

Instituto Tecnológico de Tlalnepantla

Tlalnepantla de Baz, Estado de México, **2/Diciembre/2022**  
OFICIO DEPI 394/12/2022

**ASUNTO:** Autorización de impresión de tesis

**C. AXEL HERROZ HERRERA**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA**  
**PRESENTE**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Planificación Inteligente de Trayectorias en Entornos Dinámicos para un Robot Móvil Diferencial”** ha informado a esta Jefatura que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le **autoriza que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.**

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica*  
*“Por la Realización Tecnológica de mi Pueblo”*



**M. C. MIGUEL A. PAREDES RUEDA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

C.p. Dr. Oscar A. Gómez Vargas. - Presidente del Consejo de Posgrado  
Estudiante  
Expediente



**Unidad Centro:** Av. Instituto Tecnológico S/N, Col. La Comunidad. C.P. 54070 Tlalnepantla de Baz, Estado de México. Tel. 55 5565 3261 / 55 5290 0209.

**Unidad Oriente:** Av. Hermilo Mena S/N, Col. Lázaro Cárdenas La Presa. C.P. 54187 Tlalnepantla de Baz, Estado de México. Tel. 55 2065 4957  
tecnm.mx | tlalnepantla.tecnm.mx



Tlalnepantla de Baz, Edo. de México., a 30/noviembre/2022

OFICIO No.390 /11/2022

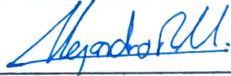
**Asunto: Aceptación de tesis**

**M.C. MIGUEL ÁNGEL PAREDES RUEDA**  
**JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**  
**PRESENTE**

Por este conducto, los integrantes del Comité Tutorial del C. **AXEL HERROZ HERRERA**, con número de control **M11251223**, de la **Maestría en Ciencias de la Ingeniería**, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "**PLANIFICACIÓN INTELIGENTE DE TRAYECTORIAS EN ENTORNOS DINÁMICOS PARA UN ROBOT MÓVIL DIFERENCIAL**" y observamos que se han realizado todas las correcciones que le fueron indicadas, por lo que acordamos aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica-*  
*"Por la Realización Tecnológica de mi Pueblo"*

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Alejandro Rodríguez Molina  
DOCENTE DE LA DEPI  
(Ced. 11934068)

**CODIRECTOR DE TESIS**

Dr. Manuel Sabino Lazo Cortés  
DOCENTE DE LA DEPI  
(Ced. 12858318)

**REVISOR 1**

M.C. Rodolfo Velázquez Mancilla  
DOCENTE DE LA DEPI  
(Ced. 2493379)

C.p. Dr. Óscar Armando Gómez Vargas. - Presidente del Consejo de Posgrado  
Estudiante  
Expediente





---

---

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TLALNEPANTLA**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“PLANIFICACIÓN INTELIGENTE DE TRAYECTORIAS EN ENTORNOS  
DINÁMICOS PARA UN ROBOT MÓVIL DIFERENCIAL”**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA**

**PRESENTA:**

**ING. AXEL HERROZ HERRERA**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ MOLINA**

**CODIRECTOR: DR. MANUEL SABINO LAZO CORTÉS**

**TLALNEPANTLA DE BAZ, ESTADO DE MÉXICO, A 25 DE NOVIEMBRE DEL 2022.**





# Agradecimientos

## **A mis familiares**

Por brindarme su apoyo incondicional.

## **A mi novia**

Elisa por su Amor y lealtad.

## **A mi asesor**

El doctor Alejandro Rodríguez Molina por sus enseñanzas, apoyo y consejos.

## **AI ITTLA**

Por ser la institución donde me he sentido como en casa durante mi etapa universitaria y de posgrado.

## **AI CONACYT**

Por el apoyo financiero para poder llevar a cabo los estudios de maestría.

## **A mis profesores de posgrado**

Por compartir sus conocimientos.



# Resumen

Actualmente, los robots móviles de tracción diferencial gozan de una gran y creciente importancia en el desarrollo de una amplia gama de actividades. Su uso se puede constatar a través de aplicaciones como el transporte de pasajeros y mercancías en áreas predefinidas, la inspección o vigilancia de espacios, rehabilitación o soporte al movimiento humano, entre muchas otras. Para varias de estas aplicaciones, se requiere que los robots móviles trabajen en escenarios de operación que contienen actores dinámicos (e.g., otros vehículos, objetos, personas y animales). En este contexto, la planificación de trayectorias es una actividad indispensable, ya que permite a los robots móviles desplazarse de un lugar a otro de manera segura con el menor costo posible.

La planificación de trayectorias es un tema que se encuentra bien documentado para escenarios de operación estáticos, i.e., espacios en donde los actores no cambian su configuración al paso del tiempo. Sin embargo, cuando se presentan entornos dinámicos, la investigación está limitada considerablemente, debido a la complejidad y el costo que involucra la replanificación continua de los movimientos del robot para evadir obstáculos dinámicos. Este trabajo de tesis propone un nuevo método simple, confiable y de costo asequible para planificar trayectorias seguras y optimizadas para robots móviles diferenciales que operan en escenarios dinámicos.

El método propuesto se basa en la reoptimización periódica de los parámetros de un planificador de trayectorias determinista del estado del arte (Bug0) a través de un algoritmo metaheurístico (Evolución Diferencial). Los resultados obtenidos en simulación muestran la efectividad de la propuesta.





# Abstract

Today, differential drive mobile robots are of great and growing importance in the development of many activities. Their use can be seen through applications such as the transport of passengers and goods in a predefined area, the inspection or surveillance of spaces, rehabilitation or support of human movement, among many others. For various of these applications, mobile robots are required to work in operating scenarios that contain dynamic actors (e.g., other vehicles, objects, people and animals). In this context, trajectory planning is an essential activity, as it allows mobile robots to move from one place to another safely and at the lowest possible cost.

Trajectory planning is a topic that is well documented for static operation scenarios, i.e., spaces where the actors do not change their configuration over time. However, when dynamic environments are encountered, research is considerably limited due to the complexity and high cost involved in continuously replanning the robot's movements to avoid dynamic obstacles. This thesis work proposes a new simple, reliable and affordable method to plan safe and optimized trajectories for differential mobile robots operating in dynamic scenarios.

The proposed method is based on the periodic reoptimization of the parameters of a state-of-the-art deterministic trajectory planner (Bug0) through a metaheuristic algorithm (Differential Evolution). Simulation results show the effectiveness of the proposal.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>20</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	21
1.2. Estado del arte . . . . .	22
1.3. Objetivo General . . . . .	27
1.4. Objetivos específicos . . . . .	27
1.5. Justificación . . . . .	27
1.6. Alcance y limitaciones . . . . .	28
<b>2. Marco teórico</b>	<b>29</b>
2.1. Robótica móvil y control . . . . .	30
2.1.1. Robots y robótica . . . . .	30

2.2. Fundamentos de robots móviles . . . . .	31
2.2.1. El problema del seguimiento de trayectorias . . . . .	33
2.2.2. Control . . . . .	34
2.3. Optimización metaheurística . . . . .	35
2.3.1. Optimización y optimización en ingeniería . . . . .	36
2.3.2. Optimizadores . . . . .	36
2.3.3. Metaheurísticas . . . . .	37
2.4. Optimización metaheurística y planificación de trayectorias en espacios dinámicos para robots móviles . . . . .	38

**3. Desarrollo de la propuesta** **41**

3.1. El robot móvil diferencial . . . . .	42
3.1.1. Estudio cinemático del robot móvil diferencial . . . . .	43
3.1.2. Simulación cinemática del robot móvil diferencial . . . . .	48
3.1.3. Estudio dinámico del robot móvil diferencial . . . . .	54
3.1.4. Simulación dinámica del robot móvil diferencial . . . . .	71
3.2. Planificación de trayectorias para el robot móvil diferencial . . . . .	76

3.2.1. Algoritmos de tipo Bug . . . . .	77
3.2.2. Algoritmo Bug0 . . . . .	77
3.3. Problema de optimización . . . . .	80
3.3.1. Variables de diseño . . . . .	81
3.3.2. Función objetivo . . . . .	82
3.3.3. Restricciones . . . . .	83
3.4. Evolución diferencial . . . . .	83
3.5. Planificador de trayectoria Propuesto . . . . .	87
<b>4. Resultados y discusión</b>	<b>89</b>
4.1. Características de los experimentos . . . . .	90
4.1.1. El escenario . . . . .	90
4.1.2. El vehículo . . . . .	90
4.1.3. Configuraciones inicial y final . . . . .	91
4.1.4. Los obstáculos móviles . . . . .	91
4.1.5. El problema de la optimización . . . . .	92

4.1.6. La metaheurística . . . . .	92
4.2. Resultados y discusión . . . . .	93
<b>5. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>103</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	104
5.2. Trabajo a futuro . . . . .	105

# Índice de figuras

2.1. Sistema de control en lazo abierto. . . . .	34
2.2. Sistema de control en lazo cerrado. . . . .	35
3.1. Robot móvil diferencial JetBot de NVIDIA y Waveshare. . . . .	42
3.2. Coordenadas generalizadas. . . . .	43
3.3. Esquema cinemático del robot. . . . .	44
3.4. Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda gira hacia adelante y la rueda derecha está detenida. . . . .	51
3.5. Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran hacia adelante a la misma velocidad. . . . .	52
3.6. Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran hacia adelante a velocidades diferentes. . . . .	52

3.7. Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran a la misma velocidad, pero en direcciones opuestas. . . . .	53
3.8. Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran a diferente velocidad y en direcciones opuestas. . . . .	53
3.9. Esquema dinámico del robot móvil diferencial. . . . .	54
3.10. Esquema de restricciones de movimiento del robot móvil diferencial. . . . .	59
3.11. Comportamiento del robot móvil cuando la rueda genera un par hacia adelante y la rueda derecha está detenida. . . . .	73
3.12. Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha producen el mismo par en la misma dirección. . . . .	74
3.13. Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran en la misma dirección con diferente torque. . . . .	74
3.14. Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran con el mismo torque, pero en sentidos opuestos. . . . .	75
3.15. Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha generan torques distintos en sentidos opuestos. . . . .	75
4.1. Escenario de la simulación. . . . .	90
4.2. Dimensiones del robot móvil diferencial. . . . .	91



4.3. Comportamiento del planificador de trayectorias propuesto para una ejecución arbitraria. Se muestra el escenario completo cada 1.5 (s). . . . .	96
4.4. Comportamiento del planificador de trayectorias Bug0 con evasión a la izquierda. Se muestra el escenario completo cada 1.5 (s). . . . .	100
4.5. Comportamiento del planificador de trayectorias Bug0 con evasión a la derecha. Se muestra el escenario completo cada 1.5 (s). . . . .	101

# Índice de tablas

4.1. Resultados del planificador de trayectorias propuesto. . . . .	95
4.2. Resultados del planificador de trayectorias Bug0 con ganancias de control constantes y giro de evasión de obstáculos siempre a la derecha. . . . .	98
4.3. Resultados del planificador de trayectorias Bug0 con ganancias de control constantes y giro de evasión de obstáculos siempre a la izquierda. . . . .	99



## **Capítulo 1**

# **Introducción**

## 1.1. Planteamiento del problema

El interés por los robots móviles de tracción diferencial crece día con día debido a que su uso se ha hecho cada vez más común en distintas aplicaciones como el transporte de pasajeros y mercancías dentro de áreas predefinidas (rutas de transporte, grandes almacenes, centros de distribución y naves industriales), vigilancia y monitoreo (e.g., para supervisar fronteras, regiones restringidas, y áreas de flora y fauna protegidas), rehabilitación y soporte de movimiento humano (e.g., sillas de ruedas y aparatos para terapia de movimiento), entre muchos otros ejemplos.

Para lograr que un robot móvil cumpla satisfactoriamente con el objetivo para el que fue concebido, es necesario que este reciba las instrucciones precisas para moverse entre dos configuraciones determinadas (e.g., dos ubicaciones distintas en un espacio de trabajo) de forma segura (i.e., evitando configuraciones riesgosas o colisiones con otros elementos en su área de operación) con el menor costo posible (e.g., consumiendo poca energía, realizando movimientos rápidos o recorriendo distancias cortas). Lo anterior, se conoce como tarea de planificación de trayectorias.

La complejidad en la tarea de planificación de trayectorias para robots móviles depende de factores como el tamaño del escenario, la cantidad de actores y su distribución en el mismo (e.g., otros vehículos o robots, zonas de riesgo, objetos, personas o animales) y del comportamiento (cinemático o dinámico) del robot y de los actores (e.g., el comportamiento de un automóvil con arquitectura Ackerman es más complejo que el de una motocicleta).

Cuando los actores u obstáculos dentro del escenario de operación de un robot móvil son estáticos, i.e., cuando se encuentran siempre en el mismo lugar y con la misma configuración, el planificador puede generar una trayectoria segura que los evada justo antes de que el robot comience a moverse. Debido a esto, la planificación de trayectorias es un tema que se encuentra bien documentado para ambientes estáticos. Sin embargo, en la actualidad es poco probable encontrar escenarios que tengan exclusivamente actores estáticos. En la mayoría de los ambientes reales hay actores dinámicos que coexisten en el mismo entorno.

Por otro lado, cuando los actores u obstáculos dentro del escenario de operación de un robot móvil son dinámicos, i.e., cuando cambian continuamente su lugar o configuración, la planificación de trayectorias se vuelve muy compleja. En este sentido, el planificador debe generar una nueva trayectoria mientras el robot se mueve, y debe hacerlo tan rápido como se detecte un cambio en escenario para el cual obtuvo la trayectoria anterior. De esta forma, el vehículo puede evitar el contacto directo o colisiones con elementos en movimiento que pueden interferir en la realización de su tarea. Por supuesto, esta replanificación implica un costo elevado.

Además de la evasión de actores estáticos y dinámicos en el entorno de operación, el planificador de trayectorias se enfrenta al problema de la eficiencia energética de los robots móviles. Por su propia naturaleza, los robots móviles cuentan con una batería a bordo que les permite lograr su autonomía (i.e., la realización de sus tareas con poca o nula intervención humana), la cual, es normalmente de capacidad y duración relativamente reducida. En este sentido, se requiere que los planificadores de trayectorias generen caminos optimizados que procuren el desplazamiento eficiente de los robots.

Las formulaciones actuales que logran la optimización en la planificación de trayectorias libres de colisiones para robots móviles en escenarios que incluyen objetos dinámicos, son complejas y requieren de una elevada carga computacional, lo cual, también repercute en la habilidad que tienen los planificadores actuales para garantizar la seguridad y la eficiencia energética en los robots.

El presente trabajo propone resolver los problemas anteriores a través de un planificador de trayectorias simple y optimizado, basado en la metaheurística de los parámetros de un método de planificación determinista del estado del arte para un robot móvil diferencial que opera en entornos dinámicos. Estos problemas se detallan con mayor profundidad en los trabajos revisados en la siguiente sección.

## **1.2. Estado del arte**

La tecnología en el campo de la robótica móvil tiene problemas de alta complejidad aún sin resolver Bermudez et al. (2002). La mayoría de los proyectos desarrollados en materia de desplazamiento terres-

tre aún no resuelven el problema de la generación de trayectorias en entornos dinámicos no controlados de manera confiable. Lo anterior, conforma una gran área de oportunidad para la investigación en temas como programación, control, inteligencia artificial e instrumentación para afrontar los retos tecnológicos de dicho campo. Como parte del desarrollo de esta tesis se analizaron varios trabajos relacionados con este tema para visualizar las ideas con las que se han resuelto algunos planteamientos similares en la generación de trayectorias y evasión de obstáculos con robots móviles, que sirven como base para el avance en diversos campos de la industria aportando soluciones tecnológicas innovadoras orientadas al desarrollo de robots más eficientes y a la implementación de un amplio abanico de aplicaciones. Además, cabe mencionar que este campo de la investigación está desarrollándose de manera consistente y acelerada, ya que puede generar múltiples beneficios a la sociedad, e.g., mejoras en la automatización industrial, exploración espacial, desarrollo de vehículos autónomos, entre otros.

A continuación, se estudian algunos documentos y se analizan las problemáticas que resuelven, así como las ideas principales que aportan al campo de la planificación de trayectorias, con especial énfasis en los enfoques basados en optimización a través de metaheurísticas. De esta forma, se puede observar un panorama general sobre el historial técnico y científico en los temas de interés de este documento.

En el artículo (Le et al., 2019) se optimiza la distancia total del recorrido (y con esto el consumo energético) que realiza un robot móvil diferencial para limpiar un área fija. Existen puntos de referencia predefinidos y el problema de optimización (NP-hard) se establece para determinar la secuencia de puntos que debe visitar el robot. El problema se resuelve con técnicas metaheurísticas como el Algoritmo Genético (GA, por sus siglas en inglés), Optimización por Colonia de Hormigas (ACO, por sus siglas en inglés) y con algoritmos clásicos de optimización. Por otro lado, en el documento (Seder et al., 2017), se propone buscar la secuencia adecuada de estados de control que permite desarrollar una trayectoria factible (libre de colisiones) con un robot móvil. El problema se resuelven con una técnica basada en D-Estrella junto con la teoría de estabilidad de Lyapunov. También se analizaron artículos en donde se discretiza el espacio de trabajo para lograr una disminución en la información que debe procesarse durante la planificación de trayectorias. Un ejemplo de ellos se encuentra en (Mathew and Hiremath, 2016), en donde se utiliza un robot móvil diferencial para seguir un camino obtenido a través de un GA mejorado con un nuevo mecanismo de cruce. El trayecto se compone de una serie de puntos de control por los que debe pasar el robot para evitar colisiones con obstáculos, minimizando la distancia Euclidiana

del recorrido.

De acuerdo con una revisión profunda del estado del arte, es evidente que, en el campo de la planificación de trayectorias, hay una gran preferencia por el uso de algoritmos de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO, por sus siglas en inglés) para la búsqueda del recorrido óptimo. A continuación, se reseñan algunos ejemplos que incluyen a este método. En la investigación (Abdalla et al., 2017) se incluye la propuesta de un planificador de trayectorias para un robot móvil diferencial utilizando un Campo de Potencial Artificial (AFP, por sus siglas en inglés) junto con un Controlador Difuso (FLC, por sus siglas en inglés), ambos optimizados por el algoritmo PSO en entornos con obstáculos estáticos y dinámicos. El AFP indica las direcciones que debe seguir el robot con ayuda del FLC en cada momento. De igual manera, en (Lazarowska, 2020) se observa la planificación de trayectorias factibles (libres de colisiones) para un robot móvil que también está basada en un AFP. El espacio de trabajo se discretiza como una rejilla en la que cada celda tiene un potencial. Para guiar al vehículo, las celdas con un menor potencial son más atractivas y las de mayor potencial son menos deseables (estas celdas coinciden con obstáculos o regiones cercanas a ellos).

Muchos de los planificadores de trayectorias que pueden encontrarse en la literatura especializada realizan un análisis formal de la cinemática y dinámica de los robots móviles, e involucran aspectos de control, ya sea al momento de la planificación o durante el seguimiento de la trayectoria. Por ejemplo, en el artículo (Utami et al., 2019) se realiza una planificación de trayectorias para un robot móvil diferencial manualmente. En el mismo trabajo se detallan los aspectos físicos y de control que son necesarios para que el robot complete el seguimiento de estas trayectorias. En otro ejemplo, el trabajo en (Martinez-Soltero and Hernandez-Barragan, 2018) propone un método para encontrar secuencialmente los puntos locales de una trayectoria (puntos que va recorriendo el robot en su trayectoria desde una locación inicial hasta una final). Para esto se utiliza el algoritmo de Evolución Diferencial (DE, por sus siglas en inglés), el cual, en cada iteración, encuentra un nuevo punto factible que minimiza la distancia hasta un punto final. Por otro lado, en el documento (Haddad et al., 2007), se propone una planificación de trayectorias que maximiza la eficiencia del robot (en cuanto al tiempo del recorrido y su rendimiento energético) y que cumple con restricciones cinemáticas, dinámicas y geométricas. La solución al problema anterior se obtiene mediante el algoritmo metaheurístico de Recocido Simulado (SA, por sus siglas en inglés).



