

SEP

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TIJUANA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



INTELIGENCIA COMPUTACIONAL PARA GENERACIÓN
DE ÓRBITAS PERIÓDICAS EN SISTEMAS DINÁMICOS

TRABAJO DE TESIS PRESENTADO POR
M.C. LISDAN HERRERA GARCÍA

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

BAJO LA DIRECCIÓN DE
DR. NOHÉ RAMÓN CÁZAREZ CASTRO
DR. SELENE LILETTE CÁRDENAS MACIEL
DR. LUIS TUPAK AGUILAR BUSTOS

2021

TIJUANA, B.C., MÉXICO



Tijuana, B.C., 30/Septiembre/2021

Asunto: Autorización de impresión de trabajo de tesis

DR. GUADALUPE HERNÁNDEZ ESCOBEDO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
PRESENTE

En lo referente al trabajo de tesis, "Inteligencia Computacional para la Generación de Órbitas Periódicas en Sistemas Dinámicos", presentado por el M.C. Lisdan Herrera García, alumno del programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, con número de control D17211344; informamos a usted que después de una minuciosa revisión e intercambio de opiniones, los miembros del comité manifiestan **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias, por lo que se autoriza al interesado para que proceda de inmediato a la impresión del mismo.

ATENTAMENTE

Excelencia en Educación Tecnológica-
Por una juventud integrada al desarrollo de México-

DR. NOHÉ RAMÓN CÁZAREZ CASTRO
PRESIDENTE

DR. SELENE LILETTE CÁRDENAS MACIEL
SECRETARIO

DR. LUIS TUPAK AGUILAR BUSTOS
VOCAL

DR. JORGE ANTONIO LOPEZ RENTERIA
VOCAL

DR. LUIS NÉSTOR CORIA DE LOS RÍOS
VOCAL

DR. GUILLERMO VALENCIA PALOMO
SUPLENTE

c.c.p. Dr. José Ricardo Cárdenas Valdez. Coordinador Académico del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería.





Instituto Tecnológico de Tijuana

Tijuana, Baja California,
13/octubre/2021

OFICIO No. 100/DEPI/2021

Asunto: **Autorización de Impresión de Tesis**

MARIBEL GUERRERO LUIS
JEFA DEL DEPARTAMENTO DE SERVICIOS ESCOLARES
PRESENTE

En lo referente al trabajo de tesis, "Inteligencia Computacional para la Generación de Órbitas Periódicas en Sistemas Dinámicos". Presentado por C. **Lisdan Herrera García**, alumno del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería con número de control **D17211344**; informo a usted que a solicitud del comité de tutorial, tengo a bien **Autorizar la impresión de Tesis**, atendiendo las disposiciones de los Lineamientos para la Operación de Estudios de Posgrado del Tecnológico Nacional de México.

Sin más por el momento le envío un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

Excelencia en Educación Tecnológica
Por una juventud integrada al desarrollo de México

GUADALUPE HERNANDEZ ESCOBEDO
JEFE DE DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
E INVESTIGACIÓN**

ccp. Archivo
GHE/lap





CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de Tijuana, Baja California, el día **04** del mes de **Octubre** del año **2021**, el que suscribe **M.C. Lisdan Herrera García**, con número de control **D17211344**, alumno de **Doctorado** del programa de Posgrado en Ciencias de la Ingeniería, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Nohé Ramón Cázarez Castro**, la **Dr. Selene Lilette Cárdenas Maciel** y el **Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos**, cede los derechos para su difusión, en su totalidad o en partes, con fines académicos o de investigación del documento de tesis titulado “**Inteligencia Computacional para la Generación de Órbitas Periódicas en Sistemas Dinámicos**” al Tecnológico Nacional de México.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas, código, fórmulas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor o directores del trabajo. Este debe ser obtenido escribiendo a cualquiera de las siguientes direcciones de correo electrónico lisdan.herrera17@tectijuana.edu.mx, nohe@tectijuana.edu.mx, laguilar@citedi.mx y selene@tectijuana.edu.mx o bien, dirigirse a las instalaciones del Instituto Tecnológico de Tijuana en Calzada del Tecnológico S/N Esq. Av. Castillo de Chapultepec y calle Cuauhtemotzin, Fracc. Tomás Aquino C.P. 22414, Tijuana, Baja California, conmutador 664-6078400.

Si se otorga el permiso, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo como lo indique el autor intelectual o el director del trabajo de Tesis.

ATENTAMENTE
LISDAN HERRERA GARCIA

ALUMNO DEL POSGRADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA



Inteligencia computacional para la generación de órbitas periódicas en sistemas dinámicos.

Resumen

Este trabajo de tesis aborda el problema de la generación de órbitas periódicas orbitalmente estables con amplitud y frecuencia deseadas en sistemas mecánicos. Es utilizada la técnica de inteligencia computacional *lógica difusa*. Se opta por el uso de sistemas difusos con el objetivo de obtener un movimiento periódico estable. Este trabajo describe aspectos básicos del control difuso. Además, son presentados dos enfoques para la generación de órbitas periódicas utilizando un esquema con dos (2) sistemas de inferencia difusa (*Fuzzy Inference System*). Primeramente se expone el diseño de los sistemas difusos, a través del método en el dominio de la frecuencia, función descriptiva (FD). Este método permite el ajuste de las funciones de pertenencia de los sistemas difusos considerando parámetros de amplitud y frecuencia deseadas. La existencia del ciclo límite se garantiza mediante el análisis de la FD, mientras que la estabilidad se define a través del criterio de Loeb. Por otra parte, se utiliza el método que aborda el teorema Poincaré–Bendixson (P-B) para garantizar la existencia de un ciclo límite estable, en el sistema bajo estudio. Simulaciones y experimentos son realizados en varios sistemas dinámicos, los cuales verifican la eficacia de las propuestas en los enfoques descritos.

Palabras clave: sistema difuso, órbitas periódicas, función descriptiva, ciclos límites.

Computational intelligence for periodic orbits generation in dynamic systems.

Abstract

This thesis addresses the problem of generating orbitally stable auto-oscillations with desired amplitude and frequency in dynamical systems. The *fuzzy logic* computational intelligence technique is used. The use of fuzzy systems is considered in order to obtain a stable periodic motion. This work describes basic aspects of fuzzy control. Likewise, two approaches for the generation of auto-oscillations are presented using a scheme with two (2) fuzzy inference systems. Firstly, the design of the fuzzy systems is exposed, through the method in the frequency domain, descriptive function (FD). This method allows the adjustment of the membership functions of the fuzzy systems considering parameters of desired amplitude and frequency. The existence of the limit cycle is guaranteed by the analysis of the FD, while the stability is defined through the Loeb criterion. In other hand, the method based on the Poincaré - Bendixson (P-B) theorem is used to guarantee the existence of a stable limit cycle in the system under study. Simulations and experiments were carried out in several dynamic systems, which verify the effectiveness of the proposals in the described approaches.

Keywords: fuzzy system, self-oscillations, describing function, limit cycles.

Contenido

Abstract	D
Lista de símbolos	v
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Objetivos y resultados	4
1.3. Contribuciones	5
1.4. Estructura de la tesis	5
2. Preliminares matemáticos	7
2.1. Definiciones	7
2.2. Lógica difusa	9
2.2.1. Tipos de funciones de pertenencia.	10
2.2.2. Control difuso	14
2.3. Función descriptiva	17
2.4. Criterios de estabilidad orbital	21
2.4.1. Teorema Poincaré - Bendixson	22
2.4.2. Criterio de Loeb	23
2.4.3. Aplicación del criterio de Loeb	25
2.5. Consideraciones finales del capítulo	26
3. Esquema a 2-FIS para la generación de órbitas periódicas	27
3.1. Planteamiento del problema	27
3.2. Propuesta de doble sistema de inferencia difusa (2-FIS)	29
3.3. Enfoque vía función descriptiva	32
3.3.1. Estabilidad del ciclo límite	35
3.4. Enfoque vía Poincaré - Bendixson	36
3.4.1. Objetivo de control	37

3.4.2. Regiones de acción	38
3.4.3. Condiciones iniciales dentro del ciclo límite	40
3.4.4. Condiciones iniciales fuera del ciclo límite	40
3.5. Consideraciones del capítulo	46
4. Casos de estudio: sistemas pendulares	49
4.1. Representación matemática de los sistemas pendulares	49
4.2. Sistema pendular simple	51
4.2.1. Objetivo de control	53
4.3. Péndulo rotatorio invertido (péndulo de Furuta)	54
4.3.1. Objetivo de control	55
4.4. Sistema carro-péndulo	56
4.4.1. Modelo matemático del mecanismo	58
4.4.2. Objetivo de control	63
4.4.3. Análisis del sistema carro – péndulo con dinámica añadida de los actuadores	63
4.5. Consideraciones finales	66
5. Resultados en simulación y experimentales	67
5.1. Sistema pendular simple	67
5.1.1. Enfoque vía función descriptiva	67
5.1.2. Estabilidad orbital péndulo simple enfoque FD	73
5.1.3. Enfoque vía Poincaré-Bendixson	73
5.2. Sistema péndulo Furuta	78
5.2.1. Enfoque función descriptiva	78
5.2.2. Estabilidad orbital sistema péndulo Furuta	84
5.3. Sistema carro-péndulo	84
5.3.1. Enfoque función descriptiva	84
5.3.2. Resultados con adición de dinámica de actuadores	90
5.4. Consideraciones finales	94
6. Conclusiones y Recomendaciones	95
Conclusiones	95
6.1. Recomendaciones	96
Recomendaciones	96
6.2. Divulgación de resultados	97

Lista de símbolos

$\text{Re}\{\cdot\}$	Parte real de una expresión compleja
$\text{Im}\{\cdot\}$	Parte imaginaria de una expresión compleja
\forall	Para todo
\in	Pertenece a
\rightarrow	Tiende a
\Leftrightarrow	Equivalencia o doble implicación
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
s	Variable en el dominio de Laplace
∞	Valor infinito
$>$	Mayor que
$<$	Menor que
\leq	Menor o igual
\geq	Mayor o igual
$\mu(\cdot)$	Grado de pertenencia
Δ	Variación de una función
n	Orden del sistema dinámico
t	Tiempo
X	Vector de estado
u	Entrada de control
λ	raíz del polinomio característico
$f(X)$	Función dependiente de la variables de estado
\sin	Función seno del ángulo
\cos	Función coseno del ángulo
$x(t)$	Variable de entrada asociado a un sistema dinámico
$y(t)$	Variable de salida de un sistema dinámico
$w(t)$	Función descriptiva en Serie de Fourier
A	Matriz del estado

B	Vector de entrada
C	Vector de salida
D	Matriz de transmisión directa
$G(s)$	Función de transferencia de la planta
A_0	Amplitud del ciclo límite
U_i^l	Centro de función de pertenencia de la variable ϵ
Φ_i^l	Centro de función de pertenencia de la variable de estado
δ	Ángulo de fase
$N(A, \omega)$	Función descriptiva
T	Período de una función periódica
x_0	Condición inicial de un sistema dinámico
Ω	Trayectoria de un sistema dinámico
f_v	Fricción viscosa
ω_0	Frecuencia angular del ciclo límite
$\int \{\cdot\}$	Integral de una función
(a_0, a_n, b_n)	Parámetros de cálculo de la función descriptiva.
$\frac{d\omega}{dt}$	Derivada de ω respecto al tiempo.
H	Magnitud de la función descriptiva
$w_1(t)$	Primer armónico en series de Fourier
\subset	Contenida en
\mathcal{R}	Región en el plano de fase
Γ	Curva cerrada en el plano de fase
Υ	Curva cerrada en el plano
$U(A_0, \omega_0)$	Componente real de la ecuación de balance armónico.
$V(A_0, \omega_0)$	Componente imaginaria de la ecuación de balance armónico.
ΔA_0	Perturbación cuasi-estática en amplitud.
$\Delta \omega_0$	Perturbación cuasi-estática en frecuencia
$\Delta \nu$	Velocidad de cambio en amplitud
$\frac{\partial \{\cdot\}}{\partial \{\cdot\}}$	Derivada parcial de una función de diversas variables
M_i^l	Función de pertenencia i (o r) de la variable l de un sistema difuso.
$\sum \{\cdot\}$	Sumatoria (representa suma de varios sumandos)
Ψ_i^l	Representa la expresión analítica del sistema difuso
$R_{\{\cdot\}}$	Reglas del sistema difuso, el mecanismo de inferencia son los operadores y secuencia de operaciones
$\pi \approx 3.1416$	Relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro
$k_{\{\cdot\}}$	Ganancia de ajuste del sistema difuso
(ϕ, γ)	Constantes positivas de un sistema dinámico

$(\theta, \dot{\theta})$	Posición angular y velocidad angular
$[\cdot]^T$	Operación matricial transposición de un vector o matriz
$I_{\{\cdot\}}^{\{\cdot\}}$	Intervalos definidos en el plano fase
$R_{(m,n)}$	Regiones en el plano fase
$\sqrt{\{\cdot\}}$	Raíz cuadrada de un número
$ \{\cdot\} $	Valor absoluto o módulo de un número
$\text{máx} \{\cdot\}$	Elemento máximo de un conjunto numérico
$\text{dim} [A(\cdot)]$	Dimensiones de un vector
Θ	Conjunto invariante
$\det(\cdot)$	Determinante de una matriz cuadrada
$\text{Traza}(\cdot)$	Traza de una matriz
K	Vector de ganancias de un controlador por retroalimentación de estados
u_e	Control de estabilización
Q, N	Conjuntos difusos

Lista de abreviaturas

HZD	Dinámica Cero Híbrida
VC	Restricciones Virtuales
FIS	Sistema de inferencia difusa
P-B	Poincaré - Bendixson
FD	Función descriptiva
CMD	Control por modos deslizantes
T-S	Takagi-Sugeno
COG	Centro de gravedad
CA	Promedio centro
MISO	Múltiples entradas, una (1) salida
SISO	Una (1) entrada, una (1) salida
DAQ	Adquisición de datos
USB	Bus serie universal
LQR	Regulador cuadrático lineal
PWM	Modulación por ancho de pulsos
DC	Corriente directa
FPGA	Matriz de puertas lógicas programables en campo

Capítulo 1

Introducción

Motivado por aplicaciones donde su modo natural de operación es periódico, la generación de órbitas periódicas en sistemas mecánicos ha recibido una significativa atención en los últimos años. Para estos sistemas el paradigma de la estabilización orbital, referido al balanceo periódico difiere de las formulaciones típicas del seguimiento de trayectoria, donde la trayectoria de referencia a seguir es conocida a priori. Por ello, es relevante el estudio de nuevas técnicas de control que fueren la dinámica de estos sistemas a exhibir un ciclo límite estable (órbitas periódicas estable). Según [22, 47] un sistema auto - excitado exhibe la propiedad de generar oscilaciones en estado estable sin una señal de referencia externa.

Existen dos vertientes principales relacionadas con la generación de movimientos periódicos y su estabilidad orbital, se tiene la formulación típica del seguimiento de trayectorias, donde la trayectoria de referencia es conocida a priori [28, 42, 83]; la segunda vertiente es la generación de oscilaciones sin necesidad de una señal de referencia externa; tal como los clásicos ejemplos que incluyen el oscilador de Van der Pol [49] y el modelo de depredador - presa presentado en [43]. Otros trabajos analizan la generación de soluciones periódicas dentro de la dinámica del sistema generadas por variación paramétrica como en [16], o utilizando sistemas dinámicos de referencia; los cuales de manera intrínseca exhiben este comportamiento como se presenta en [39].

Relacionado con la segunda vertiente es posible hallar varios métodos que han sido utilizados para inducir órbitas periódicas en sistemas mecánicos, mediante la retroalimentación de estados en sistemas no lineales y en específico en sistemas mecánicos completamente actuados. Esto establece un área de investigación con varios años en desarrollo, donde algunos trabajos relacionados con ello son [9–11, 17]. Otros ejemplos de investigaciones en aplicaciones a sistemas sub-actuados representan un campo de investigación mucho mas joven, donde existen trabajos en diferentes sistemas y aplicaciones

tales como: péndulos invertidos [38, 53, 69, 96], mecanismos en marcha [24, 85], sistemas giroscópicos [47], máquinas rotatorias [85], servo-mecanismos [15, 81], convertidores eléctricos [8, 73, 74], entre otros.

Dentro de los trabajos más representativos se tiene por ejemplo que, en [40] es desarrollado un marco de análisis para el cálculo de una función de Lyapunov, permitiendo determinar si el ciclo límite presente es exponencialmente estable. Este enfoque es aplicado al sistema de carro-péndulo, sin embargo, no presentan procedimiento alguno que asegure la existencia del ciclo límite. En [12], los autores investigan oscilaciones inducidas mediante la formalización de un sistema Hamiltoniano generalizado para la obtención ciclos límites en un péndulo de Furuta y en un carro - péndulo. Aunque el método garantiza la existencia de una órbita en un subconjunto de las variables de estado, no evalúa la estabilidad de las otras variables de estado. En [97] son calculados controladores H_∞ sub-óptimos para resolver el problema de la estabilización orbital con base en una órbita predefinida. De similar forma en [18] se propone un método sistemático de determinación de múltiples ciclos límite, así como el análisis de estabilidad de cada uno de los ciclos mediante el método en el dominio de la frecuencia función descriptiva. Asimismo, en [41] es propuesto el desarrollo de un controlador por rediseño de Lyapunov para generar movimiento periódico en un robot móvil con ruedas tipo unicycle.

Relacionado con el control del balanceo periódico, por ejemplo, el caminar de un robot bípedo tipo RABBIT, en [24] los autores diseñan un sistema de lazo cerrado que genera su propia órbita periódica similar a la producida por un oscilador no lineal. Dos de los mayores logros de este trabajo de investigación son: la obtención de los conceptos de la dinámica cero híbrida (HZD, *Hybrid Zero Dynamics*, por sus siglas en inglés) y el de restricciones virtuales (VC, *Virtual Constraints*, por sus siglas en inglés). Estos conceptos conforman una poderosa base analítica para el diseño de movimientos de marcha periódica. Donde el resultado principal es que la estabilidad del sistema de lazo cerrado de orden completo puede ser estudiado con base de la no linealidad.

En [88] son definidos y discutidos problemas de planeación de movimiento y planeación de órbita, de igual manera se analizan métodos tales como el clásico mapa de Poincaré [77] y la dinámica transversal [59, 67]. Así como, los diseños de control de estabilización orbital exponencial [14]. En el mismo trabajan con una familia de sistemas no lineales generales y luego se enfocan en los sistemas mecánicos sub-actuados.

Otro enfoque reportado en la literatura es el presentado en [20, 85], los cuales desarrollan una herramienta constructiva para la generación de movimientos periódicos en sistemas no lineales sub-actuados garantizando su estabilidad orbital a través de un enfoque con restricciones virtuales holonómicas. El método presentado puede ser aplicado

a cualquier sistema mecánico con un número de actuadores independientes menor que la cantidad de grados de libertad. La ley de control por retroalimentación obtenida es no lineal y dependiente del tiempo. El mismo representa un acercamiento a través de restricciones virtuales. Esta técnica es implementada en sistemas sub-actuados tales como péndulo Furuta [57, 86, 87], pendubot [31, 33, 37], péndulo de rueda inercial [32, 57], carro-péndulo [85], robots bípedos [57, 88].

Similarmente, en [6] se presenta un nuevo método para generar movimientos periódicos en sistemas mecánicos sub-actuados a través de controladores de estructura variable sin necesidad de una trayectoria de referencia. Con la finalidad de obtener órbitas periódicas estables en sistemas mecánicos sub-actuados y garantizar su estabilidad orbital, son utilizadas las propiedades de los controladores de estructura variable como excitadores de la salida para generar movimientos periódicos con amplitud y frecuencias deseadas en lugar de ser usados como estabilizadores. Al proponer una nueva metodología utilizando una configuración a doble controlador tipo relé diseñados con base en el método en el dominio de la frecuencia: función descriptiva. La metodología es implementada en el péndulo de rueda inercial [4, 26, 63], péndulo de Furuta [2, 3, 6], carro-péndulo [2], robot sub-actuado de tres grados de libertad [5].

En la tesis presentada por [94] se aborda el problema de la estabilización orbital de una clase de sistemas electromecánicos sub-actuados. El método logra la estabilización orbital de un robot planar con rotación pasiva. Donde la totalidad del sistema electromecánico es controlado con un reducido número de entradas. Asimismo, se presenta una técnica para escoger las salidas paramétricas del modelo dinámico del robot para obtener un balanceo estable en el movimiento, lo más natural posible. Además, es presentado un método general para el control de balance de la dinámica bípeda. Otro trabajo presentado por [21] utiliza la técnica de algoritmos genéticos para la generación de movimientos periódicos de marcha en un robot bípedo. El objetivo principal en [76] es el análisis del ciclo límite de un sistema de control difuso con parámetros ajustables, el mismo se realiza utilizando la ecuación de estabilidad, la función descriptiva y los métodos de parámetros en el plano.

1.1. Planteamiento del problema

Ante la necesidad de desarrollar técnicas de control aplicadas a los sistemas mecánicos y en especial a los de naturaleza oscilatoria o periódica (i. e. péndulo de Furuta, carro - péndulo, entre otros) dado su amplio espectro de aplicaciones y áreas de utilización, se busca desarrollar nuevas técnicas o métodos de control que cumplan este objetivo. Aún cuando se han presentado investigaciones y estudios con resultados concretos a través de

diferentes estrategias de control, la implementación práctica de estos se hace compleja, asimismo sus soluciones se basan en su mayoría en métodos gráficos y/o experimentales los cuales pueden arrojar resultados inexactos o aproximados. Por ello se hace imperativo desarrollar nuevas investigaciones utilizando técnicas de control clásico (dinámica añadida) o de inteligencia computacional tal como los sistemas de inferencia difusa basados en *Lógica Difusa*, debido a las características de tolerancia al ruido, robustez ante perturbaciones y efectos no lineales, además de no necesitar de un modelo matemático para su diseño e implementación, en adición simplifican la adquisición, permiten la representación del conocimiento y cuentan con una alta velocidad de respuesta.

El **problema científico** de la presente tesis se enfoca en la necesidad de ampliar y desarrollar algoritmos de control y/o métodos que permitan la generación movimientos periódicos en sistemas mecánicos sin la necesidad de una señal de referencia, definiendo amplitud y frecuencia, a través de expresiones analíticas que permitan obtener el comportamiento deseado.

Para solucionar el problema científico planteado anteriormente, se considera como **hipótesis** que la implementación de un doble sistema difuso en un lazo de control sin señal de referencia externa permitirá exhibir auto - oscilaciones con una amplitud y frecuencia deseadas.

1.2. Objetivos y resultados

Motivado por tareas donde es necesario garantizar la estabilidad en movimientos periódicos de sistemas mecánicos subactuados, se expone el objetivo general del presente proyecto de tesis.

El objetivo general de este trabajo es **diseñar un sistema basado en lógica difusa con el propósito de inducir un comportamiento dinámico oscilatorio en sistemas mecánicos garantizando su estabilidad orbital.**

Objetivos específicos:

- Evaluar las técnicas de control difuso y las diferentes variantes de solución de la problemática reportada en la literatura especializada.
- Establecer el diseño de un método utilizando lógica difusa para inducir ciclos límites estables en sistemas dinámicos.
- Garantizar la estabilidad orbital de las órbitas periódicas estables (ciclos límites estables) inducidas en sistemas dinámicos.

- Demostrar que el sistema difuso propuesto es capaz de generar órbitas periódicas estables en un sistema dinámico con una amplitud y frecuencia deseada sin necesidad de una señal de referencia.
- Validar mediante simulación y experimentos el desempeño de las técnicas propuestas.

1.3. Contribuciones

Las contribuciones principales se enumeran a continuación:

- Proposición de una técnica basado en lógica difusa tipo Mamdani que sea capaz de generar órbitas periódicas estables en un sistema mecánico, con amplitud y frecuencias deseadas, sin necesidad de una señal de referencia externa garantizando la estabilidad del ciclo límite.
- Establecer formalismo matemático de la metodología propuesta para generar ciclos límites estables mediante el método de la función descriptiva y el teorema Poincaré-Bendixson.
- Validación numérica y experimental de la metodologías propuestas.

1.4. Estructura de la tesis

La tesis consta de cinco capítulos incluyendo introducción, conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexos. A continuación se resumen los aspectos tratados en los cinco capítulos de contenido:

Capítulo 2: Se presentan los fundamentos teóricos de los sistemas difusos. Asimismo, se describen las bases del método en el dominio de la frecuencia función descriptiva. Además, se exponen los criterios de estabilidad orbital utilizados para garantizar la existencia de ciclos límites estables tal como: teorema Poincaré-Bendixson y el criterio de Loeb.

Capítulo 3 Se describe la propuesta utilizando sistemas difusos en una configuración a doble sistema de inferencia difusa (2-FIS) capaz de generar movimientos periódicos con una amplitud y frecuencia deseadas sin necesidad de una señal de referencia externa. La propuesta a 2-FIS contempla los enfoques función descriptiva y Poincaré-Bendixson.

Capítulo 4 Se exponen los modelos matemáticos los sistemas mecánicos utilizados en el proyecto de investigación para validar el desempeño del 2-FIS, tales como: péndulo simple, péndulo de Furuta, carro - péndulo.

Capítulo 5 Este apartado refiere a los resultados numéricos y experimentales obtenidos mediante de la aplicación del 2-FIS en los sistemas dinámicos, donde se analizan los resultados y es verificado el desempeño de la propuesta para cada enfoque.

Capítulo 6 Este capítulo establece las conclusiones del proyecto de tesis, las recomendaciones sugeridas, además de presentar las pautas para trabajo futuro.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

Este capítulo describe aspectos relacionados con el soporte teórico del proyecto de tesis. Se describen los conceptos fundamentales de la lógica difusa y los sistemas difusos como técnica de inteligencia computacional. Asimismo, se aborda el método de la función descriptiva como herramienta para la detección de ciclos límites. De similar forma, son descritas las metodologías de criterio de Loeb y el teorema de Poincaré - Bendixson relacionadas con la estabilidad orbital.

2.1. Definiciones

A continuación son presentadas algunas definiciones relacionadas con el presente trabajo, necesarias para comprender los términos citados en el documento. Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

donde $f \in C^1(E)$ y E es un subconjunto abierto en R^n .

Definición 2.1. Puntos ω -límite y α -límite. El punto $p \in E$ es un punto ω -límite de la trayectoria $\phi(\cdot, x)$ del sistema (2.1) si existe una secuencia $t_n \rightarrow \infty$ tal que [75]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p. \tag{2.2}$$

Similarmente, si existe una secuencia $t_n \rightarrow -\infty$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi(t_n, x) = p \tag{2.3}$$

y el punto $q \in E$, entonces el punto q es llamado punto ω -límite de la trayectoria $\phi(\cdot, x)$ de (2.1) [75].

Definición 2.2. Conjuntos ω -límite y α -límite. El conjunto de todos los puntos ω -límite de una trayectoria Γ es llamado el conjunto ω -límite de Γ y se denota por $\omega(\Gamma)$. El conjunto de todos los puntos α -límites de una trayectoria Γ es llamado conjunto α -límite de Γ y se denota por $\alpha(\Gamma)$ [75].

Definición 2.3. Ciclo límite. Un **ciclo límite** γ de un sistema dinámico en el plano es una órbita periódica que es el conjunto límite α u ω de una trayectoria α' distinta de γ . Si un ciclo límite γ es el conjunto ω -límite de cualquier otra trayectoria en una vecindad de γ , se dice que γ es un **ciclo ω -límite** o un **ciclo límite estable**. Asimismo, si γ es el conjunto α -límite de trayectorias vecinas, se dice que γ es un ciclo α -límite o un **ciclo límite inestable** [75].

Definición 2.4. Oscilación La oscilación es uno de los fenómenos más importantes que ocurren en los sistemas dinámicos. Un sistema oscila cuando tiene una **solución periódica no trivial** $y(t+T) = y(t) \forall t$ donde $T > 0$ es el periodo de oscilación. Una solución periódica en el retrato de fase es una trayectoria cerrada, que generalmente se llama órbita periódica u órbita cerrada [49].

Definición 2.5. Auto-oscilación Considerando que un ciclo límite es independiente de las condiciones iniciales, se establecen oscilaciones no amortiguadas, las cuales son estables. La amplitud de estas oscilaciones está determinada por las propiedades del sistema y no por las condiciones iniciales. Tales oscilaciones se llamarán auto-oscilaciones y los sistemas en los cuales las auto-oscilaciones se denominan sistemas auto-oscilantes [9].

Definición 2.6. Estabilidad orbital. Un ciclo límite se denomina orbitalmente estable si existe una región η en el plano de fase que contiene al ciclo límite, de manera que todas las trayectorias de fase que comienzan en la vecindad (η) se aproximen asintóticamente al ciclo límite según $t \rightarrow +\infty$. De forma inversa, si existe al menos una trayectoria de fase en η que no se aproxime al ciclo límite para $t \rightarrow +\infty$ entonces el ciclo límite es orbitalmente inestable [9].

Definición 2.7. Matriz de Hurwitz. Una matriz cuadrada A se llama matriz de Hurwitz si todos los valores propios de A tienen parte real estrictamente negativa, $Re[\lambda_i] < 0$; A también se denomina matriz de estabilidad, porque el sistema de retroalimentado $\dot{x} = Ax$ es estable.

Si $G(s)$ es una función de transferencia, entonces G se llama Hurwitz si los polos de G tienen una parte real negativa. Considere que no es necesario que $G(s)$, para un argumento específico s , sea una matriz de Hurwitz; ni siquiera es necesario que sea cuadrada. La

conexión es que si A es una matriz de Hurwitz, entonces el sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}$$

tiene una función de transferencia Hurwitz [44, 50].

Definición 2.8. Grado relativo. El grado relativo r de un sistema dinámico de una entrada y una salida se define como el número de veces que la salida $y(t)$ debe derivarse con respecto al tiempo para obtener la entrada $u(t)$ explícitamente [25].

2.2. Lógica difusa

El concepto de lógica difusa fue concebido a mediados de los años sesenta por Lofti A. Zadeh, ingeniero eléctrico iraní y profesor de la Universidad de California, en Berkeley, quien en 1965 publica el primer artículo de lógica difusa llamado “Fuzzy Sets” [100], donde da a conocer por primera vez los conceptos de esta técnica.

