



EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Tesis de Doctorado

Propiedades de un Sistema de crecimiento de dos
Especies para Propósitos de Control y Modelado

presentada por

MC. Alfonso de Jesús Morales Erosa

como requisito para la obtención del grado de
**Doctor en Ciencias en Ingeniería
Electrónica**

Director de tesis

Dr. Juan Reyes Reyes

Codirector de tesis

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Cuernavaca, Morelos, México. Noviembre de 2023.

 <small>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico</small>	ACEPTACIÓN DE IMPRESIÓN DEL DOCUMENTO DE TESIS DOCTORAL	Código: CENIDET-AC-006-D20
		Revisión: 0
	Referencia a la Norma ISO 9001:2008 7.1, 7.2.1, 7.5.1, 7.6, 8.1, 8.2.4	Página 1 de 1

Cuernavaca, Mor., a 14 de noviembre de 2023

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Subdirector Académico
Presente

At'n: Dr. Víctor Manuel Alvarado Martínez
Presidente del Claustro Doctoral
del Departamento De Ing. Electrónica

Los abajo firmantes, miembros del Comité Tutorial del estudiante ALFONSO DE JESÚS MORALES EROSA manifiestan que después de haber revisado el documento de tesis titulado "Propiedades de un Sistema de Crecimiento de Dos Especies para Propósitos de Control y Modelado", realizado bajo la dirección del Dr. Juan Reyes Reyes y la codirección del Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza, el trabajo se ACEPTA para proceder a su impresión.

ATENTAMENTE



Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
CENIDET



Dr. Carlos Daniel García Beltrán
CENIDET



Dr. Guadalupe Madrigal Espinosa



Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
CENIDET



Dr. Juan Reyes Reyes
CENIDET

c.c.p: MTJ Maria Elena Gómez Torres / jefa del Departamento de Servicios Escolares
c.c.p: Dr. Jarniel García Morales / jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica
c.c.p: Expediente.



Cuernavaca, Mor.,

No. De Oficio:

Asunto:

17/noviembre/2023

SAC/179/2023

Autorización de
impresión de tesis

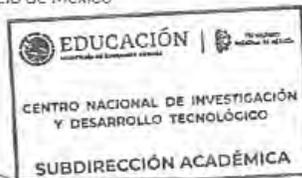
**M.C. ALFONSO DE JESÚS MORALES EROSA
CANDIDATO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"Propiedades de un Sistema de Crecimiento de Dos Especies para Propósitos de Control y Modelado"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica®
"Conocimiento y tecnología al servicio de México"



**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



Interior: Intermado Palmira S/N, Col. Palmira, C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos
Tel. 01 (777) 3627770, ext. 4104, e-mail: acad_cenidet@tecnm.mx | tecnm.mx | cenidet@cornmex



2023
**Francisco
VILLA**

Dedicatoria

A mi mamá, Tirsa, por ser la motivación más grande en mi vida. Y a mi papá, Alfonso, y hermana, Tirza, por el apoyo y amor incondicional que siempre me han mostrado.

Agradecimientos

A mi abuela, por acompañarme en todo el trayecto desde la maestría hasta el doctorado y más.

A toda mi familia, mi abuelo, mis tías y tíos, y todos mis primos, por motivarme, enseñarme, y demostrarme que siempre estarán conmigo.

A mi novia, sus papás y hermanos, porque me han demostrado gran apoyo y han bienvenido como parte de la familia.

A mi asesor, el Dr. Juan Reyes, porque me guió, enseñó, motivó, me ayudó a enfrentarme a miedos y siempre me estuvo para escucharme, corregirme y apoyarme a pesar de todo.

A mi co-asesor, el Dr. Carlos Astorga, por toda la ayuda brindada aún en momentos difíciles, y por todos las herramientas y recursos que me otorgó, desde guiarme y enseñarme.

Al Dr. Manuel Adam Medina, por ayudarme durante mi formación y enseñarme a confiar en mí y en mis decisiones.

Al Dr. Juan Vázquez, fuiste una guía tan marcada para mi desde la maestría que no tengo palabras para explicarlo, gracias.

A mis revisores por todo el conocimiento que me brindaron. La Dra. Gloria por ayudarme a dar ese siguiente paso siempre que me encontraba atorado. Al Dr. Carlos Daniel por ponerme los pies en la tierra con cada uno de sus comentarios. Al Dr. Madrigal y al Dr. Rodolfo por el incondicional apoyo hasta concluir mis estudios de posgrado. Todos fueron gran parte de mi camino y esenciales para concluir mis estudios.

Al CENIDET, mis maestros, y los amigos y compañeros que hice, porque fueron parte esencial de mi vida por muchos años.

Al Tecnológico Nacional de México las instalaciones donde pude desarrollar mi trabajo de investigación.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías, por los recursos brindados durante la investigación.

Propiedades de un Sistema de crecimiento de dos Especies para Propósitos de Control y Modelado

Resumen

Para este trabajo de investigación, se estudiaron y analizaron las propiedades del modelo de crecimiento logístico de una especie y el crecimiento en coexistencia, para establecer definiciones que ayuden a modelar este tipo de crecimiento logístico, es decir, calcular las tasas de crecimiento intrínsecas, predecir los parámetros de acoplamiento, y para la posible regulación de una o dos variables de crecimiento a través de sus parámetros de acoplamiento.

El presente análisis se realiza para el modelo de una especie de Verhulst, de Richards y de Von-Bertalanffy. Además, un modelo de una sola especie acoplado con una señal exógena inspirado en el modelo de Verhulst, y el modelo de crecimiento de coexistencia de dos especies. También se presentan definiciones de comportamiento de coexistencia, como la extinción de una de las especies, la coexistencia sin riesgo y el crecimiento exponencial, e inestable, de las especies según su régimen ecológico.

Los parámetros de los modelos, como la tasa de crecimiento intrínseca, se definen con la solución analítica de los modelos dinámicos, y los límites de los parámetros de acoplamiento se definen utilizando las propiedades estudiadas y se estiman inspiradas en el método de Lyapunov.

Los resultados de la estimación se expresan con un Lema de predicción y son aplicados a un proceso de germinación controlado utilizando datos de la literatura sobre un proceso de malteado, los parámetros desconocidos estimados muestran información sobre la interacción del crecimiento de la plántula y el peso total del grano, almidón y contenido de azúcar.

Además, los resultados de control se expresan con Lemmas de regulación de una especie, estos se muestran utilizando un ejemplo de simulación de una población de peces que crece independientemente de su interacción con los seres humanos, es decir, sin captura ni pesca, y después la simulación de la regulación de dicha población cuando si existe acoplamiento entre peces y humanos.

Los resultados son de utilidad en la toma de decisiones de ambos ejemplos, ya sea en un proceso de malteado o en un escenario de acuicultura.

Properties of a Two-Species Growth System for Control and Modeling Purposes

Abstract

For this research, the properties of the logistic growth model for independent and coexisting species were studied, and analyzed, to set definitions to aid in modeling this type of logistic growth, i.e., computing the intrinsic growth rates, predicting the coupling parameters that are unknown in many cases, and for the possible regulation of one or two growth variables through their coupling parameters.

The present analysis is done for the single-species Verhulst model, the Richards model, and the Von-Bertalanffy model, all of them without coupling. Furthermore, a single-species model coupled with an exogenous signal inspired by the Verhulst model, and the two-species co-existence growth model, the last one represents six different ecological regimes of interaction. Along with definitions of co-existence behavior such as the extinction of one of the species, true coexistence, and the exponential, unstable, growth of the species according to their ecological regime.

The models' parameters, such as the intrinsic growth rate are defined with the analytic solution of the dynamical models, and the coupling parameters boundaries are defined using the studied properties, and estimated inspired by Lyapunov's method.

Simulation The estimation results are expressed with a Lemma of prediction, which is for predicting the coupling parameters applied to a controlled germination process. These are shown using data from the literature on a malting process, the estimated unknown parameters show information regarding the interaction of the seedling's growth and the grain's overall weight, starch, and sugar content which could be helpful in the decision-making of a malting process.

Moreover, the control results are expressed as Lemmas of regulation of one species, these are shown using a simulation example of a fish population growing independent of human interaction (no harvesting, no fishing) and the simulation of the regulation of said population when the coupling of fish and humans is involved (harvesting, fishing).

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Estado del Arte	3
1.3. Objetivos	6
1.4. Metas	7
1.5. Justificación	7
1.6. Metodología	8
1.7. Alcance	9
1.8. Aportaciones	9
1.9. Originalidad	10
1.10. Organización del documento	10
2. Marco Teórico	12
2.1. Poblaciones	12
2.2. Modelos Matemáticos	16
2.3. Algunas propiedades de Matrices	19
2.4. Estabilidad de Lyapunov	21
2.5. Control automático	23
2.6. Modelos de Crecimiento logístico	23
2.6.1. Modelo de Verhulst	23
2.6.2. Modelo de Richards	25
2.6.3. Modelo de Von-Bertalanffy	26
2.6.4. Otros modelos de crecimiento tipo Logístico	27
2.7. Modelos de Crecimiento con acoplamiento	28
2.7.1. Modelo tipo Verhulst acoplado con una variable exógena	28
2.7.2. Modelo de Coexistencia tipo Verhulst	29

ÍNDICE GENERAL

3. Análisis de Modelos de Crecimiento	32
3.1. Propiedades Modelo de Verhulst	32
3.2. Propiedades del Modelo de Richards	35
3.3. Propiedades Modelo Von-Bertalanffy	37
3.4. Propiedades del Modelo tipo Verhulst con acoplamiento	39
3.5. Propiedades del Modelo de Co-Existencia Tipo Verhulst	41
3.5.1. Configuraciones de la Co-Existencia	42
4. Definición y estimación paramétrica	47
4.1. Tasa de crecimiento intrínseca	47
4.1.1. Cálculo de r del modelo de Verhulst	48
4.1.2. Cálculo de r del modelo de Richards	49
4.1.3. Cálculo de r del modelo de Von-Bertalanffy	52
4.1.4. Cálculo de r del modelo tipo Verhulst con acoplamiento	54
4.1.5. Cálculo de r del modelo de Coexistencia	55
4.2. Parámetro de Acoplamiento	60
4.2.1. Diagrama Interacción	60
4.2.2. Condiciones de Estabilidad del Acoplamiento	63
4.3. Ejemplo Simulación Malteado de Cebada	66
4.3.1. Definición paramétrica	71
4.3.2. Estimación del parámetro de Acoplamiento	73
5. Propuesta de Regulación del Valor final	78
5.1. Configuración del Valor final	78
5.1.1. Lema de Regulación de una especie	78
5.1.2. Lema de regulación de dos especies	79
5.2. Ejemplo Simulación Población de Peces	82
5.2.1. Simulación de una especie de peces	82
5.2.2. Simulación de una especie con acoplamiento (peces con actividad de pesca)	84
5.2.3. Simulación de dos especies en coexistencia	89
6. Conclusiones	93
A. Solución del Modelo de Verhulst	96
B. Solución del Modelo de Richards	99
C. Solución del Modelo de Von-Bertalanffy	103

ÍNDICE GENERAL

D. Solución del Modelo tipo Verhulst con acoplamiento	106
E. Productos científicos	110

Índice de figuras

2.1. Crecimiento en forma de 'S'. $x_{a1}(t)$, $x_{b1}(t)$ y $x_{c1}(t)$, son trayectorias de crecimiento con diferentes condiciones iniciales, y N es la máxima capacidad de carga	14
4.1. Simulación del modelo de Verhulst de acuerdo con los Lemas 1, 1.1, 1.2, con $x_0 = 2$, $N = 100$ y $t^* = 5$, y $r_1 = 0,0047$ calculada con (4.1)	49
4.2. Simulación del modelo de Richards de acuerdo a los Lemas 1, 1.1, 2, con $x_0 = 2$, $N = 100$, $t^* = 5$, $\beta_1 = 0,03$, $\beta_1 = 0,5$ y $\beta_1 = 4$, y $r_1 = 0,11$, $r_2 = 0,0078$, y $r_3 = 0,0026$ calculadas con (4.3)	51
4.3. Simulación del modelo de Von-Bertalanffy de acuerdo a los Lemas 1, 1.1, 2, con $x_0 = 2$, $N = 100$, $t^* = 5$, $\beta_1 = 0,03$, $\beta_1 = 0,5$ y $\beta_1 = 0,95$, y $r_1 = 0,1239$, $r_2 = 0,0564$, $r_3 = 0,2122$ calculadas con (4.5)	53
4.4. Simulación del modelo de Verhulst Acoplado de acuerdo con los Lemas 3, 3.1, 3.2, con $x_0 = 2$, $N = 100$, $t^* = 5$, $v = 5$, los parámetros de acoplamiento $\alpha_1 = 0,95\frac{N}{v}$, $\alpha_2 = 0,5\frac{N}{v}$, $\alpha_3 = -0,5\frac{N}{v}$ y $\alpha_4 = -0,95\frac{N}{v}$, y las tasas de crecimiento $r_1 = 0,033$, $r_2 = 0,026$, $r_3 = 0,085$, $r_4 = 0,0548$ calculadas con (4.7)	55
4.5. Simulación régimen de Amensalismo. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -0,9\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0041$, $r_2 = 0,027$ calculadas con (4.9)	57
4.6. Simulación régimen de Comensalismo. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0,9\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0041$, $r_2 = 0,0024$ calculadas con (4.9)	58

ÍNDICE DE FIGURAS

4.7. Simulación régimen de Competencia. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = -0,8\frac{N_1}{N_2}$, $\alpha_2 = -0,4\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0115$, $r_2 = 0,0047$ calculadas con (4.9)	58
4.8. Simulación régimen de Mutualismo. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0,3\frac{N_1}{N_2}$, $\alpha_2 = 0,25\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0031$, $r_2 = 0,0033$ calculadas con (4.9)	59
4.9. Simulación régimen de Presa-Depredador. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} =$ 5 , $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0,5\frac{N_1}{N_2}$, $\alpha_2 = -0,4\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0034$, $r_2 = 0,0077$ calculadas con (4.9)	59
4.10. Regímenes ecológicos y zonas de coexistencia a partir de $\alpha_1\alpha_2$	62
4.11. Datos del peso del embrión, obtenidos de [70]	68
4.12. Datos del peso en seco del grano de cebada, obtenidos de [70] .	69
4.13. Datos del contenido de almidón, obtenidos de [70]	69
4.14. Datos del contenido de azúcares libres, obtenidos de [70]	70
4.15. Simulación del Grano Tipo Salvaje (WT Barley)	73
4.16. Simulación de los parámetros de acoplamiento del grano de cebada WT.	74
4.17. Simulación del grano de cebada con almidones resistentes (AO Barley)	75
4.18. Simulación de los parámetros de acoplamiento del grano de cebada AO.	75
4.19. Simulación del grano con almidones de fácil degradación (HP Barley type)	76
4.20. Simulación de los parámetros de acoplamiento del grano de cebada HP.	77
5.1. Simulación del modelo de Verhulst para el crecimiento de peces sin competencia, o sin contemplar la cosecha ($\alpha = 0$). Para $x_0 = 10000$, el punto de inflexión se encuentra en $t_{ip} = 5,4$, representado por el cuadrado, y su valor final se alcanza en $t^* = 11,2$, representado por el círculo; Para $x_0 = 8000$, x_{ip} se alcanza en $t_{ip} = 5,6$ y x^* en $t^* = 11,4$; a Y para $x_0 = 6000$, el tiempo del punto de inflexión es $t_{ip} = 6$ y la duración del transitorio $t^* = 11,8$	83

ÍNDICE DE FIGURAS

5.2. Simulación del modelo tipo Verhulst acoplado para el crecimiento de una población de peces con temporada de pesca. TOP: Crecimiento de la población de peces con la máxima competencia ($\underline{\alpha}_n = -N/v$). BOT: Crecimiento de la población de peces con acoplamiento manipulable utilizando el Lema de Regulación 5 ($\alpha(t)$).	86
5.3. Simulación de la capacidad de pesca. TOP: Máxima competencia entre peces y pescadores. ($\underline{\alpha}_n = -N/v$ y $v = 1000$). BOT: Acoplamiento manipulable utilizando el Lema de regulación 5 ($\alpha(t)$).	87
5.4. Simulación del crecimiento de peces acoplado con pescadores. TOP: Crecimiento de peces con un acoplamiento máximo de los pescadores ($\underline{\alpha}_n = -N/v$). BOT: Crecimiento de peces con un acoplamiento manipulable mediante el lema 5 ($\alpha(t)$) . . .	88
5.5. Simulación de la capacidad de pesca por número de clientes. TOP: Máxima competencia y pescadores. ($\bar{\alpha} = -N/v$ y $v = 1000$). BOT: Acoplamiento manipulable ($\alpha(t)$) para $v = 1000$, $v = 2000$ y $v = 3000$	89
5.6. Simulación del crecimiento de clientes o pescadores independientes con los parámetros de la tabla 5.3.	91
5.7. Simulación de la población de peces acoplada con los clientes en crecimiento. TOP: Crecimiento de la población de peces con acoplamiento manipulable (línea continua). BOT: Acoplamiento manipulable, $\alpha_1(t)$, utilizando el lema de regulación 6 (línea discontinua).	92
E.1. Portada Artículo 1.	111
E.2. Portada Artículo 2.	112

Índice de tablas

4.1. Tipo de Coexistencia basado en el producto de $\alpha_1\alpha_2$	61
4.2. Condiciones iniciales (x_0), máximas capacidades de carga (N), y tasas de crecimiento intrínseca (r) para los diferentes tipos del grano de cebada. Los valores se muestran en gramos con- siderando que el peso inicial de las muestras es de 5g.	72
5.1. Parámetros Utilizados para la simulación.	83
5.2. Parámetros del modelo de crecimiento logístico con acopla- miento.	85
5.3. Parámetros del modelo de coexistencia en el régimen de amen- salismo.	90

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo de este trabajo de tesis se presentan antecedentes a la investigación actual, el proceso mediante el cual se define el caso de estudio, su importancia y problemática desde el punto de vista del modelado de sistemas dinámicos, sistemas de crecimiento no lineales y el control automático; el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación; las metas planteadas para cumplir los objetivos y el porqué de estos propósitos; las limitaciones de esta investigación, además de los alcances y aportaciones del proyecto de investigación.

1.1. Planteamiento del problema

Una de las intenciones del modelado de sistemas dinámicos es explicar el comportamiento de diferentes fenómenos mediante expresiones y modelos matemáticos. Su aplicación abarca campos como la física, química, biología, ecología, economía, ingeniería, computación, etc. Y su utilidad puede variar, desde el análisis teórico, simulación a través del tiempo, el diseño de controladores, hasta la predicción y optimización [1].

El planteamiento de la investigación originó desde un deseo de modelar el proceso de la germinación de semillas y definir un método de control en un germinador. Sin embargo, durante su desarrollo se concluyó que para lograr dicha meta de control es necesario tener la capacidad de hacer crecer a la planta/semilla y de reducir dicho crecimiento de manera automática, en otras palabras, poder recortar o matar el crecimiento.

Desde el punto de vista de control automático, una variable se puede

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

controlar cuando puede ser llevada de un punto inicial, A, hasta un punto final específico, B, con una acción de control. Dada la naturaleza del proceso de germinación es difícil definir estas acciones, si el objetivo de control es que el germinado en crecimiento tenga un tamaño de 5 cm ¿cómo se regula el tamaño cuando este mide 6 cm? En otro contexto, ¿Cómo se regula una población de gallinas o ganado a 20 individuos cuando su número actual es de 22? o ¿cómo se regula un banco de peces de 300 atunes a una cantidad de 250? Ya sea cortando el crecimiento, extrayendo individuos de una población, matando individuos, o aislando a la población para limitar el crecimiento, todas estas respuestas son mediante una acción independiente del proceso natural y que requieren una manipulación externa.

Uno de los hallazgos durante la investigación original es que el modelo matemático generalmente usado para el proceso de la germinación está basado en la ecuación logística [2], la cual puede ser utilizada para reproducir distintos fenómenos que tengan un comportamiento de crecimiento logístico, tal como lo indica el nombre de la ecuación.

Los sistemas dinámicos de crecimiento son aquellos que reproducen una trayectoria curva en forma de 'S', algunos ejemplos que se pueden nombrar son: la dinámica de poblaciones, esto incluye su crecimiento, extinción, migración, competencia, coexistencia, etc. La propagación de enfermedades y virus en una población de determinada especie también reproduce este tipo de curvas. También cuando son variables relacionadas con una población, como lo económico, tecnológico y político. Y el proceso de la germinación de semillas y granos mencionados previamente, el crecimiento de microorganismos y de plantas, son otros ejemplos que reproducen este tipo de trayectorias.

Es por eso que se ajusta el punto de vista desde donde se enfoca el problema de investigación, del caso particular del modelado y control de un proceso de germinación, a un caso más generalizado de modelado y control utilizando los sistemas dinámicos de crecimiento.

Con dicho ajuste, el caso de estudio original no queda descartado porque con estos modelos de crecimiento se pueden reproducir las trayectorias del proceso de germinación, así como muchos otros más. Sin embargo, al tratar de generalizar con un modelo, se crean otras problemáticas que resolver. Definir las propiedades del modelo cuando las variables en crecimiento son independientes de otras variables, definir las propiedades cuando son dependientes de otras variables, de acciones externas o entradas exógenas y en que instancias es posible controlar estos modelos analizando las propiedades anteriores.

Por ejemplo, si el caso de estudio se puede extender a cualquier variable en crecimiento que tenga un comportamiento logístico, como una población de personas, animales, plantas, microorganismos, etc. Entonces la premisa es que si una población x de cualquier especie es afectada por otra variable en crecimiento, entrada exógena, o variable manipulada, v , entonces existe un rango de v en donde es posible regular a la población x , pero esto puede ser diferente para una población de personas, para una población de animales, para una población de plantas, para una población de microorganismos, etc. Y el contexto del proceso puede determinar si esto es posible o no.

1.2. Estado del Arte

La investigación del estado del arte se desarrolla principalmente a las aplicaciones del modelo logístico de una especie y de dos especies, en qué tipo de procesos se usa, y cómo se utiliza.

El modelo logístico, también llamado modelo de Verhulst-Pearl, se introdujo para predecir el crecimiento de la población en la ciudad de Nueva York en Estados Unidos [3]. El modelo fue señalado por ser demasiado rígido y con la necesidad de una mayor flexibilidad, principalmente porque tiene punto de inflexión fijo que siempre ocasiona una curva simétrica con forma de “S”.

Desde entonces se han propuesto varias adaptaciones del modelo en respuesta a su rigidez, con el objetivo de modelar el crecimiento de poblaciones o especies individuales con la capacidad de reconfigurar la trayectoria en forma de “S”, añadiendo parámetros, tal es el caso de los modelos de Richards [4], Von-Bertalanffy [5], Tsoularis-Wallace [6]. También existen los casos en donde el modelo se modifica adicionando otra función logística para hacer un crecimiento bi-logístico [7], e incluso el modelo se ha estudiado por cálculo fraccionario [8]. De manera general, si la variable en cuestión se encuentra en crecimiento con recursos y espacio limitado, entonces se puede reproducir con algún tipo de modelo logístico. En [9, 10] se analizan varios de estos modelos delimitando que el objetivo no tiene que ser encontrar el mejor modelo, sino el que se adapte mejor a los datos y el proceso estudiado.

La curva logística, reproducida mediante un tipo de modelo de crecimiento logístico, es una de las herramientas principalmente utilizadas para analizar la dinámica de poblaciones de humanos [11, 12], sin embargo el término población no es específico para un conjunto de personas, sino a un conjunto de individuos o entes cohabitando en un mismo espacio. Por ejem-

plo crecimiento diferentes tipos de animales [9, 13-19]; el crecimiento de un conjunto de plantas de la misma especie [20-23]; el proceso de germinación de una poblaciones de semillas [24-28]; el crecimiento de microorganismos celulares y bacterias [29-34]; la propagación de virus y enfermedades, lo cual está relacionado con el crecimiento de poblaciones infectadas [35-42]; y hasta el crecimiento de tecnología , energía, producción y actividades relacionadas a la industria [43-47].

De la literatura se resaltan los ejemplos siguientes: Se utiliza la función logística para representar el número de frutas de diversas plantas a condiciones ambientales específicas y dentro de un espacio determinado [48]. También se usa la función logística para representar la actividad enzimática dentro de una semilla de cebada durante su germinación y etapas tempranas de crecimiento [49, 50]. Y para determinar el tamaño y número de peces en una población [51, 52].

Los ejemplos y procesos mencionados anteriormente representan el crecimiento de una sola especie, sin embargo, eso tiene un problema potencial de regulación cuando se trata de diseño de controladores y de modelado. Esto es porque no es posible hacer negativo el valor del crecimiento. Sin embargo, cuando una variable en crecimiento es acoplada con una señal u otra variable externa, la regulación del crecimiento de una de estas variables es posible.

Basado en la estructura del modelo logístico y el modelo de Lokta-Volterra que describe interacciones tipo presa depredador, se puede construir un modelo de coexistencia que acople dos variables en crecimiento. Tiene dicho nombre ya que, dependiendo del signo asociado a los parámetros de acoplamiento, las dos variables representan diferentes regímenes ecológicos de coexistencia en la naturaleza, tales como: Neutralismo, Amensalismo, Comensalismo, Mutualismo, Competencia y Presa-Depredador. De manera que estas variables pueden coexistir favorablemente, y aprovecharse del crecimiento de la otra, o pueden coexistir desfavorablemente y llevarse al borde de la extinción. [53, 54].

A continuación, se presentan algunos ejemplos encontrados en la literatura de este tipo de interacción. En la población humana, cuando esta se ve afectada por la implementación de alguna política o propaganda [55], y cuando dos poblaciones con diferentes ideologías son acopladas [56]. Así como un análisis del modelo cuando existe una relación simbiótica en casos biológicos y sociales [57].

Con respecto a los animales, el crecimiento de dos especies con beneficio mutuo [58, 59], cuando compiten por recursos [60], y en una interacción de

presa-depredador [61]. Específicamente se pueden mencionar, el crecimiento de una población de peces cuando es acoplada con peces de diferente especie y tamaño ([62, 63]), además de estudiar la interacción con otros peces, calidad de recursos, y del ambiente para la definición de dicha interacción [64, 65]. Y también el crecimiento de diferentes especies de tortugas [66].

Con respecto a las plantas y/o semillas, se analiza el crecimiento de una especie cuando existe alguna clase de competencia con objetivo de definir si es posible regular la dinámica de la población de algas [67], y también los efectos de la competencia en dos diferentes tipos de plantas [68], así como el crecimiento de sorgo cuando tiene contacto con hierbas malignas [69]. Además que los estudios de un proceso específico de germinación, como lo es el malteado de granos, sugiere que los nutrientes y el embrión de la semilla están en un tipo de interacción ecológica mediante experimentos con cebada [70, 71] y avena [72].

En poblaciones de microorganismos, se presenta el crecimiento de dos tipos de células de cancerígenas en tumores [73].

En otro tipo de poblaciones, relacionado a la economía, el crecimiento de proveedores mayoritarios y minoritarios en la industria [74], y el crecimiento acoplado de los vehículos a base de combustible fósil y los eléctricos o de combustible amigable con el medio ambiente [75]. Y el crecimiento de sistemas de innovación relacionado a la tecnología [76].

La competencia, o el acoplamiento, en un modelo de crecimiento sugiere que la regulación de la población es posible mediante dicho acoplamiento [77]. El problema es definir de manera concreta como están acopladas estas variables, cuando se encuentran acopladas, y que valor y significado tiene este acoplamiento, de manera que se pueda definir un rango en donde se puedan regular las poblaciones. Por ejemplo, en el caso de crecimiento de peces con el objetivo de acuicultura, el equipo y el tipo de pesca que se utilice puede definir el acoplamiento entre los peces y los humanos que vayan a realizar la pesca [78].

El modelo de coexistencia puede representar varios regímenes ecológicos que define cuando las variables están en competencia, cuando se ayudan, o cuando se ignoran, mediante sus parámetros de acoplamiento, es por eso que su análisis es de utilidad para determinar la posibilidad de la regulación de la población a través de dicho parámetro. En [79] se realiza un análisis enfocado al control del modelo logístico, en donde se adiciona una variable de control como una función lineal, dicha variable es una interpretación simplificada del acoplamiento previamente mencionado, ya que no se relaciona

con los parámetros del modelo ni con otras poblaciones o especies. También existe un análisis del modelo de coexistencia con propósitos de regulación pero haciendo énfasis en el parámetro de la máxima capacidad de carga, en específico, cuando una variable externa afecta la máxima capacidad de carga [80, 81], sin embargo en este trabajo de investigación se analiza con énfasis en el parámetro de acoplamiento.

Después del análisis del estado del arte, se puede hacer una suposición en la cual se basa el proyecto de investigación. Tomando en cuenta el enfoque de control automático, los parámetros de acoplamiento del modelo de coexistencia pueden ser utilizados para regular la población. Esto quiere decir que existe una estructura del modelo de coexistencia en donde es posible diseñar un algoritmo de regulación para alguna configuración de los parámetros de acoplamiento.

1.3. Objetivos

Los objetivos, tanto el general como los específicos, fueron definidos después del estudio del estado del arte y del planteamiento de la investigación. Cabe destacar que estos objetivos fueron ajustados desde el punto de vista específico del proceso de germinación, al caso general de los modelos de crecimiento logístico.

Objetivo General: Proponer un método de modelado y un enfoque de control para un modelo dinámico de crecimiento de coexistencia basado en su estructura y propiedades paramétricas.

Objetivos Específicos:

- Analizar el modelo de coexistencia y determinar las propiedades de sus parámetros para definir si son desconocidos o invariantes en el tiempo y seleccionar un método de estimación adecuado.
- Definir los escenarios donde la regulación es posible para los modelos de coexistencia.
- Diseñar un algoritmo de regulación y predicción de los parámetros de acoplamiento para los escenarios definidos.

1.4. Metas

Las metas que se plantearon, las cuales se desean cumplir al desarrollar los objetivos son:

- Definir la tasa de crecimiento intrínseca y el parámetro de acoplamiento para determinar cuando existe coexistencia, o el exterminio de alguna especie.
- Seleccionar, o proponer, un método para calcular y predecir dichos parámetros respectivamente, y poder reproducir el modelo.
- Definir las condiciones necesarias de regulación a través de los parámetros de acoplamiento.
- Diseñar un algoritmo de regulación de una especie con acoplamiento y de dos especies en coexistencia.

1.5. Justificación

Antes de abordar la propuesta de regulación, al estudiar y explorar los modelos de crecimiento logístico, se resaltó un área de oportunidad cuando se notó que el modelo generalmente es utilizado en su representación estática, es decir, el modelo logístico fue planteado de manera dinámica sin embargo se utiliza con mayor frecuencia la función logística sin aprovecharse de un análisis del modelo dinámico. Además, con respecto a la regulación, estos modelos pueden no incluir de manera natural una señal entrada o de excitación, pero es posible su regulación cuando son acoplados con otra variable mediante la configuración de dicho acoplamiento, esto quiere decir que es una regulación a partir de la manipulación de parámetros.

Para el área de control automático, el análisis de los modelos dinámicos es importante porque se obtiene información de algunas propiedades como los puntos de equilibrio, los puntos de inflexión, la duración del transitorio, la dinámica a través del tiempo, entre otros. La función estática se obtiene al solucionar analíticamente el modelo dinámico, por lo tanto, si solo se utiliza la función estática, se considera el proceso en un instante de tiempo y existe información de la dinámica que no se considera o se pierde.

Durante la investigación de los modelos de crecimiento, se encontró que un modelo de dos especies coexistiendo, que tiene la flexibilidad de reproducir

diferentes trayectorias para explicar diferentes regímenes ecológicos, puede ser regulado mediante la configuración y manipulación de los parámetros que acoplan estas dos variables. Un enfoque de control y modelado, es decir, la definición de las propiedades de los modelos de crecimiento logístico y de coexistencia para proponer algoritmos de regulación y predicción, puede ser de utilidad en diferentes áreas de investigación donde se tiene el conocimiento substancial de un sistema en específico y se deseen simular escenarios de regulación o de predicción, por ejemplo, alguien especializado en el análisis de poblaciones en cautiverio o en área en específica, ya sea de animales de su misma especie o en coexistencia con otras; alguien dedicado al análisis de datos en crecimiento, como económicos o de tecnología; o alguien dedicado al crecimiento de semillas y granos, ya sea con el propósito de germinar alimento para el ganado, para consumo humano o para otro proceso.

Tras definir los hallazgos anteriores, y debido a que el enfoque de la investigación es de control y modelado, es de importancia tener definiciones para la regulación y predicción de modelos de coexistencia de crecimiento logístico.

