

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“Aplicación del Principio de Invariancia de LaSalle
en Control Adaptable de Sistemas Robóticos
Manipuladores Autónomos y no Autónomos”**

POR

Ing. Ricardo Falcón Prado

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila

CODIRECTOR DE TESIS

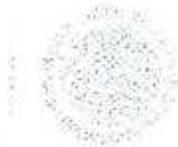
M.C. Javier Edmundo Ollervides Vázquez

ISSN: 0188-9060



RIITEC: (19)-TMCIE-2017

Torreón, Coahuila. México
Diciembre 2017



Torreón, Coah., **7/Diciembre/2017**
Dependencia: DEPI/CPCIE
Oficio: DEPI/CPCIE/159/2017
Asunto: Autorización de impresión
de tesis.

C. Ricardo Falcón Prado
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.
PRESENTE

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Aplicación del Principio de Invariancia de Lasalle en Control Adaptable de Sistemas
Robóticos Manipuladores Autónomos y No Autónomos"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (19)-TMCIE-2017**, para que proceda a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

DR. ARMANDO LONGORIA DE LA TORRE
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación
del Instituto Tecnológico de la Laguna



SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
de la Laguna
División de Estudios de Posgrado
e Investigación

ALT/II-EJ





Torreón, Coah., 4/Diciembre/2017

DR. ARMANDO LONGORIA DE LA TORRE
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**"Aplicación del Principio de Invariancia de Lasalle en Control Adaptable de
Sistemas Robóticos Manipuladores Autónomos y No Autónomos"**

Desarrollado por el **C. Ricardo Falcón Prado**, con número de control **M1513047** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

ATENTAMENTE
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

Dr. Víctor A. Santibañez Dávila
Asesor/Director de Tesis

M.C. Edmundo J. Ollervides Vázquez
Comité Tutorial

Dr. Alejandro E. Dzul López
Comité Tutorial

Dr. José L. Meza Medina
Comité Tutorial



Dedicatoria

A mis padres Ricardo y Teresa por mostrarme el camino hacia la superación.

A mis hermanos Ramco y Lucía por su apoyo en esos momentos de dificultad.

Agradecimientos

Al Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila por su apoyo y orientación durante mi trabajo, sus consejos y cátedras que ayudaron a la realización de este trabajo, así como su sinceridad y su entusiasmo durante todo el desarrollo de esta tesis.

Al M.C. Javier Edmundo Ollervides Vázquez por su apoyo y atención durante mis estudios de posgrado.

Al Dr. Alejandro Enrique Dzul López y al Dr. José Luis Meza Medina por sus palabras y sus correcciones en este trabajo.

A todos mis maestros durante mis estudios de maestría, por instilar el interés en el área del control automático.

A mis compañeros de posgrado, al M.C. Jorge Alberto Montoya Cháirez, al M.C. Luis Ricardo Ovalle Gamboa, al M.C. Alfredo Delgado Spindola, al Ing. Jorge Alberto Villalobos Chin, al Ing. Sergio López Hernández, al Ing. Carlos Icazbalceta Saavedra, y a todos los demás compañeros del área de posgrado por todos sus consejos y experiencias vividas a lo largo de mis estudios de posgrado.

Al TecNM y al CONACYT por el apoyo recibido y las facilidades otorgadas para el desarrollo de este trabajo.

Aplicación del principio de invariancia de LaSalle en control adaptable de sistemas robóticos manipuladores autónomos y no autónomos

por RICARDO FALCÓN PRADO

Resumen

En este trabajo de tesis se ha abordado el estudio y aplicación de metodologías diferentes de análisis de estabilidad para diversas leyes de control en esquemas adaptables de sistemas robóticos manipuladores no lineales, autónomos y no autónomos, de n grados de libertad, tanto en regulación como en seguimiento de trayectorias de posición deseadas basadas en la teoría de Lyapunov. Específicamente, se emplea el método de análisis de estabilidad tradicional mediante el uso de la teoría de Lyapunov auxiliado del lema de Barbalat, y el método de análisis de estabilidad mediante la teoría de Lyapunov auxiliado del principio de invariancia de LaSalle; expandiendo de esta manera el alcance en los análisis de estabilidad y relajando las condiciones requeridas para la elección de la función de Lyapunov para demostrar la convergencia y el acotamiento de soluciones de robots manipuladores, analizando desde estos enfoques la estabilidad de esquemas de control adaptable ya conocidos. Particularmente se trabaja con los siguientes esquemas de control adaptable: control PD con compensación deseada de gravedad adaptable, control adaptable PD-, control adaptable Slotine-Li, control adaptable con realimentación de salida, y control de seguimiento neuronal adaptable. Además se presenta el desarrollo de una interfaz gráfica de usuario (GUI) para el análisis de estos controladores.

Application of LaSalle's Invariance Principle in adaptive control of autonomous and non-autonomous manipulators robotic systems

by RICARDO FALCÓN PRADO

Abstract

In this thesis it has been addressed the study of different Lyapunov based stability analysis methodologies applied to several control laws for autonomous and nonautonomous adaptive schemes of non-linear manipulator applied robotic systems, of n degrees of freedom, that solve the position regulation problem as well as position trajectory tracking problem. Specifically, it is used the traditional stability analysis methodology using the Lyapunov's theory supported by Barbalat's lemma, and the stability analysis methodology using Lyapunov's theory supported by LaSalle's invariance principle, extending in this way the scope on stability analysis and relaxing the required conditions to choose the Lyapunov's function to show the convergence and solutions boundedness for robot manipulators already known. Particularly this thesis work deals with the following adaptive control schemes: the adaptive P.D. control with desired gravity compensation, the adaptive PD+ control, the adaptive Slotine-Li control, the adaptive output feedback tracking control, and the adaptive neural network motion control. In addition it is presented the development of a graphic user interface (GUI) for these controllers analysis.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Objetivo general	2
1.3. Objetivos particulares	2
1.4. Organización del documento de tesis	3
2. Fundamentos teóricos	4
2.1. Preliminares matemáticos	4
2.1.1. Análisis de un retrato de fase	5
2.1.2. Región de atracción	8
2.1.3. Espacios de funciones	13
2.2. Propiedades del modelo dinámico de robots manipuladores de n g.d.l.	16
2.2.1. Propiedades de la matriz de inercias $M(\mathbf{q})$	16
2.2.2. Propiedades de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	18
2.2.3. Propiedades del vector de pares gravitacionales	19
2.3. Introducción al control adaptable	19
2.3.1. Linealidad en los parámetros dinámicos	21
2.3.2. Parametrización de un controlador adaptable	22
2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	22
2.4.1. Ejemplos de aplicación del Principio de Invariancia para sistemas autónomos	28
2.4.2. Ejemplos de aplicación del Principio de Invariancia para sistemas no autónomos	37
3. Controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable	47
3.1. Análisis de estabilidad	52
3.2. Resultados en simulación	59
4. Controlador PD+ adaptable	63
4.1. Análisis de estabilidad	65
4.2. Resultados en simulación	70
5. Controlador con compensación adaptable (Slotine-Li)	73
5.1. Análisis de estabilidad	76
5.2. Resultados en simulación	79

6. Controlador con realimentación de salida adaptable	83
6.1. Análisis de estabilidad	87
6.2. Resultados en simulación	93
7. Controlador por redes neuronales adaptable	97
7.1. Análisis de estabilidad	107
7.2. Resultados en simulación	111
8. Desarrollo de la Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)	115
9. Conclusiones	129
A. Datos del robot de 2 <i>grados de libertad</i>	131
A.1. Modelo dinámico del robot experimental de dos g.d.l.	131
B. Condiciones suficientes para funciones definidas positivas	134
B.1. Aplicación a funciones definidas positivas	134
C. Dinámica residual	136
C.1. Dinámica residual cuando $\dot{q}_d = 0$	138

Índice de figuras

2.1. Sistema masa-resorte y su retrato de fase.	5
2.2. Diagrama del péndulo simple.	7
2.3. Retrato de fase del péndulo simple sin fricción ($k = 0$).	7
2.4. Retrato de fase del péndulo simple con fricción ($k = 1$).	8
2.5. Función candidata de Lyapunov (2.7) (arriba) y derivada de la función de Lyapunov (2.8) (abajo).	9
2.6. Función candidata de Lyapunov (2.7) (arriba) y derivada de la función de Lyapunov (2.8) (abajo).	9
2.7. Retrato de fase del sistema (2.6).	10
2.8. Función de Lyapunov (2.7) del sistema (2.6) donde las trayectorias color negro tienden a la inestabilidad, y las demás (verde, rojo, magenta y cian) tienden al origen (estabilidad).	11
2.9. Derivada temporal de la función de Lyapunov del sistema (2.6).	11
2.10. Gráfica de $y = x_1 x_2$	12
2.11. Retrato de fase del sistema (2.10) para diferentes condiciones iniciales.	13
2.12. Gráfica de la superficie de Lyapunov para el sistema (2.10).	14
2.13. Derivada de la <i>función candidata de Lyapunov</i> (2.11) para el sistema (2.10).	14
2.14. Diagrama a bloques genérico de un controlador adaptable para robots manipuladores.	23
2.15. Retrato de fase del sistema (2.40) para diferentes condiciones iniciales.	28
2.16. Función de Lyapunov (2.41) del sistema (2.40) para diferentes condiciones iniciales.	29
2.17. Derivada de Lyapunov (2.42) del sistema (2.40) para diferentes condiciones iniciales.	30
2.18. Un péndulo simple del Ejemplo 2.9.	31
2.19. Retrato de fase de (2.47) del Ejemplo 2.9.	31
2.20. Gráfica de la ecuación (2.49).	32
2.21. Vista semi-superior de la función candidata de Lyapunov (2.51) del Ejemplo 2.9.	32
2.22. Vista lateral de la función candidata de Lyapunov (2.51) del Ejemplo 2.9.	33
2.23. Vista semi-inferior de la función candidata de Lyapunov de (2.47) del Ejemplo 2.9.	33
2.24. Derivada de Lyapunov de (2.47).	34
2.25. Soluciones del sistema (2.53) para $x_1(0) = \pi$, $x_2(0) = -\pi/2$ y $x_3(0) = \pi/2$	35
2.26. Soluciones del sistema (2.53) para $x_1(0) = -\pi$, $x_2(0) = \pi/2$ y $x_3(0) = -\pi/2$	36

2.27. Trayectorias del sistema (2.53) ilustrando la ubicación del conjunto invariante más grande.	36
2.28. Retrato de fase del sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.	37
2.29. Vista anterior de la gráfica de la función de Lyapunov del sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.	38
2.30. Vista posterior de la función de Lyapunov del sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.	39
2.31. Vista superior de la derivada de Lyapunov para el sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.	40
2.32. Vista posterior de la derivada de Lyapunov para el sistema (2.56).	41
2.33. Retrato de fase del sistema (2.57) para diferentes condiciones iniciales del Ejemplo 2.12.	42
2.34. Evolución temporal del retrato de fase del sistema (2.57) del Ejemplo 2.12.	42
2.35. Función de Lyapunov con las trayectorias evaluadas para el sistema (2.57) del Ejemplo 2.12.	43
2.36. Derivada de la función de Lyapunov (2.58) del Ejemplo 2.12.	44
2.37. Vista central de la derivada de la función de Lyapunov (2.58) del Ejemplo 2.12.	44
3.1. Control PD con compensación deseada de gravedad adaptable.	50
3.2. Seguimiento de trayectoria para q_1 utilizando el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.	60
3.3. Seguimiento de trayectoria para q_2 utilizando el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.	61
3.4. Errores de posición para las articulaciones 1 y 2 utilizando el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.	61
3.5. Adaptación paramétrica para el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.	62
4.1. Diagrama a bloques del controlador PD+.	64
4.2. Seguimiento de trayectoria para q_1 utilizando el controlador PD+ adaptable.	71
4.3. Seguimiento de trayectoria para q_2 utilizando el controlador PD+ adaptable.	71
4.4. Errores de posición para las articulaciones 1 y 2 utilizando el controlador PD+ adaptable para 100 segundos.	72
4.5. Adaptaciones paramétricas utilizando el controlador PD+ adaptable.	72
5.1. Gráfica donde se presenta el seguimiento de trayectoria para q_1 utilizando el controlador Slotine-Li.	80
5.2. Gráfica donde se presenta el seguimiento de trayectoria para q_2 utilizando el controlador Slotine-Li.	81
5.3. Errores de posición para las articulaciones 1 y 2 utilizando el controlador Slotine-Li.	81
5.4. Parámetros a adaptar utilizando el controlador Slotine-Li.	82
6.1. Seguimiento de posición de $q_1(t)$ a $q_{d1}(t)$	94
6.2. Seguimiento de posición de $q_2(t)$ a $q_{d2}(t)$	95

6.3.	Error de posición $\bar{q}_1(t)$.	95
6.4.	Error de posición $\bar{q}_2(t)$.	96
6.5.	Estimaciones paramétricas de $\hat{\theta}(t)$.	96
7.1.	Modelo matemático de una neurona.	98
7.2.	Elecciones comunes de funciones de activación.	99
7.3.	Red neuronal de una capa.	100
7.4.	Red neuronal de dos capas.	101
7.5.	Seguimiento de trayectoria $q_1(t)$.	112
7.6.	Seguimiento de trayectoria $q_2(t)$.	112
7.7.	Error de posición $\bar{q}_1(t)$.	113
7.8.	Error de posición $\bar{q}_2(t)$.	113
7.9.	Evolución temporal de los pesos de salida $\hat{W}_1(t) \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$ para el eslabón 1.	114
7.10.	Evolución temporal de los pesos de salida $\hat{W}_2(t) \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$.	114
8.1.	Cuadro de diálogo del GUIDE Quick Start.	116
8.2.	Entorno de desarrollo de GUI.	117
8.3.	Menú «Archivo».	117
8.4.	Ventana de «Preferencias».	118
8.5.	Entorno de desarrollo de GUI con los nombres de los iconos en la paleta de componentes.	118
8.6.	Propiedad «string» para agregar texto estático.	119
8.7.	Área cuadrículada en el «Layout Editor».	119
8.8.	Acomodo de los componentes en la GUI.	120
8.9.	Menú de «Propiedades» de un «push button».	120
8.10.	Componente «Push button» con la leyenda «Cargar modelo».	121
8.11.	Menú emergente al hacer click derecho sobre un componente.	121
8.12.	Propiedad «tag» para un componente.	122
8.13.	Ventana de un «callback» de un componente.	122
8.14.	Versión final de la GUI.	124
8.15.	Aspecto de la GUI al ejecutarse.	125
8.16.	Selección del controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable para simular en la GUI.	126
8.17.	Selección de un controlador a simular en la GUI.	126
8.18.	Selección de un controlador a simular en la GUI.	127
8.19.	Selección de un controlador a simular en la GUI.	127
A.1.	Robot experimental de dos grados de libertad.	131
C.1.	Función tangente hiperbólica $f(x) = \tanh(x)$.	136

Capítulo 1

Introducción

En el presente capítulo se exponen algunos de los antecedentes referentes al estado del arte de la aplicación de técnicas de análisis de estabilidad para controladores adaptables de sistemas robóticos manipuladores, autónomos y no autónomos, basados en la teoría de Lyapunov auxiliada del Lema de Barbalat, así como del Principio de Invariancia de LaSalle.

1.1. Estado del arte

El enfoque más útil y general para estudiar la estabilidad de sistemas de control no lineales es la teoría introducida a finales del siglo XIX por el matemático ruso Alexander Mikhailovich Lyapunov. El trabajo de Lyapunov, "*The General Problem of Motion Stability*," incluye dos métodos para el análisis de estabilidad (el método de la linealización y el método directo) y fue publicado por primera vez en 1892. El método de linealización obtiene conclusiones sobre la estabilidad local de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio a partir de las propiedades de estabilidad de su aproximación lineal. El método directo no está restringido a la dinámica local, y determina las propiedades de estabilidad de un sistema no lineal al construir una función escalar basada en la energía para el sistema y examina la variación temporal de la función. Sin embargo, durante medio siglo el trabajo pionero de Lyapunov sobre la estabilidad de sistemas recibió poca atención fuera de Rusia, aunque fue traducido al francés en 1908 (a cargo de Poincaré), y reimpresso por *Princeton University Press* en 1947. La publicación de un libro por LaSalle y Lefschetz [La Salle y Lefschetz, 1962] atrajo la atención de la vasta comunidad ingenieril en control sobre el trabajo de Lyapunov al principio de los años 60. Muchos ajustes de los métodos de Lyapunov se han desarrollado desde entonces. Hoy en día, el método de linealización de Lyapunov ha venido a representar la justificación teórica del control lineal, mientras que el método directo de Lyapunov se ha convertido en la herramienta más importante para el diseño y análisis de sistemas no lineales. Juntos, el método de linealización y el método directo constituyen la llamada teoría de Lyapunov.

De acuerdo con [LaSalle, 1960], si dentro de la vecindad del estado de equilibrio de un sistema, la energía total es decreciente, se espera que el estado de equilibrio sea asintóticamente estable. El segundo método de Lyapunov generaliza esta idea, suponiendo que

dentro de una vecindad del origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ se puede construir una función escalar $V(x)$, llamada función de Lyapunov, cuyas derivadas parciales son continuas y $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo estado $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, luego, si $x(t)$ es una solución de $\dot{x} = f(x)$ y la razón de cambio de la función de Lyapunov es $\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) < 0 \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|$ pequeña, entonces el estado de equilibrio es asintóticamente estable.

A lo largo de los años se han buscado varias extensiones a la teoría de estabilidad de Lyapunov, entre las que se encuentra el lema de Barbalat [Barkana, 2014, Lemma 2.1], el cual es bastante utilizado para sistemas autónomos y no autónomos. Si $\dot{V}(x(t)) \leq 0$, lo que el teorema de Lyapunov permite concluir es que el origen es estable. Sin embargo, para sistemas autónomos y no autónomos, es posible concluir estabilidad asintótica a partir de esta función de Lyapunov usando la teoría de LaSalle [Barkana, 2014].

Aunque originalmente el método directo de Lyapunov es un método para el análisis de estabilidad, también puede ser usado para otros problemas del control no lineal. Una aplicación importante es el diseño de controladores no lineales, donde se busca formular una función escalar positiva en función de los estados del sistema, y así encontrar una ley de control que haga a esta función decreciente. Un sistema de control no lineal diseñado de esta manera garantizará que el sistema sea estable. Este método ha sido utilizado para resolver muchos problemas de diseño, por ejemplo, en control adaptable.

1.2. Objetivo general

En el presente trabajo de tesis se busca llevar a cabo la comparación de técnicas de análisis de estabilidad que utilizan la teoría de Lyapunov auxiliada tradicionalmente por el Lema de Barbalat, así como las técnicas de análisis de estabilidad con la teoría de Lyapunov auxiliada por el Principio de Invariancia de LaSalle, para sistemas robóticos manipuladores no lineales, autónomos y no autónomos, tanto para regulación de posiciones deseadas como de seguimiento de trayectorias deseadas.

1.3. Objetivos particulares

- Realizar la comparación de diferentes técnicas de análisis de estabilidad para los siguientes controladores:
 - Controlador de regulación PD con compensación deseada de gravedad adaptable.
 - Controlador de seguimiento PD+ adaptable.
 - Controlador de seguimiento con compensación adaptable.
 - Controlador de seguimiento por realimentación de salida adaptable.
 - Controlador de seguimiento neuronal adaptable.
- Implementación de una interfaz gráfica de usuario para la interpretación gráfica del análisis comparativo de estabilidad de los controladores abordados en este trabajo.

1.4. Organización del documento de tesis

La presente tesis está organizada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos para el estudio de la estabilidad de sistemas autónomos y no autónomos.
- En el Capítulo 3 se realiza el análisis comparativo de estabilidad para el controlador de regulación de posiciones deseadas PD con compensación deseada de gravedad en su versión adaptable [Kelly *et al.*, 2006, Chap. 15].
- En el Capítulo 4 se realiza el análisis comparativo de estabilidad para el controlador de seguimiento de trayectorias deseadas PD+ en su versión adaptable [Lozano y Taoutaou, 2002].
- En el Capítulo 5 se realiza el análisis comparativo de estabilidad del controlador de seguimiento de trayectorias deseadas PD con compensación adaptable (también llamado controlador Slotine-Li) en su versión adaptable [Kelly *et al.*, 2006, Chap. 16].
- En el Capítulo 6 se realiza el análisis comparativo de estabilidad del controlador con realimentación de salida adaptable para el seguimiento de trayectorias deseadas [Moreno-Valenzuela *et al.*, 2010].
- En el Capítulo 7 se realiza el análisis comparativo de estabilidad del controlador por redes neuronales adaptable para el seguimiento de trayectorias deseadas [Puga-Guzmán *et al.*, 2014].
- En el Capítulo 8 se presenta la manera en que se desarrolló la interfaz visual de usuario y la manera en que ésta se puede utilizar [MATLAB[®], 2015].
- En el Capítulo 9 se exponen las conclusiones que se desprenden del presente documento.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

Informalmente hablando, de acuerdo con [Slotine y Li, 1991], en un sistema de control dado, la primera y más importante pregunta sobre sus numerosas propiedades es si un punto de equilibrio de interés es estable, porque un sistema de control inestable en su punto de operación es típicamente inútil, y potencialmente peligroso. Cualitativamente, un sistema es descrito como estable en su punto de operación si empezando el sistema en algún punto cerca de su punto deseado de operación implica que éste permanecerá cerca de dicho punto para todo tiempo futuro. La dinámica de un péndulo que inicia su movimiento cerca de sus dos puntos de equilibrio, concretamente, las posiciones vertical hacia arriba y vertical hacia abajo, es frecuentemente utilizada para ilustrar los comportamientos estable e inestable de un sistema dinámico. En los sistemas de control de aeronaves, un problema típico de estabilidad es relacionado intuitivamente a la siguiente pregunta, “¿puede una perturbación, debida a una ráfaga de viento, causar una desviación significativa en la trayectoria del vuelo?” Aquí, el punto deseado de operación del sistema es la trayectoria de vuelo en ausencia de perturbaciones. Cualquier sistema de control, ya sea *lineal* o *no lineal*, implica un problema de estabilidad el cual debe ser estudiado minuciosamente.

2.1. Preliminares matemáticos

En esta sección se presentan varias herramientas disponibles para el análisis de sistemas de control no lineales. El estudio de estas técnicas de análisis de sistemas de control no lineales es importante por varias razones. Primeramente, el análisis teórico es usualmente la manera menos costosa de explorar las diferentes características de un sistema dado. Además, al momento de llevar a cabo la simulación de un sistema, éste requiere estar fundamentado por la teoría matemática. Las simulaciones de sistemas no lineales con poco o nulo sustento matemático suelen producir pobres resultados o resultados engañosos. Esto es especialmente importante dada la gran abundancia de comportamientos que los sistemas no lineales pueden presentar, dependiendo de las condiciones iniciales y de las entradas aplicadas al sistema. También el diseño de controladores no lineales siempre se lleva a cabo de acuerdo a las técnicas de análisis. Debido a que los métodos de diseño de controladores no lineales están usualmente basados en las técnicas de análisis, es casi imposible perfeccionar métodos de diseño de controladores no lineales sin antes llevar

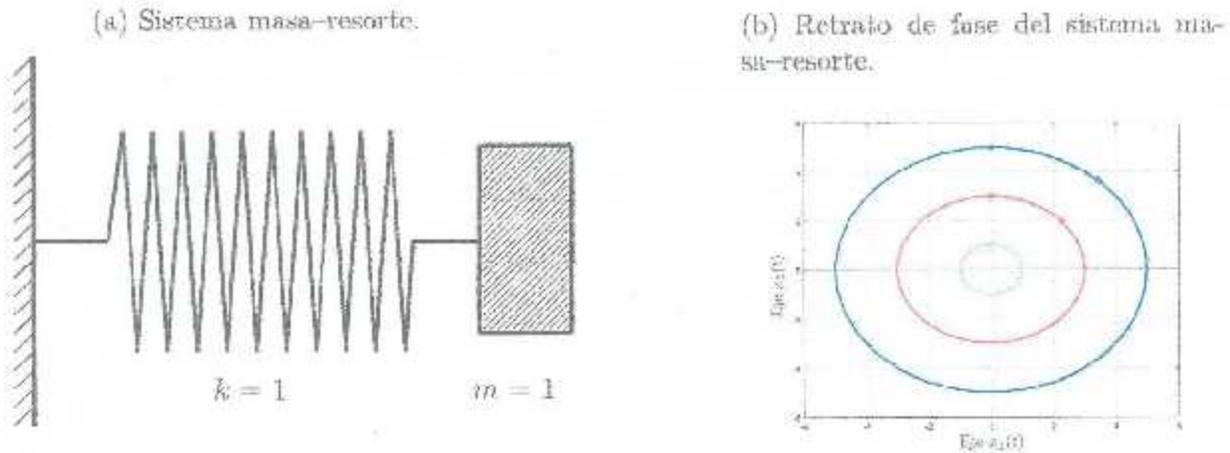


Figura 2.1: Sistema masa-resorte y su retrato de fase.

acabo un correcto análisis del sistema en cuestión. Por último, estas herramientas también permiten evaluar el desempeño de las leyes de control diseñadas a partir del análisis del sistema, y en caso de que se tenga un pobre desempeño, estos análisis también pueden proveer la dirección en la cual se puedan modificar estos diseños de control.

Debido a que el análisis de los sistemas de control no lineales no es cosa fácil, se han llevado esfuerzos para desarrollar herramientas teóricas apropiadas. Muchos métodos de análisis de sistemas de control no lineales han sido propuestos, sin embargo, aquí se describen detalles de los métodos más importantes para el correcto análisis de sistemas de control no lineal.

2.1.1. Análisis de un retrato de fase

El plano de fase trata sobre el estudio gráfico de un sistema autónomo de segundo orden descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde x_1 y x_2 son los estados del sistema, y f_1 y f_2 son las funciones no lineales que representan a los estados. Geométricamente, el espacio de estados de este sistema es un plano que utiliza a las variables x_1 y x_2 como coordenadas. Esto es llamado *plano de fase*.

Dado un conjunto de condiciones iniciales $x(0) = x_0$, la solución de la ecuación (2.1) es representada por $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Cuando el tiempo t varía desde cero hasta infinito, la solución $x(t)$ puede ser representada geométricamente como una curva en el plano de fase. Dicha curva es llamada *trayectoria*. Una familia de trayectorias de un plano de fase correspondiente a varias condiciones iniciales es llamado *retrato de fase de un sistema*.

Para ilustrar el concepto de plano de fase, considérese el siguiente sistema.

Ejemplo 2.1 (Retrato de fase de un sistema masa-resorte). La ecuación que gobierna al sistema masa-resorte en la Figura 2.1.a es la ecuación diferencial lineal de segundo

orden

$$\ddot{x} + \omega = 0. \quad (2.2)$$

Supóngase que la masa está inicialmente en reposo, a una longitud x_0 . Entonces la solución de la ecuación es

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(t), \\ \dot{x}(t) &= -x_0 \operatorname{sen}(t). \end{aligned}$$

Eliminando el tiempo t de las ecuaciones anteriores, se obtiene la ecuación de las trayectorias

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2.$$

Esto representa un círculo en el plano de fase. Dependiendo de las condiciones iniciales, se puede obtener círculos de diferentes radios. Al graficar estos círculos en un plano de fase, se obtiene un plano de fase para el sistema masa-resorte (ver Figura 2.1b).

Ejemplo 2.2. Ecuación del péndulo

Considérese el péndulo simple mostrado en la Figura 2.2, donde l representa la longitud de la pértiga y m representa la masa del péndulo. Asímasse que la pértiga está rígida y no tiene masa. Sea θ el ángulo delimitado entre la pértiga y el eje vertical a través del punto de pivote. El péndulo oscila libremente en el plano vertical. La inclinación del péndulo se mueve en un círculo de radio l . Para escribir la ecuación de movimiento del péndulo, se identifican las fuerzas que actúan sobre su inclinación. Hay un empuje gravitacional hacia abajo igual a $m \cdot g$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Existe también una fuerza debida a la resistencia que genera la fricción contra el movimiento, la cual se asume que es proporcional a la velocidad de la inclinación del péndulo con un coeficiente de fricción k . Utilizando la segunda ley de Newton, se puede escribir la ecuación de movimiento en la dirección tangencial como

$$m \cdot l^2 \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot l \operatorname{sen}(\theta) - k \dot{\theta}. \quad (2.3)$$

Escribir la ecuación de movimiento en la dirección tangencial tiene la ventaja de que la tensión de la pértiga, la cual está en la dirección normal, no aparece en la ecuación. Se llega a la misma ecuación al escribir en la ecuación del momento sobre el pivote. Para obtener el modelo de estados para el péndulo, se toman las variables de estado como $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$. Por tanto, las ecuaciones de estado son

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2, \quad (2.5)$$

Para encontrar los puntos de equilibrio, se considera que $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ y se resuelve para x_1 y x_2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \operatorname{sen}(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{bmatrix}$$

Los puntos de equilibrio están localizados en $(n\pi, 0)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A partir de la descripción física del péndulo, es obvio que el péndulo sólo tiene dos puntos de

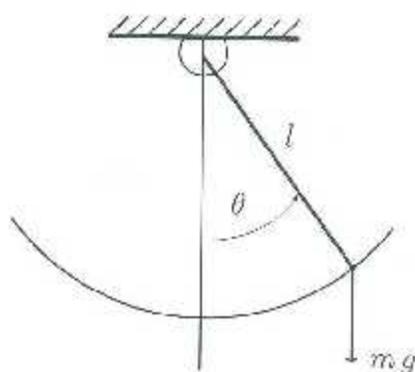


Figura 2.2: Diagrama del péndulo simple.

equilibrio correspondientes a los equilibrios $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$. Cualquier otro número de giros completos que el péndulo haga antes de llegar a la posición de reposo, acabará en uno de los dos puntos de equilibrio ya mencionados. Por ejemplo, si el péndulo hace m revoluciones completas de 360° antes de llegar al reposo, matemáticamente, se dice que el péndulo se aproxima al punto de equilibrio $(2m\pi, 0)$. Se limitará el análisis a los dos puntos de equilibrio "no triviales" del péndulo. Físicamente, se puede ver que ambas posiciones de equilibrio son muy diferentes la una de la otra.

Mientras el péndulo puede permanecer en reposo en el punto de equilibrio $(0, 0)$, difícilmente se puede mantener en reposo en el punto de equilibrio $(\pi, 0)$ debido a que una perturbación infinitamente pequeña hará que el péndulo salga de dicho punto de equilibrio. La diferencia entre ambos puntos de equilibrio se encuentra en sus propiedades de estabilidad. La Figura 2.3 muestra el retrato de fase del péndulo sin fricción ($k = 0$) y

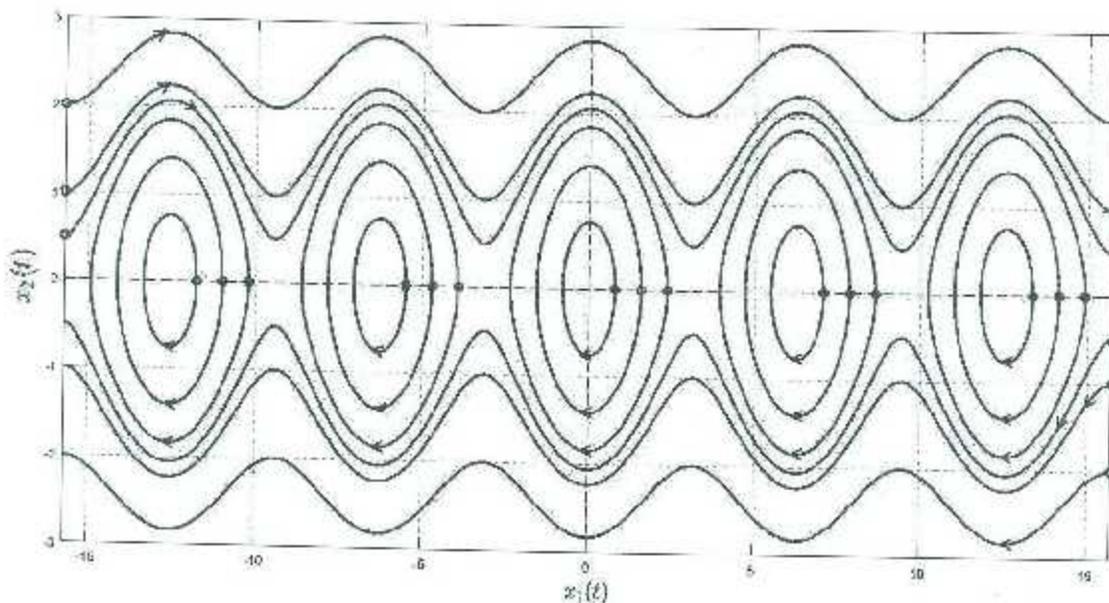


Figura 2.3: Retrato de fase del péndulo simple sin fricción ($k = 0$).

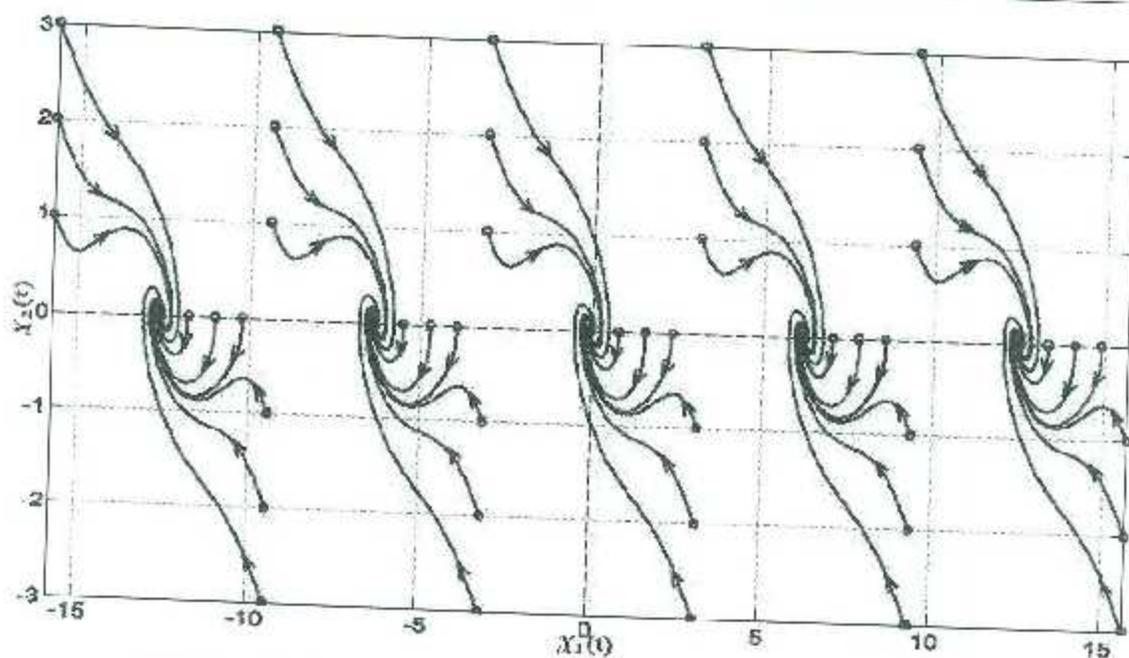


Figura 2.4: Retrato de fase del péndulo simple con fricción ($k = 1$).

parámetros unitarios ($m = g = l = 1$) y la Figura 2.4 lo muestra con fricción ($k = 1$) y parámetros unitarios.

2.1.2. Región de atracción

Muchas de las veces, no es suficiente determinar si un sistema dado posee estabilidad asintótica en sus puntos de equilibrio. Por eso, es importante encontrar la región de atracción de dicho punto, o en su caso, un estimado de él. Para apreciar la importancia de determinar la región de atracción, supongamos que en una situación dada, un sistema no lineal tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable, el cual se denomina como x_{pr} . Supongamos que el sistema está operando en un estado estacionario en x_{pr} , entonces en el tiempo t_1 una situación que cambia la estructura del sistema tiene lugar, por ejemplo, un corto circuito en una red eléctrica. Supóngase que el sistema dañado no tiene puntos de equilibrio en x_{pr} ni en su vecindad. La trayectoria del sistema se alejará de x_{pr} . Supóngase además que el sistema corrupto se soluciona en el tiempo t_1 y el sistema después del daño tiene puntos de equilibrio asintóticamente estables en x_{ps} , donde ni $x_{ps} = x_{pr}$, ni x_{ps} están suficientemente cerca de x_{pr} de manera que la operación en estado estacionario en x_{ps} es aceptable. En el tiempo t_1 los estados del sistema $x(t_1)$, pueden estar muy lejos del nuevo equilibrio del sistema después del daño x_{ps} . El hecho de si el sistema regresará a la operación en estado estacionario en x_{ps} o no, depende de si $x(t_1)$ pertenece a la región de atracción de x_{ps} , según el nuevo comportamiento del sistema. [Khalil, 2002]

Ejemplo 2.3. Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

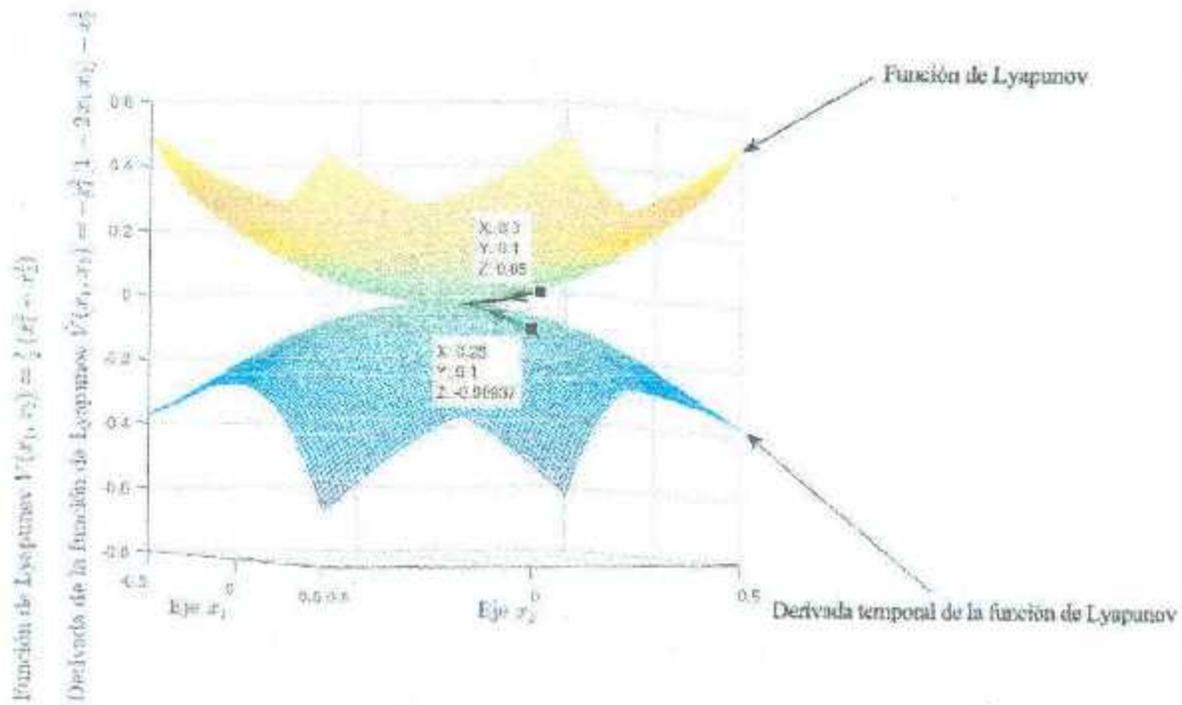


Figura 2.5: Función candidata de Lyapunov (2.7) (arriba) y derivada de la función de Lyapunov (2.8) (abajo).

con un único equilibrio en $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, y la siguiente *función candidata de Lyapunov*:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (2.7)$$

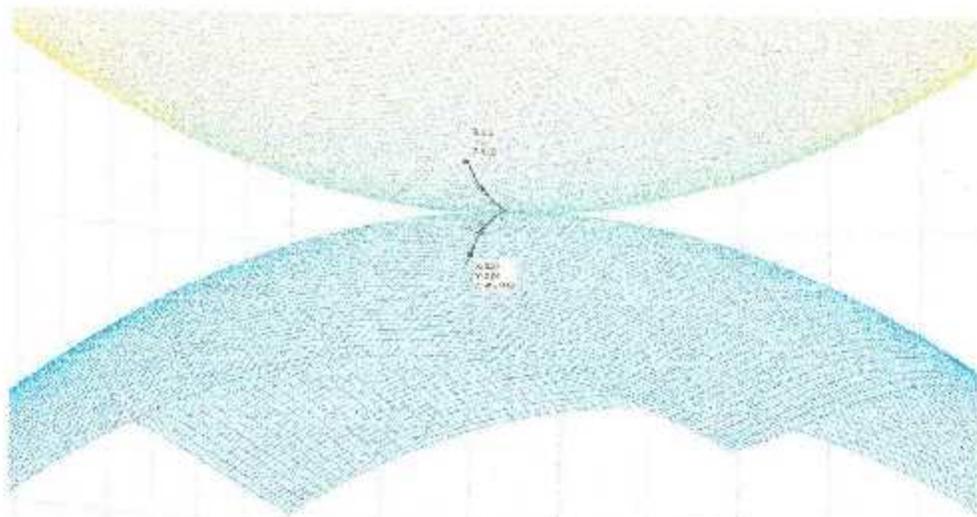


Figura 2.6: Función candidata de Lyapunov (2.7) (arriba) y derivada de la función de Lyapunov (2.8) (abajo).

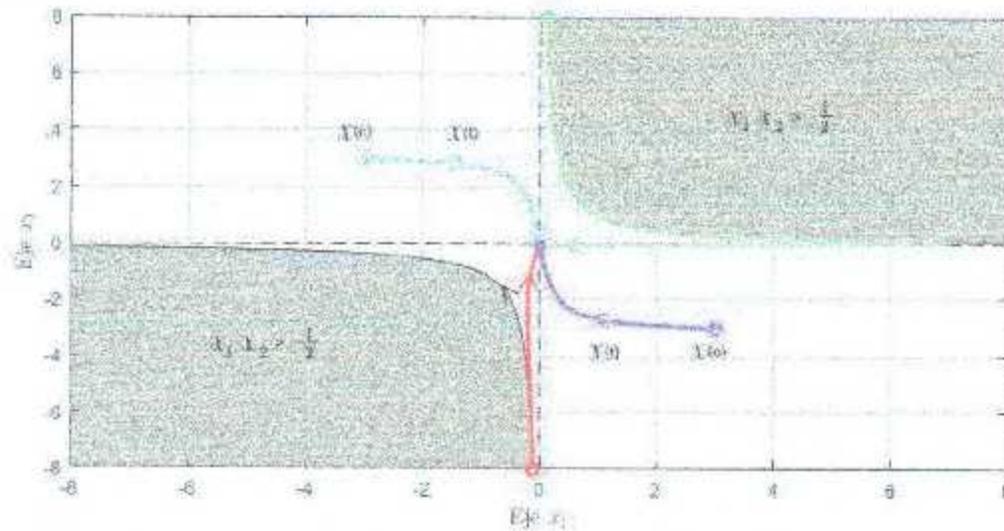


Figura 2.7: Retrato de fase del sistema (2.6).

Haciendo las operaciones correspondientes se llega a

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2 \left[\overbrace{1 - 2x_1 x_2}^{>0} \right] - x_2^2. \quad (2.8)$$

Se pide graficar el *diagrama de fase*, mostrando la región donde

$$1 > 2x_1 x_2$$

o, equivalentemente

$$\frac{1}{2} > x_1 x_2.$$

Graficar $V(\mathbf{x})$, $\dot{V}(\mathbf{x})$, y la región donde $1 > 2x_1 x_2$.

En las Figuras 2.5 y 2.6 se muestran la función candidata de Lyapunov, y la derivada con respecto al tiempo de ésta, las cuales fueron graficadas con el siguiente código de MATLAB®:

```

1 >> [cx_1,cx_2] = meshgrid(-0.5:0.01:0.5,-0.5:0.01:0.5);
2 >> z = cx_1.^2 + cx_2.^2;
3 >> dotz = -cx_1.^2.*(1 - 2.*cx_1.*cx_2) - cx_2.^2;
4 >> mesh(cx_1,cx_2,z)
5 >> hold on
6 >> mesh(cx_1,cx_2,dotz)

```

En la Figura 2.7 se muestra un retrato de fase del sistema (2.6) donde las trayectorias color negro tienden a la inestabilidad, y las demás (verde, rojo, magenta y cian) tienden al origen (estabilidad). En la Figura 2.8 se muestra la superficie de la función de Lyapunov (2.7) con la evolución de las mismas trayectorias vistas en el retrato de fase (Figura 2.7).

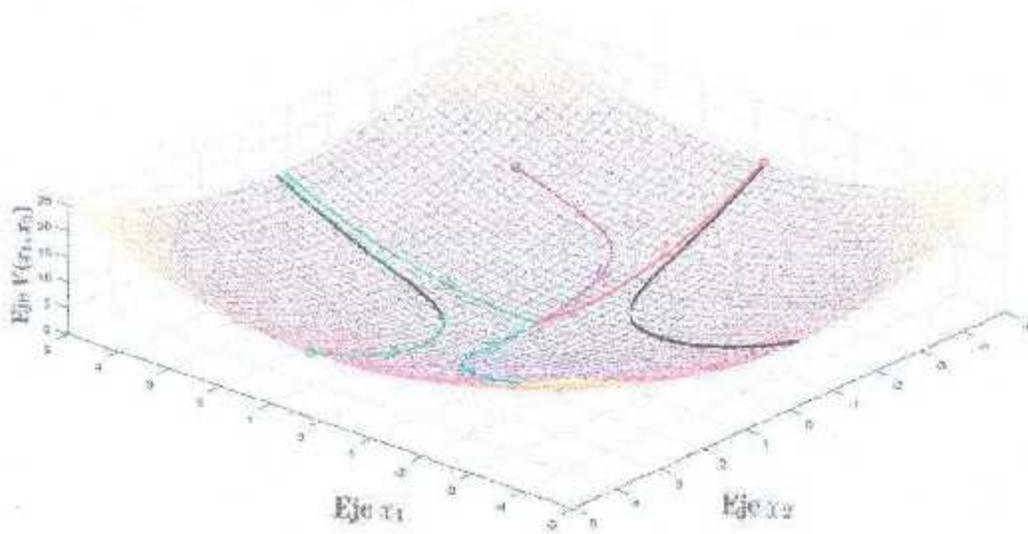


Figura 2.8: Función de Lyapunov (2.7) del sistema (2.6) donde las trayectorias color negro tienden a la inestabilidad, y las demás (verde, rojo, magenta y cian) tienden al origen (estabilidad).

En las Figuras 2.9a y 2.9b se muestran dos perspectivas diferentes de la superficie de la derivada temporal de la función de Lyapunov (2.8) donde $x_1 x_2 < 1/2$. En las Figuras 2.10a y 2.10b se muestra la región de atracción, donde $x_1 x_2 < 1/2$.

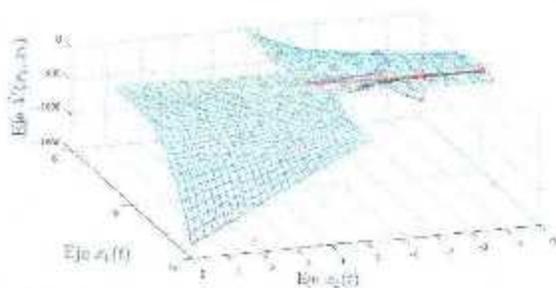
El gráfico de contorno de la Figura 2.10b se hizo con el siguiente código:

```

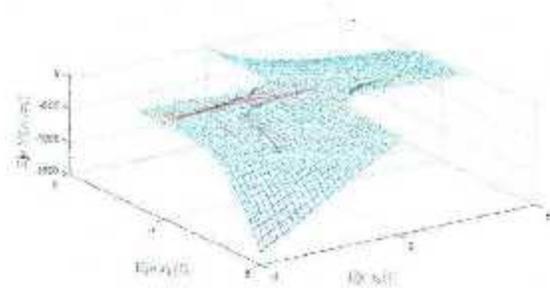
> [c,h] = contour(ax_1,ax_2,y,z,'-k','linewidth',2);
> clabel(c,h)

```

Si el lector no está familiarizado con la programación en MATLAB[®], es importante leer la guía de programación de MATLAB[®] [Hunt *et al.*, 2006] para entender la manera en que

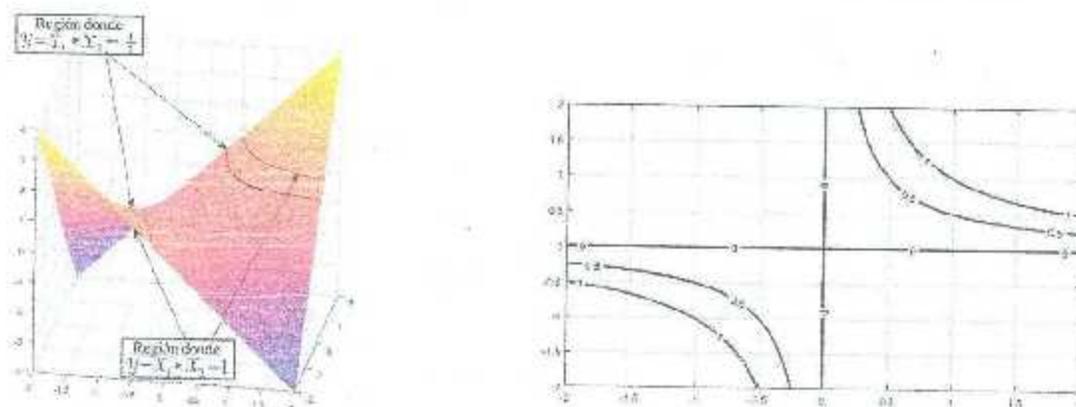


(a) Perspectiva anterior de la derivada temporal de la función de Lyapunov (2.8).



(b) Perspectiva posterior de la derivada temporal de la función de Lyapunov (2.8).

Figura 2.9: Derivada temporal de la función de Lyapunov del sistema (2.6).


 (a) Gráfica en 3-D de $y = x_1 x_2$.

 (b) Gráfico de contorno de $y = x_1 x_2$.

 Figura 2.10: Gráfica de $y = x_1 x_2$.

se utiliza la coma en los arreglos de matrices; el uso de la prima en vectores o matrices (por ejemplo, x') quiere decir matriz transpuesta, el punto y coma al final de una línea de comando omite la impresión de los resultados en la ventana de comandos, el símbolo % significa que el resto de la línea es un comentario. Además se podrá entender la manera de manipular y configurar diversos arreglos y matrices para generar gráficos en 2D, y 3D, así como los gráficos de contorno que se ven en el capítulo 5, entre otras cosas.