Además de los aspectos del planificador relacionados con la física del movimiento del robot móvil diferencial, hay trabajos que contemplan varios aspectos adicionales sobre la trayectoria. Algunos artículos que realizan un mayor énfasis en esta área se describen en seguida. La investigación en (Olewi et al., 2014) propone una hibridación entre un GA y la técnica de planificación A-Estrella para encontrar los segmentos de una trayectoria (en forma de curvas diferenciables definidas por partes mediante polinomios de segundo grado) para el robot móvil diferencial. Para esto se formula un problema de optimización que pondera cuatro objetivos, la distancia, el tiempo de recorrido, la suavidad y la seguridad de la trayectoria (con base en qué tan cerca pasa de los obstáculos). Así mismo, (Ayadi et al., 2018) presenta un estudio comparativo entre dos enfoques utilizados para el problema de planificación de trayectorias en robots diferenciales, establecido como uno de optimización. Los algoritmos de PSO y Levenberg Marquadt (LM) se utilizan para encontrar la secuencia de puntos de control (puntos intermedios entre el inicial y el final) que definen una trayectoria con distancia total mínima, y distancia máxima entre los puntos y los obstáculos (para evitar colisiones). Como resultado, LM es más rápido y sus trayectorias son más cercanas al óptimo, mientras que PSO encuentra trayectorias más suaves y lejanas a los obstáculos. Por su parte, el trabajo en (Castillo et al., 2007) utiliza un GA multiobjetivo para obtener trayectorias libres de obstáculos con un compromiso entre dos criterios, la distancia total y la dificultad del recorrido (con respecto a su paso por terrenos peligrosos). El GA propuesto incorpora conceptos de optimización de Pareto. El espacio de trabajo se discretiza como una rejilla, en donde cada celda se etiqueta de acuerdo a la facilidad con la que el robot móvil puede atravesarla. La trayectoria es una secuencia de movimientos a celdas adyacentes con sus respectivas distancias.

Se analizaron artículos que consideran este aspecto y proponen versiones mejoradas, híbridas o más eficientes para el desarrollo de experimentos físicos, considerando tiempos de ejecución razonables en hardware de precio asequible. Por ejemplo, en el artículo en (Garcia et al., 2009) se propone el uso de ACO para optimizar la trayectoria de un robot móvil acelerando la búsqueda hasta diez veces. Para esto, ACO utiliza una función de costo difusa que toma la distancia total del trayecto, así como la dificultad del recorrido considerando espacios de trabajo discretos. La propuesta es capaz de encontrar trayectorias en espacios estáticos y dinámicos. En el caso dinámico, la trayectoria se reoptimiza cada vez que se detecta un nuevo obstáculo en el entorno. Por otro lado, en el trabajo en (Li and Chou, 2018) se muestra una mejora de PSO para el ajuste de los puntos de control en la trayectoria de un robot móvil. Con este fin, se formula un problema de optimización de un objetivo que considera la suma ponderada de

tres criterios, la distancia total, la suavidad y el riesgo de colisión con obstáculos. Así mismo, en la investigación en (Tuba et al., 2018) se observa una versión mejorada del algoritmo de Optimización por Lluvia de Ideas (BSO, por sus siglas en inglés) que se utiliza en la planificación de trayectorias para robots móviles. BSO resuelve un problema de optimización que considera la distancia total del recorrido y se penaliza cuando existen colisiones. Otra versión mejorada de un algoritmo de optimización se observa en (Akka and Khaber, 2018), en donde se propone una variante más eficiente de ACO para optimizar la trayectoria de un robot móvil en escenarios estáticos. Las trayectorias generadas tienen una distancia mínima. Por otro lado, (Dewang et al., 2018) propone una mejora de PSO para optimizar la trayectoria de un robot móvil. PSO es capaz de generar los puntos que recorre el robot en cada iteración resolviendo un problema de optimización que considera la distancia hasta el punto objetivo y la separación con los obstáculos. Bajo este mismo esquema, el trabajo en (Hosseininejad and Dadkhah, 2019) muestra el uso del Algoritmo de Búsqueda del Cuco (CSA, por sus siglas en inglés) para planificar los puntos de las trayectorias que siguen los robots móviles en entornos dinámicos. El problema de optimización considera cuatro subfunciones relacionadas con la suavidad, la evasión de colisiones, la distancia total y la seguridad de la trayectoria. Finalmente, (Tang et al., 2016) ofrece un enfoque híbrido entre PSO y DE para resolver el problema de planificación de trayectorias para robots móviles diferenciales. El problema pretende minimizar un solo objetivo que considera la distancia total y la seguridad de la trayectoria. La trayectoria se compone por puntos consecutivos sobre líneas verticales de acción.

En el contexto de la robótica, en ocasiones es relevante considerar el campo de la optimización energética, por lo cual también se analizaron algunos artículos que están más orientados hacia esta dirección. En (Wang et al., 2018), el problema de planificación de trayectorias para robots móviles se aborda como uno de optimización multiobjetivo. El planteamiento anterior considera dos objetivos relacionados con la distancia de la trayectoria (lo cual se relaciona con el consumo energético) y la dificultad que tiene el robot para pasar por terrenos irregulares. La trayectoria se compone de una secuencia de puntos de control. Una versión multiobjetivo de PSO se utiliza para resolver el problema incorporando mecanismos para mejorar la convergencia y diversidad de soluciones. Dentro de este mismo enfoque de optimización energética al que se hace referencia en el artículo (Lamini et al., 2018), el cual introduce un nuevo operador de cruce en el GA para reducir los puntos que componen la trayectoria de los robots móviles. GA utiliza una función de costo que considera la distancia total, la energía consumida por el robot y la seguridad del trayecto.

### **1.3. Objetivo General**

Proponer un método de planificación simple y asequible para robots móviles diferenciales en espacios de trabajo dinámicos con base en optimización metaheurística para obtener trayectorias optimizadas factibles y confiables.

### **1.4. Objetivos específicos**

Para alcanzar el objetivo general anterior, se tienen los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar el comportamiento cinemático y dinámico de un robot móvil diferencial.
- Formular el problema de planificación de trayectorias en espacios de trabajo dinámicos como uno de optimización que considere la seguridad y el costo del trayecto.
- Resolver el problema de planificación de trayectorias con un optimizador metaheurístico.

### **1.5. Justificación**

El campo de estudio de los robots móviles de tracción diferencial en entornos dinámicos ha sido poco explorado debido a la complejidad matemática y computacional que implica el procesamiento funcional de los datos dinámicos del entorno. Por lo anterior, las investigaciones que se encuentran hoy en día en la literatura especializada abordan la tarea de planificación de rutas en espacios de trabajo estáticos y discretos que rara vez se observan en aplicaciones del mundo real. Debido a que actualmente el mercado tiene una mayor disponibilidad de equipos de cómputo eficientes a precios accesibles para poder realizar un mayor número de operaciones por segundo, el problema de planificación de trayectorias podría resolverse recurrentemente a través de técnicas de optimización metaheurística para manejar

problemas de planificación de trayectorias complejos en espacios de trabajo dinámicos y continuos. Lo anterior, permitiría reoptimizar repetidamente la trayectoria de un vehículo en un entorno con obstáculos en movimiento para llegar sin colisiones de un punto inicial a uno final. Por esto, un planificador de trayectorias simple, optimizado, factible y confiable, basado en optimización metaheurística, podría constituir un aporte significativo al estado del arte y sus posibles aplicaciones en distintos contextos podrían ser amplias, e.g., en el transporte de bienes de manera automatizada en áreas de trabajo concurridas y cambiantes.

## **1.6. Alcance y limitaciones**

El presente trabajo está enfocado a la planificación de trayectorias para el robot móvil de tracción diferencial. El planificador busca optimizar, a través de la metaheurística de Evolución Diferencial, los parámetros ajustables del algoritmo de planificación determinista Bug0 durante la ejecución de una tarea con el móvil, para brindarle la capacidad de evadir obstáculos y realizar el recorrido de manera eficiente. La efectividad del planificador se comprueba únicamente en simulación utilizando un escenario acotado con un total de siete obstáculos homogéneos con comportamientos dinámicos. Se asume que las trayectorias que desarrolla cada uno de los obstáculos dinámicos se puede estimar o identificar con el robot móvil.

## **Capítulo 2**

### **Marco teórico**

En este capítulo se abordarán algunos conceptos y definiciones fundamentales del contexto teórico de los robots móviles, la planificación de trayectorias y el control para su seguimiento.

## **2.1. Robótica móvil y control**

### **2.1.1. Robots y robótica**

La robótica es un área de la ingeniería que permite desarrollar soluciones a problemas industriales en donde se requiere realizar trabajos que son continuos y repetitivos mediante dispositivos robóticos automatizados (Hurtado et al., 2013). En este sentido, un robot es un sistema programable conformado de elementos rígidos que interactúan entre sí para realizar una tarea particular (Spong et al., 2006).

Cuando se habla de robots, generalmente se piensa en grandes brazos mecánicos automatizados utilizados para la manufactura y ensamble de productos, e.g., los utilizados en la fabricación de automóviles. Sin embargo, el concepto de robot es universal y abarca un espectro más amplio de dispositivos que pueden distinguirse entre sí por características particulares, una de estas es la movilidad.

De acuerdo con Zmud et al. (2013), la movilidad se define como la capacidad que tiene un objeto para trasladarse de un punto a otro en un espacio determinado. Entonces, los sistemas robóticos o robots móviles pueden definirse como dispositivos que no se encuentran fijos en un lugar y que pueden moverse dentro de un espacio determinado. Dependiendo del entorno de operación, los robots móviles pueden clasificarse en cuatro grupos principales:

- **Sistemas móviles terrestres:** Aquí se pueden encontrar varios tipos de plataformas ambulantes como vehículos con ruedas u orugas, robots con patas o robots que imitan algún tipo de locomoción humana o animal.
- **Sistemas móviles aéreos:** Este grupo está conformado por los sistemas robóticos que pueden desplazarse o volar dentro de un espacio aéreo determinado, e.g., aviones de ala fija, vehículos

impulsados por hélices o dirigibles.

- Sistemas móviles acuáticos y subacuáticos: En este grupo encontramos diferentes tipos de vehículos que navegan sobre o dentro del agua, e.g., barcos, submarinos, torpedos o deslizadores acuáticos.
- Sistemas móviles híbridos: Este grupo incluye a los vehículos que tienen la capacidad de desplazarse en dos o más de los tres medios anteriores.

## 2.2. Fundamentos de robots móviles

Sin importar su tipo, cualquier sistema o robot móvil se puede controlar de dos formas:

1. Autónoma: No depende del control humano, es decir, las acciones que realiza el vehículo están previamente programadas en una computadora o microcontrolador.
2. No autónoma: Depende del control humano, es decir, un operador humano le indica al vehículo las acciones que debe realizar, ya sea como tripulante del mismo o desde una estación de control remota.

Cuando los sistemas móviles son autónomos, Klancar et al. (2017) indican que son capaces de moverse de forma independiente en el entorno para el que fueron diseñados. En este sentido, dichos sistemas pueden ser capaces de tomar sus propias decisiones acerca de como deben moverse para cumplir con el objetivo que les es encomendado. De esta manera, el robot genera sus propias órdenes en términos de las velocidades (o energías) que inyecta a sus ruedas (u otros elementos generadores de movimiento) a través de algoritmos de control retroalimentados con la información de sensores o transductores, para garantizar que su movimiento sea adecuado para la tarea que realiza. Para calcular dichas órdenes, el algoritmo de control debe conocer precisamente el comportamiento del robot móvil y complementarla con la información de sus estados. La configuración o estado de un robot se refiere al conjunto de variables mínimas que pueden describir completamente su comportamiento en cualquier

instante de tiempo. Usualmente, estas variables incluyen datos como la posición, la orientación y las velocidades del robot con respecto a algún sistema de coordenadas fijo o inercial. En la práctica, los valores de dichas variables son adquiridos periódicamente a través de dispositivos de sensado.

Para que un robot móvil autónomo pueda desarrollar una tarea de forma adecuada dentro de un escenario con posibles obstáculos (en movimiento o estáticos), es capaz de realizar ciertas operaciones de respuesta tan pronto como los detecte en su cercanía. En este punto, el robot debe ser capaz de generar una trayectoria (o regenerarla) si algunos obstáculos impiden la realización de la operación deseada dentro del entorno. Además, de ser capaz de realizar simultáneamente acciones para determinar su estado y para construir las estrategias que le permitan seguir la trayectoria generada.

Para lograr lo anterior, la arquitectura de un robot móvil autónomo debe incluir al menos los siguientes elementos:

- Partes mecánicas: Los cuerpos rígidos (eslabones) que interactúan entre sí para mover al vehículo, e.g., chasis, ruedas, orugas, patas y las uniones (juntas) entre estos elementos.
- Actuadores: Son aquellos dispositivos que reciben una señal de control (comúnmente eléctrica) y generan movimiento, e.g., motores de CD, motores a pasos, servomotores, etc.
- Sensores: Se refiere a componentes cuya función es transformar una señal física de una naturaleza a otra de naturaleza distinta con el objetivo de retroalimentar a los sistemas de control con su información, e.g., codificadores de rotación, sensores de proximidad y distancia, unidades de navegación inercial, sistemas globales de navegación por satélite, etc.
- Sistemas computacionales: Son equipos con capacidad de almacenamiento y procesamiento de datos relacionados con el estado del robot, ya que en estos se implementan los sistemas de control, e.g., microcontroladores, computadoras personales, circuitos y sistemas especializados, etc.
- Unidad de alimentación: Dispositivo que tiene como función almacenar energía para suministrarla a distintos elementos del robot, e.g., baterías recargables, paneles solares, etc.
- Electrónica: Elementos que acondicionan las señales eléctricas involucradas en el funcionamiento del robot, e.g., optoacoplamientos, circuitos de calibración de sensores, reguladores de voltaje,



amplificadores, manejadores para motores, electrónica de telecomunicaciones (Wifi, BT, IP), circuitería en general, etc.

### **2.2.1. El problema del seguimiento de trayectorias**

Como se menciona en (Rafflin et al., 1994), las trayectorias se definen como los estados por los que puede pasar un robot móvil para llegar a una configuración final desde una inicial, en donde los estados intermedios del robot pueden ser de interés o incluso despreciarse. Desde un punto de vista geométrico, una trayectoria es definida por una serie de puntos en el espacio que conecta a dos puntos, uno de partida y otro de llegada.

Entonces, de acuerdo con el trabajo en (Rodríguez-Molina et al., 2021), la planificación de trayectorias consiste en encontrar la secuencia de segmentos o de puntos que conectan un punto de partida con uno de destino, evitando las posibles interferencias (generalmente, colisiones con obstáculos o regiones de riesgo) y logrando un rendimiento óptimo (por lo regular, minimizando la distancia del recorrido).

En este sentido, la planificación de trayectorias puede considerar dos escenarios distintos:

1. Escenarios estáticos: En estos, los obstáculos o regiones de riesgo en el espacio de operación del robot se caracterizan por permanecer siempre en el mismo lugar y con las mismas condiciones. Por esto, la planificación de una trayectoria se realiza fuera de línea, i.e., la trayectoria se planifica una sola vez antes de que el robot la siga.
2. Escenarios dinámicos: Estos escenarios incluyen obstáculos o regiones de riesgo en el espacio de operación del robot, cambian su posición y sus condiciones con el paso del tiempo. Con base en lo anterior, la planificación de una trayectoria se realiza en línea, i.e., la trayectoria se replanifica las veces que sea necesario conforme al comportamiento del entorno y mientras el robot está en curso.

## 2.2.2. Control

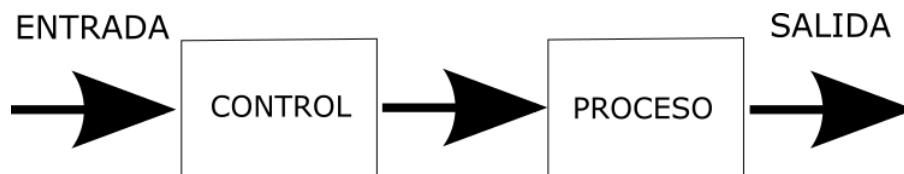
Sin importar el tipo de trayectoria que se planifica, el vehículo requiere de un sistema de control automático que le indique a sus actuadores como deben operar para que el mismo logre completar la trayectoria sin colisionar con los obstáculos y sin ingresar a regiones de riesgo.

Según Smith et al. (1991), el control automático es una rama de la ingeniería que se enfoca en el diseño y la implementación de estrategias para gobernar el comportamiento de un conjunto de variables involucradas en un proceso o sistema hacia un valor deseado. Algunos ejemplos de estas variables, pueden ser velocidad, aceleración, ángulo rotacional, altura, nivel de radiación, por mencionar algunos.

Existen dos vertientes principales en los sistemas o estrategias de control: Los sistemas de control de lazo abierto y los sistemas de control de lazo cerrado. Ambas se describen a continuación:

### Sistemas de control en lazo abierto

De acuerdo con Ogata (2001), los sistemas de control en lazo abierto son aquellos en los que la salida del sistema no interviene en el cálculo de la señal de control, como se observa en la Fig. 2.1. Este tipo de sistemas tiene la peculiaridad de que sus variables de salida no se miden ni realimentan al controlador, es decir, no existe un lazo de retroalimentación. Estos sistemas reciben comandos de entrada y tienen respuestas de control preasignadas (sistemas determinísticos).



**Figura 2.1.** Sistema de control en lazo abierto.

## Sistemas de control en lazo cerrado

Según el trabajo en (Ogata, 2001), en los sistemas de control con retroalimentación o sistemas de lazo cerrado, como el que se muestra en la Fig. 2.2, la diferencia entre la señal de entrada y la señal de retroalimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas o integrales), alimentan al controlador para reducir el error y acercar la salida del sistema a un valor deseado. Este tipo de sistema siempre implica el uso de la retroalimentación en el controlador para contrarrestar el error en su salida.

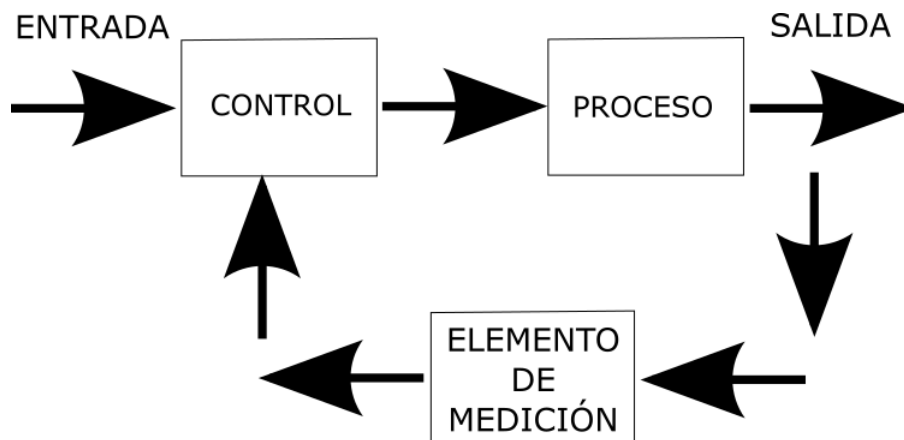


Figura 2.2. Sistema de control en lazo cerrado.

### 2.3. Optimización metaheurística

En la actualidad se busca que los sistemas o procesos, e.g., los robots móviles terrestres, sistemas de control utilizados para operar estos dispositivos, o sus planificadores de trayectorias, brinden el mayor beneficio dentro del contexto de operación al menor costo posible. La optimización es una herramienta que puede ayudar a alcanzar estos objetivos.

### **2.3.1. Optimización y optimización en ingeniería**

La optimización es considerada por Dowgiewicz and Kawecki (2006) como el manejo matemático de un conjunto de variables para maximizar o minimizar una función de costo o beneficio. En pocas palabras, la optimización consiste en una toma de decisiones que busca obtener el mayor beneficio al menor costo.

En ingeniería, la optimización se define como la selección de los mejores parámetros involucrados en un sistema o proceso a fin de que este logre el mayor rendimiento (e.g., menor distancia recorrida para un robot móvil, capacidad para evadir obstáculos o zonas de riesgo, o la habilidad para realizar movimientos con gran precisión) utilizando la menor cantidad de recursos posible (e.g., reduciendo los costos de operación, minimizando el consumo energético, o utilizando de la materia prima de forma eficiente) (Rao, 2019).

### **2.3.2. Optimizadores**

En este campo de estudio, un optimizador se define como un método computacional o analítico que puede resolver un problema de optimización descrito mediante el lenguaje matemático.