1.6. Metodología

Los pasos que se siguieron para la realización de esta Tesis fueron los siguientes:

1. Definir el problema de investigación;
2. Hacer un estudio del estado del arte acerca de los modelos de crecimiento logístico, su regulación y predicción mediante los parámetros de acoplamiento;
3. Analizar los modelos de crecimiento de una y dos especies, definir lemas para el valor final, puntos de equilibrio, puntos de inflexión y, posteriormente, definir la duración del tiempo de transitorio y el instante de tiempo cuando ocurre el punto de inflexión;
4. Definir los parámetros del modelo, los supuestos, desconocidos y los conocidos. Los parámetros conocidos son definidos mediante el análisis del modelo dinámico y los lemas previamente mencionados;

5. Reproducir el modelo dinámico de crecimiento logístico de una especie y de dos especies.
6. Proponer un lema para la predicción del parámetro de acoplamiento desconocido haciendo un análisis de Lyapunov usando el modelo dinámico;
7. Y proponer un lema para la regulación del modelo de coexistencia.

1.7. Alcance

- Solo se van a considerar modelos de crecimiento logístico con acoplamiento de una o dos variables para el objetivo de control.
- Los casos de predicción pueden ser aplicados a más de una variable bajo la estructura correcta.
- Los modelos matemáticos no tienen en consideración una señal de entrada natural.
- El caso de estudio es aplicado a nivel simulación ya que el análisis es sobre el modelo teórico.

1.8. Aportaciones

Como aportaciones se tiene lo siguiente:

1. El análisis de los modelos de crecimiento de logístico de una variable con acoplamiento y de dos variables acopladas para definir propiedades de coexistencia.
2. Una metodología de modelado,
 - Primero, se calcula la tasa de crecimiento intrínseca con información tal como la duración del transitorio o el instante de tiempo del punto de inflexión,
 - Segundo, la definición de un lema para la predicción del parámetro de acoplamiento.
3. La propuesta de una ley de manipulación paramétrica para la regulación de una especie con acoplamiento y de dos especies en coexistencia.

1.9. Originalidad

- Con el análisis de los modelos de coexistencia se define cuando se puede regular una de las dos especies, cuando existe una coexistencia sin riesgo de extinción por ninguna de las variables, y cuando una de las especies está en riesgo de extinción.
- Se calcula la tasa de crecimiento de las variables involucradas en un caso de germinación controlada.
- También se utiliza el lema de predicción para estimar el parámetro de acoplamiento entre las variables de interés en el mismo ejemplo de germinación.
- Y, con la manipulación paramétrica, se regula la población de peces modificando el parámetro de pesca y la cantidad de pescados admitidos por individuo.

Además de la posibilidad de extrapolar estos resultados para ser aplicados a un modelo de la misma estructura (coexistencia), pero de múltiples especies como uno de los trabajos futuros.

1.10. Organización del documento

El documento actual tiene el orden a continuación, en el capítulo uno se presentaron las motivaciones, planteamiento y los objetivos del proyecto de investigación; el capítulo dos presenta el marco teórico necesario para entender todo lo relacionado con la investigación, desde definiciones de poblaciones, los modelos de crecimiento, y las herramientas matemáticas utilizadas para su resolución; el capítulo tres presenta el análisis de los modelos matemáticos de crecimiento logístico de una variable tipo Verhulst, Richards, Von-Bertalanffy, y Verhulst con acoplamiento, así como el modelo de dos variables tipo Verhulst y sus configuraciones ecológicas; el capítulo cuatro se enfoca en la definición de los parámetros de los modelos logísticos y las condiciones mínimas necesarias para su reproducción, también la predicción de los parámetros de acoplamiento mediante un análisis de estabilidad y la propuesta de un lema de predicción; el capítulo cinco hace énfasis en la regulación del modelo y se propone el lema de regulación; finalmente, en el

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

capítulo seis se concluye con los últimos comentarios, la interpretación de los resultados y los trabajos futuros.

Capítulo 2

Marco Teórico

A continuación, se presentan las herramientas y el marco teórico que cubre lo necesario para entender el desarrollo de la tesis de investigación.

2.1. Poblaciones

Los organismos y seres vivos de la Tierra se han desarrollado, evolucionado, y adaptado a las condiciones del medio ambiente debido a que están en constante interacción entre poblaciones y con otras especies. Los métodos para controlar, manejar y tener información de la supervivencia de las especies provienen del conocimiento de las interacciones entre los organismos, las poblaciones y el impacto del ecosistema [82].

Un ecosistema es un sistema biológico constituido por una comunidad de seres vivos y el medio natural en que viven. Un ser vivo puede ser un organismo o un microorganismo. Y una población es un conjunto de organismos o microorganismos. Sin embargo, un organismo también puede ser definido como una organización encargada de desempeñar una labor determinada, o un conjunto de empleados, oficinas o dependencias que forman una organización, es decir, que una población no es exclusiva de seres vivos.

El estudio de una población se puede dividir en una parte estática y otra dinámica. Sin embargo, es importante comprender que estas no son estáticas, sino que cambian a lo largo del tiempo y su crecimiento se ve afectado por factores externos que no dependen de la población (abióticos) y por factores internos de la misma población (bióticos).

La estructura de una población se relaciona con la parte estática, esto

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

indica como está distribuida la población, por sexo y edad, por ejemplo, una población de 0-10 años de personas no tiene crecimiento ya que los seres humanos no pueden reproducirse a esa edad, sin embargo, una población de 20-30 años está en etapa de reproducción. También existen poblaciones que se reproducen en etapas, por ejemplo, las mariposas que ponen huevos, eclosionan, crecen las larvas, crean sus capullos y se convierten en mariposas; y las plantas, crecen las semillas o granos, estos se hidratan, germina el embrión, y crece la planta. Además, la población puede estar distribuida de manera homogénea, agrupada, de manera aleatoria, o tener diferente proporción entre machos y hembras. La estructura de una población es compleja y depende de muchos factores.

La parte dinámica se relaciona con el cambio de la población con respecto del tiempo, el análisis es determinado por factores como la natalidad, mortalidad, migración y el mismo crecimiento de los organismos.

La mayoría de los organismos se desplazan provocando cambios en el crecimiento de la población, los recursos, los depredadores, las oportunidades de reproducción y de crecimiento, son causantes de que una población se desplace o permanezca en un lugar. A grandes rasgos, dos factores contrarios pueden determinar el cambio en una población, el potencial biótico y la resistencia ambiental. El primero corresponde a la capacidad de reproducción de una población sin restricciones y en condiciones ideales. El segundo corresponde a las limitaciones sobre el crecimiento que brindan los elementos naturales y no naturales del ecosistema, como la interacción entre la misma población, la falta de recursos, comida, nutrientes, las sequías, las inundaciones, los desastres naturales, el espacio disponible, etc. Al relacionar el tamaño de la población con estos factores, se puede asumir que la tasa de natalidad está prácticamente denominada por el potencial biótico y la tasa de mortalidad por la resistencia ambiental [83].

El crecimiento de una población se puede describir con una trayectoria en forma de "S", y se denomina como un crecimiento de tipo logístico o sigmoideo. Este tipo de crecimiento se basa en que la población está en condiciones naturales, con recursos y espacio limitado, comienza desde una condición inicial y su crecimiento es de manera exponencial hasta que la resistencia ambiental lo limita y este disminuye lentamente hasta estabilizarse en su máxima capacidad de carga.

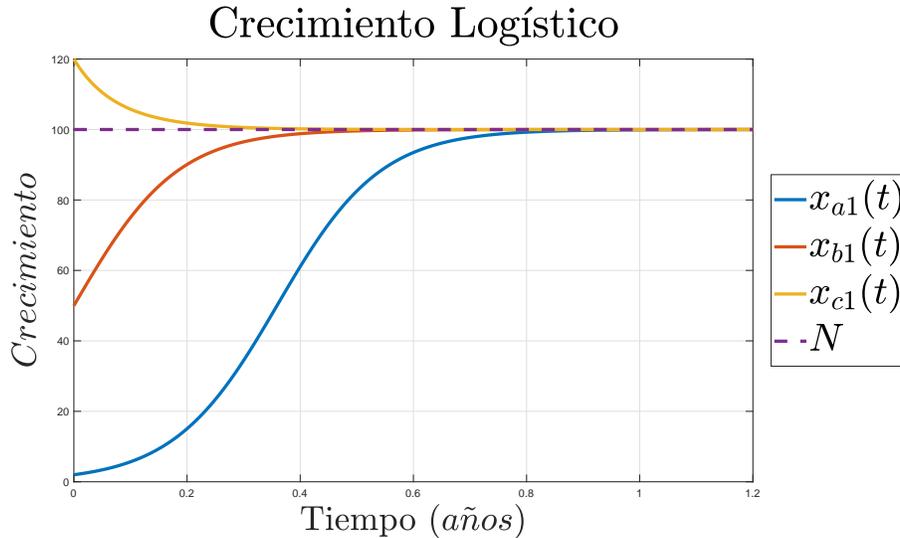


Figura 2.1: Crecimiento en forma de 'S'. $x_{a1}(t)$, $x_{b1}(t)$ y $x_{c1}(t)$, son trayectorias de crecimiento con diferentes condiciones iniciales, y N es la máxima capacidad de carga

El crecimiento de la población humana tiene un comportamiento basado en el crecimiento logístico, igual que muchas de las especies en la naturaleza, sin embargo, el ser humano tiene la capacidad de manipular y controlar el medio que lo rodea y los recursos que puede obtener mediante avances de la tecnología, medicina, y de la investigación, con el objetivo de mantener e incrementar su población. Históricamente, con grandes catástrofes vienen grandes avances, por ejemplo, con las epidemias vienen vacunas, medicinas, equipo médico y avances en la salud; con los desastres naturales vienen mejoras en infraestructuras, materiales, avances en la construcción, y en la detección de fenómenos naturales.

De manera general, para cualquier población, existen factores que pueden evitar o promover el crecimiento de una población, un ejemplo de esto es la tecnología, mencionado previamente. Estos factores reguladores del crecimiento pueden ser independientes o dependientes de la misma población o de otra población.

- Factores de Regulación Independientes: Son aquellos que alteran el crecimiento independientemente de la densidad de población, estos afectan de manera particular a poblaciones con una corta etapa de vida

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

y generalmente son externos a la población. La temperatura, la luz, la humedad, y el clima, en forma de fenómeno natural, son el mejor ejemplo de reguladores independientes, sin embargo, para poblaciones específicas y controladas pueden existir otro tipo de reguladores principalmente relacionados con el ser humano y los productos que puede crear.

- Factores de Regulación Dependientes: Son aquellos que varían el crecimiento de la población según la densidad de la población, o las poblaciones involucradas. Estos factores se pueden denominar como las interacciones entre comunidades, por ejemplo, el parasitismo, depredación, competencia, etc. Básicamente una población es capaz de regular a la otra

Ejemplo de factores de regulación independientes: El crecimiento de una población de plantas puede ser beneficiado o perjudicado gravemente por una inundación, sequía, incendio, etc. Las aves y el ganado emigran dependiendo de la temperatura y los recursos disponibles, relacionados con el espacio.

Ejemplo de factores de regulación dependientes: Las liebres y los lince tienen una relación de presa depredador, sin embargo las presas tienen una naturaleza de reproducción mucho mayor que los depredadores, por lo que estos funcionan como un regulador natural de población de liebres, además, si la población de liebres es muy grande los lince tienen mucha capacidad para crecer, el caso contrario es cuando las liebres no tienen tiempo suficiente para desarrollarse y crecer, por lo tanto los lince no tienen recursos y tampoco pueden crecer.

Otro factor de regulación dependiente de la población es la competencia. En microorganismos creciendo en un ambiente controlado, el valor final de las poblaciones creciendo depende de los recursos que puedan o no aprovecharse. En un experimento realizado con Paramecios, se demostró que cuando dos cultivos de estos microorganismos crecen y se alimentan de manera independiente se crea un ambiente de competencia entre las especies y crece primordialmente la que aprovecha mejor estos recursos. Sin embargo, cuando estos cultivos fueron alimentados por un mismo medio, una población que aprovecho todos los recursos y sobrevivió, mientras que la otra no se pudo adaptar y queda excluida de la competencia hasta llegar a su extinción.

Los ejemplos anteriores se pueden ver como una causa de modificación de la máxima capacidad de carga, ya que los factores de regulación son tal que la población puede sobrepasar o no llegar a su máxima capacidad de carga,

sin embargo, en este trabajo de investigación se considera que la máxima capacidad de carga es un parámetro y que los factores de regulación modifican el valor final de la población, pero no su máxima capacidad de carga. En otras palabras, los factores de regulación están relacionados con una variable externa o con otra población, pero no están relacionados con la máxima capacidad de carga.

Se destacan los siguientes puntos de la información anterior:

- La estructura de una población puede ayudar a delimitar la tasa de crecimiento intrínseca mediante variables como edad, sexo y distribución de la población.
- La máxima capacidad de carga depende de factores como el espacio en donde viven, y se puede relacionar con el ecosistema. Es decir, México tiene cierta máxima capacidad de carga por su territorio y recursos disponibles, y Japón tiene otra constitución muy diferente. Sin embargo, ambos tienen un tamaño de población muy similar, lo que indica que, con ayuda de otros factores involucrados, como la tecnología o interacción con otras poblaciones, se han aprovechado los recursos y el espacio de manera diferente en cada país.
- El valor final se puede modificar mediante la adición de otras variables independientes a la máxima capacidad de carga. Usualmente este parámetro es denominado como una variable, en donde ciertos factores pueden modificar este valor, sin embargo, es posible que este parámetro sea constante y definido solo por ciertos factores, como el espacio.

2.2. Modelos Matemáticos

Los modelos matemáticos son conjuntos de ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica de un sistema. Estos modelos pueden ser muy sencillos o muy complejos, pueden considerar todos los factores de un proceso, internos y externos, o considerar sólo los factores más importantes. Entre más factores sean involucrados en un modelo, mayor será su complejidad. Los modelos matemáticos de sistemas dinámicos son de vital importancia para:

- La investigación: Los modelos matemáticos ayudan para determinar la dinámica de un sistema o proceso, explorar diferentes condiciones de operación para optimizar y controlar.

- El diseño: Con los modelos matemáticos se pueden implementar y diseñar diferentes estrategias y estructuras de control.
- Operación de un proceso: Similar al punto anterior, los modelos matemáticos son de ayuda para simular diferentes escenarios de un sistema o proceso considerando paros o fallas sin poner en riesgo el comportamiento real.

Los modelos matemáticos que pueden representar la dinámica completa de un sistema son los modelos no lineales, esto quiere decir que un modelo matemático considera todos los posibles factores ocurriendo durante el proceso, en otras palabras, considera el proceso en todos los puntos de operación posibles. En ocasiones puede ser complicado encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales de los modelos no lineales, la complejidad de las ecuaciones diferenciales es proporcional a la precisión del modelo no lineal.

En general, un modelo no lineal se puede representar por un número finito de pares de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\
 \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ representan las variables de estado con respecto del tiempo, mientras que u_1, \dots, u_p son especificadas como variables de entrada. Usualmente se utiliza una notación vectorial (2.2) para representar el sistema dinámico (2.1).

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

y se puede reescribir el sistema para representarlo como una ecuación de

estados,

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.3)$$

en donde (2.3) es llamada la ecuación de estado, $x \in \mathbb{R}^n$ representa los estados, $u \in \mathbb{R}^m$ hace referencia a las entradas y t equivale al tiempo. Lo que significa que el cambio en el tiempo de los estados (\dot{x}) es igual a una función no lineal f que depende de los estados, el tiempo y las entradas al sistema.

Otra ecuación asociada con (2.3) es

$$y = h(t, x, u) \quad (2.4)$$

en donde $y \in \mathbb{R}^p$ hace referencia a la salida del sistema y es igual a una función no lineal h que depende de los estados (x), las entradas (u) y del tiempo (t). El conjunto de las ecuaciones (2.3) y (2.4) son las llamadas ecuaciones de estado.

Cuando el sistema no tiene presencia de una variable de entrada (u) de manera explícita, se dice que la ecuación de estado es no forzada (2.5).

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.5)$$

La ecuación de estado no forzada no necesariamente indica que el sistema no tiene entrada o que su valor es cero. Existe la posibilidad que la entrada este definida como una función dependiente del tiempo $u = \gamma(t)$, una función dependiente de la retroalimentación de los estados, $u = \gamma(x)$, o las dos, $u = \gamma(t, x)$. Y cuando la ecuación de estados no depende del tiempo, entonces el sistema es Autónomo, expresado de la siguiente manera,

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.6)$$

Modelos más sencillos que los anteriores se pueden obtener a partir del modelo no lineal y de conceptos importantes como el punto de equilibrio (x^0) y la linealización. Un punto x^0 en el espacio se define como un punto de equilibrio si la ecuación de estado no cambia con respecto del tiempo o $\dot{x} = 0$. Y cuando se aplican técnicas de linealización alrededor de un punto de operación, o punto de equilibrio, es posible obtener un modelo lineal en donde las ecuaciones (2.3) y (2.4) son representadas por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \quad (2.7)$$

A pesar que las técnicas de estudio y análisis de los modelos lineales son muy poderosas, tienen dos grandes limitantes, la primera es que el sistema se linealiza alrededor de un punto de operación, esto quiere decir que se puede predecir el comportamiento del sistema en un rango muy pequeño de puntos de operación. Y la segunda es que un sistema no lineal tiene una dinámica mucho más enriquecida que la de un sistema lineal o linealizado. Existen fenómenos esencialmente no lineales, los cuales solo se presentan con los términos no lineales y no pueden ser representados por modelos como (2.7), por ejemplo:

- **Equilibrios aislados múltiples.** Un sistema lineal solo puede tener un punto de equilibrio aislado, mientras que los sistemas no lineales pueden tener más. Esto quiere decir que el estado puede converger con uno de los múltiples puntos de operación estables, dependiendo del estado inicial del sistema.
- **Caos.** Un sistema no lineal puede tener un comportamiento de estado estable tan complejo que es aparentemente aleatorio y altamente sensible a las condiciones iniciales.

También existen casos especiales capaces de simular un modelo no lineal en un rango determinado de puntos de operación utilizando varios modelos lineales. Cuando los diferentes puntos de operación de este tipo de modelos dependen de una variación en los parámetros, es decir, cuando las matrices A , B , C y D son dependientes de un parámetro el sistema se denomina como Lineal de parámetros Variantes o LPV. Y, además, cuando esas matrices son dependientes de alguno de los estados se les llama modelos cuasi-LPV.

2.3. Algunas propiedades de Matrices

A continuación, se presentan definiciones y propiedades relacionadas con la expresión matricial de un sistema, estas herramientas son utilizadas durante el trabajo de investigación y se consideran importantes para el análisis de modelos matemáticos y diseño de controladores y estimadores.

Matriz Transpuesta

La transpuesta de una matriz se define cuando todos los elementos de

las filas (i) se intercambian por los elementos de las columnas (j) respectivamente. Algunas de las propiedades de la transpuesta de una matriz, A^T , son

1. $(A^T)^T = A$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$

Matriz inversa

Cualquier matriz definida como $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene inversa, o es invertible, (A^{-1}), cuando su determinante es diferente de cero.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}\{A\}) \quad (2.8)$$

en donde $|\cdot|$ es el determinante de la matriz y $\text{Adj}\{\cdot\}$ es la matriz de elementos adjuntos, la cual se expresa como la transpuesta de la matriz de cofactores (A^T) [84]. Sean definidos los elementos de la matriz adjunta como ad_{ij} para $i, j = 1, 2, \dots, n$, entonces cada elemento de $\text{Adj}\{A\}$ es

$$ad_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |Ac_{ij}|$$

Pseudoinversa de una matriz

Cuando sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $m > n$, entonces la matriz no es invertible, sin embargo una posible solución es mediante la pseudoinversa de una matriz (A^+) [85], escrita de la siguiente manera

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (2.9)$$

siempre y cuando el determinante de $\{A^T A\} \neq 0$, en donde $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la pseudoinversa de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, A^T es la matriz transpuesta, y $(A^T A)^{-1}$ es la inversa de una matriz cuadrada dada por el producto dentro del paréntesis. Para una sola variable, la pseudoinversa puede ser utilizada para evitarla

división de cualquier número entre cero, o un valor que no pueda ser invertido, de la siguiente manera

$$a^+ = \frac{a}{a^2 + \rho^2} \quad , \quad 0 < \rho \ll 1 \quad (2.10)$$

en donde ρ es un numero positivo mucho más pequeño que uno, de manera tal que, cuando $a = 0$ se tiene que $a^+ = 0$ y cuando $a \neq 0$ se tiene que $a^+ \cong \frac{1}{a}$.

Traza de una matriz

La traza de una matriz, $tr\{A\}$, está definida como la suma de los elementos de diagonal principal de una matriz cuadrada.

$$tr\{A\} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

en donde a_{ij} con $i = j$ es el elemento de la diagonal para $j = 1, 2, \dots, n$. Las propiedades principales de la traza de una matriz $tr\{\cdot\}$ son

1. $tr\{xA + yB\} = x \cdot tr\{A\} + y \cdot tr\{B\}$
2. $tr\{AB\} = tr\{BA\}$

Dadas las propiedades de la matriz transpuesta y la traza de una matriz, sea $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$, $N \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times q}$ y $MN \in \mathbb{R}^{m \times m}$ entonces

$$a^T MNb = tr\{MNba^T\} = tr\{Nba^T M\} = tr\{ba^T MN\}$$

2.4. Estabilidad de Lyapunov

Lyapunov demostró que ciertas funciones pueden ser usadas, en lugar de funciones de energía, para determinar la estabilidad de algún punto de equilibrio. Sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable definida en un dominio $D \subset R^n$ que autocontiene al punto de origen. Entonces la derivada de V a través de las trayectorias de un sistema como (2.3), (2.5), se expresa como:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

Lo que significa que la derivada de la función V a lo largo de las trayectorias de un sistema no lineal, autónomo o no-autónomo, depende de las ecuaciones del modelo matemático.

El método de Lyapunov es utilizado para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema. Su teoría (Lyapunov) ha sido la base para el diseño de distintos tipos de observadores ya que se puede introducir una ganancia L que garantice la estabilidad de las predicciones realizadas por el observador. El teorema de estabilidad de Lyapunov declara que

Teorema 1 *Sea $x=0$ un punto de equilibrio de un modelo no lineal como (2.5) y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que autocontiene a $x=0$. Si $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva definida y continuamente diferenciable tal como*

$$V(0) = 0 \quad \wedge \quad V(x) > 0 \quad (2.11)$$

Y su derivada es,

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (2.12)$$

Entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es estable. Además, si la derivada es negativa definida,

$$\dot{V}(x) < 0 \quad (2.13)$$

el punto de equilibrio $x=0$ es asintóticamente estable.[86]

De manera que es posible definir la función $V(x)$ con base en el modelo dinámico y a las predicciones deseadas para realizar un análisis de estabilidad. La función que satisfaga las condiciones (2.11) y (2.12), se denomina función de Lyapunov. Una función de Lyapunov es definida positiva cuando se satisface por completo la condición $V(x) > 0$ para $x \neq 0$, una función semi-definida positiva es cuando se satisface $V(x) \geq 0$. Por otro lado, una función es definida negativa o semi definida negativa cuando $V(x) < 0$ y $V(x) \leq 0$ respectivamente. Las funciones de Lyapunov pueden ser propuestas a partir de funciones de energía en ciertos sistemas, como los eléctricos y mecánicos,

sin embargo, en muchas ocasiones encontrar una función de Lyapunov definida positiva con derivada negativa definida es mediante un proceso iterativo de experimentación y refinamiento, es decir, se prueba la función y se ajusta si el resultado no es satisfactorio, a esta función se le denomina función candidata de Lyapunov. Es por eso que estas propiedades son solo suficientes para determinar la estabilidad, si el punto de equilibrio de un sistema se determina como no estable, significa que la condición de estabilidad, o estabilidad asintótica, no se pudo definir con la función de Lyapunov Candidata, eso no excluye que otra función de Lyapunov sea capaz de demostrar otras condiciones de estabilidad.

2.5. Control automático

Un sistema de control tiene como objetivo llevar los estados de un sistema ($x(t)$) desde un punto inicial (x_0) hasta un punto final (x_{ref}). Si la referencia es constante, el objetivo de control es regulación, y si la referencia es variable, el objetivo de control es seguimiento de trayectoria. Para cumplir esos objetivos existen muchas técnicas de control, por retroalimentación de estados, retroalimentación de salida, predictivo, robusto, control proporcional integral derivativo (PID), entre otros.

2.6. Modelos de Crecimiento logístico

2.6.1. Modelo de Verhulst

El modelo dinámico de Verhulst-Pearl, o modelo logístico, puede ser utilizado para reproducir el comportamiento de trayectorias en forma de S , esto incluye a cualquier variable en crecimiento desde su condición inicial hasta su valor final. El modelo se expresa con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N}\right) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (2.14)$$

en donde el valor instantáneo de la variable en crecimiento es $x(t) \in \mathbb{R} \geq 0$, la condición inicial de la variable de estado es x_0 , el parámetro de la tasa de crecimiento intrínseca es $r \in \mathbb{R}^+$ y el parámetro de la máxima capacidad de carga es $N \in \mathbb{R}^+$.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Al expandir la ecuación diferencial (2.14) se obtienen dos términos resultantes. El primero es,

$$rx(t)$$

el cual representa la tasa de cambio positiva del modelo. Cuando r tiene un valor muy pequeño el crecimiento de $x(t)$ es prácticamente insignificante, además, cuando sea $x_0 \approx 0$, el término también es cercano a cero. Sin embargo, esto cambia conforme avanza el tiempo y se acumula el crecimiento de la variable, el término empieza a tener mayor influencia y la tasa de cambio positiva de (2.14) comienza a tener un comportamiento exponencial siempre y cuando $r \neq 0$ y $x_0 \neq 0$. El segundo término,

$$-\frac{rx(t)^2}{N}$$

representa la tasa de cambio negativa del modelo, por ejemplo, el número de individuos que pierde una población. El término contiene un elemento al cuadrado y es inversamente proporcional con la máxima capacidad de carga N , por lo tanto, su magnitud será más negativa conforme la variable incremente. Cuando el crecimiento de la variable sea igual que su máxima capacidad de carga, $x(t) = N$, la tasa de cambio positiva y la tasa de cambio negativa se cancelan y el crecimiento se detiene.

Para encontrar la solución analítica de (2.14), se define la variable de tiempo tal que:

$$0 \leq t \leq t_f$$

en $t = 0$ la variable se encuentra en su punto de origen, o condición inicial, y en $t = t_f$ la variable se encuentra en su valor final o valor final deseado. Por lo tanto, en $t = 0$ se define la condición inicial como:

$$x(0) = x_0$$

El valor de la variable de crecimiento en el instante t , o la solución analítica del modelo (2.14) es:

$$x(t) = \frac{x_0 N}{(N - x_0)e^{-rt} + x_0} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es comúnmente llamada la función logística y su desarrollo se puede ver en el Apéndice A.

2.6.2. Modelo de Richards

Un modelo de crecimiento logístico con tres parámetros fue propuesto por Richards [4], la adición de un parámetro otorga al modelo un mejor ajuste a datos empíricos de crecimiento de plantas. El modelo tiene la misma estructura que el modelo de Verhulst (2.14), pero con un parámetro extra que afecta la tasa de cambio negativa del modelo,

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right) , \quad x(0) = x_0 \quad (2.16)$$

en donde el valor instantáneo de la variable en crecimiento es $x(t) \in \mathbb{R} \geq 0$, la condición inicial de la variable de estado es x_0 , el parámetro de la tasa de crecimiento intrínseca $r \in \mathbb{R}^+$, el parámetro de la máxima capacidad de carga es $N \in \mathbb{R}^+$, y el parámetro de competencia intraespecífica es $\beta \in \mathbb{R}^+$.

Cuando $\beta = 1$ el modelo se convierte en (2.14), y su tasa de cambio negativa y positiva del modelo es igual que el modelo anterior. Sin embargo, cuando $\beta \neq 1$ el parámetro tiene impacto en la tasa de cambio negativa del modelo, lo que agrega flexibilidad para modificar la trayectoria curva en forma de S , pero no a su valor/crecimiento final. Al expandir (2.16), la tasa de cambio positiva del modelo de Richards es la misma que el modelo de Verhulst, pero su tasa de cambio negativa es

$$-\frac{rx(t)x^\beta(t)}{N^\beta}$$

y cuando $x(t) = N$, las tasas de cambio positiva y negativa son iguales y el crecimiento también se detiene, entonces queda claro que el parámetro β solo afecta a la tasa de cambio negativa y no a su valor final.

La solución analítica del modelo (2.16), o la función logística de Richards, es

$$x(t) = \frac{x_0 N}{\left[(N^\beta - x_0^\beta) e^{-\beta r t} + x_0^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}}} \quad (2.17)$$

y su desarrollo se muestra en el Apéndice B.

Desde un punto de visto biológico, β representa la competencia intraespecífica, y esta es definida como la competencia entre individuos de la misma especie por los recursos disponibles. Por ejemplo, sea $x(t)$ el número de una población de plantas, entonces $x^\beta(t)$ representa una parte de la población

que está siendo obstaculizada, o facilitada, por los recursos disponibles, esto puede ser por que la población de plantas no está recibiendo la cantidad suficiente de luz, humedad o temperatura, provocando que la tasa de cambio negativa sea mayor, o todo lo contrario, están siendo expuestas a una cantidad de recursos que minimiza la tasa de cambio negativa.

2.6.3. Modelo de Von-Bertalanffy

El modelo de Von-Bertalanffy se introdujo originalmente con el propósito de modelar la trayectoria del crecimiento (en peso) orgánico de peces basándose en razonamientos fisiológicos. El modelo puede permanecer con una estructura generalizada cuando se introduce el parámetro β que afecta a la tasa de cambio negativa, como en el modelo de Richards, sin embargo, en este caso también impacta en la tasa de cambio positiva.

$$\dot{x}(t) = rx^{1-\beta}(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right), \quad x(0) = x_0 \quad (2.18)$$

en donde el valor instantáneo de la variable en crecimiento es $x(t) \in \mathbb{R} \geq 0$, la condición inicial de la variable de estado es x_0 , el parámetro de la tasa de crecimiento intrínseca es $r \in \mathbb{R}^+$, el parámetro de la máxima capacidad de carga es $N \in \mathbb{R}^+$, y el parámetro de competencia intraespecífica es $\beta \in \mathbb{R}^+$.

Al expandir (2.18), la tasa de crecimiento positiva es,

$$rx^{1-\beta}(t)$$

mientras que la tasa de crecimiento negativa es

$$-\frac{rx(t)}{N^\beta}$$

de igual manera, el crecimiento se detiene cuando $x(t) = N$. De modo que el parámetro relacionado a la competencia entre la misma especie afecta, de forma diferente que, al modelo de Richards, a la curva de la trayectoria de crecimiento, pero no a su valor final.

La solución analítica del modelo de Von-Bertalanffy Generalizado (2.18) es

$$x(t) = N \left(1 - \left(1 - \left(\frac{x_0}{N} \right)^\beta \right) e^{-\beta rt/N^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.19)$$

y su resolución paso a paso se muestra en el Apéndice C.

2.6.4. Otros modelos de crecimiento tipo Logístico

Existen otros tipos de modelos de crecimiento de tipo de logístico, todos modificando el modelo de Verhulst de una u otra manera. Por ejemplo, Smith, [87], modificó la ecuación de Verhulst-Pearl ya que no se podía ajustar a datos empíricos debido a “*time lags*”. Argumentó que cuando una población está limitada en recursos, el término $\left(1 - \frac{x(t)}{N}\right)$ se debería de reemplazar por un término dependiente de la tasa de crecimiento de recursos que No se están utilizando por la población. La ecuación de Smith es básicamente la ecuación Verhulst-Pearl escalada por un “*delaying factor*”, $\left(1 - c\frac{x(t)}{N}\right)^{-1}$. No se encuentra una solución analítica función de t .

Blumberg, [88] modificó la ecuación de Verhulst-Pearl ya que también identificó que una de sus limitaciones era la poca flexibilidad de su punto de inflexión. Utilizó la ecuación para modelar poblaciones dinámicas de órganos, o el cambio del tamaño en los órganos. Agrega dos parámetros, γ , que impacta en la tasa de crecimiento negativa similar a Richards, y también α , que impacta en la tasa de cambio positiva, de manera que los parámetros sean capaces de modificar independientemente la tasa de cambio positiva y tasa de cambio negativa. No siempre tiene solución analítica.

Turner, [89] propone una generalización de la ecuación de Verhulst-Pearl. Utiliza los parámetros introducidos por Blumberg y Richards para definir el modelo con dos parámetros β , γ . Tiene solución analítica por la selección tan específica de los parámetros. Con una parametrización adecuada se puede recuperar los modelos de Verhulst-Pearl, Richards y Blumberg.

