



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

cenidet[®]
*Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico*

Modelado, Simulación y Control de Procesos

Un enfoque integral

Ma. Guadalupe López López

Copyright © 2023 Ma. Guadalupe López López
ORCID 0000-0003-3831-5174
Scopus Author ID 37120477200
Google Scholar ID user=kkXn59cAAAAJ

PUBLISHED BY TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

El libro fue creado utilizando la plantilla "legrand-orange-book" de Mathias Legrand, distribuida libremente bajo licencia *Creative Commons by-nc-sa 4.0*.

Las imágenes introductorias de los capítulos son de Dominio Público según sus autores, para ver los términos visita: <https://creativecommons.org/publicdomain/mark/1.0/?ref=openverse>, a continuación la lista de créditos:

Índices: "Messier 51 (M51) Whirlpool Galaxy" by aeroman3 is marked with Public Domain Mark 1.0.

Capítulo 1 y Capítulo 2: "Milky Way Galaxy in Star Filled Night Sky" by Image Catalog is marked with CC0 1.0.

Capítulo 3 y Capítulo 4: "At the Top of the World (NASA)" by pingnews.com is marked with Public Domain Mark 1.0.

Capítulo 5, Capítulo 6, Bibliografía, e Índice alfabético: "NGC 6357 - Cosmic 'Winter' Wonderland" by aeroman3 is marked with Public Domain Mark 1.0.

First printing, March 2023



Índice general

I

Modelado de Procesos

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1 | Conceptos y terminología de procesos | 3 |
| 1.1 | Ingeniería de Procesos: definiciones y principios | 3 |
| 1.1.1 | Tipos de procesos y modos de operación | 5 |
| 1.1.2 | Variables y funciones de sistemas de procesos. | 6 |
| 1.1.3 | Ejemplos de procesos: | 7 |
| 1.1.4 | Transformaciones en sistemas cerrados con gases ideales | 12 |
| 1.2 | Leyes de conservación y equilibrio | 16 |
| 1.2.1 | Balances de Materia | 17 |
| 1.2.2 | Balances de Energía | 19 |
| 1.2.3 | Balances de Momento | 22 |
| 1.2.4 | Relaciones de Equilibrio | 22 |
| 1.3 | Formas especiales | 23 |
| 1.3.1 | Fenómenos de transporte | 23 |
| 1.3.2 | Fluidos en movimiento | 24 |
| 1.3.3 | Ecuaciones de Navier Stokes | 25 |
| 1.3.4 | Modelado en Ingeniería de Procesos | 26 |

II

Herramientas numéricas para la simulación de procesos

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2 | Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) | 31 |
| 2.1 | Tipos de EDO | 31 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.2 | Herramientas de simulación en Matlab® Simulink® | 32 |
| 2.2.1 | Solución numérica de EDO en Matlab®. Funciones ode. | 32 |
| 2.2.2 | Solución numérica de EDO en Simulink®. Funciones-sistema (S-Function). | 34 |
| 2.2.3 | Función <code>trim</code> | 37 |
| 2.2.4 | Función <code>linmod</code> | 38 |
| 3 | Ecuaciones diferenciales parciales (EDP) | 39 |
| 3.1 | Definición | 39 |
| 3.2 | EDP lineales de segundo orden. | 42 |
| 3.2.1 | EDP elípticas | 43 |
| 3.2.2 | EDP parabólicas | 44 |
| 3.2.3 | EDP hiperbólicas | 44 |
| 3.2.4 | Otras EDP de segundo orden que describen sistemas físicos en Ciencia e Ingeniería | 44 |
| 3.3 | Solución de EDP en Matlab® | 47 |
| 3.3.1 | Aproximación de la solución de una EDP mediante Diferencias finitas | 49 |

III

Teoría clásica de control de procesos

| | | |
|------------|--|-----------|
| 4 | Estructuras de modelos orientados a control | 55 |
| 4.1 | Representación en el Espacio de Estados | 55 |
| 4.2 | Función de Transferencia | 58 |
| 4.3 | Procesos Multivariantes. | 59 |
| 4.3.1 | Linealización de sistemas no lineales | 60 |
| 4.3.2 | Función de transferencia de un sistema multivariable. | 61 |
| 4.3.3 | Transformación de espacio de estados a función de transferencia. | 62 |
| 4.4 | Procesos en serie | 63 |
| 5 | Análisis y control de sistemas lineales. | 65 |
| 5.1 | Estabilidad. | 65 |
| 5.2 | Sistemas multivariantes | 67 |
| 5.3 | Control por retroalimentación de estados e integración en Adelanto, basado en colocación de polos (CREIA) | 67 |
| 5.3.1 | Estructura de control. | 67 |

IV

Simulación de Procesos

| | | |
|------------|--|-----------|
| 6 | Problemas Modelos de procesos | 73 |
| 6.1 | Sistemas de tanques | 73 |
| 6.2 | Reactores | 82 |
| 6.3 | Equipos de intercambio de calor | 82 |
| 6.4 | Equipos de separación | 84 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.5 | Procesos de parámetros distribuidos | 88 |
| 7 | Problemas Simulación de procesos | 101 |
| 7.1 | Procesos de parámetros concentrados | 101 |
| 7.2 | Procesos de parámetros distribuidos | 108 |

V

Técnicas de control moderno

| | | |
|----------|--|------------|
| 8 | Estructura de control RST | 119 |
| 8.0.1 | Controlador RST continuo | 119 |
| 8.0.2 | Controlador RST discreto | 120 |
| 8.0.3 | Control RST discreto con cancelación de ceros | 121 |
| 9 | Estructura de un control por modelo interno | 123 |
| 9.0.1 | Control por modelo interno perfecto | 124 |
| 9.0.2 | Control por modelo interno de un grado de libertad | 125 |
| 9.0.3 | Control por modelo interno de dos grados de libertad | 127 |

VI

Problemas de control de procesos

| | | |
|-----------|--|------------|
| 10 | Control por retroalimentación de estados | 131 |
| 10.1 | Retroalimentación de estados e integración en adelante Sistema multitanques. | 131 |
| | Bibliography | 143 |
| | Articles | 143 |
| | Books | 145 |
| | Index | 147 |



Índice de figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Diagrama de un sistema de ingeniería de procesos. | 4 |
| 1.2 | Diagrama de un sistema de planta química completa con subsistemas de red de recuperación de calor y de planta de servicios auxiliares. | 4 |
| 1.3 | Proceso de enfriamiento Adiabático. | 5 |
| 1.4 | Proceso de Expansión Isotérmica. | 6 |
| 2.1 | Parámetros de una S-Function Bloque Simulink®. | 37 |
| 2.2 | Parámetros de simulación de una S-Function Bloque Simulink®. | 37 |
| 4.1 | Representación en diagrama de bloques de un modelo en el espacio de estados. | 58 |
| 4.2 | Diagrama de bloques de un modelo multivariable en función de transferencia. | 62 |
| 4.3 | Representación de un proceso en serie. | 63 |
| 5.1 | Estructura de control por retroalimentación de estados e integración en adelanto. | 69 |
| 6.1 | Representación esquemática del sistema de tanques con interacción. | 73 |
| 6.2 | Representación esquemática del sistema de tanques en serie con sección transversal variable. | 76 |
| 6.3 | Geometría y parámetros para calcular el área transversal del Tanque 1. | 78 |
| 6.4 | Geometría y parámetros para calcular el área transversal del Tanque 2. | 78 |
| 6.5 | Geometría y parámetros para calcular el área transversal del Tanque 3. | 79 |
| 6.6 | Caldera para generación de vapor. | 83 |
| 6.7 | Representación de una columna de destilación con una sola alimentación. | 85 |
| 6.8 | Representación de una columna de destilación | 86 |
| 6.9 | “Creative Commons. Diagrama de Ragone que muestra la densidad de energía frente a la densidad de potencia para varios dispositivos”. ©2021 por Grawiton utilizado bajo licencia Attribution-Share Alike 3.0 Unported. | 88 |
| 6.10 | “Creative Commons. Distribución de iones en un supercapacitor descargado/cargado”. ©2013 por Elcap utilizado bajo licencia CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication. | 89 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 7.1 | Modelo no lineal del sistema multitanques Inteco implementado en Simulink®. | 103 |
| 7.2 | Supercapacitor electro-químico de doble capa Maxwell, con geometría prismática y capacitancia nominal de 10 F. | 108 |
| 7.3 | Simulación del ciclo de carga del SCDC Maxwell 10F a una corriente de 2.5 A. | 112 |
| 7.4 | Simulación de la carga de un SCDC Maxwell PC 10 F, mediante objetos de la librería de PowerSim. | 112 |
| 7.5 | Datos para la simulación de un SC con modelo Stern. | 113 |
| 7.6 | Datos para la simulación de un SC con modelo Stern. | 113 |
| 10.1 | Simulador del control por retroalimentación de estados e integración en adelante de un sistema de tanques Inteco, usando el modelo lineal como la planta Plataforma Simulink®. | 133 |
| 10.2 | Desempeño del controlador ante cambios de condición inicial. | 134 |
| 10.3 | Desempeño del controlador ante cambios de condición inicial, con ruido en la entrada. | 134 |
| 10.4 | Ley de control para cambio de condición inicial. | 134 |
| 10.5 | Desempeño del controlador para cambios de referencia y condición inicial diferente de cero. | 135 |
| 10.6 | Simulador del control por retroalimentación de estados e integración en adelante de un sistema de tanques Inteco Plataforma. Planta no lineal. Simulink®. | 135 |
| 10.7 | Desempeño del controlador para cambios de referencia y condición inicial diferente de cero. | 136 |
| 10.8 | Región LMI Semiplano izquierdo y disco de radio r | 136 |
| 10.9 | Desempeño del primer diseño del controlador con colocación de polos en regiones LMI probado en la planta lineal. | 140 |
| 10.10 | Desempeño del segundo diseño del controlador con colocación de polos en regiones LMI probado en la planta lineal. | 141 |



Índice de tablas

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Ejemplos de operaciones unitarias y procesos unitarios | 3 |
| 1.2 | Sistemas: Intercambiadores de calor de contacto indirecto | 8 |
| 1.3 | Sistemas: Intercambiadores de calor de contacto directo | 9 |
| 1.4 | Sistemas: Reactores continuos | 10 |
| 1.5 | Sistemas: Reactores discontinuos o semicontinuos | 11 |
| 1.6 | Transformaciones en un sistema cerrado conteniendo un gas ideal, con T , P o V constante. | 14 |
| 1.7 | Transformaciones adiabáticas y politrópicas. | 15 |
| 2.1 | Solucionadores de EDOs en Matlab. Problemas con ecuaciones no rígidas. | 33 |
| 2.2 | Solucionadores de EDOs en Matlab®. Problemas con ecuaciones rígidas o completamente implícitas | 34 |
| 2.3 | Solucionadores de EDOs en Matlab. Problemas con ecuaciones no rígidas. | 35 |
| 2.4 | Sintaxis de la función <code>trim</code> | 38 |
| 4.1 | Diferentes formas de la Función de Transferencia | 59 |
| 7.1 | Parámetros del modelo de difusión eléctrica para un SCDC Maxwell PC 10 F [16], [20] | 109 |
| 7.2 | Especificaciones para el SCDC Maxwell PC 10 F Ficha de datos del proveedor. [16]. | 110 |



Dedicatoria

A mi querido Papito

Froilán López Fernández



Agradecimientos

**Libro elaborado durante el ejercicio del periodo Sabático
autorizado por el TecNM**



Contribución Académica

El Control Automático es una disciplina que tiene como base una estructura matemática sólida; introduce precisión, seguridad, estabilidad e interconectividad en los sistemas, reduciendo en ellos la intervención humana y corrigiendo desviaciones en su funcionamiento. El Control Automático surgió con la ingeniería electrónica y los sistemas computacionales como elementos principales. Sin embargo, actualmente, el Ingeniero de Control conoce el lenguaje de una amplia gama de disciplinas. Por otro lado, la Ingeniería de Procesos es una disciplina que se encarga del diseño, optimización y operación de procesos que basan su funcionamiento en los principios de las operaciones unitarias y de las reacciones químicas para obtener productos. Es uno de los campos de aplicación en donde se reconocen ganancias significativas cuando se implementan acciones de control en los sistemas que estudia. El libro "Modelado, Simulación y Control de Procesos" revisa la teoría de Control Automático que subyace a una serie de aplicaciones de la Ingeniería de Procesos Químicos. El objetivo central del libro es proporcionar conceptos, teoría, ejemplos y problemas que permitan guiar el aprendizaje de métodos de modelado matemático, control, y simulación numérica de manera balanceada. Sin embargo, versiones posteriores del libro permitirán encontrar este balance de manera más completa. La información técnica proporcionada en este libro será útil para estudiantes a nivel licenciatura y posgrado del Tecnológico Nacional de México, nuevos ingenieros, o cualquier profesional que quiera adquirir nociones y habilidades de resolución de problemas en el contexto del diseño y operación y control de procesos. En particular, el libro está dirigido a los Programas de Maestría y Doctorado en Ingeniería Electrónica del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (*cenidet*). Dentro de estos programas, una de las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento (LGAC) es la de Control Automático. En la LGAC de Control Automático se dirigen Tesis de posgrado y proyectos de investigación enmarcados en la disciplina de Control de Procesos. En la práctica docente se imparte el curso de Control de Procesos como materia optativa y se proponen proyectos relacionados con la temática para estancias y residencias de estudiantes de Licenciatura del Tecnológico Nacional de México.

El libro no es una exposición completa de la teoría de control. En cambio, el enfoque está en su combinación con el conocimiento de la ingeniería de procesos como una aplicación a un tipo particular

de sistemas. En lugar de considerar la simple suma de sus partes, los sistemas de control son estudiados integrando el conocimiento del comportamiento del sistema. El modelado y la simulación numérica o digital de los procesos químicos son elementos clave para desarrollar los ejemplos y problemas que se presentan. La simulación hace posible tratar el problema de control y provee una buena conexión entre los aspectos teóricos y prácticos de los procesos en estudio. El contenido del libro se presenta en seis capítulos que se dividen en cuatro partes:

PARTE I. MODELADO DE PROCESOS (Capítulo 1) El *Capítulo 1* introduce el tema de modelado de procesos. Inicialmente se establece la terminología de la ingeniería de procesos y se proveen conceptos de base. El capítulo continúa con una inmersión en las leyes fundamentales de conservación, y teoría elemental de termodinámica y conceptos de equilibrio. La información que se presenta es útil para comprender y abordar la formulación de las ecuaciones que rigen el comportamiento de los procesos químicos. Para completar el tema de modelado, se presentan las estructuras matemáticas que se emplean regularmente en el diseño de control. En lo sucesivo, los modelos de procesos en estudio se presentan con la estructura matemática que conviene al problema planteado.

PARTE II. HERRAMIENTAS NUMÉRICAS PARA LA SIMULACIÓN DE PROCESOS Con (**Capítulo 2 y Capítulo 3**). En el *Capítulo 2* se enseña el uso de herramientas numéricas para simular procesos. El primer objetivo del capítulo es documentar y aplicar la técnicas y métodos de Matlab para resolver y simular sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales. El *Capítulo 3* está dedicado a aprender herramientas para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

PARTE III. TEORÍA CLÁSICA DE CONTROL DE PROCESOS (Capítulo 4 y Capítulo 5) En el *Capítulo 4* se abordan estructuras de control que resultan útiles en el diseño de control clásico y moderno. En el *Capítulo 5* se definen conceptos básicos de la teoría de control. Después se introduce alguna técnica de control clásico.

PARTE IV. SIMULACIÓN DE PROCESOS (Capítulo 6 y Capítulo 7) En el *Capítulo 6* se propone una serie de problemas de modelado para diferentes aplicaciones. En el *Capítulo 7*, el objetivo principal es desarrollar casos de estudio que combinen el modelado y los métodos numéricos o la simulación de procesos químicos para diferentes aplicaciones.

PARTE V. TÉCNICAS DE CONTROL MODERNO (Capítulo 8 y Capítulo 9) Se desarrollan dos pequeños capítulos con describiendo técnicas de control moderno.

PARTE VI. PROBLEMAS DE CONTROL DE PROCESOS (Capítulo 10) Finalmente, en el *Capítulo 10* se desarrollan un módulo de problemas de control de procesos.

Modelado de Procesos

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Conceptos y terminología de procesos | 3 |
| 1.1 | Ingeniería de Procesos: definiciones y principios | 3 |
| 1.2 | Leyes de conservación y equilibrio | 16 |
| 1.3 | Formas especiales | 23 |

1. Conceptos y terminología de procesos

1.1 Ingeniería de Procesos: definiciones y principios

La **Ingeniería de Procesos** es una disciplina que se encarga del diseño, optimización y operación de procesos que basan su funcionamiento en los principios de las operaciones unitarias y de las reacciones químicas para obtener productos. Detallando, un **proceso** es un sistema formado por etapas en las cuales se lleva a cabo la conversión o transformación de materiales en productos mediante operaciones físicas y químicas. La transformación de la materia mediante mecanismos físicos no produce cambios en la naturaleza y composición de la materia, por lo tanto sus propiedades esenciales no se ven modificadas; mientras que aquellas transformaciones producidas a través de mecanismos químicos modifican la composición de la materia y producen sustancias con propiedades diferentes de las que presentaban las sustancias iniciales. Las **operaciones unitarias** son mecanismos para transportar, adecuar y/o transformar la materia implicada en un proceso. Sus funciones principales son almacenamiento y transporte de fluidos y sólidos, separación de mezclas, intercambio de calor, y transformaciones físicas de sólidos o líquidos. Los **procesos unitarios** son aquellos en los que ocurren transformaciones químicas, y se clasifican según el tipo de reacción química que se lleva a cabo. Ejemplos de ambos tipos de transformaciones se presentan en la Tabla 1.1. Una combinación de operaciones unitarias y de procesos unitarios forma un sistema tipo proceso.

Tabla 1.1: Ejemplos de operaciones unitarias y procesos unitarios

| Operaciones Unitarias | | | Procesos Unitarios | | |
|-----------------------|-------------|------------------------------|--------------------|----------------|---------------------|
| Secado | Destilación | Molienda | Combustión | Hidrólisis | Polimerización |
| Filtración | Extracción | Trituración | Oxidación | Nitración | Fermentación |
| Centrifugación | Absorción | Tamizado | Reducción | Hidrogenación | Saponificación |
| Decantación | Adsorción | Dilución | Electrólisis | Neutralización | Esterificación |
| Mezclado y agitación | Evaporación | Calentamiento y enfriamiento | Craqueo | Precipitación | Transesterificación |

Para su análisis desde el punto de vista de sistemas físicos, un proceso se considera formado por entradas, salidas, elementos, frontera, y ambiente o alrededores. Las partes de un sistema tipo proceso están dispuestas y se relacionan como se muestra en el esquema de la Figura 1.1. Las entradas son materias primas y energía en forma de calor o trabajo; las salidas son productos, y los elementos son un conjunto de etapas que forman una planta química, en las cuales se llevan a cabo las transformaciones de la materia y energía. Específicamente, los elementos del sistema son las operaciones unitarias y los procesos unitarios. Las entradas y salidas de materia y energía hacen posible la interacción entre el sistema y el ambiente. Este intercambio se establece por la circulación de fluidos y energía entre los elementos o etapas del sistema, y hacia los alrededores, o viceversa. En ambos sentidos se atraviesa la frontera.

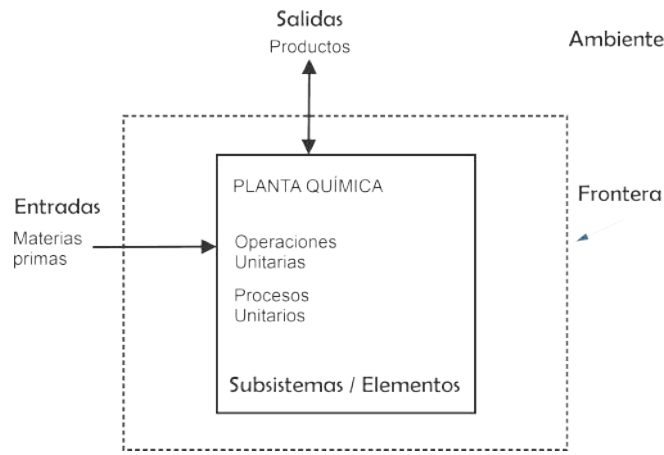


Figura 1.1: Diagrama de un sistema de ingeniería de procesos.

Una planta química completa necesita además los subsistemas de red de recuperación de calor y de planta de servicios auxiliares. La Figura 1.2 presenta un sistema de planta química completa.

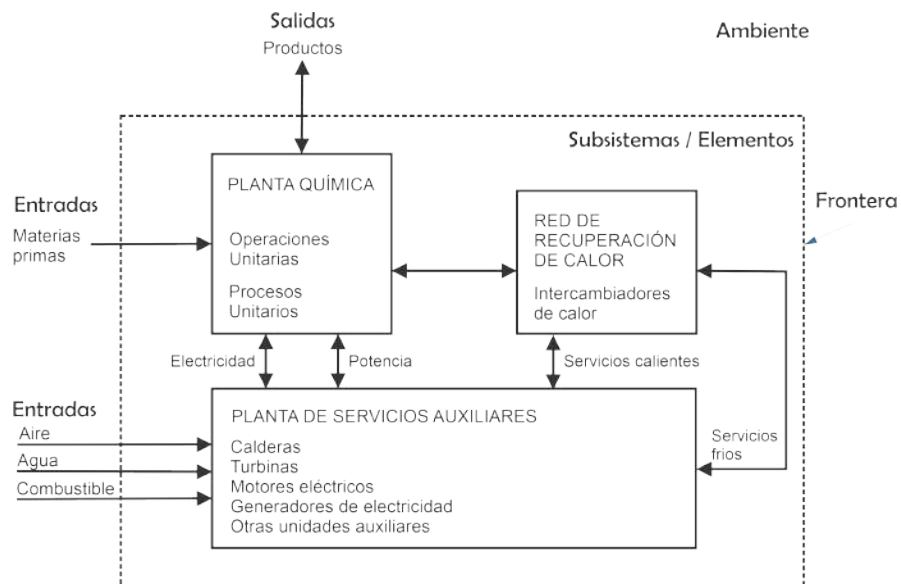


Figura 1.2: Diagrama de un sistema de planta química completa con subsistemas de red de recuperación de calor y de planta de servicios auxiliares.

1.1.1 Tipos de procesos y modos de operación

Una clasificación general de los sistemas de procesos los divide en dos categorías: Los **sistemas abiertos** son aquellos limitados por una frontera que la materia atraviesa. Para analizar las transformaciones de la materia en estos sistemas se define un *volumen de control*. Por el contrario, los **sistemas cerrados** son aquellos en los que no hay transferencia de materia a través de las fronteras, entonces, las transformaciones de la materia se dan para una *masa constante*. En ambos tipos de sistema puede haber un intercambio de energía con el ambiente en cualquiera de sus formas. Cuando existen entre el sistema y el ambiente condiciones tales que no hay transferencia de energía en forma de calor o trabajo, se dice que es un **sistema aislado**. Después, con relación a las estructuras de flujo en un proceso, se distinguen dos modos: En una **operación continua** se establece una circulación del fluido de trabajo, es decir, una corriente proveniente de los alrededores entra al sistema, y después de pasar por una transformación, sale del sistema hacia el ambiente. Por otro lado, en una **operación en lotes**, conocida también como **operación "batch"** no se establece una circulación del fluido de trabajo, en su lugar, la materia prima es suministrada antes de iniciar la operación y los productos se descargan después de concluida la transformación o conversión. Los procesos también pueden combinar estos modos de operación. En un proceso semicontinuo o semi-batch, el fluido de trabajo entra ininterrumpidamente, pero no hay corrientes de salida, o viceversa, sale ininterrumpidamente pero no tiene corrientes de entrada. La carga o descarga de material se hace antes de iniciar la operación o al concluir la transformación, respectivamente. En la industria química, la mayoría de los procesos son continuos.

Otra forma de clasificar los procesos se hace reconociendo cómo ocurren en ellos las transformaciones. Si durante el proceso no hay intercambio de energía térmica entre el sistema y el ambiente, se dice que este es un **proceso adiabático** (con calor nulo: $Q = 0$). El sistema de la Figura 1.3 ejemplifica de manera simple un proceso adiabático. Considere un pistón aislado térmicamente ($Q = 0$), inicialmente, el gas contenido en el volumen que encierra el pistón se encuentra en el estado 1 (a T_1, P_1, V_1). Las transformaciones que ocurren son las siguientes: el gas se expande y como consecuencia se enfría aun cuando no puede haber transferencia de calor hacia el ambiente porque el cilindro está rodeado de un material térmicamente aislante. Después de un tiempo t , el gas ha experimentado una transformación hacia el estado 2 (a T_2, P_2, V_2). Como se observa en los gráficos, durante el proceso el volumen del gas aumenta de V_1 a V_2 y su temperatura baja de T_1 a T_2 . Es importante notar que la expansión del gas produce un trabajo mecánico ($Q = 0$, pero $W \neq 0$).

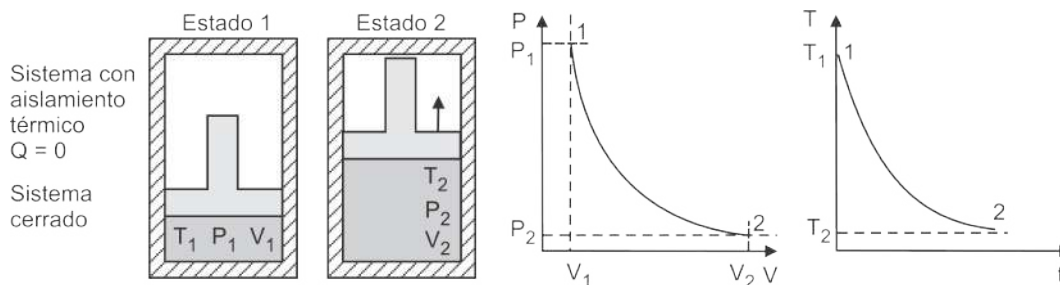


Figura 1.3: Proceso de enfriamiento Adiabático.

Si las transformaciones se llevan a cabo sin cambios de temperatura, se trata de un **proceso isotérmico** (a temperatura constante: $\Delta T = 0$). El sistema de la Figura 1.4 es un ejemplo de proceso isotérmico. Considere un pistón al que se le inyecta calor ($Q \neq 0$), entonces, el gas contenido en

el volumen dentro del pistón en el estado 1 (a T_1 , P_1 , V_1) se expande y se enfría, sin embargo, el enfriamiento se compensa por el calentamiento del gas producido por la fuente térmica. Siempre que la cantidad de calor que el sistema pierde iguala al calor que la fuente térmica proporciona, la temperatura permanece constante en el tiempo. Después de un tiempo t , el gas se encuentra en el estado 2 (a T_2 , P_2 , V_2). Como se observa en los gráficos, durante el proceso, el volumen del gas aumenta de V_1 a V_2 mientras que su temperatura permanece constante ($T_1 = T_2$). En este sistema, la expansión del gas también produce un trabajo mecánico por lo tanto es un sistema no aislado ($Q \neq 0$ y $W \neq 0$). En la sección 1.1.4 se describen otras transformaciones que ocurren en sistemas cerrados conteniendo gases ideales como el de los dos ejemplos anteriores.

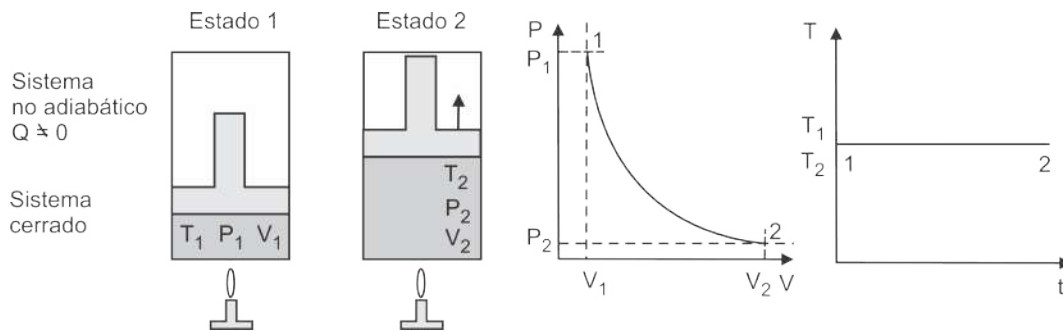


Figura 1.4: Proceso de Expansión Isotérmica.

1.1.2 Variables y funciones de sistemas de procesos.

El flujo de materia que atraviesa las fronteras de un proceso continuo o la materia contenida dentro de un sistema cerrado tiene propiedades que se pueden observar o medir y que dan información de las características o estado físico de la materia. Las **propiedades intensivas** son aquellas que no dependen de la cantidad de materia en el sistema; es decir, la masa puede variar en el sistema, pero sus valores no se alteran. Algunas de ellas pueden ser usadas para identificar una sustancia debido a que son propias de esa sustancia. Este tipo de propiedades intensivas son constantes físicas de la materia (propiedades específicas), algunos ejemplos son: la densidad, el volumen específico, la viscosidad, el calor específico, la conductividad y la resistividad térmicas, los puntos de ebullición, de fusión, y crítico, el calor latente, o la presión de vapor. En un modelo matemático que represente el comportamiento del sistema, estas propiedades se pueden contar entre los parámetros o constantes del modelo. Otras propiedades intensivas no pueden ser usadas para identificar una sustancia porque no son exclusivas de la sustancia, en cambio, dan información del estado y evolución de la materia (propiedades generales). Algunos ejemplos de este tipo de propiedades intensivas son la temperatura y la presión, la fracción molar. En un modelo matemático del sistema, estas propiedades se pueden contar entre las variables (de entrada y salida) del modelo. La materia tiene también propiedades intensivas que dan información sobre características no cuantificables de la materia y por lo tanto no se usan directamente en un modelo matemático. Como ejemplo se menciona el color, el sabor, y la textura. Las **propiedades extensivas** son aquellas que están determinadas por la cantidad de materia en el sistema. Algunos ejemplos son el peso, el número de moles, el número de moléculas, la longitud, la superficie, y el volumen. Algunas magnitudes termodinámicas también son propiedades extensivas tales como la energía cinética, la energía potencial, la energía libre de Gibbs y la entropía. Estas propiedades extensivas pueden ser consideradas como parámetros o variables del modelo; no definen una característica específica de la materia, pero pueden dar información del estado actual o de su evolución temporal.

Desde el punto de vista termodinámico, una **función de estado** es un concepto que hace referencia a una magnitud con diferencial exacta, que representa variables de un sistema termodinámico en equilibrio, a escala macroscópica. Un estado termodinámico está definido por una ecuación de la forma $F(P, V, T, \dots) = 0$, es decir, se escriben en términos de las **variables termodinámicas** medibles del sistema, como la temperatura T , la presión P , el volumen V o el número de moles n . El estado que se observa tiene la propiedad de depender de las condiciones de equilibrio actuales, sin importar cómo el sistema evolucionó al valor actual. Dicho de otra manera, durante la transformación entre dos estados de equilibrio de un sistema, la variación de una función de estado no depende de la trayectoria seguida para llevar a cabo la transformación, sino únicamente de los estados de equilibrio inicial y final. Otras variables de estado que se calculan en función de las variables de estado medibles son por ejemplo: la energía interna $U(T, P, V)$, la entalpía $H(T, P, V)$, y la entropía $S(T, P, V)$. A diferencia de una función de estado, una **función de trayectoria** representa un proceso durante el cual las funciones de estado evolucionan, y por lo tanto, durante la transformación entre dos estados de equilibrio depende de la trayectoria seguida para llevar a cabo el cambio. Ejemplos de funciones de trayectoria son el calor Q y el trabajo W .

En cuanto al modelo de un proceso, cuando se considera la evolución de las variables dependientes o de interés en el sistema a través del tiempo, se dice que el proceso opera en régimen dinámico o transitorio. Cuando estas variables permanecen sin cambio en el tiempo, en un punto de equilibrio del sistema, se dice que el proceso opera en régimen permanente o estacionario. Un modelo matemático en régimen permanente se usa en tareas de diseño, un modelo dinámico además sirve para optimizar y analizar la respuesta del sistema ante cambios en las entradas o parámetros del sistema, y tiene un interés particular para el diseño de control automático. En capítulos siguientes el interés se centra en el modelado dinámico de procesos para apoyar la tarea de síntesis de controladores. Un proceso dinámico está representado por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con derivadas temporales, o ecuaciones diferenciales parciales (EDP) con derivadas espacio-temporales. En cualquier caso, las ecuaciones se establecen partiendo de los principios de conservación y de las relaciones de equilibrio. Para un proceso químico las variables de entrada y salida son aquellas que determinan el estado termodinámico de la materia, es decir, para sistemas cerrados o procesos en lotes: temperatura, presión, volumen y cantidad de materia (masa o número de moles). Para un sistema abierto o un proceso continuo se considera: temperatura, presión y flujo de materia. En ambos casos, si en el proceso intervienen sistemas multicomponentes (dos o más componentes químicos en las corrientes de entrada y salida de materia o en la masa contenida en un sistema cerrado), entonces, además se considera la composición de la mezcla. Todas las demás variables que definen propiedades de las corrientes pueden ser determinadas a partir de las variables de estado termodinámico.

1.1.3 Ejemplos de procesos:

Con los siguientes ejemplos de procesos se van a revisar, identificar y aplicar los conceptos presentados antes en esta Sección 1.1.

■ **Ejemplo 1.1 — Intercambiadores de calor.** Son **operaciones unitarias** que implican la transferencia de energía térmica entre dos fluidos, o entre un fluido y un sólido. Una clasificación general los agrupa en dos tipos: los intercambiadores de calor de **contacto indirecto** son aquellos en donde los medios caliente y frío están separados por una pared. Los intercambiadores de calor de **contacto directo** son aquellos en donde los medios caliente y frío están en contacto entre sí.

Normalmente los intercambiadores de calor se modelan bajo la consideración de que están aislados del medio ambiente o que la disipación de calor al ambiente es pequeña comparada con el transporte de calor entre los medios caliente y frío. Algunos tipos comunes de intercambiadores de calor y sus características se presentan en las Tabla 1.2 (contacto indirecto) y en la Tabla 1.3 (contacto directo).

Tabla 1.2: Sistemas: Intercambiadores de calor de contacto indirecto

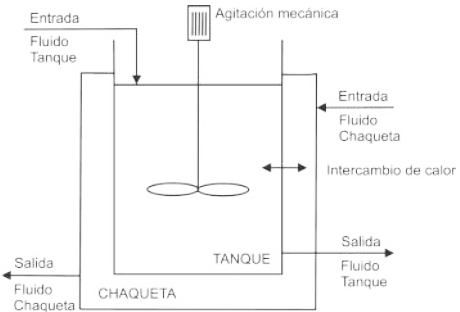
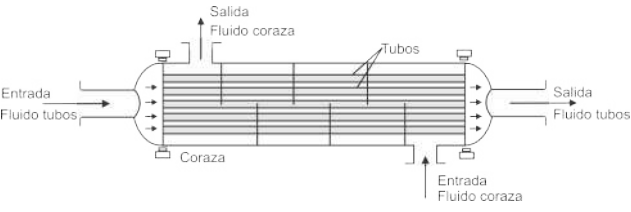
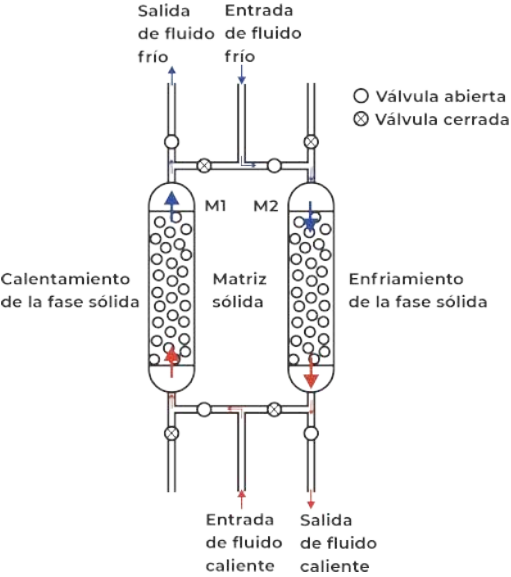
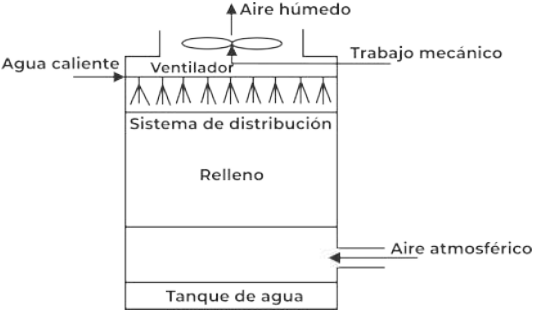
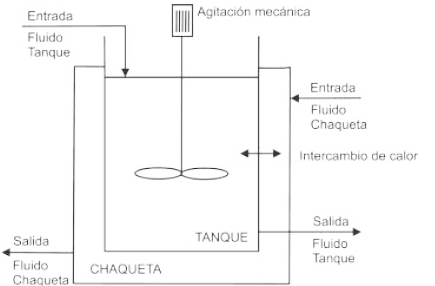

| Tipo de intercambiador de calor y subsistemas. | Descripción y tipos de sistema. |
|--|---|
|  <p>Intercambiador de calor de tanque agitado</p> | <p>Sistema de intercambio de calor entre dos fluidos separados por una pared, uno pasa por un tanque con agitación mecánica y otro por una chaqueta de enfriamiento o calentamiento. La agitación mantiene homogéneas las propiedades del fluido del tanque. El objetivo operacional es aumentar o disminuir la temperatura del fluido en el tanque, manteniendo fijo el nivel.</p> |
| <p>Subsistema Tanque</p> <p>Subsistema Chaqueta de enfriamiento o calentamiento</p> | <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, isotérmico</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico</p> |
|  <p>Intercambiador de calor de haz de tubos y coraza</p> | <p>Sistema de intercambio de calor indirecto entre dos fluidos, uno circula por un haz de tubos de diámetro pequeño contenido en una coraza por la que circula un segundo fluido. La variable de interés es la temperatura del fluido que se desea calentar o enfriar. Para ambos lados, la temperatura en la salida depende de la distribución y valores que toma a lo largo de los tubos y coraza. Comúnmente se considera un promedio logarítmico de esta variación para reducir el modelo de parámetros distribuidos a uno de parámetros concentrados, dejando explícita en el modelo solo la variación temporal.</p> |
| <p>Subsistema Haz de tubos interiores</p> <p>Subsistema Coraza</p> | <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, isotérmico</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico</p> |

Tabla 1.3: Sistemas: Intercambiadores de calor de contacto directo

| Tipo de intercambiador de calor y subsistemas. | Descripción y clasificación. |
|---|--|
| <p>Regenerador de calor</p>  | <p>Son IC compactos, trabajan de forma continua en una operación cíclica. La transferencia de calor se produce entre un gas y una matriz sólida como elemento de almacenamiento. La matriz suele ser un apilamiento de esferas, mallas metálicas, fibras o bloques de monolitos de diferente tipo de material. Estos sistemas funcionan con al menos dos lechos de manera intermitente en ciclos de recuperación-entrega de energía. Mientras la matriz sólida M1 es calentada por un fluido que entra caliente, M2 es enfriada por un fluido que entra frío. Cuando M1 ha almacenado suficiente calor y M2 ya perdió una cantidad equivalente de energía térmica, las válvulas cambian la dirección de entrada de los fluidos, lo cual hace posible las operaciones inversas, entonces M1 se enfría y M2 se calienta.</p> |
| <p>Subsistema matriz sólida</p> <p>Subsistema Gas</p> | <p>Abierto, no aislado, cerrado, no adiabático, no isotérmico.</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico.</p> |
| <p>Torre de enfriamiento</p>  | <p>Es un equipo donde se lleva a cabo una operación de contacto gas-líquido, comúnmente aire-agua. La transferencia de calor se produce cuando el agua a mayor temperatura y el aire se ponen en contacto a través de material de relleno de la torre. Este material, proporciona una superficie de contacto y permite el intercambio de calor entre el aire y el agua. Al evaporarse, el agua toma el calor que necesita del resto del agua circulante, enfriándola.</p> |
| <p>Subsistema Gas</p> <p>Subsistema Líquido</p> | <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, isotérmico.</p> <p>Abierto, no aislado, semi-continuo, no adiabático, no isotérmico.</p> |

■ **Ejemplo 1.2 — Reactores.** Son **procesos unitarios**. Los reactores que procesan reactantes líquidos son principalmente reactores continuos de tanque agitado (identificados comúnmente como CSTR por sus siglas en inglés), reactores de flujo pistón, reactores por lotes alimentados (Fed-batch en inglés), y reactores en lotes (Tablas 1.4 y 1.5).


