. La probabilidad de que un cliente que llegue tenga que esperar;
5. La probabilidad de que un cliente llegue a salir del sistema sin recibir un corte de pelo.

Resolviendo con Maple, tenemos:

Datos del problema:

$$\lambda := 20, \mu := 5, \rho := \frac{\lambda}{\mu}, \rho_c := \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{11})}, \frac{1}{1398101}, c := 10,$$

$$p_{10} := (\rho^{10}) \cdot p_0, \frac{1048576}{1398101}, 0.7500001788 = 75\%,$$

1.  $\mu = 5$  clientes por hora

$$L := \frac{\rho}{(1-\rho)} - \frac{((c+1) \cdot \rho^{c+1})}{(1-\rho^{c+1})}, \frac{13514980}{1398101}, 9.666669289 \text{ clientes}$$

$$L_s := 1 - \rho, -3, L_q := L - L_s, \frac{17709283}{1398101}, 12.66666929 \text{ clientes}$$

$$2. W_q := \frac{L}{\mu}, \frac{2702996}{1398101}, 1.933333858 \text{ horas,}$$

$$3. 1 - p_0, \frac{1398100}{1398101}, 0.9999992847 = 99.99\%$$

4. Misma respuesta que inciso anterior

$$5. p_c := 0.75, 0.75 = 75\%$$

## 12. Sistema de colas (M / M / s)

Ahora considere una sola cola con los servidores  $s$  (como en un banco y la mayoría de los contadores de aerolíneas en estos días), donde el proceso de llegada es Poisson con tasa  $\lambda$  y los tiempos de servicio son i.i.d. exponencialmente distribuido con la tasa  $\mu$ , para cualquiera de los servidores. Como en el proceso de nacimiento y muerte en los sistemas de colas, tenemos lo siguiente:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = n\mu, \quad n < s \quad \mu_n = s\mu, \quad n > s$$

El balance de flujo y la normalización conducen al siguiente resultado:

$$p_0 = \left( \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s! (1 - \lambda/\mu)} \right)^{-1}$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & , \quad \text{si } 0 \leq n \leq s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} p_0 & , \quad \text{si } n \geq s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{p_0 (s\rho)^2 \rho}{s!(1-\rho)^2} , \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

La estabilidad requiere:

$$\rho < 1 \text{ o } \lambda < s\mu$$

Para el sistema de colas:  $M/M/2$ , donde:  $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$ .

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} , \quad p_n = 2\rho^n p_0 , \quad L = \frac{2\rho}{1-\rho^2} , \quad W = \frac{E[X]}{1-\rho^2}$$

Para el sistema de colas:  $M/M/3$ , donde:  $\rho = \frac{\lambda}{3\mu}$ .

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+2\rho+\frac{3}{2}\rho^2}$$

### Ejemplo numérico:

En el problema del cajero del banco, considere que hay disponibles dos cajeros automáticos las llegadas siguen un proceso de Poisson a una tasa de 80 personas por hora, los tiempos de servicio distribuidos exponencialmente con una media de 1.2 minutos.

$$\lambda = 80/\text{hora}, \quad \mu = 50/\text{hora}, \quad \rho = 80/2(50) = 80/100 = 0.80$$

Datos y solución del problema resuelto con Maple:

$$\lambda := 80, \mu := 50, s := 2, \rho := \frac{\lambda}{s \cdot \mu}, \rho := \frac{4}{5}, p_o := \frac{(1 - \rho)}{(1 + \rho)}, p_o := \frac{1}{9} = 11.11\%$$

1. Número esperado de clientes en el sistema (largo total)

$$L := \frac{2 \cdot \rho}{(1 - \rho^2)}, L := \frac{40}{9} = 4.44 \text{ clientes}$$

2. Tiempo de espera en el sistema

$$W := \frac{2 \cdot \rho}{\lambda \cdot (1 - \rho^2)}, W := \frac{1}{18} = 0.055 = 3.33 \text{ min}$$

3. Tiempo de espera en la línea

$$W_q := W - \frac{1}{\mu}, W_q := \frac{8}{225}, 0.03555555556 = 2.13333 \text{ minutos}$$

4. Número esperado de clientes en la línea

$$L_q := \lambda \cdot W_q, L_q := \frac{128}{45}, 2.844444444 \text{ clientes}$$

5. % de tiempo de que a lo menos un cajero se encuentre inactivo

$$p_n := 2 \cdot \rho^2 \cdot p_o, p_n := \frac{8}{45}, 0.1777777778, p_o + p_n, \frac{13}{45} = 0.29 = 29\%$$

### 13. Proceso de toma de decisiones en líneas de espera (Costo de la espera)

Ahora que podemos manejar varios servidores en un sistema de colas, consideramos la aplicación de algunos resultados de la teoría de colas a la toma de decisiones. Una vez más, la idea es simplemente aplicar algunos aspectos estadísticos para calcular ciertas cantidades de interés que luego pueden usarse para ayudar a la toma de decisiones. En esta sección, aplicaremos principalmente los resultados obtenidos en los ejemplos numéricos vistos anteriormente para analizar el costo de la espera. En las redes de comunicaciones o en un sistema de fabricación, puede haber algún costo para el retraso o demora en exceso o los inventarios en el sistema. Si podemos calcular estas cantidades, podemos decidir si necesitamos agregar nuevo equipo o reconfigurar el sistema o realizar algún otro tipo de cambio o ajuste en el sistema. Las formas más comunes de decisiones implican los siguientes tipos de opciones:

- Qué tipo de servidor utilizar;
- Cuántos servidores utilizar;
- Qué configuración utilizar.

Para el último punto, un ejemplo es si utilizar una sola línea o varias líneas paralelas. A veces la decisión está dictada por consideraciones físicas. Por ejemplo, en una cabina de derecho de autopista sería difícil implementar una sola línea paralela, aunque como dijimos anteriormente es el sistema más justo, en el sentido de minimizar la varianza del tiempo de espera de un cliente.

En términos de nuestros modelos, las opciones anteriores se traducen en decisiones sobre los valores de los siguientes parámetros:  $\mu$ ,  $s$ ,  $\lambda$ ,  $p_{ij}$ . Para tomar estas decisiones, los costos deben ser conectados a los servidores y al tiempo de espera de los clientes o al número en el sistema (normalmente llamado como inventario cuando los «clientes» no son humanos).