Posteriormente, Tsoularis y Wallace, [6], introducen una generalización de la ecuación dinámica logística de manera que adecuando tres parámetros α , β y γ , es posible recuperar todos los modelos de crecimiento logístico anteriores. Su limitación es que tampoco tiene una solución analítica explícita.

Se puede resaltar que los modelos de crecimiento han sido estudiados para modificar la trayectoria de la curva en forma de S , se han agregado hasta tres parámetros para tener un mayor número de puntos de libertad y modificar el modelo a conveniencia. Sin embargo, esto generalmente significa que los modelos son más complicados de solucionar, como se puede notar ya que los modelos anteriormente mencionados no siempre tienen una solución analítica explícita y además necesitan de una definición exhaustiva de todos los parámetros utilizados.

2.7. Modelos de Crecimiento con acoplamiento

2.7.1. Modelo tipo Verhulst acoplado con una variable exógena

Todos los modelos presentados anteriormente tienen en común que su crecimiento eventualmente alcanzará la máxima capacidad de carga siempre y cuando sus parámetros, y condición inicial, sean valores positivos y diferentes de cero. Esto quiere decir que el valor final de estos modelos está dado por N y no puede ser modificado, entonces el único tipo de control que se permite es relacionado a la duración del tiempo de transitorio a través de r y β .

Al introducir una variable acoplada al modelo de crecimiento logístico, se puede definir una señal exógena o parámetro adecuado que ayude a la manipulación y regulación del crecimiento en general. Es posible definir un modelo logístico con acoplamiento o señal de entrada, utilizando la estructura del modelo de Verhulst (2.14), suponga que la variable positiva y finita, $0 \leq v < \bar{v}$, asociada con la variable en crecimiento mediante su máxima capacidad de carga, N , y un parámetro de acoplamiento, α , de tal manera que se puede expresar un modelo tipo Verhulst con acoplamiento con la siguiente ecuación,

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N} \right), \quad x(0) = x_0 \quad (2.20)$$

en donde $x(t) \in \mathbb{R} \geq 0$ es la variable de estado en crecimiento. La condición inicial de la variable de estado es x_0 . El parámetro de la tasa de crecimiento intrínseca es $r \in \mathbb{R}^+$. El parámetro de la máxima capacidad de carga es $N \in \mathbb{R}^+$. La señal exógena acoplada con el crecimiento es $0 \leq v < \bar{v}$. Y el parámetro de competencia interespecífica es $\alpha \in \mathbb{R}$.

Debido a que α puede tener valor negativo o positivo, la tasa de cambio positiva y negativa puede variar en (2.20). Cuando $\alpha > 0$, la tasa de cambio positiva es

$$rx(t) + \frac{r\alpha x(t)}{N}v$$

lo cual indica que v tiene un impacto significativo en el crecimiento, mientras tanto, la tasa de cambio negativa se mantiene como en el modelo logístico, $-\frac{rx^2(t)}{N}$. El caso contrario, cuando $\alpha < 0$, la tasa de cambio positiva se

mantiene como en el modelo clásico, $rx(t)$, mientras que la tasa de cambio negativa es

$$-\frac{rx^2(t)}{N} - \frac{r\alpha x(t)}{N}v$$

indicando que ahora v impacta en la cantidad de pérdidas que tiene el crecimiento. Cuando $x(t) = N$, el crecimiento no se detiene como con los modelos (2.14), (2.16) y (2.18), la tasa de cambio positiva y la tasa de cambio negativa se cancelan dependiendo de la señal exógena, v , y del parámetro de acoplamiento α , es por eso que la introducción de estos elementos puede ser utilizada para la regulación del crecimiento de una variable o población de una especie.

La solución analítica del modelo definido en (2.20) esta expresada por la ecuación siguiente

$$x(t) = \frac{x_0N + x_0\alpha v}{(N - \alpha v - x_0)e^{-rt(1+\alpha v/N)} + x_0} \quad (2.21)$$

y su desarrollo se puede ver en el Apéndice D.

2.7.2. Modelo de Coexistencia tipo Verhulst

Existe un modelo previamente reportado en [53, 54], en donde se reproduce el crecimiento acoplado de dos variables, o dos poblaciones, se mantiene la estructura de (2.20), sin embargo la variable exógena ahora es considerada otra variable de crecimiento. En muchos casos de la naturaleza es difícil aislar el crecimiento de una población o especie para definirlo de manera independiente, siempre existe la posibilidad de interacción entre diferentes variables, poblaciones, especies, etc. Por ejemplo:

- Los humanos coexistimos con otras personas con ideologías, pensamientos, creencias, cultura, experiencia, capacidades, e incluso edades diferentes, por no decir más. Desde una población nacional que coexiste con las demás naciones, a una población de una comunidad que coexiste con diferentes comunidades, hasta la población de una institución educacional donde coexisten estudiantes de diferentes grados. Y las especificaciones de esta coexistencia pueden tener un gran alcance, un ejemplo son las epidemias, en donde una población de individuos sanos coexiste con individuos infectados.

- En el contexto de plantas, su crecimiento está coexistiendo con hongos, hierbas, otro tipo de vegetación e incluso con otras especies, como animales y humanos. El alcance de esta coexistencia es gran libertad, ya que se puede relacionar el crecimiento de una planta con las personas que la cultivan o el crecimiento del embrión en las semillas o granos con sus nutrientes (almidón, azúcares y proteínas).
- En el contexto de los animales, están en interacción con otras especies en la naturaleza. De manera simple, esto se puede ver en el control de ganado con la adición de un perro de pastoreo o la regulación de una granja de peces con la adición de otras especies o del cultivo por pesca.

Un sistema de coexistencia de dos variables con la estructura del modelo Verhulst se representan de la siguiente manera

$$\Sigma_{CE} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{N_1} + \alpha_1 \frac{x_2(t)}{N_1} \right) & x_1(0) = x_{01} \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2(t)}{N_2} + \alpha_2 \frac{x_1(t)}{N_2} \right) & x_2(0) = x_{02} \end{cases}, \quad (2.22)$$

en donde $x_1(t) \in \mathbb{R} \geq 0$ y $x_2(t) \in \mathbb{R} \geq 0$ son las variables en crecimiento. Las condiciones iniciales son x_{01} y x_{02} . Las tasas de crecimiento intrínsecas son $r_1 \in \mathbb{R}^+$ y $r_2 \in \mathbb{R}^+$. Las máximas capacidades de carga son $N_1 \in \mathbb{R}^+$ y $N_2 \in \mathbb{R}^+$. Y los parámetros de competencia interespecífica son $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Los parámetros de acoplamiento pueden ser definidos positivos o negativos, esto indica el tipo de coexistencia entre las variables. El producto de los parámetros de competencia interespecífica describe diferentes escenarios de coexistencia en la naturaleza, en específico describe seis regímenes de interacción ecológicos, es decir, si $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, entonces es un sistema de crecimiento tipo **presa-predador**; si $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ entonces es un sistema de crecimiento en **competencia** o **mutualismo**; y si $\alpha_1 \alpha_2 = 0$, entonces el sistema de crecimiento esta en **neutralismo**, en **amensalismo** o en **comensalismo**. Para cada una de estas configuraciones ecológicas, las tasas de cambio positivas y negativas son diferentes y dependientes de α_1 y α_2 .

Los modelos sin acoplamiento, (2.14), (2.16), (2.18), y los mencionados en la sección de 2.6.4, no tienen la capacidad de modificar el valor final de la trayectoria, esto quiere decir que aún con la adición de todos estos parámetros

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

no es posible la regulación de la población, el crecimiento solo se puede acelerar o retardar, pero no regular. Su regulación es probable cuando el modelo se acopla paramétricamente con una variable exógena como en (2.20), o con otra variable en crecimiento como en (2.22). Y debido a que el crecimiento es referente a una variable que puede ser peso, tamaño, número de personas, animales, plantas, contenido de bacterias, nutrientes, enzimas, producción y consumo de energía, recursos, dinero, etc. Este acoplamiento paramétrico no está definido de manera explícita, y es dependiente del proceso.

Para este trabajo se define que un modelo de crecimiento con la capacidad de regulación debe de estar acoplado con una variable exógena o con otra variable de crecimiento.

Capítulo 3

Análisis de Modelos de Crecimiento

El análisis de los modelos matemáticos de una especie Tipo Verhulst, de Richards, Von-Bertalanffy, tipo Verhulst acoplado y de Coexistencia se desarrollan en el capítulo a continuación.

3.1. Propiedades Modelo de Verhulst

Puntos de Equilibrio Modelo de Verhulst

Igualando el modelo dinámico a cero, es posible encontrar los puntos de equilibrio del modelo de Verhulst. Se define el siguiente lema para definir los puntos de equilibrio

Lema 1 *Sean los parámetros del modelo $r > 0$ y $N > 0$, el modelo (2.14) tiene dos puntos de equilibrio (x^0), uno es trivial y el otro semi trivial:*

$$\begin{aligned}x_t^0 &= 0 \\x_{st}^0 &= N\end{aligned}\tag{3.1}$$

en donde x_t^0 es la solución cuando $x(t) = 0$, el modelo no tiene dinámica y es evidente al visualizar la ecuación (2.14). Y x_{st}^0 es la solución semi trivial ya que el término entre paréntesis de (2.14) se cancela cuando $x(t) = N$, y en consecuencia no hay dinámica. En otras palabras, siempre que la condición inicial del modelo sea igual a los puntos de equilibrio, el modelo no tendrá crecimiento, por lo que para que el modelo logístico funcione, es necesario

que la condición inicial sea diferente de cero y que el crecimiento no empiece en su máxima capacidad de carga.

Valor final Modelo Verhulst

A continuación, se plantea un lema del valor final para el modelo de Verhulst,

Lema 1.1 *Sea $x_0 \neq 0$, el valor final (x^*) de (2.14) es igual a la máxima capacidad de carga, expresado por:*

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = N \quad (3.2)$$

Consecuentemente, el valor final es igual a la máxima capacidad de carga, lo cual es evidente considerando que $x(t) = N$ también es un punto de equilibrio, entonces cuando el crecimiento incrementa y alcanza a N , se cancelan los términos entre paréntesis del modelo y este se detiene, o llega a su máximo crecimiento. Para $x_0 < N$, el modelo (2.14) tiene un crecimiento positivo hacia su máxima capacidad de carga, sin embargo, cuando $x_0 > N$, el crecimiento es negativo, y desciende desde la condición inicial hasta su máxima capacidad de carga. Una vez que se alcanza el valor final no existe forma de variar la tasa de crecimiento intrínseca para modificar el crecimiento, por lo que la regulación de una variable en crecimiento no es posible a través del parámetro r de acuerdo al planteamiento del Lema de valor final 1.1.

Punto de inflexión Modelo Verhulst

Un punto de inflexión, es un punto en una curva o gráfica donde la dirección de la curva cambia de ser convexa (curvada hacia arriba) a ser cóncava (curvada hacia abajo), o viceversa. Es decir, en un punto de inflexión, la pendiente de la curva cambia de crecer a decrecer, o de decrecer a crecer. Se define un lema de inflexión para el modelo de crecimiento tipo Verhulst a continuación,

Lema 1.2 *Sea $x_0 < \frac{N}{2}$ Y $x_0 \neq x_t^0$, entonces el modelo de crecimiento logístico presenta un punto de inflexión único y constante a la mitad del valor final (3.2),*

$$x_{ip} = \frac{N}{2} \quad (3.3)$$

Esto significa que la trayectoria sigmoideal creada por el modelo dinámico tiene un comportamiento simétrico con referencia a (3.3). Es por eso que se dice que la trayectoria es en forma de S . Si $x_0 \geq \frac{N}{2}$ entonces x_{ip} (3.3) no existe en el modelo, por lo tanto el sistema tiene un crecimiento que se comporta como un sistema de primer orden. Es importante resaltar que los sistemas de primer orden no tienen punto de inflexión ya que la respuesta que tienen no presenta cambios en la concavidad de la curvatura.

Duración del tiempo de Transitorio

El momento donde es posible extraer información del modelo, con intenciones de realizar predicciones, simulaciones, o diseño de controladores con el modelo (2.14) es en el rango de tiempo $0 \leq t < t^*$, donde t^* es el final del transitorio, o el tiempo que se tarda el crecimiento en llegar de su condición inicial a su valor final. Utilizando la solución analítica (2.15) y el Lema del valor final 1.1, es posible definir

$$x(t) \Big|_{t^*} \approx \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} \frac{99}{100}N & , x_0 < N \\ \frac{101}{100}N & , x_0 > N \end{cases} \quad (3.4)$$

y reemplazando la solución (2.15) evaluando $t = t^*$, (3.4) se convierte en

$$\frac{x_0 N}{(N - x_0)e^{-rt^*} + x_0} = \begin{cases} \frac{99}{100}N & , x_0 < N \\ \frac{101}{100}N & , x_0 > N \end{cases} \quad (3.5)$$

De manera que se puede resolver la expresión para t^* y se obtiene la siguiente expresión:

$$t^* = \begin{cases} \frac{1}{r} \ln \left(\frac{99(N - x_0)}{x_0} \right) & , x_0 < N \\ \frac{1}{r} \ln \left(\frac{101(N - x_0)}{-x_0} \right) & , x_0 > N \end{cases} \quad (3.6)$$

Para cualquier caso en donde la condición inicial (x_0) este definida, sea diferente a sus puntos de equilibrio (3.1), y además, que los parámetros N, r

sean conocidos, se puede calcular el valor de tiempo de transitorio y conocer cuánto tiempo va a tardar el crecimiento en llegar a su valor final usando la expresión (3.6).

Instante de tiempo del punto de inflexión

De manera similar al transitorio, pero ahora utilizando el Lema 1.2, se puede conocer el instante de tiempo en el cual el crecimiento es igual a su punto de inflexión. Esto es importante ya que la máxima tasa de cambio del modelo dinámico se encuentra en el punto de inflexión. El tiempo de inflexión se puede expresar de la siguiente manera:

$$t_{ip} = \begin{cases} \frac{1}{r} \ln \left(\frac{(N - x_0)}{x_0} \right) & , \quad x_0 < x_{ip} \\ 0 & , \quad x_0 > x_{ip} \end{cases} \quad (3.7)$$

donde es posible definir el tiempo de inflexión cuando la condición inicial es menor que x_{ip} , si la condición inicial es mayor que este punto no existe un punto de inflexión, por lo tanto no se puede definir el instante de tiempo en donde se encuentra.

3.2. Propiedades del Modelo de Richards

Puntos de Equilibrio Modelo Richards

El modelo de Richards tiene los mismos dos puntos de equilibrio definidos para el modelo de Verhulst. El Lema 1 se mantiene para el modelo (2.16) siempre y cuando el parámetro β sea un número real y positivo. Lo que quiere decir que los puntos de equilibrio del modelo de Richards son (3.1).

Valor Final Modelo Richards

El valor final es igual a N , el mismo que el modelo (2.14), esto quiere decir que el Lema 1.1 también se mantiene cierto para este modelo. Y demuestra que el parámetro de competencia intraespecífica, β , no tiene ningún impacto en el valor final. Por lo que tampoco es posible proponer la regulación del crecimiento a partir de este parámetro.

Puntos de Inflexión Modelo Richards

El modelo de Richards tiene la capacidad de modificar la curva en forma

de S por la libertad del punto de inflexión, que se Define con un Lema de inflexión para el modelo de Richards (2.16),

Lema 1.3 *Tal sean $\beta, r, N > 0$, y $x(0) \neq x_t^0$, el modelo (2.16) tiene el siguiente punto de inflexión*

$$x_{ip} = \left(\frac{1}{\beta + 1} \right)^{\frac{1}{\beta}} N \quad (3.8)$$

en donde x_{ip} es dependiente del valor de β , por eso la mejora en la flexibilidad de este modelo sobre el modelo anterior. Cuando $\beta \rightarrow \infty$ el punto de inflexión tiende a N , mientras que, cuando $\beta \rightarrow 0$, $x_{ip} = 0,37N$.

Duración del tiempo de Transitorio

Para encontrar la duración del tiempo de transitorio tomando en cuenta el parámetro β , se utilizan el Lema 1.1 y la función de Richards (2.17). El tiempo de transitorio t^* , para el modelo de Richards(2.16), se calcula con la expresión siguiente,

$$t^* = \begin{cases} \frac{1}{\beta r} \ln \left(\frac{99^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{(100^\beta - 99^\beta) x_0^\beta} \right) & , x_0 < N \\ \frac{1}{\beta r} \ln \left(\frac{101^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{(100^\beta - 101^\beta) x_0^\beta} \right) & , x_0 > N \end{cases} \quad (3.9)$$

en donde el parámetro se ve implicado en la duración del crecimiento, reafirmando que este parámetro no afecta el valor final sino el tiempo que tardará el crecimiento en llegar a su estabilidad.

Instante de tiempo del punto de inflexión

El tiempo que tardará el crecimiento en alcanzar su punto de inflexión se obtiene a partir de (2.17) y el Lema de inflexión de Richards 1.3,

$$t_{ip} = \begin{cases} \frac{1}{\beta r} \ln \left(\frac{(N^\beta - x_0^\beta)}{\beta x_0^\beta} \right) & , x_0 < x_{ip} \\ 0 & , x_0 > x_{ip} \end{cases} \quad (3.10)$$

3.3. Propiedades Modelo Von-Bertalanffy

Puntos de Equilibrio Modelo Von-Bertalanffy

Los puntos de equilibrio del modelo (2.18) son: $x_t^0 = 0$; $x_{st}^0 = N$. Son los mismos que los modelos anteriores, lo que quiere decir que el parámetro β sigue sin tener impacto en los puntos de equilibrio del sistema y el Lema 1 se mantiene para este modelo también.

Valor Final Modelo Von-Bertalanffy

De igual manera que los modelos anteriores, el límite de $x(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ es igual a N , esto quiere decir que el tamaño final del crecimiento no se ve afectado por β .

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = N \left(1 - \left(1 - (x_0/N)^\beta \right) e^{-\beta r t / N^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x^* = N (1)^{\frac{1}{\beta}} = N \quad (3.11)$$

por lo que, de igual manera, el Lema 1.1 se mantiene verdadero para este modelo.

Punto de Inflexión Modelo Von-Bertalanffy

La definición del punto de inflexión del modelo de Von-Bertalanffy depende del acotamiento del parámetro β , y se expresa a continuación,

Lema 1.4 *Tal sean $r, N > 0$, $x(0) \neq x_t^0$, y el parámetro sea acotado, $0 < \beta \leq 1$, el modelo (2.18) tiene el siguiente punto de inflexión*

$$x_{ip} = (1 - \beta)^{\frac{1}{\beta}} N \quad (3.12)$$

en donde x_{ip} también es dependiente del valor de β , al igual que el modelo de Richards (2.16). Cuando $\beta = 1$ el punto de inflexión es cero, no existe, mientras que, cuando $\beta \rightarrow 0$, el punto de inflexión tiende al 37% N . Cuando el parámetro esta acotado $0 \leq \beta < 1$, la flexibilidad que se le otorga a la curva en forma de “S.^{es} complementaria al modelo de Richards, ya que x_{ip} puede ser modificado entre el 37-100% de la máxima capacidad de carga de acuerdo al Lema 1.3, mientras que x_{ip} puede estar entre el 0-37% de N de acuerdo al Lema 1.4.

Duración del tiempo de Transitorio

El tiempo de transitorio (t^*), o el tiempo que tarda $x(t)$ en converger a N , se resuelve bajo la misma metodología que los modelos anteriores, utilizando el Lema 1.1 y la solución (2.19), t^* se expresa como

$$t^* = \begin{cases} \frac{N^\beta}{\beta r} \ln \left(\frac{100^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{N^\beta (100^\beta - 99^\beta)} \right) & , x_0 < N \\ \frac{N^\beta}{\beta r} \ln \left(\frac{100^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{N^\beta (100^\beta - 101^\beta)} \right) & , x_0 > N \end{cases} \quad (3.13)$$

Instante de tiempo del punto de inflexión

El instante de tiempo cuando la tasa de cambio del crecimiento es máxima se puede definir mediante la siguiente ecuación utilizando la solución analítica (2.19) y el Lema 1.4,

$$t_{ip} = \begin{cases} \frac{N^\beta}{\beta r} \ln \left(\frac{N^\beta - x_0^\beta}{\beta N^\beta} \right) & , x_0 < x_{ip} \\ 0 & , x_0 > x_{ip} \end{cases} \quad (3.14)$$

Con el análisis anterior y las definiciones mostradas hasta ahora, se puede concluir que los modelos de crecimiento no tienen la capacidad natural para modificar su valor final, las modificaciones que se realizan a los modelos de crecimiento son para obtener una mayor flexibilidad en la trayectoria en forma de S generada por el modelo. Asumiendo que la máxima capacidad de carga es un número muy grande, la modificación del punto de inflexión es de utilidad ya que se puede “suprimir.^{el} crecimiento, haciendo que el crecimiento parezca prácticamente estable, y, por otro lado, “estimular.^{el} crecimiento haciendo que el punto de inflexión sea el máximo admisible para aprovechar el crecimiento exponencial. Sin embargo, con esto no es posible regular una población o variable en crecimiento, además, teóricamente estos modelos definen una población de la misma especie o del mismo tipo, y se sabe que en la vida real las poblaciones están acopladas con otras poblaciones, ya sea de su misma especie, pero con diferentes objetivos, o de diferentes especies, que ayuden o entorpezcan el crecimiento.

3.4. Propiedades del Modelo tipo Verhulst con acoplamiento

Puntos de equilibrio Modelo Verhulst Acoplado

Los puntos de equilibrio se pueden establecer de manera simple bajo ciertas condiciones, expresadas a continuación,

Lema 2 *Sea $0 \leq v < \bar{v}$ y $|\alpha v| < N$ el modelo de crecimiento de Verhulst acoplado (2.20) tiene los siguientes puntos de equilibrio:*

$$\begin{aligned} x_t^0 &= 0 \\ x_{nt}^0 &= N + \alpha v \end{aligned} \tag{3.15}$$

Cuando v o α son igual a su valor mínimo, el comportamiento del crecimiento es igual que los modelos anteriores, sin embargo, el punto de equilibrio semi trivial se puede redefinir como no trivial cuando el parámetro y la variable de acoplamiento son diferentes de cero.

Valor final Modelo Verhulst Acoplado

En concordancia con los modelos de crecimiento, el punto de equilibrio, x_{st}^0 , es igual al valor final del crecimiento, esto se expresa a continuación

Lema 2.1 *Dada una condición inicial $x_0 \neq x_t^0$, $0 \leq v < \bar{v}$ y $|\alpha v| < N$, entonces el valor final de (2.20) consigue valores positivos y diferentes de cero,*

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = N + \alpha v \tag{3.16}$$

El valor final, x^* , excede su máxima capacidad de carga cuando el parámetro $\alpha > 0$, el crecimiento no logra alcanzar a N cuando $\alpha < 0$, y cuando $\alpha = 0$ el crecimiento y propiedades son igual que el modelo (2.14). Dado que el valor final deja de ser igual que el parámetro constante N , es posible modificar el valor final con la manipulación de α o v , sin embargo, esto sigue dependiendo de la naturaleza de estas variables por lo que información de este parámetro y variable es de vital interés.

Punto de inflexión Modelo Verhulst Acoplado

El punto de inflexión no es la excepción, ya que de igual manera puede ser modificado con la introducción de α y v ,

Lema 2.2 *Dada una condición inicial $x_0 \neq x_t^0$, $0 \leq v < \bar{v}$ y $|\alpha v| < N$, el modelo (2.20) tiene el siguiente punto de inflexión*

$$x_{ip} = \frac{1}{2}(N + \alpha v) \quad (3.17)$$

De la expresión anterior se observa lo siguiente,

Observación 1 *siempre que sea $\alpha > 0$, el punto de inflexión se puede definir,*

$$x_{ip} > \frac{N}{2}$$

indicando que el parámetro de acoplamiento puede modificar la curva en forma de S del 50 – 100 %N, y cuando $\alpha < 0$ el punto de inflexión se define,

$$x_{ip} < \frac{N}{2}$$

por lo que la flexibilidad en la curva es del 0 – 50 %N.

Con la manipulación de α es posible modificar el valor final x^* y el punto de inflexión x_{ip} de acuerdo al Lema 2.1 y 2.2 respectivamente.

Duración del tiempo de Transitorio

Es claro que una de las propiedades importantes es la duración del crecimiento, y con la solución analítica (2.21), y el Lema 2.1, el transitorio se puede calcular con:

$$t^* = \begin{cases} \frac{N}{r(N + \alpha v)} \ln \left(\frac{99(N + \alpha v - x_0)}{x_0} \right) & , x_0 < x^* \\ \frac{N}{r(N + \alpha v)} \ln \left(\frac{101(N + \alpha v - x_0)}{-x_0} \right) & , x_0 > x^* \end{cases} \quad (3.18)$$

Instante de tiempo del punto de inflexión

Y el tiempo que tardará el crecimiento en llegar a su máxima tasa de cambio se calcula con (2.21), y el Lema 2.2, a continuación,

$$t_{ip} = \begin{cases} \frac{N}{r(N + \alpha v)} \ln \left(\frac{(N + \alpha v - x_0)}{x_0} \right) & , x_0 < x_{ip} \\ 0 & , x_0 > x_{ip} \end{cases} \quad (3.19)$$

Las ecuaciones que definen el tiempo de crecimiento, ya no se refieren a cuánto tiempo se tarda el crecimiento en alcanzar su máxima capacidad de carga o su máxima tasa de cambio que se encuentra al 50% de la máxima capacidad. Al introducir una variable o parámetro que puedan regular el valor final y el punto de inflexión, las ecuaciones (3.18) y (3.19) pueden relacionarse con términos como el exterminio de la población y definir cuando se puede extinguir un número de individuos o una población entera.

3.5. Propiedades del Modelo de Co-Existencia Tipo Verhulst

El modelo de coexistencia involucra dos variables de estado, por lo que su solución analítica no se puede expresar de manera explícita. Es posible expresar la solución considerando a la otra variable en: 1) su valor final, 2) su punto de inflexión.

Puntos de equilibrio Modelo de Coexistencia Tipo Verhulst

El modelo de dos variables tiene cuatro puntos de equilibrio en total. Los primeros dos son $x_{1t}^0 = 0$ y $x_{2t}^0 = 0$. El segundo par de puntos de equilibrio esta dado por

Lema 3 *Sea el producto $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$, y la condición inicial $x_{0j} \neq 0$ para $j = 1, 2$, entonces el modelo (2.22) tiene los siguientes puntos de equilibrio no triviales (x_{nt}^0):*

$$\begin{bmatrix} x_{nt1}^0 \\ x_{nt2}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha_1\alpha_2} & \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2} \\ \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2} & \frac{1}{1-\alpha_1\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Valor Final Modelo de Co-Existencia Tipo Verhulst

Los valores finales, formulados en el siguiente lema, coinciden con los puntos de equilibrio no triviales,

Lema 3.1 *Sea el producto $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$, y la condición inicial $x_{0j} \neq 0$ para $j = 1, 2$, entonces el valor final de la trayectoria de cada una de las variables*

del modelo (2.22) esta dado por

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\alpha_1\alpha_2} & \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2} \\ \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2} & \frac{1}{1-\alpha_1\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

De la formulación anterior se resalta lo siguiente,

Observación 2 *Cuando se tiene la libertad para manipular los parámetros α_1 y α_2 , existe la posibilidad de regular la población, o variable en crecimiento. Sus valores finales dependen de la naturaleza del parámetro de acoplamiento, es decir que sus soluciones pueden exceder su respectiva máxima capacidad de carga, o ser incapaces de alcanzar dicho parámetro.*

Puntos de inflexión del Modelo de Coexistencia Tipo Verhulst

Y el punto de inflexión del modelo de coexistencia está definido a continuación

Lema 3.2 *Sea el producto $\alpha_1\alpha_2 > 4$, y la condición inicial $x_{0j} > x_{ipj}$ para $j = 1, 2$, entonces el modelo (2.22) tiene los siguientes puntos de inflexión*

$$\begin{bmatrix} x_{ip1} \\ x_{ip2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{4-\alpha_1\alpha_1} & \frac{\alpha_1}{4-\alpha_1\alpha_2} \\ \frac{\alpha_2}{4-\alpha_1\alpha_2} & \frac{2}{4-\alpha_1\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Los puntos de equilibrio, valores finales y puntos de inflexión son dependientes de la coexistencia entre las poblaciones, o el acoplamiento entre las variables.

3.5.1. Configuraciones de la Co-Existencia

El modelo de Verhulst acoplado y el modelo de coexistencia presentan la posibilidad de regular la población mediante la manipulación de α_1 y/o α_2 , sin embargo, estos parámetros pueden tener naturaleza positiva, negativa, o variable, además de representar el régimen ecológico en el cual se encuentra el sistema. A continuación, se presentan las diferentes configuraciones del parámetro de acoplamiento que se pueden utilizar en (2.22) para caracterizar las cotas superiores e inferiores de α_1 y α_2 .

Neutralismo El Régimen de Neutralismo se obtiene con la configuración de parámetros más sencilla, se puede decir que es la configuración trivial, cuando

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad (3.23)$$

en consecuencia, el modelo dinámico de competencia se convierte en un sistema de dos especies independientes en donde no existe la interacción entre las variables en crecimiento. La estructura de cada especie es igual que en (2.14), y debido a que en esta configuración las dos especies se desacoplan, los puntos de equilibrio están definidos por el Lema 1; el valor final de cada trayectoria en crecimiento es igual a su máxima capacidad de carga, es decir, Lema 1.1; Y cada variable tiene un punto de inflexión constante a la mitad de su valor final, definido por Lema 1.2.

Ejemplos de este Régimen son cualquier especie que no se relacione con otra, el crecimiento de dos depredadores, leones y tiburones; el crecimiento de semillas de lenteja y semillas de trigo en diferentes campos de cultivo; el crecimiento de la población de México y la población de Japón. De manera simple, es reproducir el comportamiento logístico de dos variables creciendo de manera independiente.

Comensalismo El régimen ecológico en donde una especie crece de manera independiente y existe una segunda especie que se aprovecha de su crecimiento, se obtiene cuando un parámetro de competencia interespecífica es cero y el otro es de naturaleza negativa. Cuando la especie indicada con el subíndice 1 tiene crecimiento independiente, y la especie indicada con el subíndice 2 es la que encuentra acoplada, sus parámetros son

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad (3.24)$$

Y la estructura correspondiente del modelo de coexistencia es

$$\Sigma_{CA12} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{N_1} \right) \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2(t)}{N_2} + \alpha_2 \frac{x_1(t)}{N_2} \right) \end{cases} . \quad (3.25)$$

en donde $\dot{x}_1(t)$ tiene puntos de equilibrio definidos de acuerdo al Lema (1), su valor final se define con el Lema (1.1) y un punto de inflexión definido por el Lema (1.2). Sin embargo, $\dot{x}_2(t)$ tiene sus puntos de equilibrio, valor final y

punto de inflexión definido por los Lemas (2), (2.1) y (2.2), respectivamente. La estructura del modelo de comensalismo puede estar invertida, es decir que el crecimiento de la variable dependiente sea indicado por el subíndice 1 ($\alpha_1 > 0$), y el crecimiento de la variable independiente por el subíndice 2 ($\alpha_2 = 0$).

$$\Sigma_{CA21} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{N_1} + \alpha_1 \frac{x_2(t)}{N_1} \right) \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2(t)}{N_2} \right) \end{cases} . \quad (3.26)$$

en donde ahora los Lemas (2, 2.1, 2.2) se mantienen ciertos para $\dot{x}_1(t)$, mientras que las propiedades de $\dot{x}_2(t)$ son definidas por los Lemas (1, 1.1, 1.2).

Algunos ejemplos del régimen de comensalismo pueden ser el comportamiento de los tiburones y las rémoras, en donde los tiburones no ganan nada de las rémoras, sin embargo, estas ganan protección y alimento del tiburón; también los árboles y los pájaros tienen un comportamiento similar, el árbol es refugio y alimento para los pájaros, mientras que los pájaros son insignificantes para el árbol.

Amensalismo Esta configuración es la contraria al comensalismo, se obtiene cuando un parámetro de competencia interespecífica es cero y el otro es de naturaleza positiva. La estructura del sistema de coexistencia coincide con (3.25) cuando

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 < 0, \quad (3.27)$$

Los Lemas (1, 1.1, 1.2) se mantienen para la variable independiente, y los Lemas (2, 2.1, 2.2), para la variable dependiente, se mantiene siempre y cuando $\alpha_2 \geq -\frac{N_2}{N_1}$. Y la estructura del sistema coincide con (3.26) cuando

$$\alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad (3.28)$$

en donde los Lemas (1, 1.1, 1.2) definen las propiedades de la variable independiente y los Lemas (2, 2.1, 2.2) de la variable dependiente siempre que $\alpha_1 \geq -\frac{N_1}{N_2}$. Algunos ejemplos de Amensalismo pueden ser las cabras, vacas, ganado y los insectos que se alimentan del mismo pasto, ya que los animales grandes pueden acabarse los recursos disponibles y/o comerse a los insectos. También en el proceso de la germinación, una semilla está compuesta de una población de nutrientes de reserva y de un embrión, en donde el embrión crece sin importar cuantos nutrientes existan y los nutrientes son consumidos a medida que crece el embrión.