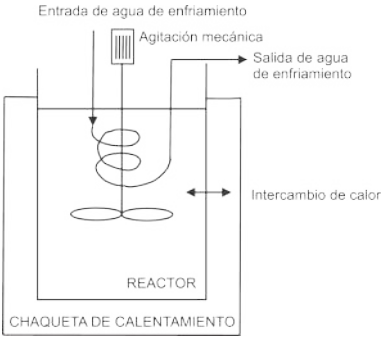
Tabla 1.4: Sistemas: Reactores continuos

| Tipo de reactor e identificación de subsistemas. | Descripción y clasificación. |
|---|--|
|  <p>Reactor continuo de Tanque agitado - CSTH</p> | <p>Sistema de intercambio de calor entre dos fluidos separados por una pared, uno pasa por un tanque con agitación mecánica y otro por una chaqueta de enfriamiento o calentamiento. La agitación mantiene homogéneas las propiedades del fluido del tanque. El objetivo operacional es aumentar o disminuir la temperatura del fluido en el tanque, manteniendo fijo el nivel.</p> |
| <p>Subsistema Reactor (Tanque)</p> <p>Subsistema Chaqueta de enfriamiento o calentamiento</p> | <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, isotérmico</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico</p> |
|  <p>Reactor de flujo pistón</p> | <p>Sistema de intercambio de calor indirecto entre dos fluidos, uno circula por un conjunto de tubos de diámetro pequeño contenidos en una coraza por la que circula un segundo fluido. La temperatura de los fluidos varía a lo largo del IC. Comúnmente se considera un promedio logarítmico de esta variación para reducir el modelo a uno de parámetros concentrados, solo con variación temporal.</p> |
| <p>Subsistema Haz de tubos interiores</p> <p>Subsistema Coraza</p> | <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, isotérmico</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico</p> |

El modo de operación continuo es utilizado frecuentemente para el procesamiento en la industria química, por ejemplo, en la producción de polímeros. En comparación con la operación en lotes, el modo continuo ofrece mejor manejo de la energía, mayor productividad, y más consistencia en la calidad de los productos. El modo de operación por lotes es flexible porque permite producir diferentes productos, o productos con diferentes grados de pureza, usando el mismo equipo. Las industrias

alimentaria y farmacéutica usan comúnmente este tipo de reactores. Los reactores por lotes son útiles también cuando se mezclan o manipulan sólidos, o cuando participan materiales altamente reactivos con el oxígeno en las reacciones. Los reactores semicontinuos son frecuentemente usados como fermentadores.

Tabla 1.5: Sistemas: Reactores discontinuos o semicontinuos

| Tipo de reactor e identificación de subsistemas. | Descripción y clasificación. |
|--|--|
|  <p>Reactor por lote alimentado o Fed-batch</p> | <p>Sistema de intercambio de calor entre dos fluidos separados por una pared, uno pasa por un tanque con agitación mecánica y otro por una chaqueta de enfriamiento o calentamiento. La agitación mantiene homogéneas las propiedades del fluido del tanque. El objetivo operacional es aumentar o disminuir la temperatura del fluido en el tanque, manteniendo fijo el nivel.</p> |
| <p>Subsistema Reactor (Tanque)</p> <p>Subsistema Chaqueta de enfriamiento o calentamiento</p> | <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, isotérmico</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico</p> |
|  <p>Reactor en lotes o reactor batch</p> | <p>En un reactor en lotes o discontinuo, la materia prima es introducida antes de iniciar la operación del equipo. A medida que avanza la reacción no hay salida de materia. Después de un tiempo se detiene la operación y se recupera el producto. Los procesos por lotes son intrínsecamente transitorios y se pueden distinguir varias regiones de operación para su funcionamiento.</p> |
| <p>Subsistema Reactor (Tanque)</p> <p>Subsistema Chaqueta de calentamiento</p> <p>Subsistema de enfriamiento</p> | <p>Cerrado, no aislado, en lotes, no adiabático, isotérmico</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico</p> <p>Abierto, no aislado, continuo, no adiabático, no isotérmico</p> |

1.1.4 Transformaciones en sistemas cerrados con gases ideales

Un gas ideal es un fluido con características específicas que le proporcionan un comportamiento bien definido en función de las variables de estado:

- No presentan fuerzas de atracción entre sus moléculas.
- Volúmenes iguales de gases diferentes tienen el mismo número de moléculas.
- Las moléculas que componen los gases conservan su momento y su energía cinética.
- Su energía cinética varía proporcionalmente con la temperatura.
- No experimentan cambios de fase gas-líquido o gas-sólido.

Un modelo de gas ideal describe el estado del fluido mediante una ecuación de estado simple $F(P, V, T, \dots) = 0$. Esta ecuación matemática (1.1) expresa la ley de comportamiento de los gases ideales en función de variables medibles del sistema:

$$PV = nRT \quad (1.1)$$

donde P (Pa) es la presión, V (m^3) el volumen, T (K) la temperatura, n (mol) el número de moles, y R la constante universal de los gases $R = 8.3144 \text{ (Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}\text{)}$.

Considere un gas ideal contenido en un sistema cerrado, se analizan las transformaciones desde el Estado 1 (T_1, P_1, V_1, n_1) al Estado 2 (T_2, P_2, V_2, n_2) considerando la ley de los gases ideales. El **trabajo** producido por este sistema se calcula como el *área bajo la curva PV* (1.2):

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (1.2)$$

La primera ley de la termodinámica para sistemas cerrados y mecánicamente reversibles se obtiene considerando n constante y $dn = 0$ (1.23), donde d se usa para indicar que las diferenciales son exactas y δ que las diferenciales no son exactas, por lo tanto, la **energía interna** U es una función de estado, mientras que el **calor** Q es una función de trayectoria (ver en la Sección 1.2 la ecuación general de la Primera Ley de la Termodinámica).

$$\delta Q + \delta W = dU \quad (1.3a)$$

$$\delta W = -PdV \quad (1.3b)$$

$$\delta Q = dU + PdV \quad (1.3c)$$

En el caso de un compuesto puro, la **energía interna** es una función de estado $U(T, P, V, n)$, por lo tanto, la diferencial total es (1.4):

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,n} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,n} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{T,V} dn \quad (1.4)$$

Para un sistema cerrado ($n = \text{constante}$ y $dn = 0$) la ecuación (1.4) se reduce a (1.5):

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \quad (1.5)$$

Combinando (1.23) y (1.5), se obtiene δQ en (1.6):

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV \quad (1.6)$$

En el caso de un compuesto puro, la **entalpía** es una función de estado que por convención se define como $H(T, P, n)$. La definición de la entalpía como una propiedad extensiva es (1.7) y la diferencial total de la función de estado es (1.8):

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V \quad (1.7)$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,n} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{T,n} dP + \left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)_{T,P} dn \quad (1.8)$$

Para un sistema cerrado ($n = \text{constante}$ y $dn = 0$) la ecuación (1.8) se reduce a (1.9):

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP \quad (1.9)$$

Para un proceso a P constante se combinan (1.23) y (1.9) y se obtiene δQ en (1.10).

$$\delta Q_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT \quad (1.10)$$

A partir de (1.6) y (1.10) se definen el **calor específico a volumen constante** o *capacidad calorífica específica a volumen constante* C_V (1.11 a) y el **calor específico a presión constante** o *capacidad calorífica a volumen constante* C_P (1.11 b).

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (1.11a)$$

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad (1.11b)$$

Para un gas ideal estas cantidades se relacionan en la forma en que se indica en (1.12 a). Como los valores de C_V Y C_P dependen de la temperatura, al variar la temperatura, cambian sus valores, pero la relación (1.12 a) se sigue observando. A la relación entre C_P y C_V se le denota como γ (1.12 b).

$$R = C_P - C_V \quad (1.12a)$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (1.12b)$$

Después se definen el **coeficiente de expansión térmica** α (1.13 a) y el **coeficiente de compresibilidad isotérmica** κ (1.13 b).

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (1.13a)$$

$$\kappa = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (1.13b)$$

Tabla 1.6: Transformaciones en un sistema cerrado conteniendo un gas ideal, con T , P o V constante.

| | | |
|--------------------------------|---|--|
| | <p>Transformación isotérmica El sistema evoluciona desde el estado 1 (T_1, P_1, V_1) hasta el estado 2 a (T_2, P_2, V_2) a temperatura constante ($T_1 = T_2$).</p> | <p>Trabajo:</p> $W_{1 \rightarrow 2} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ $= P_1 V_1 \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (1.14)$ $= nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$ |
| <p>Isoterma.</p> | <p>Ley de Boyle:</p> $P_1 V_1 = P_2 V_2$ | <p>Calor:</p> $Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2} \quad (1.15)$ |
| | <p>Transformación isobara El sistema evoluciona desde el estado 1 (T_1, P_1, V_1) hasta el estado 2 a (T_2, P_2, V_2) a presión constante ($P_1 = P_2$).</p> | <p>Trabajo:</p> $W_{1 \rightarrow 2} = P(V_2 - V_1) \quad (1.16)$ <p>Calor:</p> $Q_{1 \rightarrow 2} = C_P(T_2 - T_1)$ $= n(h_2 - h_1) \quad (1.17)$ $= H_2 - H_1$ |
| <p>Línea Isobara.</p> | <p>Ley de Charles:</p> $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ | |
| | <p>Transformación isocórica El sistema evoluciona desde el estado 1 (T_1, P_1, V_1) hasta el estado 2 a (T_2, P_2, V_2) a volumen constante ($V_1 = V_2$).</p> | <p>Trabajo:</p> $W_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (1.18)$ <p>Calor:</p> $Q_{1 \rightarrow 2} = C_V(T_2 - T_1)$ $= n(u_2 - u_1) \quad (1.19)$ $= U_2 - U_1$ |
| <p>Línea isocórica.</p> | $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ | |

Tabla 1.7: Transformaciones adiabáticas y politrópicas.

| | | |
|---|--|---|
| <p>Transformaciones adiabáticas. El sistema evoluciona desde el Estado 1 (T_1, P_1, V_1) hasta el Estado 2 a (T_2, P_2, V_2) sin intercambio de energía térmica entre el sistema y el ambiente ($Q = 0$).</p> | $P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \quad (1.20a)$ $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (1.20b)$ $T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (1.20c)$ <p>Entonces, la ecuación adiabática para gases ideales se puede escribir de las siguientes formas:</p> $P_2 V_2^\gamma = \text{constante}$ $T_2 V_2^{\gamma-1} = \text{constante}$ $T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{constante}$ | <p>Trabajo:</p> $W_{1 \rightarrow 2} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$ $= \frac{nR(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}$ $= \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \quad (1.21)$ $= \frac{nRT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$ <p>Calor:</p> $Q_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (1.22)$ |
| <p>Transformaciones politrópicas. Es un sistema termodinámico en donde el cambio de un Estado 1 (T_1, P_1, V_1) a un Estado 2 (T_2, P_2, V_2) está dado por la relación:</p> | $P_2 V_2^\lambda = P_1 V_1^\lambda \quad (1.23a)$ $T_2 V_2^{\lambda-1} = T_1 V_1^{\lambda-1} \quad (1.23b)$ $T_2 P_2^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = T_1 P_1^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \quad (1.23c)$ <p>En donde λ toma valores que definen el tipo de transformación:</p> <p>Proceso Isobárico: $\lambda = 0$ Proceso Isotérmico: $\lambda = 1$ Proceso Adiabático: $\lambda = \gamma$ Proceso Isocórico: $\lambda = \infty$</p> | <p>Trabajo:</p> <p>Para $\lambda \neq 1$</p> $W_{1 \rightarrow 2} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\lambda - 1}$ $= \frac{nR(T_2 - T_1)}{\lambda - 1} \quad (1.24)$ <p>Para $\lambda = 1$</p> $W_{1 \rightarrow 2} = nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (1.25)$ <p>Calor:</p> <p>Para $\lambda \neq 1$</p> $Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{(\lambda - \gamma)nRT_1}{(\lambda - 1)(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\lambda(\lambda-1)} - 1 \right] \quad (1.26)$ <p>Para $\lambda = 1$</p> $Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2} \quad (1.27)$ |

En la Tabla 1.6 se muestran los cambios de $1 \rightarrow 2$ en **diagramas PV**. En cada caso, se mantiene una de las variables constante. En la Tabla 1.7 se muestran los cambios de $1 \rightarrow 2$ en **diagramas PV** para procesos adiabáticos y politrópicos con gases ideales.

1.2 Leyes de conservación y equilibrio

En esta sección se estudian las leyes y ecuaciones fundamentales del modelado de procesos químicos. Las relaciones que se presentan son las formas más simples para representar los fenómenos y mecanismos básicos que rigen el comportamiento de una gran variedad de equipos usados ampliamente en la industria. La idea es ofrecer una introducción al modelado dinámico de procesos, accesible a ingenieros que no tienen conocimientos en esta área, pero que en algún momento se enfrentan a problemas de control de procesos o desarrollo de proyectos multidisciplinarios. Los principios de conservación dan lugar a las ecuaciones, que en combinación con relaciones de equilibrio hacen posible formular los modelos matemáticos para los procesos.

Principio de conservación de la materia: Establece que la cantidad de materia contenida en un sistema permanece constante en el tiempo, independientemente de las conversiones que ocurran en el sistema. Esto implica que la materia no puede ser creada o destruida, solo puede ser transformada.

Principio de conservación de la energía o primera ley de la termodinámica: Establece que la energía contenida en un sistema permanece constante en el tiempo, independientemente de las conversiones que ocurran en el sistema. Esto implica que la energía no puede ser creada o destruida, solo puede ser transformada.

Principio de conservación de momento o cantidad de movimiento: Establece que si resultante de las fuerzas que actúan sobre un sistema es cero, este sistema está en equilibrio y su momento lineal permanece constante.

Segunda ley de la termodinámica: Fue establecida con base en la observación de las condiciones bajo las cuales ocurren los fenómenos y procesos termodinámicos. Por lo tanto determina que fenómenos pueden ocurrir en la naturaleza y cuáles no son posibles. La segunda ley de la termodinámica tiene diferentes implicaciones. En primer lugar establece la dirección de los procesos de conversión o transmisión de energía. Por ejemplo, el calor contenido en un cuerpo se transfiere de una zona caliente a una zona fría, un componente en una mezcla se transporta de una región de alta a una de baja concentración, un fluido en movimiento circula desde una zona de alta energía potencial hacia una de baja energía potencial, o desde una zona de alta presión hacia otra de baja presión. En los ejemplos dados, no es posible que la transmisión de energía ocurra espontáneamente en sentido inverso. Con la segunda ley de la termodinámica también introduce el concepto de irreversibilidad y reversibilidad, e identifica las condiciones bajo las cuales es posible aproximar un proceso reversible. Los procesos irreversibles son aquellos en los que su dirección no puede ser invertida para regresar al estado del cual partió la transformación, pasando por los mismos estados intermedios, e invirtiendo las interacciones que se dieron con el medio ambiente. Los procesos reversibles son aquellos en los que es posible invertir su dirección sin afectar el estado de los alrededores. Únicamente bajo ciertas circunstancias es posible efectuar procesos reversibles. Un fenómeno puede aproximarse a ser reversible cuando se conduce en procesos cuasi-estáticos o cuando se pueden evitar fenómenos disipativos. La conversión de energía, además, no puede darse con la misma facilidad y efectividad en un sentido y en otro, por ejemplo, la conversión de energía eléctrica en energía térmica puede darse en un solo paso y con una

eficiencia relativamente alta. En cambio, las conversiones de energía mecánica proporcionada por el viento o de energía hidráulica a energía eléctrica requieren de más etapas y la eficiencia es menor, esto se debe a que la entropía asociada a los ejemplos de generación de energía eléctrica es mayor que en el primer ejemplo para obtener energía térmica a partir de electricidad. La entropía es una medida de la energía de un sistema que no se puede utilizar para producir un trabajo. En resumen, la segunda ley de la termodinámica establece que la entropía de un sistema aislado termodinámicamente tiende a aumentar en el tiempo y ha sido escrita en diferentes enunciados:

Clausius: Es imposible que un proceso operando cíclicamente, tome calor de una fuente fría y lo transfiera íntegramente a una fuente cálida (direccionalidad de los procesos).

Carnot: El rendimiento de una máquina térmica o máquina de Carnot, que opera en ciclos entre dos fuentes térmicas con temperatura fijas, no puede ser superado por el de otras máquinas reversibles operando entre las mismas fuentes (irreversibilidad de los procesos).

Planck-Kelvin: Es imposible que una máquina operando cíclicamente convierta íntegramente el calor de una fuente en trabajo mecánico (imposibilidad de aprovechamiento al 100% de la energía).

1.2.1 Balances de Materia

Los balances de materia se establecen mediante la aplicación del principio de conservación de la materia para sistemas dinámicos. La cantidad de materia es contabilizada por la masa M o los moles N . Los términos convectivos son el flujo másico w y el flujo molar n .

Balance de materia global Un balance global de materia contabiliza la masa o los moles totales contenidos en el sistema en cada instante del tiempo de operación.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{de la cantidad de materia} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que entra al sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que sale del sistema} \end{array} \right\} \quad (1.28)$$

En términos de masa y flujo másico:

$$\frac{dm}{dt} = \omega_e - \omega_s \quad (1.29)$$

En términos de moles y flujo molar:

$$\frac{dN}{dt} = n_e - n_s \quad (1.30)$$

El número de moles N de un componente resulta de dividir la masa m entre su peso molecular PM , y el flujo molar j resulta de dividir el flujo másico ω entre su peso molecular PM :

$$N = \frac{m}{PM} \quad (1.31a)$$

$$j = \frac{\omega}{PM} \quad (1.31b)$$

Términos convectivos: El volumen no se conserva para fluidos compresibles, pero la ecuación de continuidad puede ser escrita en términos del volumen V y del flujo volumétrico q si se considera la densidad ρ (para un fluido incompresible).

$$m = \rho \quad (1.32a)$$

$$\omega = \rho q \quad (1.32b)$$

De la misma forma, a menudo es conveniente expresar el volumen en función de parámetros geométricos, como la altura h y del área transversal A . Esta consideración permite establecer las ecuaciones en términos del nivel h en un tanque, por ejemplo.

$$V = hA \quad (1.33a)$$

$$\omega = \rho q \quad (1.33b)$$

Balance de materia por componente Considere una proceso formado por S subsistemas, cada subsistema conteniendo una mezcla de C_i componentes (para $i = 1, \dots, S$). En un balance de materia por componente se hace la contabilización de la cantidad de materia de cada componente dentro del sistema en cada instante de tiempo. Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, se requieren plantear $\sum_{i=1}^S C_i$ balances por componente y en ese caso, la suma de todos ellos debe ser igual al balance global. Equivalentemente, se pueden establecer un balance global más $C_i - 1$ balances por componente en cada subsistema i (con $i = 1, \dots, S$). Para generar las ecuaciones de balance por componente, se aplica el principio de conservación de materia para contabilizar la cantidad de moles de cada componente i de cada subsistema, y se escribe como en la ecuación (1.41).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{del número de moles} \\ \text{del } i\text{-ésimo componente} \\ \text{dentro del sistema.} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Flujo de moles del} \\ \text{}i\text{-ésimo componente} \\ \text{que entra al sistema.} \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \text{Flujo de moles del} \\ \text{}i\text{-ésimo componente} \\ \text{que sale del sistema.} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \text{Velocidad de formación de moles} \\ \text{del } i\text{-ésimo componente a partir de} \\ \text{las reacciones químicas que ocurren} \\ \text{en el sistema.} \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \text{Velocidad de consumo de moles} \\ \text{del } i\text{-ésimo componente, por las} \\ \text{reacciones químicas que ocurren} \\ \text{en el sistema.} \end{array} \right\} \quad (1.34)$$

Cuando ocurre una reacción dentro del sistema, los balances de materia se desarrollan en unidades de moles, en lugar de ser expresados en unidades de masa. En presencia de una reacción, los componentes sufren una transformación en su estructura química, entonces, un compuesto es generado como producto de la reacción o es consumido como reactante; consecuentemente, el balance de cada componente debe incluir los términos de velocidad de reacción que determinen la rapidez de producción o consumo de los compuestos químicos que forman parte del sistema.

1.2.2 Balances de Energía

Los balances de energía respetan la primera ley de la termodinámica, pero su aplicación se extiende a los procesos dinámicos. Las ecuaciones que resultan de aplicar esta ley rigen el comportamiento del transporte, distribución y conversión de la energía en los sistemas. La resolución de un modelo térmico permite además estudiar la evolución temporal de la temperatura. Antes de escribir la forma de un balance de energía se detallan algunos aspectos sobre la primera ley de la termodinámica.

Para un sistema cerrado (de masa constante) la primera ley de la termodinámica establece que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energía total} \\ \text{del sistema.} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Energía que se intercambia} \\ \text{entre el sistema y el ambiente} \\ \text{a través de las frontera.} \end{array} \right\}$$

$$\Delta U + \Delta E_K + \Delta E_P = \pm Q \pm W \quad (1.35)$$

Por convención se establece que los valores del calor Q y del trabajo W tienen signo positivo cuando la transferencia ocurre del ambiente al sistema. La energía total contenida en un sistema es: $E_T = U + E_k + E_p$, donde U es la energía interna, E_k es la energía cinética y E_p es la energía potencial. Para una gran parte de problemas de modelado de procesos es válido considerar que los cambios de las energías cinética y potencial son nulos o son pequeños en comparación con los cambios de energía interna, entonces ΔE_k y ΔE_p frecuentemente se suponen nulos. Por lo tanto, la primera ley de la termodinámica se reduce a la ecuación (1.36), y para cambios diferenciales se aplica la ecuación (1.23).

$$\Delta U = Q + W \quad (1.36)$$

Regresando a la ecuación 1.35, esta es la forma básica de la primera ley de la termodinámica para sistemas cerrados (con masa constante). Sin embargo, la mayoría de los procesos son abiertos y operan de manera continua. Para que la primera ley de la termodinámica sea aplicable a sistemas abiertos se introduce el concepto de entalpía. Esta se define como $H = U + PV$. El flujo de materia que entra tiene asociada una energía H_1 , y el flujo que sale, H_2 . El cambio en la entalpía del fluido que entra y sale del sistema es:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta PV \quad (1.37)$$

Considerando la energía contenida del sistema igual a la energía interna U ($\Delta E_K \approx 0$, $\Delta E_P \approx 0$), se reescribe la primera ley como se indica en la ecuación (1.38). Se remarca que el trabajo es igual al trabajo de flecha W_s , o trabajo que se ejerce sobre el sistema por los alrededores, más el trabajo debido al movimiento del fluido que entra y sale del sistema ($W = W_s + P_1V_1 - P_2V_2 = W_s - \Delta(PV)$).

$$\Delta U = Q + W = Q + \underbrace{W_s - \Delta(PV)}_{\substack{\text{Trabajo + Trabajo debido a} \\ \text{de flecha la entrada y salida} \\ \text{del fluido.}}} \quad (1.38)$$

Reescribiendo,

$$\Delta U + \Delta PV = Q + W_s \quad (1.39)$$

Y en términos de la entalpía (1.37) se obtiene la primera ley de la termodinámica para sistemas abiertos en régimen permanente (1.40).

$$\Delta H = H_2 - H_1 = Q + W_s \quad (1.40)$$

En un sistema dinámico esta ley se traduce en un balance de la energía del sistema, el cual se transforma en una ecuación diferencial cuya solución proporciona la evolución de la temperatura con tiempo. Entonces, en un balance de energía se añade el término de velocidad de cambio de la energía total del sistema. Un modelo térmico formulado a partir de un **balance de energía** tiene la forma de la ecuación (1.41).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{de la energía interna,} \\ \text{cinética y potencial} \\ \text{dentro del sistema.} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Flujo de energía interna,} \\ \text{cinética y potencial que} \\ \text{entra el sistema.} \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \text{Flujo de energía interna,} \\ \text{cinética y potencial que} \\ \text{sale del sistema.} \end{array} \right\} \quad (1.41)$$

$$+ \left. \begin{array}{l} \text{Calor neto añadido} \\ \text{al sistema de los} \\ \text{alrededores.} \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \text{Trabajo neto realizado} \\ \text{por el sistema hacia los} \\ \text{alrededores.} \end{array} \right\}$$

Término de acumulación:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{de la energía interna total} \end{array} \right\} = \frac{d(mU)}{dt} \quad (1.42)$$

La energía interna no es una variable medible, pero se calcula en a partir de otras que si lo son. U es una función de estado que, en general, para un compuesto puro depende de dos variables $U(T, V)$. El cálculo de la energía interna depende además del tipo de compuesto o proceso que se considere.

Gases ideales: Para gases ideales, U depende solo de la temperatura, como se encontró en la ecuación (1.11 .a), una función de la capacidad calorífica a volumen constante C_V :

$$dU = C_V dT \quad (1.43)$$

Fluido incompresible: Para un fluido incompresible se puede aproximar el comportamiento real sin mucho error si se considera V constante. En este caso se admite que:

$$C_V = C_P = C \quad (1.44)$$

donde C_P es la capacidad calorífica a presión constante (1.11 .b). Por lo tanto:

$$dU = C dT \quad (1.45)$$

Independientemente del tipo de proceso La energía interna puede expresarse en términos de C_V , C_P , y del coeficiente de expansión térmica α (1.13 .a).

$$dU = C_V dT + \left(\frac{C_P - C_V}{\alpha V} - P \right) dV \quad (1.46)$$

Energía debida al flujo de materia en el sistema abierto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de energía} \\ \text{interna que entra} \\ \text{al sistema} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Trabajo por} \\ \text{el fluido que} \\ \text{entra} \end{array} \right\} - \left(\left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de energía} \\ \text{interna que sale} \\ \text{del sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Trabajo por} \\ \text{el fluido que} \\ \text{sale} \end{array} \right\} \right) = H_1 - H_2 \quad (1.47)$$

La entalpía tampoco es medible, pero se calcula en a partir de otras que si lo son. H es una función de estado que, en general, para un compuesto puro depende de dos variables $H(T, P)$. El cálculo de la entalpía depende además del tipo de compuesto o proceso que se trabaje.

Gases ideales: Para gases ideales, H depende solo de la temperatura, como indica la ecuación (1.11 .b), y es función de la capacidad calorífica a presión constante C_P . Esta última es la cantidad necesaria para que una unidad de masa aumente su temperatura en 1°C . :

$$dH = C_P dT \quad (1.48)$$

Fluido incompresible: Para un fluido incompresible se puede aproximar el comportamiento real sin mucho error si se considera V constante. En este caso se admite que:

$$C_V = C_P = C \quad (1.49)$$

Por lo tanto:

$$dH = C dT \quad (1.50)$$

Independientemente del tipo de proceso La energía interna puede expresarse en términos de C_V , C_P , del coeficiente de expansión térmica α (1.13 .a) y de la compresibilidad isotérmica κ (1.13 .b).

$$dH = C_P dT + \left[(C_V - C_P) \frac{\kappa}{\alpha} + V \right] dP \quad (1.51)$$

Término de calor .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Calor neto añ adido} \\ \text{al sistema de los} \\ \text{alrededores} \end{array} \right\} = Q_{tr} \quad (1.52)$$

Q_{tr} es la cantidad neta de energía en forma de calor transferido al sistema o liberado por el sistema, en ambos casos a través de las fronteras, mediante mecanismos de conducción, convección y/o radiación (sección 3.2.2). A este término debe también agregarse el calor que es cedido al sistema o tomado del mismo cuando se llevan a cabo reacciones y/o cambios de fase.

Término de trabajo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trabajo neto realizado} \\ \text{por el sistema hacia los} \\ \text{alrededores} \end{array} \right\} = -W_s \quad (1.53)$$

1.2.3 Balances de Momento

El momento es el producto de la masa y la velocidad (1.55), mientras que la fuerza es, de acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, el producto de la masa por la aceleración $E_c:BM$. La fuerza es también la velocidad de cambio del momento. Un balance de momento es la ecuación resultante de aplicar el principio de conservación de momento para el estudio del flujo de fluidos. El balance de cantidad de movimiento tiene la forma de la ecuación (1.54).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{cambio de la} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de la} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{salida de la} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de las} \\ \text{fuerzas que} \\ \text{actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} \quad (1.54)$$

$$p = Mv \quad (1.55)$$

En función de la densidad:

$$p = \rho Vv \quad (1.56)$$

Una expresión más general, cuando la masa puede variar con el tiempo, es la forma más simple de la ecuación de conservación del momento es (??).

$$\frac{d(Mv_i)}{dt} = \sum_j^N F_{ji} \quad (1.57)$$

donde v_i es la velocidad en la dirección i y F_j es la fuerza j actuando en la dirección i .

1.2.4 Relaciones de Equilibrio

El concepto de **equilibrio** denota el estado de un sistema en el cual no se experimentan cambios ni existe una tendencia a experimentar cambios debido a que se establece un balance de fuerzas. La fuerza motriz o fuerza impulsora es un gradiente en las variables que caracterizan el contenido en energía, materia y movimiento en el sistema, y genera cambios en el sistema. El equilibrio puede ser:

Termodinámico: es el estado de un sistema que contiene una energía interna, para el cual los procesos y mecanismos a nivel microscópico no producen cambios de temperatura, presión o de otras variables macroscópicas. Durante los cambios de fase de compuestos puros o mezclas se establece un estado de equilibrio termodinámico.

Químico: se instala cuando una reacción química ocurre a la misma velocidad que la transformación inversa, es decir, no hay cambio neto en la cantidad de cada compuesto.

Mecánico: Segunda Ley de Newton.

1.3 Formas especiales

1.3.1 Fenómenos de transporte

El campo de la ingeniería de procesos que estudia los mecanismos por los cuales hay una transmisión de masa que implica la transferencia de especies químicas, energía en forma de calor, y movimiento en un proceso se conoce como **Fenómenos de transporte**. El tema es tratado en profundidad en lecturas clásicas como [27-29, 8, 40, 44]. En esta sección se introducen las ecuaciones básicas que describen el transporte de masa, calor y momento. Los fenómenos de transporte derivan de la acción de fuerzas motrices que rompen el equilibrio del sistema, y como consecuencia de la tendencia que tiene el sistema a restablecer el equilibrio; ocurren entre fluidos o entre fluidos y sólidos.

Se distinguen esencialmente dos mecanismos de transporte de materia y energía: molecular o difusivo, y el convectivo. El primero se debe al movimiento e interacciones entre las moléculas; el segundo es un mecanismo macroscópico en el cual la transmisión ocurre por el movimiento de un fluido en contacto con otro fluido o con un sólido, entonces implica una interfaz. Las ecuaciones que caracterizan los dos tipos de transporte tienen la forma (1.58).

$$\text{Velocidad de transporte} = \frac{\text{Fuerza motriz}}{\text{Resistencia a la transferencia}} \quad (1.58)$$

Ecuación de Fourier El mecanismo de transferencia de calor por conducción se lleva a cabo por interacción molecular. La transferencia puede ser fluido-fluido, fluido-sólido o sólido-sólido. El transporte de calor ocurre de la parte más caliente hacia la parte más fría. Fourier estudió el fenómeno de transporte por conducción y estableció su primera ley de la conducción de calor, que expresa el flux de calor como una magnitud proporcional al gradiente de temperatura T .

$$\mathbf{Q}_A = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1.59)$$

donde Q_A es el vector de densidad de flujo de calor y k es la conductividad térmica. En forma reducida la ecuación vectorial es:

$$\mathbf{Q}_A = -k \nabla T \quad (1.60)$$

Ley de enfriamiento de Newton La transferencia de calor por convección consiste en el intercambio de energía entre una superficie y un fluido adyacente. Se distingue entre la convección forzada, que la produce una fuente, como un compresor o una bomba, y la convección libre que se produce por la diferencia de temperatura del fluido en contacto con la interfaz sólida. De manera directa, la

circulación es provocada por la diferencia de densidad que resulta de la variación de temperatura en toda una región del fluido.

$$Q_A = \frac{Q}{A} h \Delta T \quad (1.61)$$

Ecuación de Fick o ecuación de difusión La transferencia de masa o el transporte de masa es un fenómeno en el cual un componente en un sistema es transportado desde una región de mayor concentración a otra de menor concentración. Este transporte a nivel macroscópico es provocado por el movimiento molecular aleatorio de átomos, iones, moléculas o partículas en un fluido formado por una mezcla de componentes (transferencia de masa molecular), o desde una superficie a un fluido en movimiento (transferencia de masa convectiva). El modelo matemático del transporte de la materia se obtiene mediante la primera y la segunda ley de difusión de Fick. La primera ley de Fick trata la difusión en estado estacionario, mientras que la segunda ley trata la difusión transitoria. El modelo de difusión es una ecuación diferencial parcial que representa la evolución de la concentración producida por un flujo dado. Con unas condiciones iniciales y de frontera adecuadas, la solución de esta ecuación es un perfil de concentración dado como una función del tiempo y el espacio.

$$\mathbf{J}_A = -cD_{AB} \left(\frac{\partial x_A}{\partial x} + \frac{\partial x_A}{\partial y} + \frac{\partial x_A}{\partial z} \right) \quad (1.62)$$

o

$$\mathbf{J}_A = -cD_{AB} \nabla \mathbf{x}_A \quad (1.63)$$

donde J_A es la densidad de flujo de difusión, x_A es la concentración molar de la especie i dividida entre la densidad molar total de la solución ($x_A = \frac{c_i}{c}$), y D_{AB} es la difusividad en un sistema binario.

1.3.2 Fluidos en movimiento

Ecuación de Bernoulli La primera ley de la termodinámica aplicada a un volumen de control, bajo ciertas restricciones da origen al **Principio de Bernoulli** para fluidos en movimiento, el cual establece que en todo fluido ideal, incomprensible, en régimen laminar circulando por un conducto sin pérdidas por fricción y sin transferencia de calor ni trabajo mecánico, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de todo su recorrido. El principio se traduce en lo que se conoce como la **ecuación de Bernoulli** que describe el comportamiento de un fluido en condiciones variantes. Los tres tipos de energía que pueden cambiar de un punto a otro son:

1. La energía hidrodinámica debida a la velocidad del flujo.
2. La energía hidrostática o energía de flujo debida a la presión del fluido.
3. La energía potencial gravitatoria debida a la altura de los puntos considerados en la circulación del fluido.

La ecuación de Bernoulli se deriva de la termodinámica aplicada al flujo de fluidos en un volumen de control. Considere dos puntos (1 y 2) en un conducto por el que circula un fluido. La primera ley de la termodinámica establece que:

$$\rho v_1 A_1 \left(\frac{P_1}{\rho} + g y_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) = \rho v_2 A_2 \left(\frac{P_2}{\rho} + g y_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) \quad (1.64)$$

donde P es la presión, y es la posición vertical, v es la velocidad de flujo, ρ es la densidad, g es la aceleración de la gravedad. y los subíndices 1 y 2 se refieren a las dos posiciones en la línea de flujo.

Se considera un régimen permanente en el flujo del fluido, por lo tanto, la ecuación de continuidad se cumple:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_1 v_2 A_2 \quad (1.65)$$

Dividiendo cada lado de (1.64) entre el flujo másico (1.65) se obtiene la ecuación de Bernoulli para el flujo de un fluido por un conducto.

