



**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“Evaluación de Esquemas Adaptables de Control  
Aplicados a un Giroscopio de 2 Grados  
de Libertad”**

POR

**Ing. Jorge Alberto Montoya Cháirez**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila**

**CODIRECTOR DE TESIS**

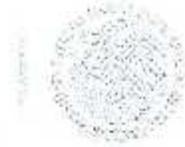
**Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela**

**ISSN: 0188-9060**



**RIITEC: (07)-TMCIE-2017**

Torreón, Coahuila, México  
Junio 2017



Torrón, Coah., 03/ Junio/2017  
Dependencia: DEPI/CPCIE  
Oficio: DEPI/CPCIE/050/2017  
Asunto: Autorización de impresión  
de tesis.

**C. Montoya Cháirez Jorge Alberto**  
**CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.**  
**PRESENTE**

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

**"Evaluación de esquemas adaptables de control aplicados a un giroscopio de 2 grados de libertad"**

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con número de registro **RIITEC: (07)-TMCIE-2017**, para que proceda a la impresión del mismo.

**ATENTAMENTE**

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

**DR. ARMANDO LONGORIA DE LA TORRE**  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación  
del Instituto Tecnológico de la Laguna





Torreón, Coah. 13/Junio/2017

**DR. ARMANDO LONGORIA DE LA TORRE**  
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

**"Evaluación de esquemas adaptables de control aplicados a un giroscopio de 2 grados de libertad"**

Desarrollado por el **C. Montoya Cháirez Jorge Alberto**, con número de control **M1513005** y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

**ATENTAMENTE**  
EDUCACIÓN TECNOLÓGICA FUENTE DE INNOVACIÓN

**Dr. Víctor A. Santibañez Davila**  
Asesor/Director de Tesis

**Dr. Eduardo J. Marcelo Valenzuela**  
Co-Director de Tesis

**Dr. Alejandro G. Dzul López**  
Comité Tutorial

**Dr. Ricardo E. Campa Cocom**  
Comité Tutorial



---

## Dedicatoria

A mi padre Juan Manuel Montoya Reyes, por todos los consejos que me ha dado a lo largo de mi vida.

A mi madre Mónica Cháirez Islas, por siempre apoyarme con todas mis decisiones.

Que sin ustedes dos yo no estaría en donde estoy, por eso y muchas cosas más, éste y todos los trabajos de mi vida van dedicados a ustedes.

---

## Agradecimientos

Al Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila y al Dr. Javier Moreno Valenzuela, por todo su apoyo y dirección en este proyecto.

Al Dr. Alejandro Enrique Dzul López y al Dr. Ricardo Emanuel Campa Cocom, por su apoyo y sus correcciones sugeridas a este documento de tesis, los cuales enriquecieron su contenido.

A todos mis maestros durante mis estudios de maestría, por abrir los conocimientos en el área de teoría de control.

A mis compañeros del área de posgrado, por todos sus consejos y compañerismo que sin ustedes, este trabajo de tesis no sería igual.

Al Instituto Tecnológico de la Laguna, a los proyectos TecNM y al CONACYT por permitirme continuar con mis estudios y por el apoyo otorgado para la investigación en México respectivamente.

---

# Evaluación de esquemas adaptables de control aplicado a un giroscopio de 2 grados de libertad

Jorge Alberto Montoya Cháirez

## Resumen

Este trabajo de tesis se relaciona con el giroscopio comercial Quanser, el cual tiene la capacidad de poderse utilizar en diferentes configuraciones y variar su número de grados de libertad (el mecanismo cuenta con cuatro grados de libertad, uno del disco y tres del mecanismo cardán; para este trabajo se configuró a dos grados de libertad). Para la configuración utilizada en este trabajo se obtiene el modelo dinámico y se trabaja de forma subactuada (es decir, en el anillo a controlar no se aplica par alguno). Se obtiene la forma normal del sistema, para poder realizar un control de linealización por realimentación, el cual, al ser un control basado en el modelo, se basa en el conocimiento de los parámetros del giroscopio, así como en la estructura del modelo dinámico. Se compara el controlador antes mencionado con dos versiones adaptables del mismo; el primero es una red neuronal, encargada de linealizar el sistema sin la necesidad de conocer el modelo dinámico del giroscopio, y el segundo es un controlador adaptable, basado en el vector regresor, el cual también se encarga de linealizar el sistema, sin la necesidad de conocer los parámetros del mismo (inercias en el caso del giroscopio). Los tres controladores cuentan con prueba de estabilidad de lazo cerrado, y cuentan con validaciones tanto en simulación como en experimentación.

---

## Abstract

This thesis work deals with the Quanser 3-DOF gyroscope, which has the ability to be configured in several manners in order to vary the number of degrees of freedom (the system itself has four degrees of freedom, one relates to the movement of the disk and the rest come from a three-gimbals arrangement commonly known as a cardan mechanism; for this particular work the gyroscope is set to two degrees of freedom). For the configuration here reported, the dynamics are obtained as underactuated two degrees of freedom mechanism (the gimbal to be controlled is not actuated). The normal form of the system is obtained to design a feedback linearization controller which, being model based, depends on the knowledge of the gyroscope's parameters and the structure of its dynamics. The so mentioned feedback linearization controller is compared with two adaptive versions of itself; the first one is based around a neural network, which shall linearize the dynamics without the need of a model, and the second one is a regressor-based adaptive controller, which linearizes the system without the knowledge of the system's parameters (in the case of the gyroscope all the parameters are inertias). A closed loop stability proof is presented for each controller and all of them are validated with simulations and real time experiments.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos y contribuciones	3
1.2.1. Objetivos	3
1.2.2. Contribuciones	3
1.3. Estructura de la tesis	3
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>5</b>
2.1. Sistemas subactuados	5
2.2. Linealización por realimentación [Khalil, 2002]	5
2.2.1. Linealización entrada salida	7
2.2.2. Linealización exacta por realimentación	12
2.2.3. Control por realimentación de estados (estabilización)	13
2.3. Control por red neuronal	14
2.3.1. Estructura de una red neuronal	14
2.4. Control adaptable	17
<b>3. Giroscopio</b>	<b>19</b>
3.1. Cinemática del giroscopio de 2 g.d.l.	19
3.2. Modelo dinámico del giroscopio	22
3.2.1. Análisis de estabilidad del origen en lazo abierto	26
<b>4. Control de linealización por realimentación de salida: aplicado al giroscopio de 2 g.d.l.</b>	<b>28</b>
4.1. Controlador basado en el modelo	31
4.1.1. Dinámica de ceros	33
4.2. Implementación	33

---

4.2.1. Resultados en simulación	33
4.2.2. Resultados experimentales	39
<b>5. Control adaptable por realimentación neuronal aplicado al giroscopio de 2 g.d.l.</b>	<b>45</b>
5.1. Prueba de estabilidad	47
5.2. Implementación	49
5.2.1. Resultados en simulación	50
5.2.2. Resultados experimentales	57
<b>6. Control adaptable basado en el regresor aplicado al giroscopio de 2 g.d.l</b>	<b>65</b>
6.1. Prueba de estabilidad	68
6.2. Implementación	70
6.2.1. Resultados en simulación	71
6.2.2. Resultados experimentales	76
<b>7. Análisis de los resultados</b>	<b>82</b>
7.1. Simulación	82
7.2. Experimentación	85
<b>8. Conclusiones</b>	<b>89</b>
A. Coordenadas cíclicas o ignorables [Joag, 2001]	93
B. Parámetros del giroscopio	94

# Índice de figuras

1.1. Giroscopio montado en una suspensión cardán . . . . .	1
2.1. Robot brachiation (izquierda) y acrobot (derecha) . . . . .	6
2.2. Diagrama de bloques de un sistema en forma normal . . . . .	12
2.3. Esquema de una red neuronal . . . . .	14
3.1. Giroscopio de Quanser y nomenclatura de discos . . . . .	20
3.2. Giroscopio en una posición arbitraria . . . . .	20
3.3. Giroscopio en posición de “home” . . . . .	21
4.1. Diagrama de bloques del controlador de Linealización por realimentación . . . . .	33
4.2. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ y $r$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación. . . . .	35
4.3. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación. . . . .	35
4.4. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control de linealización por realimentación. . . . .	36
4.5. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación. . . . .	36
4.6. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	37
4.7. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	37
4.8. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	38
4.9. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	38

4.10. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación. . . . .	40
4.11. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación en experimento. . . . .	41
4.12. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control de linealización por realimentación. . . . .	41
4.13. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación. . . . .	42
4.14. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	42
4.15. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	43
4.16. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	43
4.17. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ con respecto con el control de linealización por realimentación modificado (4.37). . . . .	44
5.1. Diagrama de bloques del control adaptable por realimentación neuronal . . . . .	50
5.2. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	52
5.3. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	52
5.4. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	53
5.5. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	53
5.6. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de los pesos $\hat{w}_g$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	54
5.7. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de los pesos $\hat{w}_f$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	54
5.8. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	55
5.9. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	55
5.10. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	56
5.11. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	56

---

5.12. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de los pesos $\hat{w}$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	57
5.13. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	59
5.14. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	59
5.15. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	60
5.16. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	60
5.17. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de los pesos $\hat{w}_g$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	61
5.18. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de los pesos $\hat{w}_f$ en función del tiempo con el control neuronal. . . . .	61
5.19. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	62
5.20. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	62
5.21. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	63
5.22. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	63
5.23. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de los pesos $\hat{w}$ en función del tiempo con el control neuronal modificado (5.11). . . . .	64
6.1. Diagrama de bloques del control adaptable . . . . .	71
6.2. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	72
6.3. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	73
6.4. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	73
6.5. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	74
6.6. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $r$ en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	74
6.7. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	75