Ejemplo 2.4. Considérese el sistema visto en [Khalil, 2002, Ejemplo 8.10]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -4[x_1 + x_2] - h(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz la cual satisface

$$h(0) = 0; \quad u h(u) \geq 0, \forall |u| \leq 1$$

Considérese la función cuadrática

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$

como la *función candidata de Lyapunov*. La derivada de Lyapunov $\dot{V}(\mathbf{x})$ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= (4x_1 + 2x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2 \\ &= -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)h(x_1 + x_2) \\ &\leq -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2, \forall |x_1 + x_2| \leq 1 \\ &= -\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot{V}(\mathbf{x})$ es definida negativa en el conjunto

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 + x_2| \leq 1\}$$

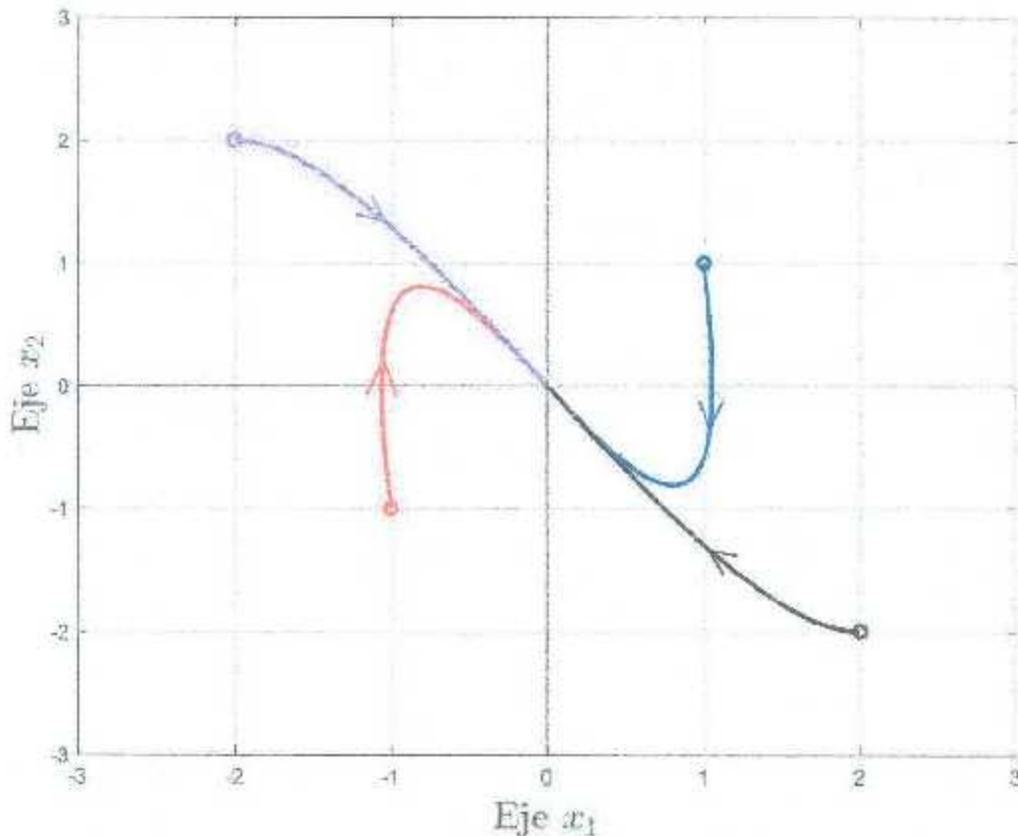


Figura 2.11: Retrato de fase del sistema (2.10) para diferentes condiciones iniciales.

y se puede concluir estabilidad asintótica. Tomando $h(x_1 + x_2)$ como $h(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ tenemos que el sistema queda de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -5(x_1 + x_2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

y su derivada $\dot{V}(x)$ resulta como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 1x_1x_2 + 2x_2^2 - 10(x_1 + x_2)^2 \\ &= -2x_1^2 - 8(x_1 + x_2)^2 < 0 \quad \forall x_1, x_2 \neq 0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.11)$$

De este ejemplo se obtuvieron las Figuras 2.11, 2.12 y 2.13.

2.1.3. Espacios de funciones

Unos espacios de funciones comúnmente utilizados en el análisis de sistemas de control son los llamados espacios L_p^n , donde n es el número de elementos de la función que

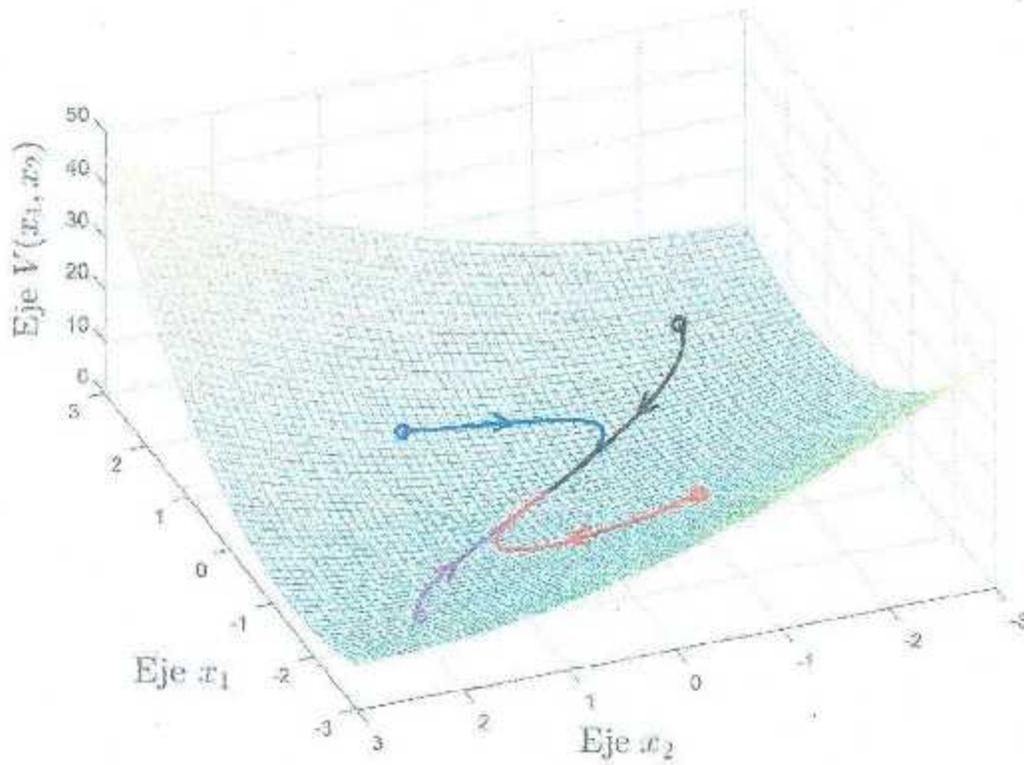


Figura 2.12: Gráfica de la superficie de Lyapunov para el sistema (2.10).

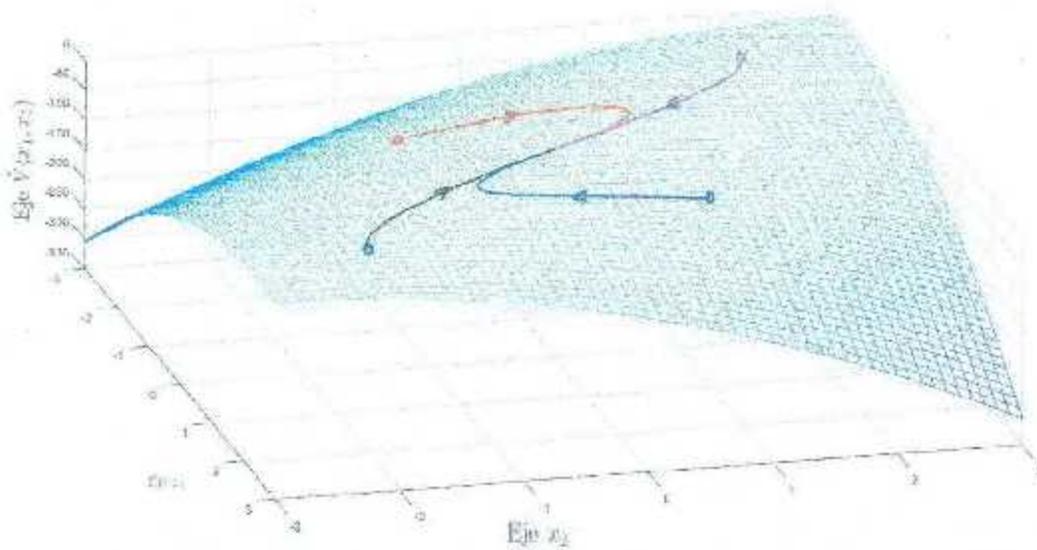


Figura 2.13: Derivada de la función candidata de Lyapunov (2.11) para el sistema (2.10).

pertenezca a este espacio, y \mathcal{L}_p denota el espacio de las funciones cuyas potencias a la p son completamente integrables sobre el dominio $[0, \infty)$, es decir

$$\int_0^{\infty} \|f(t)\|^p dt < \infty$$

Por otro lado, el espacio \mathcal{L}_{∞} denota el conjunto de todas las funciones acotadas, es decir que tienen una cota máxima que existe y es finita, de forma que¹

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\| < \infty.$$

La manera tradicional de analizar la convergencia global del error de posición a cero en sistemas mecánicos es utilizar un lema cuya demostración puede ser verificada siguiendo los mismos pasos que se utilizan para demostrar el Lema de Barbalat. Este lema es el Lema 2.1 de [Kelly y Santibáñez, 2003]. A continuación se enuncia un lema que provee a las funciones que pertenecen al espacio \mathcal{L}_2^2 de condiciones suficientes para que converjan a cero. Este lema es muy utilizado en el estado del arte relativo al control de posición de robots manipuladores.

Lema 2.1. Considérese una función continuamente diferenciable $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que f y su derivada temporal satisfacen que

- $f, \dot{f} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$,
- $f \in \mathcal{L}_2^n$.

Entonces, necesariamente el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Sin embargo, en el libro de Khalil [Khalil, 2002] se presenta otra versión del Lema de Barbalat. Éste se enuncia a continuación.

Lema 2.2. Lema de Barbalat expuesto en [Khalil, 2002]

Sea $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función uniformemente continua de $[0, \infty)$. Supóngase que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{\phi}(\tau) d\tau$ existe y es finito. Entonces

$$\phi(t) \rightarrow 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty$$

Prueba: Para ver esto último, suponga *ad absurdum* que $\phi(t) \not\rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces existe una constante $k_1 > 0$ tal que para todo $T > 0$, se puede definir $T_1 \geq T$ con $|\phi(T_1)| \geq k_1$. Dado que $\phi(t)$ es uniformemente continua, existe una constante $k_2 > 0$ tal que $|\phi(t + \tau) - \phi(t)| < k_1/2 \forall t \geq 0$ y $\forall 0 \leq \tau \leq k_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= |\phi(t) - \phi(T_1) + \phi(T_1)| \\ &\geq |\phi(T_1)| - |\phi(t) - \phi(T_1)| \\ &> k_1 - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_1, \forall t \in [T_1, T_1 + k_2], \end{aligned}$$

¹Los símbolos \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_{∞} denotan a los espacios \mathcal{L}_2^1 y \mathcal{L}_{∞}^1 respectivamente.

por lo tanto,

$$\left| \int_{T_1}^{T_1+k_2} \phi(t) dt \right| - \int_{T_1}^{T_1+k_2} |\phi(t)| dt > \frac{1}{2} k_1 k_2$$

donde la igualdad se cumple, dado que $\phi(t)$ mantiene el mismo signo para $T_1 \leq t \leq T_1+k_2$. Luego, $\int_0^t \phi(\tau) d\tau$ no converge a ningún límite finito conforme $t \rightarrow \infty$, siendo esto una contradicción. \square

2.2. Propiedades del modelo dinámico de robots manipuladores de n g.d.l.

Ahora se presentan algunas propiedades fundamentales del modelo dinámico para robots manipuladores de n g.d.l. descritos por la siguiente ecuación

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau, \quad (2.12)$$

donde $M(q)$ representa la matriz de inercias de $n \times n$, $C(q, \dot{q})$ denota la matriz de fuerzas o pares centrífugos o de Coriolis de orden $n \times n$, $g(q)$ representa el vector de pares gravitacionales de orden n y finalmente $\tau \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de pares o fuerzas aplicadas.

La ecuación (2.12) es comúnmente utilizada para describir el comportamiento de robots manipuladores, y sus términos presentan propiedades importantes en el diseño y análisis de estabilidad de diferentes controladores. Sólomente las propiedades relacionadas con el diseño de controladores y el análisis de estabilidad utilizando el método directo de Lyapunov son presentados en este documento.

Estas propiedades serán descritas a continuación con el siguiente orden: en la primera sección se presentan propiedades de la matriz de inercias $M(q)$, la cual está relacionada con la función de energía cinética $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$ y posee dimensiones de $n \times n$; en la segunda parte se desarrollan las propiedades relacionadas con la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(q, \dot{q})$, la cual posee dimensiones de $n \times n$ y está en función de ambos estados, tanto q como \dot{q} ; la tercer parte desarrolla propiedades relacionadas con el vector de fuerzas gravitatorias $g(q)$, la cual se presenta en robots que no poseen ningún tipo de compensación de gravedad, e.g., manipuladores sin contrapesos, resortes, o para robots diseñados para moverse fuera del plano horizontal. Además, en la cuarta parte de esta sección se presentan características relacionadas con la "dinámica residual," la cual es importante en el estudio y análisis de estabilidad de estos controladores.

2.2.1. Propiedades de la matriz de inercias $M(q)$

La matriz de inercias $M(q)$ es simétrica, definida positiva, y posee dimensiones $n \times n$. Sus elementos sólomente están en función de q . Esta matriz satisface las siguientes propiedades [Kelly y Santibáñez, 2003]:

Propiedad 2.1. Existe un número real positivo α tal que

$$M(\mathbf{q}) \geq \alpha \mathbb{I} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

donde \mathbb{I} representa a la matriz identidad de dimensiones $n \times n$. La matriz $M^{-1}(\mathbf{q})$ existe y es definida positiva.

Propiedad 2.2. Para robots que sólo poseen articulaciones rotacionales existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

Una forma de encontrar β es haciendo

$$\beta \geq n \left(\max_{i,j,\mathbf{q}} |M_{ij}(\mathbf{q})| \right)$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ es el elemento ij de la matriz $M(\mathbf{q})$.

Propiedad 2.3. Para robots que sólo poseen articulaciones rotacionales existen constantes $k_M > 0$ tal que

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

Para encontrar k_M se puede hacer

$$k_M \geq n^2 \left(\max_{i,j,k,\mathbf{q}} \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right| \right). \quad (2.14)$$

Propiedad 2.4. Para robots que sólo poseen articulaciones rotacionales existe un número $k'_M > 0$ tal que

$$M(\mathbf{x})\mathbf{y} \leq k'_M \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad 2.5. La matriz de inercias $M(\mathbf{q})$ es simétrica y definida positiva y satisface

$$\lambda_{\min}\{M\} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}\{M\} \|\mathbf{x}\|^2 \quad (2.15)$$

donde $\lambda_{\min}\{M\}$ denota el $\inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_{\max}\{M\}$ denota el $\sup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}\{M\} \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 2.6. [Moreno-Valenzuela *et al.*, 2010, Propiedad 2] Para todos los vectores $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, las matrices de inercias $M(\mathbf{q})$ y de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisfacen

$$\lambda_{\max}\{M^*(\mathbf{q})\} \|\mathbf{x}\|^2 \geq \mathbf{x}^T M^*(\mathbf{q}) \mathbf{x} \geq \lambda_{\min}\{M^*(\mathbf{q})\} \|\mathbf{x}\|^2 \quad (2.16)$$

con la matriz $M^*(\mathbf{q})$ definida como

$$M^*(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} [M(\mathbf{q}) + M^T(\mathbf{q})]$$

2.2.2. Propiedades de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

Propiedad 2.7. Para un robot manipulador dado, la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ sí lo es.

Propiedad 2.8.

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

Propiedad 2.9. Para todos los vectores $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y cualquier constante escalar α se tiene

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \mathbf{x},$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha \mathbf{x}) \mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \mathbf{y} + \alpha C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}.$$

Propiedad 2.10. El vector $C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}$ puede ser escrito de la forma

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T C_1(\mathbf{q}) \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T C_2(\mathbf{q}) \mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T C_n(\mathbf{q}) \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde las matrices $C_k(\mathbf{q})$ son simétricas de dimensiones $n \times n$ para $k = 1, 2, \dots, n$. El elemento ij de $C_{k,j}(\mathbf{q})$ de la matriz $C_k(\mathbf{q})$ corresponde al símbolo de Christoffel $c_{ijk}(\mathbf{q})$.

Propiedad 2.11. (Ver e.g. [Santibáñez y Kelly, 1997]) Para robots que sólo poseen articulaciones rotacionales, existe un número $k_{C_1} > 0$ tal que

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

y una cota inferior para la constante k_{C_1} está dada por

$$k_{C_1} \geq n^2 \left(\sup_{i,j,k,q} |c_{ijk}(\mathbf{q})| \right)$$

donde $c_{ijk}(\mathbf{q})$ es el símbolo ijk de los símbolos de Christoffel. [Lizano y Taouataou, 2002]

Propiedad 2.12. Para robots que sólo poseen articulaciones rotacionales, existen números $k_{C_1} > 0$ y $k_{C_2} > 0$ tal que

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \mathbf{w}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Propiedad 2.13. (Ver e.g. [Santibáñez y Kelly, 1997]) La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, obtenida utilizando los coeficientes de Christoffel, está relacionada con la matriz de inercias $M(\mathbf{q})$ por la expresión

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

debido a que el término $\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrico. Equivalentemente, la matriz $\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, y también se cumple que

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

2.2.3. Propiedades del vector de pares gravitacionales

El vector de pares gravitacionales $g(q)$, se presenta en robots cuyos modelos no están diseñados con compensación de pares gravitacionales.

El vector de pares gravitacionales de dimensiones $n \times 1$, depende sólo de las posiciones articulares q . El vector de pares gravitacionales $g(q)$ es continuo y por lo tanto, está acotado para cualquier valor de las posiciones articulares q acotado. Este vector de pares gravitacionales tiene las siguientes propiedades.

Propiedad 2.14. El vector $g(q)$ y el vector de velocidades articulares \dot{q} están relacionados por

$$\int_0^T g^T(q(t)) \dot{q}(t) dt = \mathcal{U}(q(T)) - \mathcal{U}(q(0)) \quad (2.19)$$

para cualquier valor de $T \in \mathbb{R}_+$.

Propiedad 2.15. Para robots que poseen sólomente articulaciones de revolución existe un número $k_{\mathcal{U}}$ tal que

$$\int_0^T g^T(q(t)) \dot{q}(t) dt + \mathcal{U}(q(0)) \geq k_{\mathcal{U}}$$

para cualquier valor de $T \in \mathbb{R}_+$ y donde $k_{\mathcal{U}} = \min_q \{\mathcal{U}(q)\}$.

Propiedad 2.16. Para robots que poseen sólomente articulaciones de revolución, el vector de pares gravitacionales $g(q)$ es Lipschitz, lo que quiere decir que existe una constante $k_g > 0$ tal que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k_g \|x - y\| \quad (2.20)$$

para cualquier valor de $x, y \in \mathbb{R}^n$. Una manera de encontrar k_g es evaluando la derivada parcial dada por

$$k_g \geq n \left(\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right) \quad (2.21)$$

Por tanto, k_g satisface la siguiente relación

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\| \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial g(q)}{\partial q} \right\}$$

Propiedad 2.17. Para robots que poseen sólomente articulaciones de revolución existe una constante k' tal que

$$\|g(q)\| \leq k'$$

para cualquier valor de $q \in \mathbb{R}^n$.

2.3. Introducción al control adaptable

En algunas tareas de control, tales como aquellas relacionadas con robots manipuladores, los sistemas a ser controlados poseen incertidumbres paramétricas en el principio de la operación de control. A menos que dichas incertidumbres paramétricas sean reducidas

gradualmente en línea debido a un mecanismo de adaptación o de estimación, pueden causar incertidumbre o inestabilidad en los sistemas de control. En otras tareas, como las relacionadas con sistemas de potencia, la dinámica de los sistemas pueden ser bien conocidas al principio de la operación de control, pero pueden experimentar variaciones paramétricas impredecibles conforme la ley de control es implementada. Si no hay ningún "rediseño" del controlador, el diseño inicial del controlador puede no ser capaz de controlar los cambios en la planta de manera adecuada. Generalmente, el objetivo básico en el control adaptable es mantener un buen desempeño de los sistemas a pesar de la presencia de incertidumbres en los parámetros de la planta. Debido a que la incertidumbre paramétrica ocurre en muchos problemas prácticos, el control adaptable es útil en muchas aplicaciones industriales, tales como en los robots manipuladores.

El modelo general de un robot manipulador² que está dado por las ecuaciones de Lagrange, puede ser expresado como

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau. \quad (2.22)$$

Los elementos de la matriz de inercias $M(q)$, la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $C(q, \dot{q})$, y el vector de pares gravitacionales $g(q)$, no sólo dependen de la geometría del robot manipulador, sino también de los valores numéricos de diversos parámetros como las masas, las inercias y las distancias a los centros de masa.

El caso en el cual estos parámetros y la geometría del robot son conocidos con exactitud es llamado *el caso ideal*. Un caso más realista es aquél en el que los valores numéricos de algunos parámetros del robot son desconocidos. Tal es el caso cuando el objeto a manipular por el órgano terminal del robot (el cual se considera como parte de la última articulación) posee una masa y una inercia desconocida. Esta situación no se puede sobreestimar, debido a que la incertidumbre en algunos de los parámetros del modelo del robot hace imposible utilizar las leyes de control basadas en el modelo que no considera estos valores. Los controles adaptables son útiles precisamente por este caso más realista.

Para enfatizar la dependencia del modelo de los parámetros dinámicos, se reescribe la ecuación (2.22) en función del vector de parámetros dinámicos desconocidos θ como

$$M(q, \theta) \ddot{q} + C(q, \dot{q}, \theta) \dot{q} + g(q, \theta) = \tau. \quad (2.23)$$

El vector de parámetros dinámicos desconocidos θ puede ser de cualquier dimensión, y no depende ni del número de grados de libertad del robot ni de si el robot tiene articulaciones prismáticas o rotacionales, ni de ningún otro aspecto relacionado con el robot. Por lo tanto, se dice que $\theta \in \mathbb{R}^m$ donde m es una constante conocida. Cabe destacar también que los parámetros dinámicos θ no corresponden necesariamente a parámetros individuales del robot.

Ejemplo 2.5. Considérese el ejemplo del péndulo ideal del Ejemplo 2.2, con su masa m concentrada en el extremo de la pértiga, a una distancia l de su eje de rotación, cuyo modelo dinámico se repite aquí por conveniencia:

$$m l^2 \ddot{q} + m g l \sin(q) = \tau, \quad (2.24)$$

²Dado bajo condiciones ideales de articulaciones rígidas, sin elasticidad en las articulaciones, sin fricción, y con una dinámica en los actuadores despreciable.

donde se identifica que $M(q, \theta) = m l^2$, $g(q, \theta) = m g l \operatorname{sen}(q)$. Si se consideran la masa m y la distancia l como desconocidas, se tiene que el vector de parámetros dinámicos queda como

$$\theta = \begin{bmatrix} m l^2 \\ m g l \end{bmatrix},$$

el cual es una función vectorial no lineal de los parámetros físicos m y l , ya que θ depende del producto entre ellos.

2.3.1. Linealidad en los parámetros dinámicos

El Ejemplo 2.5 muestra que el modelo dinámico (2.24) es lineal en los parámetros θ . Nótese que

$$\begin{aligned} m l^2 \ddot{q} + m g l \operatorname{sen}(q) &= \begin{bmatrix} \ddot{q} & \operatorname{sen}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m l^2 \\ m g l \end{bmatrix}, \\ &= \Phi(q, \ddot{q}) \theta. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que el modelo dinámico (2.24) puede ser reescrito como el producto de una función vector Φ que contiene términos no lineales de los estados y el vector de parámetros dinámicos θ .

Esta propiedad es comúnmente conocida como “linealidad de los parámetros” o “parametrización lineal.” Es una propiedad que poseen muchos sistemas no lineales y una gran clase de robots manipuladores. Esta propiedad se enuncia formalmente a continuación:

Propiedad 2.18. *Linealidad de los parámetros dinámicos*

A partir de las matrices $M(q, \theta)$, $C(q, \dot{q}, \theta)$ y el vector $g(q, \theta)$ del modelo dinámico dado por (2.23), la cual se reescribe por conveniencia como

$$M(q, \theta) \ddot{q} + C(q, \dot{q}, \theta) \dot{q} + g(q, \theta) = \tau, \quad (2.25)$$

se tiene lo siguiente.

Para toda $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$M(q, \theta) u + C(q, w, \theta) v + g(q, \theta) = \Phi(q, u, v, w) \theta + \kappa(q, u, v, w) \quad (2.26)$$

1.

donde $\kappa(q, u, v, w)$ es un vector de dimensiones $n \times 1$, $\Phi(q, u, v, w)$ es una matriz de dimensiones $n \times m$ y el vector θ de dimensiones $m \times 1$ depende solamente de los parámetros del robot manipulador y de su carga.

2.

Además, si $q, u, v, w \in \mathcal{L}_{\infty}^n$ entonces $\Phi(q, u, v, w) \in \mathcal{L}_{\infty}^{n \times m}$.

Cabe remarcar que siempre se puede encontrar una manera de definir el vector $\theta \in \mathbb{R}^m$ para el cual $\kappa(q, u, v, w) = \mathbf{0}$. Considerando esto, al hacer $u = \ddot{q}$, $v = w = \dot{q}$, puede ser útil reescribir la ecuación (2.26) como

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta - M(q, \theta) \ddot{q} - C(q, \dot{q}, \theta) \dot{q} + g(q, \theta), \quad (2.27)$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \Phi(q, \ddot{q}, \dot{q}, \dot{q})$ es una matriz de dimensiones $n \times m$ y el vector θ de dimensiones $m \times 1$ que contiene m constantes que dependen de los parámetros dinámicos.

2.3.2. Parametrización de un controlador adaptable

Las leyes de control para resolver problemas de control en regulación y en seguimiento para robots manipuladores está dada por

$$\tau = \tau(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, M(q, C(q, \dot{q}), g(q)). \quad (2.28)$$

En general, estas leyes de control están formadas por la suma de dos términos: la parte que no depende explícitamente del modelo dinámico del robot a controlar, y la que sí depende.

Sin embargo, las leyes de control son ecuaciones algebraicas que calculan la acción de control, la cual puede ser escrita en la siguiente forma

$$\tau = \tau_1(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) + M(q, \hat{\theta})u + C(q, w, \hat{\theta})v + g(q, \hat{\theta}) \quad (2.29)$$

donde los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ dependen de las posiciones q y de las velocidades \dot{q} , así como de la trayectoria deseada q_d , y de sus primeras y segundas derivadas. El vector $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de los parámetros adaptados.

La ley adaptable permite determinar el vector $\hat{\theta}(t)$ y en general, puede ser escrita como una ecuación diferencial de $\hat{\theta}$. Una ley adaptable utilizada en sistemas adaptables es la llamada "ley integral" o "ley del gradiente," como

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \int_0^t \psi(\sigma, q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) d\sigma + \hat{\theta}(0) \quad (2.30)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $\hat{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m$ son parámetros de diseño, y ψ es una función vectorial a ser determinada, de dimensión m .

La ecuación de la ley adaptable obtenida al diferenciar (2.30) respecto al tiempo es

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \psi(\sigma, q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d). \quad (2.31)$$

Desde un punto de vista práctico, es deseable que la ley de control (2.29) así como la ley adaptable dada por (2.30) o por (2.31), no dependa explícitamente de la aceleración articular \ddot{q} .

2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Considérese el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.32)$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo localmente Lipschitz del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n . Supóngase $\bar{x} \in D$ es un punto de equilibrio de (2.32); esto es, $f(\bar{x}) = 0$. Se busca describir y estudiar la estabilidad de \bar{x} . Por conveniencia, se establecen todas las definiciones y teoremas para el caso en que el punto de equilibrio está en el origen de \mathbb{R}^n ; esto es, $\bar{x} = 0$. No hay ninguna pérdida de generalidad al hacer esto porque cualquier punto de equilibrio puede

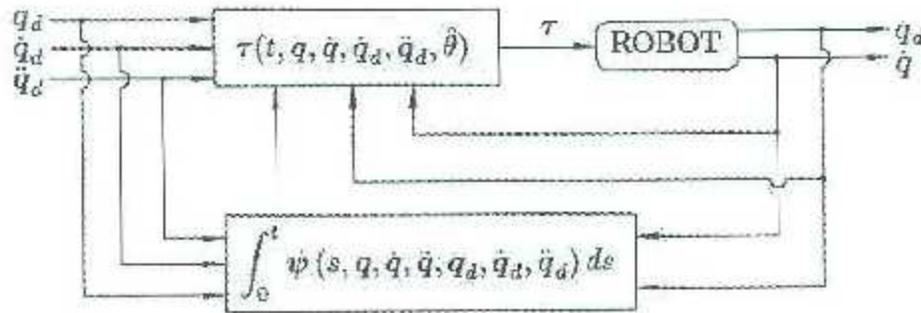


Figura 2.14: Diagrama a bloques genérico de un controlador adaptable para robots manipuladores.

ser ubicado en el origen al hacer un cambio de variables. Supóngase que $\bar{x} \neq 0$ y considérese un cambio de variables $y = x - \bar{x}$. La derivada de y está dada por

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(y), \quad \text{donde } g(0) = 0$$

En la nueva variable y , el sistema tiene el punto de equilibrio ubicado en el origen de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, siempre se asumirá que $f(x)$ satisface que $f(0) = 0$ y se estudiará la estabilidad del origen $x = 0$.

Definición 2.1. El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.32) es

- estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- inestable si NO es estable.
- asintóticamente estable si es estable y δ puede ser escogida tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

El requisito de ε y δ para la estabilidad toma una forma de causa y efecto. Para demostrar que el origen es estable, para cualquier valor de ε que pudiera designarse, se debe encontrar un valor de δ , posiblemente dependiente de ε , tal que una trayectoria que empiece en una vecindad del origen δ nunca dejará la vecindad de la bola de radio ε . Las tres propiedades de los tipos de estabilidad pueden ser ilustrados con el Ejemplo 2.2 [Khalil, 2002].

En 1892, Lyapunov demostró que otras funciones pueden usarse en lugar de las ecuaciones de energía de un sistema para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable definida en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, la derivada de V a lo largo de las trayectorias de (2.32), denotada

por $\dot{V}(\mathbf{x})$, está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

La derivada de V a lo largo de las trayectorias de un sistema es dependiente de la ecuación del sistema. Por tanto, $\dot{V}(\mathbf{x})$ será diferente para diferentes sistemas. Si $\phi(t, \mathbf{x})$ es la solución de (2.32) que tiene un estado inicial \mathbf{x} en el tiempo $t = 0$, entonces

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi(t, \mathbf{x})) \right|_{t=0}$$

Por lo tanto, si $\dot{V}(\mathbf{x})$ es negativa, V será decreciente a lo largo de la solución de (2.32). A continuación se enuncia el Teorema de estabilidad de Lyapunov.

Teorema 2.1. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio de la ecuación (2.32) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{y} \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{\mathbf{0}\} \quad (2.33)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{en} \quad D \quad (2.34)$$

Entonces, el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{\mathbf{0}\} \quad (2.35)$$

entonces el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable.

El teorema de Lyapunov puede ser utilizado sin necesidad de resolver la ecuación diferencial (2.32). Por otra parte, no hay ninguna manera sistemática para encontrar la función de Lyapunov [Spelsberg-Korspeter *et al.*, 2012]. En algunos casos, hay funciones candidatas de Lyapunov naturales como las funciones de energía en los sistemas eléctricos o mecánicos. En otros casos, básicamente el método para encontrar la función candidata de Lyapunov es a prueba y error.

Ejemplo 2.6. Considerando otra vez la ecuación del péndulo con fricción (ejemplo 2.2), podemos escribir que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - b x_2\end{aligned}$$

y se propone ahora la siguiente *función candidata de Lyapunov* para demostrar la estabilidad del sistema.

$$V(\mathbf{x}) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (2.36)$$

de donde se obtiene la siguiente derivada temporal a lo largo de sus trayectorias

$$\dot{V}(x) = a \dot{x}_1 \sin(x_1) + x_2 \dot{x}_2 = -b x_2^2.$$

La derivada de Lyapunov es semidefinida negativa. Ésta no es definida negativa debido a que $\dot{V}(x) = 0$ en $x_2 = 0$ sin importar el valor que tome x_1 ; esto quiere decir que $\dot{V}(x) = 0$ a lo largo de todo el eje x_1 . Por lo tanto, sólo se puede concluir que el origen es estable. La función de energía de Lyapunov $V(x)$ no puede demostrar estabilidad asintótica. Sin embargo, se busca otra *función candidata de Lyapunov* cuya derivada sea definida negativa. Tómese por ejemplo

$$V(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{b^2}{2} x_1^2 + b x_1 x_2 + x_2^2 \right] + a [1 - \cos(x_1)] \quad (2.37)$$

cuya derivada $\dot{V}(x)$ está dada por

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} a b x_1 \sin(x_1) - \frac{1}{2} b x_2^2$$

El término $x_1 \sin(x_1) > 0 \forall 0 < |x_1| < \pi$. Tomando el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < \pi\}$, se ve que la *función candidata de Lyapunov* $V(x) > 0$ es definida positiva y su derivada $\dot{V}(x) < 0$ es definida negativa en el conjunto D . Luego, utilizando el Teorema 2.1, se concluye estabilidad asintótica del origen.

En el ejemplo anterior se ve que con la primer *función candidata de Lyapunov* (2.36) no se puede concluir estabilidad asintótica del origen debido a que su derivada sólo es semidefinida negativa. Sin embargo, nótese que $\dot{V}(x)$ es negativa para toda $x \in \mathbb{R}^2$ excepto en la línea donde $x_2 = 0$, donde $\dot{V}(x) = 0$. Para mantener esta condición, la trayectoria del sistema debe estar contenida dentro de la línea donde $x_2 = 0$. A menos de que $x_1 = 0$, esto es imposible debido a que

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \sin(x_1(t)) \equiv 0$$

Por lo tanto, el sistema puede cumplir que $\dot{V}(x) = 0$ sólo en el origen donde $x = 0$.

Estableciendo esto formalmente, se tiene que si en un dominio conteniendo al origen se puede encontrar una función de Lyapunov cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema sea semidefinida negativa, y si se puede establecer que ninguna trayectoria puede permanecer idénticamente donde $\dot{V}(x) = 0$, excepto en el origen $x = 0$, entonces el origen es asintóticamente estable. Esto viene del principio de invariancia de LaSalle [Khalil, 2002] el cual se enuncia enseguida.

Teorema 2.2 (Principio de Invariancia de LaSalle). Sea $\Omega \subset D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto que es positivamente invariante con respecto a $\dot{x} = f(x)$ y sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable de manera que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M el conjunto invariante más grande en E , luego, cada solución que comienza dentro de Ω se aproxima a M conforme $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución de (2.32) que empieza en Ω . Dado que $\dot{V}(x) < 0$ en Ω , $V(x(t))$ es una función decreciente en t . Dado que $V(x)$ es continua en el conjunto compacto Ω , está acotada por abajo en Ω . Por lo tanto, $V(x(t))$ tiene un límite a conforme $t \rightarrow \infty$. Nótese que el conjunto límite positivo L^+ está en Ω porque Ω es un conjunto cerrado. Para cualquier $p \in L^+$ (punto límite positivo de $x(t)$), hay una secuencia t_n , con $t_n \rightarrow \infty$ y $x(t_n) \rightarrow p$ conforme $n \rightarrow \infty$. Por la continuidad de $V(x)$, $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$. Por lo tanto, $V(x) = a$ en L^+ . Dado que L^+ es un conjunto invariante, $\dot{V}(x) = 0$ en L^+ . Luego,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

Dado que $x(t)$ está acotado, $x(t)$ tiende a L^+ conforme $t \rightarrow \infty$. Luego, $x(t)$ tiende a M conforme $t \rightarrow \infty$. \square

En [Kelly y Santibáñez, 2003] se presenta una versión simplificada del denominado teorema de LaSalle, la cual está enunciada a continuación.

Teorema 2.3. [Kelly y Santibáñez, 2003, Teorema 2.6] Considérese la ecuación $\dot{x} = f(x)$, cuyo origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(x)$ definida positiva (globalmente) y radialmente desacotada tal que

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.38)$$

Defínase el conjunto Ω como

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}. \quad (2.39)$$

Si $x(0) = x_0 = 0$ es la única condición inicial en Ω para la cual $x(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$, entonces el origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global. \diamond

En el caso de los sistemas autónomos, el teorema de invariancia de LaSalle (Teorema 2.2) muestra que la trayectoria del sistema se aproxima al conjunto invariante más grande en E , donde E es el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. En el caso de sistemas no autónomos, puede no estar muy claro cómo definir al conjunto E , ya que $\dot{V}(t, x)$ es una función tanto de t como de los estados x . Esta situación puede observarse de una manera más clara al establecer que

$$\dot{V}(t, x) \leq -W(x) \leq 0$$

para un conjunto E que es definido como el conjunto de todos los puntos donde $W(x) = 0$. Se debe esperar que la trayectoria se aproxime a E conforme t tienda a ∞ .

Una alternativa al Teorema 2.2 es el Principio de Invariancia de LaSalle mostrado en [Barkana, 2014] para sistemas no autónomos y autónomos como casos particulares, el cual se enuncia a continuación.

Teorema 2.4. [Barkana, 2014, Teorema 2.2] Considérese el sistema no lineal no autónomo $\dot{x} = f(t, x)$. Supóngase que existe una función de Lyapunov $V(x)$ definida positiva y que su derivada temporal $\dot{V}(t, x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(t, x)$

es semidefinida negativa, y particularmente satisface la relación de la forma $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$. Defínase el dominio $\Omega_0 = \{\mathbf{x} : V(t, \mathbf{x}) \leq V(0, \mathbf{x}_0)\}$ para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$. Debido a que la derivada de Lyapunov es semidefinida negativa está claro que todas las trayectorias del sistema están acotadas y contenidas dentro del dominio Ω_0 . Ahora, defínase el dominio $\Omega = \{\mathbf{x} : W(\mathbf{x}) = 0\}$. Bajo la suposición de que $\|f(t, \mathbf{x}(t))\|$ está acotada para cualquier $\mathbf{x}(t)$ acotada, el vector de estados $\mathbf{x}(t)$ llega de manera última al dominio $\Omega_f = \Omega_0 \cap \Omega$.

Para el caso donde se presentan sistemas autónomos, el Principio de Invariancia de LaSalle (Teorema 2.2) muestra que la trayectoria de un sistema se aproxima al conjunto invariante más grande en E , donde E es el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. En el caso de los sistemas no autónomos, puede no ser clara la manera de definir al conjunto E , dado que $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ es una función de tanto el tiempo t como de los estados \mathbf{x} . La situación se simplifica si se puede mostrar que

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$$

entonces el conjunto E pueda ser definido como el conjunto de todos los puntos donde $W(\mathbf{x}) = 0$. Se puede esperar que la trayectoria del sistema se aproxime al conjunto E conforme t tiende a ∞ .

Es importante resaltar la ingeniosa idea que tuvo LaSalle. En lugar de tratar con el resultado de la derivada de la función de Lyapunov como una función, el Principio de Invariancia relaja las condiciones en el sistema. Utilizando la notación $\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2}$, una de las siguientes dos suposiciones se debe cumplir a lo largo de las trayectorias del sistema:

(1) $\|f(\mathbf{x}(t), t)\|$ está acotada para cualquier \mathbf{x} acotada.

$$(2) \left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau \right\| = \mu(\beta - \alpha)$$

La función $\mu(\tau)$ es un módulo de continuidad, lo que implica que la trayectoria es una función continua variante en el tiempo.

Si el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es global y asintóticamente estable de un sistema dado, entonces debe ser el único punto de equilibrio del sistema. Si hubiera otro punto de equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$, una trayectoria que empiece en $\bar{\mathbf{x}}$ permanecería en $\bar{\mathbf{x}}$ para todo tiempo $t \geq \infty$, y por lo tanto no tendería al origen, lo cual contradice la afirmación de que el origen es global y asintóticamente estable. Por lo tanto, la estabilidad asintótica global no es estudiada para sistemas con múltiples puntos de equilibrio, como en la ecuación del péndulo (Ejemplo 2.2).

Debido a que las propiedades globales de estabilidad implican la existencia de un único equilibrio para el sistema descrito por la ecuación diferencial respectiva, se permite hablar no solo de las propiedades de estabilidad global de dicho equilibrio, sino también de dichas propiedades para el sistema que representan, es decir, afirmaciones como "este sistema es asintóticamente estable en forma global" serían correctas.

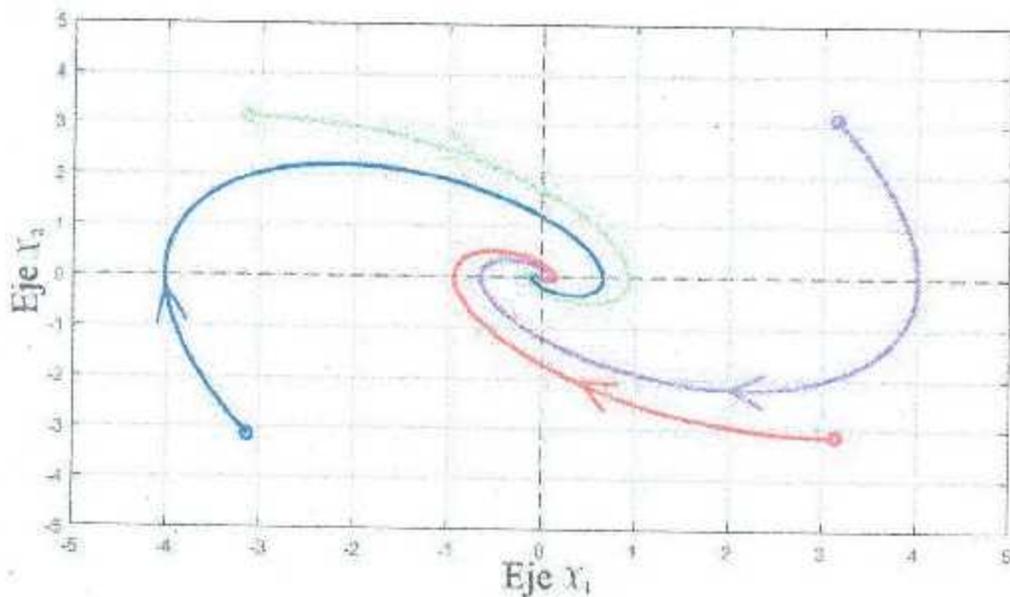


Figura 2.15: Retrato de fase del sistema (2.40) para diferentes condiciones iniciales.

2.4.1. Ejemplos de aplicación del Principio de Invariancia para sistemas autónomos

A continuación se redacta el ejemplo 2.7 de [Barikava, 2014].

Ejemplo 2.7. Se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2, \end{aligned} \tag{2.40}$$

cuyo retrato de fase para diferentes condiciones iniciales puede ser visto en la Figura 2.15. Para este sistema se propone la *función candidata de Lyapunov*

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \tag{2.41}$$

cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2, \\ &= x_1 x_2 - x_1 x_2 - x_2^2, \\ &= -x_2^2. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Las gráficas de las funciones (2.41) y (2.42) pueden ser vistas en las Figuras 2.16 y 2.17, junto con las trayectorias vistas en el retrato de fase de la Figura 2.15. Si $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ es la única condición inicial para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega \ \forall t \geq 0$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

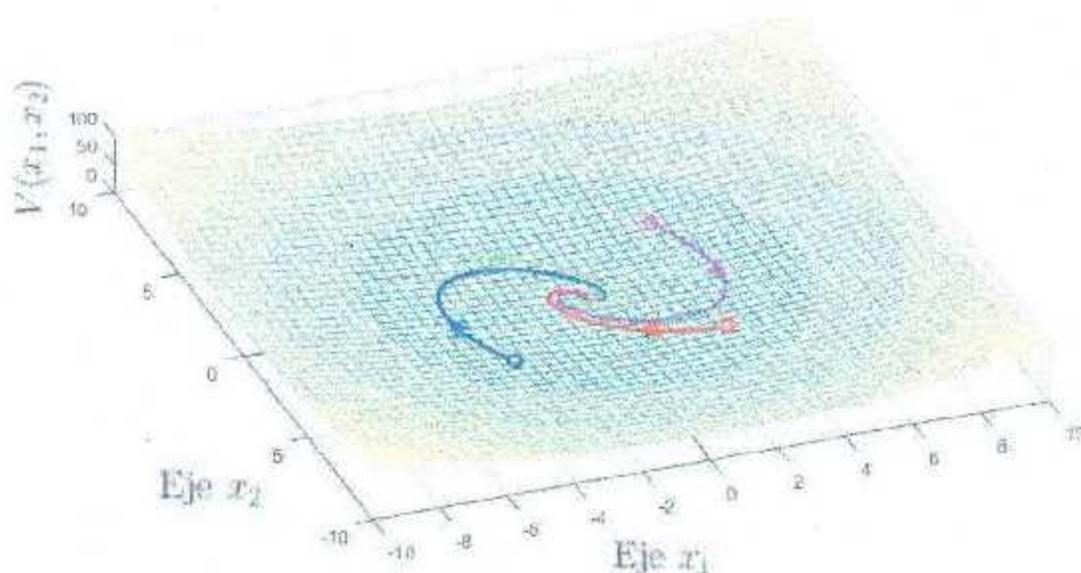


Figura 2.16: Función de Lyapunov (2.41) del sistema (2.40) para diferentes condiciones iniciales.

Sin embargo, debido a que la conclusión del Principio de Invariancia para este sistema es que termina dentro de un dominio en un espacio de estados dado por $x_2 \equiv 0$, esto implica que

$$x_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = 0.$$

En este punto, cabe destacar que aunque el origen es un punto de equilibrio, este sólo es un punto de equilibrio "regular" para la trayectoria trivial $[x_1(0) \ x_2(0)]^T = [0 \ 0]^T$, ya que la solución comienza, permanece y termina en el origen. Para cualquier otra condición inicial $x_1(0) \neq 0$ y $x_2(0) \neq 0$ el origen es también un punto de equilibrio sóloamente que es alcanzado conforme $t \rightarrow \infty$ (punto de equilibrio último).

Ejemplo 2.8 (Control PD). El controlador P con retroalimentación de velocidad es el controlador de mallá cerrada más sencillo que puede emplearse en el control de robots. La ecuación del controlador PD puede escribirse como

$$\tau = K_p \bar{q} - K_v \dot{\bar{q}} \quad (2.43)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas seleccionadas por el diseñador y denominadas como ganancia de posición y de velocidad, respectivamente. El vector $q_d \in \mathbb{R}^n$ es la posición articular deseada variante en el tiempo, y el vector $\bar{q} = q_d - q \in \mathbb{R}^n$ se denomina como error de posición.

El comportamiento en mallá cerrada de un robot de n grados de libertad bajo la acción del controlador P con retroalimentación de velocidad (o control PD) se obtiene combinando el modelo (2.12) con la ley de control (2.43), es decir

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \bar{q} - K_v \dot{\bar{q}}, \quad (2.44)$$

o equivalentemente en términos del vector de estados $[\bar{q}^T \ \dot{\bar{q}}^T]^T$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \ddot{q}_d - M^{-1}(q) [K_p \bar{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q)] \end{bmatrix},$$

que es una ecuación diferencial no lineal y no autónoma. Sin embargo, si el vector de posiciones articulares deseadas q_d se toma como constante, la ecuación de malla cerrada en términos del vector de estados $[\bar{q}^T \ \dot{\bar{q}}^T]^T$ puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M^{-1}(q) [K_p \bar{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q)] \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

En este caso, la ecuación diferencial que describe al sistema sigue siendo no lineal pero autónoma. Esta autonomía se debe a que q_d es constante. La ecuación anterior podrá tener múltiples estados de equilibrio, los cuales están dados por $[\bar{q}^T \ \dot{\bar{q}}^T]^T = [s^T \ 0^T]^T$, donde $s \in \mathbb{R}^n$ es la solución de

$$K_p s - g(q_d - s) = 0. \quad (2.46)$$

Obviamente, si el modelo del manipulador no posee el término de pares gravitacionales $g(q)$, entonces el único equilibrio será el origen. De igual forma, si el término $g(q)$ es independiente de q , i.e., $g(q) = g$, entonces $s = K_p^{-1} g$ será el único equilibrio del sistema. La ecuación (2.46) es, en general, no lineal en s debido al término gravitacional $g(q_d - s)$.

En este caso, se presenta un ejemplo donde el modelado del robot incluye el término gravitatorio $g(q)$ para un robot con articulaciones únicamente del tipo rotacional.

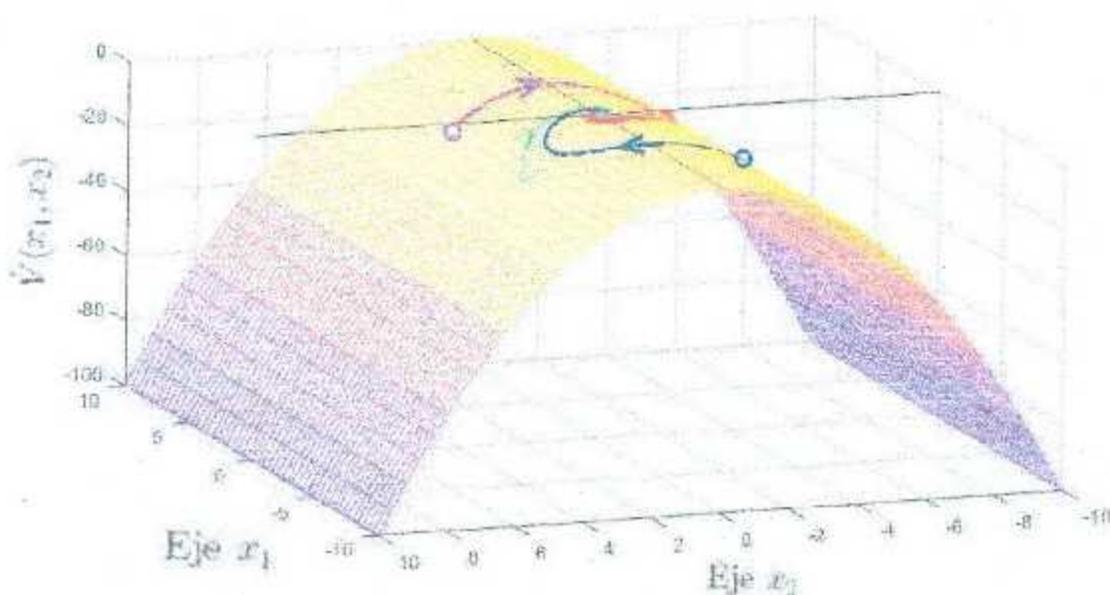


Figura 2.17: Derivada de Lyapunov (2.42) del sistema (2.40) para diferentes condiciones iniciales.

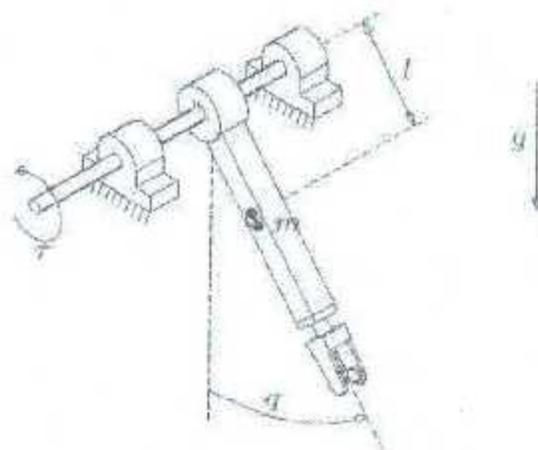


Figura 2.18: Un péndulo simple del Ejemplo 2.9.

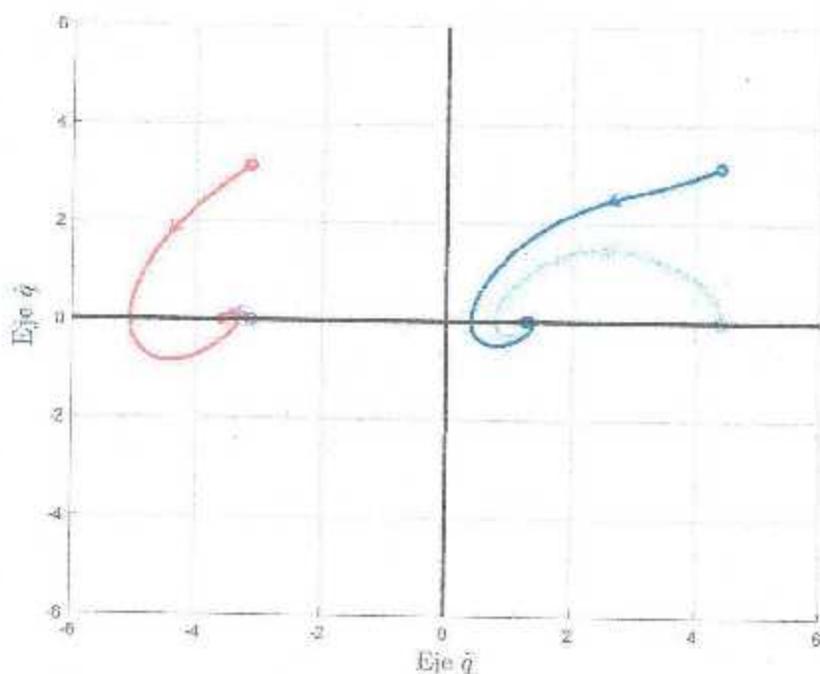


Figura 2.19: Retrato de fase de (2.47) del Ejemplo 2.9.