La lógica difusa es una técnica de inteligencia computacional que permite trabajar con información de alto grado de imprecisión, en esto se diferencia de la lógica convencional que trabaja con información bien definida y precisa. Se considera una metodología que imita como una persona toma decisiones basada en información de entrada vaga, ambigua, imprecisa, con ruido e incompleta. Es una lógica multivaluada que permite categorizaciones intermedias para poder definir evaluaciones entre si/no, verdadero/falso, negro/blanco, caliente/frío, etc.

La teoría de los conjuntos difusos se puede enfocar en tratar fenómenos complejos que no pueden ser analizados mediante métodos clásicos basados en la lógica bivalente o la teoría de probabilidades. En la teoría clásica de los conjuntos, un elemento del universo puede pertenecer o no a determinado conjunto. En el caso de conjuntos difusos, ese elemento del universo puede pertenecer a uno o más conjuntos con distintos grados de pertenencia.

Los elementos de la teoría de los conjuntos difusos se utilizan para describir y resolver problemas de gestión, economía, medicina, biología, ciencias políticas y lingüísticas, donde el razonamiento difuso es la base de la teoría de conjuntos difusos. Por ello el concepto clave para entender como trabaja la lógica difusa es el del conjunto difuso. A continuación se exponen definiciones importantes de la lógica difusa que son de utilidad a lo largo de la presente investigación.

Definición 2.9 (Conjunto difuso [98, 100]). El conjunto difuso A definido en el conjunto

N se caracteriza por la función de pertenencia (función característica) $\mu_{(A)}$ que atribuye un número real en el intervalo $[0, 1]$ a cada elemento p del conjunto N , donde $\mu_{(A)}$ representa el grado de pertenencia del elemento p al conjunto A .

Definición 2.10 (Función de pertenencia [61, 101]). Una función de pertenencia de un conjunto difuso A sobre un universo de discurso N es de la forma $\mu_A : N \rightarrow [0, 1]$, donde a cada elemento de N le corresponde un valor entre 0 y 1. Este valor, llamado valor de pertenencia o grado de pertenencia, representa el grado en el que el elemento de N pertenece al conjunto difuso A .

Definición 2.11 (Universo de discurso [46]). Se define universo de discurso como el conjunto X de todos los posibles valores que puede tomar una determinada variable x .

Definición 2.12 (Variable lingüística [61, 101, 104]). Por una variable lingüística se entiende como una variable cuyos valores son palabras u oraciones en un lenguaje natural o artificial, las cuales se encuentran acotadas por un universo de discurso.

Definición 2.13 (Etiquetas [61, 80]). Son las diferentes clasificaciones que se efectúan sobre la variable lingüística. Cada etiqueta tendrá un conjunto difuso asociado.

Definición 2.14 (Conjunto difuso nulo o vacío [61, 100]). Un conjunto difuso está vacío si y solo si su función de pertenencia es idénticamente cero en N .

Definición 2.15. (Soporte [61]). El soporte de un conjunto difuso A es el conjunto de elementos de X que pertenecen a A con grado de pertenencia mayor que 0.

$$sop(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\} \quad (2.4)$$

Un conjunto difuso se dice que es *singleton* si su soporte es un único punto.

Definición 2.16. (Núcleo [61]). El núcleo de un conjunto difuso A es el conjunto de elementos de X que pertenecen a A con grado de pertenencia 1.

$$Nucleo(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\} \quad (2.5)$$

Un conjunto difuso se dice que es normal si su núcleo es no vacío.

2.2.1. Tipos de funciones de pertenencia.

Las funciones de pertenencia nos permiten representar gráficamente un conjunto difuso y su correspondiente variable lingüística. En el eje x (abscisas) se representa el universo

de discurso, mientras que en el eje y (ordenadas) se sitúan los grados de pertenencia en el intervalo $[0, 1]$.

En la lógica difusa son definidas varias funciones de pertenencia tanto lineales (forma trapezoidal, forma triangular, *singleton*) como no lineales (gaussianas, sigmoideas, campana generalizada). Para construir las funciones de pertenencia se suele utilizar funciones sencillas, ya sea por simplicidad y reducción del volumen de operaciones computacionales. Las expresiones matemáticas y la representación gráfica de las funciones de pertenencia fundamentales se exponen a continuación.

Definición 2.17 (Función de pertenencia triangular [61]). La curva triangular (ver Figura 2.1) es una función de una variable x , y depende de tres parámetros escalares a , b , y c , es representada como sigue:

$$\mu(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & c \leq x. \end{cases} \quad (2.6)$$

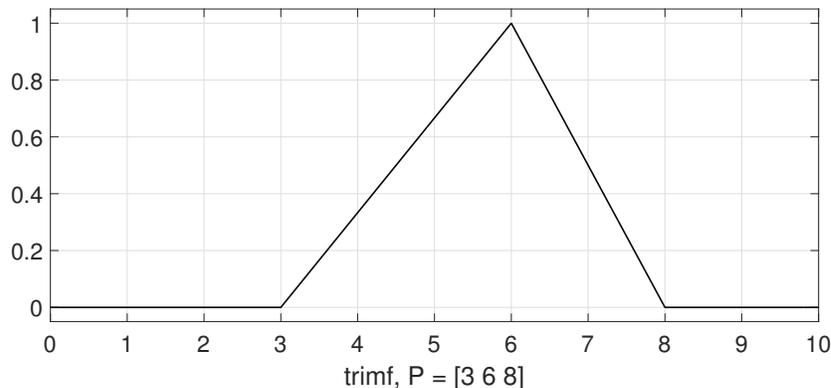


Figura 2.1: Función de pertenencia tipo triangular $\mu(x, 3, 6, 8)$.

Las funciones de pertenencia triangulares son continuas y definen un conjunto difuso normal, convexo y con soporte finito, por lo que pueden emplearse para representar números difusos.

Definición 2.18 (Función de pertenencia singleton [61, 80]). Una función de pertenencia *singleton* es aquella función de pertenencia, la cual sus características de soporte y núcleo cumplen que $sop(x) = nuc(x) = x$. La función de pertenencia *singleton* es denominada también conjunto difuso escalar. La misma tiene un valor único cuando $x = a$ (como una

función delta de Dirac)[2]:

$$\mu(x, a) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a. \end{cases} \quad (2.7)$$

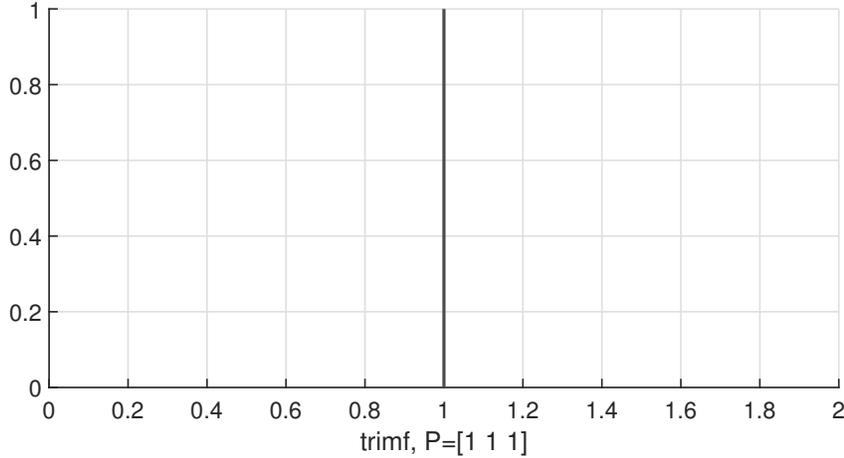


Figura 2.2: Función de pertenencia tipo singleton $\mu(x, 1)$.

Definición 2.19 (Función de pertenencia trapezoidal [61]). La curva trapezoidal es una función de un vector, x , y depende de cuatro parámetros escalares a, b, c y d . Definida por sus límites inferior a , superior d , y los límites de soporte inferior b y superior c , tal que $a < b < c < d$. En este caso, si los valores de b y c son iguales, se obtiene una función triangular y esta función está dada por:

$$\mu(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde la Figura 2.3 representa esta función de pertenencia en el plano.

La función de pertenencia trapezoidal es continua y define un conjunto difuso normal, convexo y con soporte finito, por lo que se puede emplear para representar un número difuso.

Definición 2.20 (Función de pertenencia gaussiana [61]). La función gaussiana simétrica (ver Figura 2.4) depende de dos parámetros σ y c y queda definida como:

$$\mu(x, c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}. \quad (2.9)$$

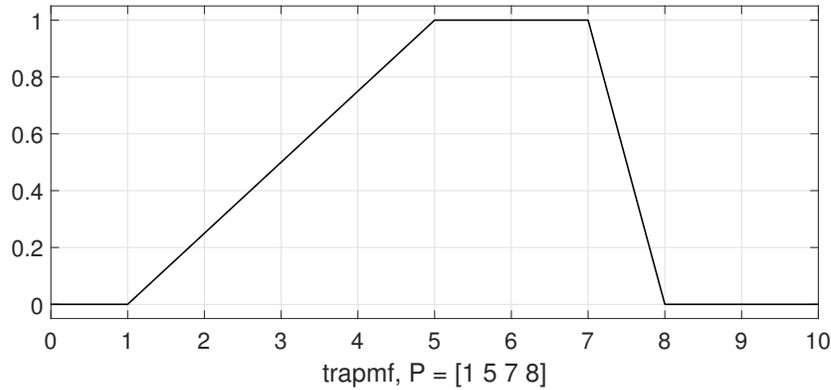


Figura 2.3: Función de pertenencia tipo trapezoidal $\mu(x, 1, 5, 7, 8)$.

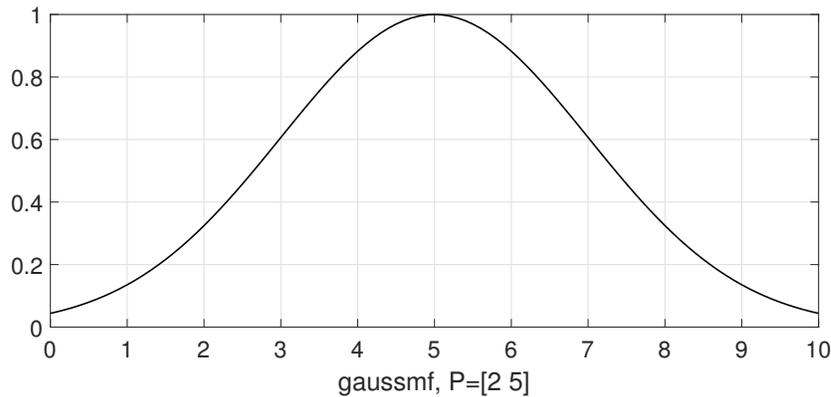


Figura 2.4: Función de pertenencia tipo gaussiana $\mu(x, 2, 5)$.

La función de pertenencia gaussiana es continua, convexa y simétrica respecto al parámetro σ .

Definición 2.21 (Función de pertenencia del tipo sigmoide). Los parámetros de la función especificados como el vector $[ac]$. Donde, para abrir la función de pertenencia a la izquierda o la derecha, se especifica un valor negativo o positivo para a , respectivamente. La magnitud de a controla el ancho del área de transición y c define el centro del área de transición (ver Figura 2.5). La misma queda representada matemáticamente por la siguiente expresión:

$$\mu(x, a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}. \quad (2.10)$$

Es importante aclarar que las funciones lineales son las más usadas dentro de los algoritmos que procesan conjuntos difusos con respecto a otras funciones no lineales, esto

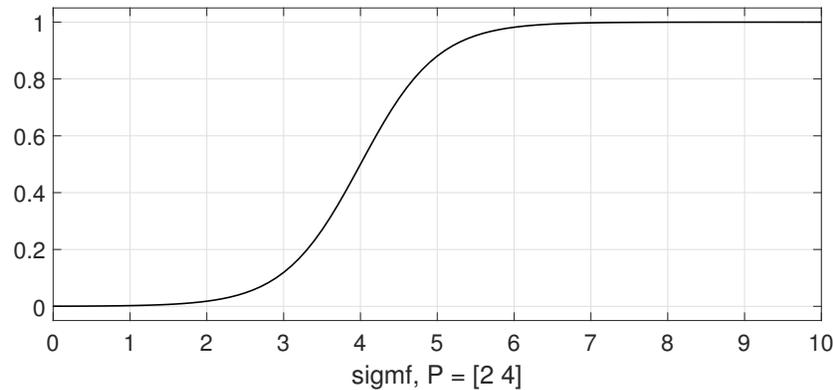


Figura 2.5: Función de pertenencia del tipo sigmoide $\mu[x, 2, 4]$.

es debido a la simplicidad de dichas funciones, además, las no lineales demandan un alto costo computacional.

2.2.2. Control difuso

El control difuso es una aplicación extremadamente exitosa de los conjuntos difusos, lógica difusa y teoría de sistemas a problemas prácticos. Esta técnica considera para el control de plantas el uso efectivo de toda la información disponible. A menudo, esta información proviene no solo de los sensores de la planta, sino también del modelo matemático de la planta y del conocimiento experto humano sobre la operación de la planta [98]. Los expertos proporcionan descripciones lingüísticas sobre el sistema y las instrucciones de control. Los controladores convencionales no pueden incorporar la información difusa lingüística en su diseño. La mayoría de ellos necesita un modelo matemático apropiado del sistema. Contrariamente a ellos, el control difuso es un enfoque que puede ser libre de modelo que depende en gran medida de la información difusa lingüística experta. El control difuso proporciona controladores no lineales que son lo suficientemente generales para realizar cualquier acción de control no lineal.

La aplicación de técnicas difusas al control de sistemas dinámicos es ventajosa en términos de simplicidad en diseño y puesta en práctica. La experiencia demuestra que el éxito depende del nivel de conocimiento referente al comportamiento de la planta. Si no se cuenta con el criterio experto, un diseño puede comprometer el desempeño control difuso sobre el sistema.

El control basado en lógica difusa se aplica desde hace varias décadas con excelentes resultados en diversas aplicaciones tanto en el campo de la investigación científica como en la ingeniería y automatización de procesos industriales.

La diversidad de aplicaciones de los sistemas difusos ha comprobado el buen desempeño en resultados prácticos, debido a las ventajas que presenta en relación con algoritmos de control tradicional, tales como:

- Permiten su aplicación a sistemas complejos (no lineales) que están definidos en forma imprecisa en ocasiones con variables difíciles de medir e incluso determinar.
- Aplica el conocimiento humano en los sistemas de ingeniería en una forma sistemática, eficaz y analizable.
- No es necesario construir un modelo matemático detallado.
- Pueden funcionar con un gran número de entradas.
- El comportamiento de un sistema basado en lógica difusa se describe con expresiones lingüísticas, por lo que es más sencillo su comprensión en comparación con una descripción matemática.

Los controladores difusos se encuentran en productos de consumo como lavadoras, cámaras de vídeo y automóviles. Las aplicaciones industriales incluyen hornos de cemento, trenes subterráneos y robots. Un controlador difuso es un controlador automático, es decir, un mecanismo de acción automática o auto-regulación que dirige a un objeto de acuerdo con un comportamiento deseado. El objeto puede ser, por ejemplo, un robot configurado para seguir un camino determinado. Un controlador difuso actúa o regula mediante reglas en un lenguaje similar al natural, basado en la característica distintiva: lógica difusa. Los operadores de la planta o los ingenieros de diseño definen las reglas, y el control difuso es, por lo tanto, una rama de la inteligencia artificial [46]. La Figura 2.6 expone la estructura de un controlador difuso basado en reglas.

Un sistema difuso utiliza procesos de razonamiento difusos para convertir entradas *crisp* en salidas *crisp*. Los componentes principales del sistema difuso son una sección de fusificación, un mecanismo o motor de inferencia y una sección de defusificación. Un conjunto de reglas generalmente en forma **IF–THEN** (*modus ponens*), llamada base de reglas, especifica cómo se tomarán las decisiones en función de las entradas medidas.

Existen dos tipos principales de sistemas de inferencia difusa: tipo Mamdani (1977) [66] y tipo Sugeno (1985) [92]. En los sistemas difusos tipo Mamdani, la consecuencia de cada regla es un conjunto difuso. Esto contrasta con los sistemas difusos Takagi-Sugeno (T-S), cuyos consecuentes son expresiones matemáticas.

El controlador difuso se compone de tres etapas [61]:

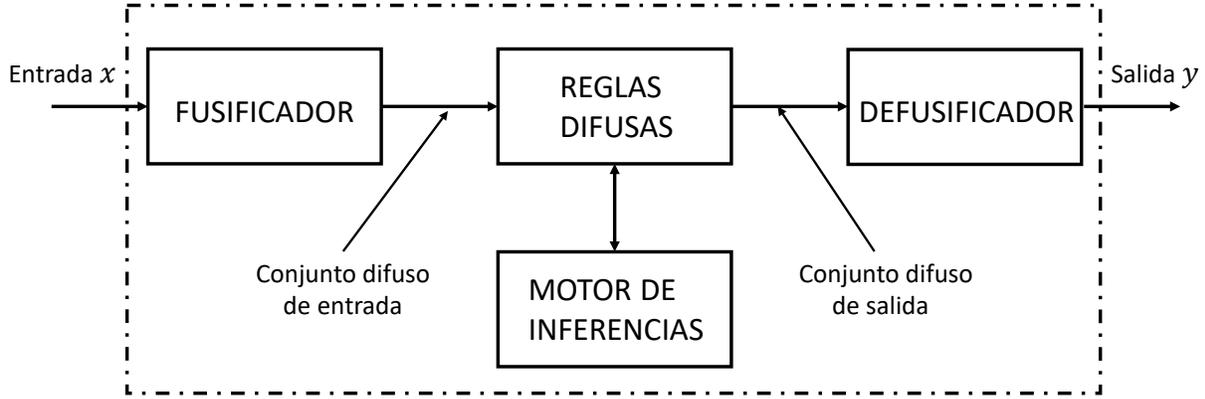


Figura 2.6: Estructura de controlador difuso basado en reglas.

- **Fusificación:** La sección de fusificación convierte entradas numéricas en conjuntos difusos. Esto supone que la entrada medida es la entrada verdadera (es decir, no hay ruido de medición ni ninguna otra incertidumbre). Así, en la fusificación, los conjuntos difusos de entrada se evalúan exactamente en las entradas medidas [61].
- **Inferencia difusa:** El mecanismo de inferencia determina la medida en que cada regla en la base de la regla se aplica en la situación actual y forma un conjunto difuso implícito correspondiente para cada regla. Los métodos más usados son *max-min* y *max-prod* [98, 102] que se basan en la determinación de valores mínimos y máximos de los grados de pertenencia de las variables y las operaciones algebraicas que se realizan con los conjuntos difusos.
- **Defusificación:** La sección de defusificación combina los conjuntos difusos implícitos de todas las reglas para obtener una salida *crisp*. Dos de los principales métodos son Centro de gravedad (COG por sus siglas en inglés) y promedio centro (CA por sus siglas en inglés) [61, 98, 99].

El presente trabajo utiliza el método de defusificación promedio centro o CA el cual es el defusificador más utilizado en sistemas difusos y control difuso, por ser computacionalmente simple e intuitivamente plausible. El cuál se denota tal que [99]:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^N y^{-l} w_l}{\sum_{l=1}^M w_l} \quad (2.11)$$

donde y^* es el promedio del centro, x el centro del l -ésimo conjunto difuso de salida y w es su altura.

Relacionado con los controladores difusos existen varios trabajos que determinan la función descriptiva de un elemento difuso al sustituir éste con un elemento no lineal equivalente, con una sola entrada y una única salida y se obtiene la FD de forma experimental [55, 98]. De forma similar el trabajo desarrollado por [36] utiliza el diseño de un sistema difuso MISO mediante el método de balance armónico para la detección de ciclos límites, el análisis de estabilidad. Donde la obtención de la función descriptiva del sistema difuso es obtenido experimentalmente. Por ejemplo en [48] se utilizan métodos experimentales mediante la variación de los parámetros de los sistemas difusos (SISO y MIMO) para la obtener la representación gráfica de la función descriptiva y con ello la detección del ciclo límite, esta propuesta no brinda un análisis matemático para la obtención de la FD del sistema difuso. El trabajo presentado por [54] presenta un controlador difuso tipo Mamdani con la capacidad de eliminar el fenómeno de resonancia mediante la obtención de la función descriptiva del término no lineal de forma experimental. Relacionado con la estabilidad de los sistemas difusos, en [51, 89] se utiliza el método de la función descriptiva para analizar la estabilidad de un controlador difuso. Por otro lado, en [52] se estudia la detección de ciclos límite mediante el diseño de un sistema de control difuso a través de la función descriptiva, en el mismo se desarrolla de forma analítica la obtención diseño del sistema difuso y la posterior obtención de la función descriptiva. De esta forma, se predice con exactitud el ajuste necesario de las funciones de pertenencia para predecir los ciclos límites.

2.3. Función descriptiva

El método de función descriptiva [13, 90, 95] representa una versión extendida del método de respuesta en el dominio de la frecuencia diagrama de Nyquist, la cual tiene como principal uso, la predicción de ciclos límites en sistemas no-lineales y con base a esto analizar la estabilidad del sistema. Además, cuenta con otro número de aplicaciones en la predicción de subarmónicos, fenómenos de salto y el análisis de la respuesta de sistemas no lineales ante señales senoidales. La predicción de los ciclos límite es muy importante, ya que los ciclos límite pueden ocurrir con frecuencia en un sistema físico no lineal. En ocasiones, un ciclo límite puede ser deseable, este es el caso de los ciclos límite en los osciladores electrónicos utilizados en los laboratorios [90]. La metodología analítica para la determinación de la función descriptiva de un elemento no lineal es aproximada, el mismo se basa en las siguientes suposiciones [13, 90, 95]:

1. El sistema solo contará con un único componente no lineal.

2. El componente no lineal es invariante en el tiempo.
3. Correspondiente a una entrada senoidal $A_1 \text{sen}(\omega t)$ solo se considera la componente fundamental de la salida del sistema $u(t)$, es decir $u_1(t)$. Esto implica que la planta debe poseer propiedades de filtro de paso bajo.
4. El término no lineal es simétrico con respecto al origen.

La primera consideración implica que si hay dos o más componentes no lineales en un sistema, éstos se han de agrupar en un sólo componente no lineal (como si se trataran de dos no linealidades en paralelo) o conservar únicamente la no linealidad primaria e ignorar los efectos de otras.

La segunda consideración implica que solo serán considerados sistemas autónomos no lineales. Esto se satisface en la práctica en muchas no linealidades, como la saturación en amplificadores, el juego en los engranajes, la fricción de Coulomb entre superficies y la histéresis en los relés. El motivo de esta consideración es que el criterio de Nyquist, en el cual se basa en gran medida el método de la función descriptiva, solo es aplicado a los sistemas lineales invariantes en el tiempo.

El tercera suposición representa la suposición fundamental del método de la función que descriptiva. La cual se considera una aproximación, porque la salida de un elemento no lineal correspondiente a una entrada senoidal generalmente contiene armónicos más altos además del fundamental. Esto significa que todos los armónicos de mayor frecuencia se pueden ignorar en el análisis, en comparación con el componente fundamental. Para que esta suposición sea válida, es importante que la planta lineal que sigue a la no linealidad posea propiedades de filtro paso bajo, tal que:

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)| \text{ para } n = 2, 3, \dots$$

Esto implica que los armónicos de orden superior a la salida serán filtrados significativamente. La cuarta suposición significa que el gráfico de la relación de no linealidad $f(x)$ entre la entrada y la salida del elemento no lineal es simétrico respecto del origen. Esta suposición se introduce por simplicidad, es decir, para que el término estático en la expansión de Fourier de la salida se pueda ignorar. Esto es considerado en las no linealidades comunes como (saturación, zona muerta, histéresis, *on - off*), entre otras [49, 90].

Definición 2.22. Función descriptiva. Considere una entrada senoidal al elemento no lineal, de amplitud A_1 y frecuencia ω , es decir, $x(t) = A_1 \text{sen}(\omega t)$. La salida del componente no lineal $u(t)$ es, por lo general una función periódica, aunque generalmente no senoidal.

Es necesario considerar que este sea siempre el caso, si la no linealidad $f(x)$ es univaluada, porque la salida es $f(A_1 \text{sen}(\omega(t + 2\pi/\omega))) = f(A_1 \text{sen}(\omega t))$. Entonces la función descriptiva de un elemento no lineal es definida como la razón compleja de la componente fundamental del elemento no lineal desarrollada en series de Fourier. Para una entrada $x(t) = A_1 \text{sen}(\omega t)$ la expansión en series de Fourier de la salida del sistema para $u(t) = f(x) = f(x, \dot{x})$ donde $x = A_1 \text{sen}(\omega t)$, $\dot{x} = \omega A_1 \cos(\omega t)$ resulta como [13, 90, 95]:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)], \quad (2.12)$$

donde los coeficientes de Fourier a_i y b_i son generalmente funciones de A_1 y ω determinadas tal que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) d\omega t, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) d\omega t, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \text{sen}(n\omega t) d\omega t. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Considerando la suposición relacionada con la simetría de la no linealidad se define que $a_0 = 0$. De similar forma la propiedad de filtro paso bajo del sistema, permite al método de la función descriptiva solo considerar el componente armónico fundamental tal que:

$$u(t) \approx u_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \text{sen}(\omega t) = H \text{sen}(\omega t + \delta), \quad (2.14)$$

donde $H(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ y $\delta(A, \omega) = \tan^{-1} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$.

La ecuación (2.14) refiere que la componente fundamental correspondiente a una entrada senoidal con la misma frecuencia puede ser escrita en su representación compleja como $u_1 = H e^{(j\omega t + \delta)}$. Entonces la función descriptiva es definida como sigue:

$$N(A_1, \omega) = \frac{H e^{(j\omega t + \delta)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{H}{A} e^{j\delta} = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1), \quad (2.15)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) d\omega t, \quad (2.16)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) d\omega t, \quad (2.17)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \operatorname{sen}(n\omega t) d\omega t. \quad (2.18)$$

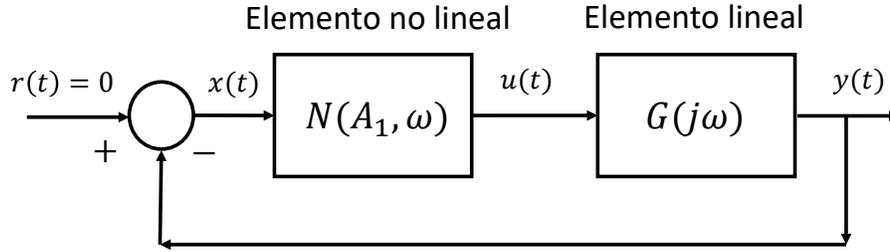


Figura 2.7: Diagrama de la función descriptiva.

El método de la función descriptiva se presenta en el diagrama de bloques en lazo cerrado de la Figura 2.7. Por otra parte, para realizar el análisis en el dominio de la frecuencia se evalúan la función de balance armónico y la planta en $s = j\omega$.

La ubicación de $-1/N(A_1, \omega)$ y $G(j\omega)$ dan información acerca de la estabilidad de la planta en el lazo cerrado. Para determinar la estabilidad del sistema se trazan los lugares geométricos de las raíces correspondientes a $G(j\omega)$ y $-1/N(A_1, \omega)$. El criterio para analizar estabilidad es que si $-1/N(A_1, \omega)$ no está rodeado por $G(j\omega)$ el sistema es estable y no hay ciclos límites. Por el contrario, si $G(j\omega)$ envuelve a $-1/N(A_1, \omega)$ el sistema se puede volver inestable y la salida está sujeta a cualquier perturbación. Si hay intersecciones la salida presenta ciclos límites.

Por tanto, se establece la ecuación de balance armónico tal como [13, 90, 95]:

$$1 + N(A_1, \omega)G(j\omega) = 0$$

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A_1, \omega)}. \quad (2.19)$$

De esta forma, si (2.19) no tiene solución, entonces el sistema no lineal no exhibe ciclos límites. Es necesario aclarar que la ecuación de balance armónico representa dos ecuaciones no lineales con las variables A_1 y ω . Estas ecuaciones pueden tener un número de soluciones finitas, que por lo general resulta muy difícil hallar su solución por métodos analíticos, en particular para sistemas de orden superior, en estos casos se opta por el método gráfico. Donde se grafican ambos lados de la ecuación (2.19) en el plano complejo para hallar los puntos de intersección de las curvas [82, 90].

La representación gráfica de (2.19) es mostrada en la Figura 2.8. La función $-1/N(A_1, \omega)$ representa una línea recta. Si existe una solución periódica, entonces (2.19) provee una solución aproximada con frecuencia y amplitud conocida, indicando la existencia de un ciclo límite.

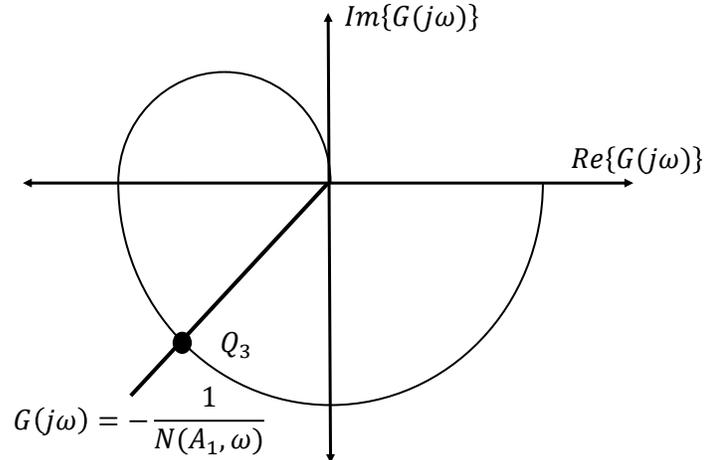


Figura 2.8: Punto de intersección en $-1/N(A_1, \omega)$ y $G(j\omega)$.

Aplicando el criterio de estabilidad de Nyquist en un sistema no lineal es posible notar que cada intersección entre las curvas $G(j\omega)$ y $-1/N(A_1, \omega)$ en el plano complejo corresponde a un ciclo límite con amplitud A_1 y frecuencia ω conocidas. Utilizando el método de la función descriptiva en el diseño de sistemas difusos es posible obtener un intercepto que defina un ciclo límite con amplitud y frecuencia deseadas [52].