En la actualidad existen muchos tipos de optimizadores, lo cuales pueden categorizarse en dos grupos principales:

#### **Técnicas clásicas**

Son métodos analíticos que pueden encontrar soluciones óptimas a problemas de optimización, cuando estos últimos cumplen con criterios definidos o características específicas (e.g., linealidad, convexidad, continuidad o diferenciabilidad).

## **Técnicas aproximadas**

Son técnicas de optimización cuya característica principal es que no requieren que el problema cumpla con requerimientos particulares, por lo cual, no garantizan la obtención de su solución óptima, pero sí de una aproximada.

### **2.3.3. Metaheurísticas**

Cuando las técnicas clásicas no son aptas para resolver un problema de optimización ó cuando las técnicas aproximadas más simples no son suficientemente efectivas, es factible utilizar técnicas aproximadas más sofisticadas como las metaheurísticas.

En este sentido, Xiong et al. (2015) menciona que las metaheurísticas se han desarrollado para optimizar problemas no lineales para los cuales las técnicas de optimización exactas no ofrecen resultados satisfactorios. En ellas se aplica un proceso de generación iterativo de soluciones que guía a las heurísticas subordinadas en la exploración y explotación del espacio de búsqueda para encontrar eficientemente soluciones casi óptimas.

De acuerdo con Niyomubyeyi et al. (2020), una metaheurística se entiende como un procedimiento o técnica diseñada para encontrar la solución aproximada de un problema de optimización a un costo computacional razonable. Dependiendo de su operación y del fenómeno en que estas técnicas inspiran su funcionamiento, las metaheurísticas pueden clasificarse en distintos grupos, por ejemplo, métodos de cómputo evolutivo, inteligencia de enjambres ó de inspiración física. Derivado de lo anterior, los algoritmos metaheurísticos no son específicos del problema ni del dominio, y son capaces de localizar soluciones de buena calidad en un tiempo razonable.

En particular, el cómputo evolutivo ha sido el área con mayor auge en los últimos años para obtener soluciones adecuadas a distintos problemas de ingeniería (Xiong et al., 2015). En esta área, los algoritmos metaheurísticos surgen para encontrar soluciones óptimas a través de un proceso iterativo de

generación de una nueva población a través de la selección natural.

## **2.4. Optimización metaheurística y planificación de trayectorias en espacios dinámicos para robots móviles**

En resumen, un robot móvil requiere de un planificador de trayectorias para determinar la secuencia de estados o configuraciones que debe seguir para completar una tarea particular de forma segura y efectiva.

Como se ha mencionado con anterioridad, la planificación de trayectorias para robots móviles es un proceso complejo, incluso en el caso más simple, donde se consideran espacios de operación estáticos con pocos obstáculos o amenazas. En ese caso, la trayectoria se calcula una sola vez y el robot puede seguirla sin dificultad. Sin embargo, cuando se presentan obstáculos dinámicos, la tarea de planificación se vuelve mucho más compleja y costosa, dado que no basta con calcular la mejor trayectoria una sola vez, sino que, debe reajustarse cada vez que se detecta un obstáculo o amenaza que interfiere con la trayectoria original.

La planificación de trayectorias puede abordarse como la solución a un problema de optimización numérica, en donde se busca una solución factible (e.g., un camino que asegure la evasión de obstáculos, amenazas y zonas de riesgo para el robot) que genere el mayor beneficio posible (e.g., una distancia corta de recorrido). Por supuesto, este problema de optimización es igual de complejo que el problema de planificación de trayectorias por sí mismo, ya que hereda las mismas dificultades.

Esta complejidad en el problema de optimización, lo hace candidato para ser resuelto por técnicas de optimización aproximadas, como las metaheurísticas. Por otro lado, las trayectorias generadas por el planificador deben ser adecuadas para su seguimiento con un robot móvil.

Entonces, un método de planificación de trayectorias para robots móviles en espacios de trabajo

dinámicos con base en optimización metaheurística requiere de:

- La formulación de un problema formal de optimización que busque los parámetros para la generación de una trayectoria que maximicen los beneficios al seguirla y que aseguren la integridad del robot, evitando colisiones y amenazas. Este problema requiere un estudio profundo del comportamiento del robot y una retroalimentación de la información generada por todos los actores dinámicos y estáticos en el entorno de operación.
- Una correcta detección de los obstáculos o amenazas que pueden interferir en el corto plazo con la trayectoria del robot.
- La solución del problema de optimización mediante una técnica metaheurística que permita reajustar la trayectoria tan pronto como se detecte una interferencia. La técnica metaheurística debe ser simple y eficiente para asegurar que las trayectorias puedan regenerarse a tiempo (i.e., antes de colisionar con los obstáculos o amenazas).





## **Capítulo 3**

# **Desarrollo de la propuesta**

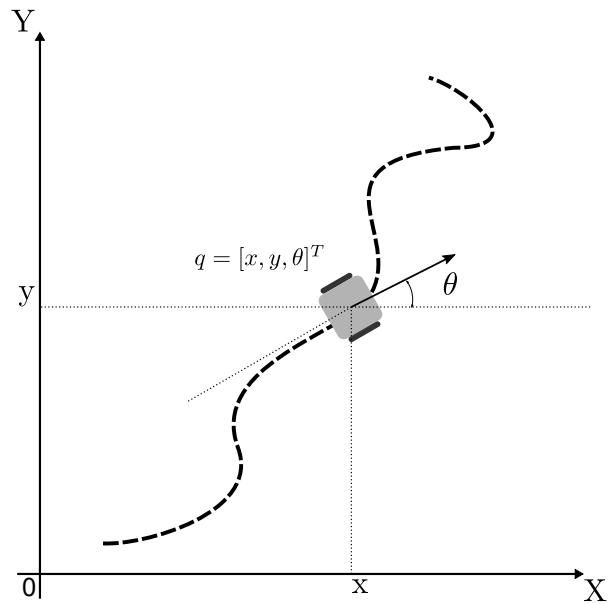
### 3.1. El robot móvil diferencial

El objeto de estudio de este trabajo de tesis es un robot móvil diferencial como el que se muestra en la Fig. 3.1. Este robot es capaz de desplazarse en dos ejes mediante el uso de dos ruedas idénticas colocadas paralelamente. La orientación y posición dependen de la diferencia de las velocidades en las ruedas.



**Figura 3.1.** Robot móvil diferencial JetBot de NVIDIA y Waveshare.

La posición y la orientación del robot en el plano pueden describirse a través de tres coordenadas generalizadas (conjunto mínimo de variables) como se observa en la Fig. 3.2. Estas coordenadas incluyen la posición del centro geométrico del vehículo en el eje horizontal  $x$  y en el eje vertical  $y$ , y la posición angular medida con respecto a la horizontal  $\theta$ .



**Figura 3.2.** Coordenadas generalizadas.

A continuación se desarrollan dos estudios fundamentales para comprender el comportamiento de estos robots, estos son los estudios son el cinemático y el dinámico.

### 3.1.1. Estudio cinemático del robot móvil diferencial

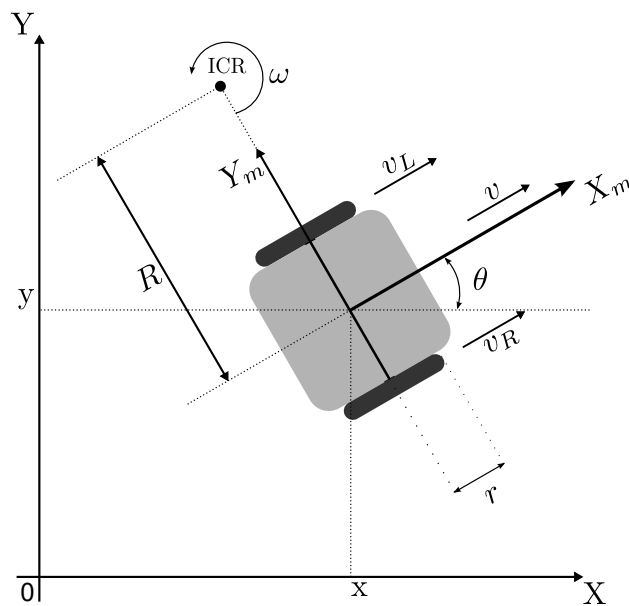
La cinemática se refiere al estudio del movimiento de los cuerpos sin considerar las fuerzas que lo generan (Kucuk and Bingul, 2006).

Con base en la definición presentada en (Ríos and Bueno, 2008) para el robot móvil diferencial, el estudio cinemático consiste en obtener las ecuaciones que relacionan la rapidez con la que giran las ruedas izquierda y derecha del robot, con los efectos que tienen estos movimientos sobre sus coordenadas generalizadas ( $x$ ,  $y$  y  $\theta$ ).

Para determinar el modelo cinemático del robot móvil diferencial, se deben considerar los elementos que influyen en su posicionamiento y orientación. Entre esos elementos están, por ejemplo, el radio de

las ruedas y la longitud de la base que las conecta.

La Fig. 3.3 muestra un esquema cinemático del robot móvil diferencial. En dicha figura,  $\theta$  es la orientación del robot,  $x$  y  $y$  son las coordenadas que representan la posición del centro geométrico del robot,  $v$  representa el vector de velocidad en la dirección de avance del móvil,  $v_L$  y  $v_R$  son respectivamente las velocidades tangenciales de las ruedas izquierda y derecha,  $R$  es el radio de giro medido desde el centro del robot hasta el Centro de Rotación Instantáneo (ICR, por sus siglas en inglés) y  $\omega$  es la velocidad angular con la que gira el robot alrededor del ICR.



**Figura 3.3.** Esquema cinemático del robot.

La ecuación (3.1) describe las velocidades tangenciales  $v_L$  y  $v_R$  de cada rueda en términos de sus velocidades angulares. De este modo,  $\omega_L$  y  $\omega_R$  son las velocidades angulares o de giro de las ruedas y  $r$  es el su radio (aquí se considera que ambas ruedas son idénticas).

$$\begin{aligned} v_L &= r\omega_L \\ v_R &= r\omega_R \end{aligned} \tag{3.1}$$

Los radios de los centros de las ruedas con respecto al ICR se observan en (3.2), con  $L$  como el diámetro del móvil diferencial y  $R$  el radio de giro medido desde el centro del robot hasta el ICR.

$$\begin{aligned} R_L &= R - \frac{L}{2} \\ R_R &= R + \frac{L}{2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como la relación entre la velocidad tangencial (de avance) del vehículo  $v$  y su velocidad de giro  $\omega$  está dada por:

$$v = R\omega \tag{3.3}$$

entonces, las velocidades tangenciales de las ruedas  $v_L$  y  $v_R$  pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} v_L &= R_L\omega = \left(R - \frac{L}{2}\right)\omega \\ v_R &= R_R\omega = \left(R + \frac{L}{2}\right)\omega \end{aligned} \tag{3.4}$$

Despejando a  $\omega$  de (3.4) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\omega = \frac{v_L}{R - \frac{L}{2}} \tag{3.5}$$

$$\omega = \frac{v_R}{R + \frac{L}{2}} \tag{3.6}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior por igualación se tiene que:

$$\frac{v_L}{R - \frac{L}{2}} = \frac{v_R}{R + \frac{L}{2}} \quad (3.7)$$

$$v_L \left( R + \frac{L}{2} \right) = v_R \left( R - \frac{L}{2} \right) \quad (3.8)$$

$$v_L R + \frac{Lv_L}{2} = v_R R - \frac{Lv_R}{2} \quad (3.9)$$

$$\frac{Lv_L}{2} + \frac{Lv_R}{2} = v_R R - v_L R \quad (3.10)$$

$$\frac{L}{2}(v_R + v_L) = R(v_R - v_L) \quad (3.11)$$

Con base en el resultado anterior, se puede obtener  $R$  en términos de las velocidades tangenciales de las ruedas  $v_R$  y  $v_L$  como se muestra a continuación:

$$R = \frac{L}{2} \left( \frac{v_L + v_R}{v_R - v_L} \right) \quad (3.12)$$

Por otro lado,  $R$  puede calcularse a partir de la velocidad angular  $\omega$  y la velocidad tangencial de la rueda izquierda  $v_L$  si se manipula (3.5) como sigue:

$$\omega \left( R - \frac{L}{2} \right) = v_L \quad (3.13)$$

$$\omega R - \frac{\omega L}{2} = v_L \quad (3.14)$$

$$\omega R = v_L + \omega \frac{L}{2} \quad (3.15)$$

$$R = \frac{v_L + \omega \frac{L}{2}}{\omega} \quad (3.16)$$

$$R = \frac{v_L}{\omega} + \frac{L}{2} \quad (3.17)$$

Análogamente,  $R$  puede calcularse a partir de la velocidad angular  $\omega$  y la velocidad tangencial de la rueda derecha  $v_R$  con base en (3.6), como se muestra a continuación:

$$\omega \left( R + \frac{L}{2} \right) = v_R \quad (3.18)$$

$$\omega R + \frac{\omega L}{2} = v_R \quad (3.19)$$

$$\omega R = v_R - \omega \frac{L}{2} \quad (3.20)$$

$$R = \frac{v_R - \omega \frac{L}{2}}{\omega} \quad (3.21)$$

$$R = \frac{v_R}{\omega} - \frac{L}{2} \quad (3.22)$$

Igualando (3.17) y (3.22) se tiene que:

$$\frac{v_L}{\omega} + \frac{L}{2} = \frac{v_R}{\omega} - \frac{L}{2} \quad (3.23)$$

$$\frac{L}{2} + \frac{L}{2} = \frac{v_R - v_L}{\omega} \quad (3.24)$$

$$L = \frac{v_R - v_L}{\omega} \quad (3.25)$$

$$\omega L = v_R - v_L \quad (3.26)$$

Lo que permite expresar a  $\omega$  en términos de las velocidades tangenciales de las ruedas  $v_R$  y  $v_L$ :

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{L} \quad (3.27)$$

Utilizando (3.27) en (3.3) se obtiene:

$$v = \left[ \frac{v_R - v_L}{L} \right] \left[ \frac{L (v_R + v_L)}{2 (v_R - v_L)} \right] \quad (3.28)$$

Este resultado permite determinar la velocidad de avance del robot si se conocen las velocidades tangenciales de las ruedas izquierda  $v_L$  y derecha  $v_R$ , como se muestra en seguida:

$$v = \frac{v_R + v_L}{2} \quad (3.29)$$

### 3.1.2. Simulación cinemática del robot móvil diferencial

Para simular el comportamiento cinemático del robot móvil diferencial, es necesario definir primero el concepto de estado. El estado de un sistema es el conjunto mínimo de variables que definen su comportamiento para cualquier instante de tiempo.

En el caso de los sistemas mecánicos, incluido el robot móvil diferencial, los estados que definen su comportamiento cinemático coinciden con las coordenadas generalizadas. Para el robot diferencial, estas coordenadas son  $x$ ,  $y$  y  $\theta$ . Por lo tanto, el vector de estados para este sistema es:

$$\mathbf{z} = [x, y, \theta]^T \quad (3.30)$$

Con base en el vector de estados anterior, es posible definir una ecuación de estado como sigue:

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \quad (3.31)$$

en donde  $\dot{\mathbf{z}}$  es el vector que contiene las primeras derivadas temporales de los estados en  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{u}$  incluye a las entradas de control (son las entradas que permiten al robot diferencial desplazarse, pueden ser las



velocidades lineal  $v$  y angular  $w$  del móvil, las velocidades tangenciales de las ruedas  $v_L$  y  $v_R$ , e incluso, las velocidades angulares de estas últimas  $\omega_L$  y  $\omega_R$ ) y  $t$  es el tiempo.

De esta forma, la ecuación de estado que representa a la cinemática del robot móvil diferencial puede obtenerse utilizando los resultados de la sección anterior, como se muestra a continuación:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_R + v_L}{2} \cos(\theta) \\ \frac{v_R + v_L}{2} \sin(\theta) \\ \frac{v_R - v_L}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2}(\omega_R + \omega_L) \cos(\theta) \\ \frac{r}{2}(\omega_R + \omega_L) \sin(\theta) \\ \frac{r}{L}(\omega_R - \omega_L) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Como puede apreciarse en la expresión anterior, la ecuación de estado es una ecuación diferencial ordinaria cuya variable independiente es el tiempo. Si a esta ecuación diferencial se le impone una condición inicial  $z_0$  (el estado en que se encuentra inicialmente el robot móvil), se obtiene un problema de valor inicial. Cuando se resuelve esta ecuación, e.g., a través de un método de integración numérica, el resultado incluye a los estados  $z$  que el robot tendrá dentro de una ventana de tiempo futura dependiendo de las entradas de control que se le inyecten. Debido a esto, a la solución del problema de valor inicial asociado a una ecuación de estado se le conoce como simulación numérica.

Para desarrollar la simulación cinemática del robot móvil diferencial, es necesario adoptar algún método de integración. El método de integración numérica de Euler, que se describe en (Fathoni and Wuryandari, 2015), es una alternativa simple y de bajo costo computacional que puede obtener soluciones adecuadas a la ecuación de estado del robot móvil.

El método de integración numérica de Euler se muestra a continuación:

$$z_{n+1} = z_n + dt \cdot f(z_n, t) \quad (3.33)$$

donde  $z_{n+1}$  es el estado en el siguiente paso de integración (siguiente instante de tiempo),  $z_n$  es el estado actual,  $f(z_n, t)$  es la función que se va a integrar y  $dt$  representa el tamaño de paso de integración (el tiempo de muestreo o el periodo de tiempo entre el cálculo de un estado y otro).

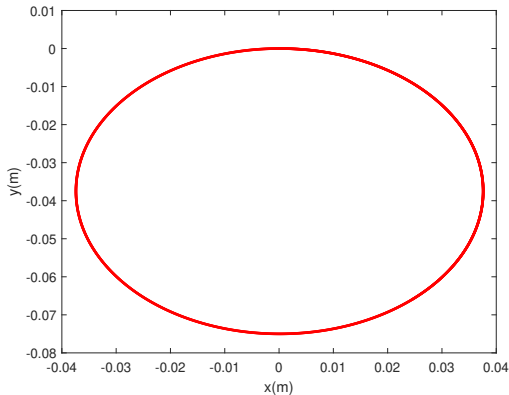
Considerando el modelado matemático de la cinemática del robot móvil diferencial y el método de integración de Euler, se genera el siguiente programa de MATLAB que realiza la simulación numérica de este vehículo:

```
1 tf = 20; %Tiempo final
2 ti = 0; %Tiempo inicial
3 dt = 0.005; %Intervalo de muestreo
4 n = (tf - ti)/dt + 1; %Número de muestras
5
6 z = zeros(n, 3); %Estados del sistema
7 z(1, 1) = 0; %Posición inicial x, y ,angular
8 z(1, 2) = 0;
9 z(1, 3) = 0;
10
11 t = ti:dt:tf; %Tiempo
12 r = 0.03; %Radio de las ruedas
13 L = 0.15; %Separación de las ruedas
14 for i = 1:n - 1
15     wR = 2 + t(i) / 10; %Entradas de control
16     wL = 0.5;
17     phi = z(i, 3);
18
19     xp = (r / 2) * (wR + wL) * cos(phi); %Ecuaciones cinemáticas
20     yp = (r / 2) * (wR + wL) * sin(phi);
21     phip = (r / L) * (wR - wL);
22
23     z(i + 1, 1) = z(i, 1) + dt * xp; %Método de Euler
24     z(i + 1, 2) = z(i, 2) + dt * yp;
25     z(i + 1, 3) = z(i, 3) + dt * phip;
26 end
27
28 figure(1) %Gráfica de posición
29 plot(z(:, 1), z(:, 2), 'r. ');
30 xlabel('x(m)');
31 ylabel('y(m)');
32
33 figure(2) %Gráfica de orientación
34 plot(t, z(:, 3), 'b-');
```

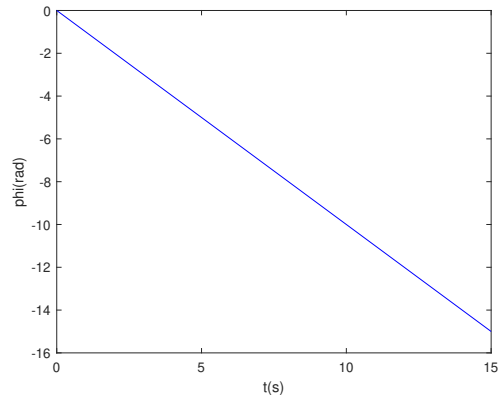
```
35 xlabel('t(s)');  
36 ylabel('phi(rad)');
```

Con base en las ecuaciones de la cinemática del robot móvil diferencial, establecidas como un problema de valor inicial y solucionadas a través del método de integración numérica de Euler, se puede elaborar una simulación cinemática que permite analizar el comportamiento de este sistema en el tiempo cuando se le inyectan distintas velocidades a sus dos ruedas, sin considerar los fuerzas y pares que intervienen en este movimiento. A continuación se presentan algunos casos de simulación de interés para este trabajo:

1. La rueda izquierda girando hacia adelante y la rueda derecha detenida: La Fig. 3.4 muestra que la posición del móvil varía muy poco, mientras realiza una rotación continua en sentido contrario a las manecillas del reloj.