Ejemplo 2.9. Caso de estudio del péndulo simple

Considérese el modelo de un péndulo ideal como en el Ejemplo 2.1, el cual se ilustra en la Figura 2.18, dado por

$$m l^2 \ddot{q} + m g l \operatorname{seu}(q) = \tau. \quad (2.47)$$

En este caso, la ecuación (2.46) queda como

$$k_p s - m g l \operatorname{sen}(\theta_0 - s) = 0. \quad (2.48)$$

Para propósitos ilustrativos, se tomaron los siguientes valores

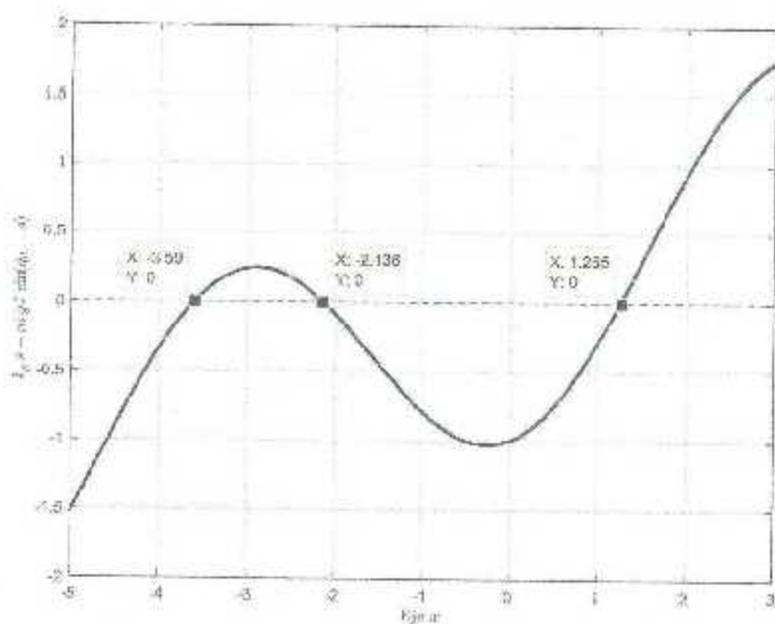


Figura 2.20: Gráfica de la ecuación (2.49).

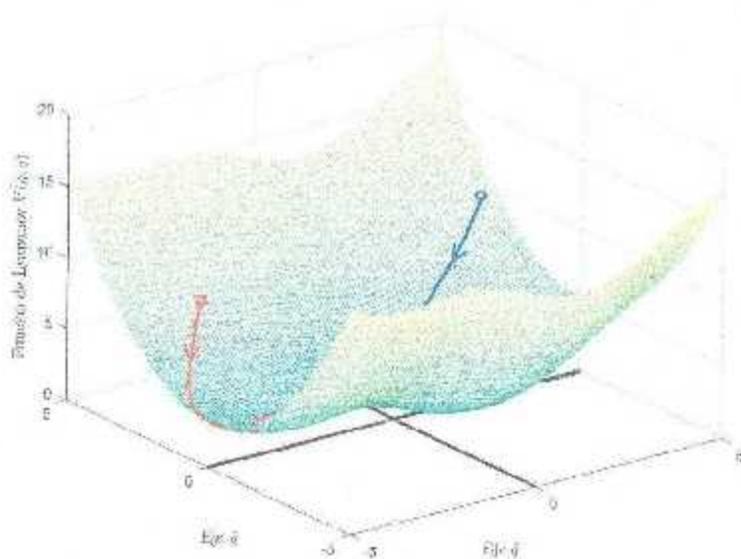


Figura 2.21: Vista semi-superior de la función candidata de Lyapunov (2.51) del Ejemplo 2.9.

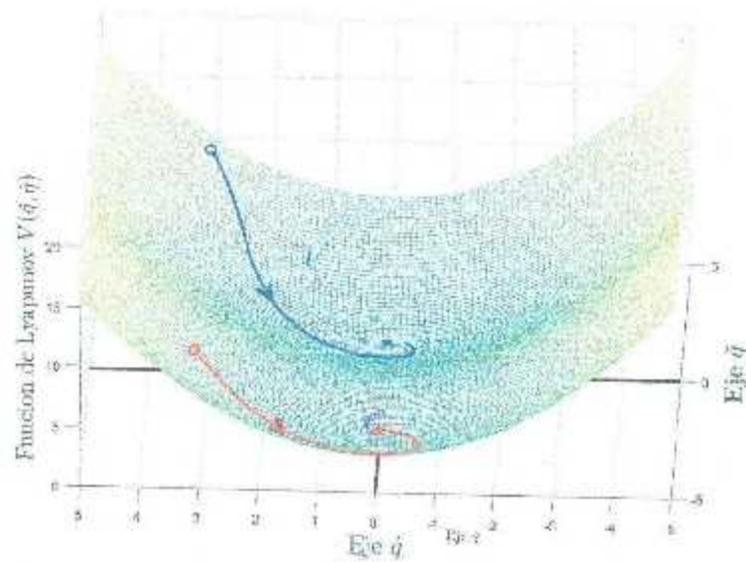


Figura 2.22: Vista lateral de la función candidata de Lyapunov (2.51) del Ejemplo 2.9.

$$\begin{aligned} ml^2 &= 1, & mgl &= 1, \\ k_p &= 0.25, & k_v &= 1, \\ q_d &= \pi/2. \end{aligned}$$

La ecuación de lazo cerrado queda como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M^{-1}(q) [k_p \bar{q} - k_v \dot{q} - (C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q))] \end{bmatrix}$$

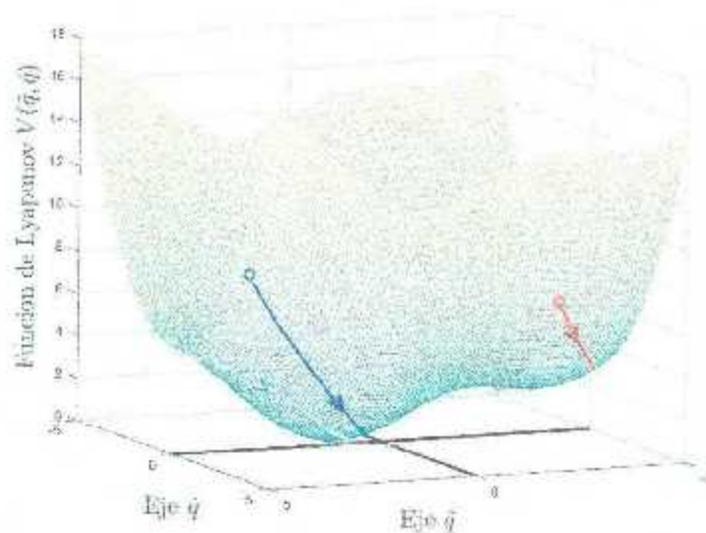


Figura 2.23: Vista semi-inferior de la función candidata de Lyapunov de (2.47) del Ejemplo 2.9.

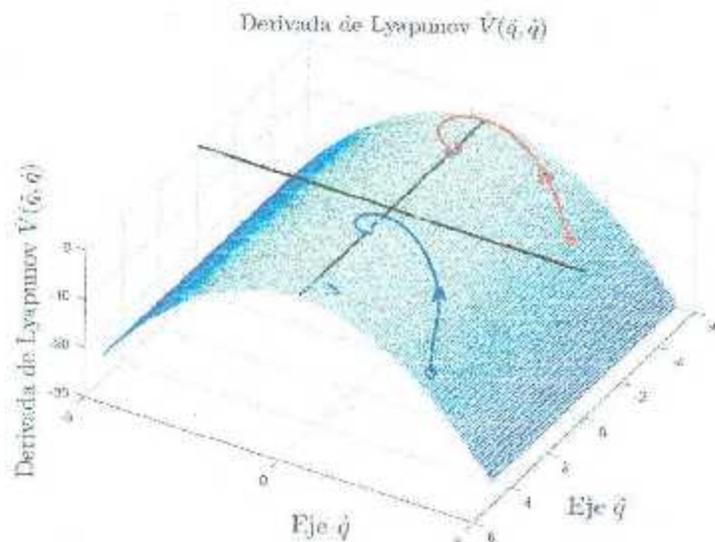


Figura 2.24: Derivada de Lyapunov de (2.47).

Se tienen los siguientes puntos de equilibrio

$$\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{\dot{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $s \in \mathbb{R}^n$ es solución de $k_p s - g(q_d - s) = 0$, y la expresión de equilibrios toma la forma

$$k_p s - m g l \sin(q_d - s) = 0 \quad (2.49)$$

El sistema en lazo cerrado bajo el control PD tiene los puntos de equilibrio mostrados gráficamente en la Figura 2.20, los cuales son:

$$\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{\dot{q}} \end{bmatrix} \equiv \left\{ \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.13 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3.56 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.50)$$

Las coordenadas correspondientes de los errores de posición de los equilibrios, numéricamente se encontraron en MATLAB[®] graficando la ecuación (2.49) en la Figura 2.20, obteniendo las coordenadas dadas en (2.50). Se hicieron simulaciones para diferentes condiciones iniciales dadas por:

$$\begin{bmatrix} \bar{q}(0) \\ \bar{\dot{q}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.82 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{q}(0) \\ \bar{\dot{q}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{q}(0) \\ \bar{\dot{q}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.82 \\ \pi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bar{q}(0) \\ \bar{\dot{q}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\pi \\ \pi \end{bmatrix}$$

obteniendo el retrato de fase de la Figura 2.19. Para el análisis de estabilidad se utiliza la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\bar{q}, \bar{\dot{q}}) = \frac{1}{2} k_p \bar{q}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \bar{\dot{q}}^2 - m g l \cos(q) + m g l \quad (2.51)$$

Varias gráficas de dicha función están dadas en las Figuras 2.21, 2.22 y 2.23, con las trayectorias del sistema sobre ella.

La derivada de Lyapunov a lo largo las trayectorias del sistema queda definida como

$$\dot{V}(\dot{q}, \dot{q}) = -k_v \dot{q}^2. \quad (2.52)$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 2.24.

Ejemplo 2.10. Considérese el siguiente ejemplo tomado de [Kelly y Santibáñez, 2003] para ilustrar el concepto de la aplicación del Principio de Invariancia para sistemas autónomos. Tómese el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1, \\ \dot{x}_3 &= -k_2 x_1, \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. Las ecuaciones anteriores representan una ecuación diferencial lineal autónoma cuyos equilibrios son

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -\frac{k_1}{k_2} x_2 \end{bmatrix}^T$$

En este punto se puede ver que existe un número infinito de puntos de equilibrio, uno para cada $x_2 \in \mathbb{R}$. Para $x_2 = 0$, el origen es el equilibrio. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \quad (2.54)$$

la cual es definida positiva y radialmente desacotada. La derivada temporal de esta función es

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2. \quad (2.55)$$

A continuación se presentan simulaciones para las condiciones iniciales de

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \pi & -\pi/2 & \pi/2 \end{bmatrix}^T$$

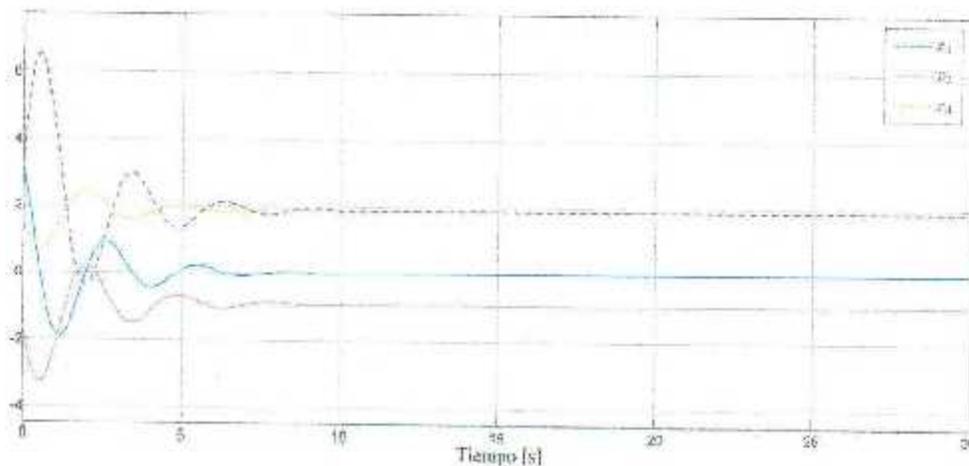


Figura 2.25: Soluciones del sistema (2.53) para $x_1(0) = \pi$, $x_2(0) = -\pi/2$ y $x_3(0) = \pi/2$.

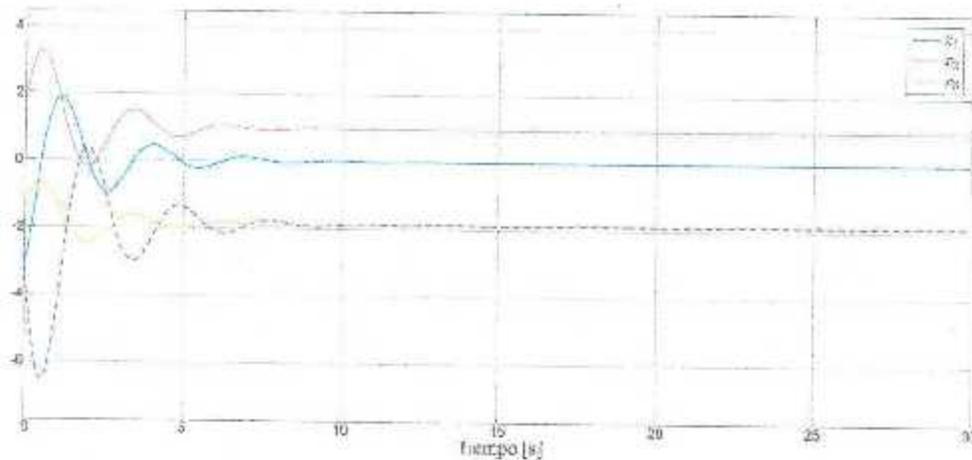


Figura 2.26: Soluciones del sistema (2.53) para $x_1(0) = -\pi$, $x_2(0) = \pi/2$ y $x_3(0) = \pi/2$.

y para

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\pi & \pi/2 & -\pi/2 \end{bmatrix}^T$$

En las gráficas de las Figuras 2.25 y 2.26 se puede ver cómo los tres estados tienden a sus respectivos puntos de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito ($t \rightarrow \infty$). Hay que aclarar que al tener el mismo estado x_2 como punto de equilibrio de x_2 no quiere decir que su punto de equilibrio sea igual a su condición inicial $x_2(0)$. Estos puntos de equilibrio están sobre la línea en el espacio tridimensional de la Figura 2.27 que representa el infinito número de puntos de equilibrio donde $V(\mathbf{x}) = 0$, es decir el conjunto invariante más grande donde $V(\mathbf{x}) = 0$.

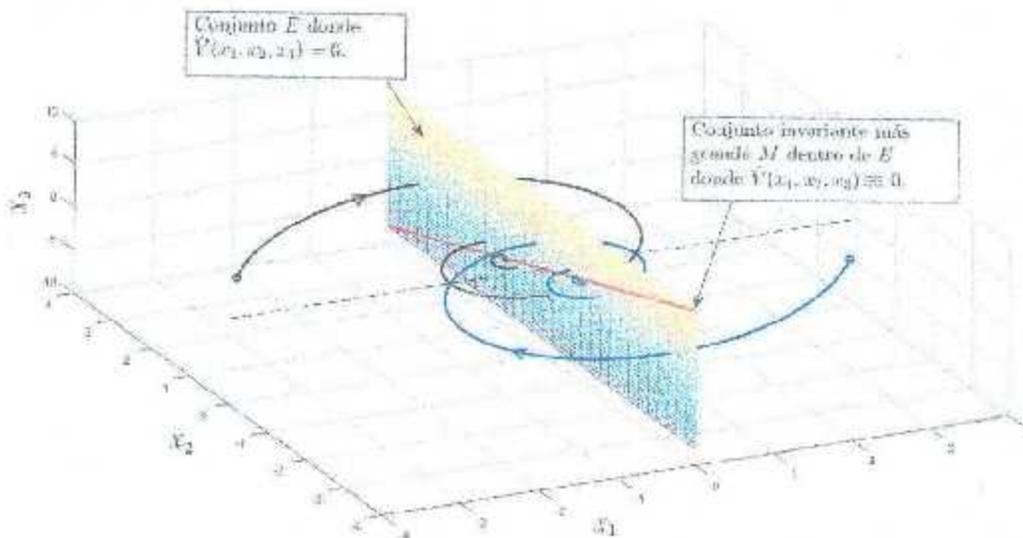


Figura 2.27: Trayectorias del sistema (2.53) ilustrando la ubicación del conjunto invariante más grande.

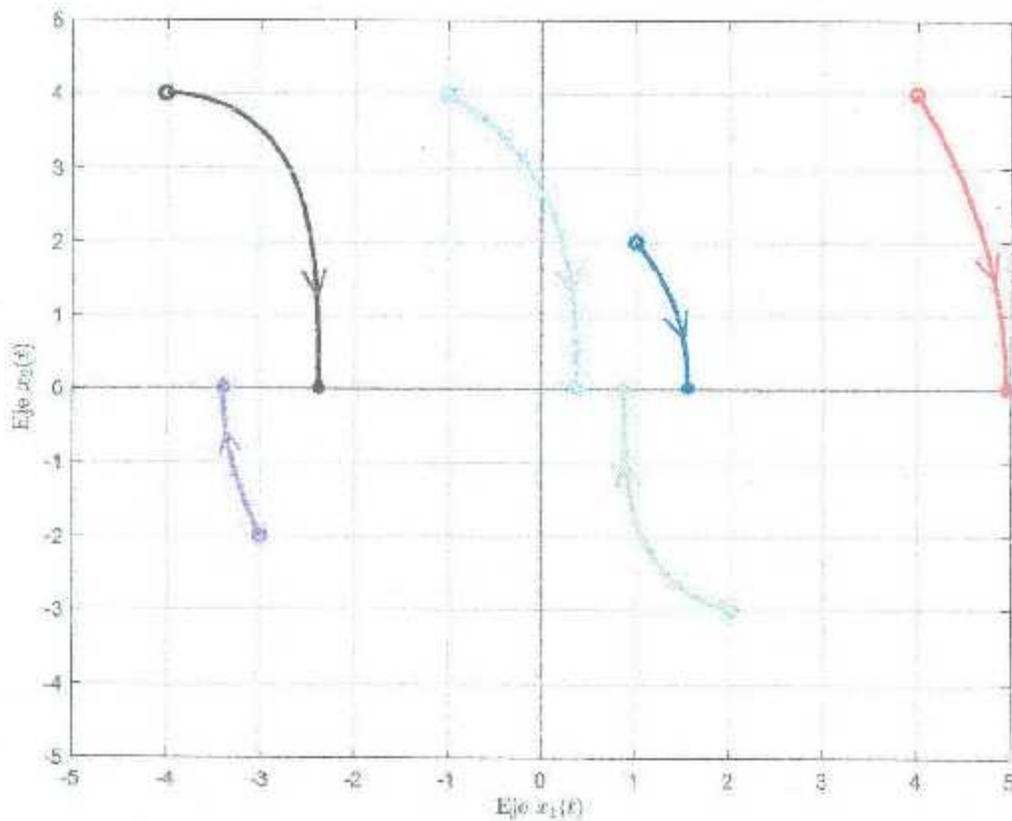


Figura 2.28: Retrato de fase del sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.

2.4.2. Ejemplos de aplicación del Principio de Invariancia para sistemas no autónomos

Ejemplo 2.11. Basado en un contraejemplo utilizado en [Lee *et al.*, 2001] se muestra la utilidad de la teoría de LaSalle en sistemas no autónomos. Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= e^{-2t} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -e^{-2t} x_1(t) - x_2(t). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Para propósitos de análisis, se escoge la siguiente función de Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Su derivada se obtiene como

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= x_1 [e^{-2t} x_2(t)] + x_2 [-e^{-2t} x_1(t) - x_2(t)] \\ &= -x_2^2. \end{aligned}$$

Se puede ver que el origen $[x_1 \ x_2]^T = [0 \ 0]^T$ es, aparentemente, el único punto de equilibrio; y debido a que el sistema satisface la suposición que

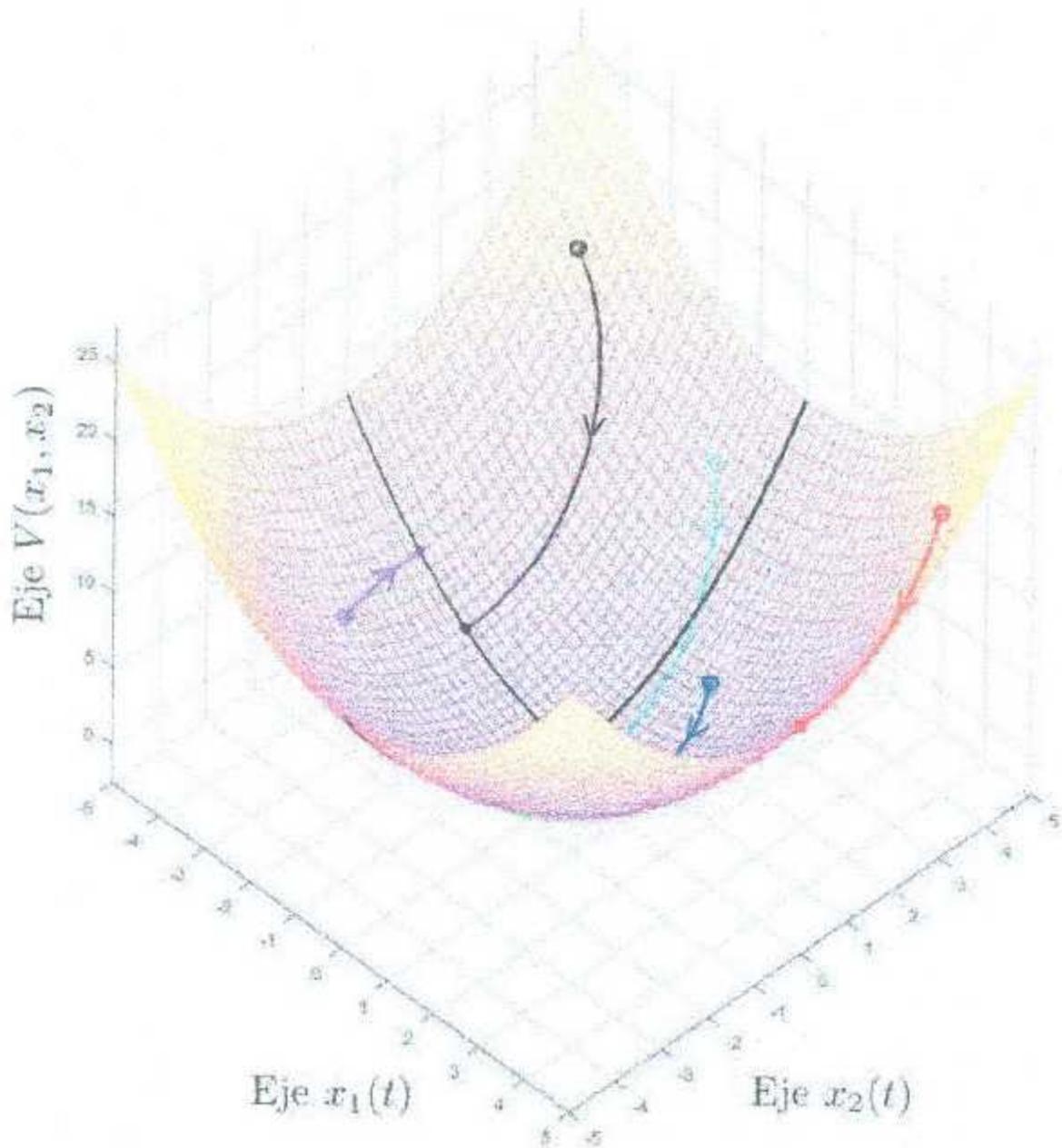


Figura 2.29: Vista anterior de la gráfica de la función de Lyapunov del sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.

$\|f(t, \mathbf{x}(t))\| = \left\| \begin{bmatrix} e^{-2t} x_2(t) \\ -e^{-2t} x_1(t) - x_2(t) \end{bmatrix} \right\|$ está acotada para todo $t \geq 0$, naturalmente se puede concluir estabilidad asintótica. Sin embargo, se ve que para cualquier conjunto de condiciones iniciales que cumpla $x_1(0) \neq 0, x_2(0) = 0$ el sistema tiende a $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \neq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$, donde al parecer la aplicación del Principio de Invariancia de LaSalle presenta algunos problemas.

Sin embargo, aunque el origen $[x_1 \ x_2]^T = [0 \ 0]^T$ es un punto de equilibrio, no es el único punto de equilibrio de este sistema. Debido a que la conclusión del Principio de Invariancia en este sistema es que termina dentro de un dominio en un espacio de estados dado por $x_2 \equiv 0$, lo cual implica que

$$x_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0.$$

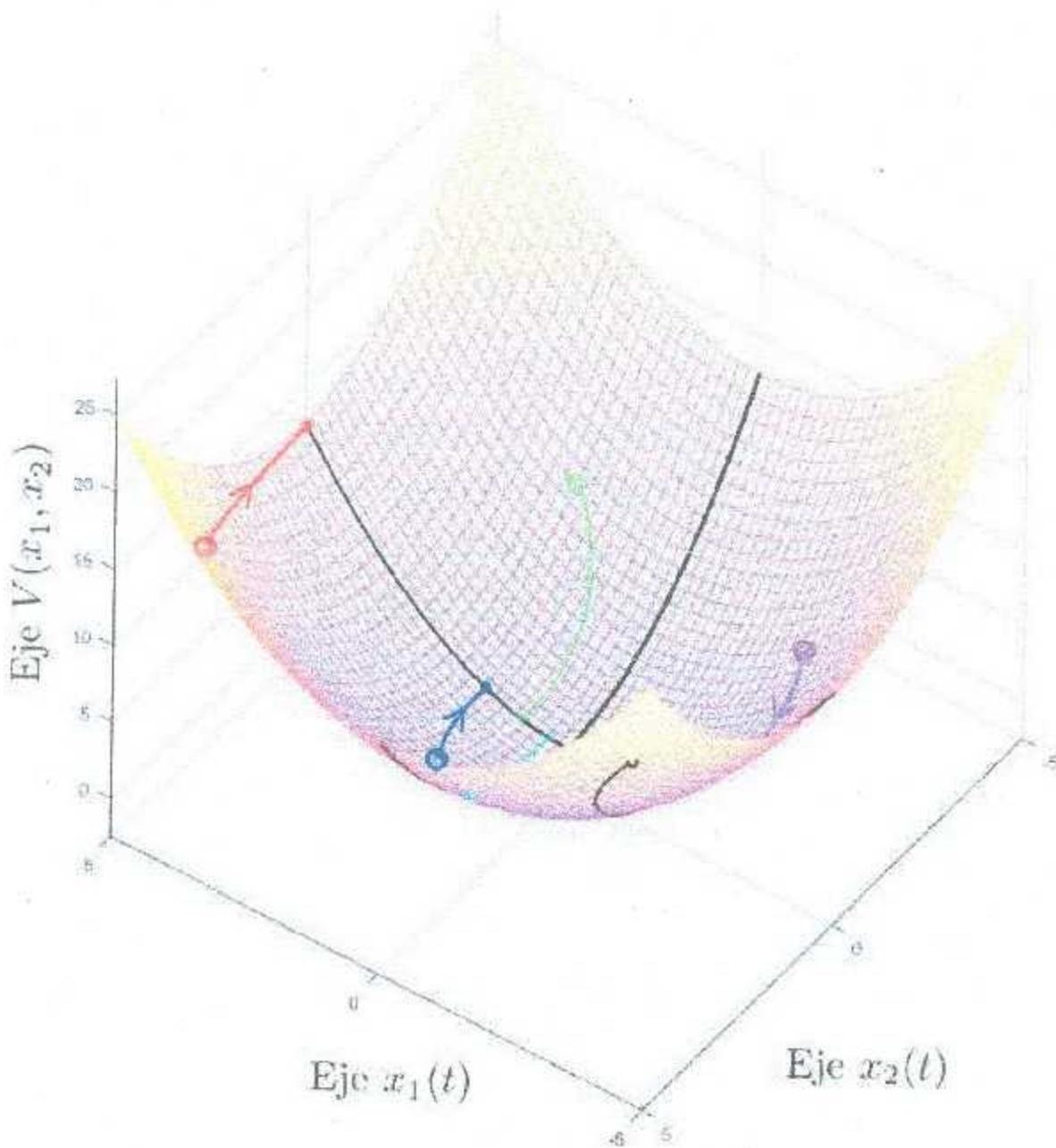


Figura 2.30: Vista posterior de la función de Lyapunov del sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.

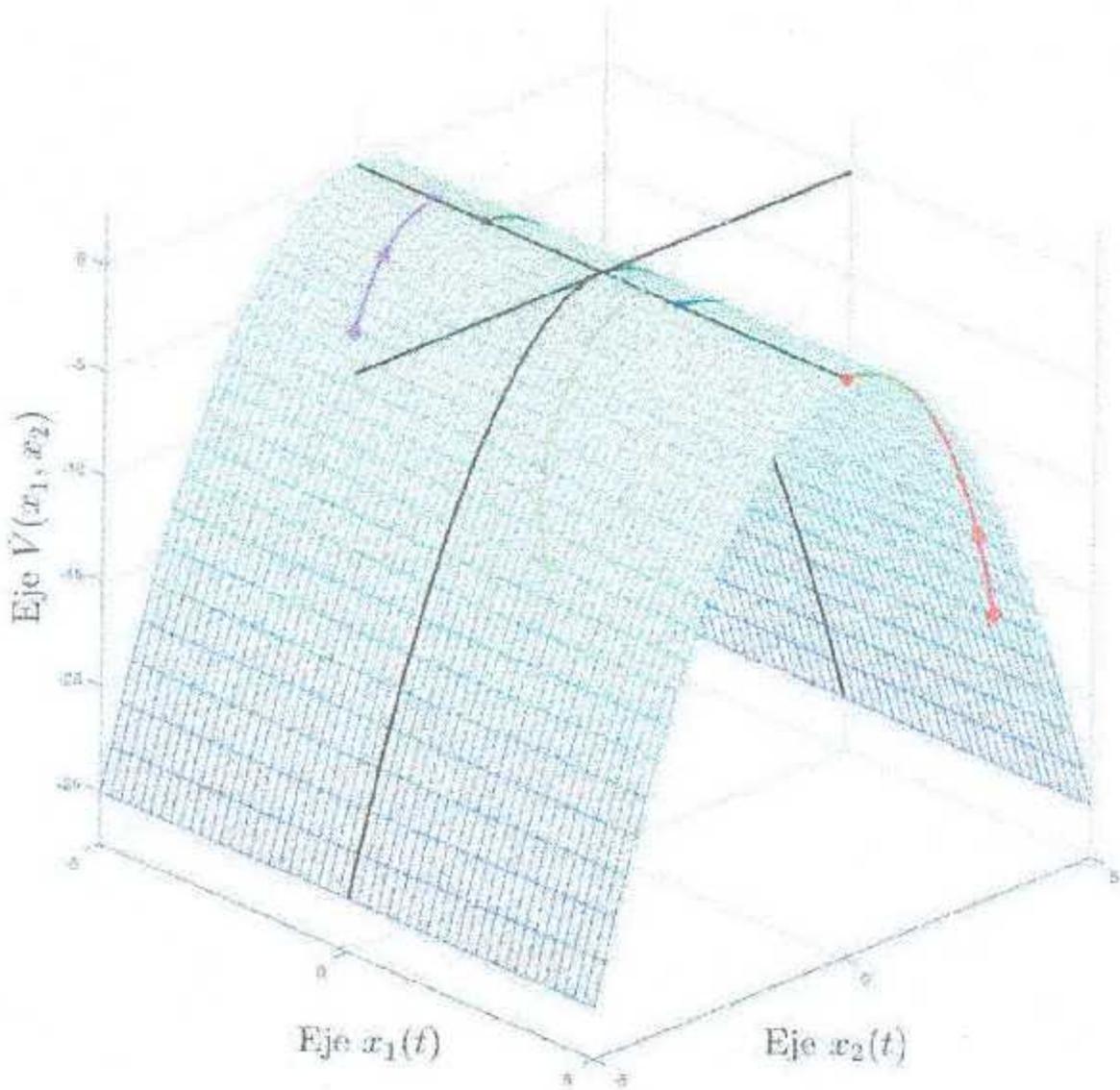


Figura 2.31: Vista superior de la derivada de Lyapunov para el sistema (2.56) del Ejemplo 2.11.

Aunque $x_1(t) = 0$ es la solución para cualquier tiempo **finito** t , la situación es diferente cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-2t} x_1(t)] = 0$ se satisface para cualquier valor finito de x_1 . Por lo tanto, cualquier punto en el eje x_1 (limitado por $V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0)$ ó $|x_1(t)| \leq |x_1(0)|$) puede ser un punto de equilibrio para alguna trayectoria de este sistema. Cabe remarcar que, aunque ninguna trayectoria no trivial termine en $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, éste es un punto de equilibrio para la "trayectoria" $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$, que comienza, permanece, y termina en el origen. En la Figura 2.28 se muestra el retrato de fase del sistema (2.56).

A continuación se enuncia una versión no autónoma del Ejemplo 2.7.

Ejemplo 2.12. Se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= [1 + \operatorname{sen}(t)] x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -[1 + \operatorname{sen}(t)] x_1(t) - [1 + \operatorname{cos}(t)] x_2(t).\end{aligned}\tag{2.57}$$

Para el propósito del análisis de estabilidad, se escoge la siguiente función candidata de Lyapunov, $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [x_1^2(t) + x_2^2(t)]$. Al derivar se obtiene que

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= [1 + \operatorname{sen}(t)] x_1 x_2 - [1 + \operatorname{sen}(t)] x_1 x_2 - [1 + \operatorname{cos}(t)] x_2^2 \\ &= -[1 + \operatorname{cos}(t)] x_2^2.\end{aligned}\tag{2.58}$$

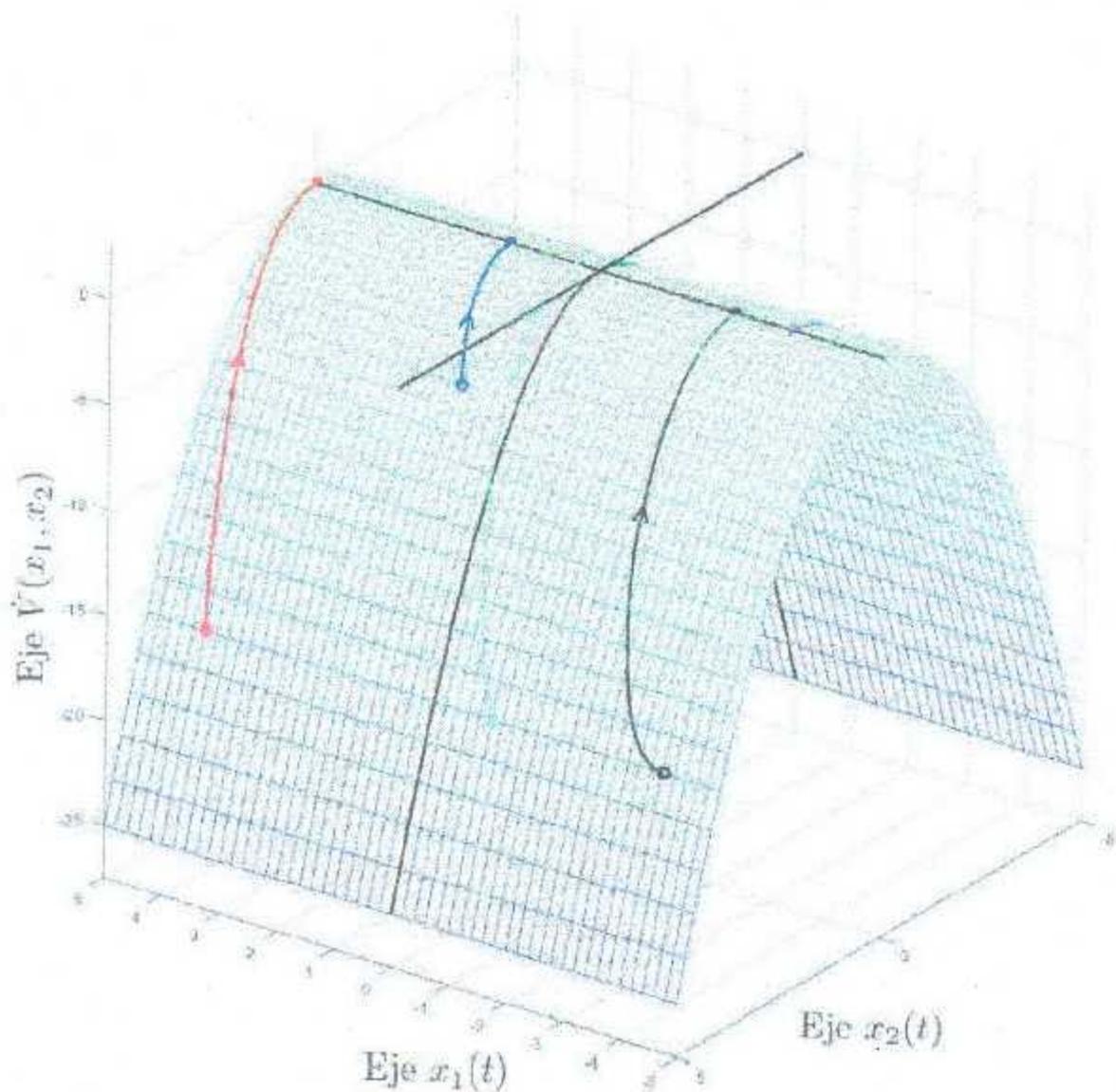


Figura 2.32: Vista posterior de la derivada de Lyapunov para el sistema (2.56).

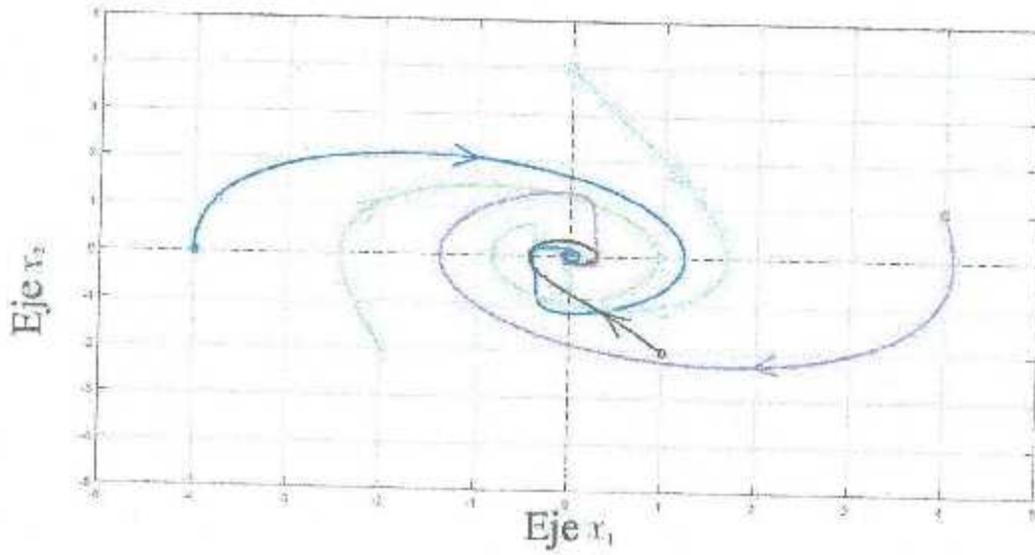


Figura 2.33: Retrato de fase del sistema (2.57) para diferentes condiciones iniciales del Ejemplo 2.12.

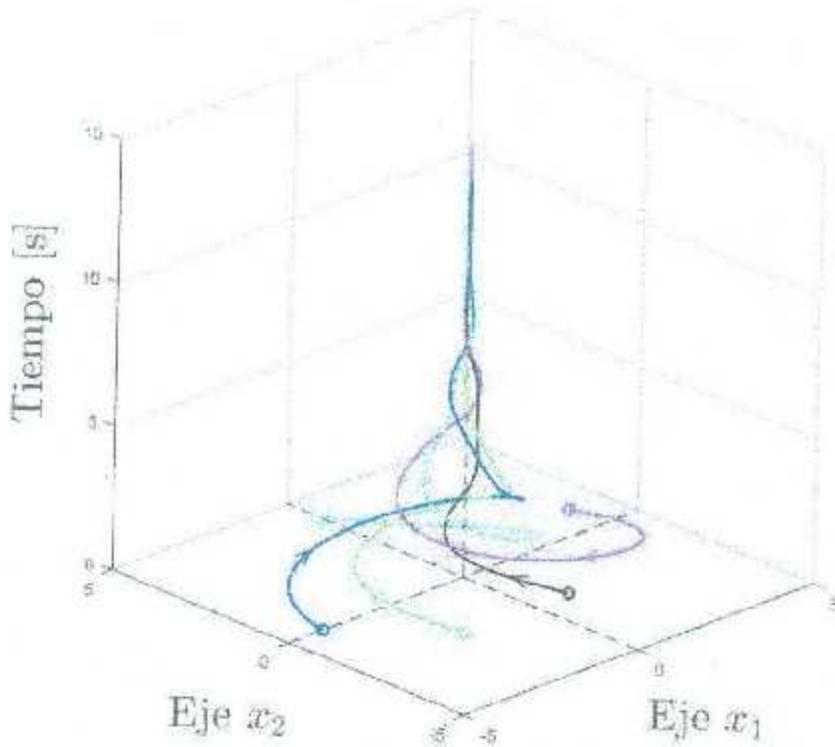


Figura 2.34: Evolución temporal del retrato de fase del sistema (2.57) del Ejemplo 2.12.

Aunque no se tenga ninguna función $W(\mathbf{x})$ para decir que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$, está claro que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ y que al hacer $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ conlleva que

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0.$$

En las Figuras 2.35 y 2.36 se muestran la función de Lyapunov y la derivada de ésta respectivamente. El retrato de fase del sistema se muestra en la Figura 2.33.

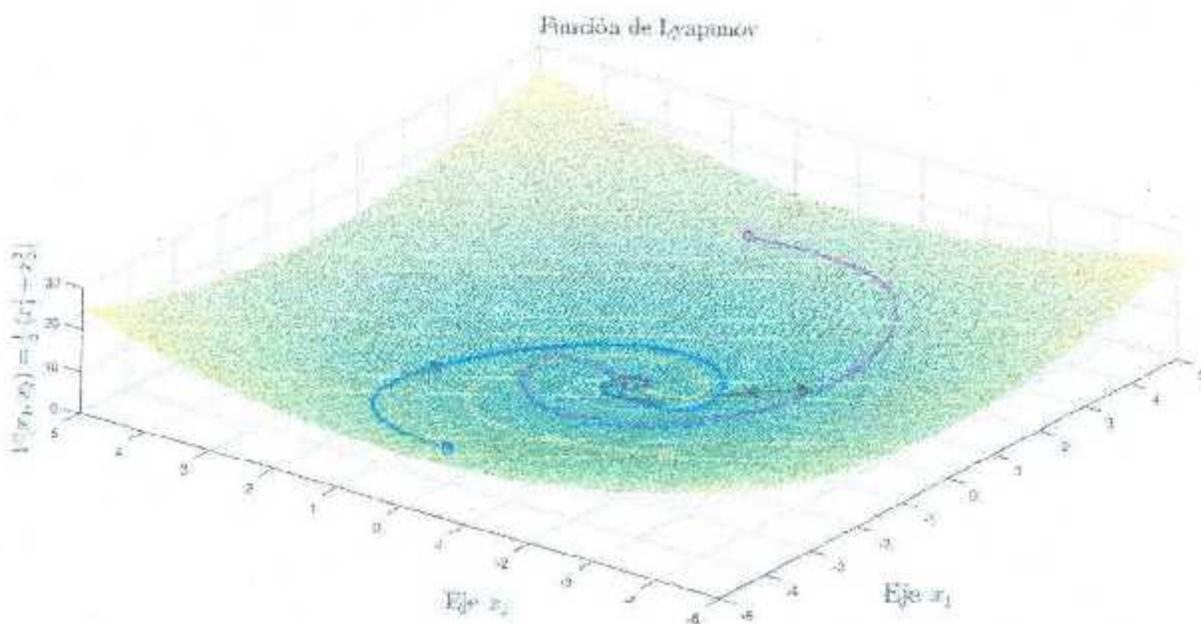


Figura 2.35: Función de Lyapunov con las trayectorias evaluadas para el sistema (2.57) del Ejemplo 2.12.

Aunque el método de análisis de estabilidad de Lyapunov sea el más utilizado en los análisis de estabilidad modernos, su aplicación requiere encontrar una función definida positiva cuya derivada sea definida negativa a lo largo de todas las trayectorias del sistema. Si ese es el caso, es fácil observar que la función de Lyapunov y su derivada llegan últimadamente a cero, y por lo tanto se llega a la conclusión de **estabilidad asintótica**. Sin embargo, debido a que en la mayoría de los casos la derivada de la función de Lyapunov es semi-definida negativa, se han buscado varias extensiones de la teoría básica de estabilidad de Lyapunov. Particularmente, una alternativa provista por el Lema de Barbalat que, bajo ciertas condiciones permite concluir que la derivada de la función de Lyapunov llega a cero ultimadamente, y por lo tanto, se puede llegar a la conclusión de estabilidad asintótica.

No obstante, el Lema de Barbalat se basa en la teoría de funciones, y no necesariamente en la teoría de estabilidad. Por lo tanto, requiere ciertas condiciones relacionadas con continuidad de funciones, e incluso con la continuidad de las derivadas de las funciones, lo cual puede limitar su aplicación.

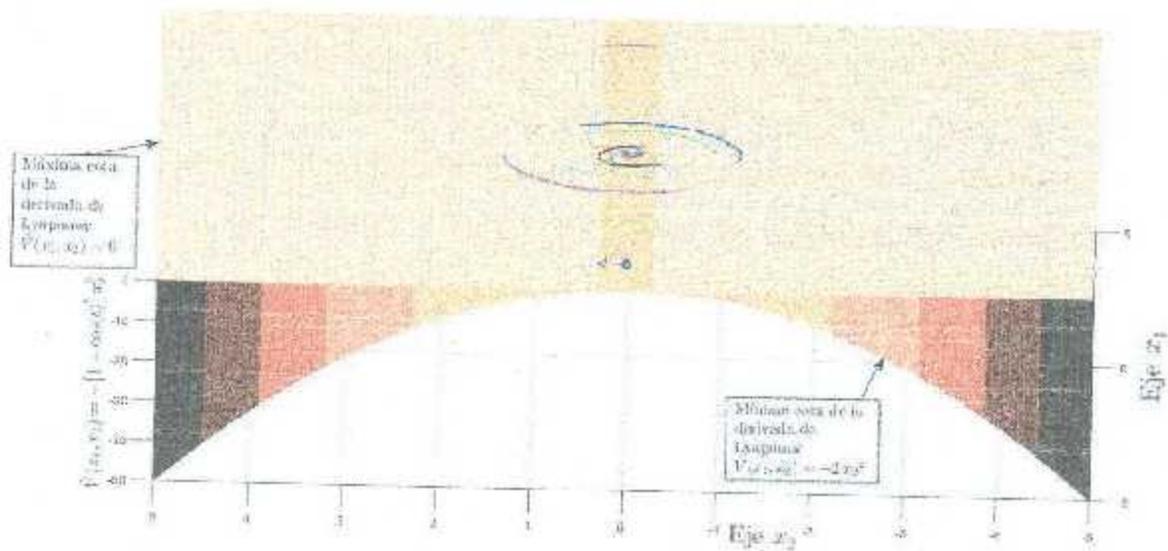


Figura 2.36: Derivada de la función de Lyapunov (2.58) del Ejemplo 2.12.

Considérese el sistema no lineal y no autónomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (2.59)$$

Asúmase que la función de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ es definida positiva y su derivada $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ es semi-definida negativa a lo largo de las trayectorias de la ecuación (2.59).

Para sistemas autónomos, como en la ecuación (2.32), cualquier solución \mathbf{x}_0 de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ consigue que $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \forall t$, por lo tanto \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio. Si una trayectoria

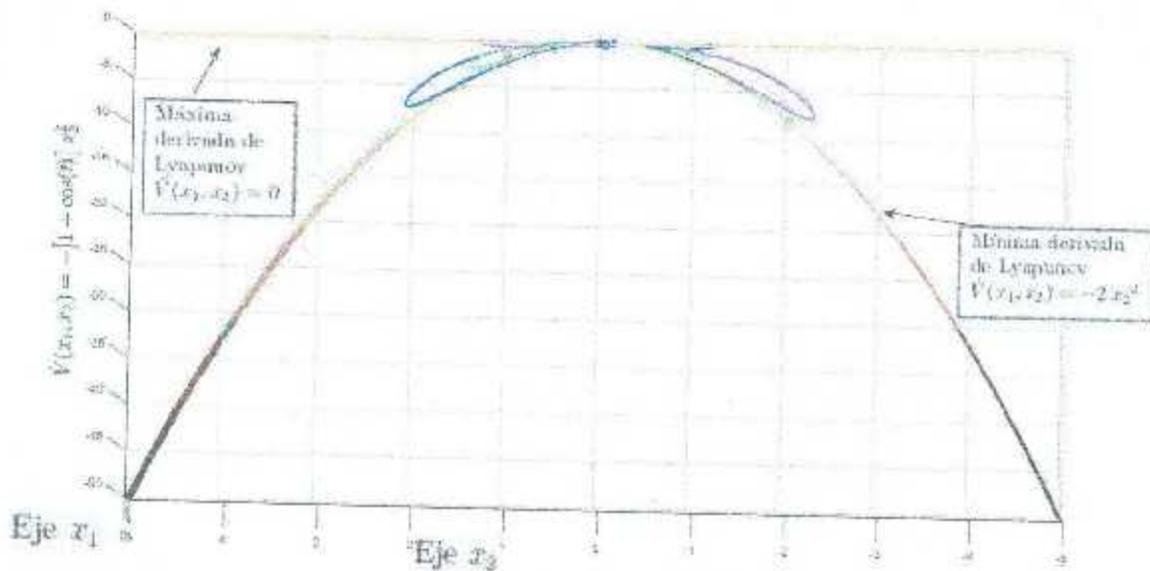


Figura 2.37: Vista central de la derivada de la función de Lyapunov (2.58) del Ejemplo 2.12.

comienza o alcanza el punto x_0 en cualquier tiempo, ésta permanecerá ahí.

Sin embargo, en los sistemas no autónomos, se debe ser más precavido porque los términos dependientes del tiempo pueden definir varios tipos de conjuntos límite.

Considérese el sistema escalar dado por

$$\dot{x}(t) = -x^3 [1 + \operatorname{sen}(t)]$$

donde claramente $x = 0$ hace que $\dot{x}(t) = 0$ para todo tiempo, por lo tanto $x = 0$ es un punto de equilibrio. Si una trayectoria empieza en el punto $x = 0$, o lo alcanza en cualquier tiempo, éste permanecerá ahí, y el término dependiente del tiempo no afectará el comportamiento general de este sistema.