Es importante aclarar que la predicción de ciclos límites mediante FD se presenta como un método gráfico. En este sentido es válido destacar que la solución analítica de las ecuaciones bajo la consideración de existencia de un movimiento periódico se hace muy compleja, en particular para sistemas de orden superior. Por tanto, el método de detección de ciclos límites mediante FD se lleva a cabo desde el punto de vista gráfico [13, 82, 91, 95].

2.4. Criterios de estabilidad orbital

El problema del control de una planta se encuentra intrínsecamente vinculado al concepto de estabilidad. Carece de sentido hablar de sistemas de control si éste no garantiza convergencia de la dinámica del sistema hacia un estado deseado. En los sistemas lineales existen numerosos métodos que permiten verificar la estabilidad tales como: el criterio de Nyquist [72], Routh-Hurwitz [7], diagrama de Bode [72], método del lugar geométrico de las raíces [27], etc. Por otro lado, para sistemas no-lineales o variables en el tiempo, los métodos anteriores no son aplicables ya que están más enfocados a sistemas cuyos parámetros no varían en el tiempo [56, 71].

La estabilidad orbital de un sistema se define como la resistencia de la trayectoria a pequeñas perturbaciones. En el caso de los ciclos límite, es la resistencia que opone la curva

cerrada a romperse y mantenerse en la órbita original. Ésta es una de las características más importantes y estudiadas en sistemas no lineales, además de un gran reto en sistemas de control para diseñar actuadores que lleven al sistema a movimientos periódicos con la estabilidad deseada y con la característica de estabilidad orbital.

Dado que los procesos periódicos en la naturaleza a menudo se pueden representar como ciclos límite estables, por lo que se presta gran atención a la búsqueda de tales trayectorias, si existen. En la literatura pueden ser hallados diferentes métodos o criterios para obtener las condiciones suficientes y/o necesarias para establecer la existencia y estabilidad orbital de un ciclo límite, dentro de los cuales podemos citar, desde el clásico mapa de Poincaré [75, 77, 78, 93], así como primer método de la teoría estabilidad de Lyapunov [9, 23, 49, 58, 60, 64], criterio de Loeb [13, 62, 95], teorema de Poincaré - Bendixson [49, 68, 75, 90, 93].

A continuación se presentan los fundamentos de los teoremas Poincaré-Bendixson y criterio de Loeb, los cuales son utilizados para demostrar la existencia de ciclos límites y garantizar su estabilidad orbital en cada uno de los enfoques desarrollados este trabajo.

La estabilidad del ciclo límite se plantea en términos del comportamiento de un estado teórico del ciclo límite al ser sometido a perturbaciones en amplitud y/o frecuencia. Si el ciclo límite vuelve a su estado de equilibrio original, se llamará estable, mientras que si su amplitud o frecuencia aumenta o disminuye hasta que se alcanza otro estado de equilibrio, se llamará inestable. La posibilidad de crecimiento de amplitud o frecuencia teóricamente ilimitada se incluye en la definición de inestabilidad al considerar que el estado en el infinito es un estado de equilibrio.

2.4.1. Teorema Poincaré - Bendixson

Las órbitas periódicas en el plano son especiales, al dividir el plano en una región exterior y otra región interior. Esto hace posible obtener un criterio para detectar la presencia o ausencia de órbitas periódicas en sistemas de segundo orden.

El teorema de Poincaré - Bendixson permite clasificar completamente el comportamiento límite de la órbita de cualquier punto en un sistema dinámico plano. Asimismo, brinda las condiciones para la existencia de órbitas periódicas en un sistema en el plano.

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.20}$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ y $f(x) \in \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial lo suficientemente suave. Se plantea el colorario del criterio de Poincaré - Bendixson el cual resume como el teorema es aplicado [49, 68, 75, 90, 93, 103].

Teorema 2.1. *Considérese el sistema (2.20), entonces:*

- (a) *Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ la región simplemente conexa comprendida entre dos curvas cerradas anidadas simples Γ y Υ (ver Figura 2.9 (a)). Suponga que \mathcal{R} no contiene equilibrios de (2.20) y en cada punto de Γ y Υ el campo vectorial apunta hacia el interior de \mathcal{R} . Entonces, el sistema tiene una órbita periódica atractora contenida en \mathcal{R} .*
- (b) *Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ la región simplemente conexa contenida dentro de la curva Γ . (ver Figura 2.9(b)). Suponga que \mathcal{R} contiene un equilibrio repulsor (fuente) en (2.20) y en cada punto de Γ el campo vectorial apunta hacia el interior de \mathcal{R} . Entonces, el sistema tiene un ciclo límite estable contenido en \mathcal{R} .*

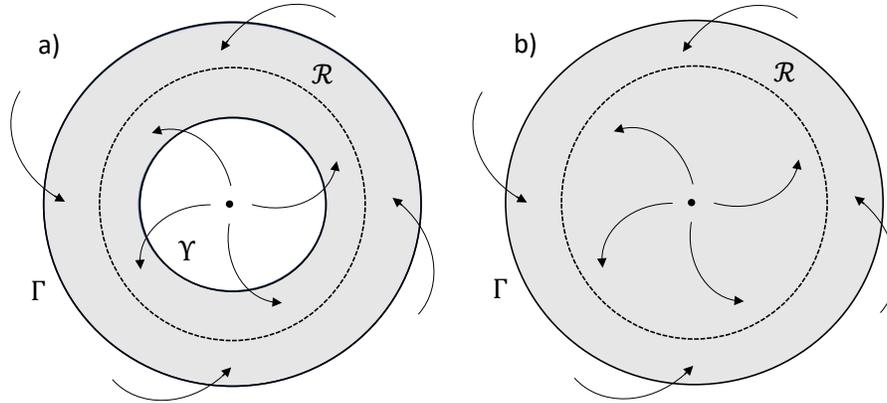


Figura 2.9: (a) Ciclo límite sin equilibrio en \mathcal{R} ; (b) Ciclo límite con equilibrio repulsor en \mathcal{R} .

El criterio establece que las trayectorias acotadas en el plano deben acercarse a órbitas periódicas o puntos de equilibrio según el tiempo tiende a infinito.

2.4.2. Criterio de Loeb

La estabilidad de las oscilaciones depende de la relación geométrica de $G(j\omega)N(A_1, \omega)$ y el punto $(-1, 0)^T \in \mathbb{C}$ derivado de la ecuación de balance armónico (2.19). Luego, utilizando el criterio extendido de estabilidad de Nyquist [90] y el método de pequeñas perturbaciones en amplitud conocido como criterio Loeb [95] es posible encontrar las condiciones que garanticen la existencia de un ciclo límite estable en el sistema.

El criterio de Loeb [13, 62, 95] es basado en la función descriptiva es utilizado para el análisis de estabilidad en la generación de oscilaciones [6]. El mismo es basado originalmente del método desarrollado por Cahen [19]. Entonces, el criterio de Loeb se define tal que:

Teorema 2.2. *Considere A_1 y ω , la amplitud y la frecuencia de un ciclo límite en equilibrio:*

$$1 + N(A_1, \omega)G(j\omega) = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación de balance armónico (2.19), en términos de sus partes real e imaginaria, se puede expresar de la siguiente manera:

$$U(A_1, \omega) + jV(A_1, \omega) = 0. \quad (2.22)$$

Considerando perturbaciones cuasi - estáticas en la amplitud ΔA y frecuencia $\Delta\omega$ del ciclo límite, así como en la velocidad de cambio de la amplitud $\Delta\nu = -\dot{A}/A$ asociada al término de frecuencia,

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + A\Delta, \\ \omega &\rightarrow \omega + (\Delta\omega + j\Delta\nu), \end{aligned} \quad (2.23)$$

por definición los valores ΔA , $\Delta\omega$ y $\Delta\nu$ son pequeños. Sustituyendo los parámetros perturbados (2.23) en la ecuación de balance armónico (2.19), se tiene que:

$$U(A + A\Delta, \omega + (\Delta\omega + j\Delta\nu)) + jV(A + A\Delta, \omega + (\Delta\omega + j\Delta\nu)) = 0. \quad (2.24)$$

El desarrollo en series de Taylor de la expresión (2.24) en torno al equilibrio (A_1, ω) resulta tal que:

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} \Delta A_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega} \Delta(\Delta\omega + j\Delta\nu) + j \frac{\partial V}{\partial A_1} \Delta A_1 + \frac{\partial V}{\partial \omega} \Delta(\Delta\omega + j\Delta\nu) = 0, \quad (2.25)$$

se debe satisfacer en sus partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_1} \Delta A_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega} \Delta\omega - \frac{\partial V}{\partial \omega} \Delta\nu &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial A_1} \Delta A_1 + \frac{\partial V}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{\partial U}{\partial \omega} \Delta\nu &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

simplificando $\Delta\omega$ del sistema de ecuaciones se obtiene

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial A_1} \right) \Delta A_1 = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega} \right)^2 \right] \Delta\nu. \quad (2.27)$$

Para que un ciclo límite sea estable se deben dar las condiciones para que el signo de

$\Delta\nu/\Delta A_1$ sea siempre positivo. Esto es conocido como criterio de estabilidad de Loeb [13, 95] y se puede expresar mediante la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial A_1} > 0. \quad (2.28)$$

Entonces, la estabilidad de un ciclo límite surge en términos de perturbaciones cuasi-estáticas en amplitud y frecuencia. Se dice que el ciclo límite es estable si vuelve a su estado de equilibrio original, mientras que si su amplitud o frecuencia crece o decae hasta que alcanza otro estado de equilibrio se llama inestable.

2.4.3. Aplicación del criterio de Loeb

El análisis de estabilidad mediante la aplicación del criterio de Loeb involucra la obtención de derivadas parciales y cálculos algebraicos, los cuales pueden resultar particularmente complejos, por ello fue desarrollado un algoritmo basado en el software de cómputo numérico Matlab[®], el se encarga de realizar las acciones de cómputo y cálculo necesarias para hallar los parámetros que involucra el criterio de Loeb. La Figura 2.10 exhibe el proceso de análisis y cálculo mediante un diagrama lógico según lo establece el criterio de Loeb. El mismo es aplicado a cada uno de los casos de estudio considerando los parámetros de amplitud A_1 y frecuencia deseada ω . El código de software desarrollado en Matlab[®] puede ser consultado en el Anexo 6.2.

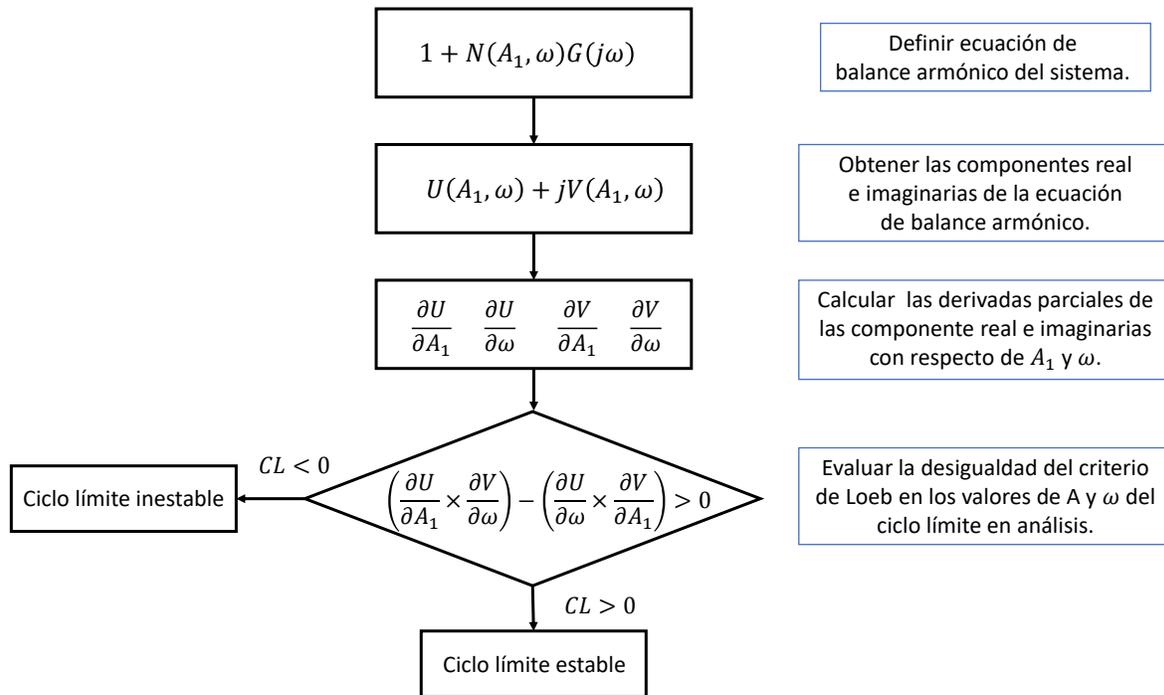


Figura 2.10: Diagrama de aplicación del criterio de Loeb utilizando Matlab®.

2.5. Consideraciones finales del capítulo

La revisión llevada a cabo en este capítulo expone los fundamentos teóricos relacionados con las técnicas de lógica difusa en el control. Asimismo, son tratadas las bases del método en el dominio de la frecuencia para el análisis de sistemas no lineales, función descriptiva. Por otro lado, se establecen los criterios utilizados en la investigación para garantizar la existencia y estabilidad orbital de las auto - oscilaciones (ciclos límites estables).

Capítulo 3

Esquema a 2-FIS para la generación de órbitas periódicas

El presente capítulo expone el desarrollo analítico de la propuesta del esquema a 2-FIS para la generación de órbitas periódicas estables en los dos enfoques presentados en este trabajo de tesis. Primero, es utilizado el método en el dominio de la frecuencia función descriptiva para la obtención del ciclo límite y el criterio de Loeb para garantizar la estabilidad orbital. El segundo enfoque presentado involucra el esquema a 2-FIS utilizando el teorema Poincaré-Bendixson para establecer las condiciones de existencia y estabilidad del ciclo límite.

3.1. Planteamiento del problema

El problema se establece formalmente de la siguiente manera. Considere el siguiente sistema en su formulación Euler - Lagrange con n grados de libertad tal como:

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = Gu \tag{3.1}$$

donde $q(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de la posición angular, $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de la velocidad angular, asimismo, $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de la aceleración angular, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada ($n \geq p$), $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ representa el tiempo, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de inercia, la cual es simétrica positiva definida y continuamente diferenciable, $h(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ es un vector Lipschitz continuo que representa las fuerzas de Coriolis, centrífugas y gravitacionales. Asimismo, $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de entrada. Entonces la representación

en espacio de estados de (3.1) resulta como:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.2)$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M(x_1)^{-1}h(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M(x_1)^{-1}G \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

donde $x = [x_1, x_2]^T = [q, \dot{q}]^T$ es el vector de estado. La matriz de inercia $M(x_1)$ es no singular para todo $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$, por lo tanto, su inversa existe y también es definida positiva para todos x_1 . Definimos el vector de variables medibles del sistema (3.2) - (3.3) como $y(t) = x(t) \in \mathbb{R}^n$, es decir, asumimos el caso de retroalimentación de estado.

Consideremos entonces la función de salida escalar

$$y = x_1(t) \quad (3.4)$$

la cual se considera continuamente diferenciable, y sea $\psi(x)$ una no linealidad sin memoria invariante en el tiempo. Se desea diseñar un controlador no lineal

$$u = \psi(x) \quad (3.5)$$

tal que su salida escalar $y = x_1(t) : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ converja a una trayectoria cerrada y aislada, con amplitud A_1 y frecuencia ω deseadas, es decir:

$$y(t) \rightarrow y_{ss}(t + T) = y_{ss}(t), t \geq 0 \quad (3.6)$$

para un período $T = 1/\omega > 0$ y con condiciones iniciales $x(0)$ suficientemente cerca del ciclo límite, donde $y_{ss}(t)$ es la evolución de $y(t)$ en estado estable.

Es necesario mencionar que el sistema en lazo cerrado (3.2) - (3.5) no considera una señal de referencia externa para el seguimiento. Por lo tanto, $\psi(x)$ no es un controlador de seguimiento. En cambio, se propone un sistema de inferencia en un esquema de dos difusos (2-FIS) como elemento no lineal $\psi(x)$ para generar auto-oscilaciones en la salida $y(t)$. Para este propósito, se utilizan los métodos del Teorema Poincaré-Bendixson y el método de la función descriptiva, las cuales son estrategias establecidas para investigar la existencia de soluciones periódicas, se utilizarán como método de diseño. En otras palabras, necesitamos encontrar condiciones o reglas en $\psi(x)$ de modo que la función (3.4) que depende de los estados del sistema en lazo cerrado (3.2) - (3.3), (3.5), sea periódica.

3.2. Propuesta de doble sistema de inferencia difusa (2-FIS)

Se propone un doble sistema de inferencia difusa (2-FIS) del tipo no lineal. El sistema de inferencia se construye en dos piezas de similar estructura tal que:

$$\psi(x) = \psi_1(x_1) + \psi_2(x_2). \quad (3.7)$$

Las reglas están dadas por las expresiones lingüísticas, donde el antecedente como el consecuente, se encuentran relacionadas a las variables de entrada x_l y salida ψ_l tal como:

$$\text{SI } x_l \text{ ES } M_i \text{ ENTONCES } \psi_l \text{ es } U_i$$

donde el término M_i para $i = -1, 0, 1$, representa las funciones de pertenencia en la variable de entrada. De esta forma, se propone cada FIS como un sistema de inferencia tipo Mamdani [66], considerando funciones de pertenencia tipo *singleton* a la salida mientras que se utiliza en la etapa de fusificación, funciones de pertenencia triangular en el centro y trapezoidal en los extremos siendo estas distribuidas completa, consistente y simétricamente con respecto al origen. La Figura 3.1 ilustra la distribución de las funciones de pertenencia para $i = -1, 0, 1$.

$$M_0(x_l) = \begin{cases} \frac{1}{\Phi_i}x_l + 1, & \text{si } -\Phi_i \leq x_l < 0 \\ -\frac{1}{\Phi_i}x_l + 1, & \text{si } 0 \leq x_l \leq \Phi_i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$M_{-1}(x_l) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_l < -\Phi_i \\ -\frac{1}{\Phi_i}x_l, & \text{si } -\Phi_i \leq x_l \leq 0 \\ 0, & \text{si } x_l > 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$M_1(x_l) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_l < 0 \\ \frac{1}{\Phi_i}x_l, & \text{si } 0 \leq x_l \leq \Phi_i \\ 1, & \text{si } x_l > \Phi_i. \end{cases} \quad (3.10)$$

Asimismo, como motor de inferencia es utilizado el producto de inferencia y para el defusificador se establece el método promedio centro (2.11). Entonces, el sistema difuso

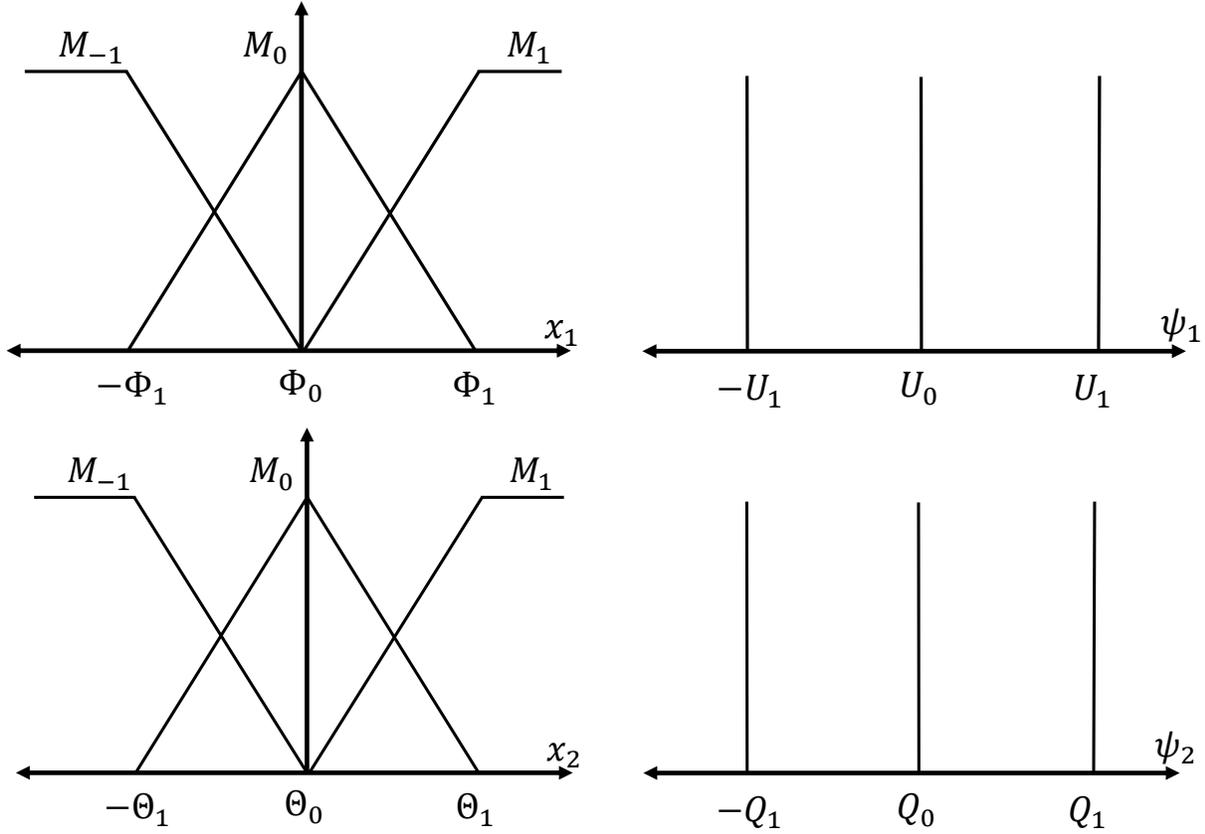


Figura 3.1: Funciones de pertenencia con x_1 y x_2 como variables de entrada y ψ_1 y ψ_2 como salidas.

puede ser expresado matemáticamente como:

$$\psi_l(x_l) = \sum_{i=-1}^1 \left\{ \frac{M_i(x_l)}{\sum_{r=-1}^1 M_r(x_l)} \right\} U_i = \sum_{i=-1}^1 \Psi_i(x_l) U_i, \quad (3.11)$$

donde $U_{-i} = -U_i$ refiere al valor *crisp* de disparo de la salida relacionado a la x_l . La función $\Psi_i(x_l)$ cumple las siguientes suposiciones:

- $\Psi_i(x_l)$ es globalmente Lipschitz continua y acotada.
- $\Psi_i(0) = 0$ (estado estable).
- Condición de simetría impar $-\Psi_i(x_l) = \Psi_i(-x_l)$.
- Dado que solo se disparan dos reglas al mismo tiempo [52] para cualquier valor de x_l , el diseño de $\psi_l(x_l)$ es una combinación convexa, es decir, $\sum_{i=-1}^1 M_i(x_l) = 1$.

Entonces, el FIS propuesto, para todo el universo discurso de x_l de $[-2\pi, 2\pi]$, requiere

Tabla 3.1: Base de las reglas difusas.

Entrada x_l	Salida ψ_l
M_{-1}	U_{-1}
M_0	U_0
M_1	U_1

solo tres subconjuntos difusos que apuntan a los valores que toma ψ_l en correspondencia al estado de entrada. Al considerar el análisis desarrollado por [52], la ecuación de salida del sistema (3.11) puede ser definida tal como:

$$\psi_1(x_1) = \begin{cases} \frac{U_i}{\Phi_i}x_1, & \text{si } |x_1| \leq \Phi_i \\ U_i, & \text{si } |x_1| > \Phi_i. \end{cases} \quad (3.12)$$

Dado que la expresión de salida (3.12) es equivalente a una función saturación, el término $k_1 = U_1/\Phi_1$ el cual refiere la pendiente de la función saturación para el FIS propuesto. Debido a que la estructura del sistema de inferencia para la variable x_2 es similar a la estructura del FIS para la variable de la posición x_1 , pero con diferentes valores a la entrada y a la salida. Entonces, por simplicidad es definida Θ_i y Q_i como parámetros de diseño a la entrada y a la salida para el FIS-2. De esta forma, el FIS-2 puede ser expresado tal como:

$$\psi_2(x_2) = \begin{cases} \frac{Q_i}{\Theta_i}x_2, & \text{if } |x_2| \leq \Theta_i \\ Q_i, & \text{if } |x_2| > \Theta_i, \end{cases} \quad (3.13)$$

donde $k_2 = Q_i/\Theta_i$. Por lo tanto, al sustituir (3.12)-(3.13) en (3.7) es obtenida la expresión resultante para el sistema a 2-FIS de la siguiente forma:

$$\psi(x) = \begin{cases} U_1, & \text{if } x_1 > \Phi_i \\ k_1x_1, & \text{if } |x_1| \leq \Phi_i \\ -U_1, & \text{if } x_1 < -\Phi_i \end{cases} + \begin{cases} Q_1, & \text{if } x_2 > \Theta_i \\ k_2x_2, & \text{if } |x_2| \leq \Theta_i \\ -Q_1, & \text{if } x_2 < -\Theta_i, \end{cases} \quad (3.14)$$

el cual representa un sistema no lineal basado en sistemas de inferencia difusas que es equivalente a la función no lineal de doble saturación.

3.3. Enfoque vía función descriptiva

Se presenta en esta sección la aplicación del método de la función descriptiva en sistemas de inferencia difusa. Se obtiene la expresión analítica de la función descriptiva del elemento difuso, el cual se utiliza para inducir un movimiento periódico estable en un sistema dinámico.

Con el objetivo de obtener la función descriptiva del sistema difuso, se considera la ecuación del FIS (3.12) como un elemento no lineal del tipo saturación. Donde la salida es simétrica en los cuatro cuadrantes del período, considerando $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$, $k_1 = \frac{U_1}{\Phi_1}$, de similar forma $\delta_p = \sin^{-1}(\Phi_1/A_1)$ y $x_l = \omega t$ [13, 90, 95]. La ecuación (3.12) puede ser reescrita para el primer cuadrante tal como:

$$\psi_l(x_l) = k_1 \begin{cases} x_l & \text{si } 0 \leq x_l \leq \delta_p \\ \Phi_1 & \text{si } \delta_p < x_l \leq \pi/2 \end{cases} \quad (3.15)$$

El análisis para obtener la FD para cada FIS es similar considerando la diferencia entre el parámetro amplitud A_i , para $i = 1, 2$. La función descriptiva para un sistema difuso se calcula considerando (3.15) como $\psi_l(t)$. Las variables $\{\delta_p\}$ están definidas como ángulos de fase cuya señal de entrada $x = A_1 \sin(\delta_p)$ intercepta al centro de cada función de pertenencia Φ_i , tal como:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0, \\ \delta_p &= \sin^{-1} \left(\frac{\Phi_1}{A_1} \right), \\ \delta_{p+1} &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

siendo $(p = 0, \dots, p + 1, 0 < \delta_i < \frac{\pi}{2})$.

La función (3.12) cumple la condición de simetría impar, entonces los parámetros (2.16), (2.17) resultan tal que $a_0 = a_1 = 0$. En tal caso, para los cuatro (4) cuadrantes del período se calcula el término b_1 definido en (2.18). Donde, la función descriptiva para cada sistema difuso es determinada considerando (3.15) de la siguiente forma: [13, 90, 95]:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t), \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\delta} k_1 A_1 \sin^2(\omega t) d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} k_1 \Phi_1 \sin(\omega t) d(\omega t), \\
&= \frac{2k_1 A_1}{\pi} \left[\delta + \frac{\Phi_1}{A_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_1}{A_1} \right)^2} \right],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

siendo $k_1 = U_1/\Phi_1$ y $\Phi_1 = A_1 \sin(\delta)$, donde $\delta = \sin^{-1}(\frac{\Phi_1}{A_1})$, sustituyendo los parámetros de la función descriptiva en (2.15), entonces la FD para el sistema difuso propuesto queda como:

$$N(A_i) = \frac{2 U_1}{\pi \Phi_1} \left[\sin^{-1}\left(\frac{\Phi_1}{A_i}\right) + \frac{\Phi_1}{A_i} \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_1}{A_i}\right)^2} \right]. \tag{3.18}$$

La FD, $N(A_1, \omega)$, del sistema difuso (3.7) es el primer armónico de la señal de control periódica dividido por la amplitud de $y(t)$ [13, 90, 95]. Por lo tanto, (3.7) puede analizarse como la conexión paralela de dos sistemas difusos donde la entrada al primer sistema difuso (FIS1) es la variable de salida de un sistema dado y la entrada al segundo sistema difuso (FIS2) es la derivada de dicha salida. La FD del esquema a 2-FIS resulta tal como:

$$N(A_1, \omega) = N_1(A_1) + sN_2(A_2), \tag{3.19}$$

donde $s = j\omega$, y A_2 es la amplitud de dy/dt . Considere además la relación entre y y dy/dt en el dominio de Laplace, la cual brinda la relación entre las amplitudes A_1 y A_2 . El término A_1 constituye la amplitud deseada a la salida del FIS1. De similar forma A_2 contiene los parámetros a obtener a la salida del FIS2, la cual es dependiente de la amplitud y frecuencia deseadas tal que $A_2 = A_1\omega$. El esquema a doble sistema difuso es mostrado en la Figura 3.2.