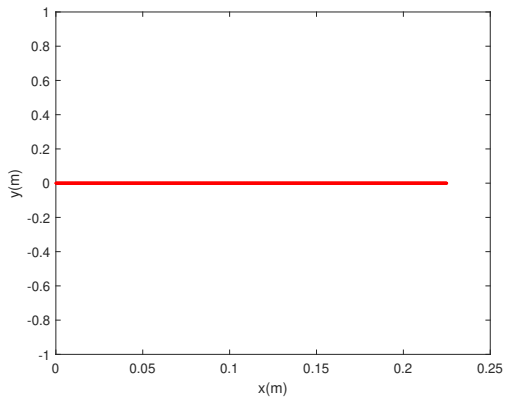
(a) Gráfica de posición



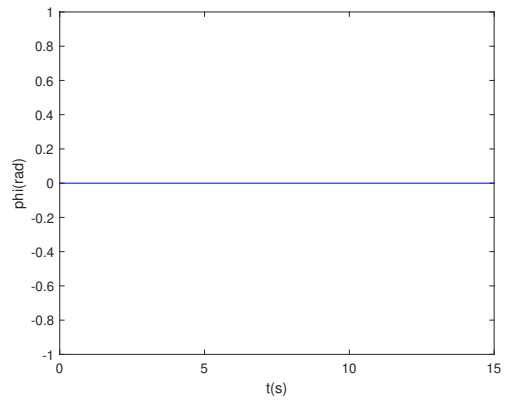
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.4.** Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda gira hacia adelante y la rueda derecha está detenida.

2. La rueda izquierda girando hacia adelante y la rueda derecha girando hacia adelante a la misma velocidad: La Fig. 3.5 muestra que el móvil sigue una trayectoria en línea recta y su orientación no cambia.



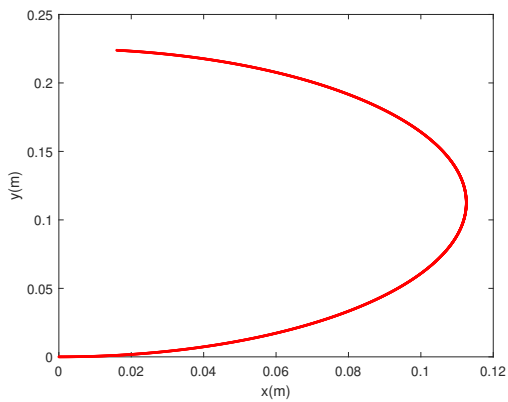
(a) Gráfica de posición



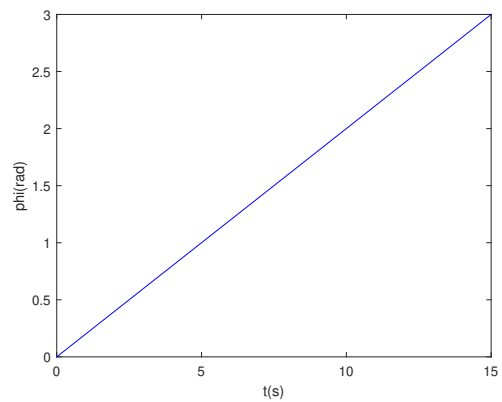
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.5.** Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran hacia adelante a la misma velocidad.

3. La rueda izquierda y derecha girando hacia adelante, pero a diferentes velocidades: La Fig. 3.6 muestra una trayectoria curva en el robot mientras la posición angular cambia en proporción al giro que genera la trayectoria.



(a) Gráfica de posición

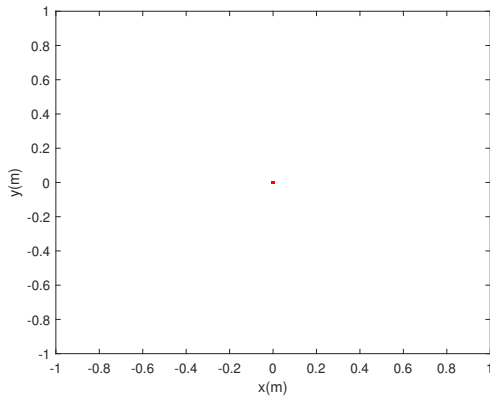


(b) Gráfica de orientación

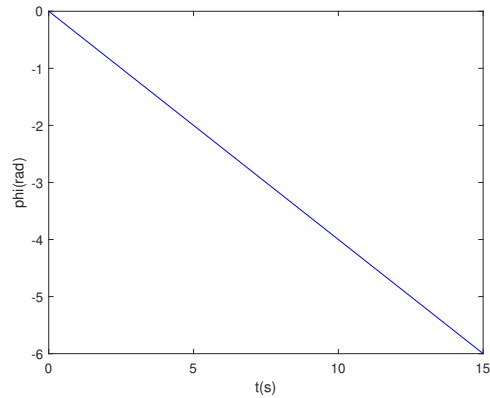
**Figura 3.6.** Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran hacia adelante a velocidades diferentes.

4. La rueda izquierda girando hacia adelante y la rueda derecha girando hacia atrás a la misma velocidad: La Fig. 3.7 muestra que el robot realiza un movimiento circular sobre su propio eje sin

desplazamiento.



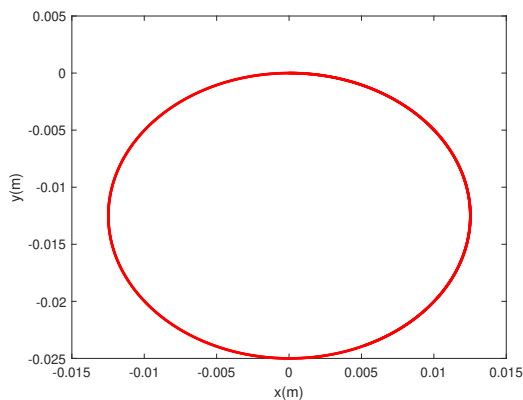
(a) Gráfica de posición



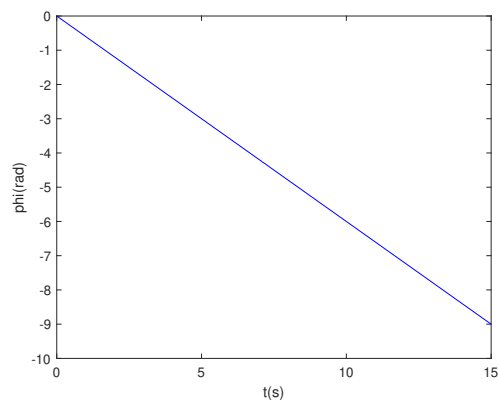
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.7.** Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran a la misma velocidad, pero en direcciones opuestas.

5. La rueda izquierda girando hacia adelante y la rueda derecha girando hacia atrás a diferentes velocidades: La Fig. 3.8 muestra que la posición del móvil varía muy poco, mientras realiza una rotación continua en sentido de la rueda con mayor velocidad.



(a) Gráfica de posición



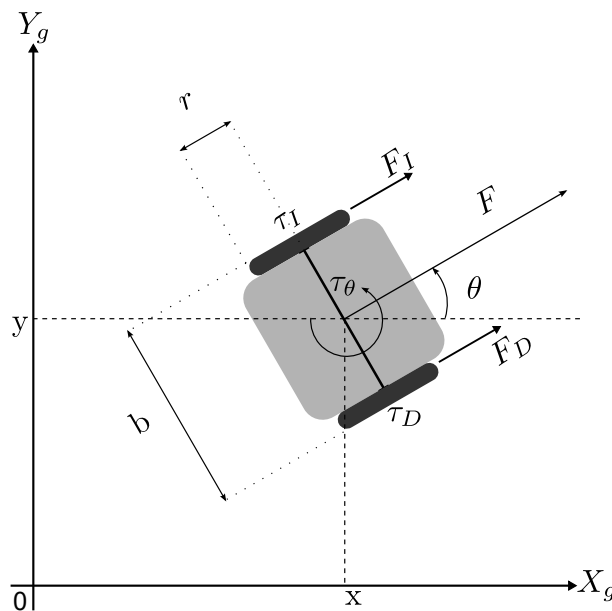
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.8.** Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran a diferente velocidad y en direcciones opuestas.

### 3.1.3. Estudio dinámico del robot móvil diferencial

La dinámica está relacionada con las fuerzas y pares que generan el movimiento. En mecánica clásica, esta área estudia el movimiento de los cuerpos y los fenómenos físicos que lo producen. Para esto, toma a los estudios cinemáticos como punto de partida y analiza el efecto que tienen los pares y fuerzas sobre el movimiento de un cuerpo. Para realizar el análisis dinámico de un cuerpo se utilizan los axiomas de la mecánica clásica conocidos como leyes de Newton (Koninckx, 2014).

Para el robot móvil de tracción diferencial que se muestra en la Fig. 3.9 se puede utilizar el enfoque de Euler-Lagrange para obtener un modelo dinámico de este sistema de forma sistemática. Este enfoque es una generalización de las leyes de Newton que se basa en un análisis de las energías cinética y potencial del sistema (Ogata, 1978).



**Figura 3.9.** Esquema dinámico del robot móvil diferencial.

El método de Euler-Lagrange permite encontrar las ecuaciones de movimiento del robot diferencial de la forma que se muestra en (3.34).

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i \quad (3.34)$$

en donde  $q_i$  es la  $i$ -ésima coordenada generalizada,  $\dot{q}_i$  es su primera derivada temporal,  $Q_i$  es la  $i$ -ésima entrada generalizada,  $t$  es el tiempo y  $\mathcal{L}$  es el lagrangiano que se define a continuación:

$$\mathcal{L} = K - U \quad (3.35)$$

Donde  $K$  representa la energía cinética y  $U$  la energía potencial del sistema.

En el caso de sistemas con restricciones no holónomas (restricciones que prohíben ciertas velocidades en los sistemas mecánicos, e.g., las velocidades laterales en el móvil diferencial), como el caso robot móvil diferencial, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange añaden un término adicional que considera a cada componente de la restricción ponderado por un multiplicador de Lagrange como se observa a continuación (Klancar et al., 2017):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} \quad (3.36)$$

donde  $\lambda_j$  es el multiplicador de Lagrange y  $a_{jk}$  es la  $i$ -ésima componente de la  $j$ -ésima restricción no holónoma, y  $m$  es el número de restricciones no holónomas independientes.

### Energía potencial del robot móvil diferencial

La energía potencial se define como la energía que tiene un cuerpo dependiendo de su configuración o de la posición relativa de sus elementos (Beltrán Dueñas, 2015).

En la Tierra, la energía potencial que puede generar un cuerpo de forma natural es debida a la fuerza de gravedad. Por lo tanto, esta energía depende de la posición vertical del cuerpo, i.e., de la altura a la que se encuentra, como se indica a continuación:

$$U = mgz \quad (3.37)$$

en donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $g$  es la aceleración de la gravedad en la Tierra y  $z$  es la posición vertical del cuerpo.

Para el caso particular del robot móvil diferencial,  $z = 0$  dado que este vehículo solo se mueve horizontalmente. Por lo tanto:

$$U = mgz = 0 \quad (3.38)$$

### **Energía cinética del robot móvil diferencial**

En física, se define a la energía cinética como la cantidad de trabajo necesaria para mover a un cuerpo desde el reposo con respecto a un sistema de referencia. De forma general, es la energía debida al movimiento de un cuerpo (Kemp, 1984).

Como un cuerpo puede realizar movimientos de rotación y traslación, entonces su energía cinética total está representada por:

$$K = K_T + K_R \quad (3.39)$$

en donde  $K_T$  es la energía cinética de traslación y  $K_R$  es la energía cinética de rotación.

La  $K_T$  se define como:

$$K_T = \frac{1}{2}m (\mathbf{v}^T \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (3.40)$$

en donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $\mathbf{v}$  es la velocidad lineal (instantánea) del mismo.



Por otra parte, la  $K_R$  se define como:

$$K_R = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega} \quad (3.41)$$

en donde  $I$  es la matriz de tensores de inercia del cuerpo y  $\boldsymbol{\omega}$  es la velocidad angular del mismo. Esta matriz de tensores está dada por:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

A continuación se calculan las energías  $K_T$  y  $K_R$  para el robot móvil diferencial. En el caso de  $K_T$ , es necesario obtener la velocidad lineal  $\mathbf{v}$  del vehículo, la cual está dada por la derivada temporal de su posición  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = [x, y, 0]^T \quad (3.43)$$

Derivando la posición  $\mathbf{p}$  con respecto al tiempo se tiene:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = [\dot{x}, \dot{y}, 0]^T \quad (3.44)$$

Calculando  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (3.45)$$

Por lo tanto, la energía  $K_T$  del robot móvil diferencial es:

$$K_T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (3.46)$$

En el caso de la energía cinética  $K_R$  de este vehículo, es necesario conocer la velocidad angular  $\omega$  con la que gira. Esta velocidad se obtiene como la derivada temporal de la posición angular del robot  $\eta$ :

$$\eta = [0, 0, \theta]^T \quad (3.47)$$

Derivando la posición angular  $\eta$  con respecto al tiempo se obtiene lo siguiente:

$$\omega = \dot{\eta} = [0, 0, \dot{\theta}]^T \quad (3.48)$$

Entonces, la energía  $K_R$  del robot móvil diferencial está dada por:

$$K_R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{zz} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (3.49)$$

con  $I_{zz} = J$ , dado que el vehículo rota exclusivamente alrededor del eje vertical.

Finalmente, la energía cinética total del móvil es:

$$K = K_T + K_R = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (3.50)$$

### Lagrangiano del robot móvil diferencial

Como se mencionó anteriormente, el lagrangiano  $\mathcal{L}$  de un sistema mecánico es la diferencia entre sus energías cinética y potencial:

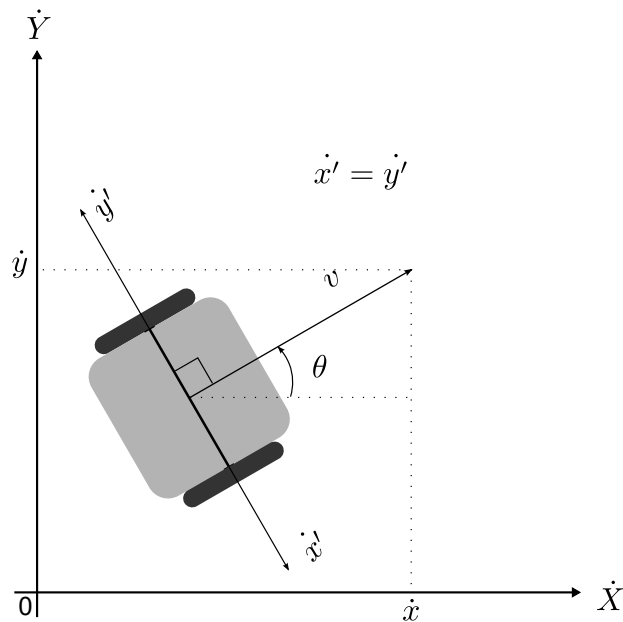
$$\mathcal{L} = K - U \quad (3.51)$$

Entonces, el lagrangiano para el robot móvil diferencial está dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - 0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (3.52)$$

### Restricciones no holónomas

El robot móvil de tracción diferencial tiene una restricción no holónoma en su movimiento que le impide desplazarse lateralmente (este robot solo puede desplazarse en la dirección en la que giran sus ruedas). Lo anterior implica que las velocidades  $\dot{x}'$  y  $\dot{y}'$  que se generan desde el centro del vehículo en dirección a las dos ruedas tienen la misma magnitud y dirección opuesta, como se muestra en la Fig. 3.10.



**Figura 3.10.** Esquema de restricciones de movimiento del robot móvil diferencial.

De esta forma, la restricción del movimiento no holónoma del móvil está dada por:

$$\dot{x}' = \dot{y}' \quad (3.53)$$

o bien:

$$-\dot{x} \sin\theta + \dot{y} \cos\theta = 0 \quad (3.54)$$

En la forma  $A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$ , la restricción no holónoma anterior se expresa de forma matricial como se muestra a continuación (recordando que  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^T$ ):

$$A(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.55)$$

$$[-\sin\theta, \cos\theta, 0] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.56)$$

$$A(\mathbf{q}) = [a_{11}, a_{12}, a_{13}] = [-\sin\theta, \cos\theta, 0] \quad (3.57)$$

### Ecuaciones de movimiento del robot móvil diferencial

Obteniendo las derivadas de  $\mathcal{L}$ , contempladas en la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange, con respecto a las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T = [x, y, \theta]^T$  (conjunto mínimo de variables que representan cualquier configuración, posición y orientación del sistema para cualquier instante de tiempo) y a sus primeras derivadas temporales  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3] = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^T$  se tiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \right] = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right] = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right] = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right] = m \dot{x} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[ \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right] = m \dot{y} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right] = J \dot{\theta} \quad (3.63)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = m \frac{d\dot{x}}{dt} = m \ddot{x} \quad (3.64)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{y}) = m \frac{d\dot{y}}{dt} = m \ddot{y} \quad (3.65)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (J \dot{\theta}) = J \frac{d\dot{\theta}}{dt} = J \ddot{\theta} \quad (3.66)$$

Ahora, las fuerzas y pares generalizados del móvil son:

$$f_1 = F_x = F \cos \theta = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos \theta \quad (3.67)$$

$$f_2 = F_y = F \sin\theta = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta \quad (3.68)$$

$$f_3 = \tau_\theta = \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) \quad (3.69)$$

en donde  $\tau_I$  es el par generado por el giro la rueda izquierda y  $\tau_D$  es el par producido por la rotación de la rueda derecha. En este sentido,  $\tau_I$  y  $\tau_D$  son las señales de entrada al sistema.

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del robot móvil diferencial están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = f_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} \quad (3.70)$$

Como  $m = 1$ , es decir, solo existe una restricción no holónoma, entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = f_i - \lambda_1 a_{1i} \quad (3.71)$$

A continuación se desarrolla cada una de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange que describen el comportamiento dinámico del robot móvil diferencial.