Sin embargo, ahora considérese el sistema

$$\dot{x}(t) = -x^3 e^{-t}.$$

Claramente, $x = 0$ hace que $\dot{x}(t) = 0$ para todo tiempo, por lo tanto $x = 0$ es un punto de equilibrio y es fácil llegar a la conclusión de que éste es el único conjunto límite. Sin embargo, al analizar nuevamente el sistema se observa que dicha conclusión sólo es cierta para tiempos finitos, porque cuando el tiempo t tiende a infinito *cualquier* valor de x finito hace que $\dot{x}(t) = 0$. Aún así, cualquier trayectoria que empiece en $x \neq 0$, termina con la trayectoria en $x \neq 0$ (debido a que la velocidad inicial es diferente de cero). Por lo tanto, $x = 0$ es el único punto de equilibrio 'regular', aunque sólo atrae a la trayectoria trivial $x(t) = 0$. Por otra parte, cualquier $x \neq 0$ forma parte del 'conjunto límite' porque será atractivo para alguna trayectoria $x(t) \neq 0$.

Considérese ahora el sistema

$$\dot{x}(t) = -x^3 + e^{-t}.$$

En este caso, $x = 0$ hace que $\dot{x}(t) = e^{-t}$ para todo tiempo t , por lo tanto $x = 0$ no es un punto de equilibrio en el sentido estricto, porque cualquier trayectoria que empiece o alcance $x = 0$ en un tiempo finito t permanecerá alejándose del punto de equilibrio. No obstante, $x = 0$ es el único conjunto límite, debido a que cuando el tiempo tiende a infinito éste es el único punto que hace que $\dot{x}(t) = 0$ y hace que todas las trayectorias permanezcan en $x = 0$.

Por lo tanto, el objetivo general de los análisis de estabilidad es encontrar los conjuntos límite de las trayectorias que se encuentran localizados en las mismas trayectorias.

Es útil mencionar que los trabajos originales de LaSalle en la teoría de estabilidad, y en particular en su Principio de Invariancia, que extienden la teoría de estabilidad de Lyapunov para incluir los casos cuando la derivada de la función fuera sólo semi-definida negativa, inicialmente trataban sólo con sistemas de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t))$ y por lo tanto la función de Lyapunov $V(x(t))$ y su derivada $\dot{V}(x(t))$ no eran funciones explícitas del tiempo t . Cuando los trabajos de LaSalle abordaron los sistemas no autónomos de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ incluso si la función de Lyapunov se expresaba como $V(x(t))$, la derivada $\dot{V}(x(t), t) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x(t), t)$ podía ser una función explícita del tiempo t . Debido a que algunas veces podía ser difícil determinar la definidad de tales funciones,

los trabajos originales de LaSalle sólo trataban con aquellas derivadas de Lyapunov que podían cumplir una relación de la forma $\dot{V}(\mathbf{x}(t), t) \leq -W(\mathbf{x}(t)) \leq 0$.

Sin embargo, aunque en muchos casos esta relación podía cumplirse, aún restringía la aplicación de la teoría de estabilidad de manera innecesaria. Por ejemplo, mientras para $\dot{V}_1(x, t) = -x^2 [2 + \text{sen}(t)]$ se puede definir $W(x) = x^2$ y escribir entonces $\dot{V}_1(x, t) \leq -W(x) \leq 0$, esto no es posible para $\dot{V}_2(x, t) = -x^2 [1 + \text{sen}(t)]$. Sin embargo se puede definir $W(x) = x^2$ y $g(t) = 1 + \text{sen}(t)$ y tener $\dot{V}_2(x, t) \leq -W(x)g(t) \leq 0$. Está claro que $\dot{V}_2(x, t) \leq 0$ o, en otras palabras, que $\dot{V}_2(x, t)$ es uniformemente semidefinida negativa. En un caso más general, tal como $\dot{V}_3(x, t) = -x_1^2 [1 - \text{sen}(t)] - x_2^2 [1 + \text{cos}(t)]$ está claro que $\dot{V}_3(x, t)$ es uniformemente semi-definida negativa aunque no pueda ser escrita en ninguna de las formas más convenientes como $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$.

Capítulo 3

Controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable

Tradicionalmente los análisis de estabilidad de sistemas de control adaptable de manipuladores, tanto en regulación como en seguimiento de trayectorias de posición, se basan en la teoría de Lyapunov auxiliada del Lema de Barbalat. Un estudio reciente [Barkana, 2014] ha destacado la importancia del Principio de Invariancia de LaSalle en el análisis de sistemas no lineales autónomos y no autónomos y ha introducido un Nuevo Principio de Invariancia de LaSalle, el cual relaja las condiciones requeridas en las versiones anteriores, tanto de LaSalle como de Barbalat, expandiendo de esta manera el alcance en los análisis de estabilidad.

A continuación se presenta el esquema del controlador PD con compensación deseada de gravedad analizado con ambos métodos de análisis.

En este trabajo se supone conocido por el lector que el control de posición (o de regulación) es uno de los objetivos de control más simples que puede ser alcanzado por un robot manipulador. A pesar de esto, se debe conocer al menos el vector de pares gravitacionales $g(q)$ del modelo dinámico del robot. Entre los controles más simples se encuentran:

- El controlador PD con compensación de gravedad.
- El controlador PD con compensación deseada de gravedad.

A continuación se estudiará el controlador PD con compensación deseada de gravedad.

La ley del controlador PD con compensación deseada de gravedad está dada por la ecuación (3.1),

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + g(q_d). \quad (3.1)$$

donde las matrices $K_p = K_p^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $K_v = K_v^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétricas y definitas positivas seleccionadas en el diseño. El error de posición está dado por $\tilde{q} = q_d - q$, donde $q_d \in \mathbb{R}^n$ denota el vector de posiciones articulares deseadas. Para este controlador se supone que el vector q_d es constante, por lo tanto, la ley de control (3.1) toma la forma dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q_d). \quad (3.2)$$

La utilidad práctica con respecto al controlador PD con compensación de gravedad es evidente. El vector $g(q_d)$ utilizado en (3.2) depende sólo de q_d y no de q , por tanto dicho vector puede ser evaluado "off-line" ya que q_d está definido y es constante.

Hasta este punto, para la definición del control PD se ha impuesto la restricción de que el vector q_d de posiciones articulares deseadas sea constante. El nombre con el que se bautiza a un controlador dado debe caracterizar únicamente a su estructura y no debe depender del tipo de referencias.

Pese a esto, en el estado del arte sobre el controlador PD, éste es ocasionalmente referenciado como "controlador proporcional con retroalimentación taquimétrica". Esto debido a que al ser el vector de posiciones articulares deseadas q_d constante, se tiene que $\ddot{q} = -\dot{q}$, por lo cual puede encontrarse con el nombre alternativo mencionado anteriormente [Kelly y Santibáñez, 2003].

La Propiedad 2.18 establece que el modelo dinámico de un robot de n g.d.l. (con una carga articular incluida) puede ser escrita de la siguiente forma [Kelly *et al.*, 2006]:

$$M(q, \theta) u + C(q, w, \theta) v + g(q, \theta) = \Phi(q, u, v, w) \theta + M_0(q) u + C_0(q, w) v + g_0(q), \quad (3.3)$$

donde $\Phi(q, u, v, w) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M_0(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_0(q, w) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g_0(q) \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in \mathbb{R}^m$. El vector θ , conocido como el vector de parámetros dinámicos, contiene elementos que dependen precisamente de los parámetros físicos como las masas y las inercias de los eslabones del robot manipulador y de la carga. Las matrices $M_0(q)$, $C_0(q, w)$ y el vector $g_0(q)$ representan las partes de las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, y del vector $g(q)$ que no dependen del vector de parámetros dinámicos θ .

Debido al hecho anterior, la siguiente expresión es válida para toda $x \in \mathbb{R}^n$:

$$g(x, \theta) = \Phi(x, 0, 0, 0) \theta + g_0(x), \quad (3.4)$$

donde se hizo

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= 0, \\ w &= 0, \end{aligned}$$

el cual es un caso particular de la parametrización (3.3). En este caso se tiene la siguiente parametrización del vector de pares gravitacionales para cualquier vector $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$ y cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$:

$$g(x, \hat{\theta}) = \Phi(x, 0, 0, 0) \hat{\theta} + g_0(x). \quad (3.5)$$

Debido a la complejidad notacional, a partir de ahora se utilizará la siguiente abreviación:

$$\Phi_g(x) = \Phi(x, 0, 0, 0).$$

Considerando (3.4) con $x = q_d$, el controlador PD con compensación deseada de gravedad (3.2), queda representado de la siguiente manera

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + \Phi_g(q_d) \theta + g_0(q_d). \quad (3.6)$$

Es importante remarcar que en la implementación del controlador PD con compensación deseada de gravedad (3.2), o equivalentemente, (3.6), el conocimiento del vector de los parámetros dinámicos θ es indispensable.

De ahora en adelante, se asumirá que el vector de parámetros dinámicos $\theta \in \mathbb{R}^m$ es desconocido pero es constante. Obviamente en este caso, el controlador PD con compensación deseada de gravedad no puede ser utilizado para el control del robot. Sin embargo, se supone que el vector de parámetros dinámicos θ está ubicado en una región conocida de $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ del espacio \mathbb{R}^m . En otras palabras, aunque el vector de parámetros dinámicos θ sea desconocido, se supone que el conjunto Ω , en el cual se encuentra θ , es conocido. El conjunto Ω puede ser arbitrariamente grande pero tiene que estar acotado. En la práctica, el conjunto Ω puede ser considerado como las cotas superiores e inferiores de los parámetros dinámicos que, como ya se mencionó, están en función de las masas, las inercias y la ubicación de los centros de masa de los eslabones.

A continuación se propone, como solución a este problema, el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable. La estructura de los esquemas de control adaptables para robots manipuladores están definidos por una ley de control como la expresada en (2.29)

$$\tau = \tau_1(q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) + M(q, \hat{\theta})u + C(q, w, \hat{\theta})v + g(q, \hat{\theta}), \quad (3.7)$$

donde en general, los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ dependen tanto de las posiciones q y de las velocidades \dot{q} como de las posiciones de la trayectoria deseada q_d , de sus velocidades \dot{q}_d y de sus aceleraciones \ddot{q}_d . El vector $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$ es denotado como el vector de parámetros adaptables, aunque se trate realmente de una función vectorial del tiempo $\hat{\theta}(t)$, el cual está dado de tal forma que

$$\psi(q, u, v, w) \hat{\theta} = M(q, \hat{\theta})u + C(q, w, \hat{\theta})v + g(q, \hat{\theta}) - M_0(q)u - C_0(q, w)v - g_0(q). \quad (3.8)$$

se cumple para todo $t \geq 0$. Es importante mencionar que, en algunas ocasiones, la ley de control puede resultar como una ecuación dinámica y no solamente como una ecuación "algebraica". Además, la estructura de los esquemas de control adaptables para robots manipuladores también están definidos por una ley adaptable comúnmente utilizada en los sistemas adaptables continuos, también conocida como "ley integral" o "ley del gradiente," como la expresada en (2.30).

$$\hat{\theta}(t) = \Gamma \int_0^t \psi(s, q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) ds + \hat{\theta}(0) \quad (3.9)$$

donde¹ $\Gamma = \Gamma^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es simétrica² y $\hat{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m$ son parámetros de diseño, mientras que ψ es una función vectorial a determinar, de dimensiones $m \times 1$.

¹En la ecuación (3.9), como en otras ecuaciones, se evita por simplicidad, la siguiente notación $\psi(t, q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))$.

²La matriz simétrica Γ casi siempre es diagonal, positiva definida, y es llamada "matriz de ganancias adaptables."

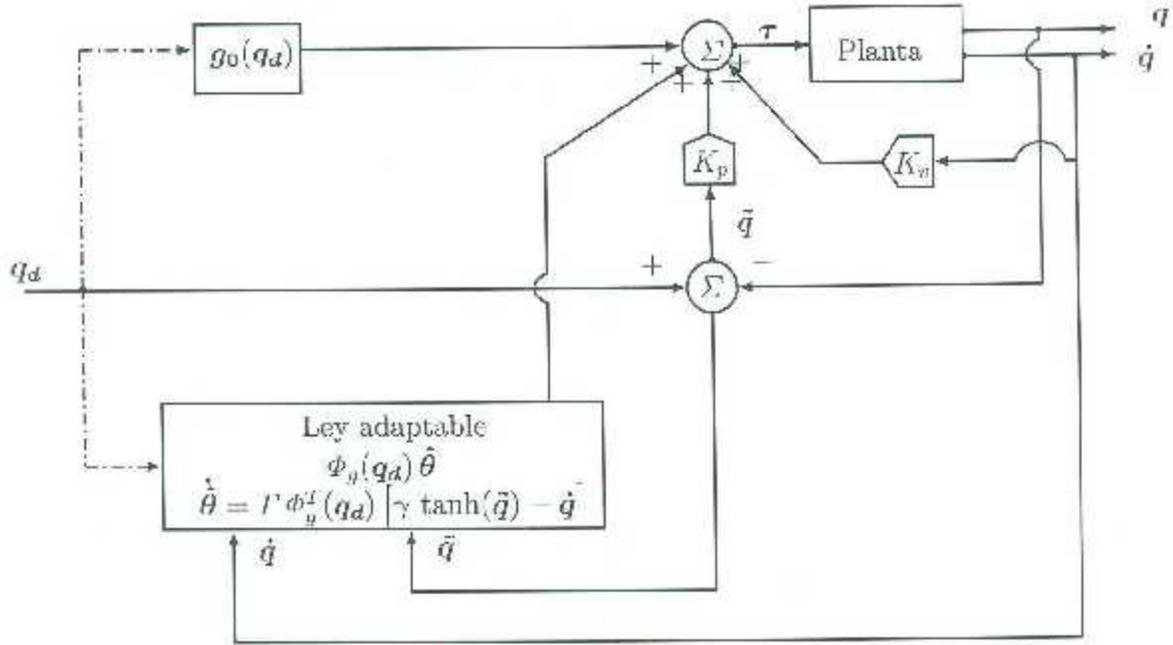


Figura 3.1: Control PD con compensación deseada de gravedad adaptable.

En el caso particular del control de posición, estas leyes de control toman las siguientes formas

$$\tau = \tau(t, q, \dot{q}, q_d, \hat{\theta}), \quad (3.10)$$

$$\hat{\theta}(t) = \Gamma \int_0^t \psi(t, q, \dot{q}, q_d) dt + \hat{\theta}(0), \quad (3.11)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (llamada ganancias de adaptación) y $\hat{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m$ son los parámetros de diseño y ψ es una función vectorial a determinar de dimensiones $m \times 1$.

El controlador PD con compensación deseada de gravedad es determinado por (3.10) y (3.11), donde [Kelly *et al.*, 2006, Chap. 15]

$$\tau = K_p \ddot{q} - K_v \dot{q} + g(q_d, \hat{\theta}), \quad (3.12)$$

$$= K_p \ddot{q} - K_v \dot{q} + \Phi_g(q_d) \hat{\theta} + g_0(q_d), \quad (3.13)$$

y la ley adaptable como

$$\hat{\theta}(t) = \Gamma \Phi_g''(q_d) \int_0^t [\gamma \tanh(\tilde{q}) - \dot{\tilde{q}}] ds + \hat{\theta}(0), \quad (3.14)$$

donde $K_p = K_p^T$ y $K_v = K_v^T$ y $\Gamma = \Gamma^T$ son matrices simétricas definidas positivas de dimensiones $n \times n$ (ver Figura 3.1).

Cabe resaltar que la ley de control expresada en (3.13) no depende del vector de parámetros dinámicos θ sino de los parámetros adaptables $\hat{\theta}(t)$ que son obtenidos a partir de la ley de adaptación (3.14), la cual tampoco depende del vector θ .

De los parámetros de diseño a escoger en (3.13)–(3.14), solamente la matriz K_p debe ser escogida cuidadosamente. Con este fin, se definen $\lambda_{\text{Max}}\{M\}$, k_{C_1} y k_g como

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad & \lambda_{\text{Max}}\{M(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})\} \leq \lambda_{\text{Max}}\{M\} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\theta} \in \Omega, \\ \bullet \quad & \|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta})\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\theta} \in \Omega, \\ \bullet \quad & \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\theta} \in \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Las constantes $\lambda_{\text{Max}}\{M\}$, k_{C_1} y k_g son consideradas como conocidas y denotan el supremo en $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ del valor propio máximo de $M(\mathbf{q})$. Para obtener estas constantes es necesario conocer explícitamente tanto las matrices $M(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta})$ y el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})$, así también el conjunto Ω , pero no es necesario conocer el vector exacto de parámetros dinámicos $\boldsymbol{\theta}$.

Ahora se define el vector de errores paramétricos $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^m$ como

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}. \quad (3.16)$$

El vector de errores paramétricos $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ es desconocido dado que está en función del vector de parámetros dinámicos $\boldsymbol{\theta}$ que se supone desconocido desde un principio. Sin embargo, el error paramétrico $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ es considerado sólo para fines de análisis.

De la definición del vector de errores paramétricos $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ en (3.16), se puede ver que

$$\begin{aligned} \Phi_g(\mathbf{q}_d) \tilde{\boldsymbol{\theta}} &= \Phi_g(\mathbf{q}_d) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \Phi_g(\mathbf{q}_d) \boldsymbol{\theta}, \\ &= \Phi_g(\mathbf{q}_d) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{g}_0(\mathbf{q}_d), \end{aligned}$$

donde se utilizó (3.4) con $\mathbf{x} = \mathbf{q}_d$.

Utilizando la definición anterior, la ley de control (3.13) puede ser escrita como

$$\boldsymbol{\tau} = K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} + \Phi_g(\mathbf{q}_d) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d, \boldsymbol{\theta}). \quad (3.17)$$

Utilizando la ley de control (3.17) y sustituyendo la ley de control $\boldsymbol{\tau}$ en la ecuación del modelo del robot (2.25), se obtiene

$$M(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\theta}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Phi_g(\mathbf{q}_d) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}). \quad (3.18)$$

Al obtener la derivada temporal del vector de errores adaptables se obtiene que $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$, ya que el vector de parámetros dinámicos $\boldsymbol{\theta}$ se considera como constante. Por lo tanto, se obtiene que

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \Gamma \Phi_g^T(\mathbf{q}_d) [\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \quad (3.19)$$

A partir de todas las consideraciones anteriores, la ecuación de estados en lazo cerrado está dada por las ecuaciones (3.18) y (3.19), y ésta se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Phi_g(\mathbf{q}_d) \tilde{\boldsymbol{\theta}} - C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \boldsymbol{\theta}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_d, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})] \\ \Gamma \Phi_g^T(\mathbf{q}_d) [\gamma \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Vale la pena remarcar que éste es un conjunto de ecuaciones diferenciales autónomas con un vector de estados dado por $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T \quad \tilde{\theta}^T]^T$, y el origen en el espacio de estados expresado en (3.21) es un punto de equilibrio de (3.20).

$$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{2n+m}. \quad (3.21)$$

3.1. Análisis de estabilidad

A continuación se muestra el análisis de estabilidad. Éste pretende demostrar la estabilidad del punto de equilibrio ubicado en el origen dado por $[\tilde{q} \quad \dot{q} \quad \tilde{\theta}]^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

Proposición 3.1. Considere el sistema en lazo cerrado (3.20). El equilibrio $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T \quad \tilde{\theta}^T]^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n+m}$ es estable y el $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$.

Prueba. Se propone una *función candidata de Lyapunov*, dada por

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}) \\ \dot{q} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\gamma M(q) & 0 \\ -\gamma M(q) & M(q) & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}) \\ \dot{q} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + g^T(q_d) \tilde{q} + \mathcal{U}(q) - \mathcal{U}(q_d), \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \gamma \tanh^T(\tilde{q}) M(q) \dot{q} + \overbrace{\frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + g^T(q_d) \tilde{q} + \mathcal{U}(q) - \mathcal{U}(q_d)}^{f(\tilde{q})} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Positividad definida de $V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta})$

Hay que recordar que para que (3.22) pueda calificar como una *función candidata de Lyapunov* debe de ser una función definida positiva y radialmente desacotada, es decir que

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta}) &> 0 \quad \forall \tilde{q}, \dot{q} \neq 0 \in \mathbb{R}^n \\ V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta}) &\rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \sqrt{\|\tilde{q}\|^2 + \|\dot{q}\|^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Para mostrar que $V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta})$ es una función definida positiva y radialmente desacotada, se puede acotar cada término por abajo. Para esto obsérvese que para el término $f(\tilde{q})$, de acuerdo con el Lema B.1 enunciado en el Apéndice B, se tiene que

$$\frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \mathcal{U}(q) - \mathcal{U}(q_d) + g^T(q_d) \tilde{q} \geq \frac{1}{2} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \|\tilde{q}\|^2$$

Además se tiene que, para el término $-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) M(q) \dot{q}$ se mantiene la siguiente cota:

$$\begin{aligned} \gamma \tanh^T(\tilde{q}) M(q) \dot{q} &\leq \left| \gamma \tanh^T(\tilde{q}) M(q) \dot{q} \right| \\ &\leq \gamma \|\tanh(\tilde{q})\| \|M(q)\| \|\dot{q}\| \\ &\leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\tanh(\tilde{q})\| \|\dot{q}\| \\ &\leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{q}\| \|\dot{q}\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

cambiando el signo de ambos términos de la ecuación anterior tenemos

$$-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) M(q) \dot{q} \geq -\gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\tilde{q}\| \|\dot{q}\|. \quad (3.24)$$

Para el término $\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$, utilizando la desigualdad de Rayleigh-Ritz, se acota de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{M\} \|\dot{q}\|^2$$

Finalmente, para el término $\frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\} \|\tilde{\theta}\|^2. \quad (3.25)$$

Se puede ver que la ecuación (3.25) es definida positiva y radialmente desacotada en relación al estado $\tilde{\theta}$. Para el estado completo $\tilde{\theta}$, \tilde{q} y \dot{q} se tiene la matriz P , dada por

$$P = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} - k_g & -\gamma \lambda_{\max}\{M\} & 0 \\ -\gamma \lambda_{\max}\{M\} & \lambda_{\min}\{M\} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\} \end{bmatrix}.$$

Utilizando la matriz P , se acota la función candidata de Lyapunov por abajo como:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| & \|\dot{q}\| & \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{q}\| \\ \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Luego $V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta})$ será definida positiva siempre y cuando $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, y γ sea adecuadamente seleccionada de la forma:

$$\gamma < \frac{\sqrt{[\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \lambda_{\min}\{M\}}}{\lambda_{\max}\{M\}}. \quad (3.27)$$

Por lo tanto, $V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\theta})$ dada en (3.22) es definida positiva y radialmente desacotada y califica como una función candidata de Lyapunov.

Derivada temporal de $V(\bar{q}, \dot{q}, \tilde{\theta})$

Obteniendo ahora la derivada temporal de $V(\bar{q}, \dot{q}, \tilde{\theta})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{q}, \dot{q}, \tilde{\theta}) &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \dot{q}^T K_p \dot{\bar{q}} + \overbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} \right]^T}^{g^T(q)} \dot{q} + g^T(q_a) \dot{\bar{q}} \\ &\quad - \gamma \frac{d}{dt} \tanh^T(\bar{q}) M(q) \dot{q} - \gamma \underbrace{\tanh^T(\bar{q}) \dot{M}(q)}_{C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q})} - \gamma \tanh^T(\bar{q}) M(q) \dot{q} \\ &\quad + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}. \end{aligned}$$

Despejando la ecuación de lazo cerrado (3.20) y la ecuación (3.19) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{q}, \dot{q}, \tilde{\theta}) &= \dot{q}^T K_p \bar{q} \textcircled{1} - \dot{q}^T K_v \dot{q} \textcircled{2} + \dot{q}^T \Phi_p(q_a) \tilde{\theta} \textcircled{3} - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} \textcircled{4} + \dot{q}^T g(q_a) \textcircled{5} - \dot{q}^T g(q) \textcircled{6} \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \textcircled{7} - \dot{q}^T K_p \bar{q} \textcircled{1} + g^T(q) \dot{q} \textcircled{4} - g^T(q_a) \dot{q} \textcircled{5} - \gamma \frac{d}{dt} [\tanh(\bar{q})]^T M(q) \dot{q} \\ &\quad - \gamma \tanh^T(\bar{q}) [K_p \bar{q} - K_v \dot{q} + \Phi_p(q_a) \tilde{\theta} - C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q_a) - g(q)] \textcircled{7} \textcircled{6} \\ &\quad - \gamma \tanh^T(\bar{q}) [C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q})] \dot{q} + \tilde{\theta}^T \Phi_p^T(q_a) [\gamma \tanh(\bar{q}) - \dot{\bar{q}}] \textcircled{7} \textcircled{2} \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q} - \gamma \frac{d}{dt} [\tanh(\bar{q})]^T M(q) \dot{q} - \gamma \tanh^T(\bar{q}) C^T(q, \dot{q}) \dot{q} - \gamma \tanh^T(\bar{q}) K_p \bar{q} \\ &\quad + \gamma \tanh^T(\bar{q}) K_v \dot{q} - \gamma \tanh^T(\bar{q}) [g(q_a) - g(q)]. \end{aligned}$$

donde se utilizó la Propiedad 2.13.

Para probar que $\dot{V}(\bar{q}, \dot{q}, \tilde{\theta})$ es definida negativa, se acota cada término de la función por arriba.

- Se empieza por el término $-\dot{q}^T K_v \dot{q}$ por lo que

$$-\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq -\lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{q}\|^2.$$

- Para el término $\gamma \frac{d}{dt} [\tanh(\tilde{q})]^T M(q) \dot{q}$ se tiene que

$$\begin{aligned} -\gamma \frac{d}{dt} [\tanh(\tilde{q})]^T M(q) \dot{q} &= -\gamma [\operatorname{sech}^2(\tilde{q}) \dot{\tilde{q}}]^T M(q) \dot{q} \\ &= \gamma \dot{q} \operatorname{diag} \{ \operatorname{sech}^2(\tilde{q}) \} M(q) \dot{q} \\ &\leq |\gamma \dot{q} \operatorname{diag} \{ \operatorname{sech}^2(\tilde{q}) \} M(q) \dot{q}| \\ &< \gamma \|\dot{q}\| \operatorname{diag} \{ \operatorname{sech}^2(\tilde{q}) \} \|M(q)\| \|\dot{q}\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\boxed{-\gamma \frac{d}{dt} [\tanh(\tilde{q})]^T M(q) \dot{q} \leq \gamma \lambda_{\max} \{M\} \|\dot{q}\|^2.} \quad (3.28)$$

- Para el término $-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) C^T(q, \dot{q}) \dot{q}$ se tiene

$$\begin{aligned} -\gamma \tanh^T(\tilde{q}) C^T(q, \dot{q}) \dot{q} &\leq |\gamma \tanh^T(\tilde{q}) C^T(q, \dot{q}) \dot{q}| \\ &= |\gamma \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \tanh(\tilde{q})| \\ &\leq \gamma \|\dot{q}\| \|C(q, \dot{q}) \tanh(\tilde{q})\| \\ &\leq \gamma \|\dot{q}\| k_{C_1} \|\dot{q}\| \|\tanh(\tilde{q})\| \\ &\leq \gamma \sqrt{n} k_{C_1} \|\dot{q}\|^2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) C^T(q, \dot{q}) \dot{q} \leq \gamma \sqrt{n} k_{C_1} \|\dot{q}\|^2.}$$

- Para el término $-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_p \tilde{q}$, con K_p suficientemente grande, se llega a

$$\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_p \tilde{q} \geq \gamma \lambda_{\min} \{K_p\} \|\tanh(\tilde{q})\|^2,$$

es decir,

$$\boxed{-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_p \tilde{q} \leq -\gamma \lambda_{\min} \{K_p\} \|\tanh(\tilde{q})\|^2.}$$

- Para el término $\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_v \dot{q}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_v \dot{q} &\leq |\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_v \dot{q}| \\ &\leq \gamma \|\tanh(\tilde{q})\| \|K_v\| \|\dot{q}\| \\ &\leq \gamma \lambda_{\max} \{K_v\} \|\tanh(\tilde{q})\| \|\dot{q}\|. \end{aligned}$$

por tanto,

$$\boxed{\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_v \dot{q} \leq \gamma \lambda_{\max} \{K_v\} \|\tanh(\tilde{q})\| \|\dot{q}\|.}$$

Y para el término $-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) [g(q_d) - g(q)]$ se llega a

$$\begin{aligned} -\gamma \tanh^T(\tilde{q}) [g(q_d) - g(q)] &\leq |-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) [g(q_d) - g(q)]| \\ &\leq \gamma \|\tanh(\tilde{q})\| \|g(q_d) - g(q)\|, \end{aligned}$$

de donde debido a la ecuación (C.19) mostrada en el Apéndice C, se tiene que

$$\boxed{-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) [g(q_d) - g(\tilde{q})] \leq \gamma k_{h2} \|\tanh(\tilde{q})\|^2.} \quad (3.29)$$

De estas cotas superiores se puede escribir la matriz Q de la siguiente forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} - k_{h2} & -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} \\ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} & \frac{1}{\gamma} \lambda_{\min}\{K_v\} - \lambda_{\max}\{M\} - \sqrt{n} k_{C1} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede escribir $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$ de la siguiente forma

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq -\gamma \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.30)$$

con γ adecuadamente seleccionada de la siguiente manera

$$\gamma < \frac{4 [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_{h2}] \lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{K_v\} + 4 [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_{h2}] [\sqrt{n} k_{C1} + \lambda_{\max}\{M\}]}. \quad (3.31)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.27) y (3.31) se debe cumplir que

$$\gamma < \min \left\{ \frac{\sqrt{[\lambda_{\min}\{K_p\} - k_p] \lambda_{\min}\{M\}}}{\lambda_{\max}\{M\}}, \frac{4 [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_{h2}] \lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}^2\{K_v\} + 4 [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_{h2}] [\sqrt{n} k_{C1} + \lambda_{\max}\{M\}]} \right\}. \quad (3.32)$$

Dado que se probó que la función candidata de Lyapunov (3.22) es una función definida positiva y radialmente desacotada con un mínimo en el origen $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T \ \tilde{\theta}^T]^T = \mathbf{0}^T \in \mathbb{R}^{2n-n}$ y $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$ es semidefinida negativa, se tiene que el origen es un equilibrio estable, lo que implica que \tilde{q} , $\dot{\tilde{q}}$ y $\tilde{\theta}$ están acotadas [Haddad y Chellaboina, 2011] en el sentido de que $\sup_{t \geq 0} \|\tilde{q}\| < \infty$, $\sup_{t \geq 0} \|\dot{\tilde{q}}\| < \infty$, y $\sup_{t \geq 0} \|\tilde{\theta}\| < \infty$, lo que quiere decir que $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$ y $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_{\infty}^m$.

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el lema de Barbalat.

Con el fin de probar que el $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}$, usaremos el Lema 2.1, [Kelly y Santibáñez, 2003, Lema 2.1], el cual está basado en el lema de Barbalat. Definiendo el vector de errores

como $x = \left[\|\tanh(\tilde{q})\| \ \|\dot{\tilde{q}}\| \right]^T$ y utilizando el Teorema de Rayleigh-Ritz se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) &< -\gamma \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix} \\ &< -\gamma \lambda_{\min}\{Q\} \left[\|\tanh(\tilde{q})\|^2 + \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \right] \\ &\leq -\gamma \lambda_{\min}\{Q\} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Hasta el momento, se conoce que $\tilde{q} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$, $\dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$, y $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$, pero aún no se puede concluir que el error de posición \tilde{q} globalmente converge a cero. Para esto hace falta probar que $\tilde{q} \in \mathcal{L}_2^n$, es decir, probar que

$$k \geq \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q}(t))\|^2 dt$$

A partir de (3.33), integrando ambos lados de la desigualdad, tenemos que

$$\int_{V_0}^{V_{\infty}} dV \leq -\gamma \lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt \quad (3.34)$$

donde se definió $V_0 := V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))$ y $V_{\infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), \tilde{\theta}(t))$. Para esto, el lado izquierdo de la desigualdad (3.34) puede ser evaluado trivialmente como

$$V_{\infty} - V_0 \leq -\gamma \lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt$$

lo que puede ser reescrito como

$$-V_0 \leq -\gamma \lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt - V_{\infty} \quad (3.35)$$

Al saber que la función de Lyapunov $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$ es definida positiva, se conoce que $V_{\infty} \geq 0$ y por lo tanto, de la desigualdad (3.35) se tiene que

$$-V_0 \leq -\gamma \lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt \quad (3.36)$$

De la desigualdad (3.36) se llega a

$$\frac{V_0}{\gamma \lambda_{\min}\{Q\}} \geq \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt, \quad (3.37)$$

donde el término $V_0/(\gamma \lambda_{\min}\{Q\})$ es constante y positivo. Por lo tanto, se puede decir que el término $\tanh(\tilde{q})$ pertenece a \mathcal{L}_2^n , es decir $\tanh(\tilde{q}) \in \mathcal{L}_2^n$, por lo que se puede decir que

$$\tilde{q} \in \mathcal{L}_2^n$$

Utilizando el Lema 2.1 se concluye que los errores de posición \tilde{q} tienden asintóticamente a cero, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbb{R}^n.$$

Es decir, se alcanza el objetivo de control, logrando así convergencia de los errores de posición a cero.

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Principio de Invariancia de LaSalle

Con el fin de utilizar el Teorema 2.2, se procede a definir el conjunto Ω como la componente conectada del conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T & \tilde{\theta}^T \end{bmatrix}^T \in D \subseteq \mathbb{R}^{2n+m} : V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq c \right\}$ conteniendo el origen, donde $c > 0$ satisface

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq c < \alpha := \min_{\left\| \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \right\| = r} V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$$

con $r > 0$ siendo el radio de una bola abierta D_r dada por

$$D_r = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in D : \left\| \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \right\| < r \right\} \subset D$$

Note que la componente conectada conteniendo el origen definida por

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in D : V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq c < \alpha \right\}$$

es un conjunto cerrado por definición y acotado porque está en el interior de D_r , esto es, $\Omega \subseteq D_r$. Para ver esto último suponga *ad absurdum* que $\Omega \not\subseteq D_r$, entonces en este caso

existe un punto $\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \Omega$ que se sitúa en la frontera de D_r , es decir $\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \delta D_r$. En este

punto se tiene $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \geq \alpha > c$, sin embargo para todo $\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \Omega$, se tiene a su vez que

$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq c < \alpha$, lo cual es una contradicción (ver [Khalil, 2002], pág. 115). Por tanto Ω

es un conjunto compacto (cerrado y acotado). Ahora, debido a que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq 0 \forall \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \Omega$

se tiene que $V(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), \tilde{\theta}(t)) \leq V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \leq c \forall t \geq 0$; esto es

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \\ \tilde{\theta}(0) \end{bmatrix} \in \Omega \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{\tilde{q}}(t) \\ \tilde{\theta}(t) \end{bmatrix} \in \Omega \subset D_r \subset D \forall t \geq 0.$$

Por tanto Ω es un conjunto positivamente invariante con respecto a (3.20). Debido al desacotamiento radial de $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$ es posible probar que Ω es acotado para todos los

valores de c (ver Khalil [Khalil, 2002], pp. 123) y cualquier punto $\begin{bmatrix} \tilde{q}(0) \\ \dot{\tilde{q}}(0) \\ \tilde{\theta}(0) \end{bmatrix} \in D = \mathbb{R}^{2n+m}$

puede ser incluido en el interior del conjunto compacto y positivamente invariante Ω . Por tanto, el conjunto Ω está dado por

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : V(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), \tilde{\theta}(t)) \leq V_0 \right\}.$$

donde $V_0 := V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))$. Por otra parte el conjunto

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \Omega : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = 0 \right\}$$

resulta de acuerdo a (3.30),

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \Omega : \tilde{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \tilde{\theta} : V(0, 0, \tilde{\theta}) \leq V_0 \right\}$$

Para que una solución pertenezca a E para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $\tilde{q}(t) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$, $\dot{\tilde{q}}(t) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$, lo cual implica que $\ddot{\tilde{q}}(t) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$. De acuerdo a la ecuación de lazo cerrado (3.20), esto a su vez implica que $\tilde{\theta}(t)$ es tal que satisfaga $\Phi_g(q_d) \tilde{\theta}(t) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$. Por tanto el máximo conjunto invariante M , está dado por:

$$M = \left\{ \tilde{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \text{ y } \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^m : \Phi_g(q_d) \tilde{\theta} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (3.38)$$

De acuerdo al Teorema 2.2, se concluye que las soluciones tienden al máximo conjunto invariante dado en (3.38); es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = \mathbf{0}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) \rightarrow \tilde{\theta}^*$, donde $\Phi_g(q_d) \tilde{\theta}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. En caso de que $\Phi_g(q_d) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sea de excitación persistente [Loría *et al.*, 2002], [Loría *et al.*, 2005], el error paramétrico $\tilde{\theta}^*$ será igual a cero. Es decir, el equilibrio será asintóticamente estable en forma global.

3.2. Resultados en simulación

A manera de ilustración de los resultados del análisis de estabilidad, se muestran algunas simulaciones numéricas donde se puede observar que los errores de posición tienden a cero, alcanzando las posiciones deseadas dadas por

$$q_{d1} = \frac{\pi}{10} \text{ rad} \quad \text{y} \quad q_{d2} = \frac{\pi}{30} \text{ rad} \quad (3.39)$$

y los parámetros estimados están acotados (los cuales están dados por $\theta_1 = m_2$ y $\theta_2 = m_2 l_{c2}$), utilizando la ley de adaptación (3.14), y ganancias proporcionales y derivativas dadas por

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{30, 30\} \text{ Nm/rad}, \\ K_d &= \text{diag}\{7, 3\} \text{ Nm s/rad}. \end{aligned}$$

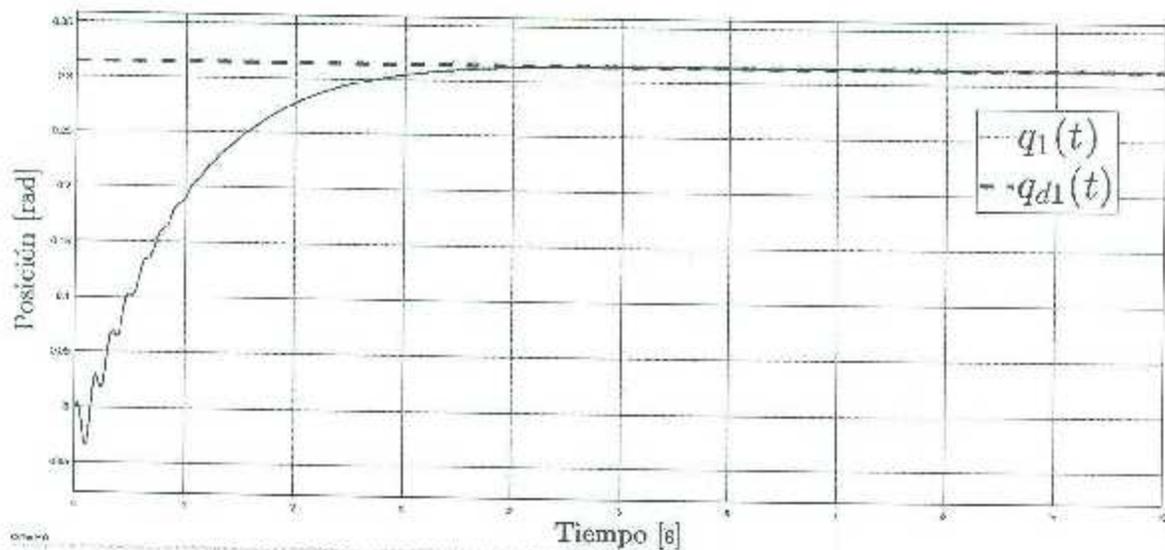


Figura 3.2: Seguimiento de trayectoria para q_1 utilizando el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.

y la matriz de ganancias de los parámetros adaptables definida como

$$F = \text{diag}\{550, 49\} \text{ Nm/rad s}$$

y $\gamma = 1 \text{ rad/s}$ aplicado al modelo del robot Pelican ubicado en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada B.C., México.

En las Figuras 3.2 y 3.3 se puede ver la regulación de las trayectorias $q_1(t)$ y $q_2(t)$ a las posiciones deseadas dadas por (3.39). En la Figura 3.4 se muestran los errores de posición de los eslabones 1 y 2. En el caso de los parámetros a adaptar, en la Figura 3.5 se muestra que éstos permanecen acotados para todo $t \geq 0$.

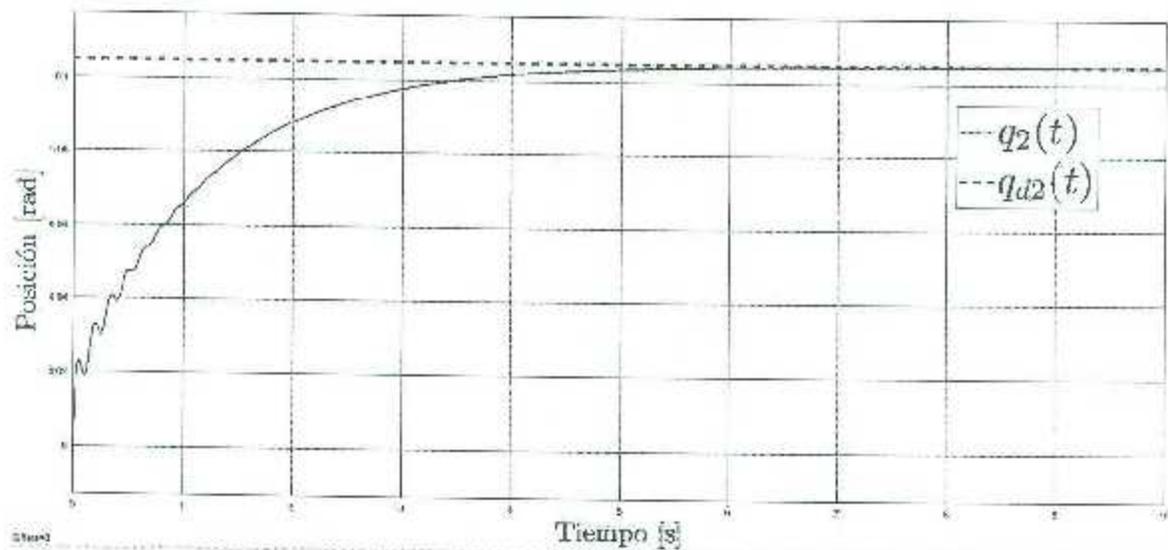


Figura 3.3: Seguimiento de trayectoria para q_2 utilizando el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.

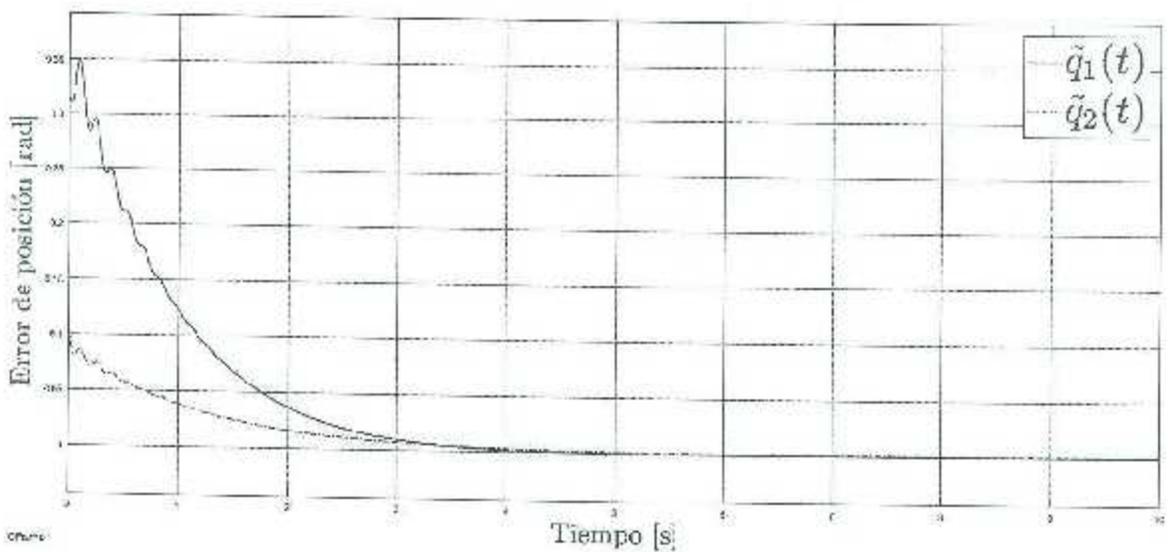


Figura 3.4: Errores de posición para las articulaciones 1 y 2 utilizando el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.

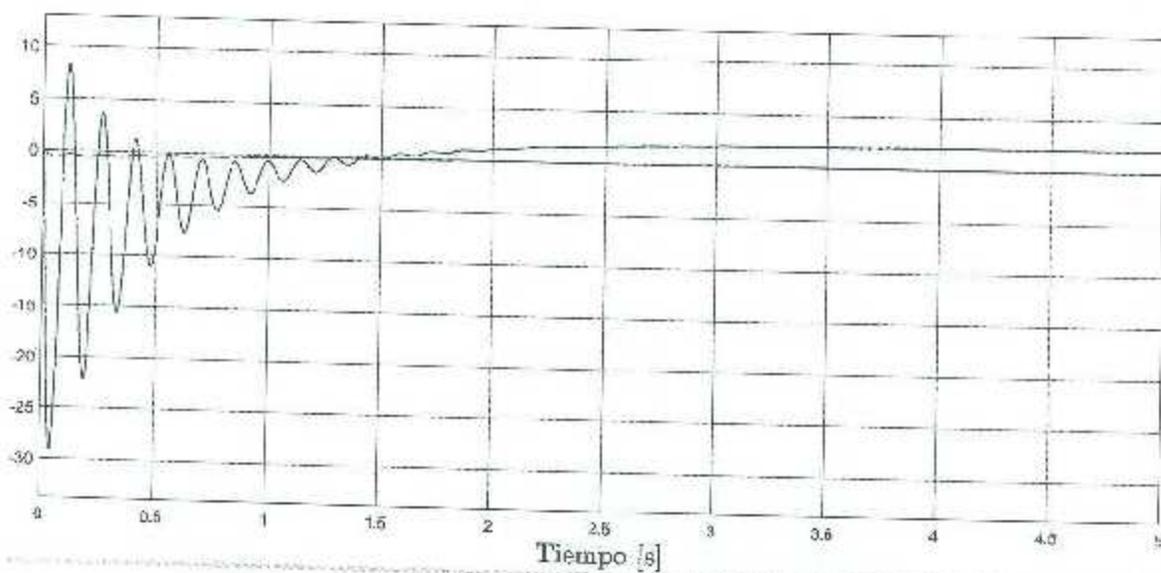


Figura 3.5: Adaptación paramétrica para el controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable.

Capítulo 4

Controlador PD+ adaptable

El controlador PD+ es uno de los controladores más simples que pueden ser empleados en el control de movimiento de robots manipuladores. La estructura del control PD+ fue propuesta originalmente por [Koditschek, 1984]. La ley del control PD+ está dada por

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}) \dot{q}_d + g(q), \quad (4.1)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas.

El uso del control PD+ requiere del conocimiento preciso del modelo del manipulador, es decir de $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$. Además es necesario disponer de las trayectorias deseadas $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$ así como de las mediciones de $q(t)$ y $\dot{q}(t)$. En la Figura 4.1 se presenta el diagrama a bloques del control PD+ para robots manipuladores.

Para hacer notar la dependencia de la ley de control (4.1) de los parámetros del robot y de la carga —parámetros dinámicos— se puede escribir de la siguiente manera:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(q, \theta) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}, \theta) \dot{q}_d + g(q, \theta). \quad (4.2)$$

La Propiedad 2.18 establece que

$$M(q, \theta) u + C(q, w, \theta) v + g(q, \theta) = \phi(q, u, v, w) \theta + M_0(q) u + C_0(q, w) v + g_0(q). \quad (4.3)$$

En virtud de este hecho se considera que

$$\begin{aligned} u &= \ddot{q}_d(t), \\ v &= \dot{q}_d(t), \\ w &= \dot{q}(t). \end{aligned}$$

con lo que se llega a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} M(q, \theta) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d, \theta) \dot{q}_d + g(q, \theta) = \\ \phi(q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, \dot{q}) \theta + M_0(q) \ddot{q}_d + C_0(q, \dot{q}_d) \dot{q}_d + g_0(q). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por razones de simplicidad en la escritura, a partir de este momento se utilizará la siguiente abreviación

$$\phi = \phi(q, \ddot{q}_d, \dot{q}_d, \dot{q}).$$

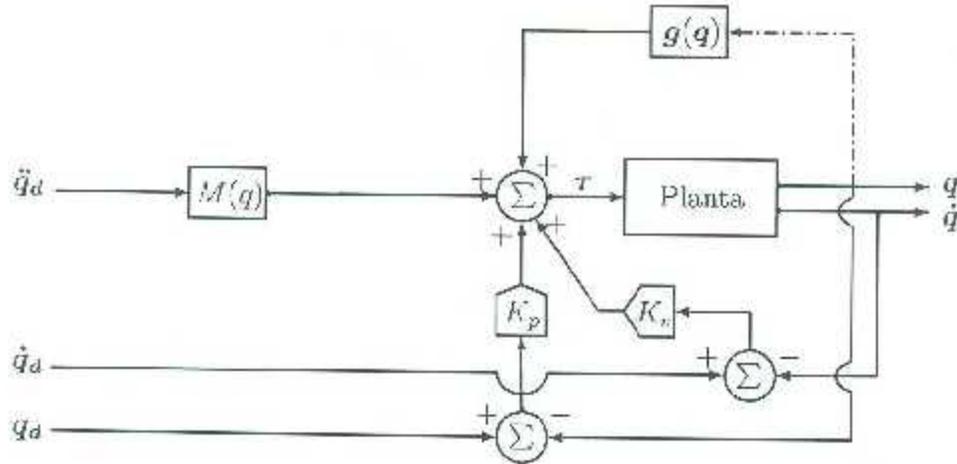


Figura 4.1: Diagrama a bloques del controlador PD+.

Tomando la ecuación (4.4), la ley de control (4.2) puede ser escrita de la siguiente manera

$$\tau = K_p \bar{q} + K_v \dot{\bar{q}} + \Phi \theta + M_0(q) \ddot{q}_d + C_0(q, \dot{q}) \dot{q}_d + g_0(q). \quad (4.5)$$

Es importante remarcar que para la aplicación del controlador (4.2) o de manera equivalente (4.5), se requiere el conocimiento de los parámetros dinámicos θ del robot (con el objeto manipulado incluido).

A partir de este momento se considerará que el vector $\theta \in \mathbb{R}^m$ de parámetros dinámicos es desconocido pero constante. Naturalmente, en este escenario, ni el controlador (4.2) o su equivalente (4.5) pueden ser utilizados en el control de robots. Para resolver el problema de control basado en el PD+, en este capítulo, se presenta la versión adaptable del control PD+, la diferencia radica en la ley de adaptación de parámetros.

