



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE  
DURANGO**

**INSTITUTO TECNOLÓGICO  
DEL VALLE DEL GUADIANA**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



**Análisis de la dinámica de la vida de anaquel de  
microorganismos en leche fermentada**

**TESIS**

Que como parte de los requisitos para obtener el grado de

**Maestro en Ingeniería**

**Presenta:**

Ing. Manuel Fernando Alvarado Ontiveros

**Directora de tesis:**

Dra. Yolocuauhtli Salazar Muñoz

**Codirector:**

Dr. Paul Antonio Valle Trujillo

Durango, Dgo. México

Febrero 2023






**Análisis de la dinámica de la vida de anaquel de microorganismos en  
leche fermentada**

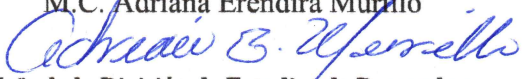
**Presenta:**

Ing. Manuel Fernando Alvarado Ontiveros

**COMITÉ TUTORIAL**

 <b>Dra. Yolocuauhtli Salazar Muñoz</b> <hr/> Director(a)	 <hr/> Firma
 <b>Dr. Paul Antonio Valle Trujillo</b> <hr/> Codirector(a) o asesor(a)	<hr/> Firma
 <b>Dr. Aurelio Castillo Liñán</b> <hr/> Asesor(a)	 <hr/> Firma
 <b>Dr. Ruben Guerrero Rivera</b> <hr/> Asesor(a)	 <hr/> Firma

M.C. Norma Alicia García Vidaña  
  
 Coordinador del programa del posgrado  
 correspondiente

M.C. Adriana Eréndira Murillo  
  
 Jefa de la División de Estudios de Posgrado e  
 Investigación

Durango, Dgo. México

Febrero 2023





Victoria de Durango, Dgo., a **07 / Marzo / 2023.**

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
DEPI / C / 061 / 23.

**ASUNTO:** Autorización de Tema de Tesis de Maestría.

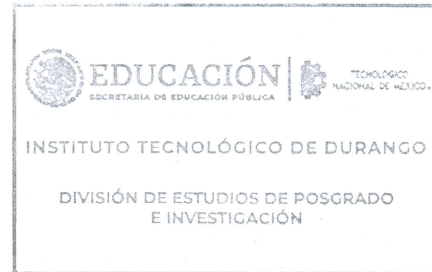
**C. MANUEL FERNANDO ALVARADO ONTIVEROS**  
**No. DE CONTROL G09041028**  
**P R E S E N T E .**

Con base en el Reglamento en vigor y teniendo en cuenta el dictamen emitido por el Jurado que le fue asignado, se le autoriza a desarrollar el tema de tesis para obtener el **Grado de Maestro en Ingeniería** cuyo título es:

**“Análisis de la dinámica de la vida de anaquel de microorganismos en leche fermentada”**

**CONTENIDO:**

RESUMEN  
ABSTRACT  
CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN  
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO  
CAPÍTULO III METODOLOGÍA  
CAPÍTULO IV CONCLUSIONES  
CAPÍTULO V REFERENCIAS  
ANEXOS



**ATENTAMENTE.**

*Excelencia en Educación Tecnológica*  
*“La Técnica al Servicio de la Patria”*

**C. ADRIANA ERÉNDIRA MURILLO**  
**JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE**  
**POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

AEM'ammc.



Fecha de Inicio: 2018-12-21  
Fecha de Última Actualización: 2018-12-21  
Fecha de Revisión: 2018-12-21  
Fecha de Terminación: 2018-12-21  
RSGC 957





Victoria de Durango, Dgo., a **07 / Marzo / 2023.**

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
DEPI / C / 062 / 23.

**ASUNTO:** Autorización de Impresión de Tesis de Maestría.

**C. MANUEL FERNANDO ALVARADO ONTIVEROS**  
**No. DE CONTROL G09041028**  
**P R E S E N T E .**

De acuerdo al reglamento en vigor y tomando en cuenta el dictamen emitido por el jurado que le fue asignado para la revisión de su trabajo de tesis para obtener el **Grado de Maestro en Ingeniería**, esta División de Estudios de Posgrado e Investigación le autoriza la impresión del mismo, cuyo título es:

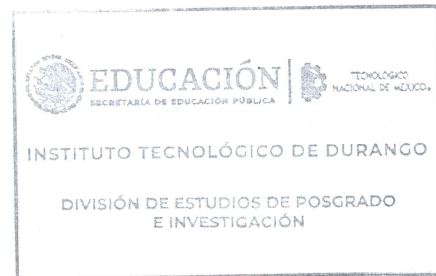
**“Análisis de la dinámica de la vida de anaquel de microorganismos en leche fermentada”**

Sin otro particular de momento, quedo de Usted.

**ATENTAMENTE.**

*Excelencia en Educación Tecnológica*  
*“La Técnica al Servicio de la Patria”*

**C. ADRIANA ERÉNDIRA MURILLO**  
**JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE**  
**POSGRADO E INVESTIGACIÓN**



AEM'ammc.



Fecha de Inicio: 2016.12.21  
Fecha de Última Actualización: 2016.12.21  
Fecha de Emisión: 2016.01.20  
Fecha de Terminación: 2017.12.31  
ASCC 957



## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi directora y a mi codirector de tesis por brindarme su apoyo incondicional y orientación por medio de sus conocimientos para realizar y desarrollar esta investigación de manera correcta. Así como al Tecnológico nacional de México/ Instituto Tecnológico de Durango y al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para poder concluir esta etapa de mi formación profesional.

A mis maestros por sus enseñanzas para desarrollarme profesionalmente y haberme brindado todos sus conocimientos, a mis compañeros de maestría los cuales me apoyaron con su conocimiento para poder lograr esta meta.

También agradezco a mi familia por su apoyo y motivación, en especial a mis padres por el apoyo y cariño que me brindaron para poder ser lo que soy el día de hoy gracias a ellos.

## ÍNDICE DE CONTENIDO

1	Introducción .....	13
1.1	Antecedentes .....	14
1.1.1	Análisis microbiano de los productos lácteos .....	14
1.1.2	Análisis de la vida de anaquel de productos lácteos y el yogur .....	15
1.1.3	Modelos matemáticos.....	17
1.2	Planteamiento del problema.....	21
1.3	Objetivos .....	21
1.3.1	Objetivo general .....	21
1.3.2	Objetivos específicos.....	21
1.4	Hipótesis.....	22
1.5	Justificación.....	22
1.5.1	Datos sobre la cantidad de productos lácteos desperdiciados .....	23
2	Marco Teórico .....	28
2.1	Yogur.....	28
2.1.1	Proceso de producción.....	28
2.1.2	Características fisicoquímicas de productos lácteos fermentados .....	29
2.2	Vida de anaquel .....	30
2.2.1	Determinación de la vida de anaquel .....	31
2.2.2	Características de la vida de anaquel del yogur .....	31
2.2.3	Contaminación del producto lácteo .....	32
2.2.4	Normas Mexicanas de aplicación a los productos lácteos .....	32



2.3	Modelo matemático .....	34
2.3.1	Etapas para el desarrollo de un modelo .....	34
2.3.2	Clasificación de modelos.....	35
2.3.3	Clasificación de los modelos biológicos .....	36
2.4	Ecuaciones de Sistemas Dinámicos.....	37
3	Metodología .....	39
3.1	Obtención de datos .....	39
3.2	Análisis de datos .....	40
3.3	Formulación de ecuaciones diferenciales.....	50
3.4	Puntos de Equilibrio .....	64
3.4.1	Puntos de equilibrio para biomasa .....	64
3.4.2	Puntos de equilibrio para acidez .....	67
3.4.3	Puntos de equilibrio para viscosidad .....	70
3.5	Especificaciones para la vida de anaquel de acuerdo a las normas mexicanas	73
3.6	Cálculo de Valor medio y modelo de Arrhenius para biomasa .....	76
4	Conclusiones .....	81
	Referencias.....	83

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1 VISTA PREVIA DEL PROGRAMA WEBPLOTDIGITIZER .....	39
FIGURA 2 DATOS EXPORTADOS DEL PROGRAMA WEBPLOTDIGITIZER .....	40
FIGURA 3 GRAFICAS OBTENIDAS DE LA FUNCIÓN TEMPORAL BIOMASA MUESTRA 1 .....	42
FIGURA 4 GRAFICAS OBTENIDAS DE LA FUNCIÓN TEMPORAL ACIDEZ MUESTRA 1 .....	44
FIGURA 5 GRAFICAS OBTENIDAS DE LA FUNCIÓN TEMPORAL VISCOSIDAD MUESTRA 1 .....	45
FIGURA 6 GRAFICAS OBTENIDAS DE LA FUNCIÓN TEMPORAL BIOMASA MUESTRA 2 .....	47
FIGURA 7 GRAFICAS OBTENIDAS DE LA FUNCIÓN TEMPORAL ACIDEZ MUESTRA 2 A LAS CUATRO TEMPERATURAS. ....	48
FIGURA 8 GRAFICAS OBTENIDAS DE LA FUNCIÓN TEMPORAL VISCOSIDAD MUESTRA 2 .....	50
FIGURA 9 MUESTRA 1 PARA BIOMASA.....	51
FIGURA 10 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ACIDEZ MUESTRA 2 A 5 °C.....	57
FIGURA 11 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ACIDEZ MUESTRA 2 A 5 °C.....	57
FIGURA 12 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ACIDEZ MUESTRA 2 A 25 °C.....	58
FIGURA 13 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ACIDEZ MUESTRA 2 A 35 °C.....	58
FIGURA 14 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE BIOMASA MUESTRA 2 A 5°C.....	59
FIGURA 15 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE BIOMASA MUESTRA 2 A 15°C.....	60
FIGURA 16 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE BIOMASA MUESTRA 2 A 25°C.....	60
FIGURA 17 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE BIOMASA MUESTRA 2 A 35°C.....	61
FIGURA 18 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE VISCOSIDAD MUESTRA 2 A 5°C.....	62



FIGURA 19 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE VISCOSIDAD MUESTRA 2 A 15°C.....	62
FIGURA 20 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE VISCOSIDAD MUESTRA 2 A 25°C.....	63
FIGURA 21 GRAFICAS OBTENIDAS CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE VISCOSIDAD MUESTRA 2 A 35°C.....	63

## ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1 ESTADÍSTICAS DEL SECTOR LÁCTEO CANILEC DEL AÑO DE 2010-2018 - PRODUCCIÓN ANUAL DE LECHE DE BOVINO A NIVEL MUNDIAL .....	24
TABLA 2 ESTADÍSTICAS DEL SECTOR LÁCTEO CANILEC DEL AÑO DE 2010-2018 - PRODUCCIÓN ANUAL DE LECHE DE BOVINO A NIVEL NACIONAL .....	24
TABLA 3 ESTADÍSTICAS DEL SECTOR LÁCTEO CANILEC DEL AÑO 2019 PRODUCCIÓN MENSUAL DE LECHE DE BOVINO A NIVEL ESTATAL .....	25
TABLA 4 PRODUCCIÓN INDUSTRIAL DE LECHE Y DERIVADOS (MILES DE LITROS Y TONELADAS).....	25
TABLA 5 PRODUCCIÓN INDUSTRIAL YOGUR (TONELADAS) .....	26
TABLA 6. TABLA 6 CARACTERÍSTICA DE LOS SENTIDOS .....	31
TABLA 7 ESPECIFICACIONES FÍSICOQUÍMICAS QUE DEBE CUMPLIR.....	33
TABLA 8 FUNCIONES TEMPORALES DE BIOMASA MUESTRA 1 .....	42
TABLA 9 FUNCIONES TEMPORALES DE ACIDEZ MUESTRA 1 .....	43
TABLA 10 FUNCIONES TEMPORALES DE VISCOSIDAD MUESTRA 1 .....	45
TABLA 11 FUNCIONES TEMPORALES DE BIOMASA MUESTRA 2 .....	46
TABLA 12 FUNCIONES TEMPORALES DE ACIDEZ MUESTRA 2.....	48
TABLA 13 FUNCIONES TEMPORALES DE VISCOSIDAD MUESTRA 2 .....	49
TABLA 14 VALORES DE ÍNDICE DE BONDAD DE AJUSTE ( $R^2$ ) OBTENIDOS A DISTINTAS TEMPERATURAS DE LAS EDOs VS FUNCIÓN TEMPORAL .....	52
TABLA 15 ECUACIONES DIFERENCIALES BIOMASA.....	52
TABLA 16 VALOR DE LOS COEFICIENTES DE EDO DEL PARÁMETRO BIOMASA MUESTRA 2	53
TABLA 17 ECUACIONES DIFERENCIALES ACIDEZ .....	53
TABLA 18 VALOR DE LOS COEFICIENTES DE EDO DEL PARÁMETRO ACIDEZ MUESTRA 2..	54
TABLA 19 ECUACIONES DIFERENCIALES VISCOSIDAD .....	56
TABLA 20 VALOR DE LOS COEFICIENTES DE EDO DEL PARÁMETRO DE VISCOSIDAD MUESTRA 2 .....	56
TABLA 21 VALORES OBTENIDOS DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA BIOMASA.....	67
TABLA 22 VALORES OBTENIDOS DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA ACIDEZ .....	70
TABLA 23 VALORES OBTENIDOS DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA VISCOSIDAD .....	73
TABLA 24 CARACTERÍSTICAS MICROBIOLÓGICAS.....	75

TABLA 25 ESPECIFICACIONES DEL YOGUR.....	75
TABLA 26 VALORES OBTENIDOS POR Q10 Y ARRHENIUS PARA VIDA DE ANAQUEL RESPECTO A BIOMASA .....	77
TABLA 27 VALORES OBTENIDOS POR Q10 Y ARRHENIUS PARA VIDA DE ANAQUEL RESPECTO A ACIDEZ.....	77
TABLA 28 VALORES OBTENIDOS POR Q10 Y ARRHENIUS PARA VIDA DE ANAQUEL RESPECTO A VISCOSIDAD .....	77

# RESUMEN

Los productos lácteos son de los principales alimentos con propiedades nutricionales que existen en el mercado, es de gran importancia su cuidado en la industria; debido a que proporcionan una gran cantidad de proteínas con gran calidad es rica en calcio, posee vitaminas del grupo B, así como vitaminas A, D y E. La vida de anaquel de yogurt se determina sometiendo los productos en un cierto tiempo real en condiciones de refrigeración comunes y así comprobar el día a día el deterioro que el producto presente respecto a sus propiedades físicas, químicas, microbiológicas y sensoriales. Hasta llegar al punto en que alguno de todos estos parámetros sea inaceptable el producto llegara al final de su vida útil.

El objetivo principal fue determinar el comportamiento de los parámetros fisicoquímicos y microbiológicos que describen la cinética de biomasa (B), acidez (A) y viscosidad (V) en función de la temperatura a través de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden.

Se realizó el análisis del artículo de Zhi et al., (2018) en el cual se evalúan las propiedades microbiológicas, fisicoquímicas y sensoriales de la vida de anaquel del yogur. Se analizan los datos de cada una de las propiedades como la biomasa, viscosidad y acidez, a cuatro temperaturas  $5^{\circ}\text{C}$ ,  $15^{\circ}\text{C}$ ,  $25^{\circ}\text{C}$  y  $35^{\circ}\text{C}$ . Se extrajeron los datos con el programa WebPlotDigitizer. Para ello se obtuvieron imágenes del artículo en formato 'jpg' para los parámetros de biomasa (B), viscosidad (V) y acidez (A) para cada una de las 4 temperaturas de ambas muestras (muestra 1 y muestra 2). El análisis de datos se realizó a través del software Eureka se determinó una función temporal que emula los datos experimentales en intervalos de tiempo 0 – 22 días con incrementos de un día en la muestra 1 para la temperatura de  $5^{\circ}\text{C}$ , con el intervalo de tiempo 0 – 11 días a  $15^{\circ}\text{C}$  y  $25^{\circ}\text{C}$ , y con un intervalo de 0 – 9 días a  $35^{\circ}\text{C}$ . Posteriormente, se obtuvo una EDO de primer orden para para cada una de las propiedades de la muestra 2 lo que permite realizar simulaciones a largo plazo de cada una de las propiedades. Los resultados muestran que la EDO para cada una de las propiedades permite interpretar su variación a cuatro diferentes temperaturas y de esta forma determinar con base en los valores establecidos por la norma mexicana en que tiempo cada una de las propiedades está incumpliendo la normatividad establecida.

Por lo que, se concluye que por medio del modelado matemático empleando las EDOs de primer orden permiten evaluar el comportamiento de cada una los parámetros fisicoquímicos y microbiológicos para las variables de biomasa, acidez y viscosidad, los cuales ayudaran a predecir el comportamiento durante el tiempo de la vida de anaquel del yogur a diferentes temperaturas.

## ABSTRACT

Dairy products are one of the main foods with nutritional properties that exist in the market, it is of great importance its care in the industry; because they provide a large amount of high quality protein, it is rich in calcium, has B vitamins, as well as vitamins A, D and E. The shelf life of yogurt is determined by subjecting the products in a certain real time in common refrigeration conditions and thus check the day to day deterioration that the product presents with respect to their physical, chemical, microbiological and sensory properties. Up to the point where any of these parameters is unacceptable, the product will reach the end of its shelf life.

The main objective was to determine the behavior of physicochemical and microbiological parameters describing the kinetics of biomass (B), acidity (A) and viscosity (V) as a function of temperature by means of first order ordinary differential equations (ODE).

The analysis of the article by Zhi et al., (2018) in which microbiological, physicochemical and sensory properties of yogurt shelf life are evaluated was performed. Data for each of the properties such as biomass, viscosity, and acidity are analyzed at four temperatures 5°C, 15°C, 15°C, 25°C, and 35°C. The data were extracted with the WebPlotDigitizer program. For this purpose, images of the article were obtained in 'jpg' format for the biomass (B), viscosity (V) and acidity (A) parameters for each of the 4 temperatures for both samples (sample 1 and sample 2). The data analysis was performed through the Eureka software and a time function was determined that emulates the experimental data in time intervals 0 - 22 days with increments of one day in sample 1 for the temperature of 5°C, with the time interval 0 - 11 days at 15°C and 25°C, and with an interval of 0 - 9 days at 35°C. Subsequently, a first-order ODE was obtained for each of the properties of sample 2, which allows long-term simulations of each of the properties. The results show that the ODE for each of the properties allows interpreting their variation at four different temperatures and thus determining, based on the values established by the Mexican standard, at what time each of the properties is not complying with the established standards.

Therefore, it is concluded that by means of mathematical modeling using first order ODEs, it is possible to evaluate the behavior of each of the physicochemical and microbiological parameters for the biomass, acidity and viscosity variables, which will help to predict the behavior during the shelf life of yogurt at different temperatures.

# Capítulo 1

# 1 Introducción

Los productos lácteos son de los primordiales alimentos con características nutricionales que se tienen en el mercado, ya es de gran trascendencia su cuidado en la industria; ya que dan una gigantesca proporción de proteínas con gran calidad, es rica en calcio, tiene vitaminas del conjunto B, así como vitaminas A, D y E. Debido a ello beneficia el desarrollo de la composición ósea, del mismo modo beneficia parcialmente al aumento, ayudando de esta forma a contar con los requerimientos nutricionales. La leche, por medio de sus nutrientes se convierte en una fundamental fuente de energía (Zhi et al., 2018)

Las bacterias ácido lácticas (BAL) son microorganismos que tienen diversas aplicaciones, siendo una de las principales la fermentación de alimentos como la leche, carne y vegetales para obtener productos como el yogur, quesos, encurtidos, embutidos, ensilados, etcétera. La más evidente de éstas, es la conservación, ya que estos productos tienen una vida de anaquel más vasta que la de la leche natural. La fortificación de la base del yogur con concentrado de proteína de suero (WPC de las siglas en inglés *Whey Protein Concentrate*), comparado con la fortificación con polvo de leche descremada (Sarkar, 2006). Por lo cual, se recomienda hacer este plan de estudio el cual se desarrollará en este documento, para poder robustecer la información de análisis de vida de anaquel de yogur, para que esta sea segura para el consumidor y la industria láctea.

Existen diversos métodos de medición de la vida de anaquel, tales como el Q10 y el método de supervivencia, sin embargo, en el estudio realizado por Sánchez *et al.* el tiempo de vida útil del yogur bionatural a 6°C por el método de Q10 es de 29 días, mientras que por el método de supervivencia fue de 44 días (R. Sánchez, F. Cerrón, J. Canchuricra, 2013), lo que evidencia una diferencia en tiempos reportados por cada uno de los métodos. Los análisis de la vida de anaquel son realizados a una temperatura constante (Sofu & Ekinci, 2007) y otros a más de una temperatura.

Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es formular un modelo matemático de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de primer orden que permitan predecir el comportamiento de los parámetros fisicoquímicos y microbiológicos que afectan la cinética de la biomasa  $[B(t)]$ , la acidez  $[A(t)]$  y la viscosidad  $[V(t)]$  en función de la temperatura, esto con el propósito de determinar de una forma más certera el periodo de vida de anaquel de un producto lácteo fermentado como el yogur.



## 1.1 Antecedentes

En esta sección se muestran los antecedentes sobre el análisis microbiano de los productos lácteos, sobre el análisis de la vida de anaquel de los productos lácteos y del yogur, y sobre los modelos matemáticos.

### 1.1.1 Análisis microbiano de los productos lácteos

Con base en lo que estudiaron Walkling-Ribeiro *et al.*, 2009, acerca del impacto de un tratamiento que combina los obstáculos de calor y los campos eléctricos pulsados en la microbiota nativa utilizada para inocular leche baja en grasa ultrapasteurizada (UHT), de leche entera cruda y también la vida de anaquel. Mediante el estudio de la leche UHT a temperaturas de 30°C, 40°C y 50°C durante 60 seg, por lo que el calor y el PEF (campos eléctricos pulsados) redujeron el recuento microbiano y la vida útil del yogur se expandió a 21 días bajo refrigeración.