Para la primera coordenada generalizada  $q_1 = x$  se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = f_1 - \lambda_1 a_{11} \quad (3.72)$$

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta - \lambda_1 a_{11} \quad (3.73)$$

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta - \lambda_1 (-\sin\theta) \quad (3.74)$$

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta + \lambda_1 \sin\theta \quad (3.75)$$

$$m\ddot{x} - \lambda_1 \sin\theta - \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta = 0 \quad (3.76)$$

Cuando se considera la segunda coordenada generalizada  $q_2 = y$ , la ecuación de movimiento resulta:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = f_2 - \lambda_1 a_{12} \quad (3.77)$$

$$m\ddot{y} = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta - \lambda_1 a_{12} \quad (3.78)$$

$$m\ddot{y} = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta - \lambda_1 \cos\theta \quad (3.79)$$

$$m\ddot{y} + \lambda_1 \cos\theta - \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta = 0 \quad (3.80)$$

Finalmente, la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange para la tercera coordenada generalizada  $q_3 = \theta$  queda como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = f_3 - \lambda_1 a_{13} \quad (3.81)$$

$$J\ddot{\theta} = \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) - \lambda_1 a_{13} \quad (3.82)$$

$$J\ddot{\theta} = \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) - \lambda_1 (0) \quad (3.83)$$

$$J\ddot{\theta} = \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) \quad (3.84)$$

$$J\ddot{\theta} - \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) = 0 \quad (3.85)$$

Entonces, el modelo dinámico completo del robot móvil diferencial incluye a las ecuaciones siguientes.

$$m\ddot{x} - \lambda_1 \sin\theta - \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta = 0 \quad (3.86)$$

$$m\ddot{y} + \lambda_1 \cos\theta - \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta = 0 \quad (3.87)$$

$$J\ddot{\theta} - \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) = 0 \quad (3.88)$$

Las ecuaciones anteriores pueden reescribirse como las siguientes tres:

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta + \lambda_1 \sin\theta \quad (3.89)$$

$$m\ddot{y} = \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta - \lambda_1 \cos\theta \quad (3.90)$$

$$J\ddot{\theta} = \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) \quad (3.91)$$



## Forma cerrada del modelo dinámico para el robot móvil diferencial

El modelo dinámico del robot móvil diferencial expresado en términos de las ecuaciones de movimiento en (3.89)-(3.91), puede expresarse en forma cerrada (o también conocida como forma matricial) como sigue (remarcando que  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3]^T = [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\theta}]^T$ ):

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = E(\mathbf{q}) \mathbf{u} - A^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \quad (3.92)$$

en donde la matriz  $E(\mathbf{q})$  está dada por:

$$E(\mathbf{q}) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cos\theta & \frac{1}{r} \cos\theta \\ \frac{1}{r} \sin\theta & \frac{1}{r} \sin\theta \\ \frac{L}{2r} & -\frac{L}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_D \\ \tau_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta \\ \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta \\ \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$E(\mathbf{q}) \mathbf{u} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_D \\ \tau_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \cos\theta \\ \frac{1}{r} (\tau_I + \tau_D) \sin\theta \\ \frac{L}{2r} (\tau_D - \tau_I) \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$E(\mathbf{q}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

la matriz  $M(\mathbf{q})$  es:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ J\ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

el vector  $-A^T(\mathbf{q})$  es:

$$-A^T(\mathbf{q}) = -[-\sin\theta, \cos\theta, 0]^T = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

el vector de entradas de control  $u$  incluye a los pares de las ruedas derecha e izquierda:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_D \\ \tau_I \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

y  $\lambda$  se refiere al único multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$ :

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1] \quad (3.100)$$

### Forma simplificada del modelo dinámico para el robot móvil diferencial

Como puede apreciarse desde el modelo dinámico en forma cerrada del robot móvil diferencial en (3.92), los parámetros físicos del sistema (e.g., la masa  $m$  o la inercia  $J$ ) pueden medirse o estimarse de alguna manera. Sin embargo, no puede decirse lo mismo del multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$ . Por ello, es necesario eliminar el término  $\lambda_1$  del modelo dinámico, como se expone en esta sección.

Recordando que el modelo cinemático del robot móvil está dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = S(t)\mathbf{B}(t) \quad (3.101)$$

con la matriz  $S$  y el vector  $\mathbf{B}$  como:

$$S(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Entonces:

$$\dot{\mathbf{q}} = S(t)\mathbf{B}(t) \quad (3.104)$$

Derivando  $\dot{\mathbf{q}}$  de la expresión anterior con respecto al tiempo se tiene:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{S}(t)\mathbf{B}(t) + S(t)\dot{\mathbf{B}}(t) \quad (3.105)$$

Sustituyendo  $\ddot{\mathbf{q}}$  en (3.92):

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = E(\mathbf{q})\mathbf{u} - A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.106)$$

$$M(\mathbf{q})[\dot{S}\mathbf{B} + S\dot{\mathbf{B}}] = E(\mathbf{q})\mathbf{u} - A^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.107)$$

$$M(\mathbf{q}) \dot{S}\mathbf{B} + M(\mathbf{q}) S\dot{\mathbf{B}} = E(\mathbf{q}) \mathbf{u} - A^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \quad (3.108)$$

Multiplicando (3.108) por  $S^T$  a la izquierda se obtiene:

$$S^T M(\mathbf{q}) \dot{S}\mathbf{B} + S^T M(\mathbf{q}) S\dot{\mathbf{B}} = S^T E(\mathbf{q}) \mathbf{u} - S^T A^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \quad (3.109)$$

Considerando el producto  $AS$ :

$$AS = [-\sin\theta, \cos\theta, 0] \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-\sin\theta \cos\theta + \cos\theta \sin\theta, 0] = [0, 0] \quad (3.110)$$

Se observa que  $S^T A^T = [0, 0]^T$ , por lo que (3.109) se reduce a:

$$S^T M(\mathbf{q}) \dot{S}\mathbf{B} + S^T M(\mathbf{q}) S\dot{\mathbf{B}} = S^T E(\mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (3.111)$$

Entonces, el modelo que representa la ecuación anterior puede describirse como:

$$\tilde{M}\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{E}\mathbf{u} \quad (3.112)$$

con:

$$\begin{aligned}
\tilde{M} = S^T M S &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m \cos^2\theta + m \sin^2\theta & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\cos^2\theta + \sin^2\theta) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

$$\tilde{V} = S^T M \dot{S} B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin\theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E} = S^T E &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cos^2\theta + \frac{1}{r} \sin^2\theta & \frac{1}{r} \cos^2\theta + \frac{1}{r} \sin^2\theta \\ \frac{1}{2} \frac{L}{r} & -\frac{1}{2} \frac{L}{r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{r} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) & \frac{1}{r} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ \frac{1}{2} \frac{L}{r} & -\frac{1}{2} \frac{L}{r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{2} \frac{L}{r} & -\frac{1}{2} \frac{L}{r} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Si se considera un vector de estados extendido  $z = [q_1, q_2, q_3, v, \omega]^T = [\mathbf{q}^T, \mathbf{B}^T]^T$ , la dinámica del sistema se puede escribir como  $\dot{z} = f(z) + g(z)u$  con:

$$f(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} SB \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$g(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{M}^{-1}\tilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{mr} & \frac{1}{mr} \\ \frac{1}{2J} \frac{L}{r} & -\frac{1}{2J} \frac{L}{r} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

tomando en cuenta que:

$$\tilde{M}^{-1}\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mr} & \frac{1}{mr} \\ \frac{1}{2J} \frac{L}{r} & -\frac{1}{2J} \frac{L}{r} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Por lo tanto, desarrollando la ecuación  $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}) + g(\mathbf{z}) \mathbf{u}$  se obtiene la forma final de la dinámica del robot móvil diferencial siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos\theta \\ v \sin\theta \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{mr} & \frac{1}{mr} \\ \frac{1}{2J} \frac{L}{r} & -\frac{1}{2J} \frac{L}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_D \\ \tau_I \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

### 3.1.4. Simulación dinámica del robot móvil diferencial

Al igual que en el caso de la cinemática, la simulación dinámica del robot móvil diferencial utiliza el concepto de estado. En este caso, se utiliza un vector de estados extendido, como resultado de la simplificación del modelo dinámico que se desarrolló en la sección anterior. Este vector de estado se muestra a continuación:

$$\mathbf{z} = [x, y, \theta, v, \omega]^T \quad (3.120)$$

Entonces, utilizando el vector de estados anterior, es posible definir la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \quad (3.121)$$

La ecuación de estado anterior se puede integrar numéricamente con respecto al tiempo para describir el comportamiento dinámico del móvil. Un método de integración simple como el de Euler puede ser suficientemente efectivo para este propósito.

Con base en lo anterior, se utiliza el siguiente código de MATLAB para llevar a cabo la simulación dinámica del robot móvil diferencial:

```
1 dt = 0.005; %Intervalo de muestreo
2 ti = 0; %Tiempo inicial
3 tf = 10; %Tiempo final
4 n = (tf - ti) / dt + 1; %Número de muestras
5
6 x = zeros(n,5); %Matriz de estados
7 x(1,1) = 0.0; %Valor inicial en x
8 x(1,2) = 0.0; %Valor inicial en y
9 x(1,3) = 0.0; %Valor inicial en teta
10 x(1,4) = 0.0; %Valor inicial en velocidad lineal v
11 x(1,5) = 0.0; %Valor inicial en velocidad angular omega
12
```

```

13 %Parámetros dinámicos
14 m = 0.75; %Masa (kg)
15 r = 0.024; %Radio de la rueda (m)
16 L = 0.075; %Diámetro del carro (m)
17 J = 0.001; %Inercia (kg m^2)
18
19 for i = 1:n - 1
20     t = (i - 1) * dt; %Tiempo
21     %Modelo dinámico
22     %Se adquieren los estados (experimentalmente , a través de sensores)
23     theta = x(i, 3);
24     v = x(i, 4);
25     omega = x(i, 5);
26
27     %Entradas de control
28     u_r = 0 ;
29     u_l = 0.001;
30
31     %Elementos del modelo dinámico
32     f_x = [v * cos(theta); v * sin(theta); omega; 0; 0];
33
34     g_x = [0, 0; 0, 0; 0, 0; 1.0 / (m * r), 1.0 / (m * r);
35           L / (2.0 * J * r), -L / (2.0 * J * r)];
36
37     u = [u_r; u_l];
38
39     %Ecuación de estado
40     dx = f_x + g_x * u;
41
42     %Integración numérica por Euler
43     x(i + 1, 1) = x(i, 1) + dx(1) * dt;
44     x(i + 1, 2) = x(i, 2) + dx(2) * dt;
45     x(i + 1, 3) = x(i, 3) + dx(3) * dt;
46     x(i + 1, 4) = x(i, 4) + dx(4) * dt;
47     x(i + 1, 5) = x(i, 5) + dx(5) * dt;
48 end
49
50 figure(1) %Gráfica de posición

```



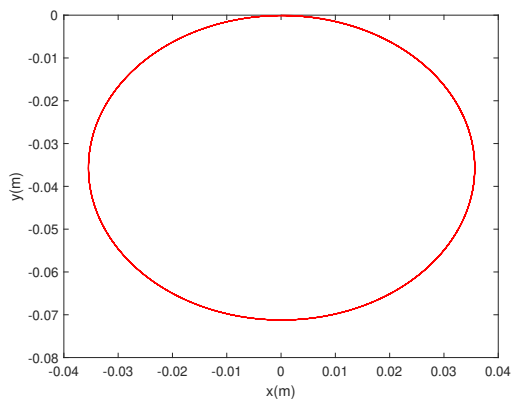
```

51 plot(x(:, 1), x(:, 2), 'r-')
52 xlabel('x(m)')
53 ylabel('y(m)')
54
55 figure(2) %Gráfica de orientación
56 plot(ti:dt:tf, x(:, 3), 'b-')
57 xlabel('t(s)')
58 ylabel('phi(rad)')

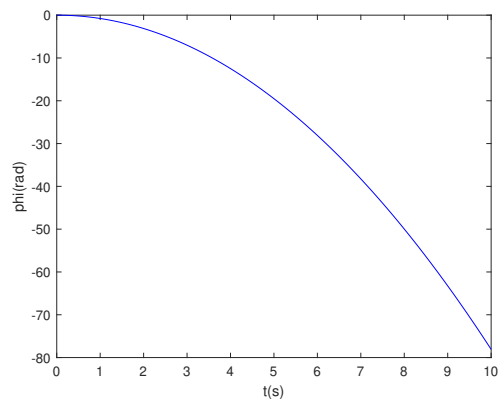
```

Con base en la simulación dinámica anterior, se pueden observar diferentes comportamientos en el vehículo cuando se le inyectan distintas entradas, esta vez, considerando los fenómenos físicos que intervienen en su movimiento. Los casos que resultan de interés son los siguientes:

1. La rueda izquierda con torque hacia adelante y la rueda derecha sin torque: En la Fig. 3.11 el vehículo gira teniendo como pivote la rueda que no tiene torque, por lo cual, la gráfica de posición muestra una circunferencia.



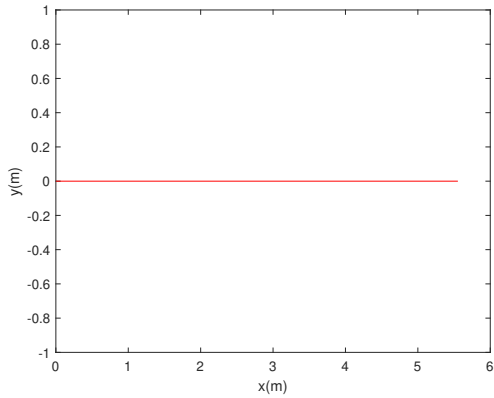
(a) Gráfica de posición



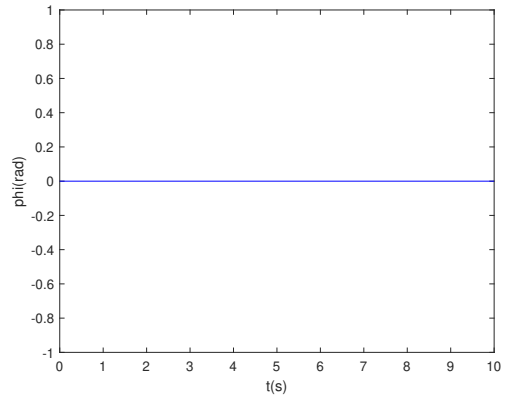
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.11.** Comportamiento del robot móvil cuando la rueda genera un par hacia adelante y la rueda derecha está detenida.

2. La rueda izquierda y derecha generando el mismo torque hacia adelante: La Fig. 3.12 muestra que el móvil desarrolla una trayectoria en línea recta y su orientación permanece constante.



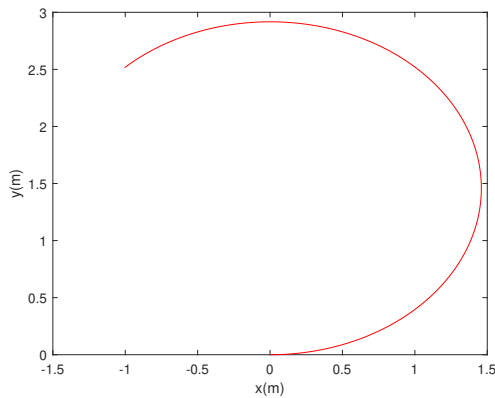
(a) Gráfica de posición



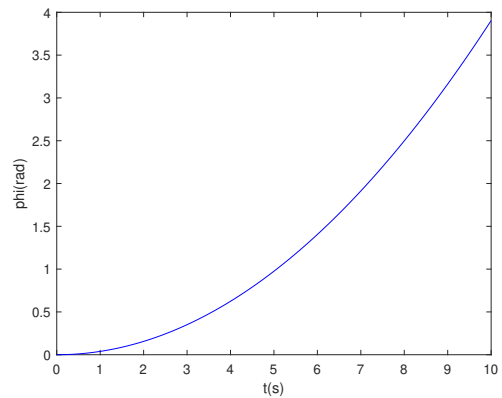
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.12.** Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha producen el mismo par en la misma dirección.

3. La rueda izquierda y derecha girando en el mismo sentido con diferente torque: La Fig. 3.13 muestra una trayectoria elíptica producida por la diferencia de pares. Se observa que la orientación del robot cambia proporcionalmente a la diferencia de los torques.



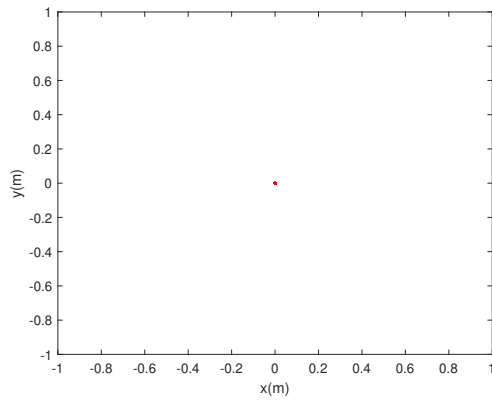
(a) Gráfica de posición



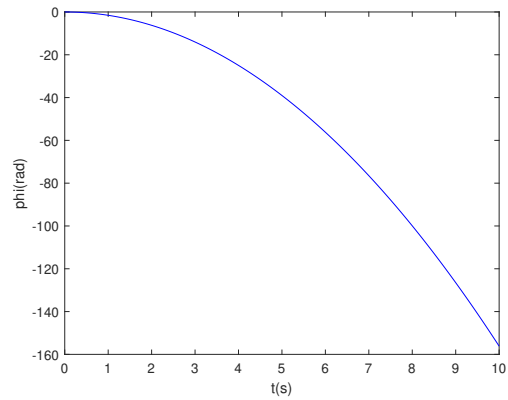
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.13.** Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran en la misma dirección con diferente torque.

4. Ambas ruedas giran con el mismo torque, pero en sentidos opuestos: La Fig. 3.14 muestra un movimiento circular del móvil sobre su propio eje sin desplazamiento.



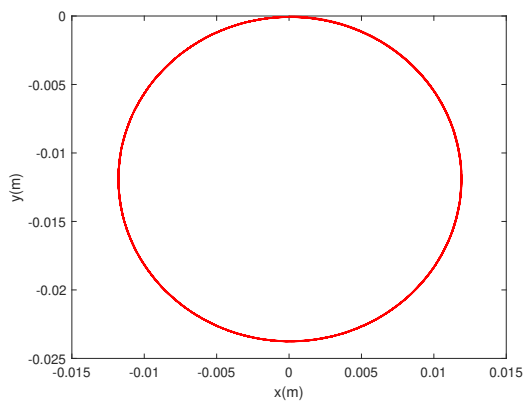
(a) Gráfica de posición



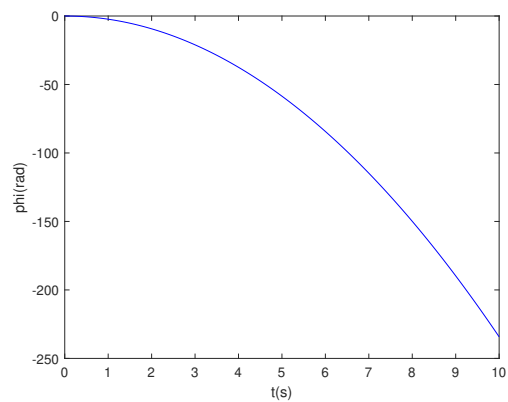
(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.14.** Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha giran con el mismo torque, pero en sentidos opuestos.

5. La rueda izquierda con torque hacia adelante y la rueda derecha con la mitad de la magnitud del torque de la rueda izquierda en sentido opuesto: La Fig. 3.15 muestra que la posición del móvil varía muy poco, mientras realiza una rotación continua en sentido de la rueda que tiene mayor torque.



(a) Gráfica de posición



(b) Gráfica de orientación

**Figura 3.15.** Simulación dinámica: Comportamiento del robot móvil cuando la rueda izquierda y derecha generan torques distintos en sentidos opuestos.

Cuando los casos de interés de las simulaciones cinemáticas y dinámicas se contrastan, se puede observar que el robot móvil desarrolla comportamientos muy similares. Si bien la simulación dinámica describe de manera más precisa el comportamiento que tiene el robot móvil diferencial en el mundo real, el costo computacional de su simulación es significativamente mayor que el de la simulación cinemática. Dependerá del uso que se le dé al modelo si se opta por uno cinemático o dinámico.

En particular, para la propuesta de planificador de trayectorias que se desarrolla en este trabajo de tesis, el modelo se utilizará más adelante para predecir el comportamiento futuro del móvil, a fin de poder detectar características poco favorables de la trayectoria (e.g., colisiones con los obstáculos o distancias de recorrido muy grandes) y corregirlas. Debido a que la planificación de trayectorias debe hacerse continuamente en este trabajo a causa del dinamismo del entorno (por los obstáculos en movimiento), es necesario considerar elementos que reduzcan la carga computacional de la propuesta. Por esta razón, se utilizará el modelo cinemático para simular el comportamiento futuro del robot móvil cuando sea necesario.

### **3.2. Planificación de trayectorias para el robot móvil diferencial**

La descripción, ya sea cinemática o dinámica, del comportamiento del robot móvil diferencial, permite desarrollar y probar distintas estrategias para planificar trayectorias adecuadas que el mismo robot es capaz de seguir para llegar de una configuración inicial a una final sin riesgo. A continuación, se analiza el funcionamiento de un algoritmo simple para la planificación de trayectorias en espacios estáticos, mismo que, como parte de este trabajo de tesis, será adaptado más adelante a través de optimización metaheurística para la generación de trayectorias optimizadas en espacios dinámicos.