En el caso del control de seguimiento, la ley de control puede expresarse como

$$\tau = \tau(t, q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{\theta}), \quad (4.6)$$

y la ley de adaptación, que permiten determinar $\hat{\theta}(t)$, puede expresarse como una ecuación diferencial de $\hat{\theta}$, como la dada en (3.9), la cual se expresa como

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \int_0^t \psi(s, q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) ds + \hat{\theta}(0). \quad (4.7)$$

La versión adaptable de la ley de control (4.5) puede expresarse como

$$\tau = K_p \bar{q} + K_v \dot{\bar{q}} + \Phi \hat{\theta} + M_0(q) \ddot{q}_d + C_0(q, \dot{q}) \dot{q}_d + g_0(q) \quad (4.8)$$

donde $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de parámetros adaptados dado por la siguiente ley de adaptación

$$\hat{\theta}(t) = \Gamma \int_0^t \Phi^T \left[\gamma \tanh(\bar{q}(\sigma)) + \dot{\bar{q}}(\sigma) \right] d\sigma + \hat{\theta}(0) \quad (4.9)$$

donde $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de ganancias de adaptación simétrica y definida positiva. Además, γ es una constante que debe ser adecuadamente seleccionada como

$$0 < \gamma < \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}\{K_p\}}{\lambda_{\max}\{M\}}, \frac{4 \lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{K_v\}}{[\lambda_{\max}\{K_v\} + k_{C1} \|\dot{q}_d\|_M]^2 + 4 \lambda_{\min}\{K_p\} [\sqrt{n} k_{C1} + \lambda_{\max}\{M\}]} \right\} \quad (4.10)$$

Antes de obtener la ecuación de lazo cerrado, se define el vector de error paramétrico como

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta.$$

Así, utilizando (4.4), la ley de control (4.8) puede ser escrita como

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + \phi \tilde{\theta} + M(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}) \dot{q}_d + g(q). \quad (4.11)$$

A partir de la definición de $\tilde{\theta}$, y dado que el vector paramétrico θ se supone constante, se tiene que $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$. Utilizando todo esto en conjunto con la ley de adaptación (4.9), y reemplazando la acción de control (4.11) en la dinámica del robot (2.12), se obtiene la ecuación de lazo cerrado como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(q) [-K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} - \phi \tilde{\theta}] \\ \Gamma \Phi^T [\gamma \tanh(\tilde{q}) + \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Nótese que el sistema en lazo cerrado (4.12) es una ecuación diferencial no autónoma, no lineal y $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T \ \tilde{\theta}^T]^T = 0^T \in \mathbb{R}^{2n+m}$ es un punto de equilibrio.

4.1. Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad, se utiliza la siguiente función candidata de Lyapunov (Kelly y Santibáñez, Chap. 2, del texto [Lozano y Taouataou, 2002]):

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \gamma \tanh^T(\tilde{q}) M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}. \quad (4.13)$$

Positividad definida de $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$

Para demostrar que la función candidata de Lyapunov (4.13) es una función definida positiva y radialmente desacotada, se tiene que para el primer término

$$\frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{M\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2.$$

Para mostrar que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ es definida negativa, se encuentra una cota superior de cada término de (4.15). Para esto, el primer término es acotado fácilmente por

$$-\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} \leq -\lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2$$

Para acotar el segundo término de (4.15), se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d}{dt} [\tanh(\tilde{q})]^T M(q) \dot{\tilde{q}} &= \gamma [\text{diag}(\text{sech}^2(\tilde{q})) \dot{\tilde{q}}]^T M(q) \dot{\tilde{q}}, \\ &\leq \gamma \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}}, \\ &\leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2, \end{aligned}$$

por tanto

$$\gamma \frac{d}{dt} [\tanh(\tilde{q})]^T M(q) \dot{\tilde{q}} \leq \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2$$

Ahora, recordando que las matrices K_p y K_v son diagonales y definidas positivas, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_p \tilde{q} &\geq \gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tanh^T(\tilde{q})\| \|\tilde{q}\| \\ &\geq \gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tanh^T(\tilde{q})\|^2, \end{aligned}$$

y de acuerdo con (C.3) tenemos que

$$-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_p \tilde{q} \leq -\gamma \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tanh(\tilde{q})\|^2,$$

y para $-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_v \dot{\tilde{q}}$ tenemos

$$-\gamma \tanh^T(\tilde{q}) K_v \dot{\tilde{q}} \leq -\gamma \lambda_{\min}\{K_v\} \|\dot{\tilde{q}}\| \|\tanh(\tilde{q})\| \leq -\gamma \lambda_{\min}\{K_v\} \|\tanh(\tilde{q})\|^2$$

donde se tomó en cuenta la ecuación (C.3). Tomando en cuenta la propiedad 2.11 sobre la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, y el hecho de que $\|\dot{\tilde{q}}\| = \|\dot{q}_d - \dot{\tilde{q}}\| \leq \|\dot{q}_d\| + \|\dot{\tilde{q}}\|$, se tiene que

$$\gamma \tanh^T(\tilde{q}) C^T(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} \leq \gamma k_{C1} \|\dot{q}_d\|_M \|\dot{\tilde{q}}\| \|\tanh(\tilde{q})\| + \gamma k_{C1} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \|\tanh(\tilde{q})\|. \quad (4.16)$$

Considerando la ecuación (C.3), la cual muestra que $\|\tanh(\tilde{q})\| \leq \sqrt{n} \forall \tilde{q} \in \mathbb{R}^n$, se llega a

$$\left[\gamma \tanh^T(\tilde{q}) C^T(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} \leq \gamma k_{C1} \|\dot{q}_d\|_M \|\dot{\tilde{q}}\| \|\tanh(\tilde{q})\| + \gamma \sqrt{n} k_{C1} \|\dot{\tilde{q}}\|^2. \right] \quad (4.17)$$

De acuerdo a dichos límites, definiendo el vector $x = \left[\|\tanh(\tilde{q})\| \|\dot{\tilde{q}}\|^T \right]^T$, la derivada temporal de Lyapunov mostrada en (4.15) satisface $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq -\gamma x^T Q x$, donde Q está dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\frac{1}{2} [k_{C1} \|\dot{q}_d\|_M + \lambda_{\max}\{K_v\}] \\ -\frac{1}{2} [k_{C1} \|\dot{q}_d\|_M + \lambda_{\max}\{K_v\}] & \frac{1}{\gamma} \lambda_{\min}\{K_v\} - \sqrt{n} k_{C1} - \lambda_{\max}\{M\} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Para que la matriz Q sea definida positiva, se debe tener una γ adecuadamente seleccionada, que cumpla con (4.10).

De lo anterior se concluye que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ es una función definida negativa y se puede concluir la estabilidad del origen del espacio de estados $[\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T \quad \tilde{\theta}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n+m}$ del sistema en lazo cerrado (4.12). También se afirma que las variables de estado \tilde{q} , $\dot{\tilde{q}}$ y $\tilde{\theta}$ están acotadas, lo que quiere decir que

$$\begin{aligned} \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} &\in \mathcal{L}_{\infty}^n \\ \tilde{\theta} &\in \mathcal{L}_{\infty}^m. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Lema de Barbalat

Hasta este momento se ha demostrado que $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$, $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_{\infty}^m$. Utilizando el Lema 2.1, se pretende probar que $\tanh(\tilde{q}) \in \mathcal{L}_2^n$, y de esta forma concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}$. A partir de la derivada temporal (4.15) y a las condiciones sobre γ dadas en (4.10) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) &\leq -\gamma x^T Q x \\ &\leq -\lambda_{\min}\{Q\} \left\| \begin{array}{c} \|\tanh(\tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{array} \right\|^2 \\ &\leq -\lambda_{\min}\{Q\} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 \end{aligned}$$

Integrando ambos lados, desde $t = 0$ hasta $t = \infty$, se obtiene

$$V(\tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty), \tilde{\theta}(\infty)) - V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt.$$

y moviendo términos tenemos

$$-V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt - V(\tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty), \tilde{\theta}(\infty))$$

Como la función candidata de Lyapunov $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$, dada en (4.13), es una función definida positiva, $V(\tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty), \tilde{\theta}(\infty)) \geq 0$, y por consecuencia se concluye que

$$-V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q})\|^2 dt.$$

De esta última expresión se llega a que

$$\frac{V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{Q\}} \geq \int_0^{\infty} \|\tanh(\tilde{q}(t))\|^2 dt, \tag{4.20}$$

donde el lado izquierdo de la desigualdad existe, es constante y positivo. Lo que significa que $\tanh(\tilde{q}) \in \mathcal{L}_2^n$, por lo que el error de posición $\tilde{q}(t)$ pertenece al espacio \mathcal{L}_2^n . Por lo tanto, aunado a que $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$ de acuerdo al Lema 2.1, se poseen las condiciones suficientes para probar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}$.

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Principio de Invariancia de LaSalle

En esta subsección se utilizará el principio de invariancia de LaSalle para probar convergencia del error de posición \tilde{q} a cero.

De acuerdo al Teorema 2.4 para sistemas no autónomos, todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (4.12) están contenidas dentro del conjunto:

$$\Omega_0 = \left\{ \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^m : V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \right\}.$$

La bola Ω'_0 dada por:

$$\Omega'_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : \left\| \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P}\}} \right\},$$

está contenida en Ω_0 , es decir, $\Omega'_0 \subset \Omega_0$.

En este punto es requerido definir el dominio Ω donde $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = 0$ como

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : W(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = 0 \right\}$$

con

$$W(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = -\gamma \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{q})\| & \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \|\tanh(\tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}$$

y Q dada por (4.18). Es decir,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m}, \text{ con } \|\tilde{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P}\}} \right\}$$

Los estados del sistema de lazo cerrado (4.12) tienden de manera última (cuando $t \rightarrow \infty$) al conjunto $\Omega_f = \Omega_0 \cap \Omega$, definido por

$$\Omega_f = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m}, \text{ con } \|\tilde{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P}\}} \right\} \quad (4.21)$$

A partir del análisis llevado a cabo anteriormente, se concluye que las soluciones tienden al máximo conjunto invariante dado por (4.21); es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ (convergencia de los errores de posición y velocidad a cero), además el vector de errores paramétricos es acotado para todo $t \geq 0$.

Si se tiene que $\phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sea de excitación persistente, el error paramétrico $\tilde{\theta}^*$ convergerá a cero, con lo que se alcanzaría una estabilidad asintóticamente estable en forma global (ver [Loría *et al.*, 2002] y [Loría *et al.*, 2005]).

4.2. Resultados en simulación

A manera de ilustración de los resultados del análisis de estabilidad, se muestran algunas simulaciones numéricas donde se puede observar que los errores de posición tienden a cero y los parámetros estimados están acotados (los cuales están dadas por $\theta_1 = m_2$ y $\theta_2 = m_2 l_{c2}$) utilizando la ley de adaptación (4.9), y ganancias proporcionales y derivativas dadas por

$$K_p = \text{diag}\{2000, 1000\} \text{ Nm/rad},$$

$$K_v = \text{diag}\{150, 15\} \text{ Nm/rad},$$

y la matriz de ganancias de los parámetros adaptables quedó definida como

$$\Gamma = \text{diag}\{10 \text{ kg s}^2/\text{m}, 0.19 \text{ kg s}^2, 0.09 \text{ kg m}^2 \text{ s}^2\}$$

Se consideran las referencias de posición dadas por:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 45 [1 - e^{-2t^3}] + 10 [1 - e^{-2t^3}] \text{ sen}(\omega_1 t) \\ 60 [1 - e^{-1.8t^3}] + 125 [1 - e^{-1.8t^3}] \text{ sen}(\omega_2 t) \end{bmatrix} \text{ [grad]} \quad (4.22)$$

con $\omega_1 = 15 \text{ rad/s}$ y $\omega_2 = 3.5 \text{ rad/s}$. De lo que se concluye que

$$\text{máx}(\|\dot{q}_d\|) = 462.5 \text{ grad/s} = 8.0721 \text{ rad/s}$$

Este dato y los valores $k_{v1} = 0.59 \text{ kg m}^2$, $k_g = 97.7 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ y $\lambda_{\text{mín}}\{M(q)\} = 2.795 \text{ kg m}^2$ son útiles para calcular el valor máximo permitido para el parámetro γ , de acuerdo con (4.10). Con los valores numéricos anteriores y las ganancias del controlador, se tiene que:

$$1.56 > \gamma > 0$$

y se utiliza el valor de $\gamma = 1 \text{ rad/seg}$ para las simulaciones.

Las condiciones iniciales correspondientes, tanto para las posiciones y velocidades articulares así como para los parámetros a adaptar, fueron $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$ y $\hat{\theta}(0) = 0$.

En las Figuras 4.2 y 4.3 se puede ver el seguimiento de las trayectorias (4.22) para las articulaciones q_1 y q_2 , respectivamente. En la Figura 4.4 se aprecia la convergencia de los errores de posición y de velocidad a cero cerca de los 100 segundos. Para los parámetros a adaptar por la ley adaptable (4.9), se puede ver en la Figura 4.5 que permanecen acotados para todo $t > 0$.

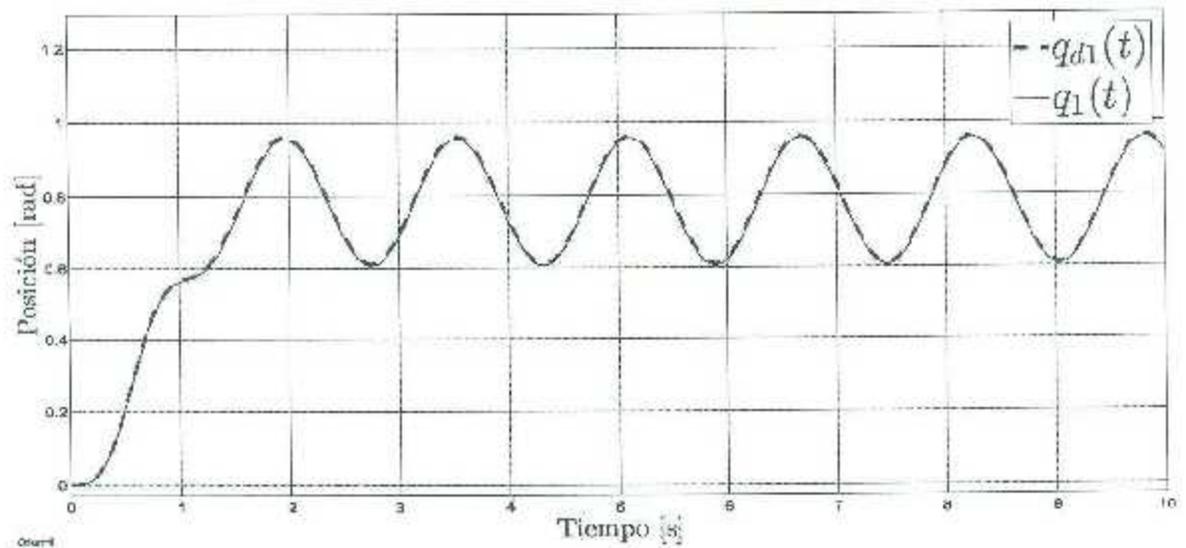


Figura 4.2: Seguimiento de trayectoria para q_1 utilizando el controlador PD+ adaptable.

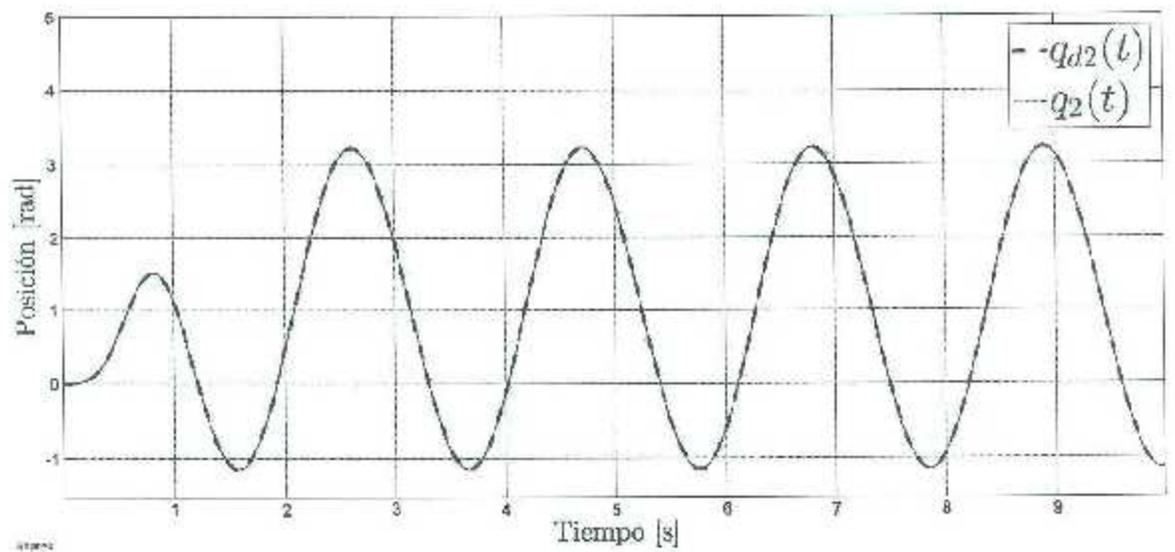


Figura 4.3: Seguimiento de trayectoria para q_2 utilizando el controlador PD+ adaptable.

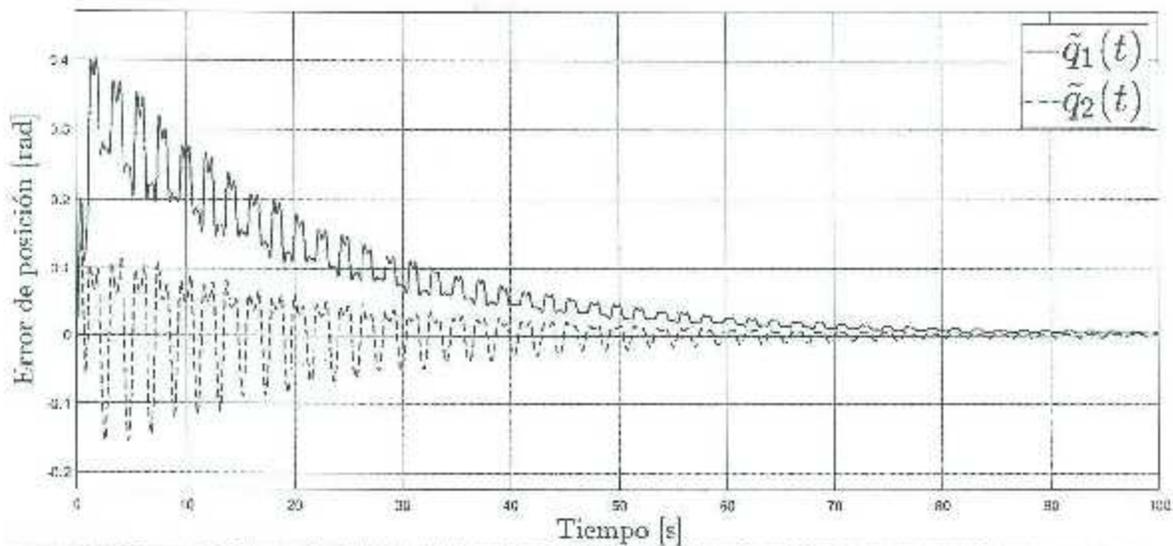


Figura 4.4: Errores de posición para las articulaciones 1 y 2 utilizando el controlador PD+ adaptable para 100 segundos.

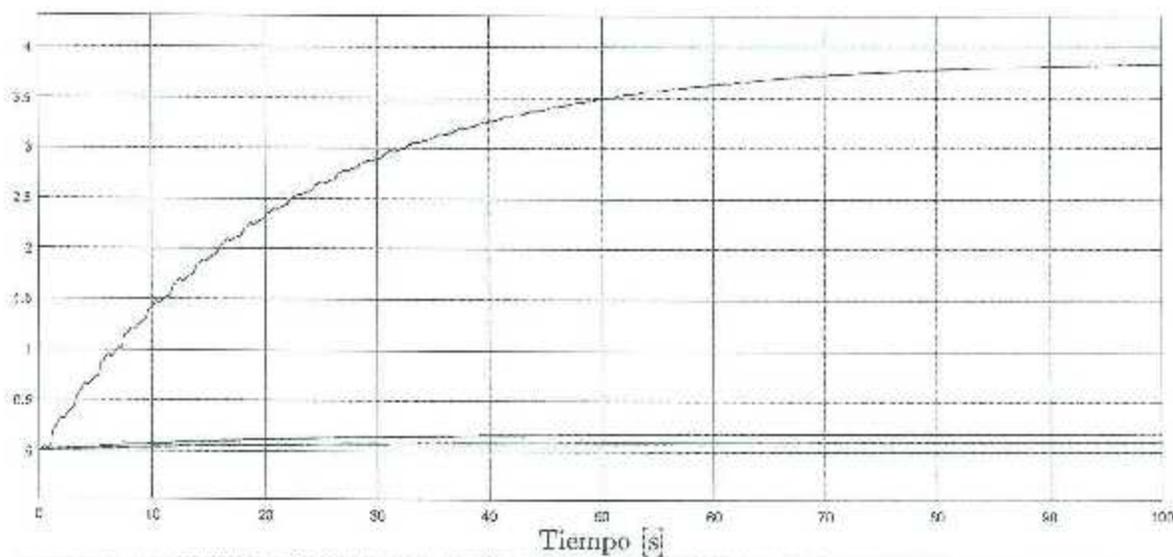


Figura 4.5: Adaptaciones paramétricas utilizando el controlador PD+ adaptable.

Capítulo 5

Controlador con compensación adaptable (Slotine-Li)

Otro enfoque para controlar robots manipuladores está dado por el “control PD con compensación”, originalmente presentado por [Slotine y Li, 1987], también conocido por el nombre de sus autores como “controlador Slotine-Li.” Este controlador consiste de una realimentación proporcional y otra realimentación derivativa de los errores de posición y velocidad, y otra parte de compensación de la dinámica del sistema, con una estimación en línea de los parámetros del último eslabón y de la carga en línea. Este controlador no requiere realimentación de las aceleraciones de cada articulación. Además este algoritmo puede ser aplicado directamente en coordenadas polares.

La principal motivación para el desarrollo del control adaptable como una rama de la teoría de sistemas, es hacer que un robot manipulador sea capaz de manipular grandes cargas en presencia de incertidumbre en las propiedades de ésta, tales como la masa o su posición exacta en el efector final del robot manipulador. Además, el ideal de dotar capacidades de aprendizaje en las máquinas ha alimentado gran parte del desarrollo del control adaptable [Slotine y Li, 1987].

Recordando el modelo general de un robot manipulador de n grados de libertad en la ausencia de fricción u otras perturbaciones, dado por las ecuaciones de Lagrange, mostrado en la ecuación (2.22), se tiene

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

La ley de control está dada por

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(q) [\ddot{q}_d + A \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + A \tilde{q}] + g(q), \quad (5.1)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son simétricas definidas positivas, y $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$, el vector $\tilde{q} = q_d - q$ denota el error de posición y la matriz A está dada por

$$A = K_v^{-1} K_p. \quad (5.2)$$

Cabe destacar que la matriz A , dada por el producto de dos matrices simétricas definidas positivas, no es necesariamente simétrica ni definida positiva; sin embargo, ésta será no singular (ver [Kelly *et al.*, 2006, p. 362] y [Horn y Johnson, 1990, p. 464]).

Recordando la Propiedad 2.18, el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad (con una carga incluida) puede ser escrita de acuerdo a (5.2) como

$$M(q, \theta) u + C(q, w, \theta) v + g(q, \theta) = \Phi(q, u, v, w) \theta - M_0(q) u + C_0(q, w) v + g_0(q), \quad (5.3)$$

donde $\Phi(q, u, v, w) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M_0(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_0(q, w) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g_0(q) \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in \mathbb{R}^m$. El vector θ , es el vector de parámetros dinámicos, que contiene elementos que dependen precisamente de los parámetros dinámicos del robot manipulador. Las matrices $M_0(q)$, $C_0(q, w)$ y el vector $g_0(q)$ representan las partes de las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y del vector $g(q)$ que no dependen del vector de parámetros dinámicos θ respectivamente.

Debido a lo anterior, nótese que

$$\begin{aligned} M(q, \theta) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}, \theta) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g(q, \theta) \\ = \Phi \theta + M_0(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C_0(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g_0(q), \end{aligned} \quad (5.4)$$

conde $\Phi = \Phi(q, \ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}, \dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}, \dot{q})$; y se define

$$\begin{aligned} u &= \ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}, \\ v &= \dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}, \\ w &= \dot{q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede concluir que

$$\begin{aligned} M(q, \hat{\theta}) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}, \hat{\theta}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g(q, \hat{\theta}) \\ = \Phi \hat{\theta} + M_0(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C_0(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g_0(q). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tomando (5.4), la ley de control PD con compensación, la ecuación (5.1) puede ser escrita como

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + \Phi \theta + M_0(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C_0(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g_0(q). \quad (5.6)$$

Al tomar la ecuación de la ley del controlador PD con compensación, es decir (5.1), o equivalentemente (5.6), hace falta el conocimiento de los parámetros dinámicos del robot, incluyendo la carga a manipular, esto es el vector θ . A partir de aquí se tomará el vector de parámetros dinámicos θ como desconocido pero constante. Como se explica en los Capítulos 3 y 4, la estructura de los controladores adaptables para regulación y seguimiento estudiado en este trabajo, están dados por las ecuaciones (3.7) con una ley adaptable dada por (2.30), es decir

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(t, q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, \hat{\theta}), \\ \hat{\theta}(t) &= \Gamma \int_0^t \psi(\sigma, q, \dot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) d\sigma + \hat{\theta}(0), \end{aligned}$$

donde $\Gamma = \Gamma^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (ganancia adaptable) y $\hat{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m$ (vector de condiciones iniciales) son parámetros del diseño, mientras que el vector $\psi \in \mathbb{R}^m$ es una función vectorial a ser determinada.

La ley del control PD con compensación adaptable está dada por

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + \Phi \hat{\theta} + M_0(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C_0(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g_0(q). \quad (5.7)$$

y una ley adaptable dada por

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma \int_0^t \Phi^T [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] d\sigma + \hat{\theta}(0), \quad (5.8)$$

donde $K_p = K_p^T > 0$, $K_v = K_v^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\Gamma = \Gamma^T > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices del diseño.

Para escribir la ecuación de lazo cerrado, se define el vector de errores paramétricos como $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^m$ como

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta.$$

A partir de esta definición del error paramétrico y utilizando la ecuación (5.7), se puede escribir

$$\begin{aligned} \Phi \hat{\theta} &= \Phi \tilde{\theta} + \Phi \theta, \\ &= \Phi \tilde{\theta} + M(q, \theta) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}, \theta) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g(q, \theta) \\ &\quad - M_0(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] - C_0(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] - g_0(q). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (5.7), la ley de control resulta como

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + \Phi \tilde{\theta} + M(q, \theta) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}, \theta) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g(q, \theta).$$

Utilizando esta ley de control y sustituyéndola por la acción de control τ en la ecuación del modelo del robot (2.25), se obtiene

$$M(q, \theta) [\ddot{\tilde{q}} + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}, \theta) [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] = -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - \Phi \tilde{\theta}. \quad (5.9)$$

Dado que el vector de parámetros dinámicos θ se supone constante, su derivada temporal es cero, es decir $\dot{\theta} = 0 \in \mathbb{R}^m$. Por lo tanto, $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$. De esta manera, la derivada temporal del vector de parámetros dinámicos $\hat{\theta}$ se obtiene diferenciando con respecto al tiempo la ley adaptable (5.8). Considerando esto tenemos que

$$\dot{\tilde{\theta}} = \Gamma \Phi^T [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}]. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, la ecuación de lazo cerrado está formada por las ecuaciones (5.9) y (5.10), y puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1}(q, \theta) \{ -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - \Phi \tilde{\theta} - C(q, \dot{q}, \theta) [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] \} - \Lambda \dot{\tilde{q}} \\ \Gamma \Phi^T [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

la cual es una ecuación diferencial no autónoma y el origen es un punto de equilibrio, es decir

$$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{2n+m},$$

es un punto de equilibrio.

5.1. Análisis de estabilidad

El análisis de estabilidad del origen de la ecuación en espacio de estados se realiza con la función candidata de Lyapunov dada por la ecuación (5.12), esto es

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}]^T M(q, \theta) [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] + \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}. \quad (5.12)$$

Positividad definida de $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$

Para verificar que esta función es válida para realizar el análisis de estabilidad, se tiene que demostrar que sea una función definida positiva ($V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) > 0$) para todo $t \in \mathbb{R}_+$; y demostrar que esta función sea radialmente desacotada, es decir que $V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \rightarrow \infty$

cuando $\left\| \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \right\| \rightarrow \infty$.

Para demostrar la positividad definida de esta función, y que sea radialmente desacotada, se encuentra una cota inferior para cada término de (5.12). Primeramente se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}]^T M(q, \theta) [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{M\} \|\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}\|^2, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Para el segundo término de (5.12) se tiene que

$$\tilde{q}^T K_p \tilde{q} \geq \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tilde{q}\|^2. \quad (5.13)$$

y para el término relacionado con los parámetros adaptables, se puede ver que

$$\frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\} \|\tilde{\theta}\|^2. \quad (5.14)$$

En relación a la obtención de las cotas inferiores para cada término de la función candidata de Lyapunov, se puede acotar dicha función empleando una ecuación de manera matricial, demostrando que esta función es definida positiva y radialmente desacotada, como se ve en (5.15).

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}\| \\ \|\tilde{q}\| \\ \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{M\} & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_{\min}\{K_p\} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\} \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}\| \\ \|\tilde{q}\| \\ \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

donde $\det(P) = \lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{M\} \lambda_{\min}\{\Gamma^{-1}\} > 0$.

Derivada temporal de $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta})$

La matriz $P > 0$ cumple las condiciones necesarias para poder asegurar que sea una matriz definida positiva.

La derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov (5.15) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) &= [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}]^T M(q, \theta) [\ddot{\tilde{q}} + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + \frac{1}{2} [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}]^T \dot{M}(q, \theta) [\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}] \\ &\quad + 2 \tilde{q}^T K_v \dot{\tilde{q}} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sustituyendo ahora la ley de adaptación (5.10) y la ecuación de lazo cerrado (5.11), la derivada de la función de Lyapunov queda expresada como

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \tilde{q}^T \Lambda^T K_v \Lambda \tilde{q} \quad (5.17)$$

donde se puede encontrar una cota superior a la ecuación (5.17) utilizando la desigualdad de Rayleigh-Ritz, como

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq - \underbrace{\begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| & 0 \\ \|\dot{\tilde{q}}\| & \lambda_{\min}\{K_v\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{\Lambda^T K_v \Lambda\} & 0 \\ 0 & \lambda_{\min}\{K_v\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}}_Q \quad (5.18)$$

De lo anterior se concluye que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ es una función semidefinida negativa y se puede concluir la **estabilidad** del origen del espacio de estados $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T \ \tilde{\theta}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n+1m}$ del sistema en lazo cerrado (4.12). También se afirma que las variables de estado \tilde{q} , $\dot{\tilde{q}}$ y $\tilde{\theta}$ están acotadas, lo que quiere decir que

$$\begin{aligned} \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} &\in \mathcal{L}_{\infty}^n \\ \tilde{\theta} &\in \mathcal{L}_{\infty}^m. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Lema de Barbalat

Hasta este momento se ha demostrado que $\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_{\infty}^n$, $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_{\infty}^m$. Para utilizar el Lema 2.1 hace falta demostrar que $\tilde{q}(t) \in \mathcal{L}_2^n$ y que $\dot{\tilde{q}}(t) \in \mathcal{L}_2^n$ para asegurar que los errores tanto de posición como de velocidad tienden a cero conforme el tiempo tiende a infinito $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t) = \mathbf{0}$.

Para esto, a partir de la desigualdad (5.18), dada por

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq - \underbrace{\begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| & 0 \\ \|\dot{\tilde{q}}\| & \lambda_{\min}\{K_v\} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{\Lambda^T K_v \Lambda\} & 0 \\ 0 & \lambda_{\min}\{K_v\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}}_Q \quad (5.20)$$

Puesto que $-\lambda_{\min}\{Q\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \leq 0$ se tiene que

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq -\lambda_{\min}\{A^T K_v A\} \|\tilde{q}\|^2 \leq 0$$

Integrando ambos términos de esta desigualdad desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ se tiene que

$$V(\tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty), \tilde{\theta}(\infty)) - V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \leq -\lambda_{\min}\{A^T K_v A\} \int_0^{\infty} \|\tilde{q}\|^2 dt$$

de donde se cumple que

$$-V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \leq -\left[\lambda_{\min}\{A^T K_v A\} \int_0^{\infty} \|\tilde{q}\|^2 dt + V(\tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty), \tilde{\theta}(\infty))\right]$$

Debido a que $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) > 0$ es una función definida positiva, entonces cuando $t \rightarrow \infty$ se sabe que $V(\tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty), \tilde{\theta}(\infty)) \geq 0$, por lo que se puede escribir

$$-V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \leq -\lambda_{\min}\{A^T K_v A\} \int_0^{\infty} \|\tilde{q}\|^2 dt$$

Esto conlleva a que se pueda definir una cota superior para la integral cuadrática del vector de errores de una manera dada por

$$\frac{V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{A^T K_v A\}} \geq \int_0^{\infty} \|\tilde{q}\|^2 dt \quad (5.21)$$

Debido a esto, se tiene que

$$\frac{V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{A^T K_v A\}} \geq \int_0^{\infty} \|\tilde{q}(t)\|^2 dt \quad (5.22)$$

donde el lado izquierdo de esta desigualdad es una constante finita positiva, lo que significa que los errores de posición \tilde{q} pertenecen al espacio \mathcal{L}_2^n . Siguiendo pasos similares es posible probar que los errores de velocidad también pertenecen al espacio $\dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_2^n$.

De acuerdo al Lema 2.1, estas características bastan para probar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q} = 0 \quad (5.23)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}} = 0 \quad (5.24)$$

ya que $\ddot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_\infty^n$ también.

Por lo tanto la convergencia de los errores de posición y velocidad a cero.

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Principio de Invariancia de LaSalle

De acuerdo a las afirmaciones anteriores (5.19), se puede utilizar el Teorema 2.4 para sistemas no autónomos, por lo que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (5.11) están dentro del conjunto:

$$\Omega_0 = \left\{ \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^m : V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) \leq V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0)) \right\}. \quad (5.25)$$

La bola Ω'_0 dada por:

$$\Omega'_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : \left\| \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{q}} + A\tilde{q}\| \\ \|\tilde{q}\| \\ \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P\}}} \right\},$$

está contenida en Ω_0 , es decir, $\Omega'_0 \subset \Omega_0$.

En este punto es requerido definir el dominio Ω donde $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = 0$ como

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : W(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = 0 \right\}$$

con

$$W(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = -\gamma \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| & \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}$$

y Q dada en (5.20). Es decir,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m}, \text{ con } \|\tilde{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P\}}} \right\}$$

Los estados del sistema de lazo cerrado (5.11) tienden de manera última (cuando $t \rightarrow \infty$) al conjunto $\Omega_f = \Omega_0 \cap \Omega$, definido por

$$\Omega_f = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m} : \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m}, \text{ con } \|\tilde{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0), \tilde{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P\}}} \right\} \quad (5.26)$$

A partir del análisis llevado a cabo anteriormente, se concluye que las soluciones tienden al máximo conjunto invariante dado por (4.21); es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ (convergencia de los errores de posición y velocidad a cero), además el vector de errores paramétricos es acotado para todo $t \geq 0$.

Si se tiene que $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sea de excitación persistente, el error paramétrico $\tilde{\theta}^*$ convergerá a cero, con lo que se alcanzaría una estabilidad asintóticamente estable en forma global (ver [Loría et al., 2002] y [Loría et al., 2005]).

5.2. Resultados en simulación

Con el uso de MATLAB[®] y de la interfaz visual de usuario que se desarrolló, y a manera de ilustración de los resultados de análisis de estabilidad, se muestran algunas simulaciones numéricas donde se puede observar que los errores de posición tienden a cero y los parámetros estimados están acotados (los cuales están dados por $\theta_1 = m_2$ y

$b_2 = m_2 l_{c2}$) utilizando la ley de adaptación (5.8), y ganancias proporcionales y derivativas dadas por

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{200, 150\} \text{ Nm/rad}, \\ K_v &= \text{diag}\{3, 3\} \text{ Nm/rad}, \end{aligned}$$

y la matriz de ganancias de parámetros adaptables como

$$\Gamma = \text{diag}\{1.6 \text{ kg s}^2/\text{m}, 0.004 \text{ kg s}^2, 0.004 \text{ kg m}^2 \text{ s}^2\}.$$

Se consideran las referencias de posición dadas por:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} [1 - e^{-2t^3}] + \frac{\pi}{9} [1 - e^{-2t^3}] \text{sen}(\omega_1 t) \\ \frac{\pi}{8} [1 - e^{-2t^3}] + \frac{\pi}{6} [1 - e^{-2t^3}] \text{sen}(\omega_2 t) \end{bmatrix} \text{ [rad]} \quad (5.27)$$

con $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$ y $\omega_2 = 3 \text{ rad/s}$.

Las condiciones iniciales correspondientes tanto para las posiciones y velocidades articulares así como para los parámetros a adaptar fueron $q(0) = \mathbf{0}$, $\dot{q}(0) = \mathbf{0}$ y $\hat{\theta}(0) = \mathbf{0}$.

En las Figuras 5.1 y 5.2 se muestran los seguimientos de las trayectorias $q_1(t)$ y $q_2(t)$ para las trayectorias dadas por (5.27). Los errores de posición se muestran en la Figura 5.3, donde se aprecia la convergencia de los errores de posición y velocidad a cero. En la Figura 5.4 se observa como los parámetros a adaptar por la ley de adaptación (5.8) permanecen acotados para todo $t \geq 0$.

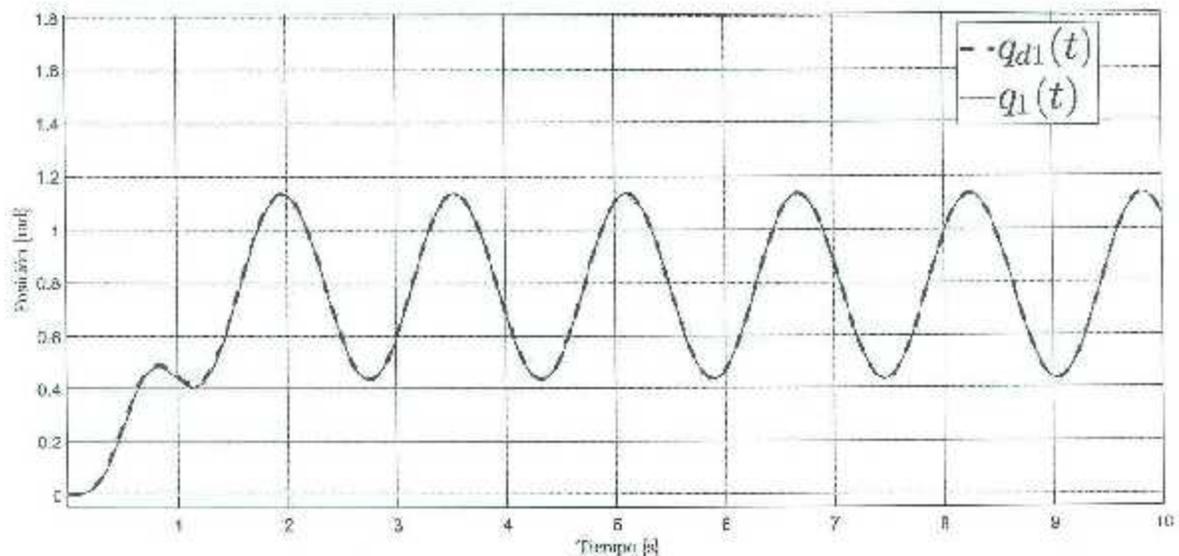


Figura 5.1: Gráfica donde se presenta el seguimiento de trayectoria para q_1 utilizando el controlador Slotine-Li.

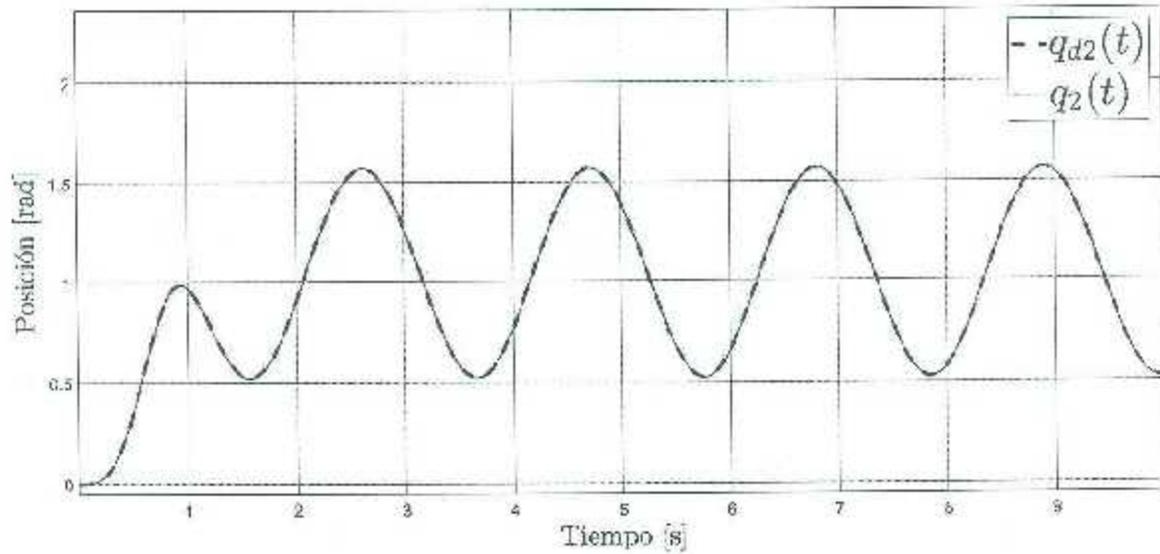


Figura 5.2: Gráfica donde se presenta el seguimiento de trayectoria para q_2 utilizando el controlador Slotine-Li.

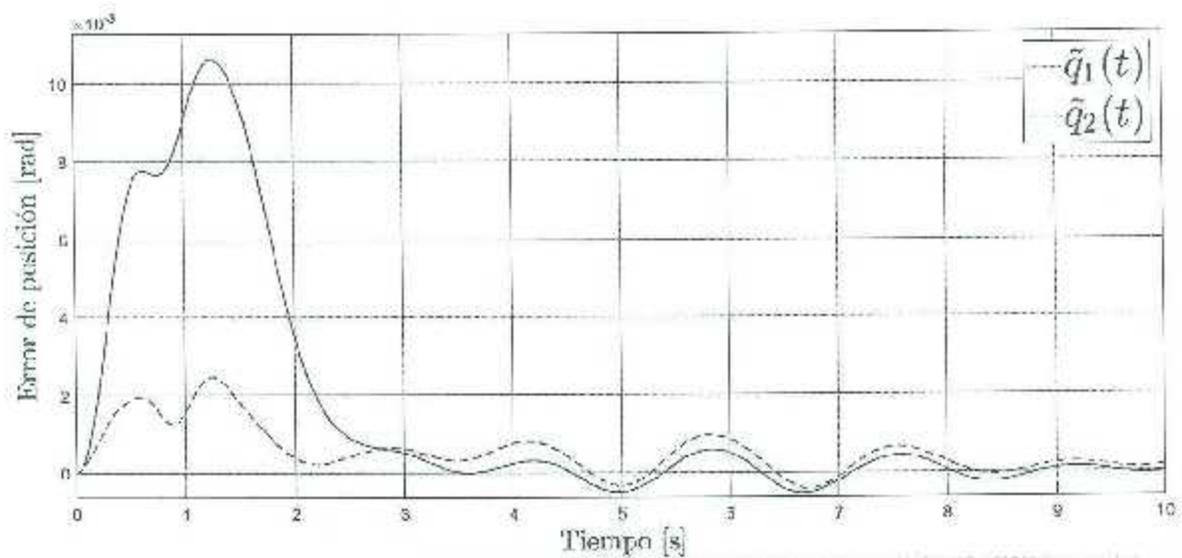


Figura 5.3: Errores de posición para las articulaciones 1 y 2 utilizando el controlador Slotine-Li.

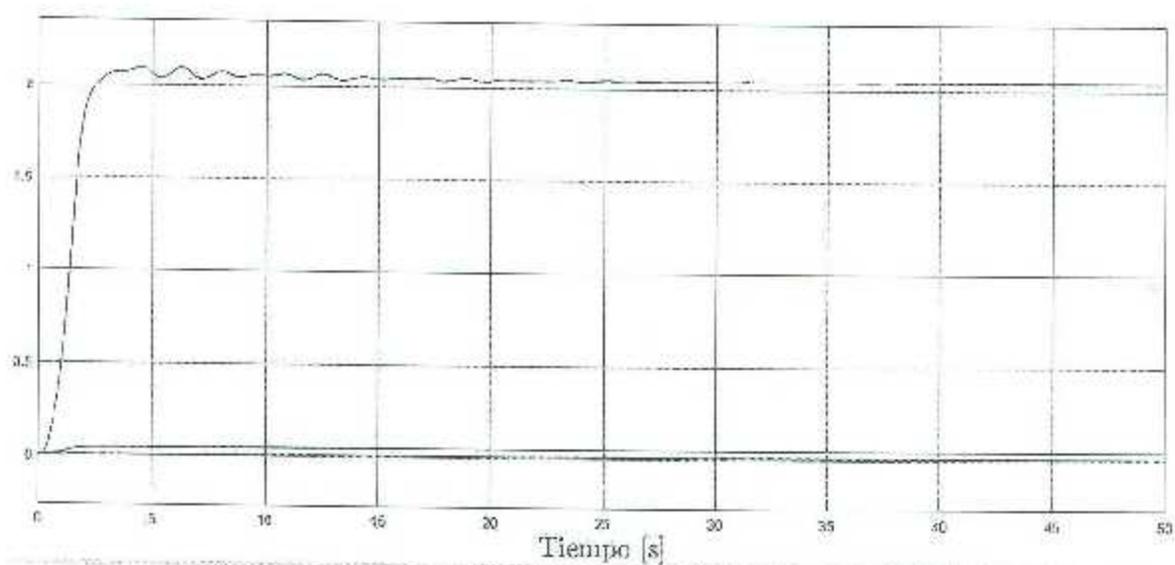


Figura 5.4: Parámetros a adaptar utilizando el controlador Slotine-Li.

Capítulo 6

Controlador con realimentación de salida adaptable

Este capítulo presenta el análisis de estabilidad y convergencia del error de seguimiento de trayectorias de posición a cero del controlador presentado en [Moreno-Valenzuela *et al.*, 2010].

El problema de seguimiento de posición de realimentación de salida ha sido un tema de considerable interés. Aunque la posición de una articulación de un robot puede ser medida con precisión, la medida de su velocidad y de su aceleración tiende a resultar en señales ruidosas. Desde un punto de vista práctico, estas señales pueden ser tan ruidosas que su uso en la ley de control deja de ser útil. El objetivo de un controlador con realimentación de salida es eliminar la necesidad de mediciones de velocidad. [Zhang *et al.*, 2000]

El problema del control de seguimiento por realimentación de salida presentado en este capítulo ha atraído la atención en el estado del arte durante la última década. Este controlador está motivado debido a las señales muy ruidosas obtenidas en las mediciones de velocidad y aceleración, sin embargo, desde un punto de vista teórico el problema de probar la estabilidad globalmente uniformemente y asintóticamente es bastante retador.

En el problema de control de regulación, una manera de resolver el problema es diseñar un observador que utilice la información de la posición para reconstruir la señal de velocidades articulares, luego, el controlador es implementado reemplazando las mediciones de las velocidades articulares por sus estimados. [Ortega *et al.*, 2013]

Para evitar el problema de las mediciones de velocidad ruidosas y garantizar que el error entre la posición variante en el tiempo deseada y la posición actual del sistema tienda asintóticamente a cero para un conjunto de condiciones iniciales, un esquema de control basado únicamente en las mediciones de posición puede ser utilizado. En este tipo de esquemas, el observador es utilizado para estimar la señal de velocidad, y en algunas ocasiones, la señal de aceleración articular.

Otro método consiste en utilizar la teoría de Lyapunov para diseñar un filtro en el controlador para garantizar el seguimiento de la trayectoria deseada, sin importar si la estimación de la señal de velocidad o la señal de aceleración puede ser obtenida en el sistema.

Desde un punto de vista de la ingeniería de control, el método que utiliza únicamente las mediciones de posiciones articulares, ya sea utilizando un observador o un filtro para

alcanzar el seguimiento de la trayectoria articular deseada es denominada "control de seguimiento con realimentación de salida."

El problema del control de seguimiento por realimentación de salida adaptable de robots manipuladores consiste en diseñar un algoritmo de control junto con una ley adaptable para la estimación paramétrica utilizando solamente las mediciones de posición articular, de manera que el error entre la posición deseada variante en el tiempo y la posición del sistema se acerque asintóticamente a cero para cualquier conjunto de condiciones iniciales.

Considerando el modelo dinámico de una cadena de un robot manipulador de n eslabones de un robot manipulador en espacio articular, tomando en cuenta términos asociados a la fricción viscosa en las articulaciones del robot manipulador puede ser escrito como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F_v \dot{q} = \tau \quad (6.1)$$

donde $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercias simétrica y definida positiva, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $F_v \in \mathbb{R}^n$ es una matriz diagonal definida positiva y constante que contiene los coeficientes debidos a la fricción viscosa, $g(q)$ es el vector de pares gravitacionales y $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de entrada.

Además, para un robot manipulador de n grados de libertad hay n motores de DC que entregan el par a cada articulación. En este capítulo se considera que los motores de DC están operados por un servo amplificador en modo de corriente, lo que hace que la entrada de corriente al motor tienda a la corriente deseada en muy poco tiempo. Es decir, el lazo de corriente del servo amplificador es sintonizado de tal manera que la dinámica eléctrica se vuelva mucho menos dominante a comparación de la dinámica mecánica.

Los pares en las articulaciones están relacionados a la corriente del motor de cada articulación como

$$\tau = K_m i_m$$

donde $i_m \in \mathbb{R}^n$ es el vector de corrientes del motor en cada articulación y $K_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal que contiene los pares constantes del motor, los cuales son difíciles de estimar. Utilizando servo amplificadores configurados en modo de corriente, se puede considerar que la corriente real es igual a la corriente deseada como

$$i_m = i_d = K_{sa} u$$

donde $i_d(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de corrientes del motor deseadas, $K_{sa} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal que contiene las ganancias del servo amplificador, las cuales son definidas por el usuario y $u(t)$ es el vector de voltajes de entrada de los servo amplificadores. Por lo tanto los pares de salida del motor de DC están dados por

$$\tau(t) = K_m K_{sa} u(t) = K u(t) \quad (6.2)$$

y los actuadores pueden ser modelados como fuentes de par ideales.

Además, se supone que la matriz K de conversión de voltaje a torque satisface que

$$K = kI \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k > 0$$

El modelo del robot manipulador puede ser reescrito como

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \bar{g}(q) + \bar{F}_v \dot{q} = u \quad (6.3)$$

donde la matriz $\bar{M} = K^{-1}M$, $\bar{C} = K^{-1}C$, $F_v = K^{-1}F_v$ y el vector $\bar{g} = K^{-1}g$. En el modelo dinámico del robot (6.3) el vector de voltajes de los servo amplificadores $u(t) \in \mathbb{R}^n$ es considerado como la entrada de control [Moreno-Valenzuela *et al.*, 2010]. También se supone que el amortiguamiento debido a la fricción viscosa dado por la matriz F_v satisface

$$\lambda_{\min}\{\bar{F}_v\} > k_{C1} \mu_1 \quad (6.4)$$

donde μ_1 satisface que $\|\dot{q}_d(t)\| \leq \mu_1$, y k_{C1} satisface la Propiedad 2.11, la matriz de ganancias proporcionales K_p es tal que su valor propio más pequeño es suficientemente grande, y una ganancia ϵ adecuadamente seleccionada.

También se supone que la constante k_g satisface la Propiedad 2.16, es decir

$$k_g \geq n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial \bar{g}_i(q)}{\partial q_j} \right| \right].$$

Además, se definen algunas constantes relacionadas con las propiedades del modelo del robot que pueden ser obtenidas como se muestra a continuación [Kelly *et al.*, 2006]

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial \bar{M}_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right], \quad (6.5)$$

$$k_{C2} \geq n^3 \left[\max_{i,j,k,l,q} \left| \frac{\partial \bar{c}_{ijkl}(q)}{\partial q_l} \right| \right], \quad (6.6)$$

$$k_1 \geq \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \|\bar{g}(q)\|, \quad (6.7)$$

$$k_2 \geq \lambda_{\max}\{\bar{M}(q)\}, \quad (6.8)$$

donde $\bar{M}_{ij}(q)$ es el elemento ij de la matriz $\bar{M}(q)$, $\bar{c}_{ijkl}(q)$ es el símbolo de Christoffel $ijkl$ y $\bar{g}_i(q)$ es el elemento i del vector $\bar{g}(q)$.