Asimismo, Martínez-Ríos *et al.*, 2016 determinaron el efecto de la temperatura, el pH, el ácido láctico y el ácido sórbico sobre los valores de  $\mu_{max}$  (tasa de crecimiento específica máxima de los microorganismos) menos la mezcla *Ps* (pseudomonas psicotolerantes). El crecimiento de *Ps* se determinó duplicando o triplicando sus cantidades mediante mediciones automatizadas de absorbancia a 540 nm. El tiempo de descubrimiento, definido como el tiempo de incubación, tuvo un aumento de 0.05 a partir del valor de absorbancia más bajo después de la inoculación. Los valores de  $\mu_{max}$  de *Ps* se establecieron a partir de los tiempos de detección de absorbancia. El efecto de la temperatura en cada una de las muestras a 5°C, 10°C y 15°C considerando el pH en los valores de  $\mu_{max}$  dio como resultado la infusión cerebro - corazón - glucosa, una de las muestras ajustada con ácido clorhídrico con valores de pH de 5.00, 5.28, 5.59, 5.87, 6.33 y 6.93.

Los cambios fisicoquímicos y microbiológicos en los yogures determinan el almacenamiento su la vida útil. Monitorear la calidad del yogur es esencial para la aceptación del consumidor y la seguridad de los alimentos. Sin embargo, algunas de las técnicas de análisis de la calidad del yogur destruyen los alimentos, contaminan el medio ambiente, son costosas y consumen mucho tiempo. Por otra parte, algunas de las técnicas no destructivas solo miden una única propiedad de calidad, sin expresar la calidad general del yogur, debido a que los modelos predictivos validados por métodos *bootstrapping* (métodos los cuales estiman la distribución al tomar múltiples muestreos) y de validación cruzada demuestran que el índice de amina biogénica es un sistema de monitoreo no destructivo de la calidad general durante el almacenamiento. El parámetro óptico fue un fuerte predictor de la característica no destructiva de la amina para el yogur de leche de vaca (Paulo Vieira *et al.*, 2019).

### 1.1.2 Análisis de la vida de anaquel de productos lácteos y el yogur

Respecto a la investigación de Kurnia, 2017, lo que dio lugar a ella fueron las fallas en la producción de los lácteos, fallas que el investigador descubrió que pueden ser controladas cuando los productos lácteos sufren cambios que determinan su calidad y su vida de anaquel. Los productos ultrapasteurizados permiten elaborar productos de calidad con mayor tiempo de vida de anaquel para aprovechar todas sus características. Por medio de la observación experimental de parámetros fisicoquímicos y organolépticos en cada fase del procesamiento de las muestras analizadas, estas se sometieron a diferentes condiciones de temperatura, cámaras de aceleración y ambientes rigurosos. Las fases de este estudio consistieron en la recolección de datos, así como en la elaboración, validación técnica y capacitación al personal.

La contaminación con bacterias *Gram negativas psicotrópicas* subsiguiente a la pasteurización de la leche ha reducido típicamente la vida eficaz de la leche pasteurizada de 17 a 14 días. Las esporas pueden penetrar en la leche de granja y representan un problema mucho más complejo para la vida eficaz de la leche líquida que las células bacterianas vegetativas. La prueba de sedimentos indica de manera burda la carga potencial de patógenos formadores de esporas en la leche cruda; por lo que un recuento de bacterias pasteurizadas en el laboratorio es un método que indica de manera más clara el grado de formadores de esporas en la leche cruda (Barbano et al., 2006).

El objetivo principal del estudio de Schlabitz et al., 2015 fue preparar una bebida láctea fermentada simbiótica utilizando suero de queso ricota, prebióticos y probióticos, para lo cual se tuvo que reducir antes la cantidad de suero incorporado en los desechos lácteos. Para ello se optó por elaborar bebidas de leche fermentada mediante un diseño factorial completo con 2 variables independientes en 2 niveles equidistantes, tres réplicas en el punto central y 4 puntos axiales. Las 11 formulaciones resultantes se sometieron a análisis de pH, acidez, proteínas, grasas, cenizas y clasificación de especies de bacterias del ácido láctico. Las bebidas lácteas fermentadas se sometieron semanalmente al análisis de pH, cenizas y acidez titulable; también se sometieron a análisis las grasas y proteínas manteniéndolas almacenadas en frío de 1 a 45 días. En un periodo de 80 días se obtuvo la disminución del pH en las bebidas lácteas fermentadas y la estabilidad de estas.

En el análisis de Cruz et al., 2010, se utilizó un yogur probiótico de leche entera con sabor a fresa, ya que en su etiqueta indicaba la presencia de la cepa *Bifidobacterium animalis*. Este yogur se prepara dejando que la leche se agríe entre 40 a 45°C, y durante su fabricación presenta cambios que se atribuyen a la fermentación y a los ingredientes añadidos como el DN 173010 sin especificar las bacterias del yogur. Para el análisis se obtuvieron muestras de un solo lote de yogur probiótico en un supermercado en Campinas, Brasil. El estudio se realizó

mediante la técnica de vertido en placas por diferentes periodos de tiempo y a distintas temperaturas, al inicio de su vida útil en el día uno después de su fecha de procesamiento: se mantuvieron a 10°C durante 0, 14, 28, 42, 56, 70 y 84 días. Los tiempos de retención de los ácidos láctico y acético fueron de 12.2 y 14.4 min, respectivamente. El valor de pH de las muestras varió de 4.58 para la muestra de control (0 días/10°C) a 4.12 para la muestra que permaneció por 84 días a 10°C.

Los factores principales que afectan la calidad microbiológica de la leche pasteurizada y, por consiguiente, la vida de anaquel de esta, son los siguientes: la calidad microbiológica de la leche fresca, la temperatura de pasteurización, la contaminación postpasteurización, los microorganismos termorresistentes y la temperatura de almacenamiento después de la pasteurización. La pasteurización rápida se lleva a cabo a una temperatura de 72°C durante 15 segundos y es uno de los tratamientos térmicos más utilizados para destruir los patógenos no formadores de esporas y resistentes al calor. El estudio también verificó la disminución de la vida de anaquel de las leches pasteurizadas a temperaturas mayores de 3°C, ya que el conteo microbiano de esas leches al inicio de su vida de anaquel fue menor que al final de esta (Kurnia, 2017).

Por su parte, Mataragas et al., 2011, desarrollaron la metodología para formular el modelo predictivo del deterioro del yogur. Fabricaron yogur mediante el calentamiento de leche dentro del rango de 85 a 95°C hasta obtener la temperatura adecuada para la inoculación, se añadieron cultivos iniciadores y se agitó hasta lograr el pH deseado. Después, se almacenaron muestras del yogur a varias temperaturas entre los 5 a 20°C, y la temperatura ideal para obtener la validación del producto fue de 17°C, a la cual la población de levaduras aumentó. El factor Q10 muestra las temperaturas a las que fue cambiando la calidad del producto y, por consiguiente, la vida de anaquel. La concentración de azúcar se determinó mediante cromatografía líquida de alta resolución (*HPLC, por sus siglas en inglés*) utilizando el índice de refracción. La aceptabilidad del producto se evaluó visualmente después de abrirlo y antes del análisis microbiológico y fisicoquímico de este.

La vida útil de los productos lácteos cultivados, como el yogur, es más larga que la de la leche, pero sigue siendo limitada, así que se adoptan diversas técnicas para mejorarla. La concentración de la leche a la mitad es el método por el cual existe un retraso al desarrollo de ácido en el almacenaje, ya que debido al método se extiende la vida de anaquel al disminuir la tendencia a desarrollar ácidos durante el almacenamiento. La extensión de la vida útil del yogur agregando nisina, un conservante natural, polipéptido que se agrega con una concentración de 0.3-0.6 mg / 50 ml de leche y logra retrasar el deterioro por lo menos de 5 a 10 días; el tratamiento Microgard que consiste en agregar una bacteriocina similar a la nisina y que extiende la vida útil del yogur por 82 días a 5°C; y el uso de natamicina, llamada también pimaricina, un antibiótico que prolonga efectivamente la vida útil del requesón, de 21 a 35 días. Se están estudiando, sin que se hayan validado, diversas técnicas adicionales como la bacteriocina, el

sistema de *LP* (*sistema de* lactoperoxidasa-tiocianato-peróxido de hidrógeno), el tratamiento de alta presión, el calor de postproducción, la irradiación ultravioleta (UV) y la carbonización, entre otras (Sarkar, 2006).

El objetivo del estudio de Ibarra et al., 2012, fue optimizar las condiciones en las que se procesa el yogur en función de [ $\beta$ -galactosidasa ( $\beta G$ ) y el tiempo de hidrólisis enzimática (EHT) utilizando un diseño multifactorial. Es necesario considerar los valores teóricos del yogur de todas las variables independientes que inciden en su preparación, con lo cual se obtiene un valor final de intervalo de confianza del 95%. Los polinomios que se derivaron de este estudio influyeron en el diseño multifactorial para la optimización. Para realizar el análisis estadístico de la regresión múltiple considerando cada variable dependiente se utilizó el software Statgraphics Plus 2.0. Los coeficientes se consideraron significativos en  $p < 0.1$  y  $p < 0.05$ . Se supuso que cada polinomio era válido en  $R^2 > 70\%$ .

En el estudio de Tavakoli et al., 2019, se investigó acerca del contenido de grasa y del cultivo de la leche; para ello se utilizó leche reconstituida para hacer yogur tipo cuajado. Estando la muestra a una temperatura de  $5^{\circ}C$  durante cierto tiempo, se agregó *SMP* (leche desnatada a baja temperatura) o *WMP* (leche entera en polvo) con 34% de proteína. Para algunos días de análisis se utilizó leche con un total del 12% de sólidos y agua desionizada. Queso BrieFloriday, el agua desionizada se calentó por 30 min a  $40^{\circ}C$  antes de agregar *SMP* o *WMP*; después, la mezcla se calentó a  $50^{\circ}C$  mientras se removía continuamente durante media hora para disolver completamente todos los materiales sólidos. Para producir yogur, la leche se trató térmicamente a  $85^{\circ}C$  durante media hora.

### **1.1.3 Modelos matemáticos**

Los modelos predictivos sirven para establecer la vida útil del yogur, el procesamiento y el almacenamiento de los alimentos.

Zhi et al., 2018 elaboraron pruebas para identificar la influencia de la temperatura en la vida útil del yogur. Almacenaron 4 muestras de yogur a las temperaturas de 5, 15, 25 y  $35^{\circ}C$ . Los parámetros fisicoquímicos, el recuento microbiológico y el análisis sensorial de las 4 muestras se realizaron todos los días hasta que los valores resultaron inaceptables para los evaluadores. La mayoría de los cambios de calidad observados cumplieron con alguno de los modelos predictivos, el de reacción de orden cero o el de primer orden; este modelo de primer orden se utilizó mucho más ampliamente y con él se obtuvieron 3 ecuaciones de primer orden.

R. Sanchez, et al., (2013) llevaron a cabo un estudio del yogur bionatural de la marca La Molina que incluyó análisis microbiológicos y fisicoquímicos bajo diferentes condiciones de temperatura y la participación de un panel sensorial semientrenado. Los análisis microbiológicos, por el método  $Q_{10}$ , determinaron que el tiempo de vida útil del yogur bionatural a  $6^{\circ}\text{C}$  es de 29 días, mientras que por el método de supervivencia es de 44 días. El pH se mantuvo constante durante el periodo de evaluación a dos temperaturas (4 y  $10^{\circ}\text{C}$ ). Los análisis microbiológicos demostraron que el yogur bionatural conservó, de principio a fin del estudio, los valores estipulados por la Norma NOM-210-SSA 2014, de manera que el producto no resultaría dañino para el consumidor. Respecto a la evaluación sensorial, el atributo que determinó el fin de la vida útil del yogur bionatural fue el del sabor, seguido por el de la textura y el del olor.

Garre et al., 2016 mencionan que actualmente la seguridad y la calidad microbiana de los yogures solo son satisfechas por la cantidad y el tipo de microorganismos patógenos presentes en tales yogures. La microbiología predictiva es clave en este aspecto, ya que por medio de modelos matemáticos predice cómo evoluciona la población microbiana bajo diferentes condiciones ambientales. Por ejemplo, el modelo primario de Gibson modificado por Zwietering, en la Ecuación (1) que se muestra a continuación, la función  $N$  indica el número de microorganismos a tiempo  $T$ , y  $N_0$  es el valor de  $N$  en el momento de inoculación.  $A$ ,  $\mu_{max}$  y  $\lambda$  son parámetros del modelo donde  $\lambda$  indica la duración de la fase de adaptación;  $\mu_{max}$ , la tasa de crecimiento específico durante la fase exponencial; y  $A$ , el tamaño máximo de población microbiana.

$$\ln \frac{N}{N_0} = A \cdot e^{-\exp\left(\frac{\mu_{max} \cdot e}{A}(\lambda - t) + 1\right)} \quad (1)$$

Otro de los modelos, desarrollado por Sofu & Ekinci, 2007, consiste en un sistema de visión artificial que digitaliza el comportamiento del yogur a los diferentes tiempos de almacenamiento: 1, 7 y 14 días, para analizar los recuentos microbianos y el pH del yogur. Los datos obtenidos se modelaron por medio de redes neuronales artificiales con los cuales se predijo la vida de anaquel del yogur. Este tipo de modelos de redes neuronales se desarrollaron usando redes de retropropagación con una sola capa oculta y funciones de activación sigmoideas. El valor obtenido por medio de la variable de salida fue de 0.9996, un índice de bondad de ajuste ( $R^2$ ) que muestra una excelente concordancia entre los datos experimentales y los valores predichos, por lo que este modelo logró demostrar un buen rendimiento al analizar los datos multivariantes. El color es uno de los atributos que más influyen en el análisis de imágenes de este tipo de productos alimenticios, y es un gran descriptor de la medición. Por medio del modelo de predicción, cuyas fases se muestran a continuación, se disminuyeron los errores.

1° Capa de entrada con nodos variables.

2° Una capa de salida con nodos que representan las variables dependientes.

3° Una o más capas ocultas que contienen nodos para ayudar a capturar la linealidad en los datos.

$$w_{ij} = w_{ij}^0 - \mu \cdot \sum_k (r_k - y_k) \cdot y_k \cdot (1 - y_k) \cdot w_{jk} \cdot y_j \cdot (1 - y_j) \cdot y_i \quad (2)$$

Gougouli et al., 2011, por su parte, realizaron un estudio en el que utilizaron 12 especies de hongos en un yogur que sometieron a 5 niveles de inoculación, con valores entre  $10^1$  y  $10^5$  esporas, y a diferentes condiciones de temperaturas constantes, entre 0 y  $40^\circ\text{C}$ , para observar los efectos de esas temperaturas y del tamaño del inóculo sobre la cinética de crecimiento del micelio. La mayor parte de los estudios de las curvas de crecimiento del diámetro de las colonias de hongos con respecto al tiempo, fueron típicas de las condiciones de crecimiento después de un retraso de período inicial. Con este tipo de modelos es posible predecir el tiempo de retraso de crecimiento del micelio y la tasa de aumento, lo que es primordial para que un micelio sea visible ( $t_v$ ) en un producto contaminado, almacenando este a ciertas temperaturas.

$$t_v = \lambda \frac{D_v}{\mu} \quad (3)$$

Nikmaram et al., 2016, realizaron un estudio mediante un modelo estocástico o probabilístico con una bebida de yogur de granada almacenada durante 21 días a  $4^\circ\text{C}$ , estudio en el que utilizaron ecuaciones de regresión múltiple polinomial con la simulación de Monte Carlo para predecir la viabilidad de los probióticos. Una regresión polinomial vinculó los parámetros de entrada: tiempo de almacenamiento, pH y concentración de inulina, con los parámetros de salida: número de bacterias probióticas viables, y el índice de bondad de los datos experimentales fue de  $R^2 = 0.96$ . Las distribuciones de probabilidad basadas en parámetros de entrada para predecir las variables y sus cantidades influyen en la vida útil del yogur. La simulación de Monte Carlo ya se ha aplicado antes para predecir la vida útil y las evaluaciones de riesgo. Por ejemplo, Schaffner *et al.*, la utilizaron (2003) para evaluar el deterioro de la leche cuando esta se ve afectada por diferentes temperaturas y carga microbiana inicial.

$$MSE = \lambda \frac{\sum (\text{observed} - \text{predicted})^2}{n} \quad (4)$$

$$Af = 10^{\frac{1}{n0}} \sum \left| \log \frac{\text{predicted}}{\text{observed}} \right| \quad (5)$$

Rodríguez-Bernal et al., 2014, realizaron una investigación para medir el porcentaje de sacarosa añadida en leche estandarizada (con pH de 6.6 y 1.05 % de contenido de grasa) y pasteurizada que se obtuvo de la planta de Sopó de la compañía Alpina Productos Alimenticios S.A. Toda la leche se almacenó a temperatura de refrigeración (4°C) por un tiempo máximo de 24 horas. Para calcular la máxima tasa o velocidad de acidificación ( $V_m$ ), el tiempo en el que se alcanza la  $V_m$  ( $T_m$ ) y el tiempo total de fermentación para obtener un pH de 4.6 ( $T_e$ ), se siguió la metodología propuesta por Kristo, Biliaderis y Tzanetakis. La  $V_m$  se calculó a partir de las curvas de pH contra tiempo ( $T$ ), de acuerdo con la ecuación siguiente, donde  $V_m$  es la tasa máxima de acidificación,  $dpH$  es el cambio de pH y  $dT$  es el cambio de tiempo.  $V_m$ ,  $T_m$  y  $T_e$  se consideraron como los responsables de caracterizar la cinética del proceso.

$$V_m = \left( \frac{dpH}{dT} \right)_{max} \quad (6)$$

Sandra & Noguera, 2007, realizaron un estudio en el que emplearon dos modelos matemáticos: el de producción acumulativa y de ajuste por modelos o logístico de France *et al.* La elaboración de leche y el crecimiento de los ganados bovinos se limitan por los alimentos que estos consumen; el valor nutricional de esta alimentación es dado por la descripción estadística de las curvas de producción de diferentes ambientes de fermentación, hasta llegar a obtener las tasas de fermentación establecidas. El modelo de France *et al.* ofreció un adecuado ajuste en las primeras horas del proceso, también en la fase exponencial y finalmente en la asintótica de la curva, ya que el modelo logístico no se comportó de acuerdo con las características requeridas. Pero aun así los dos modelos tuvieron un índice de bondad de ajuste de 0.9975 y 0.9829. El modelo exponencial simple de digestión “in vitro” por Tilley y Terry se muestra a continuación:

$$S_T = S_1 + S_0 x \exp(-kx(t - L)) \text{ con } (t > L) \quad [7]$$

Garre et al., 2016, realizaron modelos del crecimiento microbiano en dos pasos. En el primer paso se busca la relación entre el tamaño de la población microbiana ( $N$ ) y el tiempo ( $t$ ), y esa relación se describe a través de un modelo primario. En el segundo paso, se busca la relación entre los parámetros del modelo primario y las condiciones ambientales, y la relación se describe a través de un modelo secundario. Estos modelos en dos pasos permiten cumplir con los requerimientos de gran importancia de los alimentos porque describen detalladamente el comportamiento de los microorganismos patógenos durante el ciclo de vida del yogur. Se debe considerar que la microbiología es clave, ya que permite describir por medio de modelos matemáticos la evolución de las muestras en diferentes condiciones. El modelo microbiano de Baranyi y Roberts es uno de los



más extendidos en la actualidad ya que su descripción de crecimiento microbiano cumple con las exigencias de calidad de los alimentos y seguridad microbiológica.

$$\frac{dG}{dt} = \mu_{max} \left[ 1 - \frac{G(t)}{N_{max}} \right] \cdot G(t) \quad (8)$$

## 1.2 Planteamiento del problema

Existen diversos métodos para determinar la vida de anaquel del yogur, sin embargo, se busca encontrar un modelo matemático, el cual facilite determinar el tiempo de vida útil del producto considerando sus parámetros fisicoquímicos. Al considerar estos parámetros en el análisis de la vida de anaquel de los alimentos se presta atención constantemente al crecimiento de microorganismos, y gracias a esto se puede ver o llegar a verificar el ciclo de vida de anaquel de los productos lácteos.

Por lo tanto, es necesario formular un modelo que presente un buen balance entre la capacidad de ajuste de los datos y la relación biológica, para evaluar las variadas condiciones experimentales que se presentan en cada uno de los métodos de análisis. Ya que no existe un modelo para predecir este comportamiento, se optó por formular un modelo compuesto por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de primer orden que ayuden a predecir el tiempo de vida de anaquel de un producto lácteo partiendo de sus parámetros fisicoquímicos, como son la acidez, la viscosidad y el número de microorganismos, considerando también la temperatura.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo general

Formular un modelo matemático que describa la dinámica de la vida de anaquel de las bacterias ácido lácticas y su relación con las variables que en el proceso de conservación intervienen.

### 1.3.2 Objetivos específicos

1. Generar las bases de datos a partir de la literatura sobre la vida de anaquel de productos lácteos a diferentes temperaturas.

2. Formular ecuaciones diferenciales ordinarias para cada una de las variables involucradas en la determinación de la vida de anaquel del producto lácteo bajo estudio.
3. Realizar un análisis estadístico para validar las soluciones del modelo matemático con respecto a los datos experimentales del producto lácteo.
4. Determinar la aplicabilidad del modelo formulado para predecir la vida de anaquel de un producto lácteo bajo condiciones específicas en el medio de cultivo.

