

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TIJUANA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELÉCTRONICA



**Modelado de Sistemas Dinámicos en
Ecuaciones Diferenciales Difusas**

TRABAJO DE TESIS PRESENTADO POR
Mauricio Odremán Vera

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Nohé R. Cázarez-Castro

CO-DIRECTOR DE TESIS
Dr. Selene L. Cardenas Maciel

Abril 2021

TIJUANA, B.C. MÉXICO



Tijuana Baja California, 07/Junio/2021
Asunto: Autorización de impresión de trabajo de tesis

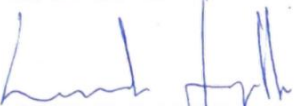
DRA. YAZMIN MALDONADO ROBLES
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
PRESENTE


En lo referente al trabajo de tesis, "Modelado de Sistemas Dinámicos en Ecuaciones Diferenciales Difusas", presentado por el Mtro. MAURICIO ODREMAN VERA, alumno del programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, con número de control D12210804; informamos a usted que después de una minuciosa revisión e intercambio de opiniones, los miembros del comité manifiestan **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias, por lo que se autoriza al interesado para que proceda de inmediato a la impresión del mismo.

A T E N T A M E N T E
Excelencia en Educación Tecnológica.
Por una juventud integrada al desarrollo de México.

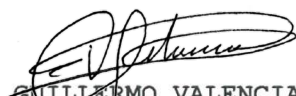

DR. NOHE RAMÓN CÁZAREZ CASTRO
DIRECTOR DE TESIS


DRA. SELENE LILETTE CÁRDENAS MACIEL
CO-DIRECTORA DE TESIS


DR. LEONARDO TRUJILLO REYES
MIEMBRO DEL COMITÉ


DR. CECILIA LEAL RAMIREZ
MIEMBRO DEL COMITÉ


DR. JORGE ANTONIO LÓPEZ RENTERÍA
MIEMBRO DEL COMITÉ


DR. GUILLERMO VALENCIA PALOMO
MIEMBRO DEL COMITÉ

ccp. Archivo
Dr. José Ricardo Cárdenas Valdez - Coordinador Académico del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería.





Instituto Tecnológico de Tijuana

Tijuana, Baja California, 20/julio/2021

OFICIO No. 079/DEPI/2021

Asunto: Autorización de Impresión de Tesis

MARIBEL GUERRERO LUIS
JEFA DEL DEPARTAMENTO DE SERVICIOS ESCOLARES
PRESENTE

En lo referente al trabajo de tesis, "Modelado de sistemas dinámicos en ecuaciones diferenciales difusas". Presentado por C. Mauricio Odreman Vera, alumno del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería con número de control D12210804; informo a usted que, a solicitud del comité tutorial, tengo a bien Autorizar la impresión de Tesis, atendiendo las disposiciones de los Lineamientos para la Operación de Estudios de Posgrado del Tecnológico Nacional de México.

Sin más por el momento le envío un cordial saludo.

ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica®
Por una juventud integrada al desarrollo de México®*

YAZMIN MALDONADO ROBLES
JEFA DE DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

ccp. Archivo
YMR



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TIJUANA

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
E INVESTIGACIÓN**



CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de Tijuana, Baja California, el día **26** del mes de **Julio** del año **2021**, el que suscribe **Mauricio Odreman Vera**, con número de control **D12210804**, alumno de **Doctorado** del programa de Posgrado en Ciencias de la Ingeniería, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Nohé Ramón Cázarez Castro**, cede los derechos del trabajo titulado **Modelado de sistemas dinámicos en ecuaciones diferenciales difusas** al Tecnológico Nacional de México para su difusión, con fines académicos y de investigación en la comunidad estudiantil y científica del país.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas, código, formulas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor o director del trabajo. Este debe ser obtenido escribiendo a cualquiera de las siguientes direcciones de correo electrónico mauricio.odreman@cetys.mx y nohecazare@netscape.net o bien, dirigirse a las instalaciones del Instituto Tecnológico de Tijuana en Calzada del Tecnológico S/N Esq. Av. Castillo de Chapultepec y calle Cuauhtemotzin, Fracc. Tomás Aquino C.P. 22414, Tijuana, Baja California, conmutador 664-6078400.

Si se otorga el permiso, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo como lo indique el autor intelectual o el director del trabajo de Tesis.

ATENTAMENTE



Mauricio Odreman Vera

ALUMNO DEL DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Agradecimientos

A través de estas líneas quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que con su soporte científico y humano han colaborado en la realización de este trabajo de investigación.

Quiero agradecer en primer lugar a las instituciones que han hecho posible la realización del trabajo presentado en esta memoria de tesis por la ayuda económica brindada, por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, México) con el proyecto con clave No. 268364, al Tecnológico Nacional de México por los proyectos 5862.16-P, 5867.16-P, 5861.16-P, 5867.16-P, 6104.17-P, 6351.17-P, y al Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP) por los proyectos ITTIJ-CA-8 y ITTIJ-CA-8-24056.

Muy especialmente a mi tutor y director de tesis al Dr. Nohé R. Cázarez-Castro y mi co-director la Dra. Selene L. Cardenas Maciel, por la acertada orientación, el soporte y discusión crítica que me permitió un buen aprovechamiento en el trabajo realizado y que esta tesis llegara a buen término.

Agradezco al cuerpo de sinodales, integrado por: Dr. Leonardo Trujillo Reyes, Dra. Cecilia Leal Ramírez, Dr. Guillermo Valencia Palomo y Dr. Jorge López Rentería, por sus sugerencias útiles y aportes significativos ayudaron a enriquecer y mejorar esta tesis doctoral.

A mis padres mi más sincero agradecimiento por su apoyo incondicional en todas las acciones que he emprendido a lo largo de mi vida.

Modelado de Sistemas Dinámicos en Ecuaciones Diferenciales Difusas

Resumen

En este trabajo se desarrolla la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas, se presentan algunas técnicas utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales difusas asociadas a problemas de valor inicial y aplicaciones en la ingeniería.

Se modelan algunos problemas de dinámica de población mediante las ecuaciones diferenciales difusa. También se consideran algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales difusas en modelado de sistemas de control, tales como en un sistema de masa-resorte amortiguador y en un motor de corriente continua.

Se analiza el problema de presa-depredador, donde se plantea que las poblaciones iniciales son difusas, debido a que las estimaciones iniciales no se conocen con precisión.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales difusas, incertidumbre, modelación matemática, control.

Modeling of Dynamic Systems in Fuzzy Differential Equations.

Abstract

In this work the theory of fuzzy differential equations is developed, some techniques used to solve fuzzy differential equations associated with initial value problems and applications in engineering are presented.

Some population dynamics problems are modeled by diffuse differential equations. Some applications of fuzzy differential equations are also considered in the modeling of control systems, such as in a mass-spring damper system and in a DC motor.

The prey-predator problem is analyzed, where it is stated that the initial populations are fuzzy, because the initial estimates are not known with precision.

Keywords: fuzzy differential equations, uncertainty, mathematical modeling, control

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Agradecimientos | i |
| Resumen | ii |
| Abstract | iii |
| Lista de símbolos | ix |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Planteamiento del problema | 2 |
| 1.1.1. Antecedentes | 3 |
| 1.1.2. Justificación | 3 |
| 1.2. Objetivos | 4 |
| 1.3. Estructura de la tesis | 4 |
| 2. Preliminares Matemáticos | 6 |
| 2.1. Conjuntos difusos | 6 |
| 3. Ecuaciones Diferenciales Difusas | 16 |
| 3.1. Diferenciación difusa. | 16 |
| 3.2. Solución de una ecuación diferencial difusa de primer orden | 18 |
| 3.2.1. Método para resolver problema con condición inicial difusa | 18 |
| 3.3. Solución de una ecuación Diferencial difusa de primer orden, condición inicial difusa y parámetros difusos. | 20 |
| 4. Resultados y Aplicaciones | 23 |
| 4.1. Soluciones posibles de la ecuacion diferencial difusa lineal (3.10) con con- diciones iniciales difusas | 23 |
| 4.1.1. Ejemplo 1. ($K = -1$) | 23 |
| 4.1.2. Ejemplo 2. ($K = -1$) | 25 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 4.1.3. | Ejemplo 3. ($K = -1$) | 26 |
| 4.1.4. | Ejemplo 4. ($K = -3$) | 29 |
| 4.1.5. | Ejemplo 5. ($K = -2$) | 30 |
| 4.1.6. | Ejemplo 6. ($K = -1$) | 32 |
| 4.1.7. | Ejemplo 7. ($K = 7$) | 35 |
| 4.1.8. | Ejemplo 8. ($K = 3$) | 37 |
| 4.1.9. | Solución de una ecuación diferencial de primer orden no homogénea, con condición inicial difusa | 39 |
| 4.2. | Solución de una ecuación diferencial de primer orden con constante de proporcionalidad y/o condición inicial difusa. | 41 |
| 4.2.1. | Solución que considera condición inicial real y constante de creci- miento difusa | 41 |
| 4.2.2. | Solución que considera Condición inicial difusa y constante de cre- cimiento difusa | 42 |
| 4.3. | Aplicciones | 44 |
| 4.3.1. | Modelo de Malthus difuso | 44 |
| 4.3.2. | Modelo depredador-presa difuso | 48 |
| 4.4. | Casos de estudio en ingeniería de control | 52 |
| 4.4.1. | Análisis de amortiguación | 54 |
| 4.4.2. | Modelo sistema masa-resorte-amortiguador | 57 |
| 4.4.3. | Modelo dinámico de un motor de Corriente Directa (CD) | 59 |
| 5. | Conclusiones | 65 |
| 5.1. | Conclusiones | 65 |
| 5.2. | Trabajo Futuro o Recomendaciones | 66 |
| 5.3. | Publicaciones | 67 |
| | Referencias | 69 |

Lista de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. α -nivel de un conjunto difuso | 7 |
| 2.2. Triángulo difuso (a, b, c) | 9 |
| 2.3. Trapecio difuso (a, b, c, d) | 10 |
| 2.4. $u(x)$ | 12 |
| 2.5. $v(x)$ | 13 |
| 2.6. $(u + v)(x)$ | 13 |
| | |
| 4.1. Triángulo difuso, soporte $[-a, a]$ | 24 |
| 4.2. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.8) | 25 |
| 4.3. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.10) | 26 |
| 4.4. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.13) | 27 |
| 4.5. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.8) para $\alpha = 0$ | 28 |
| 4.6. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.8) | 28 |
| 4.7. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.20) | 30 |
| 4.8. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.20) | 30 |
| 4.9. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.25) | 31 |
| 4.10. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.25) | 32 |
| 4.11. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.33) | 33 |
| 4.12. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.33) | 34 |
| 4.13. (ii)-diferenciable | 34 |
| 4.14. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.40) | 35 |
| 4.15. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.8) para $\alpha = 0$ | 36 |
| 4.16. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.40) | 36 |
| 4.17. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.44) | 37 |
| 4.18. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.44) | 38 |
| 4.19. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.8) para $\alpha = 0$ | 38 |
| 4.20. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.48) | 39 |
| 4.21. Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.48) | 40 |

| | |
|---|----|
| 4.22. Solución (i)-diferenciable del sistema (4.48) para $\alpha = 0$ | 40 |
| 4.23. Constante de crecimiento difusa | 41 |
| 4.24. Caso 2. constante de crecimiento difusa | 42 |
| 4.25. Caso 3. Condiciones iniciales difusas y constante de crecimiento difusa (i)diferenciable | 43 |
| 4.26. constante de crecimiento difusa (i)diferenciable | 43 |
| 4.27. constante de crecimiento difusa (ii)diferenciable | 44 |
| 4.28. Trayectorias del sistema (4.63) para (i)-diferenciable | 46 |
| 4.29. Trayectorias del sistema (4.63) para (i)-diferenciable | 46 |
| 4.30. Trayectorias del sistema (4.63) para (i)-diferenciable | 47 |
| 4.31. Trayectorias del sistema (4.64) para (i)-diferenciable | 48 |
| 4.32. Solución real: Evolución temporal de las poblaciones de presas y depreda- dores. (tiempo de simulación $t = 100$) | 49 |
| 4.33. Órbita del Plano fase: Conejos vs Zorros. | 50 |
| 4.34. Solución difusa: Conejos vs Zorros. (tiempo de simulación $t = 100$) | 50 |
| 4.35. Solución difusa: Conejos vs Zorros. (tiempo de simulación $t = 500$) | 51 |
| 4.36. Órbita del Plano fase: Conejos vs Zorros (tiempo de simulación $t = 100$) | 51 |
| 4.37. Gráfica solución: Conejos y Zorros vs α .(tiempo de simulación $t = 10$) | 52 |
| 4.38. Gráfica solución: Conejos y Zorros vs α .(tiempo de simulación $t = 100$) | 52 |
| 4.39. Soluciones del sistema 4.82 | 55 |
| 4.40. Soluciones del sistema 4.84. | 56 |
| 4.41. Soluciones del sistema 4.86. | 58 |
| 4.42. Sistema masa-resorte-amortiguador | 58 |
| 4.43. Desplazamiento de la masa. | 59 |
| 4.44. Circuito eléctrico de armadura y el diagrama mecánico rotacional del motor | 60 |
| 4.45. Trayectorias para (4.104)-(4.105) | 62 |
| 4.46. Trayectorias para (4.104)-(4.105) | 63 |
| 4.47. Trayectorias para (4.106). | 64 |

Lista de tablas

| | |
|--|----|
| 4.1. Parámetros del motor DC | 61 |
|--|----|

Lista de símbolos

| | |
|---|--|
| \forall | Para todo |
| \in | Pertenece a |
| \rightarrow | Tiende a |
| \Leftrightarrow | Si y sólo si |
| $ \cdot $ | Valor absoluto de un número real. |
| $\ \cdot\ $ | Norma euclidiana de un vector |
| \mathbb{N}_+ | Conjunto de los números naturales |
| \mathbb{R} | Conjunto de los números reales |
| $>$ | Mayor que |
| $<$ | Menor que |
| \leq | Menor o igual |
| $\mu(\cdot)$ | Grado de pertenencia |
| \notin | No pertenece |
| t | Tiempo |
| e | Error |
| \dot{e} | Derivada del error |
| X | conjunto no vacío |
| u | Entrada de control |
| λ | Constante positiva |
| $[0, 1]$ | intervalo |
| $[u]^\alpha$ | α -nivel |
| cl | clausura del conjunto |
| $\mathcal{F}(X)$ | espacio de todos los conjuntos difusos |
| \mathcal{F} | espacio de todos los números difusos |
| $[u_L^\alpha(t), u_R^\alpha(t)]$ | extremos inferior y superior respectivamente de $[u]^\alpha$ |
| $[C]^\alpha = [a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)]$ | triángulo difuso |

Capítulo 1

Introducción

Una forma de hacer modelos matemáticos de sistemas dinámicos utilizados en ingeniería u otras disciplinas es a través de ecuaciones diferenciales. Cuando se asume el determinismo en este tipo de modelos se hace necesario conocer los parámetros, valores iniciales y relaciones funcionales de las ecuaciones diferenciales, como insumos básicos para encontrar posibles soluciones. Sin embargo, hay fenómenos susceptibles de ser modelados por sistemas dinámicos donde no se dispone de toda la información necesaria para su formulación y validación [8]. Dado un sistema dinámico, formular un modelo mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) no es muy preciso debido a que la mayoría de los fenómenos son imprecisos o poseen algún tipo de incertidumbre. Las ecuaciones diferenciales representan una idealización de una situación real, pero frecuentemente no se puede tener certeza de que el modelo sea perfecto, o que las funciones representativas tengan parámetros inciertos, por lo que el hecho de la imprecisión del modelado puede jugar un papel significativo.

En el modelado matemático de problemas del mundo real, se pueden encontrar dos inconvenientes, a saber, la complejidad y la incertidumbre o vaguedad. A fin de tomar en consideración la vaguedad, la teoría de conjuntos difusos se considera como una configuración adecuada [37].

Lotfi A. Zadeh, publicó en 1965 su trabajo “fuzzy set” [61], donde presentó formalmente la teoría de estados multivaluados e introdujo por primera vez la teoría de conjuntos difusos en la literatura técnica. Dubois y Prade, afirman que “ *La principal motivación de la teoría de conjuntos difusos es al parecer el deseo de construir una base formal, cuantitativa, que sea capaz de capturar la vaguedad del conocimiento humano tal como este es expresado a través de los lenguajes naturales*” [28].

Muchos autores han ampliado el concepto de derivada en el contexto difuso, introducido por Zadeh en [61], y fueron estudiado por algunos autores tales como Kaleva en

[31, 32, 33, 34] , Nieto en [47] y Puri y Ralescu en [50].

Otros autores han generalizado el concepto de la H-diferenciabilidad, como Bede en [6] y Chalco-Cano en [21].

La lógica difusa trata de acercar la matemática al lenguaje impreciso del hombre común. El ser humano se maneja habitualmente con conceptos “vagos”, los cuales no se pueden representar con la matemática tradicional.

En Kaleva [32] se presentan varios y diferentes trabajos pioneros sobre las ecuaciones diferenciales difusas, otros resultados relevantes sobre ecuaciones diferenciales difusas (EDD) han sido obtenidos en Barros [3], donde hace referencia a problemas de modelación demográfica y expectativa de vida; Ahmad [1] trata sobre modelos de poblaciones depredador-presa y Buckley [7] utiliza EDD con condiciones iniciales triángulos difusos.

Es por eso, dado estas imprecisiones debido a la incertidumbre o vaguedad que se requiere la introducción de las EDD.

En el presente trabajo se hace un estudio de las ecuaciones diferenciales difusas, se formulan modelos basados en dichas ecuaciones y sus aplicaciones a modelos lineales y no lineales, ya sean de primer y/o segundo orden, como también aplicaciones a sistemas de control y dinámicas de población.

1.1. Planteamiento del problema

En este capítulo se realiza una presentación general de la investigación realizada, detallando de manera especial el problema planteado, antecedentes y motivación. Nuestro problema a realizar es:

$$\begin{cases} x' = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \quad (1.1)$$

donde $F : T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, T]$, T un número real.

- Dar solución general por el modelo de Cauchy a la ecuación

$$x'(t) = Kx(t), \quad (1.2)$$

considerando

- $x(0) \in \mathcal{F}$
- $K \in \mathcal{F}$

- $x(0), K \in \mathcal{F}$

- Resolver modelo de la forma

$$x'' + a_1x' + a_2x(t) = 0 \tag{1.3}$$

considerando $x(0), x'(0) \in \mathcal{F}$ con aplicaciones en sistemas mecánicos.

- Resolver modelos de la forma

$$x'' + a_1x' + a_2x(t) = \tau \tag{1.4}$$

considerando $x(0), x'(0) \in \mathcal{F}$ con aplicaciones en ingeniería de control

- Resolver un caso no lineal

1.1.1. Antecedentes

En la década de los años veinte del siglo XX, J. Lukasiewicz [58] desarrolló los principios de la lógica multivaluada, cuyos enunciados pueden tener valores de verdad comprendidos entre el 0 (falso) y el 1 (cierto) de la lógica binaria clásica. En 1965 Lofti A. Zadeh [24, 61], aplicó la lógica multivaluada a la teoría de conjuntos, estableciendo la posibilidad de que los elementos pudieran tener diferentes grados de pertenencia a un conjunto. Zadeh [61] introdujo el término “difuso” (fuzzy) y desarrolló un álgebra completa para los conjuntos difusos.

El modelado difuso es un enfoque relativamente novedoso para la construcción de modelos de sistemas utilizando un lenguaje descriptivo basado en la lógica difusa con predicados difusos.

Otros resultados relevantes sobre las EDD han sido obtenidos en [27], [30], [38].

1.1.2. Justificación

Las ecuaciones diferenciales difusas abren una amplia colección de posibles soluciones:

- Algunos sistemas reales son demasiado complejos, los cuales para obtener una descripción precisa es muy complicada.
- Es necesaria una teoría que permita simular los sistemas reales de forma sistemática mediante un sistema de ingeniería.

- Algunos casos de ingeniería de control son resueltos usando conocimientos de la experiencia, pero que difícilmente se puede expresar en ecuaciones diferenciales.

Es por eso, dado estas imprecisiones debido a la incertidumbre o vaguedad en el modelo, que se requiere la introducción de las ecuaciones diferenciales difusas.

En la modelización matemática, cuando se desea modelar sistemas dinámicos en condiciones de incertidumbre, las ecuaciones diferenciales difusas surgen de forma natural. Este tipo de sistema proporcionará una mejor representación de los problemas del mundo real [63].