Utilizando la ecuación (3.18) y sustituyendo en (3.19) la función descriptiva del esquema a doble sistema de inferencia difusa resultante es:

$$\begin{aligned}
N(A_1, \omega) &= \frac{2k_1}{\pi} \left[\sin^{-1}\left(\frac{\Phi_1}{A_1}\right) + \frac{\Phi_1}{A_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_1}{A_1}\right)^2} \right] + \\
& \quad j\omega \frac{2k_2}{\pi} \left[\sin^{-1}\left(\frac{\Theta_1}{A_2}\right) + \frac{\Theta_1}{A_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\Theta_1}{A_2}\right)^2} \right],
\end{aligned} \tag{3.20}$$

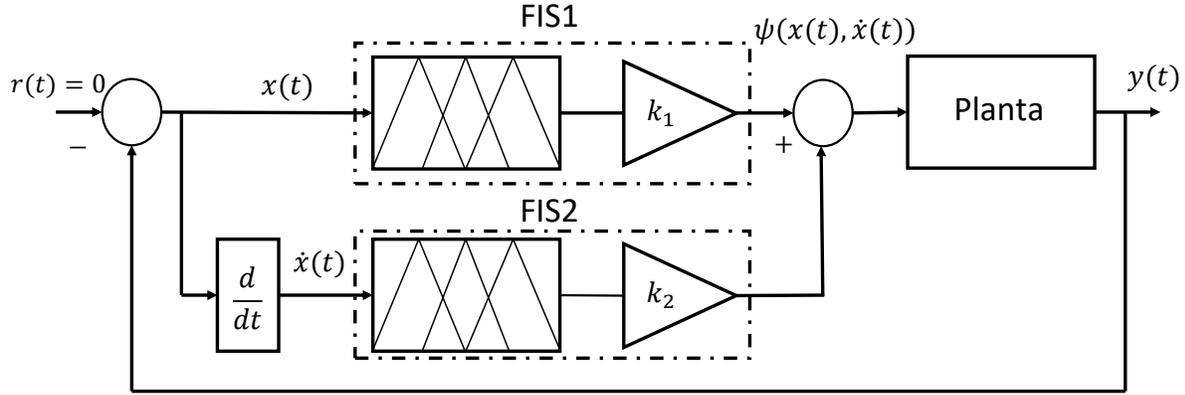


Figura 3.2: Esquema a doble sistema de inferencia difusa (2-FIS).

donde Φ_i y Θ_i representan parámetros de diseño del 2-FIS. Esta relación solo es válida si se cumple que: $A_1 \gtrsim \Phi_1$ y $A_2 \gtrsim \Theta_1$. Al definir los valores de Φ_1, Θ_1 , A_1, A_2 basados en la amplitud y frecuencia deseada y tomando en cuenta que $k_1 = \frac{U_1}{\Phi_1}$ y $k_2 = \frac{Q_1}{\Theta_1}$. Entonces, (3.20) puede ser representada en sus componentes real e imaginaria de forma simplificada tal como:

$$N(A_1, \omega) = \frac{2}{\pi} (k_1 \operatorname{Re} \{N(A_1, \omega)\} + j k_2 \omega \operatorname{Im} \{N(A_1, \omega)\}). \quad (3.21)$$

Considerando (3.21) y descomponiendo la función del diagrama de Nyquist $G(j\omega)$ en sus componentes real e imaginaria. Entonces (2.19) puede ser reescrita como:

$$\operatorname{Re} \{G(j\omega)\} + \operatorname{Im} \{G(j\omega)\} = \frac{\pi}{2} \frac{-k_1 \operatorname{Re} \{N(A_1, \omega)\} + j k_2 \operatorname{Im} \{N(A_1, \omega)\}}{(k_1 \operatorname{Re} \{N(A_1, \omega)\})^2 + (k_2 \operatorname{Im} \{N(A_1, \omega)\})^2}. \quad (3.22)$$

La representación gráfica de (3.22) es mostrada en la Figura 2.8. La función $-1/N(A_1, \omega)$ representa una línea recta, donde su pendiente depende del valor de k_1 y k_2 . Si existe una solución periódica, entonces (3.22) provee una solución aproximada con frecuencia y amplitud deseada. En el presente trabajo se busca encontrar los valores k_1 y k_2 para una amplitud y frecuencia deseada.

Los valores de k_1 y k_2 son calculados al igualar las componentes real e imaginarias de $G(j\omega)$ y $N(A_1, \omega)$ de (3.22) respectivamente, resultando un sistema de ecuaciones 2×2 tal que:

$$\operatorname{Re} \{G(j\omega)\} = \frac{k_1 \operatorname{Re} \{N(A_1, \omega)\}}{(k_1)^2 \operatorname{Re} \{N(A_1, \omega)\}^2 + (k_2)^2 \operatorname{Im} \{N(A_1, \omega)\}^2}, \quad (3.23)$$

$$\operatorname{Im} \{G(j\omega)\} = \frac{k_2 \operatorname{Im} \{N(A_1, \omega)\}}{(k_1)^2 \operatorname{Re} \{N(A_1, \omega)\}^2 + (k_2)^2 \operatorname{Im} \{N(A_1, \omega)\}^2}. \quad (3.24)$$

Entonces, al resolver el sistema de ecuaciones (3.23), (3.24) para k_1 y k_2 , resulta tal como:

$$k_1 = -\frac{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}}{(\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}^2) \operatorname{Re}\{N(A_1, \omega)\}}, \quad (3.25)$$

$$k_2 = \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{(\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}^2) \operatorname{Im}\{N(A_1, \omega)\}}. \quad (3.26)$$

Con base a los valores de amplitud A_1 y frecuencia ω deseadas en un movimiento periódico presente en un sistema dinámico, es posible diseñar un esquema a doble sistema de inferencia difusa (2-FIS), y obtener de forma analítica las ganancias k_1 y k_2 para la generación de órbitas periódicas sin necesidad de una señal de referencia externa.

Proposición 3.1. *El controlador difuso (3.14) asegura la existencia de una órbita periódica, con amplitud A_1 y frecuencia ω , en la salida de un sistema de lazo cerrado (3.2), (3.5), si y solo si, la solución a las ecuaciones (3.25) y (3.26) para encontrar los parámetros k_1 y k_2 , existe.*

Demostración. Si la salida de la no linealidad (3.14) es periódica con frecuencia ω , habrá una representación en serie de Taylor (2.25) que también satisfará la ecuación de balance armónico (2.19). Donde, las ganancias k_1 y k_2 que dependen de la amplitud y frecuencia son la solución de la ecuación de balance armónico, si esta existe. Forzando así la oscilación a una frecuencia y amplitud deseadas. \square

A pesar de que se establecieron las condiciones para la existencia de un órbita periódica, se hace necesario investigar si dicha órbita es un ciclo límite estable.

3.3.1. Estabilidad del ciclo límite

La expresión (2.28) puede reescribirse en la forma del producto vectorial, en términos de la función de transferencia y la función descriptiva, de la siguiente manera:

$$\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \times \frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial A_1} > \frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial \omega} \times \frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial A_1}. \quad (3.27)$$

Teorema 3.1. *Suponga que un ciclo límite de un sistema en lazo cerrado con (3.5) y (3.14) existe bajo las condiciones dadas en la Proposición 3.1. Si el criterio de estabilidad de Loeb se define por la condición (3.27) o su equivalente*

$$\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \times \frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial A_1} > -\frac{16k_1k_2\Phi_1\Theta_1}{A_1^3\pi\omega} \quad (3.28)$$

se cumple, entonces la órbita periódica es asintóticamente estable.

Demostración. Asimismo, de (3.27), se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \right) \times \left(\frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial A_1} \right) > \\ & \left(\frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial \omega} \right) \times \left(\frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial A_1} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

El resultado del producto cruzado del lado derecho de la última desigualdad produce

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \right) \times \left(\frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial A_1} \right) > \\ & \left(\frac{\partial \operatorname{Re}\{N(A_1, \omega)\}}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial \operatorname{Im}\{N(A_1, \omega)\}}{\partial A_1} \right) - \left(\frac{\partial \operatorname{Re}\{N(A_1, \omega)\}}{\partial A_1} \right) \left(\frac{\partial \operatorname{Im}\{N(A_1, \omega)\}}{\partial \omega} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde $\operatorname{Re}\{N(A_1, \omega)\} = N(A_1)$ y $\operatorname{Im}\{N(A_1, \omega)\} = N(A_2)$ son tomados de (3.20). Dado que $\partial \operatorname{Re}\{N(A_1, \omega)\} / \partial \omega = 0$,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \right) \times \left(\frac{\partial N(A_1, j\omega)}{\partial A_1} \right) > - \left(\frac{\partial \operatorname{Re}\{N(A_1, \omega)\}}{\partial A_1} \right) \left(\frac{\partial \operatorname{Im}\{N(A_1, \omega)\}}{\partial \omega} \right) \\ & > - \frac{16k_1 k_2 \Phi_1 \Theta_1}{A_1^3 \pi \omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi_1}{A_1} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\Theta_1}{\omega A_1} \right)^2} \\ & \geq - \frac{16k_1 k_2 \Phi_1 \Theta_1}{A_1^3 \pi \omega}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Un análisis detallado de la derivación (3.27) se encuentra en [70]. \square

3.4. Enfoque vía Poincaré - Bendixson

El enfoque presentado en esta sección utiliza el teorema Poincaré-Bendixson para obtener las condiciones necesarias para la existencia de ciclos límite estables, este enfoque considera el sistema de segundo orden tal como:

$$\ddot{\theta} + \phi \dot{\theta} + \gamma \theta = u(t), \quad (3.32)$$

donde $\theta(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ es la posición angular, $\dot{\theta}(t) \in \mathbb{R}$ es la velocidad angular, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control. Asimismo, ϕ y γ son escalares los cuales satisfacen la siguiente Suposición.

Suposición 3.1. El sistema (3.32) no forzado ($u(t) = 0$) satisface las condiciones de

foco estable, es decir:

- (i) Condición de estabilidad asintótica: $\phi > 0, \gamma > 0$.
- (ii) Condición de foco: $\phi^2 - 4\gamma < 0$.

La suposición 3.1 garantiza que la ecuación diferencial homogénea

$$\ddot{\theta} + \phi\dot{\theta} + \gamma\theta = 0,$$

no presenta soluciones periódicas, donde el punto de equilibrio $[\theta^*, \dot{\theta}^*]^T = [0, 0] \in \mathbb{R}^2$ se comporta como foco estable.

3.4.1. Objetivo de control

Formalmente, el *objetivo* es diseñar una función no lineal

$$u = \psi(\theta(t), \dot{\theta}(t)), \quad (3.33)$$

como componente interno del sistema homogéneo (3.32) tal que $\psi(\theta, \dot{\theta})$ fuerce el sistema en lazo cerrado

$$\ddot{\theta} + \phi\dot{\theta} + \gamma\theta - \psi(\theta, \dot{\theta}) = 0, \quad (3.34)$$

a tener una solución periódica. En otras palabras, $\psi(\theta, \dot{\theta})$ proporcionará un movimiento orbital periódico estable (ciclo límite atractor) del sistema (3.34). Para establecer formalmente el problema, es reescrito el sistema (3.34) en el modelo en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \psi(x_1, x_2), \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde $x(t) = [x_1 \ x_2]^T = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ es el vector de estado. La idea es sintetizar un esquema a doble sistema de inferencia difusa $\psi(x_1, x_2)$ dado en (3.14), de modo que el vector de estado exhiba una trayectoria periódica, es decir:

$$x(t) = x(t + T), \quad (3.36)$$

donde $T = 2\pi/\omega$ es el período y ω es la frecuencia deseada. El diseño del componente no lineal se basará en un esquema del sistema a doble inferencia difusa (2-FIS) de la forma

obtenida en (3.14). Los detalles generales sobre la síntesis del componente difuso no lineal $\psi(x_1, x_2)$ puede ser consultada en la Sección 3.2.

3.4.2. Regiones de acción

Considere el sistema (3.35) en lazo cerrado sin señal de referencia externa, es decir su valor deseado (*set point*, por sus siglas en inglés) ($sp = 0$). El diseño de $\psi(x_1, x_2)$ estará basado en lógica difusa a través de un esquema a 2-FIS, el cual se comportará como un componente interno de la planta. Para aplicar esta metodología son definidas primeramente las regiones en las cuales el sistema (3.35) presentará la dinámica deseada.

Al obtener la función por partes que delimita al sistema 2-FIS (3.14), son definidos los siguientes intervalos en los cuales actuará el componente difuso, para el FIS1 se establecen tal como:

$$\begin{aligned} I_{x_1}(-1) &= \{x_1 \in \mathbb{R} : x_1 < -\Phi_1\}, \\ I_{x_1}(0) &= \{x_1 \in \mathbb{R} : |x_1| < \Phi_1\}, \\ I_{x_1}(1) &= \{x_1 \in \mathbb{R} : x_1 > \Phi_1\}, \end{aligned}$$

mientras que para el FIS2 resulta como sigue:

$$\begin{aligned} I_{x_2}(-1) &= \{x_2 \in \mathbb{R} : x_2 < -\Theta_1\}, \\ I_{x_2}(0) &= \{x_2 \in \mathbb{R} : |x_2| < \Theta_1\}, \\ I_{x_2}(1) &= \{x_2 \in \mathbb{R} : x_2 > \Theta_1\}, \end{aligned}$$

Sea $R_{(m,n)} = I_{x_1}(m) \times I_{x_2}(n)$, ($m, n = -1, 0, 1$) las regiones en el plano fase tal como:

$$\begin{aligned} R_{(0,0)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \Phi_1, |x_2| \leq \Theta_1\}, \\ R_{(+1,0)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > \Phi_1, |x_2| \leq \Theta_1\}, \\ R_{(-1,0)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -\Phi_1, |x_2| \leq \Theta_1\}, \\ R_{(0,+1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \Phi_1, x_2 > \Theta_1\}, \\ R_{(0,-1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq \Phi_1, x_2 < -\Theta_1\}, \\ R_{(+1,+1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > \Phi_1, x_2 > \Theta_1\}, \\ R_{(-1,+1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -\Phi_1, x_2 > \Theta_1\}, \\ R_{(-1,-1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -\Phi_1, x_2 < -\Theta_1\}, \\ R_{(+1,-1)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > \Phi_1, x_2 < -\Theta_1\}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Estas regiones disjuntas dividen el plano de fase en nueve (9) regiones de acción del 2-FIS para el sistema (3.35) (ver Figura 3.3). Entonces al considerar (3.14) para $\psi(x_1, x_2)$, y tomando como sistema en lazo cerrado (3.35), este puede ser reescrito como:

$$\dot{x} = Ax + B \begin{cases} -U_1 + Q_1 & \text{si } x \in R_{(-1,1)} \\ \frac{U_1}{\Phi_1}x_1 + Q_1 & \text{si } x \in R_{(0,1)} \\ U_1 + Q_1 & \text{si } x \in R_{(1,1)} \\ -U_1 + \frac{Q_1}{\Theta_1}x_2 & \text{si } x \in R_{(-1,0)} \\ \frac{U_1}{\Phi_1}x_1 + \frac{Q_1}{\Theta_1}x_2 & \text{si } x \in R_{(0,0)} \\ U_1 + \frac{Q_1}{\Theta_1}x_2 & \text{si } x \in R_{(1,0)} \\ -U_1 - Q_1 & \text{si } x \in R_{(-1,-1)} \\ \frac{U_1}{\Phi_1}x_1 - Q_1 & \text{si } x \in R_{(0,-1)} \\ U_1 - Q_1 & \text{si } x \in R_{(1,-1)}, \end{cases} \quad (3.38)$$

con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\phi \end{pmatrix}$, $B = (0, 1)^T$ y $x = (x_1, x_2)^T$.

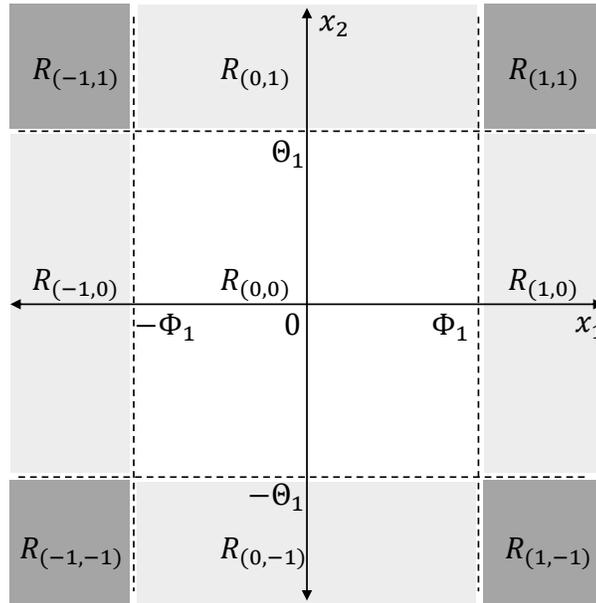


Figura 3.3: Regiones de la dinámica.

A continuación, se establecen condiciones para la existencia de un ciclo límite estable con base en el teorema de Poincaré-Bendixson. Es decir, son obtenidas analíticamente las condiciones que aseguran la existencia de un ciclo límite atractor en correspondencia con la condición inicial del vector de estado, o bien, de la región en que se encuentre el estado en el instante t .

3.4.3. Condiciones iniciales dentro del ciclo límite

Se emulará lo establecido en el Teorema 2.1(b) correspondiente a la Figura 2.9(b) y serán establecidas las condiciones para forzar la convergencia de las soluciones a una órbita periódica. El primer paso es hacer bifurcar [93] el sistema y obtener un punto de equilibrio inestable encerrado por una región \mathcal{R} . Los resultados son presentados en el siguiente Lema.

Lema 3.1. *El sistema en lazo cerrado (3.38) tiene al origen como su único punto de equilibrio y este es un punto de equilibrio repulsor (fuente) si*

$$\Phi_1 > \frac{U_1}{\gamma} \quad y \quad \Theta_1 < \frac{Q_1}{\phi}, \quad (3.39)$$

siendo γ , ϕ , U_1 , Φ_1 y Θ_1 constantes positivas.

Prueba: Es analizada la existencia de conjuntos invariantes cuando las condiciones iniciales están dentro del conjunto $R_{(0,0)}$. La dinámica del sistema de lazo cerrado en este conjunto viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma + \frac{U_1}{\Phi_1} & -\phi + \frac{Q_1}{\Theta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

siendo el origen el único punto de equilibrio. El polinomio característico del sistema de lazo cerrado (3.40) es:

$$p_{(0,0)}(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{Q_1}{\Theta_1} - \phi \right) \lambda + \left(\gamma - \frac{U_1}{\Phi_1} \right), \quad (3.41)$$

el cual posee raíces reales positivas si $\gamma > U_1/\Phi_1$ y $\phi < Q_1/\Theta_1$. Por lo tanto, el origen es un punto de equilibrio inestable. En otras palabras, el origen es un punto de equilibrio único del sistema de lazo cerrado (3.38) y este es repulsor. En la Figura 3.4 muestra el bosquejo del comportamiento cualitativo en la región $R_{(0,0)}$.

3.4.4. Condiciones iniciales fuera del ciclo límite

Primeramente, es necesario demostrar que no existen puntos equilibrios dentro de las regiones que no pertenecen a $R_{(0,0)}$, para ninguna condición inicial dentro de la región en estudio.

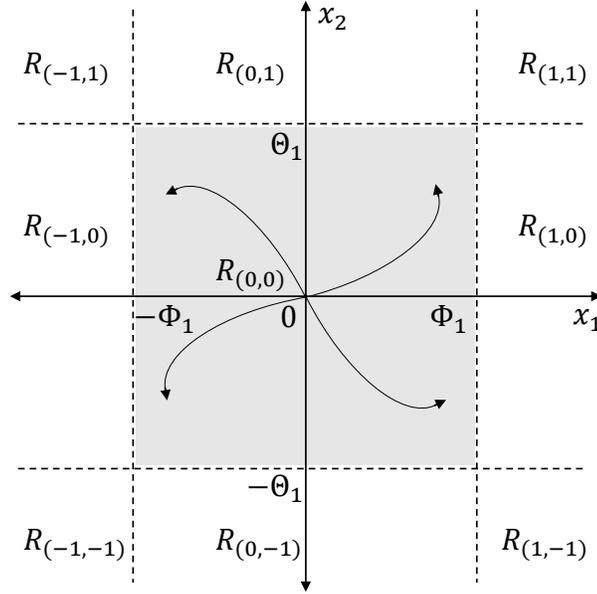


Figura 3.4: Foco inestable en el sistema para cualquier condición inicial en $R_{(0,0)}$.

Regiones $R_{(-1,\pm 1)}$, $R_{(0,\pm 1)}$, y $R_{(+1,\pm 1)}$. Estas regiones se ilustran en la Figura 3.5 como áreas grises. Para el análisis, considere el sistema de lazo cerrado (3.35) gobernado por

$$u = \begin{cases} -U_1 + Q_1, & \text{si } x \in R_{(-1,+1)}, \\ \frac{U_1}{\Phi_1}x_1 + Q_1, & \text{si } x \in R_{(0,+1)}, \\ U_1 + Q_1, & \text{si } x \in R_{(+1,+1)}, \\ -U_1 - Q_1, & \text{si } x \in R_{(-1,-1)}, \\ \frac{U_1}{\Phi_1}x_1 - Q_1, & \text{si } x \in R_{(0,-1)}, \\ U_1 - Q_1, & \text{si } x \in R_{(+1,-1)}, \end{cases} \quad (3.42)$$

cuyos puntos de equilibrio son obtenidos tal que:

$$x^* = A^{-1}Bu = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (3.43)$$

los cuales se encuentran en el segmento $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^* \in \mathbb{R}, x_2^* = 0\}$ para cualquier entrada externa (3.42) que actúe en estas regiones. Nótese que el conjunto invariante Θ no se encuentra dentro de $R_{(-1,\pm 1)}$, $R_{(0,\pm 1)}$, o $R_{(+1,\pm 1)}$. Por lo tanto, las regiones analizadas solo presentan puntos de equilibrio virtuales (puntos de equilibrio fuera de la región de análisis).

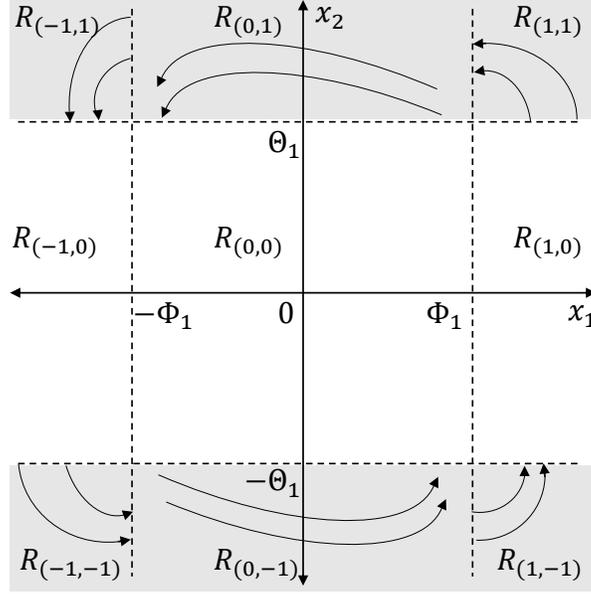


Figura 3.5: Soluciones en las regiones $R(m, \pm 1)$, $m = -1, 0, 1$.

Regiones $R_{(\pm 1, 0)}$ Estas regiones son mostradas en la Figura 3.6 como áreas de color gris. Se considera que la acción del 2-FIS:

$$u = \begin{cases} -U_1 + \frac{Q_1}{\Theta_1} x_2, & \text{si } x \in R_{(-1, 0)}, \\ U_1 + \frac{Q_1}{\Theta_1} x_2, & \text{si } x \in R_{(+1, 0)}, \end{cases} \quad (3.44)$$

no provee equilibrios en $R_{(-1, 0)}$ ni $R_{(1, 0)}$ ya que el equilibrio para $R_{(-1, 0)}$ es $x^* = [U_1/\gamma \ 0]^T \in R_{(1, 0)}$, y por simetría, el equilibrio para $R_{(1, 0)}$ es $x^* = [-U_1/\gamma \ 0]^T \in R_{(-1, 0)}$. Note que los equilibrios virtuales para el sistema en las regiones $R_{(-1, n)}$, $n = -1, 0, 1$, se encuentran situados en el eje positivo x_1 y por simetría, los equilibrios virtuales correspondientes a las regiones $R_{(1, n)}$ están ubicados en el eje negativo de x_1 . El equilibrio virtual para el sistema en $R_{(0, 1)}$ se encuentra en el eje negativo x_1 , y el de $R_{(0, -1)}$ en el eje positivo x_1 .

Además, en el sistema físico, se proporcionan los parámetros ϕ y γ . Asimismo, las salidas de los sistemas de inferencia difusa U_1 y Q_1 se encuentran previamente definidas y fijadas. Por lo tanto, los parámetros a diseñar son las amplitudes de las funciones de pertenencia Φ_1 y Θ_1 , de tal forma que garantice que las soluciones no escapen independientemente de la condición inicial en las regiones del plano fase definidas en (3.37). El siguiente Lema expone argumentos para garantizar esta condición necesaria.

Lema 3.2. *Sea el sistema lineal por partes (3.38), el cual satisface la Suposición 3.1. Entonces cada equilibrio virtual del sistema (3.38), presenta comportamiento tipo foco*

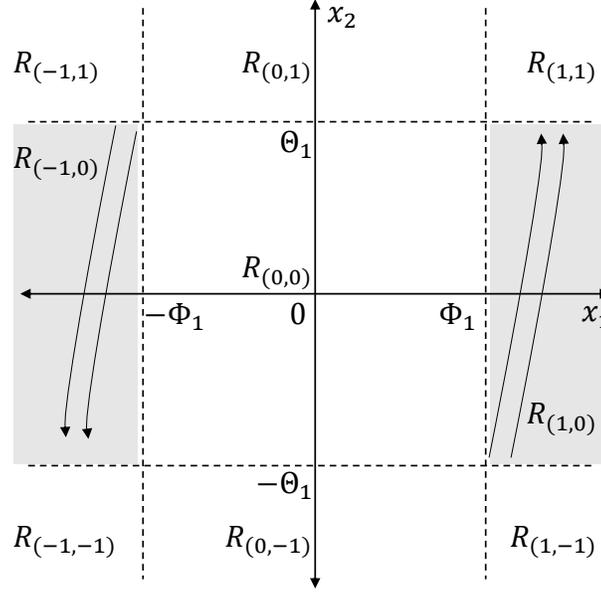


Figura 3.6: Soluciones en las regiones $R(\pm 1, 0)$.

estable si Φ_1 y Θ_1 satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} &< \Phi_1, \\ \frac{\Theta_1}{\phi + 2\sqrt{\gamma}} &< \Theta_1, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde U_1 , Φ_1 son estrictamente positivos. Además, los equilibrios virtuales para el sistema en las regiones $R_{(m,\pm 1)}$, $m = -1, 0, 1$, son estables, mientras que los de $R_{(\pm 1,0)}$ son virtualmente repulsores.

Prueba: Analizaremos la estabilidad en cada región.

Regiones $R_{(\pm 1,\pm 1)}$. Estas regiones se encuentran en las esquinas del retrato de fase. El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\phi \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

del sistema de lazo cerrado (3.38) es $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \phi\lambda + \gamma$. Dado que la desigualdad $\phi^2 - 4\gamma$ es negativa, debido a la Suposición 3.1, los equilibrios virtuales en las regiones ubicadas en las esquinas $R_{(\pm 1,\pm 1)}$ presentan comportamiento tipo *foco estable*. En otras palabras, las trayectorias iniciadas en estas regiones intentarán alcanzar el conjunto invariante Θ , sin embargo, el sistema de lazo cerrado conmutará a otra estructura, dependiendo de la región en la cual ingrese la trayectoria.

Regiones $R_{(0,\pm 1)}$. En estas regiones, la acción de 2-FIS es:

$$u = \begin{cases} \frac{U_1}{\Phi_1}x_1 + Q_1, & \text{si } x \in R_{(0,+1)}, \\ \frac{U_1}{\Phi_1}x_1 - Q_1, & \text{si } x \in R_{(0,-1)}. \end{cases} \quad (3.47)$$

La matriz compañera en las regiones $R_{(0,\pm 1)}$ es:

$$A_{(0,\pm 1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma + \frac{U_1}{\Phi_1} & -\phi \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

cuyo polinomio característico

$$p_{(0,\pm 1)}(\lambda) = \lambda^2 + \phi\lambda + \left(\gamma - \frac{U_1}{\Phi_1}\right),$$

el cual presenta valores propios complejos conjugados tal que:

$$\phi^2 - 4\left(\gamma - \frac{U_1}{\Phi_1}\right) < 0,$$

o en su forma equivalente tal como:

$$U_1 < \left(\gamma - \frac{\phi^2}{4}\right)\Phi_1.$$

Debido a la **Suposición 3.1-(ii)**, la relación $\gamma - \phi^2/4$ es estrictamente positiva, entonces:

$$0 < \frac{U_1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} < \Phi_1. \quad (3.49)$$

Debido a que la Traza($A_{(0,\pm 1)}$) = $-\phi$ es negativa y que $\det(A_{(0,\pm 1)}) = \gamma - U_1/\Phi_1$ es positivo (ver desigualdades (3.39)), es posible concluir que los valores propios de $p_{(0,\pm 1)}(\lambda)$ presentan raíces complejas conjugadas con parte real negativa. Por consiguiente, el equilibrio virtual de $R_{(0,\pm 1)}$ exhibe comportamiento de foco estable.

Regiones $R_{(\pm 1,0)}$. En estas regiones, la acción del doble sistema de inferencia difusa es

$$u = \begin{cases} -U_1 + \frac{Q_1}{\Theta_1}x_2, & \text{si } x \in R_{(-1,0)}, \\ U_1 + \frac{Q_1}{\Theta_1}x_2, & \text{si } x \in R_{(+1,0)}, \end{cases} \quad (3.50)$$

donde la matriz compañera asociada es:

$$A_{(\pm 1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -\phi + \frac{Q_1}{\Theta_1} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

cuyo polinomio característico es tal que:

$$p_{(\pm 1,0)}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\phi - \frac{Q_1}{\Theta_1} \right) \lambda + \gamma. \quad (3.52)$$

Este polinomio presenta raíces complejas si su discriminante satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \left(\phi - \frac{Q_1}{\Theta_1} \right)^2 - 4\gamma < 0, \\ & \left(\phi - \frac{Q_1}{\Theta_1} - 2\sqrt{\gamma} \right) \left(\phi - \frac{Q_1}{\Theta_1} + 2\sqrt{\gamma} \right) < 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Si $\phi - Q_1/\Theta_1 - 2\sqrt{\gamma} > 0$ y $\phi - Q_1/\Theta_1 + 2\sqrt{\gamma} < 0$, y ya que $\phi^2 - 4\gamma < 0$, entonces $\Theta_1 < Q_1/(\phi - 2\sqrt{\gamma}) < 0$ y $\Theta_1 < Q_1/(\phi + 2\sqrt{\gamma})$, respectivamente, lo cual no es posible debido al hecho que $\Theta_1 > 0$.