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1.66)$$

1.3.3 Ecuaciones de Navier Stokes

Las **ecuaciones de Navier-Stokes** forman un conjunto de ecuaciones que representan la segunda ley de movimiento de Newton en forma diferencial [44]. El conjunto incluye las ecuaciones fundamentales del flujo de fluidos:

1. La ecuación de Continuidad (Conservación de masa). Para un fluido incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.67)$$

2. Las ecuaciones de la cantidad de movimiento (Conservación de la cantidad de movimiento) Establecidas bajo las consideraciones de:

- Fluido Newtoniano.
- Flujo incompresible.
- Viscosidad constante.
- Densidad constante.
- Flujo laminar.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (1.68a)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (1.68b)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.68c)$$

Escrita de manera más compacta y con su descripción:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla \mathbf{P} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.69a)$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{Aceleración} \\ \text{local} \end{array} \right\}} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{Aceleración} \\ \text{convectiva} \end{array} \right\}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Fuente} \\ \text{externa} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Fuente} \\ \text{interna} \end{array} \right\} + \{\text{Difusión}\} \quad (1.69b)$$

Derivada Total = cambio de velocidad contrlación al tiempo

3. La ecuación de la energía (Conservación de la Energía).

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (1.70)$$

Los operadores diferenciales vectoriales y escalares se definen abajo en coordenadas rectangulares. Los mismos operadores se definen en coordenadas cilíndricas y esféricas en el Anexo B. Considere entonces un escalar E , una función $f(x, y, z)$ con derivadas parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$, y un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , $\mathbf{F}(x, y, z)$ continuamente diferenciable, los operadores diferenciales son:

Derivada substancial:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1.71)$$

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.72)$$

Laplaciano de un escalar:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.73)$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.74)$$

El operador 1.74

1.3.4 Modelado en Ingeniería de Procesos

Tradicionalmente, la metodología para abordar problemas en ingeniería de procesos tiene un enfoque matemático y teórico basado principalmente en el estudio de las operaciones unitarias, los fenómenos de transporte y la termodinámica. Actualmente, la educación en ingeniería está centrada en formar ingenieros con capacidades que les permitan abordar el diseño de procesos de una manera holística; es decir, el diseño de los sistemas de ingeniería debe hacerse con un enfoque global e integrado, en lugar de considerar la simple suma de sus partes. Con el fin de introducir estas capacidades en el contexto del aprendizaje del diseño y de la operación de procesos industriales, en los últimos años se ha buscado un

balance entre modelado matemático, control de sistemas y simulación numérica. El modelado matemático de procesos químicos ayuda a comprender los mecanismos y operaciones implicadas en este tipo de sistemas y permite entender las relaciones entre sus variables. Los modelos matemáticos son útiles en diferentes etapas de la investigación, desarrollo y puesta en operación de plantas químicas. Específicamente, tiene un impacto importante en las tareas de diseño, evaluación y operación de los procesos.

Diseño. El modelado matemático hace posible abordar el dimensionamiento y configuración de los equipos. Igualmente, apoya la evaluación y comparación de procesos alternativos. Permite además tomar decisiones ante diferentes diseños de equipos, o configurar plantas en situaciones complejas como el arranque, apagado, fallas y otros procedimientos o situaciones.

Evaluación. El modelado facilita la determinación de las condiciones nominales de operación mediante análisis de sensibilidad y estudios generales del comportamiento dinámico de los procesos. También hace posible la valoración del rendimiento y capacidad de equipos instalados para su puesta en marcha dirigida a la producción de nuevos productos o instalación de procesos mejorados.

Operación de plantas. Las simulaciones partiendo de un modelo matemático son necesarias para diseñar e implementar esquemas de control que eviten fallas de operación y hagan más eficiente su desempeño ante perturbaciones. Estas simulaciones también hacen posible llevar a la práctica optimizaciones periódicas de los procesos, reforzar la seguridad de operación y minimizar costos de funcionamiento.

Investigación y desarrollo. El modelado de procesos es útil en tareas de desarrollo de nuevos productos, procesos y tecnologías. También auxilia las tareas de escalamiento, de plantas.

Los modelos se obtienen estableciendo principios fundamentales de ingeniería para representar, mediante sistemas de ecuaciones, los fenómenos y mecanismos presentes en el proceso. La primera parte del libro constituye un resumen de los conceptos manejados en la ingeniería de procesos y aborda el modelado con base en los principios de conservación y leyes o relaciones constitutivas del equilibrio.

Vinculado con las tareas de diseño y evaluación, el control representa una mejora significativa para la operación de procesos industriales. El problema de control puede ser implementado a diferentes niveles, empezando con el amortiguamiento y la estabilización; después, el control a alto nivel, implica estrategias avanzadas mediante técnicas modernas. La supervisión integra diagnóstico de fallas. Así mismo, algunas técnicas de control están orientadas a la optimización y manejo general del proceso que combina los niveles anteriores. El libro aborda únicamente el problema de regulación y estabilización en los procesos químicos mediante técnicas de control moderno. Por otro lado, la simulación numérica o digital sirve como planta piloto, auxilia las tareas de modelado dinámico, optimización y desarrollo de estructuras de control. La simulación numérica es una herramienta para resolver las ecuaciones que representan un sistema, hace posible tratar el problema de control; además, provee una buena conexión entre los aspectos teóricos y prácticos de los procesos.

Herramientas numéricas para la simulación de procesos

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) | 31 |
| 2.1 | Tipos de EDO | 31 |
| 2.2 | Herramientas de simulación en Matlab® Simulink® | 32 |
| 3 | Ecuaciones diferenciales parciales (EDP) | 39 |
| 3.1 | Definición | 39 |
| 3.2 | EDP lineales de segundo orden | 42 |
| 3.3 | Solución de EDP en Matlab® | 47 |



2. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Es muy común que las ecuaciones diferenciales aparezcan en problemas de matemáticas y en el modelado matemático del comportamiento de sistemas o fenómenos de diversa índole. La clasificación más general divide a las ecuaciones diferenciales en *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (ODE) Y *Ecuaciones Diferenciales Parciales* (EDP). Las EDO son aquellas ecuaciones que se expresan en términos de derivadas con respecto a una sola variable independiente y son el tema de este capítulo. Las EDP ecuaciones que se expresan en términos de derivadas con respecto a más de una variable independiente y son tema del siguiente capítulo.

2.1 Tipos de EDO

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden tiene la forma general:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, \mathbf{y}) \quad (2.1)$$

con su condición inicial:

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (2.2)$$

se plantea un problema de valor inicial, donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna de variables dependientes, con dimensión $n \times 1$, t es la variable independiente, t_0 es el tiempo inicial, \mathbf{y}_0 es el valor de la variable dependiente en el tiempo inicial, y $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de valor vectorial o función vectorial de dimensión $n \times 1$. Un punto crítico del sistema es un punto (t_c, \mathbf{y}_c) tal que:

$$\mathbf{f}(t_c, \mathbf{y}_c) = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = 0,$$

La solución de la EDO en este punto es punto de equilibrio.

Una forma particular de la ecuación 2.1 es el problema de valor inicial 2.3:

$$\frac{dy}{dt} = \mu y, \tag{2.3a}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.3b}$$

La solución de la ecuación (2.3) es:

$$y(t) = y_0 e^{\mu(t-t_0)} \tag{2.4}$$

Por lo tanto el comportamiento depende del valor de μ .

- Si $\mu < 0$, entonces $y(t)$ decrece exponencialmente con t .
- Si $\mu = 0$, permanece constante en $y(t_0)$ para todo t .
- Si $\mu > 0$, entonces $y(t)$ crece exponencialmente con t .

Considerando nuevamente la ecuación 2.1 con condición inicial \mathbf{y}_0 , la solución es una familia de curvas o funciones, que evolucionan en función de la variable independiente t , dependiendo del valor de la condición inicial \mathbf{y}_0 .

Para profundizar sobre diversos tipos y aplicaciones de ODE, y conocer diferentes métodos para encontrar soluciones analíticas y numéricas de ODE existen una gran variedad de referencias, se recomienda en particular la lectura de [34, 38, 41, 23].

$$\frac{dy}{dx} = a(t)y + b(t)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

2.2 Herramientas de simulación en Matlab® | Simulink®.

2.2.1 Solución numérica de EDO en Matlab®. Funciones ode.

Matlab® integra solucionadores de EDO para encontrar soluciones numéricas de diferentes tipos de problemas de valor inicial. Diversas fuentes proponen guías de utilización con diferentes grados de detalle e información de los métodos de base [30]. Los solucionadores para ecuaciones rígidas se basan en el método explícito de Runge-Kutta y en el método implícito de Adams-Bashforth-Moulton, mientras que los solucionadores para ecuaciones rígidas incluyen además las fórmulas de Diferenciación Numérica (FDN) y las fórmulas de Newton Cotes. Los solucionadores de EDO se implementan usando diferentes algoritmos. La Tabla 2.1 y la Tabla 2.2 presentan las funciones de Matlab® que incorporan los diferentes métodos y algoritmos de solución de EDO para ecuaciones no rígidas, y

rígidas, respectivamente.

La sintaxis general de los solucionadores de ODE se muestra en el cuadro REF:

Sintaxis de las funciones ode

```
[T,Y] = solver(odefun,tspan,y0)
[T,Y] = solver(odefun,tspan,y0,options)
[T,Y,TE,YE,IE] = solver(odefun,tspan,y0,options)
sol = solver(odefun,[t0 tf],y0...)
```

donde T es el vector que contiene la variable de tiempo en las unidades convenientes para el problema, Y es el vector solución de la EDO. El resolvidor o *solver* genera la solución de la EDO. En la salida, TE es el tiempo de un evento en tiempo discreto, YE es la solución en ese momento, IE es el índice del mismo; sol es el vector de salida del *solver* o resolvidor ODE, seleccionado en función de la información de las Tablas 2.1 y 2.2. Como entrada se requiere una función `odefun`, `tspan = [t0 tf]`, donde t_0 es el tiempo inicial y t_f es el tiempo de simulación; y_0 es la condición inicial, y `options` define los ajustes de la integración de la EDO.

Tabla 2.1: Solucionadores de EDOs en Matlab. Problemas con ecuaciones no rígidas.

| Función | Método Numérico | Fórmulas Algoritmo | Aplicación |
|---------|-------------------------|---|--|
| ode45 | Runge-Kutta | Par de Dormand-Prince | Primera opción a considerar. |
| ode23 | Runge-Kutta | Par de Bogacki-Shampine | Problemas medianamente rígidos con cierta tolerancia al error. |
| ode113 | Adams-Bashforth-Moulton | Adams-Bashforth-Moulton de paso variable y orden variable entre 1 y 13. | Problemas con poca tolerancia al error. |
| ode78 | Runge-Kutta 8(7) | El algoritmo más eficiente de Verner. | Problemas con ecuaciones suaves, pero que requieren buena exactitud. |
| ode89 | Runge-Kutta 9(8) | El algoritmo más robusto de Verner. | Problemas con ecuaciones muy suaves, para intervalos de tiempo largos, o muy poca tolerancia al error. |

Tabla 2.2: Solucionadores de EDOs en Matlab®. Problemas con ecuaciones rígidas o completamente implícitas

| Función (Solver) | Método Numérico | Fórmulas Algoritmo | Aplicación |
|------------------|---|---|--|
| ode15s | Fórmulas de Diferenciación Numérica (FDN) | Fórmulas de diferenciación numérica de órdenes 1 a 5, con paso variable y orden variable. Opcionalmente usa el método de Gear. | Primera opción a considerar para problemas rígidos. |
| ode23s | Runge-Kutta | Par de Bogacki-Shampine | Problemas rígidos con cierta tolerancia al error, o para problemas de ecuaciones diferenciales algebraicas (EDA). |
| ode23t | Fórmulas de Newton-Cotes | Usa una regla trapezoidal implícita de un solo paso. | Problemas moderadamente rígidos, en los que se tolera cierto error y necesita una solución sin amortiguación numérica. |
| ode23tb | Runge-Kutta implícito | Se implementa con una regla trapezoidal (primera etapa) y una fórmula de diferenciación hacia atrás de orden dos (segunda etapa). | Problemas con ecuaciones rígidas, en los que se tolera cierto error. |
| ode15i | Fórmulas de diferenciación hacia atrás | Basado en las fórmulas de diferenciación hacia atrás de órdenes 1 a 5, con paso y orden variables. | Problemas de valor inicial con ecuaciones totalmente implícitas, y EDA. |

2.2.2 Solución numérica de EDO en Simulink®. Funciones-sistema (S-Function).

Una Función-Sistema o **S-Function** es una herramienta de simulación de sistemas continuos, discretos e híbridos que forma parte de las librerías en el ambiente Simulink®. Este bloque llama a un algoritmo programado en una función Matlab® con estructura específica. Una vez escrita la S-Function, se coloca su nombre en el bloque Simulink®, se configura el resolvidor, y se personaliza la interfaz de usuario mediante una máscara.

De manera general, en el bloque de Función-S es posible realizar seis tareas diferentes, cada una de estas se identifica con un número, como se describe en la Tabla 2.3:

Tabla 2.3: Solucionadores de EDOs en Matlab. Problemas con ecuaciones no rígidas.

| Flag | Método | Descripción |
|------|----------------|---|
| 0 | setup | Define las características básicas del bloque de la S-Function, incluyendo las muestras de tiempo, condiciones iniciales de los estados continuos y discretos, y los tamaños de los vectores de entrada y salida. |
| 1 | mdlDerivatives | Calcula las derivadas de las variables de estado continuas. |
| 2 | mdlUpdate | Actualiza los estados discretos, tiempo de muestreo y otros requerimientos de tiempo. |
| 3 | mdlOutputs | Calcula las salidas de la Function-S como una función de los elementos del vector de estados y en algunos casos de los elementos del vector de entradas. |
| 4 | mdlOutputs | Calcula el tiempo de la siguiente ocurrencia. Esta rutina se usa solo cuando se especifica una variable discreta en la rutina de setup. |
| 4 | mdlTerminate | Realiza cualquier tarea necesaria para dar fin a la simulación. |

Caso 0 (Inicialización) Se define un vector renglón que especifica el número de entradas, salidas y otras características del modelo matemático. Para ello se invoca el comando `simsizes`, el cual regresa una estructura inicializada con nombre `s`. Al final, se define la salida `sys` usando nuevamente el comando `simsizes` con una estructura variable como argumento (`s` en el ejemplo que se muestra a continuación). Esta última instrucción traduce los valores de la estructura `s` en un vector renglón que es enviado a Simulink a través de la salida `sys`.

Se definen `x0`, `str` y `ts`

Caso 1 (Derivadas): Contiene el modelo matemático y como salida el vector de derivadas. (a) Se definen los parámetros del modelo, las entradas y las escriben las ecuaciones diferenciales como un vector o un conjunto de ecuaciones.

Se define el vector de salidas.

Caso 3 (Salidas) Elaboration

Casos 2, 4 y 9 Actualización de estados. | Próxima ocurrencia. | Finalización. Contiene la salida asociada a los casos 2, 4 y 9, que para los tres casos es un arreglo vacío. Además contiene cualquier instrucción para terminar el programa.

La sintaxis de una S-Functio para simular un sistema continuo modelado por una EDO o un grupo de EDO es como sigue:

Sintaxis de una S-Function para simular un sistema dinámico continuo | código .m

```

function [sys,x0,str,ts] = SFunName(t,x,u,flag,x0)

switch flag

    case 0 % inicialización
        s = simsizes;
        s.NumContStates = Número de estados continuos;
        s.NumDiscStates = Número de estados discretos;
        s.NumOutputs = Número de salidas;
        s.NumInputs = Número de entradas;
        s.DirFeedthrough = 1 si las salidas dependen algebraicamente de las entradas,
            0 si no existe esta dependencia;
        s.NumSampleTimes = 1; % Número de muestras de tiempo
        sys=simsizes(s);
        str = []; % vector vacío
        ts = [0,0]; % para un muestreo continuo

    case 1 % derivadas
        [Parámetros del modelo]
        [Variables de entrada]
        [Ecuaciones dinámicas del modelo]
        sys = [vector de derivadas];

    case 3 % salidas
        [Ecuaciones de salida]
        sys = [vector de variables de salida];

    case {2 4 9} % 2: discreto
        % 4: calctimehit
        % 9: término

        sys = [ ];
    otherwise
        error([' unhandled flag = ',num2str(flag)])

```

El bloque de las funciones-S se encuentra en la librería - “User defined functions”. El programa con la sintaxis presentada es llamado a partir de este bloque, escribiendo su nombre y dando los parámetros de entrada como se observa en la Figura 2.1. La configuración del resolvidor se hace proporcionando el tiempo inicial (“Start time”), el tiempo de simulación (“Stop time”), resolución por tiempo de muestreo variable o fijo (“Variable step” o “Fixed step”), el método de integración (listado en Tablas 2.1 y 2.2), así como detalles del resolvidor que se muestran en la Figura 2.2.

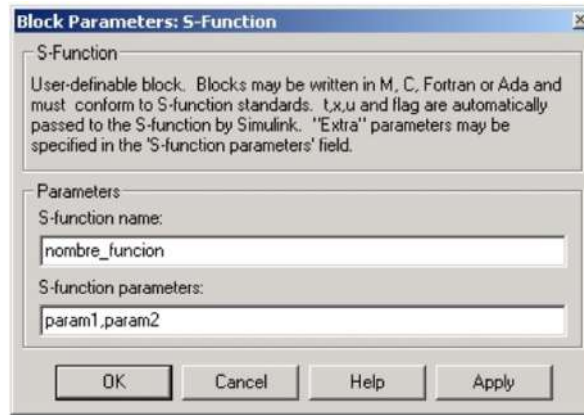


Figura 2.1: Parámetros de una S-Function | Bloque Simulink®.



- Tiempo de simulación. Simulaciones infinitas
- Resolución por paso fijo y paso variable.
- Métodos de integración. Para qué usar diferentes métodos.
 - Paso Variable:
 - ode45: Es el algoritmo más apto en primera instancia. (paso simple)
 - ode23: Es más eficiente para tolerancias amplias. (paso simple)
 - ode113: Es más eficiente para tolerancias estrictas. (multi paso)
 - ode15s: Es el algoritmo más apto en primera instancia, para sistemas mal condicionados. (multi paso)
 - ode23s: Más eficiente para sistemas mal condicionados, con tolerancias amplias. (paso simple)
 - discrete: No es necesario resolver integración numérica

- Paso Fijo:
 - ode5: Versión de paso fijo del ode45.
 - ode4: Runge –Kutta de orden 4.
 - ode3: Versión de paso fijo del ode23.
 - ode2: Método de Jun, o Euler mejorado.
 - ode1: Método de Euler.
 - discrete: Método cuando no es necesario utilizar un integrador numérico.

- Los tiempos de muestreo pueden ser:
- CONTINUO (período = 0,offset = 0). Ejemplo ts=[0,0]
 - HEREDADO (período = -1,offset = 0). Ejemplo ts=[-1,0]
 - VARIABLE (período=-2,offset=0). Ejemplo ts=[-2,0]
 - DISCRETO (período>0, 0 <= offset < período). Ejemplo ts=[1,0.1]

Opciones de Salida: Refinar salida, Generar salidas adicionales, Generar salidas específicas.

Figura 2.2: Parámetros de simulación de una S-Function | Bloque Simulink®.

2.2.3 Función trim

Encuentra un punto de equilibrio de un sistema dinámico, es decir, un punto en régimen permanente. La sintaxis de la función trim se presenta en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4: Sintaxis de la función `trim`.

| Método | Descripción |
|--|---|
| <code>[x, u, y, dx] = trim('sys')</code> | Encuentra el punto de equilibrio cerca del estado inicial del sistema, x_0 . |
| <code>[x, u, y, dx] = trim('sys', x0, u0, y0)</code> | x_0 , u_0 y y_0 son el vector de estados, el vector de entradas y el vector de salidas que estarán fijos mientras la función intenta encontrar el estado estable. |
| <code>[x, u, y, dx] = trim('sys', x0, u0, y0, ix, iu, iy)</code> | ix , iu e iy indica cuales valores de x_0 , u_0 y y_0 se mantienen fijos. |

2.2.4 Función `linmod`

Obtiene un modelo lineal a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales descritas como modelos de Simulink. Las entradas y salidas se definen en un diagrama de bloques de Simulink usando bloques de puertos de entrada y salida.

La función es:

```
[A, B, C, D] = linmod('sys', x, u).
```

`sys` = nombre del bloque que contiene el modelo no lineal del sistema.

`x` = las variables de estado especificadas.

`u` = entradas.

Si se omiten x y u , estas tomarán el valor de cero.



3. Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

3.1 Definición

Dada una función escalar $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ de clase \mathcal{C}^2 y sus derivadas parciales, una ecuación diferencial parcial u se define como una función escalar en el dominio \mathbb{R}^n de la forma:

$$F(x_1, \dots, x_n, t, u, u_t, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}, u_{x_1 t}, \dots, u_{x_n t}, u_{tt}) = 0. \quad (3.1)$$

La notación con subíndices se plantea de la forma:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

donde el orden de la diferenciación no importa, por ejemplo: $u_{xyzx} = u_{xyxz} = u_{zxyx} = u_{yzxx} = \dots$. El orden de la EDP es el orden más alto que aparece en los términos de la ecuación. La solución de la EDP es la función u que satisface exactamente la EDP en todo el rango en el que son válidas las variables independientes x_1, \dots, x_n, t . Para muchos sistemas en ingeniería se estudian las variaciones temporales t y/o espaciales como variables independientes). Las variables espaciales pueden definirse en los diferentes sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas. Las EDP pueden además ser formuladas en una, dos o tres dimensiones, 1-D, 2-D y 3-D, respectivamente, en cualquiera de los sistemas de coordenadas.

Se llama problema al conjunto EDP-condiciones dadas en las variables independientes. Los distintos problemas son:

Problema de Cauchy o de valores iniciales. Considere una EDP de orden n con respecto a la variable independiente t en 1D, es necesario que la solución $u(x, t)$ cumpla las condiciones dadas en 3.2 :

$$\begin{aligned} u(x, t = t_0) &= f_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = t_0) &= f_2(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}(x, t = t_0) &= f_{n-1}(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde f_1, f_2 hasta f_n son $n - 1$ funciones en el intervalo definido $0 \leq x \leq L$. Normalmente $t_0 = 0$.

Problema de Dirichlet o de valores en las fronteras. Considere una EDP de orden n con respecto a la variable independiente x en 1D, que se desea resolver en $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t$, es necesario que la solución $u(x, t)$ cumpla las n condiciones dadas en 3.3.

$$\begin{aligned} u(a_1, t) &= f_1(t) \\ u(a_2, t) &= f_2(t) \\ &\vdots \\ u(a_n, t) &= f_n(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde f_1, f_2 hasta f_n son n funciones definidas en el intervalo $t_0 \leq t$. Normalmente $a_0 = 0$ y $a_n = L$.

Problema de Newman. Es un segundo tipo de problema de valores en la frontera. Considere una EDP de orden n con respecto a la variable independiente x en 1D, que se desea resolver en $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t$, es necesario que la solución $u(x, t)$ cumpla las n condiciones dadas en 3.4.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, t) &= g_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a_2, t) &= g_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a_n, t) &= g_n(t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde g_1, g_2 hasta g_n son n funciones definidas en el intervalo $t_0 \leq t$. Normalmente $a_0 = 0$ y $a_n = L$.

Problema de Robins. Es una generalización de los problemas de valores en la frontera. Considere una EDP de orden n con respecto a la variable independiente x en 1D, que se desea resolver en $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t$, es necesario que la solución $u(x, t)$ cumpla las n condiciones dadas en 3.5.

$$\begin{aligned}
A_1 u(a_1, t) + B_1 \frac{\partial u(a_1, t)}{\partial x} &= w_1(t) \\
A_2 u(a_2, t) + B_2 \frac{\partial u(a_2, t)}{\partial x} &= w_2(t) \\
&\vdots \\
A_n u(a_n, t) + B_n \frac{\partial u(a_n, t)}{\partial x} &= w_n(t),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde donde w_1, w_2 hasta w_n son n funciones definidas en el intervalo $t_0 \leq t$; y A_1 y B_1, A_2 y B_2 , hasta A_n y B_n son constantes dadas. Normalmente $a_0 = 0$ y $a_n = L$.

Problema mixto. Es una generalización de los problemas de valores en la frontera que combinan condiciones de diferente tipo. Considere una EDP de orden n con respecto a la variable independiente x en 1D, que se desea resolver en $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t$, es necesario que la solución $u(x, t)$ cumpla las n condiciones dadas en 3.6.

$$\begin{aligned}
A_{11} u(a_{011}, t) + B_{11} u(a_{L11}, t) &= v_{11}(t) \\
A_{12} u(a_{012}, t) + B_{12} \frac{\partial u(a_{L12}, t)}{\partial x} &= w_{12}(t) \\
A_{21} u(a_{021}, t) + B_{21} u(a_{L21}, t) &= v_{21}(t) \\
A_{22} u(a_{022}, t) + B_{22} \frac{\partial u(a_{L22}, t)}{\partial x} &= v_{22}(t) \\
&\vdots \\
A_{n1} u(a_{0n1}, t) + B_n \frac{\partial u(a_{Ln1}, t)}{\partial x} &= w_{n1}(t) \\
A_{n2} u(a_{0n2}, t) + B_n \frac{\partial u(a_{Ln2}, t)}{\partial x} &= w_{n2}(t)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde donde w_1, w_2 hasta w_n son n funciones definidas en el intervalo $t_0 \leq t$; y A_1 y B_1, A_2 y B_2 , hasta A_n y B_n son constantes dadas. Normalmente $a_0 = 0$ y $a_n = L$.

Un problema está bien planteado si satisface todos los criterios que se describen abajo en cuanto a existencia, unicidad y estabilidad:

- El problema tiene solución.
- Tiene una solución única.
- Un pequeño cambio en la ecuación o en las condiciones iniciales o de frontera produce un pequeño cambio en la solución.

Si una o más condiciones anteriores no se cumplen, entonces el problema está mal planteado. Para mayor profundidad en los teoremas de existencia y unicidad de las EDP, así como el estudio de métodos para su solución analítica y numérica, se recomienda la lectura de referencias como [7, 43, 26].

3.2 EDP lineales de segundo orden.

La EDP de segundo orden [26]

De una manera general, considere una EDP de segundo orden en un sistema de coordenadas rectangulares 3-D, cuya solución es una función $u(x, y, z, t)$, la EDP se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2e \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2g \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ + 2h \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + 2j \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} + l \frac{\partial u}{\partial y} + m \frac{\partial u}{\partial z} + n \frac{\partial u}{\partial t} + pu = q, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde a, b, \dots, q son funciones de (x, y, z, t) . En forma matricial, la EDP se escribe:

$$(\partial^T \mathbf{Q} \partial + \mathbf{L} \partial + \phi) u = \gamma, \quad (3.8)$$

con

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & e & f & g \\ e & b & h & i \\ f & h & c & j \\ g & i & j & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial t} + k \\ -\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial i}{\partial t} + l \\ -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial j}{\partial t} + m \\ -\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial i}{\partial y} - \frac{\partial j}{\partial z} - \frac{\partial d}{\partial t} + n \end{bmatrix}^T, \quad \partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}^T.$$

Según los valores propios de \mathbf{Q} , las EDP pueden ser de tres tipos:

EDP elípticas: Si todos los valores propios de \mathbf{Q} son positivos.

EDP parabólicas: Si al menos uno de los valores propios de \mathbf{Q} es igual a cero.

EDP hiperbólicas: Si al menos uno de los valores propios de \mathbf{Q} tiene signo opuesto a los otros.

Una EDP lineal de segundo orden con solución $u(x, y)$ y coeficientes constantes tiene la forma reducida:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g, \quad (3.9)$$

con $a \neq 0$ y $a, b, c, d, e, y f$ constantes, $g(x, y)$. Para $u(x, t)$ e igualmente coeficientes constantes:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial t} + fu = g, \quad (3.10)$$

con $a \neq 0$ y $a, b, c, d, e, y f$ constantes, $g(x, t)$. Estas EDP se clasifican de acuerdo con el valor del discriminante $b^2 - ac$:

EDP elípticas: Si $b^2 - ac < 0$.

EDP parabólicas: Si $b^2 - ac = 0$.

EDP hiperbólicas: Si $b^2 - ac > 0$.

3.2.1 EDP elípticas

Una ecuación diferencial parcial elíptica 3D es un problema con valores en la frontera, es decir, depende únicamente de variables independientes espaciales. Entonces, las EDP elípticas describen procesos estacionarios o en estado de equilibrio (sin evolución temporal). La EDP elíptica más conocida es la ecuación de Laplace, que tiene la forma:

$$\Delta u = 0, \quad (3.11)$$

donde Δ es el operador llamado Laplaciano, el cual se define en las ecuaciones 3.12 a 3.14 en los diferentes sistemas de coordenadas:

Coordenadas rectangulares

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.12)$$

donde x , y y z son las variables independientes que indican la posición espacial en coordenadas rectangulares.

Coordenadas cilíndricas

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.13)$$

donde ρ , ϕ y z son las variables independientes que indican la posición espacial en coordenadas cilíndricas.

Coordenadas esféricas

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.14)$$

donde r , θ y ϕ son las variables independientes que definen la posición espacial en coordenadas esféricas.

Escrita en la notación de subíndices, la EDP elíptica es:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (3.15)$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace de clase \mathcal{C}^2 en una región \mathcal{D} son funciones armónicas en \mathcal{D} . Algunas EDP elípticas derivan del establecimiento de modelos que representan fenómenos,

por ejemplo, de la transferencia de calor por conducción sin fuentes de calor. Las ecuaciones de conservación en régimen permanente (de masa, calor y momento) también son de tipo elíptico, así como la ecuación de Poisson, que determina el vector de velocidad en función de la distribución de presión en un flujo estacionario para números de Reynolds pequeños, suponiendo un fluido incompresible.

3.2.2 EDP parabólicas

Una ecuación diferencial parcial parabólica es un problema con valores inicial y en la frontera, es decir, las variables independientes son el tiempo y las variables espaciales. Las EDP parabólicas describen procesos de conducción de calor o de difusión. Una EDP parabólica 1D no homogénea tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = f(x,t), \quad (3.16)$$

En 3D:

$$a^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{f}{c\rho}, \quad (3.17)$$

donde $a^2 = k/(c\rho)$ es el coeficiente de difusión, k la conductividad térmica, c el calor específico, y ρ la densidad.

3.2.3 EDP hiperbólicas

Una ecuación diferencial parcial hiperbólica es un problema con valores iniciales y en la frontera, es decir, las variables independientes son el tiempo y las variables espaciales. Las EDP hiperbólicas describen procesos oscilatorios. Una EDP hiperbólica conocida es la ecuación de onda, en 1D, la EDP homogénea tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.18)$$

En 3D, la ecuación de onda no homogénea es:

$$a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f, \quad (3.19)$$

donde a^2 representa la velocidad de propagación de la onda.

3.2.4 Otras EDP de segundo orden que describen sistemas físicos en Ciencia e Ingeniería

En esta sección se presentan algunas EDP que representan sistemas de diferentes disciplinas.

3.2.4.1 Sistemas mecánicos

Ecuación de Poisson para sistemas mecánicos: La ecuación de Poisson es empleada para representar sistemas mecánicos y de la física teórica. La ecuación en coordenadas cartesianas 3D es:

$$a\Delta u = -F. \quad (3.20)$$

El caso de $F = 0$ se transforma en la ecuación de Laplace. En particular, un problema de mecánica consiste en considerar la ecuación de Poisson para representar el equilibrio en una membrana. La EDP describe la deflexión de una membrana sometida a tensiones internas bajo la acción de una carga F . Haciendo un cambio de variables se puede definir $a = 1$, entonces:

$$\Delta u = -F. \quad (3.21)$$

En un trabajo reportado por Lebedev y Grossi, 2003 [12] resolvieron numéricamente y analizaron los problemas de contorno considerando las condiciones en la frontera de Dirichlet (3.22a), Newman (3.22b), y mixtas (3.22c) cuando una parte B_1 del contorno se fija y se aplica una fuerza φ_2 en otra parte $B_2 = B \setminus B_1$ del contorno.

$$u|_B = \varphi_1, \quad (3.22a)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_B = \varphi_2, \quad (3.22b)$$

$$u|_{B_1} = \varphi_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{B_2} = \varphi_2, \quad (3.22c)$$

donde φ_1 es continua en un dominio D_1 y proporciona los valores de deflexión transversal u a lo largo del contorno B ; φ_2 es continua en un dominio D_2 .

Ecuaciones de Navier Stokes: Modelan el flujo de fluidos. Se pueden establecer bajo diferentes consideraciones. En la Sección 1.3.3 se introducen las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso de fluidos Newtonianos, incompresibles, en régimen laminar y suponiendo densidad y viscosidad constantes.

3.2.4.2 Sistemas electromagnéticos

Las ecuaciones de Maxwell integran la descripción de los fenómenos eléctricos y magnéticos ([0, 36]):

$$\text{Ley de Maxwell-Faraday:} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.23a)$$

$$\text{Ley de Maxwell-Ampere:} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (3.23b)$$

$$\text{Ley de Gauss | Eléctrica:} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.23c)$$

$$\text{Ley de Gauss | magnética:} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.23d)$$

donde los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} denotan los campos vectoriales eléctrico con unidades de Vm^{-1} y magnético con unidades Am^{-1} , respectivamente. Los operadores vectoriales $\nabla \times \mathbf{E}$ y $\nabla \times \mathbf{H}$ son los rotacionales de \mathbf{E} y \mathbf{H} . El resultado del rotacional (3.24) también es un campo vectorial que se define como el determinante del siguiente arreglo:

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial \cdot E_z}{\partial y} - \frac{\partial \cdot E_y}{\partial z} \right) \cdot x + \left(\frac{\partial \cdot E_z}{\partial x} - \frac{\partial \cdot E_x}{\partial z} \right) \cdot y + \left(\frac{\partial \cdot E_y}{\partial x} - \frac{\partial \cdot E_x}{\partial y} \right) \cdot z. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Después, \mathbf{D} y \mathbf{B} denotan los vectores de inducción eléctrica y magnética con unidades de Cm^{-1} y Tesla, respectivamente. Los operadores vectoriales $\nabla \cdot \mathbf{D}$ y $\nabla \cdot \mathbf{B}$ denotan la divergencia de los vectores de inducción. Las fuentes son la densidad de carga ρ (Cm^{-3}) y la densidad de corriente \mathbf{j} (Am^{-2}). Para un medio homogéneo e isótropo se cumplen las relaciones lineales siguientes:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (3.25b)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_c \mathbf{E}, \quad (3.25c)$$

donde ε_0 es la permitividad, μ_0 es la permeabilidad del vacío, ε_r es la permitividad relativa, μ_0 es la permeabilidad relativa del medio y σ_c es la conductividad del medio. Para un medio lineal, homogéneo e isótropo: $\varepsilon_0 \simeq 8.84 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$, $\mu_0 \simeq 1.256 \times 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$, $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1/c$ con $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$, y $\mu_r = 1$.

3.2.4.3 Sistemas financieros

La ecuación de Black-Scholes es un modelo matemático que se usa para estimar el valor de una opción financiera. El modelo fue publicado por primera vez por Fischer Black y Myron Scholes en [key]. La EDP conocida como ecuación de Black-Scholes estima el valor de una opción financiera en el tiempo. Más tarde, Robert C. Merton ofreció una explicación matemática más amplia e impuso el término de "modelo de valoración de opciones Black-Scholes". Las suposiciones de modelado son:

1. El precio de la acción sigue un movimiento browniano geométrico.
2. No hay pago de dividendos.
3. La opción se ejerce al vencimiento.
4. No se anticipan los movimientos del mercado.
5. No hay comisión en el canje.
6. Es posible comprar y vender la acción en cualquier momento, sin costo alguno;
7. El tipo de interés se conoce de antemano y se mantiene estable.
8. La volatilidad se conoce de antemano y es constante.

La EDP Black-Scholes está definida en 3.26.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0. \quad (3.26)$$

donde $S(t)$ es una variable aleatoria que denota el precio de la acción, $u(S(t), t)$ es el valor de una opción, r es el tipo de interés sin riesgo, σ es la volatilidad de la rentabilidad de la acción, y t es el tiempo que le queda a la acción antes de su vencimiento, medido en años. La EDP es una variación de la ecuación de calor de la cual es posible derivar soluciones analítica y numérica.

Para la llamada opción de compra europea se requiere definir una condición final y una de contorno. Si al final el precio de las acciones es mayor que el precio de ejercicio $S > K$, la opción de compra tendrá un valor de $S - K$ porque el comprador puede obtener beneficios. En cambio, si $S < K$, el comprador no ejercerá la opción y ésta no tendrá valor. Entonces, $t = T$ es el valor de la opción, y condición final se expresa como:

$$u(S, T) = \max(S - K, 0) \quad (3.27)$$

donde K es el precio de ejercicio fijado por acción.

Después, las condiciones en la frontera se definen considerando que si $S = 0$, entonces el pago también debe ser 0, mientras que más tiempo transcurra, es más probable que se la acción se ejerza y el valor será $S - K$. En este caso, el precio de ejercicio no tiene ninguna incidencia en el valor de la opción. Estas condiciones se escriben en 3.28:

$$u(0, t) = 0, \quad (3.28a)$$

$$u(\infty, T) = S - Ke^{-r(T-t)}, \quad (3.28b)$$

$$(3.28c)$$

3.3 Solución de EDP en Matlab®

El resolvidor de EDP de Matlab® **pdepd** proporciona la solución de una EDP o un sistema de N EDP en 1-D, de tipo elíptico y parabólico, pero se requiere al menos una EDP parabólica. La herramienta de Partial Differential Equations™ extiende su uso a la solución de problemas en 2-D y 3-D, sin embargo, este Capítulo se centra en las ecuaciones 1-D. En este caso,

$$c \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{x^m f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right)}_{\text{Término de Flujo}} \right) + s \left(\underbrace{x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{Término Fuente}} \right). \quad (3.29)$$

donde u es la variable dependiente, t es la variable independiente de tiempo, x es la variable independiente que indica posición en el espacio, $\partial u / \partial x$ es la derivada parcial de u con respecto a t , y $\partial u / \partial x$ es la derivada parcial de u con respecto a x . La geometría está definida por m , la constante de simetría:

Rectangular: $m=0$.

Cilíndrica: $m=1$.

Esférica: $m=2$.