Mutualismo La configuración a la cual se llega cuando ambas variables o poblaciones, se benefician del crecimiento de la otra, se llama Mutualismo, eso es cuando (2.22) tiene parámetros de naturaleza positiva,

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad (3.29)$$

y, además, deben de satisfacer la siguiente desigualdad,

$$0 < \alpha_1 \alpha_2 < 1, \quad (3.30)$$

La estructura del modelo se escribe como en (2.22), en consecuencia, sus puntos de equilibrio están definidos por el Lema (3), sus valores finales se definen por el Lema(3.1) y sus puntos de inflexión por el Lema (3.2). Algunos ejemplos de este tipo de interacción pueden ser, las abejas y las flores, ya que las abejas se alimentan de flores y al mismo tiempo ayudan a la reproducción de estas; as algas y el coral también tiene una relación similar; y de manera general, los seres humanos y las plantas y vegetales tienen una relación en donde la coexistencia beneficia al crecimiento de ambas especies.

Competencia La configuración contraria, cuando ambas variables o poblaciones se perjudican una a la otra, se llama competencia y se consigue cuando ambos parámetros de acoplamiento en (2.22) son negativos,

$$\alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 < 0, \quad (3.31)$$

Y de igual manera los Lemas (3), (3.1), (3.2) representan los puntos de equilibrio, valores finales y puntos de inflexión, respectivamente. Algunos ejemplos de esto son los leones y guepardos, elefantes y jirafas, ciervos y conejos, entre árboles, y plantas, de diferentes especies, así como en bacterias y microorganismos. Básicamente son especies que viven en un mismo entorno y compiten por un recurso limitado o por territorio, este puede ser otro animal como en el caso de los depredadores, recursos vegetales como en el caso de los animales herbívoros, o recursos como luz, agua y temperatura en el caso de las plantas y microorganismos.

Depredación Y la última configuración es la que representa la interacción entre un depredador y se presa, se obtiene cuando en la ecuación (2.22) un parámetro de acoplamiento es positivo, y el otro es negativo. Para este tipo de interacción, se mantiene la estructura del modelo (2.22) y también los

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE MODELOS DE CRECIMIENTO

Lemas (3, 3.1 y 3.2). Sin embargo, para obtener valores no negativos, se debe de cumplir la siguiente desigualdad:

Cuando el depredador este indicado por la especie 1, entonces

$$\alpha_1 > 0, \quad -\frac{N_1}{N_2} \leq \alpha_2 < 0, \quad (3.32)$$

Y cuando el depredador sea indicado por la especie 2, las desigualdades son,

$$-\frac{N_2}{N_1} \leq \alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 > 0. \quad (3.33)$$

Algunos ejemplos de esta interacción: los tiburones son los depredadores de los peces, las orcas de las focas, los leones, o guepardos, de los antílopes y/o ciervos, los hongos de las plantas, los parásitos de los microorganismos, los seres humanos somos depredadores de muchas especies de animales, etc. Son situaciones en donde la especie más fuerte se alimenta de la más débil.

Con el análisis y la definición de las propiedades de los modelos anteriores es posible determinar situaciones, por ejemplo, de que modelos se pueden regular y que modelos no se pueden regular, y además, que parámetros son los que tienen dicha capacidad de regular la población, cual es su dimensión y que naturaleza deben de tener para que esto sea posible. Por otro lado conociendo la duración del tiempo del transitorio se pueden predecir escenarios de extinción, escenarios donde la regulación sea de mayor interés, y en donde esta sea insignificante. Con el punto de inflexión se pueden predecir escenarios similares, es decir, si el punto de inflexión se define muy cercano a la máxima capacidad de carga es posible que la regulación de la población sea difícil de implementar, a diferencia de un punto de inflexión definido cerca de la condición inicial. Por último, con el conocimiento y previa definición de estas propiedades, es posible definir parámetros como la tasa de crecimiento intrínseca.

Capítulo 4

Definición y estimación paramétrica

4.1. Tasa de crecimiento intrínseca

A lo largo del documento se habla de la tasa de crecimiento o tasa de cambio, la tasa de crecimiento intrínseca y la máxima tasa de crecimiento, la diferencia entre estas tres es importante. La tasa de cambio significa el cambio de valor que tiene la variable de un instante de tiempo con respecto a otro, ya que la variable generalmente se encuentra en crecimiento, se puede decir tasa de crecimiento. La tasa de crecimiento intrínseca, r , es un parámetro del modelo. Y la máxima tasa de cambio o de crecimiento se refiere al instante de tiempo donde el cambio, en el crecimiento, está en su valor máximo.

En este capítulo se define el parámetro de la tasa de crecimiento suponiendo que se conoce la duración del tiempo de transitorio, o el tiempo de inflexión, con la finalidad de facilitar la reproducción de los modelos matemáticos de crecimiento logístico. Este parámetro puede ser definido conociendo la solución de la ecuación dinámica, además del valor final o el punto de inflexión, y el instante de tiempo cuando ocurre. Se obtiene de una manera similar al tiempo de inflexión y a la duración del tiempo de transitorio. La ventaja es que se puede definir este parámetro para el modelo de coexistencia conociendo las cotas superiores, o inferiores, del parámetro de acoplamiento.

4.1.1. Cálculo de r del modelo de Verhulst

La tasa de crecimiento intrínseca del modelo de Verhulst (2.14), la cual se puede definir constante cuando los recursos disponibles son limitados, se define con la siguiente ecuación,

$$r = \begin{cases} \frac{1}{t^*} \ln \left(\frac{99(N - x_0)}{x_0} \right) & , \quad x_0 < N \\ \frac{1}{t^*} \ln \left(\frac{101(N - x_0)}{-x_0} \right) & , \quad x_0 > N \end{cases}, \quad (4.1)$$

en donde t^* es la duración del tiempo de transitorio y se supone conocido. Cuando el proceso aún no ha terminado, por lo tanto, no se puede establecer una duración del tiempo de transitorio, la tasa de crecimiento intrínseca se define con la siguiente ecuación

$$r_{ip} = \frac{1}{t_{ip}} \ln \left(\frac{(N - x_0)}{x_0} \right) \quad , \quad x_0 < x_{ip} \quad (4.2)$$

en donde t_{ip} es el instante de tiempo en el cual el modelo se encuentra en un punto de inflexión, también se puede considerar que r calculada con t_{ip} , es la tasa de crecimiento intrínseca considerando las propiedades del punto de inflexión (máxima tasa de cambio).

En la siguiente Figura 4.1, se realiza una simulación para demostrar la utilidad para recopilar información del proceso conociendo las propiedades del modelo. Sea conocida la condición inicial $x_0 = 2$, la máxima capacidad de carga, $N = 100$ y la duración del transitorio $t^* = 5$, esto puede ser definido en cualquier unidad de tiempo, desde horas hasta años, entonces se puede recuperar la tasa de crecimiento intrínseca, simular el modelo, y además conocer su punto de inflexión y el instante de tiempo en el que sucede.

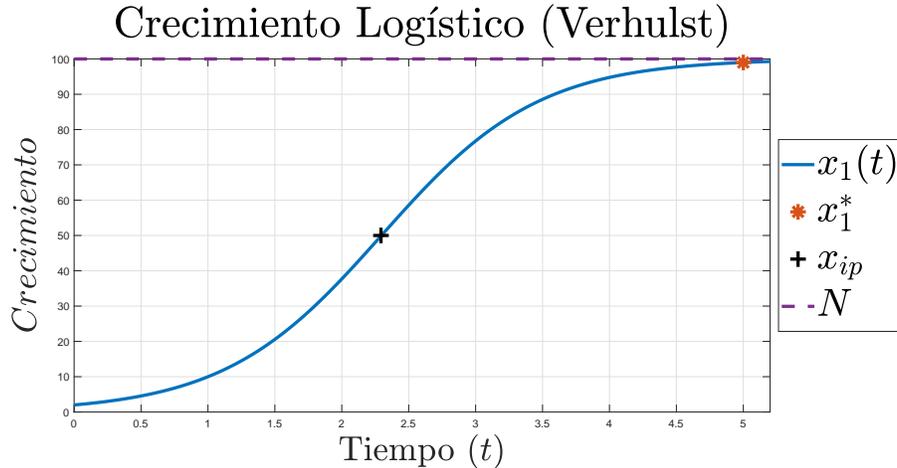


Figura 4.1: Simulación del modelo de Verhulst de acuerdo con los Lemas 1, 1.1, 1.2, con $x_0 = 2$, $N = 100$ y $t^* = 5$, y $r_1 = 0,0047$ calculada con (4.1)

El modelo logístico tipo Verhulst (2.14) se puede construir con una condición inicial, x_0 , y dos parámetros, r y N , siempre y cuando sean números reales y positivos diferentes de cero. Su comportamiento reproduce una curva en forma de S que tiene dos puntos de equilibrio 3.1, siempre alcanza su valor final (3.2) con una duración aproximada del transitorio definida por (3.6), y tiene un punto de inflexión (3.3) que ocurre en el instante de tiempo definido por (3.7). Ya que la capacidad de carga se considera constante, si se considera la variación del otro parámetro, r , la duración del transitorio y el tiempo de inflexión pueden ser modificados, sin embargo, este parámetro no puede modificar x^* ni x_{ip} . En otras palabras, r solo puede acelerar el crecimiento, o puede hacer que este sea más lento.

4.1.2. Cálculo de r del modelo de Richards

Para el modelo de Richards (2.16), la tasa de crecimiento intrínseca cuando el tiempo de transitorio es previamente conocido, o propuesto, se define

con la siguiente ecuación

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\beta t^*} \ln \left(\frac{99^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{(100^\beta - 99^\beta) x_0^\beta} \right) & , x_0 < N \\ \frac{1}{\beta t^*} \ln \left(\frac{101^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{(100^\beta - 101^\beta) x_0^\beta} \right) & , x_0 > N \end{cases} \quad (4.3)$$

Y para situaciones en donde no se puede proponer una duración del tiempo de transitorio, se puede definir r con la siguiente ecuación definiendo previamente t_{ip} ,

$$r_{ip} = \begin{cases} \frac{1}{\beta t_{ip}} \ln \left(\frac{(N^\beta - x_0^\beta)}{\beta x_0^\beta} \right) & , x_0 < x_{ip} \\ 0 & , x_0 > x_{ip} \end{cases} \quad (4.4)$$

La siguiente simulación es para demostrar la utilidad de las definiciones y resultados obtenidos en la sección anterior para el modelo de Richards. Sea $x_0 = 2$, $N = 100$ y $t^* = 5$, las mismas especificaciones que en la simulación anterior. Se puede calcular la tasa de crecimiento con la ecuación (4.3), después conocer el punto de inflexión y cuando sucede con diferentes valores de β .

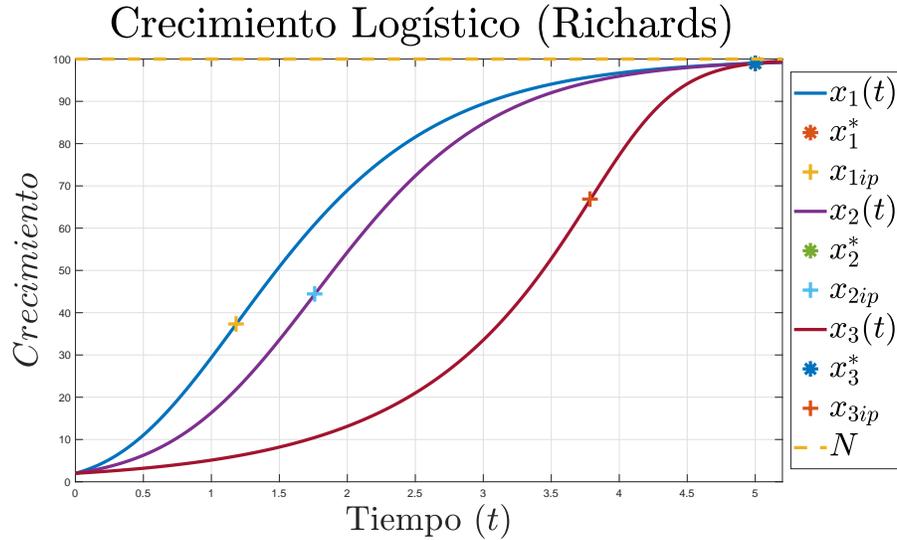


Figura 4.2: Simulación del modelo de Richards de acuerdo a los Lemas 1, 1.1, 2, con $x_0 = 2$, $N = 100$, $t^* = 5$, $\beta_1 = 0,03$, $\beta_1 = 0,5$ y $\beta_1 = 4$, y $r_1 = 0,11$, $r_2 = 0,0078$, y $r_3 = 0,0026$ calculadas con (4.3)

En la Figura 4.1, el punto de inflexión x_{ip} , está justo a la mitad de la máxima capacidad de carga, y en la Figura 4.2 se puede ver cómo cambia con valores distintos de β . Además, se puede ver que en ambas figuras el valor final es igual a $N = 100$, y su duración de transitorio es igual $t^* = 5$.

El modelo de Richards tiene un comportamiento similar al modelo de Verhulst, ambos son modelos de crecimiento Logístico, además que para los dos modelos se mantienen los Lemas 1 y 1.1, lo que significa que sus puntos de equilibrio y valor final son los mismos para los dos modelos, (3.1) y (3.2) respectivamente. Se puede construir con una condición inicial, x_0 , y tres parámetros, r , N y β . También reproduce una curva en forma S , sin embargo, esta curva puede ser modificada debido a que el parámetro β puede cambiar el punto de inflexión (3.8) y el tiempo en el que este ocurre (3.10). No obstante, de este grado de libertad, el valor final sigue siendo el mismo y su duración del transitorio se define con (3.9), donde se ve reflejado β .

4.1.3. Cálculo de r del modelo de Von-Bertalanffy

Suponiendo que se conoce la duración del tiempo de transitorio t^* , con el modelo de Von-Bertalanffy se puede definir la tasa de crecimiento tal como

$$r = \begin{cases} \frac{N^\beta}{\beta t^*} \ln \left(\frac{100^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{N^\beta (100^\beta - 99^\beta)} \right) & , x_0 < N \\ \frac{N^\beta}{\beta t^*} \ln \left(\frac{100^\beta (N^\beta - x_0^\beta)}{N^\beta (100^\beta - 101^\beta)} \right) & , x_0 > N \end{cases} \quad (4.5)$$

Y cuando se conoce el tiempo de inflexión t_{ip} , se puede definir con

$$r_{ip} = \begin{cases} \frac{N^\beta}{\beta t_{ip}} \ln \left(\frac{N^\beta - x_0^\beta}{\beta N^\beta} \right) & , x_0 < x_{ip} \\ 0 & , x_0 > x_{ip} \end{cases} \quad (4.6)$$

La simulación a continuación es para demostrar la utilidad de las definiciones y resultados obtenidos en la sección anterior para el modelo de Von-Bertalanffy. Considerando las mismas condiciones iniciales y parámetros, $x_0 = 2$, $N = 100$ y $t^* = 5$, se puede calcular la tasa de crecimiento con la ecuación (4.5), después conocer el punto de inflexión y cuando sucede con diferentes valores de β .

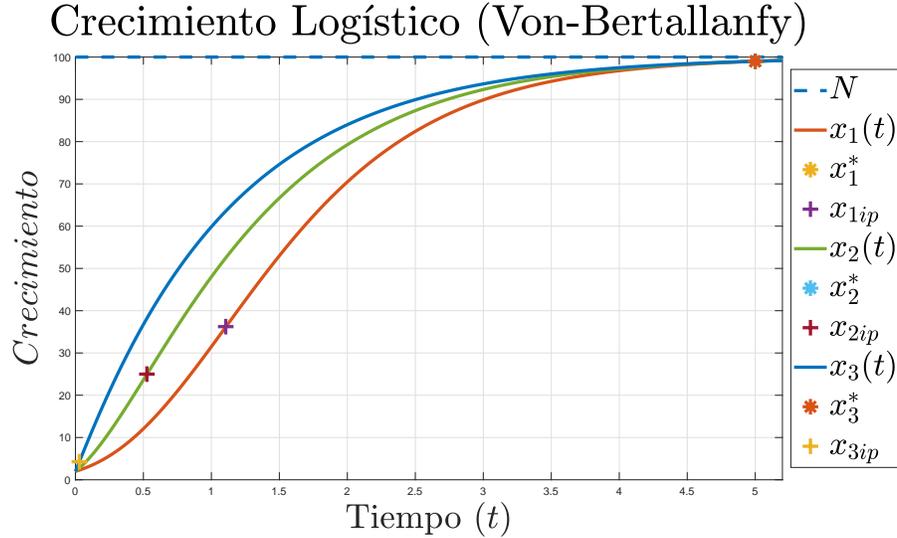


Figura 4.3: Simulación del modelo de Von-Bertalanffy de acuerdo a los Lemas 1, 1.1, 2, con $x_0 = 2$, $N = 100$, $t^* = 5$, $\beta_1 = 0,03$, $\beta_2 = 0,5$ y $\beta_3 = 0,95$, y $r_1 = 0,1239$, $r_2 = 0,0564$, $r_3 = 0,2122$ calculadas con (4.5)

En la Figura 4.2 se puede ver que el punto de inflexión con el valor más pequeño de $\beta = 0,03$ es aproximadamente igual al 33% de N , específicamente es $x_{ip} =$, mientras que un valor de $\beta = 4$ lleva al punto de inflexión a $x_{ip} =$. Comparando con la Figura 4.3, en donde el mínimo valor de $\beta = 0,03$ indica que el punto de inflexión se encuentra prácticamente al inicio del proceso, mientras que su valor máximo $\beta = 1$ mueve el punto de inflexión al 37% de N . El modelo de Von-Bertalanffy (2.18), ya que es un modelo de crecimiento logístico, tiene un comportamiento y propiedades similares a los modelos anteriores. Los puntos de equilibrio son los mismos, (3.1) y también su valor final, (3.11), con una duración de transitorio definida por (3.13), lo que indica que los Lemas 1 y 1.1 se mantienen. El punto de inflexión es dependiente de β , definido por (3.12) y el instante de tiempo en donde se encuentra es (3.14).

4.1.4. Cálculo de r del modelo tipo Verhulst con acoplamiento

Cuando se utiliza el modelo de una variable tipo Verhulst con acoplamiento, El valor de la tasa de crecimiento intrínseca se define con

$$r = \begin{cases} \frac{N}{t^*(N + \alpha v)} \ln \left(\frac{99(N + \alpha v - x_0)}{x_0} \right) & , \quad x_0 < x^* \\ \frac{N}{t^*(N + \alpha v)} \ln \left(\frac{101(N + \alpha v - x_0)}{-x_0} \right) & , \quad x_0 > x^* \end{cases} \quad (4.7)$$

en donde t^* es la duración del tiempo de transitorio. Cuando no se puede conocer ni suponer la duración del tiempo de transitorio, se puede hacer uso del tiempo de inflexión, t_{ip} , y definir la tasa de crecimiento como,

$$r_{ip} = \begin{cases} \frac{N}{t_{ip}(N + \alpha v)} \ln \left(\frac{(N + \alpha v - x_0)}{x_0} \right) & , \quad x_0 < x_{ip} \\ 0 & , \quad x_0 > x_{ip} \end{cases} \quad (4.8)$$

En la simulación a continuación se demuestra que el modelo de crecimiento con acoplamiento puede ser configurado para regular el crecimiento mediante el parámetro asociado con la variable de excitación externa. Se define $x_0 = 2$ $N = 100$, $t^* = 5$ y la señal externa $v = 5$, y dado que la cota máxima y mínima de α está en el rango $-\frac{N}{v} < \alpha \leq \frac{N}{v}$, se realiza la simulación variando este parámetro entre los valores admisibles. La tasa de crecimiento intrínseca se calcula con (4.7), y se reproduce la simulación del modelo en la Figura 4.4.

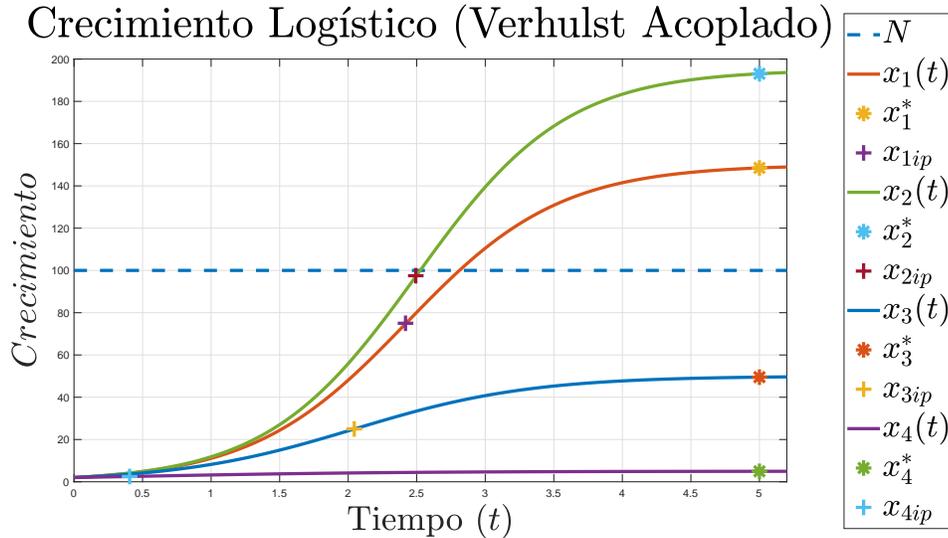


Figura 4.4: Simulación del modelo de Verhulst Acoplado de acuerdo con los Lemas 3, 3.1, 3.2, con $x_0 = 2$, $N = 100$, $t^* = 5$, $v = 5$, los parámetros de acoplamiento $\alpha_1 = 0,95\frac{N}{v}$, $\alpha_2 = 0,5\frac{N}{v}$, $\alpha_3 = -0,5\frac{N}{v}$ y $\alpha_4 = -0,95\frac{N}{v}$, y las tasas de crecimiento $r_1 = 0,033$, $r_2 = 0,026$, $r_3 = 0,085$, $r_4 = 0,0548$ calculadas con (4.7)

El modelo tipo Verhulst con acoplamiento es capaz de hacer que los puntos de equilibrio del modelo, y por consecuencia el valor final, sean diferentes de la máxima capacidad de carga debido a su dependencia con α y la variable externa v . El valor final sobre pasa la máxima capacidad de carga siempre que $\alpha > 0$ y es incapaz de alcanzar a N cuando $\alpha < 0$ de acuerdo con (3.16) (como en Figura 4.4) y el tiempo de transitorio se define con (3.18). El punto de inflexión (3.17), así como el instante de tiempo en donde se encuentra (3.19), también es dependiente de la variable externa v y de α . El modelo con acoplamiento tiene mayor flexibilidad con respecto a x_{ip} a diferencia del modelo de Verhulst sin acoplamiento, sin embargo, este siempre se encuentra a la mitad del valor final.

4.1.5. Cálculo de r del modelo de Coexistencia

El modelo de crecimiento de coexistencia no tiene una solución analítica explícita, por lo tanto, no es posible determinar el tiempo de inflexión ni la

duración del tiempo de transitorio igual que con los modelos anteriores. Una solución a esto es definir la variable de acoplamiento como una constante, asumiendo un valor muy cercano a su respectivo valor final (3.21), entonces es posible encontrar la solución analítica tomando en cuenta esta consideración y calcular una tasa de crecimiento intrínseca con los valores finales. La suposición necesaria es que se puede conocer la duración del transitorio, t^* , y la tasa de crecimiento se puede definir con la expresión a continuación,

$$r_j = \begin{cases} \frac{N_j(1 - \alpha_i\alpha_j)}{t_j^*(N_j + \alpha_jN_i)} \ln \left(\frac{99(N_j + \alpha_jN_i - x_{0j} + x_{0j}\alpha_i\alpha_j)}{x_{0j}(1 - \alpha_i\alpha_j)} \right), & x_{0j} < x_j^* \\ \frac{N_j(1 - \alpha_i\alpha_j)}{t_j^*(N_j + \alpha_jN_i)} \ln \left(\frac{101(N_j + \alpha_jN_i - x_{0j} + x_{0j}\alpha_i\alpha_j)}{-x_{0j}(1 - \alpha_i\alpha_j)} \right), & x_{0j} > x_j^* \end{cases} \quad (4.9)$$

Sin embargo, existen instancias donde es muy difícil suponer este valor, principalmente cuando un proceso en particular no ha terminado y se desconoce su duración, entonces es posible suponer el tiempo en donde se encuentra el punto de inflexión t_{ip} . De igual manera, ya que el modelo de coexistencia no tiene solución explícita, se supone la variable de acoplamiento constante igual al punto de inflexión definido en (3.22), y se propone la definición de la tasa de crecimiento intrínseca de la siguiente manera,

$$r_{ipj} = \frac{N_j(1 - \alpha_i\alpha_j)}{t_{ipj}(N_j + \alpha_jN_i)} \ln \left(\frac{2(1 - \alpha_i\alpha_j)(N_j + \alpha_jN_i - x_{0j} + x_{0j}\alpha_i\alpha_j)}{2x_{0j} + x_{0j}\alpha_i\alpha_j} \right) \quad (4.10)$$

en donde el valor de r_{ipj} , calculado considerando el acoplamiento igual al punto de inflexión, se puede considerar como la r cuando la tasa de cambio es máxima.

En las siguientes simulaciones (4.5-4.9), se muestran diferentes escenarios de coexistencia y el cálculo de la tasa de crecimiento intrínseca en cada caso. Se resalta que, debido a que se asume el valor final de la variable acoplada, y no el valor en tiempo real, la tasa de crecimiento calculada aproxima el crecimiento a la duración del transitorio supuesta, pero no es exacto. Esto abre un área de oportunidad para trabajos futuros ya que conocer el tiempo en que una población puede llegar a extinguirse, o simplemente el tiempo que tarde en llegar a su valor final, es de gran importancia. A continuación se presentan las simulaciones de los regímenes ecológicos de Amensalismo (Figura 4.5), Comensalismo (Figura 4.6), Competencia (Figura 4.7), Mutualismo (Figura 4.8) y Depredación (Figura 4.9). Las simulaciones se realizaron

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

con las mismas condiciones iniciales y máximas capacidades de carga para los diferentes regímenes, es decir, $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$ y $N_2 = 120$, se propone por diseño una duración del transitorio de $t^* = 5$ para que el crecimiento se aproxime a su valor final durante esa duración. Los parámetros de acoplamiento se definen de acuerdo las máximas capacidades de carga y dependiendo de cada régimen, los cuales se desarrollan en la sección 3.5.1. Y las tasas de crecimiento se calculan con la ecuación (4.9), estos valores se pueden visualizar en la descripción de las figuras de cada simulación.

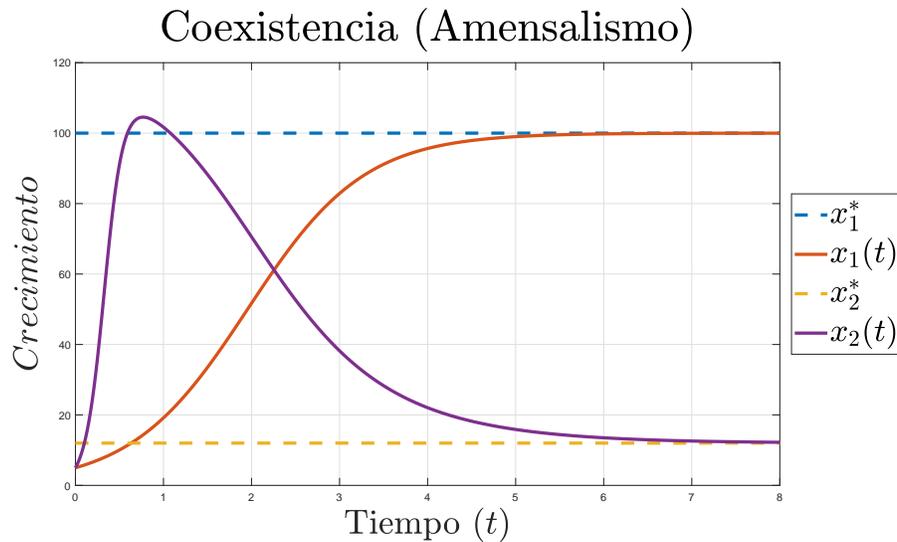


Figura 4.5: Simulación régimen de Amensalismo. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -0,9\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0041$, $r_2 = 0,027$ calculadas con (4.9)

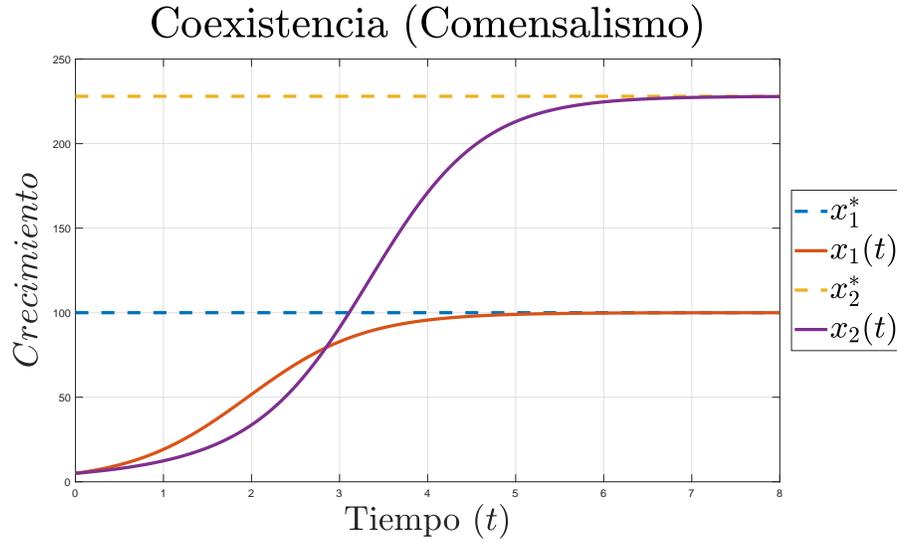


Figura 4.6: Simulación régimen de Comensalismo. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0,9\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0041$, $r_2 = 0,0024$ calculadas con (4.9)

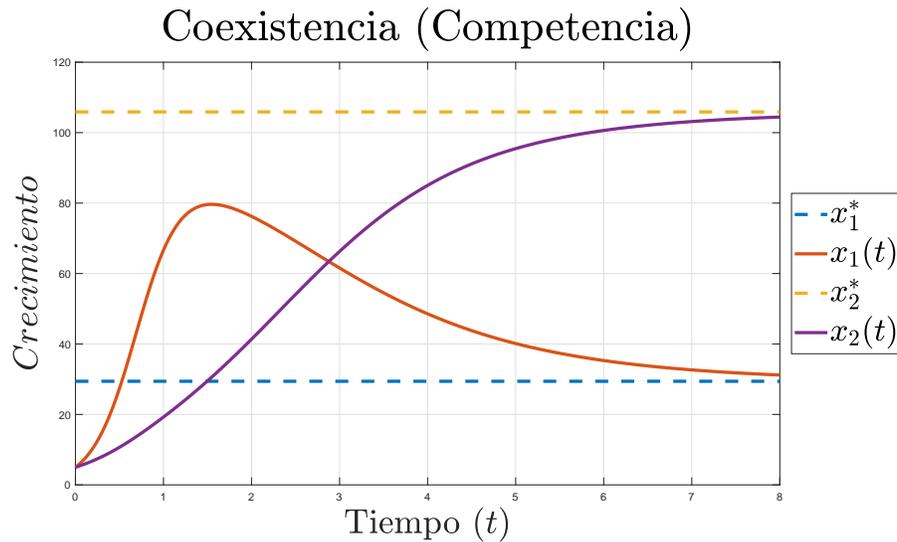


Figura 4.7: Simulación régimen de Competencia. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = -0,8\frac{N_1}{N_2}$, $\alpha_2 = -0,4\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0115$, $r_2 = 0,0047$ calculadas con (4.9)

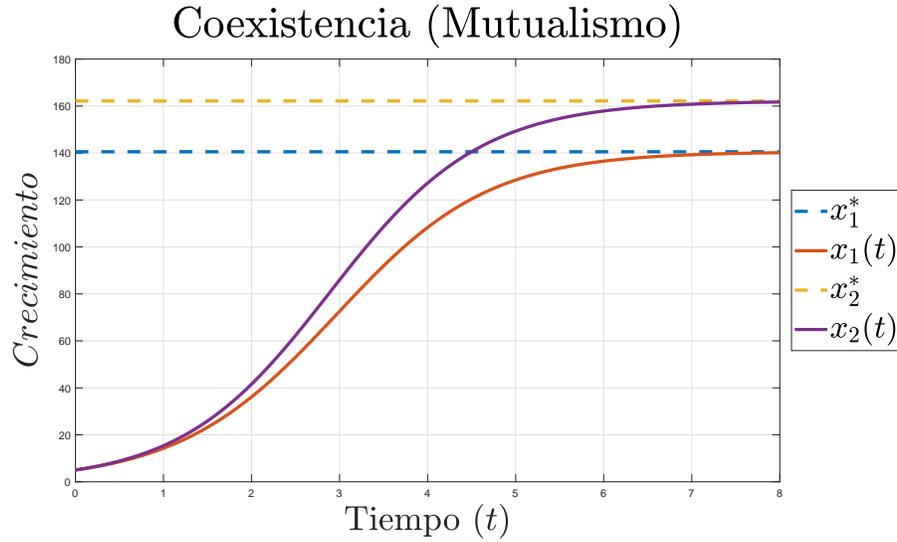


Figura 4.8: Simulación régimen de Mutualismo. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0,3\frac{N_1}{N_2}$, $\alpha_2 = 0,25\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0031$, $r_2 = 0,0033$ calculadas con (4.9)

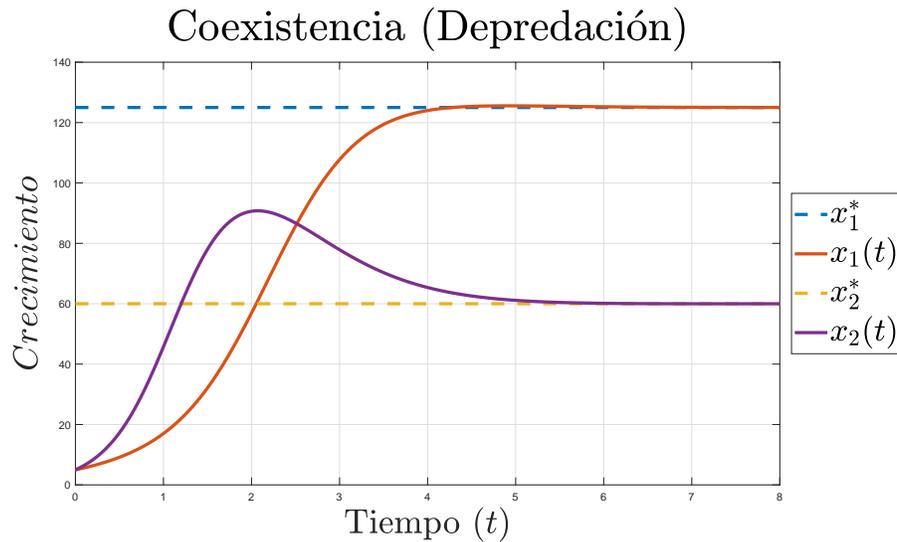


Figura 4.9: Simulación régimen de Presa-Depredador. Con $x_{01} = 5$, $x_{02} = 5$, $N_1 = 100$, $N_2 = 120$, $t^* = 5$, $\alpha_1 = 0,5\frac{N_1}{N_2}$, $\alpha_2 = -0,4\frac{N_2}{N_1}$ y $r_1 = 0,0034$, $r_2 = 0,0077$ calculadas con (4.9)

4.2. Parámetro de Acoplamiento

En el capítulo 3, se presentó el análisis de los modelos de crecimiento resaltando el parámetro relacionado con la interacción entre especies y sus configuraciones para el modelo de coexistencia tipo Verhulst. A continuación, se presenta un diagrama interpretando los resultados de la sección 3.5.1 estableciendo las cotas o límites de operación. Posteriormente se propone la estimación de estos parámetros mediante un análisis de Lyapunov.