La entrada de control está dada por

$$u = K_p \tanh(\sigma \bar{q}) + K_v \tanh(\bar{\vartheta}) + \Phi(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \hat{\theta} \quad (6.9)$$

donde $\bar{q}(t) = q_d(t) - q(t)$ representa el error de posición, y las matrices $K_p = K_p^T > 0$ y $K_v = K_v^T > 0$ son matrices diagonales simétricas de dimensiones $n \times n$ definidas positivas y la constante $\sigma > 0$. La señal $\bar{\vartheta}(t)$ utilizada en la ley de control (6.9) se obtiene utilizando un filtro no lineal, dado por las ecuaciones (6.10)-(6.11) como

$$\dot{\bar{\vartheta}} = -A \tanh(\bar{\vartheta}), \quad (6.10)$$

$$\bar{\vartheta} = x + B \bar{q}, \quad (6.11)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, y las matrices $A > 0$ y $B > 0$ son de dimensiones $n \times n$ definidas positivas.

La ley de adaptación está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma_a \left\{ \Phi^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \bar{q} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left[\hat{\Phi}^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \bar{q} - \epsilon \bar{\Phi}^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \tanh(\sigma \bar{q}) \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$= -\Gamma_a \left\{ \int_0^t \left[\Phi^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \hat{\bar{q}} - \epsilon \bar{\Phi}^T(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \tanh(\sigma \bar{q}) \right] dt \right\} \quad (6.13)$$

con la matriz de ganancias adaptables $\Gamma_a > 0$ siendo definida positiva y la constante positiva $\epsilon \in (\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max})$.

Además, se considera que el vector de las trayectorias articulares deseadas $q_d(t)$ es continuamente diferenciable y esté acotado para todo $t \geq 0$ de la siguiente manera

$$\|\dot{q}_d(t)\| \leq \mu_1, \quad (6.14)$$

$$\|\ddot{q}_d(t)\| \leq \mu_2, \quad (6.15)$$

donde $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 > 0$ son constantes positivas.

Cabe resaltar que la ley de control (6.9) no requiere el conocimiento de las velocidades articulares $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, en su lugar se utiliza el filtro no lineal (6.10)-(6.11) para obtener la señal de error de las velocidades articulares $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$.

La ecuación de estados en lazo cerrado puede ser obtenida sustituyendo la ley de control (6.9) en la ecuación (6.2), utilizando la propiedad 2.18 para el modelo dinámico, diferenciando (6.11) temporalmente, y utilizando la definición $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$, cuya derivada temporal está dada por $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$, obteniendo la ecuación de estados en lazo cerrado de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{M}^{-1} \left[\bar{C} \dot{\tilde{q}} + \bar{F}_v \dot{\tilde{q}} + K_v \tanh(\sigma \tilde{v}) + K_p \tanh(\sigma \tilde{q}) + \bar{h} - \Phi \tilde{\theta} \right] \\ - \left[A \tanh(\sigma \tilde{v}) - B \dot{\tilde{q}} \right] \\ -\Gamma_a \Phi^T \left[\dot{\tilde{q}} + \epsilon \tanh(\sigma \tilde{q}) \right] \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

donde $\bar{M}^{-1} = \bar{M}^{-1}(q)$, $\bar{C} = C(q, \dot{q})$, $\Phi = \Phi(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$, y el vector $\bar{h} = \bar{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ es la dinámica residual del sistema (ver Apéndice C) que está dado por

$$\bar{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \left[\bar{M}(q_d) - \bar{M}(q) \right] \ddot{q}_d + \left[C(q_d, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}_d + \left[\bar{g}(q_d) - \bar{g}(q) \right]. \quad (6.17)$$

y la norma $\|\bar{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\|$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|\bar{h}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\| \leq k_C \mu_1 \|\dot{\tilde{q}}\| + \frac{2(k_1 + k_2 \mu_2 + k_C \mu_2^2)}{\tanh(\alpha \sigma)} \|\tanh(\sigma \tilde{q})\|. \quad (6.18)$$

La ecuación del sistema en lazo cerrado (6.16) es una ecuación no lineal y no autónoma y el origen en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3n+m}$$

es un punto de equilibrio. [Moreno-Valenzuela et al., 2010]

Propiedades del modelo del robot

El sistema de control puede ser diseñado fácilmente con algunas suposiciones fundamentales que se mencionan a continuación.

Suposición 6.1. El producto de la matriz inversa del motor y del servo amplificador K^{-1} y la matriz de inercias $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva, es decir

$$\mathbf{x}^T \bar{M}(\mathbf{q}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T K^{-1} M(\mathbf{q}) \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (6.19)$$

Si se utiliza la parte simétrica de la matriz $\bar{M}(\mathbf{q})$, la suposición (6.19) puede ser escrita como

$$\mathbf{x}^T \bar{M}(\mathbf{q}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \bar{M}^s(\mathbf{q}) \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (6.20)$$

donde

$$\bar{M}^s(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} [\bar{M}(\mathbf{q}) + \bar{M}^T(\mathbf{q})] \quad (6.21)$$

La matriz de inercias $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en el modelo (6.1) es simétrica y definida positiva. La suposición 6.1 establece que si los motores de DC y los servo amplificadores tienen características diferentes, la matriz $\bar{M}(\mathbf{q}) = K^{-1} M(\mathbf{q})$ no será simétrica pero será definida positiva. Desde un punto de vista práctico, la suposición 6.1 debería ser más una propiedad que una suposición.

6.1. Análisis de estabilidad

A continuación se muestra el análisis de estabilidad. Éste pretende demostrar la estabilidad del punto de equilibrio ubicado en el origen dado por $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T]^T = \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$.

Proposición 6.1. Considere el sistema en lazo cerrado (6.16). El equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T]^T = \mathbf{0}^T \in \mathbb{R}^{2n+2m}$ es estable y el $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$.

Prueba. Se utiliza la siguiente función candidata de Lyapunov [Moreno-Valenzuela *et al.*, 2010]

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \bar{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \sum_{i=1}^n k_{\sigma} b_i^{-1} \ln(\cosh(\tilde{\theta}_i)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n k_{\sigma} \sigma^{-1} \ln(\cosh(\sigma \tilde{q}_i)) + c \tanh^2(\tau \tilde{\mathbf{q}}) \bar{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma_{\sigma}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Positividad definida de $V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\vartheta}, \dot{\tilde{\theta}})$

Utilizando la Propiedad 2.6 se puede encontrar una cota inferior a cada uno de los términos de la función candidata de Lyapunov dada en (6.22) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\bar{M}^*(q)\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2, \\ \sum_{i=1}^n k_{\eta_i} b_i^{-1} \ln(\cosh(\tilde{\vartheta}_i)) &= \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_1)\}} \\ \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_2)\}} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_n)\}} \end{bmatrix}^T K_p B^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_1)\}} \\ \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_2)\}} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_n)\}} \end{bmatrix}^T \\ &\geq \lambda_{\min}\{K_p B^{-1}\} \left\| \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta})\}} \right\|^2, \\ \sum_{i=1}^n k_{p_i} \sigma^{-1} \ln(\cosh(\sigma \tilde{q}_i)) &\geq \frac{1}{2\sigma} \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tanh(\sigma \tilde{q})\|^2, \\ \epsilon \tanh^T(\sigma \tilde{q}) \bar{M}^*(q) \dot{\tilde{q}} &\geq -\epsilon \lambda_{\max}\{\bar{M}^*(q)\} \|\tanh(\sigma \tilde{q})\| \|\dot{\tilde{q}}\| \\ \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma_a^{-1} \tilde{\theta} &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\Gamma_a^{-1}\} \|\tilde{\theta}\|^2, \end{aligned}$$

donde $\sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta})\}} := \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_1)\}} \\ \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_2)\}} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\{\cosh(\tilde{\vartheta}_n)\}} \end{bmatrix}$ y se ha usado la propiedad siguiente:

$$\sum_{i=1}^n \ln\{\cosh(z_i)\} \geq \frac{1}{2} \|\tanh(z)\|^2 \quad \forall z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T \in \mathbb{R}^n. \quad (6.23)$$

Por lo tanto, definiendo el vector η como

$$\eta = \begin{bmatrix} \|\tanh(\sigma \tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \\ \left\| \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{\vartheta}))} \right\| \\ \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix}$$

y la matriz P como

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sigma} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\frac{1}{2} \epsilon \lambda_{\max}\{\bar{M}^*(q)\} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \epsilon \lambda_{\max}\{\bar{M}^*(q)\} & \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\bar{M}^*(q)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\min}\{K_p B^{-1}\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{\Gamma_a^{-1}\} \end{bmatrix}$$

donde todos los menores principales de la matriz P son positivos, dados por

$$\begin{aligned}\det(P) &= \frac{1}{8\sigma} \lambda_{\min}\{I_a^{-1}\} \lambda_{\min}\{K_v B^{-1}\} \left(\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\} - \sigma \epsilon^2 \lambda_{\max}^2\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\} \right), \\ \det(P_{3 \times 3}) &= \frac{1}{4\sigma} \lambda_{\min}\{K_v B^{-1}\} \left(\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\} - \sigma \epsilon^2 \lambda_{\max}^2\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\} \right), \\ \det(P_{2 \times 2}) &= \frac{1}{4\sigma} \lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\} - \sigma \epsilon^2 \lambda_{\max}^2\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\}\end{aligned}$$

con una constante ϵ adecuadamente seleccionada como

$$\epsilon > \sqrt{\frac{\lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\}}{\sigma \lambda_{\max}^2\{\bar{M}^*(\mathbf{q})\}}} \quad (6.24)$$

puede decirse que

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}) \geq \boldsymbol{\eta}^T P \boldsymbol{\eta} \quad (6.25)$$

Derivada temporal de $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}})$

Derivando temporalmente la ecuación (6.22) a lo largo de las trayectorias del sistema, se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}) &= \epsilon \tanh^T(\sigma \tilde{\mathbf{q}}) \left[-\bar{F}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - K_v \tanh(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) - K_p \tanh(\sigma \tilde{\mathbf{q}}) - \bar{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \right. \\ &\quad \left. + [\bar{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] + \epsilon \sigma \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \operatorname{Sech}^2(\sigma \tilde{\mathbf{q}}) \bar{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \bar{F}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \bar{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \tanh^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) K_v B^{-1} A \tanh(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \quad (6.26)\end{aligned}$$

A partir de esta ecuación, pueden encontrarse cotas superiores para cada uno de los términos de la siguiente manera (ver detalles en [Moreno-Valenzuela *et al.*, 2010]).

$$\begin{aligned}-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \bar{F}_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &\leq -\lambda_{\min}\{\bar{F}_v\} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2, \\ -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \bar{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq k_{C_1} \mu_1 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \\ &\quad + \frac{2(k_1 + k_2 \mu_2 + k_{C_1} \mu_1^2)}{\tanh\left(\frac{2\sigma(k_1 + k_2 \mu_2 + k_{C_1} \mu_1^2)}{k_2 + k_M \mu_2 + k_{C_2} \beta_1}\right)} \|\tanh(\sigma \tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|, \\ -\tanh^T(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) K_v B^{-1} A \tanh(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) &\leq -\lambda_{\min}\{K_v B^{-1} A\} \|\tanh(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\|^2, \\ \epsilon \tanh^T(\sigma \tilde{\mathbf{q}}) [\bar{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &\leq \epsilon k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\tanh(\sigma \tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\leq \epsilon k_{C_2} \sqrt{n} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \epsilon k_{C_1} \mu_1 \|\tanh(\sigma \tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon \sigma \dot{\bar{q}}^T \operatorname{sech}^2(\sigma \bar{q}) \bar{M}(q) \dot{\bar{q}} &\leq \epsilon \sigma \|\bar{M}(q)\| \|\dot{\bar{q}}\|^2, \\
 -\epsilon \tanh(\sigma \bar{q}) K_v \tanh(\tilde{\vartheta}) &\leq \epsilon \lambda_{\max}\{K_v\} \|\tanh(\sigma \bar{q})\| \|\tanh(\tilde{\vartheta})\|, \\
 -\epsilon \tanh^T(\sigma \bar{q}) K_p \tanh(\sigma \bar{q}) &\leq -\epsilon \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tanh(\sigma \bar{q})\|^2, \\
 -\epsilon \tanh^T(\sigma \bar{q}) \bar{F}_v \dot{\bar{q}} &\leq \epsilon \lambda_{\max}\{\bar{F}_v\} \|\tanh(\sigma \bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\|, \\
 -\epsilon \tanh^T(\sigma \bar{q}) \bar{h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) &\leq \frac{2\epsilon(k_1 + k_2 \mu_2 + k_{C_1} \mu_1^2)}{\tanh\left(\frac{2\sigma(k_1 + k_2 \mu_2 + k_{C_1} \mu_1^2)}{k_p + k_{C_1} \mu_2 + k_{C_2} \mu_1^2}\right)} \|\tanh(\sigma \bar{q})\|^2 \\
 &\quad + \epsilon k_{C_1} \mu_1 \|\dot{\bar{q}}\| \|\tanh(\sigma \bar{q})\|.
 \end{aligned}$$

Definiendo estas cotas superiores para cada uno de los términos de la derivada de la función de Lyapunov, se puede escribir el vector ζ como

$$\zeta = \begin{bmatrix} \|\tanh(\sigma \bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \\ \|\tanh(\tilde{\vartheta})\| \end{bmatrix}$$

Luego, se definen las constantes

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{2(k_1 + k_2 \mu_2 + k_{C_1} \mu_1^2)}{\tanh\left(\frac{2\sigma(k_1 + k_2 \mu_2 + k_{C_1} \mu_1^2)}{k_p + k_{C_1} \mu_2 + k_{C_2} \mu_1^2}\right)} \\
 \gamma_2 &= 2k_{C_1} \mu_1 + \lambda_{\max}\{\bar{F}_v\} \\
 \gamma_3 &= k_{C_1} \sqrt{n} + \sigma \|\bar{M}(q)\|
 \end{aligned}$$

y se procede a definir la matriz Q a partir de las cotas superiores que se tienen para cada uno de los términos de la derivada de la función de Lyapunov como

$$Q = \begin{bmatrix} \epsilon [\lambda_{\min}\{K_p\} - \gamma_1] & -\frac{1}{2} [\gamma_1 + \epsilon \gamma_2] & -\frac{\epsilon}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} \\ -\frac{1}{2} [\gamma_1 + \epsilon \gamma_2] & \lambda_{\min}\{F_v\} - k_{C_1} \mu_1 - \epsilon \gamma_3 & 0 \\ -\frac{1}{2} \lambda_{\max}\{K_v\} & 0 & \lambda_{\min}\{K_v B^{-1} A\} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

A partir de estas definiciones, se puede acotar la derivada de la función de Lyapunov (6.26) como

$$\dot{V}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \tilde{\vartheta}, \dot{\tilde{\vartheta}}) \leq -\zeta^T Q \zeta. \quad (6.28)$$

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Lema de Barbalat

Debido al análisis anterior, se conoce que $\tanh(\sigma \bar{q})$, $\dot{\bar{q}}$, $\ln(\cosh(\tilde{\vartheta})) \in \mathcal{L}_{\infty}^n$ y $\tilde{\vartheta} \in \mathcal{L}_{\infty}^m$, con lo que se pudo llegar a la conclusión de estabilidad del punto de equilibrio en el origen en la ecuación de estados (6.16). Para poder utilizar el lema 2.1, se requiere que los estados y sus derivadas pertenezcan a \mathcal{L}_{∞}^n , así como que los estados sean cuadrático

integrables, es decir que pertenezcan a \mathcal{L}_2^n , y de esta manera se puede probar que dichas funciones convergen a cero conforme el tiempo tiende a infinito. Para esto, a partir de la desigualdad (6.28) se tiene que

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{\vartheta}, \dot{\tilde{\vartheta}}) \leq -\zeta^T Q \zeta \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \|\zeta\|^2. \quad (6.29)$$

Integrando ambas partes de la desigualdad (6.29), desde $t = 0$ hasta $t = \infty$, se puede ver que

$$V(\infty, \tilde{q}_{\infty}, \dot{\tilde{q}}_{\infty}, \tilde{\vartheta}_{\infty}, \dot{\tilde{\vartheta}}_{\infty}) - V(0, \tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0, \tilde{\vartheta}_0, \dot{\tilde{\vartheta}}_0) \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \int_0^{\infty} \|\zeta\|^2 d\tau \quad (6.30)$$

de donde se puede escribir

$$-V(0, \tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0, \tilde{\vartheta}_0, \dot{\tilde{\vartheta}}_0) \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \int_0^t \|\zeta\|^2 d\tau - V(\infty, \tilde{q}_{\infty}, \dot{\tilde{q}}_{\infty}, \tilde{\vartheta}_{\infty}, \dot{\tilde{\vartheta}}_{\infty}). \quad (6.31)$$

Como la función candidata de Lyapunov (6.22) es definida positiva, se puede asegurar que el término $V(\infty, \tilde{q}_{\infty}, \dot{\tilde{q}}_{\infty}, \tilde{\vartheta}_{\infty}, \dot{\tilde{\vartheta}}_{\infty}) \geq 0$, por lo tanto de la desigualdad (6.31) se llega a

$$-V(0, \tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0, \tilde{\vartheta}_0, \dot{\tilde{\vartheta}}_0) \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \int_0^t \|\zeta\|^2 d\tau \quad (6.32)$$

De esta última expresión se llega a que

$$\frac{V(0, \tilde{q}_0, \dot{\tilde{q}}_0, \tilde{\vartheta}_0, \dot{\tilde{\vartheta}}_0)}{\lambda_{\min}\{Q\}} \geq \int_0^{\infty} \|\zeta\|^2 d\tau \quad (6.33)$$

donde el lado izquierdo de la desigualdad (6.33) es una constante finita y positiva. Por lo tanto el vector $\zeta = \left[\|\tanh(\sigma \tilde{q})\| \quad \|\dot{\tilde{q}}\| \quad \|\tanh(\tilde{\vartheta})\| \right]^T$ pertenece al espacio de funciones \mathcal{L}_2^n , por lo que se cumplen las condiciones requeridas por el Lema 2.1.

Con este lema, se puede probar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(\sigma \tilde{q}) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(\tilde{\vartheta}) &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, $\tanh(\sigma \tilde{q})$ convergerá a cero solamente cuando \tilde{q} converja a cero, y también $\tanh(\tilde{\vartheta})$, de igual forma, llega a cero cuando $\tilde{\vartheta}$ llega a cero también.

De este análisis se puede concluir estabilidad y convergencia de los errores de posición y velocidad a cero.

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Principio de Invariancia de LaSalle

Utilizando las desigualdades establecidas respecto a la ecuación (6.22) que permiten llegar a la forma (6.25), se puede utilizar el Teorema 2.4, para la estabilidad de sistemas

no autónomos. Todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6.16) están contenidas dentro del conjunto

$$\Omega_0 = \left\{ \bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{\vartheta} \in \mathbb{R}^n, \bar{\theta} \in \mathbb{R}^m : V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{\vartheta}, \bar{\theta}) \leq V(\bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0), \bar{\vartheta}(0), \bar{\theta}(0)) \right\}.$$

La bola Ω'_0 dada por:

$$\Omega'_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m} : \left\| \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{\frac{2V(\bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0), \bar{\vartheta}(0), \bar{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P}\}} \right\},$$

la cual está contenida en Ω_0 , es decir $\Omega'_0 \subset \Omega_0$.

Por otra parte, el conjunto Ω donde $\dot{V}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{\vartheta}, \bar{\theta}) = 0$, es decir

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m} : W(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{\vartheta}, \bar{\theta}) = 0 \right\}$$

con

$$W(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{\vartheta}, \bar{\theta}) = \left[\|\tanh(\sigma\bar{q})\| \quad \|\dot{\bar{q}}\| \quad \|\tanh(\bar{\vartheta})\| \right] Q \begin{bmatrix} \|\tanh(\sigma\bar{q})\| \\ \|\dot{\bar{q}}\| \\ \|\tanh(\bar{\vartheta})\| \end{bmatrix}$$

y Q dada en (6.27). Es decir,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m} : \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m}, \text{ con } \|\bar{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{2V(\bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0), \bar{\vartheta}(0), \bar{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P}\}} \right\}.$$

Los estados del sistema en lazo cerrado (6.16) tienden de manera última (cuando $t \rightarrow \infty$) al conjunto $\Omega_f = \Omega_0 \cap \Omega$, definido por

$$\Omega_f = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m} : \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n+m}, \text{ con } \|\bar{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{2V(\bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0), \bar{\vartheta}(0), \bar{\theta}(0))}{\lambda_{\min}\{P}\}} \right\}.$$

A partir de estos resultados, se concluye convergencia de los errores de posición y velocidad articulares a cero, es decir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{q}, \dot{\bar{q}} = 0$, además el filtro no lineal para estimar la señal del vector de errores de velocidades articulares cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\vartheta} = 0$ y el vector de errores de estimación paramétrica es tal que

$$\bar{\theta} : \|\bar{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{2V(t_0, \bar{q}_0, \dot{\bar{q}}_0, \bar{\vartheta}_0, \bar{\theta}_0)}{\lambda_{\min}\{F_u^{-1}\}}}$$

Tabla 6.1: Parámetros estimados del modelo dinámico del brazo robótico planar de dos grados de libertad, ubicado en el centro de investigación CITEDI-IPN.

Parámetro	Valor	Unidades
θ_1	0.0480	$s^2 \text{ V/rad}$
θ_2	0.0038	$s^2 \text{ V/rad}$
θ_3	0.0033	$s^2 \text{ V/rad}$
θ_4	0.0157	$s^2 \text{ V/rad}$
θ_5	0.0227	$s^2 \text{ V/rad}$
θ_6	0.0166	$s^2 \text{ V/rad}$
θ_7	0.0141	V s/rad
θ_8	0.0139	V s/rad

entonces el origen de la ecuación diferencial no lineal y no autónoma (6.16) será estable en forma global.

Sin embargo, si a partir de la ley de adaptación (6.12) se puede concluir que la matriz de regresión $\Phi(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))$ cumple con ser una matriz de excitación persistente, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t)) \tilde{\theta}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, y el análisis de estabilidad cumplirá con las condiciones necesarias para concluir que el origen de la ecuación de estados en lazo cerrado asintóticamente estable en forma global (ver [Loría *et al.*, 2002] y [Loría *et al.*, 2005]).

6.2. Resultados en simulación

A manera de ilustración de los resultados del análisis de estabilidad se muestran algunas simulaciones numéricas. Se utilizó el modelo dinámico de un robot planar de dos grados de libertad que fue construido en el centro de investigación CITEDI-IPN. El sistema está compuesto de dos motores de DC *Pittman* en modo de corriente con dos servos amplificadores *Advance Motion Controls*.

El modelo dinámico del robot está dado por

$$M(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 - \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_4 + \theta_5 \cos(q_2) & \theta_6 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$(6.35)$$

$$\bar{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ \theta_5 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$(6.37)$$

$$\bar{F}_v = \text{diag}\{\theta_7, \theta_8\} \quad (6.38)$$

Los coeficientes numéricos involucrados en el modelo del robot (6.34)-(6.38) son mostrados en la Tabla 6.1.

Las trayectorias de posición deseadas para las articulaciones 1 y 2 se seleccionaron como

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \text{sen}(3.5t) \left[1 - e^{-t^2/20} \right] \\ \text{sen}(3.5t) \left[1 - e^{-t^2/20} \right] \end{bmatrix} \text{ rad} \quad (6.39)$$

la cual es una trayectoria sin cambios abruptos en su posición, velocidad y aceleración. Las ganancias proporcionales y derivativas están dadas por

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{0.4, 0.4\} \text{ Nm/rad}, \\ K_v &= \text{diag}\{7, 10\} \text{ Nm/rad}, \end{aligned}$$

y la matriz de ganancias de los parámetros adaptables quedó definida por

$$\Gamma = \text{diag}\{0.1, 0.02, 0.025, 0.002, 0.03, 0.04, 0.01, 0.01\}.$$

Las condiciones iniciales correspondientes tanto para las posiciones y velocidades articulares así como para los parámetros a adaptar fueron $q_1(0) = 0 \text{ rad}$, $q_2(0) = \pi/4 \text{ rad}$, $\dot{q}_1(0) = 0 \text{ rad/s}$, $\dot{q}_2(0) = 0 \text{ rad/s}$ y $\hat{\theta}(0) = \mathbf{0}$.

Con ayuda de MATLAB[®] y de la interfaz visual de usuario (GUI) se obtuvieron los siguientes resultados. En las Figuras 6.1 y 6.2 se muestran los seguimientos de las trayectorias $q_1(t)$ y $q_2(t)$ para la referencia (6.39). Las Figuras 6.3 y 6.4 muestran los errores de posición para los eslabones 1 y 2, respectivamente. En el caso de los parámetros adaptables, la Figura 6.5 muestra como se mantienen acotados para todo $t \geq 0$.

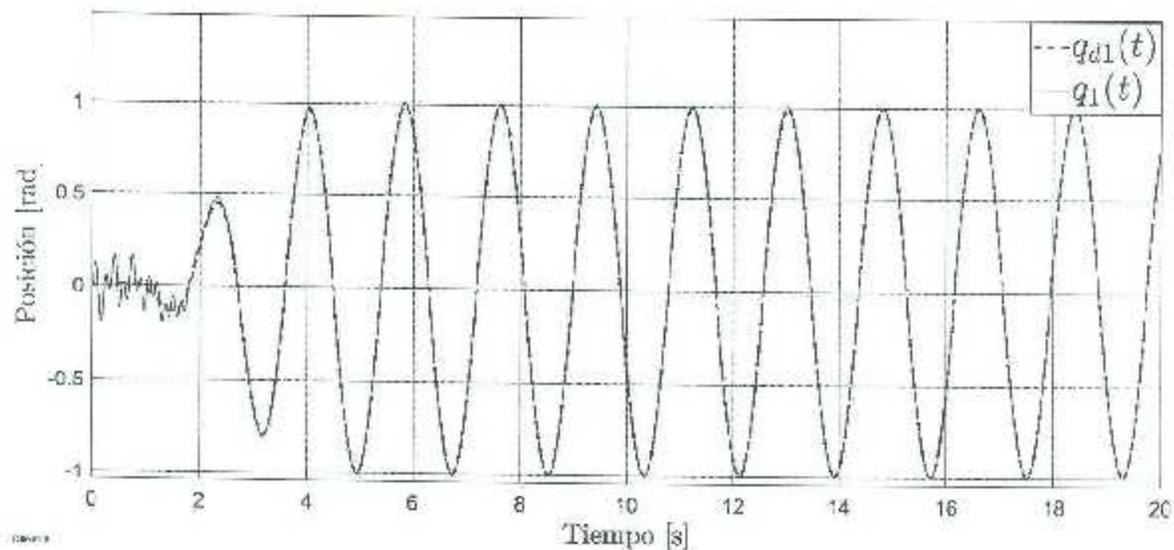


Figura 6.1: Seguimiento de posición de $q_1(t)$ a $q_{d1}(t)$.

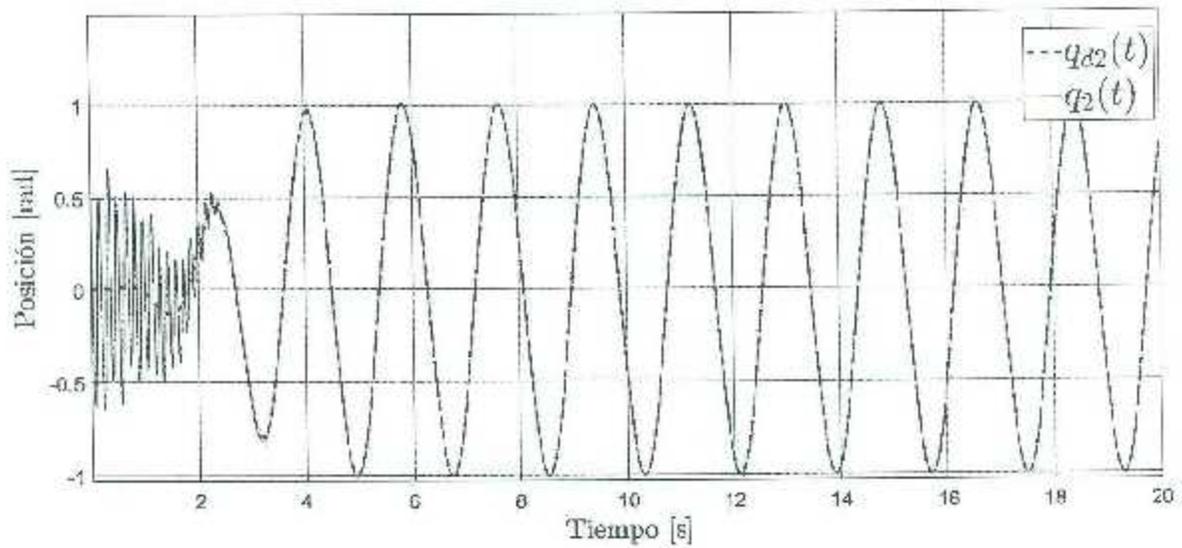


Figura 6.2: Seguimiento de posición de $q_2(t)$ a $q_{d2}(t)$.

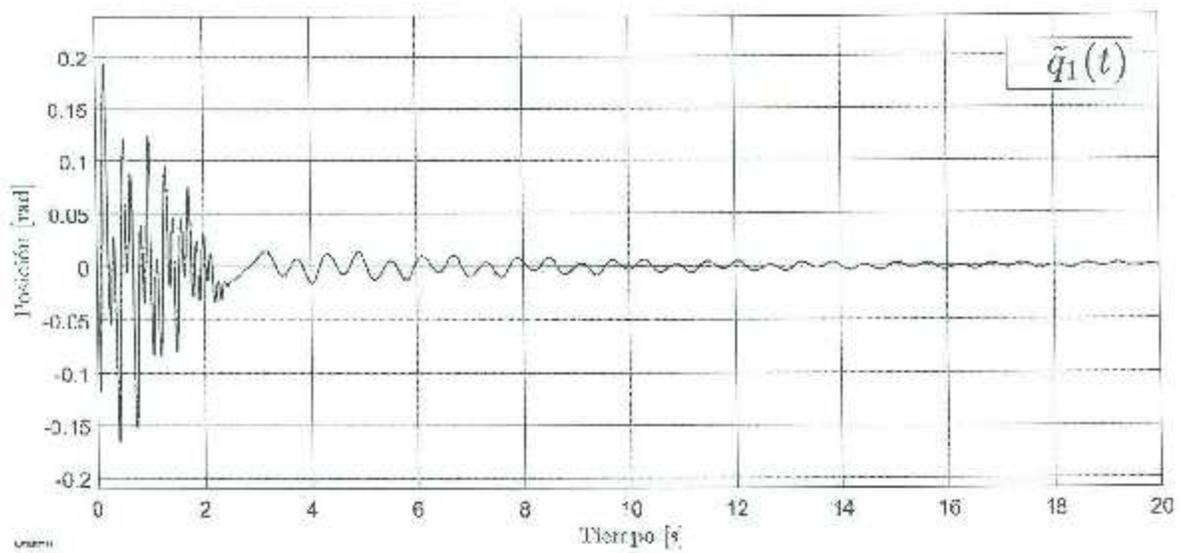


Figura 6.3: Error de posición $\tilde{q}_1(t)$.

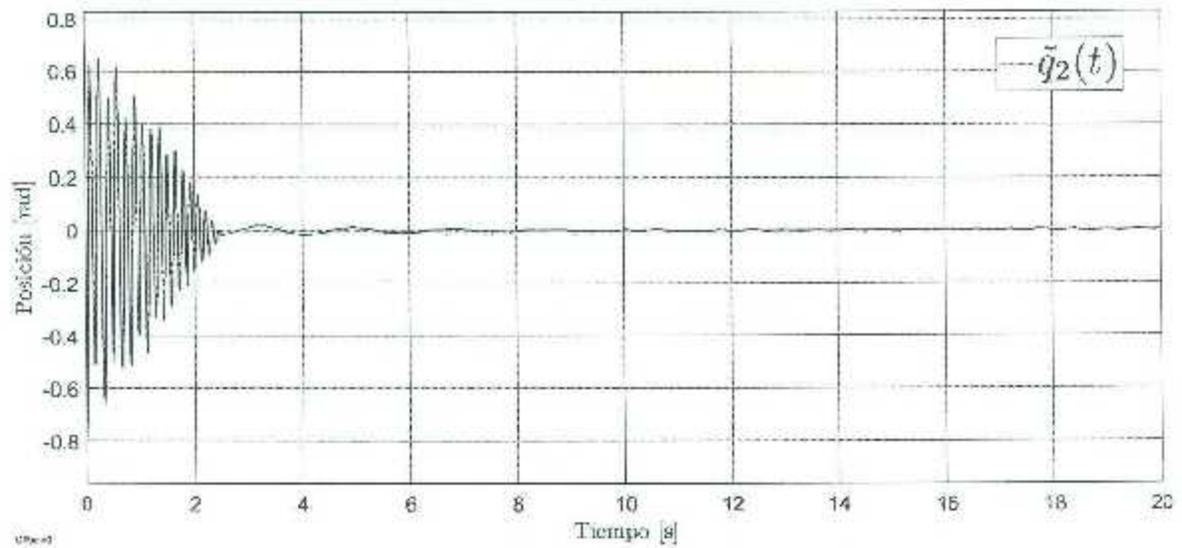


Figura 6.4: Error de posición $\tilde{q}_2(t)$.

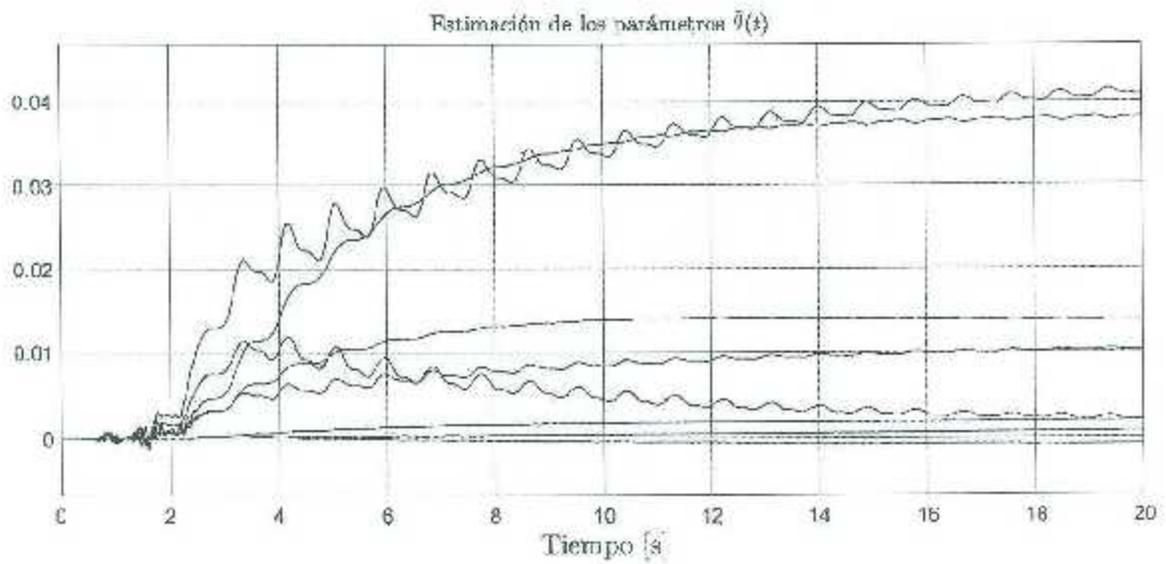


Figura 6.5: Estimaciones paramétricas de $\hat{\theta}(t)$.

Capítulo 7

Controlador por redes neuronales adaptable

El control robusto consiste en el diseño de estrategias de control donde se utiliza poca información del modelo del sistema y se considera que éste puede ser afectado por perturbaciones acotadas. Los controladores robustos pueden ser diseñados para satisfacer el objetivo de control, que puede ser regulación a un punto deseado, o el seguimiento de una trayectoria deseada. Por esto mismo, en los últimos años ha habido interés teórico y práctico en el estudio de las arquitecturas de control robusto. En esta clase de controladores, las redes neuronales adaptables han sido utilizadas en el diseño de controladores robustos para sistemas electromecánicos. [Puga-Guzmán *et al.*, 2014]

Introducción a las redes neuronales

Las redes neuronales artificiales están modeladas a partir de procesos biológicos para el procesamiento de información, incluyendo específicamente el sistema nervioso y su unidad básica, la neurona. Las señales son propagadas en forma de diferencias de potencial entre el interior y el exterior de las células.

La representación visual del modelo matemático de una neurona se muestra en la figura 7.1, la cual muestra los pesos de las dendritas v_j , el disparo de umbral v_0 , la suma de las señales de pesos de entrada, y la función no lineal $\sigma(\cdot)$. Las señales de entrada son las n señales en el instante de tiempo t dadas por $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ y la salida escalar $y(t)$, la cual puede ser expresada como

$$y(t) = \sigma \left(\sum_{j=1}^n v_j x_j(t) + v_0 \right) \quad (7.1)$$

Los pesos positivos v_j corresponden a la sinapsis de excitación y los pesos negativos a la sinapsis inhibitoria. Esta red fue llamada perceptrón por Rosenblatt en 1959.

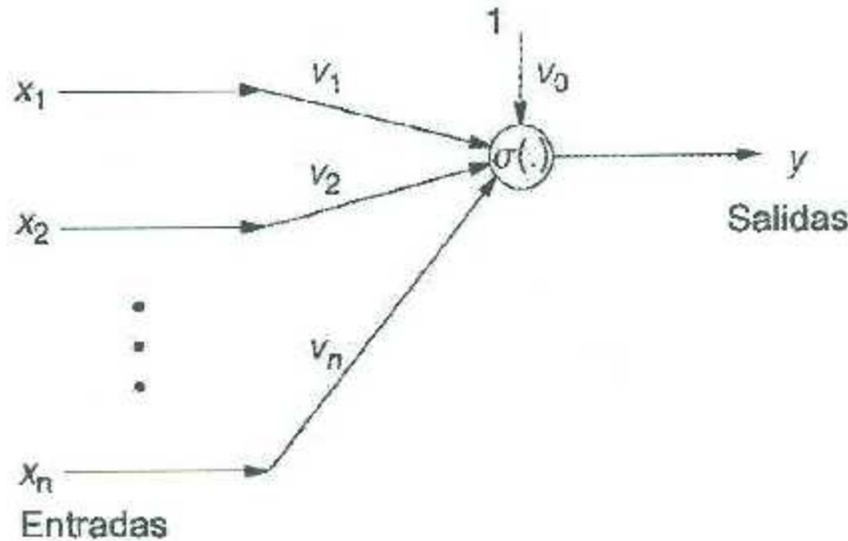


Figura 7.1: Modelo matemático de una neurona.

Perceptrón de una capa

La función no lineal de la célula $\sigma(\cdot)$ es conocida como **función de activación**. Las funciones de activación son seleccionadas de manera específica para cada aplicación, aunque algunas elecciones comunes se ilustran en la Figura 7.2. El propósito de la función de activación es modelar el comportamiento no lineal de la célula donde no hay ninguna salida debajo de cierto valor del argumento. Las funciones sigmoideas son una clase general de funciones monótonicamente no decrecientes tomando valores acotados entre $-\infty$ y $+\infty$. Para muchos algoritmos de entrenamiento de redes neuronales la derivada de $\sigma(\cdot)$ es necesaria para que la función de activación seleccionada debe ser diferenciable [Sarangapani, 2006],

La expresión para la salida de la neurona $y(t)$ para los pesos de las redes neuronales $v(t) \in \mathbb{R}^n$ puede ser escrita como

$$y = \sigma(\bar{v}^T \bar{x}) + v_0 \quad (7.2)$$

donde

$$\bar{x}(t) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T, \quad \bar{v}(t) = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]^{-T}. \quad (7.3)$$

Definiendo el vector de entrada aumentado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y el vector de pesos de la red neuronal aumentado $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ como

$$\mathbf{x}(t) = [1 \ x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \quad (7.4)$$

$$\mathbf{v}(t) = [v_0 \ v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]^T \quad (7.5)$$

se puede escribir

$$y = \sigma(\mathbf{v}^T \mathbf{x}). \quad (7.6)$$

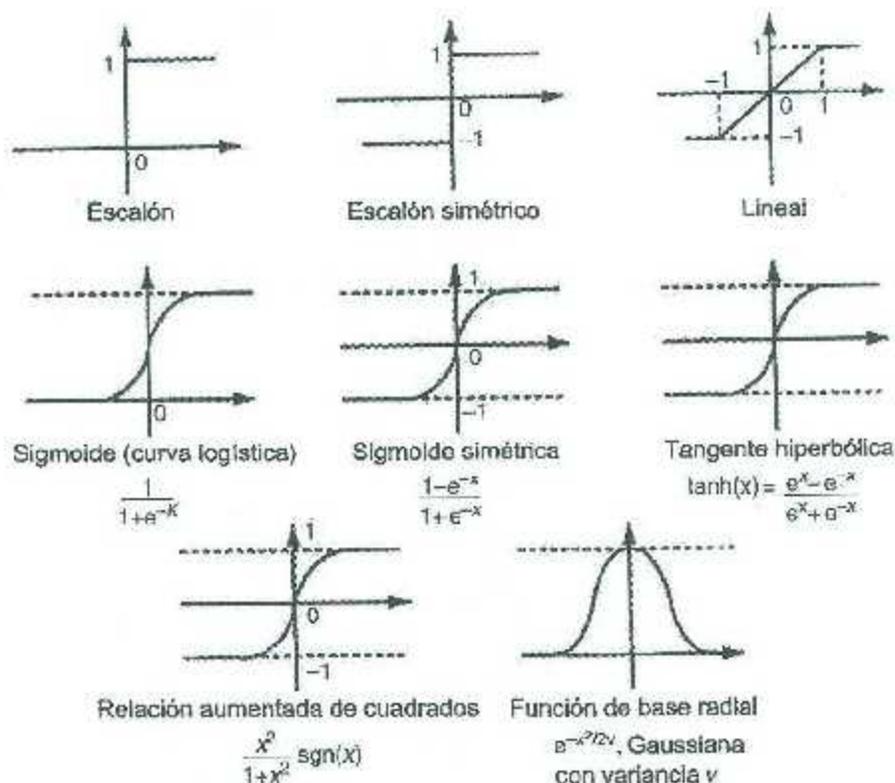


Figura 7.2: Elecciones comunes de funciones de activación.

La expresión del vector de salida de la neurona $y(t)$ es el mecanismo de recuerdo de la neurona. Éstas describen cómo la salida es reconstruida a partir de las señales de entrada y los valores paramétricos de la neurona.

La figura 7.3 muestra una red neuronal que consiste de L células, todas alimentadas a partir de las mismas señales de entrada $x_j(t)$ y produciendo una sola salida $y_l(t)$ por neurona. Ésta es una red neuronal de una sola capa. La ecuación de memoria de esta red neuronal está dada por

$$y_l(t) = \sigma \left(\sum_{j=1}^n v_{lj} x_j(t) + v_{l0} \right); \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (7.7)$$

En este punto es conveniente escribir los pesos y los umbrales en forma de matriz y de vector, respectivamente. Se definen la matriz de pesos y el vector de umbrales como

$$\bar{V}^T = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{L1} & v_{L2} & \dots & v_{Ln} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \\ \vdots \\ v_{L0} \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

Por lo que el vector de salida $\mathbf{y}(t) = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_L]^T$ es definido como

$$\mathbf{y} = \bar{\sigma}(\bar{V}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}_v)$$

El vector de las funciones de activación está definido para un vector $w \equiv [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_L]^T$ como

$$\bar{\sigma}(w) \equiv [\sigma(w_1) \ \sigma(w_2) \ \dots \ \sigma(w_L)]^T \quad (7.9)$$

Además se puede añadir el vector de umbrales como la primera columna de la matriz de pesos aumentada como

$$V^T \equiv \begin{bmatrix} v_{10} & v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{20} & v_{21} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{L0} & v_{L1} & \dots & v_{Ln} \end{bmatrix}$$

Entonces, las salidas de la red neuronal pueden ser expresadas en términos del vector de entradas aumentado $x(t)$ como

$$y = \sigma(V^T x) \quad (7.10)$$

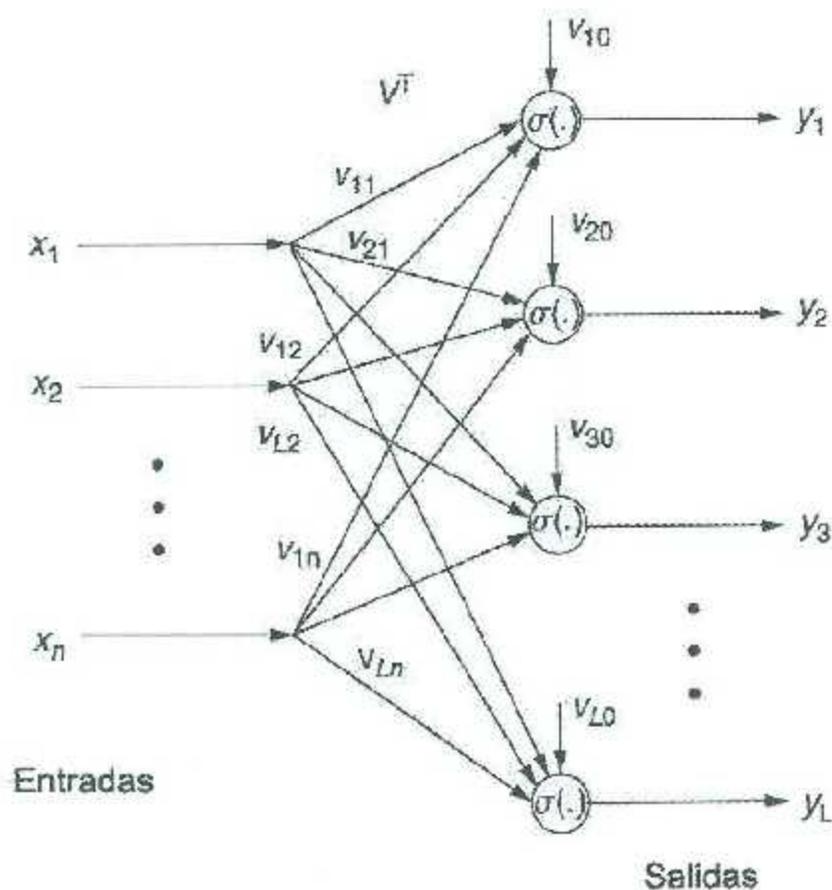


Figura 7.3: Red neuronal de una capa.

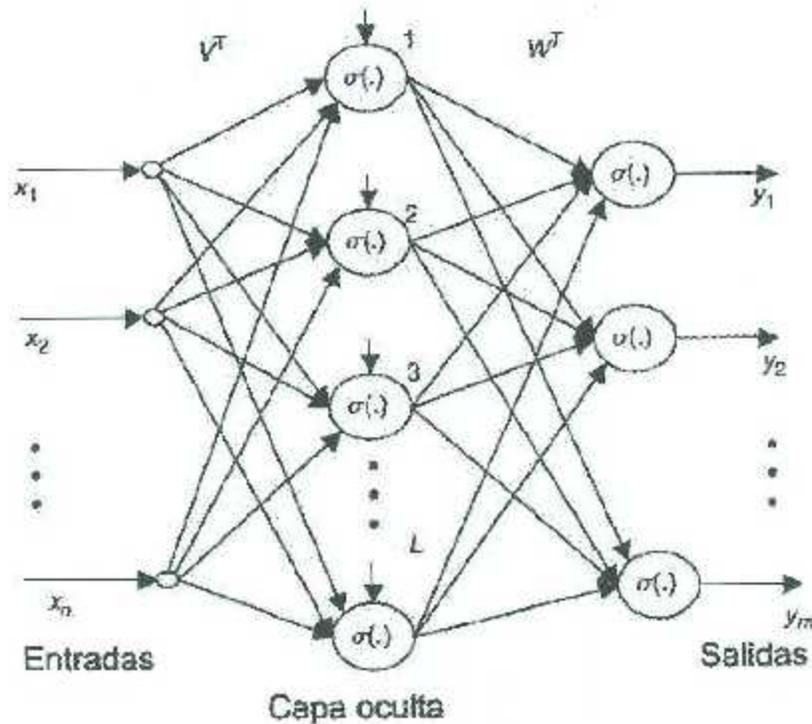


Figura 7.4: Red neuronal de dos capas.

Perceptrón de dos capas

Una red neuronal que tiene dos capas de neuronas, con una capa con L neuronas que proveen a una segunda capa con m neuronas, se muestra en la figura 7.4. La primera capa es conocida como la capa oculta, con l siendo el número de neuronas de la capa oculta, la segunda capa es conocida como la capa de salida. Una red neuronal con múltiples capas es llamada perceptrón de dos o más capas; su potencia computacional es mejorada significativamente en comparación con la red neuronal de una sola capa. Con una red neuronal de una sola capa es posible implementar operaciones digitales como AND, OR, y COMPLEMENT. Sin embargo, la investigación sobre redes neuronales se detuvo hace algunos años cuando se mostró que una red neuronal de una sola capa era incapaz de llevar a cabo la operación EXCLUSIVE OR, la cual es un problema básico en el diseño lógico digital. Después se demostró que una red neuronal de dos capas podía implementar la EXCLUSIVE OR (X-OR) y esto aceleró nuevamente la investigación sobre las redes neuronales en 1980. Algunos investigadores presentaron soluciones para la operación X-OR utilizando funciones de activación tipo sigmoide [Sarangapani, 2006].

La salida de una red neuronal de dos capas está dada por la ecuación de memoria

$$y_i = \sigma \left(\sum_{j=1}^L w_{ij} \sigma \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j + v_{i0} \right) + w_{i0} \right); \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.11)$$

Definiendo las salidas de la capa oculta z_i como

$$z_l = \sigma \left(\sum_{j=1}^n v_{lj} x_j + v_{l0} \right); \quad l = 1, 2, \dots, L$$

se puede escribir

$$y_i = \sigma \left(\sum_{l=1}^L w_{il} z_l + w_{i0} \right); \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.12)$$

Definiendo las matrices de pesos de la primera capa \bar{V} y V como en la sección anterior, y las matrices de pesos de la segunda capa como

$$\bar{W}^T = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1L} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2L} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mL} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_w = \begin{bmatrix} w_{10} \\ w_{20} \\ \vdots \\ w_{m0} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$W^T \equiv \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1L} \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m0} & w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mL} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

se puede escribir la salida de la red neuronal como

$$\mathbf{y} = \bar{\sigma} \left(\bar{W}^T \bar{\sigma}(V^T \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_v) + \mathbf{b}_w \right), \quad (7.15)$$

la cual también puede escribirse como

$$\mathbf{y} = \bar{\sigma} \left(W^T \sigma(V^T \mathbf{x}) \right). \quad (7.16)$$

En estas ecuaciones, el símbolo $\bar{\sigma}$ es el vector definido de acuerdo con la ecuación (7.9). En la ecuación (7.16) es recomendable utilizar el vector aumentado

$$\sigma(w) = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\sigma}^T(w) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & \sigma(w_1) & \sigma(w_2) & \dots & \sigma(w_L) \end{bmatrix}^T, \quad (7.17)$$

donde el 1 se coloca como la primera entrada para permitir la incorporación de los umbrales w_{i0} como en la primera columna de W^T . En términos del vector de salida de la capa oculta $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^L$ se puede escribir

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}} &= \sigma(V^T \mathbf{x}), \\ \mathbf{y} &= \sigma(W^T \mathbf{z}), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mathbf{z}}^T \end{bmatrix}^T$ [Sarangapani, 2006].