La fórmula general para definir la condición inicial es:

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad (3.30)$$

La fórmula general para definir las condiciones frontera es:

$$p(x, t, u) + q(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (3.31)$$

La sintaxis de la función pdepd es como sigue:

Sintaxis de la función pdepd

```

m = ...
xmexh = ...
tspan = ...
sol = pdepd(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan)

function [c,f,s] = pdefun(x,t,u,dudx)
c = ...
f = ...
s = ...
end

function u0 = icfun(x)
u0 = ...
end

function [pL,qL,pR,qR] = bcfun(xL,uL,xR,uR,t)
pL = ...
qL = ...
pR = ...
qR = ...
end

```

donde:

xmesh: es el vector de posiciones espaciales x_i dentro del intervalo $0 \leq x \leq L$ en donde se obtiene la solución.

tspan: es el vector de valores en el tiempo en el intervalo $0 \leq t$ para los cuales se resuelve la ecuación.

pdefun: es la función en donde se describe la EDP o el sistema de EDP utilizando las funciones p , f , y s de la ecuación 3.29.

icfun: es la función donde se definen las condición inicial de acuerdo con la ecuación ??.

bcfun: es la función donde se definen las condiciones frontera, de acuerdo con la ecuación 7.17 en términos de p , q , los cuales definen el intervalo de validez para la variable espacial.

3.3.1 Aproximación de la solución de una EDP mediante Diferencias finitas

El método numérico de diferencias finitas es empleado para resolver EDP en las que el espacio en donde se lleva a cabo la discretización no es muy complejo o irregular, pero es útil para varios problemas en ingeniería, y es muy útil particularmente para resolver EDP en problemas de ingeniería de procesos.

Dada $u(x, t)$, la primera derivada u_x puede ser aproximada tomando puntos en adelante, en atraso, o centrales:

$$u_x(x, t) = \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} + O(h) \quad (3.32)$$

$$u_x(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} + O(h) \quad (3.33)$$

$$u_x(x, t) = \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} + O(h^2) \quad (3.34)$$

La segunda derivada u_{xx} es aproximada por:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^4) \quad (3.35)$$

Por otro lado, la primera derivada con respecto al tiempo u_t y la segunda derivada u_{tt} son:

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t+h_t) - u(x, t)}{h_t} + O(h_t) \quad (3.36)$$

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x, t-h_t)}{h_t} + O(h_t) \quad (3.37)$$

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t+h_t) - u(x, t-h_t)}{2h_t} + O(h_t^2) \quad (3.38)$$

La segunda derivada u_{tt} es aproximada por:

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+h_t) - 2u(x, t) + u(x, t-h_t)}{h_t^2} + O(h_t^4) \quad (3.39)$$

Para un sistema en coordenadas rectangulares, la discretización en los intervalos con longitud Δx en el espacio, y Δt en el tiempo, es decir $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t$, respectivamente, es:

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \dots, x_i = i\Delta x, \dots, x_n = N\Delta x = L \quad (3.40)$$

donde $i = 1, \dots, N$, N es el número de puntos en $0 \leq x \leq L$, y

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_j = j\Delta t, \dots \quad (3.41)$$

donde $j = 1, \dots, N_t$, N_t es el número de pasos en el tiempo para $0 \leq t$. Entonces:

$$u(x_i, t_j) = u_{i,j}$$

Diferenciación hacia adelante: La aproximación estándar es el esquema de diferenciación de $u(x_i, t_j)$ hacia adelante.

Primera derivada con dos puntos: La primera derivada se aproxima con dos puntos: $u(x_{i+1}, t_j)$ y $u(x_i, t_j)$. La segunda derivada se aproxima con tres puntos: $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$ y $u(x_i, t_j)$. La tercera derivada se aproxima con cuatro puntos: $u(x_{i+3}, t_j)$, $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$ y $u(x_i, t_j)$. La aproximación de derivadas de orden superior se aproximan con un número creciente de puntos.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (3.42a)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.42b)$$

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{u_{i+3,j} - 3u_{i+2,j} + 3u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2(\Delta x)^3} \quad (3.42c)$$

Primera derivada con tres puntos: La primera derivada se aproxima con tres puntos: $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$ y $u(x_i, t_j)$. La segunda derivada se aproxima con cuatro puntos: $u(x_{i+3}, t_j)$, $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$ y $u(x_i, t_j)$. La tercera derivada se aproxima con cinco puntos: $u(x_{i+4}, t_j)$, $u(x_{i+3}, t_j)$, $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$ y $u(x_i, t_j)$. La aproximación de derivadas de orden superior se aproximan con un número creciente de puntos.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{-u_{i+2,j} + 4u_{i+1,j} - 3u_{i,j}}{2\Delta x} \quad (3.43a)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{-u_{i+3,j} + 4u_{i+2,j} - 5u_{i+1,j} + 2u_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.43b)$$

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{-3u_{i+4,j} + 14u_{i+3,j} - 24u_{i+2,j} + 18u_{i+1,j} - 5u_{i,j}}{2(\Delta x)^3} \quad (3.43c)$$

Diferenciación hacia atrás: La aproximación de diferenciación de $u(x_i, t_j)$ hacia atrás se hace mediante las siguientes fórmulas:

Primera derivada con dos puntos: La primera derivada se aproxima con dos puntos: $u(x_i, t_j)$ y $u(x_{i-1}, t_j)$. La segunda derivada se aproxima con tres puntos: $u(x_i, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$ y $u(x_{i-2}, t_j)$. La tercera derivada se aproxima con cuatro puntos: $u(x_i, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$,

$u(x_{i-2}, t_j)$ y $u(x_{i-3}, t_j)$. La aproximación de derivadas de orden superior se aproximan con un número creciente de puntos.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.44a)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.44b)$$

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{u_{i,j} - 3u_{i-1,j} + 3u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{2(\Delta x)^3} \quad (3.44c)$$

Primera derivada con tres puntos: La primera derivada se aproxima con tres puntos: $u(x_i, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$ y $u(x_{i-2}, t_j)$. La segunda derivada se aproxima con cuatro puntos: $u(x_i, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$, $u(x_{i-2}, t_j)$ y $u(x_{i-3}, t_j)$. La tercera derivada se aproxima con cinco puntos: $u(x_i, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$, $u(x_{i-2}, t_j)$, $u(x_{i-3}, t_j)$ y $u(x_{i-4}, t_j)$. La aproximación de derivadas de orden superior se aproximan con un número creciente de puntos.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x} \quad (3.45a)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{2u_{i,j} - 5u_{i-1,j} + 4u_{i-2,j} - u_{i-3,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.45b)$$

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{5u_{i,j} - 18u_{i-1,j} + 24u_{i-2,j} - 14u_{i-3,j} + 3u_{i-4,j}}{2(\Delta x)^3} \quad (3.45c)$$

Diferenciación centrada: La aproximación de diferenciación de $u(x_i, t_j)$ centrada se hace mediante las siguientes fórmulas:

Primera derivada con dos puntos: La primera derivada se aproxima con dos puntos: $u(x_{i+1}, t_j)$ y $u(x_{i-1}, t_j)$. La segunda derivada se aproxima con tres puntos: $u(x_{i+1}, t_j)$, $u(x_i, t_j)$ y $u(x_{i-1}, t_j)$. La tercera derivada se aproxima con cuatro puntos: $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$ y $u(x_{i-2}, t_j)$. La aproximación de derivadas de orden superior se aproximan con un número creciente de puntos.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.46a)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (3.46b)$$

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{2(\Delta x)^3} \quad (3.46c)$$

Primera derivada con tres puntos: La primera derivada se aproxima con cuatro puntos: $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$, $u(x_{i-2}, t_j)$. La segunda derivada se aproxima con cinco puntos: $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$, $u(x_i, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$, y $u(x_{i-2}, t_j)$. La tercera derivada se aproxima con seis puntos: $u(x_{i+3}, t_j)$, $u(x_{i+2}, t_j)$, $u(x_{i+1}, t_j)$, $u(x_{i-1}, t_j)$, $u(x_{i-2}, t_j)$, y $u(x_{i-3}, t_j)$. La aproximación de derivadas de orden superior se aproximan con un número creciente de puntos.

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{12\Delta x} \quad (3.47a)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12(\Delta x)^2} \quad (3.47b)$$

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} = \frac{-u_{i+3} + 8u_{i+2,j} - 13u_{i+1,j} + 13u_{i-1,j} - 8u_{i-2,j} + u_{i-3}}{8(\Delta x)^3} \quad (3.47c)$$

Teoría clásica de control de procesos



| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Estructuras de modelos orientados a control | 55 |
| 4.1 | Representación en el Espacio de Estados | 55 |
| 4.2 | Función de Transferencia | 58 |
| 4.3 | Procesos Multivariables. | 59 |
| 4.4 | Procesos en serie | 63 |
| 5 | Análisis y control de sistemas lineales. | 65 |
| 5.1 | Estabilidad. | 65 |
| 5.2 | Sistemas multivariables | 67 |
| 5.3 | Control por retroalimentación de estados e integración en Adelanto, basado en colocación de polos (CREIA) | 67 |

4. Estructuras de modelos orientados a control

La estructura matemática del modelo de una planta tiene implicaciones directas en el contexto de la síntesis de controladores. En las secciones que siguen, el objetivo es presentar modelos matemáticos que comúnmente se requieren plantear para introducir y probar técnicas clásicas y avanzadas de control. Los modelos de procesos sirven para diseñar las leyes de control basadas en modelos, pero también representan la dinámica del proceso para el cual se evalúa el desempeño de los controladores. Un modelo orientado al diseño de control puede ser aproximado, reducido o simplificado. Las desviaciones de modelado generadas por las no linealidades, interacciones y dinámicas desestimadas, limitaciones por la validez del modelo en ciertas regiones de operación, así como la incertidumbre de modelado, son toleradas por el control en menor o mayor medida, dependiendo de los objetivos propuestos. El tipo de modelado se define en función de la técnica y objetivos de control. Por el contrario, representar la planta durante una simulación del lazo cerrado, requiere buena exactitud y fidelidad en la reproducción del desempeño y dinámicas del proceso. Un modelo de planta fiable permite pruebas eficaces del diseño de los compensadores, y hace factible la implementación del control en un sistema real.

Muchos métodos de análisis y control se aplican para sistemas lineales, por lo tanto, es de interés estudiar formas lineales de representación. Las principales son los modelos en espacio de estados y función de transferencia. Su estructura matemática específica depende de si son obtenidos para sistemas SISO o multivariables, variantes o invariantes con el tiempo, subsistemas conectados en serie o con distintas configuraciones, sistemas con disturbios o sistemas inciertos.

4.1 Representación en el Espacio de Estados

Definición 4.1 Variables de estado. Es un conjunto mínimo de variables, que caracteriza completamente el comportamiento dinámico de un sistema, a partir de $t = 0$ y conociendo la entrada $u(t)$. Las variables de estado se representan como un vector de orden n .

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Definición 4.2 Variables de entrada. Es el conjunto de m variables que definen el estado en la entrada del sistema en $t \geq t_0$.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Definición 4.3 Ecuaciones de estado. Es una representación mediante el planteamiento de un problema de valor inicial con un sistema de ecuaciones diferenciales (o de diferencia) de primer orden.

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \text{parámetros}, t), \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, n$$

En general, para sistemas dinámicos, continuos y de parámetros concentrados, el estado puede expresarse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, que en forma matricial se representa como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

El vector de estados es de orden n .

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

Definición 4.4 Ecuaciones de salida. Es el conjunto de r expresiones algebraicas que relacionan las variables de salida (variables de interés) con las variables de estado y de entrada.

$$y_j = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \text{parámetros}, t), \quad \text{donde } j = 1, 2, \dots, r$$

En forma matricial tiene la forma:

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}, t)$$

El vector de salidas es de orden r .

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix}$$

Definición 4.5 Espacio de estados. Es el espacio matemático cuyas coordenadas son las variables de estado. Por lo tanto, en cualquier instante, el estado del sistema está representado por un punto en el espacio de estados.

Un modelo genérico en el espacio de estados se representa en las ecuaciones (4.1) y (4.2).

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2 \dots u_m, \text{pará metros del modelo}) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2 \dots u_m, \text{pará metros del modelo}) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2 \dots u_m, \text{pará metros del modelo})
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2 \dots u_m, \text{pará metros del modelo}) \\
y_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2 \dots u_m, \text{pará metros del modelo}) \\
&\vdots \\
y_r &= g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2 \dots u_m, \text{pará metros del modelo})
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Si f y g dependen del tiempo t , el sistema es **variante con el tiempo**. La representación matemática del espacio de estados en su forma matricial para sistemas dinámicos, lineales, continuos, de parámetros concentrados y variante con el tiempo es (4.3):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Si f y g no dependen del tiempo explícitamente, el sistema es lineal, **invariante con el tiempo**. En tal caso, las ecuaciones se escriben en forma matricial como sigue (4.4):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz del sistema o de la planta, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de entrada o de control, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, es la matriz de salida o medición y $\mathbf{D} : P \rightarrow \mathbb{R}^{r \times m}$ es la matriz de transición; $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado del sistema, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ es la salida del sistema.

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{n \times m} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{r \times n} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{r \times m} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

A determina la estabilidad y la velocidad de respuesta. Si la entrada u y la salida y son escalares, el sistema es de una entrada y una salida (SISO en inglés). Si $m > 1$ y $r > 1$, el sistema es de múltiples entradas y múltiples (MIMO en inglés). La Fig. 4.1 es un diagrama en bloques de un modelo en el espacio de estados.

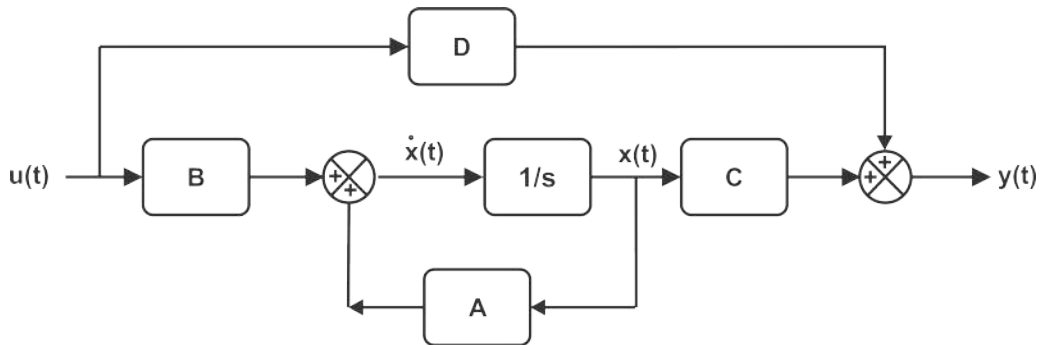


Figura 4.1: Representación en diagrama de bloques de un modelo en el espacio de estados.

4.2 Función de Transferencia

Un sistema lineal de parámetros constantes, continuo, de orden n con una entrada u y una salida y se representa por la ecuación diferencial de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (4.5)$$

La función de transferencia $G(s)$ de este sistema es un modelo dinámico, lineal e invariante en el tiempo que se obtiene como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida del sistema $Y(s)$ y la transformada de Laplace de la entrada al sistema $U(s)$, es decir $G(s) = Y(s)/U(s)$, suponiendo condiciones iniciales igual a cero, es decir, $y(t=0) = 0$. Esta relación se establece considerando el estado inicial como cero. La Tabla 4.1 presenta diferentes formas de la función de transferencia [39, 42].

Tabla 4.1: Diferentes formas de la Función de Transferencia

| Forma | Función de Transferencia | Condiciones en el sistema |
|-------------------------------------|---|---|
| Polinomial | $G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$ | Un sistema representado por una función de transferencia $G(s)$ tal que $n > m$ se dice estrictamente propia. Si $n = m$, la función no es estrictamente propia. |
| Polos y ceros | $G(s) = \frac{b_m (s - c_1)(s - c_2) \dots (s - c_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$ | donde c son los ceros del sistema y p son los polos. |
| Descomposición en elementos simples | $G(s) = \frac{\alpha_1}{s - \lambda} + \frac{\alpha_2}{(s - \lambda)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s - \lambda)^n}$ | Para una función de transferencia estrictamente propia |
| Forma de constante de tiempo | $G(s) = \frac{KB(s)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_n s + 1)}$ | Dividiendo la forma polinomial entre a_0 y factorizando el denominador en un producto $\prod (\tau_i s + 1)$ donde τ_i es la constante de tiempo. |

Teorema del valor final. Una propiedad de las funciones de transferencia es que el cambio en la salida en el estado estacionario, para una entrada sostenida, se calcula directamente estableciendo $s = 0$ en $G(s)$.

4.3 Procesos Multivariables.

Los procesos multivariables son aquellos que tienen múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO en inglés), o múltiples entradas y una salida (MISO en inglés), o una entrada y múltiples salidas (SIMO en inglés). De manera general se van a considerar en primer lugar sistemas dinámicos no lineales de la forma (4.6).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{con } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (4.6b)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado del sistema, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ es la salida del sistema, \mathbf{x}_0 es la condición inicial, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^r$ son funciones no lineales.

4.3.1 Linealización de sistemas no lineales

A partir del sistema MIMO (4.6) se puede derivar un sistema de EDO lineales que se aproxima a la ecuación no lineal alrededor de un punto de equilibrio $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, mediante una serie de Taylor. El proceso de linealización inicia definiendo las variables de desviación de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m, \quad (4.7b)$$

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{y} - \mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^r, \quad (4.7c)$$

Para un sistema SISO con $n = m = r = 1$, las funciones f y g se aproximan por la expansión de la serie de Taylor truncada en el término lineal. Entonces, la ecuación 4.8 es aproximada de la siguiente forma:

$$\dot{x} \approx f(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} (x - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} (u - u^*) \quad \text{con } x - x^* = x_0 - x^*, \quad (4.8a)$$

$$y \approx g(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} (x - x^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} (u - u^*), \quad (4.8b)$$

Expresado el sistema en la forma de espacio de estados, el modelo multivariable lineal tiene la forma de la ecuación 4.9:

$$\dot{x}_d = ax_d + bu_d, \quad (4.9a)$$

$$y_d = cx_d + du_d, \quad (4.9b)$$

$$x_d(t_0) = x_{d,0}, \quad (4.9c)$$

donde a, b, c, d con constantes definidas por:

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*}, \quad (4.10a)$$

$$b = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*}, \quad (4.10b)$$

$$c = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*}, \quad (4.10c)$$

$$d = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x^*, u^*}, \quad (4.10d)$$

Realizando un procedimiento análogo al que conduce a la linealización de un sistema SISO que resulta en la ecuación 4.8, la serie de Taylor es desarrollada hasta el término lineal para aproximar las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ (4.6). La matriz Jacobiana (definición 4.6) de una función de varias variables es la matriz que contiene como elementos, las derivadas parciales de primer orden de esa función. La matriz Jacobiana permite escribir de manera general el modelo lineal que aproxima al sistema no lineal multivariable: el modelo lineal multivariable derivado es el sistema (4.11) y (4.12).

Definición 4.6 Sea $h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ cuyas derivadas parciales se denotan como h_1, h_2, \dots, h_q y existen en \mathbb{R}^p , la matriz Jacobiana en un punto $w \in \mathbb{R}^p$ se define como:

$$J_h(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial w_1}(w) & \frac{\partial h_1}{\partial w_2}(w) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial w_p}(w) \\ \frac{\partial h_2}{\partial w_1}(w) & \frac{\partial h_2}{\partial w_2}(w) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial w_p}(w) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial w_1}(w) & \frac{\partial h_q}{\partial w_2}(w) & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial w_p}(w) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial g_r}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial u_1} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \frac{\partial g_r}{\partial u_2} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial u_m} \Big|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \mathbf{u} \quad (4.12)$$

4.3.2 Función de transferencia de un sistema multivariable.

La función de transferencia $\mathbf{G}(s)$ de un sistema multivariable es una matriz cuyos elementos son las funciones de transferencia que relacionan a cada una de las r variables de salida $\mathbf{Y}(s)$ con cada una de las m variables de entrada $\mathbf{U}(s)$.

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \quad (4.13)$$

donde:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nm} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Entonces, en un sistema multivariable, cada variable de salida puede ser función de todas las variables de entrada:

$$\begin{aligned}
 Y_1(s) &= G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) + \cdots + G_{1m}(s)U_m(s) \\
 Y_2(s) &= G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) + \cdots + G_{2m}(s)U_m(s) \\
 &\vdots \\
 Y_r(s) &= G_{r1}(s)U_1(s) + G_{r2}(s)U_2(s) + \cdots + G_{rm}(s)U_m(s)
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

La Figura 4.2 muestra esta ecuación en forma gráfica:

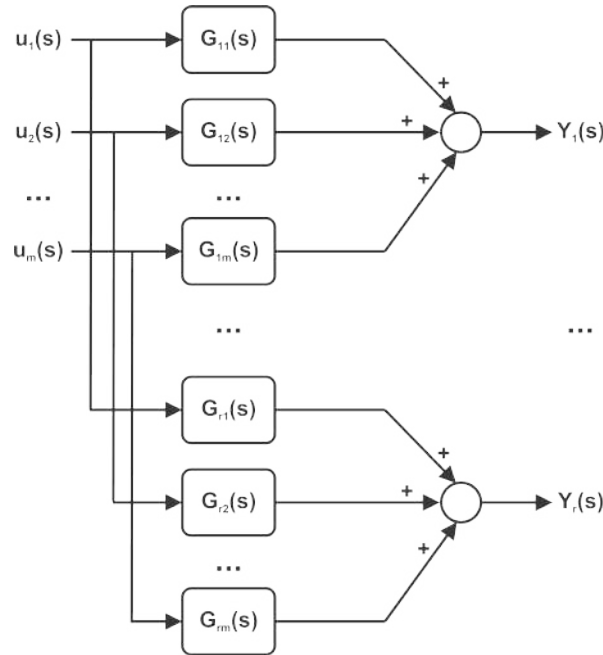


Figura 4.2: Diagrama de bloques de un modelo multivariable en función de transferencia.

4.3.3 Transformación de espacio de estados a función de transferencia.

Considere la forma general de una ecuación de estado que representa un sistema dinámico, continuo, lineal, de parámetros concentrados e invariante en el tiempo (ecuaciones 4.11 y 4.12). El interés es encontrar la relación entre las salidas y entradas del sistema en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto se aplica la transformada de Laplace al sistema lineal:

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{X}}(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbf{A}\mathbf{X}(t)\} + \mathcal{L}\{\mathbf{B}\mathbf{U}(t)\}
 \tag{4.16}$$

Desarrollando:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

El comportamiento de la variable de estado está dado en el dominio de la frecuencia por la ecuación (4.17), para una condición inicial $\mathbf{X}(0)$.

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{X}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (4.17)$$

Si se considera una condición inicial $\mathbf{x}(0) = 0$ y se sustituye $X(s)$ en la ecuación de salida (4.18). La función de transferencia tiene la estructura definida en la ecuación (4.19).

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s), \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \left([s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \right) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s), \quad (4.18b)$$

$$\mathbf{G}_{n \times m}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (4.19)$$

4.4 Procesos en serie

Es un proceso formado por n unidades en las cuales los estados de una unidad influyen en el comportamiento de la unidad subsecuente, pero lo contrario no ocurre. Esta conexión entre unidades es muy común en la industria. Se recomienda la lectura de los siguientes estudios sobre el modelado y control de este tipo de sistemas: [5, 14, 21, 22], con énfasis en la estructura de modelado de Faanes y Skogestad, 2005 [6]. La Figura 4.3 representa un proceso en serie.

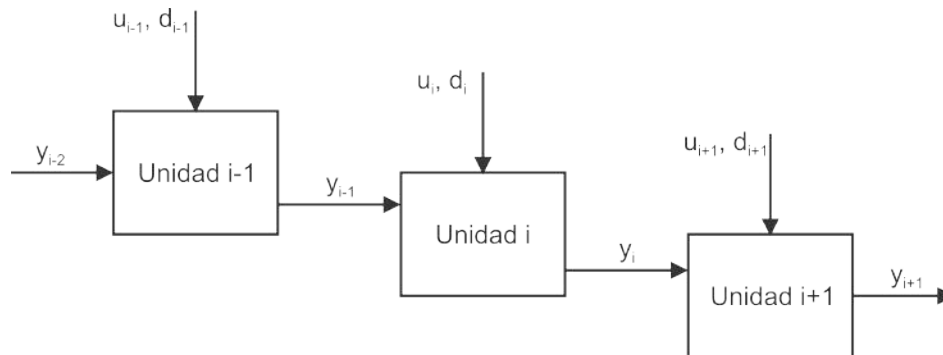


Figura 4.3: Representación de un proceso en serie.

Considere un proceso no lineal representado por la ecuación 4.20:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, x_{i-1}, u_i, d_i), \quad (4.20a)$$

$$y_i = g_i(x_i), \quad (4.20b)$$

donde $i = 1, \dots, nu$, nu es el número de unidades conectadas en serie, x_i son los estados correspondientes a la unidad i , x_{i-1} son los estados correspondientes a la unidad $i - 1$, u_i son las entradas en la unidad i , y d_i son los disturbios en las entradas. Linealizando el sistema y aplicando la transformada de Laplace se obtiene la función de transferencia del sistema de procesos en serie (4.21).

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{G}_d(s)\mathbf{d}(s) \quad (4.21)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 M_1 B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 M_2 A_{2,1} M_1 B_1 & C_2 M_2 B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ C_n M_n \prod_{r=1}^{n-1} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] B_1 & C_n M_n \prod_{r=1}^{n-2} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] B_2 & \cdots & \cdots & C_1 M_1 B_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
 G_d(s) &= \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_1 M_1 E_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 M_2 A_{2,1} M_1 E_1 & C_2 M_2 E_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ C_n M_n \prod_{r=1}^{n-1} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] E_1 & C_n M_n \prod_{r=1}^{n-2} [A_{n-r+1, n-r} M_{n-r}] E_2 & \cdots & \cdots & C_1 M_1 E_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$M_i = (sI - A_{ii})^{-1} \tag{4.24}$$

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \tag{4.25a}$$

$$B_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_i}, \tag{4.25b}$$

$$C_i = \frac{\partial g_i}{\partial x_i}, \tag{4.25c}$$

$$E_i = \frac{\partial f_i}{\partial d_i}. \tag{4.25d}$$

5. Análisis y control de sistemas lineales.

Se inicia con el estudio de estabilidad de los estados de equilibrio de sistemas físicos. Después se abordan los conceptos de controlabilidad y observabilidad, como propiedades estructurales de los sistemas que aseguran las especificaciones de diseño de los sistemas de control. Para profundizar en el tema se recomienda la lectura de la referencia [31].

5.1 Estabilidad.

Definición 5.1 Se llama punto de equilibrio o punto crítico de un sistema dinámico a la solución constante para todo $t \in \mathbb{R}$ cuando la entrada $u = 0$.

Considere de manera general un sistema autónomo, es decir, para el cual $u = 0$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

donde x_0 es la condición inicial. Los puntos de equilibrio se obtienen cuando $\dot{x} = 0$, es decir son la solución del sistema:

$$f(x(t)) = 0.$$

Un sistema es estable si su trayectoria dinámica parte de un punto alrededor del origen, y esta permanece próximo al origen. De manera más formal se definen los siguientes conceptos sobre la estabilidad de puntos de equilibrios de un sistema.

Definición 5.2 Un punto de equilibrio es **estable en el sentido de Lyapunov** si existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que para todo $\forall t \geq 0$:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$$

Definición 5.3 Un punto de equilibrio es **asintóticamente estable** si se cumple que es estable en el sentido de Lyapunov, y si existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Definición 5.4 Un punto de equilibrio es **exponencialmente estable** si se cumple que es asintóticamente estable, y si existen α, β, δ positivos, tal que , entonces:

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}.$$

Considere el sistema lineal autónomo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Definición 5.5 Un punto de equilibrio es **cuadráticamente estable** si y solo si existe una función cuadrática positiva $V \in \mathbb{R}$ (función de Lyapunov), tal que:

$$V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x},$$

y que se cumpla que \dot{V} es negativa. La matriz V está determinada por P que es una matriz de Lyapunov simétrica tal que:

$$P = P^T$$

$$P > 0$$

y que se cumpla que:

$$A^T P + P A < 0$$

Considere ahora el siguiente sistema lineal con incertidumbre:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, y $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son matrices del modelo, y $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ es la matriz de parámetros inciertos, normalizada por \mathbf{D} y \mathbf{E} .

Un sistema se dice que es **estable** si ante variaciones finitas en la entrada, su respuesta natural también tiene variaciones finitas y su trayectoria permanece alrededor del origen.

Un sistema es **inestable** si para un tiempo infinito, su respuesta natural crece sin límite.

Un sistema de control es **críticamente estable** si para un tiempo infinito su respuesta natural no decrece ni crece sin límite.

5.2 Sistemas multivariables

En los sistemas multivariables MIMO, SIMO, o MISO, una entrada influye en varias salidas y una salida es afectada por diferentes entradas, entonces, se dice que son sistemas con interacción. Los problemas de control de este tipo de sistemas generan, por lo tanto, retos diferentes a los problemas de control de sistemas SISO.

La problemática de control de sistemas multivariables incluye:

1. Evaluación de las interacciones entre los lazos de control.
2. Elección de la técnica de control.
3. Para control desacoplado, el emparejamiento de entradas y salidas de control.
4. Definición de la estructura de control.

5.3 Control por retroalimentación de estados e integración en Adelanto, basado en colocación de polos (CREIA)

Dado un sistema MIMO representado por:

El objetivo es encontrar una ley de control $u_d(t)$ para un sistema MIMO que cumpla con los siguientes requerimientos en lazo cerrado:

1. El sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.
2. El comportamiento del sistema en lazo cerrado tiene el desempeño deseado.
3. La salida y_d del sistema sigue la referencia con error de estado estable nulo.

Esquemas de control clásico son la retroalimentación de estados y la retroalimentación de salidas. Ambos aseguran estabilidad en lazo cerrado y el desempeño dinámico. Por otro lado, el error de estado estable se elimina integrando la diferencia entre la salida y la referencia, es decir, se aumentan los estados del sistema. Un esquema que combine la retroalimentación de estados y un integrador en adelanto alcanza simultáneamente ambos desempeños en lazo cerrado.

5.3.1 Estructura de control.

Objetivo de control Dado un sistema MIMO representado por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}_{ext}\mathbf{u}_d \\ \mathbf{y}_d &= \mathbf{C}\mathbf{x}_d\end{aligned}\tag{5.1}$$

El objetivo es encontrar una ley de control $\mathbf{u}_d(t)$ que cumpla con los siguientes requerimientos en lazo cerrado:

1. El sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable.
2. El comportamiento del sistema en lazo cerrado tiene el desempeño deseado.
3. La salida \mathbf{y}_d del sistema sigue la referencia con error de estado estable nulo.

El control por retroalimentación de estados e integración en Adelanto, basado en colocación de polos (CREIA) tiene las siguientes ventajas:

- La colocación de polos en lazo cerrado con retroalimentación de estados garantiza estabilidad en lazo cerrado y desempeño dinámico deseado.
- La introducción de integradores garantiza que el error de estado estable pueda ser eliminado o reducido.

El sistema representado por el modelo (5.1) es aumentado en la forma:

$$\dot{\mathbf{X}}_d = \mathbf{A}_{ext} \mathbf{X}_d + \mathbf{B}_{ext} \mathbf{u} \quad (5.2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_d \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_d(t) = \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

Teorma 5.1 El sistema aumentado es controlable si y solo si:

1. El sistema original es controlable.
2. $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = n + r, m \geq r, \text{rank}(\mathbf{C}) = r$

Después de verificar la controlabilidad del sistema aumentado, se puede aplicar el método de colocación de polos para obtener la ley de control:

$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{K}_p \mathbf{x}_d - \mathbf{K}_i \bar{\mathbf{x}}_d \quad (5.6)$$

La estructura de control está representada en la Figura 5.1.

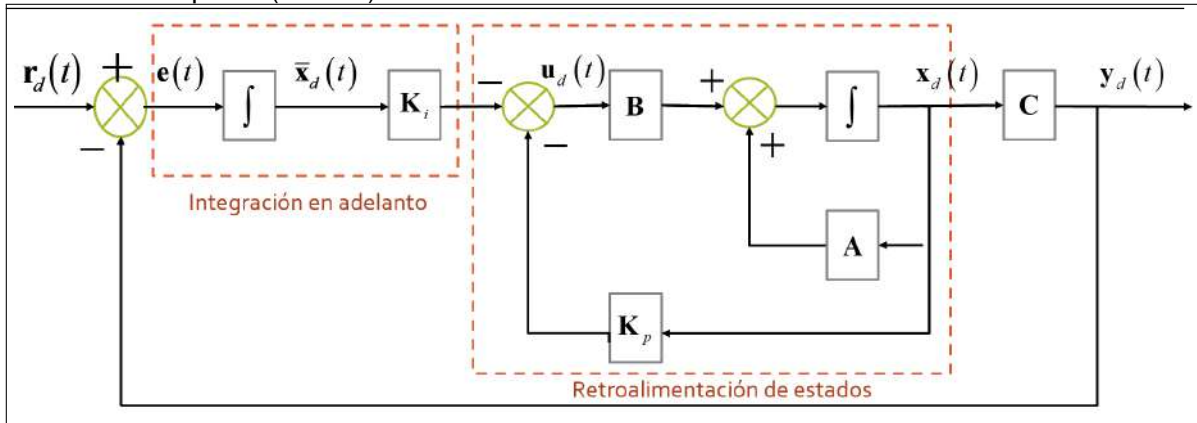


Figura 5.1: Estructura de control por retroalimentación de estados e integración en adelanto.

Simulación de Procesos



| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Problemas Modelos de procesos | 73 |
| 6.1 | Sistemas de tanques | 73 |
| 6.2 | Reactores | 82 |
| 6.3 | Equipos de intercambio de calor | 82 |
| 6.4 | Equipos de separación | 84 |
| 6.5 | Procesos de parámetros distribuidos | 88 |
| 7 | Problemas Simulación de procesos | 101 |
| 7.1 | Procesos de parámetros concentrados | 101 |
| 7.2 | Procesos de parámetros distribuidos | 108 |

6. Problemas | Modelos de procesos

6.1 Sistemas de tanques

La aplicación industrial de los tanques es el almacenamiento de productos líquidos, por ejemplo, en plantas químicas, petroquímicas o de alimentos. El arreglo en serie es un proceso intensificado porque tiene ventajas operacionales y de costo con respecto a la operación de un solo tanque de mayor volumen. Los ejercicios de modelado se hacen con dos configuraciones diferentes, manejando tanques con y sin interacción.

Ejercicio 6.1 — Tanques con interacción. Considere un sistema industrial a escala de laboratorio de tres tanques conectados en serie, y equipados con válvulas y dos bombas que alimentan el fluido de trabajo [4]. El diagrama de flujo del proceso se muestra en la Figura 6.1. Los tanques T_1 , T_2 y T_3 están conectados en serie mediante tuberías circulares unidas por válvulas de control para manipular el flujo de líquido. El primer y tercer tanque son alimentados por una bomba que proporciona un flujo $q_{1,e}$ y $q_{2,e}$, respectivamente. El sistema de ecuaciones que modelan el proceso se establece en función de las variables de interés que son los niveles en los tanques h_1 , h_2 y h_3 . Los volúmenes almacenados en los tanques son V_1 , V_2 , y V_3 respectivamente, y el área transversal de los mismos es A . Los flujos a través de las válvulas q_1 , q_2 , q_3 y q_4 están determinados por las constantes de las válvulas k_1 , k_2 , k_3 y k_4 .

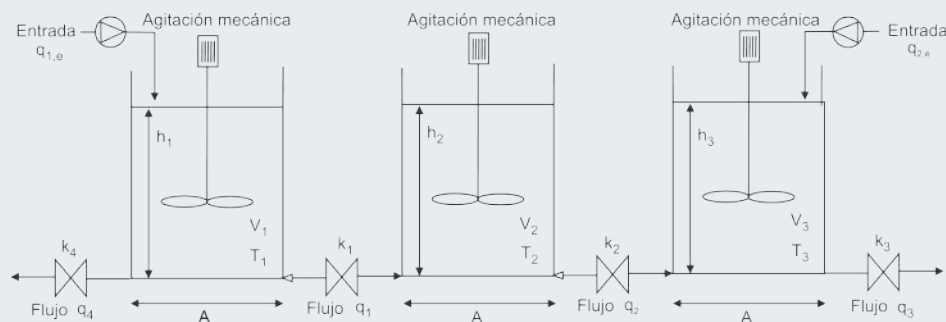


Figura 6.1: Representación esquemática del sistema de tanques con interacción.

Objetivo. Obtener un modelo dinámico para predecir el nivel los tres tanques con interacción, representando el comportamiento del sistema no lineal y obtener después un modelo lineal en el espacio de estados.

Suposiciones de modelado. En los tanques no ocurren reacciones, ni procesos de transferencia de calor. El fluido de trabajo es un líquido puro, con propiedades uniformes y constantes. El régimen de flujo a través de las válvulas es laminar, por lo tanto, el flujo a través de ellas se modela asumiendo que se cumple la ley de Torricelli.

Balances de materia. Se establece un balance global de materia para cada tanque en función del flujo volumétrico, entonces, para cada subsistema i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{de la cantidad de materia} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que entra al sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que sale del sistema} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dV_i(h_i)}{dt} = q_{e,i} - q_{s,i}(h_i) \quad (6.1)$$

Los balances de masa de los tanques en términos del volumen y del flujo volumétrico están dados por las ecuaciones (6.2):

$$\text{Tanque 1 } (T_1) : \quad \frac{dV_1}{dt} = q_{1,e} - (q_1 + q_4) \quad (6.2a)$$

$$\text{Tanque 2 } (T_2) : \quad \frac{dV_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (6.2b)$$

$$\text{Tanque 3 } (T_3) : \quad \frac{dV_3}{dt} = (q_{2,e} + q_2) - q_3 \quad (6.2c)$$

El flujo de líquido a través de las válvulas se aproxima aplicando la ley de Torricelli, dando como resultado las ecuaciones (6.3a)-(6.3d). La sustitución de estos flujos en (6.2) da como resultado el modelo no lineal del sistema (6.4):

$$q_1 = \text{sign}(h_1 - h_2) k_1 (|h_1 - h_2|) \quad (6.3a)$$

$$q_2 = \text{sign}(h_2 - h_3) k_2 (|h_2 - h_3|)^{1/2} \quad (6.3b)$$

$$q_3 = k_3 h_3^{1/2} \quad (6.3c)$$

$$q_4 = k_4 h_1^{1/2} \quad (6.3d)$$

Modelo no lineal del sistema de tres tanques con interacción. Es un sistema de tres EDO no lineales, con parámetros constantes. Las variables dinámicas son los niveles: h_1, h_2 y h_3 ; las entradas son los flujos de las corrientes líquidas alimentadas por las bombas a los tanques T_1 y T_2 : $q_{1,e}$ y $q_{2,e}$; los parámetros son las constantes de las válvulas: k_1, k_2 y k_3 , y el área transversal de los tanques A .