4.2.1. Diagrama Interacción

Los parámetros de acoplamiento son los que determinan el tipo de región ecológica en la que se encuentra la interacción de las variables. Como se ha mencionado anteriormente, cuando el producto de estos parámetros es igual a cero, es decir, $\alpha_1\alpha_2 = 0$, la interacción entre las variables representa Neutralismo, Comensalismo, o Amensalismo, en donde existe un grado de independencia entre las especies ya que uno de los parámetros es cero. Esto significa tres cosas, la primera es que las especies o variables se relacionen en lo absoluto; segundo, que una especie sea independiente y que promueva el crecimiento de la otra; y tercero, que la especie independiente perjudique el crecimiento de la especie acoplada. Cuando $\alpha_1\alpha_2 < 1$, las especies se encuentran en el régimen de presa depredador ya que solo uno de los parámetros es negativo, mientras que el otro debe de ser positivo. Y cuando $\alpha_1\alpha_2 > 0$, las especies pueden estar en el régimen de Competencia cuando ambos parámetros son negativos, en donde, como su nombre lo dice, las especies pueden competir por espacio, recursos, parejas, etc., o en el régimen de Mutualismo cuando ambos parámetros son positivos y las especies interactuando se ayudan mutuamente. Esto se pueden ver representado en la tabla 4.1.

El análisis de las configuraciones de los parámetros de acoplamiento demuestra que los parámetros están acotados para su funcionalidad en el modelo, con las excepciones de Comensalismo y Neutralismo los regímenes ecológicos tienen un límite superior e inferior dependiendo de la naturaleza positiva o negativa del acoplamiento, y además deben de cumplir con la siguiente desigualdad para reproducir una sana coexistencia,

$$0 \leq \alpha_j\alpha_i < 1 \tag{4.11}$$

para $j = 1, 2$ e $i = 3 - j$. Para los casos negativos (Presa, Amensalismo, Competencia), la finalidad es obtener resultados positivos, ya que un valor

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

Tabla 4.1: Tipo de Coexistencia basado en el producto de $\alpha_1\alpha_2$.

Régimen Ecológico	Configuración Paramétrica	Producto de $\alpha_1\alpha_2$
Neutralismo	$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$	$\alpha_1\alpha_2 = 0$
Comensalismo	$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$ $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 = 0$	
Amensalismo	$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$ $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = 0$	
Mutualismo	$\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$	$\alpha_1\alpha_2 > 0$
Competencia	$\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$	
Depredación	$\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$	$\alpha_1\alpha_2 < 0$

final negativo significa la extinción de una de las variables, por lo tanto, el parámetro de acoplamiento negativo está definido en el rango siguiente:

$$\alpha_n := \left\{ \alpha_j \mid -\frac{N_j}{N_i} < \alpha_j \leq 0 \right\} \quad (4.12)$$

cuando (4.12) no se cumple, las variables están en riesgo de extinción, esto quiere decir que, en Amensalismo, el crecimiento independiente es tal que puede extinguir a la variable en crecimiento acoplada; en presa-depredador que el predador puede acabar con las presas sin que tengan tiempo de recuperarse; y en competencia que una de las variables en competencia se apodere de los recursos y la otra muera por no ser capaz de obtenerlos, en este último caso la variable que sobrevive crece independientemente hasta su máxima capacidad de carga. Además, con esta notación se puede definir la máxima competencia negativa como,

$$\underline{\alpha}_n := \min\{\alpha_n\} \quad (4.13)$$

Por otro lado, el mutualismo no tiene un límite superior como tal, sin embargo, cuando el producto de sus parámetros de acoplamiento no cumple con la desigualdad (4.11), el crecimiento se vuelve exponencial y puede llegar a ser inestable por lo que se desea evitar. Una propuesta es que los parámetros estén acotados en función de las máximas capacidades de carga de la

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

siguiente manera

$$\alpha_p := \left\{ \alpha_j \mid 0 \leq \alpha_j < \frac{N_j}{N_i} \right\} \quad (4.14)$$

en donde la población crece sin poder alcanzar su valor final cuando α_j se encuentra fuera del rango (4.14). Y la máxima competencia positiva se puede definir como:

$$\bar{\alpha}_p := \max\{\alpha_p\} \quad (4.15)$$

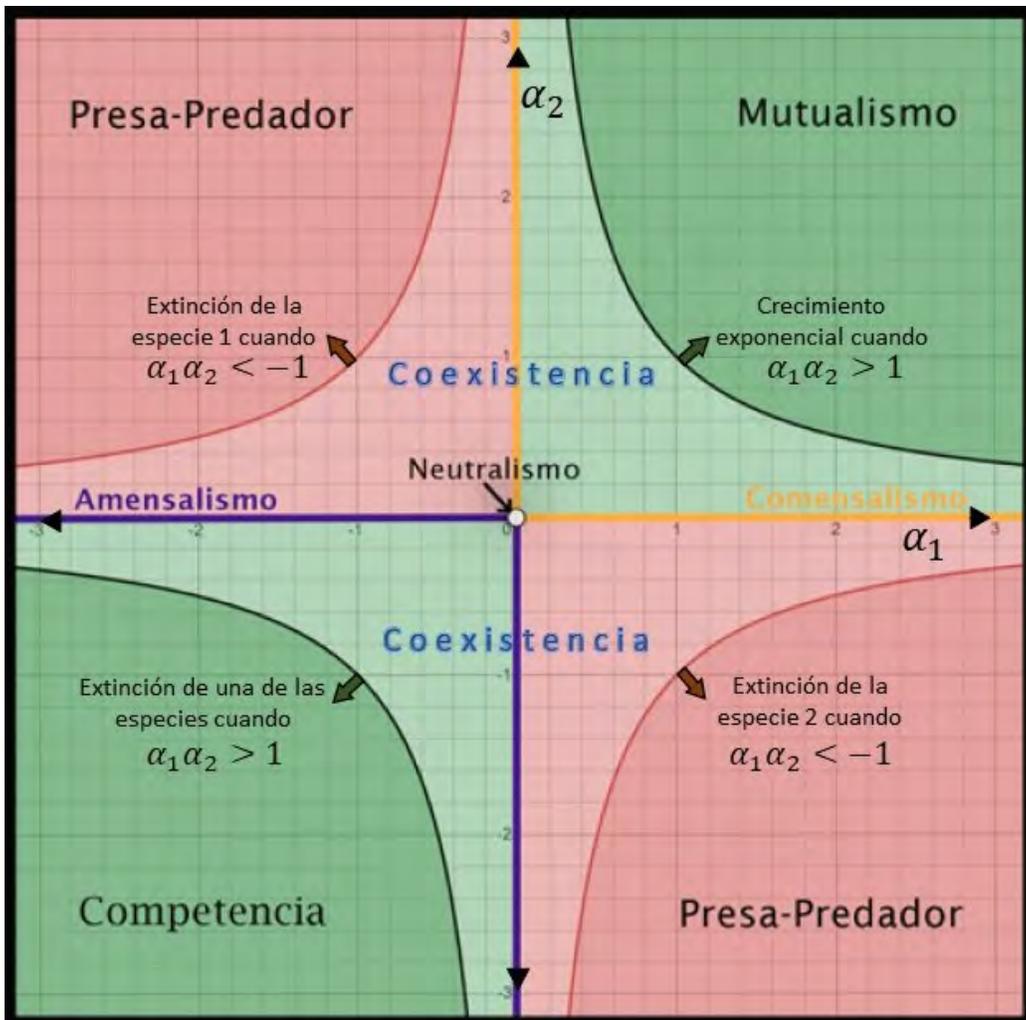


Figura 4.10: Regímenes ecológicos y zonas de coexistencia a partir de $\alpha_1\alpha_2$

En la Figura 4.10 se pueden visualizar los regímenes ecológicos distribuidos en los cuatro cuadrantes, además se resaltan las zonas donde existe una sana coexistencia, y coexistencia con riesgo de extinción o inestabilidad. En el eje de las abscisas están representados los valores de α_1 , mientras que en el eje de las ordenadas están representados los valores de α_2 .

En la figura 4.10, el régimen de neutralismo se encuentra en el centro de la figura, cuando ambos valores son cero. Los regímenes de comensalismo y de amensalismo están sobre el eje de las abscisas y ordenadas, cuando la configuración de los parámetros es positiva y cero, y negativa y cero, respectivamente.

El primer cuadrante encuentra al Mutualismo, es la zona de color verde donde ambos parámetros son positivos, se puede ver que existe una zona con un color verde oscuro que representa cuando el producto del acoplamiento es mayor que 1, esto quiere decir que el crecimiento es exponencial y puede llegar a ser inestable. La zona de color verde claro representa una coexistencia en el régimen de mutualismo entre dos especies, dos especies que se ayudan y tienen un crecimiento mayor al de su máxima capacidad de carga sin riesgo de inestabilidad.

El segundo y cuarto cuadrante representan la depredación o la relación entre los predadores y sus presas. Uno de los parámetros es positivo, mientras que el otro es negativo. También se puede visualizar una zona de color rojo claro en donde el producto de estos parámetros es mayor que -1, en dicha zona la coexistencia entre las dos especies no tiene riesgo de extinción. La zona de color rojo oscuro representa cuando la presa está en riesgo de extinción.

El tercer cuadrante representa la competencia, es la zona de color verde donde ambos parámetros son negativos, en la zona verde oscuro la competencia es tal que una de las especies está al borde de la extinción, mientras que en la zona verde claro ambas especies coexisten sin riesgo para ninguna de las poblaciones.

Las líneas, negra y roja, que separa las zonas de color claro y oscuro, representan una región prohibida donde el producto de los parámetros es igual a 1.

4.2.2. Condiciones de Estabilidad del Acoplamiento

Con los resultados y definiciones hasta el momento, se puede calcular la tasa de crecimiento intrínseca cuando se conoce la duración del transitorio o el tiempo al punto de inflexión, y cuando el parámetro de acoplamiento

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

se supone conocido, sin embargo, es posible que este parámetro no se pueda definir específicamente. Con la definición de competencia máxima, se puede utilizar $\bar{\alpha}_n$ o $\bar{\alpha}_p$ y definir una tasa de crecimiento con el valor mas grande de la competencia. Aun así, en dicho caso el parámetro de acoplamiento es considerado constante, y este puede ser variante de acuerdo a todos los factores que influyen en su valor, además que para poder regular la población a través de este parámetro se tiene que definir como manipulable.

Entonces, utilizando la estructura general del modelo de coexistencia (2.22), y asumiendo que los estados de las variables en crecimiento están disponibles para ser medidos a la salida, el parámetro de acoplamiento se puede estimar mediante un análisis estilo Lyapunov, y así poder simular el modelo aun cuando se desconozca este parámetro.

Sean las variables de estado definidas como $x = [x_1(t), x_2(t)]^T$ y los parámetros desconocidos de la planta como $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$, entonces el modelo (2.22) se puede reescribir como a continuación,

$$\dot{x}(t) = f_0(x)x + f_\alpha(x)\alpha \quad (4.16)$$

en donde

$$f_0(x) = \begin{bmatrix} r_1 - \frac{r_1}{N_1}x_1(t) & 0 \\ 0 & r_2 - \frac{r_2}{N_2}x_2(t) \end{bmatrix}$$

y

$$f_\alpha(x) = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{N_1}x_1(t)x_2(t) & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{N_2}x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede proponer una ecuación con la siguiente estructura para hacer una predicción de los parámetros desconocidos, $\hat{\alpha} := [\hat{\alpha}_1(t), \hat{\alpha}_2(t)]^T$,

$$\dot{\hat{x}}(t) = f_0(x)x + f_\alpha(x)\hat{\alpha} + L(x - \hat{x}) \quad (4.17)$$

en donde L es una matriz de ganancias de dimensiones apropiadas la cual mantiene la estabilidad del sistema, y el error de estados es $x - \hat{x}$. De acuerdo con el método de Lyapunov, si existe una función candidata definida positiva,

$$V > 0$$

Cuya derivada sea definida o semidefinida negativa,

$$\dot{V} \leq 0$$

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

entonces el sistema es global o localmente estable. El análisis de Lyapunov, y las funciones propuestas se hacen en función del error de predicción y del parámetro desconocido. La función candidata propuesta a continuación es definida positiva,

$$V(e, \hat{\alpha}) = \frac{1}{2}e^T e + \frac{1}{2}tr\{\hat{\alpha}\hat{\alpha}^T\} > 0 \quad (4.18)$$

y su valor es igual a cero cuando $V(0, 0)$. Su derivada debe de ser definida negativa, y es igual a

$$\dot{V}(e, \hat{\alpha}) = e^T \dot{e} + tr\{\hat{\alpha}\dot{\hat{\alpha}}^T\} \leq 0 \quad (4.19)$$

lo cual validará que la función candidata de Lyapunov pueda demostrar la estabilidad del sistema considerando la predicción de los parámetros de acoplamiento. Para desarrollar $\dot{V}(e, \hat{\alpha})$, se utiliza el error y su dinámica

$$e := x - \hat{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

al sustituir en (4.19), utilizando las ecuaciones (4.16) y (4.17), se obtiene

$$\dot{V}(e, \alpha) = e^T(f_0(x)x + f_\alpha(x)\alpha - f_0(x)x - f_\alpha(x)\hat{\alpha} - Le) + tr\{\hat{\alpha}\dot{\hat{\alpha}}^T\} \leq 0$$

y simplificando,

$$\dot{V}(e, \alpha) = e^T f_\alpha(x)\alpha - e^T f_\alpha(x)\hat{\alpha} - e^T Le + tr\{\hat{\alpha}\dot{\hat{\alpha}}^T\} \leq 0 \quad (4.20)$$

la expresión anterior no se puede resolver porque no se conoce el parámetro de acoplamiento, α . Los términos restantes son conocidos o pueden ser definidos con ayuda de los resultados anteriores, por ejemplo, las tasas de crecimiento intrínseca utilizando las máximas competencias de los parámetros de acoplamiento ((4.13), (4.15)). Y utilizando $\underline{\alpha}_n$ y $\bar{\alpha}_p$ se puede definir que

$$\delta_\alpha = [\underline{\alpha}_n, \bar{\alpha}_p]$$

con lo cual se sabe que

$$\alpha \leq \|\delta_\alpha\|$$

de manera que el primer término de (4.20) se puede reescribe como

$$e^T f_\alpha(x)\alpha \leq \|e^T\| \cdot \|f_\alpha(x)\| \cdot \|\delta_\alpha\|$$

Y al sustituirlo, la derivada de la función candidata queda como,

$$\dot{V}(e, \alpha) = \|e^T\| \cdot \|f_\alpha(x)\| \cdot \|\delta_\alpha\| - e^T f_\alpha(x)\hat{\alpha} - e^T Le + tr\{\hat{\alpha}\dot{\hat{\alpha}}^T\} \leq 0 \quad (4.21)$$

Ahora todos los términos en (4.21) están definidos por lo que se puede hacer un análisis mayor y proponer un algoritmo para la predicción del parámetro desconocido $\hat{\alpha}$. Utilizando las propiedades de la función del valor absoluto, la traza de una matriz, la pseudoinversa y las manipulaciones algebraicas correspondientes, la ecuación anterior se analizó para proponer el siguiente lema de predicción para los modelos de coexistencia tipo Verhulst.

Lema 4 *Sea x una variable de crecimiento disponible para medición, con las cotas de los parámetros de acoplamiento definidas. Para satisfacer la ecuación (4.21), el parámetro de acoplamiento estimado se define como*

$$\hat{\alpha}(t) = (f_{\alpha}(x))^T e$$

y una ganancia L igual a

$$L \approx (\text{sign}(e) \|f_{\alpha}(x)\| \cdot \|\delta_{\alpha}\|) e^+$$

en donde se considera el valor de la máxima competencia y la pseudoinversa del error para mantener la estabilidad del sistema de crecimiento (4.17).

Como resultado, el modelo considerando la predicción paramétrica es propuesto con un sistema como a continuación,

$$\sum_{CE} : \begin{cases} \hat{x}(t) = f_0(x)x + f_{\alpha}(x)\hat{\alpha} + L(x - \hat{x}) \\ \hat{\alpha}(t) = (f_{\alpha}(x))^T e \\ L \approx (\text{sign}(e) \|f_{\alpha}(x)\| \cdot \|\delta_{\alpha}\|) e^+ \end{cases} \quad (4.22)$$

en donde x representa las variables de estado (supuestas medidas), \hat{x} representa las variables de estado reconstruidas con la predicción de los parámetros $\hat{\alpha}$, y L es la ganancia que mantiene la estabilidad del sistema.

4.3. Ejemplo Simulación Malteado de Cebada

El malteado es una técnica en donde se controla el proceso de la germinación de granos o semillas para producir malta. El objetivo principal de este producto es para elaborar cerveza, whisky, productos para hornear, etc. De una forma muy simplificada, las variables de interés para esta técnica son el

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

contenido de almidón (estos son azúcares potenciales), el contenido de azúcar, el contenido de proteínas, y la actividad enzimática responsable de modificar los macronutrientes en nutrientes fáciles de absorber por parte de la plántula, por ejemplo, el almidón en azúcares simples [90]. Todas estas variables se pueden relacionar con el peso del grano, ya que este es el que contiene todos los carbohidratos, proteínas, y nutrientes en general, y también con el peso del embrión, porque es el que absorbe los nutrientes del grano que se modifican durante el proceso de la germinación [91]. Además, teóricamente, cuando comienza el proceso de malteado, o de germinación controlada, las reservas de nutrientes se encuentran en su máxima capacidad de contenido, ya que estos se producen durante el crecimiento de la semilla en la planta madre, y a partir de ese momento su contenido decrece conforme crece el embrión. Y el embrión, así como el porcentaje de germinación, teóricamente, se pueden ver como variables en crecimiento independientes, ya que al momento de activar el proceso de la germinación, mediante el contacto de la semilla con agua y luz, el embrión crece independientemente de los recursos existentes, no se le puede agregar proteínas o almidón de manera exógena para que el embrión crezca más y para promover este crecimiento se tienen que considerar todavía más variables exógenas, como la tecnología, que en este caso no se toman en cuenta [92].

En la literatura se encontraron datos del crecimiento físico y de los nutrientes de tres tipos de granos de cebada [70]; uno de los granos fue diseñado para tener almidón fácil de degradar, cebada Hiperfosforilada (Hyperphosphorilated, HP); Otro de los granos fue diseñado para tener almidón resistente a la degradación, cebada solamente con amilosa (Amylose-only, AO); y el tercer tipo de grano es de naturaleza salvaje o sin ningún tipo de modificación (Wild type, WT).

EL proceso se diseñó con el objetivo de obtener malta, es decir que la germinación fue a condiciones controladas, se mantuvo una humedad y temperatura constante durante 288 horas, o 12 días. Se toman muestras cada 4 días de las siguientes variables: el crecimiento del peso en seco del grano, el crecimiento del embrión (se remueve del grano y se pesa en seco) y el contenido de almidón en porcentaje con respecto al peso inicial del grano; y se toman muestras cada día del contenido de azúcar con respecto al peso inicial del grano.

En las siguientes Figuras (4.11-4.14), se muestran los datos obtenidos de estas variables en los tres tipos de grano, el crecimiento del embrión corresponde a la raíz y el germinado removidos del grano, y se muestra en la Figura

(4.11); el peso en seco del grano se muestra en la Figura (4.12); el contenido de almidón se puede ver en la Figura (4.13); y el contenido de azúcares simples en la Figura (4.14). Los datos se muestran en porcentaje del peso inicial, y además fueron interpolados para obtener un valor por día y tener una cantidad de muestras homogénea para todas las variables.

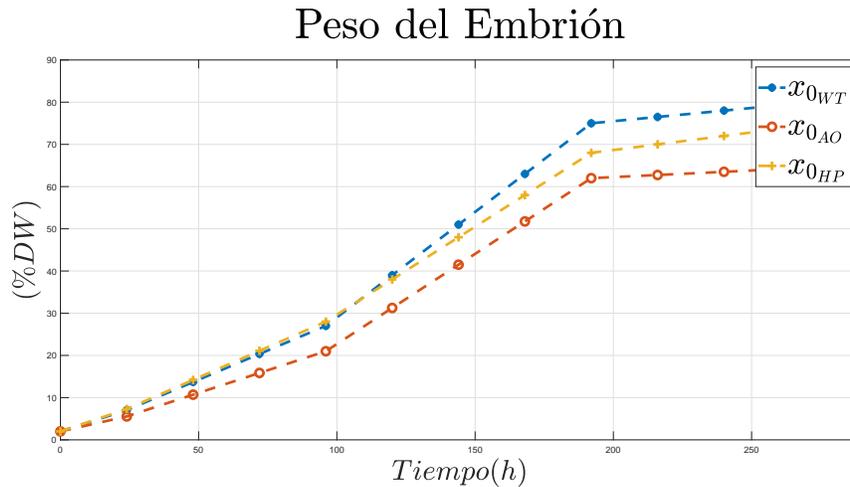


Figura 4.11: Datos del peso del embrión, obtenidos de [70]

El embrión se asume que tiene un comportamiento independiente ya que en su forma ideal este va a crecer siempre que sea expuesto a condiciones adecuadas de crecimiento independientemente de su peso inicial, almidón y azúcar, además, después de la germinación el embrión es capaz de producir sus propios recursos para crecer por medio de la fotosíntesis. Es verdad que pueden crecer más o menos, pero eso significa que, debido a los recursos en el ambiente, que en este caso es una semilla/grano, estos pueden tener una máxima capacidad de carga diferente. Lo cual se puede visualizar en la Figura 4.11.

Peso en seco del Grano

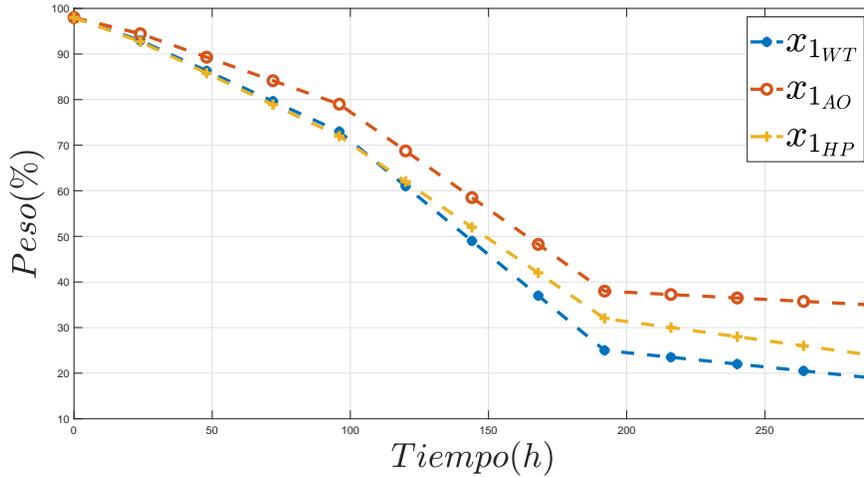


Figura 4.12: Datos del peso en seco del grano de cebada, obtenidos de [70]

El peso en seco del grano o semilla decrece desde su condición inicial hasta un valor final, y se ve en la Figura 4.12, esto debido a que todos sus nutrientes son absorbidos por el embrión en crecimiento. La interacción, de manera ideal, entre el embrión y el grano puede definirse en el régimen de amensalismo.

Contenido de Almidón

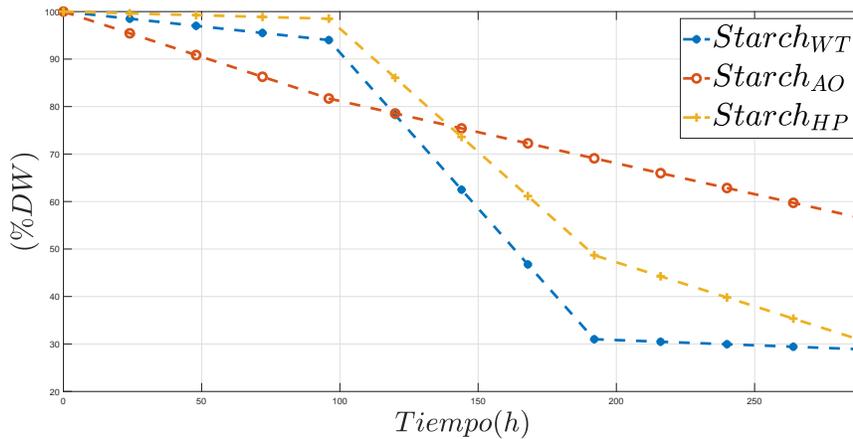


Figura 4.13: Datos del contenido de almidón, obtenidos de [70]

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

El contenido de almidón decrece desde su condición inicial ya que este también es absorbido por el embrión durante su crecimiento. En la Figura 4.13 los almidones resistentes (AO) tiene una tasa de cambio mucho menos que los almidones de fácil degradación (HP) y que los almidones sin ninguna alteración (WT). De igual manera, la interacción entre esta variable y el peso del embrión se puede definir en el régimen de amensalismo.

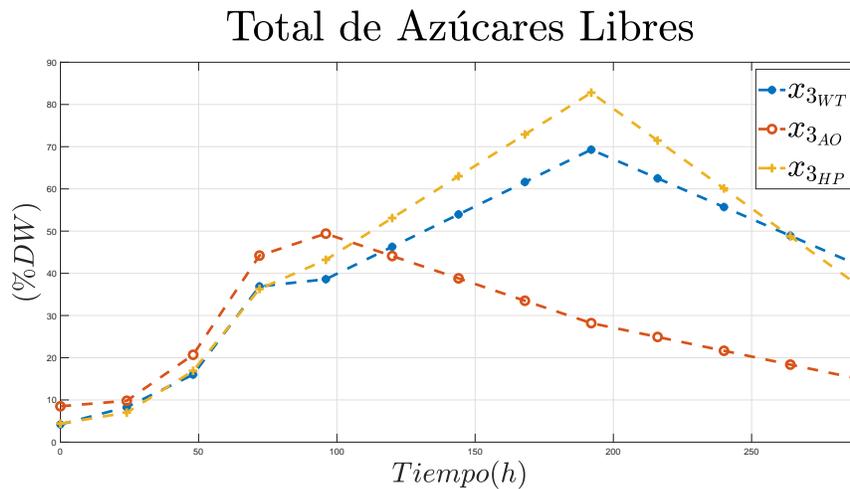


Figura 4.14: Datos del contenido de azúcares libres, obtenidos de [70]

Y finalmente, los azúcares libres totales, los cuales son la fuente principal de energía para crecimiento y para que pueda romper la coraza de la semilla/grano y literalmente germinar. Se puede visualizar en la Figura 4.14 que durante los primeros días el contenido de azúcar incrementa conforme crece del embrión ya que este es muy pequeño y no necesita consumir tanta azúcar. Después el crecimiento parece detenerse, ya que la modificación de los almidones del grano y el consumo de azúcar del embrión probablemente sean iguales. Posteriormente, el cambio de los azúcares sigue creciendo y/o decreciendo dependiendo del tipo de grano, los granos con almidones resistentes a la degradación ocasionan que se consuma más azúcar de la que se produce (AO), mientras que en los dos granos restantes existe mayor producción de azúcar (WT, HP). En este caso, la interacción entre el embrión y el contenido de azúcar se considera entre comensalismo y amensalismo, ya que el crecimiento del embrión consume azúcar como fuente de energía. En un principio el acoplamiento entre estos puede ser positivo, por eso se ve un

incremento, sin embargo, conforme el embrión aumenta su tamaño y necesita de mayor energía, su acoplamiento cambia y disminuye.

La propuesta es que las muestras tomadas puedan ser utilizadas para predecir el parámetro de acoplamiento y reproducir el modelo de coexistencia para el embrión-grano, embrión-almidón, y embrión-azúcares. Definiendo el peso del embrión como x_0 , el peso del grano en seco como x_1 , el contenido de almidón como x_2 y el contenido de azúcares como x_3 . Utilizando la estructura del modelo de coexistencia, se puede proponer el siguiente sistema para representar este caso del malteado de cebada,

$$\sum_{\hat{\alpha}} : \begin{cases} \dot{x}_0(t) = r_0 x_0 \left(1 - \frac{x_0}{N_0} \right) \\ \dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \alpha_1 \frac{x_0}{N_1} \right) \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2} + \alpha_2 \frac{x_0}{N_2} \right) \\ \dot{x}_3(t) = r_3 x_3 \left(1 - \frac{x_3}{N_3} + \alpha_3 \frac{x_0}{N_3} \right) \end{cases} \quad (4.23)$$

en donde r_0 , r_1 , r_2 y r_3 son las tasas de crecimiento intrínseca del embrión, peso del grano, contenido de almidón y contenido de azúcares respectivamente. Las máximas capacidades de carga de cada variable son representadas por N_0 , N_1 , N_2 y N_3 . Y el acoplamiento, o la interacción entre x_1 , x_2 y x_3 con x_0 , es representada por α_1 , α_2 y α_3 .