Los sistemas difusos se han aplicado a una amplia variedad de campos que van desde la ingeniería de control, procesamiento de señales, comunicaciones, fabricación de circuitos integrados, y sistemas expertos a los negocios, la medicina, la psicología, etc [59]. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales difusas permiten analizar el sistema con valores iniciales ambiguos, con cierta incertidumbre, los cuales se han resuelto con modelos cualitativos, tratando de encontrar un sistema de ecuaciones cuyo modelo se acerque más a la realidad del suceso y permita una amplia colección de posibles soluciones.

1.2. Objetivos

Objetivo general:

Modelar los sistemas dinámicos mediante ecuaciones diferenciales difusas y resolverlos.

Objetivos específicos:

1. Formular modelos lineales de primer y segundo orden con ecuaciones diferenciales difusas.
 - 2.1 Aplicar, resolver y analizarlos en problemas de la dinámica de una población.
 - 2.2 Aplicar, resolver y analizarlos en problemas de ingeniería de control.
2. Formular modelos no lineales con ecuaciones diferenciales difusas.
 - 3.1 Aplicar, resolver y analizarlos en problemas de la dinámica de una población.
 - 3.2 Aplicar, resolver y analizarlos en problemas de ingeniería de control.

1.3. Estructura de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera:

La tesis contiene esta introducción, tres capítulos, conclusiones, recomendaciones y

referencias bibliográficas:

El Capítulo 2, introduce algunos conceptos y teoremas previos para el entendimiento de la investigación. En el Capítulo 3 se hace el estudio de las ecuaciones diferenciales difusas. El Capítulo 4 trata sobre las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales difusas a problemas de dinámica de población y a problemas de control. En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones finales y el trabajo futuro a desarrollar.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos

Se presentan los principales conceptos que son imprescindibles para el desarrollo de esta tesis, definiciones y teoremas relacionados con la teoría de los conjuntos difusos, los cuales fueron enunciados por primera vez en 1965 por Lotfi A. Zadeh [61].

2.1. Conjuntos difusos

Un conjunto clásico o “crisp” (en inglés) se define de tal manera que divide al universo de posibilidades en dos grupos: los que pertenecen al conjunto y los que no pertenecen, de allí que se le haya denominado crisp (rígido).

Definición 2.1. *En un conjunto clásico (crisp set) se asigna el valor 0 ó 1 a cada elemento para indicar la pertenencia o no a dicho conjunto.*

Un conjunto clásico A se puede definir por su función de pertenencia como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si el elemento } x \text{ no pertenece a } A \\ 1 & \text{si el elemento } x \text{ pertenece a } A \end{cases} \quad (2.1)$$

La función de pertenencia (o también llamada función de membresía) permite asignar a cada elemento, un valor real que indica que tanto pertenece al conjunto, generalmente en el intervalo unitario $[0, 1]$.

La función (2.1) puede generalizarse de forma que los valores asignados a los elementos del conjunto estén en un rango particular, y con ello indiquen el grado de pertenencia de los elementos al conjunto en cuestión.

Definición 2.2. [61] *Dado X un conjunto cualquiera (no vacío). La función de membresía μ_A de un conjunto difuso A , es una función: $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$. La función μ_A se interpreta como el grado con que un elemento x pertenece al conjunto difuso A , para cada $x \in X$.*

Expresado en notación matemática, un conjunto difuso A está definido por pares de elementos de la forma $(x, \mu_A(x))$, donde x es el elemento propiamente dicho y $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia del elemento al conjunto A , es decir:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), \forall x \in X\}. \quad (2.2)$$

La función μ_A en sí misma se utiliza a menudo para representar el conjunto difuso.

Dado un conjunto difuso u sobre X y un valor de $\alpha \in [0, 1]$, la expresión $u(x) \geq \alpha$ significa que el nivel de pertenencia de los elementos x al conjunto difuso u es a lo más $1 - \alpha$. De esta forma, con $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ se tiene incertidumbre nula. El conjunto de los elementos de $x \in X$ tales que $u(x) \geq \alpha$ se denomina el nivel α del conjunto difuso u .

Definición 2.3. (*Nivel de un conjunto difuso*)

Sea $u : X \rightarrow [0, 1]$ la función de membresía de un conjunto difuso sobre X , se define el α -nivel como el conjunto $[u]^\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$, para cada $\alpha \in (0, 1]$.

La Figura 2.1 muestra el α -nivel de un conjunto difuso

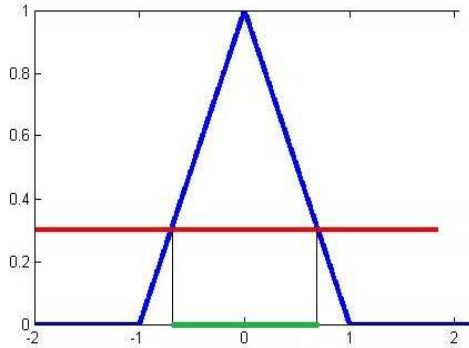


Figura 2.1: α -nivel de un conjunto difuso

Uno de los conceptos muy importantes dentro de la teoría de conjuntos difusos es el concepto de α -nivel de un conjunto difuso, debido a que a cualquier conjunto difuso, se le puede asociar una familia de niveles indexada por el intervalo $[0, 1]$, los cuales se denominan los α -niveles del conjunto difuso.

Definición 2.4. (*Soporte de un conjunto difuso*)

Se define el soporte de u al conjunto $[u]^0 = cl\{x \in X : u(x) > 0\}$, donde cl denota la clausura de un subconjunto.

Definición 2.5. Se denomina el núcleo de u al conjunto $[u]^1 = \{x \in X : u(x) = 1\}$.

Existen varias propiedades de la teoría de conjuntos, como la compacidad y convexidad, estas propiedades son vistas como una generalización de la teoría de conjuntos clásicos.

Definición 2.6. Un conjunto difuso u sobre \mathbb{R} es compacto si y sólo si $[u]^\alpha$ es un conjunto compacto en \mathbb{R} para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Definición 2.7. Un conjunto difuso u sobre \mathbb{R} es convexo si y sólo si $[u]^\alpha$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Sea $\mathcal{F}(X)$ el espacio de todos los conjuntos difusos compactos y convexos en X .

Entre los diversos tipos de conjuntos difusos, para una mejor comprensión, se suele restringir la colección de conjuntos difusos sobre el conjunto \mathbb{R} de números reales a una clase particular denominada números difusos, cuya definición se puede dar como:

Definición 2.8. Sea u conjunto difuso. Se dice que u es un número difuso si $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, y además satisface las siguientes condiciones:

- i) u es normal; es decir, existe al menos un $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $u(x^*) = 1$
- ii) u es un conjunto convexo difuso. Es decir $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \{\min\{u(x), u(y)\}\}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$.
- iii) u es semi continua superior en \mathbb{R} , es decir que $[u]^\alpha$ es cerrado $\forall \lambda \in [0, 1]$.
- iv) $[u]^0$ es compacto en \mathbb{R} .

Dado que $X = \mathbb{R}$, se puede reescribir la definición 2.8 como:

Definición 2.9. Sea u la función de membresía de un conjunto difuso. Se dice que u es un número difuso si $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, y además satisface las siguientes condiciones:

- i) u es normal; existe al menos un $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $u(x^*) = 1$,
- ii) $[u]^\alpha$ es cerrado $\forall \alpha \in (0, 1]$,
- iii) $[u]^0$ es acotado.

Se denota como \mathcal{F} al espacio de todos los números difusos en \mathbb{R} . Este espacio ha sido estudiado por varios autores [23], [32], [47] y [55].

Los operadores difusos constituyen un importante componente en la comprensión de las aplicaciones de los conjuntos difusos. Dentro de las operaciones más importantes en estos conjuntos se destacan: el complemento, la unión, intersección y aritmética con números difusos [29].

De la Definición 2.9 está claro que un número difuso puede tener diferentes representaciones geométricas. Para comprender las operaciones aritméticas que se pueden realizar sobre el conjunto de números difusos es importante definir el concepto de intervalo cerrado para un conjunto difuso:

Definición 2.10. Si $u \in \mathcal{F}$, entonces el α -nivel $[u]^\alpha$ es un intervalo cerrado denotado por $[u_L^\alpha(t), u_R^\alpha(t)]$, donde u_L^α y u_R^α son los extremos inferior y superior respectivamente de $[u]^\alpha$.

Entre el número infinito de posibles conjuntos difusos en $\mathcal{F}(X)$ que califican para ser números difusos, algunos tipos de funciones de membresía son de especial importancia, sobre todo en relación con el uso de los números difusos, los cuales son muy útiles en aplicaciones, por ejemplo, en la aritmética difusa. A continuación se presentan ejemplos de algunos números difusos:

Definición 2.11. *Función triangular. (Número difuso triangular)*

Un número difuso se denomina número difuso triangular o triángulo difuso, si su función de membresía cumple con lo siguiente:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases} \quad (2.3)$$

Cuya representación gráfica se puede observar en la Figura 2.2, y su α -nivel es

$$[A]^\alpha = [a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)] \quad (2.4)$$

para algún $\alpha \in (0, 1]$.

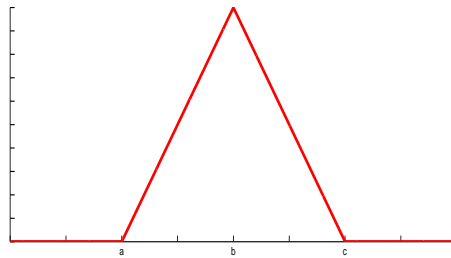


Figura 2.2: Triángulo difuso (a, b, c)

Definición 2.12. *Función trapezoidal. (número difuso trapezoidal)*

Definida por sus límites inferior a , superior d , y los límites de soporte inferior b y superior c , tal que $a < b < c < d$. En este caso, si los valores de b y c son iguales, se obtiene una

función triangular,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases} \quad (2.5)$$

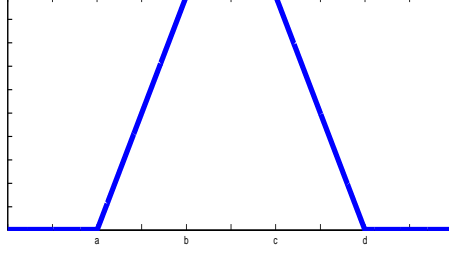


Figura 2.3: Trapecio difuso (a, b, c, d)

La colección de los α -niveles de un conjunto difuso u satisface las siguientes propiedades:

Teorema 2.1 (Teorema de Stacking). *Sea $u \in \mathcal{F}$ y sea $[u]^\alpha$ la colección de los α -niveles del conjunto u , entonces:*

- (i) $[u]^\alpha$ es un intervalo cerrado no vacío $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ para algún $\alpha \in [0, 1]$.
- (ii) Si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ entonces $[u]^\beta \subseteq [u]^\alpha$
- (iii) Para alguna sucesión α_n no decreciente tal que converge a α , $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} = [u]^\alpha$
- (iv) Para alguna sucesión α_n tal que converge a α , $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_n = \alpha$, entonces $cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}) = [u]^0$

El siguiente resultado es el teorema de caracterización de Negoita y Ralescu [45] y es el recíproco del Teorema Stacking:

Teorema 2.2 (Teorema de Representación de Negoita - Ralescu). *Dada una familia de subconjuntos $\{M_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ tal que satisface las siguientes condiciones:*

- (i) M_α es un intervalo cerrado no vacío para algún $\alpha \in [0, 1]$;
- (ii) $0 < \alpha \leq \beta < 1$ entonces $M_\beta \subseteq M_\alpha$;

- (iii) Para alguna sucesión α_n no decreciente tal que converge a α , $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_{\alpha}$
- (iv) Para alguna sucesión α_n tal que converge a α , $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_n = \alpha$, entonces $cl(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}) = M_0$ entonces existe un único $u \in \mathcal{F}$, tal que $[u]^{\alpha} = M_{\alpha}$ para algún $\alpha \in [0, 1]$

Zadeh en [61] propuso su principio de extensión, mismo que se ha convertido en una herramienta importante en la teoría de los conjuntos difusos y sus aplicaciones, lo cual permite decir que si dos elementos $u, v \in \mathcal{F}$, se puede afirmar que $u + v \in \mathcal{F}$.

Dada una función $f : X \rightarrow Y$, puede ser extendida al contexto difuso a otra función $\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, definida para cada conjunto difuso u en X por:

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in X, f(x)=y} u(x) & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (2.6)$$

para $y \in Y$.

Una generalización para funciones de producto cartesiano, es la siguiente:

$f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ induce otra función $\tilde{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, definidos para cada conjunto difuso u, v , u en $\mathcal{F}(X_1)$, v en $\mathcal{F}(X_2)$ por:

$$\tilde{f}(u, v)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2), f(x_1, x_2)=y} \{\min\{u(x_1), v(x_2)\}\} & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (2.7)$$

Una aplicación se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, entonces $\tilde{f} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$

$$\tilde{f}(u, v)(x) = \sup_{x_1+x_2=x} \{\min\{u(x_1), v(x_2)\}\} \quad (2.8)$$

La definición de adición de conjuntos difusos puede hacerse gracias al principio de extensión de Zadeh [61], lo cual permite al conjunto de números difusos darle una estructura lineal.

Existen muchas formas de extender la Métrica de Hausdorff para conjuntos difusos, por ejemplo:

Definición 2.13. $D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([u]^{\alpha}, [v]^{\alpha})$ Para todo $u, v \in \mathcal{F}$, donde d_H es la métrica de Hausdorff usual.

Definición 2.14. *Distancia de Hausdorff*

$$d_H(X, Y) = \max\{d_1, d_2\}, \text{ donde } \begin{cases} d_1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \text{dist}(x, y) \\ d_2 = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \text{dist}(x, y) \end{cases} \quad (2.9)$$

[2], [33].

Sea (\mathcal{F}, D) un espacio métrico sobre \mathbb{R} , con D la métrica de Hausdorff.

Teorema 2.3. *Dado \mathcal{F} un espacio vectorial.*

El espacio vectorial $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$ para $u, v \in \mathcal{F}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, la suma $u \oplus v$ y el producto $\lambda \cdot u$ están definido por:

$$(u \oplus v)(x) = \sup_{x_1+x_2=x} \{\min\{u(x_1), v(x_2)\}\} \quad (2.10)$$

$$(\lambda \cdot u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}) & \text{si } \lambda \neq 0, \\ \chi_0(x) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

donde $\chi_{\{0\}}$ es la función característica del 0 en \mathbb{R} , la cual se puede ver que coincide con (2.8).

Ejemplo:

Sea A un número difuso con u definida como:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

cuya representación gráfica se puede ver en la Figura 2.4

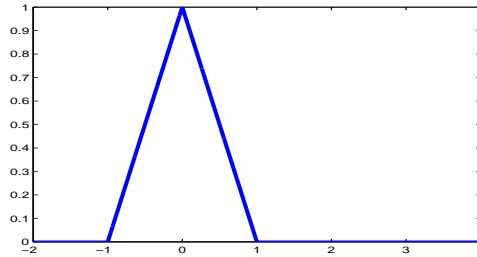


Figura 2.4: $u(x)$

y sea B un número difuso con v definida como:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \quad (2.13)$$

cuya representación gráfica se puede ver en la Figura 2.5.

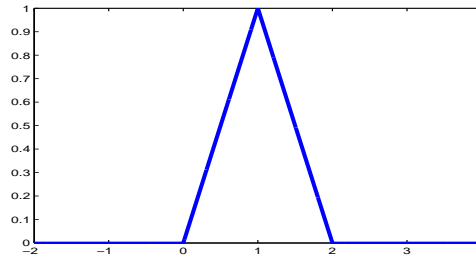


Figura 2.5: $v(x)$

Entonces:

$$(u \oplus v)(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3-x}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases} \quad (2.14)$$

cuya representación gráfica se puede ver en la Figura 2.6.

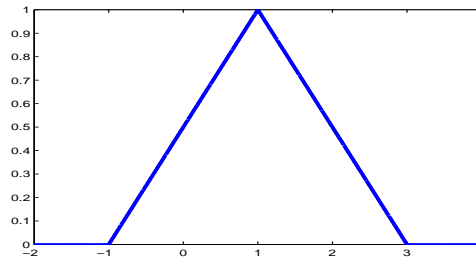


Figura 2.6: $(u + v)(x)$

Observese que [29]:

$$[u \oplus v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$$

$$[u \oplus v]^\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha] + [\alpha, 2 - \alpha] = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$$

Teorema 2.4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces por el principio de extensión de Zadeh existe $\tilde{f} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ bien definida y continua, tal que:

$$[\tilde{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1], u \in \mathcal{F}. \quad (2.15)$$

La definición de diferenciabilidad en el sentido difuso, fue inicialmente introducida por [50] y está basada en la H-diferencia de conjuntos.

Definición 2.15. Sean $u, v \in \mathcal{F}^n$. Si existe $w \in \mathcal{F}^n$ tal que $u = v \oplus w$, entonces, w es llamada la H-diferencia de u y v y lo denotamos por $u \ominus v$.

Existen numerosas formas de extender la Métrica de Hausdorff para conjuntos difusos, por ejemplo:

Definición 2.16. $d_\infty(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$, Para todo $u, v \in \mathcal{F}$, donde H es la métrica de Hausdorff usual.

Teorema 2.5. [51] $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico sobre \mathbb{R}^n , con d_∞ la métrica de Hausdorff.

Demostración. Sean $u, v \in (\mathcal{F}^n, d_\infty)$ la métrica de Hausdorff, entonces:

1. $d_\infty(u, u) = 0$.
 $d_\infty(u, u) = \sup H([u]^\alpha, [u]^\alpha) = \sup \{ \max \{ d(a, [u]^\alpha), d(a, [u]^\alpha) \} \}$
 $= \sup \{ \max(0, 0) \} = 0$
2. Si $u \neq v$, entonces $d_\infty(u, v) > 0$.
 Sea $d_\infty(u, v) = d(a, b)$, para algún $a \in [u]^\alpha$ y $b \in [v]^\alpha$. Dado que $u \neq v$, tenemos que $[u]^\alpha \neq [v]^\alpha$, por lo que podemos suponer que $a \in [u]^\alpha$ y que $a \notin [v]^\alpha$, por lo tanto $d_\infty(u, v) \leq \sup H(a, [v]^\alpha) > 0$.
3. $d_\infty(u, v) = d_\infty(v, u)$, dado que H es una métrica.
4. $d_\infty(u, v) \leq d_\infty(u, w) + d_\infty(w, v)$ sigue de la desigualdad correspondiente en la métrica H

□

Una de las propiedades fundamentales del espacio métrico $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$ esta dada por el siguiente teorema:

Teorema 2.6. $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$ es espacio métrico completo.

Demostración. Sea (u_p) una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{F}^n, d_\infty)$.

Entonces $[u_p]^\alpha$ es una sucesión de Cauchy en $(K(\mathbb{R}^n), H)$ para cada $\alpha \in [0, 1]$. Dado que $(K(\mathbb{R}^n), H)$ es completo, para cada $\alpha \in [0, 1]$, existe un $M_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$ tal que $H([u_p]^\alpha, M_\alpha) \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$

Ahora probamos que la familia M_α verifica las condiciones del Teorema (2.2)

(i) $M_\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$

(ii) $\alpha \leq \beta$ entonces $M_\alpha \subseteq M_\beta$

(iii) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \dots$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, entonces $M_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$

Por lo tanto existe un $u \in \mathcal{F}^n$ tal que $[u]^\alpha = M_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Finalmente se concluye que: $u_p \rightarrow u$ cuando $p \rightarrow \infty$.

□

Una demostración similar se pueden encontrar [51].

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales Difusas

El término “ecuación diferencial difusa” (EDD) fue concebido en 1978 por Kandel y Byatt [35], y justo después de dos años, una versión más amplia fue publicada en [36]. La generalización de la derivada difusa fue inicialmente realizada por Puri y Ralescu [50] donde establece los primeros teoremas de existencia y unicidad de solución a problemas de valor inicial a partir de la noción de derivada de Hukuhara y las cuales son estudiadas en [32]. O. Kaleva y S. Seikkala formularon una ecuación diferencial difusa [55]. Resultados relevantes sobre ecuaciones diferenciales difusas han sido obtenidos en, [4],[5], [22],[23], [35] y [34].

Un concepto que conecta la teoría difusa y los sistemas dinámicos es el de ecuaciones diferenciales difusas.

3.1. Diferenciación difusa.

La definición de la H-derivada para funciones difusas fue inicialmente introducida por Puri y Ralescu [50] como:

Definición 3.1. Sea $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$ y $t_0 \in T$. La función F se dice diferenciable en t_0 si:
(I) existe un elemento $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que, para todo $h > 0$ suficientemente cercano a cero, $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ y los límites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} \quad (3.1)$$

son iguales a $F'(t_0)$.

(II) existe un elemento $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que, para todo $h < 0$ suficientemente cercano a

cero, $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ y los límites

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} \quad (3.2)$$

son iguales a $F'(t_0)$.