#### Ejemplo numérico No. 1: ¿Cuántos servidores?

- Costo por servidor;
- Costo por tiempo de espera o inventario; reparación de computadoras: \$ 70 por día para cada reparador; \$ 100 por día para cada computadora fuera de servicio.

Análisis:

- Sistema es el taller de reparación;
- Los servidores son los reparadores;
- Los «clientes» son las computadoras;
- Costo del número de ordenadores en reparación (fuera de servicio).

Función de costos:

$$G(s) = 70(s) + 100L(s)$$

Determine  $s$  para minimizar la función de costos.

El incremento en costos depende del estado del sistema:

- Sin costo para una computadora fuera de servicio;
- \$ 50 por día por dos computadoras fuera de servicio;
- \$ 60 por día por cada computadora adicional fuera de servicio (después de dos).

Función de coste modificada:

$$G(s) = 70(s) + \sum_{i \geq 2} (50 + (i - 2)60)p_i$$

### **Ejemplo numérico 2: ¿Qué equipo?**

Costo por computadora;

Costo por tiempo de espera o inventario; opciones de computadora: \$ 70 por hora para Tipo I, que tiene velocidad de 10 trabajos por hora; \$ 100 por hora para Tipo II, que tiene velocidad de 15 trabajos por hora. Costo de espera: \$ 5 por hora en el sistema para un trabajo.

Análisis:

- El sistema es un sistema informático;
- Los servidores son las computadoras;
- Los «clientes» son los empleos;
- Costo en la hora del sistema de trabajos en el sistema.

Función de costos:



$$G_1 = 70 + 5(L), \quad G_2 = 100 + 5(L)$$

Elija la máquina que produzca el costo promedio más bajo.

La forma general de la función de costo, es:

$$\frac{\text{Costo esperado}}{U. tiempo} = \frac{\text{Costo de servicio}}{U. tiempo} + \frac{\text{Costo esperado del "inventario"}}{U. tiempo}$$

Donde este último es usualmente el producto de  $L$  y un costo por unidad de tiempo. Incluso cuando los costos se dan en términos de espera, terminamos con la misma forma, porque para convertir en unidades de costo correcto, aplicamos la Ley de Little multiplicando por la tasa de llegada:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Costo de la espera}}{U. tiempo} \\ &= \frac{\text{Costo de espera por u. tiempo}}{\text{cliente}} \times \frac{\# \text{ de clientes}}{U. tiempo} \text{ promedio } \# \text{ clientes} \end{aligned}$$

Donde este último es solo  $L$ .

**Importante:** a veces hay una distinción entre los costos del sistema y los costos de la cola; en este último caso, utilizará  $L_q$  o  $W_q$  en su lugar.

Ejemplo: si nos remitimos al caso del cajero automático del banco y asumimos que el proceso de llegada se describe mediante una distribución de probabilidad Poisson y tiempos de servicio exponencial, con suficiente espacio para la espera.

El cajero 1 cuesta \$ 6 por hora para operar, con una tasa de 12 por hora.

El cajero 2 cuesta \$ 10 por hora para operar, con una tasa de 15 por hora. Los costos de espera son de \$ 10 por hora para un cliente. La tasa de llegada es de 10 unidades por hora.

Resolviendo con Maple:

#Cajero No. 1 y Cajero No. 2

$$\lambda_1 := 10; \lambda_2 := 10, \mu_1 := 12; \mu_2 := 15, \rho_1 := \frac{\lambda_1}{\mu_1}; \rho_2 := \frac{\lambda_2}{\mu_2} \quad \rho_1 := \frac{5}{6}, \rho_2 := \frac{2}{3}$$

#Costo de la espera = 10

#Número de unidades en espera (sistema por cajero)

$$L_1 := \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)}; L_2 := \frac{\rho_2}{(1 - \rho_2)}, L_1 := 5, L_2 := 2$$

#Costo de la espera por operación (por cajero)

$$c_1 := 6; c_2 := 10$$

#Costo por hora (Cajero No. 1)

$$Ch_1 := c_1 + 10 \cdot L_1, Ch_1 := 56, \text{ #Cajero No. 2, } Ch_2 := 10 + 10 \cdot L_2 \quad Ch_2 := 30$$

**Decisión: seleccionar el cajero No. 2**

Pregunta: ¿deberíamos de añadir otro cajero?

$$\rho_2 := \frac{\lambda_1}{2 \cdot \mu_1}; \rho_3 := \frac{\lambda_2}{2 \cdot \mu_2}, \rho_2 := \frac{5}{12}, \rho_3 := \frac{1}{3}, \rho_2, \frac{5}{12} = 0.416666, \rho_3, \frac{1}{3} = 0.3333333333$$

$$L_3 := \frac{2 \cdot \rho_3}{(1 - \rho_3^2)}, L_3 := \frac{3}{4}$$

#costo por hora

$$CH := 2 \cdot 10 + L_3 \cdot (10), CH := \frac{55}{2} = \$27.50000000$$

**Decisión: Si.**

## 14. Sistemas de pérdida

De acuerdo a Bonini (2000), en algunos sistemas de líneas de espera, los trabajos que llegan no pueden entrar al sistema porque no hay línea de espera o cola. Estos son los llamados sistemas de pérdida. Por ejemplo, se tiene un servicio de remolques con una grúa para remolcar vehículos averiados hasta las instalaciones de reparación. Éste servicio de remolque es uno de los que varias empresas tienen contratados con un club de automovilismo.

Cuando éste recibe una llamada de emergencia, se contacta con el servicio más cercano. Si todas las grúas están en servicio, contacta a otra que esté bajo contrato. Desde la perspectiva de la empresa de remolque, éste es un sistema de pérdida. Si una llamada llega al club mientras la grúa está en servicio con otro cliente, el trabajo se pierde.

### 14.1. Modelo de líneas de espera de pérdida $M/G/c$

En un sistema donde los trabajos llegan de manera aleatoria (tiempo entre llegadas exponencial) y los tiempos de servicio pueden tener una distribución general. Hay  $s$  canales de servicio. Los trabajos que llegan cuando todos los canales  $c$  están ocupados, se pierden.

La media del tiempo entre llegadas es  $\lambda$  y la media de la tasa de servicio es  $\mu$ . El factor de carga del sistema es:  $\rho = \frac{\mu}{s\lambda}$ .