4.3.1. Definición paramétrica

Del artículo [70], y de las Figuras 4.11-4.14, se pueden definir algunos de los parámetros, por ejemplo, las condiciones iniciales y la máxima capacidad de carga. Las tasas de crecimiento se calculan asumiendo el tiempo de transitorio (t^*) o el tiempo de inflexión (t_{ip}) mediante inspección visual de los datos, cuando se puede determinar t^* la tasa de crecimiento se calcula con (4.9), y cuando la información del proceso no es suficiente para definirlo, se puede suponer un tiempo de inflexión y calcular la tasa de crecimiento con (4.10). Un ejemplo de esto se puede ver fácilmente con la dinámica de los azúcares libres de la Figura 4.14, t^* no está explícitamente definido ya que el proceso parece no haber terminado en ninguno de los tres tipos de grano, sin embargo, se puede ver que existe un cambio en la curvatura de

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

las trayectorias aproximadamente a las $72h$. Esto es respaldado por el hecho que en el proceso de la germinación el embrión necesita la mayor cantidad de energía para romper la coraza del grano/semilla y crecer, es decir, es el momento en donde el cambio con respecto del tiempo del crecimiento es el máximo, y esto ocurre entre las $48 - 72h$ dependiendo de las condiciones ambientales. Existe una concordancia con los datos ya que las condiciones ambientales se mantuvieron igual para los tres tipos de grano durante todo el proceso. Específicamente, las tasas de crecimiento intrínseca del contenido de los azúcares y del embrión se calcularon asumiendo un tiempo de inflexión. Por otro lado, el contenido de almidón y el peso del grano tienen condiciones iniciales superiores a sus puntos de inflexión, respectivamente, entonces r se calcula asumiendo la duración del transitorio. Los parámetros y condiciones iniciales para cada uno de los tipos de grano de cebada se pueden ver en la tabla a continuación,

Tabla 4.2: Condiciones iniciales (x_0), máximas capacidades de carga (N), y tasas de crecimiento intrínseca (r) para los diferentes tipos del grano de cebada. Los valores se muestran en gramos considerando que el peso inicial de las muestras es de 5g.

Cebada tipo salvaje (WT)	x_0 (WT)	N (WT)	r (WT)
Peso embrión WT	0,1	4,05	0,0317
Peso del grano WT	4,9	4,9	0,0739
Contenido almidón WT	2,94	2,94	0,0735
Contenido azúcares libres WT	0,21	2,94	0,0256
Cebada Amilosa (AO)	x_0 (AO)	N (AO)	r (AO)
Peso embrión AO	0,1	3,3	0,0297
Peso del grano AO	4,9	4,9	0,0739
Contenido almidón AO	3,075	3,075	0,0139
Contenido azúcares libres AO	0,425	3,075	0,0198
Cebada Hiperfosforilada (HP)	x_0 (HP)	N (HP)	r (HP)
Peso embrión HP	0,1	3,8	0,0311
Peso del grano HP	4,9	4,9	0,0739
Contenido almidón HP	3,132	3,132	0,0738
Contenido azúcares libres HP	0,22	3,132	0,0257

4.3.2. Estimación del parámetro de Acoplamiento

Con la definición paramétrica anterior todavía no es posible reproducir el modelo de coexistencia porque se desconoce el valor actual de los parámetros de acoplamiento, solo es posible definir las tasas de crecimiento con las cotas de los parámetros o competencia máxima. Sin embargo, con los valores de la tabla 4.2 y las competencia máxima se puede desarrollar el Lema 4, y predecir los parámetros de acoplamiento desconocidos proponiendo un sistema con la estructura de (4.22) para las variables del proceso de Malteado presentado.

En las siguientes figuras (4.15-4.20), la simulación de las variables reproducidas con la predicción de los parámetros de acoplamiento es presentada en contraste con los datos obtenidos de la literatura. Además, se muestra la predicción de los parámetros de acoplamiento de las variables del grano, almidón y azúcares con el crecimiento del embrión.

Los resultados para el grano sin modificaciones, el tipo salvaje, se muestran en la Figura 4.15 y sus parámetros de acoplamiento en la Figura 4.16. El grano diseñado para tener almidones resistentes, o con solo amilosa, puede verse en la Figura 4.17 y su acoplamiento en la Figura 4.18. Finalmente, el grano diseñado para tener almidones de fácil degradación, o el hiperfosforilado, se muestra en la Figura 4.19 y la predicción de los parámetros de acoplamiento en la Figura 4.20.

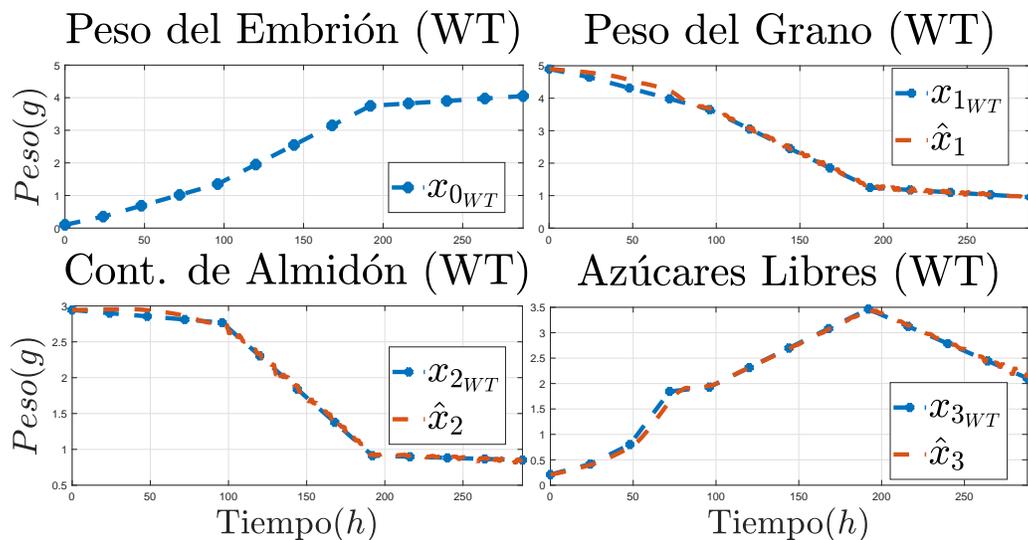


Figura 4.15: Simulación del Grano Tipo Salvaje (WT Barley)

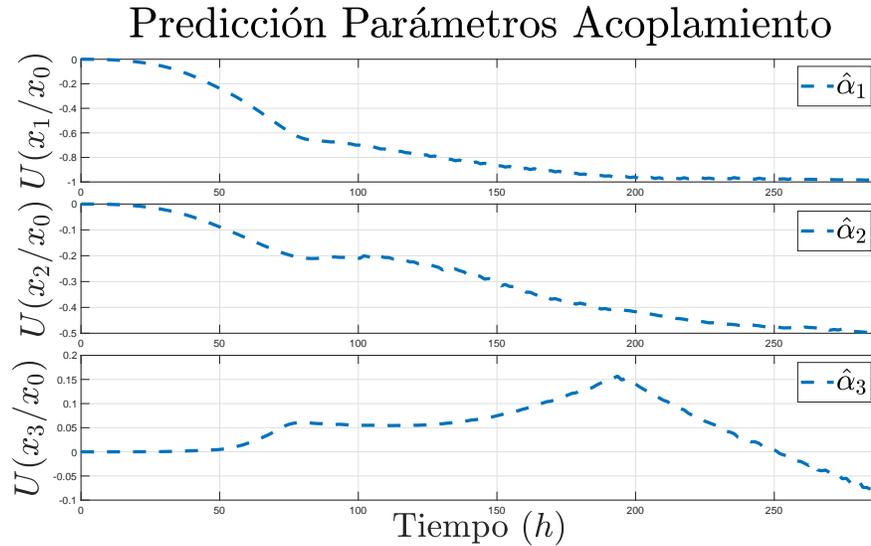


Figura 4.16: Simulación de los parámetros de acoplamiento del grano de cebada WT.

Se puede ver que la reproducción del modelo de coexistencia utilizando la predicción de los parámetros de acoplamiento siguen la trayectoria de los datos. De la predicción de los parámetros de acoplamiento (Figura 4.16) se puede ver claramente que el embrión tiene acoplamiento negativo con el peso del grano y con el contenido de almidón, durante un tiempo determinado el acoplamiento del grano y el embrión es de 1 a 1, es decir que por cada gramo que pierde el grano es un gramo que gana el embrión. El acoplamiento con los azúcares incrementa aproximadamente a las 48 horas, alcanzando un pico máximo a las 198 horas, donde comienza a decrecer desde un valor positivo hasta uno negativo. Esto quiere decir que, efectivamente, el acoplamiento tiene un cambio de régimen de comensalismo a amensalismo y se interpreta que después de las 198 horas el embrión es de tal tamaño que su acoplamiento con el contenido de azúcares se vuelve negativo debido a la cantidad de energía que necesita consumir la plántula para desarrollarse. Para este tipo de proceso, donde es de gran interés el contenido de azúcares potenciales (almidones), se puede delimitar visualmente en qué momento detener el proceso. Es decir, si el acoplamiento entre el embrión y los azúcares es negativo significa que las reservas de estos nutrientes en el grano serán consumidas y no se podrán aprovechar durante los procesos siguientes del malteado del grano.

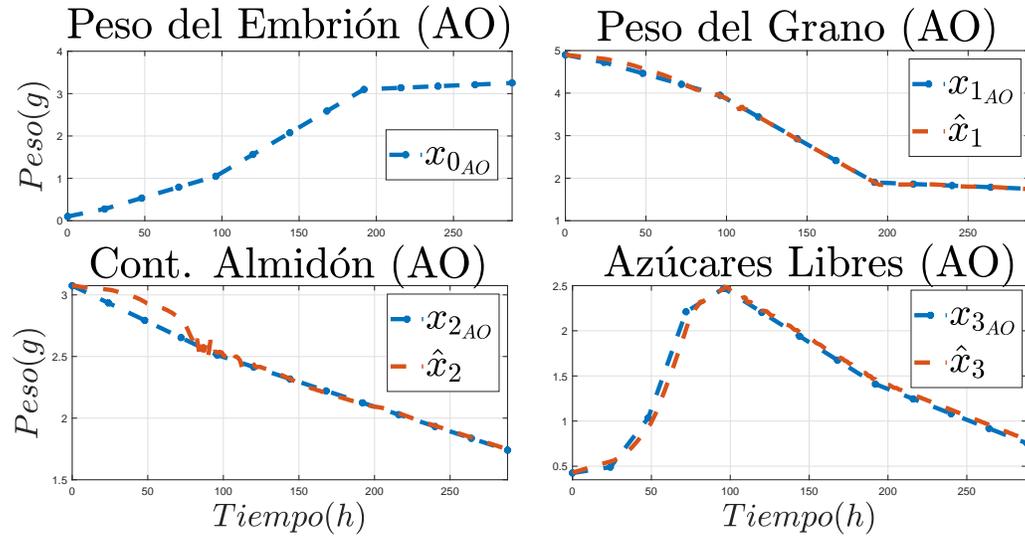


Figura 4.17: Simulación del grano de cebada con almidones resistentes (AO Barley)

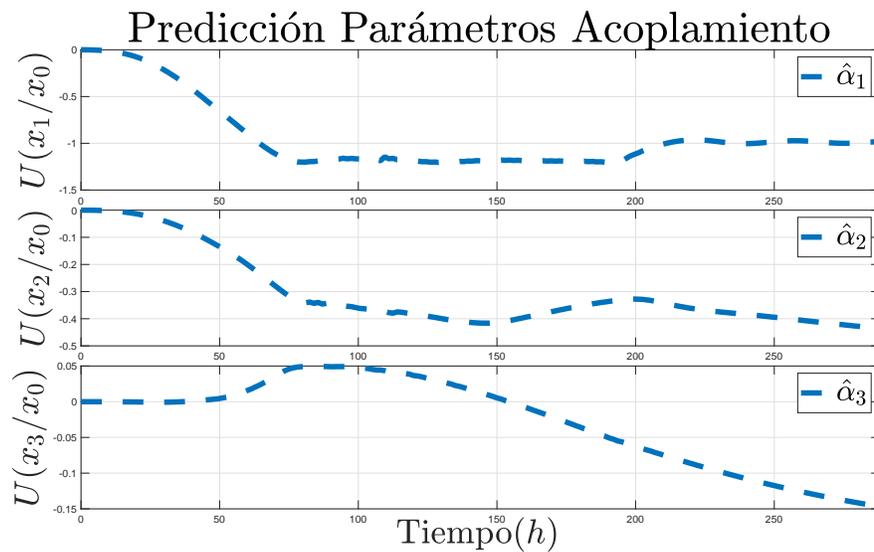


Figura 4.18: Simulación de los parámetros de acoplamiento del grano de cebada AO.

En el caso del grano con almidones resistentes, se puede ver que el aco-

CAPÍTULO 4. DEFINICIÓN Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

plamiento entre el embrión y el almidón del grano de Cebada AO es menos negativo que el grano de tipo salvaje. Nótese que el acoplamiento con los azúcares (Figura 4.18), al ser más resistente el almidón a la degradación, indica que hay menos producción de azúcares sin embargo la necesidad de absorberlas por el embrión sigue constante y este es consumido más rápido. Para este caso el proceso puede ser detenido antes de que el acoplamiento con los azúcares se vuelva negativo, esto quiere decir que, al ser detenido a las 150 horas, el grano tendrá mayor cantidad de azúcares potenciales para futuros procesos, a diferencia del caso anterior donde el acoplamiento se vuelve negativo hasta las 250 horas.

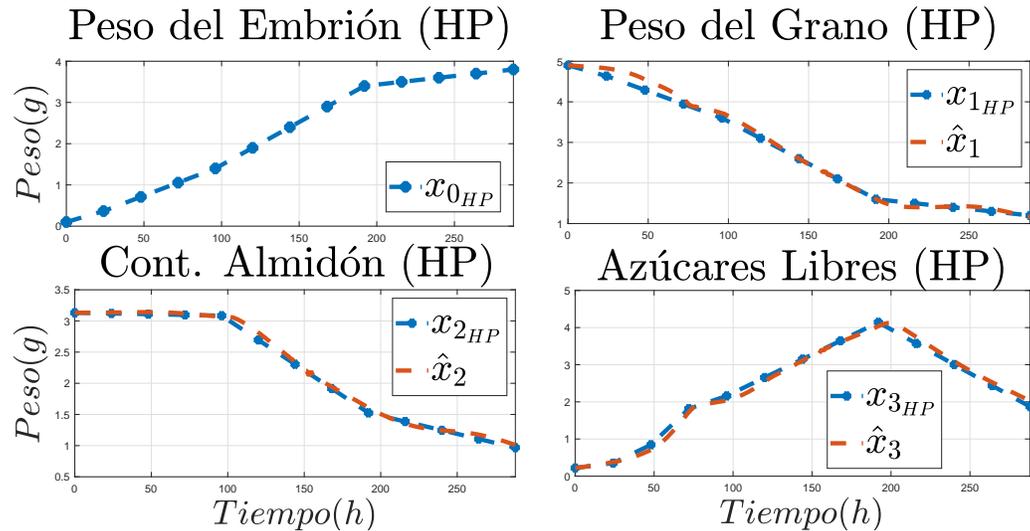


Figura 4.19: Simulación del grano con almidones de fácil degradación (HP Barley type)

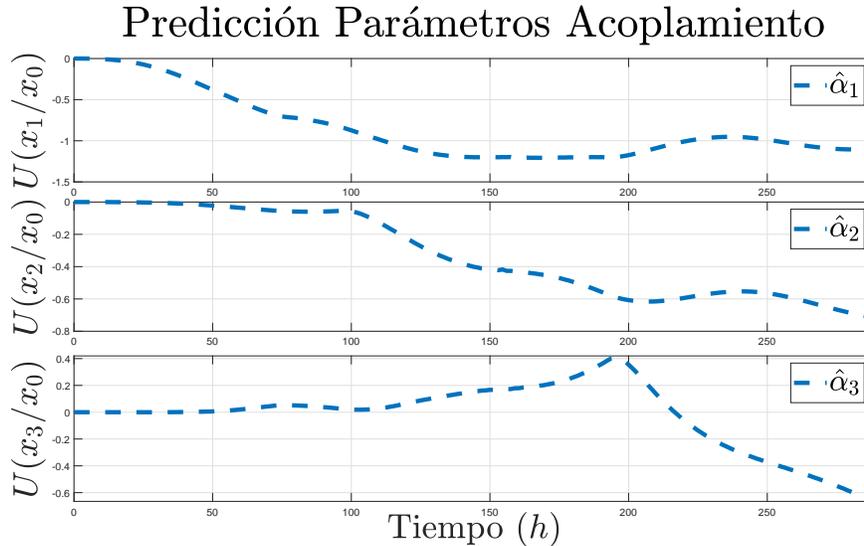


Figura 4.20: Simulación de los parámetros de acoplamiento del grano de cebada HP.

Y el grano de cebada con almidones degradables muestra que el acoplamiento entre el embrión y el almidón tiene un valor final más negativo que los casos anteriores, así como el acoplamiento con los azúcares demuestra que los almidones degradables producen con mayor facilidad azúcares libres, este acoplamiento incrementa a partir de las 48 horas sin embargo alcanza un pico máximo mayor que el caso WT y AO.

La aplicación de estos resultados para el malteado de diferentes tipos de cebada es de gran utilidad para visualizar las variables y determinar en qué momento detener el proceso, recordando que de manera simple una buena malta base se consigue cuando el grano tiene todavía una cantidad de reservas suficientes de almidones degradables y azúcares [90]. Además, sin simplificar el proceso es posible agregar variables como la proteína y la actividad enzimática, ya que son variables importantes para este proceso, sin embargo, esto se puede considerar como trabajo futuro.

Capítulo 5

Propuesta de Regulación del Valor final

5.1. Configuración del Valor final

Los modelos de crecimiento logístico sin acoplamiento (2.14), (2.16) y (2.18), no tienen la capacidad de regular su crecimiento sin la adición de una variable externa, como son los casos de los modelos (2.20) y (2.22). En la sección anterior se analizaron las configuraciones de coexistencia para definir un lema de predicción perimétrica, mientras que en la siguiente sección se analiza el valor final para definir un lema de regulación para el modelo de crecimiento con acoplamiento de una especie y el modelo de coexistencia de dos especies.

5.1.1. Lema de Regulación de una especie

El valor final (3.16) del modelo (2.20) está acoplado con una señal exógena acotada $0 < v \leq \bar{v}$, y se puede reescribir dependiendo de la configuración del parámetro α como a continuación,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} N + \alpha v & -\frac{N}{v} < \alpha \\ 0 & \alpha \leq -\frac{N}{v} \end{cases}, \quad (5.1)$$

La regulación del crecimiento a través del parámetro de acoplamiento se propone de la ecuación anterior. Si $\alpha > 0$ el valor final está definido, pero no se

puede regular el modelo por la configuración positiva del parámetro, se repite la situación de los modelos logísticos sin acoplamiento en donde es imposible disminuir el crecimiento, se puede atenuar pero no regular por completo. Si α se define como negativo y en con un rango tal como $-\frac{N}{v} < \alpha \leq 0$, el crecimiento se puede regular entre 0 y N porque si $\alpha = 0$ el valor final del modelo es aquel del modelo de crecimiento logístico, su máxima capacidad de carga. Y si $\alpha = -\frac{N}{v}$ el valor final es igual a cero. Sea α definido como parámetro manipulable, el valor final puede ser regulado a través del lema siguiente:

Lema 5 *Sea el error de regulación definido como $e := x(t) - x_d$, donde $x(t)$ es el valor instantáneo de la población o variable en crecimiento, y x_d es el valor de crecimiento deseado, y además se define el parámetro manipulable $\alpha := \alpha(t)$. El valor final del sistema puede ser regulado utilizando la siguiente ley de control*

$$\alpha(t) = \frac{1}{v} \left(-\frac{N}{rx(t)}(x(t) - x_d) - N + x(t) \right) \quad (5.2)$$

la cual asegura que el valor final sea igual al valor deseado.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_d$$

5.1.2. Lema de regulación de dos especies

El mismo análisis se realiza para el modelo de coexistencia de dos especies (2.22), sus valores finales pueden ser expresados de diferente manera dependiendo del régimen ecológico al que pertenezcan, y se pueden reescribir de la siguiente manera,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = \begin{cases} \infty & \alpha_j > 0 \wedge \alpha_j \alpha_i \geq 1 \\ \frac{N_j + \alpha_j N_i}{1 - \alpha_j \alpha_i} & \alpha_j > 0 \wedge \alpha_j \alpha_i < 1 \\ \frac{N_j + \alpha_j N_i}{1 - \alpha_j \alpha_i} & -\frac{N_j}{N_i} < \alpha_j \leq 0 \wedge \alpha_i \alpha_j < 1 \\ 0 & \alpha_j \leq -\frac{N_j}{N_i} \end{cases}, \quad (5.3)$$

Las siguientes observaciones se destacan de la expresión anterior para definir las condiciones de regulación de este tipo de modelo de crecimiento:

Observación 3 *De la ecuación (5.3), se puede notar que la población puede alcanzar un estado de crecimiento que excede la máxima capacidad de carga cuando sus parámetros de acoplamiento son positivos $\alpha_j > 0$. Sin embargo, el crecimiento superior a la máxima capacidad de carga puede volverse inestable cuando $\alpha_j\alpha_i \geq 1$ y su valor final se vuelve inalcanzable.*

Al observar los resultados de la sección 3.5.1, las Configuraciones de coexistencia que tienen estas condiciones son: Comensalismo, cuyos valores finales se expresan de la siguiente manera cuando la variable denotada con el subíndice 2 es la independiente,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= N_1 + \alpha_1 N_2 & \alpha_1 > 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= N_2 & \alpha_2 = 0 \end{aligned},$$

Y la otra configuración es Mutualismo, el crecimiento excedente para este régimen se vuelve inestable cuando $\alpha_j\alpha_i \geq 1$, pero si cumple la desigualdad $0 < \alpha_j\alpha_i < 1$, los valores finales de dos especies o variables acopladas con una naturaleza positiva son,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= \frac{N_1 + \alpha_1 N_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2} & \alpha_1 > 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= \frac{N_2 + \alpha_2 N_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2} & \alpha_2 > 0 \end{aligned},$$

dado que $\alpha_1 > 0$ and $\alpha_2 > 0$ no es posible regular esta clase de sistemas. Sin embargo, cuando la regulación no es aplicable se pueden utilizar los resultados de la predicción paramétrica para demostrar que existe, o no, estabilidad.

Observación 4 *Nótese, de la ecuación (5.3), que la regulación de la variable o población j es posible entre N_j y cero. Esta regulación se logra cuando $-\frac{N_j}{N_i} < \alpha_j < 0$.*

Los regímenes de coexistencia que pueden ser regulados son: Amensalismo, cuyos valores finales cuando la variable independiente es denotada por el subíndice 2 son,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= N_1 + \alpha_1 N_2 & -\frac{N_1}{N_2} < \alpha_1 \leq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= N_2 & \alpha_2 = 0 \end{aligned},$$

CAPÍTULO 5. PROPUESTA DE REGULACIÓN DEL VALOR FINAL

Otra configuración de coexistencia que cumple con esta observación es la Competencia, sus valores finales son

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= \frac{N_1 + \alpha_1 N_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2} & -\frac{N_1}{N_2} < \alpha_1 \leq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= \frac{N_2 + \alpha_2 N_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2} & -\frac{N_2}{N_1} < \alpha_2 \leq 0 \end{aligned},$$

Y por último la configuración de depredación, donde la regulación es específica para la variable de las presas, y sus valores finales son expresados como,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= \frac{N_1 + \alpha_1 N_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2} & \alpha_1 > 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= \frac{N_2 + \alpha_2 N_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2} & -\frac{N_2}{N_1} < \alpha_2 \leq 0 \end{aligned},$$

De la observación 2, se propone una ley de control para la regulación de estos regímenes bajo dichas condiciones mediante el lema a continuación:

Lema 6 *Sea $e_j := x_j(t) - x_{jd}$, el error de regulación, donde x_{jd} es el valor deseado de la variable en crecimiento, $x_j(t)$, y $\alpha_j := \alpha_j(t)$ es un parámetro manipulable sujeto a las condiciones $-\frac{N_j}{N_i} < \alpha_j(t) < 0$ para $j = 1, 2$ e $i = 3 - j$ entonces el valor final de $x_j(t)$ se puede regular utilizando la siguiente ley de control:*

$$\alpha_j(t) = \frac{1}{x_i(t)} \left(-\frac{K_j N_j e_j}{r_j x_j(t)} - N_j + x_j(t) \right) \quad (5.4)$$

la cual asegura que el límite de $x_j(t)$ sea igual al valor de crecimiento deseado.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = x_{jd}$$

Observación 5 *Igualmente, de la ecuación (5.3), se destaca que aquella población con acoplamiento negativo puede ser llevada al borde de la extinción. Por lo tanto, el valor final de una población o variable en crecimiento cuando $\alpha_j \leq -\frac{N_j}{N_i}$ para $j = 1, 2$ e $i = 3 - j$ tiende a cero.*

Los tipos de coexistencia que pueden presentar esta configuración son los mismo que pueden ser regulados, Amensalismo, Competencia y depredación, he ahí la importancia de la regulación y conocer la información de los parámetros. Cuando estas condiciones se cumplen, significa que el depredador acabo con las presas, que la variable independiente exterminó aquella

población acoplada, o que una de las variables en competencia se acabó los recursos que pueden consumir los demás. Y cuando la población más débil es exterminada significa que la población sobreviviente crece sin competencia hasta su máxima capacidad de carga.

5.2. Ejemplo Simulación Población de Peces

Para la aplicación de los resultados previos se presenta, un ejemplo de una población de peces. Con propósitos de Acuicultura, o la cosecha de peces o mariscos, se define una población de peces, $x(t)$, creciendo bajo condiciones controladas con respecto a los recursos (alimento) y espacio, de tal manera que la tasa de crecimiento intrínseca es igual a $r = 0,8$ y una máxima capacidad de carga de $N = 780500$. Además, se sabe que aproximadamente a los 6 meses la población creciendo sin ser cosechada llega a una madurez tal que su tasa de cambio empieza a decrecer ([52]).

5.2.1. Simulación de una especie de peces

Con la información previa se puede simular el crecimiento de una población de peces de la misma especie sin contemplar la cosecha, el cual puede ser reproducido con los modelos de crecimiento logístico (2.14), (2.16) y (2.18). De entrada, se sabe que la población tiene dos puntos de equilibrio $x_t^0 = 0$ y $x_{st}^0 = 780500$, su valor final es igual a $x^* = 780500$ y su punto de inflexión es igual a $x_{ip} = 780500$. Además, el punto de madurez donde la tasa de cambio empieza a decrecer es el punto de inflexión, entonces se puede asumir que el tiempo de inflexión (6 meses) indica el momento en cuanto la población puede empezar a ser cosechada, y la duración del transitorio puede ser un indicador de cuando es necesario cosechar. Ambas propiedades pueden ser calculadas con las ecuaciones (3.6) y (3.7). La simulación de la población de peces sin ser cosechados se realiza con el modelo de Verhulst (2.14), los parámetros utilizados se muestran en la tabla 5.1 y los resultados se muestran en la Figura 5.1.

CAPÍTULO 5. PROPUESTA DE REGULACIÓN DEL VALOR FINAL

Tabla 5.1: Parámetros Utilizados para la simulación.

Parámetros	Valor	Unidades
r	0,8	individuos(peces)/t
N	780500	individuos (peces)
Propiedades	Valor	Unidades
x_T^0	0^1	individuos (peces)
x_{nT}^0	780500^1	individuos (peces)
x^*	780500^1	individuos (peces)
x_{ip}	390250^1	individuos (peces)

^aLas propiedades se obtienen de los lemas 1-1.2.

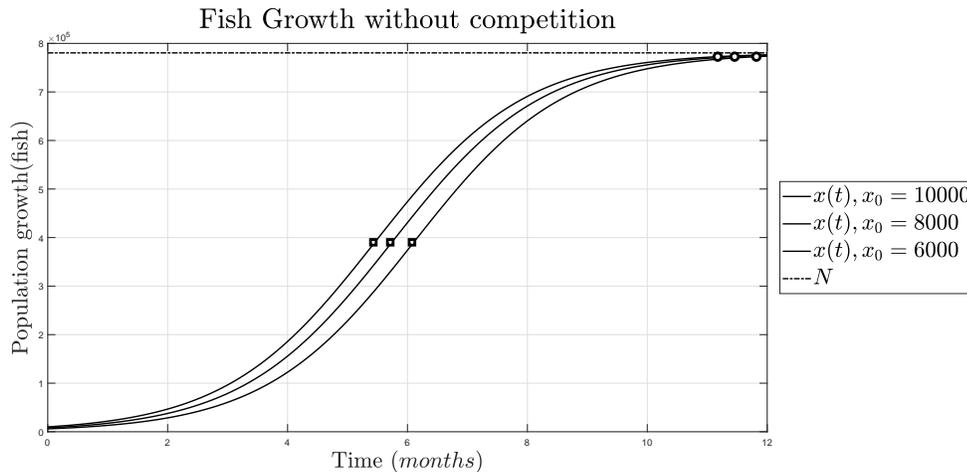


Figura 5.1: Simulación del modelo de Verhulst para el crecimiento de peces sin competencia, o sin contemplar la cosecha ($\alpha = 0$). Para $x_0 = 10000$, el punto de inflexión se encuentra en $t_{ip} = 5,4$, representado por el cuadrado, y su valor final se alcanza en $t^* = 11,2$, representado por el círculo; Para $x_0 = 8000$, x_{ip} se alcanza en $t_{ip} = 5,6$ y x^* en $t^* = 11,4$; a Y para $x_0 = 6000$, el tiempo del punto de inflexión es $t_{ip} = 6$ y la duración del transitorio $t^* = 11,8$.

De la Figura 5.1, se puede establecer que para que la población de peces alcance su madurez exactamente a los 6 meses, la condición inicial de esta población tiene que ser mayor o igual a 6000 peces. De otra manera, para lograr que una población con $x_0 < 6000$ llegue a su punto de inflexión antes de los 6 meses se tiene que ajustar la tasa de crecimiento intrínseca (previamente definida como $r = 0,8$), y esto se puede lograr mejorando la calidad de los recursos, agua, o algo que promueva el crecimiento y reproducción natural de los peces.

5.2.2. Simulación de una especie con acoplamiento (peces con actividad de pesca)

En la investigación de [52], se introduce una función de cosecha igual a $H(t) = 156100$, obtenido de recuperar datos por los primeros 6 meses de pesca. Se plantea que la temporada de pesca comienza una vez que la población de peces alcanza su máxima capacidad de carga, y esta tiene una duración de 6 meses. El objetivo de esta temporada de pesca es que la población no se encuentre en riesgo de extinción en ningún momento y que se mantenga alrededor de su punto de inflexión. Sin embargo, en esta investigación se propone que, con un diseño de regulación poblacional, se puede definir una referencia de control que mantenga a la población entre el 65 % y 90 % de su máxima capacidad de carga, es decir que se puede definir una temporada de crecimiento donde la población llegue al 90 % de N como máximo y en una temporada de pesca donde llegue a un 65 % de N como mínimo.

Se simula el escenario de crecimiento y pesca planteado utilizando el modelo de crecimiento logístico con acoplamiento (2.20). Cabe destacar que en [52] la función $H(t)$ se agrega al modelo logístico sin ninguna clase de acoplamiento ni relación con los parámetros ni estados del modelo, la propuesta aquí es que $H(t)$ se tiene que relacionar con el término $\frac{r\alpha x(t)}{v}$, en donde r y N representan los parámetros del crecimiento de la población de peces, v es la variable externa y acoplada con la población de peces, en este caso se refiere al número de individuos relacionados con la pesca, o los pescadores, y α es el parámetro de acoplamiento entre los peces y pescadores, el cual puede indicar la capacidad que tiene v de obtener peces. Sea v un número supuesto de pescadores entre 1000 y 3000, para reproducir el modelo con el escenario anterior, se utilizan los parámetros denominados como la competencia máxima en las secciones anteriores.

CAPÍTULO 5. PROPUESTA DE REGULACIÓN DEL VALOR FINAL

Utilizando los parámetros de la tabla 5.2, se reproduce el modelo (2.20) y se simula el crecimiento durante las dos temporadas por una duración total de 5 años, a diferencia de utilizar la función $H(t)$, se investigan los resultados con la propuesta del Lema de regulación 5 usando el parámetro de acoplamiento manipulable $\alpha(t)$, el cual sea capaz de mantener a la población dentro de la referencia definida. Las simulaciones del crecimiento de la población de peces durante las dos temporadas se comparan utilizando $\alpha(t)$ y $\underline{\alpha}_n$ en el modelo (2.20), los resultados de las trayectorias se muestran en la Figura 5.2.