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A} \left[q_{1,e} - k_1 \text{sign}(h_1 - h_2) \sqrt{|h_1 - h_2|} - k_4 \sqrt{h_1} \right] \quad (6.4a)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A} \left[k_1 \text{sign}(h_1 - h_2) \sqrt{|h_1 - h_2|} - k_2 \text{sign}(h_2 - h_3) \sqrt{|h_2 - h_3|} \right] \quad (6.4b)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{1}{A} \left[q_{2,e} - k_2 \text{sign}(h_2 - h_3) \sqrt{|h_2 - h_3|} - k_3 \sqrt{h_3} \right] \quad (6.4c)$$

Modelo lineal en el espacio de estados. Es un sistema de orden 3 ($n = 3$), con dos entradas ($m = 2$) y las salidas igual a los estados ($r = 3$). $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ es el vector de salidas. El subíndice d indica que se trata de variables de desviación y el subíndice eq se refiere al punto de equilibrio. Los parámetros están contenidos en el vector θ .

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_1}{\partial h_3} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_2}{\partial h_3} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial h_1} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_3}{\partial h_2} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_3}{\partial h_3} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_{1,e,d}} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_1}{\partial q_{2,e,d}} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_{1,e,d}} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_2}{\partial q_{2,e,d}} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_{1,e,d}} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} & \frac{\partial f_3}{\partial q_{2,e,d}} \Big|_{\mathbf{h}_{eq}, \mathbf{q}_{eq}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (6.5)$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,eq} \\ h_2 - h_{2,eq} \\ h_3 - h_{3,eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,d} \\ h_{2,d} \\ h_{3,d} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,e} - q_{1,e,eq} \\ q_{2,e} - q_{2,e,eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,e,d} \\ q_{2,e,d} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,eq} \\ h_2 - h_{2,eq} \\ h_3 - h_{3,eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,d} \\ h_{2,d} \\ h_{3,d} \end{bmatrix}$$

■

Ejercicio 6.2 — Tanques en serie, sin interacción, y sección transversal variable. Considere un sistema de tres tanques dispuestos en serie de manera vertical, de forma que la salida de una unidad es la entrada de la subsiguiente, cada una de estas unidades con una válvula de drenaje a la salida [18]. Un depósito situado en la base del conjunto almacena el líquido que una bomba hace circular continuamente por los tanques. La bomba llena el tanque superior, después, el líquido sale por gravedad a la siguiente unidad, y así sucesivamente. Las válvulas u orificios de salida actúan como resistencias al paso del flujo de líquido. La manipulación del área de salida en cada válvula puede ser usada para cambiar los flujos de salida. El tanque superior del conjunto tiene una sección transversal rectangular constante, mientras que los otros, con los volúmenes de una porción de esfera y sección de una pirámide invertida, respectivamente, tienen un área transversal variable. Las áreas no constantes generan las principales no linealidades en el modelo matemático del sistema. La Figura 6.2 muestra el proceso descrito. Para $i = 1, 2, 3$, T_i denota a los tanques 1, 2 y 3, respectivamente, C_i son los coeficientes de las válvulas, h_i son los niveles en los tanques, $h_{i,max}$ es el nivel máximo que puede alcanzar el líquido contenido en el tanques i , $q_{e,i}$ son los flujos de entrada, $q_{s,i}$ son los flujos de salida, V_i son los volúmenes de los tanques y β_i sus áreas transversales.

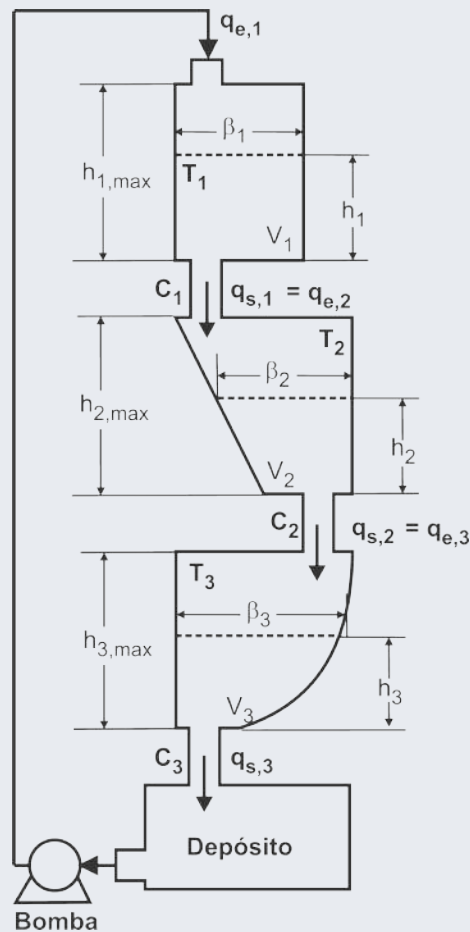


Figura 6.2: Representación esquemática del sistema de tanques en serie con sección transversal variable.

Objetivo. Modelar la dinámica del nivel en los tres tanques sin interacción y con parámetros variables, representando el comportamiento del sistema no lineal y obtener después un modelo lineal.

Suposiciones de modelado. El fluido que entra y sale del tanque es un líquido incompresible, por lo tanto, la densidad es constante y uniforme en el tanque. Las propiedades del fluido no cambian con la temperatura. No hay intercambio de calor. No hay reacciones en el tanque. En un instante de tiempo t , el área de la sección transversal de los tanques depende del nivel de líquido. Para $\alpha = 0.5$, el flujo a través de las válvulas es laminar.

Balances de materia. Se establece un balance global de masa para cada tanque.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{de la cantidad de materia} \\ \text{dentro del sistema} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que entra al sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Cantidad de materia} \\ \text{que sale del sistema} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dV_i(h_i)}{dt} = q_{e,i} - q_{s,i}(h_i) \quad (6.7)$$

donde $i = 1, 2, 3$, V_i es el volumen de cada tanque, q es el flujo volumétrico de entrada, y V_i es el volumen del tanque i , h_i la altura del tanque i , $q_{e,i}$ el flujo de entrada en el tanque i , y $q_{s,i}$ el flujo de salida. Desarrollando la ecuación (6.7) y definiendo el área transversal del tanque i como $\beta_i(h_i)$:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(h_i)}{dt} &= \frac{dV_i(h_i)}{dh_i} \frac{dh_i}{dt} \\ \frac{dV_i(h_i)}{dt} &= \frac{d(\beta_i(h_i) \cdot h_i)}{dh_i} \frac{dh_i}{dt} = \left[\frac{d\beta_i(h_i)}{dh_i} h_i + \beta_i(h_i) \right] \frac{dh_i}{dt} \\ \frac{dV_i(h_i)}{dt} &= \frac{d\beta_i(h_i)}{dt} h_i + \beta_i(h_i) \frac{dh_i}{dt} \\ \frac{dV_i(h_i)}{dt} &= \beta_i(h_i) \frac{dh_i}{dt} \end{aligned}$$

Para el tanque i , el balance de materia en función del nivel h_i es

$$\beta_i(h_i) \frac{dh_i}{dt} = q_{e,i} - q_{s,i}(h_i) \quad (6.8)$$

Se considera que el flujo volumétrico es directamente proporcional al nivel, con una constante de proporcionalidad C_i :

$$\begin{aligned} q_{i,s} &\propto h_i \\ q_{i,s} &= C_i h_i^\alpha \end{aligned}$$

Para $\alpha = 1/2$ el flujo es laminar, y turbulento para otro valor. Las fórmulas para calcular las áreas transversales de los tanques en función del nivel $\beta_i(h)$ son (6.9-6.11). Los parámetros

geométricos para el cálculo se muestran en las Figuras 6.3 para T_1 , 6.4 para T_2 , y 6.5 para T_3 . Las áreas transversales de T_1 y T_2 dependen del nivel de líquido como se observa en las figuras.

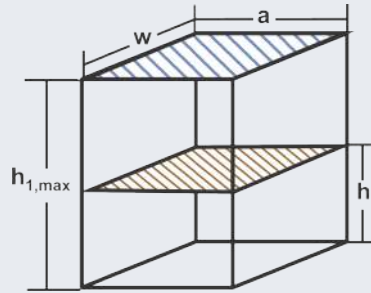


Figura 6.3: Geometría y parámetros para calcular el área transversal del Tanque 1.

$$\text{Tanque 1 } (T_1) : \quad \beta_1(h_1) = aw = \text{constante} \quad (6.9)$$

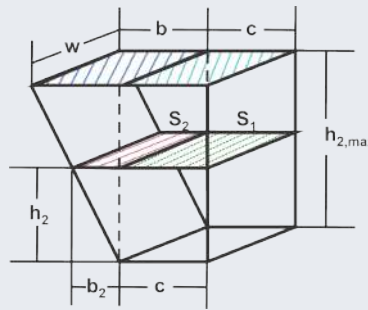


Figura 6.4: Geometría y parámetros para calcular el área transversal del Tanque 2.

$$\begin{aligned} \text{Tanque 2 } (T_2) : \quad \beta_2(h_2) &= S_1 + S_2(h_2) \\ &= cw + b_2(h_2)w \end{aligned}$$

Por triángulos semejantes:

$$\frac{b_2(h_2)}{b} = \frac{h_2}{h_{2,\max}}$$

$$b_2(h_2) = \frac{h_2}{h_{2,\max}}b$$

$$\beta_2(h_2) = cw + \frac{h_2}{h_{2,\max}}bw \quad (6.10)$$

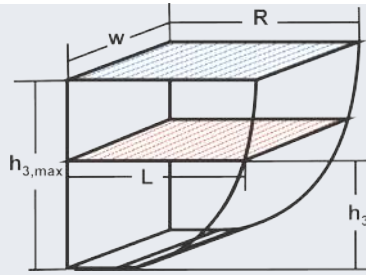


Figura 6.5: Geometría y parámetros para calcular el área transversal del Tanque 3.

$$\text{Tanque 3 } (T_3) : \quad \beta(h_3) = wL(h_3)$$

$$R^2 = L^2 + (R - h_3)^2$$

$$L^2 = R^2 - (R - h_3)^2$$

$$L(h_3) = \sqrt{R^2 - (R - h_3)^2}$$

$$\beta_3(h_3) = w\sqrt{R^2 - (R - h_3)^2}. \quad (6.11)$$

Modelo no lineal del sistema de tres tanques con parámetros en función de la variable independiente. Es un sistema de tres EDO no lineales, con parámetros constantes. Las variables dinámicas son los niveles: h_1 , h_2 y h_3 ; las entradas son: el flujo de la corriente líquida alimentada al tanque T_1 por la bomba: $q = q_{e,1}$; y las constantes de las válvulas: C_1 , C_2 y C_3 , los parámetros del modelo son los parámetros geométricos de los tanques w , a , b , y c los coeficientes que determinan el flujo a través de las válvulas α_1 , α_2 y α_3 .

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{\beta_1(h_1)} [q - C_1 h_1^{\alpha_1}] \quad (6.12a)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{\beta_2(h_2)} [C_1 h_1^{\alpha_1} - C_2 h_2^{\alpha_2}] \quad (6.12b)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{1}{\beta_3(h_3)} [C_2 h_2^{\alpha_2} - C_3 h_3^{\alpha_3}] \quad (6.12c)$$

$$\beta_1(h_1) = aw \quad (6.12d)$$

$$\beta_2(h_2) = cw + \frac{h_2}{h_{2,\max}} bw \quad (6.12e)$$

$$\beta_3(h_3) = w\sqrt{R^2 - (R - h_3)^2}. \quad (6.12f)$$

Modelo lineal en el espacio de estados. Es un sistema de orden 3 ($n = 3$), con dos entradas ($m = 4$) y tres salidas ($r = 3$). $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ es el vector de salidas. El subíndice d indica que se trata de variables de desviación y el subíndice eq se refiere al punto de equilibrio. Los parámetros están contenidos en el vector θ .

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}\mathbf{u}_d \quad (6.13a)$$

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{C}\mathbf{x}_d + \mathbf{D}\mathbf{u}_d \quad (6.13b)$$

donde:

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = -\frac{C_{1,eq}\alpha_1 h_{1,eq}^{\alpha_1-1}}{\beta_{1,eq}},$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{31} = 0,$$

$$a_{21} = -\frac{C_{1,eq}\alpha_1 h_{1,eq}^{\alpha_1-1}}{\beta_2(h_{2,eq})},$$

$$a_{22} = -\frac{a_{221}\beta'_2(h_{2,eq}) + a_{222}\beta_2(h_{2,eq})}{(\beta_2(h_{2,eq}))^2},$$

$$a_{32} = \frac{C_{2,eq}\alpha_2 h_{2,eq}^{\alpha_2-1}}{\beta_3(h_{3,eq})},$$

$$a_{33} = -\frac{a_{331}\beta'_3(h_{3,eq}) + a_{332}\beta_3(h_{3,eq})}{(\beta_3(h_{3,eq}))^2}$$

$$\text{con: } \beta'_2(h_{2,eq}) = \frac{bw}{h_{2,\max}}$$

$$\beta'_3(h_{3,eq}) = \frac{w(R - h_{3,eq})}{\sqrt{2Rh_{3,eq} - h_{3,eq}^2}}$$

$$a_{221} = [C_{1,eq}h_{1,eq}^{\alpha_1} - a_{223}],$$

$$a_{222} = a_{223}\alpha_2,$$

$$a_{223} = C_{2,eq}h_{2,eq}^{\alpha_2},$$

$$a_{332} = a_{333}\alpha_3,$$

$$a_{333} = C_{3,eq}h_{3,eq}^{\alpha_3},$$

$$\mathbf{B}_{n \times m} = \mathbf{B}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = \frac{1}{h_{1,eq}},$$

$$b_{12} = \frac{h_{1,eq}^{\alpha_1}}{\beta_1},$$

$$b_{13} = b_{14} = b_{21} = b_{24} = b_{31} = b_{32} = 0,$$

$$b_{22} = \frac{h_{1,eq}^{\alpha_1}}{\beta_2 (h_{2,eq})},$$

$$b_{23} = -\frac{h_{1,eq}^{\alpha_1}}{\beta_2 (h_{2,eq})},$$

$$b_{24} = -\frac{h_{2,eq}^{\alpha_2}}{\beta_2 (h_{2,eq})},$$

$$b_{33} = \frac{h_{2,eq}^{\alpha_2}}{\beta_3 (h_{3,eq})},$$

$$b_{34} = -\frac{h_{3,eq}^{\alpha_3}}{\beta_3 (h_{3,eq})}.$$

$$\mathbf{C}_{r \times n} = \mathbf{C}_{3 \times 3} = \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

$$\mathbf{D}_{r \times m} = \mathbf{D}_{3 \times 4} = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,eq} \\ h_2 - h_{2,eq} \\ h_3 - h_{3,eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,d} \\ h_{2,d} \\ h_{3,d} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - q_{eq} \\ C_1 - C_{1,eq} \\ C_2 - C_{2,eq} \\ C_3 - C_{3,eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_d \\ C_{1,d} \\ C_{2,d} \\ C_{3,d} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,eq} \\ h_2 - h_{2,eq} \\ h_3 - h_{3,eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,d} \\ h_{2,d} \\ h_{3,d} \end{bmatrix}$$

$$\theta = [w \ a \ b \ c \ R \ h_{2,\max} \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^{-1}.$$

6.2 Reactores

Ejercicio 6.3 — CSTR. Considere un reactor continuo de tanque agitado (CSTR en inglés) en el cual se lleva a cabo una reacción exotérmica de primer orden $A \rightarrow B$. El reactor está rodeado por una chaqueta de enfriamiento para eliminar el calor generado por la reacción y asegurar que la temperatura de operación permanece en su valor nominal.

Objetivo. Generar un modelo dinámico para predecir la evolución de la concentración del componente A, la temperatura del reactor T y la temperatura de la chaqueta de enfriamiento T_j , representando el comportamiento del sistema no lineal y obtener después un modelo lineal.

Suposiciones de modelado. El fluido que entra y sale del tanque es un líquido con comportamiento incompresible, por lo tanto, la densidad es constante y uniforme en el tanque con agitación perfecta. Las propiedades del fluido no cambian con la temperatura. .

Balances de materia. Debido a que hay una conversión química de un componente A a otro B, el modelo del reactor se obtiene a partir de un balance de materia por componente. Para un sistema con reacción el balance de materia se escribe de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{de la cantidad de} \\ \text{reactante en el} \\ \text{volumen del reactor} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo del reactante} \\ \text{que entra al reactor} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo del reactante} \\ \text{que sale del reactor} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{consumo del} \\ \text{reactante dentro} \\ \text{del reactor} \end{array} \right\}$$

Se establece un balance de materia por componente para el reactor y un balance de materia global para la chaqueta de enfriamiento que se coloca alrededor del reactor cuando la reacción es exotérmica.

También se establece un balance de energía para cada subsistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio} \\ \text{de la energía interna} \\ \text{en el volumen del} \\ \text{reactor} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo del calor} \\ \text{que entra al} \\ \text{reactor} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de calor} \\ \text{que sale del} \\ \text{reactor} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Calor de reacción} \\ \text{que el reactor cede} \\ \text{al ambiente} \end{array} \right\}$$

6.3 Equipos de intercambio de calor

Ejercicio 6.4 — Caldera para generación de vapor . Este ejercicio está dedicado a modelar una caldera para la producción de vapor. Se recomienda al lector revisar el libro de la referencia [32] para obtener un conocimiento más profundo sobre la clasificación, funcionamiento, partes

constituyentes y aplicaciones de este tipo de unidades. Estos equipos pueden ser de diferente tipo. Una clase corresponde a las calderas de potencia, también llamadas de alta presión, estas generan vapor teniendo como entrada un fluido en estado líquido, operan a presiones mayores de 1.03 bar y a temperaturas superiores a los 120°C . Si el vapor producido es sobrecalentado (es decir, tiene una temperatura más alta que la de saturación), incluso a presión baja, la caldera se clasifica como de potencia. En cambio, una caldera de calentamiento, llamada igualmente de baja presión, opera a presiones no mayores de 1.03 bar y temperaturas inferiores a 120°C . Sin embargo, este tipo de caldera puede usarse también para alimentar máquinas de vapor que generan electricidad. La aplicación no determina el tipo de caldera más que los niveles de la presión de operación. Por otro lado, una caldera de agua caliente es un equipo que no supera los 120°C , pero puede funcionar con presiones de hasta 11 bares. En el caso de calderas de tambor, el vapor saturado se genera en un tanque, y después es sobrecalentado en una sección en la que circula por tubos. La mayor parte de las calderas obtienen la energía térmica de agua caliente o de vapor producido por la combustión de un combustible. Para modelar una caldera, frecuentemente el enfoque consiste en dividir la representación en secciones de acuerdo con las condiciones térmicas. El modelo en cada sección se deriva de las ecuaciones de conservación de materia y de energía [0].

Este ejercicio se aborda teniendo como base la descripción reportada por Jana, 2018 en [33], a partir de la cual se plantea un modelo matemático sencillo de una caldera de vapor, que puede ser aprovechado en tareas de diseño del control para el sistema. El modelo caracteriza la transferencia de calor entre una fuente externa y un líquido puro contenido en un tanque. El sistema es mostrado en la Figura 6.6, está formado por un tanque enchaquetado, el cual es alimentado en la parte inferior por una corriente de líquido con flujo F_e y temperatura T_e . El líquido contenido en el tanque se encuentra a la temperatura T_L y presión P , y contiene una masa m que ocupa un volumen V . La parte superior del tanque contiene vapor en equilibrio con el líquido a temperatura T_V y presión P_V . Dentro del domo, el vapor ocupa un volumen V_V con masa m_V . El vapor que sale por la parte superior del tanque pasa por una válvula que entrega vapor a presión P_0 , con flujo volumétrico F_0 y flujo másico w_0 . El fluido de calentamiento es vapor producido por una fuente externa que alcanza la temperatura T_S y la presión P_S . Las propiedades del líquido son: la densidad ρ_L y C_P , del gas: ρ_V y C_P ,

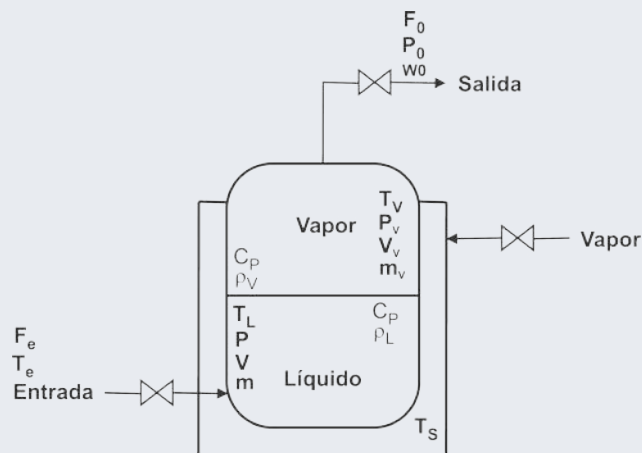


Figura 6.6: Caldera para generación de vapor.

Se deja al estudiante que obtenga el modelo matemático de este sistema. Para ello se sugiere las siguientes suposiciones:

1. El líquido que entra al equipo es puro, incompresible y se encuentra perfectamente mezclado dentro del tanque.
2. las propiedades del líquido como la densidad y capacidad calorífica permanecen constantes y homogéneas en el tanque.
3. La temperatura también es homogénea en el tanque y en la chaqueta de vapor.
4. La fase líquida y vapor están en equilibrio dentro del vaporizador. Las pérdidas de calor se suponen despreciables.
5. Las presiones de vapor del líquido y la presión en la fase de vapor son idénticas.
6. Se desprecian las pérdidas de energía térmica.
7. La fase vapor se comporta como gas iséal.
8. El nivel en el líquido no es constante.

En cuanto a la formulación del modelo, en resumen, se requiere:

1. Un balance de materia en la fase líquida.
2. Un balance de materia en la fase vapor.
3. Un balance de energía para el líquido.
4. La suposición cuatro implica que no es necesario establecer un balance de energía para la fase vapor.
5. Para las ecuaciones de conservación mencionadas considerar incluir ecuación para la válvula que considere la diferencia de presiones.
6. El uso de una ecuación de estado y una ecuación de presión de vapor para considerar el efecto de la temperatura y la presión en el comportamiento del vapor.
7. El cálculo del calor transferido entre el vapor y el líquido del tanque.

Para completar el ejercicio se pide establecer los grados de libertad del control. La consideración de que el nivel es variable implica que debe considerarse un lazo de control de nivel. ■

6.4 Equipos de separación

Ejercicio 6.5 — Columnas de destilación binaria . La destilación es la operación unitaria de mayor aplicación en la industria química. El objetivo operacional del proceso es separar mezclas para obtener productos con una pureza deseada. La separación se logra aprovechando la diferencia que existe entre puntos de ebullición de los componentes en la mezcla. Con el fin de simplificar la descripción, considere una columna de destilación continua, con una sola alimentación; la columna puede contener un conjunto de platos dispuestos a lo largo de esta, o estar rellena de material sólido en el se definen etapas teóricas de equilibrio. En cualquier caso, cada etapa coexiste la mezcla en fase vapor y líquida a misma temperatura y presión, pero composiciones diferentes. Estas condiciones varían además de una etapa a la otra. Entonces, se pueden registrar perfiles de temperatura, presión, y concentración en las fases líquida y gas a lo largo de la columna. La corriente de alimentación entra por uno de los platos intermedios y puede ser líquida, estar en fase vapor o ser una mezcla líquido-vapor. En el fondo de la columna, un rehervidor proporciona calor

para evaporar parcialmente el líquido en esta zona. El vapor que se genera sube pasando por los orificios o válvulas de los platos, hasta la parte superior de la columna, mientras que el resto de la mezcla que queda como líquido de fondo se retira como residuo, el cual es rico en el componente más pesado o de mayor punto de ebullición contenido en la mezcla. El vapor en la parte superior de la columna es parcialmente o totalmente condensado. Parte del líquido formado en la zona superior regresa a la columna en una corriente llamada reflujo, mientras que el resto es recuperado como producto destilado, el cual es rico en el componente más ligero o de menor punto de ebullición. Dentro de la columna, el líquido cae por gravedad de un plato al siguiente, manteniendo un volumen de retención en cada plato. El vapor sube de un plato al otro hasta el condensador. La Figura 6.7 muestra la planta descrita con sus diferentes partes.

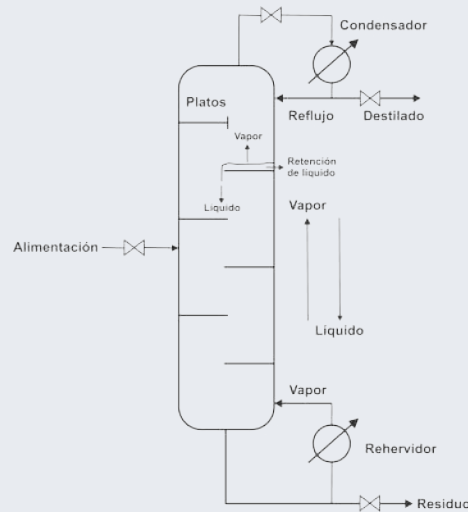


Figura 6.7: Representación de una columna de destilación con una sola alimentación.

El modelo matemático de una columna de destilación predice el comportamiento dinámico de la planta. Frecuentemente se establecen suposiciones que permiten simplificar la teoría, pero estas pueden ser poco realistas, especialmente cuando el comportamiento termodinámico de la mezcla a separar es complejo. El modelo también se complica cuando la configuración del proceso requiere de más de una unidad de destilación y las unidades se conectan entre ellas mediante corrientes de recirculación. Un modelo de columna de destilación se obtiene estableciendo balances de materia y energía, asociando los modelos de equilibrio termodinámico que predicen el cambio de fase y correlaciones hidráulicas para estimar la retención de líquido en los platos. Además, puede requerirse una corrección para tomar en cuenta la eficiencia de la columna, así como ecuaciones adicionales por fenómenos de transferencia de masa o reacciones si estos están presentes. Una alternativa para tratar el problema de modelado matemático de columnas de destilación es mediante técnicas de identificación de sistemas que conducen a modelos en caja gris o caja negra, basados en señales. Las variables de entrada y salida para un modelo reducido se eligen con base en análisis estáticos y dinámicos que apoyan la decisión de selección de las variables críticas que determinan y caracterizan de manera adecuada el comportamiento dinámico del sistema.

Se reporta aquí como caso de estudio, el modelo de un proceso de destilación que integra dos

columnas acopladas con corrientes de recirculación. La configuración del proceso se muestra en la Figura 6.8 y la obtención del modelo se describe en la referencia [11]. El proceso fue diseñado para separar una mezcla metanol-etanol-n-propanol en dos columnas acopladas *A* y *B*, la primera con 40 platos y segunda con 10 platos. Los condensadores de ambas columnas y el rehervidor de la columna *A* se cuentan como etapas, por lo tanto, es un proceso con un total de 53 etapas. El plato 22 es el plato de alimentación.

El estudio citado reportó un análisis fundamentado en un modelo dinámico no lineal. Como resultado se encontró que hay una gran interacción entre las variables y que las zonas más sensibles son aquellas en las que hay una mayor velocidad de transferencia de masa. El modelo no lineal fue útil para analizar el efecto de las entradas, la sensibilidad del proceso y para determinar que variables determinan la calidad de los productos. Por otro lado, con el propósito de contar con un modelo apropiado para diseño de control se formuló mediante identificación un modelo lineal reducido usando datos temporales. La atención se centra en un modelo orientado a la síntesis de controladores con el fin de reconocer la conveniencia de formular una representación reducida o simplificada a partir de consideraciones y análisis del comportamiento de la planta, que puede resultar más manejable para aplicar un gran número de técnicas de control y puede ser más exacto que un modelo no lineal basado en principios, al menos en una determinada región de operación.

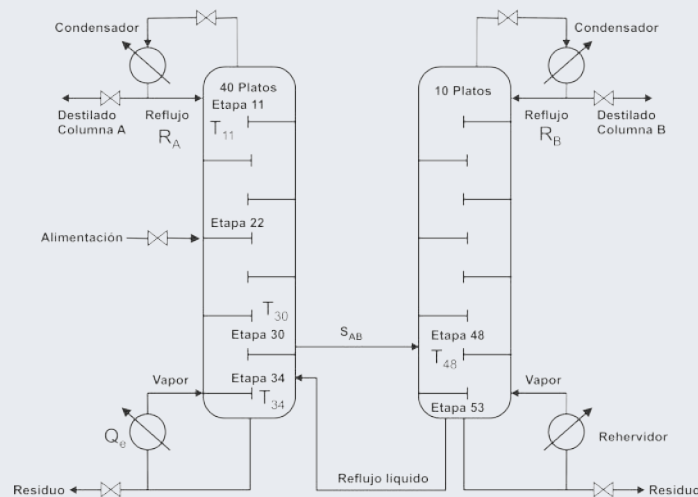


Figura 6.8: Representación de una columna de destilación .

Convencionalmente, un sistema de control de columna de destilación consiste en manipular el reflujo para regular la composición del destilado, mientras que el aporte de calor se utiliza para regular la composición del residuo. Sin embargo, en la práctica, los cambios en el reflujo afectan también a la composición del residuo y las variaciones de calor en el rehervidor tienen un efecto en la composición del destilado. Con el propósito de contar con un modelo apropiado para diseño de control se formuló mediante identificación un modelo lineal reducido. Las variables de control primario en una columna de destilación son las composiciones de los productos. Un modelo más conveniente que el no lineal para diseñar el sistema de control para la planta es un modelo reducido, en función de variables medibles que tienen un impacto importante en la concentración de los productos, y cuyo comportamiento es suficientemente sensible a las entradas del sistema.

Mediante una serie de simulaciones del proceso y mediciones experimentales en una planta fue posible determinar que la regulación de la concentración de los productos del sistema se puede asegurar mediante un control indirecto, manteniendo reguladas las temperaturas de los platos 11, 30, 34 (en la columna A) y 48 (en la columna B), denotadas como T_{11} , T_{30} , T_{34} , y T_{48} , respectivamente. La Figura 6.8 muestra el esquema de dos columnas acopladas.

La matriz de funciones de transferencia identificadas cuyos parámetros fueron estimados por mínimos cuadrados se muestra en la ecuación 6.15:

$$G_{2 \times 2}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) & G_{14}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) & G_{24}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) & G_{34}(s) \\ G_{41}(s) & G_{42}(s) & G_{43}(s) & G_{44}(s) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

con:

$$G_{11}(s) = \frac{2.6}{1.69s + 1},$$

$$G_{12}(s) = \frac{-6.98}{3.5s + 1},$$

$$G_{13}(s) = \frac{-4.99(0.2s + 1)}{(4.5s + 1)(0.06s + 1)},$$

$$G_{14}(s) = \frac{0.071}{3.5s + 1},$$

$$G_{21}(s) = \frac{7.32(1.05s + 1)}{(10.4s + 1)(0.14s + 1)},$$

$$G_{22}(s) = \frac{-1.45}{0.4s + 1},$$

$$G_{23}(s) = \frac{-1.57(0.23s + 1)}{(1.34s + 1)(0.2s + 1)},$$

$$G_{24}(s) = \frac{-0.14}{1.92s + 1},$$

$$G_{31}(s) = \frac{4.6(0.53s + 1)}{(2.78s + 1)(0.09s + 1)},$$

$$G_{32}(s) = \frac{-2.37(0.23s + 1)}{(2s + 1)(0.3s + 1)},$$

$$G_{33}(s) = \frac{-2.7}{1.75s + 1},$$

$$G_{34}(s) = \frac{-0.36(0.02s + 1)}{(2.47s + 1)(0.04s + 1)},$$

$$G_{41}(s) = \frac{2.11}{0.92s + 1},$$

$$G_{42}(s) = \frac{-2.11(0.06s + 1)}{(2.38s + 1)(0.05s + 1)},$$

$$G_{43}(s) = \frac{-1.75}{2.16s + 1},$$

$$G_{44}(s) = \frac{-0.3(1.89s + 1)}{(4.35s + 1)(0.16s + 1)}.$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} T_{11} - T_{11,eq} \\ T_{30} - T_{30,eq} \\ T_{34} - T_{34,eq} \\ T_{48} - T_{48,eq} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} Q_e - Q_{e,eq} \\ S_{AB} - S_{AB,eq} \\ R_A - R_{A,eq} \\ R_B - R_{B,eq} \end{bmatrix}$$

donde Q_e es el calor en el rehervidor, S_{AB} es el flujo de vapor que sale de A a B, R_A es el reflujo de la columna A, y R_B de la columna B. ■

6.5 Procesos de parámetros distribuidos

Ejercicio 6.6 — Supercapacitor . Se estudia un supercapacitor electroquímico de doble capa y geometría prismática. [16, 17]. Los supercapacitores son dispositivos que almacenan electricidad. Su densidad de energía (o capacidad de almacenamiento) es inferior a la de las baterías y celdas de combustible; en cambio, su densidad de potencia (rapidez de carga y descarga) es significativamente superior (ver Figura 6.9). Los supercapacitores de doble capa se cuentan entre los de mayor desarrollo, en comparación con otros tipos. Un módulo de supercapacitores es un arreglo en serie y paralelo de varias celdas con una geometría dada.

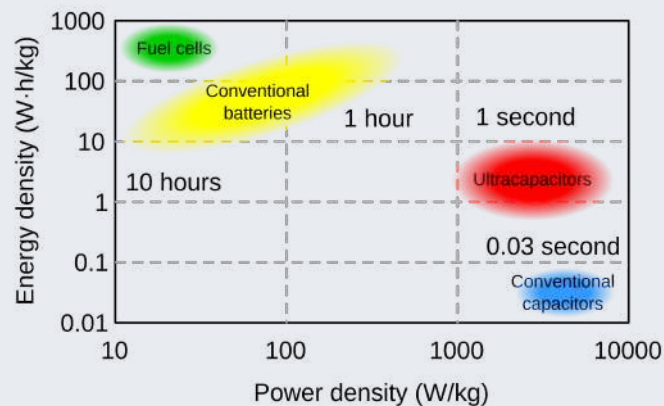


Figura 6.9: “Creative Commons. Diagrama de Ragone que muestra la densidad de energía frente a la densidad de potencia para varios dispositivos”. ©2021 por Grawiton utilizado bajo licencia Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Una celda de supercapacitor está formada por dos electrodos de carbono, entre los cuales está contenida una solución electrolítica. Los electrodos están separados entre sí por una matriz porosa aislante (separador) y están conectados a placas colectoras de corriente que se fabrican en aluminio. La Figura 6.10 muestra la distribución de iones en un supercapacitor descargado y cargado. El ciclo de carga inicia cuando se aplica potencial a los electrodos, conectando sus terminales positiva y negativa a una fuente de energía. En el electrodo negativo, el carbono se carga negativamente (es decir, los electrones se adsorben o adhieren en el carbono), como consecuencia, se genera un campo eléctrico cerca del electrodo que predispone la atracción de iones positivos y la repulsión de electrones. La acumulación de iones forma una doble capa de carga. Lo opuesto ocurre simultáneamente en el electrodo positivo, el electrodo adsorbe iones positivos que atraen electrones formando igualmente una doble capa de carga. La pequeña distancia entre las placas metálicas (del orden de nm) es la causa de que se genere un campo eléctrico muy intenso en donde se almacena la energía en forma de energía potencial y se trata de un almacenamiento de cargas electrostáticas. El ciclo de descarga en la celda inicia al conectar una carga. Los electrones son transportados a través de un circuito externo, provocando que en la interfase electrodo-electrolito exista un exceso de iones positivos, de tal forma que estos se repelen, permitiendo que la interfase regrese a su estado neutro cuando las cargas positivas y negativas se balancean.

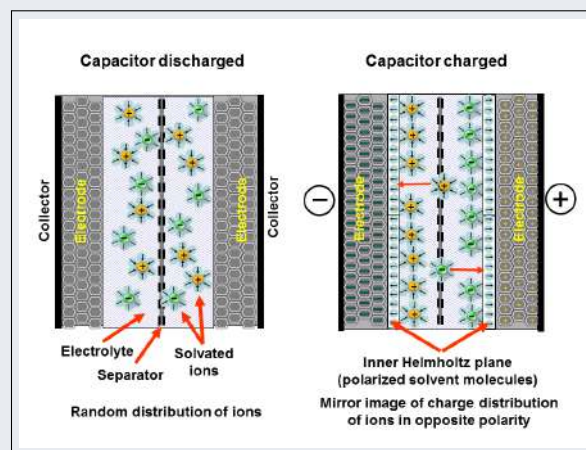


Figura 6.10: “Creative Commons. Distribución de iones en un supercapacitor descargado/cargado”. ©2013 por Elcap utilizado bajo licencia CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication.

Objetivo. Generar un modelo dinámico de parámetros distribuidos para predecir la evolución espacio-temporal de la diferencia de potencial interfacial en un supercapacitor electroquímico de doble capa. En función de la evolución temporal de este perfil, el modelo servirá para predecir el cambio temporal del voltaje en sus terminales ante variaciones de la demanda de corriente eléctrica en la carga conectada al supercapacitor.

Suposiciones de modelado. Las propiedades del supercapacitor se consideran constantes y distribuidas uniformemente, entre estas, la capacitancia específica, la concentración del electrolito, las conductividades de los materiales, la porosidad del electrodo, y la temperatura a través de la celda del supercapacitor. Por la geometría prismática del supercapacitor, la distribución de las variables solo se considera en la dirección axial x en coordenadas rectangulares, y se suponen uniformes en las otras direcciones.