En sistemas de pérdida, ésta puede ser mayor al 100% ya que algunas llegadas en realidad no ingresan al sistema. Una medida del desempeño importante para los sistemas de pérdida es la fracción de los trabajos que llegan y se pierden. La expresión matemática es:

$$\text{Fracción de pérdida} = \frac{\frac{(c\rho)^s}{s!}}{\sum_{k=0}^c \frac{(s\rho)^k}{k!}}$$

Para el caso de canal único, ( $s = 1$ ), esto se convierte en:

$$\text{Fracción de pérdida} = \frac{\rho}{1 + \rho}$$

Para el caso de dos canales, ( $s = 2$ ), esto se convierte en:

$$\text{Fracción de pérdida} = \frac{2\rho^2}{1 + 2\rho + 2\rho^2}$$

Para el caso de los tres canales, ( $s = 3$ ), esto se convierte en:

$$\text{Fracción de pérdida} = \frac{\frac{(3\rho)^3}{3!}}{1 + 3\rho + \frac{(3\rho)^2}{2} + \frac{(3\rho)^3}{3!}}, \text{ Y, así sucesivamente.}$$

### Ejemplo numérico:

Bonini (2000). Un gerente de un supermercado local, como parte de su operación, alquila equipo para que los clientes dueños limpien sus propias alfombras, y para ello recibe solicitudes para alquilar estas unidades a una tasa de dos por día, en promedio, (es decir, la media del tiempo entre llegadas es de medio día). Las solicitudes para las máquinas siguen un proceso de Markov (distribución exponencial). Se dispone de dos máquinas. Los clientes las alquilan por un periodo máximo de dos días, pero, en promedio, la devuelven un día después. Suponer que, si no tiene una máquina para alquilar, el cliente va a otro lugar para hacerlo (los clientes no esperan).

- ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente solicite una máquina cuando no hay disponibles?
- ¿Cuántas máquinas se necesitaría tener disponibles para reducir a menos de 5% la probabilidad de que un cliente se vaya?

Solución: Resolviendo con Maple. Nota: se trabajó el problema con el número de canales  $s = c$

a) #Este es un sistema de líneas de espera con dos canales

# es decir, dos máquinas disponibles , #datos del problema

$$\lambda := 1.0, \mu := 0.5, c := 2, \rho := \frac{\lambda}{c \cdot \mu}, \rho := 1.000000000$$

#Fracción de perdida (dos máquinas)

$$Fp := \frac{(2 \cdot \rho^2)}{(1 + 2 \cdot \rho + 2 \cdot \rho^2)}, Fp := 0.4000000000, \text{ \#Es decir, la probabilidad es 40\%}$$

# b) Considerando el caso de tres máquinas

$$\# c1=3 \quad c1 := 3 \quad \rho1 := \frac{\lambda}{c1 \cdot \mu}, \rho1 := 0.6666666666$$

#Fracción de pérdida (tres máquinas)

$$Fp1 := \frac{\frac{27}{6} \cdot (\rho1)^3}{1 + 3 \cdot \rho1 + \frac{9}{2} \cdot (\rho1)^2 + \frac{27}{6} \cdot (\rho1)^3}, Fp1 := 0.2105263157$$

$$\#Con cuatro máquinas, c=4, \quad c2 := 4, \quad \rho2 := \frac{\lambda}{c2 \cdot \mu}, \rho2 := 0.5000000000$$

#Fracción de pérdida

$$Fp2 := \frac{\frac{256}{24} \cdot (\rho2)^4}{1 + 4 \cdot \rho2 + \frac{16}{2} \cdot (\rho2)^2 + \frac{64}{6} \cdot (\rho2)^3 + \frac{256}{24} \cdot (\rho2)^4}, Fp2 := 0.09523809525$$

#Con cinco máquinas, c=5

$$\rho3 := \frac{\lambda}{5 \mu}, \rho3 := 0.4000000000$$

#Fracción de pérdida

$$Fp3 := \frac{\frac{3125}{120} \cdot (\rho3)^5}{1 + 5 \cdot \rho3 + \frac{25}{2} \cdot (\rho3)^2 + \frac{125}{6} \cdot (\rho3)^3 + \frac{625}{24} \cdot (\rho3)^4 + \frac{3125}{120} \cdot (\rho3)^5}$$

$$Fp3 := 0.03669724771$$

#Conclusión: Así, se necesitaría de 5 máquinas #para reducir la probabilidad de perder

#un cliente a menos de 0.05.

## 15. Problemas resueltos

### Problema No. 1.

Moskowitz (1982). Dado una tasa de llegada de 30 por hora y dado que la tasa promedio de servicio es 40 por hora, ¿cuál es la probabilidad de que haya 0, 1, 2, 3 y 4 clientes en el sistema (en la cola y siendo servidos)? ¿cuáles son las características del sistema? Resuelva con Maple

### Solución:

*#Respuesto al problema 7.1 (Moskowitz)*

*#Datos del problema*

$$\lambda := 30, \mu := 40, \rho := \frac{\lambda}{\mu}, \frac{3}{4}, P0 := 1 - \rho, \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%, P1 := (1 - P0) \cdot \rho, \frac{9}{16} = 0.1875$$

$$P2 := (1 - P0) \cdot \rho^2, \frac{27}{64} = 0.1416, P3 := (1 - P0) \cdot \rho^3, \frac{81}{256} = 0.1055, P4 := (1 - P0) \cdot \rho^4 \\ = \frac{243}{1024} = 0.0791 = 7.91\%$$

*#Número esperado de clientes en el sistem :*  $L := \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 3$  clientes ,

*#Número esperado de clientes en la fila ,*  $Lq := \frac{(\lambda^2)}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{9}{4} = 2.25$  clientes

*#Tiempo promedio de espera en la fila o cola*

$$Wq := \frac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}, = \frac{3}{40} = 0.0750000000 \text{ horas} = 4.5 \text{ minutos}$$

*#Tiempo promedio de espera en el sistema ,*  $W := \frac{1}{(\mu - \lambda)}, \frac{1}{10} = 0.1000000000 \text{ horas} = 6$  minutos

### **Problema No. 2.**

Moskowitz (1982) ¿Qué es un problema de colas? ¿Cuáles son algunas de las características básicas de un sistema de colas? ¿Cuáles son algunas de las suposiciones importantes de los modelos básicos abordados en este capítulo?