Notar que si F es diferenciable de la primera forma (I), entonces no es diferenciable de la segunda forma (II) y viceversa. El siguiente teorema es fundamental para resolver una ecuación diferencial difusa:

Teorema 3.1. *Sea $F : T \rightarrow \mathcal{F}^n$, y $[F(t)]^\alpha = [F_L^\alpha(t), F_R^\alpha(t)]$, para cada $\alpha \in [0, 1]$. Entonces*

(i) *Si F diferenciable en la primera forma (I) entonces $F_L^\alpha(t)$ y $F_R^\alpha(t)$ son funciones diferenciables y*

$$[F'(t)]^\alpha = [(F_L^\alpha(t))', (F_R^\alpha(t))'], \quad (3.3)$$

(ii) *Si F diferenciable en la segunda forma (II) entonces $F_L^\alpha(t)$ y $F_R^\alpha(t)$ son funciones diferenciables y*

$$[F'(t)]^\alpha = [(F_R^\alpha(t))', (F_L^\alpha(t))']. \quad (3.4)$$

Demostración. .

(i) Si $h > 0$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces $[F(t+h) \ominus F(t)]^\alpha = [F_L^\alpha(t+h) \ominus F_L^\alpha(t), [F_R^\alpha(t+h) \ominus F_R^\alpha(t)]]$, multiplicando por $\frac{1}{h}$, tenemos

$$\left[\frac{F_L^\alpha(t+h) \ominus F_L^\alpha(t)}{h}, \frac{F_R^\alpha(t+h) \ominus F_R^\alpha(t)}{h} \right] \quad (3.5)$$

pasando a límite, y la definición (3), se obtiene $[F'(t)]^\alpha = [(F_R^\alpha(t))', (F_L^\alpha(t))']$. El caso $[F(t) \ominus F(t+h)]^\alpha$ se demuestra de manera similar.

(ii) Si $h < 0$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces $[F(t+h) \ominus F(t)]^\alpha = [F_L^\alpha(t+h) \ominus F_L^\alpha(t), [F_R^\alpha(t+h) \ominus F_R^\alpha(t)]]$, multiplicando por $\frac{1}{h}$, tenemos

$$\left[\frac{F_R^\alpha(t+h) \ominus F_R^\alpha(t)}{h}, \frac{F_L^\alpha(t+h) \ominus F_L^\alpha(t)}{h} \right] \quad (3.6)$$

pasando a límite, y la definición (3), se obtiene $[F'(t)]^\alpha = [(F_R^\alpha(t))', (F_L^\alpha(t))']$

El caso $[F(t) \ominus F(t+h)]^\alpha$ se demuestra de manera similar. \square

Basado en el Teorema 3.1, se origina la definición siguiente: [21]

Definición 3.2. Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}^n$. Se dice que F es (i)-diferenciable sobre $[a, b]$ si F es diferenciable en el sentido (I) de la Definición 3.1 y similarmente (ii)-diferenciable sobre $[a, b]$ si F es diferenciable en el sentido (II) de la Definición 3.1.

3.2. Solución de una ecuación diferencial difusa de primer orden

En este apartado se muestra la metodología para resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas difusas de primer orden.

Considérese la ecuación diferencial de primer orden:

$$ax'(t) + bx(t) = 0, \quad (3.7)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ números reales, la cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x'(t) + Kx(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (3.8)$$

con $K = \frac{b}{a}$ y $a \neq 0$. La ecuación (3.7) se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x'(t) = Kx(t) \\ x(0) = c, c \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}, \end{cases}, \quad (3.9)$$

la cual tiene la solución $x(t, c) = ce^{kt}$. Note que $x(t, c)$ es una función continua en $c \in \mathbb{R}$ para todo $t \geq 0$.

3.2.1. Método para resolver problema con condición inicial difusa

Dado el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = Kx(t) \\ x(0) = C \end{cases}, \quad (3.10)$$

donde $C \in \mathcal{F}$ es un número difuso y K constante en \mathbb{R} .

Para resolver la ecuación (3.10), se escribe la función $x(t)$ en su forma representativa de α -nivel: $[x(t)]^\alpha = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$, la condición inicial se representa mediante un

triángulo difuso y K una constante real, entonces usando la Definición 2.12, se tiene que $[C]^\alpha = [a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)]$, para $\alpha \in (0, 1]$. Para encontrar la solución se usa el Teorema 3.1; el cual nos permite discutir dos casos, el primer caso: si $x(t)$ es diferenciable en la primera forma, es decir (i)-diferenciable y el segundo caso si $x(t)$ es diferenciable en la segunda forma, es decir (ii)-diferenciable.

Caso 1:(i)-diferenciable:

Si $x'(t)$ se considera en la primera forma (I), el sistema de ecuaciones diferenciales sera como se indica a continuación:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = Ku_\alpha(t), & u_\alpha(0) = u_0 \\ v'_\alpha(t) = Kv_\alpha(t), & v_\alpha(0) = v_0 \end{cases}, \quad (3.11)$$

Como las ecuaciones del sistema son independientes, se resuelve de manera independiente cada ecuación, entonces la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = c_1 e^{Kt} \\ v_\alpha(t) = c_2 e^{Kt} \end{cases}, \quad (3.12)$$

dado que la condición inicial es el triángulo difuso $[C]^\alpha = [a + \alpha(b - a), c - \alpha(c - b)]$, entonces tenemos que las condiciones iniciales son $u_0 = a + \alpha(b - a)$ y $v_0 = c - \alpha(c - b)$, la solución del sistema 3.11 es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = [a + \alpha(b - a)]e^{Kt} \\ v_\alpha(t) = [c - \alpha(c - b)]e^{Kt} \end{cases} \quad (3.13)$$

Por lo tanto, la resolución de la ecuación (3.10) tiene conjunto de α -niveles:

$$[x(t)]^\alpha = [(a + \alpha(b - a))e^{Kt}, (c - \alpha(c - b))e^{Kt}] \quad (3.14)$$

Caso 2:(ii)-diferenciable:

Si $x'(t)$ se considera en la segunda forma (II), el sistema de ecuaciones diferenciales sera como se indica a continuación:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = Kv_\alpha(t), & u_\alpha(0) = u_0 \\ v'_\alpha(t) = Ku_\alpha(t), & v_\alpha(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3.15), primero se determinan los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz de coeficientes del sistema. El sistema (3.15)

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La matriz de coeficiente es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Los eigenvalores son $\lambda = \pm K$, y los eigenvectores son para $\lambda_1 = K$ el eigenvector es $v_1 = [-1, 1]^T$, para $\lambda_2 = -K$ el eigenvector es $v_2 = [1, 1]^T$. Se concluye que la solución general del sistema (3.15) es :

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -c_1 e^{-Kt} + c_2 e^{Kt} \\ v_\alpha(t) = c_1 e^{-Kt} + c_2 e^{Kt} \end{cases}, \quad (3.18)$$

se tiene que las condiciones iniciales son $u_0 = a + \alpha(b - a)$ y $v_0 = c - \alpha(c - b)$, aplicando las condiciones iniciales en la solución general, se obtienen los valores para las constantes c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{(1-\alpha)(c-a)}{2} \\ c_2 = \frac{(1-\alpha)(a+c)+2b\alpha}{2} \end{cases} \quad (3.19)$$

Por lo tanto, la solución del sistema (3.15) es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -\frac{(1-\alpha)(c-a)}{2} e^{-Kt} + \frac{(1-\alpha)(a+c)+2b\alpha}{2} e^{Kt} \\ v_\alpha(t) = \frac{(1-\alpha)(c-a)}{2} e^{-Kt} + \frac{(1-\alpha)(a+c)+2b\alpha}{2} e^{Kt} \end{cases}, \quad (3.20)$$

3.3. Solución de una ecuación Diferencial difusa de primer orden, condición inicial difusa y parámetros difusos.

Dado el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = Kx(t) \\ x(0) = C \end{cases}, \quad (3.21)$$

donde $C, K \in \mathcal{F}$ son números difusos.

La función $x'(t)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$[x'(t)]^\alpha = [u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = [K_L, K_R][u_\alpha(t), v_\alpha(t)] \quad (3.22)$$

debido al producto de intervalo [29], tiene solución en varios casos:

Primera forma:

Caso 1:

$$[u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = [K_L u_\alpha(t), K_R v_\alpha(t)] \quad (3.23)$$

Caso 2:

$$[u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = [K_R u_\alpha(t), K_L v_\alpha(t)] \quad (3.24)$$

Segunda forma:

Caso 3:

$$[u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = [K_L v_\alpha(t), K_R u_\alpha(t)] \quad (3.25)$$

Caso 4:

$$[u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = [K_R v_\alpha(t), K_L u_\alpha(t)] \quad (3.26)$$

Caso 1:

Si $x'(t)$ es considerado diferenciable en primera forma:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = K_L^\alpha u_\alpha(t), & u_\alpha(0) = C \\ v'_\alpha(t) = K_R^\alpha v_\alpha(t), & v_\alpha(0) = C \end{cases} \quad (3.27)$$

la solución general es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = C e^{K_L^\alpha t} \\ v_\alpha(t) = C e^{K_R^\alpha t} \end{cases}, \quad (3.28)$$

donde $K_L = [a + \alpha(b - a)]$, $K_R = [c - \alpha(c - b)]$

Caso 2:

Si $x'(t)$ es considerado diferenciable en primera forma:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = K_R^\alpha u_\alpha(t), & u_\alpha(0) = C \\ v'_\alpha(t) = K_L^\alpha v_\alpha(t), & v_\alpha(0) = C \end{cases} \quad (3.29)$$

la solución general es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = C e^{K_R^\alpha t} \\ v_\alpha(t) = C e^{K_L^\alpha t} \end{cases} \quad (3.30)$$

donde $K_L = [a + \alpha(b - a)]$, $K_R = [c - \alpha(c - b)]$

Caso 3:

Si $x'(t)$ es considerado diferenciable en segunda forma:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = K_L^\alpha v_\alpha(t), & u_\alpha(0) = C \\ v'_\alpha(t) = K_R^\alpha u_\alpha(t), & v_\alpha(0) = C \end{cases}, \quad (3.31)$$

la solución general es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = c_1 \sqrt{\frac{K_L}{K_R}} e^{\sqrt{K_L K_R} t} - c_2 \sqrt{\frac{K_L}{K_R}} e^{-\sqrt{K_L K_R} t} \\ v_\alpha(t) = c_1 e^{\sqrt{K_L K_R} t} + c_2 e^{-\sqrt{K_L K_R} t} \end{cases} \quad (3.32)$$

donde $c_1 = \frac{C}{2}(1 + \sqrt{\frac{K_R}{K_L}})$ Y $c_2 = \frac{C}{2}(1 - \sqrt{\frac{K_R}{K_L}})$.

Caso 4:

Si $x'(t)$ es considerado diferenciable en segunda forma:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = K_R^\alpha v_\alpha(t), & u_\alpha(0) = C \\ v'_\alpha(t) = K_L^\alpha u_\alpha(t), & v_\alpha(0) = C \end{cases} \quad (3.33)$$

la solución general es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = c_1 \sqrt{\frac{K_R}{K_L}} e^{\sqrt{K_L K_R} t} - c_2 \sqrt{\frac{K_R}{K_L}} e^{-\sqrt{K_L K_R} t} \\ v_\alpha(t) = c_1 e^{\sqrt{K_L K_R} t} + c_2 e^{-\sqrt{K_L K_R} t} \end{cases}, \quad (3.34)$$

donde $c_1 = \frac{C}{2}(1 + \sqrt{\frac{K_L}{K_R}})$ y $c_2 = \frac{C}{2}(1 - \sqrt{\frac{K_L}{K_R}})$.

Capítulo 4

Resultados y Aplicaciones

En este capítulo se realiza el análisis, solución y discusión de la ecuaciones diferenciales difusas de primer orden con ejemplos y aplicaciones. Se describen los resultados obtenidos y las conclusiones de cada ejemplo.

4.1. Soluciones posibles de la ecuación diferencial difusa lineal (3.10) con condiciones iniciales difusas

A continuación se presentan algunos ejemplos para el sistema planteado en el capítulo 3 de la forma (3.10).

La constante de proporcionalidad K de la ecuación diferencial en las soluciones del modelo (3.10) se considera como negativa y positiva, utilizando la metodología descrita en la sección 3.2.1, condición inicial difusa un número difuso triangular. Cuando $K = 0$, la solución es la trivial, $x(t) = 0$.

Ejemplos con constante de proporcionalidad negativa

4.1.1. Ejemplo 1. ($K = -1$)

Considérese el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

donde X_0 es un triángulo difuso simétrico con soporte $[-a, a]$ (véase la Figura 4.1).

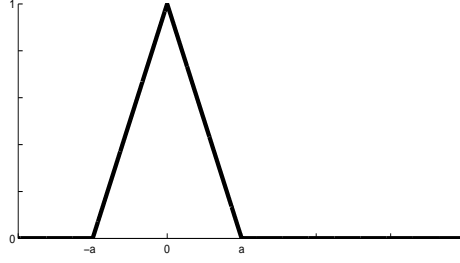


Figura 4.1: Triángulo difuso, soporte $[-a, a]$

Entonces los α -niveles de la condición inicial son:

$$[X_0]^\alpha = [-a(1 - \alpha), a(1 - \alpha)] = (1 - \alpha)[-a, a], \quad (4.2)$$

La función $x(t)$ se expresa mediante los α -niveles de la siguiente manera:

$$[x(t)]^\alpha = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)]. \quad (4.3)$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciables difusas utilizando el Teorema 3.1, el sistema de EDO correspondiente a (i)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -v_\alpha(t), & u_\alpha(0) = -a(1 - \alpha) \\ v'_\alpha(t) = -u_\alpha(t), & v_\alpha(0) = a(1 - \alpha) \end{cases}, \quad (4.4)$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -a(1 - \alpha)e^t \\ v_\alpha(t) = a(1 - \alpha)e^t \end{cases}. \quad (4.5)$$

El sistema de EDO correspondiente a (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -u_\alpha(t), & u_\alpha(0) = -a(1 - \alpha) \\ v'_\alpha(t) = -v_\alpha(t), & v_\alpha(0) = a(1 - \alpha) \end{cases}, \quad (4.6)$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -a(1 - \alpha)e^{-t} \\ v_\alpha(t) = a(1 - \alpha)e^{-t} \end{cases}. \quad (4.7)$$

4.1.2. Ejemplo 2. ($K = -1$)

Del ejemplo 4.1.1, sea $a = 1$, entonces, se tiene el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

donde X_0 es un triángulo difuso simétrico con soporte $[-1, 1]$. Como se explico en el ejemplo anterior 4.1.1, la solución general del sistema dada en 4.4 correspondiente a la (i)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -(1 - \alpha)e^t \\ v_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^t \end{cases}, \quad (4.9)$$

La soluciones del sistema correspondiente a la (i)-diferenciable se pueden ver en la Figura 4.2:

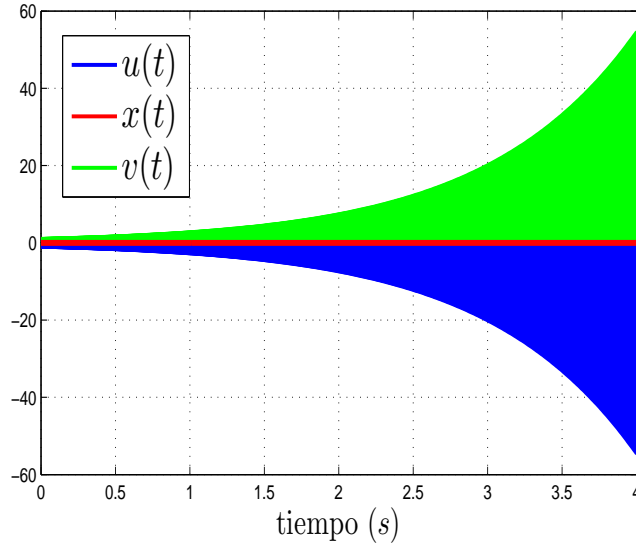


Figura 4.2: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.8)

y la solución al sistema dada en 4.7 correspondiente a la (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -(1 - \alpha)e^{-t} \\ v_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^{-t} \end{cases} \quad (4.10)$$

La soluciones del sistema (4.10) se pueden ver en la Figura 4.3

En la Figura 4.3, se grafican todas las soluciones para cada $0 < \alpha \leq 1$, lo cual permite apreciar la convergencia de las soluciones $u_\alpha(t)$, $v_\alpha(t)$ a la solución real $x(t)$.

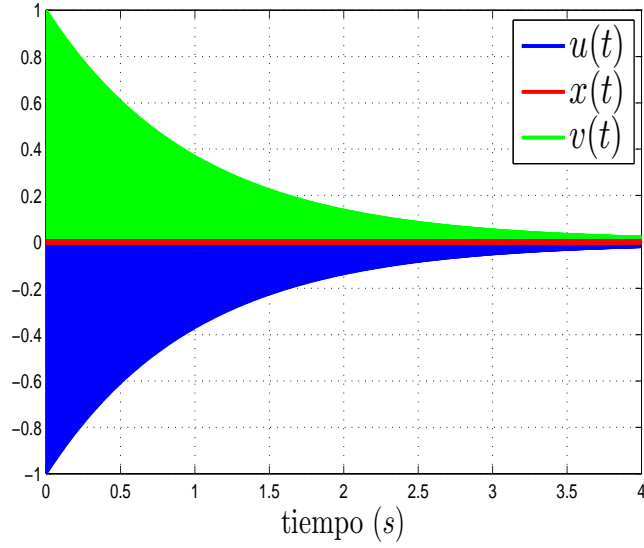


Figura 4.3: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.10)

4.1.3. Ejemplo 3. ($K = -1$)

Considérese el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

donde X_0 es un triángulo difuso $(1, 2, 5)$. Entonces la representación de la condición inicial es:

$$[X_0]^\alpha = [1 + \alpha, 5 - 3\alpha] \quad (4.12)$$

el sistema de EDO correspondiente a (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -v_\alpha(t), & u_\alpha(0) = 1 + \alpha \\ v'_\alpha(t) = -u_\alpha(t), & v_\alpha(0) = 5 - 3\alpha \end{cases}, \quad (4.13)$$

y la solución del sistema 4.13 es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ v_\alpha(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{cases}, \quad (4.14)$$

usando las ecuaciones (3.19) para calcular las constantes c_1 y c_2 se obtiene:

$$\begin{cases} c_1 = 2(1 - \alpha) \\ c_2 = (3 - \alpha) \end{cases}, \quad (4.15)$$

por lo tanto, la solución del sistema 4.13 es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -2(1 - \alpha)e^t + (3 - \alpha)e^{-t} \\ v_\alpha(t) = 2(1 - \alpha)e^t + (3 - \alpha)e^{-t} \end{cases}, \quad (4.16)$$

La soluciones del sistema 4.13 se pueden ver en la Figura 4.4

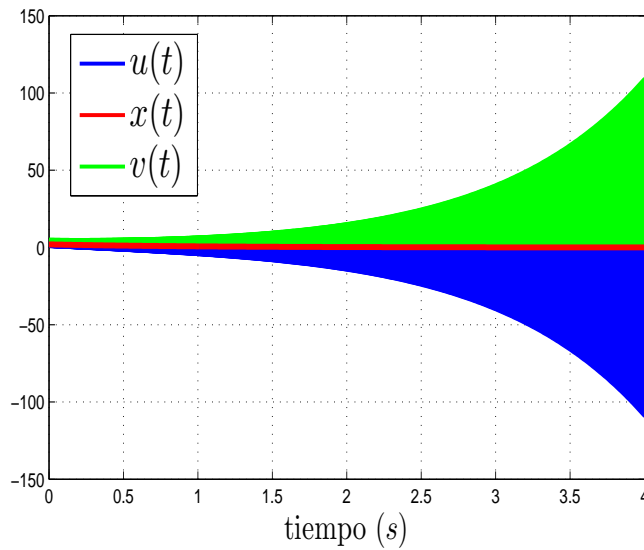


Figura 4.4: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.13)

Tomando un valor específico de α , sea $\alpha = 0$, entonces la solución es:

$$\begin{cases} u_0(t) = -2e^t + e^{-t} = -5 \sinh(t) + \cosh(t) \\ v_0(t) = 2e^t + e^{-t} = -\sinh(t) + 5 \cosh(t) \end{cases}, \quad (4.17)$$

La soluciones del sistema para $\alpha = 0$ se pueden ver en la Figura 4.5

El sistema de EDO correspondiente a (i)-diferenciable :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -u_\alpha(t), & u_\alpha(0) = 1 + \alpha \\ v'_\alpha(t) = -v_\alpha(t), & v_\alpha(0) = 5 - 3\alpha \end{cases} \quad (4.18)$$

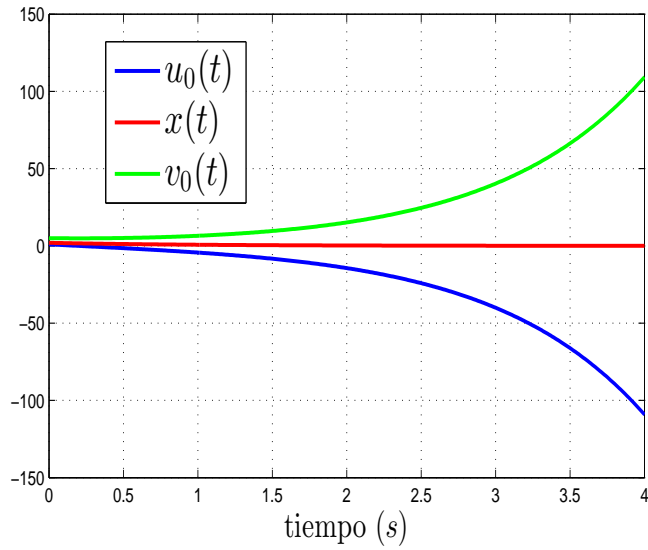


Figura 4.5: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.8) para $\alpha = 0$

y la solución del sistema 4.18 es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (1 + \alpha)e^{-t} \\ v_\alpha(t) = (5 - 3\alpha)e^{-t} \end{cases}, \quad (4.19)$$

Las soluciones del sistema son mostrada en la Figura 4.6

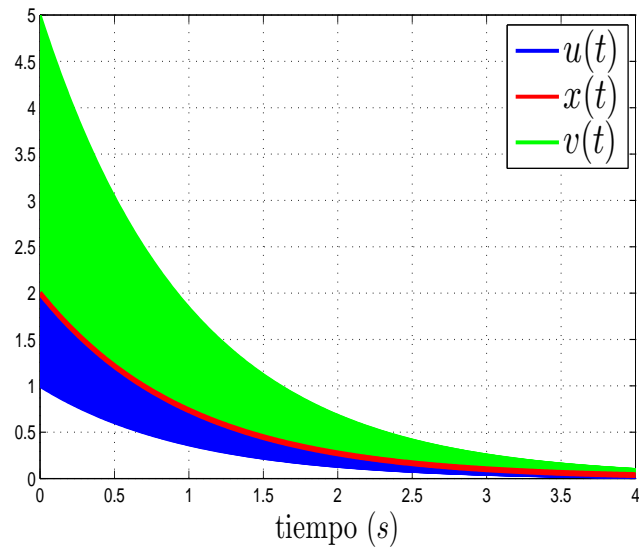


Figura 4.6: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.8)

En la figura 4.6 se grafican todas las soluciones para cada $0 < \alpha < 1$, lo cual permite apreciar la convergencia de las soluciones $u_\alpha(t)$, $v_\alpha(t)$ a la solución real $x(t) = 2e^{-t}$ con condición inicial $x(0) = 2$.