Por último, es importante saber que en redes neuronales con dos capas de una función de activación, la salida de la última capa está dada por

$$\mathbf{y}(t) = W^T \sigma(V^T \mathbf{x}(t)) \quad (7.18)$$

Propiedades del modelo a utilizar

Recordando la propiedad de aproximación universal de las redes neuronales, una función $f(x) : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede ser aproximada por [Lewis *et al.*, 2002]

$$f(x) = W^T \sigma(V^T x) + \epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad (7.19)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ es el vector de señales de entrada a la red neuronal, $V \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}$ y $W \in \mathbb{R}^{L \times n}$ son los pesos ideales de entrada y de salida, respectivamente, L es el número de neuronas en la capa oculta, $N+1$ es el número de señales de entrada a la red neuronal, $\sigma \in \mathbb{R}^L$ es la función de activación de la capa oculta, y $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ es el error de aproximación con

$$|\epsilon_i| \leq \phi, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.20)$$

donde $\phi > 0$.

La salida de la función de activación, $\sigma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, L$, es utilizada para definir la señal de salida de una neurona desde una combinación modificada de sus señales de entrada mediante compresión de la señal. La función σ_i usualmente toma los valores $0 \leq \sigma_i \leq 1$ o está dada tal que $-1 \leq \sigma_i \leq 1$ se cumpla.

Para este controlador se utiliza la función de activación σ_i la función tangente hiperbólica. Por lo tanto, mediante la definición $z = V^T x$, tenemos

$$\sigma(x) = [\tanh(z_1) \ \cdots \ \tanh(z_L)]^T. \quad (7.21)$$

La dinámica en el espacio articular de una cadena serial de un robot manipulador de n -eslabones, considerando la fricción, puede ser escrita como

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) + F_v \dot{q} = \tau, \quad (7.22)$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones articulares, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercias simétrica y definida positiva, $C(q, \dot{q}) \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares gravitacionales, $F_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva que contiene los coeficientes de fricción de cada articulación, y $\tau \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de entrada.

La dinámica de un robot manipulador de n -eslabones expresada en (7.22) cumple las propiedades (2.5), (2.11), (2.13), con dinámica residual (Apéndice C) dada por

$$h(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = [M(q_d) - M(q)] \ddot{q}_d + [C(q_d, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q})] \dot{q}_d + g(q_d) - g(q), \quad (7.23)$$

donde $\tilde{q} = \tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t)$ es el vector de errores de posiciones articulares y $q_d(t)$ es la trayectoria deseada que se considera acotada, junto con su primera y segunda derivadas temporales. La dinámica residual (7.23) satisface la desigualdad (C.4), la cual se repite por conveniencia a continuación

$$\|h(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\| \leq k_{h1} \|\dot{\tilde{q}}\| + k_{h2} \|\tanh(\gamma \tilde{q})\|, \quad (7.24)$$

donde k_{h1} y k_{h2} son constantes estrictamente positivas y suficientemente grandes que dependen en los parámetros del modelo del robot y $\gamma > 0$.

Al definir el vector de errores de posiciones articulares como

$$\tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t), \quad (7.25)$$

donde $q_d(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de trayectorias articulares deseadas. Los errores de estimación de pesos de la red neuronal están definidos como

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= W - \hat{W}, \\ \tilde{V} &= V - \hat{V}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

donde la matriz $V \in \mathbb{R}^{[N+1] \times L}$ representa los pesos de entrada ideales, $\hat{V} \in \mathbb{R}^{[N+1] \times L}$ representa las estimaciones de los pesos de entrada, $W \in \mathbb{R}^{L \times n}$ representa los pesos de salida ideales, y $\hat{W} \in \mathbb{R}^{L \times n}$ representa las estimaciones de los pesos de salida. Para esto se toma en cuenta la siguiente suposición:

Suposición 7.1. Supóngase que los pesos óptimos de la red neuronal V y W están acotados en todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n , es decir

$$\|\Theta\| \leq \Theta_m \quad (7.27)$$

donde Θ_m es una cota conocida y con abuso de notación, tenemos

$$\Theta = \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}$$

donde la matriz Θ puede ser rellenada con ceros para tener consistencia dimensional [Yesildirek y Lewis, 1994].

La trayectoria deseada variante en el tiempo $q_d(t)$ se considera diferenciable al menos tres veces y acotada para todo tiempo $t \geq 0$ en el sentido de

$$\left. \begin{aligned} \|q_d(t)\| &\leq \mu_1, \\ \|\dot{q}_d(t)\| &\leq \mu_2, \\ \|\ddot{q}_d(t)\| &\leq \mu_3, \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

donde μ_1 , μ_2 y μ_3 representan constantes positivas.

El problema de control consiste en diseñar un controlador $\tau(t)$ y unas leyes de adaptación para los pesos de entrada $\hat{V}(t)$ y de salida $\hat{W}(t)$ tal que las señales de errores $\tilde{q}(t)$, $\dot{\tilde{q}}(t)$, $\tilde{W}(t)$, y $\tilde{V}(t)$ estén uniformemente acotadas. Además, el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{\tilde{q}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (7.29)$$

se satisfaga.

Ley de control

El controlador a analizar se presenta de la siguiente manera. Primeramente, se considera la dinámica del sistema (7.22) evaluada a lo largo de las trayectorias deseadas, esto es $q_d \in \mathbb{R}^n$ tal que el vector de pares deseados $\tau_d \in \mathbb{R}^n$ puede definirse como

$$M(q_d) \ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d + g(q_d) + F_v \dot{q}_d = \tau_d, \quad (7.30)$$

Al utilizar las ecuaciones (7.22) y (7.30) y utilizando el error de posición definido en (7.25) se obtiene la siguiente ecuación:

$$M(q) \ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{\tilde{q}}) \dot{\tilde{q}} + h(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + F_v \dot{\tilde{q}} = \tau_d - \tau, \quad (7.31)$$

donde $h(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \in \mathbb{R}^n$ es la dinámica residual, definida en (7.23).

Utilizando la propiedad de aproximación universal de las redes neuronales en (7.19), el par deseado en (7.30) se puede definir como

$$\tau_d = W^T \sigma(V^T x_d) + \epsilon, \quad (7.32)$$

donde

$$x_d = [q_d^T \quad \dot{q}_d^T \quad \ddot{q}_d \quad 1]^T \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (7.33)$$

es el vector de señales de entrada de la red neuronal. En este caso $N = 3n$.

Ahora se presenta el controlador de seguimiento a utilizar como

$$\tau = \hat{W}^T \sigma(\hat{V}^T x_d) + K_p \bar{q} + K_d \dot{\bar{q}} + \Delta \text{sign}(r), \quad (7.34)$$

donde K_p , K_d , y Δ son matrices diagonales definidas positivas, γ es una constante escalar positiva, \hat{V} es la matriz de pesos de entrada estimados, \hat{W} es la matriz de pesos de salida estimados,

$$r = \dot{\bar{q}} + \alpha \bar{q}, \quad (7.35)$$

$$\text{sign}(r) = [\text{sign}(r_1) \quad \dots \quad \text{sign}(r_n)]^T \in \mathbb{R}^n, \quad (7.36)$$

donde la función signo está definida como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0, \\ 0, & \text{para } x = 0, \\ -1, & \text{para } x < 0. \end{cases} \quad (7.37)$$

Las leyes de adaptación de pesos neuronales utilizadas para los pesos de entrada y de salida, denotados por \hat{V} y \hat{W} , respectivamente, están dadas por

$$\dot{\hat{V}} = R x_d r^T \hat{W}^T \hat{\sigma}', \quad (7.38)$$

$$\dot{\hat{W}} = F \hat{\sigma} r^T - F \hat{\sigma}' \hat{V}^T x_d r^T, \quad (7.39)$$

donde $R \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ y $F \in \mathbb{R}^{L \times L}$ son matrices definidas positivas, $\hat{\sigma} = \sigma(\hat{V}^T x_d)$ y $\hat{\sigma}'$ está dado por

$$\hat{\sigma}' = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}, \quad (7.40)$$

con $x = \tilde{V}^T x_d$.

Para llevar a cabo el análisis en lazo cerrado, se sustituyen las ecuaciones (7.32) y (7.34) en la ecuación (7.31), se obtiene

$$M(q) \ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{\tilde{q}}) \dot{\tilde{q}} + h(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) + F_v \dot{\tilde{q}} = -K_v \tanh(\gamma \tilde{q}) - K_d \dot{\tilde{q}} - \Delta \text{sign}(r) + W^T \sigma(V^T x_d) - \tilde{W}^T \sigma(\tilde{V}^T x_d) + \epsilon. \quad (7.41)$$

El error de los pesos se define en la ecuación (7.26) y

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma} = \sigma(V^T x_d) - \sigma(\tilde{V}^T x_d). \quad (7.42)$$

Las redes neuronales de varias capas son no lineales en los pesos de entrada V y las series de Taylor pueden ser utilizadas para aproximar la función de activación σ . Luego,

$$\sigma(V^T x_d) = \sigma(\tilde{V}^T x_d) + \sigma'(\tilde{V}^T x_d) \tilde{V}^T x_d + O(\tilde{V}^T x_d)^2, \quad (7.43)$$

donde $O(\tilde{V}^T x_d)^2$ representa los términos de alto orden. Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (7.26) y (7.43) en (7.41) y simplificando, se obtiene la siguiente expresión:

$$M \ddot{\tilde{q}} = -h - C \dot{\tilde{q}} - K_v \tanh(\gamma \tilde{q}) - [K_d + F_v] \dot{\tilde{q}} - \Delta \text{sign}(r) + \tilde{W}^T \tilde{\sigma}' \tilde{V}^T x_d - \tilde{W}^T \tilde{\sigma}' \tilde{V}^T x_d + \tilde{W}^T \sigma + \omega(t), \quad (7.44)$$

donde $M = M(q)$, $h = h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$, $C = C(q, \dot{q})$, y

$$\omega(t) = \tilde{W}^T \tilde{\sigma}' V^T x_d + W O^2 + \epsilon, \quad (7.45)$$

con $O^2 = O(\tilde{V}^T x_d)^2$.

Finalmente, la dinámica de $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2m}$ está dada por

$$\frac{d}{dt} \tilde{q} = \dot{\tilde{q}}, \quad (7.46)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\tilde{q}} = M^{-1} \left[-h - C \dot{\tilde{q}} - K_v \tanh(\gamma \tilde{q}) - [K_d + F_v] \dot{\tilde{q}} - \Delta \text{sign}(r) + \tilde{W}^T \tilde{\sigma}' \tilde{V}^T x_d - \tilde{W}^T \tilde{\sigma}' \tilde{V}^T x_d + \tilde{W}^T \sigma + \omega(t) \right]. \quad (7.47)$$

Utilizando la definición de los errores de pesos (7.26), se pueden reescribir las leyes de adaptación de pesos neuronales (7.38) y (7.39) como

$$\frac{d}{dt} \tilde{V} = -R x_d r^T W \tilde{\sigma}' + R x_d r^T \tilde{W}^T \tilde{\sigma}', \quad (7.48)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{W} = -F \tilde{\sigma} r^T + F \tilde{\sigma}' V^T x_d r^T - F \tilde{\sigma}' \tilde{V}^T x_d r^T. \quad (7.49)$$

La ecuación del sistema en lazo cerrado está dada por las ecuaciones (7.46)-(7.49) que definen un conjunto de $2n + [N + 1] \times L + L \times n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

7.1. Análisis de estabilidad

De acuerdo con las ecuaciones de estados en lazo cerrado (7.46)-(7.49), se busca probar que el origen de las ecuaciones de estado del sistema en lazo cerrado es estable y que se tiene una convergencia de los errores de posición y velocidad a cero, es decir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$$

Para esto se utiliza la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} U(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M \dot{\tilde{q}} + \sum_{i=1}^n K_{pi} \gamma^{-1} \ln(\cosh(\gamma \tilde{q}_i)) + \alpha \tanh(\gamma \tilde{q})^T M \dot{\tilde{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{W}^T P^{-1} \tilde{W}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{V}^T R^{-1} \tilde{V}), \end{aligned} \quad (7.50)$$

Positividad definida de $U(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$

Para demostrar que $U(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ es una función definida positiva se encuentra una cota inferior para cada uno de los términos de (7.50) utilizando las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M \dot{\tilde{q}} &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min}\{M\} \|\dot{\tilde{q}}\|^2, \\ \alpha \tanh(\gamma \tilde{q})^T M \dot{\tilde{q}} &\geq -\alpha \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{\tilde{q}}\| \|\tanh(\gamma \tilde{q})\|, \\ \sum_{i=1}^n K_{pi} \gamma^{-1} \ln(\cosh(\gamma \tilde{q}_i)) &\geq \frac{\gamma^{-1}}{2} \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tanh(\gamma \tilde{q})\|^2, \end{aligned}$$

a partir de esto, se puede escribir la siguiente cota inferior para la función candidata de Lyapunov (7.50) como:

$$\begin{aligned} U(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &\geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{q}}\| \\ \|\tanh(\gamma \tilde{q})\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{M\} & -\alpha \lambda_{\max}\{M\} \\ -\alpha \lambda_{\max}\{M\} & \gamma^{-1} \lambda_{\min}\{K_p\} \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{q}}\| \\ \|\tanh(\gamma \tilde{q})\| \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{W}^T P^{-1} \tilde{W}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{V}^T R^{-1} \tilde{V}). \end{aligned} \quad (7.51)$$

La matriz P será una matriz definida positiva con la constante de diseño α adecuadamente seleccionada como

$$0 < \alpha < \frac{\sqrt{\gamma^{-1} \lambda_{\min}\{K_p\} \lambda_{\min}\{M\}}}{\lambda_{\max}\{M\}} \quad (7.52)$$

además de que esta función es radialmente desacotada.

Derivada temporal de $U(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$

Para terminar el análisis de estabilidad de este controlador, se encuentra la derivada temporal de (7.51) evaluada a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (7.46)-(7.49), la cual está dada por

$$\begin{aligned} \dot{U}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= -\dot{\bar{q}}^T [K_d + F_v] \dot{\bar{q}} - r^T h + r^T [\omega - \Delta \operatorname{sign}(r)] \\ &\quad - \alpha \tanh(\gamma \bar{q})^T [K_d + F_v] \dot{\bar{q}} - \alpha \tanh(\gamma \bar{q})^T K_p \tanh(\gamma \bar{q}) \\ &\quad + \alpha \gamma \dot{\bar{q}}^T M \operatorname{Sech}^2(\gamma \bar{q}) \dot{\bar{q}} + \alpha \tanh(\gamma \bar{q})^T C^T \dot{\bar{q}}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

lo cual se obtiene gracias a la propiedad de antisimetría (Propiedad 2.13), y a las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\bar{W}^T \hat{\sigma} r^T) &= \operatorname{Tr}(r^T \bar{W}^T \hat{\sigma}), \\ \operatorname{Tr}(\bar{W}^T \hat{\sigma}' \hat{V}^T x_d r^T) &= \operatorname{Tr}(r^T \bar{W}^T \hat{\sigma}' \hat{V}^T x_d), \\ \operatorname{Tr}(\hat{V}^T x_d r^T \bar{W}^T \hat{\sigma}') &= \operatorname{Tr}(r^T \bar{W}^T \hat{\sigma}' \hat{V}^T x_d). \end{aligned}$$

Para demostrar que (7.53) es semidefinida negativa se encuentra una cota superior de cada uno de sus términos como se muestra:

$$\begin{aligned} 0 - \dot{\bar{q}}^T [K_d + F_v] \dot{\bar{q}} &\leq -\lambda_{\min}\{K_d + F_v\} \|\dot{\bar{q}}\|^2, \\ -r^T h &\leq \alpha k_{v2} \|\tanh(\gamma \bar{q})\|^2 \\ &\quad + [\alpha k_{a1} + k_{a2}] \|\tanh(\gamma \bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\| + k_{a1} \|\dot{\bar{q}}\|^2, \\ r^T [\omega - \Delta \operatorname{sign}(r)] &\leq -[\lambda_{\min}\{\Delta\} - k_\omega] \sum_{i=1}^n |r_i|, \\ \alpha \gamma \dot{\bar{q}}^T M \operatorname{Sech}^2(\gamma \bar{q}) \dot{\bar{q}} &\leq \alpha \gamma \lambda_{\max}\{M\} \|\dot{\bar{q}}\|^2, \\ \alpha \tanh(\gamma \bar{q})^T C^T \dot{\bar{q}} &\leq \alpha k_{C1} \mu_2 \|\tanh(\gamma \bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\| + \alpha k_{C1} \sqrt{n} \|\dot{\bar{q}}\|^2, \\ -\alpha \tanh(\gamma \bar{q})^T [K_d + F_v] \dot{\bar{q}} &\leq \alpha \lambda_{\max}\{K_d + F_v\} \|\tanh(\gamma \bar{q})\| \|\dot{\bar{q}}\|, \\ -\alpha \tanh(\gamma \bar{q})^T K_p \tanh(\gamma \bar{q}) &\leq -\alpha \lambda_{\min}\{K_p\} \|\tanh(\gamma \bar{q})\|^2, \end{aligned}$$

donde se utiliza la Propiedad de la dinámica residual C.1, la Propiedad 2.11 de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, la suposición de que $k_\omega \geq \|\omega(t)\| \forall t \geq 0$, el hecho de que $\lambda_{\max}\{\operatorname{Sech}^2(z)\} = 1$, y el hecho de que $\|\dot{q}\| \leq \mu_2 + \|\ddot{q}\|$, con μ_2 dada en (7.28).

A partir de estas desigualdades se puede encontrar una cota inferior de (7.53) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{U}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) &\leq - \left[\frac{\|\tanh(\gamma \bar{q})\|^T}{\|\dot{\bar{q}}\|} \right]^T Q \left[\frac{\|\tanh(\gamma \bar{q})\|}{\|\dot{\bar{q}}\|} \right] \\ &\quad - [\lambda_{\min}\{\Delta\} - k_\omega] \sum_{i=1}^n |r_i|, \end{aligned} \quad (7.54)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha a & -\frac{1}{2}[\alpha d + k_{h1}] \\ -\frac{1}{2}[\alpha d + k_{h1}] & b - \alpha c \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

y

$$\begin{aligned} a &= \lambda_{\min}\{K_p\} - k_{h2}, \\ b &= \lambda_{\min}\{K_d + F_v\} - k_{h1}, \\ c &= \gamma \lambda_{\max}\{M\} + k_{C1} \sqrt{n}, \\ d &= k_{h2} + k_{C1} \mu_2 + \lambda_{\max}\{K_d + F_v\}, \end{aligned}$$

Para que $\dot{U}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ en la desigualdad (7.54) sea semidefinida negativa se necesita que

$$\lambda_{\min}\{\Delta\} > k_\omega$$

y Q sea definida positiva. Con α adecuadamente escogida Q será definida positiva.

De lo anterior se concluye que $\dot{U}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ es una función semidefinida negativa y se puede concluir la estabilidad del origen del espacio de estados $[\tilde{q}^T \ \dot{\tilde{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ del sistema en lazo cerrado descrito por las ecuaciones (7.46)-(7.49). También se afirma que las variables de estado \tilde{q} y $\dot{\tilde{q}}$ están acotadas, lo que quiere decir que

$$\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_\infty^n \quad (7.56)$$

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Lema de Barbalat

Utilizando el Lema 2.1 se va a probar la convergencia de los errores de posición y velocidad a cero, es decir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} = 0$. Para esto, a partir del análisis de la función de Lyapunov (7.50), y de su derivada temporal (7.53) se concluye que $\tilde{q} \in \mathcal{L}_\infty^n$ y que $\dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_\infty^n$, es decir, los errores de posición y los errores de velocidad están acotados. Falta probar que dichos errores sean cuadrático integrables, es decir, que pertenezcan al conjunto de funciones \mathcal{L}_2^n . Para esto, se integran ambos lados de la desigualdad de la derivada de la función de Lyapunov (7.54), excluyendo el último del lado derecho de dicha ecuación, desde $t = 0$ hasta $t = \infty$, de manera que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{U}(\tau, \tilde{q}(\tau), \dot{\tilde{q}}(\tau)) d\tau &\leq - \int_0^\infty \eta^T Q \eta d\tau, \\ U(\infty, \tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty)) - U(0, \tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0)) &\leq - \int_0^\infty \eta^T Q \eta d\tau, \end{aligned} \quad (7.57)$$

donde el vector $\eta := \left[\|\tanh(\gamma \tilde{q})\| \ \|\dot{\tilde{q}}\|^T \right] \in \mathbb{R}^{2n}$. La desigualdad (7.57) puede ser reescrita como

$$-U(0, \tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0)) \leq - \int_0^\infty \eta^T Q \eta d\tau - U(\infty, \tilde{q}(\infty), \dot{\tilde{q}}(\infty)) \quad (7.58)$$

Como se sabe que la función de Lyapunov (7.50) es definida positiva, se tiene que la función $U(\infty, \bar{q}(\infty), \dot{\bar{q}}(\infty)) \geq 0$, por lo tanto, se llega a que

$$\begin{aligned} -U(0, \bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0)) &\leq -\int_0^\infty \eta^T Q \eta d\tau \\ &\leq -\lambda_{\min}\{Q\} \int_0^\infty \|\eta\|^2 d\tau \end{aligned}$$

A partir de la última desigualdad se puede escribir que

$$\frac{U(0, \bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0))}{\lambda_{\min}\{Q\}} \geq \int_0^\infty \left\| \begin{bmatrix} \tanh(\gamma \bar{q}) \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} \right\|^2 d\tau \quad (7.59)$$

donde el lado izquierdo de la desigualdad (7.59) es una constante finita y positiva, por lo que el vector $\eta = \begin{bmatrix} \tanh(\gamma \bar{q}) \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix}^T \in \mathcal{L}_2^{2n}$. De esta manera se puede escribir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(\gamma \bar{q}) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{q}} &= 0. \end{aligned}$$

Además, $\tanh(\gamma \bar{q})$ convergerá a cero solamente cuando \bar{q} converja a cero también. De este análisis se puede concluir estabilidad y convergencia de los errores de posición y los errores de velocidad a cero.

Análisis de convergencia global del error de posición a cero usando el Principio de Invariancia de LaSalle

Utilizando el Principio de Invariancia de LaSalle para sistemas no lineales y no autónomos, dado en el Teorema 2.4, el cual asume la existencia de una función de Lyapunov definida positiva como se demuestra en la desigualdad (7.51), y una derivada temporal (7.53), por lo que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (7.46)-(7.49) están dentro del conjunto:

$$\Omega_0 = \left\{ \bar{q}, \dot{\bar{q}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}, \tilde{W} \in \mathbb{R}^{L \times n} : U(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \leq U(\bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0)) \right\}.$$

La bola Ω'_0 dada por

$$\Omega'_0 = \left\{ \bar{q}, \dot{\bar{q}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}, \tilde{W} \in \mathbb{R}^{L \times n} : \left\| \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{\frac{2U(t, \bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0))}{\lambda_{\min}\{P\}}} \right\}$$

donde se hace uso de la suposición 7.1, y Ω'_0 está contenida en Ω_0 , es decir, $\Omega'_0 \subset \Omega_0$.

Ahora, hace falta definir el conjunto Ω donde $\dot{U}(t, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = 0$, es decir

$$\Omega = \left\{ \bar{q}, \dot{\bar{q}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}, \tilde{W} \in \mathbb{R}^{L \times n} : V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = 0 \right\}$$

con

$$Y(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \begin{bmatrix} \|\tanh(\gamma\tilde{q})\| & \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \|\tanh(\gamma\tilde{q})\| \\ \|\dot{\tilde{q}}\| \end{bmatrix}$$

y Q dada en (7.55). Es decir,

$$\Omega = \left\{ \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}, \tilde{W} \in \mathbb{R}^{L \times n}; \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \text{ con } \left\| \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} \right\| \leq \Theta_m \right\}$$

Los estados del sistema en lazo cerrado (7.46)-(7.49) tienden de manera última (cuando $t \rightarrow \infty$) al conjunto $\Omega_\infty = \Omega_\gamma \cap \Omega$, definido por

$$\Omega_\infty = \left\{ \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times L}, \tilde{W} \in \mathbb{R}^{L \times n}; \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \text{ con } \left\| \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} \right\| \leq \Theta_m \right\}$$

De acuerdo con el Teorema 2.4, se concluye convergencia de los errores de posición y velocidad articulares a cero, es decir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, asintótica de los errores de posición y de los errores de velocidad a cero, con $\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \Theta$ y $\|\Theta\| \leq \Theta_m$, donde la matriz Θ puede ser rellena con ceros para tener consistencia dimensional [Ycsildirek y Lewis, 1994].

7.2. Resultados en simulación

A manera de ilustración de los resultados del análisis de estabilidad, se muestran algunas simulaciones numéricas donde se puede observar que los errores de posición tienden a cero y los pesos de salida $\tilde{W}_1(t) \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$ y $\tilde{W}_2(t) \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$ para las articulaciones 1 y 2, respectivamente, de la red neuronal están acotados utilizando las ecuaciones de adaptación (7.38) y (7.39). Se utilizaron ganancias

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{40, 3\} \text{ Nm/rad}, \\ K_v &= \text{diag}\{32, 3.2\} \text{ Nm/rad}, \\ \Delta &= \text{diag}\{0.05, 0.005\} \end{aligned}$$

y con

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 5.$$

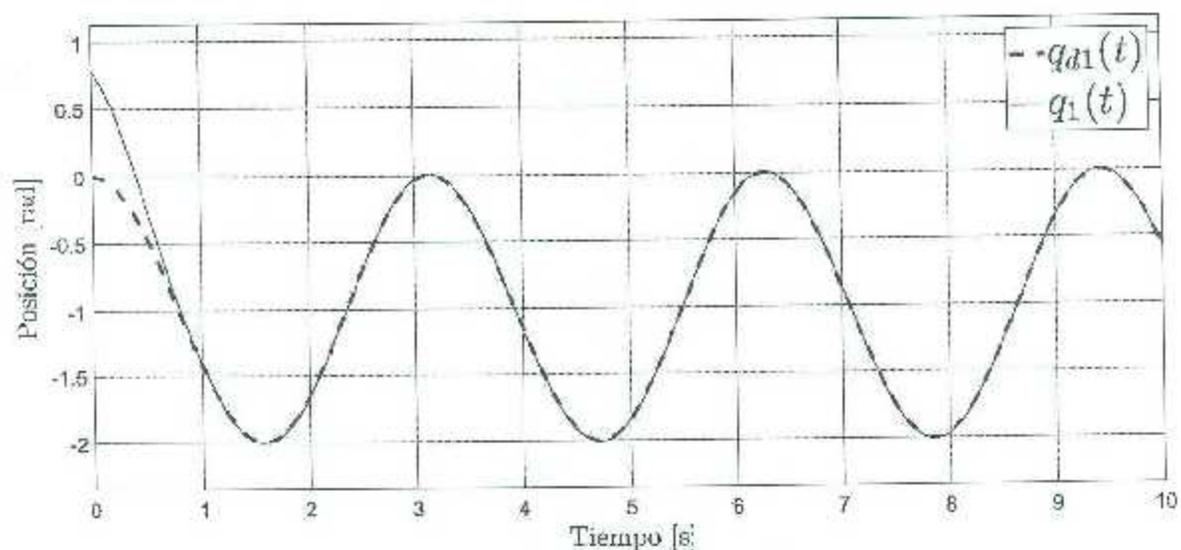
Además, las ganancias

$$R = 0.2 \mathbf{I}_7, \quad F = 0.5 \mathbf{I}_2 \mathbf{0}.$$

donde \mathbf{I}_n es la matriz identidad de dimensiones $n \times n$, fueron utilizadas en las leyes de adaptación (7.38) y (7.39).

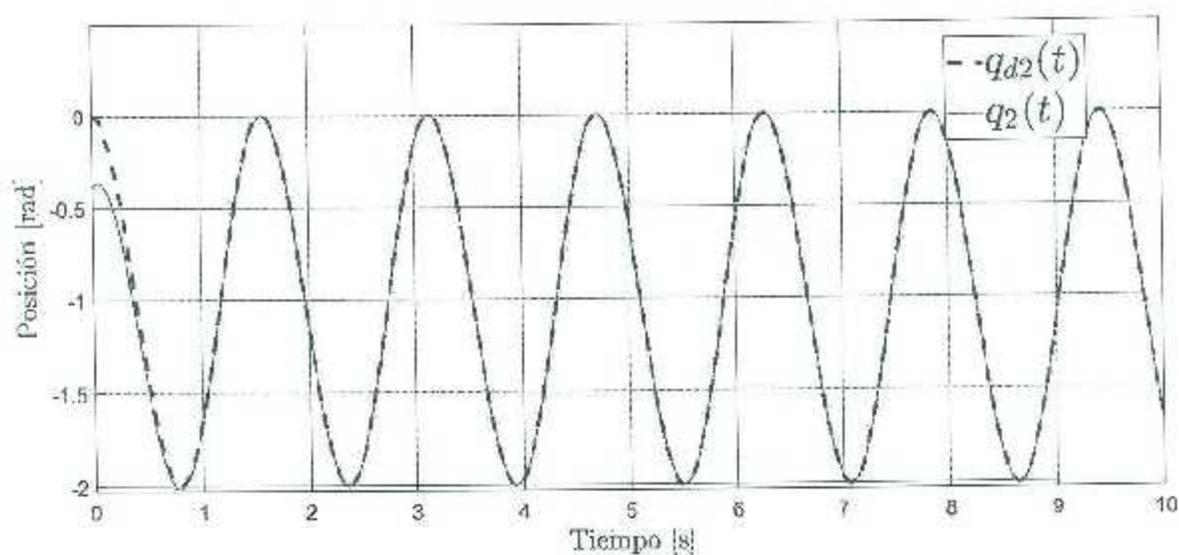
Se consideran las referencias de posición dadas por

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) - 1 \\ \cos(4t) - 1 \end{bmatrix} \text{ [rad]} \quad (7.60)$$


 Figura 7.5: Seguimiento de trayectoria $q_1(t)$.

Las condiciones iniciales para las posiciones y velocidades articulares están dadas por $q_1(0) = \pi/4$ rad, $q_2(0) = -\pi/8$ rad, $\dot{q}_1(0) = 0$ rad/s y $\dot{q}_2(0) = 0$ rad/s.

Con el uso de MATLAB[®] y de la interfaz visual de usuario que se desarrolló se obtuvieron los siguientes resultados. En las Figuras 7.5 y 7.6 se muestran los seguimientos de las trayectorias $q_1(t)$ y $q_2(t)$ para las posiciones deseadas dadas en (7.60). Los errores de posición $\tilde{q}_1(t)$ y $\tilde{q}_2(t)$ se muestran en las Figuras 7.7 y 7.8, respectivamente. Los pesos de salida $\hat{W}_1(t) \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ y $\hat{W}_2(t) \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ de las articulaciones 1 y 2, respectivamente, se


 Figura 7.6: Seguimiento de trayectoria $q_2(t)$.

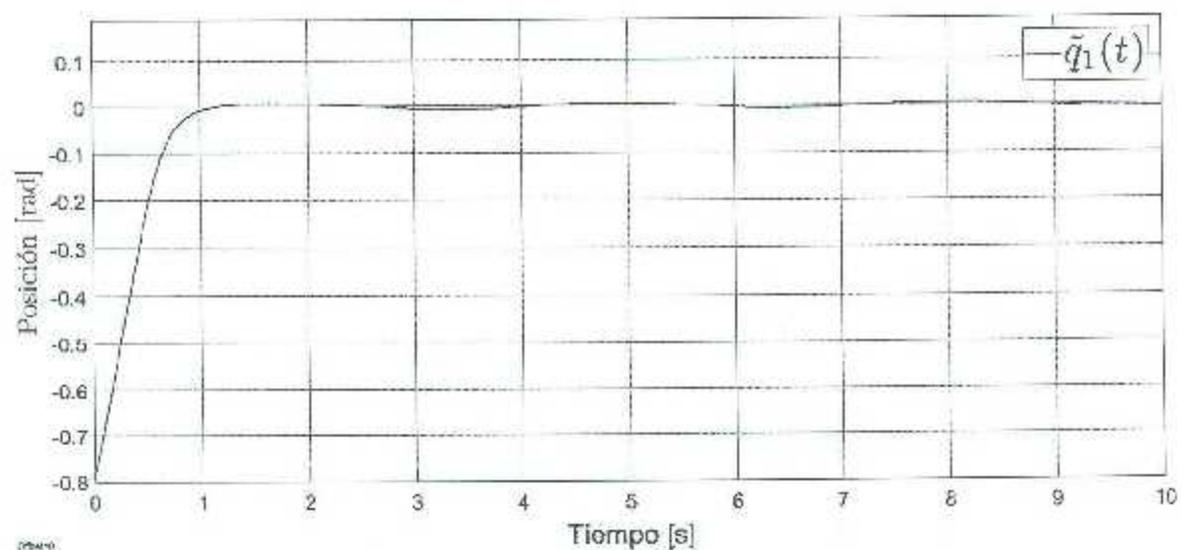


Figura 7.7: Error de posición $\tilde{q}_1(t)$.

muestran en las Figuras 7.9 y 7.10, donde se observa que los pesos de salida están acotados para todo $t \geq 0$.

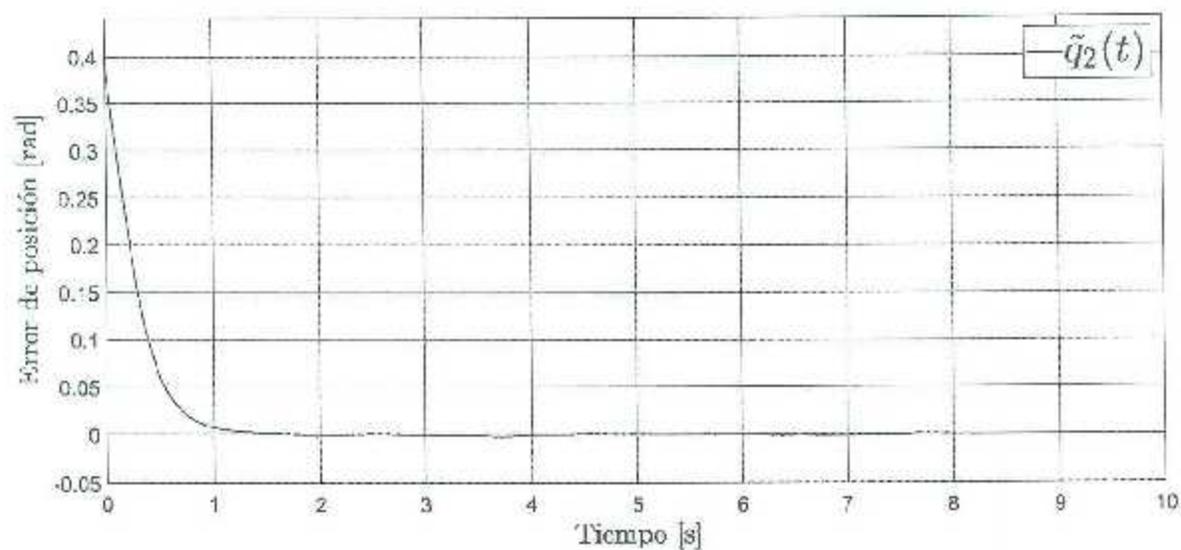


Figura 7.8: Error de posición $\tilde{q}_2(t)$.

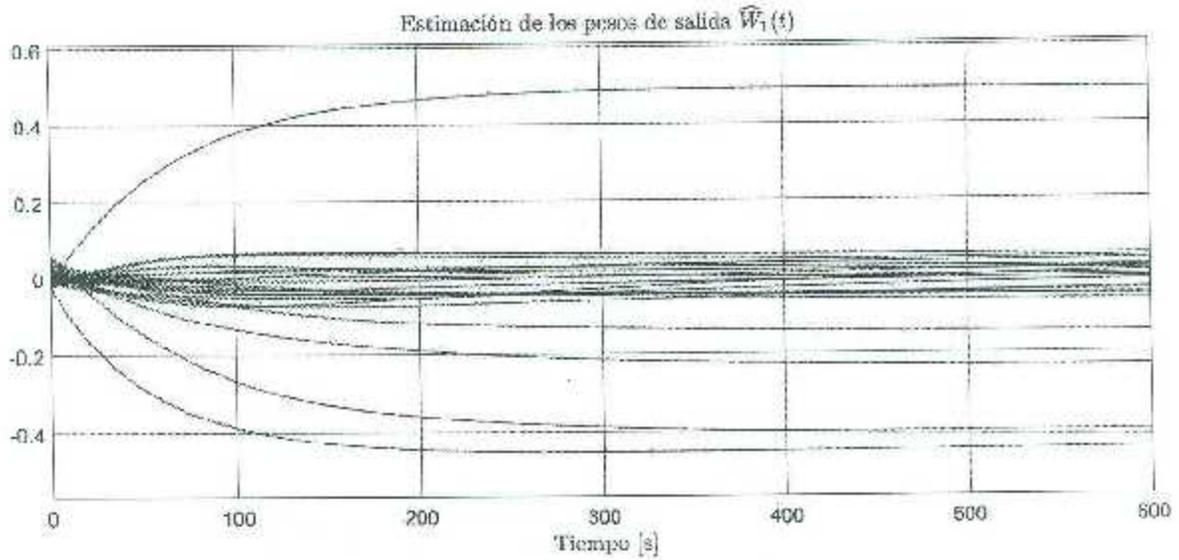


Figura 7.9: Evolución temporal de los pesos de salida $\hat{W}_1(t) \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$ para el eslabón 1.

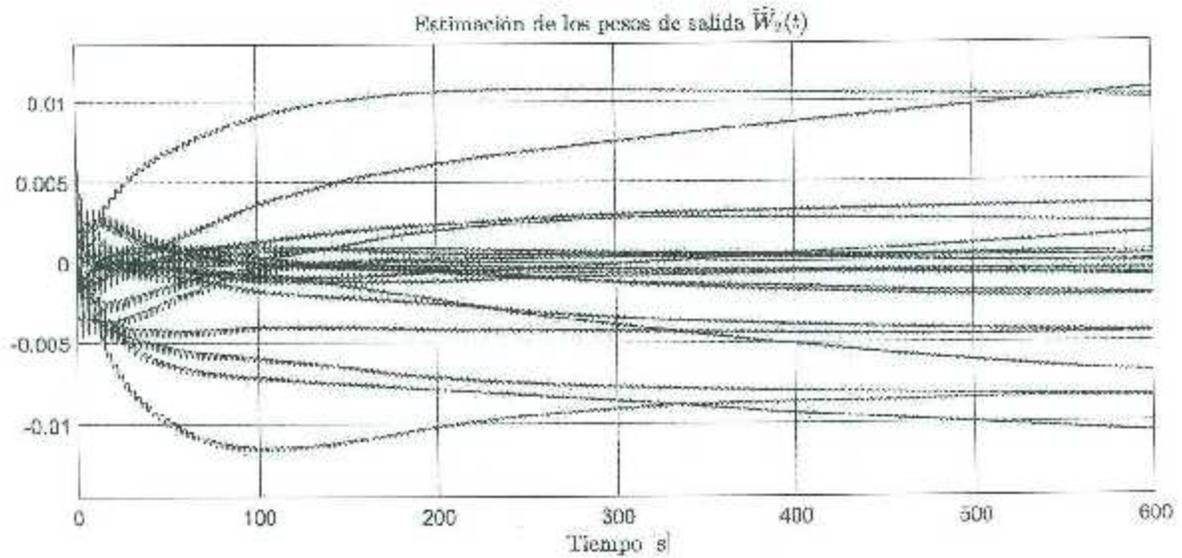


Figura 7.10: Evolución temporal de los pesos de salida $\hat{W}_2(t) \in \mathbb{R}^{20 \times 1}$.

Capítulo 8

Desarrollo de la Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)

Una interfaz de usuario (UI por sus siglas en inglés) es una forma gráfica de mostrar en una o más ventanas qué componentes contienen los controladores, que permiten al usuario desarrollar actividades interactivas. El usuario no tiene que crear un script ni teclear comandos en la ventana de comandos para llevar a cabo las actividades. A diferencia de programar un script o introducir comandos en la ventana de comandos, el usuario de la GUI no tiene necesidad de entender los detalles de cómo se desarrollan las tareas.

Los componentes de una UI pueden incluir menús, barras de herramientas, “push buttons”, “list boxes” y controles deslizantes, entre otros. Las UIs creadas utilizando herramientas de MATLAB® pueden llevar a cabo cualquier tipo de cómputo, leer y escribir en archivos de datos, comunicarse con otras UIs, y mostrar datos como tablas o gráficas.

Una UI de MATLAB® es una ventana “figure” a la cual se le añaden componentes utilizados por el usuario. Estos componentes se pueden seleccionar, modificar su tamaño, y modificar su posición como sea mejor. Utilizando “callbacks” se puede hacer que estos componentes hagan lo que se desea cuando el usuario cliquee o manipula los componentes al teclear.

Se pueden crear UIs de MATLAB® de dos maneras diferentes:

- Crear la UI utilizando GUIDE con el comando `guide`

Mediante este enfoque se empieza con una figura a la que se le ingresan componentes a partir de un editor de gráficos. GUIDE crea un código que contiene los “callbacks” para la UI y sus componentes. GUIDE guarda la ventana “figure” (como un archivo `.fig`) y el archivo del código. La GUI se puede correr a partir de cualquiera de los dos archivos mencionados.

- Crear la UI mediante programación

Con este enfoque se puede crear un archivo de código que define las propiedades y comportamientos de todos los componentes. Cuando el usuario ejecuta el archivo, éste crea la figura, los componentes de ésta, y maneja las interacciones con el usuario.

Típicamente, la figura no es guardada entre sesiones debido a que el código en el archivo crea una nueva figura cada vez que es compilado.

Los archivos generados por ambos enfoques son diferentes. Los archivos de UIs creadas mediante programación, generalmente son más largos, debido a que explícitamente definen cada propiedad de la figura y de sus controles, así como sus "callbacks". Las UIs creadas utilizando GUIDE define la mayoría de las propiedades dentro de la figura por sí sola.

Una UI puede ser creada utilizando GUIDE y después modificarla mediante programación. Sin embargo, no se puede crear una UI por programación y después modificarla con GUIDE.

Abrir una UI nueva en el editor GUIDE

1. Inicializar GUIDE tecleando el comando `guide` en la entrada de MATLAB®.
2. En el cuadro de diálogo del GUIDE Quick Start (Figura 8.1), seleccionar la plantilla Blank GUI (Default), y entonces presionar OK.

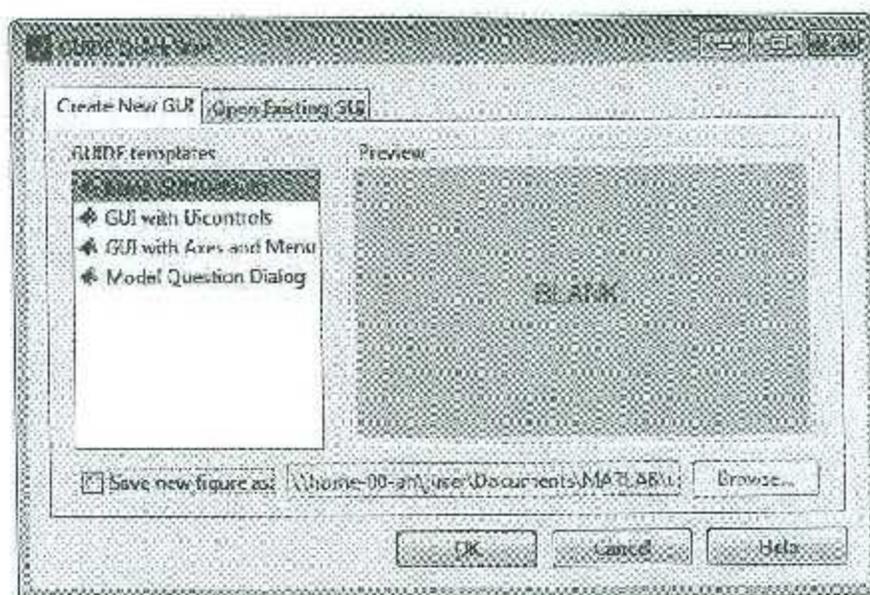


Figura 8.1: Cuadro de diálogo del GUIDE Quick Start.

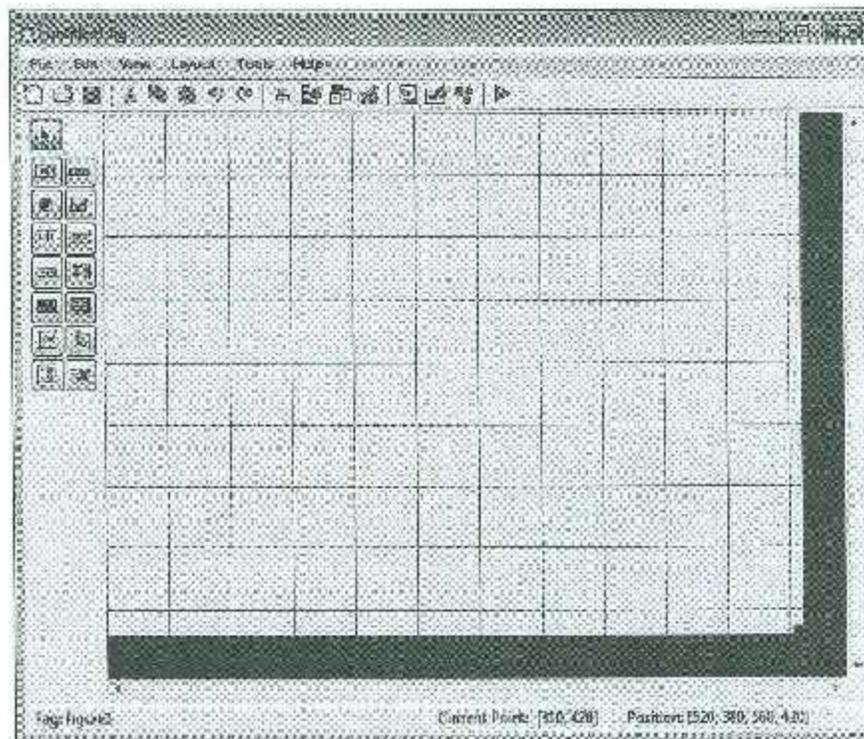


Figura 8.2: Entorno de desarrollo de GUI.

3. Para desplegar los nombres de los componentes en el entorno de desarrollo GUI (Figura 8.2) en la paleta de componentes, seguir los siguientes pasos:
 - a) Seleccionar **File > Preferences > GUIDE**.



Figura 8.3: Menú «Archivo».

- b) Seleccionar **Show names in component palette** en la ventana de «Preferencias» (Figura 8.4).

Texto estático

En la UI, el texto estático cumple la función de una etiqueta que muestra información e instrucciones de cada controlador. Al igual que con los demás componentes, se abre el inspector de propiedades, y en la propiedad "string" hacer clic en el icono con tres líneas horizontales (ver Figura 8.6). En este punto se pueden agregar cantidades de texto más largas que una línea.

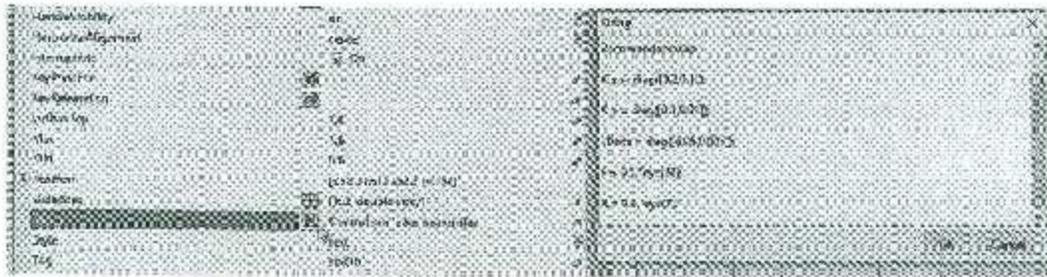


Figura 8.6: Propiedad "String" para agregar texto estático.

Configurar el tamaño de la ventana en el GUIDE

Se configura el tamaño de la ventana de la UI ajustando el área cuadrículada en el "Layout Editor". Haga clic en la esquina inferior derecha y arrástrelo hasta que la cuadrícula sea aproximadamente 3 pulgadas de alto y 4 pulgadas de ancho (ver Figura 8.7). Si es necesario, haga la cuadrícula más grande.

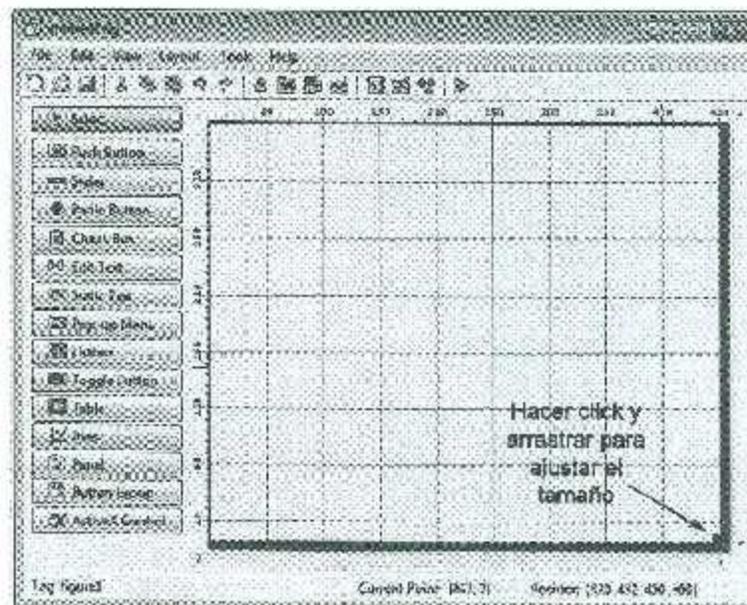


Figura 8.7: Área cuadrículada en el "Layout Editor".

Uso de los componentes

Para la interfaz se utilizaron lo que son "Push Buttons", "Radio Buttons", "Edit ... Texts", "Static Texts", y "Panels". Estos se colocaron como se muestra en la Figura 8.8.

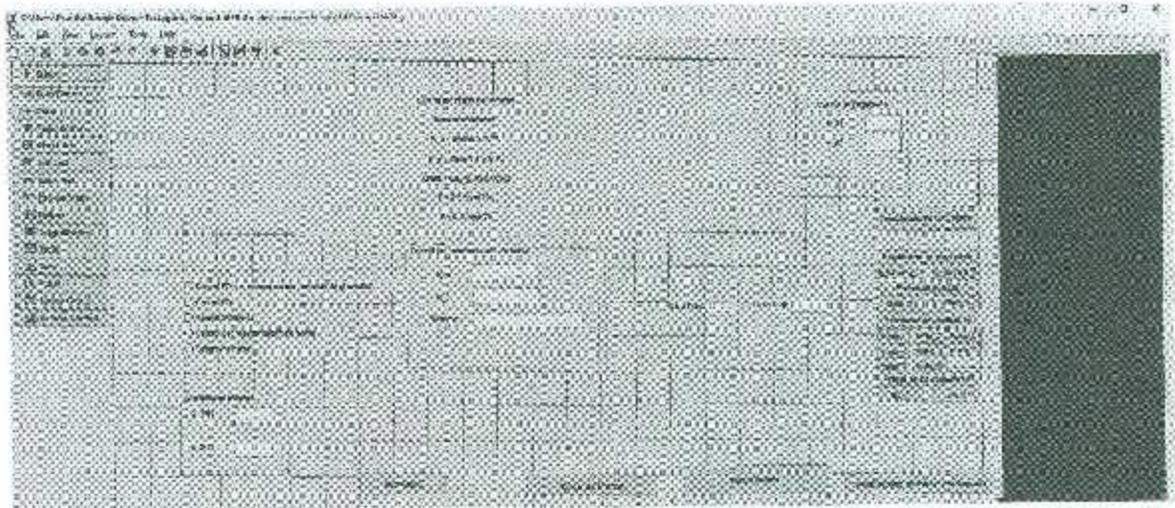


Figura 8.8: Acomodo de los componentes en la GUI.

Al dar doble clic en los componentes, seleccione el valor en la propiedad "String", y reemplace el texto con la frase deseada (ver Figura 8.9).