Tabla 5.2: Parámetros del modelo de crecimiento logístico con acoplamiento.

Parámetros	Valor	Unidades
r	0.8	individuos (peces)/t
N	780500	individuos
α_0	$-N/v$	individuos(peces)/individuos(pescadores)
v	1000	individuos (pescadores)
x_0	10000	individuos (peces)

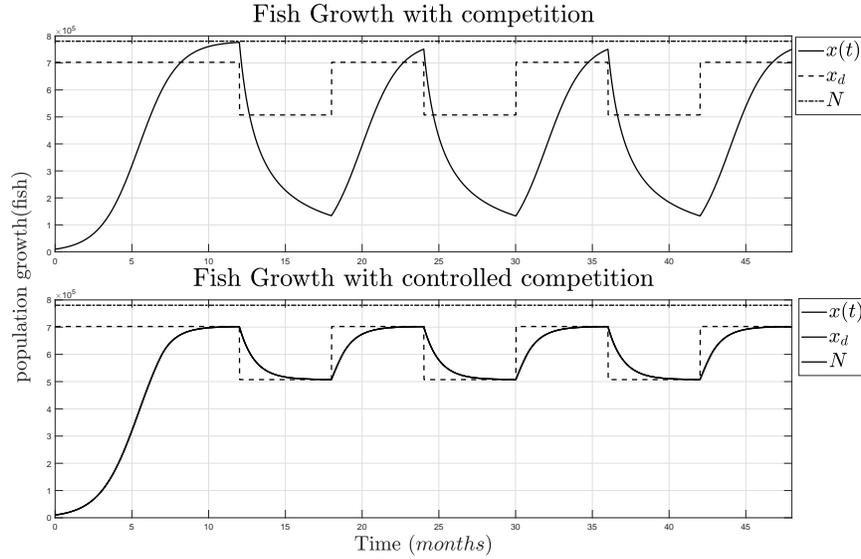


Figura 5.2: Simulación del modelo tipo Verhulst acoplado para el crecimiento de una población de peces con temporada de pesca. TOP: Crecimiento de la población de peces con la máxima competencia ($\underline{\alpha}_n = -N/v$). BOT: Crecimiento de la población de peces con acoplamiento manipulable utilizando el Lema de Regulación 5 ($\alpha(t)$).

La Parte superior de la Figura 5.2 muestra que, aun con la máxima competencia, la población nunca se encuentra en riesgo de extinción. Su decrecimiento pasa por el punto de inflexión, indicando que los peces no se encuentran a un nivel de madurez apropiado, esto puede ser interpretado como una población de peces jóvenes o pequeños, menos apropiado para la pesca, venta, y ganancias. Mientras tanto, en la parte inferior de la Figura 5.2, la población se mantiene dentro de la referencia de regulación deseada. A continuación, en la Figura 5.3, se puede visualizar la competencia máxima $\underline{\alpha}_n$ y los resultados del acoplamiento manipulable $\alpha(t)$.

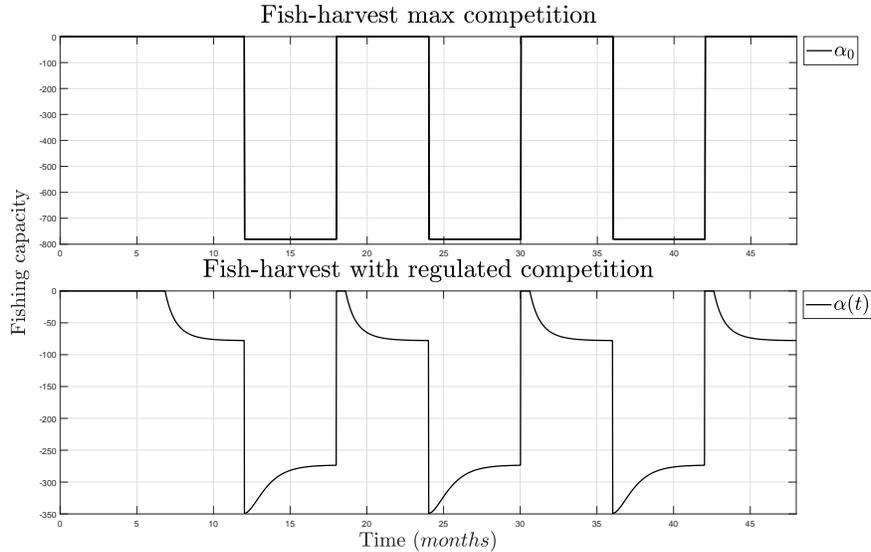


Figura 5.3: Simulación de la capacidad de pesca. TOP: Máxima competencia entre peces y pescadores. ($\alpha_n = -N/v$ y $v = 1000$). BOT: Acoplamiento manipulable utilizando el Lema de regulación 5 ($\alpha(t)$).

En la parte superior, la competencia máxima se alterna conforme las temporadas, en la temporada de crecimiento no hay acoplamiento entre x y v . En la parte inferior de la Figura 5.3, el acoplamiento manipulable se ajusta de acuerdo a los objetivos deseados, que en este caso son las referencias de regulación. Y se puede ver que permite la pesca limitada durante la temporada de crecimiento, lo cual puede presentar ventajas como una mayor producción económica.

Una de las ventajas de representar la función de cosecha, $H(t)$ mediante el termino $\frac{rxv}{N}\alpha(t)$ es la posibilidad de simular escenarios con un numero diferente de pescadores, los cuales pueden ser vistos como clientes, para poder abordar la situación cuando se tenga un número de clientes mayor al planeado y evitar riesgos de extinción.

A continuación, en la figura 5.4 se presenta una simulación cuando existe un excedente de clientes, suponiendo $v = 2000$ y $v = 3000$. En la parte superior de la Figura 5.4, se muestra el crecimiento de la población de peces cuando el parámetro de acoplamiento tiene máxima capacidad, con un numero diferente de clientes, y se puede ver que la población prácticamente se extingue cuando se duplica y triplica el número de clientes. En la parte

CAPÍTULO 5. PROPUESTA DE REGULACIÓN DEL VALOR FINAL

inferior de la Figura 5.4 se puede visualizar que la población de peces se mantiene entre la referencia de regulación y la variación del número de clientes es insignificante. En la Figura 5.5 se visualiza el acoplamiento máximo y el manipulable, $\underline{\alpha}_n$ y $\alpha(t)$ respectivamente, para todos los valores de v .

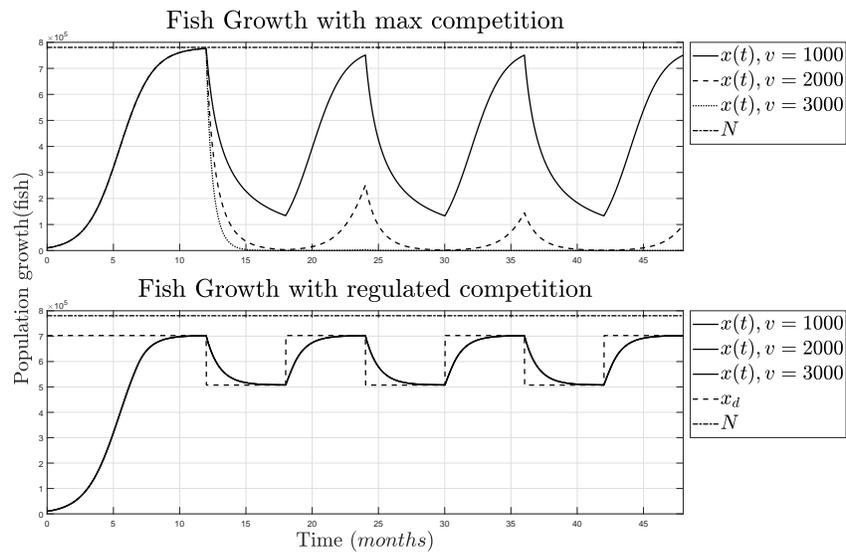


Figura 5.4: Simulación del crecimiento de peces acoplado con pescadores. TOP: Crecimiento de peces con un acoplamiento máximo de los pescadores ($\underline{\alpha}_n = -N/v$). BOT: Crecimiento de peces con un acoplamiento manipulable mediante el lema 5 ($\alpha(t)$)

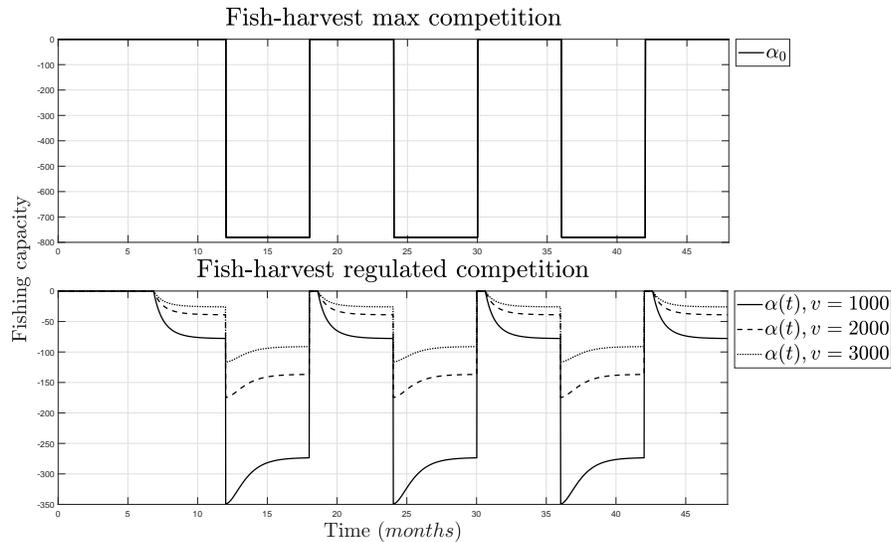


Figura 5.5: Simulación de la capacidad de pesca por número de clientes. TOP: Máxima competencia y pescadores. ($\bar{\alpha} = -N/v$ y $v = 1000$). BOT: Acoplamiento manipulable ($\alpha(t)$) para $v = 1000$, $v = 2000$ y $v = 3000$.

En la parte superior de la Figura 5.5 se muestra la máxima competencia con máximo número de clientes, se alterna entre cada temporada e indica que cada pescador tiene la capacidad de pescar hasta 800 peces por día, sin embargo, esto provoca que la población se extinga al menos que se limite el número de clientes a 1000 (Ver Figura 5.4). En la parte inferior de la Figura 5.5, se visualiza que la capacidad de pesca cambia significativamente dependiendo del número de clientes.

5.2.3. Simulación de dos especies en coexistencia

Como último ejemplo se presenta la situación cuando el acoplamiento, en lugar de ser con una variable constante v , es considerado como otra ecuación logística en crecimiento. La suposición es que el crecimiento de clientes es independiente de los peces, depende de parámetros tales como inversión, promociones, mantenimiento, marketing, equipo y tecnología. Es por eso que la forma más simple de representar la interacción entre los clientes y peces en crecimiento es utilizando el modelo de coexistencia (2.22), en un régimen de amensalismo, ya que la variable independiente provoca un decrecimiento

CAPÍTULO 5. PROPUESTA DE REGULACIÓN DEL VALOR FINAL

en la variable dependiente, además que de acuerdo a la observación 2, la regulación de una población solo se permite en los regímenes de Amensalismo, competencia, y depredación. Y el acoplamiento manipulable, capaz de regular la población de peces dependiendo del cambio de los clientes, es definido por el lema 6.

La simulación se aborda de la siguiente manera. Sea $x_2(t)$ el número de clientes, su máxima capacidad de carga previamente definida como $N_2 = 5000$, y una condición inicial $x_{02} = 500$. El objetivo de los clientes se define por diseño, y se proyecta un crecimiento desde su condición inicial hasta su máxima capacidad de carga en un tiempo de 5 años o $t^* = 60$ meses (en concordancia con el ejemplo anterior). Entonces la tasa de crecimiento intrínseca, r_2 , se puede calcular utilizando la ecuación (4.1). Para la población de peces, x_1 , se utilizan los parámetros de la previa subsección, denotado por el subíndice 1. El objetivo de regulación se define diferente, entre el 65-45 % de N_1 , y para que dicha regulación se pueda cumplir es necesario definir el acoplamiento como parámetro manipulable, $\alpha_1 := \alpha_1(t)$. Todos los valores utilizados para la simulación se pueden ver la tabla 5.3

Tabla 5.3: Parámetros del modelo de coexistencia en el régimen de amensalismo.

Parámetros	Valor	Unidades
r_1	0.8	individuos(peces)/t
r_2	0.1166 ¹	individuos(pescadores)/t
N_1	780500	individuos(peces)
N_2	5000	individuos(pescadores)
α_{01}	$-N_1/N_2$	individuos(peces)/individuos(pescadores)
α_{02}	0	individuos(peces)/individuos(pescadores)
x_{01}	10000	individuos(peces)
x_{02}	500	individuos(pescadores)

^aValor obtenido de ecuación (4.1).

En la Figura 5.6, se muestra la simulación del crecimiento de clientes, alcanza el 99 % de su máxima capacidad de carga a los 60 meses, y tiene un punto de inflexión de 2500 clientes en un tiempo de $t_{ip} =$. Dicho crecimiento independiente se acopla con la población de peces durante las temporadas de

CAPÍTULO 5. PROPUESTA DE REGULACIÓN DEL VALOR FINAL

crecimiento y de pesca, esto se puede ver en la parte superior de la Figura 5.7. En la parte inferior de la Figura 5.7 se muestra el acoplamiento manipulable utilizando el Lema de regulación 6, en donde $\alpha_1(t)$ se ajusta dependiendo del crecimiento de los clientes y mantiene la regulación deseada por gran parte del proceso.

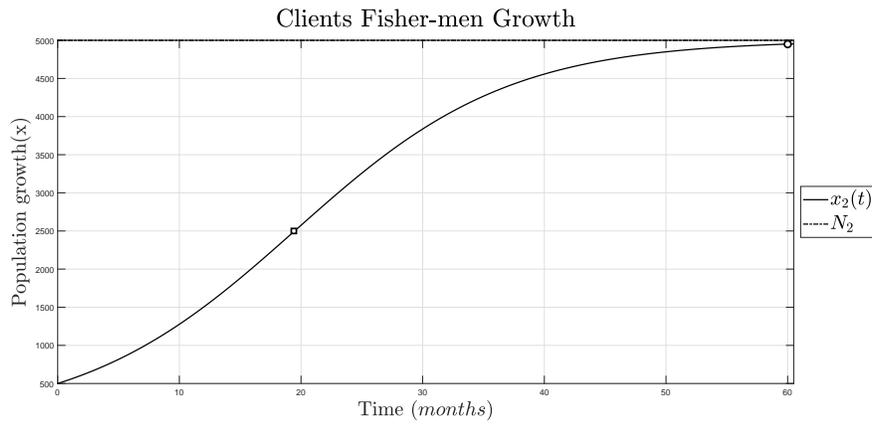


Figura 5.6: Simulación del crecimiento de clientes o pescadores independientes con los parámetros de la tabla 5.3.

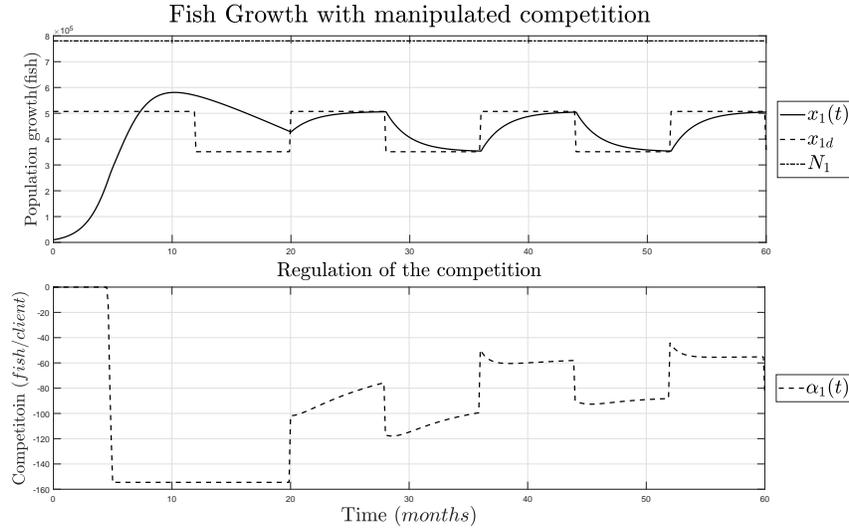


Figura 5.7: Simulación de la población de peces acoplada con los clientes en crecimiento. TOP: Crecimiento de la población de peces con acoplamiento manipulable (línea continua). BOT: Acoplamiento manipulable, $\alpha_1(t)$, utilizando el lema de regulación 6 (línea discontinua).

Se puede ver, en la Figura 5.7, que durante la primera temporada de pesca, el crecimiento de los peces trata de seguir la referencia de control pero no es posible ya que $\alpha_1(t)$ está limitado para evitar correr riesgos de extinción, lo que indica una regulación parcial. Este tipo de interacción se estableció en su forma más simple, donde no se pueden perder clientes aun cuando no existan peces, sin embargo, es posible ver a los peces como las presas y a los clientes como los depredadores, definiendo que un gran número de peces incrementará el número de clientes y pescadores, así como la ausencia de los mismo provocará que los clientes disminuyan.

Los resultados anteriores muestran la regulación de los modelos de crecimiento logístico aplicando los lemas de regulación 5 y 6. Se puede ver que los resultados siguen las referencias de control, regulando de manera exitosa las poblaciones mediante un parámetro que se define como manipulable. Esto es de gran ayuda para realizar simulaciones y poder tomar mejores decisiones administrativas en cuestión a los objetivos de producción o de mantenimiento, por ejemplo, evitar la extinción, incrementar el número de clientes, de ingresos y para definir necesidades de regulaciones específicas.

Capítulo 6

Conclusiones

La investigación desarrollada brindó varios descubrimientos relevantes en el contexto de control automático. Con el estado del arte realizado se encontró que los modelos de crecimiento logístico, tanto de una especie como de dos especies, se utilizan en una gran variedad de procesos, como los son la dinámica de poblaciones humanas, de animales, de plantas, de microorganismos, para la descripción de la propagación de enfermedades, e incluso para analizar el crecimiento de nuevos productos y tecnologías. Principalmente resaltando que los modelos de una especie no son capaces de cumplir objetivos de regulación ni de seguimiento de trayectoria ya que no tienen una señal de excitación o exógena con la que se pueda manipular el crecimiento. Sin embargo, los modelos de crecimiento de dos especies pueden utilizar sus parámetros de acoplamiento para realizar dicha regulación.

Los modelos matemáticos con la estructura tipo Verhulst resaltan tres parámetros: la tasa de crecimiento intrínseca, los parámetros de acoplamiento, y la máxima capacidad de carga. El último parámetro se considera conocido, por lo tanto, se hace énfasis en la importancia de los otros dos. El análisis realizado es de utilidad para calcular la tasa de crecimiento intrínseca, la caracterización de los parámetros de acoplamiento y finalmente la simulación de los modelos. La tasa de crecimiento intrínseca puede acelerar o retardar el crecimiento, sin embargo, no es capaz de regular el valor final del crecimiento.

Con respecto a la regulación, estos resultados demuestran que la estructura de los modelos de coexistencia y con acoplamiento son de interés. La regulación de una población se puede cumplir por completo mediante la manipulación de los parámetros de acoplamiento para tres regímenes ecológicos de la naturaleza. Con el análisis del valor final, se propusieron lemas para la

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

regulación de la población utilizando el modelo tipo Verhulst acoplado con una variable exógena, y para el modelo de coexistencia tipo Verhulst.

Los regímenes de Amensalismo, Competencia y Presa-Predador tienen la estructura adecuada para regular su crecimiento entre cero y su máxima capacidad de carga. Los resultados de los lemas de regulación se ejemplifican con un escenario de una población de peces acoplada con seres humanos, o pescadores, y se demuestra que la regulación es posible. Además, esto puede ser de gran utilidad para realizar simulaciones controladas, prevenir escenarios de extinción, y para hacer toma de decisiones.

Cabella y Riveiro abordaron el sistema de crecimiento logístico con un enfoque de control, sin embargo, el énfasis se hace en la máxima capacidad de carga ya que este parámetro determina el valor final. Su propuesta es que existen sistemas en donde es posible que una variable exógena pueda modificar la máxima capacidad de carga, por ende, el valor final. Sin embargo, en esta investigación se considera que este parámetro debe de ser constante, es decir, si se modifica de manera exógena la capacidad de carga y su valor disminuye a cero, el modelo no tiene solución. Es por eso que se decidió abordar el análisis donde se determina que el parámetro de acoplamiento manipulable tiene la capacidad de modificar el valor final.

Las limitaciones de este proyecto de investigación es que la regulación solo se puede realizar cuando los parámetros de acoplamiento son negativos, o cuando tienen la capacidad de cambiar su naturaleza de positivo a negativo y viceversa. Si estos son positivos, el modelo no tiene la capacidad de disminuir el crecimiento, solamente de evitar que siga creciendo, además que la estabilidad de este se compromete. Una gran ventaja es que el análisis se hace en la estructura del modelo general, por lo que los resultados pueden ser aplicados a diferentes procesos con la estructura apropiada.

Con respecto a la predicción paramétrica, los resultados presentados, el lema de predicción, es capaz de predecir el parámetro de acoplamiento cuando se definen cotas superiores e inferiores. Lo cual es de utilidad ya que definir estos parámetros de manera específica puede llegar a ser un reto. Estos resultados de predicción fueron aplicados a un ejemplo de germinación controlada, o de malteado de granos de cebada, en donde es de interés conocer varias variables del proceso para saber en qué momento detener la germinación de los granos para que estos tengan las mejores cualidades para ser utilizados en procesos de elaboración de cerveza. Con la visualización de los parámetros de acoplamiento se pueden ayudar a esta toma de decisión.

Este trabajo de investigación abre la puerta para futuras investigaciones,

por ejemplo:

- El análisis de los modelos de coexistencia tipo Richards y Von-Bertalanffy con el fin de realizar regulación y predicción utilizando los modelos con competencia intraespecífica. En donde es necesario profundizar en el parámetro β .
- Expandir el modelo a más de dos especies, en donde el análisis de las propiedades, puntos de equilibrio, valores finales y puntos de inflexión tomen en cuenta de tres a n especies.
- Analizar los modelos de una especie, de dos especies, e inclusive de tres hasta n especies, considerando que las tasas de crecimiento intrínsecas sean variantes en el tiempo.
- El análisis de estos modelos se estudió como sistema no lineal, sin embargo, con las definiciones y suposiciones correctas, por ejemplo, delimitando las tasas de crecimiento intrínsecas y los parámetros de acoplamiento como constantes, se puede estudiar el modelo desde el punto de vista de modelos Quasi-LPV.

Los productos científicos de este trabajo de investigación son dos artículos, el primero relacionado al modelado y regulación de los sistemas de crecimiento acoplados y de coexistencia (Figura E.1). La portada de la publicación se muestra en el Apéndice E.

Y el segundo es relacionado al modelado y predicción de los parámetros de acoplamiento utilizando un ejemplo de malteado de cebada (Figura E.2). La portada del trabajo de investigación se muestra en el Apéndice E.

Apéndice A

Solución del Modelo de Verhulst

Se empieza por reescribir (2.14) de la siguiente manera

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N}\right)$$

Y se resuelve la ecuación diferencial por el método de separación de variables.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N}\right) \\ \frac{dx(t)}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N}\right)} &= r dt \\ \int \frac{dx(t)}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N}\right)} &= \int r dt\end{aligned}$$

Para integrar el lado izquierdo de la expresión, se hace una expansión en fracciones parciales,

$$\frac{1}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N}\right)} = \frac{A}{x(t)} + \frac{B}{1 - \frac{x(t)}{N}}$$

Resolviendo las fracciones parciales se obtiene que $A = 1$ y $B = 1/N$, y la integral se puede reescribir de la siguiente manera

$$\int \frac{1}{x(t)} dx(t) + \frac{1}{N} \int \frac{1}{1 - \frac{x(t)}{N}} dx(t) = \int r dt$$

APÉNDICE A. SOLUCIÓN DEL MODELO DE VERHULST

Proponiendo el cambio de variable $U = 1 - \frac{x(t)}{N}$, entonces $dx(t) = -NdU$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(t)} dx(t) - \int \frac{1}{U} dU &= \int r dt \\ \ln |x(t)| - \ln |U| &= rt + C \\ \ln \left| \frac{x(t)}{U} \right| &= rt + C \\ \ln \left| \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{N}} \right| &= rt + C \\ e^{\ln \left| \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{N}} \right|} &= e^{rt+C} \\ \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{N}} &= Ce^{rt} \\ x(t) &= Ce^{rt} \left(1 - \frac{x(t)}{N} \right) \\ x(t) &= Ce^{rt} - Ce^{rt} \frac{x(t)}{N} \\ x(t) + Ce^{rt} \frac{x(t)}{N} &= Ce^{rt} \\ x(t) \left(1 + Ce^{rt} \frac{1}{N} \right) &= Ce^{rt} \\ x(t) &= \frac{Ce^{rt}}{1 + Ce^{rt} \frac{1}{N}} \end{aligned}$$

Si se multiplica la ecuación por $\frac{1}{Ce^{rt}} / \frac{1}{Ce^{rt}} = 1$, el resultado no se ve afectado y se puede reescribir la ecuación.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Ce^{rt}}{1 + Ce^{rt} \frac{1}{N}} \left(\frac{\frac{1}{Ce^{rt}}}{\frac{1}{Ce^{rt}}} \right) \\ x(t) &= \frac{1}{\frac{1 + Ce^{rt} \frac{1}{N}}{Ce^{rt}}} \\ x(t) &= \frac{1}{\frac{1}{Ce^{rt}} + \frac{1}{N}} \\ x(t) &= \frac{1}{Ce^{-rt} + \frac{1}{N}} \end{aligned}$$

APÉNDICE A. SOLUCIÓN DEL MODELO DE VERHULST

Para encontrar el valor de C , se define $t = 0$ y $x(0) = x_0$

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{Ce^{-r(0)} + \frac{1}{N}} \\x_0 &= \frac{1}{C + \frac{1}{N}} \\x_0 \left(C + \frac{1}{N} \right) &= 1 \\ \left(C + \frac{1}{N} \right) &= \frac{1}{x_0} \\ C &= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{N}\end{aligned}$$

Finalmente, se sustituye la constante encontrada en $x(t)$

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{N} \right] e^{-rt} + \frac{1}{N}} \\x(t) &= \frac{1}{\frac{e^{-rt}}{x_0} - \frac{e^{-rt}}{N} + \frac{1}{N}} \\x(t) &= \frac{1}{\frac{e^{-rt}}{x_0} - \frac{e^{-rt}+1}{N}} \\x(t) &= \frac{1}{\frac{Ne^{-rt} - (e^{-rt}+1)x_0}{x_0N}} \\x(t) &= \frac{x_0N}{Ne^{-rt} - (e^{-rt} + 1)x_0} \\x(t) &= \frac{x_0N}{Ne^{-rt} - e^{-rt}x_0 + x_0}\end{aligned}$$

La solución analítica del modelo de Verhulst es:

$$x(t) = \frac{x_0N}{(N - x_0)e^{-rt} + x_0}$$

Apéndice B

Solución del Modelo de Richards

Se empieza por reescribir (2.16) de la siguiente manera

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right)$$

Y se resuelve la ecuación diferencial por el método de separación de variables.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right) \\ \frac{dx(t)}{x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right)} &= r dt \\ \int \frac{dx(t)}{x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right)} &= \int r dt \end{aligned}$$

Para resolver la integral del lado izquierdo de la expresión, se propone la expansión en fracciones parciales de la siguiente manera

$$\frac{1}{x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right)} = \frac{A}{x(t)} + \frac{Bx^{(\beta-1)}(t) + C}{1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta}$$

APÉNDICE B. SOLUCIÓN DEL MODELO DE RICHARDS

De tal manera que al resolver las fracciones parciales se obtiene que $A = 1$, $B = 1/N^\beta$, $C = 0$, y se reescribe la integral de la siguiente manera,

$$\int \frac{1}{x(t)} dx(t) + \frac{1}{N^\beta} \int \frac{x^{\beta-1}(t)}{1 - \left(\frac{x(t)}{N}\right)^\beta} dx(t) = \int r dt$$

Proponiendo el cambio de variable $U = 1 - \left(\frac{x(t)}{N}\right)^\beta$, al derivar U se encuentra que $dx(t) = -\frac{N^\beta}{\beta} x^{-(\beta-1)}(t) dU$, y al sustituir en la integral se obtiene,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(t)} dx(t) + \frac{1}{N^\beta} \int \frac{x^{\beta-1}(t)}{U} \left(-\frac{N^\beta}{\beta} x^{-(\beta-1)}(t) dU \right) &= \int r dt \\ \int \frac{1}{x(t)} dx(t) - \frac{1}{\beta} \int \frac{1}{U} dU &= \int r dt \\ \ln |x(t)| - \frac{1}{\beta} \ln |U| &= rt + C \end{aligned}$$

Multiplicando toda la expresión por β , se obtiene lo siguiente

$$\beta \ln |x(t)| - \ln |U| = \beta rt + \beta C$$

Y utilizando las propiedades de los logaritmos se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \ln |x^\beta(t)| - \ln |U| &= \beta rt + C \\ \ln \left| \frac{x^\beta(t)}{U} \right| &= \beta rt + C \end{aligned}$$

Ahora se sustituye el valor actual de la variable U , y se obtiene

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{x^\beta(t)}{1 - \left(\frac{x(t)}{N}\right)^\beta} \right| &= \beta rt + C \\ e^{\ln \left| \frac{x^\beta(t)}{1 - \left(\frac{x(t)}{N}\right)^\beta} \right|} &= e^{\beta rt + C} \\ \frac{x^\beta(t)}{1 - \left(\frac{x(t)}{N}\right)^\beta} &= C e^{\beta rt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^\beta(t) &= Ce^{\beta rt} \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right) \\
 x^\beta(t) &= Ce^{\beta rt} - Ce^{\beta rt} \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \\
 x^\beta(t) + Ce^{\beta rt} \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta &= Ce^{\beta rt} \\
 x^\beta(t) \left(1 + Ce^{\beta rt} \frac{1}{N^\beta} \right) &= Ce^{\beta rt} \\
 x^\beta(t) &= \frac{Ce^{\beta rt}}{1 + Ce^{\beta rt} \frac{1}{N^\beta}}
 \end{aligned}$$

El termino a continuación

$$\frac{\frac{1}{Ce^{\beta rt}}}{\frac{1}{Ce^{\beta rt}}} = 1$$

no afecta de ningún modo el resultado de la ecuación, por lo tanto se puede utilizar para simplificar la solución hasta ahora,

$$\begin{aligned}
 x^\beta(t) &= \frac{Ce^{\beta rt}}{1 + Ce^{\beta rt} \frac{1}{N^\beta}} \left(\frac{\frac{1}{Ce^{\beta rt}}}{\frac{1}{Ce^{\beta rt}}} \right) \\
 x^\beta(t) &= \frac{1}{\frac{1 + Ce^{\beta rt} \frac{1}{N^\beta}}{Ce^{\beta rt}}} \\
 x^\beta(t) &= \frac{1}{\frac{1}{Ce^{\beta rt}} + \frac{1}{N^\beta}} \\
 x^\beta(t) &= \frac{1}{Ce^{-\beta rt} + \frac{1}{N^\beta}}
 \end{aligned}$$

Se eleva toda la expresión a $\frac{1}{\beta}$ para eliminar el exponente de la variable $x(t)$,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left(\frac{1}{Ce^{-\beta rt} + \frac{1}{N^\beta}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
 x(t) &= \frac{1}{\left(Ce^{-\beta rt} + \frac{1}{N^\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}}
 \end{aligned}$$

APÉNDICE B. SOLUCIÓN DEL MODELO DE RICHARDS

Para encontrar el valor de C , se define $t = 0$ y $x(0) = x_0$

$$x_0 = \frac{1}{\left(Ce^{-\beta r(0)} + \frac{1}{N^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

$$x_0 = \frac{1}{\left(C + \frac{1}{N^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

$$x_0 \left(C + \frac{1}{N^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

$$C^{\frac{1}{\beta}} + \frac{1}{N} = \frac{1}{x_0}$$

$$C^{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{N}$$

$$C = \frac{1}{x_0^\beta} - \frac{1}{N^\beta}$$

Finalmente, se sustituye la constante encontrada en $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{\left(\left[\frac{1}{x_0^\beta} - \frac{1}{N^\beta}\right] e^{-\beta r t} + \frac{1}{N^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

$$x(t) = \frac{1}{\left(\frac{e^{-\beta r t}}{x_0^\beta} - \frac{e^{-\beta r t}}{N^\beta} + \frac{1}{N^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

$$x(t) = \frac{1}{\left(\frac{e^{-\beta r t}}{x_0^\beta} - \frac{e^{-\beta r t} + 1}{N^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

$$x(t) = \frac{1}{\left(\frac{N^\beta e^{-\beta r t} - x_0^\beta e^{-\beta r t} + 1}{x_0^\beta N^\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

$$x(t) = \frac{x_0 N}{\left(N^\beta e^{-\beta r t} - x_0^\beta (e^{-\beta r t} + 1)\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Finalmente, la solución analítica del modelo de Richards es:

$$x(t) = \frac{x_0 N}{\left(\left[N^\beta - x_0^\beta\right] e^{-\beta r t} - x_0^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Apéndice C