4.1.4. Ejemplo 4. ($K = -3$)

Considérese el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases}, \quad (4.20)$$

donde $X_0 = (1, 2, 3)$ un triángulo difuso, $[X_0]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$.

La solución real del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) \\ x(0) = 2 \end{cases}, \quad (4.21)$$

es la función $x(t) = 2e^{-3t}$.

La solución del sistema (i)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (1 + \alpha)e^{-3t} \\ v_\alpha(t) = (3 - \alpha)e^{-3t} \end{cases} \quad (4.22)$$

Las soluciones del sistema se pueden ver en la Figura 4.7

y la solución del sistema (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = 2e^{-3t} - (1 - \alpha)e^{3t} \\ v_\alpha(t) = 2e^{-3t} + (1 - \alpha)e^{3t} \end{cases}, \quad (4.23)$$

Las soluciones del sistema se pueden ver en la Figura 4.8

En la figura 4.8 se grafican todas las soluciones para cada $0 < \alpha < 1$, lo cual permite apreciar la convergencia de las soluciones $u_\alpha(t)$, $v_\alpha(t)$ a la solución real $x(t) = 2e^{-3t}$.

Tomando un valor específico $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} u_0(t) = 2e^{-3t} - e^{3t} = -3 \operatorname{senh}(3t) + \operatorname{cosh}(3t) \\ v_0(t) = 2e^{-3t} + e^{3t} = -\operatorname{senh}(3t) + 3 \operatorname{cosh}(3t) \end{cases} \quad (4.24)$$

Las soluciones del sistema para $\alpha = 0$ se pueden ver en la Figura 4.23

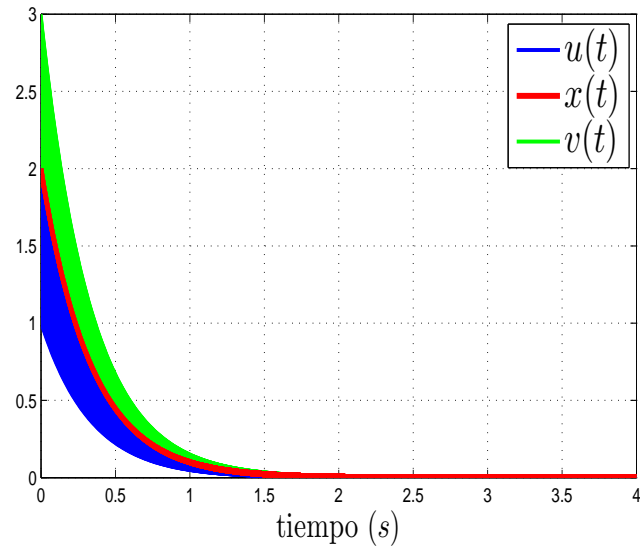


Figura 4.7: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.20)

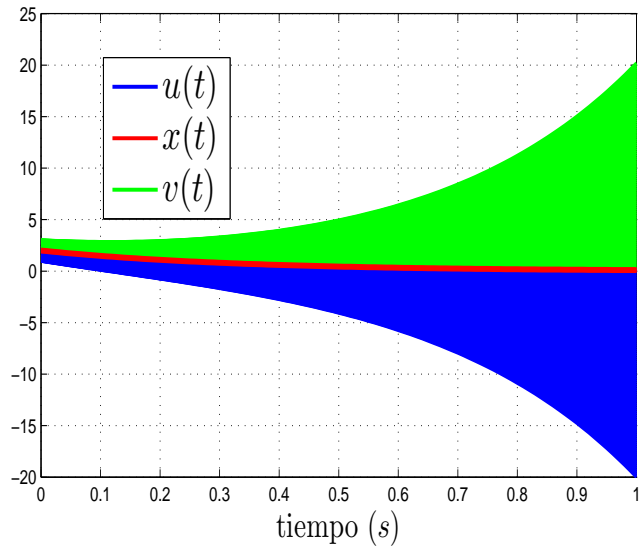


Figura 4.8: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.20)

4.1.5. Ejemplo 5. ($K = -2$)

Considérese el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.25)$$

donde X_0 es un triángulo difuso simétrico con soporte $[1, 3]$.

$$[X_0]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha] \quad (4.26)$$

El sistema de EDO correspondiente a (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -2v_\alpha(t), & u_\alpha(0) = 1 + \alpha \\ v'_\alpha(t) = -2u_\alpha(t), & v_\alpha(0) = 3 - \alpha \end{cases} \quad (4.27)$$

y la solución del sistema 4.25 es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -(1 - \alpha)e^{2t} + 2e^{-2t} \\ v_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^{2t} + 2e^{-2t} \end{cases} \quad (4.28)$$

Las soluciones del sistema se pueden ver en la Figura 4.9

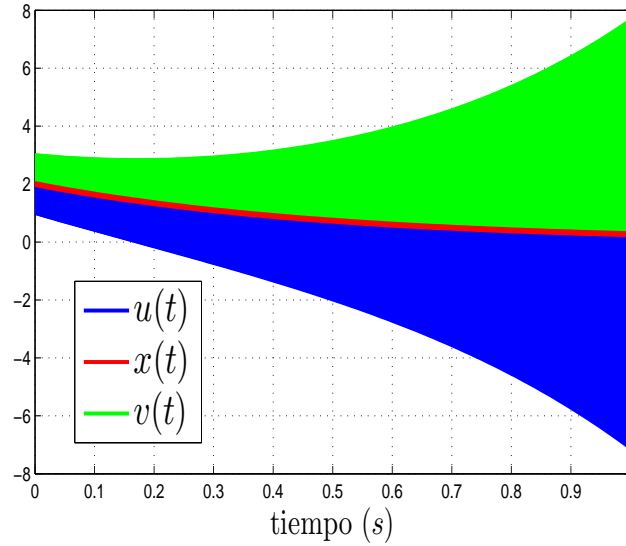


Figura 4.9: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.25)

Tomando un valor específico de α , sea $\alpha = 0$, entonces la solución es:

$$\begin{cases} u_0(t) = -e^{2t} + 2e^{-2t} = \cosh(2t) - 3 \sinh(2t) \\ v_0(t) = e^{2t} + 2e^{-2t} = 3 \cosh(2t) - \sinh(2t) \end{cases} \quad (4.29)$$

El sistema de EDO correspondiente a (i)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -2u_\alpha(t), & u_\alpha(0) = 1 + \alpha \\ v'_\alpha(t) = -2v_\alpha(t), & v_\alpha(0) = 3 - \alpha \end{cases} \quad (4.30)$$

y la solución del sistema es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (1 + \alpha)e^{-2t} \\ v_\alpha(t) = (3 - \alpha)e^{-2t} \end{cases} \quad (4.31)$$

Tomando un valor específico $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} u_0(t) = e^{-2t} \\ v_0(t) = 3e^{-2t} \end{cases} \quad (4.32)$$

Las soluciones del sistema se pueden ver en la Figura 4.10

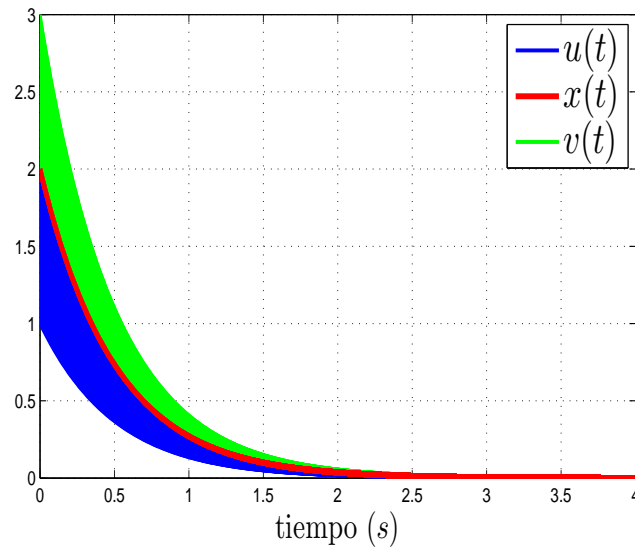


Figura 4.10: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.25)

4.1.6. Ejemplo 6. ($K = -1$)

Considérese el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Donde X_0 es la parte positiva del triángulo difuso $C = (-1, 0, 1)$.

Los α -niveles de X_0 son:

$$[X_0]^\alpha = [0, 1 - \alpha] \quad (4.34)$$

El sistema de EDO correspondiente a (i)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -v_\alpha(t), & u_\alpha(0) = 0 \\ v'_\alpha(t) = -u_\alpha(t), & v_\alpha(0) = 1 - \alpha \end{cases} \quad (4.35)$$

y la solución del sistema 4.35 es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -\frac{(1-\alpha)}{2}e^t + \frac{(1-\alpha)}{2}e^{-t} = -(1-\alpha) \sinh(t) \\ v_\alpha(t) = \frac{(1-\alpha)}{2}e^t + \frac{(1-\alpha)}{2}e^{-t} = (1-\alpha) \cosh(t) \end{cases} \quad (4.36)$$

Las soluciones del sistema se pueden ver en la Figura 4.11

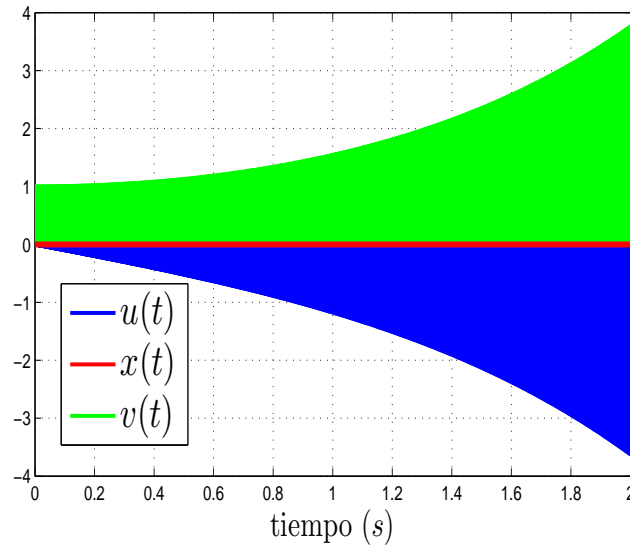


Figura 4.11: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.33)

Tómese un valor específico de α , sea $\alpha = 0$, entonces la solución es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -\sinh(t) \\ v_\alpha(t) = \cosh(t) \end{cases} \quad (4.37)$$

Las soluciones del sistema para $\alpha = 0$ se pueden ver en la Figura 4.12

El sistema de EDO correspondiente a (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) = -u_\alpha(t), & u_\alpha(0) = 0 \\ v'_\alpha(t) = -v_\alpha(t), & v_\alpha(0) = 1 - \alpha \end{cases} \quad (4.38)$$

y la solución es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = 0 \\ v_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^{-t} \end{cases} \quad (4.39)$$

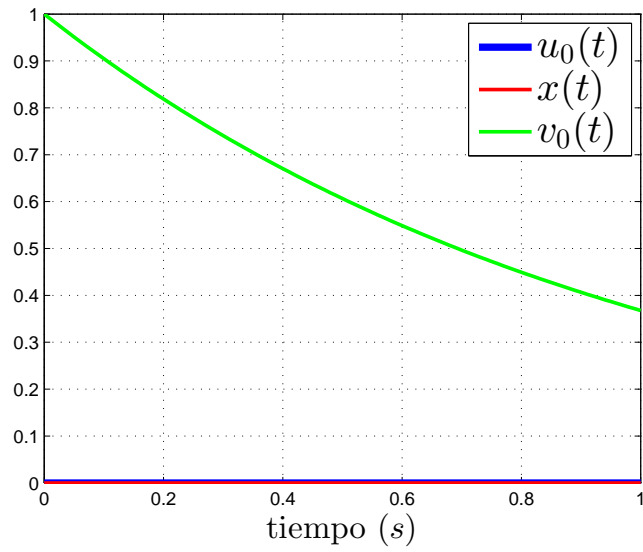


Figura 4.12: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.33)

La soluciones del sistema se pueden ver en la Figura 4.13

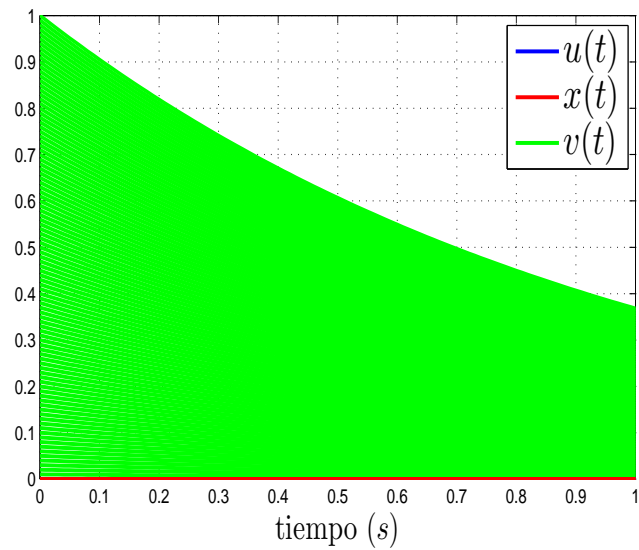


Figura 4.13: (ii)-diferenciable

4.1.7. Ejemplo 7.($K = 7$)

Considérese siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = 7x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.40)$$

donde X_0 es un triángulo difuso simétrico con soporte $[1, 3]$.

y la solución del sistema para la primera forma es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -(1 - \alpha)e^{-7t} + 2e^{7t} \\ v_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^{-7t} + 2e^{7t} \end{cases} \quad (4.41)$$

La soluciones del sistema se pueden ver en la Figura 4.14

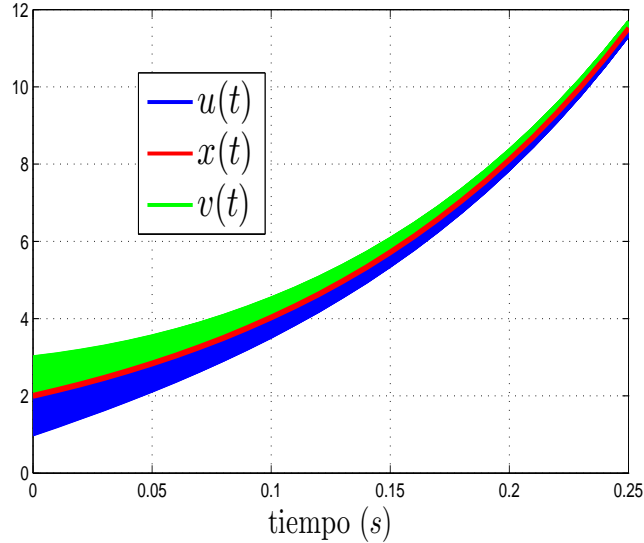


Figura 4.14: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.40)

y La solución del sistema para $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} u_0(t) = -e^{-7t} + 2e^{7t} = 3 \operatorname{senh}(7t) - \operatorname{cosh}(7t) \\ v_0(t) = e^{-7t} + 2e^{7t} = 3 \operatorname{cosh}(7t) - \operatorname{senh}(7t) \end{cases} \quad (4.42)$$

La soluciones del sistema para $\alpha = 0$ se pueden ver en la Figura 4.15

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -(1 + \alpha)e^{7t} \\ v_\alpha(t) = (3 - \alpha)e^{7t} \end{cases} \quad (4.43)$$

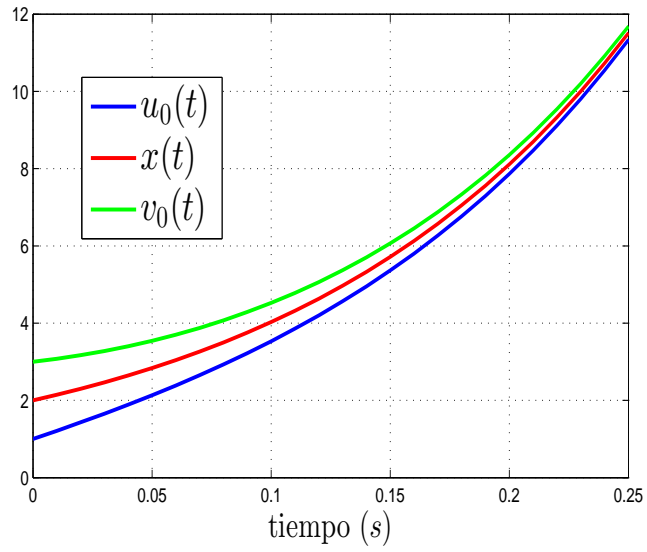


Figura 4.15: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.8) para $\alpha = 0$

La solución del sistema para la segunda forma se puede ver en la Figura 4.16

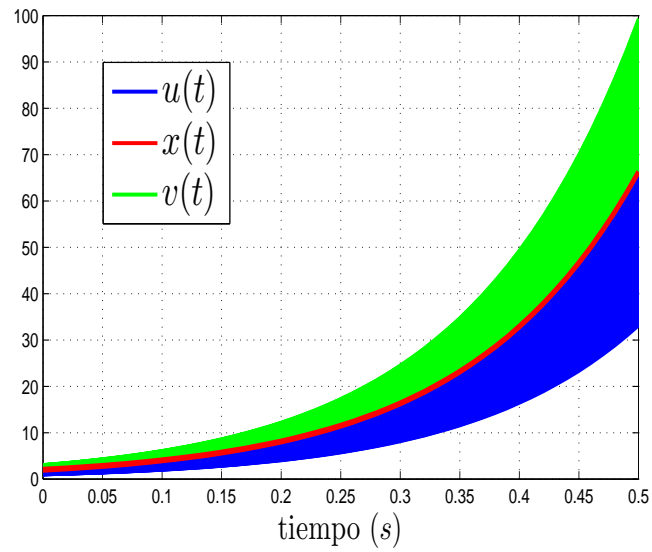


Figura 4.16: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.40)

4.1.8. Ejemplo 8. ($K = 3$)

Considérese el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.44)$$

$C = (1, 2, 3)$ un triángulo difuso.