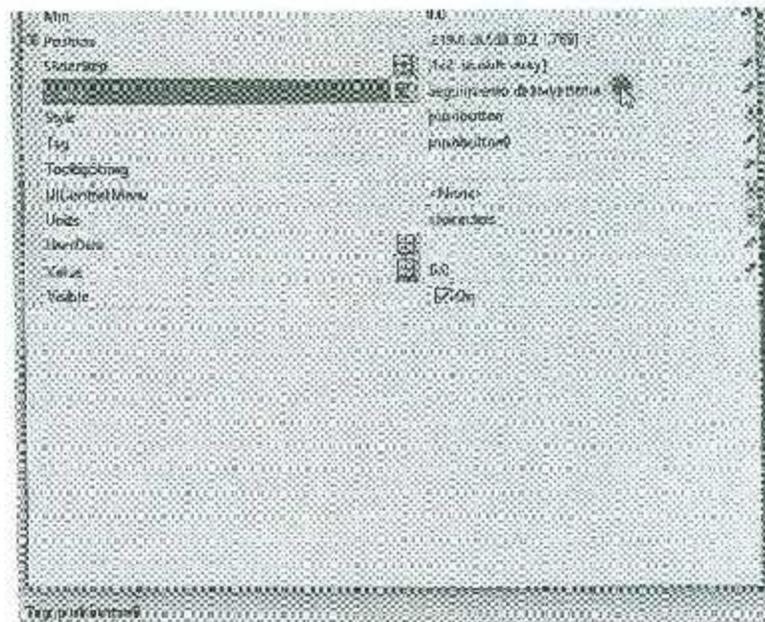


Figura 8.9: Menú de «Propiedades» de un "push button".

Haciendo clic fuera de la propiedad "string" o haciendo "Enter", éste cambiará, tomando el nombre especificado, como se muestra en la Figura 8.10.



Figura 8.10: Componente "Push button" con la leyenda «Cargar modelo».

Agregar código

Para agregar código y programar las funciones deseadas al hacer uso de cada componente, hay que ir a cada uno de los componentes y hacer clic derecho en ellos al mover el cursor sobre la opción **View Callbacks > Callback** (ver Figura 8.11).

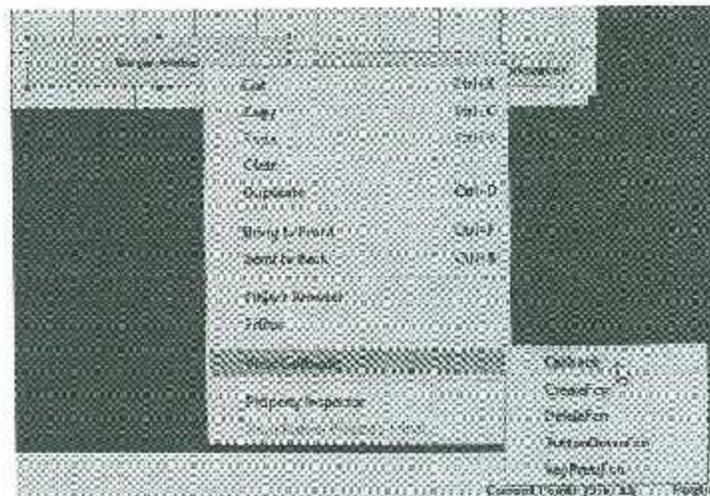


Figura 8.11: Menú emergente al hacer click derecho sobre un componente.

Para saber cómo hacer referencia a cada propiedad de cada componente de la UI, abriendo el inspector de propiedades, se puede ver el valor de la propiedad "Tag", el cual puede ser editado como el diseñador de la UI lo desee (ver Figura 8.12).

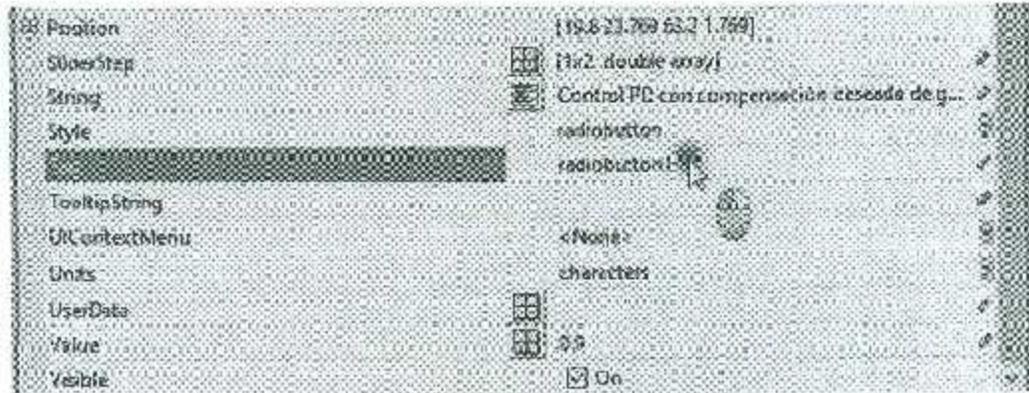


Figura 8.12: Propiedad "tag" para un componente.

Editor de MATLAB®

Al hacer clic en el "callback" de un componente, se puede agregar código en una ventana similar a la de la Figura 8.13.



Figura 8.13: Ventana de un "callback" de un componente.

El código que se agregó a cada radiobutton es similar al siguiente, el cual muestra los componentes relacionados con el controlador seleccionado y oculta los componentes que no tienen relevancia para este controlador.

```

1 % --- Executes on button press in radiobutton1.
2 function radiobutton1_Callback(hObject, eventdata, handles) % CFDCDGA
3 % hObject    handle to radiobutton1 (see GCBO)
4 % eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
5 % handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
6

```

```

7  % Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of radiobutton1
8
9  set(handles.edit1,'String','');
10 % set(handles.edit2,'String','');
11 % set(handles.edit3,'String','');
12 set(handles.edit4,'String','');
13 set(handles.edit5,'String','');
14 set(handles.edit6,'String','');
15 set(handles.edit7,'String','');
16 set(handles.edit8,'String','');
17 set(handles.edit9,'String','');
18 set(handles.edit10,'String','');
19 set(handles.edit11,'String','');
20 set(handles.edit12,'String','');
21 set(handles.edit13,'String','');
22 set(handles.edit14,'String','');
23 set(handles.edit15,'String','');
24 set(handles.edit16,'String','');
25 % set(handles.edit17,'String','');
26 set(handles.edit18,'String','');
27 set(handles.edit19,'String','');
28 set(handles.edit20,'String','');
29 % set(handles.edit21,'String','');
30 set(handles.edit22,'String','');
31 set(handles.edit23,'String','');
32 set(handles.edit24,'String','');
33 set(handles.edit25,'String','');
34 set(handles.edit26,'String','');
35 set(handles.edit27,'String','');
36
37 set(handles.uipanel1,'Visible','On');
38 %
39 set(handles.pushbutton15,'Visible','On');
40 %
41 set(handles.pushbutton16,'Visible','On');
42 set(handles.pushbutton17,'Visible','On');
43 set(handles.pushbutton18,'Visible','On');
44 %
45 set(handles.pushbutton20,'Visible','Off');
46 set(handles.pushbutton21,'Visible','Off');
47 set(handles.pushbutton22,'Visible','Off');
48 %
49 set(handles.pushbutton23,'Visible','Off');
50 set(handles.pushbutton24,'Visible','Off');
51 %
52
53 a = get(handles.radiobutton1,'Value');
54 if a == 1
55     set(handles.radiobutton2,'Value',0);
56     set(handles.radiobutton3,'Value',0);
57     set(handles.radiobutton4,'Value',0);
58     set(handles.radiobutton5,'Value',0);
59     set(handles.uibuttongroup1,'Visible','On');
60     set(handles.uibuttongroup2,'Visible','Off');

```

```

61 set(handles.uibuttongroup3,'Visible','Off');
62 set(handles.uibuttongroup4,'Visible','Off');
63 set(handles.uibuttongroup5,'Visible','Off');
64 %
65 set(handles.text5,'Visible','On');
66 set(handles.text7,'Visible','Off'); %Texto del control PD+
67 set(handles.text14,'Visible','Off'); %Texto del control Slotine-Li
68 set(handles.text15,'Visible','Off'); %Texto del control por
69 %realimentación de salida
70 set(handles.text16,'Visible','Off'); %Texto del control por
71 %redes neuronales
72 %
73 set(handles.pushbutton7,'Visible','On');
74 else
75 set(handles.uibuttongroup1,'Visible','Off');
76 a = get(handles.radiobutton1,'Value')+2^0 ...
77     + get(handles.radiobutton2,'Value')+2^1 ...
78     + get(handles.radiobutton3,'Value')+2^2 ...
79     + get(handles.radiobutton4,'Value')+2^3 ...
80     + get(handles.radiobutton5,'Value')+2^4;
81 %
82 if a == 0
83     set(handles.pushbutton7,'Visible','Off');
84     set(handles.text5,'Visible','Off');
85 end
86 end

```

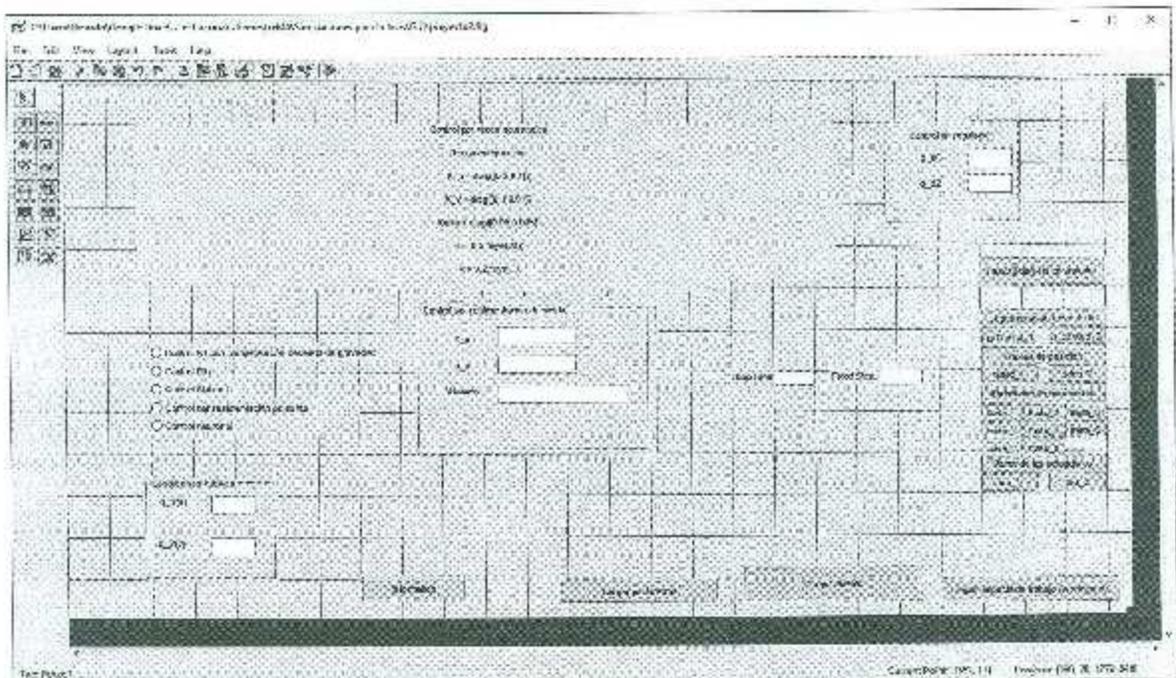


Figura 8.14: Versión final de la GUI.

Después de borrar un componente en el GUIDE, todos los "callbacks" que tenía

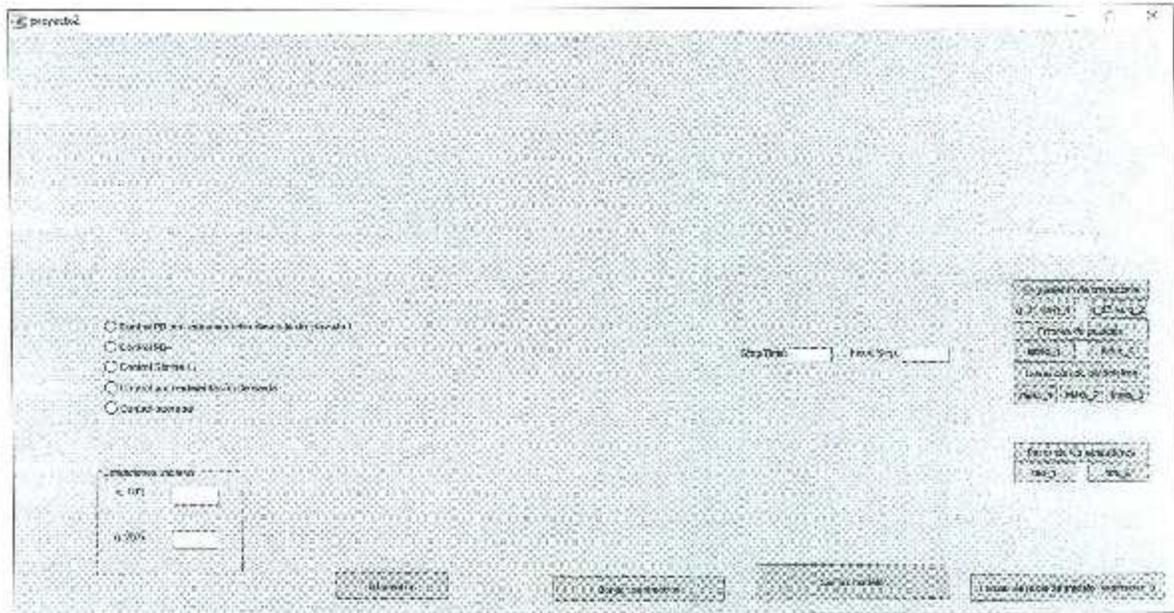


Figura 8.15: Aspecto de la GUI al ejecutarse.

permanecen en el código fuente. Si se tiene la seguridad de que ningún otro componente utiliza dichos “callbacks”, entonces estos “callbacks” pueden ser removidos del código fuente manualmente. Para más detalles consultar [MATLAB®, 2015, página 8-6].

Después del trabajo de diseño de la interfaz y la programación de los componentes, se obtiene una interfaz como se ve en la Figura 8.14.

Al compilar el archivo `.fig`, la GUI se verá como en la Figura 8.15. Los campos “Step ... Time” y “Fixed Step” permiten modificar los tiempos de simulación y el paso de integración de cada archivo de Simulink.

Para obtener las simulaciones para un controlador dado hay que seleccionar el controlador deseado desde el conjunto de los “Radio Buttons”, como se muestra en la Figura 8.16.

Aquí se puede seleccionar uno de los cinco controladores analizados en este trabajo, los cuales son:

- Controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable (ver Capítulo 3).
- Controlador PD+ adaptable (ver Capítulo 4).
- Controlador con compensación adaptable (Slotine-Li, ver Capítulo 5).
- Controlador con realimentación de salida adaptable (ver Capítulo 6).
- Controlador por redes neuronales adaptable (ver Capítulo 7).

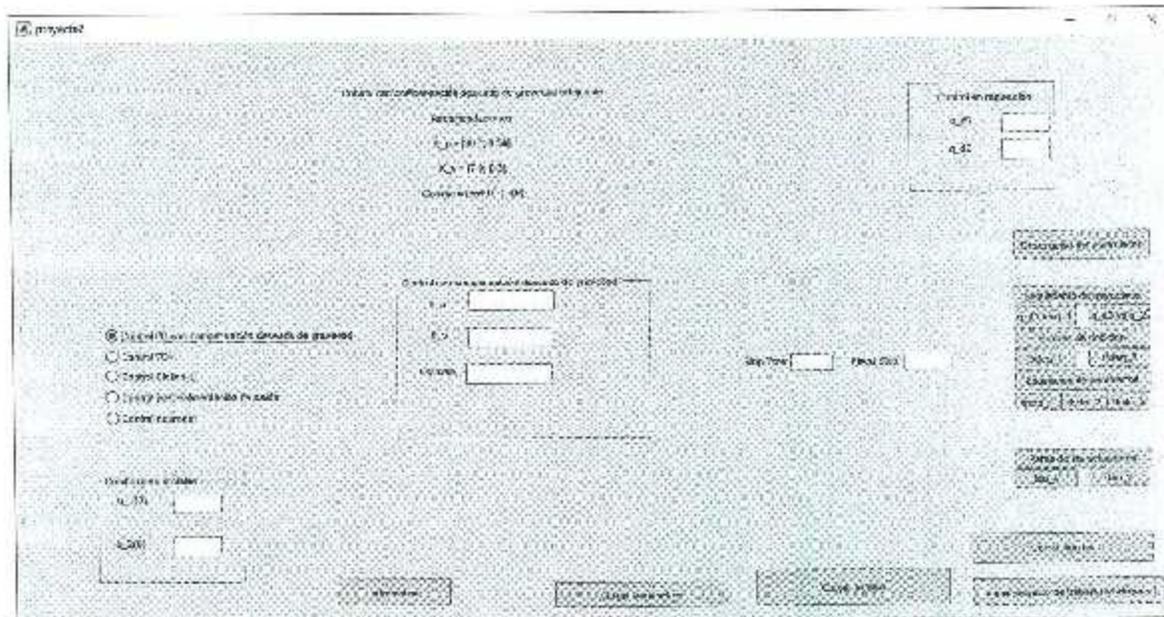


Figura 8.16: Selección del controlador PD con compensación descada de gravedad adaptable para simular en la GUI.

Después, se da clic en la opción de «Cargar parámetros» para rellenar las ganancias, las condiciones iniciales, los puntos de posiciones descadaas (para el controlador de regulación) y los parámetros "Stop Time" y "Fixed Step" de Simulink (ver Figura 8.17).

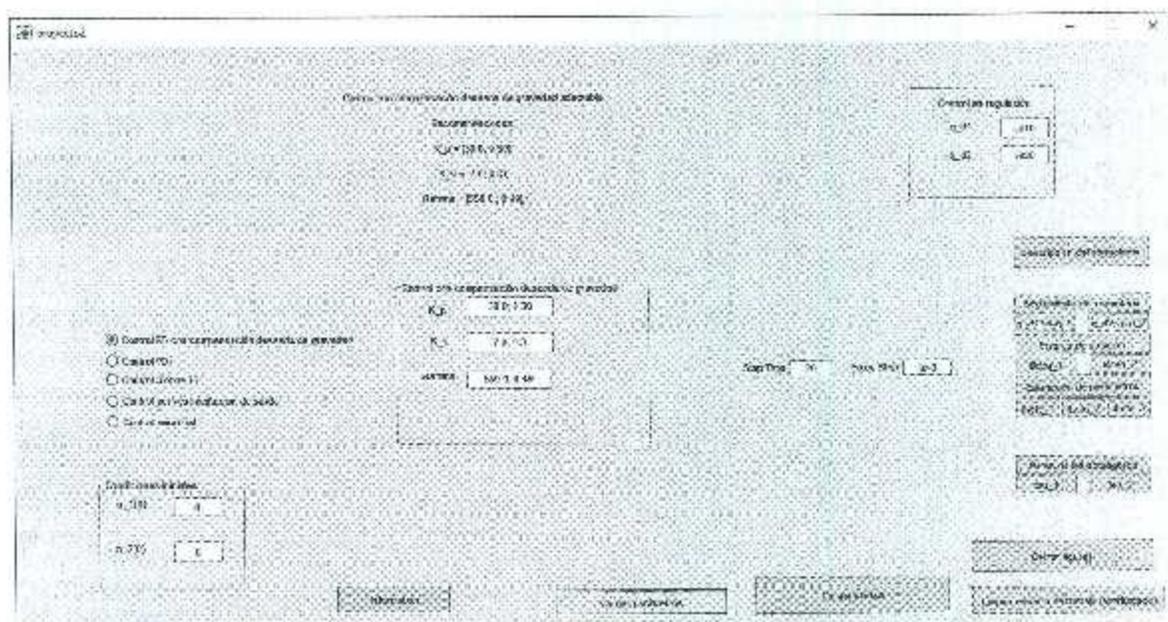


Figura 8.17: Selección de un controlador a simular en la GUI.

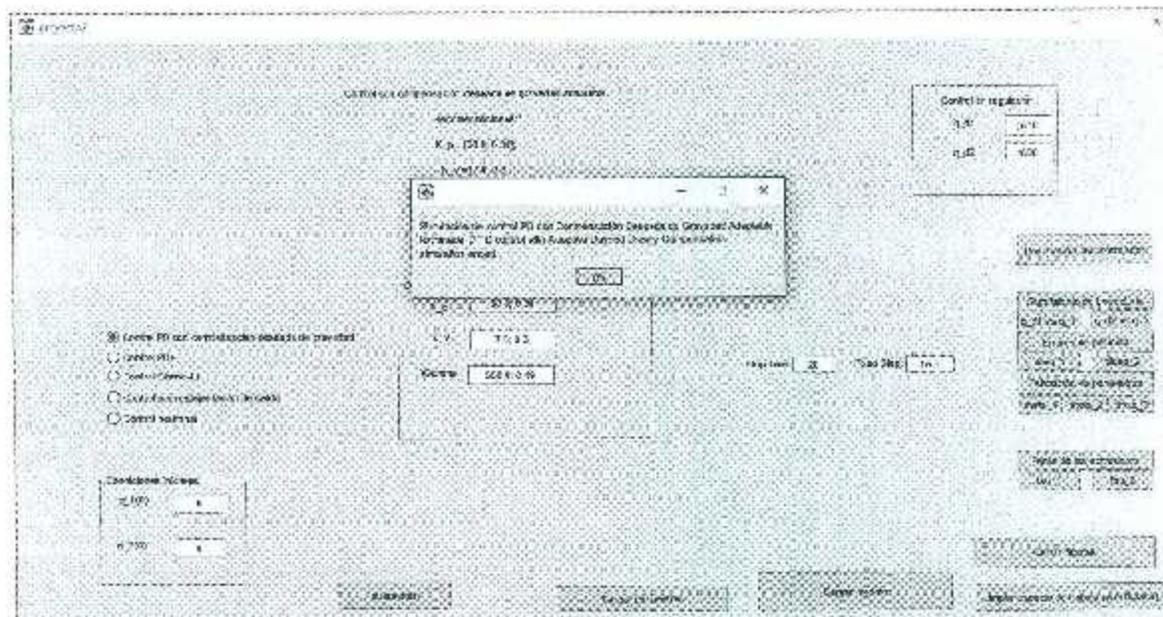


Figura 8.18: Selección de un controlador a simular en la GUI.

Al presionar el botón «Cargar modelo» da inicio la simulación del controlador seleccionado con las ganancias y los parámetros ingresados en los campos de texto estático. Al finalizar la simulación aparece una ventana emergente con la leyenda «Simulación del control [nombre del controlador seleccionado] terminada. // [controlador seleccionado en inglés] simulation ended.» (ver Figura 8.18).

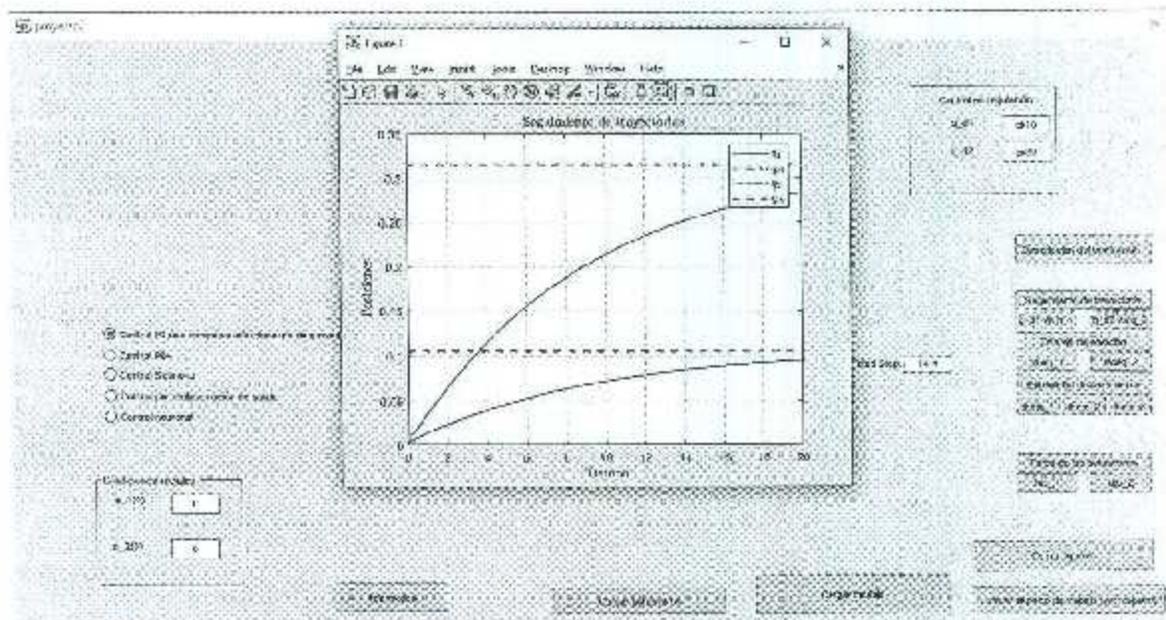


Figura 8.19: Selección de un controlador a simular en la GUI.

Al terminar la simulación, se puede seleccionar la gráfica a mostrar a partir del conjunto de botones en el lado derecho de la interfaz, y la gráfica deseada se muestra en una ventana "figure" de MATLAB® (ver Figura 8.19).

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo se llevan a cabo los análisis de estabilidad, convergencia y acotamiento de soluciones de sistemas de control adaptable de robots manipuladores, tanto en regulación como en seguimiento de trayectorias de posición, utilizando la teoría de Lyapunov auxiliada del lema de Barbalat, y el Principio de Invariancia de LaSalle [LaSalle, 1976] en el análisis de sistemas no lineales autónomos y no autónomos, aplicados a cinco esquemas de control de robots manipuladores de dos grados de libertad.

Se observan los resultados del controlador PD con compensación deseada de gravedad adaptable en regulación, utilizando el modelo del robot Pelican (Apéndice A), utilizando argumentos estándares de control adaptable, a partir de los cuales es posible concluir la convergencia de los errores de posición y de velocidad a cero, utilizando el lema de Barbalat y alternativamente el Principio de Invariancia de LaSalle para sistemas autónomos.

Para el controlador PD+ adaptable y el controlador con compensación (Slotine-Li) adaptable se utilizaron diferentes cotas y leyes adaptables para concluir la estabilidad y convergencia de los errores de posición a cero, utilizando el lema de Barbalat y alternativamente el Principio de Invariancia de LaSalle para sistemas no autónomos [LaSalle, 1976].

En el controlador con realimentación de salida adaptable se utiliza el modelo dinámico de un brazo robótico planar de dos grados de libertad, y se analiza su estabilidad definiendo cotas para los términos de la función de Lyapunov y encontrando los valores de la constante de diseño para utilizar la teoría de Lyapunov auxiliada del lema de Barbalat, y alternativamente del Principio de Invariancia de LaSalle.

El último controlador estudiado fue por redes neuronales adaptable, en el cual se hace una breve introducción al control neuronal, donde con la propiedad de aproximación universal de las redes neuronales, y con la función de activación definida se controla un brazo robótico de dos grados de libertad, analizando las propiedades de su estabilidad mediante el lema de Barbalat y definiendo los dominios necesarios para utilizar el Principio de Invariancia de LaSalle.

También se explica el desarrollo de una interfaz gráfica de usuario (GUI) donde, me-

dante el uso de MATLAB/Simulink se puede llevar a cabo la simulación de cada uno de los controladores con los que se trabajó durante la tesis.

A partir del trabajo con el controlador PD con compensación descada de gravedad adaptable se escribió el artículo *“Análisis de estabilidad y convergencia global de un esquema adaptable en regulación utilizando el Principio de Invariancia de LaSalle.”* [Falcón et al., 2017] en el IV Congreso Internacional de Robótica y Computación que se llevó a cabo en Mayo de 2017 en Los Cabos, Baja California Sur.

Apéndice A

Datos del robot de 2 *grados de libertad*

A.1. Modelo dinámico del robot experimental de dos g.d.l.

En este apéndice se muestra el modelo dinámico y los valores numéricos de los parámetros del robot de 2 g.d.l. Pelican ubicado en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada B.C., México.

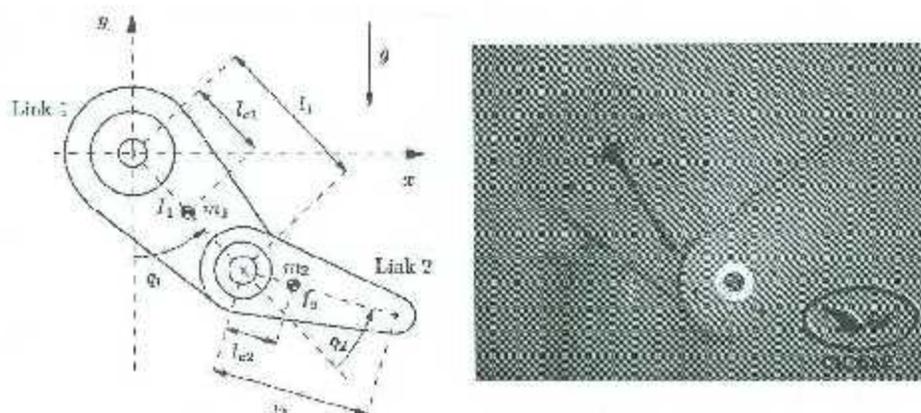


Figura A.1: Robot experimental de dos grados de libertad.

Tabla A.1: Parámetros conocidos del robot Pelican.

Descripción	Notación	Valor
Longitud Eslabón 1	l_1	0.450 m
Longitud Eslabón 2	l_2	0.450 m
Distancia al centro de masa (eslabón 1)	l_{c1}	0.091 m
Distancia al centro de masa (eslabón 2)	l_{c2}	0.048 m
Masa eslabón 1	m_1	23.902 kg
Masa eslabón 2	m_2	3.880 kg
Inercia eslabón 1 respecto al centro de masa	I_1	1.266 kg · m ²
Inercia eslabón 2 respecto al centro de masa	I_2	0.093 kg · m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81 $\frac{m}{s^2}$

Los g. d. l. están asociados a los ángulos q_1 y q_2 que se miden a partir de la extensión del eslabón 1 hasta el eslabón 2 mostrado en la Figura A.1, siendo ambos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. El vector $q(t)$ queda como:

$$q(t) = [q_1(t) \quad q_2(t)]^T$$

El vector de estados $\frac{d}{dt} [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$ queda como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Se despeja y se resuelve para \ddot{q}_1 y \ddot{q}_2 :

$$m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} \dot{q}_1 + c_{12} \dot{q}_2 + g_1 = \tau_1$$

$$m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} \dot{q}_1 + c_{22} \dot{q}_2 + g_2 = \tau_2$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{m_{11}} [\tau_1 - m_{12} \ddot{q}_2 - c_{11} \dot{q}_1 - c_{12} \dot{q}_2 - g_1]$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{m_{22}} [\tau_2 - m_{21} \ddot{q}_1 - c_{21} \dot{q}_1 - c_{22} \dot{q}_2 - g_2]$$

Debido a que la matriz $M(q)$ es simétrica, $m_{12} = m_{21}$.

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{1}{m_{11}} \left[\tau_1 - \frac{m_{12}}{m_{22}} [\tau_2 - m_{21} \ddot{q}_1 - c_{21} \dot{q}_1 - c_{22} \dot{q}_2 - g_2] - c_{11} \dot{q}_1 - c_{12} \dot{q}_2 - g_1 \right] \\ \ddot{q}_2 &= \frac{1}{m_{22}} \left[\tau_2 - \frac{m_{21}}{m_{11}} [\tau_1 - m_{12} \ddot{q}_2 - c_{11} \dot{q}_1 - c_{12} \dot{q}_2 - g_1] - c_{21} \dot{q}_1 - c_{22} \dot{q}_2 - g_2 \right] \end{aligned}$$

$$\ddot{q}_1 = \left[\frac{1}{m_{11} m_{22} - m_{12}^2} \right] \left[m_{22} \tau_1 - m_{12} \tau_2 + [m_{12} c_{21} - m_{22} c_{11}] \dot{q}_1 \right. \\ \left. + (m_{12} c_{22} - m_{22} c_{12}) \dot{q}_2 - m_{22} g_1 + m_{12} g_2 \right]$$

$$\ddot{q}_2 = \left[\frac{1}{m_{11} m_{22} - m_{12}^2} \right] \left[-m_{21} \tau_1 + m_{11} \tau_2 + [m_{12} c_{11} - m_{11} c_{21}] \dot{q}_1 \right. \\ \left. - (m_{12} c_{12} - m_{11} c_{22}) \dot{q}_2 + m_{12} g_1 - m_{11} g_2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \left\{ \begin{bmatrix} m_{12} c_{21} - m_{22} c_{11} & m_{12} c_{22} - m_{22} c_{12} \\ m_{12} c_{11} - m_{11} c_{21} & m_{12} c_{12} - m_{11} c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} -m_{22} & m_{12} \\ m_{12} & -m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\}$$

donde $k = m_{11} m_{22} - m_{12}^2$.

El modelo dinámico del robot puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(t) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}$$

donde:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}$$

donde:

$$M_{11}(\mathbf{q}) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2 m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2,$$

$$M_{12}(\mathbf{q}) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2,$$

$$M_{21}(\mathbf{q}) = M_{12}(\mathbf{q}),$$

$$M_{22}(\mathbf{q}) = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2,$$

$$C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2],$$

$$C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1,$$

$$C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$$

$$g_1(\mathbf{q}) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \operatorname{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2),$$

$$g_2(\mathbf{q}) = m_2 g l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2)$$

Apéndice B

Condiciones suficientes para funciones definidas positivas

A continuación se presentan condiciones suficientes para que una función sea definida positiva (tanto en forma local como global) a modo de un lema [Kelly y Santibáñez, 2003].

B.1. Aplicación a funciones definidas positivas

Lema B.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con derivadas parciales continuas, al menos hasta de segundo orden. Supóngase que

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0) &= 0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Luego, se toman las siguientes condiciones sobre $H(\cdot)$, que es una matriz Hessiana de $f(x)$:

- Si $H(0) > 0$, entonces $f(x)$ es una función definida positiva (al menos en forma local).
- Si $H(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(x)$ es una función definida positiva en forma global.

Ejemplo B.1. A partir de aquí se demostrará que la función $f(\tilde{q})$ mostrada en la ecuación (3.22) está acotada inferiormente por una forma cuadrática en \tilde{q} . Específicamente se demostrará que

$$\mathcal{U}(q_d - \tilde{q}) - \mathcal{U}(q_d) - g^T(q_d) \tilde{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \geq \frac{1}{2} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \|\tilde{q}\|^2$$

es válida para todo $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$, con $K_p = K_p^T$ tal que $\lambda_{\min}\{K_p\} > k_g$, siendo $q_d \in \mathbb{R}^n$ un vector constante, y $\mathcal{U}(q)$ la energía potencial del robot. Aquí se supone que todas las articulaciones del robot son del tipo rotacional.

Para realizar la prueba se recurrirá a demostrar que la siguiente función $g(\tilde{q})$ es definida positiva de manera global.

$$g(\tilde{q}) = \mathcal{U}(q) - \mathcal{U}(q_d) + g^T(q_d) \tilde{q} + \frac{1}{2} [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \|\tilde{q}\|^2$$

Para dicha finalidad, se empleará el Lema B.1. Nótese que $f(\mathbf{0}) = 0$. El gradiente de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ con respecto a $\tilde{\mathbf{q}}$ es:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} f(\tilde{\mathbf{q}}) = -g(\mathbf{q}) + g(\mathbf{q}_a) + K_p \tilde{\mathbf{q}} - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] \tilde{\mathbf{q}},$$

donde el gradiente de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es nulo para $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

La matriz hessiana $H(\tilde{\mathbf{q}})$ de $f(\tilde{\mathbf{q}})$ queda como

$$H(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial^2 g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} + K_p - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I.$$

Ahora se verá que ésta es definida positiva. Se parte del hecho de que la constante k_g satisface

$$k_g > \left\| \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

Por lo tanto, resulta cierto que

$$\lambda_{\min}\{K_p\} - \lambda_{\min}\{K_p\} + k_g > \left\| \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|,$$

o, equivalentemente

$$\lambda_{\min}\{K_p\} - \lambda_{\max}\{[\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I\} > \left\| \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

En virtud del hecho de que para dos matrices simétricas A y B se tiene que $\lambda_{\min}\{A - B\} \geq \lambda_{\min}\{A\} - \lambda_{\max}\{B\}$, luego

$$\lambda_{\min}\{K_p - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I\} > \left\| \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\|.$$

Finalmente, invocando el resultado sobre matrices que establece, para una matriz dada A simétrica y definida positiva, y una matriz B simétrica, que si se tiene $\lambda_{\min}\{A\} > \|B\|$ entonces $A + B > 0$, esto permite concluir que:

$$K_p - [\lambda_{\min}\{K_p\} - k_g] I + \frac{\partial^2 g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} > 0,$$

siendo justamente ésta la expresión del hessiano. Por lo tanto, éste es definido positivo y en acuerdo con el Lema B.1, la función $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva globalmente.

Apéndice C

Dinámica residual

Asociada a cada modelo dinámico de robots existe una función denominada *dinámica residual* de notable importancia para el estudio de estabilidad de diversos controladores [Kelly y Santibáñez, 2003, página 109].

La dinámica residual $h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ se define de la siguiente manera:

$$h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = [M(q_d) - M(q)] \ddot{q}_d + [C(q_d, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q})] \dot{q}_d + g(q_d) - g(q). \quad (C.1)$$

Esta función tiene la característica que $h(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Además, la dinámica residual $h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})$ no crece más rápido que $\|\dot{\tilde{q}}\|$ ni que $\|\tilde{q}\|$, y además sólo podrá crecer arbitrariamente cuando $\|\dot{\tilde{q}}\|$ lo haga, independientemente de $\|\tilde{q}\|$.

En este punto es conveniente mencionar que en la demostración de dichas características, juega un papel importante una clase de funciones continuamente diferenciable, monótonamente crecientes, y acotadas. Se considerará el tratamiento usando un elemento de esta clase de funciones: la función tangente hiperbólica.

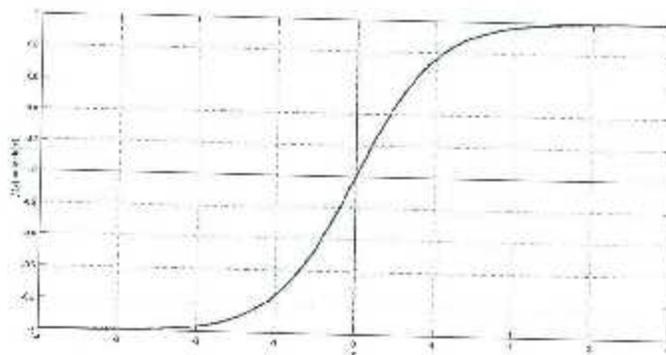


Figura C.1: Función tangente hiperbólica $f(x) = \tanh(x)$.

La tangente hiperbólica $\tanh(x)$ de un número real x se define como:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La gráfica de la función $\tanh(x)$ se muestra en la Figure C.1. Ésta es una función continua, monótonamente creciente, y con derivada $\text{sech}^2(x)$. Además, satisface $|x| \geq |\tanh(x)|$ y $1 \geq |\tanh(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición C.1 (Función tangente hiperbólica vectorial). Se define la función tangente hiperbólica vectorial de la siguiente forma:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tanh(x_1) \\ \tanh(x_2) \\ \vdots \\ \tanh(x_n) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ésta satisface las siguientes propiedades para todo $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$:

- a) $\|f(\mathbf{x})\| \leq \alpha_1 \|\mathbf{x}\|$,
- b) $\|f(\mathbf{x})\| \leq \alpha_2$,
- c) $\|f(\mathbf{x})\|^2 \leq \alpha_3 f^T(\mathbf{x}) \mathbf{x}$,
- d) $\|f(\mathbf{x})\| \leq \alpha_4 \|\hat{\mathbf{x}}\|$,

con $\alpha_1, \dots, \alpha_4 > 0$. Teniendo $f(\mathbf{x})$ definida como en (C.2), las diversas constantes quedan como $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{n}$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$. Y por lo tanto

$$\|f(\mathbf{x})\| \leq \begin{cases} \|\mathbf{x}\| & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

El vector de *dinámica residual* $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de dimensiones $n \times 1$ depende de los errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}$, de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$, así como del movimiento articular deseado $\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d$, que se supone acotado. Además, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ cumple con la siguiente propiedad:

Propiedad C.1. Existen constantes $k_{h1}, k_{h2} \geq 0$ tales que la norma de la dinámica residual cumple con

$$\|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq k_{h1} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + k_{h2} \|f(\tilde{\mathbf{q}})\| \quad (\text{C.4})$$

para todo $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^n$, donde $f(\tilde{\mathbf{q}})$ es la función tangente hiperbólica vectorial.

La Demostración de la Propiedad C.1 puede consultarse en [Kelly y Santibáñez, 2003, página 109].

De acuerdo con la ecuación (C.1), la norma de la dinámica residual satisface la siguiente desigualdad

$$\|\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| = \left\| \left[M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q}) \right] \ddot{\mathbf{q}}_d \right\| + \left\| \left[C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_d \right\| + \|g(\mathbf{q}_d) - g(\mathbf{q})\| \quad (\text{C.5})$$

De donde a partir del primer término del lado derecho de la ecuación (C.5), utilizando la propiedad 2.3, se tiene la siguiente desigualdad

$$\left\| \left[M(\mathbf{q}_d) - M(\mathbf{q}) \right] \ddot{\mathbf{q}}_d \right\| \leq k_M \|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M \|\tilde{\mathbf{q}}\|$$

donde para determinar la constante k_M se tiene

$$k_M \geq n^2 \left(\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right).$$

Para el segundo término del lado derecho de la ecuación (C.5), se utiliza la propiedad 2.12, obteniendo la siguiente desigualdad

$$\left\| \left[C(q_d, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}_d \right\| \leq k_{C_1} \|\dot{q}_d\|_M \|\tilde{q}\| + k_{C_2} \|\dot{q}_d\|_M^2 \|\tilde{q}\| \quad (C.6)$$

Sin embargo, la norma del segundo término del lado derecho de la ecuación (C.5) también satisface que

$$\left\| \left[C(q_d, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}_d \right\| \leq \left| C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d \right| + \left| C(q, \dot{q}) \dot{q}_d \right|. \quad (C.7)$$

Ahora, puede observarse que el lado derecho de la ecuación (C.7) cumple con que

$$\begin{aligned} \left| C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d \right| &\leq k_{C_3} \|\dot{q}_d\|_M^2, \\ \left| C(q, \dot{q}) \dot{q}_d \right| &\leq k_{C_4} \|\dot{q}_d\|_M \|\tilde{q}\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\left\| \left[C(q_d, \dot{q}_d) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}_d \right\| \leq k_{C_1} \|\dot{q}_d\|_M^2 + k_{C_4} \|\dot{q}_d\|_M \|\tilde{q}\|. \quad (C.8)$$

Para el último término del lado derecho de la ecuación (C.5), utilizando la propiedad 2.16, se llega a que

$$\left\| g(q_d) - g(q) \right\| \leq k_g \|\tilde{q}\|. \quad (C.9)$$

Por lo tanto, la cota superior de la norma de la dinámica residual está dada por

$$\|h(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}})\| \leq k_{C_1} \|\dot{q}_d\|_M \|\tilde{q}\| + \left[k_g + k_M \|\dot{q}_d\|_M + k_{C_4} \|\dot{q}_d\|_M^2 \right] \|\tilde{q}\| \quad (C.10)$$

C.1. Dinámica residual cuando $\dot{q}_d \equiv 0$

En la situación en la que $\dot{q}_d = 0$, y por lo tanto $\ddot{q}_d \equiv 0$, la dinámica residual (C.1) se simplifica a

$$h(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}}) = g(q_d) - g(q).$$

Debido a la prueba de la Propiedad C.1 mostrada en [Kelly y Santibáñez, 2003] se sabe que las constantes s_1 y s_2 están dadas por

$$s_1 = \left[k_g + k_M \|\ddot{q}_d\|_M + k_{C_2} \|\dot{q}_d\|_M^2 \right], \quad (C.11)$$

$$s_2 = 2 \left[k' + k'_M \|\ddot{q}_d\|_M + k_{C_1} \|\dot{q}_d\|_M^2 \right]. \quad (C.12)$$

En el caso donde q_d es constante estas expresiones resultan reducidas a (C.13) y (C.14):

$$s_1 = k_g, \quad (C.13)$$

$$s_2 = 2k'. \quad (C.14)$$

Además, se tienen las siguientes expresiones para k_{h1} y para k_{h2} :

$$k_{h1} \geq k_{C1} \|\dot{q}_d\|_{M_1}, \quad (C.15)$$

$$k_{h2} \geq \frac{s_2}{\tanh\left(\frac{s_2}{s'}\right)}. \quad (C.16)$$

De donde se concluye que éstas pueden ser

$$k_{h1} = 0, \quad (C.17)$$

$$k_{h2} \geq \frac{2k'}{\tanh\left(\frac{2k'}{k_y}\right)}. \quad (C.18)$$

A partir de esta última desigualdad puede demostrarse que k_{h2} cumple con

$$\boxed{k_{h2} \geq k_g}. \quad (C.19)$$

Donde se llega a:

$$\|h(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\| = \|g(q_d) - g(q)\| \leq k_{h2} \tanh(\|\tilde{q}\|), \quad (C.20)$$

$$\leq k_{h2} \left\| \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}_1) \\ \tanh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \right\|, \quad (C.21)$$

para todo $q_d, \tilde{q} \in \mathbb{R}^n$.

Bibliografía

- [Barkana, 2014] Barkana, I. (2014). Defending the beauty of the invariance principle. *International Journal of Control*, 87(1):186–206.
- [Falcón *et al.*, 2017] Falcón, R., Santibáñez, V., Ollervides, J., y Sandoval, J. (2017). Análisis de estabilidad y convergencia global de un esquema adaptable en regulación utilizando el principio de invariancia de LaSalle. *Congreso Internacional de Robótica y Computación CIRC 2017*, pp. 61–67.
- [Haddad y Chellaboina, 2011] Haddad, W. y Chellaboina, V. (2011). *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*. Princeton University Press.
- [Horn y Johnson, 1990] Horn, R. y Johnson, C. (1990). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
- [Hunt *et al.*, 2006] Hunt, B., Lipsman, R., Rosenberg, J., Coombes, K., Osborn, J., y Stuck, G. (2006). *A Guide to MATLAB: For Beginners and Experienced Users*. Cambridge University Press.
- [Kelly y Santibáñez, 2003] Kelly, R. y Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Automática y Robótica. Pearson Educación.
- [Kelly *et al.*, 2006] Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A. (2006). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall.
- [Koditschek, 1984] Koditschek, D. (1984). Natural motion for robot arms. En *Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on*, volumen 23, pp. 733–735. IEEE.
- [La Salle y Lefschetz, 1962] La Salle, J. y Lefschetz, S. (1962). Stability by Liapunov's Direct Method With Applications. *Physics Today*, 15:59.
- [LaSalle, 1960] LaSalle, J. (1960). Some extensions of liapunov's second method. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 7(4):520–527.
- [LaSalle, 1976] LaSalle, J. (1976). Stability of nonautonomous systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1(1):83–90.

- [Lee *et al.*, 2001] Lee, T.-C., Liaw, D.-C., y Chen, B.-S. (2001). A general invariance principle for nonlinear time-varying systems and its applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1989–1993.
- [Lewis *et al.*, 2002] Lewis, F., Campos, J., y Selmic, R. (2002). *Neuro-Fuzzy Control of Industrial Systems with Actuator Nonlinearities*. Frontiers in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Loría *et al.*, 2005] Loría, A., Kelly, R., y Teel, A. R. (2005). Uniform parametric convergence in the adaptive control of mechanical systems. *European Journal of Control*, 11(2):87 – 100.
- [Loría *et al.*, 2002] Loría, A., Panteley, E., Popovic, D., y Teel, A. R. (2002). δ -persistence of excitation: a necessary and sufficient condition for uniform attractivity. 3:3506–3511 vol.3.
- [Lozano y Taoutaou, 2002] Lozano, R. y Taoutaou, D. (2002). *Commande adaptative et applications*. Hermes Science.
- [MATLAB®, 2015] MATLAB® (2015). *Creating Graphical User Interfaces*. MathWorks.
- [Moreno-Valenzuela *et al.*, 2010] Moreno-Valenzuela, J., Santibáñez, V., Orozco-Manríquez, E., y González-Hernández, L. (2010). Theory and experiments of global adaptive output feedback tracking control of manipulators. *IET Control Theory Applications*, 4(9):1639–1654.
- [Ortega *et al.*, 2013] Ortega, R., Loría, A., Nicklasson, P., y Sira-Ramírez, II. (2013). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Communications and Control Engineering. Springer London.
- [Puga-Guzmán *et al.*, 2014] Puga Guzmán, S., Moreno-Valenzuela, J., y Santibáñez, V. (2014). Adaptive neural network motion control of manipulators with experimental evaluations. *The Scientific World Journal*, p. 13.
- [Santibáñez y Kelly, 1997] Santibáñez, V. y Kelly, R. (1997). Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators. *Automatica*, 33(4):675 – 682.
- [Sarangapani, 2006] Sarangapani, J. (2006). *Neural Network Control of Nonlinear Discrete Time Systems*. Automation and Control Engineering. CRC Press.
- [Slotine y Li, 1991] Slotine, J. y Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- [Slotine y Li, 1987] Slotine, J.-J. E. y Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. *The international journal of robotics research*, 6(3):49–59.
- [Spelsberg-Korspeter *et al.*, 2012] Spelsberg-Korspeter, G., Hochlenert, D., Hefel, E., Wagner, A., Hagedorn, P., y Sampaio, R. (2012). Construction of Lyapunov functions for the estimation of basins of attraction. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 34:633 – 639.

- [Yesildirek y Lewis, 1994] Yesildirek, A. y Lewis, F. L. (1994). A neural network controller for feedback linearization. En *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volumen 3, pp. 2494–2499 vol.3.
- [Zhang *et al.*, 2000] Zhang, F., Dawson, D. M., de Queiroz, M. S., y Dixon, W. E. (2000). Global adaptive output feedback tracking control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(6):1203–1208.

Índice alfabético

- antisimetría, 18
- Barbalat
 - Lema de, 15, 43
- coeficiente de fricción, 6
- compensación
 - de gravedad, 47
 - deseada de gravedad, 47
- control
 - adaptable, 19
 - de posición, 47
 - de regulación, 47
- controlador
 - adaptable, 22
 - con compensación adaptable (Slotine-Li), 73
 - con realimentación de salida adaptable, 83
 - P con realimentación de velocidad, 29
 - PD con compensación de gravedad, 48
 - PD con compensación deseada de gravedad adaptable, 47
 - PD I adaptable, 63
 - por redes neuronales adaptable, 97
- coordenadas polares, 73
- Coriolis, 16, 18, 20
- diagrama a bloques
 - control PD+, 63
- dinámica residual, 86, 136
- ecuación diferencial
 - autónoma, 35
 - lineal, 6, 35
 - no autónoma, 65, 75
 - no lineal, 30, 93
- energía
 - potencial, 134
- equilibrio
 - asintóticamente estable, 1
 - de un sistema, 1
 - estable, 4
 - punto de, 1, 6, 7
- error
 - de posición, 15, 29, 47
- estabilidad, 4, 23
 - asintótica, 43
- ganancia
 - adaptable, 49, 86
- LaSalle, 25
 - Principio de Invariancia, 25
- ley adaptable, 50, 64
- linealidad en los parámetros dinámicos, 21
- Lipschitz, 22
- Lyapunov, 1
 - método directo de Lyapunov, 1
- Matriz de inercias, 16, 20
- matriz de inercias, 16, 18
- péndulo simple, 6
 - con fricción, 8
 - sin fricción, 7
- parámetros de diseño, 51
- plano de fase, 5
- región de atracción, 8
- retrato de fase, 5
- símbolos de Christoffel, 18
- Simulink, 126
- sistema
 - autónomo, 22, 28
 - masa-resorte, 6
 - no autónomo, 37