Ecuación de difusión. El modelo electroquímico base combina la ley de Ohm, la ley de Faraday para reacciones electroquímicas, la ecuación de conservación de carga y la de polarización para obtener como salida el voltaje en las terminales del SCDC, V_{cap} . La salida depende de los potenciales electroquímicos Φ de la fase sólida y del sustrato líquido del electrolito. La densidad de corriente i está implícita en la definición de Φ , y la densidad de flujo iónico interfacial j_n aparece de manera explícita en la ecuación de polarización. La señal de entrada en el modelo es la corriente demandada por la carga I_{cap} . Uno de los objetivos en [17] fue reformular el modelo electroquímico base para expresarlo en la forma común de la ley de difusión o ley de Fick (ver Sección 1.3.1). El modelo replanteado representa el transporte de cargas o difusión eléctrica como un fenómeno análogo al transporte por difusión de masa. El modelo de difusión eléctrica que obtuvieron fue desarrollado para uno de los electrodos, ya que se consideraron ciclos de carga y descarga simétricos. Esta suposición implica que el potencial interfacial de los electrodos tiene el mismo valor, pero de signo opuesto, por lo tanto, la variable dinámica del modelo se definió como la diferencia de potencial electrostático interfacial para el electrodo positivo:

$$\eta_p = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (6.16)$$

La EDP (6.17) fue derivada en coordenadas rectangulares, tomando en cuenta la variación de η_p únicamente en la dirección axial x . Este modelo se establece como un problema de Cauchy bien condicionado con condiciones de frontera bien definidas. Su solución da la evolución en el tiempo t , del perfil de la diferencia de potencial electrostático η_p , a lo largo de la dirección normalizada entre $[0, 1]$, \tilde{x} ($x = \delta\tilde{x}$). La entrada del modelo es I_{cap} , y la salida es el Voltaje en las terminales del SCDC V_{cap} .

$$\frac{\partial \eta_p}{\partial t} = \frac{D_e}{\delta^2} \frac{\partial^2 \eta_p}{\partial \tilde{x}^2} \quad (6.17a)$$

$$\left. \frac{\partial \eta_p}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=0} = \frac{-\delta I_{cap}}{\sigma A} \quad (6.17b)$$

$$\left. \frac{\partial \eta_p}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=1} = \frac{-\delta I_{cap}}{\kappa A} \quad (6.17c)$$

$$V_{cap} = \frac{2\kappa}{\kappa + \sigma} \eta_p(\tilde{x}=0) + \frac{2\sigma}{\kappa + \sigma} \eta_p(\tilde{x}=1) + \left(\frac{2\delta}{\kappa + \sigma} + \frac{\delta_z}{\kappa_z} \right) I_{cap} A \quad (6.17d)$$

con

$$D_e = \frac{\kappa\sigma}{aC_{dl}(\kappa + \sigma)} \quad (6.18)$$

Los parámetros del modelo son el espesor del electrodo δ , la conductividad efectiva del electrolito κ , la conductividad efectiva del separador κ_z , la conductividad global de la fase sólida σ , el área transversal del SCDC A , y la difusividad eléctrica del electrodo D_e que se calcula en función de las conductividades y de la capacitancia específica C_{dl} .

Ejercicio 6.7 — Regenerador de calor. Se estudia un ciclo de calentamiento de un regenerador de energía de lecho empacado. Un regenerador de energía es un intercambiador de calor compacto gas-sólido, en el que la energía térmica de un fluido caliente se acumula intermitentemente en un medio de almacenamiento térmico antes de ser transferido al fluido frío. El fluido caliente transfiere su calor a una matriz sólida, mientras que el fluido frío circula a través de una segunda matriz que está caliente y absorbe su calor. A continuación, se invierten los sentidos de las corrientes frías y calientes llevando a cabo los intercambios de calor opuestos en el sólido. Estas operaciones se repiten continuamente [2]. Sus principales aplicaciones son procesos en los que se encuentran grandes gradientes de temperatura, como ocurre en la industria criogénica o refrigeración regenerativa; grandes flujos de gas como en la industria metalúrgica; gases sucios que obstruyen conductos o tuberías como pasa en centrales térmicas; o gases extremadamente calientes o reactivos como en la industria del vidrio [13]. Los regeneradores también son elementos clave en procesos como la síntesis de Fisher-Trop, motores Stirling y otras plantas con almacenamiento de energía solar [3, 15, 25].

Objetivo. Obtener un modelo dinámico con parámetros distribuidos para predecir la evolución espacio-temporal de la temperatura del gas que atraviesa el lecho empacado del regenerador de calor, así como la evolución temporal de la temperatura de la matriz sólida. El modelo en EDP que se presenta corresponde a un periodo de calentamiento.

Suposiciones de modelado. Se deduce la evolución temporal de la temperatura del gas y de la matriz sólida. La velocidad del gas depende del progreso de temperatura en ambas fases. Para el estudio del sistema se supone una geometría cilíndrica del lecho. Se considera únicamente la distribución axial (en el eje x) de la temperatura del gas y de la velocidad del gas, y por lo tanto se desprende que estas variables son uniformes en las otras direcciones. También se supone una distribución uniforme de la temperatura del sólido en todas las direcciones. La fase gas se presume compresible y la capacitancia calorífica se calcula como una función de la temperatura del gas. Se considera que el coeficiente de transferencia de calor por convección es elevado y constante. El gas que circula por el regenerador se trata como un gas ideal a presión constante.

Modelo en EDP con propiedades constantes. El modelo matemático que rige el comportamiento térmico de un regenerador de calor se obtiene asentando los balances de energía para las fases gas y sólida, de manera que se observen las suposiciones establecidas antes y se tomen en cuenta las propiedades del medio poroso.

Balance de energía en la fase gas. El balance de energía de la ecuación 1.41 es aplicado a la fase gas que circula a través de la matriz sólida del regenerador, pudiendo reescribirlo como sigue en coordenadas cilíndricas 1D:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio de} \\ \text{energía total en el} \\ \text{sistema a P constante.} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Entalpía de entrada} \\ \text{por convección y} \\ \text{y debida al flujo.} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Entalpía de salida} \\ \text{por convección y} \\ \text{y debida al flujo.} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Calor transferido por convección} \\ \text{del gas a la matriz sólida.} \end{array} \right\} \quad (6.19)$$

Del enunciado 6.19 se deriva la forma matemática del balance de energía para el volumen de control $A\Delta x$, obteniendo la ecuación 6.20.

$$\frac{\partial (\varepsilon \rho A H_g \Delta x)}{\partial t} = \rho u A H_g|_x - \rho u A H_g|_{x+\Delta x} - h a_p A \Delta x. \quad (6.20)$$

donde ε es la porosidad del lecho empacado, $a_p = 3(1 - \varepsilon)/R$ es la superficie externa por unidad de volumen del lecho empacado con partículas esféricas, R es el radio de la partícula esférica, A es el área transversal del lecho, ρ es la densidad del gas, h es el coeficiente de transferencia de calor, u es la velocidad con la que el gas circula por el regenerador, y H_g es la entalpía del gas. El calor transferido del gas a la matriz sólida en el volumen de control es $Q_{tr} = h a_p \Delta T = h a_p (T_g - T_s)$. Al dividir 6.20 entre Δx , considerando el límite cuando $\Delta x \rightarrow \infty$, y reorganizando se obtiene la EDP (6.21) que representa el comportamiento de la temperatura del gas en función del tiempo y de la posición axial en el lecho empacado $T_g(t, x)$, con sus respectivas condiciones inicial y de frontera:

$$\varepsilon \rho C_p \frac{\partial T_g}{\partial t} = -\rho u C_p \frac{\partial T_g}{\partial x} - h a_p (T_g - T_s)$$

$$\frac{\varepsilon}{u} \frac{\partial T_g}{\partial t} = -\frac{\partial T_g}{\partial x} - \frac{h a_p}{\rho u C_p} (T_g - T_s), \quad (6.21a)$$

$$T_g(0, x) = T_{g0}, \quad (6.21b)$$

$$T_g(t, 0) = T_{ge}. \quad (6.21c)$$

Balance de energía en el sólido. La ecuación 1.41 aplicada a la matriz sólida puede reescribirse como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidad de cambio de} \\ \text{energía en el sólido.} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Entrada de energía} \\ \text{calorífica debido a} \\ \text{la conducción.} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Salida de energía} \\ \text{calorífica debido a} \\ \text{la conducción.} \end{array} \right\} \quad (6.22)$$

El balance de energía 6.22 aplicado al volumen de control en coordenadas esféricas 1D para una partícula que forma parte de la matriz sólida, se expresa en forma matemática mediante la ecuación 6.23.

$$\frac{\partial (\rho_s C_p A T_s \Delta x)}{\partial t} = - (q_k|_r - q_k|_{r+\Delta r}) \quad (6.23)$$

donde q_k es el calor de conducción en una partícula esférica de la matriz sólida (definido por la ley de Fourier, ecuación (1.59) de la Sección 1.3.1); $k_{eff}/(\rho_s C_p)$ es la difusividad térmica efectiva del sólido, y r es el radio de la partícula. Para una difusividad efectiva k_{eff} constante, dividiendo (6.23) entre Δr , aplicando el límite cuando $\Delta r \rightarrow \infty$, y reorganizando se obtiene la EDP (6.24). La ecuación resultante dicta el comportamiento transitorio de la temperatura en el interior de una esfera de radio R en la que el calor se distribuye a lo largo del radio r por conducción. Las esferas de la

matriz sólida son no isotérmicas y el perfil de temperatura espacial resultante evoluciona con el tiempo. Por lo tanto, la solución de la EDP es una función $T_s(t, r)$.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) = \frac{\rho_s C p_s}{k_{eff}} \frac{\partial T_s}{\partial t}. \quad (6.24)$$

En la frontera cuando $r = R$, para todo tiempo t , el calor es transferido de entre la superficie externa de la partícula y el gas en circulación; considerando que la transferencia es instantánea, el término de acumulación se anula y se cumple el balance de energía 6.25. Bajo estas condiciones, la temperatura de la esfera depende de la difusividad térmica efectiva de las esferas apiladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entrada de energía} \\ \text{calorífica por unidad} \\ \text{de volumen, debido} \\ \text{a la conducción} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Salida de energía} \\ \text{calorífica por unidad} \\ \text{de volumen, debido} \\ \text{a la conducción} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Calor transferido por} \\ \text{convección del gas a} \\ \text{la matriz sólida.} \end{array} \right\} \quad (6.25)$$

La expresión matemática 1D para la temperatura de una partícula esférica se obtiene de (6.25), nuevamente suponiendo una conductividad efectiva del material sólido constante:

$$k_{eff} a_p \frac{\partial T_s}{\partial r} = h a_p (T_g - T_s)$$

Rearreglando:

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} = \frac{h a_p}{k_{eff} a_p} (T_g - T_s) \quad (6.26)$$

En la frontera cuando $r = 0$, para todo tiempo t se cumple que:

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} = 0. \quad (6.27)$$

Modelo adimensional. Agrupando parámetros, la ecuación 6.28 define la EDP de la fase gas y las ecuaciones en términos de números adimensionales y variables adimensionales.

$$\frac{\partial \theta_g}{\partial \tau} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(-\frac{\partial \theta_g}{\partial z} - St(\theta_g - \theta_s) \right), \quad (6.28a)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^2 \frac{\partial \theta_s}{\partial \beta} \right), \quad (6.28b)$$

$$\theta_g(0, z) = \theta_{g0}, \quad (6.28c)$$

$$\theta_s(0, \beta) = \theta_{s0}, \quad (6.28d)$$

$$\theta_g(t, 0) = \theta_{ge}, \quad (6.28e)$$

$$\frac{\partial \theta_s(t, 0)}{\partial \beta} = 0, \quad (6.28f)$$

$$\frac{\partial \theta_s(t, 1)}{\partial \beta} = Bi(\theta_g - \theta_h). \quad (6.28g)$$

Los números adimensionales son:

$$\text{Número de Stanton : } St = \frac{ha_p}{\rho u C_p}, \quad (6.29a)$$

$$\text{Número de Biot : } Bi = \frac{hR}{k_{eff}} \quad (6.29b)$$

$$\text{Número de Fourier : } Fo = \frac{k_{eff}}{\rho_s C_p R^2} t \quad (6.29c)$$

Las variables adimensionales son:

$$\text{Posición adimensional : } z = \frac{x}{L} \quad (6.30a)$$

$$\text{Tiempo adimensional : } \tau = Fo = \frac{k_{eff}}{\rho_s C_p R^2} t \quad (6.30b)$$

$$(6.30c)$$

Además:

$$\tau_1 = \frac{u}{\varepsilon},$$

$$\tau_2 = \frac{k_{eff}}{\rho_s C_p R^2}.$$

Las temperaturas adimensionales son:

Para periodo de calentamiento:

$$\text{Gas: } \theta_g = \frac{T_g - T_{s0}}{T_{ge} - T_{s0}} \quad (6.31a)$$

$$\text{Sólido: } \theta_s = \frac{T_s - T_{s0}}{T_{ge} - T_{s0}}. \quad (6.31b)$$

$$(6.31c)$$

Para periodo de enfriamiento:

$$\text{Gas: } \theta_g = \frac{T_g - T_{ge}}{T_{s0} - T_{ge}}, \quad (6.32a)$$

$$\text{Sólido: } \theta_g = \theta_s = \frac{T_s - T_{ge}}{T_{s0} - T_{ge}}. \quad (6.32b)$$

$$(6.32c)$$

Modelo en EDP con propiedades dependientes de la temperatura. El modelo [35]

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon L} \left[u \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{ha_p L}{\rho u C_p} (T_g - T_s) \right] \quad (6.33a)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{ha_p}{(1 - \varepsilon) \rho_s C_{ps}} (T_g - T_s) \quad (6.33b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{Rha_p L}{PM_w C_p} (T_g - T_s) \quad (6.33c)$$

$$T_g|_{t=0,z} = T_{g,0} \quad (6.33d)$$

$$T_s|_{t=0,z} = T_{s,0} \quad (6.33e)$$

$$T_g|_{t,z=0} = T_{g,e} \quad (6.33f)$$

$$u|_{t,z=0} = u_e \quad (6.33g)$$

$$(6.33h)$$

Propiedades del aire en función de la temperatura. El modelo [19]

Densidad.

La densidad del aire puede ser calculada mediante la ecuación de los gases ideales (6.34) dependiendo de la presión P , la temperatura T y la constante de los gases ideales $R = 8.3145 \text{ [J mol}^{-1} \text{K}^{-1}]$ en unidades SI:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (6.34)$$

La correlación empírica 6.35 permite calcular la densidad en función únicamente de la temperatura T . En esta ecuación, la densidad está dada en unidades de kg m^{-3} , el cálculo necesita la temperatura en K. La correlación es válida en el rango $[273 - 1300] \text{ K}$.

$$\rho = \frac{351.99}{T} + \frac{344.84}{T^2} \quad (6.35)$$

Una correlación para calcular la densidad ρ de aire húmedo (6.36) está dada en función de la temperatura T medida en K, la presión P en Pa, la fracción molar de vapor de agua en el aire x_w , y el factor de compresibilidad Z que se calcula mediante la correlación (6.37) en términos de la temperatura medida en $^{\circ}\text{C}$. La densidad ρ que resulta del cálculo tiene unidades de kg m^{-3} .

$$\rho = [3.48349 + 1.44(x_c - 0.0004)] \times 10^{-3} \frac{P}{ZT} (1 - 0.378x_w) \quad (6.36)$$

$$Z = 1 - \frac{P}{T} [a_0 + a_1T + a_2T^2 + (a_3 + a_4T)x_w + (a_5 + a_6T)x_w^2] \quad (6.37)$$

Calor específico a presión constante.

La correlación para calcular el calor específico a presión constante C_p de aire seco (6.38) está dada en unidades de $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$, y requiere la entrada de temperatura en K. La correlación es válida en el rango $[273 - 1100]$ K.

$$C_p = R(a_1T_g^{-2} + a_2T_g^{-1} + a_3 + a_4T_g + a_5T_g^2 + a_6T_g^3 + a_7T_g^4) \quad (6.38)$$

Los parámetros de la correlación están definidos en (6.39):

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.009950160 \times 10^4 \\ a_2 &= -1.968275610 \times 10^2 \\ a_3 &= 5.009155110 \\ a_4 &= -5.761013730 \times 10^{-3} \\ a_5 &= 1.066859930 \times 10^{-5} \\ a_6 &= -7.940297970 \times 10^{-9} \\ a_7 &= 2.185231910 \times 10^{-12} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Una correlación que permite calcular el coeficiente específico a presión constante C_p de aire húmedo (6.40) está dada en función de la temperatura (en K) y la fracción molar de vapor de agua en el aire. El C_p que resulta del cálculo tiene unidades de $\text{cal g}^{-1} \text{K}^{-1}$ (1 cal = 4.1868 J).

$$\begin{aligned} C_p &= a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + (a_4 + a_5T + a_6T^2)x_w \\ &\quad + (a_7 + a_8T + a_9T^2)x_w^2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Los parámetros de la correlación están definidos en (6.41):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0.251625 \\
 a_1 &= -9.2525 \times 10^{-5} \\
 a_2 &= -2.1334 \times 10^{-7} \\
 a_3 &= -1.0043 \times 10^{-10} \\
 a_4 &= 0.12477 \\
 a_5 &= -2.283 \times 10^{-5} \\
 a_6 &= 1.267 \times 10^{-7} \\
 a_7 &= 0.01116 \\
 a_8 &= 4.61 \times 10^{-6} \\
 a_9 &= 1.74 \times 10^{-8}
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

Viscosidad.

La correlación para calcular la viscosidad dinámica μ de aire (6.42) está dada en unidades de Ns m^{-2} , y requiere la entrada de temperatura en K. La correlación es válida en el rango [273 – 1300] K. :

$$\mu = a \left(\frac{T^{1.5}}{C+T} \right) \left(1 + 1.53 \times 10^4 \left(\frac{T}{C} - 1 \right)^2 \right) \tag{6.42}$$

donde $a = 1.47 \times 10^{-6}$ y $C = 113$.

Una correlación que permite calcular la viscosidad efectiva μ de aire húmedo (6.43) está dada en función de la temperatura (en K) y la fracción molar de vapor de agua en el aire. El valor que resulta del cálculo tiene unidades de Pa s.

$$\mu = (a_0 + a_1 T + (a_2 + a_3 T) x_w + a_4 T^2 + a_5 x_w^2) \times 10^8 \tag{6.43}$$

Los parámetros de la correlación están definidos en (6.44):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 84.986 \\
 a_1 &= 7.0 \\
 a_2 &= 113.157 \\
 a_3 &= -1 \\
 a_4 &= 113.157 \times 10^{-3} \\
 a_5 &= -100.015 \\
 a_6 &= 1.267 \times 10^{-7}
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Conductividad térmica.

Una ecuación teórica para calcular la conductividad del aire k deriva de la teoría cinética de los gases. $\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

$$k = \frac{1}{3} (c_v \rho v \lambda_{mfp}) \quad (6.45)$$

donde c_v , v es la velocidad molecular media, λ_{mfp} es la trayectoria libre media que se define de la siguiente manera:

$$\lambda_{mfp} = k_b \frac{T}{1.414 \pi d^2 P}$$

donde k_b es la constante de Boltzmann, d es el diámetro de la molécula de gas y P es la presión.

Una correlación que permite calcular la conductividad térmica μ de aire húmedo (6.46) está dada en función de la temperatura (en K) y la fracción molar de vapor de agua en el aire. El valor que resulta del cálculo tiene unidades de cal g^{-1} .

$$k = (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + (a_3 + a_4 T) x_w) \times 10^8 \quad (6.46)$$

Los parámetros de la correlación están definidos en (6.47):

$$\begin{aligned} a_0 &= 60.054 \\ a_1 &= 1.846 \\ a_2 &= 2,06 \times 10^{-6} \\ a_3 &= 40 \\ a_4 &= -1,775 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Número de Nusselt.

El coeficiente de transferencia de calor por convección h se puede calcular mediante la correlación semi-empírica propuesta por Kunii and Levenspiel, 1979.

$$\text{Nu} = 2 + 1.8 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} \quad (6.48)$$

Los grupos adimensionales se definen en (6.49):

$$\text{Número de Nusselt: } \text{Nu} = \frac{hd_p}{k}, \quad (6.49a)$$

$$\text{Número de Reynolds: } \text{Re} = \frac{a_p u \rho}{\mu}, \quad (6.49b)$$

$$\text{Número de Prandtl: } \text{Pr} = \frac{C_p \mu}{k}, \quad (6.49c)$$



7. Problemas | Simulación de procesos

7.1 Procesos de parámetros concentrados

Ejercicio 7.1 [Modelado y simulación numérica de un sistema de tanques Inteco con área transversal variable] El **objetivo general** del Ejercicio es construir herramientas para la simulación numérica del comportamiento no lineal y lineal de un módulo experimental de un sistema multitanque que está formado por tres tanques en serie, dos de los cuales tienen áreas transversales variables. El prototipo didáctico ha sido considerado como planta para probar una amplia variedad de esquemas de control que se han reportado en la literatura. El modelo no lineal utilizado en diferentes fuentes [1, 9, 18, 24] fue presentado con detalle en el Ejercicio 6.2. Los valores de los parámetros del módulo Inteco están contenidos en el vector θ (7.1).

$$\theta = \begin{bmatrix} w \\ a \\ b \\ c \\ R \\ h_{1,\max} \\ h_{2,\max} \\ h_{3,\max} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.035 \\ 0.250 \\ 0.348 \\ 0.100 \\ 0.364 \\ 0.35 \\ 0.35 \\ 0.35 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Profundidad de los tanques, m} \\ \text{Ancho de } T_1, \text{ m} \\ \text{Sumado con } c \text{ es el ancho de } T_2, \text{ m} \\ \text{Sumado con } b \text{ es el ancho de } T_2, \text{ m} \\ \text{Radio de } T_3, \text{ m} \\ \text{Altura máxima de } T_1, \text{ m} \\ \text{Altura máxima de } T_2, \text{ m} \\ \text{Altura máxima de } T_3, \text{ m} \\ \text{Parámetro para válvula en } T_1, \text{ adim.} \\ \text{Parámetro para válvula en } T_2, \text{ adim.} \\ \text{Parámetro para válvula en } T_3, \text{ adim.} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Modelado del sistema multitanques. Puntos de equilibrio y linealización del modelo no lineal. Una entrada \mathbf{u}_{eq} al sistema 6.12 produce un estado \mathbf{x}_{eq} y una salida \mathbf{y}_{eq} , que en conjunto con los parámetros fijos θ y considerando la condición $d\mathbf{x}/dt = 0$ definen un **punto de equilibrio** eq . Considere específicamente las entradas \mathbf{u}_{eq1} (7.2) y \mathbf{u}_{eq2} (7.3), además del flujo del líquido

suministrado por la bomba, el conjunto de entrada incluye las constantes de los orificios de drenaje de las válvulas, los cuales se determinan experimentalmente directamente a partir de mediciones en el prototipo. Para $eq1$, las constantes del orificio de drenaje fueron estimadas experimentalmente y reportadas en el manual del prototipo didáctico [37]. Para $eq2$ se consideran coeficientes de orificios de drenaje obtenidos mediante experimentación y reportados por Hosokawa y col. en [9].

$$\mathbf{u}_{eq1} = \begin{bmatrix} u_{1,eq1} \\ u_{2,eq1} \\ u_{3,eq1} \\ u_{4,eq1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{eq1} \\ C_{1,eq1} \\ C_{2,eq1} \\ C_{3,eq1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.795 \times 10^{-5} \\ 1.0053 \times 10^{-4} \\ 1.1959 \times 10^{-4} \\ 9.79865 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Flujo volumétrico, m}^3\text{s}^{-1} \\ \text{Resistencia en orificio de salida 1, m}^{3-\alpha_1}\text{s}^{-1} \\ \text{Resistencia en orificio de salida 2, m}^{3-\alpha_2}\text{s}^{-1} \\ \text{Resistencia en orificio de salida 3, m}^{3-\alpha_3}\text{s}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{eq2} = \begin{bmatrix} u_{1,eq2} \\ u_{2,eq2} \\ u_{3,eq2} \\ u_{4,eq2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{eq2} \\ C_{1,eq2} \\ C_{2,eq2} \\ C_{3,eq2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \times 10^{-4} \\ 2.97 \times 10^{-4} \\ 2.77 \times 10^{-4} \\ 2.90 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Las variables de estado y de salida \mathbf{x}_{eq1} , \mathbf{y}_{eq1} , \mathbf{x}_{eq2} , y \mathbf{y}_{eq2} correspondientes a \mathbf{u}_{eq1} y \mathbf{u}_{eq2} , respectivamente, son calculadas tomando $d\mathbf{x}/dt = 0$. Bajo esta consideración el modelo 6.12 se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas, cuya solución es el punto de equilibrio. Este procedimiento se simplifica usando la función `trim` (descrita en la Sección 2.2.3). Después se obtiene el modelo lineal alrededor del punto de equilibrio. Es posible linealizar el modelo 6.12 mediante los siguientes procedimientos:

1. El modelo lineal explícito se obtiene usando la expansión de la serie de Taylor alrededor de un punto de equilibrio. El modelo lineal en espacio de estados del sistema multitanques fue desarrollado y presentado en el Ejercicio 6.2. La ecuación resultante (6.13) escrita en forma matricial es el modelo linealizado del sistema multitanques. Después, el modelo lineal numérico se obtiene sustituyendo los parámetros en función de las constantes geométricas y del punto de equilibrio.
2. El segundo procedimiento conduce al mismo resultado, este consiste en implementar las función `linmod` (Sección 2.2.4) como se describe a continuación.

Determinación de los puntos de equilibrio con la función `trim`. Se construye el modelo no lineal, por ejemplo, mediante una S-Function. La Figura 7.1 muestra el modelo no lineal del sistema multitanques implementado en la plataforma Simulink®. Se usan puertos de entrada y salida para ser llamados desde las funciones `trim` y `linmod`. El código de la S-Function llamada `Multitanks_SFun` se presenta al final del ejercicio.

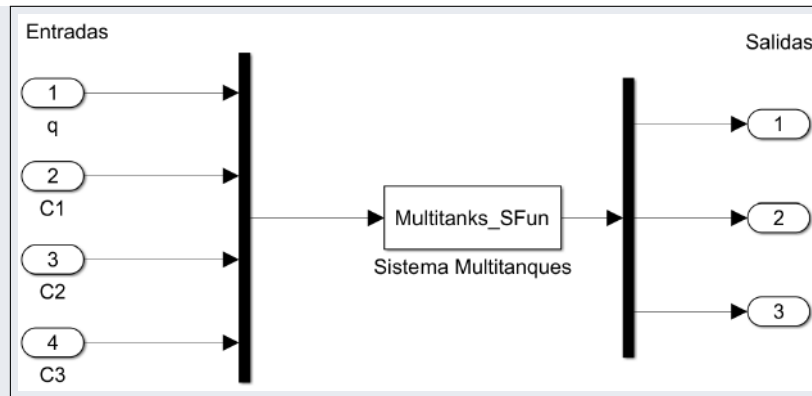


Figura 7.1: Modelo no lineal del sistema multitanques Inteco implementado en Simulink®.

La función `trim` calcula el punto de equilibrio llamando al modelo no lineal. El código también se muestra al final del ejercicio para el punto de equilibrio $eq1$, para el segundo punto solo se cambian las entradas de \mathbf{u}_{eq1} a \mathbf{u}_{eq2} . Los resultados del programa están dados en (7.4) y (7.5):

$$\mathbf{x}_{eq1} = \mathbf{y}_{eq1} = \begin{bmatrix} x_{1,eq1} \\ x_{2,eq1} \\ x_{3,eq1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,eq1} \\ h_{2,eq1} \\ h_{3,eq1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1425 \\ 0.1007 \\ 0.1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Nivel en el tanque 1, m} \\ \text{Nivel en el tanque 2, m} \\ \text{Nivel en el tanque 3, m} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{x}_{eq2} = \mathbf{y}_{eq2} = \begin{bmatrix} x_{1,eq2} \\ x_{2,eq2} \\ x_{3,eq2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,eq2} \\ h_{2,eq2} \\ h_{3,eq2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07256 \\ 0.08341 \\ 0.07610 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

La función `linmod` también necesita como información el modelo no lineal y el punto de equilibrio. La salida puede ser un modelo en espacio de estados o una función de transferencia. El código del programa `MultitanksLin` está disponible igualmente al final del ejercicio. Como salida se obtienen los siguientes modelos:

El modelo en espacio de estados de la planta es la ecuación (7.6):

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}\mathbf{u}_d \quad (7.6a)$$

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{C}\mathbf{x}_d + \mathbf{D}\mathbf{u}_d \quad (7.6b)$$

Las matrices de los modelos obtenidos alrededor de los puntos de equilibrio $eq1$ y $eq2$ se escriben a continuación:

$$\mathbf{A}_{eq1} = \begin{bmatrix} -0.015217 & 0 & 0 \\ 0.019010 & -0.026902 & 0 \\ 0 & 0.018284 & -0.012275 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{eq1} = \begin{bmatrix} 114.290 & -43.143 & 0 & 0 \\ 0 & 53.895 & -45.305 & 0 \\ 0 & 0 & 30.792 & -37.581 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_{eq2} = \begin{bmatrix} -0.063006 & 0 & 0 \\ 0.086105 & -0.074899 & 0 \\ 0 & 0.061516 & -0.067426 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{eq2} = \begin{bmatrix} 114.290 & -30.784 & 0 & 0 \\ 0 & 42.07 & -45.107 & 0 \\ 0 & 0 & 37.048 & -35.387 \end{bmatrix}.$$

En ambos casos:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}_{3 \times 4}$$

y las condiciones iniciales son $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

La función de transferencia de la planta MIMO es la ecuación (7.7) que tiene la estructura de un proceso en serie, donde la salida de una unidad afecta la entrada de la siguiente, pero lo contrario no ocurre:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & 0 & 0 \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{24}(s) & 0 \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) & G_{34}(s) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

El modelo aplicable alrededor del punto de equilibrio *eq1* tiene los siguientes componentes:

$$G_{11}(s) = \frac{114.3}{s + 0.01522}, \quad (7.8a)$$

$$G_{12}(s) = \frac{-43.14}{s + 0.01522}, \quad (7.8b)$$

$$G_{21}(s) = \frac{2.173}{s^2 + 0.04212s + 0.004094}, \quad (7.9a)$$

$$G_{22}(s) = \frac{53.89s}{s^2 + 0.04212s + 0.0004094}, \quad (7.9b)$$

$$G_{23}(s) = \frac{-45.31}{s + 0.0269}, \quad (7.9c)$$

$$G_{31}(s) = \frac{0.03972}{s^3 + 0.05439s^2 + 0.0009264s + 5,05 \times 10^{-6}}, \quad (7.10a)$$

$$G_{32}(s) = \frac{0.9854s - 1.709 \times 10^{18}}{s^2 + 0.04212s + 0.0004094}, \quad (7.10b)$$

$$G_{33}(s) = \frac{30.79s + 3.499 \times 10^{-9}}{s^2 + 0.03918s + 0.0003302}, \quad (7.10c)$$

$$G_{34}(s) = \frac{-37.58}{s + 0.01227}. \quad (7.10d)$$

El modelo aplicable alrededor del punto de equilibrio $eq2$ tiene los siguientes componentes:

$$G_{11}(s) = \frac{114.3}{s + 0.06301}, \quad (7.11a)$$

$$G_{12}(s) = \frac{-30.78}{s + 0.06301}, \quad (7.11b)$$

$$G_{21}(s) = \frac{9.841}{s^2 + 0.1379s + 0.004719}, \quad (7.12a)$$

$$G_{22}(s) = \frac{42.07s + 2.919 \times 10^{-16}}{s^2 + 0.1379s + 0.004719}, \quad (7.12b)$$

$$G_{23}(s) = \frac{-45.11}{s + 0.0749}, \quad (7.12c)$$

$$G_{31}(s) = \frac{0.6054}{s^3 + 0.2053s^2 + 0.01402s + 0.0003182}, \quad (7.13a)$$

$$G_{32}(s) = \frac{2.588s - 1.796 \times 10^{-17}}{s^3 + 0.2053s^2 + 0.01402s + 0.0003182}, \quad (7.13b)$$

$$G_{33}(s) = \frac{37.05s - 6.433 \times 10^{-8}}{s^2 + 0.1423s + 0.00505}, \quad (7.13c)$$

$$G_{34}(s) = \frac{-35.39}{s + 0.06743}. \quad (7.13d)$$

El modelo lineal se escribe en términos de las variables de desviación, y en este caso, las condiciones iniciales son $\mathbf{x}(0) = 0$.

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ x_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - h_{1,eq} \\ h_2 - h_{2,eq} \\ h_3 - h_{3,eq} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ u_{d3} \\ u_{d4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - q_{eq} \\ C_1 - C_{1eq} \\ C_2 - C_{2eq} \\ C_3 - C_{3eq} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Código de la S-Function Multitanks_SFun

```

1
2     function [sys,x0,str,ts]=Multitanks_SFun(t,x,u,flag,x0)
3
4     % Resuelve el modelo no lineal de un sistema multitankues
5     % con areas transversales variables.
6
7     switch flag
8     case 0                                % Inicializacion de la funcion-S
9     sizes=simsizes;                       % Estructura de inicializacion
10    sizes.NumContStates=3;                % Numero de estados continuos
11    sizes.NumDiscStates=0;               % Numero de estados discretos
12    sizes.NumOutputs=3;                  % Numero de salidas
13    sizes.NumInputs=4;                   % Numero de entradas
14    sizes.DirFeedthrough=0;              % 1 si y depende algebraicamente de u
15    sizes.NumSampleTimes=1;              % Numero de muestras de tiempo
16    sys=simsizes(sizes);                 % Inicializa la S-Funcion.
17
18    str=[];
19    ts=[0 0];
20
21    case 1 % Derivadas
22    h1=x(1);
23    h2=x(2);
24    h3=x(3);
25
26    % Entradas
27
28    q=u(1);
29    C1=u(2);
30    C2=u(3);
31    C3=u(4);
32
33    % Parametros
34
35    w=0.035;
36    a=0.250;
37    b=0.348;
38    c=0.100;
39    R=0.364;
40    h1max=0.35;
41    h2max=0.35;
42    h3max=0.35;
43    alpha1=0.5;
44    alpha2=0.5;
45    alpha3=0.5;
46
47
48    % Ecuaciones diferenciales
49
50    betal=a*w;
51    beta2=c*w+(h2/h2max)*b*w;
52    beta3=w*(R^2-(R-h3)^2)^(0.5);

```

```

53
54     dh1dt=(1/beta1)*(q-C1*h1^alpha1);
55     dh2dt=(1/beta2)*(C1*h1^alpha1-C2*h2^alpha2);
56     dh3dt=(1/beta3)*(C2*h2^alpha2-C3*h3^alpha3);
57
58     sys=[dh1dt;dh2dt;dh3dt];
59
60     case 3 % salidas
61
62     sys=[x(1);x(2);x(3)];
63
64     case {2, 4, 9} % Actualizacion de estados, proximo hit,
        finalizacion
65
66     sys=[];
67
68     otherwise
69     error(['unhanled flag=',num2str(flag)]);
70
71     end

```

Código de la S-Function **Multitanks_SFun**

```

1     clear
2
3     % "Multitanks.slx" es el modelo no lineal del sistema en Simulink
4     % Calculo del punto de equilibrio x, y para una entrada u
5
6     n=3;
7     m=4;
8     x0=[];
9     u0=[3.795e-5; 1.0053e-4; 1.1959e-4; 9.79865e-5];
10    y0=x0;
11    ix=[];
12    iu=[1;2;3;4];
13    iy=[];
14
15    [x,u,y,dx]=trim('Multitanks',x0,u0,y0,ix,iu,iy)
16    ,
17    % Linealizacion del modelo del sistema.
18    % Se obtiene el modelo en espacio de estados,
19    % Como resultado se despliegan las matrices A,B,C,D.
20
21    [A,B,C,D]=linmod('Multitanks',x,u)
22    Tanksve=ss(A,B,C,D)
23
24    % Modelo de funcion de transferencia MIMO
25    % Como resultado se despliegan los componentes de una
26    % matriz de funciones de transferencia
27
28    G=tf(Tanksve)

```

7.2 Procesos de parámetros distribuidos

Ejercicio 7.2 — Simulación de un supercapacitor de doble capa (SCDC) Maxwell PC 10 F.

El **objetivo general** del Ejercicio es simular el comportamiento de un SCDC Maxwell PC, con geometría prismática. Este dispositivo usado para almacenar y proveer energía eléctrica contiene dos electrodos de carbono y un electrolito de acetronitrilo; su capacitancia nominal es de 10 F y funciona con un voltaje máximo de 2.5 V. En un SCDC, la energía es almacenada entre el electrolito o líquido iónico y la interfaz del electrodo que puede ser conductora o semiconductor. La acumulación de carga se logra por la adsorción reversible de iones en la superficie del electrodo, el cual tiene una gran área superficial debido a su estructura porosa. En la Figura 7.4 muestra un esquema del SCDC prismático.



Figura 7.2: Supercapacitor electro-químico de doble capa Maxwell, con geometría prismática y capacitancia nominal de 10 F.

Modelo de difusión eléctrica. Considere el modelo de difusión eléctrica descrito en el Ejercicio 6.6, cuya solución representa las dinámicas de carga o descarga de un SCDC. En una primera parte del presente Ejercicio, el objetivo es aplicar el modelo de difusión eléctrica para simular el comportamiento del SCDC con capacitancia de 10 F. En resumen, este modelo electroquímico es un problema de Cauchy bien condicionado, con condiciones de frontera y condición inicial bien definidas. La solución de la EDP determina la evolución espacio-temporal de la diferencia de potencial electrostático interfacial en el electrodo positivo del supercapacitor, y después, mediante una función algebraica se obtiene el perfil espacial en cada valor del tiempo de la tensión en las terminales de salida del SCDC. El cálculo numérico del modelo se obtiene mediante el resolvidor de EDP **pdepe** de Matlab®. Se resuelve una EDP parabólica 1D, después, su salida es la entrada de una función que calcula la variable salida del modelo, es decir, el voltaje en las terminales del SCDC.