Las soluciones del sistema para (i)-diferenciable es Fig 4.17:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (1 + \alpha)e^{3t} \\ v_\alpha(t) = (3 - \alpha)e^{3t} \end{cases} \quad (4.45)$$

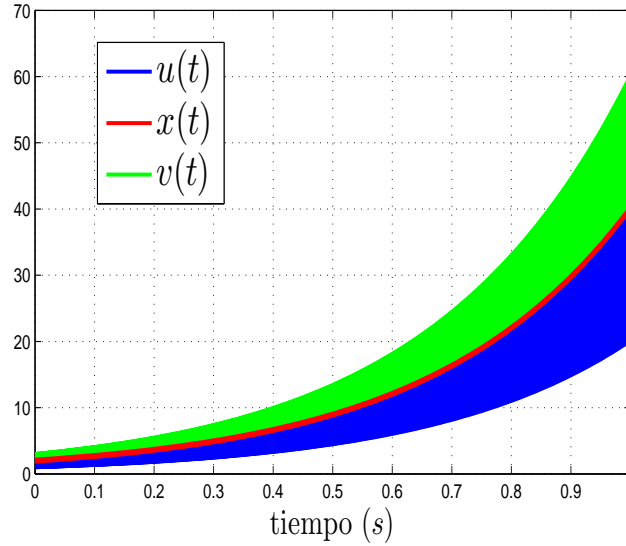


Figura 4.17: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.44)

Las soluciones del sistema para (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = 2e^{3t} - (1 - \alpha)e^{-3t} \\ v_\alpha(t) = 2e^{3t} + (1 - \alpha)e^{-3t} \end{cases} \quad (4.46)$$

Las soluciones del sistema para (ii)-diferenciable es Fig 4.18:

Para $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} u_0(t) = 2e^{3t} - e^{-3t} = 3 \sinh(3t) + \cosh(3t) \\ v_0(t) = 2e^{3t} + e^{-3t} = \sinh(3t) + 3 \cosh(3t) \end{cases} \quad (4.47)$$

Las soluciones del sistema para (ii)-diferenciable con $\alpha = 0$ es Fig 4.19:

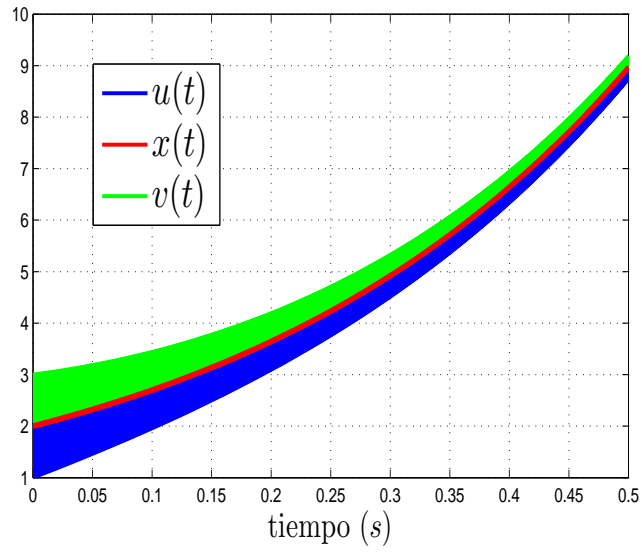


Figura 4.18: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.44)

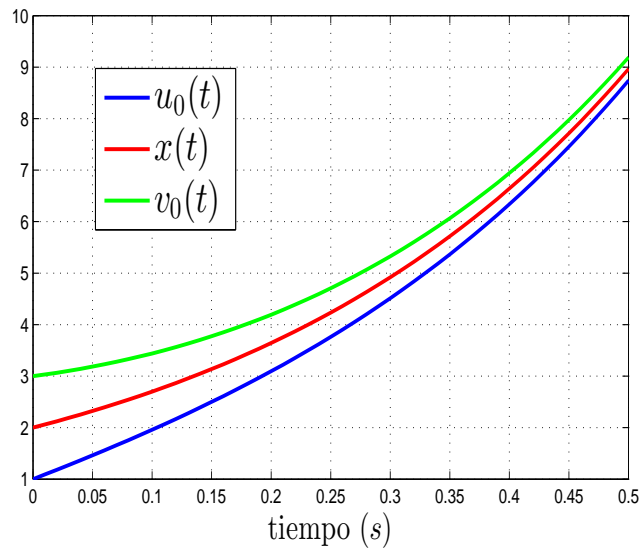


Figura 4.19: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.8) para $\alpha = 0$

4.1.9. Solución de una ecuación diferencial de primer orden no homogénea, con condición inicial difusa

Considérese el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + t \\ x(0) = X_0 \end{cases}, \quad (4.48)$$

donde $X_0 = (1, 2, 3)$ es un triángulo difuso.

La solución real del sistema (4.48) es:

$$x(t) = 3e^{-t} + t - 1. \quad (4.49)$$

Las soluciones del sistema para (i)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (2 + \alpha)e^{-t} + t - 1 \\ v_\alpha(t) = (4 - \alpha)e^{-t} + t - 1 \end{cases}, \quad (4.50)$$

Las soluciones del sistema para (i)-diferenciable se pueden ver en la Figura 4.20

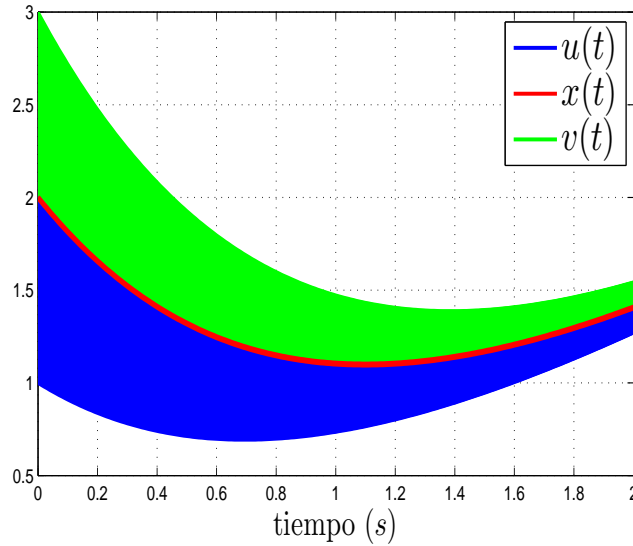


Figura 4.20: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.48)

Las soluciones del sistema para (ii)-diferenciable es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -(1 - \alpha)e^t + 4e^{-t} + t - 1 \\ v_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^t + 4e^{-t} + t - 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

Las soluciones del sistema para (ii)-diferenciable se pueden ver en la Figura 4.21

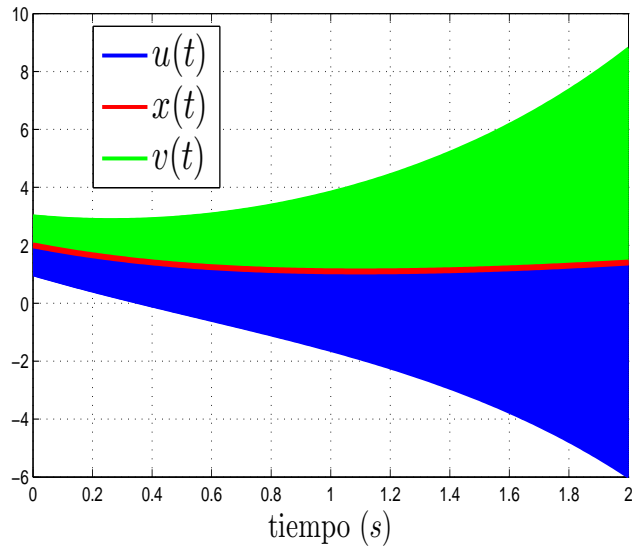


Figura 4.21: Solución (ii)-diferenciable del sistema (4.48)

Para $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} u_0(t) = -e^t + 4e^{-t} + t - 1 \\ v_0(t) = e^t + 4e^{-t} + t - 1 \end{cases} \quad (4.52)$$

Las soluciones del sistema para (ii)-diferenciable para $\alpha = 0$ se pueden ver en la Fig 4.22

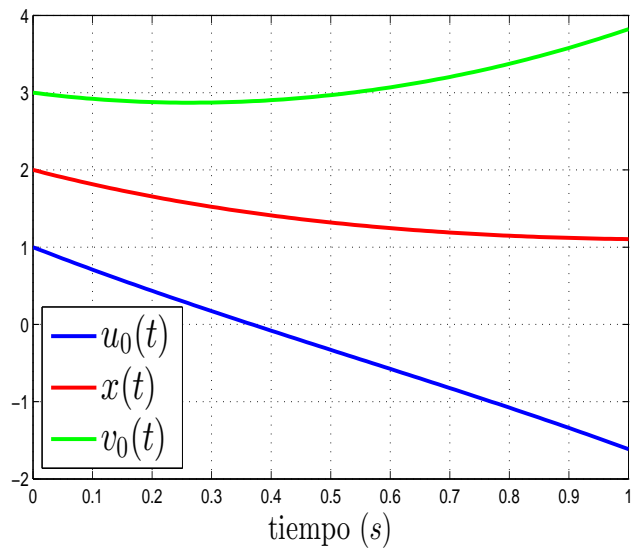


Figura 4.22: Solución (i)-diferenciable del sistema (4.48) para $\alpha = 0$

4.2. Solución de una ecuación diferencial de primer orden con constante de proporcionalidad y/o condición inicial difusa.

En esta sección se muestra la solución de la ecuación (), y las condiciones dadas en la sección 3.21.

4.2.1. Solución que considera condición inicial real y constante de crecimiento difusa

Dado K triangulo difuso $(1, 2, 3)$, y $C = 7$, entonces $[K]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha]$. La solución del sistema es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = c_1 \sqrt{\frac{K_L}{K_R}} e^{\sqrt{K_L K_R} t} - c_2 \sqrt{\frac{K_L}{K_R}} e^{\sqrt{K_L K_R} t} \\ v_\alpha(t) = c_1 e^{\sqrt{K_L K_R} t} + c_2 e^{\sqrt{K_L K_R} t} \end{cases} \quad (4.53)$$

donde $K_L = (1 + \alpha)$, $K_R = (3 - \alpha)$

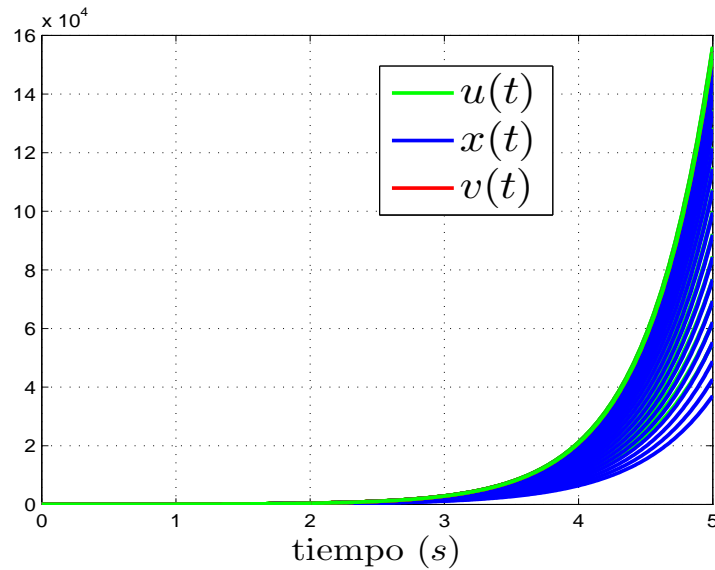


Figura 4.23: Constante de crecimiento difusa

4.2.1.1. Ejemplo 2

Sea K el triángulo difuso $(2, 3, 4)$, y $C = 2$, entonces $[K]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$.
la solución del sistema es:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = 2e^{-(\alpha+2)t} \\ v_\alpha(t) = 2e^{-(4-\alpha)t} \end{cases} \quad (4.54)$$

La cual se puede ver en la Figura 4.24 para $\alpha = 0$, donde la solución real $x(t)$ esta dentro de la banda que forman las soluciones $u_0(t), v_0(t)$.

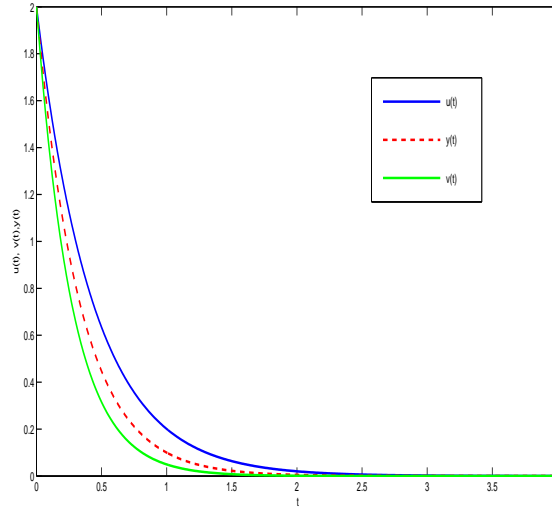


Figura 4.24: Caso 2. constante de crecimiento difusa

4.2.2. Solución que considera Condición inicial difusa y constante de crecimiento difusa

4.2.2.1. Ejemplo 1

Dado K triángulo difuso $(2, 3, 4)$, y C triángulo difuso $(1, 2, 3)$, entonces $[K]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$ y $[C]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha]$.

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (\alpha + 1)e^{-(\alpha+2)t} \\ v_\alpha(t) = (3 - \alpha)e^{-(4-\alpha)t} \end{cases} \quad (4.55)$$

La cual se puede ver en la Figura 4.25, para $\alpha = 0$, donde la solución real $x(t)$ esta dentro de la banda que forman las soluciones $u_0(t), v_0(t)$.

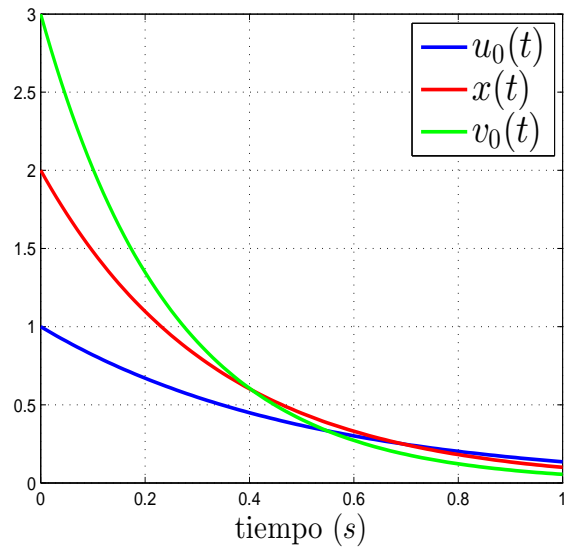


Figura 4.25: Caso 3. Condiciones iniciales difusas y constante de crecimiento difusa (i)diferenciable

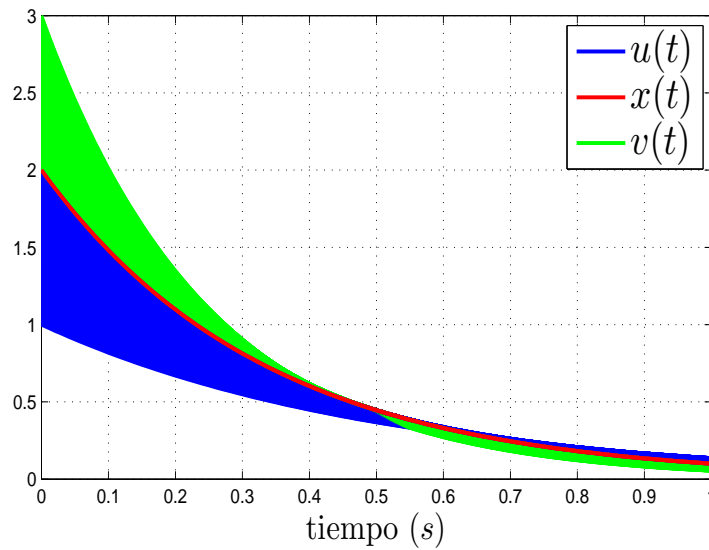


Figura 4.26: constante de crecimiento difusa (i)diferenciable

solución de la segunda forma

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (\alpha + 1)e^{(\alpha+2)t} \\ v_\alpha(t) = (3 - \alpha)e^{(4-\alpha)t} \end{cases} \quad (4.56)$$

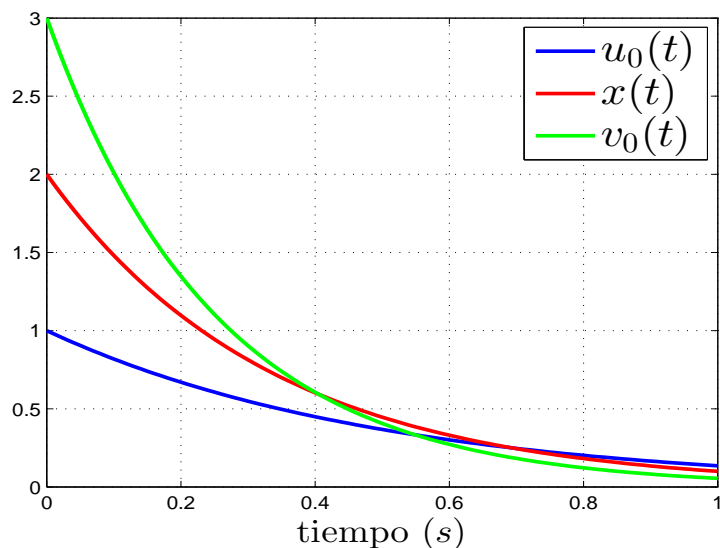


Figura 4.27: constante de crecimiento difusa (ii) diferenciable

4.3. Aplicciones

4.3.1. Modelo de Malthus difuso

Uno de los primeros intentos para modelar el crecimiento de la población humana mediante una fórmula matemática fue realizado por el economista británico Thomas Malthus (1766-1834), el cual escribió un ensayo sobre el principio de la población, la cual fue publicada en el siglo XVIII originalmente en inglés como *An Essay on the Principle of Population* (1798). En el que desarrolló las teorías de crecimiento y decrecimiento de la población, donde señalaba que la razón de crecimiento de la población de un país en un cierto tiempo es proporcional a la población total del país en ese tiempo [41]. Este modelo de cambio en la población se denomina la ley de crecimiento exponencial o ley de Malthus. En términos matemáticos podemos expresar si $x(t)$ denota la población en el tiempo t , entonces, lo podemos expresar como un problema con valores iniciales:

$$\begin{cases} x'(t) = Kx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.57)$$

donde k es una constante de proporcionalidad, sirve como modelo para diferentes fenómenos que tienen que ver con crecimiento o decaimiento, siendo x_0 la población inicial.

El caso de estudio es un modelo clásico de demografía, el modelo de Malthus, pero planteado bajo contexto difuso, y resuelto por medio de la generalización de la derivada en la noción de la H-derivada [32].

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = Kx(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.58)$$

donde X_0 es un conjunto difuso y k es la constante de crecimiento relativo de la población.

A continuación se presentan algunos resultados aplicados a modelos de crecimiento o decrecimiento de una población.

4.3.1.1. Caso de estudio 1

La población de bacterias en un cultivo decrece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo con una razón proporcional $K = -2$. Si la población inicial P_0 se estima alrededor de los 2 millones (2×10^6), que se puede decir de la población?

Para que el modelo sea tratado en el contexto difuso, se debe suponer que la población inicial esta entre 1 a 3 millones, por lo tanto, se plantea el problema como una ecuación diferencial difusa:

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.59)$$

donde X_0 es un triángulo difuso con soporte $[1, 3] \times 10^6$, tomando como base la teoría del Capítulo 3, y el Ejemplo 4.25, se tiene la siguiente solución:

para el sistema (i)-diferenciable:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -(1 - \alpha)e^{2t} \times 10^6 + 2e^{-2t} \times 10^6 \\ v_\alpha(t) = (1 - \alpha)e^{2t} \times 10^6 + 2e^{-2t} \times 10^6 \end{cases}, \quad (4.60)$$

estas soluciones son mostradas en la Figura 4.28.

Para el sistema (ii)-diferenciable:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (1 + \alpha)e^{-2t} \times 10^6 \\ v_\alpha(t) = (3 - \alpha)e^{-2t} \times 10^6 \end{cases}, \quad (4.61)$$

estas soluciones son mostradas en la Figura 4.29.