---

6.8. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	75
6.9. <b>Resultados de simulación:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	76
6.10. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $\tau$ en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	78
6.11. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	78
6.12. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	79
6.13. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control adaptable. . . . .	79
6.14. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de comparación de $q_3$ contra $\tau$ en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	80
6.15. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de $q_2$ en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	80
6.16. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica del error de posición en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	81
6.17. <b>Resultados de tiempo real:</b> Gráfica de la entrada de control $\tau$ en función del tiempo con el control adaptable modificado (6.12). . . . .	81
7.1. Norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición y de la entrada de control $\tau$ para el control de linealización por realimentación de las ecuaciones (4.31) y (4.37) en simulación. . . . .	83
7.2. Norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición y de la entrada de control $\tau$ para el control neuronal de las ecuaciones (5.1) y (5.11) en simulación. . . . .	84
7.3. Norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición y de la entrada de control $\tau$ para el control adaptable de las ecuaciones (6.1) y (6.12) en simulación. . . . .	84
7.4. Comparación de la norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición para los controladores (4.31), (4.37), (5.1) (5.11) (6.1) (6.12) en simulación. . . . .	85
7.5. Comparación de la norma $\mathcal{L}_2$ de la entrada de control $\tau$ para los controladores (4.31), (4.37), (5.1) (5.11) (6.1) (6.12) en simulación. . . . .	85
7.6. Norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición y de la entrada de control $\tau$ para el control de linealización por realimentación (4.31) y (4.37) en experimentación. . . . .	86
7.7. Norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición y de la entrada de control $\tau$ para el control neuronal (5.1) y (5.11) en experimentación. . . . .	87
7.8. Norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición y de la entrada de control $\tau$ para el control adaptable (6.1) y (6.12) en experimentación. . . . .	87

---

7.9. Comparación de la norma $\mathcal{L}_2$ del error de posición para los controladores (4.31), (4.37), (5.1) (5.11) (6.1) (6.12) en experimentación. . . . .	88
7.10. Comparación de la norma $\mathcal{L}_2$ de la entrada de control $u$ para los controladores (4.31), (4.37), (5.1) (5.11) (6.1) (6.12) en experimentación. . . . .	88

# Índice de tablas

4.1. Ganancias para el control de linealización por realimentación en simulación.	34
4.2. Ganancias para el control de linealización por realimentación modificado en simulación.	34
4.3. Lista de ganancias para el control de linealización por realimentación en experimentación.	39
4.4. Lista de ganancias para el control de linealización por realimentación modificado en experimentación.	40
5.1. Ganancias para el controlador por realimentación neuronal en simulación.	51
5.2. Ganancias para el controlador por realimentación neuronal modificado en simulación.	51
5.3. Ganancias para el controlador por realimentación neuronal en experimentación.	58
5.4. Ganancias para el controlador por realimentación neuronal modificado en experimentación.	58
6.1. Ganancias para el control adaptable en simulación.	72
6.2. Ganancias para el control adaptable modificado en simulación.	72
6.3. Ganancias para el control adaptable en experimentación.	77
6.4. Ganancias para el control adaptable modificado en experimentación.	77
B.1. Lista de parámetros del giroscopio.	94

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

De acuerdo a [Meriam y Kraige, 1998], el movimiento giroscópico es uno de los problemas más interesantes en dinámica. Este movimiento sucede cuando el eje alrededor del cual un cuerpo está girando, gira alrededor de otro eje. Aunque la descripción completa de este movimiento implica una considerable complejidad, el ejemplo más común y útil del movimiento giroscópico es cuando el eje de un rotor, que gira a una velocidad constante, gira alrededor de otro eje a velocidad constante (movimiento de precesión).

El giroscopio tiene importantes aplicaciones en la ingeniería. Montado en una suspensión cardán como se ve en la figura 1.1, el giroscopio es libre de momentos externos y sus ejes mantendrán una dirección fija en el espacio independientemente de la rotación de la estructura en la que se encuentra unido. El giroscopio es usado de esta manera en los sistemas de guiado inercial y otros dispositivos de control direccional. Agregándole una masa pendular al aro interno de la suspensión tipo cardán se consigue que la rotación terrestre haga que el giroscopio tenga precesión de forma que el eje de rotación apunte siempre al



Figura 1.1: Giroscopio montado en una suspensión cardán

norte; este efecto es el fundamento de la brújula giroscópica. El giroscopio tiene también importantes usos como dispositivo estabilizador. La precesión controlada de un giroscopio de gran tamaño montado en un buque es usado para producir el momento giroscópico para contrarrestar el balanceo del buque en el mar.

A lo largo de los años se han estudiado diferentes formas para controlar el giroscopio en sus distintos modos de operación. En [Hoffmann y Werner, 2015] y [Abbas *et al.*, 2013], se obtienen controladores basados en el modelo lineal del giroscopio que son aplicados a la planta no lineal. En [Cordero *et al.*, 2014], se propone un controlador PID-PID en cascada utilizando el modelo lineal para sintonizar las ganancias. También se han desarrollado controladores no lineales, como en [Cordero *et al.*, 2015a] y [Cordero *et al.*, 2015b] donde se propone un controlador basado en pasividad con interconexión y asignación de amortiguamiento (IDA-PBC) y un lagrangiano controlado, respectivamente, para un giroscopio. En [Reyhanoglu y van de Loo, 2006] se presentan controladores no lineales para versiones de giroscopios de 3 grados de libertad.

El hecho de controlar la posición de los componentes de un giroscopio se hace con el fin de mantener la estabilidad u orientación de los cuerpos que lo contienen. En este trabajo se utiliza el giroscopio en la misma configuración utilizada en [Cordero *et al.*, 2015a] y [Cordero *et al.*, 2015b] y se le aplican tres controladores distintos (linealización parcial por realimentación, control neuronal, control adaptable basado en el regresor).

Como se ve en [Khalil, 2002], el control de linealización parcial por realimentación tiene como objetivo linealizar parcialmente la planta a controlar y después hacer una reubicación de polos, los cuales se encargarán de estabilizar el sistema parcialmente linealizado; debido a que el sistema no puede ser exactamente linealizado, se tiene una dinámica interna no observable por el controlador, la cual se tiene que analizar, y determinar si el punto de equilibrio de dicho sistema es estable, entonces se determina si el sistema completo en lazo cerrado es de fase mínima es decir, si los puntos de equilibrio de la dinámica de lazo cerrado son asintóticamente estables.

Por otra parte, el control neuronal [Yesildirek y Lewis, 1994] se basa en el controlador por linealización parcial por realimentación, con la diferencia, de que se desconocen las funciones que cancelan los términos no lineales y se utiliza la estructura de las redes neuronales [Hornik *et al.*, 1989] para aproximar dichas funciones; otorgando la ventaja de desconocer el modelo exacto de la estructura a controlar.

El control adaptable basado en el regresor [Sastry e Isidori, 1989] utiliza el controlador de linealización parcial por realimentación al igual que el control neuronal, con la diferencia de que en este controlador se asume que se conoce la estructura del sistema a controlar [Kelly *et al.*, 2006], pero no requiere conocer sus parámetros.

## 1.2. Objetivos y contribuciones

### 1.2.1. Objetivos

El objetivo principal del proyecto de tesis es el desarrollo de controladores adaptables enfocados al giroscopio de dos grados de libertad subactuado.

#### Objetivos específicos

- Desarrollar un control de linealización parcial por realimentación.
- Desarrollar un control adaptable por realimentación neuronal.
- Desarrollar un control adaptable basado en el regresor.
- Hacer una comparación entre los tres controladores desarrollados, tanto en simulación como en experimentación.

### 1.2.2. Contribuciones

Las contribuciones de este trabajo de tesis son:

- 1.- El desarrollo de los tres controladores mencionados en los objetivos específicos tanto en simulación como en experimentos.
- 2.- La realización de los controladores en dos formas; en la primera se utilizan las estructuras de control originales de cada método, y en la segunda en la cual se le aplica una modificación a la estructura de control, para ayudar a que los controladores adaptables se encuentren libres de posibles singularidades algebraicas (división por cero).
- 3.- El análisis de estabilidad para las versiones modificadas de los controladores adaptables.

## 1.3. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos utilizados en este trabajo de tesis. En el capítulo 3 se presenta el procedimiento para obtener el modelo dinámico del giroscopio de dos grados de libertad. En el capítulo 4 se hace el desarrollo del control de linealización por realimentación y la obtención de la forma normal del giroscopio de dos grados de libertad subactuado con una función de salida propuesta, además del análisis de la cinética de ceros. El capítulo 5 muestra el desarrollo del control adaptable por realimentación neuronal aplicado al giroscopio de dos grados de libertad subactuado y la prueba de estabilidad para la versión modificada del mismo. En el capítulo 6 se muestra el

desarrollo del control adaptable basado en el regresor aplicado al giroscopio de dos grados de libertad subactuado y el análisis de estabilidad para la versión modificada del mismo. El capítulo 7 presenta el análisis de los resultados obtenidos con las tres técnicas de control. Mientras que las conclusiones obtenidas se dan en el capítulo 8. Finalmente los parámetros del giroscopio y unas definiciones útiles son presentados en el apéndice.

# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos

En este capítulo se presentan las bases teóricas de las técnicas de control a utilizar. Éstas son extraídas y resumidas de diversas fuentes bibliográficas con el fin de hacer este trabajo de tesis autocontenido.

### 2.1. Sistemas subactuados

Un sistema mecánico subactuado es un sistema con menos actuadores independientes que grados de libertad a ser controlados [Fantoni y Lozano, 2012], como ejemplo se pueden mencionar el robot brachiation de Fukuda o el acrobot de la figura 2.1. En los últimos años ha habido un mayor interés en desarrollar algoritmos para estabilizar sistemas subactuados. El problema de control de sistemas subactuados está motivado por numerosas aplicaciones prácticas. Principalmente se tiene el argumento sólido de la economía de diseño. Un ejemplo de esto se presenta en el control de una aeronave, la cual es un sistema subactuado en el que se aplica una fuerza de empuje en la dirección del motor de reacción, y se controla la trayectoria del cuerpo (de seis grados de libertad) con la única intervención del timón de cola y la potencia del motor. Se podrían añadir actuadores, hasta completar seis, que apliquen la propulsión en las tres direcciones espaciales y que imprimieran cualquier momento de giro, hasta poder situar la aeronave en la posición y orientación deseada; pero esto traería como consecuencia una máquina de un gran costo económico y el consumo de combustible resultaría sumamente ineficiente.