### 3.2.1. Algoritmos de tipo Bug

Los algoritmos de tipo Bug (o de bicho, por el significado de esta palabra en español) son los algoritmos deterministas de planificación de trayectorias (i.e., bajo las mismas condiciones, siempre planifican la misma ruta) que se consideran más simples, ya que estos solo requieren de retroalimentación (a través de sensores o transductores) y no requieren un mapa completo del entorno (Klancar et al., 2017), i.e., planifican su trayectoria a partir de la información del escenario que pueden adquirir en un radio determinado. Por lo tanto, son apropiados en situaciones en las que el mapa del entorno es desconocido, cambia rápidamente o se tiene una capacidad de procesamiento computacional baja.

Estos algoritmos utilizan la información local (en un radio determinado) obtenida desde los sensores del vehículo (e.g., sensores infrarrojos o de ultrasonido) y la información global de la meta (la configuración final a la que deben llegar). Su funcionamiento considera dos comportamientos simples:

- El vehículo siempre se desplaza en línea recta hacia el objetivo.
- El vehículo cambia su dirección de movimiento al acercarse a un obstáculo.

Los robots móviles que utilizan estos algoritmos pueden evitar los obstáculos y moverse hacia la meta. Estos algoritmos requieren un bajo uso de memoria y procesamiento, y la ruta obtenida suele estar lejos de ser óptima, pero generalmente es eficiente para llegar a la configuración final sin colisionar.

### 3.2.2. Algoritmo Bug0

En el contexto de los algoritmos de planificación de trayectorias de tipo Bug, hay diferentes variantes que se distinguen por la complejidad de sus operaciones y por la manera en que realizan las dos actividades mencionadas anteriormente. Asimismo, todos presentan diferentes beneficios y limitaciones entre sí. El más simple de estos algoritmos se conoce como Bug0 y tiene dos comportamientos básicos:

1. El vehículo se mueve hacia el objetivo o meta, hasta que se detecta un obstáculo o se alcanza la configuración final. Para esto se utiliza un control de velocidad lineal de ganancia variable y uno de velocidad angular de ganancia fija, en donde la ganancia variable depende de la distancia entre el vehículo y la meta.
2. Si se detecta un obstáculo cercano, el vehículo gira  $\pi/2$  o  $-\pi/2$  con respecto a la dirección de colisión y sigue el contorno del obstáculo hasta que le es posible seguir una línea recta hacia la meta. En este caso, se utiliza un control de velocidad lineal y angular de ganancia fija.

El funcionamiento detallado de Bug0 se describe en el Algoritmo 1. En intervalos fijos de tiempo durante el movimiento del robot móvil diferencial, el Algoritmo 1 utiliza la distancia actual al obstáculo más cercano  $d_{obs}$ , la orientación actual del obstáculo más cercano con respecto al vehículo  $\theta_{obs}$ , la posición de la meta u objetivo  $p_{obj}$ , y la posición y orientación actuales del vehículo, respectivamente  $p_v$  y  $\theta_v$ , para calcular las entradas de control  $v$  y  $w$  (velocidades lineal y angular) que acercan al vehículo hacia la meta y permiten evadir los obstáculos en el camino. Para esto, se determina si la distancia al obstáculo más cercano es suficientemente segura utilizando un umbral aceptable  $d_{min}$  (línea 2). En ese caso, el vehículo debe dirigirse en dirección a la meta utilizando una ganancia variable para el control de velocidad lineal  $v$  y una ganancia fija para el control de velocidad angular  $w$  (líneas 3 a 7). La ganancia variable depende de la distancia hacia la meta. En caso contrario, el vehículo rodeará el obstáculo  $obs$  mediante un control de velocidad lineal y angular de ganancia fija en dirección  $\theta_{obs} \pm \frac{\pi}{2}$ , i.e., a la izquierda o derecha del obstáculo, pero siempre en el mismo sentido (líneas 9 a 12). Utilizando las ganancias de control (fijas o variables) se pueden calcular las entradas  $v$  y  $w$  (líneas 14 a 16) que generan las señales para mover al vehículo hacia la meta evadiendo obstáculos en el camino.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo de planificación de trayectorias Bug0.

---

**Input:** Distancia al obstáculo más cercano ( $d_{obs}$ ), Orientación del obstáculo más cercano con respecto al vehículo ( $\theta_{obs}$ ), Posición objetivo ( $p_{obj}$ ), Posición actual del vehículo ( $p_v$ ) y Orientación actual del vehículo ( $\theta_v$ )

**Output:** Velocidad lineal de entrada para el vehículo ( $v$ ) y Velocidad angular de entrada para el vehículo ( $w$ )

1 **Control basado en la distancia al obstáculo más cercano:**

2 **if**  $d_{obs} > d_{min}$  **then**

3     **Control de ganancia variable:**

4      $\theta_{ref} \leftarrow \arctan 2(p_{obj,y} - p_{v,y}, p_{obj,x} - p_{v,x})$

5      $e_\theta \leftarrow \theta_{ref} - \theta_v$

6      $d_{obj} \leftarrow \|p_{obj} - p_v\|$

7      $g \leftarrow \left[ \frac{d_{obj}}{2}, g_2 \right]$

8 **else**

9     **Control de ganancia fija:**

10      $\theta_{ref} \leftarrow \theta_{obs} \pm \frac{\pi}{2}$

11      $e_\theta \leftarrow \theta_{ref} - \theta_v$

12      $g \leftarrow [g_1, g_2]$

13 **Control simple del robot móvil diferencial**

14  $v \leftarrow g_1 |\cos(e_\theta)|$

15  $w \leftarrow g_2 \cdot e_\theta$

16  $v \leftarrow \min \{v, v_{max}\}$

17 **return**  $v, w$

---

En su forma original, el algoritmo Bug0 es efectivo para abordar algunos escenarios con obstáculos estáticos. Sin embargo, en espacios en donde varios obstáculos fijos rodean a la meta, el vehículo podría encontrarse girando alrededor de los obstáculos (ya sea por la izquierda o por la derecha) indeterminadamente sin alcanzar la meta.

En el caso de un escenario dinámico, Bug0 está imposibilitado para encontrar una trayectoria adecuada debido a:

- El vehículo puede solamente evadir obstáculos en un sentido (izquierdo o derecho con respecto a la dirección de colisión). Si el vehículo, por ejemplo, evade un obstáculo dinámico hacia la derecha y el mismo obstáculo se mueve en esa misma dirección, la colisión puede ser inevitable.
- Se utilizan ganancias fijas en el control de velocidad lineal y angular (en el lineal, la ganancia es fija solo cuando no hay obstáculos cerca del vehículo). En algunos casos, estas ganancias fijas pueden evitar que el vehículo se mueva más o menos rápido para evitar la colisión con algunos obstáculos dinámicos.
- Este planificador no tiene forma de predecir el comportamiento futuro del vehículo para tomar decisiones acertadas sobre su seguridad o sobre la eficiencia del trayecto.

La propuesta de planificador de trayectorias que se aborda en esta tesis está basada en el algoritmo Bug0 por su simplicidad y bajo costo, y busca afrontar las dificultades del mismo algoritmo a través de optimización. En este sentido, es necesario formular un problema formal de optimización cuya solución ayude a Bug0 en el manejo de escenarios dinámicos. Este problema se resuelve continuamente, siempre que sea necesario (cuando una amenaza se encuentre cerca del vehículo).

### 3.3. Problema de optimización

De manera general, un problema de optimización formal se describe en lenguaje matemático como sigue:

$$\mathbf{min} J(\mathbf{p}) = [J_1(\mathbf{p}), J_2(\mathbf{p}), \dots, J_m(\mathbf{p})] \quad (3.122)$$

Sujeto a:

$$g_i(\mathbf{p}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n_g \quad (3.123)$$

$$h_j(\mathbf{p}) = 0, j = 1, 2, \dots, n_h \quad (3.124)$$

El planteamiento anterior consiste en encontrar el valor de las variables de diseño en el vector  $\mathbf{p}$  que minimiza el valor de las  $m$  funciones objetivo en  $J$ , como se observa en (3.122). Las soluciones a este



problema pueden estar condicionadas por  $n_g$  restricciones de desigualdad en (3.123) o  $n_h$  restricciones de igualdad en (3.124). Las restricciones de desigualdad o restricciones suaves son condiciones que se pueden cumplir con cierto grado de holgura. Por otra parte, las restricciones de igualdad o restricciones duras son condiciones que se deben cumplir con exactitud. Adicionalmente, el espacio de búsqueda, i.e., los posibles valores que puede adquirir el vector  $p$ , están limitados por las restricciones de caja, que incluyen los valores mínimo y máximo de cada variable de diseño.

A continuación, cada uno de los elementos del problema de optimización anterior se describen para el método propuesto de planificación de trayectorias en entornos dinámicos para un robot móvil diferencial basado en el algoritmo Bug0.

### 3.3.1. Variables de diseño

Las variables de diseño representan las alternativas que se pueden elegir para solucionar el problema de optimización y que, en consecuencia, afectan el valor de la función objetivo (Ramos et al., 2010).

En el problema de planificación de trayectorias resuelto mediante un algoritmo Bug0, existen algunas dificultades que se relacionan con varios parámetros fijos del mismo:

1. En este algoritmo, cuando el vehículo se topa con un obstáculo, siempre lo evade en la misma dirección (hacia la izquierda o derecha, o bien en  $\pm \frac{\pi}{2}$ ). Debido a esto, pueden existir escenarios donde la distancia recorrida se incremente, donde el vehículo no logre llegar a la meta o donde se produzca una colisión con obstáculos que se dirigen al mismo lugar.
2. Además, en Bug0, se utiliza un control de ganancia fija al momento de toparse con un obstáculo. En consecuencia, es posible que existan escenarios en donde los movimientos que genera el control de ganancia fija no permitan evadir a tiempo obstáculos de tipo dinámico.

Por lo anterior, el vector de variables de diseño que se escoge para este problema incluye a la

dirección de evasión  $s$  y a las dos ganancias de control para esquivar obstáculos  $g_1$  y  $g_2$  (ver Algoritmo 1) como se muestra a continuación:

$$\mathbf{p} = [s, g_1, g_2]^T \quad (3.125)$$

### 3.3.2. Función objetivo

Se define, según Ramos et al. (2010), como la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar), e.g. la minimización de los costes variables de operación de un sistema eléctrico, la maximización de los beneficios netos de venta de ciertos productos, la reducción del desperdicio durante la fabricación de un bien, la disminución del error en la realización de una tarea con un brazo robótico, etc.

En el problema de planificación dinámica de trayectorias basada en Bug0, la función objetivo que se utilizará es la distancia desde la última posición del vehículo predicha (a través del modelo cinemático) hacia la meta.

$$J(\mathbf{p}) = \text{dist}(\boldsymbol{\xi}(t + h \cdot dt), \boldsymbol{\xi}_{goal}) \quad (3.126)$$

en donde  $\boldsymbol{\xi}(t + h \cdot dt)$  es la posición final del centro del vehículo simulado después de la ventana de tiempo de predicción  $h \cdot dt$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{goal}$  la posición objetivo (meta),  $h$  es el horizonte de predicción y  $dt$  es el intervalo de muestreo.

Con lo anterior, el planificador podrá realizar una simulación futura del comportamiento del vehículo utilizando el modelo cinemático a partir de su configuración actual. Lo anterior, para determinar la configuración de los parámetros del algoritmo Bug0 que mejor lo acercan hacia la meta.

### 3.3.3. Restricciones

Es el conjunto de relaciones (representadas con igualdades o desigualdades) que ciertas variables están obligadas a satisfacer (Ramos et al., 2010).

En el problema de planificación dinámica de trayectorias basada en Bug0, las restricciones contabilizan el número de colisiones futuras que podría tener el vehículo simulado (utilizando el modelo cinemático) con los obstáculos en el entorno durante el periodo de predicción.

$$h_j(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1, & \text{if } dist(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_{obs}) < \frac{L}{2} + r_{obs} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, n_{obs}h \quad (3.127)$$

en donde  $\boldsymbol{\xi} = [x, y]^T$  es la posición del centro geométrico del vehículo simulado,  $\boldsymbol{\xi}_{obs}$  es la posición del centro del obstáculo,  $\frac{L}{2}$  es el radio del robot,  $r_{obs}$  es el radio de los obstáculos,  $n_{obs}$  es el número de obstáculos y  $h$  es el horizonte de predicción.

Con estas restricciones, el planificador simula el comportamiento futuro del robot móvil diferencial utilizando el modelo cinemático a partir de su configuración actual. Esto permite escoger los parámetros del algoritmo Bug0 que guíen al vehículo por una trayectoria libre de colisiones con los obstáculos en movimiento.

## 3.4. Evolución diferencial

El problema de optimización del algoritmo Bug0 descrito en la sección anterior, incluye elementos altamente no lineales, discontinuos y no diferenciables, lo que lo hace complejo y difícil de resolver por métodos tradicionales de búsqueda u optimización. Por esta razón, las técnicas aproximadas de optimización, como las metaheurísticas, pueden ser alternativas adecuadas para encontrar soluciones viables al problema.

En el documento (Sharma et al., 2019) se menciona que la Evolución Diferencial (ED) es una técnica de optimización metaheurística simple inspirada en la evolución natural de las especies. Este algoritmo tiene una población de individuos que busca la solución aproximada a un problema de optimización, como lo hacen otras estrategias de búsqueda poblacionales. La operación general de la variante más utilizada de ED, la *rand/1/bin* se describe en el Algoritmo 2. En ED, cada vector D-dimensional  $x_i = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_D}]^T, i = 1, 2, \dots, NP$  en una población de  $NP$  individuos, se utiliza para representar una solución candidata al problema de optimización. Al inicio del algoritmo, la población inicial o de primera generación incluye individuos generados aleatoriamente en el espacio de búsqueda delimitado por  $d_{min}$  y  $d_{max}$  (líneas 1 y 2). Durante un máximo de  $G_{max}$  iteraciones, cada uno de los individuos en la población actual  $X_G$  genera primero un individuo mutante y después un descendiente con el que compete para determinar la solución más apta que persiste en la siguiente generación (líneas 3 a 9). Para esto, ED incluye tres operadores conocidos como mutación, cruce y selección que se detallan más adelante. Al terminar la última generación, se selecciona al mejor individuo de la población final como la solución al problema de optimización (línea 10).

---

**Algoritmo 2:** Evolución Diferencial (rand/1/bin)

---

**Input:** Número máximo de generaciones ( $G_{max}$ ), Número de individuos en la población ( $NP$ ), Factor de cruza ( $CR$ ), Factor de escalamiento ( $F$ ), Función objetivo ( $J$ ), Restricciones de igualdad ( $h_j, j = 1, \dots, n_h$ ) y Restricciones de caja ( $d_{min}$  y  $d_{max}$ )

**Output:** Mejor solución ( $x_{best}$ )

```
1  $G \leftarrow 0$ 
2 Genera una población inicial  $X_G$  con  $NP$  individuos obtenidos aleatoriamente entre  $d_{min}$  y  $d_{max}$ .
3 while  $G < G_{max}$  do
4   foreach  $x_i \in X_G$  do
5     Selecciona tres individuos padres  $x_{r1}$ ,  $x_{r2}$  y  $x_{r3}$  aleatoriamente de la población  $X_G$  tal que
        $r1 \neq r2 \neq r3 \neq i$ .
6     Genera un individuo mutante  $v_i$  utilizando (3.128).
7     Genera un individuo descendiente  $u_i$  utilizando (3.129).
8     Selecciona entre  $x_i$  y  $u_i$  al individuo que permanece en la población  $X_{G+1}$  con base en  $J$  y
        $h_j, j = 1, \dots, n_h$ .
9    $G \leftarrow G + 1$ 
10 Selecciona  $x_{best}$  como el mejor individuo de la población  $X_G$  con base en  $J$  y  $h_j, j = 1, \dots, n_h$ .
11 return  $x_{best}$ 
```

---

Por su simplicidad, ED en su variante *rand/1/bin* se utiliza en este trabajo para resolver continuamente el problema de optimización del algoritmo Bug0 y sus operadores se describen a continuación.

## Mutación

Este operador se utiliza en ED *rand/1/bin* para generar un vector mutante  $v_i$ , que luego se ocupa en el operador de cruza para obtener un vector descendiente  $u_i$ . Para cada individuo de la población actual  $x_i$ , el operador de mutación utiliza tres individuos padres diferentes entre sí para generar al mutante con la Ecuación (3.128), donde el aumento de la variación diferencial está controlada por el factor de mutación  $F \in [0, 1]$ .

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{r1} + F \cdot (\mathbf{x}_{r2} - \mathbf{x}_{r3}) \quad (3.128)$$

## Cruza

La ED *rand/1/bin* aplica la recombinación binomial para generar al descendiente  $\mathbf{u}_i$  combinando el vector original  $\mathbf{x}_i$  y el vector mutante  $\mathbf{v}_i$ , utilizando (3.129) con  $CR \in [0, 1]$  como la probabilidad de cruza y  $j_{rand}$  una variable de diseño elegida aleatoriamente.

$$u_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} & \text{if } rand(0, 1) < CR \text{ or } j = j_{rand} \\ x_{i,j} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.129)$$

## Selección

La selección en ED *rand/1/bin* consiste en elegir a la mejor alternativa entre un par de soluciones. Cuando se utilizan algoritmos evolutivos para resolver problemas con restricciones, es necesario incorporar dentro de su funcionamiento un manejador que permita trabajar con soluciones no factibles. El mecanismo de las reglas de Deb es una alternativa simple y eficiente para manejar soluciones no factibles dentro de los resultados arrojados al paso de las iteraciones. Para esto, las reglas ponderan primero la factibilidad y después la optimalidad al momento de comparar dos soluciones.

Las reglas de factibilidad de Deb están determinadas por las siguientes tres condiciones simples (Mezura-Montes and Coello, 2011):

1. Si se compara una solución factible contra otra no factible, entonces se prefiere a la primera.
2. Si se comparan dos soluciones factibles, se prefiere a la que tiene el mejor valor de la función objetivo.

3. Si se comparan dos soluciones no factibles, se prefiere aquella que tiene la menor suma de violación de restricciones.

La suma de violación de restricciones esta representada de la siguiente manera:

$$\phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n_g} \max(0, g_i(\mathbf{p}))^2 + \sum_{j=1}^{n_h} |h_j(\mathbf{p})| \quad (3.130)$$

### 3.5. Planificador de trayectoria Propuesto

La propuesta en el Algoritmo 3 funciona utilizando la evasión del algoritmo Bug0, pero optimizando en línea las ganancias  $g_1$  y  $g_2$  además del ángulo de evasión  $\theta$  con ayuda de ED.

---

**Algoritmo 3:** Propuesta de algoritmo planificador de trayectorias.

---

**Input:** Distancia al obstáculo más cercano ( $d_{obs}$ ), Orientación del obstáculo más cercano con respecto al vehículo ( $\theta_{obs}$ ), Posición objetivo ( $p_{obj}$ ), Posición actual del vehículo ( $p_v$ ) y Orientación actual del vehículo ( $\theta_v$ )

**Output:** Velocidad lineal de entrada para el vehículo ( $v$ ) y Velocidad angular de entrada para el vehículo ( $w$ )

1 **Control basado en la distancia al obstáculo más cercano:**

2 **if**  $d_{obs} > d_{min}$  **then**

3     **Control de ganancia variable:**

4      $\theta_{ref} \leftarrow \arctan 2(p_{obj,y} - p_{v,y}, p_{obj,x} - p_{v,x})$

5      $e_\theta \leftarrow \theta_{ref} - \theta_v$

6      $d_{obj} \leftarrow \|p_{obj} - p_v\|$

7      $g \leftarrow \left[ \frac{d_{obj}}{2}, g_2 \right]$

8 **else**

9     **Reoptimización de ganancias de control**

10      $g_1, g_2, s \leftarrow \text{Evolución Diferencial}()$

11     **Control de ganancia optimizada:**

12      $\theta_{ref} \leftarrow \theta_{obs} + s \frac{\pi}{2}$

13      $e_\theta \leftarrow \theta_{ref} - \theta_v$

14      $g \leftarrow [g_1, g_2]$

15 **Control simple del robot móvil diferencial**

16  $v \leftarrow g_1 |\cos(e_\theta)|$

17  $w \leftarrow g_2 \cdot e_\theta$

18  $v \leftarrow \min \{v, v_{max}\}$

19 **return**  $v, w$

---



## **Capítulo 4**

# **Resultados y discusión**

## 4.1. Características de los experimentos

En esta sección se describirán los pormenores para elaborar los experimentos en simulación. Estos incluyen las dimensiones del vehículo; el tamaño y comportamiento de los obstáculos; y las condiciones del escenario en el cual se llevará a cabo la planificación de trayectorias descrita en el capítulo anterior.