#### **1.4 Hipótesis**

Con base en los datos experimentales extraídos de las referencias bibliográficas es posible formular un modelo matemático que permita estimar la vida de anaquel del producto lácteo bajo condiciones particulares de temperatura.

#### **1.5 Justificación**

En la actualidad existen diferentes modelos matemáticos mediante los cuales se pueden determinar el comportamiento de la vida de anaquel del yogur, así que se quiere encontrar un método con el que se pueda analizar la vida de anaquel con base en el comportamiento de los parámetros que se obtienen del análisis del yogur. Los productos lácteos que existen en el mercado son alimentos con características nutricionales muy especiales; su cuidado en la industria es trascendente, ya que ofrecen una proporción de proteínas de gran calidad. Por lo tanto, se quiere obtener un modelo con el cual se pueda predecir de forma más precisa la vida de anaquel del producto comparando su funcionamiento con modelos en la literatura existente. El modelo que se obtenga describirá la fase de decrecimiento de los microorganismos durante la vida de anaquel del producto y permitirá determinar el tiempo que transcurre para llegar al fin de la vida de anaquel (fase de muerte).

El yogur es uno de los alimentos que actualmente tiene una gigantesca demanda de consumo diario; no obstante, en los mercados de la localidad no se conoce con certeza la vida de anaquel de este producto. Es fundamental hacer la indagación para establecer la vida de anaquel del yogur, de forma que sea un aporte para los productores artesanales de yogur, quienes son parte de la industria láctea del estado de Durango.

### 1.5.1 Datos sobre la cantidad de productos lácteos desperdiciados

Facilitar la reducción de desechos de yogur a través de la mejora de la calidad y de la extensión de la vida útil de este es importante para los fabricantes de productos lácteos, ya que estos productores deben implementar la bioprotección. El análisis al respecto indica que los fabricantes, minoristas y todos los consumidores pueden obtener ahorros netos positivos al reducir el desperdicio de yogur. (Chr. Hansen, 2020)

El hecho de que la cantidad de alimentos que los humanos producen, pero no se comen sea significativa, tiene efectos negativos igualmente significativos desde los puntos de vista social y económico, pero también ambiental, las estimaciones sugieren que entre 8% y 10% de las emisiones mundiales de gases de efecto invernadero están asociadas con alimentos que no se consumen. Partiendo del año 2021 en América Latina y el Caribe generan un desperdicio de alimentos en los hogares de 69 toneladas por año y las cifras referentes a México equivalen a 94 kg/cápita/año y se obtuvieron del análisis de la composición del desperdicio medido directamente en hogares de tres estados y cinco municipios, se ajustaron mediante datos nacionales sobre desechos sólidos en zonas urbanas (Food waste index report 2021, 2021).

El consumo de productos lácteos en los supermercados se caracteriza por su gran volumen de ventas, sus frágiles cadenas de suministro y su vida útil relativamente breve, además de contribuir de manera importante a los desperdicios y mermas de alimentos. De hecho, en la Unión Europea cada año se desperdicia hasta un 17% del yogur, lo que equivale a un total de 1.5 millones de toneladas. Uno de los objetivos de sostenibilidad de la empresa global Chr Hansen es reducir el desperdicio de yogur en 1.2 millones de toneladas para 2022, con lo cual contribuiría positivamente al objetivo mundial número 12 de la ONU. Según los datos de bioprotección de dicha empresa, se desperdicia 1/3 de todos los alimentos producidos, el 17% del yogur desperdiciado en Europa se tira (1.5 millones de toneladas), y el 80% del yogur que se desperdicia lo es por la fecha de caducidad. Además, el desperdicio de yogur en Europa podría disminuirse un 30% si la vida útil se alargase siete días aprovechando la bioprotección, como FRESHQ; si se redujese el desperdicio de yogur, podrían ahorrarse 180 millones de euros cada año, y si disminuyese el desperdicio de yogur un 30%, podría evitarse la emisión de 430,000 toneladas de CO<sub>2</sub> (<https://www.chr-hansen.com/es/sustainability/our-fight-against-food-waste>).

Según las estadísticas del sector lácteo CANILEC del periodo 2010-2018, en la **Tabla 1** la producción anual de leche de bovino a nivel mundial en México ocupa el lugar número 14, y en la **Tabla 2** se observan los datos de producción a nivel nacional, en los que se aprecia que Durango ocupa el tercer lugar.

**Tabla 1. Estadísticas del sector lácteo CANILEC del año de 2010-2018 - Producción anual de leche de bovino a nivel mundial.**

Producción anual de leche de bovino (miles de toneladas de leche fluida)	14° Mexico	
	2010	10677
	2011	10724
	2012	10881
	2013	10966
	2014	11130
	2015	11395
	2016	11608
	2017	11768

**Tabla 2. Estadísticas del sector lácteo CANILEC del año de 2010-2018 - Producción anual de leche de bovino a nivel nacional.**

Producción anual de leche de bovino (miles de toneladas de leche fluida)	3° Durango	
	2010	1001137
	2011	997155
	2012	1037913
	2013	1017020
	2014	1036137
	2015	1142047
	2016	1133982
	2017	1208808
	2018	1226362

La producción mensual de leche de bovino por entidad federativa (miles de litros) en el año de 2019 se muestran en la **Tabla 3** ya que son los datos actuales más recientes que se pudieron obtener.

**Tabla 3. Estadísticas del sector lácteo CANILEC del año 2019 Producción mensual de leche de bovino a nivel estatal.**

Producción mensual de leche de bovino por entidad federativa (miles litros)	Durango			
	Ene	102662	Ago	104173
	Feb	91961	Sep	103695
	Mar	98696	Oct	113620
	Abr	95744	Nov	107792
	May	108703	Dic	110228
	Jun	91337	Total	1226363
	Jul	97752		

Los datos de producción industrial de leche y derivados en el estado de Durango se muestran en la **Tabla 4**, y en la

**Tabla 5** se muestra la producción de yogur natural, yogur con frutas y/o cereales, para beber y licuados. Algunas de las empresas productoras de lácteos que se encuentran en México se muestran a continuación (Toro Suarez, 2015):

- Nivel platino Danone.
- Nivel oro: LALA, Jugos del Valle, Santa Clara.
- Nivel plata: Dupont, Fonterra Dairy for life, SIG combibloc, Ojeda Refrigeración, Tetra Pak y Nestle.
- Nivel Bronce: Agro Lechera Altana, Quesos Chilchota, Sigma y Yakult.

**Tabla 4. Producción industrial de leche y derivados (miles de litros y toneladas).**

Producción industrial de leche y derivados (miles de litros y toneladas)	Yogur	
	2010	763188
	2011	785097
	2012	803419
	2013	767436
	2014	733820
	2015	764820

	2016	771439
	2017	759685
	2018	733676

**Tabla 5. Producción industrial yogur (toneladas).**

		Natural	Con frutas y/o cereales	Para beber	Licudo	
		2010	74978	266933	387352	
2011	90752	258826	398345	37174	785097	
2012	90350	266440	408334	38295	803419	
2013	89661	264032	383802	29941	767436	
2014	96673	283284	331227	22636	733820	
2015	104297	277728	370804	11991	764820	
2016	109753	278679	368553	14454	771439	
2017	103244	291319	390107	18125	802795	
2018	110952	236425	322254	14935	684566	

# Capítulo 2



## 2 Marco Teórico

### 2.1 Yogur

Es uno de los productos lácteos que se obtiene por medio de la fermentación láctica, por medio de la acción de dos bacterias el *Lactobacillus bulgaricus* y el *Streptococcus thermophilus*. Este es un de los alimentos que dan un mejor efecto alimenticio para el ser humano que lo consume. Es una fuente de proteínas, sueros, y es útil para el desarrollo de fórmulas.

#### 2.1.1 Proceso de producción

Para iniciar con el proceso de la producción del yogur; se comienza con leche esterilizada desde que se siembran distintas cepas de bacterias que conforman el ácido láctico que acidifican el medio, entre las variedades de bacterias se encuentran y se localizan los *Lactobacilos búlgaros*, del *estreptococo Termófilo* y el *Lactobacilo Y yogur*.

Esto se despliega desde que se comienza con la inoculación de la leche esterilizada e incubándola por un tiempo aproximado 4 a 5 horas aproximadamente a una temperatura de 45°C teniendo como meta el llegar a cierta consistencia, para después de esto pasar al refrigeramiento. El aumento de grasa depende de la leche y se espera que la proporción de proteínas sea la misma; y referente a los hidratos de carbono, la lactosa está en menor contenido en el yogur por su conversión a ácido láctico; en relación con el valor calórico es equivalente al de la leche del inicio.

Un bote de yogur aporta entre un 25% y 40% de los requerimientos diarios de calcio. Químicamente, la acidez proporcionada por el ácido láctico hace que se formen pequeños coágulos de caseína (proteína de la leche), lo que da al yogur su textura especial. Al yogur se le agregan en la industria frutas, sabores, aromas y otros elementos permitidos. 8Existen variedades con sacarosa, glucosa y edulcorantes artificiales.

Según la Norma Oficial Mexicana NOM-181-SCFI-2010, el yogur saborizado o con fruta podrá contener hasta 50% de ingredientes no lácteos, como edulcorantes, frutas y verduras, así como jugos, purés, pastas, preparados y conservadores derivados de los mismos, cereales, miel, chocolate, frutos secos, café, especias y otros alimentos aromatizantes naturales e inoocuos o sabores. Los ingredientes no lácteos pueden ser añadidos antes o luego de la fermentación. La parte de yogur antes de agregar los ingredientes no lácteos deberá cumplir con las especificaciones establecidas en el apartado 6 de la presente NOM.

- La relación de la *caseína proteína láctea* presente en el producto final debe ser al menos de 70% m/m (masa por masa).
- La proporción de proteína láctea respecto a los sólidos lácteos no grasos totales contenidos en el yogur, no debe disminuir respecto de la proporción de proteína láctea presente originalmente en la leche.
- El yogur deberá contener como mínimo 107 UFC/g de la suma de *Streptococcus thermophilus* y *Lactobacillus delbrueckii* subespecie *bulgaricus* viables, conforme al método de prueba de bacterias que fermentan los productos, del numeral 8 de la NOMX-703-COFOCALEC-2004.
- En caso de contener cultivos alternativos adicionales, éstos deberán estar en valores de 10<sup>6</sup> UFC/g viables de cultivos lácticos, como mínimo.
- Los microorganismos deben permanecer viables, activos y abundantes hasta la fecha de caducidad del producto.
- Las especificaciones de la Tabla 2 (NORMA Oficial Mexicana NOM-181-SCFI-2010) deben cumplirse, aunque el producto sea modificado en su composición, conforme a los parámetros permitidos por la NOM-086-SSA1-1994.
- Los aditivos permitidos para el yogur serán los establecidos en los ordenamientos legales y normativos aplicables, emitidos por la Secretaría de Salud. Su uso será conforme a dichos ordenamientos.

(NORMA OFICIAL MEXICANA NOM-181-SCFI-2010, 2010)

### **2.1.2 Características fisicoquímicas de productos lácteos fermentados**

Las características fisicoquímicas de gran importancia que se deben de considerar en la elaboración o valoración del yogur se describen a continuación.

#### **2.1.2.1 Potencial Hidrógeno (pH)**

Leche fermentada es aquella que ha cambiado por efecto de las bacterias lácticas u otros microorganismos que generan un cambio en la lactosa en ácido láctico y otros metabolitos. El cambio principal que se da en la leche es el descenso del pH con valores entre 4.6 – 4.0. Por este tipo de cambio de degradación, se produce la coagulación de la caseína, mediante esto se forma un gel y la inhibición del desarrollo de gran número de microorganismos, entre estos la mayoría de los patógenos, debido a la producción de ácido láctico y otros metabolitos menores como el ácido acético, el agua oxigenada o las bacteriocitas, un potencial de óxido-reducción bajo y el consumo por parte de las bacterias lácticas de componentes que son vitales para otros microorganismos.

El pH es el valor de la concentración de iones de hidrogeno en la acidez o alcalinidad de una sustancia. El intervalo de pH está comprendido entre 1-14, donde

7 corresponde a los productos neutros como el agua; por encima de este valor están los productos básicos, y por debajo están los productos ácidos como el yogur. Debido, precisamente, a que el rango de pH del yogur es una de sus principales características, en su elaboración se busca disminuir el pH de la leche a valores entre 6.5–6.7 para obtener la acidez apropiada, de la cual depende el olor y sabor específicos de este producto (Martínez, 2016).

### **2.1.2.2 Acidez**

El aumento de la acidez del yogur por la producción de ácido láctico genera la coagulación de la caseína, además de afectar la textura y el sabor del producto.

La acidez de un yogur debe oscilar entre 0.8-1.8% de ácido láctico, y es extremadamente importante para obtener un yogur de alta calidad con sabor, cuerpo y textura propios, y para que el producto tenga el mínimo porcentaje de sinéresis durante el almacenamiento (Ankenman, 1996).

### **2.1.2.3 Viscosidad**

Esta propiedad es la resistencia del líquido a fluir o deformarse, y se relaciona con el contenido de lactosa y de grasa, con la estructura de la caseína y el tamaño de los glóbulos de grasa en una sustancia. La viscosidad varía 16 puntos con la temperatura, el estado de dispersión y la concentración de los componentes sólidos. La viscosidad disminuye con la elevación de la temperatura.

El agua es menos viscosa que la leche debido a la materia grasa en estado globular y a las macromoléculas proteicas de la leche. Cualquier modificación a las grasas y las proteínas tendrá un efecto particular en la viscosidad, por ejemplo, la homogeneización de la leche eleva la viscosidad de esta; de igual manera, los factores que producen variaciones en el estado de la hidratación de las proteínas son causa de los cambios de viscosidad.

La precipitación por acidificación para elaborar leche ácida se consigue agregando a ésta cultivos de bacterias lácticas, microorganismos que transforman la lactosa en ácido láctico. Cuando el pH se acerca al punto isoeléctrico de la caseína aumenta la viscosidad, lo cual facilita la obtención de productos más espesos, con textura de gel, tal como ocurre con el yogur que requiere necesariamente estas condiciones para la formación del gel (Salazar, 2009).

## **2.2 Vida de anaquel**

Una de las pruebas que se pueden realizar para determinar la vida de anaquel del yogur consiste en someter el producto durante cierto tiempo efectivo a condiciones de refrigeración comunes de 4°C y comprobar diariamente el deterioro

que este va presentando respecto a sus propiedades físicas, químicas, microbiológicas y sensoriales. A medida que transcurre el tiempo, llegará el momento en que alguno de los parámetros sea inaceptable, es decir, que el producto pierda sus características y llegue al final de su vida útil (NORMA OFICIAL MEXICANA NOM-181-SCFI-2010, 2010).

### 2.2.1 Determinación de la vida de anaquel

Tanto al inicio, como durante y al final del proceso de la vida de anaquel es necesario tomar muestras para ir generando las fases del análisis que permitan el control bromatológico y microbiológico, con el cual será posible estudiar los datos obtenidos para garantizar la calidad del producto. Otros de los factores que se deben tener en cuenta son el almacenamiento y el transporte del producto, durante los cuales la refrigeración debe mantenerse entre 2°C y 4°C para que el yogur no modifique sus características, no altere sus propiedades ni su vida de anaquel estimada. Cualquier cambio imprevisto en alguna de estas características alterará por completo toda la sustancia.

### 2.2.2 Características de la vida de anaquel del yogur

La Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación, define al yogur como la leche coagulada obtenida por fermentación láctica ácida debido a las bacterias *Lactobacillus bulgaricus* y *Streptococcus thermophilus* sobre la leche pasteurizada o concentrada con o sin adición de leche en polvo, etc.

Las asociaciones internacionales de los fabricantes de yogur lo definen como la leche fermentada obtenida por multiplicación en ella, de solamente dos bacterias lácticas específicas asociadas: *Streptococcus thermophilus* y *Lactobacillus bulgaricus*. También se pueden identificar las características del yogur por medio de los sentidos, denominada características sensoriales, como se muestra en la Tabla 6, los cuales pueden determinar si la vida de anaquel ha llegado al final.

**Tabla 6. Características de evaluación sensoriales.**

Vista	Olfato	Tacto	Gusto	Oído
Color	Olor	Textura	Sabor	Sonido
Brillo		Temperatura	Acido	
Tamaño		Dureza	Dulce	
Forma		Peso	Salado	
			Amargo	

Fuente:(Alejandra et al., 2018)

### **2.2.3 Contaminación del producto lácteo**

La leche utilizada para elaborar los productos a los cuales se aplica la Norma General para los Contaminantes y las Toxinas Presentes en los Alimentos y Piensos (Codex Alimentarius) deberá cumplir con los niveles máximos especificados en esa Norma (CXS 193-1995).

La leche utilizada deberá cumplir con los límites máximos de residuos de plaguicidas y medicamentos veterinarios para los animales ya que todos estos valores están determinados por la Comisión del Codex Alimentarius.

En el Codex Alimentarius se define a un contaminante como cualquier sustancia que no se agregó intencionalmente al alimento, pero que está dentro del alimento como resultado de su producción, desde el tratamiento inicial en la agricultura, zootecnia y medicina veterinaria, y también como resultado de la fabricación, elaboración, preparación, tratamiento, envasado, empaquetado, transporte y almacenamiento de dicho alimento. El término “contaminante” no abarca fragmentos de insectos, pelo de roedores y otras materias extrañas.

La presente norma se aplica a toda sustancia que se ajuste a la definición de contaminante del Codex (CODEX, 1999), incluidos los contaminantes en los forrajes destinados a los animales, con algunas excepciones:

- 1) Los contaminantes presentes en los alimentos y forrajes que son importantes considerando la calidad del alimento, pero no la salud pública en los alimentos, ya que el objetivo de las normas elaboradas por el Comité del Codex sobre Contaminantes de los Alimentos es proteger la salud pública.
- 2) Los residuos de plaguicidas, que son de competencia del *Comité del Codex sobre Residuos de Plaguicidas*.
- 3) Los residuos de medicamentos veterinarios, que son de competencia del *Comité del Codex sobre Residuos de Medicamentos Veterinarios en los Alimentos*.
- 4) Las toxinas microbianas, como la toxina botulínica, la enterotoxina del estafilococo y los microorganismos, que son de competencia del *Comité del Codex sobre Higiene de los Alimentos*.
- 5) Los residuos de coadyuvantes de elaboración, que son de competencia del *Comité del Codex sobre Aditivos Alimentarios*.

### **2.2.4 Normas Mexicanas de aplicación a los productos lácteos**

Según la Norma Oficial Mexicana (NOM-181-SCFI-2010), Yogur-Denominación, Especificaciones Físicoquímicas y Microbiológicas, Información

Comercial y Métodos de Prueba, en la sección de abreviaturas o símbolos se establece lo siguiente:

- m/m masa a masa.
- pH potencial de hidrógeno.
- UFC unidades formadoras de colonias.
- UFC/g unidades formadoras de colonias por gramo.
- UFC/ml unidades formadoras de colonias por mililitro.
- % porcentaje.

**Tabla 7. Especificaciones fisicoquímicas que debe cumplir.**

<b>Característica (unidades de medición)</b>	<b>Contenido</b>	<b>Método de Prueba</b>
Proteína Láctea. (% m/m)	Mínimo 2.9%1.2	Determinación de Proteína por Micro-Kjedahl conforme a la NOM-155-SCFI-2012, numeral 8.5
Grasa Butírica. (% m/m)	Máximo 15.0%	Método de Caracterización de ácidos grasos conforme a la NMX-F-490-1999-NORMEX, Método para grasa butírica conforme a la NOM-086-SSA1-1994 Apéndice normativo C inciso 1.2 Hidrólisis alcalina
Acidez titulable expresada como porcentaje de Ácido Láctico (% m/m)	Mínimo 0.5%	Método de prueba de bacterias que fermentan los productos, del numeral 8 de la NMX-703-COFOCALEC-2004 o NOM-243-SSA1-2010 Apéndice normativo B inciso B.21
Sólidos Lácteos no grasos	Mínimo 8.25%	Determinación de Sólidos no grasos conforme a la NOM-155-SCFI-2012, numeral 8.4

Fuente (NORMA OFICIAL MEXICANA NOM-181-SCFI-2010, 2010)

El yogur deberá cumplir con las especificaciones fisicoquímicas (con vigencia a partir del 13 de enero de 2013) descritas en la **Tabla 7**. El yogur deberá contener como mínimo  $10^7$  UFC/g de la suma de *Streptococcus thermophilus* y *Lactobacillus delbrueckii* subespecie *bulgaricus* viables, acorde al método de prueba de bacterias que fermentan los productos, se puede observar por medio del numeral 8 de la NMX-703-COFOCALEC-2004.

Según el tipo de cultivo, como lo son los cultivos alternativos adicionales, los cuales deben de tener valores de  $10^6$  UFC/g viables de cultivos lácticos, como mínimo. Los microorganismos deben perseverar preservarse cuidando que sigan siendo viables, activos y abundantes, hasta la fecha de en que el producto pierde

todas sus características (fecha de la caducidad del producto) (NORMA OFICIAL MEXICANA NOM-181-SCFI-2010, 2010).

## 2.3 Modelo matemático

Los modelos matemáticos son cuando se fundamenta la elaboración de una realidad compleja la cual puede ser evaluada por su comprensión y estudio del comportamiento; con enfoque en las ecuaciones diferenciales como parte de este lenguaje y así después pasaran a ser operadas en técnicas aplicadas a la vida real para producir la combinación de estos tipos de lenguaje (Shuler, 2012).