### 2.2. Linealización por realimentación [Khalil, 2002]

La mayoría de las tareas de control requieren usar una señal de realimentación. Dependiendo de los objetivos de diseño, existen diversas formulaciones del problema de control. Los objetivos de estabilización, seguimiento, y rechazo o atenuación de perturbaciones (y varias combinaciones entre ellos) conducen a plantear y resolver un gran número de problemas de control. En cada problema se puede tener, ya sea una versión de realimentación

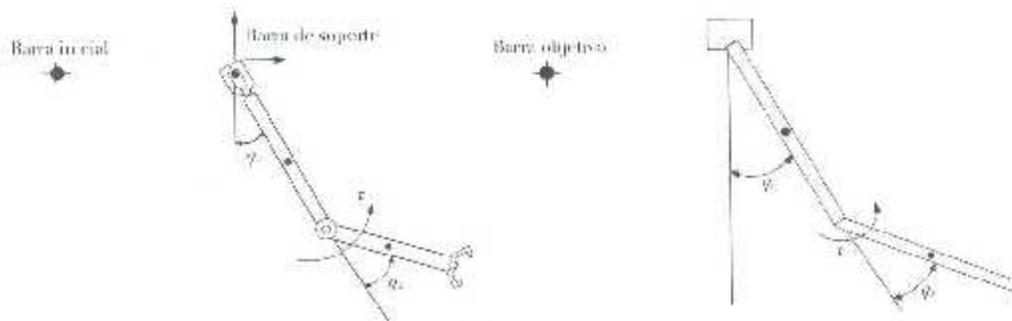


Figura 2.1: Robot brachiation (izquierda) y acrobot (derecha)

de estados, donde todas las variables de estado pueden ser medidas, o una versión de realimentación de salida, donde sólo el vector de salida puede ser medido, y cuya dimensión es típicamente menor que la dimensión del vector de estados. Se considera en esta sección una clase de sistemas no lineales con una entrada y una salida en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suficientemente suaves. Se plantea la pregunta de saber si existe un control de realimentación de estados  $u \in \mathbb{R}$  tal que

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

donde  $\alpha : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y un cambio de variables  $z$  dado por el mapeo invertible  $T : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con

$$z = T(x)$$

transforme el sistema no lineal en uno lineal equivalente.

Cuando un cambio de variables  $z = T(x)$  es usado para transformar una ecuación de estados de las coordenadas  $x$  a las coordenadas  $z$ , el mapeo  $T$  debe ser invertible; es decir, debe existir un mapeo inverso  $T^{-1}(\cdot)$  tal que  $x = T^{-1}(z)$  para toda  $z \in T(D)$ , donde  $D$  es el dominio de  $T$ . Además, debido a que las derivadas de  $z$  y  $x$  deben ser continuas, requerimos que  $T(\cdot)$  y  $T^{-1}(\cdot)$  sean continuamente diferenciables. Un mapeo continuamente diferenciable con una inversa continuamente diferenciable es conocido como un difeomorfismo. Si la matriz jacobiana  $\frac{\partial T}{\partial x}$  es no singular en el punto  $x_0 \in D$ , entonces se deduce del teorema de la función inversa que hay una vecindad  $N$  de  $x_0$  tal que  $T$  restringido a  $N$  es un difeomorfismo en  $N$ . Se dice que el mapeo  $T$  es un difeomorfismo global si es un difeomorfismo en  $\mathbb{R}^n$  y  $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ . Ahora se tienen todos los elementos necesarios para definir sistemas linealizables por realimentación.

**Definición 1.1** [Khalil, 2002, Definición 13.1] *Un sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (2.2)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $G : D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$  son suficientemente suaves en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , se dice que es linealizabile por realimentación (o linealizabile entrada-estado) si existe un difeomorfismo  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $D_z = T(D)$  y el cambio de variables  $z = T(x)$  transforma el sistema (2.2) en la forma

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.3)$$

con  $(A,B)$  controlable y  $\gamma(x)$  no singular para todo  $x \in D$ .

### 2.2.1. Linealización entrada-salida

Considérese el sistema con una entrada y una salida

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.4)$$

$$y = h(x) \quad (2.5)$$

donde  $f$ ,  $g$ , y  $h$  son suficientemente suaves en el dominio de  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Los mapeos  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  son llamados campos vectoriales en  $D$ . La derivada  $\dot{y}$  es dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (2.6)$$

donde

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (2.7)$$

es llamada la *derivada de Lie* de  $h$  con respecto a  $f$ , o a lo largo de  $f$ . Esta es la notación común de la derivada de  $h$  a lo largo de las trayectorias del sistema  $\dot{x} = f(x)$ . La nueva notación es conveniente cuando se repite el cálculo de la derivada con respecto al mismo campo vectorial o uno nuevo. Por ejemplo, se utiliza la siguiente notación:

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_g L_f h(x) &= \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x) \\ L_f^2 h(x) &= L_f L_f h(x) = \frac{\partial L_f h}{\partial x} f(x) \\ L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x). \end{aligned}$$

Si  $L_g h(x) = 0$ , entonces  $\dot{y} = L_f h(x)$ , independientemente de  $u$ . Si se continúa calculando la segunda derivada de  $y$ , denotada por  $y^{(2)}$ , se obtiene

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u;$$

otra vez, si  $L_g L_f h(x) = 0$ , entonces  $y^{(2)} = L_f^2 h(x)$ , independientemente de  $u$ . Repitiendo este proceso, se observa que si  $h(x)$  satisface que

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0,$$

entonces  $u$  no aparece en las ecuaciones  $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$  y aparece en la ecuación de  $y^{(\rho)}$  con un coeficiente no nulo:

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u,$$

es decir:

$$\begin{aligned} y &= h(x) \\ \dot{y} &= L_f h(x) \\ y^{(2)} &= L_f^2 h(x) \\ &\vdots \\ y^{(\rho-1)} &= L_f^{\rho-1} h(x) \\ y^{(\rho)} &= L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La ecuación anterior muestra claramente que el sistema es linealizable entrada-salida, dado que el control de realimentación de estados

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + v] \quad (2.9)$$

reduce el mapeo entrada-salida a

$$y^{(\rho)} = v$$

el cual es una cadena de  $\rho$  integradores. En este caso, el entero  $\rho$  es llamado el grado relativo del sistema, de acuerdo a la siguiente definición

**Definición 1.2** [Khalil, 2002, Definición 13.2] *El sistema no lineal (2.4)-(2.5) se dice que tiene un grado relativo  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq n$  en una región  $D_0 \subset D$  si*

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, \quad (2.10)$$

para toda  $x \in D_0$ .

La siguiente tarea es desarrollar un sistema parcialmente linealizable por realimentación para el sistema no lineal (2.4)-(2.5), lo cual sucede cuando se tiene grado relativo  $1 < \rho < n$ . Se elegirá  $\xi$  como el vector de variables tal que  $\xi = [y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}]^T$  ya que el mapeo entrada-salida seguirá siendo una cadena de  $\rho$  integradores. Se deben de escoger  $n - \rho$  variables, agrupados en  $\eta = \phi(x)$ , cuyos elementos cumplan con

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n - \rho, \quad \forall x \in D_0. \quad (2.11)$$

Con esta elección, en el vector  $\eta$  no aparecerá la entrada de control  $u$ . Un cambio de variables  $z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \in T(D_0) \subset \mathbb{R}^n$  que puedan transformar el sistema (2.4)-(2.5) en un sistema parcialmente linealizable por realimentación, puede ser tomado como

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-\rho} \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-\rho} \\ z_{n-\rho+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde  $\phi_1$  a  $\phi_{n-\rho}$  son elegidos tal que  $T(x)$  sea un difeomorfismo en el dominio de  $D_0 \subset D$ . El siguiente teorema demuestra que  $\phi_1$  a  $\phi_{n-\rho}$  existen al menos localmente.

**Teorema 1.1 [Khalil, 2002, Teorema 13.1]** *Considere el sistema (2.4)-(2.5), y supóngase que tiene un grado relativo  $\rho \leq n$  en  $D$ . Si  $\rho = n$ , entonces para cada  $x_0 \in D$ , una vecindad  $N$  de  $x_0$  existe tal que el mapeo*

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

*restringido a  $N$ , es un difeomorfismo en  $N$ . Si  $\rho < n$ , entonces, para cada  $x_0 \in D$ , existen una vecindad  $N$  de  $x_0$  y funciones suaves  $\phi_1, \dots, \phi_{n-\rho}$ , tal que (2.11) se satisface para toda  $x \in N$  y el mapeo  $T(x)$  de (2.12), restringido a  $N$  es un difeomorfismo en  $N$ .*

Resolviéndose (2.11), puede asegurarse que al calcular

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)u]$$

el término  $u$  se elimine. Ahora es posible verificar que el cambio de variables (2.12) transforma el sistema (2.4)-(2.5) en

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (2.14)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.15)$$

$$y = C_c \xi \quad (2.16)$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^\rho$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$  y  $(A_c, B_c, C_c)$  son una representación de la forma canónica de una cadena de  $\rho$  integradores.

Por tanto, en (2.14)-(2.16),  $\xi \in \mathbb{R}^\rho$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ ,  $(A_c, B_c, C_c)$  son una representación de la forma canónica de una cadena de  $\rho$  integradores donde:

$$f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=r^{-1}(z)} \quad (2.17)$$

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} h(x) \quad y \quad \alpha(x) = -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}. \quad (2.18)$$

Las expresiones particulares de  $f_0(\eta, \xi)$ ,  $\gamma(x)$  y  $\alpha(x)$  resultan del siguiente desarrollo.