Especificaciones del SCDC Maxwell PC 10F para el modelo de difusión eléctrica. La investigación de Sikha y col., 2005 ([20]) trata el modelado de una fuente híbrida compuesta por una batería y un módulo de SCDC del tipo Maxwell PC 10 F. Los parámetros ahí reportados fueron medidos como parte del trabajo, o bien recuperados de la literatura, otros fueron estimados o sus valores atribuidos bajo alguna suposición. En la publicación posterior de Romero y col, 2010 [17], el modelo de difusión eléctrica del SCDC fue probado con los datos de [20]. En la Tabla 7.1 se concentran los parámetros requeridos por el modelo de difusión eléctrica de un SCDC para el caso de un dispositivo Maxwell PC de 10 F.

Tabla 7.1: Parámetros del modelo de difusión eléctrica para un SCDC Maxwell PC 10 F [16], [20]

| Cantidad | Parámetro | Valor | Unidades |
|---|----------------------|-----------------------|------------------|
| Conductividad eléctrica del sustrato sólido | σ_0 | 100 | Sm^{-1} |
| Conductividad eléctrica del electrolito | κ_0 | 5 | Fm^{-2} |
| Conductividad eléctrica del separador | κ_{0z} | 5 | Fm^{-2} |
| Capacitancia de doble capa | C_{dl} | 0.1921 | Sm^{-1} |
| Radio de las partículas esféricas | R_c | 1×10^{-8} | m |
| Porosidad del electrodo | ε | 0.38 | |
| Porosidad del separador | ε_z | 0.7 | |
| Constante de Bruggeman de los electrodos | $brug$ | 1.5 | |
| Constante de Bruggeman en el separador | bru_z | 0 | |
| Espesor del electrodo | δ | 3.76×10^{-4} | m |
| Espesor del separador | δ_z | 0.52×10^{-4} | m |
| Altura del electrodo | h_e | 7×10^{-2} | m |
| Longitud del electrodo | l_e | 2.3×10^{-2} | m |
| Temperatura | T | 298 | K |
| Área transversal del SCDC | $A = h_e \times l_e$ | 1.61×10^{-3} | m^2 |

La conductividad efectiva del sustrato sólido σ es

$$\sigma = \sigma_0 (1 - \varepsilon)^{brug} \quad (7.15)$$

La conductividad efectiva del electrolito κ es

$$\kappa = \kappa_0 \varepsilon^{brug} \quad (7.16)$$

La constante de tiempo característica τ es

$$\tau = \frac{\delta^2}{D_e} = a C_{dl} \delta^2 \left(\frac{\kappa + \sigma}{\kappa \sigma} \right) \quad (7.17)$$

donde a es el área superficial específica del material poroso en m^2/m^3 y D_e es la difusividad eléctrica del electrodo definida en la ecuación (6.18).

La capacitancia de doble capa C_{dl} fue ajustada para que el modelo se adaptara al comportamiento reportado por el fabricante. Específicamente el ajuste permitió hacer coincidir el comportamiento dinámico que determina la capacitancia nominal de la ficha de especificaciones del SCDC (Tabla 7.2). La forma de determinar C_{dch} y R_{dch} es aplicando una serie de pulsos de carga y descarga a corriente constante (I_{prueba}).

Modelo Stern. En la segunda parte del Ejercicio, el objetivo es simular el comportamiento de carga y descarga del mismo SCDC de 10 F, pero esta vez, mediante un modelo general que forma parte de la librería de *Sistemas de Potencia Especializados* que se encuentra en el ambiente de simulación Simscape™ de la plataforma Simulink®. La librería general con aplicación a supercapacitores de diferente tipo, permite la reproducción del desempeño de un supercapacitor de doble capa mediante el modelo Stern. El citado modelo Stern combina las teorías de Helmholtz y de Gouy Chapman para explicar la capacitancia de doble capa. Para conocer más detalles de los diferentes modelos, se recomienda la lectura de la referencia [10]. En resumen, el modelo Stern establece como hipótesis que en el supercapacitor se forman dos capas: una interna llamada capa interna de Stern se forma debido a la adherencia fuerte de algunos iones sobre el electrodo (de acuerdo con la propuesta de Helmholtz). En esta capa se supone que la distancia más pequeña de los iones al electrodo es aproximadamente el radio del ion. Una segunda llamada capa difusa de Gouy Chapman. Las suposiciones sobre las que fue formulado el modelo Stern son:

- Los iones son considerados como cargas puntuales.
- Las interacciones y acciones más importantes que tiene lugar en la capa de Gouy Chapman son de naturaleza coulombica.
- La viscosidad del fluido se presume en un plano constante y la permitividad dieléctrica se supone constante en toda la capacitancia de doble capa.

Especificaciones del SCDC Maxwell PC 10F para el modelo Stern de la librería de Simscape™. La Tabla 7.2 concentra las especificaciones del fabricante. Los datos señalados con un asterisco son requeridos por el bloque de *Supercapacitor* de Simscape™. El módulo implementa la ecuación de Stern para calcular el voltaje de salida del SCDC en función de el número de capas de electrodos, el número de supercapacitores en paralelo y en serie, la carga eléctrica (C), el radio molecular (m), la permitividad del material ($C \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$), la permitividad de los espacios vacíos ($C \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$), el área interfacial entre los electrodos y el electrolito (m^2), la temperatura ($^{\circ}C$), la constante de Faraday ($96\,485\, C \cdot mol^{-1}$), la constante de gases ideales ($R = 8.314472\, J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$), y la concentración molar ($mol \cdot m^{-3}$) igual a $c = 1/(8N_A r^3)$, en donde $N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}\, mol^{-1}$ es el número de Avogadro.

Tabla 7.2: Especificaciones para el SCDC Maxwell PC 10 F | Ficha de datos del proveedor. [16].

| Cantidad | Parámetro | Valor | Unidades |
|---|---------------|-------|----------|
| Capacitancia nominal a 25 °C | C_{dch} | 10 | F |
| Capacitancia mínima (inicial) | $C_{dch,min}$ | 9 | F |
| Capacitancia máxima (inicial) | $C_{dch,max}$ | 12 | F |
| Resistencia en serie equivalente (RSE) | R_{dch} | 0.18 | Ω |
| Corriente de prueba (para medir C_{dch} y R_{dch}) | I_{prueba} | 1 | A |
| Voltaje nominal | V_N | 2.5 | V |
| Voltaje máximo absoluto | V_{Max} | 0.7 | V |
| Corriente máxima absoluta | I_{Max} | 1.5 | A |
| Corriente de fuga máxima a 25 °C | I_L | 0.040 | mA |

La carga eléctrica está dada por:

$$Q_T = \int I_{SC} dt \quad (7.18)$$

La autodescarga ocurre cuando $I_{SC} = 0$ y la carga durante este fenómeno es calculada por:

$$Q_T = \int I_{\text{autodescarga}} dt \quad (7.19)$$

donde:

$$I_{\text{autodescarga}} = \begin{cases} \frac{\alpha_1 C_T}{1 + sR_{SC}C_T} & \text{si } t - t_{oc} \leq t_3 \\ \frac{\alpha_2 C_T}{1 + sR_{SC}C_T} & \text{si } t_3 < t - t_{oc} \leq t_4 \\ \frac{\alpha_3 C_T}{1 + sR_{SC}C_T} & \text{si } t - t_{oc} > t_4 \end{cases} \quad (7.20)$$

donde α_1 , α_2 y α_3 son las velocidades de cambio del voltaje del supercapacitor en un experimento de autodescarga en los intervalos $[t_{ca}, t_3]$, (t_3, t_4) , y $(t_4, t_5]$. El subíndice *ca* denota circuito abierto, y los subíndices 1, 2 y 3 corresponden a tres tiempos diferentes en los cuales hay autodescarga ($I_{SC} = 0$) después de interrumpir la corriente y establecer la condición circuito abierto. El bloque de *Supercapacitor* requiere la especificación de la corriente justo antes del evento de circuito abierto y el voltaje del supercapacitor en el tiempo $t_{ca} = 0s$, $t_3 = 10s$, $t_4 = 100s$, y $t_5 = 1000s$. Para el caso estudiado, el fenómeno de autodescarga fue determinado por una relación empírica:

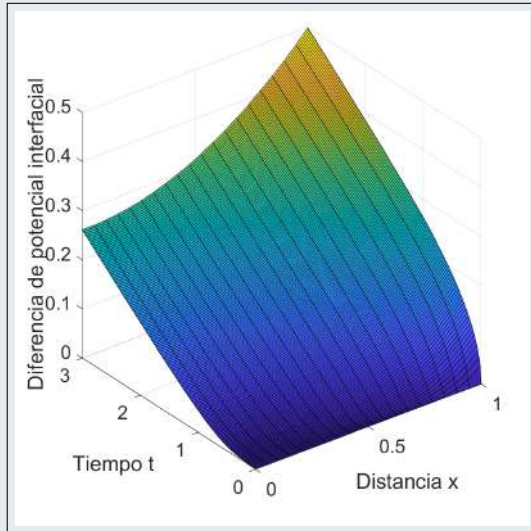
$$V(t) = V_0 \exp(-t/\tau) \quad (7.21)$$

donde $\tau = 923ks$

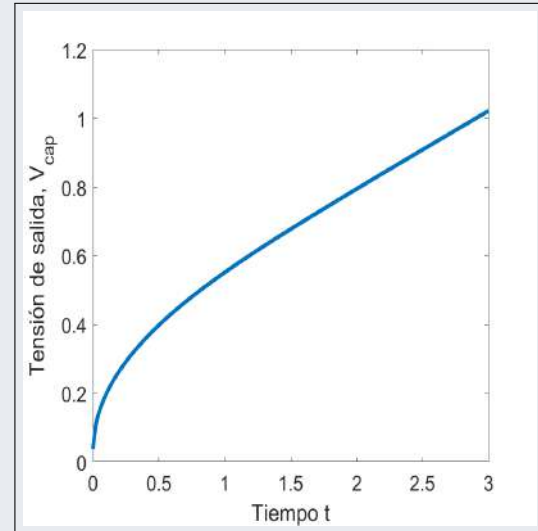
Simulación del modelo de difusión eléctrica. El modelo electroquímico fue resuelto con la librería de solución de ecuaciones diferenciales parciales de Matlab[®] (descrita en la Sección 3.3). En la Figura 7.3a.a se muestra el perfil espacio-temporal de la variable de estado de difusión eléctrica para el electrodo positivo. Después, en la Figura 7.3a.b, se grafica la evolución temporal de la tensión de salida, la cual depende de los valores de la difusión eléctrica a lo largo de todo el electrodo. La simulación se lleva a cabo en a corriente constante de 2.5 A.

Simulación del modelo Stern con la librería de Simscape[™]. Después se simula el comportamiento del mismo supercapacitor en usando la librería de Simscape[™], configurando el módulo con los datos proporcionados antes. La Figura 7.4 presenta el simulador del supercapacitor. En la Figura 7.6a se proporciona una captura de las ventanas de configuración del modelo Stern. Se requieren introducir las características generales del supercapacitor, varias de estas son proporcionadas por el fabricante. También es necesario proporcionar datos sobre el comportamiento estático

de la fuente, por lo tanto se requiere el conocimiento de la relación voltaje y corriente en varios puntos. El bloque determina los parámetros del modelo Stern con la información proporcionada. Finalmente se requieren datos de la descarga, de los cuales se obtiene información sobre la respuesta dinámica del supercapacitor. Algunos datos proporcionados al bloque fueron encontrados en la ficha técnica del fabricante, otras fuentes de datos fueron estudios experimentales reportados en la literatura, y otros cuantos se obtuvieron del simulador electroquímico. La suma de información permitió simular, con el modelo Stern, el comportamiento de un supercapacitor comercial.



(a) Perfil espacio-temporal de difusión eléctrica en el electrodo positivo.



(b) Evolución temporal de la tensión de salida en las terminales del SCDC.

Figura 7.3: Simulación del ciclo de carga del SCDC Maxwell 10F a una corriente de 2.5 A.

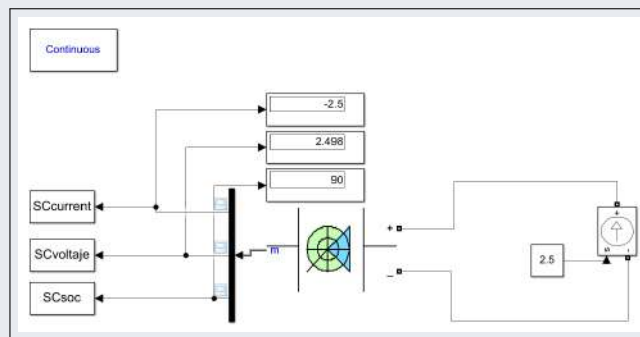
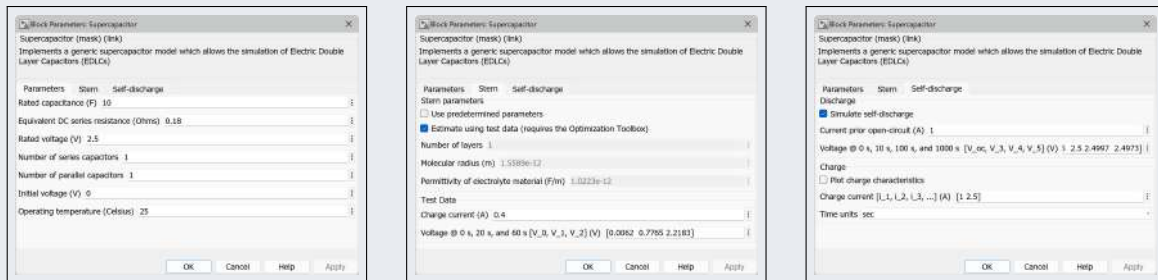


Figura 7.4: Simulación de la carga de un SCDC Maxwell PC 10 F, mediante objetos de la librería de PowerSim.

Finalmente se compararon las predicciones del modelo electroquímico y el modelo Stern implementado en la plataforma Simulink™. En La Figura 7.2 se compara el comportamiento de carga del supercapacitor que resulta de la predicción de los modelos antes descritos. Se simuló la carga a diferentes corrientes y se puede concluir que ambas predicciones se aproximan. El error crece un

poco a corrientes más elevadas.



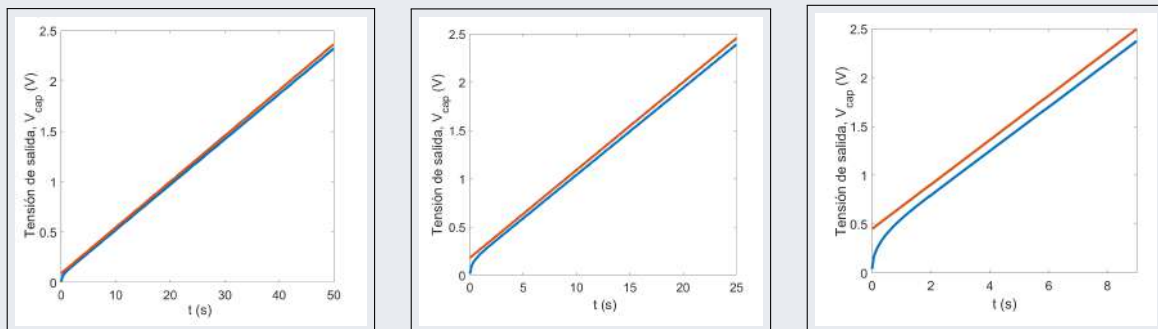
(a) Características del SCDC.

(b) Parámetros del modelo.

(c) Datos de autodescarga.

Figura 7.5: Datos para la simulación de un SC con modelo Stern.

Al final del ejercicio se reporta el código para la solución del modelo de difusión eléctrica.



(a) Carga a 0.5 A.

(b) Carga a 1 A.

(c) Carga a 2.5 A.

Figura 7.6: Datos para la simulación de un SC con modelo Stern.

SCDC Maxwell 10 F | Simulación de un ciclo carga | código .m

```

% =====
% Modelo dinámico de difusión eléctrica para el electrodo positivo de un SCDC [key]
% =====

clear
global Sigma Kappa Delta A CteTiempo I Icap u

% =====
% Parámetros
% =====

Sigma0 = 100;           % Conductividad del sustrato sólido, S/m
Kappa0 = 5;            % Conductividad del electrolito, S/m
Kappa0z = Kappa0;     % Conductividad del separador, S/m
Cdl=0.1921;          % Capacitancia de doble capa, F/m2
Rc=10e-9;            % Radio de las partículas esféricas sólidas, m
Epsilon = 0.38;      % Porosidad del electrodo, adimensional
Epsilonz = 0.7;      % Porosidad del separador, adimensional
Delta = 3.76e-4;     % Espesor del electrodo, m
Deltaz = 0.52e-4;    % Espesor del separador, m
he = 7e-2;           % Altura del electrodo, m
le = 2.3e-2;         % Longitud del electrodo, m
brug = 1.5;          % Constante de Bruggeman de los electrodos, adim.
brugz = 0;           % Constante de Bruggeman del separador, adim.
A = he*le;           % Área transversal del CDCE, m2
a=3*(1-Epsilon)/Rc;  % Superficie específica del material poroso
Sigma = Sigma0*(1-Epsilon)^brug; % Conductividad efectiva del sustrato sólido
Kappa = Kappa0*Epsilon^brug; % Conductividad efectiva del electrolito.
Kappaz = Kappa0z*Epsilonz^brugz; % Conductividad efectiva del separador.
CteTiempo=a*Cdl*Delta2*((Kappa+Sigma)/(Kappa*Sigma));

% =====
% Entrada
% =====

t = linspace(0,2,30); % Tiempo de simulación.
Icap = 2.5;           % Entrada I Corriente, A

% =====
% Solución del la EDP
% =====

m = 0;
x = linspace(0,1,20);
u = pdepe(m,@PDEsc,@PDEic,@PDEbc,x,t);

% =====
% Tensión de salida
% =====

Vcap1=2*(Kappa*u(:,1)+Sigma*u(:,20))/(Kappa+Sigma);
Vcap2=2*Delta/(Kappa+Sigma)+Deltaz/Kappaz;
Vcap=Vcap1+Vcap2*Icap/A; % Voltaje de salida del SCDC

```

SCDC Maxwell 10 F

Simulación de un ciclo carga | código .m | Continuación ...

```

% =====
% Gráficas de resultados
% =====

figure(1)
surf(x,t,u)
xlabel('Distancia x')
ylabel('Tiempo t')
zlabel('Diferencia de potencial interfacial')

figure(2)
plot(t,Vcap)
xlabel('Tiempo t')
ylabel('Tensión de salida')

% *****
% Funciones
% *****

% -----
% Modelo PDE / Solución por toolbox pdepe
% -----

function [c,f,s] = PDEsc(x,t,u,dudx)
    global CteTiempo

    c = CteTiempo;
    f = dudx;
    s = 0;
end

% -----
% Condiciones iniciales
% -----

function u0 = PDEic(x)
    u0 = 0;
end

% -----
% Condiciones frontera
% -----

function [pl,ql, pr,qr] = PDEbc(xl,ul,xr,ur,t)
    global Sigma Kappa Delta A Icap


    pl = Delta*Icap/(Sigma*A);
    ql = 1;
    pr = -Delta*Icap/(Kappa*A);
    qr = 1;
end

```


Técnicas de control moderno



| | | |
|----------|--|------------|
| 8 | Estructura de control RST | 119 |
| 9 | Estructura de un control por modelo interno | 123 |



8. Estructura de control RST

El control con estructura RST se compone de tres bloques con polinomios R, S, y T. Es una ley de control con dos grados de libertad. El polinomio T filtra la referencia y sirve para seguimiento de trayectoria y para atenuar sobreimpulsos. Los filtros R y S sirven para la regulación y rechazo a perturbaciones.

8.0.1 Controlador RST continuo

Generalizando para un diseño continuo, el sistema en lazo cerrado se define de la siguiente forma:

Planta:

$$\begin{aligned} A(s)y(t) &= B(s)u(t) \\ A(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 \\ B(s) &= b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \dots + b_1s + b_0 \\ \text{grado}(A) &= n, \text{ grado}(B) = m \end{aligned} \quad (8.1)$$

Controlador:

$$\begin{aligned} S(s) &= s^v + c_{v-1}s^{v-1} + c_{v-2}s^{v-2} + \dots + c_1s + c_0 \\ R(s) &= r_\omega s^\omega + r_{\omega-1}s^{\omega-1} + r_{\omega-2}s^{\omega-2} + \dots + r_1s + r_0 \\ T(s) &= t_\rho s^\rho + t_{\rho-1}s^{\rho-1} + t_{\rho-2}s^{\rho-2} + \dots + t_1s + t_0 \\ \text{grado}(S) &= v, \text{ grado}(R) = \omega, \text{ grado}(T) = \rho \end{aligned} \quad (8.2)$$

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$y(t) = \frac{B(s)T(s)}{A(s)S(s) + B(s)R(s)}r(t) \quad (8.3)$$

Polos en lazo cerrado:

$$P_c(s) = A(s)S(s) + B(s)R(s) \quad (8.4)$$

8.0.2 Controlador RST discreto

Generalizando para un diseño discreto, en términos del operador de atraso q^{-1} , el sistema en lazo cerrado se define de la siguiente forma

Planta:

$$\begin{aligned} A(q^{-1})y(t) &= B(q^{-1})u(t) \\ A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m} \\ \text{grado}(A) &= n, \text{ grado}(B) = m \end{aligned} \quad (8.5)$$

Controlador:

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_vq^{-v} \\ R(q^{-1}) &= r_0 + r_1q^{-1} + r_2q^{-2} + \dots + r_\omega q^{-\omega} \\ T(q^{-1}) &= t_0 + t_1q^{-1} + t_2q^{-2} + \dots + t_\rho q^{-\rho} \\ \text{grado}(S) &= v, \text{ grado}(R) = \omega, \text{ grado}(T) = \rho \end{aligned} \quad (8.6)$$

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1})}r(t) \quad (8.7)$$

Polos en lazo cerrado:

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1}) \quad (8.8)$$

En términos del operador de adelanto q , el sistema en lazo cerrado se define de la siguiente forma

Planta:

$$\begin{aligned} A(q)y(t) &= B(q)u(t) \\ A(q) &= q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_1q + a_0 \\ B(q) &= b_mq^m + b_{m-1}q^{m-1} + b_{m-2}q^{m-2} + \dots + b_1q + b_0 \\ \text{grado}(A) &= n, \text{ grado}(B) = m \end{aligned} \quad (8.9)$$

Controlador:

$$\begin{aligned} S(q) &= q^v + c_{v-1}q^{v-1} + c_{v-2}q^{v-2} + \dots + c_1q + c_0 \\ R(q) &= r_\omega q^\omega + r_{\omega-1}q^{\omega-1} + r_{\omega-2}q^{\omega-2} + \dots + r_1q + r_0 \\ T(q) &= t_\rho q^\rho + t_{\rho-1}q^{\rho-1} + t_{\rho-2}q^{\rho-2} + \dots + t_1q + t_0 \\ \text{grado}(S) &= v, \text{ grado}(R) = \omega, \text{ grado}(T) = \rho \end{aligned} \quad (8.10)$$

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$y(t) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)S(q) + B(q)R(q)}r(t) \quad (8.11)$$

Polos en lazo cerrado:

$$P_c(q) = A(q)S(q) + B(q)R(q) \quad (8.12)$$

El diseño de una ley de control con estructura RST puede hacerse bajo diferentes enfoques. Una forma muy común de calcularla es mediante colocación de polos. Aquí se detallan dos procedimientos para calcular un control RST discreto. El primer método es con cancelación de ceros y el segundo es sin cancelación de ceros.

8.0.3 Control RST discreto con cancelación de ceros

El comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado es especificado mediante un modelo deseado,

$$\frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} = G_m(q^{-1}) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (8.13)$$

donde $G_m(q^{-1})$ es el modelo de referencia en función de transferencia con numerador B_m y denominador A_m .

La idea principal es descomponer los ceros de la planta en B^+ (mónico) y B^- (8.14). Estos son los ceros que se cancelan y los que se retienen, respectivamente. El usuario define el criterio de descomposición. En principio se busca retener los ceros inestables o que puedan cancelar polos estables, de tal manera de no forzar al sistema a alejarse mucho de su dinámica natural. De lo contrario, la ley de control encontrada implicaría un gran esfuerzo y consumo energético.

$$B(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}) \quad (8.14)$$

Con el fin de mantener B^- , los ceros del modelo de referencia deben ser parte de B^- ,

$$B_m(q^{-1}) = B^-(q^{-1})B'_m(q^{-1}) \quad (8.15)$$

Considerando la descomposición de los ceros de la planta (8.14) y la definición de los ceros del modelo de referencia (8.15), los polos de lazo cerrado del sistema quedan de la siguiente forma después de cancelar B^+

$$P_c(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})T(q^{-1})A_m(q^{-1})}{B_m(q^{-1})} = \frac{B^-(q^{-1})T(q^{-1})A_m(q^{-1})}{B'_m(q^{-1})}$$

definiendo

$$A_0(q^{-1})B'_m(q^{-1}) = T(q^{-1}) \quad (8.16)$$

Los polos en lazo cerrado se reescriben de la siguiente forma

$$P_c(q^{-1}) = B^-(q^{-1})A_m(q^{-1})A_0(q^{-1}) \quad (8.17)$$

Note que para asegurar la cancelación de B^+ en (8.7), el polinomio $S(q^{-1})$ debe contener B^+ . Por lo tanto

$$S(q^{-1}) = B^+(q^{-1})S'(q^{-1}) \quad (8.18)$$

donde $S'(q^{-1})$ es mónico.

Igualando (8.8) y (8.17), y considerando (8.18) se obtiene la ecuación de Bézout (8.19) que permite obtener los polinomios $S'(q^{-1})$ y $R(q^{-1})$.

$$A(q^{-1})S'(q^{-1}) + B^-(q^{-1})R(q^{-1}) = A_m(q^{-1})A_0(q^{-1}) \quad (8.19)$$

Después, $S(q^{-1})$ se obtiene de (8.18) y $T(q^{-1})$ de (8.16). Este último polinomio es

$$T(q^{-1}) = B'_m(q^{-1})A_0(q^{-1}) \quad (8.20)$$

En resumen, para determinar el comportamiento en lazo cerrado es necesario especificar $A_m(q^{-1})$, $A_0(q^{-1})$ y $B_m(q^{-1})$. Todo el procedimiento de diseño es el mismo en términos del operador de adelante.

Para tener un grado mínimo del controlador se deben escoger

$$\text{grado}(A_m) = \text{grado}(A)$$

$$\text{grado}(B_m) = \text{grado}(B)$$

Además, por condiciones de compatibilidad, debe cumplirse

$$\text{grado}(R) \leq \text{grado}(S)$$

$$\text{grado}(T) \leq \text{grado}(S)$$

$$\text{grado}(A) + \text{grado}(S) \leq \text{grado}(P_c)$$

$$\text{grado}(P_c) \geq 2 \text{grado}(A) - 1$$

$$\text{grado}(A_0) = \text{grado}(A) - \text{grado}(B^+) - 1$$



9. Estructura de un control por modelo interno

La estructura de un controlador por modelo interno o CMi es una técnica de control que tolera errores de modelado y perturbaciones, por lo que entra en la categoría de control robusto.

$r(s)$ es la referencia, $e(s)$ es el error, $u(s)$ es la entrada de control, $d(s)$ es la perturbación, $\hat{d}(s)$ es la estimación de la perturbación, $y(s)$ es la salida, $\hat{y}(s)$ es la salida estimada, G_p es la planta, \hat{G}_p es la estimación de la planta, y G_c es el controlador.

Salida:

$$y(s) = G_p(s)u(s) + d(s)$$

Salida estimada:

$$\hat{y}(s) = \hat{G}_p(s)u(s)$$

Retroalimentación:

$$\hat{d}(s) = y(s) - \hat{y}(s) \tag{9.1}$$

Error:

$$e(s) = r(s) - \hat{d}(s)$$

Salida del sistema en lazo cerrado:

$$y(s) = G_p(s)G_c(s)e(s) + d(s) \tag{9.2}$$

9.0.1 Control por modelo interno perfecto

Proposición 9.1 El modelo es perfecto de 9.1: $e(s) = r(s) - d(s)$.

Proposición 9.2 No hay perturbaciones, $d(s) = 0$, es decir $e(s) = r(s)$.

Tomando en cuenta las suposiciones 9.1 y 9.2, la salida del sistema en lazo cerrado (9.2) se reescribe de la siguiente forma

$$y(s) = G_p(s) G_c(s) r(s). \quad (9.3)$$

Por otro lado, se dice que el controlador es perfecto si se alcanza la referencia, al mismo tiempo que el rechazo a perturbaciones es total, es decir

$$y(s) = r(s); d(s) = 0$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = 1 = G_p(s) G_c(s)$$

$$G_c(s) = \frac{1}{G_p(s)} = G_p(s)^{-1}$$

Entonces,

$$G_p(s)^{-1} = \hat{G}_p(s)^{-1}$$

Por lo tanto, si el modelo de la planta es invertible, el controlador $G_c(s)$ es la función de transferencia inversa de la planta

$$G_c(s) = \hat{G}_p(s)^{-1} \quad (9.4)$$

Es decir, al invertir la planta se obtiene una ley de control efectiva para regular la salida ante perturbaciones.

Para que la ley de control sea realizable, debe observarse la Regla 9.3

Proposición 9.3 La función de transferencia que define la ley de control debe ser propia (es decir, estrictamente propia o semipropia).

Dada la función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

,

esta es

1. estrictamente propia si $n > m$
2. semipropia si $n = m$.
3. impropia si $n < m$.

9.0.2 Control por modelo interno de un grado de libertad

Para el caso de una ley de control representada por una función de transferencia no propia, se agrega un filtro para construir una ley de control propia.

Para una planta de primer orden

$$\hat{G}_p(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \quad (9.5)$$

Considere un filtro de primer orden

$$f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1} \quad (9.6)$$

Se construye un controlador propio por medio de un filtro

$$G_c(s) = \frac{1}{k} \left(\frac{\tau s + 1}{\lambda s + 1} \right) \quad (9.7)$$

Entonces, la respuesta en lazo cerrado de un IMC perfecto es

$$y(s) = G_p(s) G_c(s) r(s) \quad (9.8)$$

substituyendo (9.5) y (9.7) en (9.8), obtenemos el control perfecto.

$$y(s) = \left(\frac{1}{\lambda s + 1} \right) r(s) \quad (9.9)$$

donde λ es el único parámetro a sintonizar. Valores pequeños de λ generan una respuesta rápida, mientras que valores grandes producen una respuesta lenta.

El uso de un filtro de orden superior asegura un controlador con función de transferencia propia.

$$f(s) = \frac{n\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^n}$$

donde $n \geq 2$ para poder calcular una ley de control propia.

Para muchas plantas, no es posible invertir su modelo. Algunos sistemas en los que se encuentra este problema están los sistemas con fase no mínima: retardo o ceros en el semiplano derecho. Las plantas con ceros positivos, por ejemplo, generan una ley de control inestable porque los ceros de la planta son polos en el modelo inverso para el control.

El problema de obtener una ley de control impropia puede resolverse mediante la siguiente regla 9.4.

Proposición 9.4 Resulta conveniente que el modelo de la planta sea factorizable para que una parte del modelo pueda ser invertida y se posibilite obtener ley de control estable y realizable.

$$\hat{G}_p(s) = \hat{G}_p^-(s) \hat{G}_p^+(s) \quad (9.10)$$

Hay dos formas de factorización:

1. Factorización simple

$$\hat{G}_p(s) = \underbrace{\frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}}_{\hat{G}_p^-(s)} \underbrace{(-\beta s + 1)}_{\hat{G}_p^+(s)} \quad (9.11)$$

donde $\hat{G}_p^-(s)$ es la parte invertible de una función de transferencia estable.

2. Factorización por todos los pasos (*all-pass factorization*)

$$\hat{G}_p(s) = \frac{k(-\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \frac{(\beta s + 1)}{(\beta s + 1)}$$

$$\hat{G}_p(s) = \underbrace{\frac{k(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}}_{\hat{G}_p^-(s)} \underbrace{\frac{(-\beta s + 1)}{(\beta s + 1)}}_{\hat{G}_p^+(s)} \quad (9.12)$$

donde $\hat{G}_p^-(s)$ es la parte invertible de una función de transferencia estable.

Algoritmo de diseño de un IMC

1. Obtener el modelo inverso de la planta.
2. Separar la parte invertible $\hat{G}_p^-(s)$ y la parte no invertible $\hat{G}_p^+(s)$ mediante la factorización por todos los pasos.
3. Formar el controlador ideal

$$G_c(s) = \hat{G}_p^-(s)$$

4. Agregar un filtro para obtener un controlador propio, y ajustar/sintonizar el parámetro λ para ajustar la velocidad de respuesta del sistema en lazo cerrado.

9.0.3 Control por modelo interno de dos grados de libertad

El diseño del IMC puede ser mejorado para mayor tolerancia ante perturbaciones introduciendo un filtro diferente:

$$f(s) = \frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^n}$$

donde γ se elige para obtener buen rechazo a perturbaciones.

Por ejemplo, para una planta de primer orden:

$$G_c(s) = f(s) \hat{G}_p^-(s)$$

$$G_c(s) = \frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^n} \left(\frac{\tau s + 1}{k} \right)$$

donde $n \geq 2$ para obtener una ley de control propia.

Problemas de control de procesos



| | | |
|-----------|---|------------|
| 10 | Control por retroalimentación de estados | 131 |
| 10.1 | Retroalimentación de estados e integración en adelanto Sistema multitanques. | 131 |
| | Bibliography | 143 |
| | Articles | 143 |
| | Books | 145 |
| | Index | 147 |

10. Control por retroalimentación de estados

10.1 Retroalimentación de estados e integración en adelante | Sistema multitanques.

Problema. Se considera el problema de regulación en un módulo multitanques en serie (estudiado en los ejercicios 6.2 y 7.1). El objetivo es sintetizar una ley de control por retroalimentación de estados e integración en adelante (Sección 5.3) que asegure el desempeño deseado y error de estado estacionario nulo simultáneamente.

La dinámica de la planta está dada por el modelo no lineal (6.12), el cual es aproximado por el modelo lineal en el espacio de estados (6.13). Los parámetros que caracterizan al sistema están definidos en el vector θ (7.1). El modelo lineal es válido alrededor del punto de equilibrio $eq1$ definido en las ecuaciones (7.2) y (7.4). Sustituyendo los valores de los parámetros, el modelo lineal está dado en la ecuación (10.1). La síntesis del controlador está basada en el modelo lineal.

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \begin{bmatrix} -0.015217 & 0 & 0 \\ 0.019010 & -0.026902 & 0 \\ 0 & 0.018284 & -0.012275 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d + \begin{bmatrix} 114.290 & -43.143 & 0 & 0 \\ 0 & 53.895 & -45.305 & 0 \\ 0 & 0 & 30.792 & -37.581 \end{bmatrix} \mathbf{u}_d, \quad (10.1a)$$

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \\ x_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - 0.1425 \\ h_2 - 0.1007 \\ h_3 - 0.1500 \end{bmatrix}, \quad (10.1b)$$

(10.1c)

$$\mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \\ u_{d3} \\ u_{d4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q - 3.7950 \times 10^{-5} \\ C_1 - 1.0053 \times 10^{-4} \\ C_2 - 1.1959 \times 10^{-4} \\ C_3 - 9.79865 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (10.1d)$$

(10.1e)

Sistema aumentado El sistema aumentado está definido en la ecuación (10.2).

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_{ext}\mathbf{X} + \mathbf{B}_{ext}\mathbf{u} \quad (10.2a)$$

$$(10.2b)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} \end{bmatrix} \mathbf{u}_d(t) \quad (10.2c)$$

$$(10.2d)$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_d(t) \end{bmatrix} \quad (10.2e)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{x}}_d(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{d,1}(t) \\ \bar{x}_{d,2}(t) \\ \bar{x}_{d,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t e_1(\tau) d\tau \\ \int_0^{t_0} e_2(\tau) d\tau \\ \int_0^{t_0} e_3(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (10.3a)$$

$$(10.3b)$$

$$\mathbf{A}_{ext} = \begin{bmatrix} -0.015217 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01901 & -0.026902 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.018284 & -0.012275 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.3c)$$

$$(10.3d)$$

$$\mathbf{B}_{ext} = \begin{bmatrix} 114.29 & -43.143 & 0 & 0 \\ 0 & 53.895 & -43.305 & 0 \\ 0 & 0 & 30.792 & -37.571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.3e)$$

Cálculo del controlador por colocación de polos Los polos de la planta nominal en lazo abierto son: -0.012275 , -0.015217 y -0.026902 , por lo tanto es un sistema estable.

Para un primer diseño, la asignación de polos se hace considerando el comportamiento natural de la planta de tal forma que el costo energético o esfuerzo de control no sea muy alto. Por lo tanto, se seleccionan 3 polos cercanos a los de la planta en lazo abierto y después otros tres polos auxiliares un poco más alejados.

$$\text{polos} = [-0.0123 - 0.0152 - 0.0399 - 0.0223 - 0.0252 - 0.0499]$$

La ley de control se compone de una ganancia proporcional que garantiza el desempeño de la retroalimentación de estados, y una ganancia integral que asegura error estático cero :

$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{K}_p \mathbf{x}_d - \mathbf{K}_i \bar{\mathbf{x}}_d \tag{10.4a}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_i \end{bmatrix} \tag{10.4b}$$

El cálculo de las ganancias proporcional y derivativa se realiza usando la función `place` de Matlab®.

```
K=place(Aext,Bext, polos)
```

```
Kp=K(:, 1:3)
```

```
Ki=K(:, 4:6)
```

La Figura 10.1 muestra la implementación en simulación de la ley de control en la planta lineal.