El término “modelo” puede ser definido de distintas maneras, y cada de una de ellas dadas por excelentes investigadores sobre el modelo matemático. Un modelo puramente empírico, es la superficie de respuesta cuadrática para la dependencia del medio ambiente de un parámetro de una población bacteriana (Gibson y otros, 1988), uno de los objetivos principales de un modelo es la representación por medio de los resultados experimentales.

Trabajando un modelo enfocado en el análisis de regresión estadística, su objetivo es la representación de ciertas respuestas por medio de ecuaciones simples, como son polinomios, sin explicación mecanicista. El término del modelo matemático es muy riguroso, se describe a un conjunto de hipótesis básicas sobre los procesos estudiados, por medio de los cuales algunos son expresados mediante funciones y ecuaciones diferenciales (Baranyi & Roberts, 1995).

### 2.3.1 Etapas para el desarrollo de un modelo

Cuáles son las partes que conforman un ciclo de un modelo de matemáticos, para dar comienzo se inicia por las siguientes:

La identificación del problema: estudio de la información de mayor relevancia del problema. La mayor parte de los problemas reales suelen estar definidos en términos vagos e imprecisos, pero se llega a las etapas las cuales sea establecer las etapas que se realizan y las cuales deberán de ser evaluadas.

Especificaciones matemáticas y formulación: la formulación del problema matemático se va dependiendo por su optimización, definiendo sus variables, sus ecuaciones, su función objetivo, sus parámetros, y se analiza el tamaño del problema por la definición de sus funciones temporales.

Resolución: es la parte en la cual se decide qué tipo de método numérico se seguirán para iniciar la resolución del problema.



Verificación y validación: Para esta parte del modelo se identifican y se analizan los errores. Que se han especificado matemáticamente y de tal forma que se analizan que los datos sean comprobados.

Interpretación y análisis de los resultados: es la etapa en la que se proponen soluciones las cuales permiten conocer el análisis del modelo y sus parámetros.

Implementación, documentación y mantenimiento: es la parte del modelo en la que uno puede garantizar que es funcional para garantizar su amplia difusión. La documentación deberá ser clara, precisa y completa.

### **2.3.2 Clasificación de modelos**

En la literatura se localiza una diversa clasificación de modelos, se mencionan a continuación solo algunos de los más relevantes.

Modelo de simulación: que intenta adelantarse a un resultado en una determinada situación, sea que ésta se pueda medir en forma precisa o aleatoria. Las limitaciones pueden ser la falta de sistematización de la información, no conocer las relaciones en los elementos del sistema y la dificultad de integrar (Candelaria Martínez et al., 2011).

Modelo de optimización: la investigación utiliza una metodología sencilla para acercarse a la solución que contempla distintos casos y condiciones, alternando valores, para encontrar la configuración más satisfactoria. Identificación del problema que requiere de la investigación de operaciones y recopilación de información, planteamiento del modelo matemático, solución del problema matemático y ajustes al mismo e implementación de la mejor solución (Matemáticas Para Negocios 45 2. Modelos de Optimización, n.d.).

Modelo de control: a través del cual se pueden determinar los ajustes necesarios para obtener un resultado particular. Por medio de un conjunto de procesos los cuales partes de las principales área claves dentro del del sistema con el fin de diseñar indicadores y estándares basados en modelos estratégicos intentados por la organización (Royero, n.d.).

Modelos deterministas: es un modelo matemático donde las mismas entradas o condiciones iniciales producirán infaliblemente las mismas salidas o resultados, los cuales depende cada uno ellos de que cada valor de la variable. Está estrechamente relacionado con la relación de entornos simulados a través de simuladores (Candelaria Martínez et al., 2011).

Modelos continuos: es aquellos que por medio de ellos se puede iniciar el proceso de que tal forma se verifica el tiempo y el caso para convertirlo en

ecuaciones diferenciales, este tipo de modelos comúnmente se refieren al crecimiento de especies biológicas, debido a que los argumentos de estudio son extrapolares a diferentes contextos. (López et al., n.d.)

**Modelos probabilísticos:** se parte de la necesidad de información planteada y de una recolección de datos sobre los cuales se realizará una búsqueda, y es calculada empleando una base matemática formal, como el algebra vectorial, pero no existen ningún resultado teórico que permita afirmar que dichos cálculos sean correctos o los más adecuados. (Vilares, n.d.).

**Modelos mixtos:** ecuaciones estocásticas las funciones describen algunas situaciones físicas, las funciones son importantes para resolver problemas. Una tarea de un científico es descifrar qué función es la más adecuada para los datos (Carlos et al., n.d.):

Ecuaciones lineales en forma de punto-pendiente:

$$y = mx + b \quad (9)$$

Ecuaciones exponenciales de la forma:

$$y = a(b)^x \quad (10)$$

Ecuaciones cuadráticas en forma estándar:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (11)$$

### 2.3.3 Clasificación de los modelos biológicos

Los modelos biológicos son un recurso de las leyes científicas para la elaboración de explicaciones, en la biología estos modelos se suelen aplicar como herramientas explicativas “la explicación en la biología es obtenida siempre a través de la intervención directa de los modelos de los fenómenos a explicar” (López-Orellana et al., 2019). Los modelos pueden ofrecer explicaciones de formas muy diferentes, por esta razón existen muchos tipos de modelos, de modo que es posible reducir a un único patrón de explicación de modelos.

Entre los modelos se encuentran dificultades para poder articular las respuestas en cuestión lo más impórtate viene de la polisemia del término modelos. En particular en la biología, “modelo” puede destinar cosas muy diferentes:

Organismos concretos como *Drosophila Melanogaster* que son usados en la investigación por sus cualidades de fácil manejo o por ser representativos de otros

organismos. Modelos de conjuntos de ecuaciones los cuales describen algunos aspectos del comportamiento de sistemas biológicos complejos como el modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica, el modelo cinemático Michaelis-Menten para la determinación de la velocidad de la acción enzimática, o el modelo metapoblacional de Levins. Programas de simulación en ordenador (como los programas de Vida Artificial); etc. (Diéguez, 2013).

## **2.4 Ecuaciones de Sistemas Dinámicos**

Un sistema dinámico es aquel en el cual sus variables evolucionan a través del tiempo. Los sistemas dinámicos se formulan mediante modelos matemáticos los cuales se clasifican en lineales o no lineales y pueden ser continuos o discretos. Se describen mediante una serie de variables (cuyo valor en un instante determina el estado del sistema) y un conjunto determinista de reglas que establecen cómo será el siguiente estado futuro a partir del actual. Para conocer su comportamiento a partir de un punto inicial es necesario resolver o integrar el sistema mediante iteraciones en pequeños intervalos de tiempo para obtener una colección de puntos conocida como solución si se ilustra con respecto al tiempo o trayectoria si se ilustra en un plano dimensional. Usualmente, se utiliza software de simulación para simular e ilustrar la evolución en el tiempo del sistema dinámico al calcular los valores de sus estados mediante la utilización de algoritmos de resolución basados en métodos numéricos (Antonio, 2020).

# Capítulo 3

### 3 Metodología

#### 3.1 Obtención de datos

Se realizó el análisis del artículo de (N.-N. Zhi et al., 2018) “*Development of a dynamic prediction model for shelf-life evaluation of yogurt by using physicochemical, microbiological and sensory parameters*” en el cual se evalúan las propiedades microbiológicas, fisicoquímicas y sensoriales de la vida de anaquel del yogur. Se analizan los datos de cada una de las propiedades como la biomasa, viscosidad y acidez, a cuatro temperaturas 5°C, 15°C, 25°C y 35°C. Para la extracción de los datos del artículo se utilizó el programa WebPlotDigitizer, a partir de las figuras de cada uno de los parámetros a analizar. Para ello se obtuvieron imágenes del artículo en formato ‘jpg’ para los parámetros de biomasa (B), viscosidad (V) y acidez (A) para cada una de las 4 temperaturas de ambas muestras (muestra 1 y muestra 2).

El programa WebPlotDigitizer permite definir los valores de los ejes X y Y con los valores que corresponde de acuerdo con la imagen obtenida, vea **Figura 1**. El programa permite posicionar las coordenadas sobre cada uno de los datos presentado en la imagen. De esta manera se genera un archivo de Excel, vea **Figura 2**, con las coordenadas de cada punto de los datos experimentales de las imágenes.

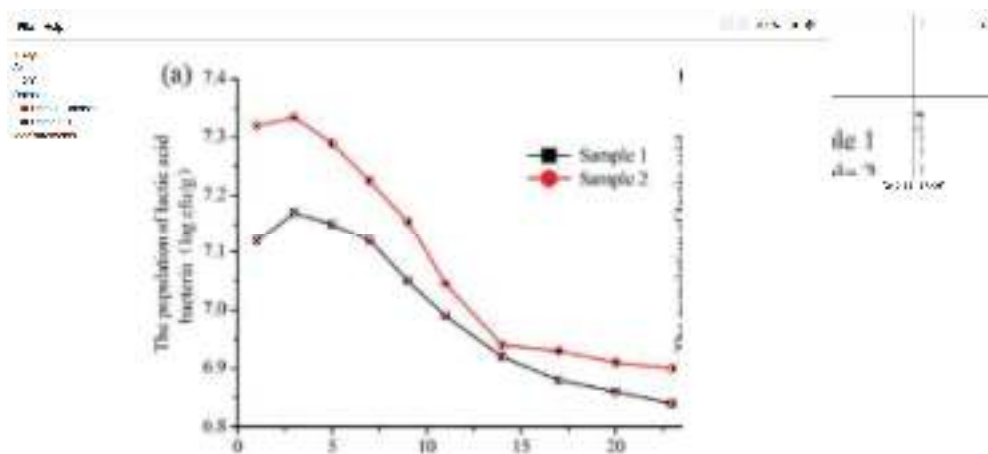


Figura 1. Vista previa del programa WebPlotDigitizer.

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	19	20	21	22	23	24
5	25	26	27	28	29	30
6	31	32	33	34	35	36
7	37	38	39	40	41	42
8	43	44	45	46	47	48
9	49	50	51	52	53	54
10	55	56	57	58	59	60
11	61	62	63	64	65	66
12	67	68	69	70	71	72
13	73	74	75	76	77	78
14	79	80	81	82	83	84
15	85	86	87	88	89	90
16	91	92	93	94	95	96
17	97	98	99	100		
18						
19						
20						

Figura 2. Datos exportados del programa WebPlotDigitizer.

### 3.2 Análisis de datos

A través del software Eureka se determinó una función temporal que emula los datos experimentales en intervalos de tiempo 0 – 22 días con incrementos de un día en la muestra 1 para la temperatura de 5°C, con el intervalo de tiempo 0 – 11 días a 15°C y 25°C, y con un intervalo de 0 – 9 días a 35°C. Esto con el fin de tener una base de datos homogénea para cada uno de los parámetros respecto a las cuatro temperaturas.

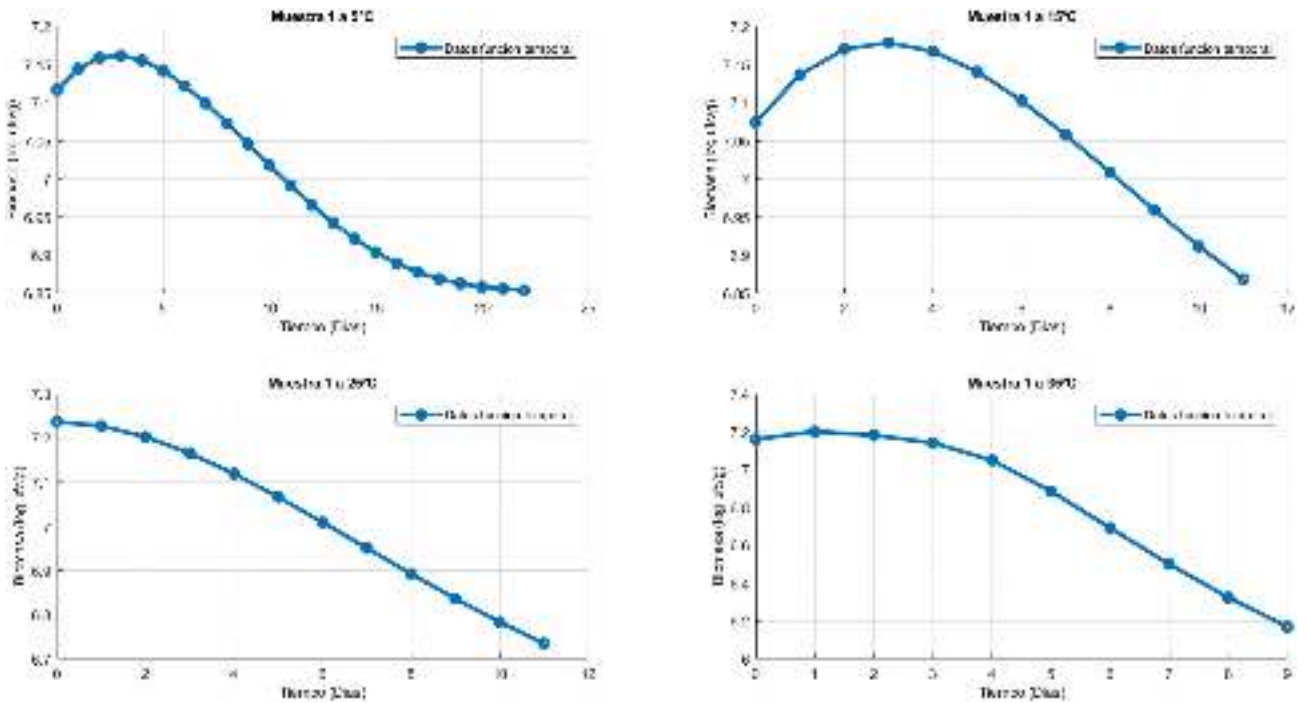
En la

**Tabla 8**, se muestran las funciones temporales las cuales se utilizaron para representar los datos, y comprobar que se podía justificar el comportamiento de las gráficas de Biomasa. El coeficiente de determinación para los datos ajustados a cada temperatura fue de  $R^2 = 0.99$  para 5°C,  $R^2 = 0.99$  para 15°C,  $R^2 = 0.96$  para 25°C, y  $R^2 = 0.96$  para 35°C.

En la **Figura 3**, se muestra el resultado de las funciones temporales de los parámetros de B (Biomasa) para la muestra 1 en el intervalo de tiempo de 0 – 22 días obtenidas mediante Matlab.

**Tabla 8. Funciones Temporales de biomasa muestra 1.**

Biomasa		
Temperatura	Ecuación	R <sup>2</sup>
5°C	$B_1(t) = 7.11671346237947 + 0.0353297038727131t + 0.000408581269478436t^3 - 6.59491804830303e - 6t^4 - 0.00794588573815653t^2$	0.99
15°C	$B_2(t) = 7.07431839092276 + 0.0789615991963912t + 0.000819151367476755t^3 + 6.51960471420706e - 12t^8 - 5.49836015097016e - 7t^5 - 0.0171716595999665t^2;$	0.99
25°C	$B_3(t) = 7.23596377529249 + 0.000627585818728641t^3 - 1.14720059008188e - 5t^4 - 0.0096535512694363t^2;$	0.96
35°C	$B_4(t) = 8.54161480124428 + 0.0181777630717269t^2 - 0.404660119518986t - 0.000277057235922061t^3 - 3.28074483918584 * 0.188184280687467 ^t - 1.78929398407298 * 0.188184280687467^t * t^3;$	0.96



**Figura 3. Graficas obtenidas de la función temporal biomasa muestra 1.**



En la **Tabla 9**, se muestran las funciones temporales las cuales se obtuvieron para representar los datos, y comprobar que se puede justificar el comportamiento de las gráficas de Acidez. El coeficiente de determinación para los datos ajustados a cada temperatura fue de  $R^2 = 0.99$  para 5°C,  $R^2 = 0.99$  para 15°C,  $R^2 = 0.96$  para 25°C, y  $R^2 = 0.96$  para 35°C.

En la **Figura 4. Graficas obtenidas de la función temporal acidez muestra 1** **Figura 3. Graficas obtenidas de la función temporal biomasa muestra 1**, se muestra el resultado de las funciones temporales de la Acidez para la muestra 1 en intervalos de tiempo 0 – 22 días con incrementos de un día en la muestra 1 para la temperatura de 5°C, con el intervalo de tiempo 0 – 11 días a 15°C y 25°C, y con un intervalo de 0 – 9 días a 35°C obtenidas mediante la simulación de Matlab.

**Tabla 9. Funciones Temporales de acidez muestra 1.**

Acidez		
Temperatura	Ecuación	$R^2$
5°C	$A_1(t) = 79.8167382242042 + 0.0797491419473063t^2 + 5.30842672371347e - 6t^5 - 2.73706957046561e - 9t^7 - 0.00517423644582155t^3;$	0.99
15°C	$A_2(t) = 84.3719995631339 + 3.52177873134911t + 0.00939803616463813t^3 + 6.72767444024333e - 8t^6 - 0.000224899804869778$	0.99
25°C	$A_3(t) = 86.6692891954459 + 4.66181160675721t + 0.000438368428121609t^4 - 2.64309438543719e - 9t^7 - 0.0145879195577747$	0.96
35°C	$A_4(t) = 99.8283678165527 + 4.66580202775035t + 1.03570991805156e - 7t^6 - 0.00550068899172797t^3$	0.96

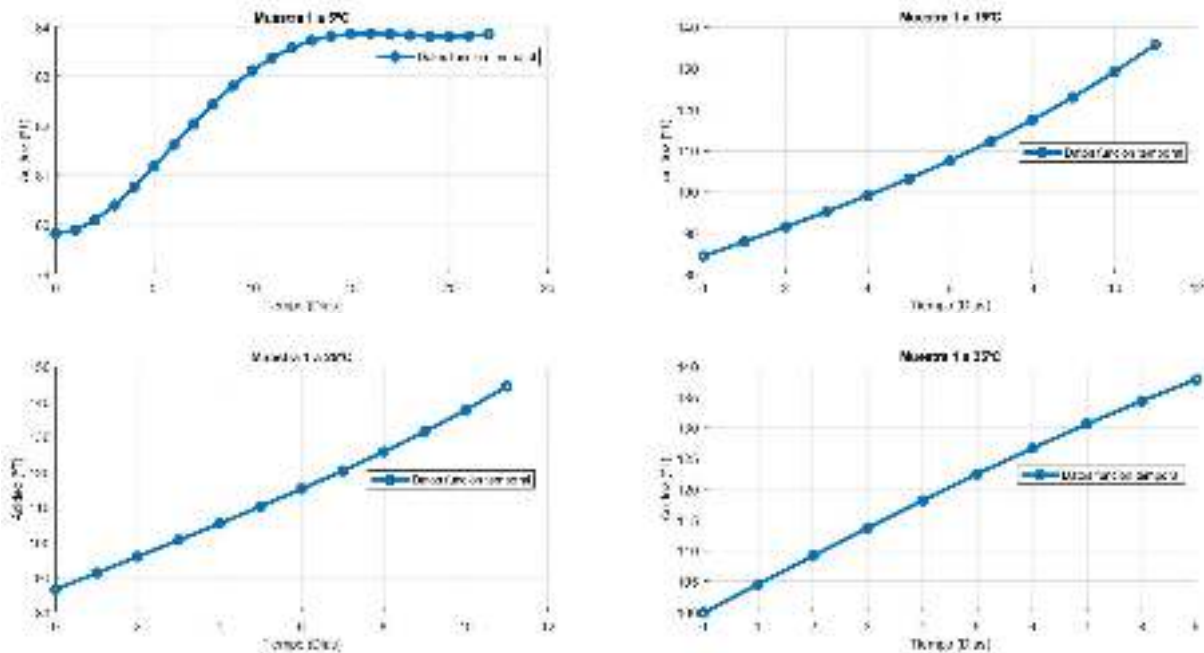


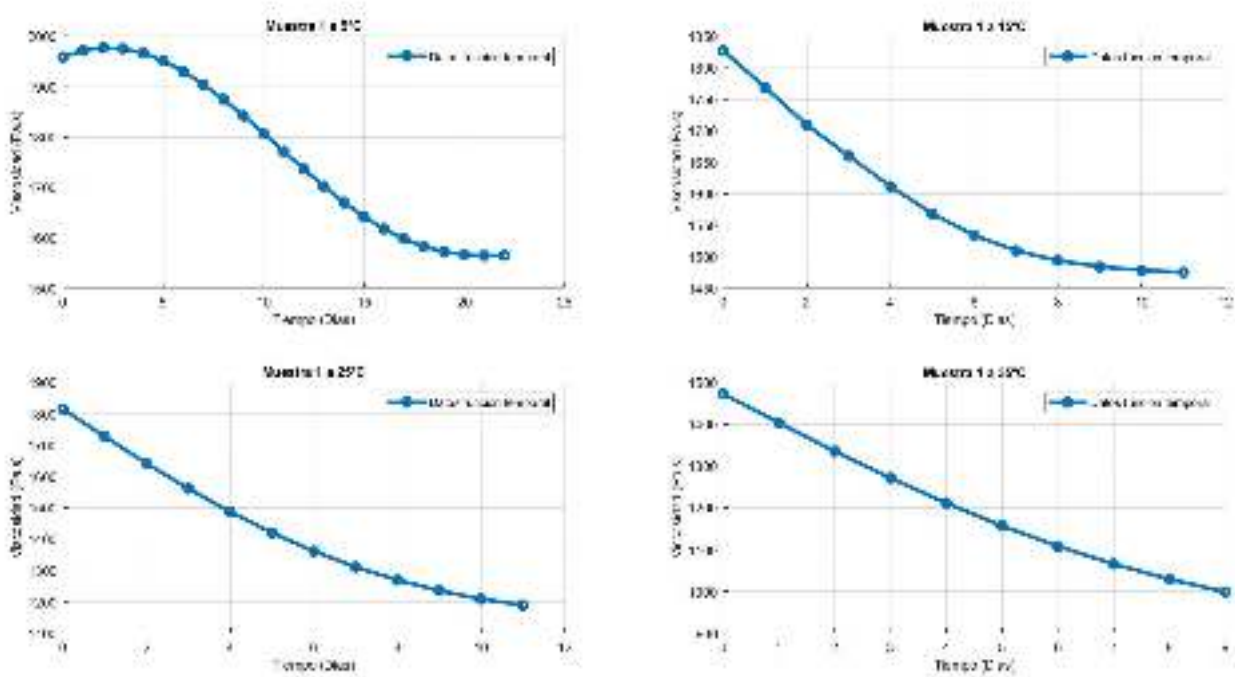
Figura 4. Graficas obtenidas de la función temporal acidez muestra 1.