Si se seleccionan las funciones  $\phi(x)$  que cumplan con (2.11) se tiene

$$\begin{aligned} \eta &= \phi(x), \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u], \\ &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x)u; \end{aligned} \quad (2.19)$$

como  $\phi(x)$  cumple con la condición (2.11) antes mencionada, resulta en

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x)$$

y como

$$\xi = \phi(x) - \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\rho-1)} \end{bmatrix},$$

por lo tanto al calcular  $\dot{\xi}$  se obtiene que

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(\rho)} \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u],$$

(2.8) resulta en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{\rho-2} \\ \xi_{\rho-1} \\ \xi_\rho \end{bmatrix} = \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(\rho-2)} \\ y^{(\rho-1)} \\ y^{(\rho)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\rho-3)} \\ y^{(\rho-2)} \\ y^{(\rho-1)} \end{bmatrix}}_{\xi} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_c} [L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u]$$

y la salida

$$y = h(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_c} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(\rho-3)} \\ y^{(\rho-2)} \\ y^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = C_c \xi.$$

Se ha mantenido a  $\alpha$  y a  $\gamma$  en (2.15), expresadas en las coordenadas originales. Estas funciones son determinadas de manera única por (2.18) en términos de  $f$ ,  $g$  y  $h$ . Éstas son independientes de la selección de  $\phi$ . Pueden expresarse en las nuevas coordenadas mediante

$$\alpha_0(\eta, \xi) = \alpha(T^{-1}(z)) \quad y \quad \gamma_0(\eta, \xi) = \gamma(T^{-1}(z)) \quad (2.20)$$

las cuales dependerán de la elección de  $\phi$ . En este caso, (2.15) puede ser reescrita como

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma_0(\eta, \xi) [u - \alpha_0(\eta, \xi)]. \quad (2.21)$$

Si  $x^*$  es un punto de equilibrio en lazo abierto de (2.4), entonces se define  $(\eta^*, \xi^*)$  con

$$\eta^* = \phi(x^*), \quad \xi^* = [h(x^*) \ 0 \ \dots \ 0], \quad (2.22)$$

como un punto de equilibrio de (2.14)-(2.15). Si se desaparece el término  $y$ , en  $x = x^*$ , que es  $h(x^*) = 0$ , se puede transformar a  $x^*$  al punto de origen  $(\eta = 0, \xi = 0)$ , eligiendo  $\phi(x)$  tal que  $\phi(x^*) = 0$ .

Las ecuaciones (2.14) a (2.16) se dice que están en la *forma normal*. La estructura de estas ecuaciones se muestra mejor en un diagrama de bloques, como el de la figura 2.2. Esta forma descompone al sistema en una parte externa  $\xi$  y una parte interna  $\eta$ . La parte externa es la parte a ser linealizada por el controlador de realimentación de estados

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (2.23)$$

donde  $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ , mientras que la parte interna se hace inobservable por el mismo controlador. La dinámica interna es descrita por (2.14). Estableciendo  $\xi = 0$  en esta ecuación, resulta en

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \quad (2.24)$$

la cual es llamada *dinámica de ceros*. Se dice que el sistema es de *fase mínima* si (2.24) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el dominio de interés. En particular, si  $T(x)$  se elige tal que el origen  $(\eta = 0, \xi = 0)$  es un punto de equilibrio de (2.14)-(2.16), entonces se dice que el sistema es de fase mínima si el origen de la dinámica de ceros (2.24) es asintóticamente estable. Es útil saber que la dinámica de ceros puede ser representada en las coordenadas originales. Señalando que

$$y(t) = 0 \Rightarrow \xi(t) \equiv 0 \Rightarrow u(t) \equiv \alpha(x(t))$$

se observa que si la salida es idénticamente cero, la solución de la ecuación de estados debe limitarse al conjunto

$$Z^* = \{x \in D_0, h(x) = L_f h(x) = \dots = L_f^{\rho-1} h(x) = 0\}$$

y la entrada debe ser

$$u = u^*(x) = \alpha(x)|_{x \in Z^*}.$$

En el caso especial en el que  $\rho = n$ , la forma normal (2.14)-(2.16) se reduce a

$$\dot{z} = A_c z + B_c \gamma(x) [u - \alpha(x)] \tag{2.25}$$

$$y = C_c z \tag{2.26}$$

donde  $z = \xi = [h(x) \dots L_f^{\rho-1} h(x)]^T$  y no existe  $\eta$ . En este caso el sistema no tiene dinámica de ceros y, por omisión, se dice que es de fase mínima.

### 2.2.2. Linealización exacta por realimentación

El sistema con una sola entrada

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{2.27}$$

donde  $f$  y  $g$  son suficientemente suaves en el dominio de  $D \subset \mathbb{R}^n$ , es linealizable por realimentación si existe una función suficientemente suave  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.28}$$

$$y = h(x) \tag{2.29}$$

tiene un grado relativo  $n$  en una región  $D_0 \subset D$ . Esta declaración surge del hecho de que para sistemas de grado relativo  $n$ , la forma normal se reduce a

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma_0(\eta, \xi) [u - \alpha_0(\eta, \xi)], \tag{2.30}$$

$$y = C_c \xi \tag{2.31}$$

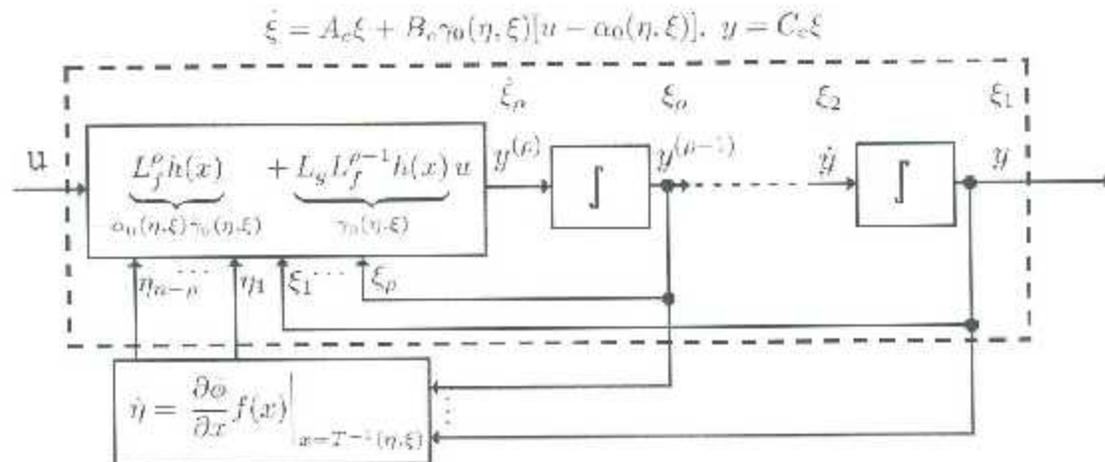


Figura 2.2: Diagrama de bloques de un sistema en forma normal

### 2.2.3. Control por realimentación de estados (estabilización)

Considere el sistema parcialmente linealizable en la forma

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (2.32)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.33)$$

donde

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$T(x)$  es un difeomorfismo en el dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D_c = T(D)$  que contiene el origen,  $(A, B)$  es controlable,  $\gamma(x)$  es no singular para toda  $x \in D$ ,  $f_0(0, 0) = 0$ , y  $f_0(\eta, \xi)$ ,  $\alpha(x)$  y  $\gamma(x)$  son continuamente diferenciables. El objetivo es diseñar una ley de control por realimentación de estados para estabilizar el origen  $z = 0$ . La forma (2.32)-(2.33) es motivada por la forma normal (2.14)-(2.16) de los sistemas linealizables entrada-salida, sin embargo, se ha eliminado (2.16) dado que la salida  $y$  no juega ningún rol en el problema de estabilización de realimentación de estados. El sistema (2.32)-(2.33) incluye también a los sistemas linealizables exactos por realimentación eliminando la ecuación (2.32). Se restringe la discusión a sistemas con una sola entrada, o a un par  $(A, B)$ , en la forma canónica controlable. Se procede a discutir los sistemas más generales (2.32)-(2.33), y la conclusión aplicará a la forma normal (2.14)-(2.16), o a sistemas linealizables por realimentación como casos especiales.

El control por realimentación de estados

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

donde  $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ , reduce (2.32)-(2.33) al sistema "triangular"

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (2.35)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) puede ser fácilmente estabilizada por  $v = -K\xi$ , donde  $K$  es diseñada tal que  $(A - BK)$  sea Hurwitz. La estabilidad asintótica del origen del sistema de lazo cerrado

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (2.37)$$

$$\dot{\xi} = (A - BK)\xi \quad (2.38)$$

resulta del origen asintóticamente estable de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ , como se muestra en el siguiente lema.

**Lema 1.1 [Khalil, 2002, lemma 13.1]** *El origen de (2.37)-(2.38) es asintóticamente estable, si el origen de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$  es asintóticamente estable.*

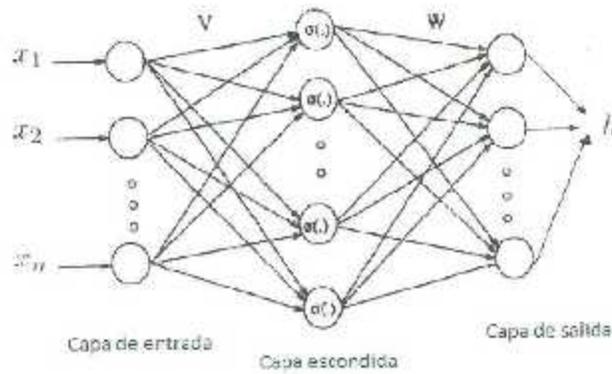


Figura 2.3: Esquema de una red neuronal

Se puede demostrar estabilidad asintótica global al requerir que el sistema  $\dot{\eta} = f_v(\eta, \xi)$  sea estable entrada-estado cuando  $\xi$  es visto como una entrada.

**Lema 1.2 [Khalil, 2002, lemma 13.2]** El origen de (2.37)-(2.38) es estable asintóticamente de manera global si el sistema  $\dot{\eta} = f_v(\eta, \zeta)$  es estable entrada estado.