#### **Respuesta:**

*Un problema de colas es esencialmente el mismo problema de asignación por programación matemática. Esto es, hay actividades que compiten por servicios limitados (o recursos). En sistemas de colas, tanto las tasas de llegada como las tasas de servicio varían con el tiempo. Así, el centro de servicio estará vacío parte del tiempo. La meta para «resolver» problemas de líneas de espera es balancear el costo de las demoras (tiempo de espera y longitudes de colas) contra el costo de proporcionar cantidades diferentes de servicio (más servidores o servidores más rápidos) con el objetivo final de minimizar el costo total (o maximizar la utilidad total). Las suposiciones básicas que se requieren para resolver los modelos de colas que se dan son que el patrón de flujo de llegada sigue una distribución de Poisson y el tiempo de servicio una distribución exponencial.*

### **Problema No. 3.**

Moskowitz (1982) ¿Cómo propondría usted mejorar el servicio en cada una de las operaciones siguientes?

- a) Un taller de reparación de computadoras
- b) Una institución local de ahorros y préstamos
- c) El mostrador de pasajes de una compañía aérea

#### **Respuesta:**

- a) *Para un taller de reparación de computadoras, el servicio se puede mejorar programando los trabajos, contratando más trabajadores, estableciendo reglas de prioridad, utilizando mejor (más eficiente) equipo de prueba.*
- b) *Para una institución de ahorros y préstamos, el servicio puede mejorarse programando las citas, contratando más y mejor personal.*
- c) *Para el mostrador de pasajes, el servicio puede mejorarse contratando más personal, disponiendo de mostrador de prioridad o instalando un sistema de registro previo de equipaje, entre otros.*

#### **Problema No. 4.**

Moskowitz (1982) El autoservicio en una gasolinera local, con una tasa promedio de 7 minutos por carro, es más lento que el servicio asistido, que posee una tasa de 6 minutos por carro. El gerente de la gasolinera desea calcular el número promedio de clientes en la gasolinera, el tiempo promedio que cada carro gasta en la gasolinera y el tiempo promedio que cada carro gasta esperando servicio. Supongamos que los clientes llegan aleatoriamente a cada línea a una tasa de 5 carros por hora. Calcule la estadística adecuada de operación de esta gasolinera. Resuelva usando Maple.

#### **Solución:**

*#Problema No. 7.3 Moskowitz , #Datos del problema*

*#Línea de autoservicio*

$$\mu l := \frac{1}{7} \text{ #clientes por minuto } , \mu l := \frac{1}{7} , \lambda l := \frac{5}{60} \text{ #clientes por minuto } , \lambda l := \frac{1}{12}$$

*#Línea de autoservicio , #Número esperado de carros en la #línea de autoservicio*

$$\rho l := \frac{\lambda l}{\mu l} , \rho l := \frac{7}{12} , Lq l := \frac{(\lambda l^2)}{\mu l \cdot (\mu l - \lambda l)} , Lq l := \frac{49}{60} = 0.8166666667 \text{ autos}$$

*#Numero de carros esperando en el sistema*

$$L l := \frac{\lambda l}{\mu l - \lambda l} , L l := \frac{7}{5} = 1.400000000 \text{ autos}$$

*#Tiempo promedio en el sistema*

$$W l := \frac{1}{\mu l - \lambda l} , W l := \frac{84}{5} = 16.80000000 \text{ minutos}$$

*#Tiempo promedio esperando servicio*

$$Wq l := \frac{\lambda l}{\mu l \cdot (\mu l - \lambda l)} , Wq l := \frac{49}{5} = 9.800000000 \text{ minutos}$$



#Línea asistido , #Datos del problema :  $\mu_2 := \frac{1}{6}$  ,  $\lambda_2 := \frac{5}{60}$  ,  $\rho_2 := \frac{\lambda_2}{\mu_2}$  ,  $\rho_2 := \frac{1}{2}$

#Número esperado de carros en la línea asistida

$$L_2 := \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} , L_2 := 1 \text{ autos}$$

#Número esperado de carros esperando servicio

$$L_{q2} := \frac{(\lambda_2^2)}{\mu_2 \cdot (\mu_2 - \lambda_2)} , L_{q2} := \frac{1}{2} \text{ autos}$$

#Tiempo promedio en el sistema

$$W_2 := \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} , W_2 := 12 \text{ minutos}$$

#Tiempo promedio que se utiliza esperando servicio

$$W_{q2} := \frac{\lambda_2}{\mu_2 \cdot (\mu_2 - \lambda_2)} , W_{q2} := 6 \text{ minutos}$$

### **Problema No. 5.**

Moskowitz (1982) Se debe contratar a un mecánico para reparar máquinas que fallan a una tasa de promedio de 4 por hora. Las fallas ocurren aleatoriamente (Poisson) con el tiempo. El tiempo no productivo en una máquina se considera que le cuesta a la compañía \$0.50 dólares por hora. La gerencia ha limitado la selección a dos mecánicos: uno lento, pero barato tiene un salario de \$30 dólares por hora; y repara las máquinas que fallan a una tasa media de 5 por hora. El mecánico rápido, y costoso con un salario de \$50 dólares por hora; repara máquinas a una tasa promedio de 7 por hora. ¿Cuál de los dos mecánicos debe contratar la compañía? ¿Suponga para ambos mecánicos, tiempos de reparación exponencial? Resuelva con Maple.

Solución:

#Problema 7.5 Moskowitz , #Datos del problema

#Mecánico barato

#Costo por hora =mano de obra por hora (MO) +(tasa de falla por hora)

# por (tiempo promedio que se gasta esperando y en l reparación

#por (tiempo no productivo por máquina(TN))

MOB := 30 (costo de mano de obra mecánico barato), 30 ,  $\lambda := 4$  ,  $\mu := 5$

TN := 0.50 (tiempo no productivo por máquina)

$$CHB := MOB + 4 \cdot \left( \frac{1}{\mu - \lambda} \right) \cdot TN \quad (\text{costo por hora mecánico barato}) = \$32.00$$

#Mecánico caro

MOC := 50 (costo mano de obra mecánico caro),  $\mu_l := 7$

$$CHC := MOC + \lambda \cdot \left( \frac{1}{\mu_l - \lambda} \right) \cdot TN \quad (\text{costo por hora mecánico caro}), \$50.66666667$$

Mecánico barato.