En la **Tabla 10**, se muestran las funciones temporales mediante las cuales se logró hacer la representación de los datos, de tal manera se logró comprobar el comportamiento de las gráficas de Viscosidad. El coeficiente de determinación para los datos ajustados a cada temperatura fue de  $R^2 = 0.99$  para 5°C,  $R^2 = 0.99$  para 15°C,  $R^2 = 0.96$  para 25°C, y  $R^2 = 0.96$  para 35°C.

En la **Figura 5. Graficas obtenidas de la función temporal viscosidad muestra 1, Figura 3. Graficas obtenidas de la función temporal biomasa muestra 1** se muestra el resultado de las funciones temporales de los parámetros de Viscosidad en el intervalo de tiempo 0 – 22 días con incrementos de un día en la muestra 1 para la temperatura de 5°C, con el intervalo de tiempo 0 – 11 días a 15°C y 25°C, y con un intervalo de 0 – 9 días a 35°C obtenidas mediante Matlab.

**Tabla 10. Funciones Temporales de viscosidad muestra 1.**

Viscosidad		
Temperatura	Ecuación	R <sup>2</sup>
5°C	$V_1(t) = 1958.30794253492 + 16.8174370447695t + 0.00678006861651952t^4 - 4.38451175299958e - 6t^6 - 3.83157101778382t^2;$	0.99
15°C	$V_2(t) = 1472.19483611334 + (354.612119541158) (0.399099415051487t) + (328.121489773194t) (0.399099415051487t) + (59.5678653359008) (0.399401298938211^t * t^3) - 0.0564706441270953t;$	0.99
25°C	$V_3(t) = 1813.91081390532 + 0.494804925478206t^3 + 0.00039251474511318t^5 - 88.1388532834492t - 0.0257029032415916t^4;$	0.96
35°C	$V_4(t) = 1472.17758993666 + 0.348345062728397t^3 + 0.000252665858874387t^5 - 69.8309002725612t - 0.0173166579326036t^4;$	0.96



**Figura 5. Graficas obtenidas de la función temporal viscosidad muestra 1.**

Respecto a la muestra 2 de los datos experimentales, las funciones temporales obtenidas para representar los datos en tiempo continuo, **Tabla 11**. El coeficiente de determinación para los datos ajustados a cada temperatura fue de  $R^2 = 0.99$  para  $5^\circ\text{C}$ ,  $R^2 = 0.99$  para  $15^\circ\text{C}$ ,  $R^2 = 0.96$  para  $25^\circ\text{C}$ , y  $R^2 = 0.96$  para  $35^\circ\text{C}$ .

En la **Figura 6** se muestran el resultado de las funciones temporales del parámetro de Biomasa para la muestra 2 en el intervalo de tiempo 0 – 22 días con incrementos de un día para la temperatura de  $5^\circ\text{C}$ , con el intervalo de tiempo 0 – 11 días a  $15^\circ\text{C}$  y  $25^\circ\text{C}$ , y con un intervalo de 0 – 9 días a  $35^\circ\text{C}$ .

**Tabla 11. Funciones Temporales de Biomasa muestra 2.**

Biomasa		
Temperatura	Ecuación	$R^2$
$5^\circ\text{C}$	$B_1(t) = 7.3259080246876 + 0.0032777119541605t + 1.91476083372274e^{-5t^3} - 0.000989870417792112t^2 - 298560.775302668 (4.15392315141022e^{-12t^3(0.000438726029991884 + 4.15392315141022t^{(-12t^7)(0.0391076547353124)}),$	0.99
$15^\circ\text{C}$	$B_2(t) = 6.96819337022432 + 0.339934121172279 * 0.11344387103703 (0.00090393704330567t^3) + 0.146929707806212t * 0.11344387103703t^{(0.00090393704330567t^3)} - 0.00428418476645728t - 0.0012425935581259t^3 * 0.11344387103703t^{(0.00090393704330567t^3)} - 0.0999512345443423t * (0.11344387103703t^{(0.00090393704330567t^3)})^2$	0.99
$25^\circ\text{C}$	$B_3(t) = 6.66770160966771 + (0.709404657010514) (0.00768001789820119^{(3.26139674266747e^{-5t^4} e^{4.2618536569e^{-7}})}) - 0.00394847039726723t;$	0.96
$35^\circ\text{C}$	$B_4(t) = 7.18995311112957 + 2.70069057141217e^{-5t^3} + 0.366462683822707 * 0.245037796219086^{0.0140586060198726t^2} - 0.0461499797974294t - 1.29403669155282((0.0738448046172448t)t)^2 (0.245037796219086)^{0.0140586060198726t^2};$	0.96

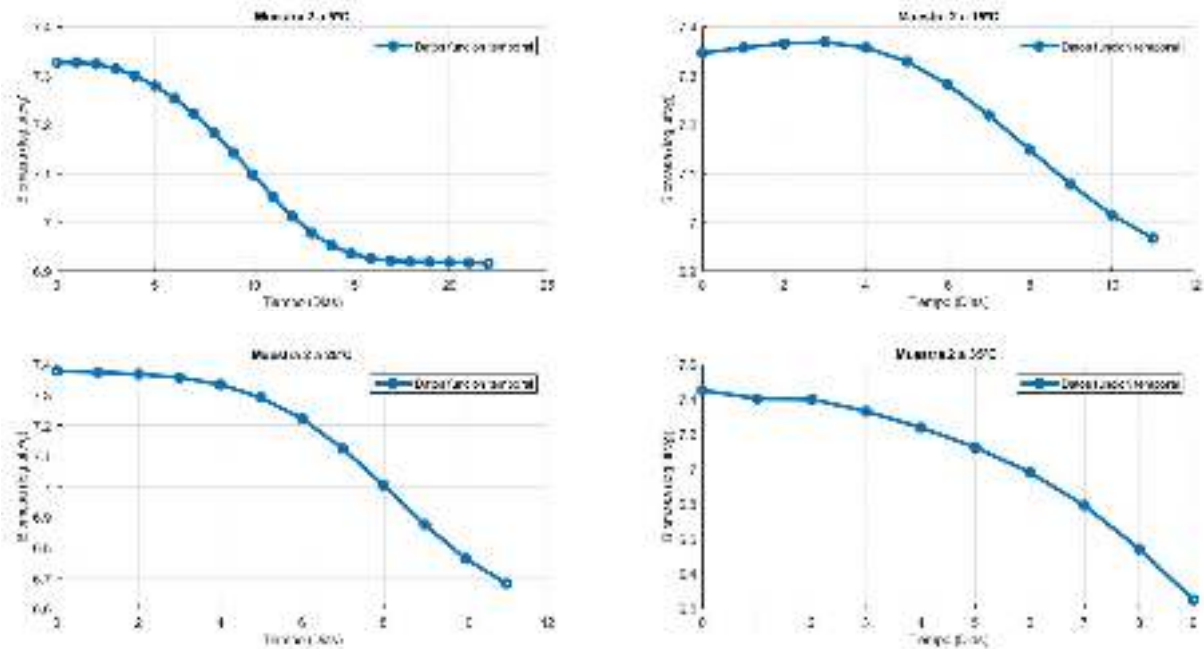


Figura 6. Graficas obtenidas de la función temporal biomasa muestra 2.

Las funciones temporales obtenidas para Acidez y así lograr incorporar los datos en tiempo continuo se muestran en la **Tabla 11**. El coeficiente de determinación para los datos ajustados a cada temperatura fue de  $R^2 = 0.99$  para 5°C,  $R^2 = 0.99$  para 15°C,  $R^2 = 0.96$  para 25°C, y  $R^2 = 0.96$  para 35°C.

Respecto al comportamiento de las gráficas de Acidez en la **Figura 7** se muestran el resultado de las funciones temporales a las 4 temperaturas del parámetro para la muestra 2 con intervalos de tiempo 0 – 22 días con incrementos de un día con la temperatura de 5°C, con el intervalo de tiempo 0 – 11 días a 15°C y 25°C, y con un intervalo de 0 – 9 días a 35°C.

Tabla 12 Funciones Temporales de Acidez muestra 2

Acidez		
Temperatura	Ecuaciones	R <sup>2</sup>
5°C	$A_1(t)$ $= 86.5201919163814$ $+ 0.195598479462736t - 0.00286267953817718t^2 - 2.25870490623152$ $* 0.256040480839754^{0.0277361933174057t^2};$	0.99
15°C	$A_2(t) = 70.5031765668047 + 6.92621552278374t$ $+ 0.0140051312278897t^3 + 61.9982198370822$ $* 0.117506374133243t$ $* t^2 - 0.000159386105727962t^4 - 0.46$	0.99
25°C	$A_3(t)$ $= 101.764159820777 + 0.425857486102365t^2$ $+ 0.000434935516486692t^4 - 0.0257550681284088t^3 - 101.7641598207$ $* 0.0731467801640568t * t^3$	0.96
35°C	$A_4(t) = 102.791474052251 + 17.467143245146t$ $+ 0.0290820842891885t^3 - 6.94368687915996e$ $- 6t^5 - 1.16930890995289t^2$	0.96

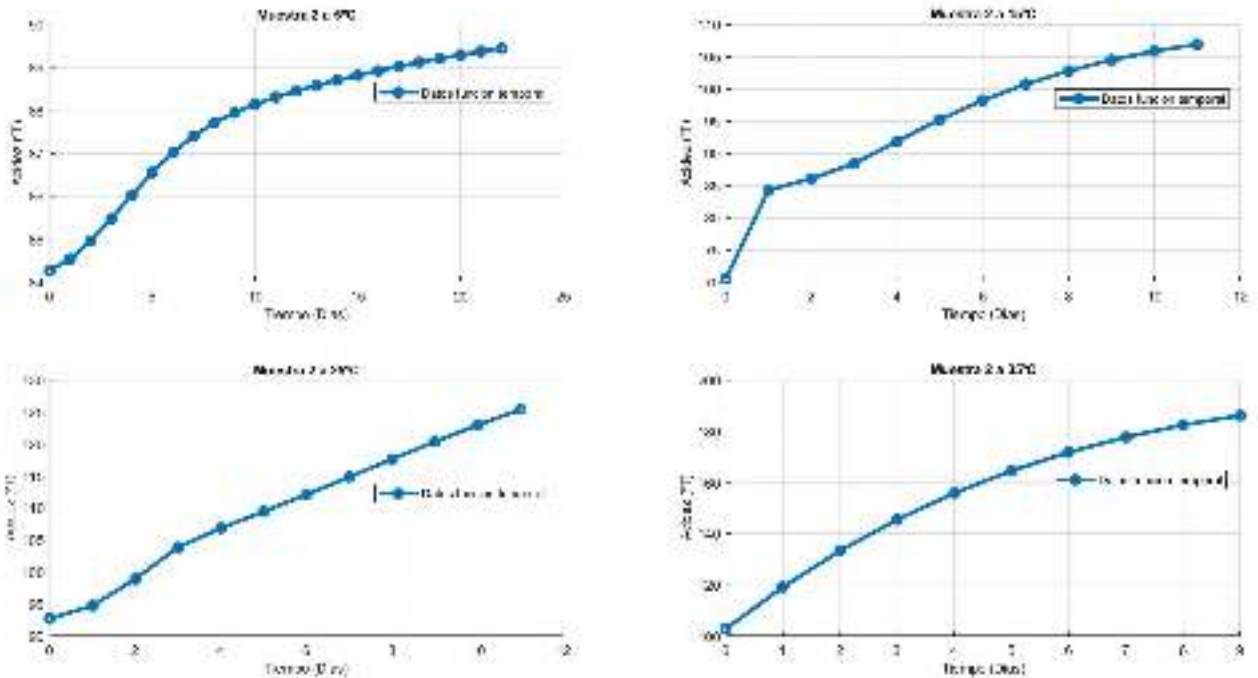


Figura 7. Graficas obtenidas de la función temporal acidez muestra 2 a las cuatro temperaturas.

En la muestra 2 de Viscosidad los datos experimentales, se representan por medio de las funciones temporales utilizadas, se muestran en la **Tabla 13**. El coeficiente de determinación para los datos ajustados a cada temperatura fue de  $R^2 = 0.99$  para  $5^\circ\text{C}$ ,  $R^2 = 0.99$  para  $15^\circ\text{C}$ ,  $R^2 = 0.96$  para  $25^\circ\text{C}$ , y  $R^2 = 0.96$  para  $35^\circ\text{C}$ . Se muestran en la **Figura 8** los resultados de las funciones temporales del parámetro de Viscosidad en intervalos de tiempo 0 – 22 días con incrementos de un día en la muestra 2 para la temperatura de  $5^\circ\text{C}$ , con el intervalo de tiempo 0 – 11 días a  $15^\circ\text{C}$  y  $25^\circ\text{C}$ , y con un intervalo de 0 – 9 días a  $35^\circ\text{C}$ .

**Tabla 13. Funciones Temporales de viscosidad muestra 2.**

Viscosidad		
Temperatura	Ecuaciones	$R^2$
$5^\circ\text{C}$	$V_1(t) = 2082.48700470231 + 0.000277646010226525t^5$ $+ 6.26543843169267(0.0413358020868908t) t^5$ $- 17.0718099066158t - 7.99451958485941e^{-6t^6}$ $- 1.44240996807959t^2$	0.99
$15^\circ\text{C}$	$V_2(t) = 2097.79443646204 + 3.89488814039171t^2 - 78.4546378753803t$ $- 0.064133959145215t^3$	0.99
$25^\circ\text{C}$	$V_3(t) = 1917.80001658712 + 0.134347071312003t^3 - 59.3390736010645t$ $- 0.00320143315863028t^4$	0.96
$35^\circ\text{C}$	$V_4(t) = 1672.88226558952 + 3.64822547939294t^2 + 5.31702296461938e^{-6t^6}$ $- 85.2304177885491t - 0.000209140718856177t^5;$	0.96

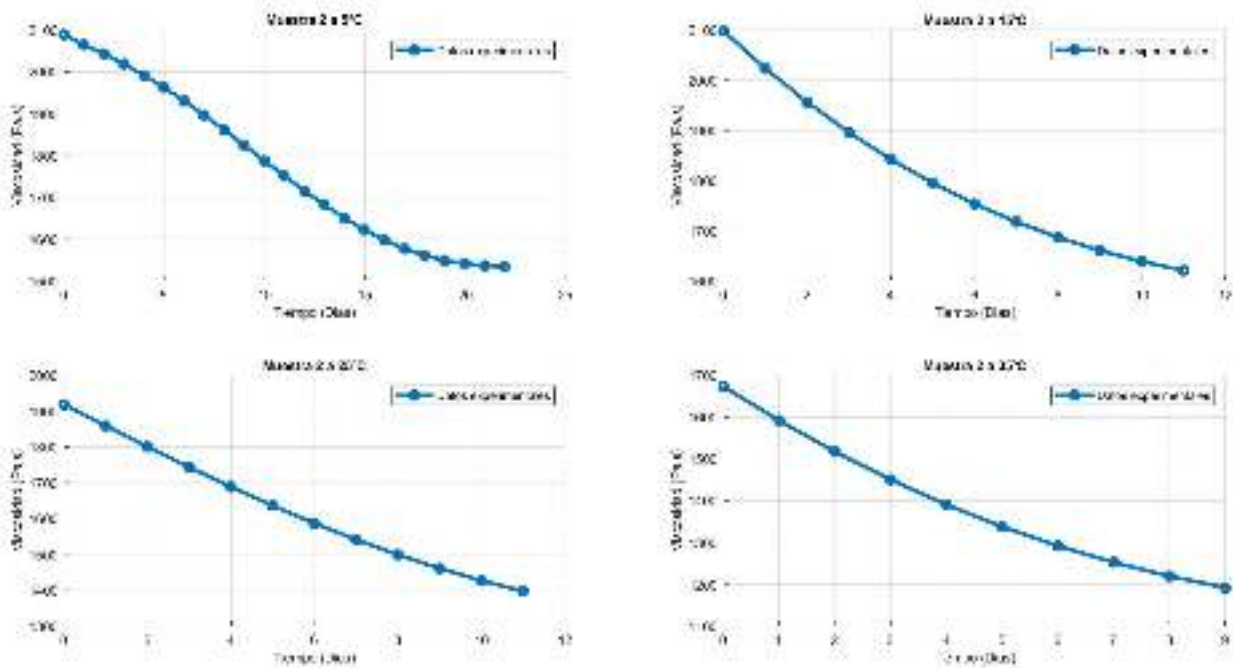


Figura 8. Graficas obtenidas de la función temporal viscosidad muestra 2.

### 3.3 Formulación de ecuaciones diferenciales

Al comenzar a trabajar con los dos tipos de muestras del yogur, se detectó que en la muestra 1 los parámetros analizados tenían un comportamiento diferente donde los datos no se encontraban dentro de los parámetros de aceptación, los parámetros extraídos se ven representados por puntos en los cuales vemos un comportamiento que muestra un crecimiento en los primeros tres días, al pasar este tiempo de se observa un decrecimiento y los datos obtenidos por la función se representa por la línea continua donde se observa un comportamiento de similar pero no se encuentra dentro de los parámetros permitidos para poder mencionar que este tiene un índice de bondad de ajuste aceptable para la función, esto lo podemos observar en la

Figura 9, los datos del artículo fuente no se representaban con los datos obtenidos por la ecuación diferencial.



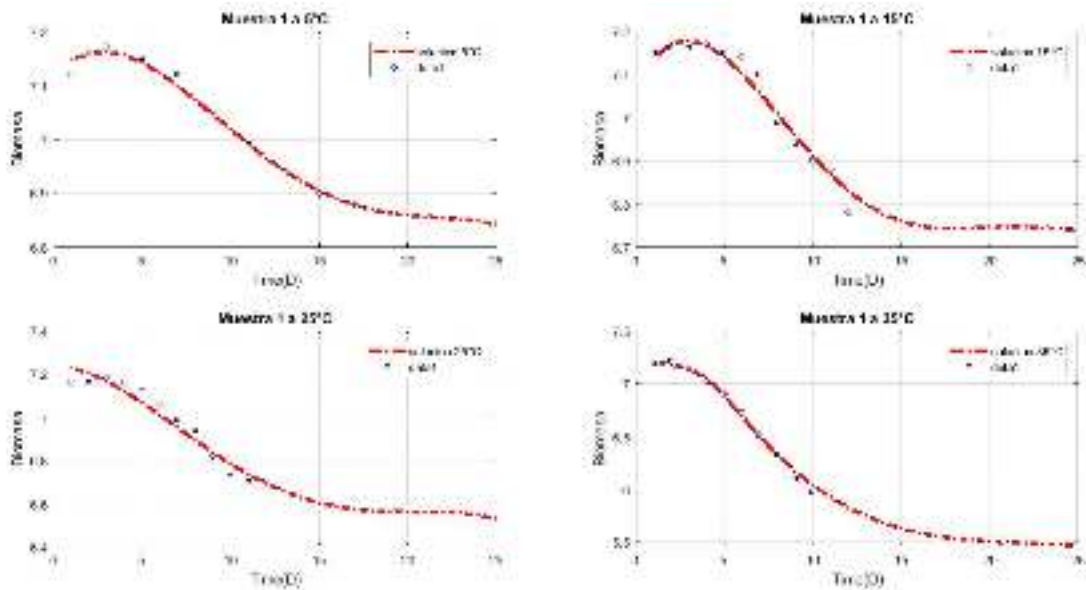


Figura 9. Muestra 1 para biomasa.

Debido a que, en el proceso de la búsqueda de la ecuación ideal para predecir el comportamiento del yogur a un tiempo más prolongado, para poder determinar su comportamiento con rangos de tiempo sin definir por lo que se puede predecir su comportamiento a futuro. Por lo que se decidió trabajar con la muestra 2 solamente debido a que en esta se logró lo propuesto.

A partir de las funciones temporales anteriores, se formularon las EDOs para describir el comportamiento de cada una de las variables biomasa  $[B(t)]$ , acidez  $[A(t)]$  y viscosidad  $[V(t)]$ , relacionando los cambios con respecto a la temperatura a lo largo del tiempo. Con el software *Eureqa* se analizaron los datos para un periodo de 30 días, y se definió una ecuación del mismo grado para todas las temperaturas en cada variable. En la **Tabla 14**, se muestran los valores del índice de bondad de ajuste ( $R^2$ ) obtenidos para las EDOs de las tres variables analizadas para la muestra 2.