Por el contrario, si $\phi - Q_1/\Theta_1 - 2\sqrt{\gamma} < 0$ y $\phi - Q_1/\Theta_1 + 2\sqrt{\gamma} > 0$, dada la condición $\phi^2 - 4\gamma < 0$ se obtiene $\Theta_1 > Q_1/(\phi - 2\sqrt{\gamma})$ y $\Theta_1 > Q_1/(\phi + 2\sqrt{\gamma})$, respectivamente. Por lo tanto, $\Theta_1 > Q_1/(\phi + 2\sqrt{\gamma})$. Finalmente, $\text{Traza}(A_{(\pm 1,0)}) = -\phi + Q_1/\Theta_1 > 0$ (ver desigualdades (3.39)) y $\det(A_{(\pm 1,0)}) = -\gamma$ es estricto negativo, lo que significa la presencia de un comportamiento de foco inestable. Por último, para exhibir un ciclo límite desde el origen, es necesario asegurar que las soluciones no escapen a través las regiones virtualmente inestables.

Teorema 3.2. *Sea el sistema de lazo cerrado (3.38) el cual satisface la Suposición 3.1. Entonces, el sistema (3.38), posee un ciclo límite estable desde el origen siempre que:*

$$\begin{aligned} & \frac{U_1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} < \Phi_1, \\ & \max \left\{ \frac{Q_1}{\phi + 2\sqrt{\gamma}}, \frac{Q_1}{2\phi} \right\} < \Theta_1 < \frac{Q_1}{\phi}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Prueba: Acorde al **Lema 3.2**, las soluciones en $R_{(\pm 1,m)}$ se mantienen alrededor de la región $R_{(0,0)}$ debido a la estabilidad de los equilibrios virtuales. Por lo tanto, para obtener la órbita periódica estable es suficiente demostrar que cualquier trayectoria que

pase por $R_{(\pm 1,0)}$ no aumenta en tiempo finito. Es decir, las soluciones estables deben ser más rápidas que las inestables con respecto al tiempo de respuesta, para evitar que escapen a través de $R_{(\pm 1,0)}$. Para lograrlo, es necesario demostrar que la parte real del polinomio característico del sistema regido en $R_{(0,\pm 1)}$ es modularmente mayor que la de $R_{(\pm 1,0)}$; es decir,

$$\left| \phi - \frac{Q_1}{\Theta_1} \right| < |-\phi| \Leftrightarrow \Theta_1 > \frac{Q_1}{2\phi}. \quad (3.55)$$

Al sustituir (3.55) en (3.45) se obtienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} &< \Phi_1, \\ \text{máx} \left\{ \frac{Q_1}{\phi + 2\sqrt{\gamma}}, \frac{Q_1}{2\phi} \right\} &< \Theta_1, \end{aligned} \quad (3.56)$$

cuyo significado es que, cualquier solución fuera de la región $R_{(0,0)}$ tiende al origen según $t \rightarrow \infty$, mientras las condiciones (3.39) indican que el origen exhibe un foco inestable y que las soluciones dentro de la región $R_{(0,0)}$ escapan en sentido contrario al punto de equilibrio (tienden a divergir según $t \rightarrow \infty$). Por lo tanto, al unificar las condiciones (3.39) y (3.56), las soluciones exhiben una órbita periódica si

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} &< \Phi_1, \\ \text{máx} \left\{ \frac{Q_1}{\phi + 2\sqrt{\gamma}}, \frac{Q_1}{2\phi} \right\} &< \Theta_1 < \frac{Q_1}{\phi}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Asimismo, la Figura 3.7 expone el comportamiento en el plano fase de las soluciones obtenidas mediante la aplicación del teorema Poincaré-Bendixson para la existencia de ciclos límites.

3.5. Consideraciones del capítulo

Basado en el método FD se diseñan los parámetros de las funciones de pertenencia del esquema a 2-FIS tipo Mamdani propuesto. Las ganancias de ajuste son calculadas con el fin de generar auto-oscilaciones con amplitud y frecuencia deseadas, sin necesidad de una señal de referencia externa. El enfoque propuesto vía Poincaré-Bendixson permite establecer analíticamente las condiciones de diseño del esquema a 2-FIS para garantizar la existencia en el sistema dinámico de un ciclo límite estable. El siguiente capítulo expone

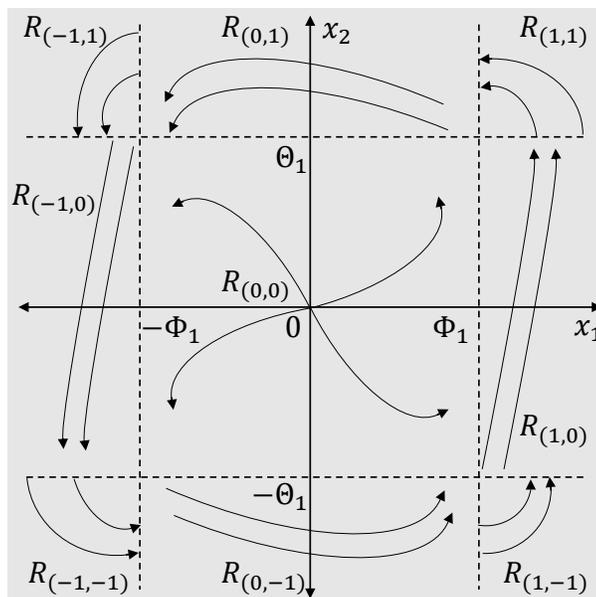


Figura 3.7: Comportamiento de las soluciones vía Poincaré-Bendixson.

los modelos matemáticos de los sistemas dinámicos a utilizar en la presente investigación.

Capítulo 4

Casos de estudio: sistemas pendulares

El presente capítulo expone la representación matemática con la cual se describe la dinámica de los sistemas pendulares utilizados en este trabajo como casos de estudio. Asimismo, se presenta una descripción de cada sistema mecánico así como su objetivo de control. Dentro de los sistemas a tratar se encuentran el péndulo simple, carro péndulo y el péndulo rotatorio invertido (péndulo de Furuta).

4.1. Representación matemática de los sistemas pendulares

Con el propósito de representar de forma homogénea la expresión matemática que describa los sistemas dinámicos expuestos en este trabajo de tesis. Se establece su representación en espacios de estados tal que: sea un sistema no lineal con p entradas, q salidas y n variables de estado, tal como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x(t)) + Gu(t), \\ y &= Hx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad F(x(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es llamado vector de estados; $y(t) \in \mathbb{R}^q$ se denomina vector de salida; $u(t) \in \mathbb{R}^p$ representa el vector de entradas. Asimismo, $F = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ son funciones vectoriales continuas y dependientes del estado, $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ representa la matriz de entrada del sistema, H es la matriz de salida, y D es la matriz de transmisión directa. Además, se considera que el sistema es continuo e invariante en el tiempo $t \in \mathbb{R}$. Los sistemas utilizados en este trabajo presentan componentes no lineales, por simplicidad matemática estos son linealizados alrededor del origen como punto de equilibrio, a través de la aplicación del operador Jacobiano al sistema original (4.1) como se describe en [65] tal como:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x_0, u_0) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x_0, u_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1}(x_0, u_0) & \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n}(x_0, u_0) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta u_1}(x_0, u_0) \\ \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta u_p}(x_0, u_0) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Por lo tanto, el sistema en espacio de estados linealizado puede expresarse tal como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

Donde, se considera que la matriz de estados $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no presenta valores propios en el eje imaginario y el grado relativo de (4.5) es mayor que uno (1) con respecto a la salida $y(t)$. Asimismo, la matriz A se considera Hurwitz y el par (A, B) controlable. De similar forma, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ representa el vector de entradas, mientras que $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ es el vector de salida del sistema en espacio de estados. Por simplicidad, se toma $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ como la matriz cero, es decir, se elige que el sistema no tenga transmisión. Entonces para un sistema de orden n las matrices de (4.5) se presentan de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad 1]. \quad (4.6)$$

Asimismo, la función de transferencia de un modelo de espacio de estados continuo e invariante en el tiempo puede ser obtenida de la siguiente manera:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (4.7)$$

Las variables de x_0 y u_0 son los valores del vector de estado y de la entrada respectivamente en el punto de equilibrio. La función de transferencia que se obtiene de u y x a partir del modelo de espacio de estado es:

$$G(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + \dots + c_2s + c_1}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0}. \quad (4.8)$$

Los sistemas utilizados para validar la propuesta de 2-FIS en cada uno de los enfoques propuestos son presentados en sus formas de espacio de estados (4.5) y función de transferencia (4.8).

En el caso particular de los sistemas mecánicos sub-actuados utilizados en este trabajo (péndulo Furuta, carro-péndulo) se hace necesario por razones prácticas incluir un control de estabilización $u_e = -Kx$, ya que estos sistemas son linealizados alrededor del punto de equilibrio inestable $[\pi, 0]$, entonces K representa un vector de ganancias el cual se selecciona tal que $A - BK$ sea Hurwitz (estable). La señal $u_e = -Kx$ de control por retroalimentación de estados es diseñado mediante ubicación de polos. El mismo es responsable de estabilizar primeramente el sistema, con el objetivo de añadir el 2-FIS e inducir auto - oscilaciones. En estos casos se considera $u(t) = u_e + \psi_l$.

4.2. Sistema pendular simple

Con el objetivo de corroborar los resultados previos, se considera llevar a cabo simulaciones numéricas y experimentos sobre un péndulo físico (ver Figuras 4.1 y Figura 4.2), el cual que se encuentra regido por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden tal como:

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \text{sen}(\theta) - f_v\dot{\theta} + K_\tau u(t), \quad (4.9)$$

siendo $\theta(t) \in [-2\pi, 2\pi]$ la posición angular del péndulo, $\dot{\theta}(t) \in \mathbb{R}$ es la velocidad angular, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $t \in \mathbb{R}^+$ es el tiempo, $m > 0$ es la masa de la carga, $l > 0$ denota la longitud del péndulo, $f_v > 0$ es el coeficiente de fricción viscosa, g es la constante de aceleración de la gravedad, K_τ es la constante motor-torque. Los parámetros del péndulo se encuentran resumidos en la Tabla 4.1.

Se considera que $\text{sen}(x) \simeq x$ para ángulos pequeños y se introduce un cambio de

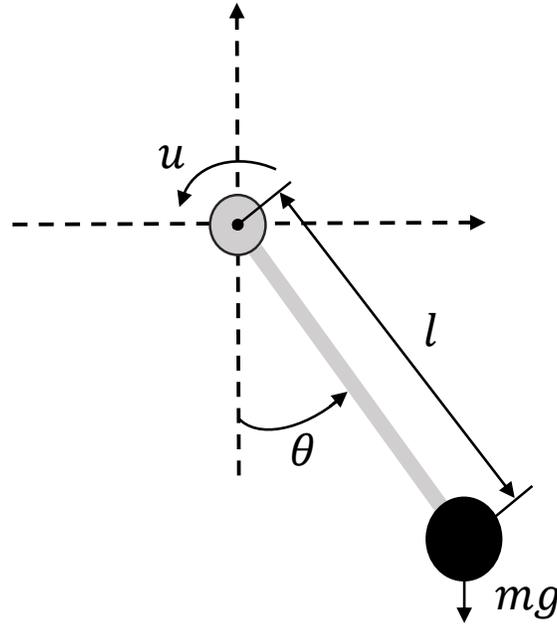


Figura 4.1: Representación física de un péndulo simple.

Tabla 4.1: Especificaciones del péndulo simple.

Descripción	Valor	Unidades
Coefficiente de fricción viscosa (f_v)	2×10^{-2}	$\text{N} \times \text{m} \times \text{s}$
Constante de gravedad (g)	9.81	m/s^2
Longitud del péndulo (l_{ps})	0.19304	m
Masa del péndulo (m_{ps})	0.118	kg
Constante de torque (K_τ)	0.25	$\text{N} \times \text{m}$
Entrada de control $u(t)$	$[-10 \ 10]$	V

coordenadas tal que $x_1(t) = \theta$ y $x_2(t) = \dot{\theta}$. Entonces el sistema (4.9), en una vecindad lo suficientemente pequeña del origen $\theta = 0$, puede ser representado en espacio de estados como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{f_v}{ml^2} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{ml^2} \end{bmatrix}}_B u(t), \quad (4.10)$$

donde por sustitución de los parámetros del modelo del modelo, el sistema se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50.82 & -4.548 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 56.854 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.11)$$

La representación de los sistemas en espacio de estados (4.5), puede ser llevada a la forma de función de transferencia a través de (4.7). Con el propósito de la aplicación del método FD, el sistema (4.11) es representado en su función de transferencia de la forma:



Figura 4.2: Configuración experimental que muestra el sistema de péndulo y el sistema de dSPACE[®] entrada/salidas.

$$G(s) = \frac{56.85}{s^2 + 4.548s + 50.82}. \quad (4.12)$$

4.2.1. Objetivo de control

El problema a resolver es, generar auto-oscilaciones a la salida $y(t) \in \mathbb{R}$ en el sistema dinámico péndulo simple sin necesidad de una señal de referencia externa, solo utilizando un sistema basado en lógica difusa $\psi_l(t)$, utilizando solo la información de los estados del sistema descrito en (4.9).

Entonces el objetivo de control es llevar los estados $(x_1(t), x_2(t))$ del sistema péndulo simple a exhibir un movimiento oscilatorio periódico estable alrededor del origen con una amplitud A_1 y frecuencia ω deseadas, sin necesidad de inyectar una señal de referencia externa.

$$x(t) = x(t + T). \quad (4.13)$$

4.3. Péndulo rotatorio invertido (péndulo de Furuta)

Con el objetivo de inducir auto-oscilaciones en sistemas mecánicos, en particular sistemas sub-actuados se considera el sistema péndulo invertido, mejor conocido como péndulo de Furuta, el cual fue introducido por primera vez por K. Furuta [34] en 1991, mediante el análisis en variables de estado. Este sistema péndulo invertido representa un problema de excelente referencia para los estudios de control y es uno de los más complejos (dos grados de libertad) implementado en sistemas mecánicos. El sistema péndulo de Furuta a utilizar fue fabricado por la compañía Quanser Inc., asociado con (*National Instrument*). El cual consiste en un mecanismo físico muy simple compuesto por una barra vertical (péndulo), una barra horizontal en forma de L (brazo) y un actuador acoplado a la base de un motor DC. La estación de trabajo NI ELVIS II[®] incluye un sistema de sensado (*encoder*) y una aplicación de software de diseño de control, además de un módulo de simulación desarrollado en LabVIEW[®] de National Instruments, el cual se encarga de tomar las decisiones sobre el comportamiento de la planta [79]. La plataforma de trabajo NI ELVIS II[®] de National Instruments permite adquirir las señales de entrada y salida de la planta por medio de un puerto bus serial (USB), y así obtener un enlace en tiempo real en la adquisición de datos (DAQ). Estas entradas y salidas de la planta pueden ser observadas y manipuladas mediante la interfaz gráfica desarrollada en lenguaje de programación LabVIEW[®].

Existen varios métodos para obtener las ecuaciones de movimiento de los sistemas dinámicos, uno de los más aplicados es la formulación Euler-Lagrange [30]. En el caso particular del péndulo rotatorio invertido esta formulación se puede expresar en su forma compacta tal como [29]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + g(q) = u, \quad (4.14)$$

donde $q(t) = [q_1(t), q_2(t)]^T$ es un vector que incluye el ángulo de rotación del brazo q_1 y el ángulo del péndulo q_2 , $u = [0 \ \tau]^T$ es el vector de entradas y $\tau \in \mathbb{R}$ es el torque aplicado sobre la articulación. Donde $M(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ representa la matriz de inercias, la cual es simétrica positiva definida. Asimismo, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^2$ denota el vector que contiene las fuerzas centrífugas y de Coriolis, y $g(q) \in \mathbb{R}^2$ es el vector de fuerzas gravitacionales, estas matrices y vectores se definen como:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix}, C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(q) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Los valores de los parámetros incluidos en los coeficientes expresados en (4.15) se resumen en la Tabla 4.2. El esquema péndulo invertido giratorio con sus componentes es presentado en la Figura 4.3. Asimismo, la Figura 4.4 exhibe la plataforma experimental del péndulo rotatorio invertido. Se considera el modelo (4.14) no lineal, entonces la planta es linealizada alrededor del punto equilibrio inestable $q^* = [0 \ \pi]^T$, donde es realizado un cambio de variable para el vector de estados donde $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$, $x_3 = \dot{q}_1$ y $x_4 = \dot{q}_2$, resultando tal que: $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$. De esta forma (4.14) puede ser representado en su forma de espacio de estados (4.5) tal como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 22.374 & -0.298297 & 0 \\ 0 & 36.2091 & -0.0765277 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.95788 \\ 2.29813 \end{bmatrix} u, \quad (4.16)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Para validar la propuesta del 2-FIS en su enfoque función descriptiva para la generación de auto - oscilaciones estables (ciclos límites estables) se considera el sistema péndulo Furuta (4.16), al cual le es añadido un controlador óptimo cuadrático lineal (LQR por sus siglas en inglés) como controlador de balance. El controlador LQR se encuentra implícito en el algoritmo desarrollado por Quanser[®]. De esta forma se propone un vector de ganancias de control tal que $K = [-6.50, 80.0, -2.75, 11.2247]$ V/rad. Luego, utilizando (4.7) el sistema (4.16) se puede transformar a su expresión como función de transferencia de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{2.298s^2 - 6.687 \times 10^{-07}s - 2.253 \times 10^{-15}}{s^4 + 17s^3 + 104s^2 + 268s + 240}. \quad (4.17)$$

4.3.1. Objetivo de control

El objetivo de control es, inducir en la articulación $y = x_2$ del sistema péndulo invertido un movimiento periódico estable alrededor del punto de equilibrio inestable con una amplitud A_1 y una frecuencia ω deseadas sin necesidad de una señal de referencia externa a través de una configuración a 2-FIS basada en sistemas de inferencia difusa.

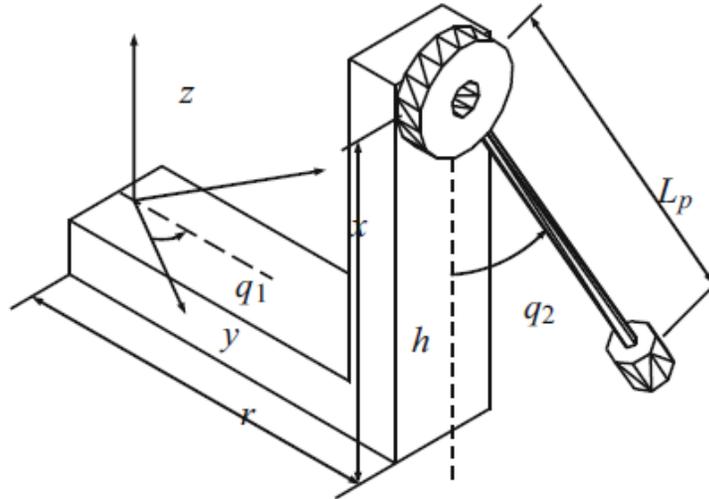


Figura 4.3: Representación péndulo Furuta.

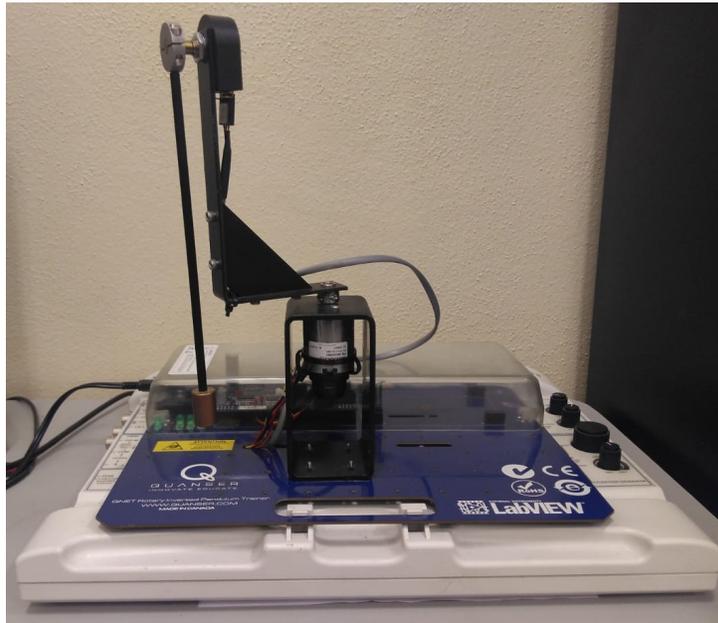


Figura 4.4: Plataforma experimental péndulo Furuta.

4.4. Sistema carro-péndulo

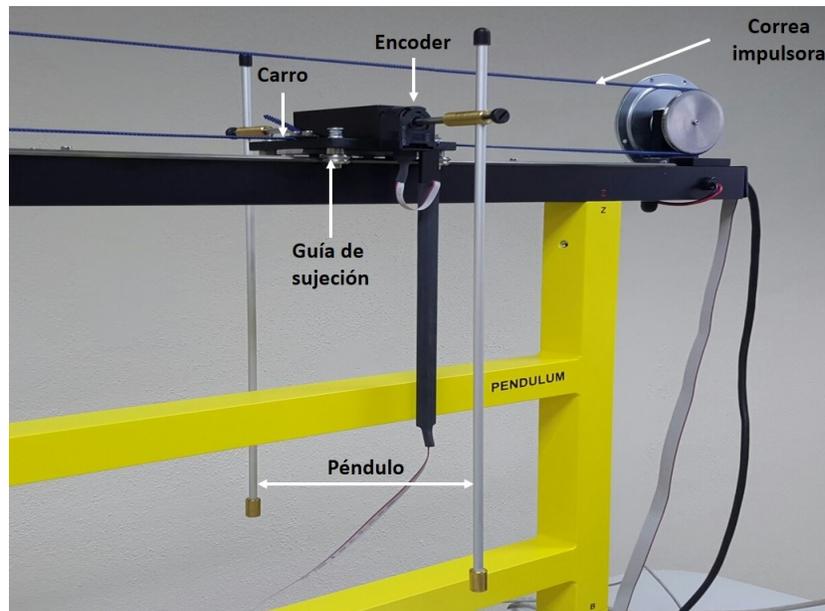
En esta sección se expone la representación física y el modelo matemático del sistema mecánico sub-actuado carro-péndulo.

La Figura 4.5 muestra el sistema pendular, el cual se compone de dos elementos principales que son el carro y el péndulo, entre estos aparece un par cinemático de rotación con fricción. La disposición del mecanismo consiste en un poste montado en un carro de tal manera que, el poste puede balancearse solamente en el plano vertical. El carro es

Tabla 4.2: Especificaciones del péndulo de Furuta

Descripción	Valor	Unidades
Masa del brazo (M_{arm})	0.08	Kg
Longitud del pivote del brazo al pivote pendular (r)	0.0826	m
Masa de la articulación del péndulo y peso combinado (M_p)	0.0270	Kg
Constante de aceleración gravitacional (g)	9.810	m/s ²
Longitud del centro de masa del péndulo desde el pivote (l_p)	0.153	m
Longitud total del péndulo (L_p)	0.191	m
Longitud del pivote del brazo al pivote del péndulo (r)	0.0826	m
Momento de inercia del péndulo sobre su eje de pivote (J_p)	1.70×10^{-4}	kg/m ²
Voltaje de salida máximo del amplificador PWM (V_{max})	24	V

accionado por un motor plano de corriente directa (DC). Para balancear y equilibrar el péndulo, el carro es empujado hacia adelante y hacia atrás sobre un carril de longitud limitada mostrado en la Figura 4.6.

**Figura 4.5:** Sistema mecánico sub-actuado carro-péndulo [45]

El sistema contiene seis bloques: el proceso, sensores, lógica FPGA, generador PWM (modulación por ancho de pulsos PWM, por sus siglas en inglés), algoritmo de control y un reloj. El funcionamiento de los convertidores y del algoritmo de control es controlado

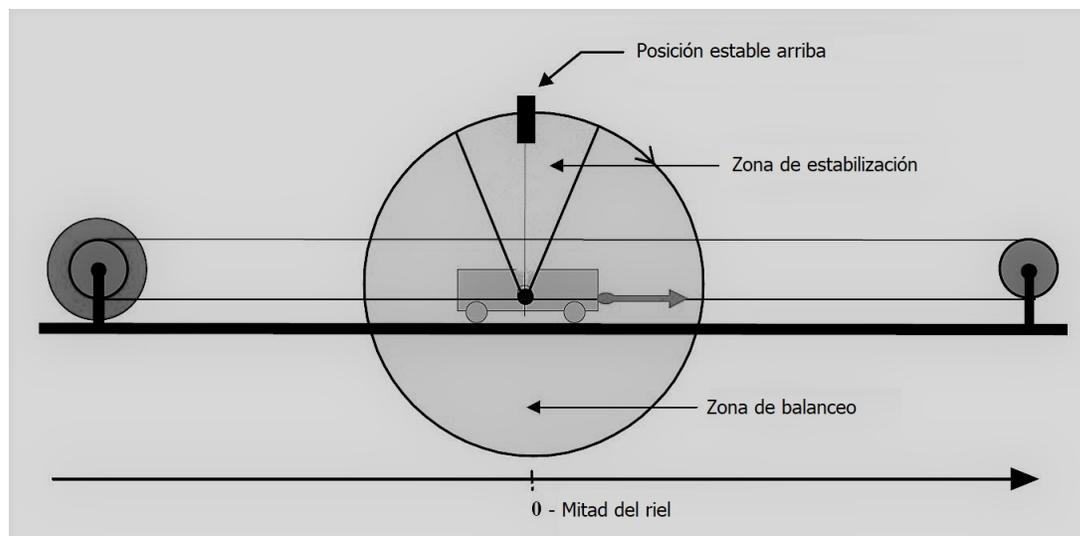


Figura 4.6: Configuración sistema carro - péndulo [45].

por el reloj del software. El tiempo de conversión sucesiva de la señal a la forma digital se denomina período de muestreo T . El reloj suministra un pulso cada T segundos, y el convertidor PWM envía una señal al ordenador cada vez que llega un evento del temporizador. El algoritmo de control calcula el valor de la variable de control y lo envía como número a la lógica FPGA. El FPGA mantiene la señal constante durante el período de muestreo. Normalmente se utiliza el muestreo periódico. Es posible utilizar diferentes períodos de muestreo. Una aplicación del esquema general del sistema de control digital para el control del péndulo se presenta en forma de diagrama de bloques en la Figura 4.7. Se miden dos estados del proceso: la posición del carro x_1 y el ángulo del péndulo x_2 . Los estados del proceso se miden como señales continuas y se digitalizan mediante codificadores ópticos (sensores). La entrada de referencia (valor deseado de la posición del carro x_1^d) se puede generar en una forma digital usando un generador de posición deseado [45].

4.4.1. Modelo matemático del mecanismo

Este sistema constituye un caso concreto de sistema físico en el que se ponen de manifiesto importantes problemas, lo que ha hecho del mismo un banco de pruebas (*benchmark*, en inglés) para sistemas de control. El modelado matemático se lleva a cabo a partir de las leyes de la física, en particular la segunda ley de Newton ($\sum F = ma$). Donde $\sum F$ refiere a la suma de todas las fuerzas (cinética, gravitacional, elástica), mientras que m es la masa del cuerpo y a representa la aceleración del mecanismo.

El modelado matemático y los parámetros físicos del sistema fueron desarrollados

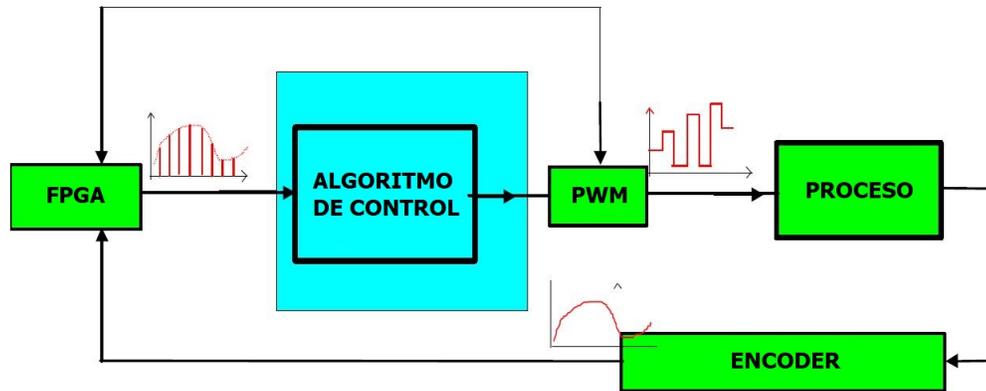


Figura 4.7: Proceso controlado por computadora [45].

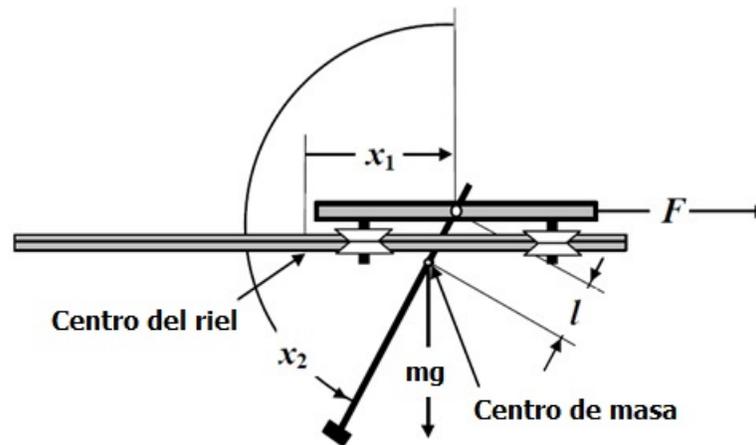


Figura 4.8: Descripción de fuerzas del sistema [45].

por la empresa INTECO considerando el sistema mecánico carro-péndulo mostrado en la Figura 4.8. El péndulo gira en un plano vertical alrededor de un eje situado en el carro. El carro se mueve a lo largo de un carril horizontal, situado en el plano de rotación. El vector de estados del sistema es $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, donde x_1 es la posición del carro, x_2 es el ángulo entre la dirección ascendente y el péndulo, medida en sentido antihorario ($x_2 = 0$ para la posición vertical del péndulo), x_3 es la velocidad del carro, y x_4 es la velocidad angular del péndulo. Una fuerza de control F , paralela al carril, se aplica al carro, ésta es producida por un motor de corriente directa, el cual es controlado por una señal de tensión modulada mediante ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés).