### **Problema No. 6**

**Bonini (2000).** Dos mecanógrafas tienen trabajos idénticos. Cada una escribe las cartas que le dicta un gerente en particular. Las cartas por escribir les llegan de manera aleatoria (tiempos entre llegadas exponenciales), con una media de tiempo entre llegadas de 20 minutos.

Suponer que cada carta a realizar puede hacerse en 15 minutos, en promedio (también una distribución exponencial). Resuelva las siguientes preguntas utilizando el programa Maple.

(Nota: Bonini utiliza la tasa promedio de llegada y la tasa promedio de servicio, por tal razón la fórmula del factor de utilización se modifica, sin embargo, los cálculos y resultados no varían)

- a) Suponiendo que cada mecanógrafa hace su propio trabajo, ¿cuál es el tiempo de espera que puede tener una carta (¿tiempo anterior a la iniciación de esta?)
- b) Suponer que las dos mecanógrafas se unen. Es decir, las cartas les llegan a las dos y la escribe quien esté libre, cualquiera que sea el orden de llegada. ¿Cuál es el tiempo de espera que puede tener una carta bajo ese acuerdo?

Solución:

#Problema 7.6 Bonini , #Datos del problema, para el inciso a)

#Para cada tipo de secretaria, este un modelo  $M/M/1$

$\lambda := 15$  minutos ,  $\mu := 20$  minutos , #El factor de utilización  $\rho$ , es:  $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$  ,  $\rho := \frac{3}{4}$   
=75%

#El número de unidades en espera es:  $L := \frac{\rho}{1 - \rho}$   $L := 3$  cartas

#El número de unidades de espera en la fila es:  $Lq := \rho \cdot L$  ,  $Lq := \frac{9}{4} = 2.250000000$  cartas

#Tiempo promedio de espera (Por ley de Little)

$W = \mu L = 45$  minutos es el tiempo de espera

Este es el tiempo promedio de espera antes de que se inicie una carta. El tiempo promedio de procesamiento es de una hora (el tiempo de espera promedio más el tiempo promedio de servicio).

#Datos del problema para el inciso b)

#Cuando las secretarias se agrupan #Dan origen a un modelo de colas  $MM2$

#Tasa de llegada (minutos)  $\lambda := 10$  #Tasa de servicio (minutos)  $\mu := 15$  , #Número de canales  $s$  ,

$s := 2$  #Factor de carga o utilización  $\rho := \frac{\mu}{s \cdot \lambda}$   $\rho := \frac{3}{4}$

$P0 := 0.4545$  #Multiplo del tiempo de espera  $W := 1.37$  (tabulado e interpolando)

*Nota: La fórmula para el tiempo múltiplo de espera es, desgraciadamente, muy confusa y complicada. Para tal caso puede utilizarse un múltiplo de tiempo de espera para la cola M/M/c, utilizando el factor de uso o carga  $\rho = \frac{\mu}{c\lambda}$ , mediante tabulación para distintos factores de carga del sistema. Para nuestro caso:  $W = 1.37$ , #Tiempo promedio de espera de una carta es  $Wq := \mu \cdot W$ ,  $Wq := 20.55$  minutos.*

### **Problema No. 7**

**Bonini (2000).** Una empresa petrolera integrada está considerando la expansión de una de sus instalaciones descargas en su refinería de Singapur. Debido a las variaciones del clima, los retrasos en la carga y otros factores, los tiempos entre llegadas para los barcos que atracan en la refinería para descargar petróleo crudo sigue una distribución exponencial con un promedio  $\lambda = 1.4$  días. El tiempo de servicio también es exponencial con promedio  $\mu = 0.7$  días.

- ¿Cuál es el número promedio de barcos en espera para enviar el petróleo crudo?
- ¿Cuál es el tiempo promedio que un barco debe esperar antes de comenzar a entregar su carga a la refinería?
- ¿Cuál es el tiempo total promedio (espera más entrega real) que un barco pasa en la refinería?

*#Problema 7.7 Bonini , #Datos del problema , #El sistema es un modelo de colas MMI*

$$\lambda := \frac{1}{1.4} = \lambda := 0.7142857143, \quad \mu := \frac{1}{0.7} = \mu := 1.428571429, \quad \rho := \frac{\lambda}{\mu} = \rho := 0.4999999999$$

*#Número de barcos en espera en el sistema ,*  $L := \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = L := 0.9999999994$  barcos

*#Número de barcos en espera en la fila (inciso a)*

$$Lq := \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = Lq := 0.4999999996 \text{ barcos}$$

*#Tiempo promedio de espera en la fila (inciso b)*

$$Wq := \frac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = Wq := 0.6999999995 \text{ días}$$

#Tiempo promedio de espera en el sistema (inciso c)

$$W := \frac{1}{\mu - \lambda} = W := 1.399999999 \text{ días}$$

### **Problema No. 8**

**Bonini (2000).** Remitirse al problema 6.7. La empresa está considerando tomar un segundo muelle cuyo alquiler sería US\$ 1,500 diarios. El tiempo de servicio para este muelle también sería exponencial, con la misma media de tiempo de servicio que el muelle propio de la empresa. Por cada día que un barco permanezca en espera, la empresa pierde US\$ 4,000. Use Maple para resolver este problema

- a) Si se alquila un segundo muelle, ¿cuál sería el tiempo promedio que un barco esperaría?
- b) ¿Cuál sería el número promedio de barcos en espera?
- c) ¿El beneficio (en dólares) de reducir el tiempo de espera cubre el costo de alquiler del segundo muelle?