**Tabla 14. Valores de índice de bondad de ajuste ( $R^2$ ) obtenidos a distintas temperaturas de las EDOs vs función temporal.**

Valores de $R^2$						
Temperatura	Biomasa (EDOs)	Biomasa (función temporal)	Acidez (EDOs)	Acidez (función temporal)	Viscosidad (EDOs)	Viscosidad (función temporal)
5°C	0.976	0.9904	0.9888	0.5605	0.995	0.9971
15°C	-0.073	0.6745	0.948	0.9907	0.998	0.9985
25°C	0.967	0.7831	0.948	0.9956	0.993	0.8928
35°C	0.973	0.9512	0.996	0.5867	0.999	0.8072

En la **Tabla 15** se muestra las ecuaciones obtenidas para las 4 diferentes temperaturas (5°C, 15°C, 25°C y 35°C). Obteniendo como ecuación diferencial general para B(t):

$$\dot{b}_n = \alpha T_n + \beta T_n B_n^2 - \gamma T_n B_n \quad (12)$$

**Tabla 15. Ecuaciones diferenciales Biomasa.**

Biomasa	
Temperatura muestra 2	Ecuación diferencial
5°C	$\dot{b}_1 = \alpha T_1 + \beta T_1 B_1^2 - \gamma T_1 B_1$
15°C	$\dot{b}_2 = \alpha T_2 + \beta T_2 B_2^2 - \gamma T_2 B_2$
25°C	$\dot{b}_3 = \alpha T_3 + \beta T_3 B_3^2 - \gamma T_3 B_3$
35°C	$\dot{b}_4 = \alpha T_4 + \beta T_4 B_4^2 - \gamma T_4 B_4$

En la

**Tabla 16** se muestran los valores de cada uno de los coeficientes en a las diferentes temperaturas.

**Tabla 16. Valor de los coeficientes de EDO del parámetro biomasa muestra 2.**

Temperatura	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
5°C	10.3928237343162	0.204908793320098	2.91991445691154
15°C	3.7560860535586	0.0740713569396073	1.05557294178251
25°C	1.59480214554383	0.0327982592067297	0.458159168462535
35°C	0.242431547335288	0.00627322324617439	0.0793220644604647

Para la Acidez el formato de ecuación es a partir de la siguiente ecuación diferencial general:

$$\dot{a}_1 = \delta T_n - \lambda T_n A_n^2 \quad (13)$$

En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**Tabla 17 se muestran las diferentes ecuaciones para cada una las temperaturas que se aplica la muestra.

**Tabla 17. Ecuaciones diferenciales Acidez.**

Acidez	
Temperatura muestra 2	Ecuación diferencial
5°C	$\dot{a}_1 = \delta T_1 - \lambda T_1 A_1^2$
15°C	$\dot{a}_2 = \delta T_2 - \lambda T_2 A_2^2$
25°C	$\dot{a}_3 = \delta T_3 - \lambda T_3 A_3^2$
35°C	$\dot{a}_4 = \delta T_4 - \lambda T_4 A_4^2$

En la **Tabla 18** se muestran los valores de cada uno de los coeficientes de la ecuación diferencial en a las diferentes temperaturas.

**Tabla 18 Valor de los coeficientes de EDO del parámetro acidez muestra 2**

Temperatura	$\delta$	$\lambda$
5°C	0.894965140408867	0.00011023659167787
15°C	0.932411182069953	7.61722817735534e - 5
25°C	0.356014408883582	1.8502965437284e - 5
35°C	0.69807337864878	1.8240319835395e - 5

La ecuación que se obtuvo en Viscosidad es:

$$\dot{v}_1 = \rho T_n V_n + \sigma T_n / V_n - \varphi T_n \quad (14)$$

La cual se muestra en la

**Tabla 19**, donde las ecuaciones diferenciales correspondientes de los parámetros que cambian con cada una de las temperaturas manejadas  $5^{\circ}C$ ,  $15^{\circ}C$ ,  $25^{\circ}C$  y  $35^{\circ}C$ .

**Tabla 19. Ecuaciones diferenciales Viscosidad.**

Viscosidad	
Temperatura muestra 2	Ecuación diferencial
5°C	$\dot{v}_1 = \rho T_1 V_1 + \sigma T_1 / V_1 - \varphi T_1$
15°C	$\dot{v}_2 = \rho T_2 V_2 + \sigma T_2 / V_2 - \varphi T_2$
25°C	$\dot{v}_3 = \rho T_3 V_3 + \sigma T_3 / V_3 - \varphi T_3$
35°C	$\dot{v}_4 = \rho T_4 V_4 + \sigma T_4 / V_4 - \varphi T_4$

**Tabla 20. Valor de los coeficientes de EDO del parámetro de viscosidad muestra 2.**

Temperatura	$\rho$	$\sigma$	$\varphi$
5°C	0.128864394651159	424848.006820032	475.61998345505
15°C	$1.20594015048647e - 7$	33007.6136637562	21.2041663978674
25°C	$2.8028856150805e - 7$	10521.1879918415	8.38569771089307
35°C	0.00160591150163014	10363.0371018102	11.2953507071741

En las **Figura 10** a la **Figura 21** se muestran los resultados de las ecuaciones diferenciales de primer orden los parámetros de B(t), A(t) y V(t). para la muestra 2 en el intervalo de tiempo de 0 – 30 días en las que se determina el comportamiento de cada uno de los parámetros.

De la **Figura 10** a **Figura 13** se muestran los resultados de la simulación de la Ecuación Diferencial de Acidez, en el intervalo de tiempo de 0 a 30 días en las que se determina el periodo de vida de anaquel de acuerdo a cada una de las cuatro temperaturas bajo análisis.

La acidez del yogur, es una propiedad que va en aumento durante el almacenamiento, lo que coincide con los resultados observados en la **Figura 9**. La temperatura ocasiona cambios en la acidez en el mismo periodo de tiempo, con incrementos de 5.5°T a 5°C hasta 92.7°T a 35°C para el mismo periodo de tiempo.

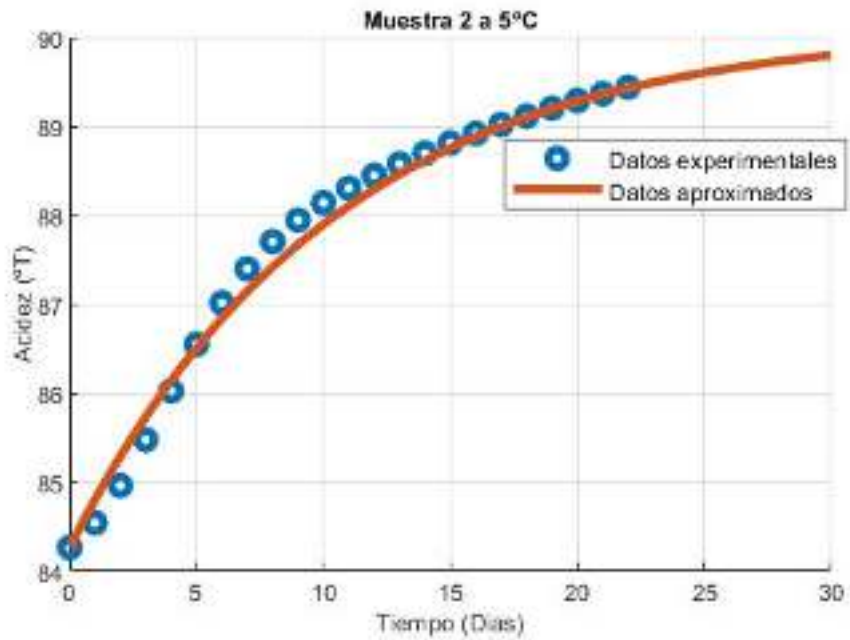


Figura 10. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de acidez muestra 2 a 5 °C.

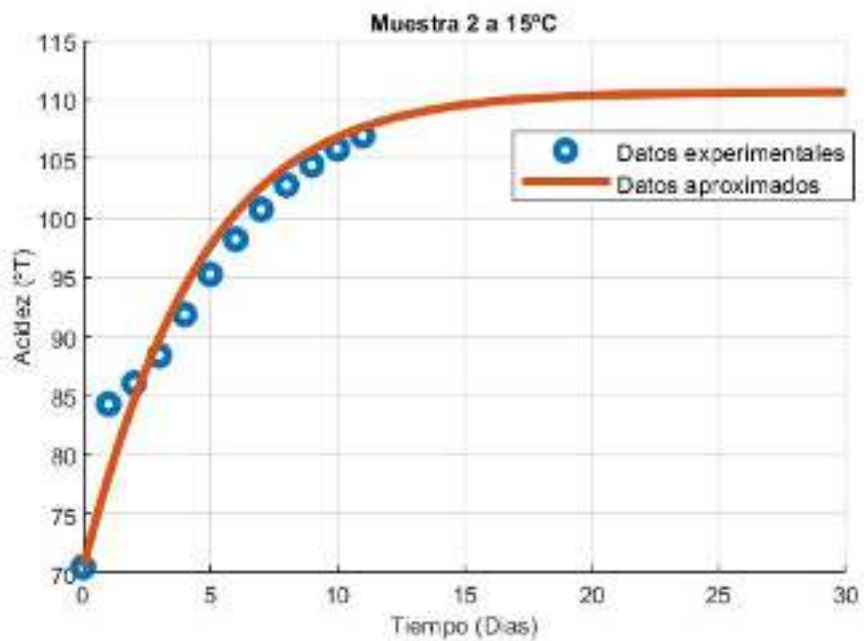


Figura 11. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de acidez muestra 2 a 15 °C.

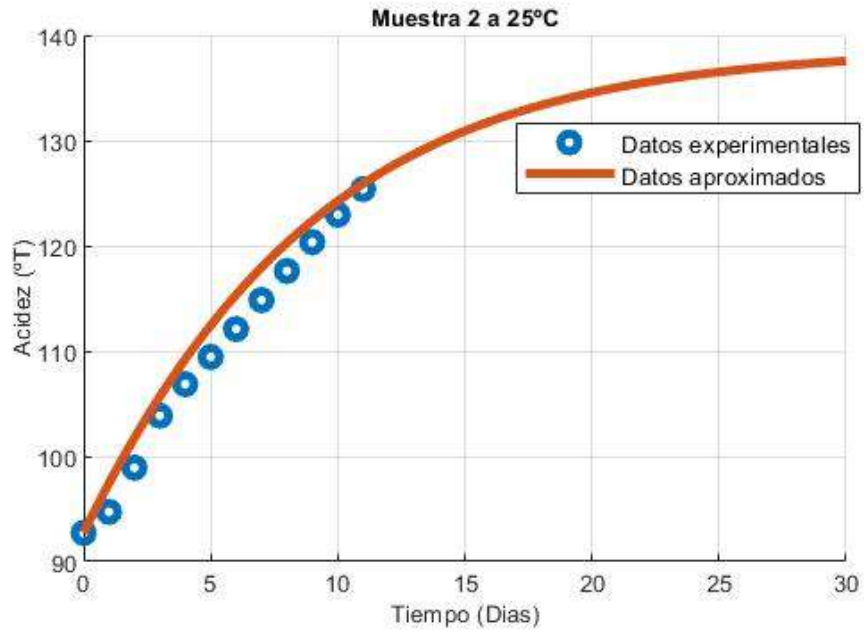


Figura 12. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de acidez muestra 2 a 25 °C.

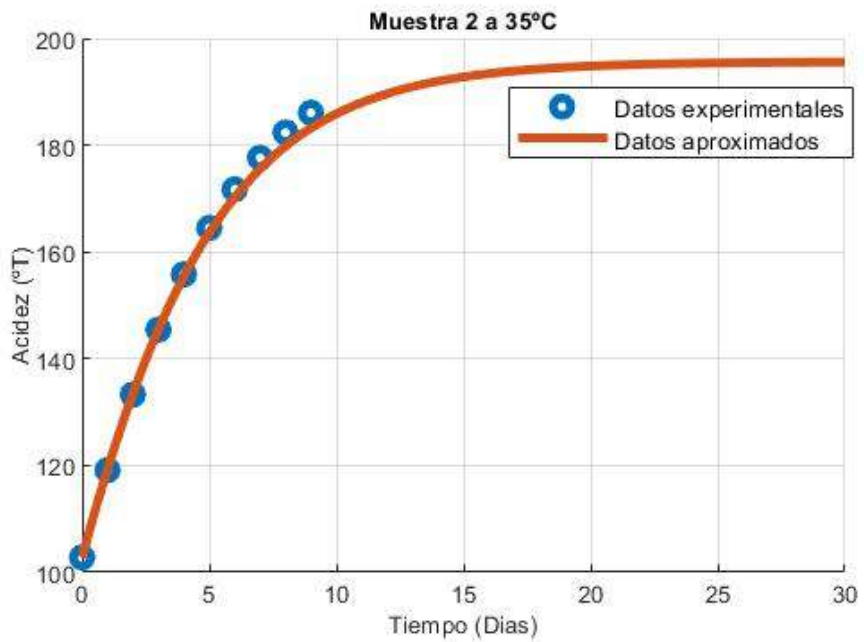
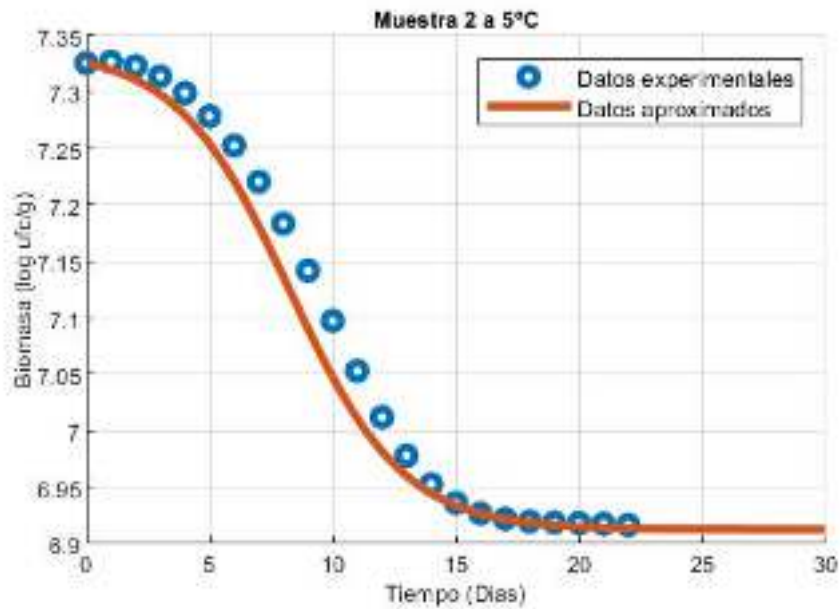


Figura 13. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de acidez muestra 2 a 35 °C.



De la **Figura 14** a la **Figura 17** se muestran los resultados de la simulación de la ecuación (14) en el intervalo de tiempo de 0 a 30 días en las que se determina el periodo de vida de anaquel. Se observa la fase de estacionaria menor a 5 días y la fase de muerte con diferentes valores. La tasa de muerte es de 0.41 log CFU/g/día, a 5°C, 0.46 log CFU/g/día en la temperatura de 15°C se puede observar que la EDO no presenta la fase estacionaria en comparación con los datos experimentales que presentaron un incremento de biomasa en los primeros días Por lo que el valor de índice de bondad es -0.073, ver **Figura 14**. Con una tasa de muerte de 0.79 log CFU/g/día para 25°C y a 35°C la tasa de muerte es de 2.27 log CFU/g/día.



**Figura 14.** Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de biomasa muestra 2 a 5°C.

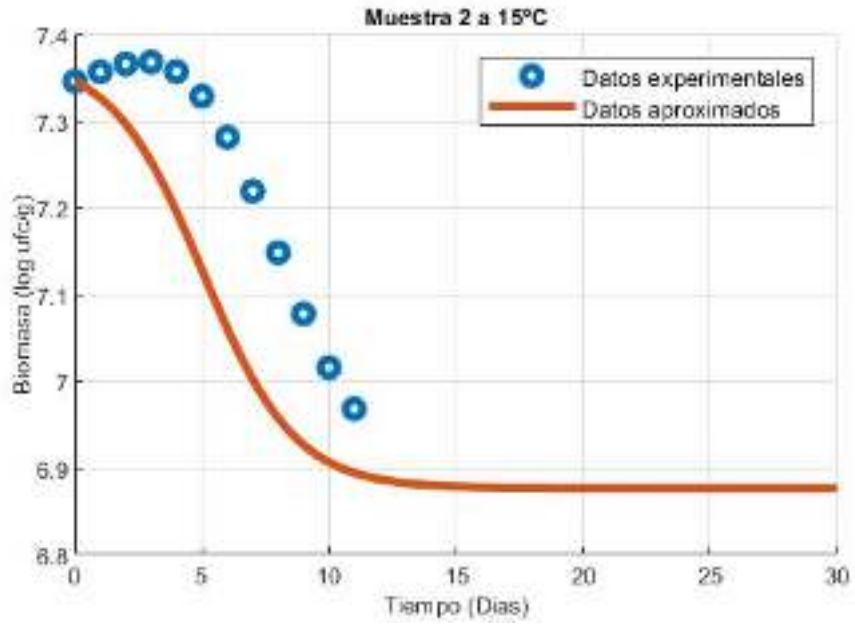


Figura 15. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de biomasa muestra 2 a 15°C.

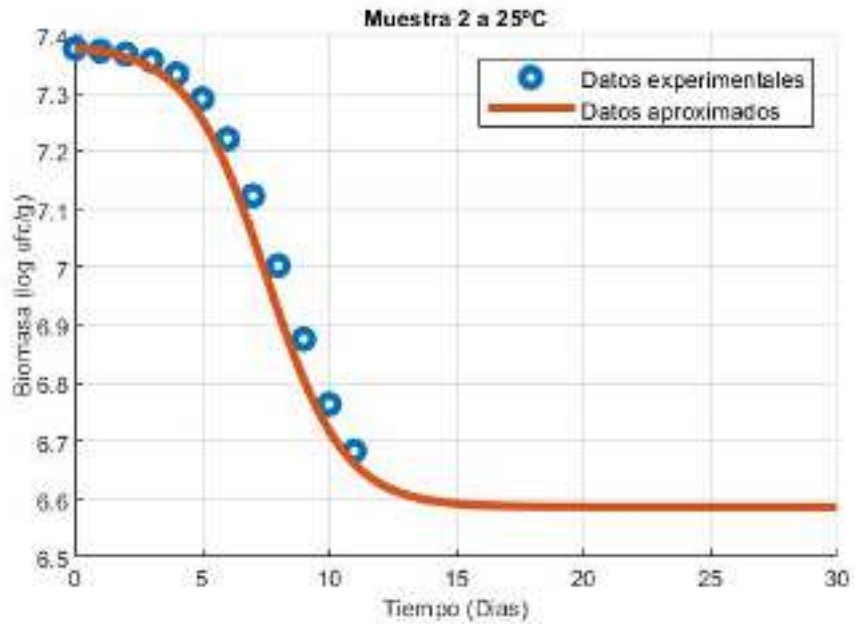


Figura 16. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de biomasa muestra 2 a 25°C.

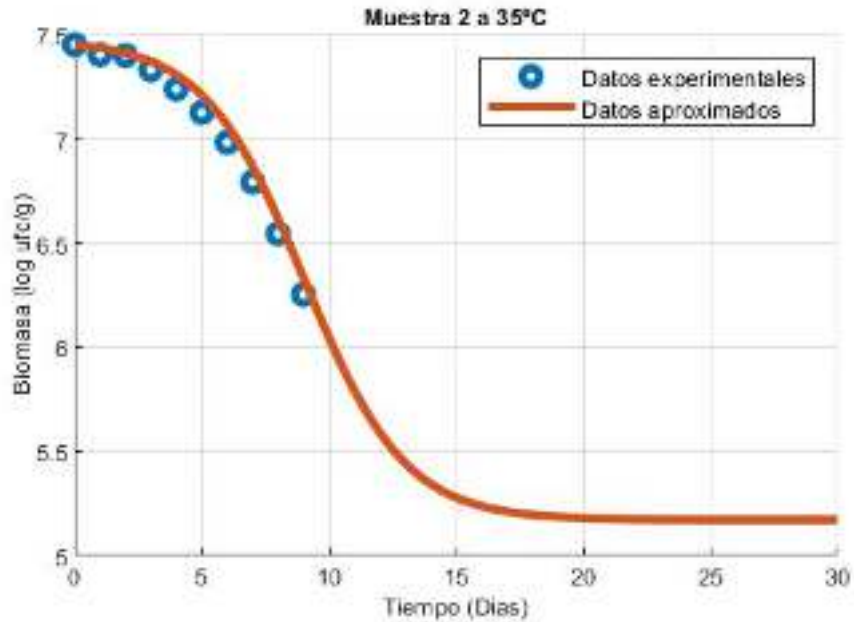


Figura 17. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de biomasa muestra 2 a 35°C.

Los productos lácteos tienen una viscosidad alta de acuerdo a la temperatura que esta es cometida, un punto de comparación es la viscosidad del agua que tiene una viscosidad que parte de  $1.6 Pa \cdot s$ , la viscosidad disminuye con el aumento de la temperatura, el estado de dispersión y la concentración de los componentes sólidos. Toda modificación que actúa en las grasas tendrá un efecto particular a la viscosidad porque son una sustancia con parámetros reológicos revista (Rodríguez-Bernal et al., 2014b). De la **Figura 18** a **Figura 21** se puede observar el comportamiento de la viscosidad del yogur decrece conforme al aumento del tiempo de almacenamiento.

Como se observa en la temperatura  $5^{\circ}C$  con una tasa de velocidad de decrecimiento  $570.79 Pa \cdot s$ , con una taza de velocidad de decrecimiento de  $539.46 Pa \cdot s$  a los  $15^{\circ}C$ , a los  $25^{\circ}C$  con una taza de velocidad de decrecimiento  $655.64 Pa \cdot s$  y con un valor de la taza de decrecimiento de  $587.52 Pa \cdot s$  para  $35^{\circ}C$ .