### 4.1.1. El escenario

El escenario consta de dos dimensiones ( $x$  e  $y$ ) y el área de trabajo no se encuentra acotada. La Fig. 4.1 muestra un bosquejo del escenario utilizado en las simulaciones, en donde se observa el punto de inicio en azul (0,0), la meta en verde (0,4) y los obstáculos en rojo, mismos que se detallarán más adelante.

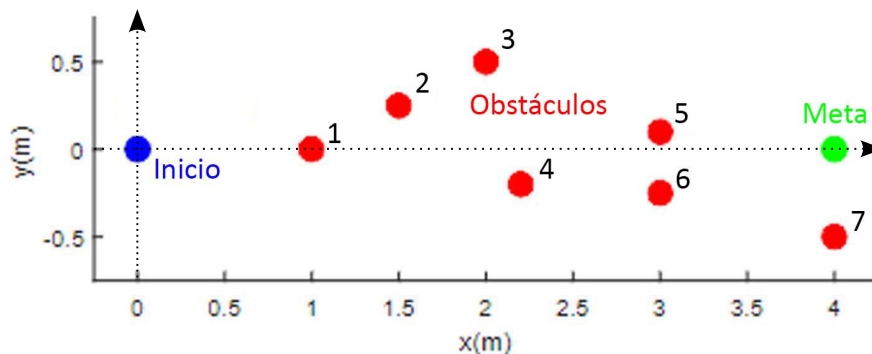
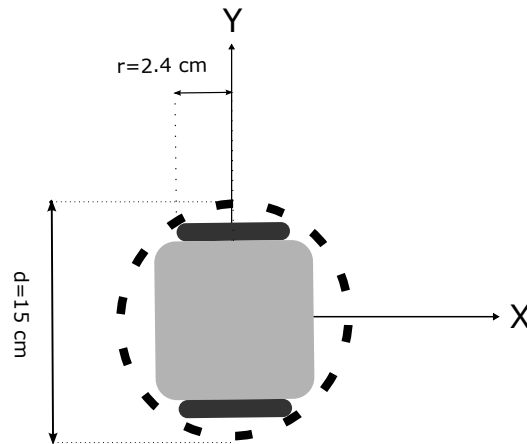


Figura 4.1. Escenario de la simulación.

### 4.1.2. El vehículo

Las características del robot móvil diferencial en la simulación se observan la Fig. 4.2. De esta forma, el vehículo en simulación tiene una forma circular con un diámetro de 15 (cm) y el radio de sus ruedas es de 2.4 (cm).



**Figura 4.2.** Dimensiones del robot móvil diferencial.

#### 4.1.3. Configuraciones inicial y final

Las posiciones del punto de inicio y meta son fijas en los experimentos en simulación. El punto inicial se encuentra en  $(0, 0)$  (m) y la meta está en  $(4, 0)$  (m). La orientación inicial del robot móvil diferencial es de cero grados (i.e., se encuentra mirando hacia la derecha).

#### 4.1.4. Los obstáculos móviles

Los siete obstáculos que se presentan en los experimentos tienen el mismo radio del robot móvil diferencial (7.5 (cm)). Su movimiento está determinado por una función que genera una trayectoria fija para cada obstáculo, misma que se asume conocida por el robot (en la práctica, esta trayectoria puede estimarse a partir de la información que proveen los sensores en el vehículo). Las funciones que determinan el movimiento de cada obstáculo son las siguientes:

1.  $x_1 = 1.0$  (m) e  $y_1 = 0.1 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$  (m), es decir, genera una oscilación vertical de  $\pm 10$  centímetros.
2.  $x_2 = 2.0 + 0.2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$  (m) e  $y_2 = -0.2 + 0.2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$  (m), es decir, genera una trayectoria circular

de 20 centímetros de radio.

3.  $x_3 = 3.0$  (m) e  $y_3 = 0.1 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$  (m), es decir, genera una oscilación vertical de  $\pm 10$  centímetros.
4.  $x_4 = 1.0 + 0.5 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$  (m) e  $y_4 = 0.25$  (m), es decir, genera una oscilación horizontal de  $\pm 50$  centímetros.
5.  $x_5 = 3.0 + 0.5 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$  (m) e  $y_5 = -0.25$  (m), es decir, genera una oscilación horizontal de  $\pm 50$  centímetros.
6.  $x_6 = 2.0 + 2.0 \sin(2t)$  (m) e  $y_6 = 0.5$  (m), es decir, genera una oscilación horizontal de  $\pm 200$  centímetros.
7.  $x_7 = 2.0 + 2.0 \cos(2t)$  (m) e  $y_7 = -0.5$  (m), es decir, genera una oscilación horizontal de  $\pm 200$  centímetros.

#### 4.1.5. El problema de la optimización

Las restricciones de caja que se utilizan para limitar los valores de las variables de diseño en el problema de optimización del algoritmo Bug0 (i.e., los valores mínimos y máximos de cada variable) son las siguientes:  $\mathbf{p}_{min} = [0.0, 0.0, -1.0]$  y  $\mathbf{p}_{max} = [1.0, 10.0, 1.0]$ . En cuanto a la simulación cinemática del robot móvil que se requiere para hacer predicciones futuras, se utiliza un intervalo de muestreo  $dt = 0.03$  (s), y un horizonte de predicción  $h = 10$ . Asimismo, las distancias siempre se miden utilizando la euclídea (distancia euclidiana).

#### 4.1.6. La metaheurística

Los parámetros que se utilizaron en la técnica metaheurística de ED *rand/1/bin* para las pruebas en simulación del planificador de trayectorias propuesto son un factor de escala  $F = 0.5$ , un factor de cruce  $CR = 0.5$ , un tamaño de población  $NP = 20$  y un número máximo de generaciones  $G_{max} = 100$ . Lo anterior, procurando que el costo computacional de la optimización pueda ser asequible en una posible

experimentación real. Cabe mencionar que la reoptimización del algoritmo de Bug0 se lleva a cabo con ED *rand/1/bin* cada *dt*.

## 4.2. Resultados y discusión

Para generar los resultados en simulación y obtener suficiente evidencia del funcionamiento de la propuesta se realizan 30 ejecuciones independientes de los experimentos en simulación. Posteriormente, estos resultados se comparan con los obtenidos con el algoritmo original de Bug0.

La Tabla 4.1 muestra los resultados obtenidos con el planificador de trayectorias propuesto después de 30 ejecuciones independientes bajo las mismas condiciones experimentales en simulación. En la primera columna se encuentra el número de la corrida, en las siguientes columnas se muestran la longitud total del recorrido, el número de veces que colisionó el vehículo con los obstáculos dinámicos durante el trayecto, el tiempo que le tomó al robot móvil diferencial terminar el recorrido, la rapidez promedio con la que se desplazó durante el trayecto y el tiempo computacional para procesar el algoritmo propuesto y la simulación. En la parte inferior de la tabla se observa el resumen estadístico de cada una de las columnas mencionadas. Este resumen incluye el promedio, la desviación estándar y los valores máximos y mínimos de cada columna. Los resultados en negritas hacen referencia a los mejores resultados de las 30 corridas.

Con base en los resultados de la Tabla 4.1, se encontró que, a pesar de que el escenario tiene múltiples obstáculos en movimiento, el planificador de trayectorias propuesto generó recorridos libres de colisiones en cada una de las 30 ejecuciones independientes. Esto es de suma relevancia debido a que, en un entorno experimental físico, podría ayudar a resguardar la integridad del robot móvil diferencial real para así evitar costos innecesarios de reparación. En la misma Tabla 4.1, el valor pequeño de la desviación estándar, en comparación con la media, para la longitud del trayecto, el tiempo de llegada y la rapidez, indica que los resultados obtenidos son muy similares en cada corrida, lo cual resalta la confiabilidad de la propuesta. Se aprecia también que la diferencia entre los valores mínimo y máximo es de aproximadamente 2 centímetros para la longitud del trayecto, de 3 centésimas de segundo para el

tiempo de llegada y, en el caso de la rapidez, es de 1 milímetro sobre segundo, lo cual denota aún más dicha confiabilidad a pesar de que el algoritmo de planificación es estocástico (debido a que utiliza ED como optimizador). Por otra parte, la propuesta muestra ser eficiente, debido a que todas las corridas en simulación se realizan en un tiempo aceptable en comparación con el tiempo total del recorrido. Lo anterior se observa en la columna de tiempo de ejecución, en donde los resultados no sobrepasan los 2.3460 segundos. A pesar de esto, se observa que para esta columna, la desviación estándar es ligeramente mayor en proporción a la media con respecto al resto de las columnas. Esto se debe a que las simulaciones se llevan a cabo en una computadora convencional en donde además se ejecutan a la par múltiples procesos derivados del funcionamiento operativo.

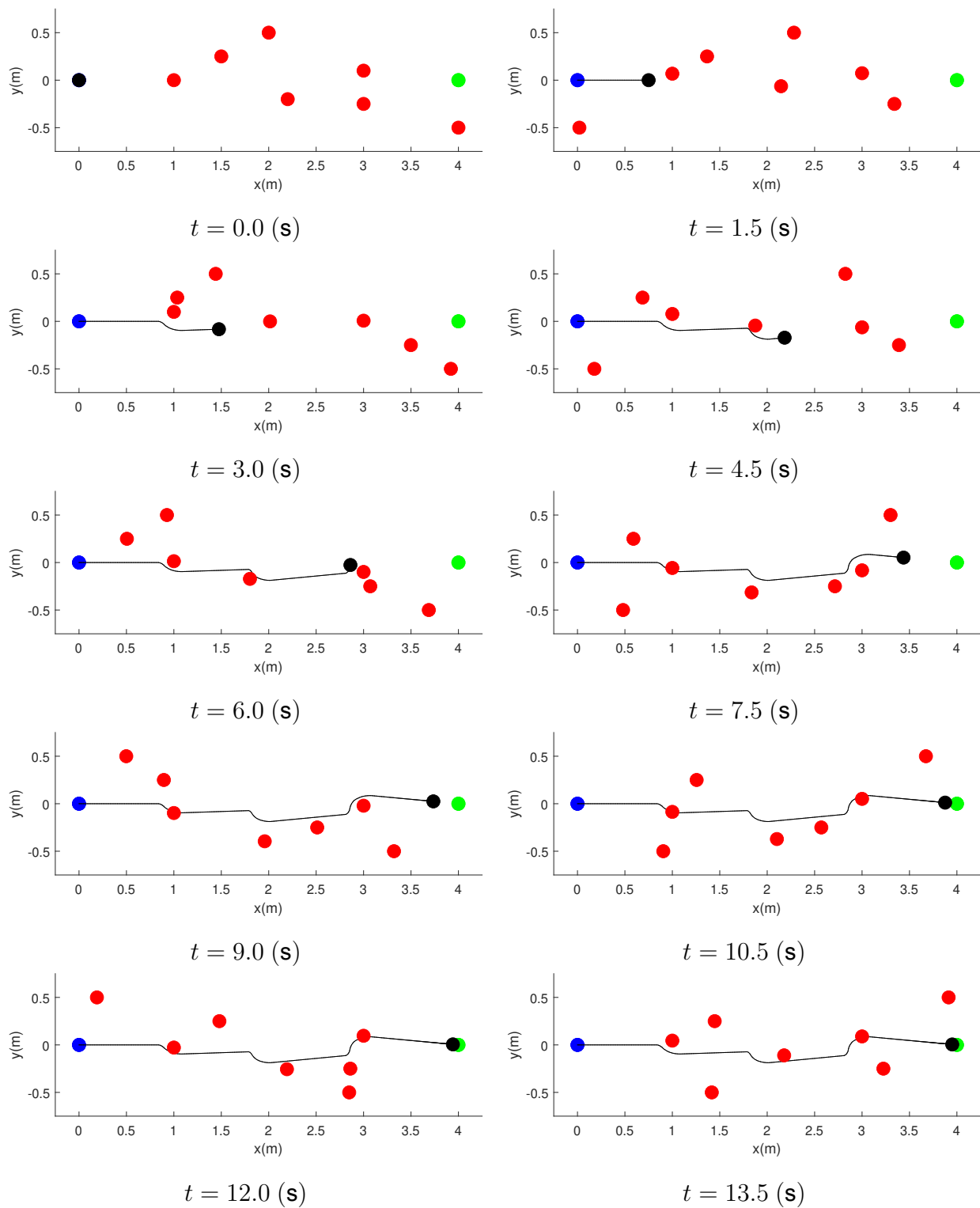
La Figura 4.3 muestra el comportamiento de una ejecución arbitraria del planificador de trayectorias propuesto. En esta figura se incluyen las gráficas del escenario completo cada 1.5 (s). Los círculos de color rojo, verde, negro y azul representan respectivamente a los obstáculos, la meta, el vehículo y el punto inicial de la trayectoria. En esta figura se puede observar cómo el planificador de trayectorias propuesto es capaz de realizar cambios en la dirección de evasión y en la velocidad del vehículo para evitar colisiones con obstáculos dinámicos.

Las Tablas 4.2 y 4.3 incluyen los resultados obtenidos con el algoritmo Bug0 que utiliza ganancias de control constantes y se direcciona a la derecha e izquierda, respectivamente, tras 30 ejecuciones independientes bajo las mismas condiciones experimentales. En la primera columna indica el número de la corrida, en las siguientes columnas se muestra la distancia del recorrido, la cantidad de veces que colisionó el robot con los obstáculos dinámicos en el trayecto, el tiempo que duró el recorrido del vehículo hasta llegar a la meta, la rapidez con la que se desplazó durante el recorrido y el tiempo que tardó la computadora en procesar cada variante del algoritmo Bug0 con su respectiva simulación. Al igual que en la Tabla 4.1, la parte inferior muestra los mismos datos estadísticos de cada columna y, de igual manera, los mejores resultados aparecen con letras en negritas.

En los resultados de las Tablas 4.2 y 4.3 que corresponden a dos variantes del algoritmo Bug0 (una que evade a la izquierda y otra a la derecha) se observa que la desviación estándar es cero en la longitud del trayecto, en el tiempo de llegada y en la rapidez, lo cual, es un comportamiento esperado, ya que los algoritmos de tipo Bug son deterministas. Por lo anterior, siempre se observan los mismos

**Tabla 4.1.** Resultados del planificador de trayectorias propuesto.

Corrida	Longitud del trayecto (m)	Colisiones	Tiempo de llegada (s)	Rapidez (m/s)	Tiempo de ejecución (s)
1	4.1185	0	12.3000	0.3348	2.3460
2	4.1228	0	12.3000	0.3351	2.2770
3	4.1188	0	12.3000	0.3348	2.1370
4	<b>4.1085</b>	0	<b>12.2700</b>	0.3348	2.1770
5	4.1138	0	<b>12.2700</b>	0.3352	2.1450
6	4.1185	0	12.3000	0.3348	2.1160
7	4.1220	0	12.3000	0.3351	2.1090
8	4.1124	0	<b>12.2700</b>	0.3351	2.1830
9	4.1205	0	12.3000	0.3350	2.1400
10	4.1190	0	12.3000	0.3348	2.1850
11	4.1197	0	12.3000	0.3349	2.1330
12	4.1194	0	12.3000	0.3349	2.1110
13	4.1177	0	12.3000	0.3347	2.1080
14	4.1226	0	12.3000	0.3351	2.1240
15	4.1212	0	12.3000	0.3350	2.0780
16	4.1205	0	12.3000	0.3350	2.1170
17	4.1177	0	12.3000	0.3347	2.1060
18	4.1185	0	12.3000	0.3348	2.1450
19	4.1152	0	<b>12.2700</b>	0.3353	2.1510
20	4.1185	0	12.3000	0.3348	2.1780
21	4.1181	0	12.3000	0.3348	2.1360
22	4.1253	0	12.3000	0.3353	<b>2.0710</b>
23	4.1240	0	12.3000	0.3352	2.1500
24	4.1103	0	<b>12.2700</b>	0.3349	2.1920
25	4.1212	0	12.3000	0.3350	2.1210
26	4.1125	0	<b>12.2700</b>	0.3351	2.1410
27	4.1176	0	12.3000	0.3347	2.1410
28	4.1173	0	12.3000	0.3347	2.1600
29	4.1163	0	<b>12.2700</b>	<b>0.3354</b>	2.2520
30	4.1095	0	<b>12.2700</b>	0.3349	2.1690
Promedio	4.1179	0	12.2920	0.3350	2.1533
Desv.	0.0040	0	0.0134	0.0002	0.0568
Máximo	4.1253	0	12.3000	0.3354	2.3460
Mínimo	4.1085	0	12.2700	0.3347	2.0710



**Figura 4.3.** Comportamiento del planificador de trayectorias propuesto para una ejecución arbitraria. Se muestra el escenario completo cada 1.5 (s).



resultados en cada una de las corridas independientes de estos algoritmos. Con respecto a los valores del tiempo de ejecución, se presentan variaciones pequeñas de milésimas de segundo, debido a que la computadora utilizada para las simulaciones tiene procesos en segundo plano que se ejecutan a la par y que se derivan de las múltiples tareas del sistema operativo. Por otro lado, uno de los hallazgos más importantes en estas dos tablas es que las trayectorias generadas por las variantes de Bug0 siempre presentan colisiones. En el caso de la variante de la Tabla 4.2 el número de colisiones es 4, mientras que en la variante de la Tabla 4.3 es de 23. Lo anterior indica que aunque la nula variación en los resultados de las corridas podría ser deseable, los trayectos generados no cumplen con el objetivo de evitar colisiones y puede conllevar a costos adicionales durante las pruebas físicas. Por esto, Bug0 se considera como un algoritmo inviable para la planificación de trayectorias en entornos dinámicos.

A partir de la información en las Tablas 4.1-4.3 se puede notar que las trayectorias generadas por la propuesta tienen, en todos los casos, longitudes de trayecto, número de colisiones y tiempos de llegada reducidos, y en consecuencia, valores de rapidez mayores. Con base en lo anterior, las trayectorias generadas por la propuesta pueden considerarse mejores que las del método de planificación original Bug0. En particular, el hecho de que el número de colisiones en los trayectos generados por la propuesta sea cero, mientras que en los recorridos obtenidos por Bug0 sea diferente, indica una gran ventaja del primer método sobre el segundo, ya que puede conllevar a un ahorro significativo de gastos por daños al vehículo durante su aplicación real. Por lo tanto, después de observar los datos que arrojan ambos planificadores de trayectorias (Bug0 y el propuesto), es evidente la gran eficiencia del método propuesto, ya que obtiene mejores resultados en todos los aspectos que se mencionan en las tablas de resultados anteriores, exceptuando el tiempo de ejecución de la simulación, aunque este último sigue siendo asequible para una eventual experimentación con el dispositivo físico.