## 2.3. Control por red neuronal

Suponiendo que se tiene un sistema en la forma de (2.14)-(2.15), el cual resulta de (2.4)-(2.5) y de la transformación (2.12) es posible construir un control de linealización con la estructura (2.9) en donde las funciones  $L_f^p h(x)$  y  $L_g L_f^{p-1} h(x)$  sean consideradas como desconocidas; por lo tanto se puede implementar una red neuronal para aproximar dichas funciones.

### 2.3.1. Estructura de una red neuronal

La información de esta sección fue extraída de [Yesildirek y Lewis, 1994]. Sea  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ . Supóngase que  $h(x) \in C^\infty[U]$ , es decir es una función suave de  $U$  a  $\mathbb{R}$ . Se sabe que las redes neuronales con una estructura de tres capas pueden ser usadas para aproximar funciones. Supóngase que se tiene una red neuronal de tres capas, con una entrada  $x$  y una salida  $h$  tal como la mostrada en la figura 2.3. Entonces, la relación entrada-salida de la red puede ser dada como

$$h(\bar{x}) = \bar{w}^T \bar{\sigma}(\bar{V}^T x + \theta_v) + \theta_w \quad (2.39)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  denota el vector de variables de entrada la red neuronal,  $\bar{w} \in \mathbb{R}^{l_h}$  contiene los pesos que conectan la segunda y tercera capa,  $\bar{V} \in \mathbb{R}^{n \times l_n}$  contiene los pesos que conectan la primera y segunda capa, donde  $l_n$  es el número de neuronas de la capa escondida,  $\theta_w \in \mathbb{R}$  es

el umbral de salida,  $\theta_v \in \mathbb{R}^k$  es el vector de umbral de la capa escondida, y  $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  es una función de activación. Se observa que con aumentar  $\bar{\sigma}$  y  $\bar{x}$ , agregando una constante dentro de los vectores, se puede reescribir (2.39) como

$$h(x) = w^T \sigma(V^T x) \quad (2.40)$$

donde  $w \in \mathbb{R}^{k+1}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times k}$ . Entonces, ajustar  $w$  y  $V$  también implica ajustar  $\theta_w$  y  $\theta_v$ . Dependiendo de la función de activación  $\sigma$ , (2.40) puede o no ser densa en el espacio de funciones continuas. Se usará una función sigmoide en la capa escondida, tal que

$$\sigma = \begin{bmatrix} \tanh(z_1) \\ \tanh(z_2) \\ \vdots \\ \tanh(z_{k-1}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad y \quad \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

la cual es comúnmente usada en la literatura y aproxima bien cualquier función en un conjunto compacto [Hornik *et al.*, 1989].

Por lo tanto, sea  $h(x)$  una función continua, entonces para cada  $\epsilon > 0$  debe existir  $w_h^*$ ,  $V_h^*$  y la dimensión de la red  $l_h^*$  tal que

$$h(x) = w_h^{*T} \sigma(V_h^{*T} x) + \epsilon \quad (2.42)$$

Sin embargo, en general, no se conoce el tamaño requerido de la red neuronal  $l_h^*$  para una  $\epsilon$  dada, y se usa un tamaño estimado  $l_h$ . En este caso se puede decir que dado el tamaño de la red neuronal, debe existir un  $w_h$  y un  $V_h$  tal que

$$h(x) = w_h^T \sigma(V_h^T x) + \epsilon_h(x) \quad \forall x \in U \quad (2.43)$$

con  $|\epsilon_h(x)| \leq \epsilon_h$  como una cota del error conocido en la reconstrucción de las redes neuronales. Aunque ésta es una declaración fuerte, se observa que  $\epsilon_h$  se vuelve más pequeño conforme el número de neuronas en la capa escondida  $l_h$  incrementa.

Un algoritmo de aprendizaje de Hebb modificado será utilizado para buscar aquellos pesos ideales. Varias versiones de la regla de Hebb pueden ser generalizadas, como

$$\dot{w} = \alpha \sigma(X) \phi(Y) - \beta w \quad (2.44)$$

con  $\sigma(X)$  una señal presináptica,  $\phi(Y) \in \mathbb{R}$  una señal de actividad postsináptica,  $w$  la eficacia sináptica (una matriz de pesos) y  $\alpha, \beta$  constantes positivas. La expresión (2.44) también es usada en sistemas con control adaptable para remediar las desviaciones paramétricas y es conocida como modificación  $\sigma$ .

A continuación, se usará  $\hat{h}$  y  $\tilde{h}$  para denotar el estimado y el error estimado de  $h$ , respectivamente. En cualquier conjunto compacto  $U$ , una cota para  $h(x)$  puede ser dada como

$$|h(x)| = |w_h^T \sigma(V_h^T x) + \epsilon_h(x)| \leq C_3 + C_4 |R| \quad \forall x \in U \quad (2.45)$$

con  $C_3$  y  $C_4$  constantes, y

$$R = \Lambda^T e \quad (2.46)$$

donde  $e = x - x_d$ , y  $\Lambda = [\bar{\Lambda}] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 1]^T$  es un vector de coeficientes elegido apropiadamente, tal que  $e(t) \rightarrow 0$  exponencialmente como  $r(t) \rightarrow 0$ . El error de aproximación  $\tilde{h}(x)$  puede ser dado como

$$\tilde{h} = w_k^T \sigma(V_k^T x) - \hat{w}_k^T \sigma(\hat{V}_k^T x) + \epsilon_k(x). \quad (2.47)$$

Sumando y restando  $w_k^T \sigma(\hat{V}_k^T x)$ , resulta en

$$\tilde{h} = \tilde{w}_k^T \sigma + \tilde{w}_k^T \tilde{\sigma}. \quad (2.48)$$

Con algún abuso de notación se tiene

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} V_k \\ w_k \end{bmatrix}.$$

La matriz  $\Theta_k$  puede ser rellenada con ceros para una consistencia de dimensiones.

Se supone que los pesos óptimos de la red neuronal  $w_k$  y  $V_k$  son acotados en todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , tal que

$$\|\Theta_k\| \leq \Theta_{\max} \quad (2.49)$$

con  $\Theta_{\max}$  como una cota conocida.

### Diseño de controlador con una red neuronal

Si se conoce la forma exacta de las funciones no lineales del sistema (2.14)-(2.15), entonces la acción de control sería igual a (2.23), pero dado que se supone que las funciones no son exactamente conocidas, se elige la acción de control

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{p-1} \hat{h}(x)} (-\widehat{L_f^p h(x)} + v) \quad (2.50)$$

donde los estimados  $\widehat{L_g L_f^{p-1} h(x)}$  y  $-\widehat{L_f^p h(x)}$  serán construidos con redes neuronales.

Es bien sabido, incluso en control adaptable de sistemas lineales, que garantizar  $\widehat{L_g L_f^{p-1} h(x)}$  esté alejado de cero se convierte en un gran problema en este tipo de controladores. En el capítulo 5 se observa cómo se evitarán este tipo de problemas.

## 2.4. Control adaptable

De acuerdo a [Åström y Wittenmark, 2013], en cualquier lenguaje “adaptar” significa cambiar el comportamiento conforme a nuevas circunstancias. Intuitivamente, un controlador adaptable es aquel controlador que puede modificar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del proceso y la naturaleza de las perturbaciones. Dado que la realimentación ordinaria también intenta reducir los efectos de las perturbaciones y las incertidumbres en la planta, surge la pregunta relacionada con la diferencia entre control por realimentación y control adaptable. A través de los años han habido varios intentos en definir lo que es el control adaptable formalmente. En un simposio de 1961, terminó la discusión con la siguiente sugerencia: “un sistema adaptable es cualquier sistema físico que ha sido diseñado con un punto de vista adaptable”. Un nuevo intento fue hecho por el comité de la IEEE en 1973, el cual, propuso un nuevo vocabulario basado en nociones como sistemas de control auto-organizables (SOC por sus siglas en inglés), sistemas de control auto-organizables con parámetros adaptables, sistemas de control auto-organizables con desempeño adaptable y sistemas de aprendizaje de control. Sin embargo estos esfuerzos no fueron ampliamente aceptados. Aún se carece de una definición formal de control adaptable que haga posible distinguirlo de entre varios controladores. Sin embargo, al parecer un sistema con realimentación de ganancias constantes no es un sistema adaptable.

El control adaptable es un enfoque de diseño usado en aplicaciones de alto desempeño en sistemas de control con incertidumbres paramétricas. Es decir, se supone que la incertidumbre en el sistema dinámico se caracteriza por un conjunto de parámetros constantes desconocidos. Sin embargo, el diseño de controladores adaptables requiere el conocimiento preciso de la estructura del sistema a ser controlado [Kelly *et al.*, 2006].