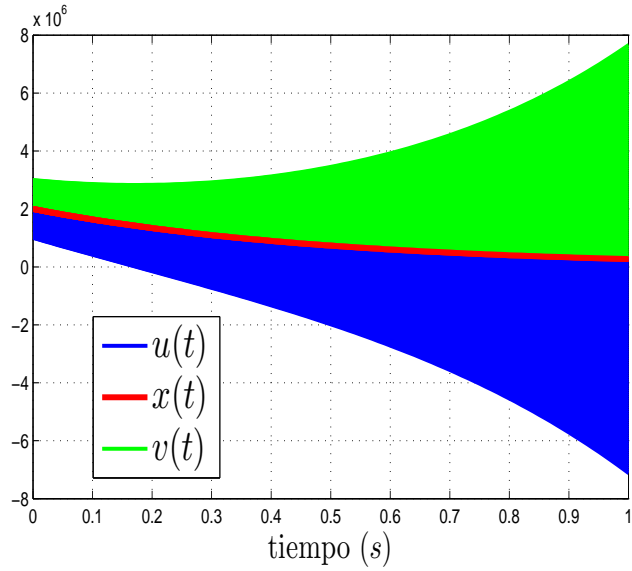


Figura 4.28: Trayectorias del sistema (4.63) para (i)-diferenciable

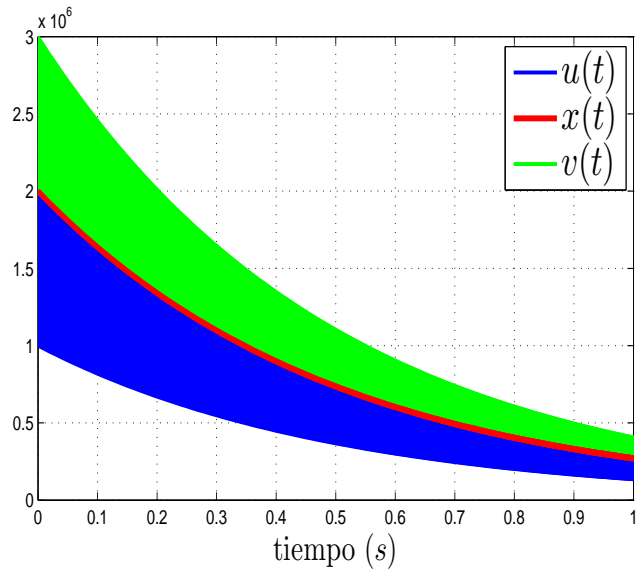


Figura 4.29: Trayectorias del sistema (4.63) para (i)-diferenciable

4.3.1.2. Caso de estudio 2

La población de un pueblo crece con una razón proporcional a la población en el tiempo t . La población inicial estimada en 500 personas aumenta con una proporción $k = \frac{1}{100}$. ¿Cuál será la población pasados 30 años?

Para que el modelo sea tratado en el contexto difuso, se debe suponer que la población

inicial esta entre 400 a 600 personas, por lo tanto, se plantea el problema como una ecuación diferencial difusa:

Sea el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{100}x(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \quad (4.62)$$

donde X_0 un triángulo difuso con soporte $[400, 600]$. tomando como base la teoría del Capítulo 3 tenemos las siguientes soluciones:

Para el sistema (i)-diferenciable:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = -100(1 - \alpha)e^{\frac{-t}{100}} + 500e^{\frac{t}{100}} \\ v_\alpha(t) = 100(1 - \alpha)e^{\frac{-t}{100}} + 500e^{\frac{t}{100}} \end{cases} \quad (4.63)$$

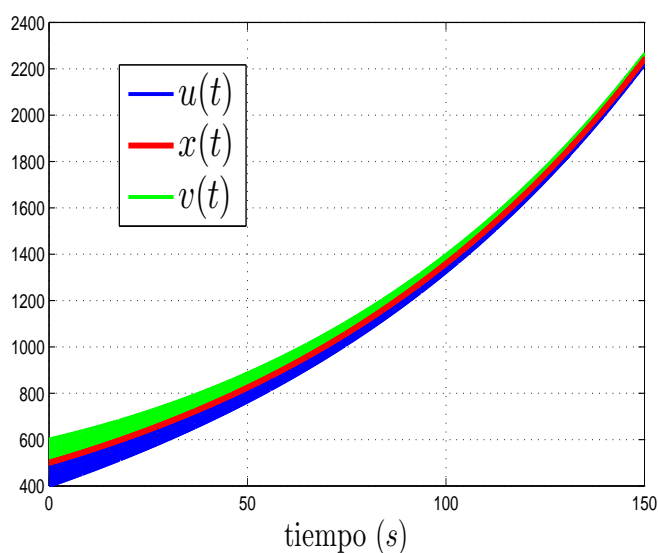


Figura 4.30: Trayectorias del sistema (4.63) para (i)-diferenciable para el sistema (ii)-diferenciable:

$$\begin{cases} u_\alpha(t) = (400 + 100\alpha)e^{\frac{t}{100}} \\ v_\alpha(t) = (600 - 100\alpha)e^{\frac{t}{100}} \end{cases} \quad (4.64)$$

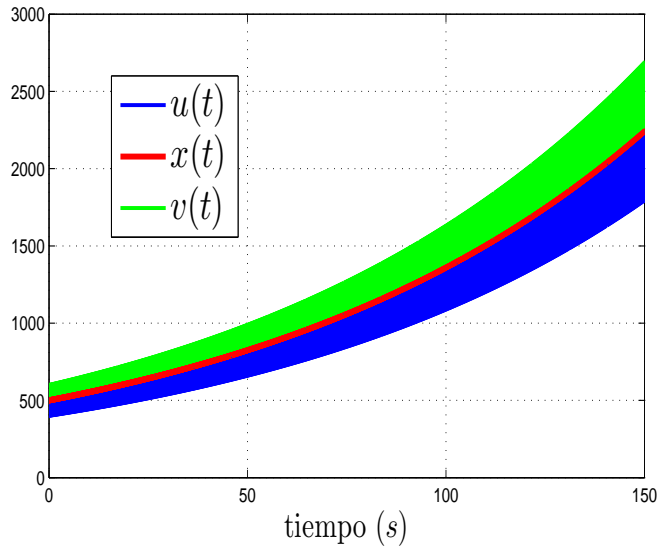


Figura 4.31: Trayectorias del sistema (4.64) para (i)-diferenciable

4.3.2. Modelo depredador-presa difuso

El modelo depredador-presa de Lotka-Volterra es un sistema no lineal formado por un par de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que modeliza el crecimiento de dos poblaciones que interactúan (depredador y presa).

A principios del siglo XX, dos matemáticos, el estadounidense Alfred Lotka y el italiano Vittora Volterra, desarrollaron de manera independiente unas ecuaciones matemáticas que describen la relación entre dos especies que comparten un mismo recurso. Este sistema fue propuesto primeramente por Alfred James Lotka en el año 1925. Un año después, en 1926, lo propuso Vito Volterra.

Este modelo evalúa la variación de población entre dos especies, una de depredadores que sean los zorros y las presas, conejos, donde se evalúan sus interacciones y como afectan en el tamaño de la población, siguiendo el modelo de Lotka-Volterra que contiene el problema de valor inicial. Sea $F(t)$ y $R(t)$ las poblaciones de zorros y conejos, respectivamente, en el tiempo t , el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra se define mediante un sistema que incluye las siguientes dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR - cFR \\ \frac{dF}{dt} = -bF + dFR \end{cases} \quad (4.65)$$

con condiciones iniciales de las especies $R(t_0) = R_0, F(t_0) = F_0$

A continuación se presenta un caso del clásico modelo depredador-presa, con condición inicial número real. Para un espacio real, se puede suponer el sistema (4.65) con condición inicial de quince conejos y seis zorros.

Dado el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= R - 0.2RF \\ \frac{dF}{dt} &= -0.4F + 0.02RF\end{aligned}\tag{4.66}$$

con condiciones iniciales $R(t_0) = 15, F(t_0) = 6$.

Se resuelve el sistema, mediante métodos numéricos, se obtienen las soluciones mostradas en la Figura 4.32, donde se obtienen los gráficos de solución de la población presa en rojo y de la población depredador en azul.

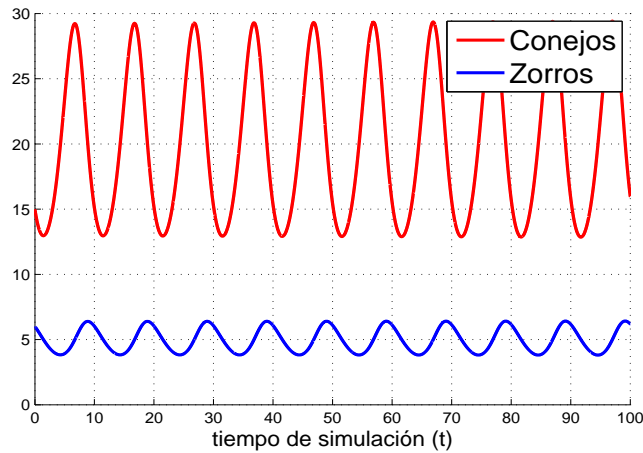


Figura 4.32: Solución real: Evolución temporal de las poblaciones de presas y depredadores. (tiempo de simulación $t = 100$)

La figura 4.33 muestra un plano de fase para el sistema depredador-presa. Evidentemente, el punto crítico $(20, 5)$ es un centro estable que representa el equilibrio de las poblaciones de 20 conejos y 5 zorros.

Ahora, se supone que la condición inicial es de alrededor de quince conejos y seis zorros. (Cuando las poblaciones iniciales de presas y depredadores son difusas, no se conocen los valores exactos).

Dado el siguiente sistema no lineal, con condiciones iniciales difusas:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= R - 0.2RF \\ \frac{dF}{dt} &= -0.4F + 0.02RF\end{aligned}\tag{4.67}$$

donde $R(0)$ es un triángulo difuso $(14, 15, 16)$ y $F(0)$ el triángulo difuso $(5, 6, 7)$. Se cal-

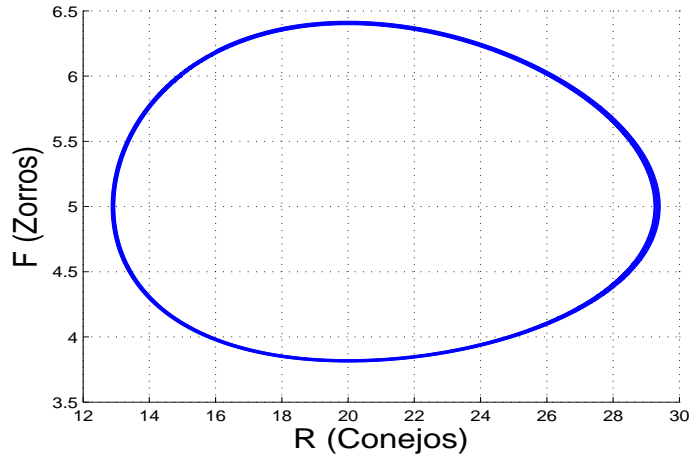


Figura 4.33: Órbita del Plano fase: Conejos vs Zorros.

culan los α -nivel de las condiciones iniciales de las poblaciones R_0 y F_0 .

$$[R]^\alpha = (\alpha + 14, 16 - \alpha)$$

$$[F]^\alpha = (\alpha + 5, 7 - \alpha)$$

Resolviendo el sistema, mediante métodos numéricos, se obtiene las soluciones para el sistema depredador-presa difuso mostradas en las Figuras 4.34 y 4.35. Se puede apreciar que al inicio de la gráfica existe una banda, el ancho es debido a las condiciones iniciales difusas, las cuales a medida que crece el tiempo de simulación, van convergiendo a la solución real del sistema.

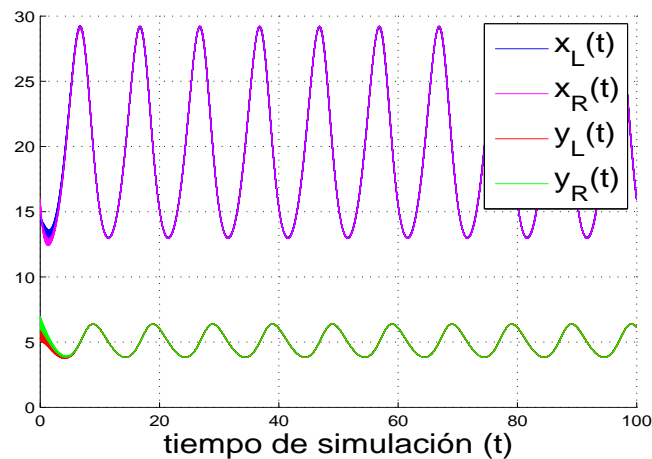


Figura 4.34: Solución difusa: Conejos vs Zorros. (tiempo de simulación $t = 100$)

En la Figura 4.35 se observa cómo con el paso del tiempo las poblaciones de conejos

y zorros se estabilizan y se crea un ciclo constante.

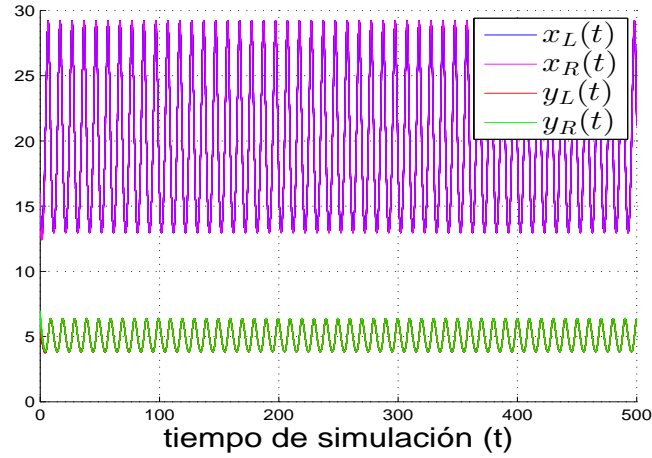


Figura 4.35: Solución difusa: Conejos vs Zorros. (tiempo de simulación $t = 500$)

Los planos de fases son representaciones gráficas de la trayectoria que siguen las densidades de un par de especies bajo ciertas condiciones definidas a priori. Haciendo el Plano de Fases, se puede observar un ciclo límite o ciclo de límite estable.

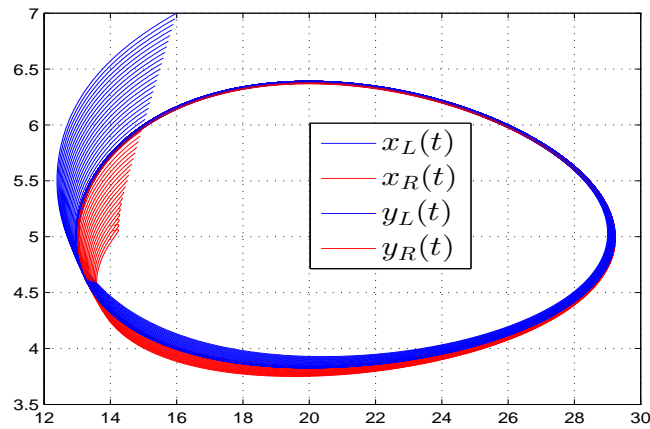


Figura 4.36: Órbita del Plano fase: Conejos vs Zorros (tiempo de simulación $t = 100$)

Esta es una representación en 3D de la gráfica 4.34 para todo $\alpha \in [0, 1]$; aquí es importante tener en cuenta que las gráficas comienzan con una incertidumbre y desaparecen a lo largo del tiempo. Si $\alpha = 1$, la proyección de los picos de los triángulos coincide con la solución para el espacio real mostrada en la Figura 4.32.

Si se aumenta el tiempo de simulación, se puede observar que el sistema es estable.

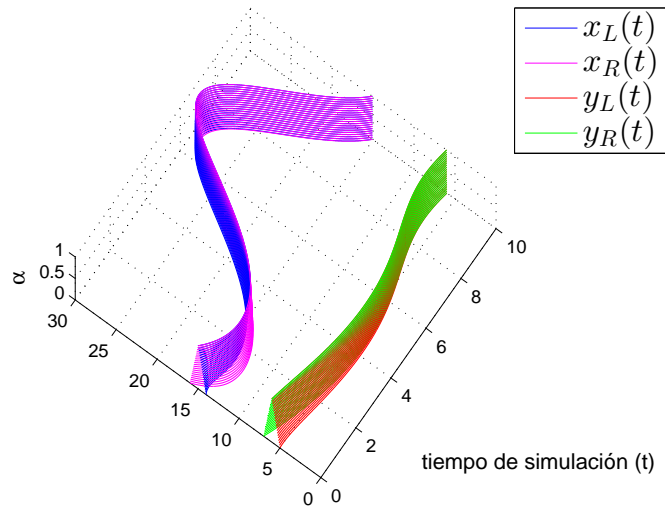


Figura 4.37: Gráfica solución: Conejos y Zorros vs α .(tiempo de simulación $t = 10$)

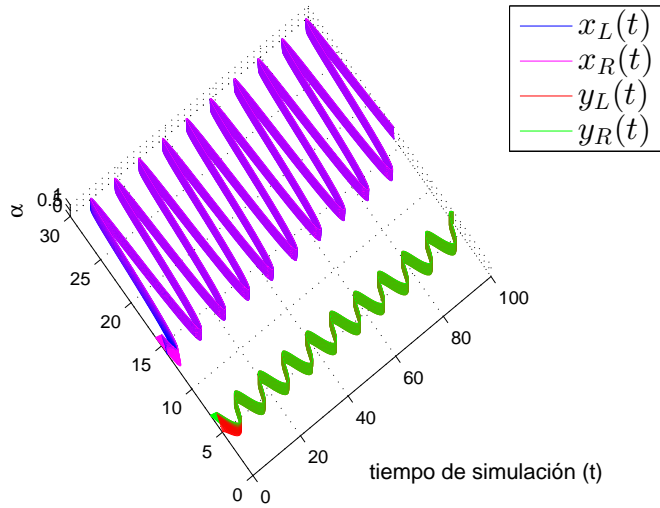


Figura 4.38: Gráfica solución: Conejos y Zorros vs α .(tiempo de simulación $t = 100$)

4.4. Casos de estudio en ingeniería de control

En ingeniería, tratar con las incertidumbres en el diseño del sistema de control es problema común en las diferentes ramas de la industria, esto debido a las incertidumbres que deben agregarse a un modelo de objetos a priori o a posteriori. El modelado difuso es común considerar las incertidumbres, y estos modelos difusos se basan en el trabajo pionero de Zadeh [61]. Existe amplia literatura [19, 39, 18, 46, 40, 60, 57, 49, 56, 53, 54,

43, 26, 44, 10, 11] sobre control difuso, pero esta literatura se basa en los modelos de tipo Mamdani y Takagi Sugeno, y no consideran una modelación con enfoque en ecuación diferencial difusa. En esta sección se presenta un enfoque de modelado de sistemas de control con ecuaciones diferenciales difusas.

Considérese la ecuación diferencial difusa:

$$\tilde{X}^{(n)} + a_1 \tilde{X}^{(n-1)} + \dots + a_n \tilde{X}(t) = k_{ob} \tau(t) \quad (4.68)$$

con condiciones iniciales

$$\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0, \tilde{X}^{(i)}(t_0) = \tilde{X}_0^{(i)}, (i = 1 \dots n - 1) \quad (4.69)$$

donde a_i $i = 1 \dots n$, y k_{ob} constantes, $\tau(t)$ un controlador difuso, t es el tiempo, $\tilde{X}^{(i)}$ son las i -ésimas derivadas.

La función $\tilde{X}(t)$ tiene las siguientes propiedades:

$$(X(t))^\alpha = [X_L^\alpha(t), X_R^\alpha(t)] \quad (4.70)$$

$$\tilde{X}(t) = \cup_{\alpha \in (0,1]} \alpha X^\alpha(t); \forall \alpha \in (0, 1] \quad (4.71)$$

$$(X^\alpha(t))^i = [(X_L^\alpha(t))^{(i)}, (X_R^\alpha(t))^{(i)}] \quad (4.72)$$

$$(\tilde{X}^{(i)}(t)) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha [(X_L^\alpha(t))^{(i)}, (X_R^\alpha(t))^{(i)}] \quad (4.73)$$

Entonces, el controlador $\tau(t)$ esta dado por:

$$\tau(t) = - \sum_{j=0}^r k_{p_j} X^{(j)}(t) \quad (4.74)$$

donde k_{p_j} $j = 1 \dots r$ denotan los parámetros de ajuste del controlador. [62].