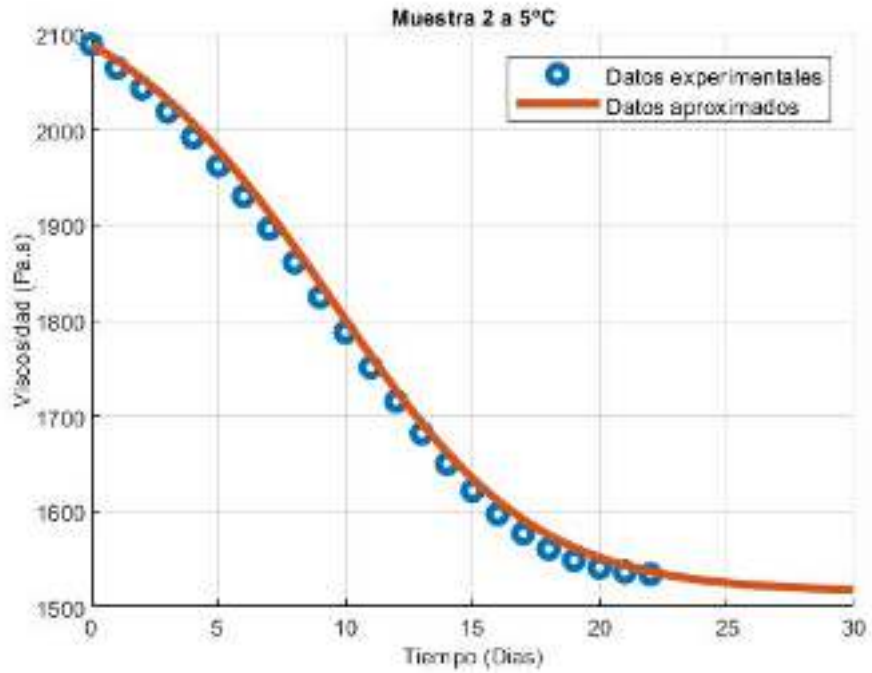


Figura 18. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de viscosidad muestra 2 a 5°C.

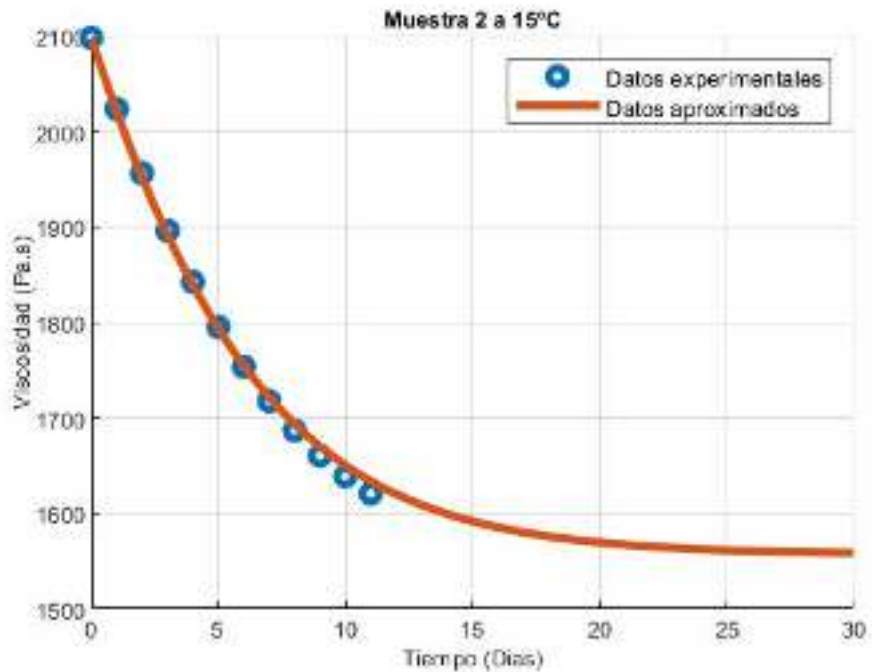


Figura 19. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de viscosidad muestra 2 a 15°C.

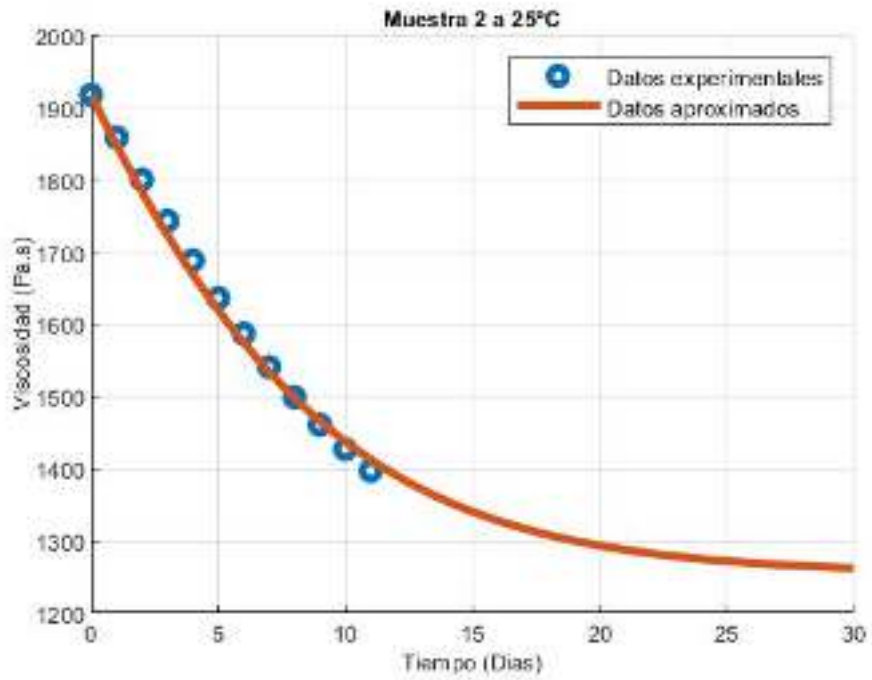


Figura 20. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de viscosidad muestra 2 a 25°C.

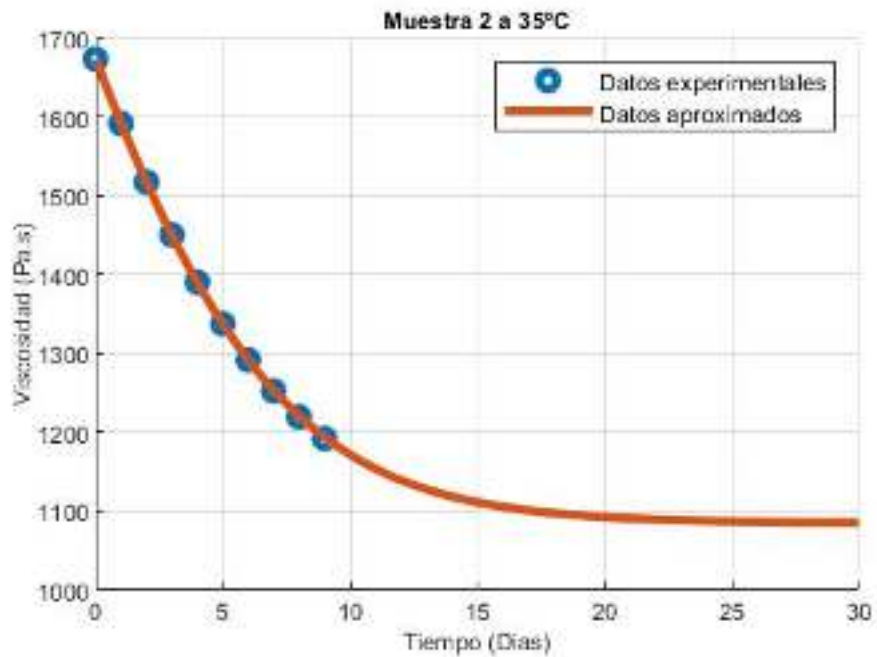


Figura 21. Graficas obtenidas con las ecuaciones diferenciales de viscosidad muestra 2 a 35°C.

### 3.4 Puntos de Equilibrio

#### 3.4.1 Puntos de equilibrio para biomasa

A partir de la ecuación diferencial de primer orden de biomasa:

$$\dot{b}_1 = \alpha T_1 + \beta T_1 b_1^2 - \gamma T_1 b_1$$

Se asume que:

$$(\alpha, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

$$(\beta, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

$$(\gamma, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

A continuación, se muestran los puntos de equilibrio se obtiene la primera función general para biomasa a las diferentes temperaturas:

$$b_1^* = \frac{1}{2\beta} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta} \right)$$

la segunda función general para biomasa es:

$$b_2^* = \frac{1}{2\beta} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta} \right)$$

Los puntos de equilibrio en caso de  $T=5$  se dan en:

$$b_1^* = \frac{1}{2\beta} \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta} \right) = 7.3373$$

$$b_2^* = \frac{1}{2\beta} \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta} \right) = 6.9125$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b = \frac{1}{2\beta} (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda_1 = 0.43522, \text{ inestable}$$

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b=\frac{1}{2\beta}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda_2 = -0.43522, \text{ local asintoticamente estable}$$

Los puntos de equilibrio en caso de  $T=15$  se dan en:

$$b_1^* = \frac{1}{2\beta} (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}) = 7.3744$$

$$b_2^* = \frac{1}{2\beta} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}) = 6.8764$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b=\frac{1}{2\beta}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda = 0.6533, \text{ inestable}$$

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b=\frac{1}{2\beta}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda = -0.06533, \text{ local asintoticamente estable}$$

Los puntos de equilibrio en caso de  $T=25$  se dan en:

$$b_1^* = \frac{1}{2\beta} (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}) = 7.3829$$

$$b_2^* = \frac{1}{2\beta} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}) = 6.5861$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b=\frac{1}{2\beta}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda = 0.55331, \text{ inestable}$$

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b=\frac{1}{2\beta}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda = -0.55331, \text{ local asintoticamente estable}$$

Los puntos de equilibrio en caso de T=35 se dan en:

$$b_1^* = \frac{1}{2\beta} (\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}) = 7.4797$$

$$b_2^* = \frac{1}{2\beta} (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}) = 6.48 \times 10^{-2}$$

La matriz Jacobiana demuestras lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b=\frac{1}{2\beta}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda = 0.5056, \text{ inestable}$$

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{b}}{\partial b} \right] = [2\beta T b - \gamma T]_{b=\frac{1}{2\beta}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta})}$$

$$\lambda = -0.5056, \text{ local asintoticamente estable}$$

En la Tabla 21, se muestran los resultados obtenidos de los puntos de equilibrio y la matriz jacobiana de la biomasa en la muestra 2 a las diferentes temperaturas.



Tabla 21. Valores obtenidos de los puntos de equilibrio para Biomasa. Se observa que el punto  $b_1^*$  para cada temperatura es inestable, mientras que  $b_2^*$  es local asintóticamente estable.

Temperatura	puntos de equilibrio		Matriz jacobiana	
	$b_1^*$	$b_2^*$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
5°C	$b_1^* = 7.3373$	$b_1^* = 6.9125$	$\lambda_1 = 0.43522$	$\lambda_2 = -0.43522$
15°C	$b_1^* = 7.3744$	$b_2^* = 6.8764$	$\lambda_1 = 0.6533$	$\lambda_2 = -0.06533$
25°C	$b_1^* = 7.3829$	$b_2^* = 6.5861$	$\lambda_1 = 0.5531$	$\lambda_2 = -0.55331$
35°C	$b_1^* = 7.4797$	$b_2^* = 6.48 \times 10^{-2}$	$\lambda_1 = 0.5056$	$\lambda_2 = -0.5056$

### 3.4.2 Puntos de equilibrio para acidez

A partir de la ecuación

$$\dot{a}_1 = \delta T_1 - \lambda T_1 a_1^2$$

Se asume que:

$$(\delta, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

$$(\lambda, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

$$(T, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

Para la acidez se obtiene la primera función general para acidez a las diferentes temperaturas:

$$a_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\delta}$$

la segunda función general para acidez es:

$$a_2^* = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}$$

Los puntos de equilibrio en caso de T=5 se dan en:

$$a_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = 90.103$$

$$a_2^* = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = -90.103$$

La matriz Jacobiana demuestras lo siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} \partial \dot{a} \\ \partial a \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = -9.9327 \times 10^{-2}, \text{local asintóticamente estable}$$

$$J = \begin{bmatrix} \partial \dot{a} \\ \partial a \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = 9.9327 \times 10^{-2}, \text{inestable}$$

Los puntos de equilibrio en caso de T=15 se dan en:

$$a_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = 110.64$$

$$a_2^* = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = -110.64$$

La matriz Jacobiana demuestras lo siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} \partial \dot{a} \\ \partial a \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = -0.25283, \text{local asintóticamente estable}$$

$$J = \begin{bmatrix} \partial \dot{a} \\ \partial a \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = 0.25283, \text{ inestable}$$

Los puntos de equilibrio en caso de  $T=25$  se dan en:

$$a_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = 138.71$$

$$a_2^* = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = -138.71$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = -0.12833, \text{ local asintóticamente estable}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = 0.12833, \text{ inestable}$$

Los puntos de equilibrio en caso de  $T=35$  se dan en:

$$a_1^* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = 195.63$$

$$a_2^* = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta} = -195.63$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = -0.24978, \text{ local asintóticamente estable}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \end{bmatrix} = [-2\lambda T a]_{a=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\delta}}$$

$$\lambda = 0.24978, \text{ inestable}$$

La **Tabla 22** muestra los resultados que se obtuvieron en el cálculo de los puntos de equilibrio para cada una de las muestras en a las diferentes temperaturas y de igual manera los valores de la matriz jacobiana de la acidez en la muestra.

**Tabla 22. Valores obtenidos de los puntos de equilibrio para Acidez. Se observa que el punto  $a_1^*$  para cada temperatura es local asintóticamente estable, mientras que  $a_2^*$  es inestable.**

Temperatura	puntos de equilibrio		Matriz jacobiana	
	$a_1^*$	$a_2^*$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
5°C	$a_1^* = 90.103$	$b_2^* = -90.103$	$\lambda_1 = -9.9327 \times 10^{-2}$	$\lambda_2 = 9.9327 \times 10^{-2}$
15°C	$a_1^* = 110.64$	$b_2^* = -110.64$	$\lambda_1 = -0.25283$	$\lambda_2 = 0.25283$
25°C	$a_1^* = 138.71$	$b_2^* = -138.71$	$\lambda_1 = -0.12833$	$\lambda_2 = -0.12833$
35°C	$a_1^* = 195.63$	$b_2^* = -195.63$	$\lambda_1 = -0.24978$	$\lambda_2 = 0.24978$

### 3.4.3 Puntos de equilibrio para viscosidad

$$\dot{v}_1 = \rho T_1 v_1 + \sigma T_1 / v_1 - \varphi T_1$$

Se asume que:

$$(\rho, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

$$(\sigma, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

$$(\varphi, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

$$(T, \text{positivo}) = (0, \infty)$$

Para viscosidad, se obtiene la primera función general para viscosidad a las diferentes temperaturas:

$$v_1^* = \frac{1}{2\rho} \left( \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho} \right)$$

La segunda función general para viscosidad es:

$$v_2^* = \frac{1}{2\rho} \left( \varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho} \right)$$

Los puntos de equilibrio en caso de T=5 se dan en:

$$v_1^* = \frac{1}{2\rho} \left( \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho} \right) = 1515.7$$

$$v_2^* = \frac{1}{2\rho} \left( \varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho} \right) = 2175.2$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v = \frac{1}{2\rho} (\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = -0.28037$ , local asintóticamente estable

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v = \frac{1}{2\rho} (\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = 0.19536$ , inestable

Los puntos de equilibrio en caso de T=15 se dan en:

$$v_1^* = \frac{1}{2\rho} \left( \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho} \right) = 1556.7$$

$$v_2^* = \frac{1}{2\rho} \left( \varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho} \right) = 1.7583 \times 10^8$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v=\frac{1}{2\rho}(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = -0.20432$ , local asintóticamente estable

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v=\frac{1}{2\rho}(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = 1.8089 \times 10^{-6}$ , inestable

Los puntos de equilibrio en caso de  $T=25$  se dan en:

$$v_1^* = \frac{1}{2\rho}(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho}) = 1254.7$$

$$v_2^* = \frac{1}{2\rho}(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho}) = 2.9917 \times 10^7$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v=\frac{1}{2\rho}(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = -0.16707$ , local asintóticamente estable

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v=\frac{1}{2\rho}(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = 7.0069 \times 10^{-6}$  inestable

Los puntos de equilibrio en caso de  $T=35$  se dan en:

$$v_1^* = \frac{1}{2\rho}(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho}) = 1084.8$$

$$v_2^* = \frac{1}{2\rho}(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho}) = 5948.9$$

La matriz Jacobiana demuestra lo siguiente:

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v=\frac{1}{2\rho}(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = -0.25203$ , local asintóticamente estable

$$J = \left[ \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right] = \left[ T\rho - \frac{T}{v^2} \sigma \right]_{v=\frac{1}{2\rho}(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\rho})}$$

$\lambda = 4.5958 \times 10^{-6}$ , inestable

En la **Tabla 23** se muestran los resultados obtenidos en el cálculo de los puntos de equilibrio para cada uno de las diferentes temperaturas y se muestran los valores de la matriz jacobiana con respecto a la viscosidad en la muestra.

**Tabla 23** Valores obtenidos de los puntos de equilibrio para Viscosidad. Se observa que el punto  $v_1^*$  para cada temperatura es local asintóticamente estable, mientras que  $v_2^*$  es inestable.

Temperatura	puntos de equilibrio		Matriz jacobiana	
	$v_1^*$	$v_2^*$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
5°C	$v_1^* = 1515.7$	$v_2^* = 2175.2$	$\lambda_1 = -0.28037$	$\lambda_2 = 0.19536$
15°C	$v_1^* = 1556.7$	$v_2^* = 1.7583 \times 10^8$	$\lambda_1 = -0.20432$	$\lambda_2 = 1.8089 \times 10^{-6}$
25°C	$v_1^* = 1254.7$	$v_2^* = 2.9917 \times 10^7$	$\lambda_1 = -0.16707$	$7.0069 \times 10^{-6}$
35°C	$v_1^* = 1084.8$	$v_2^* = 5948.9$	$\lambda_1 = -0.25203$	$\lambda_2 = 4.5958 \times 10^{-6}$

### 3.5 Especificaciones para la vida de anaquel de acuerdo a las normas mexicanas

Las características del yogur dependen de las especificaciones según las normas de calidad del yogur. Para el yogur natural proteínas de la leche 1.2% m/m min 3.1% m/m, de grasa butírica máx. 7, acidez titulable expresada como porcentaje de láctico (% m/m) min 0.5 y los sólidos lácteos 8.25.

*Las características microbiológicas que debe de cumplir es la suma de Streptococcus thermophilus y Lactobacillus delbrueckii con un mínimo de 107 UFC/g. Estos microorganismos deben de permanecer viables, activos y abundantes hasta la fecha de caducidad. El valor general de la acidez en el yogurt debe de ser aproximado de 0.9 a 10%. Dentro de estas características debe contener también ciertas especificaciones que se muestran en las **Tabla 24** y*



**Tabla 25.**

**Tabla 24. Características microbiológicas.**

Parámetros	Limite ufc/g
Aerobios mesófilos	$1.0 \times 10^7$
Coliformes totales	$<1.0 \times 10$
Coliformes fecales	Ausentes
Recuentos de hongos	$<0.5 \times 10$
Recuentos de levaduras	$<5.0 \times 10$
<i>Salmonella ssp</i>	Ausente
<i>Listeria monocytogenes</i>	Ausente
Prueba Fosfatasa	Negativo
Parámetros	Limite ufc/g
Aerobios mesófilos	$1.0 \times 10^7$

**Tabla 25. Especificaciones del yogur.**

Parámetros	Límite de valores
Agua	84.1
Grasa	1.5 - 3
Proteína cruda	4.0 – 4.6
Minerales	0.9
Carbohidratos	9.2
Fibra cruda	0.3
Sólidos totales	15.9
Sólidos no grasos	8.25 – 14.4
Acidez	90 – 110
pH	4.3 – 4.5

### **3.6 Cálculo de Valor medio y modelo de Arrhenius para biomasa**

A continuación, se muestra los resultados obtenidos por medio del análisis de los modelos de predicción de vida de anaquel como el modelo Q10 y la Ecuación del modelo Arrhenius, para cada uno de los parámetros como biomasa, viscosidad y acidez en las diferentes temperaturas que se sometieron cada una de las muestras.

En la **Tabla 26**, se muestran los resultados de los días estimados de la duración de la vida de anaquel para la biomasa, la

**Tabla 27** muestra los datos obtenidos calculados para la acidez y finalmente en la **Tabla 28** nos muestra el tiempo estimado calculado por los métodos en el tiempo de vida de anaquel de viscosidad.