Considerando un sistema de una entrada una salida, como (2.14)-(2.15), en donde se puede escribir

$$L_g L_f^{p-1} h(x) = \theta_g^T \phi_g(x) \quad (2.51)$$

$$L_f^p h(x) = \theta_f^T \phi_f(x) \quad (2.52)$$

donde  $\theta_g$  y  $\theta_f$  contienen los parámetros desconocidos de las funciones  $L_g L_f^{p-1} h(x)$  y  $L_f^p h(x)$  respectivamente,  $\phi_g(x)$  y  $\phi_f(x)$  son los vectores de señales medibles; en consecuencia la ley de control (2.23) se convierte en

$$u = \frac{1}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} (-\hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + v) \quad (2.53)$$

donde  $\hat{\theta}_g$  y  $\hat{\theta}_f$  son los estimados paramétricos de  $\theta_g$  y  $\theta_f$  respectivamente. Si se definen como errores paramétricos de adaptación  $\tilde{\theta}_f = \theta_f - \hat{\theta}_f$  y  $\tilde{\theta}_g = \theta_g - \hat{\theta}_g$ , la ley de control (2.53) lleva al sistema dado por

$$y^{(p)} = L_f^p h(x) + L_g L_f^{p-1} h(x) u \quad (2.54)$$

a un sistema de lazo cerrado, dado por

$$y^{(p)} = v + \hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + \hat{\theta}_g^T \phi_g(x) u. \quad (2.55)$$

Los pasos para obtener (2.55), a partir de 2.54 se muestran a continuación:

Usando (2.51) y (2.52) el sistema (2.54) se puede reescribir como:

$$y^{(p)} = \theta_f^T \phi_f(x) + \theta_g^T \phi_g(x) u \quad (2.56)$$

al sustituir (2.53) en (2.56), se tiene

$$y^{(p)} = \theta_f^T \phi_f(x) + \theta_g^T \phi_g(x) \left[ \frac{1}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} (-\hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + v) \right] \quad (2.57)$$

al desarrollar la ecuación (2.57), y agregar ceros, se tiene

$$\begin{aligned} y^{(p)} &= \theta_f^T \phi_f(x) - \frac{\theta_g^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} \hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + \frac{\theta_g^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} v - \frac{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} v + \frac{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} v \\ &\quad - \hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + \hat{\theta}_f^T \phi_f(x) - \frac{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} \hat{\theta}_f^T \phi_f(x) - \frac{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} \hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + v - v \\ &= [\theta_f - \hat{\theta}_f]^T \phi_f(x) - \frac{[\theta_g - \hat{\theta}_g]^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} \hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + \frac{[\theta_g - \hat{\theta}_g]^T \phi_g(x)}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} v + v \\ &= v + \underbrace{[\theta_f - \hat{\theta}_f]^T \phi_f(x)}_{\hat{\theta}_f} + \underbrace{[\theta_g - \hat{\theta}_g]^T \phi_g(x)}_{\hat{\theta}_g} \underbrace{\left[ \frac{1}{\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)} (-\hat{\theta}_f^T \phi_f(x) + v) \right]}_u \end{aligned} \quad (2.58)$$

Las leyes de adaptación para mejorar la estimación de los parámetros ( $\hat{\theta}_f$  y  $\hat{\theta}_g$ ) se obtienen de la función de Lyapunov; esto se explica en el capítulo 6.

Nótese que tanto en el control adaptable (2.53) y como el control por red neuronal (2.50), se tiene una singularidad cuando  $L_g L_f^{-1}(x)$  y  $\hat{\theta}_g^T \phi_g(x)$  cruzan por cero; en la descripción de estos controladores aplicados al giroscopio (capítulo 5 y 6 respectivamente) se explica cómo se logra evitar ese problema.

# Capítulo 3

## Giroscopio

El giroscopio es un aparato usado para medir o mantener la orientación de un objeto, basándose en el principio de conservación del momento angular. Los giroscopios sensan el movimiento angular y son utilizados en aviones equipados con piloto automático, en el lanzamiento de cohetes, en el control de orientación de vehículos espaciales, etc. [Dzielski *et al.*, 1991, Singh y Bossart, 1993]. Para este trabajo se ha usado el giroscopio de 3 grados de libertad de Quanser, el cual se muestra en la figura 3.1. Este sistema consiste en un disco (D) montado dentro de un anillo interior de color azul (C), el cual a su vez está montado dentro de un anillo exterior de color rojo (B). Toda la estructura anterior está soportada por un marco rectangular de color plata (A) que gira libremente alrededor de su eje de simetría vertical. La estructura total, tipo cardán le permite al disco girar libremente y le confiere tres grados de libertad (en realidad el sistema de Quanser tiene 4 grados de libertad, uno del disco y tres del mecanismo Cardan; pero en muchas aplicaciones la velocidad del disco es constante, entonces se dice que el giroscopio tiene 3 grados de libertad). Los marcos asociados a cada elemento del giroscopio también se pueden observar en la figura 3.2. El giroscopio de Quanser tiene la particularidad de poder bloquear sus anillos, para así, reducir el número de grados de libertad del mismo. Para este trabajo de tesis se bloqueó el marco plateado (A), para reducir el sistema a solo dos grados de libertad.

### 3.1. Cinemática del giroscopio de 2 g.d.l

Considérese que la configuración mostrada en la figura 3.3 corresponde al caso en el que  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ , de las cuales  $q_1$  es el ángulo asociado al cuerpo D, medido respecto al eje X del cuerpo C ( $X_C$ );  $q_2$  es el ángulo asociado al cuerpo C, medido respecto al eje Y del cuerpo B ( $Y_B$ ), y  $q_3$  es el ángulo asociado al cuerpo B, medido respecto al eje Z del marco de referencia ( $Z_0$ ). Los marcos asociados a los discos se pueden observar en la figura

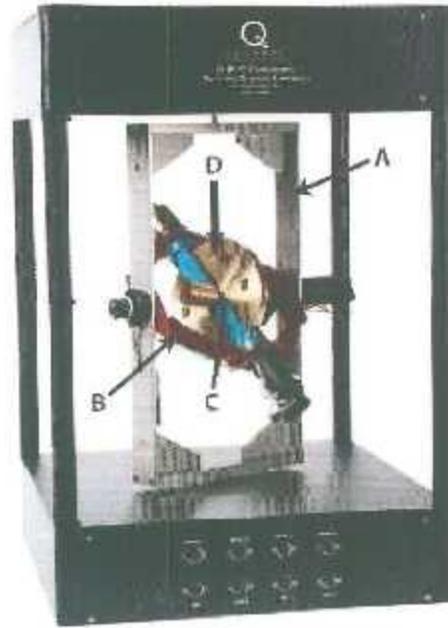


Figura 3.1: Giroscopio de Quanser y nomenclatura de discos

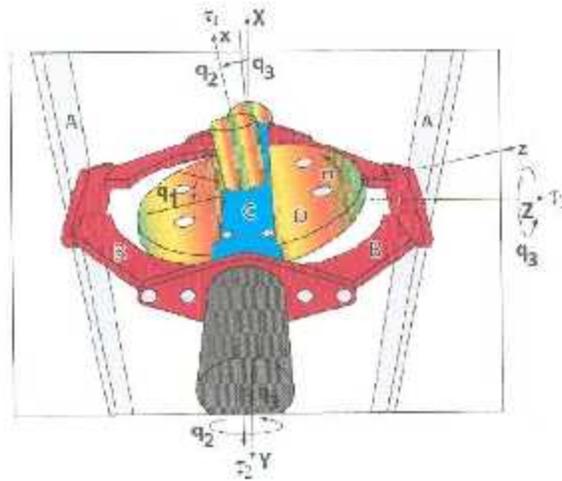


Figura 3.2: Giroscopio en una posición arbitraria

3.2. Dicho lo anterior, las matrices de rotación son las siguientes

$$R_D^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(q_1) & S(q_1) \\ 0 & S(q_1) & C(q_1) \end{bmatrix},$$

$$R_C^B = \begin{bmatrix} C(q_2) & 0 & S(q_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -S(q_2) & 0 & C(q_2) \end{bmatrix},$$

$$R_B^A = \begin{bmatrix} C(q_3) & -S(q_3) & 0 \\ S(q_3) & C(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde se define  $S(x) = \sin(x)$  y  $C(x) = \cos(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; supóngase que en general la velocidad angular del cuerpo  $I$ , con respecto al marco del cuerpo  $J$  ( $I, J \in B, C, D$ ), está dada por el vector  $\omega_I^J$ ; usando las matrices de rotación  $R_B^A$ ,  $R_C^B$  y  $R_D^C$ , se obtiene

$$\omega_D^C = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_C^B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_B^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Las velocidades angulares de los cuerpos  $B$ ,  $C$  y  $D$ , respecto a su propio marco, se obtienen como

$$\begin{aligned} \omega_B^B &= (R_B^A)^T \omega_B^A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ \omega_C^C &= (R_C^B)^T (\omega_C^B + \omega_B^B) = \begin{bmatrix} -S(q_2)\dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 \\ C(q_2)\dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ \omega_D^D &= (R_D^C)^T (\omega_D^C + \omega_C^C) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - S(q_2)\dot{q}_3 \\ C(q_1)\dot{q}_2 + C(q_2)S(q_1)\dot{q}_3 \\ C(q_1)C(q_2)\dot{q}_3 - S(q_1)\dot{q}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i$  con  $i = 1, 2, 3$ . Dado que, de acuerdo a la geometría simétrica del giroscopio, la descripción dinámica del sistema sería idéntica para cualquier posición del disco  $q_3$  asignada arbitrariamente [Parks, 1999], dicha posición, para efectos de análisis, puede ser colocada en cero,  $q_1 = 0$ , o en cualquier posición angular del disco, siendo así, la expresión



Figura 3.3: Giroscopio en posición de “home”.

de velocidad  $\omega_D^D$ , se reduce a:

$$\omega_D^D = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - S(q_2)\dot{q}_3 \\ \dot{q}_2 \\ C(q_2)\dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La descripción dinámica del sistema es idéntica para cualquier valor arbitrariamente asignado a la posición del disco  $D$ . En la siguiente sección se obtiene el modelo dinámico para el giroscopio de dos grados de libertad de Quanser.