La ecuación diferencial difusa, que describe el sistema de control de orden $n = 2$, $r = 0$, teniendo esto en cuenta las ecuaciones características del sistema de control difuso se describirán mediante la siguiente ecuación diferencial difusas del tipo controlador “Proporcional”:

$$\tilde{X}'' + a_1 \tilde{X}' + (a_2 + k_{ob} k_{p0}) \tilde{X}(t) = \tilde{0} \quad (4.75)$$

$$\tilde{X}(t_0) = \tilde{X}_0, \tilde{X}'(t_0) = \tilde{X}'_0, \quad (4.76)$$

($\tilde{0}$ es cero difuso)

Dada la acción de control $\tau(t)$ la cual esta formada por las funciones difusas $\tilde{q}^{(i)}(t)$, $i = 1 \dots n$,

$$\tau(t) = -k_{ob} \sum_{j=0}^r k_{p_j} \tilde{q}^{(j)}(t), \quad (4.77)$$

donde k_{p_j} , $j = 1 \dots r$ denotan los parámetros del controlador, r el orden del controlador difuso y k_{ob} es una constante real [62].

Entonces con base en [32] se pueden escribir las siguientes expresiones para la ecuación diferencial difusa (4.75), y también para condiciones iniciales (4.76):

$$(X_L^\alpha)''(t) + a_1(X_L^\alpha)'(t) + (a_2 + k_{ob}k_{p0})X_L(t) = 0_L^\alpha \quad (4.78)$$

$$(X_R^\alpha)''(t) + a_1(X_R^\alpha)'(t) + (a_2 + k_{ob}k_{p0})X_R(t) = 0_R^\alpha \quad (4.79)$$

Se debe señalar que el intervalo $0^\alpha = [0_L^\alpha, 0_R^\alpha]$, es el α -corte del cero difuso, es lo suficientemente pequeño.

La función difusa $\tilde{q}(t)$ tiene las siguientes propiedades por el Teorema 3.1

$$[\tilde{q}^{(i)}]^\alpha = [(q_L^\alpha(t))^{(i)}, (q_R^\alpha(t))^{(i)}]. \quad (4.80)$$

4.4.1. Análisis de amortiguación

En la práctica muchos objetos tecnológicos (incluyendo robót manipulador como objeto de control automático) se describen por ecuaciones diferenciales de segundo o tercer orden. Teniendo en cuenta lo siguiente, el problema formulado de síntesis paramétrica de control en (4.68), puede resolverse analíticamente por un método como se sugiere en [62].

Sea la ecuación diferencial difusa

$$\tilde{X}'' + a_1\tilde{X}' + (a_2 + k_{ob}k_{p0})\tilde{X}(t) = \tilde{0} \quad (4.81)$$

con condiciones iniciales los triángulos difusos con soportes $X' = [-0.001, 0.001]$, $\tilde{0} = [-0.0001, 0.0001]$ y $X_0 = [2, 4]$.

4.4.1.1. Movimiento sobreamortiguado

Para los valores $a_1 = 4.5$, $a_2 = 0.95$, $k_{ob} = 20$, $k_{p0} = 1.7$, se sustituyen en la ecuación (4.81) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} (X_L^\alpha)''(t) + 4.5(X_L^\alpha)'(t) + 4.35X_L(t) = -0.001, & X_L(0) = 2, X'(0) = -0.0001 \\ (X_R^\alpha)''(t) + 4.5(X_R^\alpha)'(t) + 4.35X_L(R) = 0.001, & X_R(0) = 4, X'(0) = 0.0001 \end{cases} \quad (4.82)$$

La solución del sistema (4.82) es:

$$\begin{cases} X_L(t) = 3.66551e^{-1.4059028t} - 1.66551e^{-3.0940972t} - 0.0000229885 \\ X_R(t) = 7.33078e^{-1.4059028t} - 3.33101e^{-3.0940972t} + 0.0000229885 \end{cases} \quad (4.83)$$

Las soluciones están representadas en la Figura 4.39

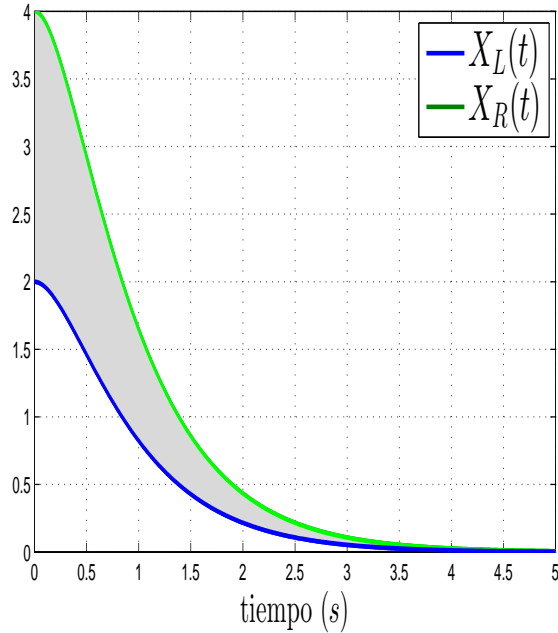


Figura 4.39: Soluciones del sistema 4.82

4.4.1.2. Movimiento críticamente amortiguado

Para los valores $a_1 = 4.5$, $a_2 = 1$, $k_{ob} = 20$, $k_{p0} = 1.5$, se sustituyen en la ecuación (4.81) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} (X_L^\alpha)''(t) + 4(X_L^\alpha)'(t) + 4X_L(t) = -0.001, & X_L(0) = 2, X'(0) = -0.0001 \\ (X_R^\alpha)''(t) + 4(X_R^\alpha)'(t) + 4X_R(t) = 0.001, & X_R(0) = 4, X'(0) = 0.0001 \end{cases} \quad (4.84)$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} X_L(t) = 2.00025e^{-2t} + 4.0004te^{-2t} - 0.00025 \\ X_R(t) = 3.999755e^{-2t} + 7.9996te^{-2t} + 0.00025 \end{cases} \quad (4.85)$$

Las soluciones están representadas en la figura 4.40

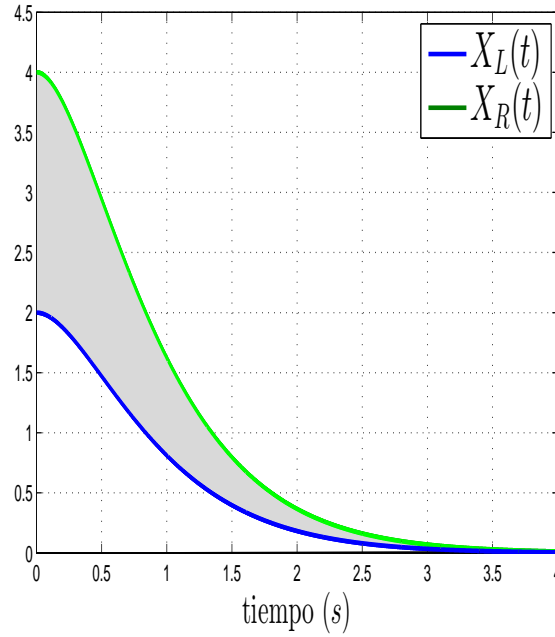


Figura 4.40: Soluciones del sistema 4.84.

4.4.1.3. Movimiento subamortiguado

Para los valores $a_1 = 2.4$, $a_2 = 0.95$, $k_{ob} = 20$, $k_{p0} = 1.7$, se sustituyen en la ecuación 4.81 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} (X_L^\alpha)''(t) + 2.4(X_L^\alpha)'(t) + 4.35X_L(t) = -0.001, & X_L = 2, X' = -0.0001 \\ (X_R^\alpha)''(t) + 2.4(X_R^\alpha)'(t) + 4.35X_R(t) = 0.001, & X_R = 4, X' = 0.0001 \end{cases} \quad (4.86)$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} X_L(t) = 2.00023e^{-1.2t} \cos(1.7058t) + 1.40701e^{-1.2t} \sen(1.7058t) - 0.000229 \\ X_R(t) = 2.81371e^{-1.2t} \cos(1.7058t) + 3.99977e^{-1.2t} \sen(1.7058t) + 0.0002298 \end{cases} \quad (4.87)$$

Las soluciones están representadas en la figura 4.41

4.4.2. Modelo sistema masa-resorte-amortiguador

A continuación se presenta la dinámica de un sistema compuesto por una masa que se desplaza sobre una mesa lisa (i.e., sin roce) y la cual está unida a una pared, por medio de un resorte y un dispositivo amortiguador como se ilustra en la Figura 4.42.

La ecuación del movimiento en el contexto difuso es:

$$\tilde{X}'' + a_1\tilde{X}' + a_2\tilde{X}(t) = \tilde{0} \quad (4.88)$$

con condiciones iniciales los triángulos difusos con soportes $X' = [-0.001, 0.001]$, $\tilde{0} = [-0.0001, 0.0001]$ Entonces, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} (X_L^\alpha)''(t) + a_1(X_L^\alpha)'(t) + a_2X_L(t) = 0_L^\alpha \\ (X_R^\alpha)''(t) + a_1(X_R^\alpha)'(t) + a_2X_R(t) = 0_R^\alpha \end{cases} \quad (4.89)$$

El movimiento se determina por las raíces de la ecuación característica de (4.88) . Si las raíces son reales y distintas, el movimiento está sobreamortiguado, si las raíces son reales e iguales, el movimiento es críticamente amortiguado, finalmente, si las raíces son números complejos conjugados, el movimiento es amortiguado.

Considérese el sistema, masa-resorte-amortiguador, con una masa de peso 32 lb, una constante del resorte $k = 36 \text{ lb}/ft$, y un coeficiente de resistencia de $b = 13$.

La ecuación que describe el sistema con estos valores es:

$$\tilde{X}'' + 13\tilde{X}' + 36\tilde{X}(t) = \tilde{0} \quad (4.90)$$

con condiciones iniciales $X' = [-0.001, 0.001]$, $\tilde{0} = [-0.0001, 0.0001]$ y $X_0 = [1.9, 2.1]$.

Entonces, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} X_L(t) = 3.7802e^{-4t} - 1.6802e^{-9t} \\ X_R(t) = 3.4198e^{-4t} - 1.5198e^{-9t} \end{cases} \quad (4.91)$$

que la respuesta se representa en la Fig. 4.43.

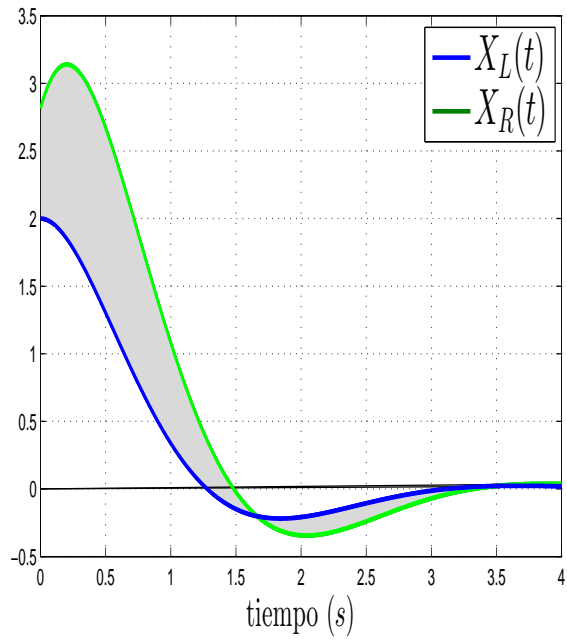


Figura 4.41: Soluciones del sistema 4.86.

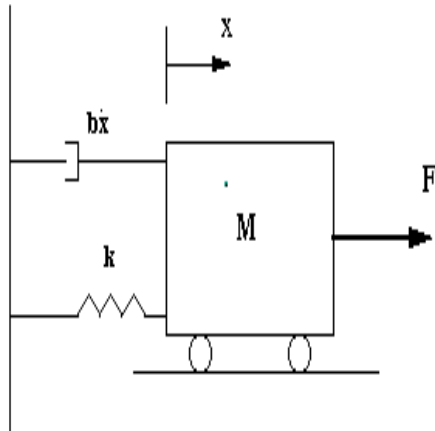


Figura 4.42: Sistema masa-resorte-amortiguador

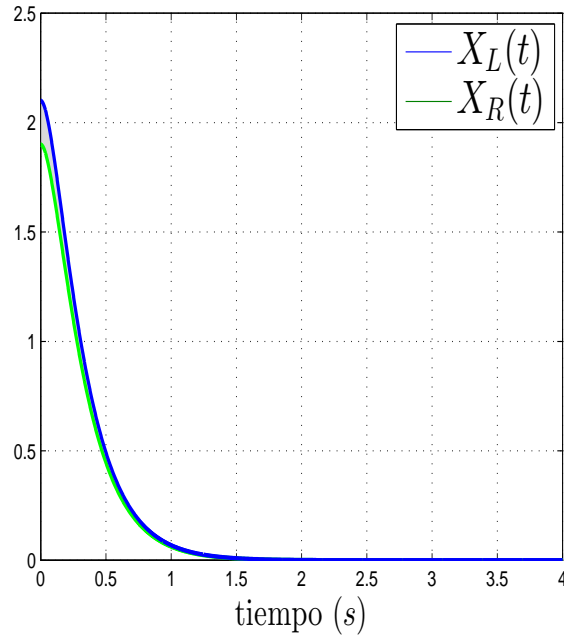


Figura 4.43: Desplazamiento de la masa.

4.4.3. Modelo dinámico de un motor de Corriente Directa (CD)

Un motor de corriente directa (CD) de imán permanente es un componente muy común en muchos sistemas dinámicos. En general, el control de motor de corriente continua se realiza mediante el ajuste de la tensión del terminal aplicado a la armadura, pero otros métodos tales como el ajuste de la resistencia de campo, la inserción de una resistencia en serie con el circuito de inducido están también disponibles en [25].

Un modelo lineal de un motor de CD consiste en dos ecuaciones, una ecuación mecánica y otra ecuación eléctrica. El circuito eléctrico de armadura y el diagrama mecánico rotacional del motor se muestran en la Figura 4.44, donde el par electromagnético T es proporcional a la corriente de la armadura $T = K_e i$, y la tensión inducida e es proporcional a la velocidad mecánica del eje del rotor $e = K_e \dot{q}$

Las ecuaciones que se obtienen de aplicar la segunda ley de Newton y la ley de voltaje de Kirchhoff son:

$$J_m \ddot{q} + b \dot{q} = K_t i, \tag{4.92}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v - K_e \dot{q}, \tag{4.93}$$

donde q es la posición angular del eje del rotor (rad), J_M es el momento de inercia

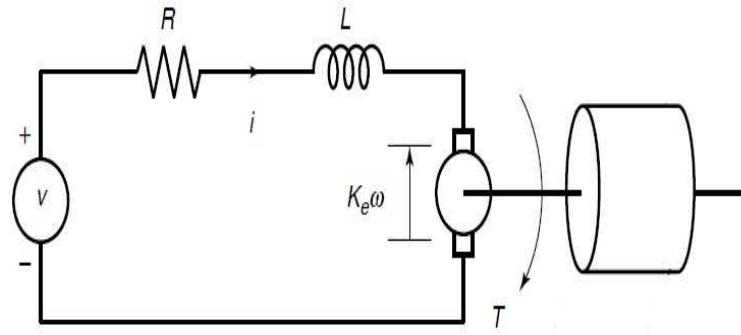


Figura 4.44: Circuito eléctrico de armadura y el diagrama mecánico rotacional del motor

del sistema ($kg.m^2/s^2$), L es la inductancia de la armadura (H), R es la resistencia de armadura (Ω), K_e es la constante de fuerza electromotriz (Nm/Amp), K_t es la constante de par (Nm/Amp), b es coeficiente de roce del motor, \dot{q} es la velocidad angular (rad/s) y v es la fuente de tensión (v).

Las ecuaciones (4.92) y (4.93) son reescritas como:

$$J_m \ddot{q} + \left[b + \frac{K_t K_e}{R} \right] \dot{q} + \frac{L K_t}{R} \frac{di}{dt} = \frac{K_t v}{R}. \quad (4.94)$$

Considerando despreciable el coeficiente de fricción del motor ($b = 0$) y la inductancia de armadura ($L = 0$) en (4.94), el modelo puede ser simplificado a:

$$J_m \ddot{q}(t) + \frac{K_t K_e}{R} \dot{q}(t) = \frac{K_t}{R} v. \quad (4.95)$$

Si $q_d(t)$ indica la señal de referencia del sistema, el error se define como

$$e(t) = q(t) - q_d(t), \quad (4.96)$$

y entonces

$$\dot{e}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t). \quad (4.97)$$

Sea la ecuación diferencial difusa (4.68), con $n = 2$ y $r = 1$ tal que la ecuación diferencial difusa para el modelo en 4.95 es:

$$\ddot{\tilde{q}}(t) + a_1 \dot{\tilde{q}}(t) = \tau(t), \quad (4.98)$$

dado que $r = 1$, se puede observar que la acción de control es un controlador proporcional

Tabla 4.1: Parámetros del motor DC

| Descripción | Notación | Valor | Unidad |
|-----------------------------------|----------|----------------------|----------|
| Momento de Inercia | J_m | 1.8×10^{-6} | $kg.m^2$ |
| Constante de par | K_t | 0.03 | V s/rad |
| Constante de fuerza electromotriz | K_e | 0.03 | Nm/Amp |
| Resistencia | R | 5.7 | Ohm |

derivativo, por lo que (4.77) se escribe como:

$$\tau(t) = -k_{ob}(k_{p_0}e(t) + k_{p_1}\dot{e}(t)). \quad (4.99)$$

Sustituyendo (4.99) en (4.98) y usando (4.96)-(4.97) resulta:

$$\ddot{\tilde{q}} + (a_1 + k_{ob}k_{p_1})\dot{\tilde{q}} + k_{ob}k_{p_0}\tilde{q}(t) = k_{ob}k_{p_0}q_d. \quad (4.100)$$

Usando la Definición 2.10 y el Teorema 3.1, resulta:

$$(\ddot{q}_L^\alpha)(t) + (a_1 + k_{ob}k_{p_1})\dot{q}_L^\alpha(t) + k_{ob}k_{p_0}q_L^\alpha(t) = k_{ob}k_{p_0}q_d, \quad (4.101)$$

$$\ddot{q}_R^\alpha(t) + (a_1 + k_{ob}k_{p_1})\dot{q}_R^\alpha(t) + k_{ob}k_{p_0}q_R^\alpha(t) = k_{ob}k_{p_0}q_d. \quad (4.102)$$

Con el fin de obtener resultados numéricos para el modelo (4.101)-(4.102) obtenido, primero se hace una pequeña simplificación.

Observando el lado izquierdo de (4.95) y (4.100), se determina que: $a_1 = \frac{K_t K_e}{J_m R}$, $k_{ob} = \frac{K_t}{J_m R}$, $k_{p_0} = K_p$, $k_{p_1} = K_d$. Donde K_p es la ganancia proporcional, K_d es la ganancia derivativa del controlador. Los parámetros nominales del modelo dinámico del motor de corriente directa (4.95) se muestran en la Tabla 4.1. Estos parámetros se corresponden con la Quanser de QNET DC Motor Control de Trainer para NI ELVIS [52].

Considerando las ganancias $K_p = 5$, $K_d = 0.1$ y con el objetivo de control de regular la posición deseada del sistema en $q_d = 1$, en las siguientes subsecciones, se presentan los resultados teniendo en cuenta en primer lugar un caso libre de perturbaciones, y posteriormente, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales se ven afectados por una perturbación externa.

4.4.3.1. Caso no perturbado

Considerando los parámetros de la Tabla 4.1 y las ganancias del controlador, la ecuación (4.100) se puede escribir como:

$$\ddot{\tilde{q}} + 433.29\dot{\tilde{q}} + 1.6248 \times 10^4 \tilde{q}(t) = 1.6248 \times 10^4. \quad (4.103)$$

Con condiciones iniciales $q(0) = \tilde{0}$, $\dot{q}(0) = \tilde{0}$, (nótese que $\tilde{0}$ es un número difuso) y con $\tilde{0}^\alpha = [0_L^\alpha, 0_R^\alpha]$, y resolviendo (4.103) con (4.101) - (4.102) resulta, para cada $\alpha \in [0, 1]$:

$$\ddot{q}_L^\alpha(t) + 433.29\dot{q}_L^\alpha(t) + 1.6248 \times 10^4 q_L^\alpha(t) = 1.6248 \times 10^4, \quad (4.104)$$

$$\ddot{q}_R^\alpha(t) + 433.29\dot{q}_R^\alpha(t) + 1.6248 \times 10^4 q_R^\alpha(t) = 1.6248 \times 10^4. \quad (4.105)$$

De la resolución de las ecuaciones diferenciales (4.104)-(4.105), la Figura 4.45 representa la solución de (4.104)-(4.105) para $\alpha \in [0, 1]$. Donde se pueden ver $q_L^\alpha(t)$ y $q_R^\alpha(t)$, los extremos inferior y superior respectivamente de $\dot{\tilde{q}}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

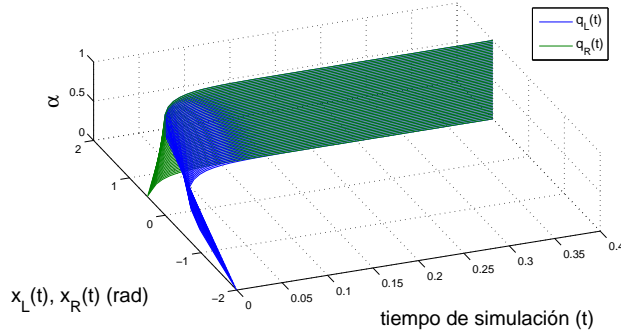


Figura 4.45: Trayectorias para (4.104)-(4.105)

Se puede observar en la Figura 4.46 que el resultado que se obtiene es una banda, y esta banda es precisamente lo que [42] llama *huella de incertidumbre*. Es precisamente en esta huella de incertidumbre en la cual están representadas todas las trayectorias de salida del sistema (4.103)-(4.105). También puede observarse que $q_L^\alpha(t)$, $q_R^\alpha(t)$ y $q(t)$ alcanzan la referencia deseada q_d , esto es, $\lim_{t \rightarrow \infty} (q(t) - q_d) = 0$. Es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, y por lo tanto se resuelve el problema de control de regulación de posición.