La señal de control del sistema u toma valores máximos en el intervalo $[-1, 1]$. La masa total del péndulo y del carro se denomina m , l es la distancia desde el eje de rotación

del péndulo al centro de masa del sistema, J_p es el momento de inercia del péndulo con respecto a su eje sobre el carro. La fricción del carro está compuesta de dos fuerzas: la fricción estática compensada fuera del modelo y la fricción viscosa proporcional a la velocidad del carro, $f_c x_3$. Además existe un par de fricción en el movimiento angular del péndulo, proporcional a la velocidad angular, $f_p x_4$. Las ecuaciones de estado se pueden ver en (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21) y los parámetros de los que dependen estas ecuaciones en (4.22), (4.23) [45].

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad (4.18)$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \quad (4.19)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{a_1 h_1(x, u) + h_2(x) \cos x_2}{d(x)}, \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{h_1(x, u) \cos x_2 + a_2 h_2(x)}{d(x)}. \quad (4.21)$$

Donde,

$$\begin{aligned} h_1(x, u) &= c_1 u - x_4^2 \operatorname{sen}(x_2) - c_2 x_3, \\ h_2(x) &= g \operatorname{sen}(x_2) - c_3 x_4, \\ d(x) &= b - \cos(x_2)^2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{J_p}{ml}, & a_2 &= \frac{1}{l}, \\ b &= a_1 a_2 = \frac{J_p}{ml^2}, & c_1 &= \frac{p_1}{ml}, \\ c_2 &= \frac{f_c - p_2}{ml}, & c_3 &= \frac{f_p}{ml}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se escoge para la estabilización del sistema el punto de equilibrio dado por el vector $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [0, 0, 0, 0]$, donde para el caso del estado x_2 es un punto de equilibrio inestable, y para el caso del estado x_1 se considera el origen como el punto medio de la viga por la cual se desplaza. Para los estados x_3 y x_4 esta deducción resulta inmediata al determinar su estado estable. Entonces, considerando (4.3) y (4.4) el sistema no lineal (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21) en el espacio de estados puede ser representado mediante el

modelo linealizado tal como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g}{b-1} & \frac{a_1 c_2}{1-b} & \frac{c_3}{1-b} \\ 0 & \frac{a_2 g}{b-1} & \frac{c_2}{1-b} & \frac{a_2 c_3}{1-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a_1 c_1}{b-1} \\ \frac{c_1}{b-1} \end{bmatrix} u, \quad (4.24)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

La Tabla 4.3 muestra los valores de los parámetros que forman parte del modelo matemático.

Tabla 4.3: Parámetros del modelo carro-péndulo.

Descripción	Valor	Unidades
Masa equivalente de carro y péndulo (m)	0.872	kg
Distancia del eje de rotación al centro de masa del sistema (l)	0.011	m
Coefficiente de fricción del carro dinámico (f_c)	0.5	Ns/m
Coefficiente de fricción estática del carro (f_s)	1.203	N
Coefficiente de fricción rotacional (f_p)	6.65×10^{-5}	N·m·s/rad
Momento de inercia del péndulo con respecto al eje de rotación (J_p)	0.00292	kg·m ²
Gravedad (g)	9.81	m/s ²
Fuerza de control a la relación de señal PWM (p_1)	9.4	N
Fuerza de control a la velocidad del carro (p_2)	-0.548	Ns/m
Valor máximo de la señal PWM (u_{max})	0.5	
Masa equivalente del carro (m_c)	0.768	kg
Masa del péndulo (m_{ps})	0.038	kg
Masa de la carga (m_{pw})	0.014	kg
Longitud del riel (R_l)	1.8	m
Longitud del péndulo (l_p)	0.5	m
Distancia entre el centro de la masa del péndulo y el eje de rotación (l_{po})	0.107	m
Longitud de la carga (l_c)	0.03	m
Distancia entre el centro de la masa de carga y el eje de rotación (l_{pwo})	0.354	m
Período péndulo (T)	1.17	s
Momento de inercia relacionado con el centro de masa (J)	0.00282	kg×m ²

Luego de sustituir los parámetros el sistema linealizado resulta como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3674 & -1.2469 & -0.0003 \\ 0 & 33.3992 & -4.0959 & -0.0236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11.1839 \\ 36.7385 \end{bmatrix} u, \quad (4.25)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

De similar forma al mecanismo péndulo de Furuta, el sistema carro-péndulo es un sistema mecánico sub-actuado y realizar el proceso de linealización alrededor de su punto de equilibrio inestable (no Hurwitz) es necesario implementar un control de estabilización mediante ubicación de polos. Entonces se propone una entrada de control tal como:

$$u = -Kx + \psi(x_2, x_4), \quad (4.26)$$

donde $K \in \mathbb{R}$ debe satisfacer que la nueva matriz $\tilde{A} = A - BK$ sea Hurwitz. Las ganancias del vector K fueron calculadas mediante la formulación de Ackermann [1, 84] utilizando el software Matlab[®] considerando polos en lazo cerrado deseados tal que $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -5$, $\lambda_4 = -7$; de los cuales se obtiene un vector de ganancias $K = [-0.5833, 3.8405, -0.7979, 0.6711]$, el cual modifica la dinámica original del sistema (4.25) resultando en una nueva matriz de estados \tilde{A} tal como:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.5233 & -42.5847 & 7.6771 & -7.5053 \\ 21.4287 & -107.6962 & 25.2189 & -24.6771 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Considerando (4.27) y la representación (4.25) se obtiene un sistema en espacio de estados

modificado tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.5233 & -42.5847 & 7.6771 & -7.5053 \\ 21.4287 & -107.6962 & 25.2189 & -24.6771 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11.1839 \\ 36.7385 \end{bmatrix} \psi(x_2, x_4),$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$
(4.28)

Entonces, el sistema en espacio de estados (4.28) es transformado a su representación de función de transferencia a través de (4.7) para la salida del sistema $y = x_2$ resultando como:

$$G(s) = \frac{36.74s^2 + 0.0011s - 1.659 \times 10^{-14}}{s^4 + 17s^3 + 101s^2 + 247s + 210}.$$
(4.29)

4.4.2. Objetivo de control

El objetivo de control es, inducir en la articulación $y = x_2$ del sistema carro-péndulo un movimiento periódico estable alrededor del punto de equilibrio inestable con una amplitud A_1 y una frecuencia ω deseadas sin necesidad de una señal de referencia externa a través de una configuración a 2-FIS basada en sistemas de inferencia difusa.

4.4.3. Análisis del sistema carro – péndulo con dinámica añadida de los actuadores

Considere la representación del modelo matemático linealizado en espacios de estados tal que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{u} &= -k_c u + \tau \\ y &= Cx(t), \end{aligned}$$
(4.30)

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados; $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la matriz de estados, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ es la matriz de salida mientras y k_c como una constante positiva. La entrada de control mediante el torque es definida por τ . Se asume que la matriz A no tiene

valores propios en el eje imaginario y el grado relativo es mayor que uno con respecto a la salida $y(t)$. Además, la matriz A se considera Hurwitz. El vector $\dot{u}(t)$ pone de manifiesto la adición de una componente dinámica al sistema, la cual corresponde a los actuadores de la planta.

De esta forma, se obtiene un nuevo vector de estados $z = [x, u]^T$, el cual se asocia con una nueva estructura del sistema (4.30) tal como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{(1 \times n)} & -k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{(n \times 1)} \\ 1 \end{bmatrix} \tau, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

De esta forma, considerando (4.31) se propone el siguiente doble sistema difuso (2-FIS) asociado a τ :

$$\tau = Kz + \psi(x, k_1, k_2), \quad (4.32)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ se plantea como un controlador de estabilización del sistema, el cual permite cumplir la condición de Hurwitz. El término $\psi(x, k_1, k_2)$ representa el Doble Controlador Difuso, capaz de generar oscilaciones no lineales en la planta. Asimismo, los parámetros k_1 y k_2 son obtenidos de forma tal que la salida escalar del sistema $y = x(t) : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ converja a una trayectoria cerrada y aislada con una amplitud A_1 y frecuencia ω deseadas, de la forma:

$$y_{ss}(t + T) = y_{ss}(t), \quad t \geq 0, \quad (4.33)$$

para un período $T = 2\pi/\omega$ y condiciones iniciales $x(0)$ suficientemente cerca al ciclo límite, donde $y_{ss}(t)$ es la solución de $y(t)$ en estado estable.

Se asume que el 2-FIS presenta dos parámetros $k_1 \in \mathbb{R}$ y $k_2 \in \mathbb{R}$ dependientes de la amplitud A_1 y frecuencia ω deseadas del ciclo límite. Estos tienen como objetivo el ajuste del 2-FIS para diseñar el universo de discurso de las funciones de pertenencia de los controladores difusos y con ello generar un movimiento periódico en la salida de la planta. Las expresiones analíticas de k_1 y k_2 se obtienen utilizando el método en el dominio de la frecuencia conocido como función descriptiva [13].

Se consideran las matrices A, B, C del sistema (4.25) como punto de partida en el desarrollo de este análisis. De esta forma, el sistema no lineal (4.18), en el espacio de estados se puede representar mediante su modelo linealizado considerando la aplicación

operador Jacobiano [65] tal como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g}{b-1} & \frac{a_1 c_2}{c_2} & \frac{c_3}{a_2 c_3} \\ 0 & \frac{a_2 g}{b-1} & \frac{1-b}{1-b} & \frac{1-b}{1-b} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{(4 \times 1)} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando (4.30) y (4.31) y al sustituir los valores numéricos en (4.34) y si $k_c = 1$, se modifica la estructura del de modelo en espacio de estados resultando en

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.37 & -1.25 & -3 \times 10^{-4} & 11.18 \\ 0 & 33.31 & -4.01 & -0.024 & 36.74 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz de estados (4.35) son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5.7489$, $\lambda_3 = -5.8196$, $\lambda_4 = -1.1998$ y $\lambda_5 = -1.0$. Es posible apreciar que la matriz (4.35) no es Hurwitz. Para cumplir esta premisa del sistema (4.30) se diseña un vector de ganancias \mathbf{K} utilizando el método de Ackermann [1] tal que los polos en lazo cerrado sean $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = -4$ y $\lambda_5 = -5$, inyectados a (4.34) a través de $A - BK$ resultando en el

siguiente sistema en espacio de estados tal que:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.37 & -1.25 & -3 \times 10^{-4} & 11.18 \\ 0 & 33.40 & -4.10 & -0.024 & 36.74 \\ 0.33 & -19.80 & 2.29 & -3.44 & -13.73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Entonces, considerando (4.36), es calculada la función de transferencia resultando tal como:

$$G(s) = \frac{36.74s^2 + 0.0011s - 3.401 \times 10^{-16}}{s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 274s + 120} \tag{4.37}$$

4.5. Consideraciones finales

Fueron presentados las especificaciones y los modelos dinámicos de los mecanismos en diferentes formas de expresión matemáticas a utilizar. Los mismos son considerados para verificar el desempeño de la propuesta del doble sistema de inferencia difusa (2-FIS) para cada enfoque presentado en este trabajo investigativo.

Capítulo 5

Resultados en simulación y experimentales

En este capítulo se expone la implementación del 2-FIS en varios sistemas mecánicos entre los cuales se encuentran el péndulo simple, péndulo rotatorio invertido (péndulo de Furuta [35]), sistema carro - péndulo [29]. En estos casos son utilizados equipos de laboratorio, donde los parámetros físicos y los modelos matemáticos son proporcionados por el fabricante. Son realizadas simulaciones y experimentos en cada mecanismo. Se realizó el diseño del esquema a 2-FIS para cada enfoque propuesto (FD y P-B). Esto, con el propósito de obtener un movimiento periódico (ciclo límite estable) sin necesidad de una señal de referencia externa y con una amplitud y frecuencia deseadas.

5.1. Sistema pendular simple

5.1.1. Enfoque vía función descriptiva

Utilizando las ecuaciones (3.25),(3.26), son calculados los valores de k_1 y k_2 correspondientes. Fueron realizadas varias simulaciones definiendo amplitud y frecuencia deseadas del ciclo límite, considerando diferentes condiciones iniciales para verificar el desempeño del sistema 2-FIS propuesto. Se definió una amplitud ($A_1 = 0.2$ rad) y una frecuencia angular ($\omega = 3$ rad/s) deseadas. La Tabla 5.1 muestra los resultados numéricos y de diseño obtenidos con base a las simulaciones realizadas. En la misma se exponen los valores k_1 y k_2 obtenidos para las frecuencias ω y amplitud A_1 deseadas en el ciclo límite. De esta forma, son definidos los parámetros de los sistemas de inferencia difusa FIS1 tal que $\Phi_1 = 0.19$ y $U_1 = 0.2$, de igual manera para el FIS2 se definen $\Theta_1 = 0.59$ y $Q_1 = 0.6$.

Simulación 1. Para los valores expuestos en la Tabla 5.1, y tomando como con-

Tabla 5.1: Resultados en simulación

ω deseada	A_1 deseada	k_1	k_2	ω en simulación	A_1 simulación
3	0.20	-0.7360	-0.0800	2.9919	0.2057

dición inicial $[x_1(0), x_2(0)]^T = [0.25, 0]^T$ fuera del ciclo límite, se puede apreciar en la Figura 5.1(a) que la solución (trayectoria color rojo) disminuye su amplitud y converge a una órbita. Asimismo, en el plano fase mostrado en la Figura 5.1(b) se puede verificar como la trayectoria se establece en un ciclo límite estable.

Simulación 2. De forma similar, con la condición inicial $[x_1(0), x_2(0)] = [0.15, 0]$ se obtiene una solución que aumenta su amplitud y se aproxima a una única órbita periódica (ver trayectoria color negro en la Figura 5.1(a)). Del mismo modo este resultado se corrobora en el plano fase expuesto en la Figura 5.1(b), donde la trayectoria (color negro) aumenta gradualmente su amplitud hasta converger en el ciclo límite estable. La Figura 5.1(c) expone el comportamiento la señal del 2-FIS necesaria para inducir las auto-oscilaciones en ambas simulaciones.

Simulación 3. De similar manera, fueron realizadas cuatro (4) simulaciones numéricas con el objetivo de verificar el comportamiento de las soluciones en diferentes regiones del plano fase. Dos de las simulaciones tomaron condiciones iniciales tal que:

- $[x_1(0), x_2(0)] = [0.2, 0.6]$,
- $[x_1(0), x_2(0)] = [-0.2, -0.6]$,

mientras que la dos restantes simulaciones toman como condición inicial tal que:

- $[x_1(0), x_2(0)] = [0.25, -0.6]$,
- $[x_1(0), x_2(0)] = [-0.25, 0.6]$.

En la Figura 5.2(a) se puede apreciar como las cuatro trayectorias convergen hacia el mismo movimiento periódico independientemente de las condiciones iniciales, es necesario notar que existe un pequeño desfase entre cada una de las trayectorias de posición angular. El plano fase expuesto en la Figura 5.2(b) representa el comportamiento dinámico del sistema pendular simple para cada una de los conjuntos de condiciones iniciales utilizadas. De igual manera la Figura 5.2(c) muestra la señal del sistema 2-FIS aplicado al mecanismo para la generación de auto-oscilaciones. Las cuatro (4) trayectorias convergen hacia el mismo ciclo límite y permanecen en este con una amplitud y frecuencia cercanas a las deseadas.

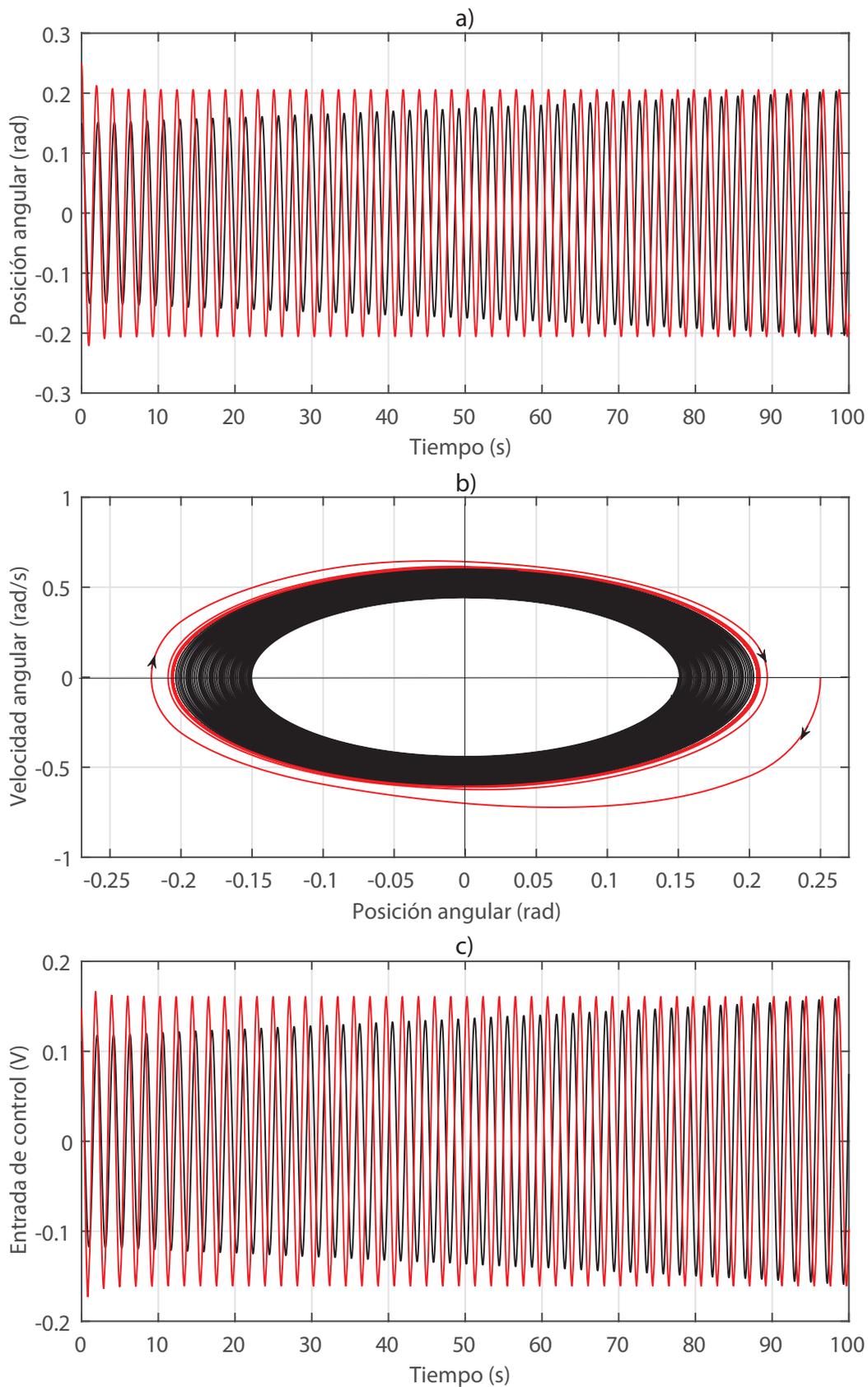


Figura 5.1: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del 2-FIS aplicada al sistema pendular simple.

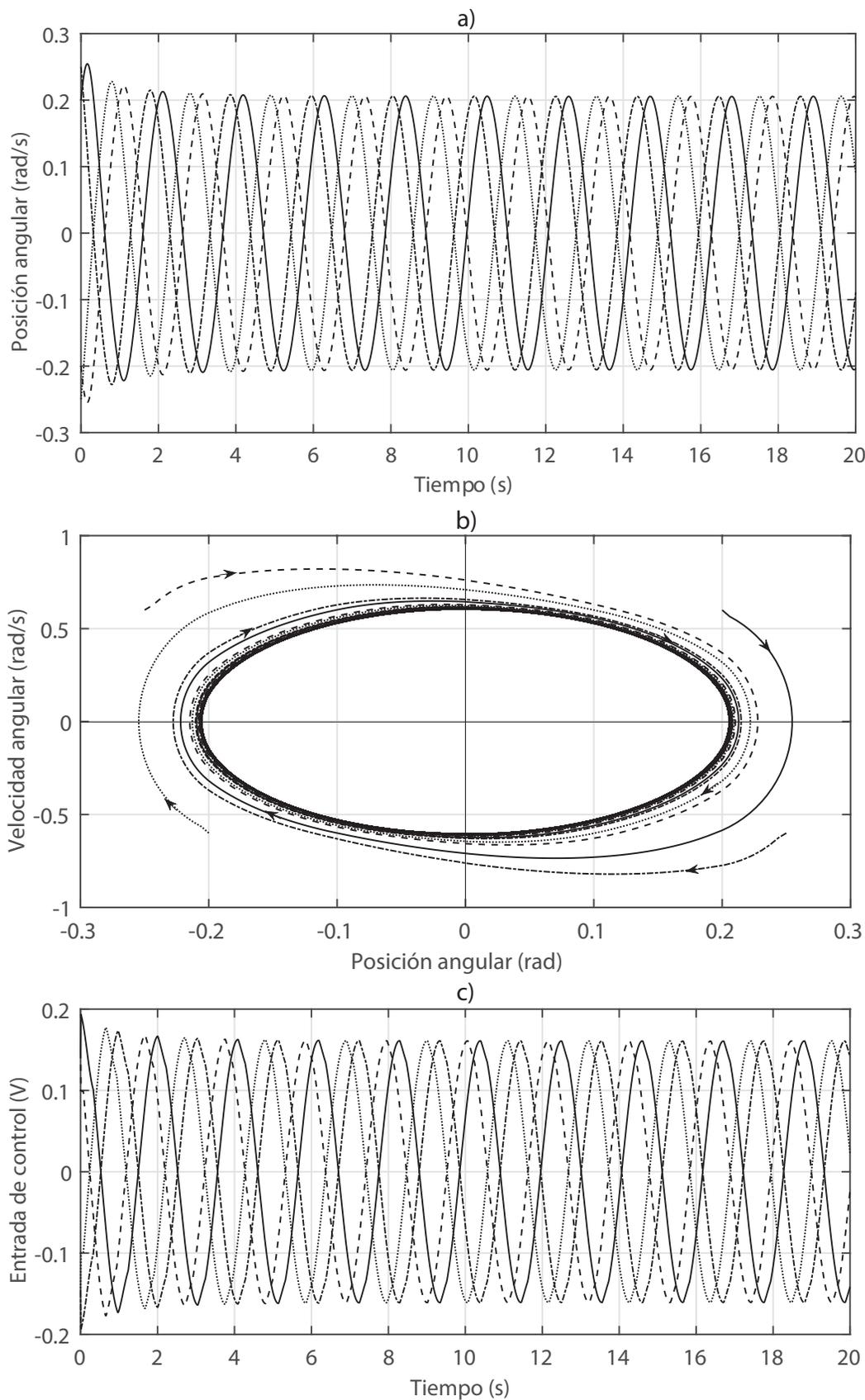


Figura 5.2: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal del sistema 2-FIS aplicado al sistema pendular simple.

Fueron realizados dos (2) experimentos con diferentes condiciones iniciales (dentro y fuera del ciclo límite) para comprobar el funcionamiento de la operación de 2-FIS.

Experimento 1. Las condiciones iniciales del primer experimento fueron $[x_1(0), x_2(0)]^T = [0.3203, -1.0092]$. La Figura 5.3(a) muestra la posición angular con respecto al tiempo, mientras que el retrato de fase (ver trayectoria color rojo en Figura 5.3(b)) corrobora el comportamiento de las trayectorias y cómo éstos convergen a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales se encuentran fuera del ciclo límite.

Experimento 2. Las condiciones iniciales del segundo experimento fueron $[x_1(0), x_2(0)]^T = [-0.0940, 0.1162]$. La trayectoria (color negro) mostrada en la Figura 5.3(b) exhibe el retrato de fase que valida el comportamiento de las trayectorias al estas converger a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales están dentro del ciclo límite. De similar forma Figura 5.3(c) exhibe la señal del 2-FIS necesaria para inducir auto-oscilaciones estables. Los resultados experimentales son expuestos en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Resultados experimentales péndulo simple

ω deseada	A_1 deseada	k_1	k_2	ω experimental	A_1 experimental
3	0.2	-0.7360	-0.0800	4.487	0.245

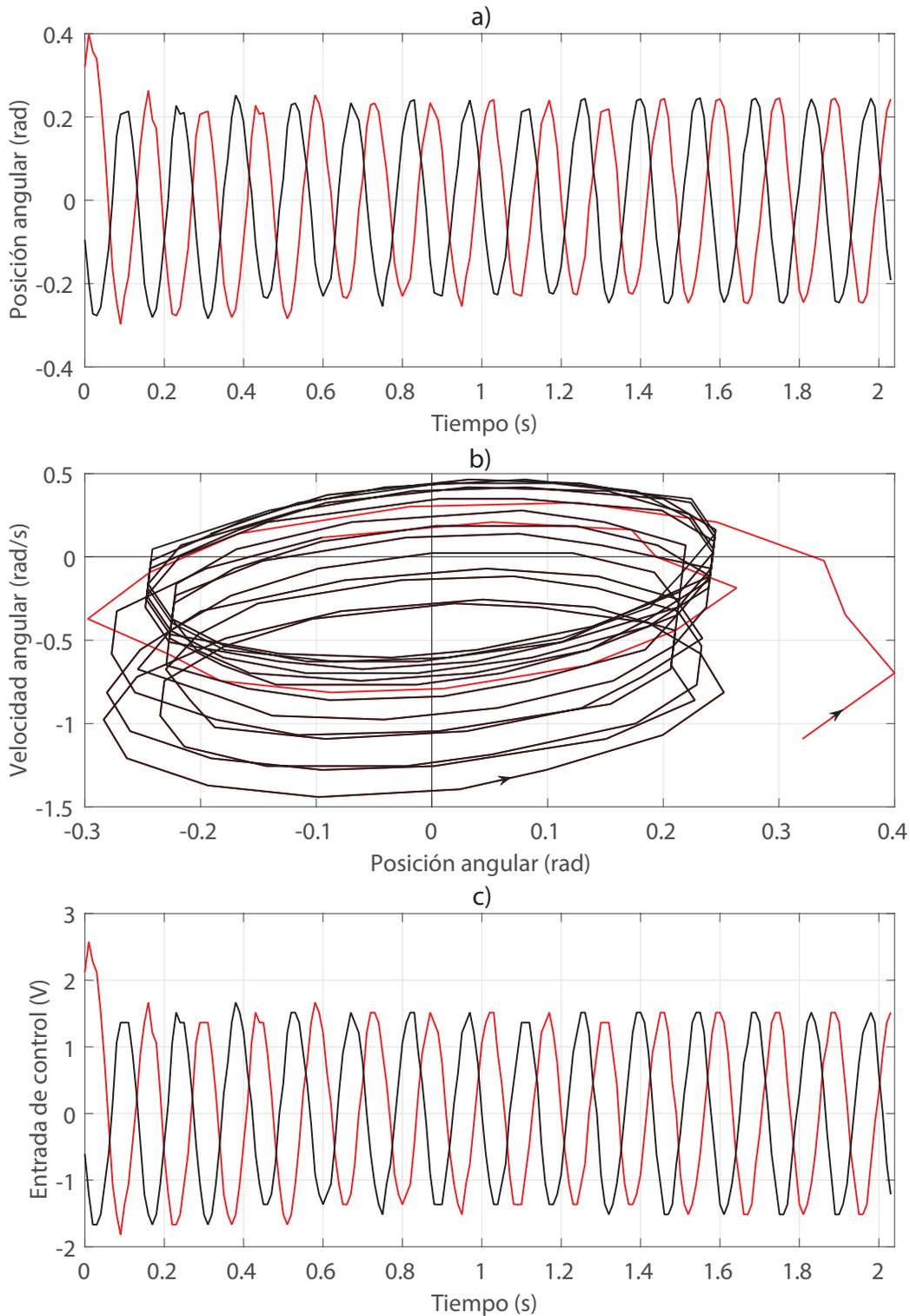


Figura 5.3: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del 2-FIS aplicada al sistema pendular simple.

5.1.2. Estabilidad orbital péndulo simple enfoque FD

Con el objetivo de asegurar la estabilidad orbital del ciclo límite se aplica el criterio de Loeb presentado en la Sección 2.4.2 al sistema pendular simple (4.2) en conjunto con la función descriptiva del 2-FIS (3.20), para ello se considera $A_1 = 0.2$ rad y $\omega = 3$ rad/s. Entonces son calculadas las ecuaciones (2.21), (2.22), resultando las derivadas parciales dadas en (2.28) tal como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= 0.6073, & \frac{\partial V}{\partial \omega} &= 0.0495, \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} &= -0.1273, & \frac{\partial V}{\partial A} &= -0.0785. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sustituyendo (5.1) en (2.28) resulta la desigualdad positiva (**0.0201**). Esto garantiza la estabilidad orbital local para el caso de estudio del sistema pendular simple con $A_1 = 0.2$ rad y $\omega = 3$ rad/s.

5.1.3. Enfoque vía Poincaré-Bendixson

A continuación se presenta la aplicación de la metodología para generar ciclos límites estables al modelo dinámico sistema pendular simple aplicando las condiciones de diseño obtenidas a través del teorema P-B.

Tomando $U_1 = 0.2$ y $Q_1 = 0.6$, entonces los intervalos de diseño (3.56) son:

$$\begin{aligned} 0.0044 &= \frac{U_1}{\gamma - \frac{\phi^2}{4}} < \Phi_1, \\ 0.0660 &= \max \left\{ \frac{Q_1}{\phi + 2\sqrt{\gamma}}, \frac{Q_1}{2\phi} \right\} < \Theta_1 < \frac{Q_1}{\phi} = 0.1319. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Fueron realizadas tres (3) simulaciones utilizando diferentes condiciones iniciales y considerando los intervalos de diseño (3.56) donde:

Simulación 1. Para los valores admitidos $\Phi_1 = 0.006$ y $\Theta_1 = 0.1$, y tomando como condición inicial $[x_1(0), x_2(0)]^T = [0.04, 0]^T$ fuera del ciclo límite, se puede observar en la Figura 5.4(a) que la solución (trayectoria continua) disminuye su amplitud y converge a una órbita.

Simulación 2. De forma similar, con condición inicial $[x_1(0), x_2(0)] = [0.015, 0]$ se obtiene una solución que aumenta su amplitud y se aproxima a la misma órbita periódica (ver trayectoria discontinua de la Figura 5.4(a)), concluyendo que el ciclo límite es estable asintóticamente orbitalmente. Asimismo, la Figura 5.4(b) exhibe las trayectorias en el plano fase para condiciones iniciales dentro y fuera del ciclo límite, donde ambas

trayectorias concurren a una órbita periódica. El comportamiento de las trayectorias en el plano fase para condición inicial dentro y fuera muestran que el ciclo límite es estable en correspondencia con las condiciones obtenidas mediante el teorema Poincaré-Bendixson.