### 3.2. Modelo dinámico del giroscopio

Para obtener el modelo dinámico del giroscopio se usarán las ecuaciones de movimiento de Lagrange [Kelly *et al.*, 2006]:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau \quad (3.4)$$

donde  $\tau$  denota el vector de pares de entrada, y el lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  es igual a

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q), \quad (3.5)$$

donde  $\mathcal{K}(q, \dot{q})$  representa la energía cinética total y  $\mathcal{U}(q)$  la energía potencial total del sistema. Debido a que se considera que los marcos asociados a todos los cuerpos del giroscopio coinciden con los centros de masa, no existe energía potencial, y la energía cinética depende sólo de la parte rotacional. Siendo así, el lagrangiano resulta

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [\omega_B^{B^T} I_B \omega_B^B + \omega_C^{C^T} I_C \omega_C^C + \omega_D^{D^T} I_D \omega_D^D] \quad (3.6)$$

donde  $\omega_I^I$  ( $I \in B, C, D$ ) es la velocidad angular del cuerpo  $I$  con respecto a su propio marco e  $I_I$  es la matriz de momentos de inercia del cuerpo  $I$  referida al marco del mismo, siendo

$$I_I = \begin{bmatrix} I_{I_{zz}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{I_{xx}} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

La energía total del sistema está dada entonces por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) = & \frac{I_{B_{zz}} \dot{q}_3^2}{2} + \frac{I_{C_{yy}} \dot{q}_2^2}{2} + \frac{I_{D_{zz}} \dot{q}_2^2}{2} + I_{D_{xx}} (\dot{q}_1 - \dot{q}_3 S(q_2)) \left( \frac{\dot{q}_1}{2} - \frac{\dot{q}_3 S(q_2)}{2} \right) \\ & + \frac{I_{C_{xx}} \dot{q}_3^2 C^2(q_2)}{2} + \frac{I_{D_{xx}} \dot{q}_3^2 C^2(q_2)}{2} + \frac{I_{C_{xx}} \dot{q}_3^2 S^2(q_2)}{2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando las ecuaciones de movimiento de Lagrange (3.4), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} &= \begin{bmatrix} I_{D_{xx}}(\dot{q}_1 - \dot{q}_3 S(q_2)) \\ \dot{q}_2 J_3 \\ J_2 \dot{q}_3 + J_1 S^2(q_2) \dot{q}_3 - I_{D_{xz}} S(q_2) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} &= \begin{bmatrix} I_{D_{xx}}(\ddot{q}_1 - S(q_2) \ddot{q}_3 - C(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3) \\ \ddot{q}_2 J_3 \\ (J_2 + J_1 S^2(q_2)) \ddot{q}_3 + 2J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - I_{D_{xz}}(S(q_2) \ddot{q}_1 - C(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2) \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} &= \begin{bmatrix} 0 \\ J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_3 - I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} &= \begin{bmatrix} I_{D_{xx}}(\ddot{q}_1 - S(q_2) \ddot{q}_3 - C(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3) \\ \ddot{q}_2 J_3 - J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_3^2 + I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ (J_2 + J_1 S^2(q_2)) \ddot{q}_3 + 2J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - I_{D_{xz}}(S(q_2) \ddot{q}_1 + C(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 J_1 &= I_{C_{xx}} + I_{C_{yy}} + I_{D_{xx}} + I_{D_{zz}} \\
 J_2 &= I_{D_{zz}} + I_{C_{xx}} + I_{D_{yy}} \\
 J_3 &= I_{C_{yy}} + I_{D_{zz}}
 \end{aligned}$$

la ecuación (3.9), representa el modelo dinámico del giroscopio. De modo que las ecuaciones del modelo dinámico pueden expresarse como

$$\tau_1 = I_{D_{xx}}(\ddot{q}_1 - S(q_2) \ddot{q}_3 - C(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3) \quad (3.10)$$

$$\tau_2 = J_3 \ddot{q}_2 + I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_3 - J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_3^2 \quad (3.11)$$

$$\tau_3 = (J_1 S^2(q_2) - J_2) \ddot{q}_3 + 2J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - I_{D_{xz}}(S(q_2) \ddot{q}_1 + C(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2), \quad (3.12)$$

Las ecuaciones anteriores se obtuvieron en [Cordero *et al.*, 2014], y también pueden representarse equivalentemente como

$$\tau = M(q) \ddot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q} \quad (3.13)$$

donde

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{aligned}
 M(q) &= \begin{bmatrix} I_{D_{xx}} & 0 & -I_{D_{xz}} S(q_2) \\ 0 & J_3 & 0 \\ -I_{D_{xz}} S(q_2) & 0 & J_2 + J_1 S^2(q_2) \end{bmatrix}, \\
 C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_3 & -\frac{1}{2} I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_2 \\ \frac{1}{2} I_{D_{xz}} C(q_2) & 0 & \frac{1}{2} I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_1 - J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_3 \\ -\frac{1}{2} I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_2 & J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_3 - \frac{1}{2} I_{D_{xz}} C(q_2) \dot{q}_1 & J_1 C(q_2) S(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

De la ecuación (3.13) podemos obtener la expresión del vector de cantidad de movimiento (momento angular)  $p = M(q)\dot{q}$ , dado por

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{D_{xx}} & 0 & -I_{D_{xz}}S(q_2) \\ 0 & J_3 & 0 \\ -I_{D_{xz}}S(q_2) & 0 & J_2 + J_1S^2(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

de la cual resultan los momentos conjugados  $p_j$  con  $j = 1, 2, 3$ ,

$$p_1 = I_{D_{xx}}\dot{q}_1 - I_{D_{xz}}S(q_2)\dot{q}_3 \quad (3.14)$$

$$p_2 = J_3\dot{q}_2 \quad (3.15)$$

$$p_3 = -I_{D_{xz}}S(q_2)\dot{q}_1 + (J_2 + J_1S^2(q_2))\dot{q}_3. \quad (3.16)$$

En el presente trabajo se requiere iniciar en un estado estacionario, donde el disco gire a una velocidad constante de  $\dot{q}_1 = \varphi = 750[\text{r.p.m.}]$ , la cual equivale a  $\varphi = 78.52[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$ . De esta manera el par asociado con su movimiento es despreciado (puesto que la fricción también es considerada nula), es decir  $\tau_1 = 0$ . Esto, aunado al hecho de que la coordenada  $q_1$  no aparece explícitamente en el lagrangiano (3.8), convierte a la coordenada  $q_1$  en coordenada cíclica, lo cual conduce a que el momento conjugado  $p_1$  sea constante  $p_1 = P_1$  (ver apéndice A).

De (3.10), considerando el estado estacionario cuando el disco ha alcanzado la velocidad de giro constante  $\varphi = 78.52[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$  y  $\tau_1 = 0$ , se tiene

$$\ddot{q}_1 = C(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_3 + S(q_2)\dot{q}_3 \quad (3.17)$$

y de (3.14), tomando en cuenta que en este estado  $p_1 = P_1$  constante, se llega a

$$\dot{q}_1 = \frac{P_1}{I_{D_{xx}}} + S(q_2)\dot{q}_3. \quad (3.18)$$

Sustituyendo (3.18) en (3.11) se obtiene

$$\tau_2 = J_3\ddot{q}_2 + P_1C(q_2)\dot{q}_3 - J_aS(q_2)C(q_2)\dot{q}_3^2, \quad (3.19)$$

donde  $J_a = J_1 + I_{D_{xx}}$ .

Ahora, tomando en cuenta (3.17) y (3.18), sustituyendo en (3.12) y considerando subactuación en este anillo  $\tau_3 = 0$ , se llega a

$$0 = (J_2 + J_aS^2(q_2))\ddot{q}_3 + 2J_aS(q_2)C(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_3 - P_1C(q_2)\dot{q}_2. \quad (3.20)$$

Las ecuaciones (3.19) y (3.20) corresponden al modelo dinámico del giroscopio de 2 g.d.l. subactuado. Por lo tanto, el modelo dinámico queda expresado como

$$\tau_2 = J_3\ddot{q}_2 + P_1C(q_2)\dot{q}_3 - J_aS(q_2)C(q_2)\dot{q}_3^2 \quad (3.21)$$

$$0 = (J_2 + J_aS^2(q_2))\ddot{q}_3 + 2J_aS(q_2)C(q_2)\dot{q}_2\dot{q}_3 - P_1C(q_2)\dot{q}_2. \quad (3.22)$$

Las ecuaciones (3.21) y (3.22) también pueden representarse en la forma de espacio de estados siguiente

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\tau \quad (3.23)$$

con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ \dot{q}_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix},$$

y donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{J_a S(x_1) C(x_1) x_4^2 - P_1 C(x_1) x_4}{J_2} \\ x_4 \\ \frac{P_1 C(x_1) x_2 - 2J_a S(x_1) C(x_1) x_2 x_4}{J_2 - J_a S^2(x_1)} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Los puntos de equilibrio en lazo abierto de (3.23) son  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 \in \mathbb{R}$ ,  $x_4 = 0$ , que significa que  $q_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{q}_2 = 0$ ,  $q_3 \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{q}_3 = 0$ ; sin embargo debido al efecto giroscópico con  $\tau_1 = 0$  y  $\tau_3 = 0$  ocasionado por las coordenadas cíclicas  $q_1$  y  $q_3$ , se tiene que

$$p_1 = I_{D_{xx}} \dot{q}_1 - I_{D_{xx}} S(q_3) \dot{q}_3 = P_1, \quad \text{constante} \quad (3.26)$$

$$p_3 = -I_{D_{xx}} S(q_2) \dot{q}_1 + (J_2 + J_1 S^2(q_2)) \dot{q}_3 = P_3, \quad \text{constante} \quad (3.27)$$

sustituyendo (3.18) (la cual fue obtenida de (3.26)) en (3.27) se tiene

$$\begin{aligned} P_3 &= -I_{D_{xx}} S(q_2) \left[ \frac{P_1}{I_{D_{xx}}} + S(q_2) \dot{q}_3 \right] + (J_2 + J_1 S^2(q_2)) \dot{q}_3 \\ &= -S(q_2) P_1 - I_{D_{xx}} S^2(q_2) \dot{q}_3 + (J_2 + J_1 S^2(q_2)) \dot{q}_3 \\ &= -S(q_2) P_1 + (J_2 + J_a S^2(q_2)) \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde  $P_3$  es constante por ser  $q_3$  coordenada cíclica.