Control por retroalimentación de estados e integración en adelante, basado en colocación de polos
Aplicación a un sistema MIMO de Multitanques

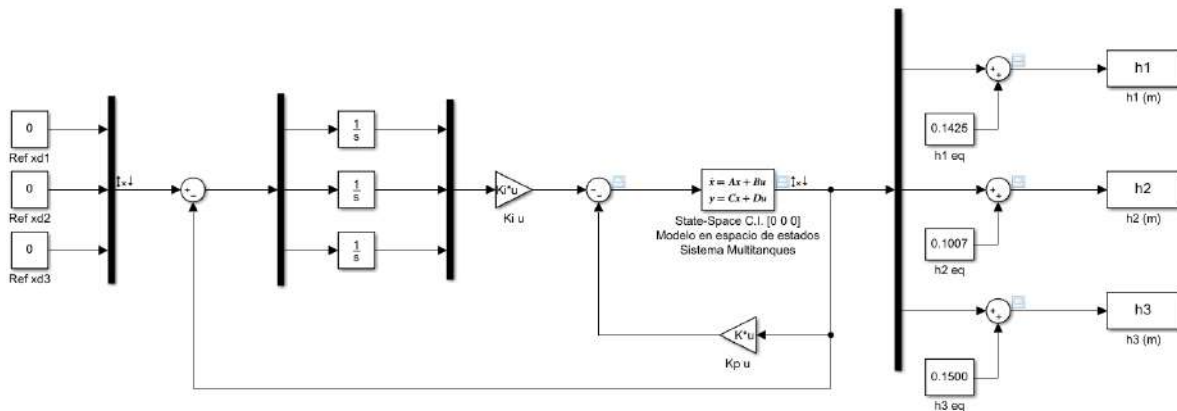


Figura 10.1: Simulador del control por retroalimentación de estados e integración en adelante de un sistema de tanques Inteco, usando el modelo lineal como la planta | Plataforma Simulink®.

La ley de control se prueba con **cambios en las condiciones iniciales**. La planta nominal corresponde al punto de equilibrio $eq1$, por lo tanto, $\mathbf{x}(0) = [0.1425 \ 0.1007 \ 0.1500]^T$ para el modelo no lineal expresado en variables de proceso y $\mathbf{x}_d(0_{3 \times 1}) = 0$ para el modelo lineal expresado en variables de desviación.

La Figura 10.2 muestra el desempeño del controlador ante cambios de las condiciones iniciales, que en variables de desviación es $\mathbf{x}_d(0) = [0.057494 \ 0.099299 \ 0.050000]^T$. La simulación se lleva a cabo sin perturbación en la entrada. En una segunda prueba (Figura 10.4) se simula una planta con perturbación en la señal de entrada. En particular se genera ruido con un bloque de ruido blanco, configurado de la siguiente manera: Potencia de ruido: $[0.0000000001]$, tiempo de muestreo igual a 30, y semilla: $[23341]$. La Figura 10.3 muestra la entrada de control para la prueba de condiciones iniciales diferentes de cero.

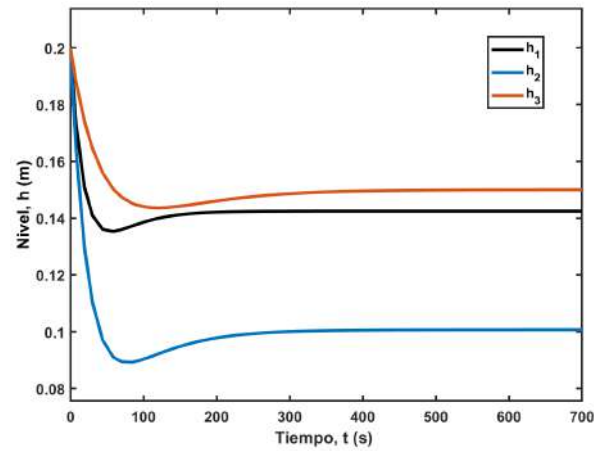


Figura 10.2: Desempeño del controlador ante cambios de condición inicial.

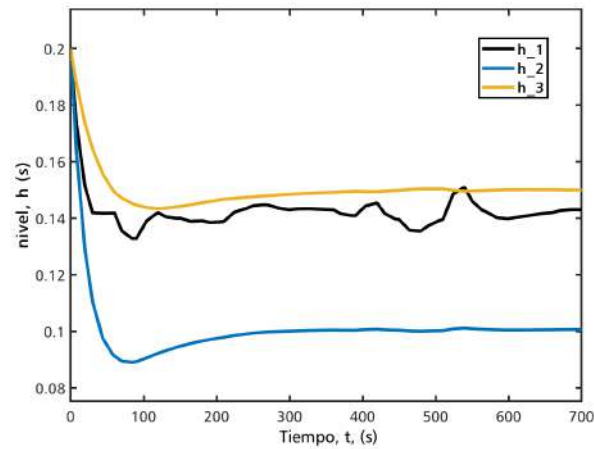


Figura 10.3: Desempeño del controlador ante cambios de condición inicial, con ruido en la entrada.

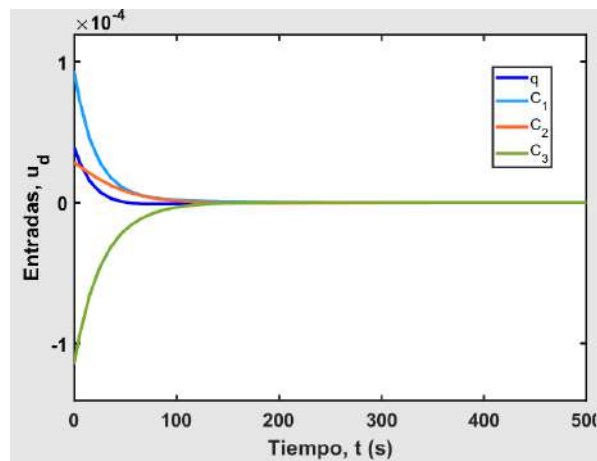


Figura 10.4: Ley de control para cambio de condición inicial.

En la Figura 10.5 se observa el comportamiento en lazo cerrado considerando nuevamente condiciones iniciales diferente de cero, pero para esta simulación se solicitan cambios de referencia. La entrada es el punto $\mathbf{u} = [0.03 \quad 0.01 \quad -0.02]$. La Figura ?? presenta la entrada de control requerida.

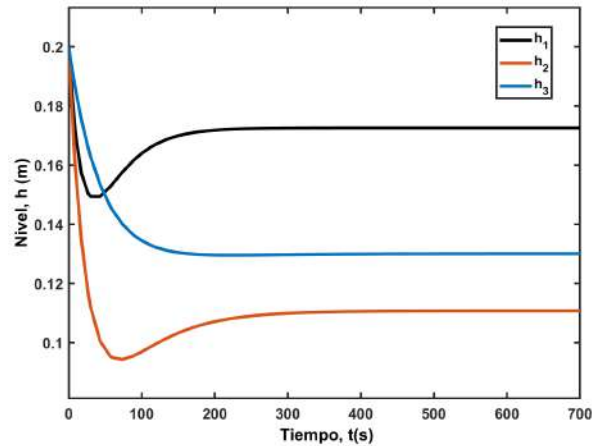


Figura 10.5: Desempeño del controlador para cambios de referencia y condición inicial diferente de cero.

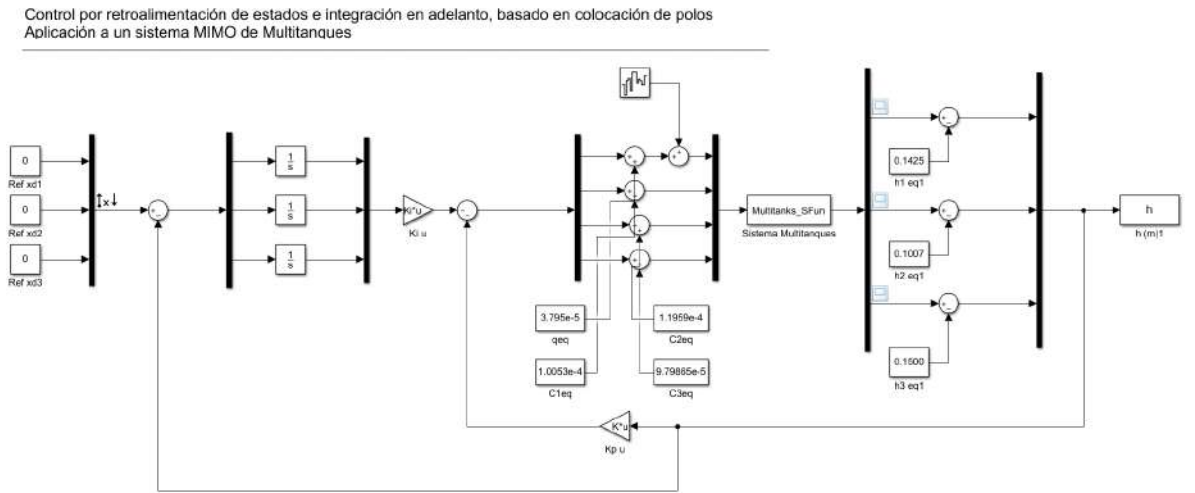


Figura 10.6: Simulador del control por retroalimentación de estados e integración en adelante de un sistema de tanques Inteco | Plataforma. Planta no lineal. Simulink®.

La ley de control fue igualmente evaluada con la planta no lineal. En la Figura 10.7 se muestra la eficacia de la ley de control para la misma prueba descrita arriba, de condiciones iniciales diferentes a las nominales y cambios de referencia. La planta no lineal tolera bien las desviaciones del comportamiento nominal en lazo cerrado con la ley de control basada en modelo lineal.

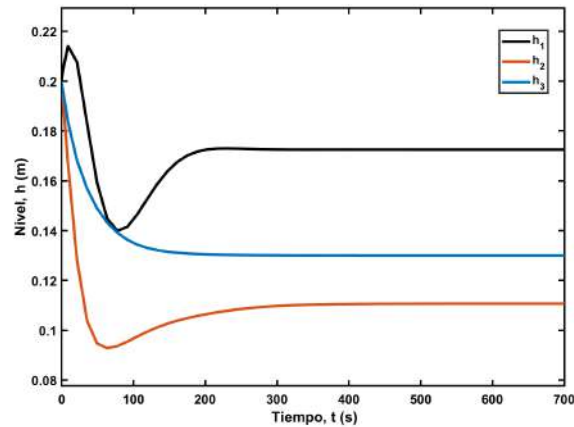


Figura 10.7: Desempeño del controlador para cambios de referencia y condición inicial diferente de cero.

Colocación en regiones LMI Ahora se van a probar controladores diseñados por colocación de polos en regiones LMI (Desigualdades matriciales). Estas son secciones en donde se colocan los polos para dar un determinado desempeño dinámico a la planta. En primer lugar se define la región LMI en la que serán ubicados los polos del sistema en lazo cerrado. Para el caso de estudio se selecciona la intersección entre un semiplano y un disco que se muestra en la Figura 10.8. La intersección entre estas dos regiones asegura una respuesta rápida sin picos muy elevados.

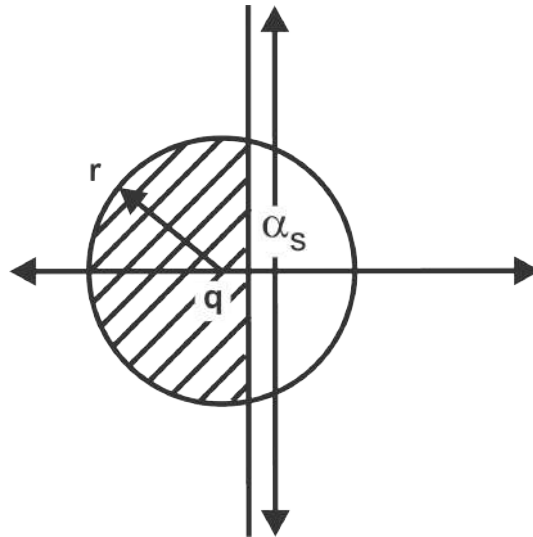


Figura 10.8: Región LMI | Semiplano izquierdo y disco de radio r .

De manera general estas regiones o áreas se especifican de la siguiente forma para garantizar que contienen los polos de lazo cerrado del sistema:

$$\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : P + sQ + \bar{s}Q^T < 0\} \quad (10.5)$$

donde \mathbb{C} se refiere al plano complejo, \mathbb{D} es un subconjunto de \mathbb{C} , $f_{\mathbb{D}}(s) = P + sQ + \bar{s}Q^T$ es la función característica de la región de estabilidad. Además, \bar{s} denota la transpuesta de s , P y Q son matrices reales, se cumple que $P^T = P$. El conjunto \mathbb{D} describe diferentes secciones, como disco, semiplano izquierdo, barras horizontales, y sector cónico.

Combinando diferentes secciones es posible formar regiones de varias formas. Esto se logra mediante la intersección de las regiones básicas, como la presentada en la Figura 10.8. La intersección de regiones está definida por la condición (10.6).

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q_k \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q_k \end{bmatrix} \bar{s} < 0 \quad (10.6)$$

La formulación de la LMI hace posible colocar los polos en la región deseada del plano complejo.

De manera general, considere que A , $P^T = P$, y Q pertenecen a \mathbb{R} , entonces todos los valores propios de A se encuentran en una región estable definida por la condición (10.5), si y solo si, existe una matriz $X = X^T$ simétrica y real, tal que cumpla con la desigualdad (10.7).

$$(p_{ij}X + q_{ij}A + q_{ij}A^T X) < 0 \quad (10.7)$$

donde p_{ij} y q_{ij} son los elementos de P y Q , respectivamente. Por otro lado, el teorema de Lyapunov define la función característica $f(s) = s + \bar{s}$. Las relaciones (10.5) y (10.7) son equivalentes si se reemplaza $(1, s, \bar{s})$ por (X, XA, XA^T) .

El problema de control es calcular una matriz de ganancias K tal que permita ubicar polos en una región de intersección entre un semiplano izquierdo y un disco. La ganancia de retroalimentación se calcula resolviendo la LMI formada.

Como se mencionó antes, La formulación de la LMI para ubicar los polos inicia definiendo las regiones, en el caso de estudio, la intersección entre un semiplano izquierdo que inicia en $-\alpha_s$ y un disco de dentro q y radio r .

Para un semiplano izquierdo, la formulación de las LMI requiere la condición (10.8) y se definen las matrices P y Q (10.9).

$$s + s + 2\alpha_s < 0 \quad (10.8)$$

$$P_1 = [2\alpha_s] \quad (10.9a)$$

$$Q_1 = [1], \quad Q_1^T = [1] \quad (10.9b)$$

Para un disco, la formulación de las LMI requiere la condición (10.10) y se definen las matrices P y Q (10.11).

$$\begin{bmatrix} -r & \bar{s} + q \\ s + q & -r \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} \quad (10.11a)$$

$$(10.11b)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.11c)$$

La intersección de ambas regiones está definida por las matrices P y Q (10.12).

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_s & 0 & 0 \\ 0 & -r & q \\ 0 & q & -r \end{bmatrix} \quad (10.12a)$$

$$(10.12b)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.12c)$$

La formulación LMI que permite ubicar los polos en la región $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : P + sQ + \bar{s}Q^T < 0\}$ si y solo si existe una matriz simétrica X , tal que se cumpla:

$$X = X^T, \quad (10.13a)$$

$$Y = KX, \quad (10.13b)$$

y que satisfaga la ecuación (10.14). Para el caso de la síntesis de la ley de control por retroalimentación de estados e integración en adelante para el sistema multitanques, se considera las matrices aumentadas de la planta.

$$\begin{bmatrix} (2\alpha_s + A_{ext} + A_{ext}^T)X & 0 & 0 \\ 0 & -rX & (q + A_{ext})X + (B_{ext}Y)^T \\ 0 & (q + A_{ext})X + B_{ext}Y & -rX \end{bmatrix} < 0 \quad (10.14)$$

Cálculo de las ganancias proporcional e integral. Se construye un controlador definiendo los parámetros de la región LMI y resolviendo la desigualdad matricial mediante herramientas de Matlab[®]. Se define un problema de viabilidad que se resuelve mediante el solucionador `ffeas`. Al final del capítulo se presenta el código que usa esta herramienta.

Como resultado, se obtuvo un primer diseño definiendo la región LMI mediante la intersección de un semiplano izquierdo de desplazamiento $\alpha_s = -0.1$ y un disco con centro $q = -0.1$ y radio $r = 15$.

Los polos obtenidos (**polos** = $\text{eig}(A_{ext} - B_{ext}K)$) son:

$$\text{polos} = \begin{bmatrix} -0.11847 + 0.11327i \\ -0.11847 - 0.11327i \\ -0.11065 + 0.16421i \\ -0.11065 - 0.16421i \\ -0.11318 - 0.14979i \\ -0.11318 - 0.14979i \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

Los polos resultantes se encuentran efectivamente dentro de la región definida. Las ganancias de la ley de control son las siguientes.

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} -9806.1 & 4531.5 & 4492.2 \\ -25977 & 12004 & 11900 \\ -30902 & 14280 & 14156 \\ -25319 & 11700 & 11599 \end{bmatrix} \quad (10.16a)$$

$$(10.16b)$$

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} -88.395 & 5.7181 & -116.98 \\ -234.16 & 15.147 & -309.89 \\ -278.55 & 18.02 & -368.64 \\ -25319 & 14.765 & -302.05 \end{bmatrix} \quad (10.16c)$$

El sistema de control da una respuesta en la salida más rápida y suave que el controlador diseñado con polos cercanos a los de la planta, sin embargo, el costo energético es muy alto. Para una implementación física o en simulación es conveniente agregar un esquema para tomar en cuenta saturaciones en la salida.

Analizando el efecto de los parámetros que definen la LMI, se obtuvo un segundo diseño definiendo la región LMI mediante la intercesión de un semiplano izquierdo de desplazamiento $\alpha_s = 0$ y un disco con centro $q = -3$ y radio $r = 50$. Se eligió definir el semiplano izquierdo completo para asegurar polos negativos, pero eventualmente más conservadores que los del primer diseño porque el sistema es muy sensible.

Los polos obtenidos ($\text{polos} = \text{eig}(\mathbf{A}_{ext} - \mathbf{B}_{ext}\mathbf{K})$) son:

$$\text{polos} = \begin{bmatrix} -2.9958 \\ -3.0503 + 0.031266i \\ -3.0503 - 0.031266i \\ -0.015403 \\ -0.0086666 \\ -0.0066058 \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

Los polos resultantes se encuentran efectivamente dentro de la región definida para asegurar el desempeño buscado. Las ganancias de la ley de control son las siguientes.

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 0.023092 & 0.013757 & 0.0082231 \\ -0.0069312 & 0.037966 & 0.023911 \\ -0.011469 & -0.024307 & 0.025016 \\ -0.0079638 & -0.018664 & -0.05899 \end{bmatrix} \quad (10.18a)$$

(10.18b)

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} -5.0513e-05 & -0.00012527 & -6.007e-05 \\ 0.00042206 & -0.00034341 & -0.00018025 \\ -0.00011550 & 0.00064925 & -0.00017127 \\ -0.00014661 & -0.00033746 & 0.00042144 \end{bmatrix} \quad (10.18c)$$

La Figura 10.9 muestra el desempeño del primer diseño basado en LMI, mientras que la Figura 10.10 presenta el desempeño del segundo diseño. El primero tiene como salida una respuesta rápida, y sin grandes picos, pero el costo en la entrada es elevado. Para lograr un diseño más efectivo una solución es considerar en la síntesis la saturación. El segundo es un sistema de control lento, es posible analizar más el efecto de la posición del centro del círculo y el radio. Lo que se observó es que si se mueve un poco más a la izquierda el semiplano, el controlador resultante puede tener respuestas muy rápidas, pero el costo energético de la ley de control es muy alto.

Las pruebas de los controladores se hicieron considerando condiciones iniciales diferente de cero, y cambios de referencia. Los cambios fueron los mismos que para la última prueba del controlador con polos en lazo cerrado cercanos a los polos de la planta.

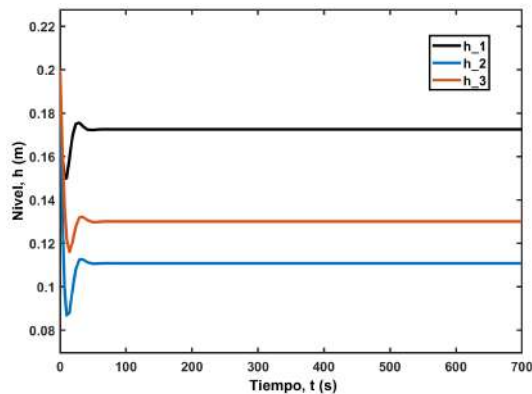


Figura 10.9: Desempeño del primer diseño del controlador con colocación de polos en regiones LMI probado en la planta lineal.

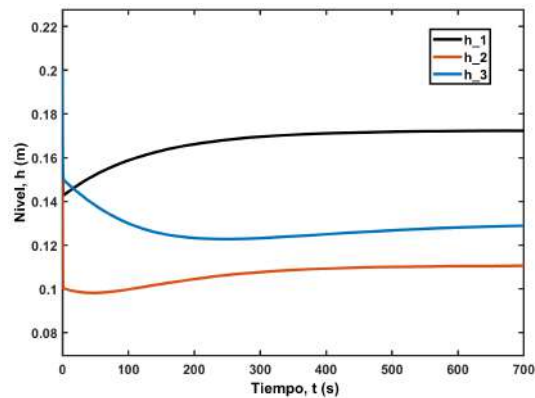


Figura 10.10: Desempeño del segundo diseño del controlador con colocación de polos en regiones LMI probado en la planta lineal.

Código para resolver las LMI que permiten la colocación de polos en regiones LMI.

```

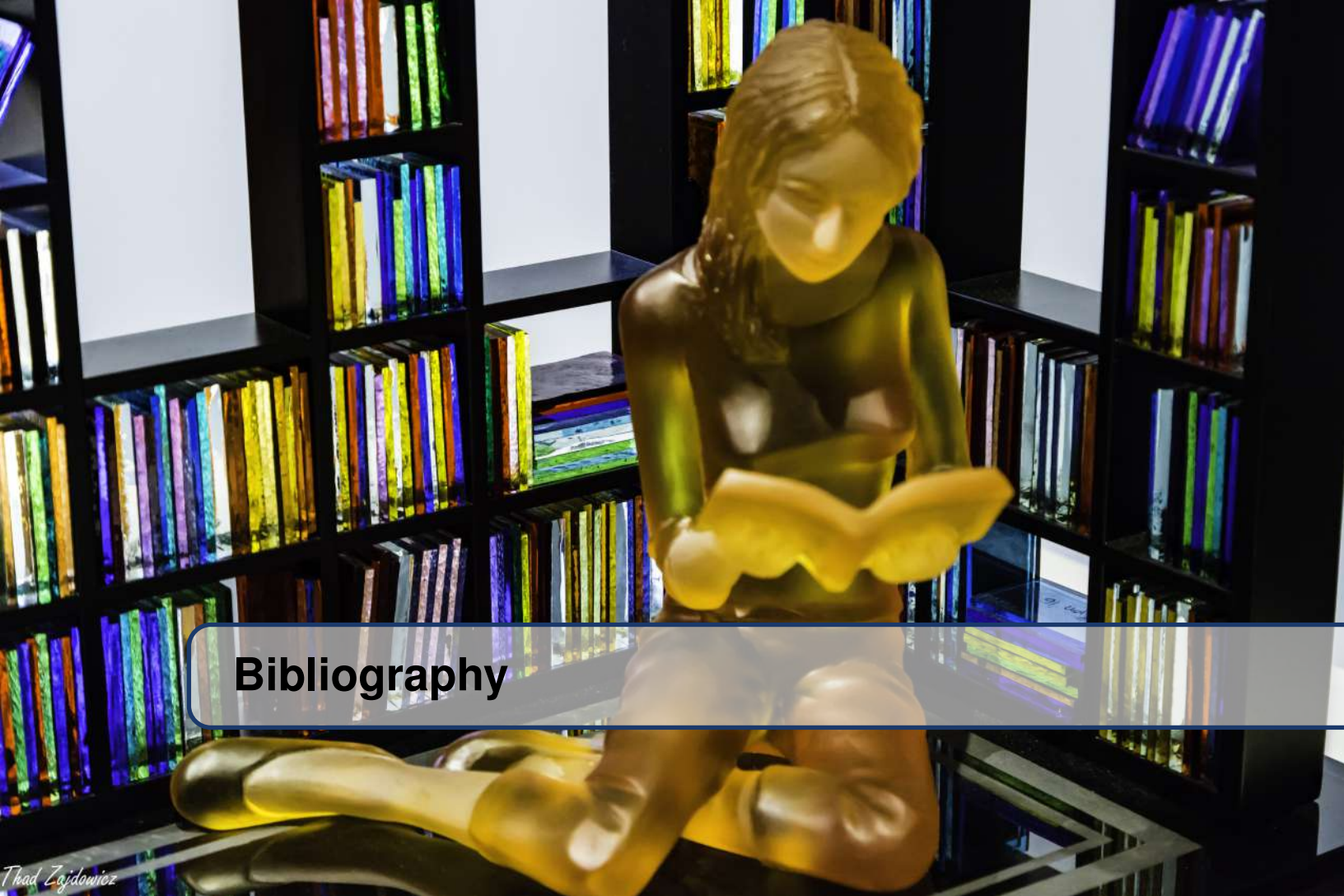
1 clear
2
3
4 % LMI Region
5
6 alphas=-0.1;
7 q=-0.1;
8 r=15;
9
10 % "Multitanks.slx" es el modelo no lineal del sistema en Simulink
11 % Calculo del punto de equilibrio x, y para una entrada u
12
13 n=3;
14 m=4;
15 x0=[];
16 u0=[3.795e-5; 1.0053e-4; 1.1959e-4; 9.79865e-5];
17
18 y0=x0;
19 ix=[];
20 iu=[1;2;3;4];
21 iy=[];
22
23 [x,u,y,dx]=trim('Multitanks',x0,u0,y0,ix,iu,iy)
24 ,
25 % Linealización del modelo del sistema.
26 % Se obtiene el modelo en espacio de estados,
27 % Como resultado se despliegan las matrices A,B,C,D.
28
29 [A,B,C,D]=linmod('Multitanks',x,u)
30
31 Aext=[A zeros(3,3);-C zeros(3,3)]
32 Bext=[B; zeros(3,4)]
33 Cext=[C zeros(3,3)]
34 Dext=zeros(3,4)
35

```

```

36     [K,X,tmin]=FunLMIDisc(Aext,Bext,alphas,q,r)
37
38     Kp=K(:,1:3)
39     Ki=K(:,4:6)
40     PCL=eig(Aext-Bext*K)
41
42
43
44     function [K,X,tmin]=FunLMIDisc(A,B,alphas,q,r)
45
46     % Initialization
47     setlmis([]);
48
49     % Definition of the variables
50     X=lmivar(1,[6 1]);
51     Y=lmivar(2,[4 6]);
52
53     % Build LMI pole placement
54     ppl=newlmi;
55     lmiterm([1,1,1,X],A,1,'s');
56     lmiterm([1,1,1,X],2*alphas,1);
57
58     lmiterm([1,2,2,X],-r,1);
59
60     lmiterm([1,3,2,X],q,1');
61     lmiterm([1,3,2,X],A,1);
62     lmiterm([1,3,2,Y],B,1);
63
64     lmiterm([1,3,3,X],-r,1);
65
66     ppl=newlmi;
67     lmiterm([-2,1,1,X],1,1);
68
69     % LMIinfo(LMIS)
70     LMIS=getlmis;
71
72     % Solution to the given system of LMIs
73     [tmin,xopt] = feasp(LMIS, [],-1e-05)
74
75     % Build from Xopt the unknowns X, Y
76     X=dec2mat(LMIS,xopt,X)
77     Y=dec2mat(LMIS,xopt,Y)
78
79     % Build the filter
80     K=Y*inv(X)
81
82     end

```



Bibliography

Articles

- [1] Juri Belikov y Eduard Petlenkov. “NN-SANARX model based control of a multi tank liquid-level system”. En: *International Journal of Computational Intelligence Systems* 8.2 (2015), páginas 265-277 (véase página 101).
- [2] Hamidreza Mortazavy Beni y Hamed Mortazavi. “Mathematical modeling of the solar regenerative heat exchanger under turbulent oscillating flow: Applications of renewable and sustainable energy and artificial heart”. En: *Results in Engineering* 13 (2022), página 100321 (véase página 91).
- [3] Sol-Carolina Costa et al. “Experimental and numerical flow investigation of Stirling engine regenerator”. En: *Energy* 72 (2014), páginas 800-812 (véase página 91).
- [4] Samuel Emebu et al. “A comparative study of linear and nonlinear optimal control of a three-tank system”. En: *ISA Transactions* (2022) (véase página 73).
- [5] Audun Faanes y Sigurd Skogestad. “pH-neutralization: Integrated process and control design”. En: *Computers & chemical engineering* 28.8 (2004), páginas 1475-1487 (véase página 63).
- [6] Audun Faanes y Sigurd Skogestad. “Controller design for serial processes”. En: *Journal of Process Control* 15.3 (2005), páginas 259-271 (véase página 63).
- [7] Claudia Marcela Giordano. “Ecuaciones diferenciales parciales”. En: *Series: Libros de Cátedra* (2016) (véase página 41).

- [8] Ryan O Hayre. “Materials kinetics fundamentals principles, processes and applications”. En: (2015) (véase página 23).
- [9] Akihiko Hosokawa et al. “Output feedback full-order sliding mode control for a three-tank system”. En: *ISA transactions* 133 (2023), páginas 184-192 (véanse páginas 101, 102).
- [10] Ashwani Kumar et al. “Theories and models of supercapacitors with recent advancements: impact and interpretations”. En: *Nano Express* 2.2 (2021), página 022004 (véase página 110).
- [11] L Lang y Ernst Dieter Gilles. “Multivariable control of two coupled distillation columns for multicomponent separation on a pilot plant scale”. En: *IFAC Proceedings Volumes* 22.8 (1989), páginas 85-92 (véase página 86).
- [12] Leonid P Lebedev y Ricardo O Grossi. “La ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica”. En: *Revista Internacional de métodos numéricos* (2003) (véase página 45).
- [13] Octave Levenspiel. “Design of long heat regenerators by use of the dispersion model”. En: *Chemical engineering science* 38.12 (1983), páginas 2035-2045 (véase página 91).
- [14] Dong-Juan Li. “Adaptive neural network control for a two continuously stirred tank reactor with output constraints”. En: *Neurocomputing* 167 (2015), páginas 451-458 (véase página 63).
- [15] Donggen Peng y Xiaosong Zhang. “Experimental investigation on regeneration performance, heat and mass transfer characteristics in a forced solar collector/regenerator”. En: *Energy* 101 (2016), páginas 296-308 (véase página 91).
- [16] Aldo Romero-Becerril y Luis Alvarez-Icaza. “Modelo dinámico orientado a control de un supercapacitor”. En: *Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático* 1 (2010), página 6 (véanse páginas 88, 109, 110).
- [17] Aldo Romero-Becerril y Luis Alvarez-Icaza. “Reduced order dynamical model for supercapacitors”. En: *2010 7th International Conference on Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control* 1 (2010), páginas 71-76 (véanse páginas 88, 90, 108).
- [18] Danica Rosinová, Peter Balko y Teofana Puleva. “Teaching multiloop control of nonlinear system: three tanks case study”. En: *IFAC-PapersOnLine* 49.6 (2016), páginas 360-365 (véanse páginas 76, 101).
- [19] Sandeep J Shweta Singhal Sayooj N. “Visualization of the Key Air Properties Influencing Derived Functions”. En: *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)* 9 (12 dic. de 2020), páginas 370-375. ISSN: 2278-0181. DOI: 10.17577/IJERTV9IS120177. URL: <https://www.ijert.org/visualization-of-the-key-air-properties-influencing-derived-functions> (véase página 95).
- [20] Godfrey Sikha, Ralph E White y Branko N Popov. “A mathematical model for a lithium-ion battery/electrochemical capacitor hybrid system”. En: *Journal of the Electrochemical Society* 152.8 (2005), A1682 (véanse páginas 108, 109).
- [21] Benny Stenlund y Alexander Medvedev. “Level control of cascade coupled flotation tanks”. En: *IFAC Proceedings Volumes* 33.22 (2000), páginas 185-190 (véase página 63).
- [22] U Vengateson. “Design of multiple shell and tube heat exchangers in series: E shell and F shell”. En: *Chemical Engineering Research and Design* 88.5-6 (2010), páginas 725-736 (véase página 63).
- [23] A Vande Wouwer, Philippe Saucez, Carlos Vilas et al. “Simulation of ode/pde models with matlab, octave and scilab”. En: *Cham: Springer* (2014) (véase página 32).

- [24] Zi-Jiang Yang e Hiroyuki Sugiura. “Robust nonlinear control of a three-tank system in the presence of mismatched uncertainties”. En: *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), páginas 4088-4093 (véase página 101).
- [25] Yonghua You et al. “A three-dimensional numerical model of unsteady flow and heat transfer in ceramic honeycomb regenerator”. En: *Applied Thermal Engineering* 108 (2016), páginas 1243-1250 (véase página 91).
- [26] ADOLFO ZAMORA RAMOS. “Notas para el curso: ecuaciones diferenciales parciales”. En: (2011) (véanse páginas 41, 42).

Books

- [27] Samuel M Allen, Robert W Balluffi y W Craig Carter. *Kinetics of materials*. John Wiley & Sons, 2005 (véase página 23).
- [28] Robert Byron Bird, Warren E Stewart y Edwin N Lightfoot. *Fenómenos de transporte: un estudio sistemático de los fundamentos del transporte de materia, energía y cantidad de movimiento*. Repla España; 1992 (véase página 23).
- [29] Yunus A Cengel y Afshin J Ghajar. *Transferencia de calor y masa*. Volumen 53. McGraw-Hill Interamericana, 2007 (véase página 23).
- [30] Sulaymon L Eshkabilov. *Practical MATLAB Modeling with Simulink: Programming and Simulating Ordinary and Partial Differential Equations*. Apress, 2020 (véase página 32).
- [31] Victor Manuel Hernández-Guzmán, Ramón Silva-Ortigoza y Roberto Valentín Carrillo-Serrano. *Control Automático: Teoría de diseño, construcción de prototipos, modelado, identificación y pruebas experimentales*. COLECCIÓN CIDETEC, 2013 (véase página 65).
- [32] PE Heselton. *Boiler operator's handbook*. River Publishers, 2020 (véase página 82).
- [33] Amiya K Jana. *Chemical process modelling and computer simulation*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2018 (véase página 83).
- [34] Niket S Kaisare. *Computational techniques for process simulation and analysis using Matlab®*. CRC Press, 2017 (véase página 32).
- [35] Milind S Kulkarni. *Modeling a heat regenerator-reactor with temperature dependent gas properties*. Master Thesis. Oregon State University, 1992 (véase página 95).
- [36] Jichun Li y Yi-Tung Chen. *Computational partial differential equations using MATLAB®*. Crc Press, 2019 (véase página 45).
- [37] InTeCo Ltd. *Multitank System. User's Manual*. Inteco, 2010 (véase página 102).
- [38] R Kent Nagle, Edward B Saff y Arthur David Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación, 2000 (véase página 32).
- [39] Bernard Pradin y Germain Garcia. *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Univ. du Mirail, 2010 (véase página 58).
- [40] Dennis W Readey. *Kinetics in materials science and engineering*. CRC Press, 2017 (véase página 23).
- [41] James C Robinson. *An introduction to ordinary differential equations*. Cambridge University Press, 2004 (véase página 32).

-
- [42] Francisco J Rodríguez-Ramírez. *Dinámica de sistemas*. México: Trillas: UNAM. Facultad de Ingeniería, 1989 (véase página 58).
- [43] William E Schiesser y Graham W Griffiths. *A compendium of partial differential equation models: method of lines analysis with Matlab*. Cambridge University Press, 2009 (véase página 41).
- [44] James Welty, Gregory L Rorrer y David G Foster. *Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2020 (véanse páginas 23, 25).



Índice alfabético

Thad Zajdowicz

Symbols

2a ley de Termodinámica 16

A

Algoritmo CMI 138

B

Balance de materia global 17
 Balance por componente 18
 Balances de energía 19
 Balances de materia 17
 Balances de momento 22
 Bernoulli 24
 Bibliografía 155

C

Clasificación de procesos 5
 CMI 135

CMI 2gl 139
 CMI gl 137
 CMI perfecto 136
 Comportamiento de Supercapacitor .. 107, 114
 Conceptos y Terminología 3
 Conceptos y terminología de procesos 3
 Conservación de energía 16
 Conservación de materia 16
 Conservación de momento 16
 Control de procesos 143
 Control Moderno 131
 CSTR 90

D

Definición de EDP 49
 Destilación 92

E

Ecuaciones de fluidos 24
 Ecuaciones especiales 23
 EDO 41

| | |
|----------------------------|--------|
| EDO Matlab | 42 |
| EDO Simulink | 44 |
| EDP | 49 |
| Ejemplos de procesos | 7 |
| Equilibrio | 22 |
| Espacio de estados | 29, 65 |

F

| | |
|--------------------------------|--------|
| Fick | 24 |
| Fourier | 23 |
| Función de transferencia | 32, 68 |

G

| | |
|--------------------------|----|
| Gases ideales | 12 |
| Generador de vapor | 90 |

L

| | |
|-----------------------------|----|
| Leyes de conservación | 16 |
|-----------------------------|----|

M

| | |
|----------------------------|---------|
| Matlab | 42 |
| MIMO | 33, 69 |
| Modelado | 26 |
| Modelado EDO | 107 |
| Modelado PDE | 95, 114 |
| Modelos de procesos | 81, 107 |
| Modelos para control | 29, 65 |

N

| | |
|---------------------|----|
| Navier Stokes | 25 |
| Newton | 23 |

P

| | |
|-------------------------|--------|
| Procesos en serie | 37, 73 |
|-------------------------|--------|

R

| | |
|--------------------------------|----------|
| Reactores | 90 |
| Regenerador | 98 |
| RST | 131, 143 |
| RST cancelación de ceros | 133 |

| | |
|--------------------|-----|
| RST continuo | 131 |
| RST discreto | 132 |

S

| | |
|----------------------|----|
| Simulación | 41 |
| Supercapacitor | 95 |

T

| | |
|---------------------------------|-------------|
| Tanques | 81 |
| Tanques con interacción | 81 |
| Tanques sin interacción | 84 |
| Teoría clásica de control | 65, 74, 125 |
| Transporte | 23 |

V

| | |
|-----------------------------|--------|
| Valor final | 33, 69 |
| Variables y funciones | 6 |