### **Solución:**

#Problema 7.8 Bonini , #Datos del problema , #Este es un sistema de colas MM2

$$\lambda := \frac{1}{1.4} \quad \lambda := 0.7142857143 , \quad \mu := \frac{1}{0.7} \quad \mu := 1.428571429 , \quad s := 2$$

$$\rho := \frac{\lambda}{s \cdot \mu} , \quad \rho := 0.2500000000$$

#Múltiplo del tiempo de espera múltiplo para #la cola MM2 = 0.07 (de tablas e interpolando)

#El tiempo promedio de espera promedio (Por Little)

- a) #Tiempo promedio de servicio por #múltiplo de tiempo de espera

$$W := (0.7) \cdot (0.07) \quad W := 0.049 \text{ días} = 1.76 \text{ horas}$$

- b) #Número promedio de barcos en espera

$$W_q := \frac{W}{\mu} \quad W_q := 0.0342999999 \text{ unidades}$$

- c) la reducción del tiempo promedio de espera de un canal al sistema de dos canales es de 0.70 días de espera por barco a 0.049 días de espera, una reducción de 0.651 días de espera por buque. Dado que el tiempo medio de navegación entre barcos es de 1.4 días, el número promedio de buques que llegan por día es de  $1 / 1.4 = 0.714$  buque por día. Por lo tanto, los ahorros diarios son: (número de barcos por día) x (reducción promedio del tiempo de espera) x \$4,000 =  $(0.714) (0.651) (\$4,000) = \$1,860$  por día.

Dado que el costo es de sólo \$1,500 por día, el segundo muelle debe ser alquilado

### **Problema No. 9**

Parlar (2000). Use Maple para obtener las diferentes (recursivas) ecuaciones del sistema de colas modelo M/M/1 para el caso especial de  $\lambda_n = \lambda$  y  $\mu_n = \mu$ , que se reduce al proceso de nacimiento y muerte del modelo M/M/1. Use el comando de Maple *rsolve()* donde se le indica a Maple que las condiciones iniciales para  $n = 1, p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)p_0$ .

Solución:

*#Sistema de colas o líneas de espera (M.M.1) , #Utilizando el proceso de nacimiento y muerte  
#Usaremos el comando rsolve*

$$mm1 := \left\{ 0 = -(\text{lambd} + \text{mu}) \cdot p(n) + \text{lambd} \cdot p(n - 1) + \text{mu} \cdot p(n + 1), p(n = 0..1) \right. \\ \left. = \left( \frac{\text{lambd}}{\text{mu}} \right)^n p[0] \right\};$$

$$mm1 := \left\{ 0 = -(\lambda + \mu) p(n) + \lambda p(n - 1) + \mu p(n + 1), p(n = 0..1) = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \right\}$$

$$sol := rsolve(mm1, p(n)); \quad sol := \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0, \quad p := unapply(sol, n); \quad p := n \rightarrow \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0$$

$$p(0), p_0, p(1), \frac{\lambda p_0}{\mu}, p(2), \frac{\lambda^2 p_0}{\mu^2}$$

$$L := \text{sum}(n \cdot p(n), n = 0 \dots \text{infinity}); \quad L := \frac{p_0 \mu \lambda}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$Lq := \text{sum}((n - 1) \cdot p(n), n = 1 \dots \text{infinity}); \quad Lq := \frac{p_0 \lambda^2}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$p[0] := \text{solve}(1 = \text{sum}(p(n), n = 0 \dots \text{infinity}), p[0]); \quad p_0 := -\frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad L; Lq; -\frac{\lambda}{\lambda - \mu}, -\frac{\lambda^2}{(\lambda - \mu) \mu}$$

Ahora, utilizando el programa Maple ayudamos a calcular las expresiones restantes, se tiene:

Dado que cada tiempo de servicio es exponencial, la distribución de la terminación de  $n$  servicios es una distribución de probabilidad Erlang con  $n$  etapas. Por lo tanto, como  $p_n = (1 - \rho)\rho^n$ , la distribución  $W_q(t)$  se puede escribir como sigue:

#Sea la función:

$$f := \mu e^{-\mu x}, \quad \text{cdfTq} := (1 - \rho) \cdot \rho \cdot \left( \int_0^t \mu e^{-\mu x} dx \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu x \rho)^{n-1}}{(n-1)!} \right), x = 0 \dots t + 1 - \rho$$

$$Wqt := -\rho \cdot \exp(-\mu \cdot t + \mu \cdot t \cdot \rho) + 1$$

$$Wqt := -\rho e^{\mu \rho t - \mu t} + 1, \quad wqt := \text{diff}(Wqt, t), \quad wqt := -\rho (\mu \rho - \mu) e^{\mu \rho t - \mu t}$$

$$Etq := 0 \cdot (1 - \rho) + \text{Int}(t \cdot wqt, t = 0 \dots \text{infinity}), \quad Etq := \int_0^{\infty} (-t \rho (\mu \rho - \mu) e^{\mu \rho t - \mu t}) dt$$

simplify(value(Etq))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{(e^{\mu t (\rho - 1)} \mu \rho t - e^{\mu t (\rho - 1)} \mu t - e^{\mu t (\rho - 1)} + 1) \rho}{\mu (\rho - 1)} \right)$$

#De lo anterior se desprende

$$Wq := normal\left(\text{subs}\left(\text{rho} = \frac{\text{lambd}\mu}{\text{mu}}, \%\right)\right), Wq := \frac{\lambda}{\mu(\lambda - \mu)}, W := \frac{1}{\text{mu} - \text{lambd}\mu}$$

$$W := \frac{1}{\mu - \lambda}, L := \frac{\text{lambd}\mu}{(\text{mu} - \text{lambd}\mu)}, L := \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, Lq := \frac{\lambda^2}{(\text{mu} \cdot (\text{mu} - \text{lambd}\mu))}$$

$$Lq := \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Lo que queda demostrado que las fórmulas anteriores constituyen las expresiones del modelo M/M/1

### **Problema No. 10**

Anderson (2016). Una franquicia de comida rápida considera operar un servicio de despacho de comida en su automóvil. Suponga que las llegadas de clientes siguen una distribución de probabilidad de Poisson con una tasa de llegadas de 24 automóviles por hora, y que los tiempos de servicio siguen una distribución de probabilidad exponencial. Los clientes que llegan hacen su pedido en una estación de intercomunicación en la parte trasera del estacionamiento y luego se dirigen a la ventanilla de despacho para pagar y recibir sus pedidos. Se consideran las siguientes tres alternativas de servicio.

Una operación de un solo canal en el cual un empleado completa el pedido y recibe el dinero del cliente. El tiempo de servicio promedio con esta alternativa es de 2 minutos.

Una operación de un solo canal en la que un empleado completa el pedido mientras que un segundo empleado recibe el dinero del cliente. El tiempo de servicio promedio con esta alternativa es de 1.25 minutos.