**Tabla 26. Valores obtenidos por Q10 y Arrhenius para vida de anaquel respecto a biomasa.**

Modelo	5°C	15°C	25°C	35°C
Q <sub>10</sub>	258 días	84.2 días	50.4 días	35.2 días
Modelo de Arrhenius	154.5 días	131.8 días	81.8 días	27.9 días
F(x)	35 días	30 días	12 días	9 días

**Tabla 27. Valores obtenidos por Q10 y Arrhenius para vida de anaquel respecto a acidez.**

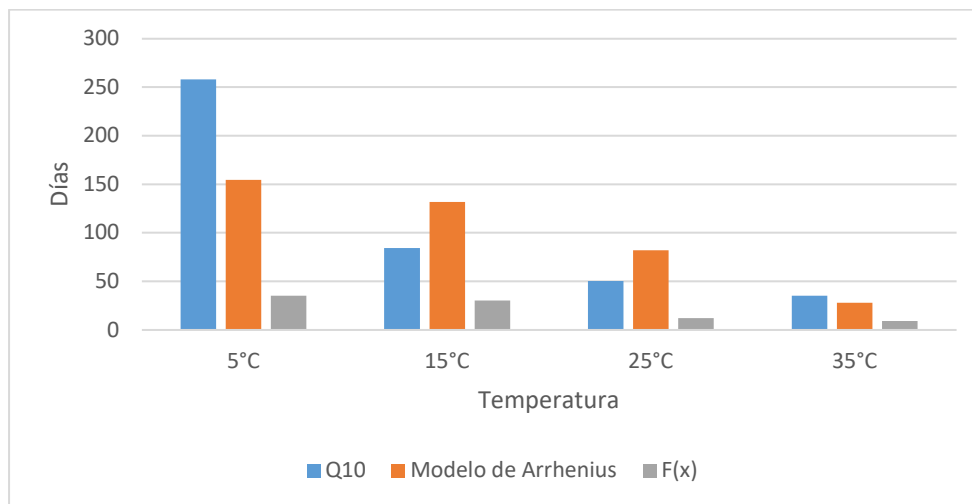
Modelo	5°C	15°C	25°C	35°C
Q <sub>10</sub>	561 días	187 días	112.2 días	80.1 días
Modelo de Arrhenius	509.4 días	117.5 días	85.4 días	63.7 días
F(x)	41.18 días	17.117 días	4.209 días	0.414 días

**Tabla 28. Valores obtenidos por Q10 y Arrhenius para vida de anaquel respecto a Viscosidad.**

Modelo	5°C	15°C	25°C	35°C
Q <sub>10</sub>	81 días	27 días	16.2 días	11.5 días
Modelo de Arrhenius	26.19 días	24.68 días	25.9 días	25 días
F(x)	16.3 días	18.8 días	20.3 días	4 días

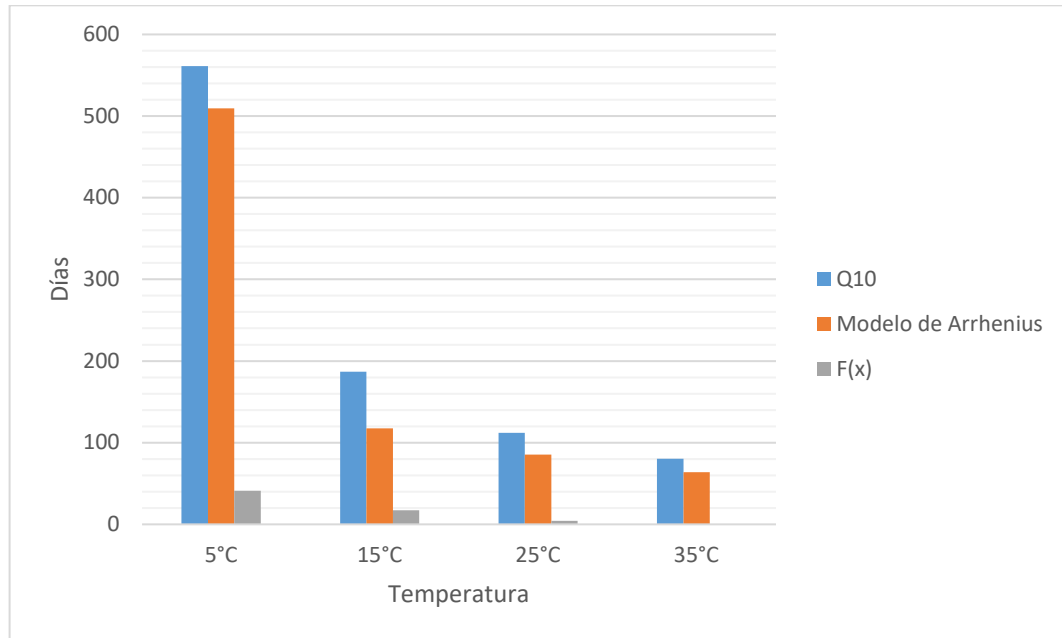
Según lo establecido por las normas un yogur en buen estado es aquel que cumple con todas las características que se establecen en esta, por lo cual al ir transcurriendo el tiempo de la vida de anaquel los parámetros de cada una de las muestras a las diferentes temperaturas se van alterando, por lo que debido a los cambios de temperatura a los que se encuentra expuesto el producto o cambios en las características microbiológicas este disminuye su vida de anaquel. En la evaluación de cada uno de los parámetros como podemos ver en las **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** a **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

En la gráfica de la Figura 22 se observa el comportamiento de la Biomasa en los diferentes métodos de evaluación, partiendo de los resultados de Q10 los cuales llegan a dar un resultado de vida de anaquel de 258 días y el valor mínimo a 35.2 días, continuando con la comparación del método de Arrhenius se observa que a los 5°C e tiempo de vida será de 154.5 días como valor máximo y como valor mínimo a 35°C de 27.9 días valorando esto se puede observar que entre más alta temperatura las Biomasa disminuye y por final vemos el resultado por medio de las funciones determinas en este articulo a 5°C tendrá una vida de anaquel de 35 dias y a 9 días a 35°C.



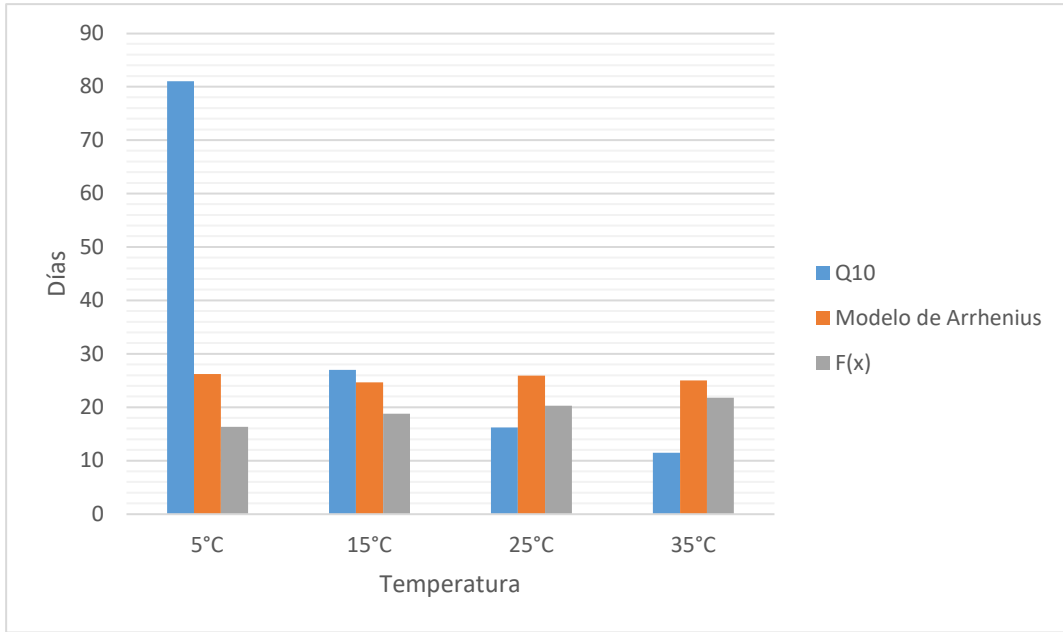
**Figura 22. Modelos de predicción de vida de anaquel en Biomasa.**

En la gráfica de la Figura 23 se observa el comportamiento de la Acidez por los diferentes métodos de predicción de vida de anaquel por medio del método de Q10 en el que podemos observar que es el método por el cual se mantiene mayor tiempo de vida de anaquel dependiendo de la temperatura a la cual este sea sometida, seguimos por el método de Arrhenius que es el método en el cual el intervalo de tiempo de vida de anaquel a 5°C es de 509.4 días y hasta que se somete a 35°C su vida de anaquel disminuye hasta los 63.7 días y por ultimo podemos observar los resultados obtenido por medio de la EDO determinada en este artículo a 5°C tendrá una vida de anaquel de 41.18 días y a 9 días a 35°C.



**Figura 23. Modelos de predicción de vida de anaquel en Acidez.**

En la gráfica de la Figura 24 se observa el comportamiento de la Viscosidad por los diferentes métodos de predicción de vida de anaquel como el método de Q10, el método de Arrhenius y por la EDO, los resultados obtenidos por el Q10 son intervalos de tiempo grandes dependiendo de la temperatura a la cual se someten para la temperatura de 5°C se da una vida de anaquel de 81 días y la vida de anaquel para 35°C es de a 11.5 días, haciendo los cálculos para el método de Arrhenius tenemos que la vida de anaquel a los 5°C es de 26.19 días y para los 35°C de 25 días valorando esto se debe a que en por este tipo de método no tomo en cuenta todas las características de cada una de las muestras, y en los resultados obtenidos en la EDO se observa que la vida de anaquel disminuye de manera diferente por la temperatura a la cual esta es sometida a 5°C tendrá una vida de anaquel de 16.3 días y a 35°C de 21.8 días.



**Figura 24. Modelos de predicción de vida de anaquel en Viscosidad.**

## 4 Conclusiones

Ya que se desperdician grandes cantidades en productos lácteos caducados, la industria requiere procesos que le permitan reducir los desechos de yogur a través de la mejora de la calidad y de la extensión de la vida útil de este. A pesar de que existen diversos métodos estadísticos basados en la velocidad de reacción química para determinar la vida de anaquel del yogur estos proporcionan valores distintos para el mismo producto, por lo que es necesario un modelo matemático por medio de EDOs que permita determinar el tiempo de la vida de anaquel, con base en sus propiedades fisicoquímicas y microbiológicas.

En el análisis de los datos de las propiedades biomasa, viscosidad y acidez de la muestra de un yogur citado en la literatura, se logró generar la base de datos, que permitió la generación de funciones temporales para estandarizar los datos a una frecuencia diaria a cuatro diferentes temperaturas. Posteriormente, se logró obtener una Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden para para cada una de las propiedades de la muestra 2 lo que permite realizar simulaciones a largo plazo de cada una de las propiedades y de esta forma determinar en qué momento el yogur llega al final de su vida de anaquel.

Esto demuestra que la EDO para cada una de las propiedades permite interpretar su variación a cuatro diferentes temperaturas y de esta forma determinar con base en los valores establecidos por la norma mexicana en que tiempo cada una de las propiedades está incumpliendo la normatividad establecida.

Los comportamientos que se muestran por medio de las EDOs de primer orden para biomasa, acidez y viscosidad, nos permiten que observar los cambios de manera más predecible de acuerdo a las normas mexicanas establecidas.

Las tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden obtenidas están en función de la temperatura de almacenamiento del producto. Por lo que, permiten analizar la dinámica en el cambio de cada una de las variables biomasa, viscosidad y acidez en función de una temperatura establecida. La EDO formulada para biomasa describe la dinámica en el cambio de concentración de esta y predice la fase estacionaria y la fase de muerte asociada a la inactivación de la actividad metabólica. La ecuación de acidez es una propiedad que se incrementa durante el tiempo de almacenamiento, este incremento se debe a la producción de ácido láctico por las mismas bacterias ácido lácticas presentes en el yogur. La ecuación de viscosidad muestra que esta propiedad es afectada por el aumento de acidez al destruirse las proteínas del yogur,

Se puede evidenciar que el yogur llega al final de su vida anaquel, por los valores establecidos por las normas mexicanas del yogur. Por lo tanto, se puede

concluir que mediante el modelizado el tiempo de la vida de anaquel de cada una de las muestras analizadas.

Por lo que se concluye que por medio del modelado matemático con las EDOs de primer orden permiten evaluar el comportamiento de cada una los parámetros fisicoquímicos y microbiológicos para las variables de biomasa, acidez y viscosidad, los cuales ayudaran a predecir el comportamiento durante el tiempo de la vida de anaquel del yogur a diferentes temperaturas.

Es importante mencionar que queda como caso abierto para futuras investigaciones, el poder encontrar una EDO de primer orden que permita describir la dinámica de la vida de anaquel como una relación de las diferentes variables en función de la temperatura.



## Referencias

- Alejandra, S., Salcedo, S., Paola, L., Vanegas, M., Castillo, M., Adolfo, R., & Huertas, P. (2018). *CARACTERÍSTICAS FÍSICOQUÍMICAS, SENSORIALES Y REOLÓGICAS DE UN YOGUR CON ALMÍBAR Y PÉTALOS DE ROSAS EN REFRIGERACIÓN* (Vol. 26, Issue 44).
- Ankenman. (1996). *VI. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS. 6.1 Caracterización de yogures comercial.*
- Antonio, V. T. P. (2020). Analisis de Sistemas Biológicos Biología de Sistemas. In *Instituto Tecnológico de Tijuana.*
- Baranyi, J., & Roberts, T. A. (1995). Mathematics of predictive food microbiology. *International Journal of Food Microbiology*, 26(2), 199–218. [https://doi.org/10.1016/0168-1605\(94\)00121-L](https://doi.org/10.1016/0168-1605(94)00121-L)
- Barbano, D. M., Ma, Y., & Santos, M. V. (2006). Influence of raw milk quality on fluid milk shelf life. *Journal of Dairy Science*, 89 Suppl 1, E15–E19. [https://doi.org/10.3168/jds.s0022-0302\(06\)72360-8](https://doi.org/10.3168/jds.s0022-0302(06)72360-8)
- Candelaria Martínez, B., Rosado, O. R., Gallardo López, F., Pérez Hernández, P., Becerra, M., & Vargas Villamil, L. (2011). REVISIÓN [REVIEW] APLICACIÓN DE MODELOS DE SIMULACIÓN EN EL ESTUDIO Y PLANIFICACIÓN DE LA AGRICULTURA, UNA REVISIÓN [APPLICATION OF SIMULATION MODELS IN AGRICULTURAL RESEARCH AND PLANNING, A REVIEW]. In *Tropical and Subtropical Agroecosystems* (Vol. 14).
- Carlos, J., Morales, C., & Uribe, S. (n.d.). *INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS MIXTOS.*
- Chr. Hansen. (2020). *Reducing food waste with nature's own resources.*
- NORMA OFICIAL MEXICANA NOM-181-SCFI-2010. (2010). NORMA Oficial Mexicana NOM-181-SCFI-2010, Yogurt-Denominación, especificaciones fisicoquímicas y microbiológicas, información comercial y métodos de prueba. *NOM-181-SCFI-2010*, 1–8.
- CODEX. (1999). Norma General Del Codex Stan 193-1995, Para Los Contaminantes Y Las Toxinas Presentes En Los Alimentos Y Piensos. *Codex Stan 193\_1995*, 1–48.

- Cruz, A. G., Walter, E. H. M., Cadena, R. S., Faria, J. A. F., Bolini, H. M. A., Pinheiro, H. P., & Sant'Ana, A. S. (2010). Survival analysis methodology to predict the shelf-life of probiotic flavored yogurt. *Food Research International*, 43(5), 1444–1448. <https://doi.org/10.1016/j.foodres.2010.04.028>
- Diéguez, A. (2013). The explanatory function of models in biology. *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía: Suplemento*, 18, 41–54.
- Garre, A., Larrosa, E., & Fernandez, P. S. (2016). Modelos matemáticos para la descripción del crecimiento de microorganismos patógenos en alimentos Modelos microbiano de. *Anuario de Jóvenes Investigadores*, 9, 160–163. <http://repositorio.upct.es/bitstream/handle/10317/5909/mmd.pdf?sequence=1>
- Gougouli, M., Kalantzi, K., Beletsiotis, E., & Koutsoumanis, K. P. (2011). Development and application of predictive models for fungal growth as tools to improve quality control in yogurt production. *Food Microbiology*, 28(8), 1453–1462. <https://doi.org/10.1016/j.fm.2011.07.006>
- Hamish Forbes (WRAP), T. Q. (WRAP) y C. O. (Programa de las N. U. para el M. A. (2021). *FOOD WASTE INDEX REPORT 2021*.
- Ibarra, A., Acha, R., Calleja, M. T., Chiralt-Boix, A., & Wittig, E. (2012). Optimization and shelf life of a low-lactose yogurt with *Lactobacillus rhamnosus* HN001. *Journal of Dairy Science*, 95(7), 3536–3548. <https://doi.org/10.3168/jds.2011-5050>
- Kurnia, D. (2017). Опыт аудита обеспечения качества и безопасности медицинской деятельности в медицинской организации по разделу «Эпидемиологическая безопасность» No Title. *Вестник Росздравнадзора*, 4, 9–15.
- López, C., Carlos, J., Bauset, R., Vicente, J., Ferragud, R., Dolores, M., Micó, V., & Jacinto, R. (n.d.). *Modelos continuos de crecimiento: del modelo exponencial al modelo logístico* Apellidos, nombre.
- Lopez-Orellana, R., Redmond, J., & Cortés-García, D. (2019). An inferential and dynamic approach to modeling and understanding in biology. In *Revista de Humanidades de Valparaíso* (Issue 14, pp. 315–334). University of Valparaíso. <https://doi.org/10.22370/rhv2019iss14pp315-334>
- Luz Yolanda Toro Suarez. (2015). *Canilec Estadísticas Del Sector Lácteo 2010-2018*. 1–27.

Martínez, S. (2016). Evaluación de la viscosidad y el color del yogurt batido con adición de goma de Tara (*Caesalpinia spinosa*) como estabilizante a diferentes concentraciones. *Universidad Nacional José María Arguedas Facultad De Ingeniería*.

Mataragas, M., Dimitriou, V., Skandamis, P. N., & Drosinos, E. H. (2011). Quantifying the spoilage and shelf-life of yoghurt with fruits. *Food Microbiology*, 28(3), 611–616. <https://doi.org/10.1016/j.fm.2010.11.009>

*Matemáticas para negocios 45 2. Modelos de optimización.* (n.d.).

Nikmaram, P., Mousavi, S. M., Kiani, H., Emamdjomeh, Z., Razavi, S. H., & Mousavi, Z. (2016). Modeling the Effect of Inulin, pH and Storage Time on the Viability of Selected *Lactobacillus* in a Probiotic Fruity Yogurt Drink Using the Monte Carlo Simulation. *Journal of Food Quality*, 39(4), 362–369. <https://doi.org/10.1111/jfq.12202>

Paulo Vieira, C., Pereira da Costa, M., da Silva Frasso, B., de Melo Silva, V. L., Vilela de Barros Pinto Moreira, R., Chifarelli de Oliveira Nunes, Y. E., & Conte-Junior, C. A. (2019). Nondestructive prediction of the overall quality of cow milk yogurt by correlating a biogenic amine index with traditional quality parameters using validated nonlinear models. *Journal of Food Composition and Analysis*, 84(September). <https://doi.org/10.1016/j.jfca.2019.103328>

R. Sanchez, F. Cerron, J. Canchuricra, M. A. (2013). *Vida útil del yogur bionatural usando el metodo del valor Q10 y analisis de supervivencia.* 1–9.

Rodríguez-Bernal, J. M., Serna-Jiménez, J. A., Uribe-Bohórquez, M. A., Klotz, B., & Quintanilla-Carvajal, M. X. (2014a). Application of response surface methodology to evaluate the effect of the concentration of sugar and commercial starters on the fermentation kinetics of yogurt. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 13(1), 213–225.

Rodríguez-Bernal, J. M., Serna-Jiménez, J. A., Uribe-Bohórquez, M. A., Klotz, B., & Quintanilla-Carvajal, M. X. (2014b). Application of response surface methodology to evaluate the effect of the concentration of sugar and commercial starters on the fermentation kinetics of yogurt. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 13(1), 213–225.

Royero, J. (n.d.). *MODELO DE CONTROL DE GESTIÓN PARA SISTEMAS DE INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIOS.*

- Sandra, L., & Noguera, R. (2007). Comparación de modelos matemáticos: una aplicación en la evaluación de alimentos para animales. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, 20, 141–148.
- Sarkar, S. (2006). Shelf-life extension of cultured milk products. *Nutrition and Food Science*, 36(1), 24–31. <https://doi.org/10.1108/00346650610642160>
- Schlabit, C., Gennari, A., De Mello Araújo, A. L., Bald, J. A., De Souza, C. F. V., & Hoehne, L. (2015). Shelf life of a synbiotic fermented dairy beverage using ricotta cheese whey. *American Journal of Food Technology*, 10(6), 254–264. <https://doi.org/10.3923/ajft.2015.254.264>
- Sofu, A., & Ekinci, F. Y. (2007). Estimation of storage time of yogurt with artificial neural network modeling. *Journal of Dairy Science*, 90(7), 3118–3125. <https://doi.org/10.3168/jds.2006-591>
- Tavakoli, M., Habibi Najafi, M. B., & Mohebbi, M. (2019). Effect of the milk fat content and starter culture selection on proteolysis and antioxidant activity of probiotic yogurt. *Heliyon*, 5(2). <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e01204>
- Vilares, J. (n.d.). *El modelo probabilístico: características y modelos derivados The probabilistic model. Characteristics and models bases in it.*
- Zhi, N. N., Zong, K., Thakur, K., Qu, J., Shi, J. J., Yang, J. L., Yao, J., & Wei, Z. J. (2018). Desarrollo de un modelo de predicción dinámico para evaluar el tiempo de almacenamiento de yogurt empleando parámetros fisicoquímicos, microbiológicos y sensoriales. *CYTA - Journal of Food*, 16(1), 42–49. <https://doi.org/10.1080/19476337.2017.1336572>