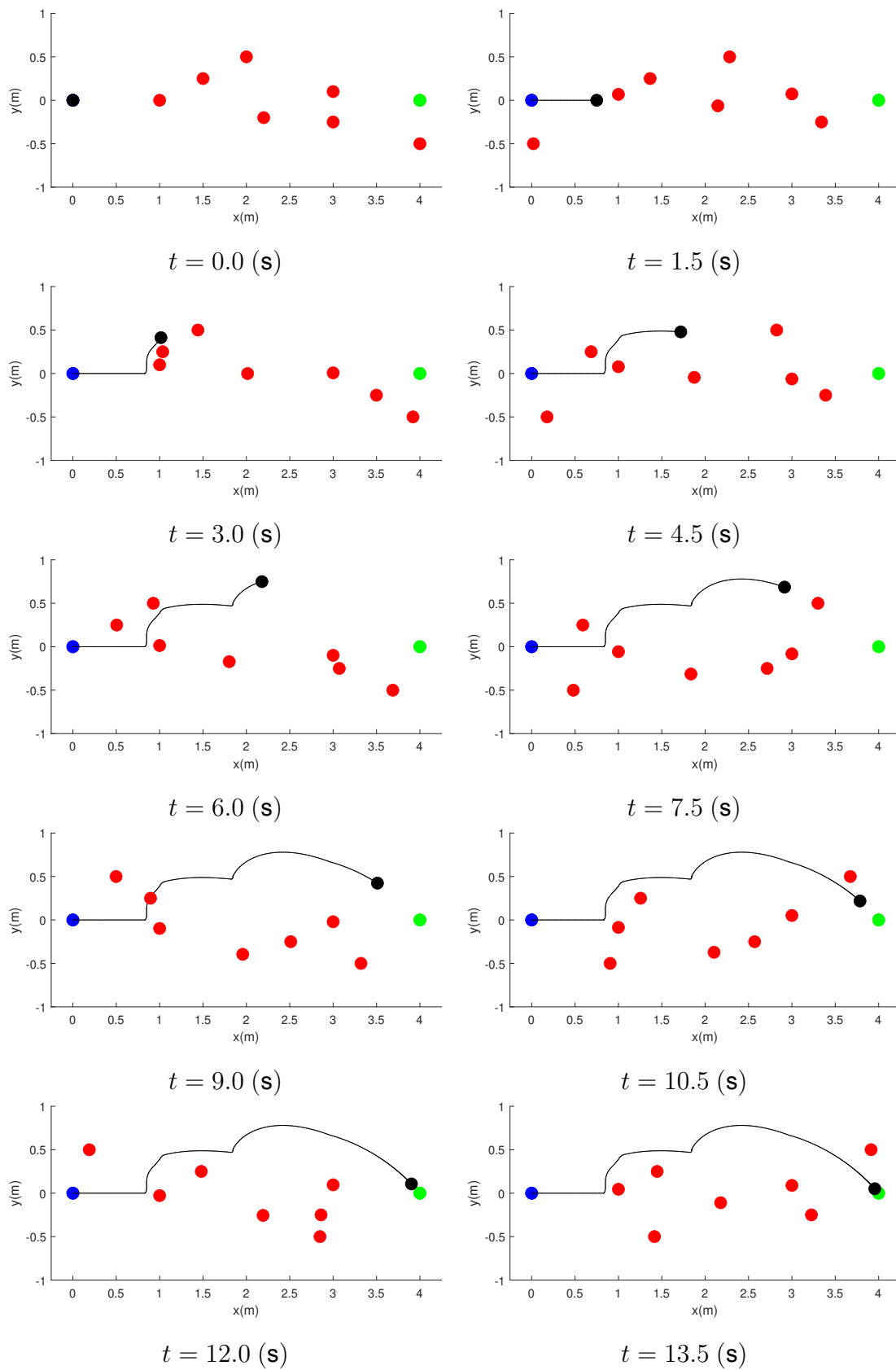
Las Figuras 4.4 y 4.5 describen el comportamiento de una ejecución de las variantes de Bug0 con evasión de obstáculos a la izquierda y a la derecha respectivamente. En estas ilustraciones se incluyen las gráficas del escenario completo cada 1.5 (s). Las circunferencias de color rojo, verde, negro y azul representan respectivamente a los obstáculos, el punto de llegada, el robot móvil diferencial y el inicio de la trayectoria. En esta figura se puede observar cómo el planificador de trayectorias propuesto trata de evadir los obstáculos dinámicos cambiando la dirección del vehículo hacia la izquierda o la derecha del posible punto de colisión.

**Tabla 4.2.** Resultados del planificador de trayectorias Bug0 con ganancias de control constantes y giro de evasión de obstáculos siempre a la derecha.

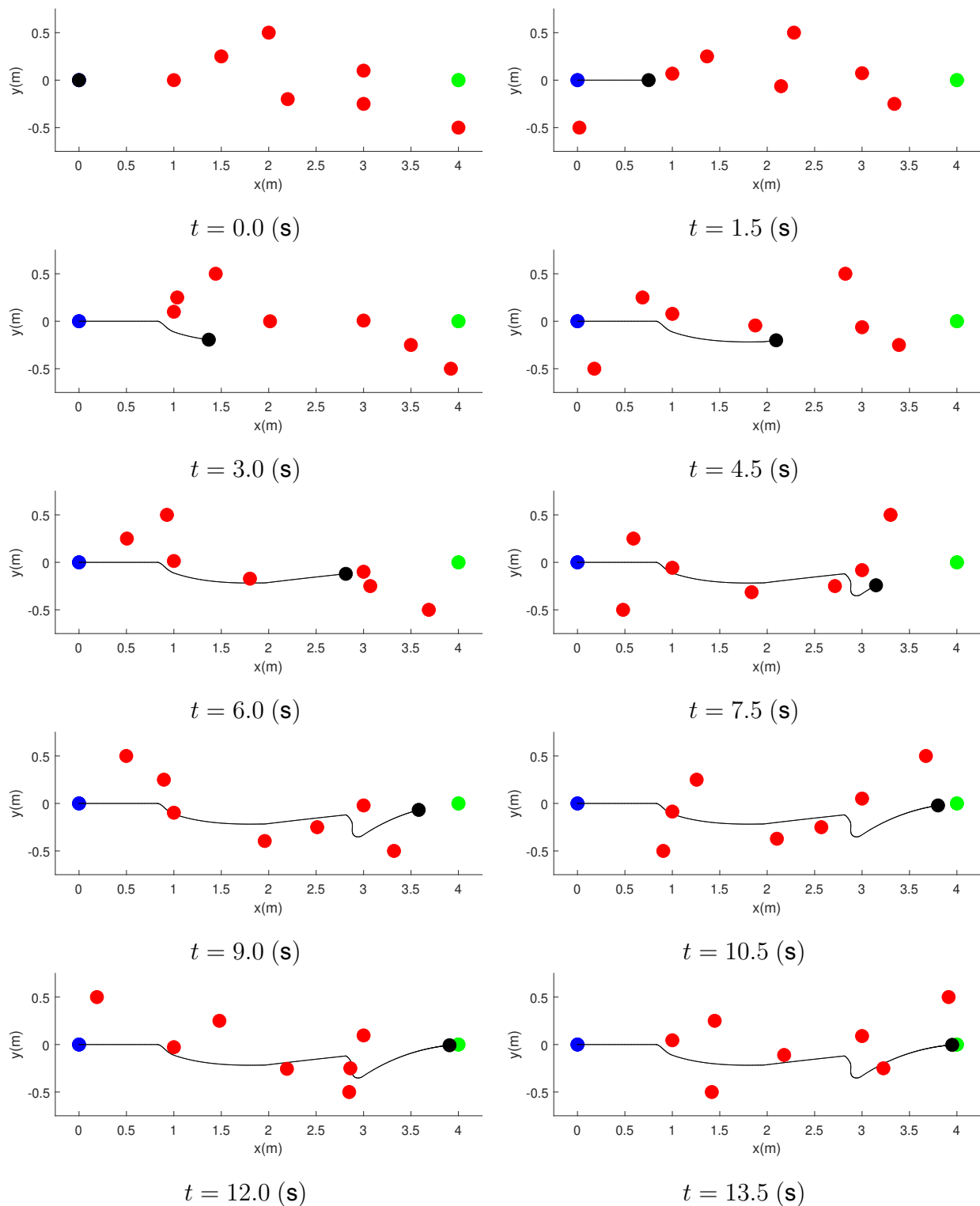
Corrida	Longitud del trayecto	Colisiones	Tiempo de llegada	Rapidez	Tiempo de ejecución
1	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
2	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
3	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
4	4.6004	4	14.1000	0.3262	<b>0.0010</b>
5	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
6	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0040
7	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
8	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
9	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
10	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
11	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
12	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
13	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0040
14	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
15	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
16	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
17	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
18	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
19	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
20	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
21	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
22	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
23	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
24	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
25	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
26	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
27	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0020
28	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0040
29	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
30	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0030
Promedio	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0027
Desv.	0	0	0	0	0.0007
Máximo	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0040
Mínimo	4.6004	4	14.1000	0.3262	0.0010

**Tabla 4.3.** Resultados del planificador de trayectorias Bug0 con ganancias de control constantes y giro de evasión de obstáculos siempre a la izquierda.

Corrida	Longitud del trayecto	Colisiones	Tiempo de llegada	Rapidez	Tiempo de ejecución
1	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
2	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
3	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
4	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
5	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
6	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
7	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0040
8	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
9	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
10	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
11	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
12	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0040
13	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
14	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
15	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
16	4.2359	23	13.2300	0.3201	<b>0.0010</b>
17	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
18	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
19	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
20	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
21	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
22	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
23	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
24	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
25	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0040
26	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
27	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0020
28	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
29	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
30	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0030
Promedio	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0026
Desv.	0	0	0	0	0.0007
Máximo	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0040
Mínimo	4.2359	23	13.2300	0.3201	0.0010



**Figura 4.4.** Comportamiento del planificador de trayectorias Bug0 con evasión a la izquierda. Se muestra el escenario completo cada 1.5 (s).



**Figura 4.5.** Comportamiento del planificador de trayectorias Bug0 con evasión a la derecha. Se muestra el escenario completo cada 1.5 (s).



## **Capítulo 5**

# **Conclusiones y trabajo a futuro**

## 5.1. Conclusiones

La planificación de trayectorias consiste en determinar cuál es el camino más adecuado para llevar a un vehículo desde un punto de partida hasta un punto específico (meta), lo más rápido posible y sin generar colisiones con elementos en el mismo espacio de operación. Por su propia naturaleza, el problema de planificación de trayectorias es engorroso, debido a que se debe considerar el comportamiento cinemático del robot móvil, el entorno puede tener diversos obstáculos o amenazas, y la cantidad inmensurable de posibles caminos entre dos puntos. Lo complejo de este problema es aún mayor cuando se tienen objetos de tipo dinámico en el entorno de operación, ya que la mejor trayectoria posible varía con el tiempo y el planificador debe recalcularla periódicamente.

Se ha probado que las técnicas aproximadas de optimización como las metaheurísticas resuelven de manera efectiva el problema de planificación de trayectorias en escenarios estáticos. Sin embargo, en escenarios dinámicos, la carga computacional que requieren estas técnicas puede volverlas inviables. Por lo tanto, en este trabajo se propuso un nuevo método de planificación de trayectorias que combina el funcionamiento de un método simple como el Bug0 y una metaheurística, para lograr una búsqueda eficiente de caminos optimizados y libres de colisiones con un costo computacional razonable.

Por sí mismo, el algoritmo Bug0 es ampliamente efectivo en escenarios estáticos donde los obstáculos pueden evadirse siempre hacia la misma dirección. Cuando los escenarios son dinámicos, Bug0 puede colisionar dado que no puede predecir una interacción futura entre los obstáculos en movimiento y el vehículo. Debido a esto, la propuesta incluye una etapa predictiva, la cual permite al planificador estimar el comportamiento del vehículo dentro de una ventana de tiempo futuro (horizonte de predicción) y así determinar el mejor control de velocidad y la mejor dirección de evasión. Para esto, la técnica metaheurística de evolución diferencial se implementa en la propuesta para probar distintas combinaciones de los parámetros de control y las direcciones de evasión, y así determinar la mejor alternativa que permite al vehículo acercarse a la meta sin colisionar.

Con base en los resultados obtenidos en simulación al probar la propuesta en un escenario dinámico con un número considerable de obstáculos (esto en proporción al tamaño del espacio de operación),



se observa que el vehículo es capaz de llegar a la meta, evadiendo eficazmente los obstáculos que intervienen en su recorrido. Así mismo, el tiempo computacional que requiere la propuesta es asequible y puede utilizarse en un prototipo físico.

Cuando se compara la propuesta con la técnica original de Bug0, muestra ser más efectiva, puesto que la segunda genera trayectorias con colisiones y con una rapidez menor a la primera. En cuanto a la eficiencia computacional, Bug0 es mejor que la propuesta, pero el costo material de las colisiones que implica el primero puede resultar mucho mayor que el costo computacional.

Por último, la propuesta es recomendable en escenarios dinámicos que están presentes en la mayoría de las aplicaciones del mundo real.

## **5.2. Trabajo a futuro**

Como trabajo a futuro se propone realizar los experimentos con un prototipo físico y con escenarios de diferente tipo. Lo anterior requiere consideraciones adicionales como características de los sensores, los algoritmos para seguimiento y detección de las trayectorias de los obstáculos, la capacidad de la computadora a bordo del vehículo, la red de comunicación, etc.

Con respecto al método propuesto se puede experimentar con distintos parámetros de configuración, diferentes variantes del algoritmo Bug o similares, u otros optimizadores metaheurísticos. Esto permitiría recolectar suficiente evidencia para seleccionar la mejor variante del método propuesto.

Finalmente, se puede probar la propuesta con diferentes tipos de vehículo más allá del robot móvil con tracción diferencial para verificar su efectividad.

# Referencias bibliográficas

- Abdalla, T., Abed, A., and Ahmed, A. (2017). Mobile robot navigation using pso-optimized fuzzy artificial potential field with fuzzy control. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 32:3893–3908.
- Akka, K. and Khaber, F. (2018). Mobile robot path planning using an improved ant colony optimization. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 15(3):1729881418774673.
- Ayadi, N., Maalej, B., and Derbel, N. (2018). Optimal path planning of mobile robots: A comparison study. pages 988–994.
- Beltrán Dueñas, J. M. (2015). Introducción del simulador de vuelo flightgear en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la cinemática, dinámica y fluidos. *Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*.
- Bermudez, G. et al. (2002). Robots móviles. teoría, aplicaciones y experiencias. *Tecnura*, 5(10):6–17.
- Castillo, O., Trujillo, L., and Melin, P. (2007). Multiple objective genetic algorithms for path-planning optimization in autonomous mobile robots. *Soft Computing*, 11(3):269–279.
- Dewang, H. S., Mohanty, P. K., and Kundu, S. (2018). A robust path planning for mobile robot using smart particle swarm optimization. *Procedia Computer Science*, 133:290–297. International Conference on Robotics and Smart Manufacturing (RoSMa2018).
- Dowgiewlecz, T. and Kawecki, T. (2006). Overview on optimization criteria for production activities. *Institute of Logistics and Warehousing eBusiness Centre*.
- Fathoni, M. F. and Wuryandari, A. I. (2015). Comparison between euler, heun, runge-kutta and adams-

- bashforth-moulton integration methods in the particle dynamic simulation. In *2015 4th International Conference on Interactive Digital Media (ICIDM)*, pages 1–7.
- Garcia, M. P., Montiel, O., Castillo, O., Sepúlveda, R., and Melin, P. (2009). Path planning for autonomous mobile robot navigation with ant colony optimization and fuzzy cost function evaluation. *Applied Soft Computing*, 9(3):1102–1110.
- Haddad, M., Chettibi, T., Hanchi, S., and Lehtihet, H. (2007). A random-profile approach for trajectory planning of wheeled mobile robots. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(3):519–540.
- Hosseininejad, S. and Dadkhah, C. (2019). Mobile robot path planning in dynamic environment based on cuckoo optimization algorithm. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16(2):1729881419839575.
- Hurtado, N. D. G., García, L. F. C., and Jiménez, A. J. E. (2013). Plataforma robótica educativa “robi”. *REVISTA COLOMBIANA DE TECNOLOGIAS DE AVANZADA (RCTA)*, 1(19):140–144.
- Kemp, H. (1984). The concept of energy without heat or work. *Physics Education*, 19(5):234.
- Klancar, G., Zdesar, A., Blazic, S., and Skrjanc, I. (2017). *Wheeled mobile robotics: from fundamentals towards autonomous systems*. Butterworth-Heinemann.
- Koninckx, G. (2014). Dynamics of resiliency in human systems. *Acta Europæana Systemica*, 4:129–136.
- Kucuk, S. and Bingul, Z. (2006). *Robot kinematics: Forward and inverse kinematics*. INTECH Open Access Publisher.
- Lamini, C., Benhlime, S., and Elbekri, A. (2018). Genetic algorithm based approach for autonomous mobile robot path planning. *Procedia Computer Science*, 127:180–189. PROCEEDINGS OF THE FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT COMPUTING IN DATA SCIENCES, ICDS2017.
- Lazarowska, A. (2020). A discrete artificial potential field for ship trajectory planning. *Journal of Navigation*, 73(1):233–251.
- Le, A. V., Ku, P.-C., Than Tun, T., Huu Khanh Nhan, N., Shi, Y., and Mohan, R. E. (2019). Realization energy optimization of complete path planning in differential drive based self-reconfigurable floor cleaning robot. *Energies*, 12(6).

- Li, G. and Chou, W. (2018). Path planning for mobile robot using self-adaptive learning particle swarm optimization. *Science China Information Sciences*, 61(5):052204.
- Martinez-Soltero, E. G. and Hernandez-Barragan, J. (2018). Robot navigation based on differential evolution. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13):350–354. 2nd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2018.
- Mathew, R. and Hiremath, S. S. (2016). Trajectory tracking and control of differential drive robot for predefined regular geometrical path. *Procedia Technology*, 25:1273–1280. 1st Global Colloquium on Recent Advancements and Effectual Researches in Engineering, Science and Technology - RAEREST 2016 on April 22nd & 23rd April 2016.
- Mezura-Montes, E. and Coello, C. A. C. (2011). Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: past, present and future. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1(4):173–194.
- Niyomubeyi, O., Sicaio, T. E., Díaz González, J. I., Pilesjö, P., and Mansourian, A. (2020). A comparative study of four metaheuristic algorithms, amosa, moabc, mspso, and nsga-ii for evacuation planning. *Algorithms*, 13(1).
- Ogata, K. (1978). System dynamics. *Englewood Cliffs*.
- Ogata, K. (2001). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall PTR, USA, 4th edition.
- Olewi, B. K., Roth, H., and Kazem, B. I. (2014). Multi objective optimization of path and trajectory planning for non-holonomic mobile robot using enhanced genetic algorithm. In Golovko, V. and Imada, A., editors, *Neural Networks and Artificial Intelligence*, pages 50–62, Cham. Springer International Publishing.
- Rafflin, C., Aldon, M., and Fournier, A. (1994). Mobile robot trajectory learning using absolute and relative localization data. In *Proceedings of the Intelligent Vehicles '94 Symposium*, pages 526–531.
- Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., and Linares, P. (2010). Modelos matemáticos de optimización. *Publicación Técnica*, 1.
- Rao, S. S. (2019). *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons.
- Ríos, L. H. and Bueno, M. (2008). Modelo matemático para un robot móvil. *Scientia et Technica*, 14(38):13–18.

- Rodríguez-Molina, A., Solís-Romero, J., Villarreal-Cervantes, M. G., Serrano-Pérez, O., and Flores-Caballero, G. (2021). Path-planning for mobile robots using a novel variable-length differential evolution variant. *Mathematics*, 9(4).
- Seder, M., Baotić, M., and Petrović, I. (2017). Receding horizon control for convergent navigation of a differential drive mobile robot. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(2):653–660.
- Sharma, P., Sharma, H., Kumar, S., and Sharma, K. (2019). Black-hole gbest differential evolution algorithm for solving robot path planning problem. In *Harmony search and nature inspired optimization algorithms*, pages 1009–1022. Springer.
- Smith, C. A., Corripio, A. B., and Basurto, S. D. M. (1991). *Control automático de procesos: teoría y práctica*. Number 968-18-3791-6. 01-A3 LU. AL-PCS. 1. Limusa México.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., et al. (2006). *Robot modeling and control*, volume 3. Wiley New York.
- Tang, B., Zhu, Z., and Luo, J. (2016). Hybridizing particle swarm optimization and differential evolution for the mobile robot global path planning. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 13(3):86.
- Tuba, E., Strumberger, I., Zivkovic, D., Bacanin, N., and Tuba, M. (2018). Mobile robot path planning by improved brain storm optimization algorithm. In *2018 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pages 1–8.
- Utami, N. S., Jazidie, A., and Kadier, R. E. A. (2019). Path planning for differential drive mobile robot to avoid static obstacles collision using modified crossover genetic algorithm. In *2019 International Seminar on Intelligent Technology and Its Applications (ISITIA)*, pages 282–287.
- Wang, B., Li, S., Guo, J., and Chen, Q. (2018). Car-like mobile robot path planning in rough terrain using multi-objective particle swarm optimization algorithm. *Neurocomputing*, 282:42–51.
- Xiong, N., Molina, D., Ortiz, M. L., and Herrera, F. (2015). A walk into metaheuristics for engineering optimization: principles, methods and recent trends. *international journal of computational intelligence systems*, 8(4):606–636.
- Zmud, J., Ecola, L., Phleps, P., Feige, I., et al. (2013). The future of mobility: Scenarios for the united states in 2030.