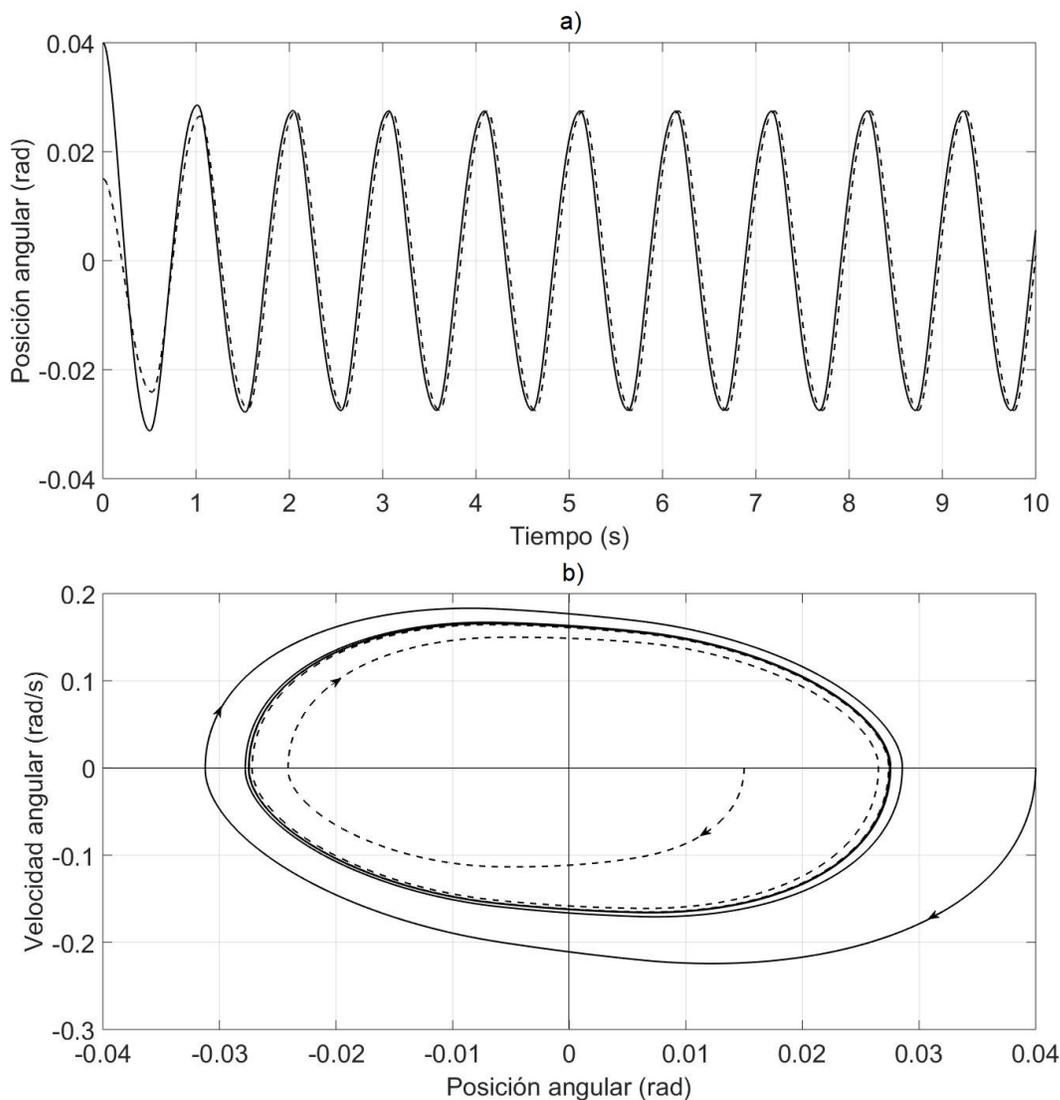


Figura 5.4: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite.

Simulación 3. Fueron realizadas cuatro (4) simulaciones numéricas con el objetivo de verificar el comportamiento de las soluciones en las regiones $R_{(\pm 1, \pm 1)}$, según lo establecido en el Lema 3.2 para condiciones iniciales en las regiones de las esquinas, fuera del ciclo límite. Las condiciones iniciales para las cuatro simulaciones fueron $[x_1(0), x_2(0)]^T = [\pm 0.04, \pm 0.2]^T$, considerando las cuatro (4) combinaciones posibles. En la Figura 5.5(a) se muestra cómo las cuatro (4) trayectorias de la posición angular al-

canzan el mismo movimiento periódico independientemente de las condiciones iniciales. Similarmente, la Figura 5.5(b) describe el retrato de fase, el cual corrobora el comportamiento de las trayectorias y cómo éstas convergen a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales están en la región de las esquinas del ciclo límite, como se afirma en el Lema 3.2.

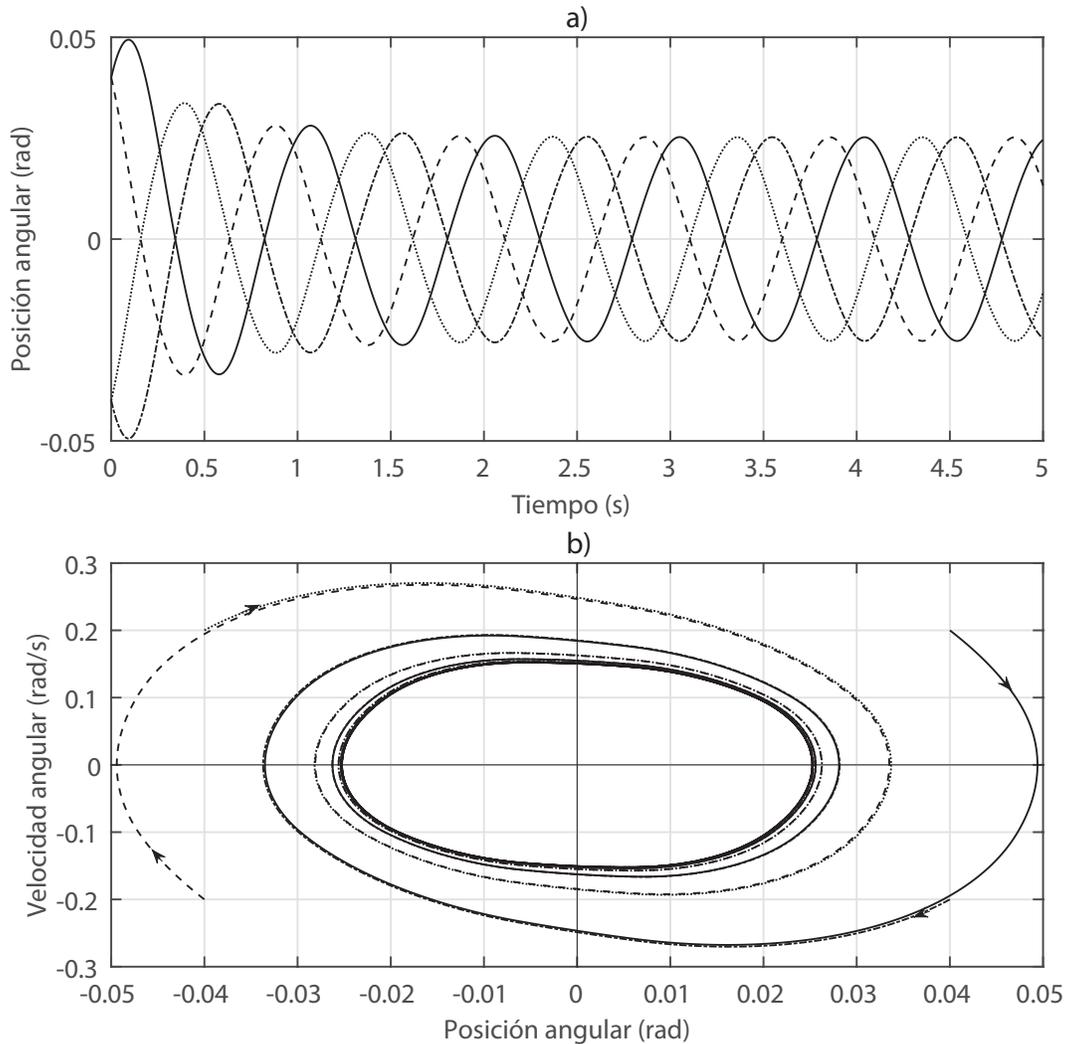


Figura 5.5: Posición angular del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite.

Para ilustrar los resultados teóricos de las secciones anteriores, fueron realizados experimentos en un péndulo simple que involucra un motor DC fabricado por *Leadshine* y conducido por una placa de control dSPACE DS1103 (ver Figura 4.2). Donde, el amplificador del motor acepta una señal de entrada del convertidor D/A en el rango de ± 10 V.

Se realizaron dos experimentos con diferentes condiciones iniciales para verificar la efectividad de la operación de 2-FIS.

Experimento 1. Las condiciones iniciales del primer experimento fueron $x_1(0) = -0.6687$ rad y $x_2(0) = 0.09091$ rad/s. La Figura 5.6(a) (trayectoria color rojo) muestra el retrato de fase que corrobora el comportamiento de las trayectorias y cómo estos convergen a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales están fuera del ciclo límite.

Experimento 2. Las condiciones iniciales del segundo experimento fueron $x_1(0) = -0.01232$ rad y $x_2(0) = 0.04545$ rad/s. Mas aún, la Figura 5.6(b) (trayectoria color negro) exhibe el retrato de fase que corrobora el comportamiento de las trayectorias y cómo éstas convergen a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales están dentro del ciclo límite. Asimismo, la Figura 5.8(c) exhibe la señal del sistema a 2-FIS necesaria para generar auto-oscilaciones estables en el mecanismo pendular simple.

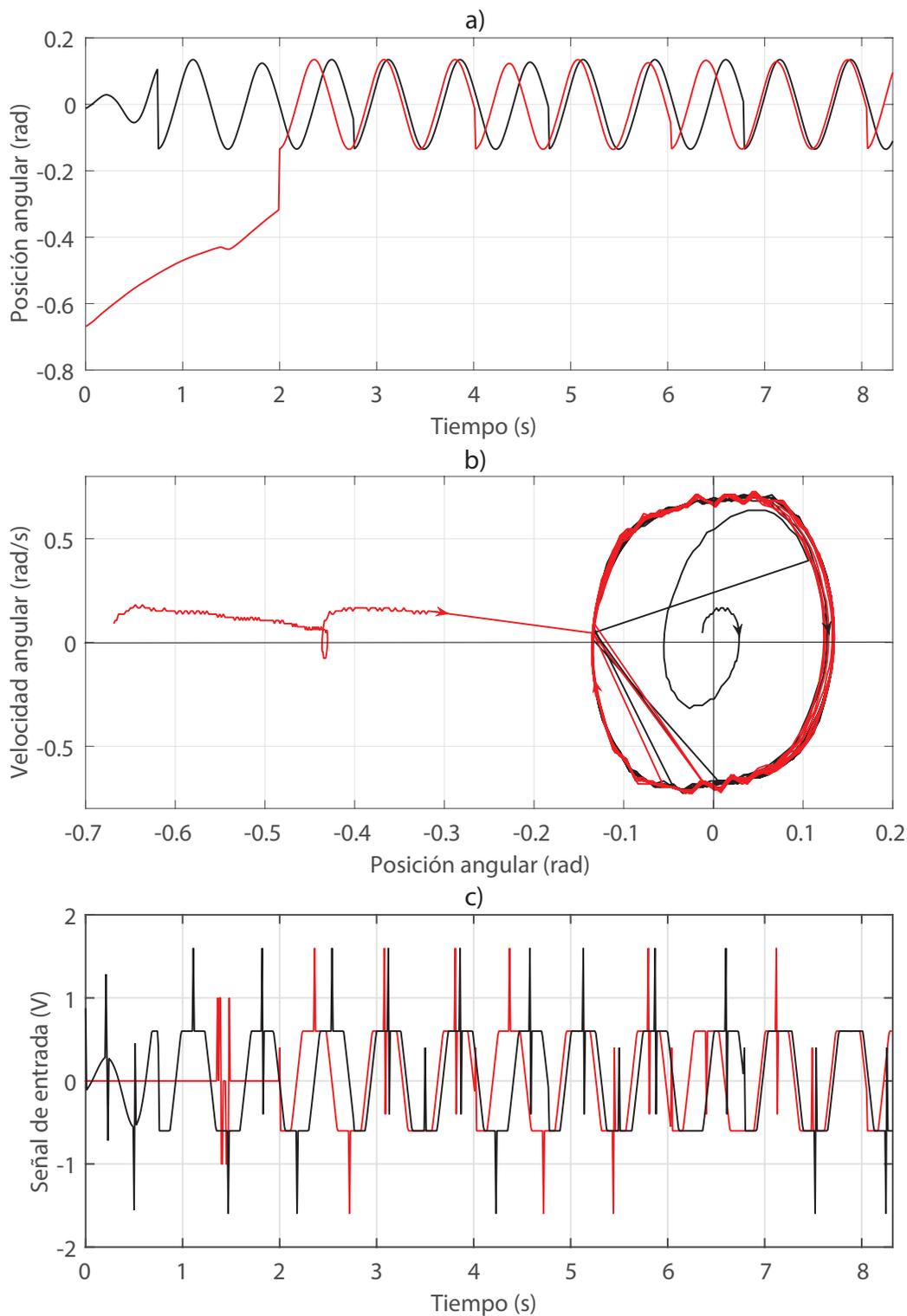


Figura 5.6: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del 2-FIS aplicada al sistema pendular simple.

5.2. Sistema péndulo Furuta

5.2.1. Enfoque función descriptiva

En la presente sección se aplica la propuesta a 2-FIS vía función descriptiva al sistema mecánico sub - actuado péndulo Furuta (4.3). Es diseñado un esquema a 2-FIS para un ciclo límite con amplitud $A_1 = 0.1$ rad y frecuencia $\omega = 7$ rad/s deseados. Asimismo, son calculados los parámetros de ganancia k_1 (3.25) y k_2 (3.26) y son definidos los parámetros de los sistemas de inferencia difusa FIS1 tal que $\Phi_1 = 0.09$ y $U_1 = 0.1$, de igual manera para el FIS2 es definido $\Theta_1 = 0.69$ y $Q_1 = 0.7$. Fueron realizadas un conjunto de tres (3) simulaciones y dos (2) experimentos para diferentes condiciones iniciales para validar la eficacia de la propuesta a 2-FIS. La Tabla 5.3 expone los valores de diseño de k_1 y k_2 , así como los parámetros de amplitud y frecuencia deseados y en simulación.

Tabla 5.3: Resultados en simulación péndulo Furuta

ω deseada	A_1 deseada	k_1	k_2	ω en simulación	A_1 simulación
7	0.1	-21.8286	-5.0180	6.9968	0.1005

Simulación 1. Considerando los valores expuestos en la Tabla 5.3, con condición inicial $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.15, 0, 0]^T$ fuera del ciclo límite, es posible percibir en la Figura 5.7(a) como la solución (trayectoria color rojo) decrece asintóticamente su amplitud y converge en una auto - oscilación periódica. De similar forma, se muestra en el plano fase de la Figura 5.7(b) como las trayectorias alcanzan un movimiento periódico (ciclo límite estable).

Simulación 2. Asimismo, con condición inicial $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.08, 0, 0]^T$ se exhibe una trayectoria que aumenta en amplitud y se aproxima a la misma órbita periódica (ver trayectoria color negro Figura 5.7(a)). Este resultado se corrobora de forma gráfica en el plano fase expuesto en la Figura 5.7(b), donde la trayectoria (color negro) incrementa gradualmente su amplitud hasta converger en el ciclo límite estable. De igual forma, la Figura 5.7(c) muestra el comportamiento de la señal del 2-FIS para la generación de auto-oscilaciones.

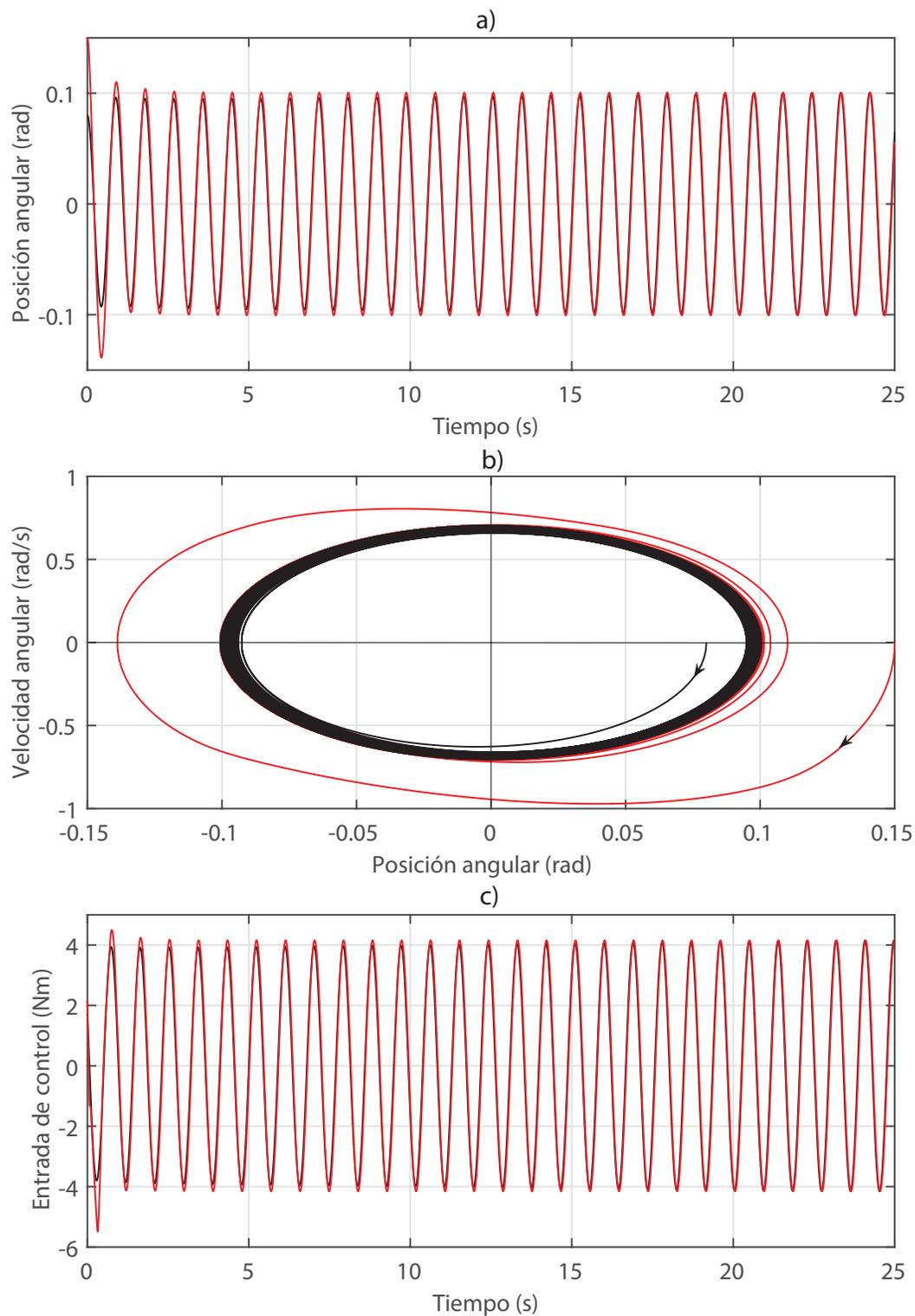


Figura 5.7: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del péndulo Furuta bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada de control del sistema a 2-FIS.

Simulación 3. De similar forma, se efectuaron cuatro (4) simulaciones numéricas

para validar el desempeño de las soluciones en el plano fase con diferentes condiciones iniciales tal que:

- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.15, 0, 0.2]^T$,
- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, -0.15, 0, -0.2]^T$.

Las dos restantes simulaciones toman como condición inicial:

- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.2, 0, -0.4]^T$,
- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, -0.2, 0, 0.4]^T$.

En la Figura 5.8(a) se puede percibir como las trayectorias concurren hacia un mismo ciclo límite y permanecen en este con una amplitud y frecuencia cercana a las deseadas. Nótese que las soluciones no presentan sensibilidad ante condiciones iniciales. El plano fase expuesto en la Figura 5.8(b) representa el comportamiento dinámico del sistema péndulo rotatorio invertido. De similar, forma la Figura 5.8(c) exhibe la señal del sistema a 2-FIS.

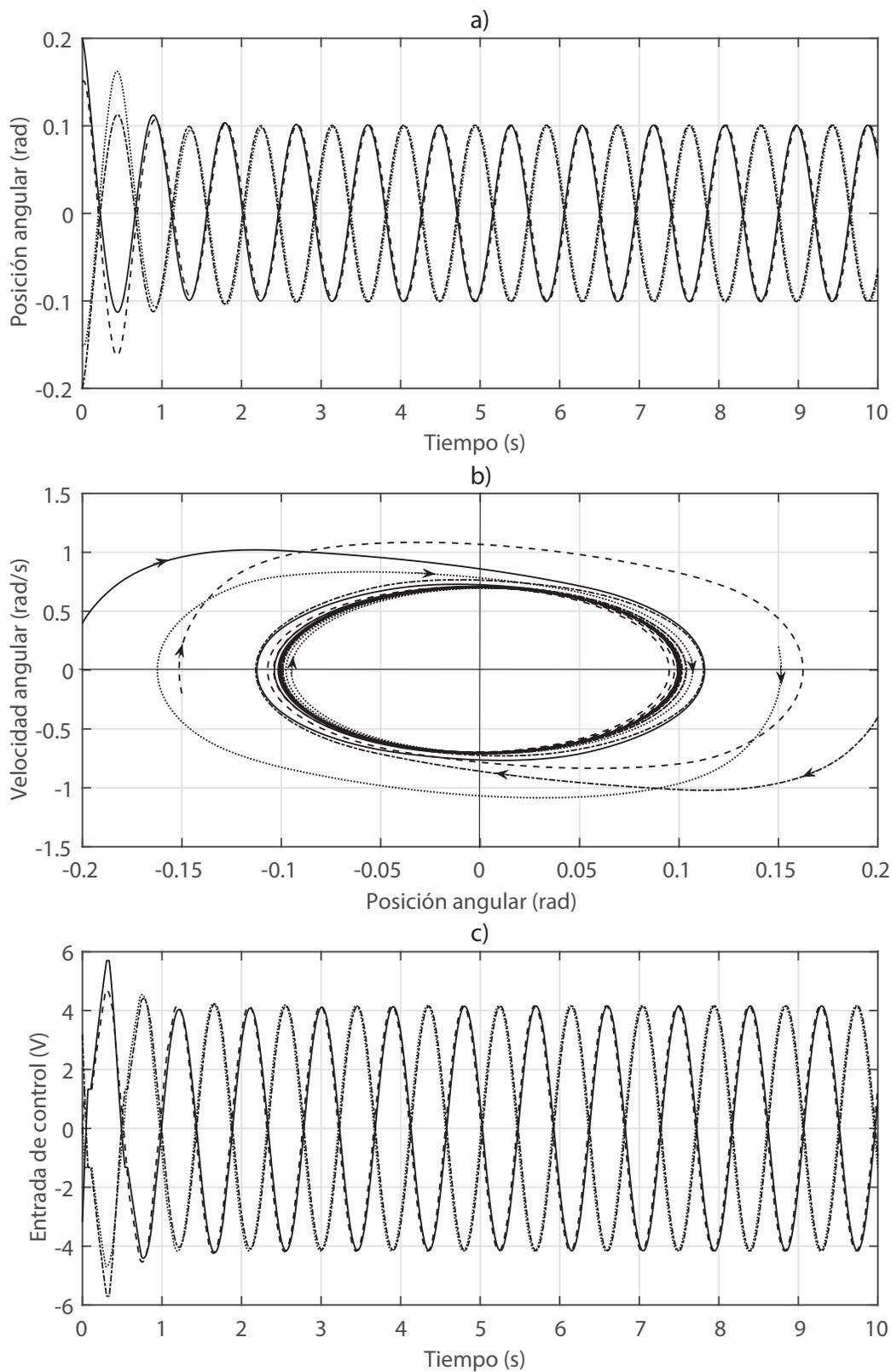


Figura 5.8: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada de control del sistema a 2-FIS.

Experimento 1. Las condiciones iniciales del primer experimento fueron: $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, -0.0491, 0, 1.953]^T$. La Figura 5.9(a) muestra la trayectoria (color rojo) con respecto al tiempo que corrobora la existencia de un movimiento periódico estable para condiciones iniciales están fuera del ciclo límite.

Experimento 2. Para el segundo experimento las condiciones iniciales consideradas son: $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, -0.2730, 0, -6.127]^T$. De similar forma la Figura 5.9(a) muestra la trayectoria (color negro) de la posición angular, la cual exhibe una auto-oscilación. Además, la Figura 5.9(b) expone el retrato de fase de las trayectorias y se puede apreciar cómo éstas convergen a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales están dentro o fuera del ciclo límite. Asimismo, la Figura 5.9(c) muestra la señal de control 2-FIS necesaria para inducir auto-oscilaciones en el sistema de forma experimental. Los resultados numéricos de los experimentos se presenta en la Tabla 5.4.

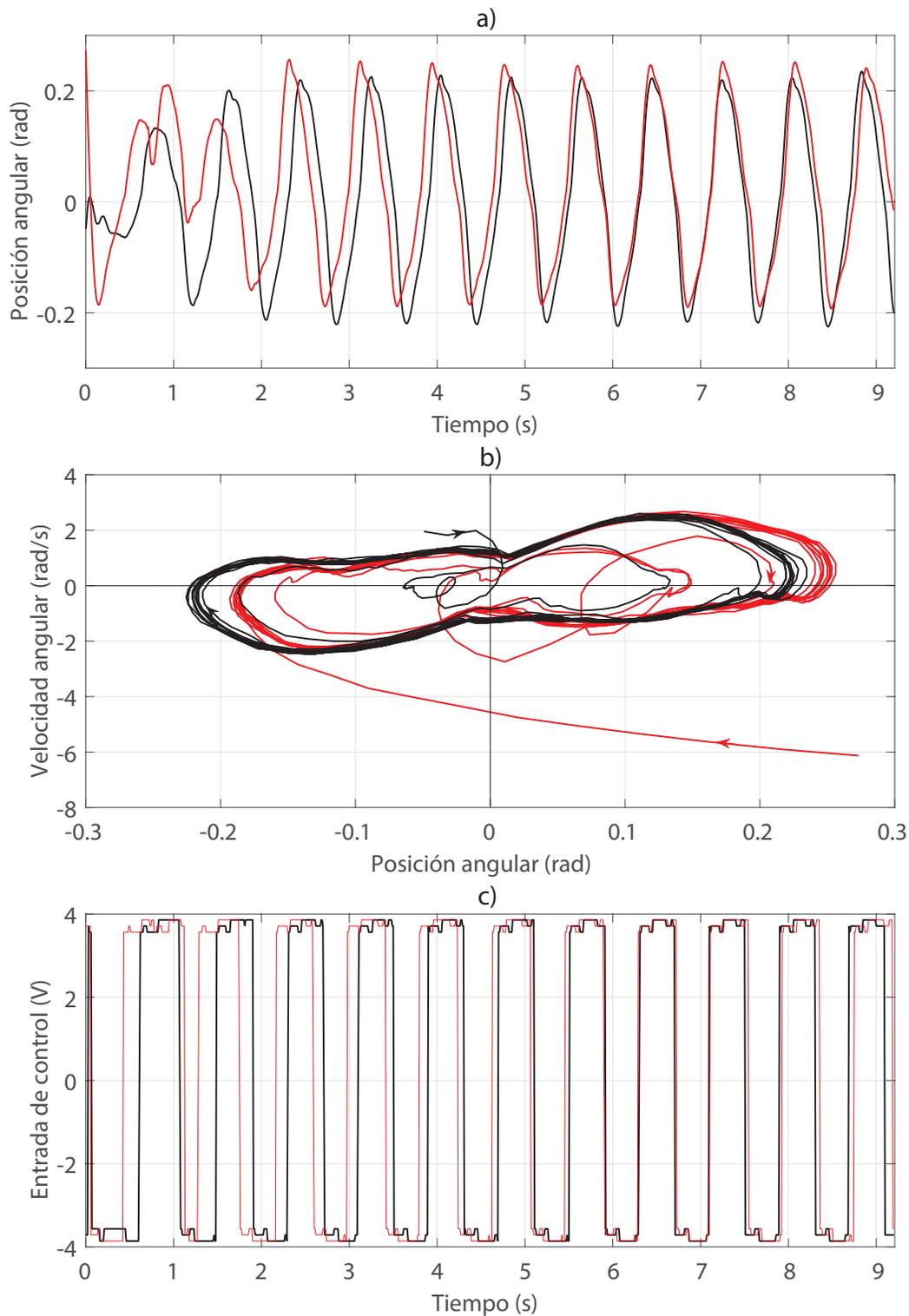


Figura 5.9: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del péndulo Furuta con condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del sistema a 2-FIS.

Tabla 5.4: Resultados experimentales péndulo Furuta

ω deseada	A_1 deseada	k_1	k_2	ω experimental	A_1 experimental
7	0.1	-21.8286	-5.0180	7.5701	0.2454

5.2.2. Estabilidad orbital sistema péndulo Furuta

Para garantizar la estabilidad orbital del ciclo límite se aplico el criterio de Loeb (Sección 2.4.2) al sistema mecánico sub-actuado péndulo rotatorio invertido (péndulo de Furuta) (4.3) y la función descriptiva del 2-FIS (3.20), para ello se tomo $A_1 = 0.1$ rad y $\omega = 7$ rad/s. Utilizando la ecuación de balance armónico (2.21), se aisló la componente real e imaginaria acorde a (2.22), resultando las derivadas parciales dadas en (2.28) tal como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= 0.9856 & \frac{\partial V}{\partial \omega} &= 0.1778 \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} &= 0.0349 & \frac{\partial V}{\partial A} &= -0.4933 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Considerando los valores de (5.3) es calculada (2.28) resultando la desigualdad positiva (**0.1924**), con ello se garantiza la estabilidad orbital local del ciclo límite para $A_1 = 0.1$ rad y $\omega = 7$ rad/s.