Una manera comprensible para obtener la constante  $P_1$  y  $P_3$  es atender las condiciones iniciales, cuando el disco gira a una velocidad constante de 750[r.p.m.], sin movimiento en  $q_2$  y  $q_3$ , con  $q_2(0) \in \mathbb{R}$  y  $q_3(0) \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0$ , entonces de (3.26) se tiene que

$$P_1 = I_{D_{xx}} \dot{q}_1(0) + I_{D_{xx}} S(q_2(0)) \dot{q}_3(0)$$

$$P_1 = I_{D_{xx}} \omega,$$

y de (3.28) se tiene

$$P_3 = -S(q_2(0)) P_1 + (J_2 - J_a S^2(q_2(0))) \dot{q}_3(0)$$

$$P_3 = -S(q_2(0)) P_1$$

Así

$$P_1 = I_{D_{xx}} \varphi \quad (3.29)$$

$$P_3 = -S(q_2(0))P_1. \quad (3.30)$$

Entonces, debido a que  $q_3$  es una coordenada cíclica se tiene de (3.28) que

$$P_3(t) = -S(q_2(t))P_1 + (J_2 - J_a S^2(q_2(t)))\dot{q}_3(t) = P_3 = -S(q_2(0))P_1. \quad (3.31)$$

De la ecuación de equilibrios se tiene que en los puntos de equilibrio  $\dot{q}_2 = 0$ ,  $\dot{q}_3 = 0$ ; tomando esto en cuenta y sustituyendo en (3.31) se tiene que

$$P_3 - S(q_2(t))P_1 = 0$$

Esto conduce a

$$\begin{aligned} S(q_2(t)) &= \frac{P_3}{P_1} = \frac{-S(q_2(0))P_1}{P_1} \\ S(q_2(t)) &= S(q_2(0)) \\ q_2(t) &= q_2(0). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Así los puntos de equilibrio serán

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ \dot{q}_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2(0) \in \mathbb{R} \\ 0 \\ q_3(0) \in \mathbb{R} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

El origen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ \dot{q}_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

es un punto de equilibrio del sistema en lazo abierto

### 3.2.1. Análisis de estabilidad del origen en lazo abierto

Análisis de estabilidad del origen del sistema (3.23) en lazo abierto ( $\tau = 0$ ).

Tomando en cuenta (3.21) y (3.22), el sistema (3.23) alternativamente puede ser escrito como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + S(q, \dot{q})\dot{q} = \tau \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} J_3 & 0 \\ 0 & J_2 - J_a S^2(q_2) \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -J_a S'(q_2)C(q_2)\dot{q}_3 \\ J_a S(q_2)C(q_2)\dot{q}_3 & J_a S(q_2)C(q_2)q_2 \end{bmatrix}, \\ S(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & P_1 C(q_2) \\ -P_1 C(q_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.-Giroscopio

La ecuación (3.35) puede ser reescrita como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = \tau - \tau_{gyr} \quad (3.36)$$

donde  $\tau_{gyr}$  representa los pares giroscópicos internos del sistema y están dados por

$$\tau_{gyr} = S(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & P_1 C(q_2) \\ -P_1 C(q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 C(q_2) \dot{q}_3 \\ -P_1 C(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}, \quad (3.38)$$

la cual es definida positiva y radialmente desacotada porque  $M(q)$  es definida positiva para toda  $q \in \mathbb{R}^2$ .

Tomando la derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema (3.36) con  $\tau = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, \dot{q}) &= \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \\ &= \dot{q}^T [-\tau_{gyr} - C(q, \dot{q})\dot{q}] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} \\ &= \dot{q}^T [-\tau_{gyr}] + \underbrace{\dot{q}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}}_{=0} \\ &= -\dot{q}^T \tau_{gyr} \\ &= -\dot{q}^T S(q, \dot{q}) \dot{q} \\ &= -\begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P_1 C(q_2) \\ -P_1 C(q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Luego por Teorema de Lyapunov concluimos estabilidad del origen

$$\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Puede notarse que los pares giroscópicos no afectan al lagrangiano, ni su derivada temporal.

## Capítulo 4

# Control de linealización por realimentación de salida: aplicado al giroscopio de 2 g.d.l.

Para poder implementar un controlador de linealización por realimentación se requiere llevar el sistema (3.23) a su forma normal, como se explica en [Khalil, 2002], por lo que se define una función de salida

$$y = h(x) = x_3, \quad (4.1)$$

entonces para este sistema se tiene

$$L_g h(x) = 0 \quad (4.2)$$

$$L_f h(x) = \dot{x}_4 \quad (4.3)$$

$$L_g L_f h(x) = 0 \quad (4.4)$$

$$L_f^2 h(x) = \frac{P_1 C(x_1) x_2 - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_2 x_4}{J_2 + J_a S^2(x_1)} \quad (4.5)$$

$$L_g L_f^2 h(x) = \frac{P_1 C(x_1) - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_4}{(J_2 + J_a S^2(x_1)) J_3} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} L_f^3 h(x) = & \frac{(J_a C(x_1) S(x_1) x_4^2 - P_1 C(x_1) x_4)(P_1 C(x_1) - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_4)}{J_3(J_2 - J_a S^2(x_1))} \\ & - x_2^2 \left( \frac{4J_a C(x_1) S(x_1)(P_1 C(x_1) - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_4)}{(J_2 + J_a S^2(x_1))^2} \right) \\ & - x_2^2 \left( \frac{2J_a x_4 - P_1 S(x_1) - 4J_a S^2(x_1) x_4}{J_2 + J_a S^2(x_1)} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

De acuerdo a (3.32)  $L_g L_f^2 h(x) \neq 0$  si elegimos como condición inicial  $q_2(0) = x_1(0) = 0$ ; así se observa que el sistema es de grado relativo 3, y es posible encontrar localmente una

forma normal. Para encontrar la forma normal, se toma

$$\begin{aligned}\xi_1(x) &= h(x) = x_5 \\ \xi_2(x) &= L_f h(x) = x_4 \\ \xi_3(x) &= L_f^2 h(x) = \frac{P_1 C(x_1) x_2 - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_2 x_4}{J_2 + J_a S^2(x_1)},\end{aligned}\quad (4.8)$$

y se busca una función  $\phi_1(x)$ , tal que

$$\frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{1}{J_3} = 0, \quad (4.9)$$

puede observarse que, para que se cumpla la condición dada por (4.9),  $\phi_1(x)$  no debe depender de  $x_2$ . Por lo tanto se puede seleccionar

$$\phi_1(x) = x_1. \quad (4.10)$$

Así se obtiene la transformación

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{P_1 C(x_1) x_2 - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_2 x_4}{J_2 + J_a S^2(x_1)} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

cuya matriz jacobiana es

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

con

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} &= \frac{x_2(4J_a S^2(x_1)x_4 - 2J_a x_4 - P_1 S(x_1))}{J_2 + J_a S^2(x_1)} \\ &\quad - \frac{2J_a C(x_1) S(x_1) x_2 (P_1 C(x_1) - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_4)}{(J_2 + J_a S^2(x_1))^2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} &= \frac{P_1 C(x_1) - 2J_a C(x_1) S(x_1) x_4}{J_2 + J_a S^2(x_1)} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_4} &= -\frac{2J_a C(x_1) S(x_1) x_2}{J_2 + J_a S^2(x_1)}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Lo anterior valida que la elección tomada de  $\phi_1$  nos genera una matriz  $\frac{\partial T(x)}{\partial x}$  no singular si  $x_1(0) = 0$ . Nótese también que  $T(0) = \mathcal{D}$ . La transformación inversa está dada por

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \frac{z_4 (J_2 + J_a S^2(x_1)) - 2J_a C(z_1) S(z_1)}{P_1 C(z_1)} \\ x_3 &= z_2 \\ x_4 &= z_3.\end{aligned}\quad (4.14)$$

y en las nuevas coordenadas, el sistema está descrito por

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= \frac{z_4 (J_2 + J_a S^2(z_1))}{P_1 C(z_1) - 2J_a C(z_1) S(z_1) z_3} \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= z_4 \\
 \dot{z}_4 &= \frac{(P_1 C'(z_1) - 2J_a C'(z_1) S(z_1) z_3)(J_a S(z_1) C(z_1) z_3^2 - P_1 C(z_1) Z_3)}{J_3 (J_2 + J_a S^2(z_1))} \\
 &\quad - \left( \frac{z_4 (J_2 + J_a S^2(z_1))}{P_1 C(z_1) - 2J_a C(z_1) S(z_1) z_3} \right)^2 \left( \frac{4J_a C^2(z_1) S(z_1) (P_1 - 2J_a S(z_1) z_3)}{(J_2 + J_a S^2(z_1))^2} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{z_4 (J_2 + J_a S^2(z_1))}{P_1 C(z_1) + 2J_a C(z_1) S(z_1) z_3} \right)^2 \left( \frac{4J_a S^2(z_1) z_3 - 2J_a z_3 - P_1 S(z_1)}{J_2 + J_a S^2(z_1)} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{P_1 C'(z_1) - 2J_a C'(z_1) S(z_1) z_3}{J_3 (J_2 - J_a S^2(z_1))} \right) \tau
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Simplificando la dinámica con las nuevas coordenadas, se tiene

$$\dot{z}_1 = \frac{z_4 (J_2 + J_a S^2(z_1))}{P_1 C(z_1) - 2J_a C(z_1) S(z_1) z_3} \tag{4.16}$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \tag{4.17}$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \tag{4.18}$$

$$\dot{z}_4 = b(z) + a(z)\tau, \tag{4.19}$$

con

$$a(z) = \left( \frac{P_1 C'(z_1) - 2J_a C'(z_1) S(z_1) z_3}{J_3 (J_2 + J_a S^2(z_1))} \right) \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 b(z) &= \frac{(P_1 C'(z_1) - 2J_a C'(z_1) S(z_1) z_3)(J_a S(z_1) C(z_1) z_3^2 - P_1 C(z_1) Z_3)}{J_3 (J_2 + J_a S^2(z_1))} \\
 &\quad - \left( \frac{z_4 (J_2 + J_a S^2(z_1))}{P_1 C(z_1) + 2J_a C(z_1) S(z_1) z_3} \right)^2 \left( \frac{4J_a C^2(z_1) S(z_1) (P_1 - 2J_a S(z_1) z_3)}{(J_2 + J_a S^2(z_1))^2} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{z_4 (J_2 + J_a S^2(z_1))}{P_1 C(z_1) + 2J_a C(z_1) S(z_1) z_3} \right)^2 \left( \frac{4J_a S^2(z_1) z_3 - 2J_a z_3 - P_1 S(z_1)}{J_2 + J_a S^2(z_1)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$