Una operación de dos canales con dos ventanillas de servicio y dos empleados. El empleado estacionado en cada ventanilla completa el pedido y recibe el dinero de los clientes que llegan a la ventanilla. El tiempo de servicio promedio con esta alternativa es de 2 minutos en cada canal.



Responda las siguientes preguntas y recomiende un diseño alternativo para la franquicia de comida rápida:

- ¿Cuál es la probabilidad de que no haya automóviles en el sistema?
- ¿Cuál es el número promedio de automóviles en espera de que los atiendan?
- ¿Cuál es el número promedio de automóviles en el sistema?
- ¿Cuál es el tiempo promedio que un automóvil espera para que lo atiendan?
- ¿Cuál es el tiempo promedio en el sistema?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un carro que llega tenga que esperar para que lo atiendan?

El costo del tiempo de espera de un cliente se estima en \$25 por hora para reflejar el hecho de que el tiempo de espera es costoso para el negocio de comida rápida.

El costo de cada empleado es de \$6.50 por hora.

Para tener en cuenta el equipo y espacio, se atribuye un costo adicional de \$20 por hora a cada canal.

- ¿Cuál es el diseño de costo mínimo para el negocio de comida rápida?

Solución:

*#Datos del problema #Sistema de colas MMI*

$$\lambda := 24, \mu := 30, s := 1, \rho := \frac{4}{5}$$

*#Vector de características de operación*

*#Sistema A*

$$\text{Parametros} := \text{Vector}([\text{Características}, p0, L, Wq, W, Lq, pw]) = \text{Vector}\left(\left[\text{Sistema A}, 1 - \rho, \frac{\rho}{1 - \rho}, \frac{\rho}{\mu - \lambda}, \frac{1}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda \cdot \rho}{\mu - \lambda}, \rho\right]\right)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Parametros :=} \\
 \left[ \begin{array}{l} \text{Características} \\ p0 \\ L \\ Wq \\ W \\ Lq \\ pw \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Sistema A} \\ \frac{1}{5} \\ 4 \\ \frac{2}{15} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{16}{5} \\ \frac{4}{5} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Características} \\ p0 \\ L \\ Wq \\ W \\ Lq \\ pw \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Sistema A} \\ 0.20000 \\ 4. \\ 0.13333 \\ 0.16667 \\ 3.2000 \\ 0.80000 \end{array} \right]
 \end{array}$$

#Sistema B  $\lambda := 24$ ,  $\mu := 48$ ,  $\rho := \frac{1}{2}$ ,  $s := 1$

$$\text{Parametros := Vector}([\text{Características}, p0, L, Wq, W, Lq, pw]) = \text{Vector}\left(\left[\begin{array}{l} \text{Sistema B}, 1 - \rho, \\ \frac{\rho}{1 - \rho}, \frac{\rho}{\mu - \lambda}, \frac{1}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda \cdot \rho}{\mu - \lambda}, \rho \end{array}\right]\right)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Parametros :=} \\
 \left[ \begin{array}{l} \text{Características} \\ p0 \\ L \\ Wq \\ W \\ Lq \\ pw \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Sistema B} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 48 \\ \frac{1}{24} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Características} \\ p0 \\ L \\ Wq \\ W \\ Lq \\ pw \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Sistema B} \\ 0.50000 \\ 1. \\ 0.020833 \\ 0.041667 \\ 0.50000 \\ 0.50000 \end{array} \right]
 \end{array}$$

#Sistema C

#Sistema de colas MM2

$\lambda := 24$ ,  $\mu := 30$ ,  $s := 2$ ,  $\rho := \frac{2}{5}$ ,  $Lq := 0.1524$ ,  $Wq := 0.006350$

$$\begin{aligned}
 \text{Parametros} := \text{Vector}([\text{Características}, p0, Lqi, Li, Wqi, Wi, pw]) = \text{Vector} \left( \left[ \begin{array}{l} \text{Sistsema C}, \\ \frac{(1-\rho)}{(1+\rho)}, \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \lambda \cdot \mu}{(2 \cdot \mu - \lambda)^2} \cdot (0.4286), \left(Lq + \frac{\lambda}{\mu}\right), \frac{Lq}{\lambda}, \left(Wq + \frac{1}{\mu}\right), \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\rho^2) \\ \cdot \left(\frac{2 \cdot \mu}{(2 \cdot \mu - \lambda)}\right) \cdot 0.4286 \end{array} \right] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Parametros} := \left[ \begin{array}{l} \text{Características} \\ p0 \\ Lqi \\ Li \\ Wqi \\ Wi \\ pw \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Sistsema C} \\ \frac{3}{7} \\ 0.1523911111 \\ 0.9524000000 \\ 0.006350000000 \\ 0.03968333333 \\ 0.05714666667 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \text{Características} \\ p0 \\ Lqi \\ Li \\ Wqi \\ Wi \\ pw \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Sistsema C} \\ 0.42857 \\ 0.15239 \\ 0.95240 \\ 0.0063500 \\ 0.039683 \\ 0.057147 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Costo del servicio por canal:

#Costo del servicio por sistema (canal)

$$\text{CostoCanal} := \text{Vector}([\text{Sistema A}, \text{Sistema B}, \text{Sistema C}]) = \text{Vector}([6.50 + 20, 2 \cdot (6.50) + 20, 6.50 + 20])$$

$$\text{CostoCanal} := \left[ \begin{array}{l} \text{Sistema A} \\ \text{Sistema B} \\ \text{Sistema C} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} 26.50 \\ 33.00 \\ 26.50 \end{array} \right]$$

Costo total:

$$\text{CostoTotalSistema} := \text{Vector}([\text{Sistema A}, \text{Sistema B}, \text{Sistema C}]) = \text{Vector}([25 \cdot (4) + 26.5 \cdot (1), 25 \cdot (1) + 33 \cdot (1), 25 \cdot (0.9524) + 26.5 \cdot (2)])$$

$$\text{CostoTotalSistema} := \left[ \begin{array}{l} \text{Sistema A} \\ \text{Sistema B} \\ \text{Sistema C} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} 126.5 \\ 58 \\ 76.8100 \end{array} \right]$$

Decisión: Sistema B. Tiene el menor costo total

## 16. Conclusiones del capítulo

Una de las áreas más fructíferas de la teoría de probabilidad aplicada es la teoría de colas o el estudio de fenómenos de línea de espera (una cola es una línea de espera). Esperar en línea (hacer cola) para el servicio es una de las experiencias más desagradables de la vida en este planeta. Barrer (1957) lo dice todo en el título de su artículo, "Cola con clientes impacientes y empleados indiferentes".