4.4.3.2. Caso perturbado

Con el objetivo de comprobar la robustez del sistema de control en lazo cerrado, a la señal de entrada se le añade un ruido blanco de banda limitada, el cual genera una

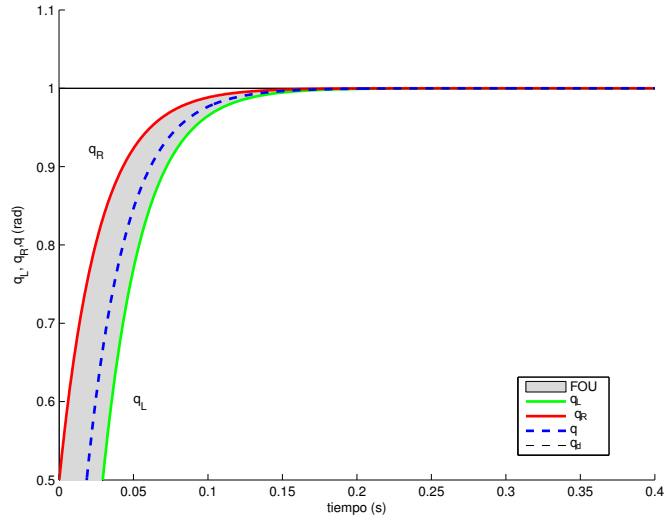


Figura 4.46: Trayectorias para (4.104)-(4.105)

distribución normal de números aleatorios y simula el efecto de la perturbación externa mediante el uso de una secuencia aleatoria.

La ecuación diferencial difusa (4.103) para el caso perturbado, se puede expresar como:

$$\ddot{\tilde{q}} + 433.29\dot{\tilde{q}} + 1.6248 \times 10^4 \tilde{q}(t) = 1.6248 \times 10^4 + \omega(t), \quad (4.106)$$

donde $\omega(t)$ representa el ruido.

Los resultados de simulación con condiciones iniciales $q(0) = \tilde{0}$, $\dot{q}(0) = \tilde{0}$ se representa en la Figura 4.47, donde se puede observar que la dinámica cumple con $\lim_{t \rightarrow \infty} (q(t) - q_d) = 0$ y por lo tanto con $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. Se puede observar que la solución del sistema perturbado para todo $\alpha \in [0, 1]$ permanece acotado dentro de la banda de incertidumbre.

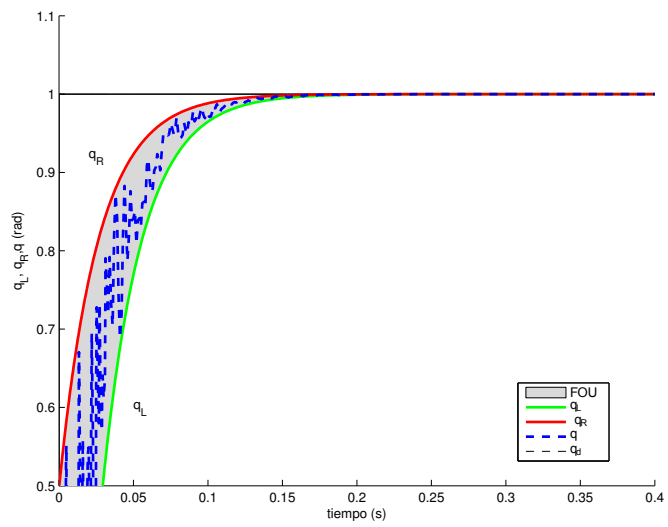


Figura 4.47: Trayectorias para (4.106).

Capítulo 5

Conclusiones

A continuación, se expondrán las principales conclusiones que se desprenden de la investigación presentada en este trabajo.

5.1. Conclusiones

En el desarrollo de este proyecto de tesis se resuelven modelos matemáticos en ecuaciones diferenciales difusas utilizando la definición de derivada difusa y H-diferencia dada en [34], con base en ello se desarrolla la metodología de solución de la EDD trabajando con funciones difusas por intervalos que llevan a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales.

La metodología de solución se aplica para resolver modelos que tienen aplicación en diversos problemas de ingeniería. En este trabajo se analizaron los siguientes casos de estudio:

- Se abordó el problema de Cauchy desde el contexto de ecuaciones diferenciales difusas, se obtuvieron soluciones considerando condiciones inicial y/o constante de proporcionalidad del modelo como un número difuso. Las soluciones considerando un número difuso definido como un triángulo difuso muestra un comportamiento asintótico hacia la solución real $x(t)$, quedando en una banda entre $[u_\alpha(t)$ y $v_\alpha(t)]$.
- Se resuelve un modelo de ecuación diferencial de segundo orden homogéneo de la forma $x'' + a_1x' + a_2x(t) = 0$ expresado en EDD, donde su condición inicial es un número difuso. Se analiza el modelo en el contexto del sistema masa-resorte-amortiguador para obtener las tres clases de soluciones que son característica cuando se resuelven el problema como ecuación diferencial ordinaria. Se pudo observar que el conjunto fundamental de soluciones para este modelo resulta en una banda de

incertidumbre acotada, tanto en el movimiento sobreamortiguado, en el críticamente amortiguado y en el subamortiguado.

- Se estudia el modelo no lineal depredador-presa en ecuaciones diferenciales difusas considerando condición inicial como número difuso.
- Se resuelve un caso particular de la ecuación diferencial $x'' + a_1x' + a_2x(t) = \tau$, Modelo dinámico de un motor de Corriente Directa, donde $x(0), x'(0) \in \mathcal{F}$ y τ es un controlador proporcional difuso.

Los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo permiten como relacionar las soluciones obtenidas a partir del Teorema 3.1 de [32] con el concepto de Huella de Incertidumbre de los sistemas difusos tipo-2 según [42], lo cual da nuevas aristas de investigación a considerar a partir del presente trabajo.

Los resultados obtenidos permiten considerar a las ecuaciones diferenciales difusas como una opción para modelar sistemas dinámicos cuando existe incertidumbre sobre las condiciones iniciales de operación.

Se verifica que como se previó, las ecuaciones diferenciales difusas son una herramienta eficaz para el modelado de sistemas dinámicos, en particular para modelar sistemas de control proporcional derivativo.

Se diseña un controlador donde el análisis del sistema en lazo cerrado se realizó con un modelo basado en EDD. Más aún, se reportan resultados con los cuales se puede verificar que la huella de incertidumbre definida siguiendo el Teorema 3.1 para el sistema de control en lazo cerrado, captura los efectos de las perturbaciones externas inducidas a la dinámica del sistema.

5.2. Trabajo Futuro o Recomendaciones

Los resultados de esta investigación permiten identificar diferentes líneas de investigación. En lo inmediato se puede incursionar en:

- El estudio de las ecuaciones diferenciales difusas de segundo orden.
- Analizar el modelo de depredador-presa considerando los parámetros del modelo como números difusos.
- Resolver ecuaciones diferenciales difusas mediante el uso de Transformación difusa de Laplace.

5.3. Publicaciones

Los resultados del trabajo de investigación fueron presentados en revistas nacionales y en congresos nacionales e internacionales. A continuación se listan cada uno de ellos.

[15] N. Cazarez-Castro, M. Odreman-Vera, S. Cardenas-Maciel, H. Echavarrías-Heras, and C. Leal-Ramirez. **Fuzzy differential equations as a tool for teaching about uncertainty in engineering and science.** *Computación y Sistemas*, 22(2):439 – 449, 2018.

[17] N. R. Cazarez-Castro, L. T. Aguilar, S. L. Cardenas-Maciel, C. A. Goribar-Jimenez, and M. Odreman-Vera. **Diseño de un controlador difuso mediante la síntesis difusa de lyapunov para la estabilización de un péndulo de rueda inercial.** *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 14(2):133 – 140, 2017.

[20] N. R. Cazarez-Castro, S. L. Cardenas-Maciel, M. Odreman-Vera, G. Valencia-Palomo, and C. Leal-Ramirez. **Modeling pd closed-loop control problems with fuzzy differential equations.** *Automatika–Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*, 57(4):960–967, 2016.

[48] M. Odreman Vera and N. Cazarez-Castro. **Modeling control systems with fuzzy differential equation.** *Research in Computing Science*, 59:3–12, 2012.

[9] S. Cardenas-Maciel, N. Cazarez-Castro, M. Odreman-Vera, and S. Contreras-Hernandez. Caminando hacia la frontera: **Cuando las competencias desarrolladas no alcanzan - un enfoque de enseñanza basada en problemas.** *IX Congreso Internacional de Ciencias Económico Administrativas ESCALA 2016*, 3(1):8–21, 2016.

[14] Mauricio Odreman Vera, Nohe R. Cazarez-Castro, **Modelo de Malthus con coeficientes difusos.** *XXV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Universidad de Sonora.* Hermosillo, Sonora, México. Del 02 al 06 de Marzo de 2015.

[16] Mauricio Odreman Vera, Nohe R. Cazarez-Castro, Selene L. Cardenas-Maciel. **Modelo de Malthus en ecuaciones diferenciales difusas .9no Encuentro nacional de Biología Matemática.** Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora. México. Del 11 al 15 Noviembre 2013.

[13] Mauricio Odreman Vera, Nohe R. Cazarez-Castro. **Modeling Control Systems with Fuzzy Differential Equation.** *Encuentro Regional Académico 2012.* Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital (CITEDI). Tijuana, México, Noviembre 14-16 del 2012.

[12] Mauricio Odreman Vera, Nohe R. Cazarez-Castro. **Ecuaciones Diferenciales Difusas para el modelado de Dinámica de Población.** *XLV Congreso Nacional de*

la Sociedad Matemática Mexicana (SMM 2012). Universidad Autónoma de Querétaro.
Querétaro, México. Octubre 28 a Noviembre 2 del 2012

Bibliografía

- [1] M. Z. Ahmad and M. K. Hasan. Modeling of biological populations using fuzzy differential equations. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 09:354–363, 2012.
- [2] M. Z. Ahmad, M. K. Hasan, and B. De Baets. Analytical and numerical solutions of fuzzy differential equations. *Inf. Sci.*, 236:156–167, July 2013.
- [3] L. Barros, R. Bassanezi, and P. Tonelli. Fuzzy modelling in population dynamics. *Ecological modelling*, 128(1):27–33, 2000.
- [4] B. Bede and S. G. Gal. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, 151(3):581–599, May 2005.
- [5] B. Bede, I. J. Rudas, and A. L. Bencsik. First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Inf. Sci.*, 177(7):1648–1662, Apr. 2007.
- [6] B. Bede and L. Stefanini. Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 230:119–141, 2013.
- [7] J. J. Buckley and T. Feuring. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 110(1):43 – 54, 2000.
- [8] W. G. Calderón. Una aproximación a los conjuntos alcanzables de una inclusión diferencial difusa. *Revista integración*, 30(1), 2012.
- [9] S. Cardenas-Maciel, N. Cazarez-Castro, M. Odreman-Vera, and S. Contreras-Hernandez. Caminando hacia la frontera: Cuando las competencias desarrolladas no alcanzan - un enfoque de enseñanza basada en problemas. *IX Congreso Internacional de Ciencias Económico Administrativas ESCALA 2016*, 3(1):8–21, 2016.
- [10] O. Castillo, L. Aguilar, N. Cazarez, and S. Cardenas. Systematic design of a stable type-2 fuzzy logic controller. *Applied Soft Computing*, 8(3):1274 – 1279, 2008.

- [11] N. Cazarez-Castro, L. Aguilar, O. Castillo, and A. Rodriguez. Optimizing type-1 and type-2 fuzzy logic systems with genetic algorithms. *Research in Computing Science*, 39:131–153, October 2008.
- [12] N. Cazarez-Castro and M. Odreman-Vera. Ecuaciones diferenciales difusas para el modelado de dinámica de población. In *XLV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, Querétaro, México, 2012.
- [13] N. Cazarez-Castro and M. Odreman-Vera. Modeling control systems with fuzzy differential equation. In *Encuentro Regional Académico 2012*, Tijuana, México, 2012.
- [14] N. Cazarez-Castro and M. Odreman-Vera. Modelo de malthus con coeficientes difusos. In *XXV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, Hermosillo, Sonora, 2015.
- [15] N. Cazarez-Castro, M. Odreman-Vera, S. Cardenas-Maciel, H. Echavarrías-Heras, and C. Leal-Ramirez. Fuzzy differential equations as a tool for teaching about uncertainty in engineering and science. *Comp. y Sist*, 22(2):439 – 449, 2018.
- [16] N. Cazarez-Castro, M. Odreman-Vera, and S. L. Cardenas-Maciel. Modelo de malthus en ecuaciones diferenciales difusas. In *9no Encuentro nacional de Biología Matemática*, Hermosillo, Sonora, 2013.
- [17] N. R. Cazarez-Castro, L. T. Aguilar, S. L. Cardenas-Maciel, C. A. Goribar-Jimenez, and M. Odreman-Vera. Diseño de un controlador difuso mediante la síntesis difusa de lyapunov para la estabilización de un péndulo de rueda inercial. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 14(2):133 – 140, 2017.
- [18] N. R. Cazarez-Castro, L. T. Aguilar, and O. Castillo. Fuzzy logic control with genetic membership function parameters optimization for the output regulation of a servomechanism with nonlinear backlash. *Expert Systems with Applications*, 37(6):4368 – 4378, 2010.
- [19] N. R. Cazarez-Castro, L. T. Aguilar, and O. Castillo. Designing type-1 and type-2 fuzzy logic controllers via fuzzy lyapunov synthesis for nonsmooth mechanical systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(5):971 – 979, 2012.
- [20] N. R. Cazarez-Castro, S. L. Cardenas-Maciel, M. Odreman-Vera, G. Valencia-Palomo, and C. Leal-Ramirez. Modeling pd closed-loop control problems with fuzzy differential equations. *Automatika—Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*, 57(4):960–967, 2016.

- [21] Y. Chalco-Cano and H. Roman-Flores. On new solutions of fuzzy differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(1):112 – 119, 2008.
- [22] Y. Chalco-Cano and H. Román-Flores. Comparison between some approaches to solve fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, 160(11):1517–1527, June 2009.
- [23] Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores, and M. A. Rojas-Medar. Fuzzy differential equations with generalized derivative. In *Fuzzy Information Processing Society, 2008. NAFIPS 2008. Annual Meeting of the North American*, pages 1–5, 2008.
- [24] S. L. Chang and L. A. Zadeh. On fuzzy mapping and control. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, 2:30–34, 1972.
- [25] S. Chapman. *Electric machinery and power system fundamentals*. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering. McGraw-Hill, 2002.
- [26] C.-S. Chen. Supervisory adaptive tracking control of robot manipulators using interval type-2 tsf fuzzy logic system. *Control Theory Applications, IET*, 5(15):1796 –1807, 13 2011.
- [27] W. Congxin. On the fuzzy differential equations. In *Fuzzy Systems Symposium, 1996. Soft Computing in Intelligent Systems and Information Processing., Proceedings of the 1996 Asian*, pages 563–566, 1996.
- [28] D. Dubois and H. Prade. Fuzzy sets in approximate reasoning, part 1: Inference with possibility distributions. *Fuzzy Sets Syst.*, 100:73–132, 1999.
- [29] G.Chen. *Introduction to fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy control systems*. Addison-Wesley, 1984.
- [30] D. Georgiou and I. Kougias. On cauchy problems for fuzzy differential equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004(15):799–805, 2004.
- [31] O. Kaleva. The completion of fuzzy metric spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 109(1):194–198, 1985.
- [32] O. Kaleva. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):301 – 317, 1987.
- [33] O. Kaleva. The calculus of fuzzy valued functions. *Applied Mathematics Letters*, 3(2):55 – 59, 1990.

- [34] O. Kaleva. A note on fuzzy differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 64(5):895 – 900, 2006.
- [35] A. Kandel and W. J. Byatt. Fuzzy differential equations. In *Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society*, pages 1213 – 1216, Tokyo, Japan, 1978.
- [36] A. Kandel and W. J. Byatt. Fuzzy processes. *Fuzzy sets and systems*, 4(2):117–152, 1980.
- [37] V. Lakshmikantham and A. Tolstonogov. Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 55(3):255–268, 2003.
- [38] J. Li, A. Zhao, and J. Yan. The cauchy problem of fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*, 200:1 – 24, 2012.
- [39] C. Lim and T. Hiyama. Application of fuzzy logic control to a manipulator. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 7(5):688 –691, oct 1991.
- [40] M. Llama, R. Kelly, and V. Santibanez. Stable computed-torque control of robot manipulators via fuzzy self-tuning. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 30(1):143 –150, feb 2000.
- [41] T. Malthus and J. Noguera. *Ensayo sobre el principio de la población*. Sección de obras de economía. L. Gonzalez, 1846.
- [42] J. Mendel. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [43] E. Merchan-Cruz and A. Morris. Fuzzy-ga-based trajectory planner for robot manipulators sharing a common workspace. *Robotics, IEEE Transactions on*, 22(4):613 –624, aug. 2006.
- [44] J. L. Meza, V. Santibanez, R. Soto, and M. A. Llama. Fuzzy self-tuning pid semi-global regulator for robot manipulators. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 59(6):2709 –2717, june 2012.
- [45] C. Negoita and D. Ralescu. *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. Interdisciplinary systems research. Wiley, 1975.

- [46] R. Newton and Y. Xu. Neural network control of a space manipulator. *Control Systems, IEEE*, 13(6):14 –22, dec. 1993.
- [47] J. J. Nieto. The cauchy problem for continuous fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 102(2):259 – 262, 1999.
- [48] M. Odreman Vera and N. Cazarez-Castro. Modeling control systems with fuzzy differential equation. *Research in Computing Science*, 59:3–12, 2012.
- [49] L. Peng and P.-Y. Woo. Neural-fuzzy control system for robotic manipulators. *Control Systems, IEEE*, 22(1):53 –63, feb 2002.
- [50] M. L. Puri and D. A. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91(2):552 – 558, 1983.
- [51] M. L. Puri and D. A. Ralescu. Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114(2):409 – 422, 1986.
- [52] Quanser. *QNET Heating-Ventillation Control Trainer Laboratory Manual*. Quanser Inc., 2011.
- [53] V. Santibanez, R. Kelly, and M. Llama. Global asymptotic stability of a tracking sectorial fuzzy controller for robot manipulators. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 34(1):710 – 718, feb. 2004.
- [54] V. Santibanez, R. Kelly, and M. Llama. A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 13(3):362 – 372, june 2005.
- [55] S. Seikkala. On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):319 – 330, 1987.
- [56] Y. L. Sun and M. J. Er. Hybrid fuzzy control of robotics systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 12(6):755 – 765, dec. 2004.
- [57] C.-H. Tsai, C.-H. Wang, and W.-S. Lin. Robust fuzzy model-following control of robot manipulators. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(4):462 –469, aug 2000.
- [58] J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Studia Filozoficzne*, 270(5), 1988.
- [59] L. X. Wang. *A course in fuzzy systems and control*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1997.

-
- [60] B. K. Yoo and W. C. Ham. Adaptive control of robot manipulator using fuzzy compensator. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(2):186–199, apr 2000.
- [61] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [62] J. S. M. Zeynalov E. R., Jafarov P. S. Synthesis of fuzzy controllers for astatic objects, described by differential equations with fuzzy coefficients. pages 290 – 295, Antalya, Turkey, 2007.
- [63] H. Zhang and D. Liu. *Fuzzy modeling and fuzzy control*. Springer Science & Business Media, 2006.