Solución del Modelo de Von-Bertalanffy

El modelo de Von-Bertalanffy(2.18), esta expresado como,

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx^{1-\beta}(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right)$$

Y se resuelve por el método de separación de variables

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{x^{1-\beta}(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right)} &= r dt \\ \int \frac{dx(t)}{x^{1-\beta}(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right)} &= \int r dt \end{aligned}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable para solucionar la integral del lado izquierdo de la expresión,

$$U = 1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta$$

la derivada de U con respecto de $x(t)$ es,

$$\frac{dU}{dx(t)} = 0 - \frac{\beta}{N^\beta} x^{\beta-1}(t)$$

APÉNDICE C. SOLUCIÓN DEL MODELO DE VON-BERTALANFFY

y se obtiene que,

$$dx(t) = -\frac{N^\beta}{\beta x^{\beta-1}(t)}$$

Sustituyendo en la integral del lado izquierdo,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx(t)}{x^{1-\beta}(t)(U)} &= \int r dt \\ \int \frac{-N^\beta}{\beta x^{\beta-1}(t)x^{1-\beta}(t)(U)} &= \int r dt \\ -\frac{N^\beta}{\beta} \int \frac{1}{U} dU &= \int r dt \end{aligned}$$

se resuelven las integrales

$$-\frac{N^\beta}{\beta} \ln |U| = rt + C$$

Y se sustituye la variable U ,

$$\begin{aligned} -\frac{N^\beta}{\beta} \ln \left| 1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right| &= rt + C \\ \ln \left| 1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right| &= rt + C \left(-\frac{\beta}{N^\beta} \right) \\ \ln \left| 1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right| &= -rt \left(\frac{\beta}{N^\beta} \right) + C \\ e^{\ln \left| 1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta \right|} &= e^{-rt \left(\frac{\beta}{N^\beta} \right) + C} \\ 1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta &= e^{-rt \left(\frac{\beta}{N^\beta} \right)} e^C \\ 1 - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta &= C e^{-rt \left(\frac{\beta}{N^\beta} \right)} \\ - \left(\frac{x(t)}{N} \right)^\beta &= C e^{-rt \left(\frac{\beta}{N^\beta} \right)} - 1 \\ x(t)^\beta &= -CN^\beta e^{-rt \left(\frac{\beta}{N^\beta} \right)} + N^\beta \end{aligned}$$

APÉNDICE C. SOLUCIÓN DEL MODELO DE VON-BERTALANFFY

Para eliminar el exponente β de $x(t)$, se eleva todo a la $\frac{1}{\beta}$

$$x(t)^{\frac{\beta}{\beta}} = \left(-CN^{\beta}e^{-rt\left(\frac{\beta}{N^{\beta}}\right)} + N^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x(t) = N \left(-Ce^{-rt\left(\frac{\beta}{N^{\beta}}\right)} + 1\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x(t) = N \left(1 - Ce^{-rt\left(\frac{\beta}{N^{\beta}}\right)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Para encontrar el valor de C , se define $t = 0$ y $x(0) = x_0$, entonces

$$x(0) = N \left(1 - Ce^{-r(0)\left(\frac{\beta}{N^{\beta}}\right)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x_0 = N (1 - C)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$x_0^{\beta} = N^{\beta} (1 - C)^{\frac{\beta}{\beta}}$$

$$x_0^{\beta} = N^{\beta} (1 - C)$$

$$\frac{x_0^{\beta}}{N^{\beta}} = 1 - C$$

$$C = 1 - \frac{x_0^{\beta}}{N^{\beta}}$$

Para finalizar se sustituye la constante C , en $x(t)$, y la solución del modelo de Von-Bertalanffy generalizado es:

$$x(t) = N \left(1 - \left(1 - \frac{x_0^{\beta}}{N^{\beta}}\right) e^{-rt\left(\frac{\beta}{N^{\beta}}\right)}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Apéndice D

Solución del Modelo tipo Verhulst con acoplamiento

Se empieza por reescribir (2.20) de la siguiente manera

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N} \right)$$

Ya que α y v son variables definidas, se resuelve la ecuación diferencial por el método de separación de variables.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N} \right) \\ \frac{dx(t)}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N} \right)} &= r dt \\ \int \frac{dx(t)}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N} \right)} &= \int r dt \end{aligned}$$

Para integrar el lado izquierdo de la expresión, se hace una expansión en fracciones parciales,

$$\frac{A}{x(t)} + \frac{B}{1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N}} = \frac{1}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N} \right)}$$

APÉNDICE D. SOLUCIÓN DEL MODELO TIPO VERHULST CON
ACOPLAMIENTO

Resolviendo las fracciones parciales se obtiene que $A = \frac{1}{1 + \frac{\alpha v}{N}}$ y $B = \frac{1}{N(1 + \frac{\alpha v}{N})}$, por lo que la integral queda de la siguiente manera

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha v}{N}} \int \frac{1}{x(t)} dx(t) + \frac{1}{N(1 + \frac{\alpha v}{N})} \int \frac{1}{1 - \frac{x(t)}{N} + \alpha \frac{v}{N}} dx(t) = \int r dt$$

para simplificar el cálculo, se define una nueva variable $\theta = \frac{\alpha v}{N}$, de tal manera que,

$$\frac{1}{1 + \theta} \int \frac{1}{x(t)} dx(t) + \frac{1}{N(1 + \theta)} \int \frac{1}{1 - \frac{x(t)}{N} + \theta} dx(t) = \int r dt$$

A continuación se propone el cambio de variable $U = 1 - \frac{x(t)}{N} + \theta$, entonces $dx = -NdU$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \theta} \int \frac{1}{x(t)} dx(t) - \frac{N}{N(1 + \theta)} \int \frac{1}{U} dU &= \int r dt \\ \frac{1}{1 + \theta} \left(\int \frac{1}{x(t)} dx(t) - \int \frac{1}{U} dU \right) &= \int r dt \end{aligned}$$

Resolviendo la integral del lado derecho de la expresión se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \theta} \left(\int \frac{1}{x(t)} dx(t) - \int \frac{1}{U} dU \right) &= rt + C \\ \int \frac{1}{x(t)} dx(t) - \int \frac{1}{U} dU &= (rt + C)(1 + \theta) \\ \int \frac{1}{x(t)} dx(t) - \int \frac{1}{U} dU &= (rt)(1 + \theta) + C \end{aligned}$$

Y resolviendo las integrales del lado izquierdo de la expresión,

$$\begin{aligned} \ln |x(t)| - \ln |U| &= (rt)(1 + \theta) + C \\ \ln \left| \frac{x(t)}{U} \right| &= (rt)(1 + \theta) + C \end{aligned}$$

APÉNDICE D. SOLUCIÓN DEL MODELO TIPO VERHULST CON
ACOPLAMIENTO

Sustituyendo el cambio de Variable $U = 1 - \frac{x(t)}{N} + \theta$

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{N} + \theta} \right| &= (rt)(1 + \theta) + C \\ e^{\ln \left| \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{N} + \theta} \right|} &= e^{(rt)(1+\theta)+C} \\ e^{\ln \left| \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{N} + \theta} \right|} &= e^{(rt)(1+\theta)} e^C \\ \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{N} + \theta} &= C e^{rt(1+\theta)} \\ x(t) &= C e^{rt(1+\theta)} \left(1 - \frac{x(t)}{N} + \theta \right) \\ x(t) &= C e^{rt(1+\theta)} (1 + \theta) - C e^{rt(1+\theta)} \frac{x(t)}{N} \\ x(t) + C e^{rt(1+\theta)} \frac{x(t)}{N} &= C e^{rt(1+\theta)} (1 + \theta) \\ x(t) \left(1 + \frac{C e^{rt(1+\theta)}}{N} \right) &= C e^{rt(1+\theta)} (1 + \theta) \\ x(t) &= \frac{(1 + \theta) C e^{rt(1+\theta)}}{1 + \frac{C e^{rt(1+\theta)}}{N}} \end{aligned}$$

Multiplicando toda la ecuación por $\frac{1}{(1+\theta)C e^{rt(1+\theta)}} / \frac{1}{(1+\theta)C e^{rt(1+\theta)}} = 1$, el resultado no se ve afectado y se puede reescribir la ecuación,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(1 + \theta) C e^{rt(1+\theta)}}{1 + C e^{rt(1+\theta)} \frac{1}{N}} \left(\frac{\frac{1}{(1+\theta)C e^{rt(1+\theta)}}}{\frac{1}{(1+\theta)C e^{rt(1+\theta)}}} \right) \\ x(t) &= \frac{1}{\frac{1 + C e^{rt(1+\theta)} \frac{1}{N}}{(1+\theta)C e^{rt(1+\theta)}}} \\ x(t) &= \frac{1}{\frac{1}{(1+\theta)C e^{rt(1+\theta)}} + \frac{1}{N(1+\theta)}} \\ x(t) &= \frac{(1 + \theta)}{C e^{-rt(1+\theta)} + \frac{1}{N}} \end{aligned}$$

APÉNDICE D. SOLUCIÓN DEL MODELO TIPO VERHULST CON ACOPLAMIENTO

Para encontrar el valor de C , se define $t = 0$ y $x(0) = x_0$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(1 + \theta)}{Ce^{-r(0)} + \frac{1}{N}} \\ x_0 &= \frac{(1 + \theta)}{C + \frac{1}{N}} \\ \left(C + \frac{1}{N}\right) &= \frac{(1 + \theta)}{x_0} \\ C &= \frac{(1 + \theta)}{x_0} - \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Finalmente, se sustituye la constante encontrada en $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(1 + \theta)}{\left[\frac{(1+\theta)}{x_0} - \frac{1}{N}\right] e^{-rt(1+\theta)} + \frac{1}{N}} \\ x(t) &= \frac{(1 + \theta)}{\frac{(1+\theta)e^{-rt(1+\theta)}}{x_0} - \frac{e^{-rt(1+\theta)}}{N} + \frac{1}{N}} \\ x(t) &= \frac{(1 + \theta)}{\frac{(1+\theta)e^{-rt(1+\theta)}}{x_0} - \frac{e^{-rt(1+\theta)} - 1}{N}} \\ x(t) &= \frac{(1 + \theta)}{\frac{N(1+\theta)e^{-rt(1+\theta)} - x_0(e^{-rt(1+\theta)} - 1)}{x_0N}} \\ x(t) &= \frac{x_0N(1 + \theta)}{N(1 + \theta)e^{-rt(1+\theta)} - x_0(e^{-rt(1+\theta)} - 1)} \\ x(t) &= \frac{x_0N(1 + \theta)}{N(1 + \theta)e^{-rt(1+\theta)} - x_0e^{-rt(1+\theta)} + x_0} \\ x(t) &= \frac{x_0N(1 + \theta)}{(N + N\theta - x_0)e^{-rt(1+\theta)} + x_0} \end{aligned}$$

Se sustituye la variable auxiliar $\theta = \frac{\alpha v}{N}$

$$x(t) = \frac{x_0N(1 + \frac{\alpha v}{N})}{(N + N\frac{\alpha v}{N} - x_0)e^{-rt(1 + \frac{\alpha v}{N})} + x_0}$$

Finalmente, la solución analítica del modelo de Verhulst con acoplamiento es

$$x(t) = \frac{x_0(N + \alpha v)}{(N + \alpha v - x_0)e^{-rt(1 + \frac{\alpha v}{N})} + x_0}$$

Apéndice E

Productos científicos

Theory in Biosciences
<https://doi.org/10.1007/s12064-023-00397-x>

ORIGINAL ARTICLE



Growth modeling approach with the Verhulst coexistence dynamic properties for regulation purposes

A. J. Morales-Erosa¹ · J. Reyes-Reyes¹ · C. M. Astorga-Zaragoza¹ · G. L. Osorio-Gordillo¹ · C. D. García-Beltrán¹ · G. Madrigal-Espinosa¹

Received: 15 December 2022 / Accepted: 22 June 2023
© The Author(s) 2023

Abstract

For this research, the properties of the logistic growth model for independent and coexisting species were used to set definitions for the possible regulation of one or two growth variables through their coupling parameters. The present analysis is done for the single-species Verhulst model without coupling, the single-species Verhulst model coupled with an exogenous signal, and the two-species Verhulst coexistence growth model which represents six different ecological regimes of interaction. The models' parameters, such as the intrinsic growth rate and the coupling, are defined. Finally, the control results are expressed as lemmas for regulation, and they are shown using a simulation example of a fish population growing independent of human interaction (no harvesting, no fishing) and the simulation of the regulation of said population when the coupling of fish and humans is involved (harvesting, fishing).

Keywords Logistic · Growth · Coexistence · Coupling · Dynamic · Regulation

Figura E.1: Portada Artículo 1.

Co-existence Growth Modeling Approach with
Dynamic Coupling Parameter Prediction Applied to a
Germination Process.

A.J. Morales-Erosa^a, J. Reyes-Reyes^{a,1}, C.M. Astorga-Zaragoza^a, G.L.
Osorio-Gordillo^a, C.D. García-Beltrán^a, G. Madrigal-Espinosa^a

^aCentro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Interior Internado Palmira
S/N, Col. Palmira, 62490 Cuernavaca, Mor. México (www.cenidet.tecnm.mx).

Abstract

In this research paper, the Coexistence growth model is analyzed for parameter definition, prediction, and simulation applied to a controlled germination process. The constant parameters, such as the intrinsic growth rates, are computed with the resolution of the dynamic model, and the coupling parameters are estimated using Lyapunov's method. The results are shown using data from the literature on a malting process. The estimated unknown parameters show information regarding the interaction of the seedling's growth and the grain's overall weight, starch, and sugar content which could be helpful in the decision-making of a malting process.

Keywords: Co-existence modeling, Parameter prediction, malting, amensalism, coupling.

Figura E.2: Portada Artículo 2.

Bibliografía

- [1] B Divya y K Kavitha. «A review on mathematical modelling in biology and medicine». En: *Adv. Math. Sci. J* 9.8 (2020), págs. 5869-5879.
- [2] J Derek Bewley, Kent Bradford, Henk Hilhorst et al. *Seeds: physiology of development, germination and dormancy*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Raymond Pearl y Lowell J Reed. «On the rate of growth of the population of the united states since 1790 and its mathematical representation». En: *Mathematical Demography*. Springer, 1977, págs. 341-347.
- [4] FJ Richards. «A flexible growth function for empirical use». En: *Journal of experimental Botany* 10.2 (1959), págs. 290-301.
- [5] Ludwig Von Bertalanffy. «Quantitative laws in metabolism and growth». En: *The quarterly review of biology* 32.3 (1957), págs. 217-231.
- [6] Anastasios Tsoularis y James Wallace. «Analysis of logistic growth models». En: *Mathematical biosciences* 179.1 (2002), págs. 21-55.
- [7] Perrin Meyer. «Bi-logistic growth». En: *Technological forecasting and social change* 47.1 (1994), págs. 89-102.
- [8] Thabet Abdeljawad, Qasem M Al-Mdallal y Fahd Jarad. «Fractional logistic models in the frame of fractional operators generated by conformable derivatives». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 119 (2019), págs. 94-101.
- [9] Yi-Jay Chang et al. «Modelling the growth of crustacean species». En: *Reviews in Fish Biology and Fisheries* 22 (2012), págs. 157-187.
- [10] Dmitry Kucharavy y Roland De Guio. «Application of logistic growth curve». En: *Procedia engineering* 131 (2015), págs. 280-290.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] Gerardo Núñez Medina. «Modelo de transición logística aplicado a la población de México». En: *Notas de Población* (2015).
- [12] Mohammad Sharif Ullah et al. «Analyzing and projection of future Bangladesh population using logistic growth model». En: *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application* 8.3 (2019), págs. 53-61.
- [13] Jhony Tiago Teleken, Alessandro Cazonatto Galvão y Weber da Silva Robazza. «Comparing non-linear mathematical models to describe growth of different animals». En: *Acta Scientiarum. Animal Sciences* 39.1 (2017), págs. 73-81.
- [14] Norbert Brunner et al. «Comparing growth patterns of three species: Similarities and differences». En: *PloS one* 14.10 (2019), e0224168.
- [15] Samuel N Nahashon et al. «Growth characteristics of pearl gray guinea fowl as predicted by the Richards, Gompertz, and logistic models». En: *Poultry science* 85.2 (2006), págs. 359-363.
- [16] Stelios Katsanevakis y Christos D Maravelias. «Modelling fish growth: multi-model inference as a better alternative to a priori using von Bertalanffy equation». En: *Fish and fisheries* 9.2 (2008), págs. 178-187.
- [17] Hilario Murua et al. «Fast versus slow growing tuna species: age, growth, and implications for population dynamics and fisheries management». En: *Reviews in Fish Biology and Fisheries* 27 (2017), págs. 733-773.
- [18] Benjamin Wacker y Jan Christian Schlüter. «A cubic nonlinear population growth model for single species: theory, an explicit–implicit solution algorithm and applications». En: *Advances in Difference Equations* 2021.1 (2021), págs. 1-29.
- [19] Katharina Renner-Martin et al. «A model for the mass-growth of wild-caught fish». En: *Open Journal of Modelling and Simulation* 7.1 (2018), págs. 19-40.
- [20] Colin PD Birch. «A new generalized logistic sigmoid growth equation compared with the Richards growth equation». En: *Annals of botany* 83.6 (1999), págs. 713-723.
- [21] Hao Xu et al. «Dynamic growth models for *Caragana korshinskii* shrub biomass in China». En: *Journal of Environmental Management* 269 (2020), pág. 110675.

BIBLIOGRAFÍA

- [22] Victor Hugo Ferreira Andrade et al. «Growth models for two commercial tree species in upland forests of the Southern Brazilian Amazon». En: *Forest Ecology and Management* 438 (2019), págs. 215-223.
- [23] Kentaro Nagahara, Yuan Lou y Eiji Yanagida. «Maximizing the total population with logistic growth in a patchy environment». En: *Journal of Mathematical Biology* 82 (2021), págs. 1-50.
- [24] Sławomir Kocira. «Concepts and Methods of Mathematic Modelling of Plant Growth and Development. Plant Germination-Part I». En: *Agricultural Engineering* 22.3 (2018), págs. 11-20.
- [25] SN Lisson, NJ Mendham y PS Carberry. «Development of a hemp (*Cannabis sativa* L.) simulation model 1. General introduction and the effect of temperature on the pre-emergent development of hemp». En: *Australian Journal of Experimental Agriculture* 40.3 (2000), págs. 405-411.
- [26] Agnieszka Szparaga y Ewa Czerwińska. «Modelling of beetroot seedlings with modified generalized logistic functions». En: *Agricultural Engineering* 21.3 (2017), págs. 107-117.
- [27] Agnieszka Szparaga y Sławomir Kocira. «Generalized logistic functions in modelling emergence of *Brassica napus* L.» En: *PLoS One* 13.8 (2018), e0201980.
- [28] DJ Schimpf, SD Flint e IG Palmblad. «Representation of germination curves with the logistic function». En: *Annals of Botany* 41.6 (1977), págs. 1357-1360.
- [29] Micha Peleg, Maria G Corradini y Mark D Normand. «The logistic (Verhulst) model for sigmoid microbial growth curves revisited». En: *Food research international* 40.7 (2007), págs. 808-818.
- [30] MA Kacena et al. «Bacterial growth in space flight: logistic growth curve parameters for *Escherichia coli* and *Bacillus subtilis*». En: *Applied microbiology and biotechnology* 51 (1999), págs. 229-234.
- [31] Nishikant Shirsat et al. «Revisiting Verhulst and Monod models: analysis of batch and fed-batch cultures». En: *Cytotechnology* 67 (2015), págs. 515-530.
- [32] Jhony Tiago Teleken, Alessandro Cazonatto Galvão y Weber da Silva Robazza. «Use of modified Richards model to predict isothermal and non-isothermal microbial growth». En: *brazilian journal of microbiology* 49 (2018), págs. 614-620.

BIBLIOGRAFÍA

- [33] Wang Jin, Scott W McCue y Matthew J Simpson. «Extended logistic growth model for heterogeneous populations». En: *Journal of Theoretical Biology* 445 (2018), págs. 51-61.
- [34] Mpho Muloiwa, Stephen Nyende-Byakika y Megersa Dinka. «Comparison of unstructured kinetic bacterial growth models.» En: *South African Journal of Chemical Engineering* 33 (2020), págs. 141-150.
- [35] Xiang-Sheng Wang, Jianhong Wu y Yong Yang. «Richards model revisited: Validation by and application to infection dynamics». En: *Journal of theoretical biology* 313 (2012), págs. 12-19.
- [36] Raimund Bürger, Gerardo Chowell y Leidy Yissedt Lara-Díaz. «Comparative analysis of phenomenological growth models applied to epidemic outbreaks.» En: *Mathematical biosciences and engineering: MBE* 16.5 (2019), págs. 4250-4273.
- [37] B Malavika et al. «Forecasting COVID-19 epidemic in India and high incidence states using SIR and logistic growth models». En: *Clinical Epidemiology and Global Health* 9 (2021), págs. 26-33.
- [38] Elinor Aviv-Sharon y Asaph Aharoni. «Generalized logistic growth modeling of the COVID-19 pandemic in Asia». En: *Infectious Disease Modelling* 5 (2020), págs. 502-509.
- [39] Ke Wu et al. «Generalized logistic growth modeling of the COVID-19 outbreak: comparing the dynamics in the 29 provinces in China and in the rest of the world». En: *Nonlinear dynamics* 101.3 (2020), págs. 1561-1581.
- [40] Milan Batista. «Estimation of the final size of the second phase of the coronavirus COVID 19 epidemic by the logistic model». En: *medrxiv* (2020), págs. 2020-03.
- [41] Peipei Wang et al. «Prediction of epidemic trends in COVID-19 with logistic model and machine learning technics». En: *Chaos, Solitons & Fractals* 139 (2020), págs. 110058.
- [42] Marco Mingione et al. «Spatio-temporal modelling of COVID-19 incident cases using Richards' curve: An application to the Italian regions». En: *Spatial Statistics* 49 (2022), págs. 100544.
- [43] Aaron James Clark, Larry Wayne Lake y Tadeusz Wiktor Patzek. «Production forecasting with logistic growth models». En: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition?* SPE. 2011, SPE-144790.

BIBLIOGRAFÍA

- [44] Antonio Carlos Gracias, Sérgio Ricardo Lourenço y Marat Rafikov. «Estimation of natural gas production, import and consumption in Brazil based on three mathematical models». En: *Natural Resources* 3.2 (2012), págs. 42-47.
- [45] Tyler M Harris et al. «Logistic growth curve modeling of US energy production and consumption». En: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 96 (2018), págs. 46-57.
- [46] Mikael Höök et al. «Global coal production outlooks based on a logistic model». En: *Fuel* 89.11 (2010), págs. 3546-3558.
- [47] Yunfei Zhou y Li Yan. «An Analytical Study of the External Environment of the Coevolution between Manufacturing and Logistics Based on the Logistic Model». En: *Complexity* 2021 (2021).
- [48] Bruno Giacomini Sari et al. «Describing tomato plant production using growth models». En: *Scientia Horticulturae* 246 (2019), págs. 146-154.
- [49] Jari J Hämäläinen y Pekka Reinikainen. «A simulation model for malt enzyme activities in kilning». En: *Journal of the Institute of Brewing* 113.2 (2007), págs. 159-167.
- [50] Pirkko Kuusela et al. «A Simulation Model for the Control of beta-Glucanase Activity and beta-Glucan Degradation During Germination in Malting». En: *Journal of the Institute of Brewing* 110.4 (2004), págs. 309-319.
- [51] Kripasindhu Chaudhuri. «Dynamic optimization of combined harvesting of a two-species fishery». En: *Ecological Modelling* 41.1-2 (1988), págs. 17-25.
- [52] Mohamed Faris Laham, Ishterinayagy S Krishnarajah y Jamilah Mohd Shariff. «Fish harvesting management strategies using logistic growth model». En: *Sains Malaysiana* 41.2 (2012), págs. 171-177.
- [53] Fabiano Ribeiro, Brenno Caetano Troca Cabella y Alexandre Souto Martinez. «Richards-like two species population dynamics model». En: *Theory in biosciences* 133.3-4 (2014), págs. 135-143.
- [54] Fabiano Ribeiroa, Brenno Caetano Troca Cabellab y Alexandre Souto Martinezb. «A Verhulst-Like Two-Species Population Dynamics Model». En: *arXiv preprint arXiv:1010.3361* (2010).

BIBLIOGRAFÍA

- [55] Erica Cruz-Rivera y Olga Vasilieva. «Optimal policies aimed at stabilization of populations with logistic growth under human intervention». En: *Theoretical Population Biology* 83 (2013), págs. 123-135.
- [56] Nikolay K Vitanov, Zlatinka I Dimitrova y Marcel Ausloos. «Verhulst–Lotka–Volterra (VLV) model of ideological struggle». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389.21 (2010), págs. 4970-4980.
- [57] Vyacheslav I Yukalov, Elizaveta P Yukalova y Didier Sornette. «New approach to modeling symbiosis in biological and social systems». En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 24.09 (2014), pág. 1450117.
- [58] Ricardo López-Ruiz y Danièle Fournier-Prunaret. «Complex behaviour in a discrete coupled logistic model for the symbiotic interaction of two species». En: *arXiv preprint nlin/0401045* (2004).
- [59] R Lopez-Ruiz y D Fournier-Prunaret. «Three logistic models for the two-species interactions: Symbiosis, predator-prey and competition». En: *arXiv preprint nlin/0406020* (2004).
- [60] Bahram Houchmandzadeh. «Giant fluctuations in logistic growth of two species competing for limited resources». En: *Physical Review E* 98.4 (2018), pág. 042118.
- [61] Soumen Kundu y Sarit Maitra. «Dynamical behaviour of a delayed three species predator–prey model with cooperation among the prey species». En: *Nonlinear Dynamics* 92 (2018), págs. 627-643.
- [62] MM Rahman et al. «Growth, production and food preference of rohu *Labeo rohita* (H.) in monoculture and in polyculture with common carp *Cyprinus carpio* (L.) under fed and non-fed ponds». En: *Aquaculture* 257.1-4 (2006), págs. 359-372.
- [63] Mohammad Mustafizur Rahman et al. «Effects of common carp *Cyprinus carpio* (L.) and feed addition in rohu *Labeo rohita* (Hamilton) ponds on nutrient partitioning among fish, plankton and benthos». En: *Aquaculture Research* 39.1 (2008), págs. 85-95.
- [64] M Mustafizur Rahman et al. «Relationships among water quality, food resources, fish diet and fish growth in polyculture ponds: a multivariate approach». En: *Aquaculture* 275.1-4 (2008), págs. 108-115.

BIBLIOGRAFÍA

- [65] Mohammad Mustafizur Rahman y Marc Verdegem. «Effects of intra- and interspecific competition on diet, growth and behaviour of *Labeo calbasu* (Hamilton) and *Cirrhinus cirrhosus* (Bloch)». En: *Applied Animal Behaviour Science* 128.1-4 (2010), págs. 103-108.
- [66] Matthew G Keevil et al. «A model of seasonal variation in somatic growth rates applied to two temperate turtle species». En: *Ecological Modelling* 443 (2021), pág. 109454.
- [67] Yan-ping Qian, Xiao-ting Li y Ru-nan Tian. «Effects of aqueous extracts from the rhizome of *Pontederia cordata* on the growth and interspecific competition of two algal species». En: *Ecotoxicology and Environmental Safety* 168 (2019), págs. 401-407.
- [68] A-K Bittebiere et al. «Modeling competition between plants using an Individual Based Model: Methods and effects on the growth of two species with contrasted growth forms». En: *Ecological Modelling* 234 (2012), págs. 38-50.
- [69] Dorota Kawa et al. «Characterization of growth and development of sorghum genotypes with differential susceptibility to *Striga hermonthica*». En: *Journal of Experimental Botany* 72.22 (2021), págs. 7970-7983.
- [70] Shahnoor S Shaik et al. «Starch bioengineering affects cereal grain germination and seedling establishment». En: *Journal of experimental botany* 65.9 (2014), págs. 2257-2270.
- [71] Wei Ping Quek et al. «Starch structure-property relations as a function of barley germination times». En: *International journal of biological macromolecules* 136 (2019), págs. 1125-1132.
- [72] Binqiang Tian et al. «Physicochemical changes of oat seeds during germination». En: *Food Chemistry* 119.3 (2010), págs. 1195-1200.
- [73] Audrey R Freischel et al. «Frequency-dependent interactions determine outcome of competition between two breast cancer cell lines». En: *Scientific reports* 11.1 (2021), págs. 1-18.
- [74] Balan Sundarakani et al. «Studying the sustainability of third party logistics growth using system dynamics». En: *Journal of Modelling in Management* 14.4 (2019), págs. 872-895.

BIBLIOGRAFÍA

- [75] Shouheng Sun y Weicai Wang. «Analysis on the market evolution of new energy vehicle based on population competition model». En: *Transportation Research Part D: Transport and Environment* 65 (2018), págs. 36-50.
- [76] Hong Jiang et al. «Competition of technology standards in Industry 4.0: An innovation ecosystem perspective». En: *Systems Research and Behavioral Science* 37.4 (2020), págs. 772-783.
- [77] Jing Jing Zhang y Jian cheng Guan. «The impact of competition strength and density on performance: The technological competition networks in the wind energy industry». En: *Industrial Marketing Management* 82 (2019), págs. 213-225.
- [78] Mustafizur Rahman et al. «Impact of fishing gear on fish biodiversity of Hakaluki haor in Bangladesh». En: *International Journal of Fisheries and Aquatic Studies* 4.6 (2016), págs. 257-62.
- [79] Manh Tuan Hoang y Oluwaseun Francis Egbelowo. «Numerical dynamics of nonstandard finite difference schemes for a Logistics model with feedback control». En: *ANNALI DELL'UNIVERSITA'DI FERRARA* 66 (2020), págs. 51-65.
- [80] Brenno Caetano Troca Cabella, Fabiano Ribeiro y Alexandre Souto Martinez. «Effective carrying capacity and analytical solution of a particular case of the Richards-like two-species population dynamics model». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391.4 (2012), págs. 1281-1286.
- [81] Brenno Caetano Troca Cabella, Alexandre Souto Martinez y Fabiano Ribeiro. «Full analytical solution and complete phase diagram analysis of the Verhulst-like two-species population dynamics model». En: *arXiv preprint arXiv:1010.3361* (2010).
- [82] María Fernanda Paleologos y Santiago J Sarandón. «Principios de ecología de poblaciones». En: *Agroecología: bases teóricas para el diseño y manejo de Agroecosistemas sustentables (235-259)*. La Plata. Universidad Nacional de La Plata (2014).
- [83] Cristina Morláns y Biól María. *Introducción a la ecología de poblaciones*. 2014.
- [84] Stanley I Grossman. *Álgebra lineal*. McGraw Hill Educación, 2008.

BIBLIOGRAFÍA

- [85] David Poole. *Álgebra lineal*. Cengage Learning, 2011.
- [86] Hassan K Khalil. «Lyapunov stability». En: *Control Systems, Robotics and Automation—Volume XII: Nonlinear, Distributed, and Time Delay Systems-I* (2009), pág. 115.
- [87] Frederick E Smith. «Population dynamics in *Daphnia magna* and a new model for population growth». En: *Ecology* 44.4 (1963), págs. 651-663.
- [88] AA Blumberg. «Logistic growth rate functions». En: *Journal of Theoretical Biology* 21.1 (1968), págs. 42-44.
- [89] Malcolm E Turner Jr et al. «A theory of growth». En: *Mathematical Biosciences* 29.3-4 (1976), págs. 367-373.
- [90] Wolfgang Kunze y HJ Manger. *Tecnología para cerveceros y malteros*. VLB Berlin, 2006.
- [91] Pham Anh Tuan et al. «Molecular mechanisms of seed germination». En: *Sprouted Grains*. Elsevier, 2019, págs. 1-24.
- [92] EJ Rifna, K Ratish Ramanan y R Mahendran. «Emerging technology applications for improving seed germination». En: *Trends in Food Science & Technology* 86 (2019), págs. 95-108.