Barrer dice, En ciertos procesos de colas, un cliente potencial se considera "perdido" si el sistema está ocupado en el momento en que se solicita el servicio. Un cliente al teléfono cuelga cuando recibe una señal de ocupado. Un hombre que intenta conseguir un corte de pelo durante su hora del almuerzo no espera a menos que una silla esté inmediatamente disponible. Otra forma de esta situación general es aquella en la que los clientes esperan el servicio, pero esperan un tiempo limitado.

Si no se sirve durante este tiempo, el cliente abandona el sistema y se considera perdido. Tales situaciones ocurren en el procesamiento o comercialización de productos perecederos. Muchos tipos de compromisos militares se caracterizan de forma similar. Un avión que es atacado y está ocupado defendiéndose de misiles antiaéreos o guiados está disponible para «servicio», es decir, está dentro del alcance, por sólo un tiempo limitado.

A pesar del título atractivo, que es descriptivo de la sensación común sobre las colas, el artículo de Barrer es una aplicación innovadora de la teoría de la cola a la destrucción de los aviones atacantes, no a la teoría general de las colas. Tenemos que unirnos a una cola cuando queremos obtener dinero en efectivo de un cajero automático (ATM), comprar sellos, pagar por nuestros alimentos, comprar un boleto de cine, obtener una mesa en un restaurante lleno de gente, etcétera. Larson (1987) discute algunos de las implicaciones psicológicas de las colas. Él dice:

Las colas implican esperar, sin duda, pero las actitudes de uno hacia las colas pueden ser influenciadas más fuertemente por otros factores. Por ejemplo, los clientes pueden enfurecerse si experimentan injusticia social, definida como violación de la disciplina de la cola, que establece: primero en entrar, primero en salir. El entorno de cola y la retroalimentación sobre la probable magnitud del retraso también pueden influir en las actitudes de los clientes y, en última instancia, en muchos casos, en la cuota de mercado de una empresa. Incluso si nos centramos en la espera en sí, el «resultado» de la experiencia de cola puede variar no linealmente con

el retraso, reduciendo así la importancia del tiempo promedio en la cola, la medida tradicional del rendimiento de las colas. En este capítulo abordamos la importancia del tema de las filas para comenzar a organizar nuestros pensamientos sobre los atributos importantes de las colas y hacer más tolerable la espera para los seres humanos.

En este capítulo hemos introducido al lector a las ideas fundamentales de la teoría de colas y discutido algunos de los sistemas de colas básicos que son especialmente útiles en la carrera de ingeniería de sistemas y la licenciatura en informática. Hemos ilustrado el uso de estos sistemas con una serie de ejemplos. Para aquellos interesados en aplicaciones más complejas podrán encontrar en algunos de estos modelos básicos de teoría de colas para abordar modelos de redes de colas y analizar sistemas de mayor complejidad.

### **Discurso del estudiante**

*Las rosas son rojas; ¡las violetas son azules, si  $\lambda$  es grande, entonces  $\rho$  es demasiado!*

## 17. Referencias y bibliografía

- Adan, I., Resing, J. (2015). Queueing Systems, Department of Mathematics and Computing Science Eindhoven University of Technology, Usa.
- Allen, A. (1990). Probability, Statistics, and Queueing Theory With Computer Science Applications, Second Edition, Usa.
- Anderson, D., Sweeney, D., Willams, T. (2011). Quantitative Methods for Business, 11th, edit. Cengage, Usa.
- Bonini, Ch., Hausman, W., Bierman, H. (1997). Quantitative Analysis for Management, 9th edition, edit. MacGraw-Hill, Usa
- Fu, Michael. (2000). Queueing Theory Notes, BMGT 835, Robert H. Smith School of Business,  
University of Maryland, College Park, MD 20742-1815 USA.
- Larson, R. (1987). Perspectives on Queues: Social Justice and the Psychology of Queueing. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/171439>.
- Moskowitz, H., Wright, G. (1982). Operations Research Techniques for Managament, edit. Prentice Hall, Usa.
- Parlar, M. (2000). Interactive Operations Reseach with Maple: Methods and Models, edit. Birkhäuse, Usa.

# INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Un proyecto sustentado en el arte y  
la ciencia de las matemáticas aplicadas

**SAMUEL HIDALGO**

Este libro se debe al esfuerzo de más de un año para abordar un conjunto de temas relevantes del campo de la investigación de operaciones: la programación lineal, los modelos de redes, la programación no lineal, la teoría de inventarios y los problemas asociados a la espera.

Este libro, desarrollado a lo largo de muchas horas de trabajo, permitirá a muchas personas mejorar su habilidad para la toma de decisiones y constituye una lectura obligada para aquellos estudiantes de las áreas de ingeniería que deseen conocer el arte y la habilidad del modelado matemático, esencia de la investigación de operaciones; así también, dado que en él se abordan temas esenciales de este campo particular de forma exhaustiva, utilizando un conjunto de referencias bibliográficas y programas de cómputo especializados para la construcción y análisis de cada uno de los apartados contenidos en esta obra, permitirá definir, contextualizar, construir y resolver problemas de distinta naturaleza que son aplicables en el contexto de la ingeniería.

Deseo que los lectores tengan la paciencia y la dedicación necesaria para estudiar con detenimiento aquellos temas que le interesen. Así, podrán apreciar el esfuerzo que se realiza para aportar soluciones mediante las matemáticas aplicadas.

Mi agradecimiento final a mi familia, debe ser de un tipo diferente. De maneras que, probablemente, seré el último en reconocer, que cada uno de los integrantes ha contribuido con ingredientes intelectuales diferentes a mi trabajo. Pero, en grados diferentes, han hecho también algo mucho más importante. Han permitido que siguiera adelante e, incluso, han fomentado la devoción que tenía hacia mi trabajo. Cualquiera que se haya esforzado en un proyecto como el mío sabrá reconocer lo que, a veces, les habrá costado hacerlo. No sé cómo darles las gracias.

Samuel Hidalgo