5.3. Sistema carro-péndulo

5.3.1. Enfoque función descriptiva

Con el objetivo de obtener auto-oscilaciones estables con amplitud y frecuencias deseadas en el sistema mecánico sub-actuado carro péndulo (4.29). Se considera la aplicación de la propuesta a 2-FIS vía función descriptiva presentada en la Sección 3.2. Para ello son hallados los parámetros de diseño k_1 (3.25) y k_2 (3.26) para una amplitud $A_1 = 0.1$ rad y frecuencia $\omega = 3$ rad/s deseados. Fueron realizadas tres (3) simulaciones, con el propósito de verificar y validar el esquema propuesto.

Tabla 5.5: Resultados en simulación sistema carro-péndulo

ω deseada	A_1 deseada	k_1	k_2	ω en simulación	A_1 simulación
3	0.1	-2.0832	0.4591	2.9919	0.1002

Simulación 1. Para los valores de diseño expuestos en la Tabla 5.5, y con condición inicial $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.15, 0, 0]^T$ fuera del ciclo límite, es posible apreciar en la Figura 5.10(a) como la solución (trayectoria color rojo) disminuye asintóticamente su amplitud y converge en un movimiento periódico. Asimismo, en el plano fase mostrado en la Figura 5.10(b) se observan como las trayectorias alcanzan un ciclo límite estable (auto-oscilación estable). Similarmente, la Figura 5.10(c) exhibe la señal de control 2-FIS en simulación.

Simulación 2. De similar manera, se tomó condición inicial en $[x_1(0) x_2(0) x_3(0) x_4(0)]^T = [0, 0.095, 0, 0]^T$, donde (ver trayectoria color negro en la Figura 5.10(a)) se exhibe una solución que aumenta en amplitud y se aproxima a la misma órbita periódica, concluyendo de forma gráfica que el ciclo límite es orbitalmente estable asintóticamente. Este resultado se corrobora en el plano fase mostrado en la Figura 5.10(b), donde la trayectoria (color negro) incrementa gradualmente su amplitud hasta converger en el ciclo límite estable. Similarmente, la Figura 5.10(c) muestra el comportamiento de la entrada del 2-FIS en simulación.

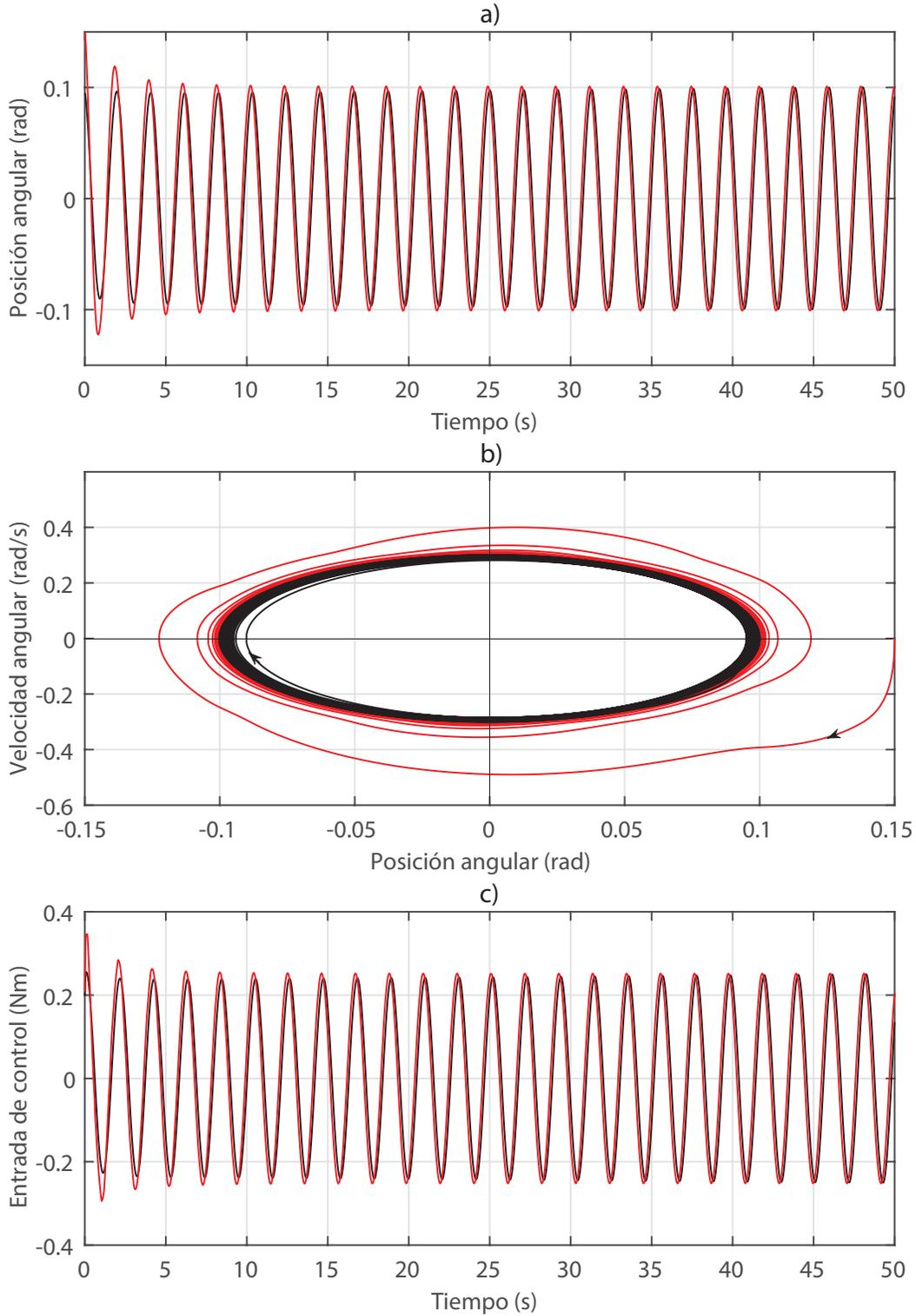


Figura 5.10: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema carro-péndulo bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada del sistema a 2-FIS.

Simulación 3. De similar forma, fueron realizadas cuatro (4) simulaciones numéricas

con el objetivo de verificar el comportamiento de las soluciones en diferentes regiones del plano fase. Para las simulaciones se tomo condiciones iniciales en:

- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.15, 0, 0.2]^T$,
- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, -0.15, 0, -0.2]^T$.

Mientras que la dos restantes simulaciones toman como condición inicial en:

- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.2, 0, -0.4]^T$,
- $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, -0.2, 0, 0.4]^T$.

En la Figura 5.11(a) se puede apreciar como las cuatro (4) trayectorias concurren hacia el mismo movimiento periódico independientemente de las condiciones iniciales, es necesario notar que existe un pequeño desfase entre cada una de las trayectorias de posición angular. El plano fase expuesto en la Figura 5.11(b) representa el comportamiento dinámico del sistema pendular simple para cada una de las conjuntos de condiciones iniciales utilizadas. Mientras que en la Figura 5.11(c) ilustra el comportamiento de la entrada de control 2-FIS para cada una de las simulaciones. Las cuatro (4) trayectorias convergen hacia un único ciclo límite y permanecen en este con una amplitud y frecuencia cercana de las deseadas.

Experimento 1. Las condiciones iniciales del primer experimento fueron: $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, 0.1411, 0, 0.1534]$. La Figura 5.12(a) muestra el comportamiento de las trayectorias para la posición angular del sistema y cómo esta converge a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales se encuentran fuera del ciclo límite. La Figura 5.12(b) exhibe las trayectorias el plano fase, donde se verifica el desempeño de 2-FIS propuesto.

Experimento 2. Las condiciones iniciales del segundo experimento fueron: $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T = [0, -0.0767, 0, 0]^T$. De similar forma, la Figura 5.12(b) muestra el retrato de fase que corrobora el comportamiento de las trayectorias y cómo éstas convergen a un ciclo límite estable cuando las condiciones iniciales están dentro del ciclo límite. De igual manera, la Figura 5.12(c) exhibe la señal de control 2-FIS necesaria para inducir auto-oscilaciones en el sistema de forma experimental.

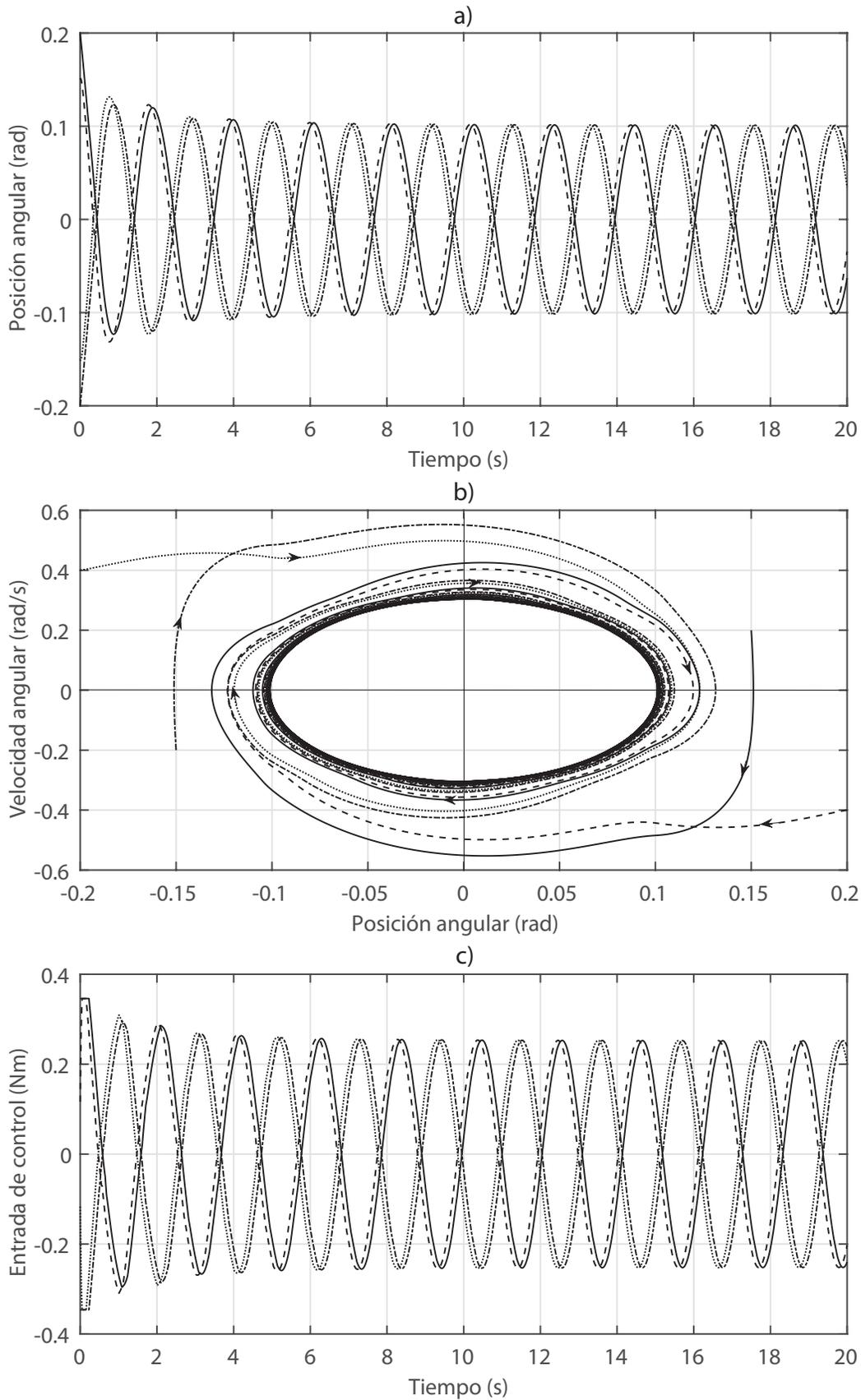


Figura 5.11: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada de control del sistema a 2-FIS.

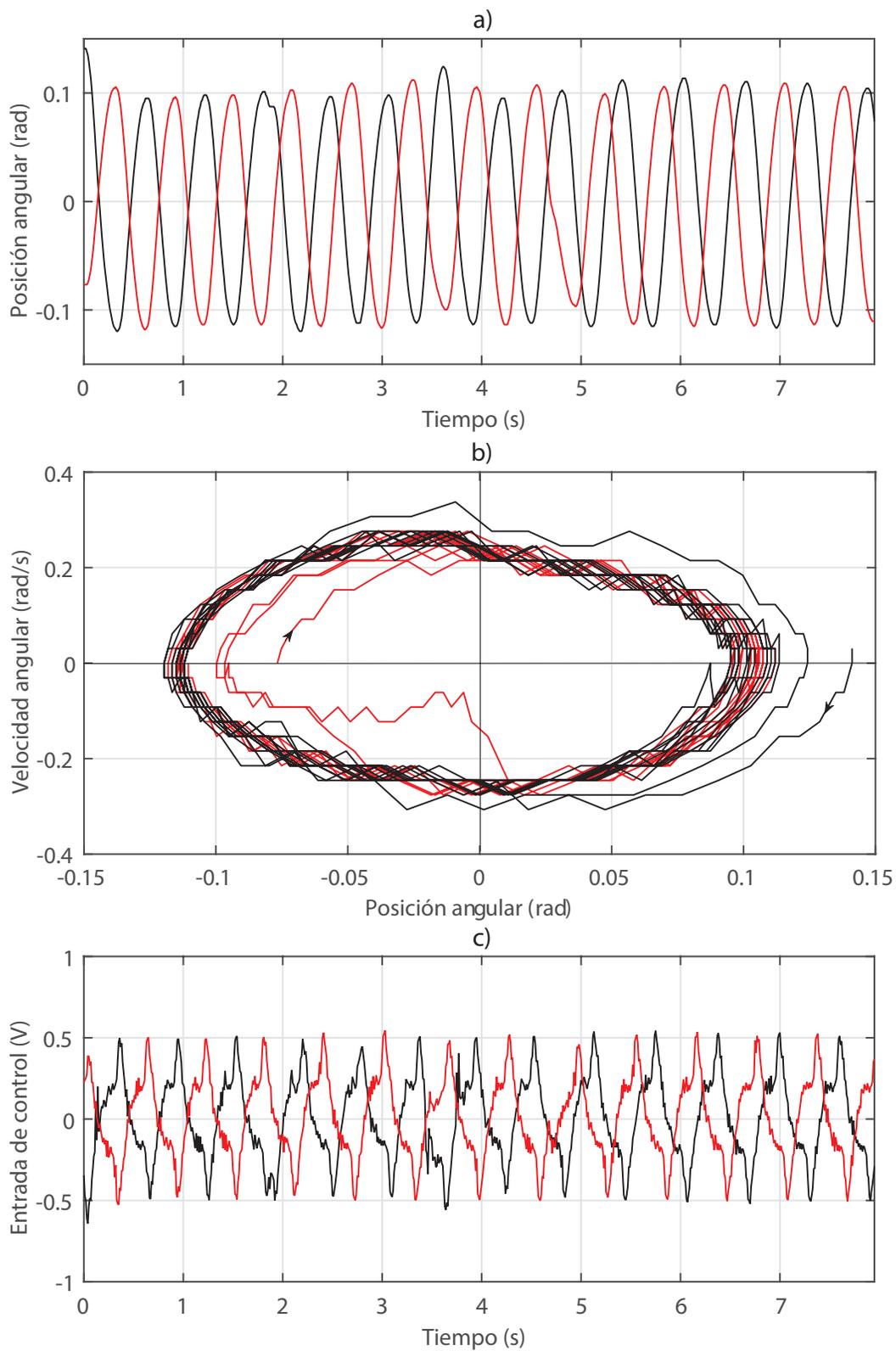


Figura 5.12: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del péndulo Furuta con condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de control del sistema a 2-FIS.

Tabla 5.6: Resultados experimentales carro-péndulo

ω deseada	A_1 deseada	k_1	k_2	ω en simulación	A_1 simulación
3	0.1	-2.0832	0.4591	1.0134	0.1043

La estabilidad orbital del ciclo límite inducido en el sistema mecánico sub-actuado carro-péndulo es verificada mediante el criterio de Loeb [13, 95] (ver Sección 2.4.2). Fue aplicado el procedimiento expuesto en la Figura 2.10 utilizando el software Matlab[®]. Se utilizó el modelo en su forma de función de transferencia (4.29) y la función descriptiva del 2-FIS (3.20), considerando $A_1 = 0.1$ rad y $\omega = 3$ rad/s. Al sustituir (4.29) y (3.20) en la ecuación de balance armónico (2.21), fueron separadas las componente real e imaginaria según (2.22), resultando las derivadas parciales dadas en (2.28) tal como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= 1.6519 & \frac{\partial V}{\partial \omega} &= 0.7011 \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} &= -0.1808 & \frac{\partial V}{\partial A} &= 0.2813 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Evaluando los valores obtenidos en (5.4) en (2.28) es calculada la desigualdad del criterio de Loeb, resultando positiva (**1.2090**), con esto se garantiza la estabilidad orbital local del ciclo límite para $A_1 = 0.1$ rad y $\omega = 3$ rad/s.

5.3.2. Resultados con adición de dinámica de actuadores

Con el objetivo de obtener auto-oscilaciones estables con amplitud y frecuencias deseadas en el sistema mecánico sub-actuado carro péndulo (4.37) incluida la dinámica del actuador. De esta forma, son hallados los parámetros de diseño k_1 (3.25) y k_2 (3.26) para una amplitud $A_1 = 0.1$ rad y frecuencia $\omega = 3$ rad/s deseados, resultando $k_1 = -2.0892$ y $k_2 = -1.2402$ respectivamente. Asimismo, para el FIS-1 se consideró $\Phi_1 = 0.0990$ y $U_1 = 0.1$, mientras que para el FIS-2 se definió $\Theta_1 = 0.2990$ y $Q_1 = 0.3$. Las simulaciones realizadas refieren condiciones iniciales diferentes de cero solamente en la variable posición angular x_2 , ya que se considera que las velocidades y la entrada de control son cero en el momento inicial de la simulación.

Fueron realizadas dos (2) simulaciones, con condiciones iniciales fuera y dentro del ciclo límite. La primera simulación involucró valores en las condiciones iniciales tal que: $x(0)^T = [0 \ 0.12 \ 0 \ 0 \ 0]$ y $x(0)^T = [0 \ 0.08 \ 0 \ 0 \ 0]$.

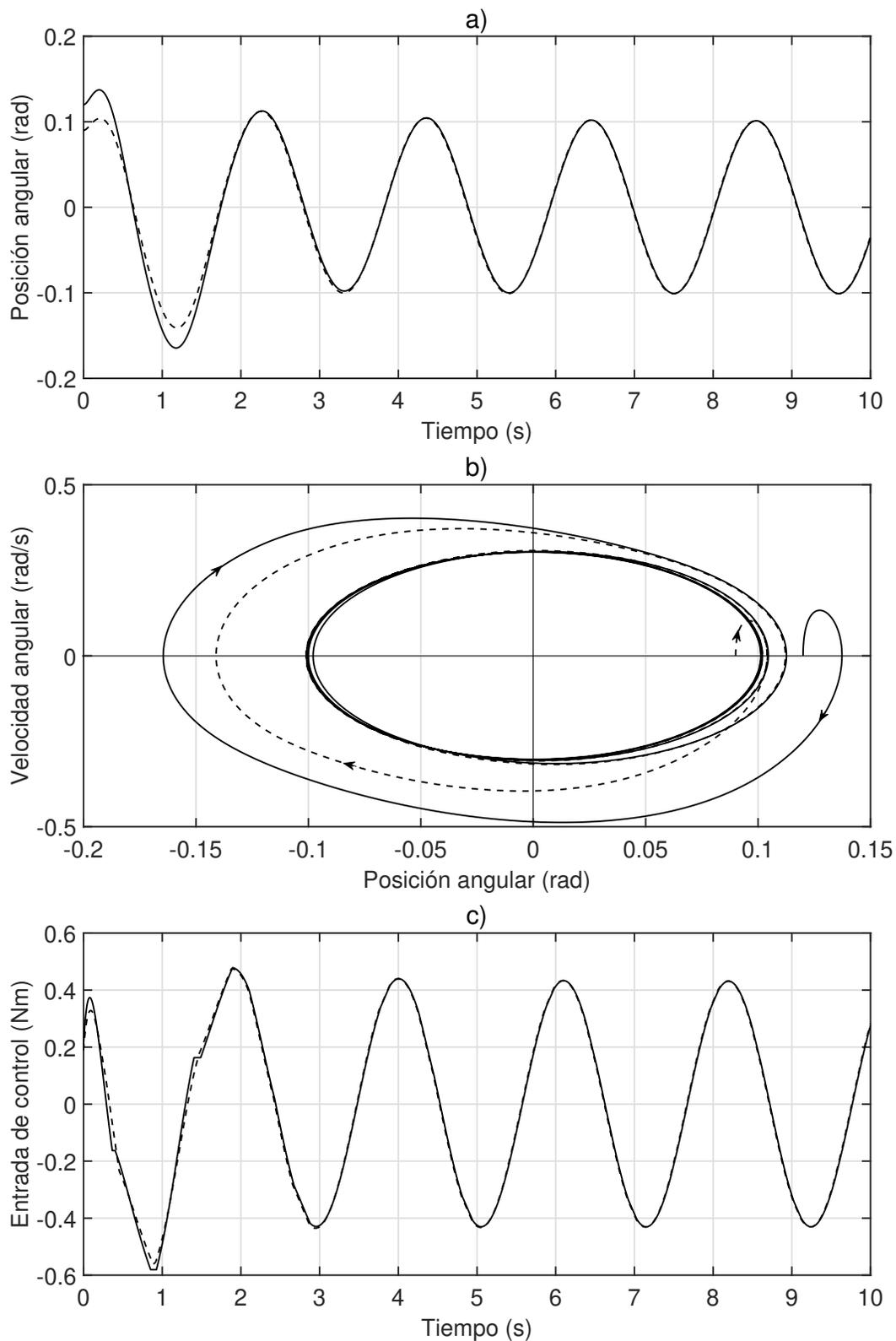


Figura 5.13: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema carro-péndulo bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de salida del 2-FIS.

Las Figura 5.13 (a),(b) muestran la evolución de las soluciones y como éstas convergen asintóticamente a una única órbita periódica estable, esto se puede apreciar tanto en el retrato de fase así como, en la gráfica de posición angular vs tiempo. Similarmente, la Figura 5.13(c) exhibe la señal de control 2-FIS para ambas simulaciones.

La segunda simulación incluyó cuatro (4) diferentes condiciones iniciales tanto dentro como fuera del ciclo límite, definidas tal como: $x(0)^T = [0 \pm 0.15 \ 0 \ 0 \ 0]$ y $x(0)^T = [0 \pm 0.08 \ 0 \ 0 \ 0]$. La evolución de la posición angular vs tiempo, así como las trayectorias en el plano fase se pueden observar en la Figura 5.14(a)(b) respectivamente. Estas soluciones convergen a una oscilación no lineal (ciclo límite) con amplitud y frecuencias deseadas. Este comportamiento se manifiesta independientemente de las condiciones iniciales y sin necesidad de una señal de referencia externa. Asimismo, la Figura 5.14(c) exhibe el comportamiento del torque necesario para la generación de las oscilaciones no lineales.

Los resultados en simulación permiten apreciar la obtención de un movimiento periódico (ciclo límite estable) independiente de las condiciones iniciales y sin necesidad de una señal de referencia externa, donde las trayectorias convergen hacia un único ciclo límite y permanecen en este con una amplitud $A_1 = 0.1012$ rad y frecuencia $\omega = 3.0019$ rad/s, ambos resultados, muy cercanos a los deseados.

Se hace necesario verificar analíticamente la estabilidad orbital del ciclo límite obtenido, para ello se aplicó el criterio de Loeb [95] a través de (2.28). Considerando los valores de amplitud y frecuencias deseados del ciclo límite se procedió a calcular las derivadas parciales definidas en (2.28) tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_1} &= 1.2138, & \frac{\partial V}{\partial \omega} &= 0.6001, \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} &= 0.0117, & \frac{\partial V}{\partial A_1} &= -0.3178. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Sustituyendo estos valores en (2.28) es calculada la desigualdad del criterio de Loeb, resultando positiva (**0.7321**), con lo cual garantiza la estabilidad orbital local del ciclo límite para $A_1 = 0.1$ rad y $\omega = 3$ rad/s.

A través del análisis realizado al incluir una dinámica correspondiente al actuador eléctrico, se comprobó la eficacia del sistema 2-FIS al inducir un movimiento periódico estable sin necesidad de una señal de referencia externa con amplitud y frecuencias deseadas en un sistema pendular sub-actuado.

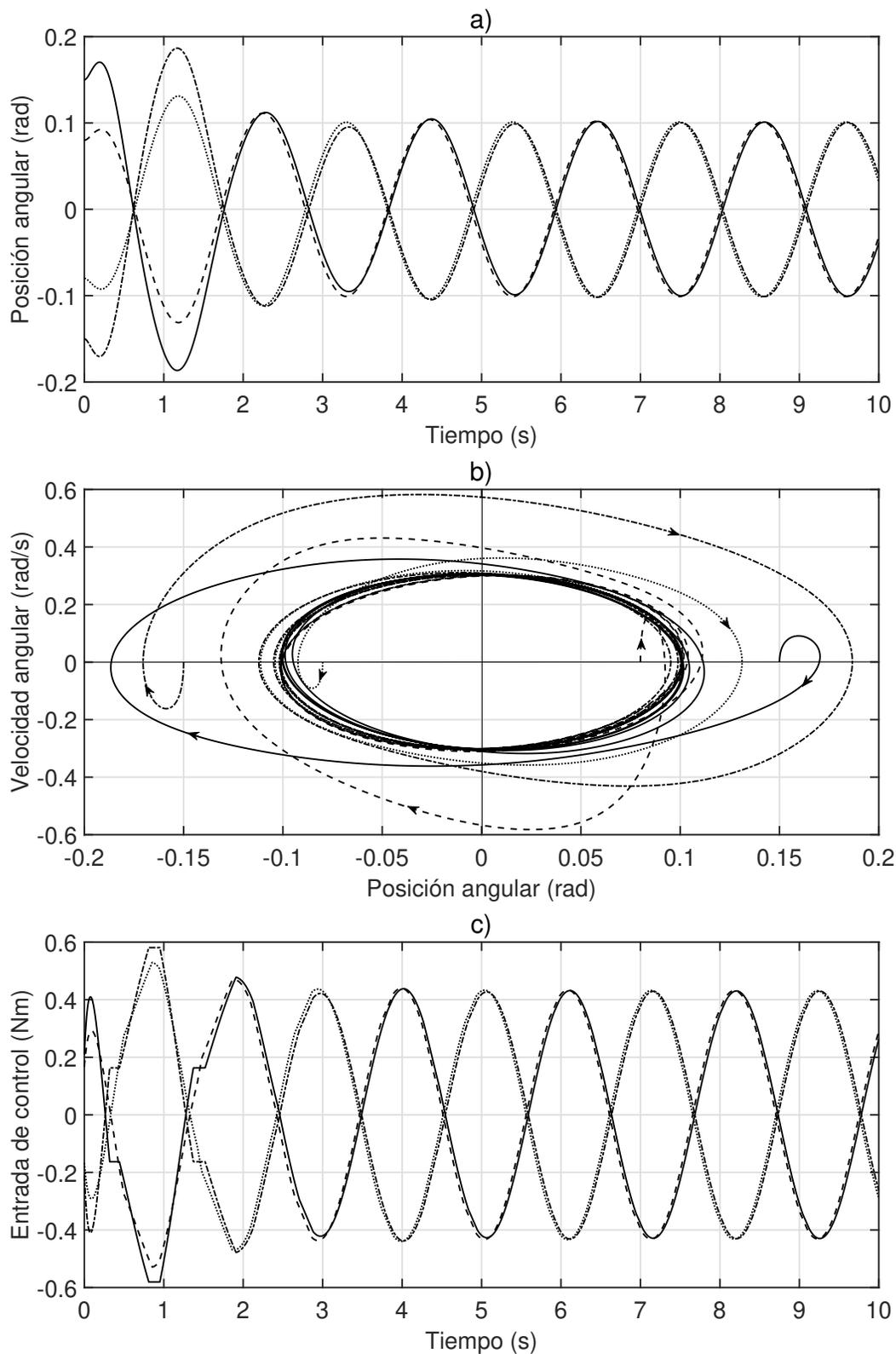


Figura 5.14: (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema carro-péndulo bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de salida del 2-FIS.

5.4. Consideraciones finales

El trabajo llevado a cabo a través de simulaciones y de forma experimental en el presente capítulo pone de manifiesto el correcto desempeño de la propuesta a dos sistemas de inferencia difusa (2-FIS), tanto para el enfoque Poincaré - Bendixson como el desarrollado vía función descriptiva. Es necesario enfatizar que el enfoque Poincaré-Bendixson solo establece la existencia del ciclo límite. De esta forma, con el análisis desarrollado en este trabajo no es posible obtener amplitud y frecuencia deseadas. Asimismo, el enfoque P-B varía su análisis para cada sistema dinámico, por lo que solo aplica a sistemas expresados de la forma (3.35). Sin embargo, el método en el dominio de la frecuencia función descriptiva, permite obtener ciclos límites con frecuencia y amplitud aproximadas a las deseadas, debido a la naturaleza aproximada del método. Es necesario resaltar que los resultados numéricos experimentales obtenidos difieren con respecto a los parámetros amplitud y frecuencia deseados del ciclo límite, debido a que en los sistemas físicos existen dinámicas no modeladas e incertidumbres las cuales no se consideran en los modelos matemáticos, de ahí la diferencia en los resultados, sin embargo se puede considerar un buen resultado (al observar los resultados se puede apreciar que no existe diferencia significativa en los resultados), ya que los sistemas se comportan y responden en la forma deseada.

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

A partir del estudio realizado del marco teórico relativo a los sistemas dinámicos cuya operación involucra comportamiento periódico (ciclos límites) y ante la necesidad de desarrollar técnicas de inteligencia computacional capaces de inducir este comportamiento deseado. Se realiza una propuesta de un doble sistema de inferencia difusa (2-FIS) capaz de actuar sobre un sistema dinámico y obtener órbitas periódicas. El esquema a 2-FIS se propuso a través del método de la función descriptiva y mediante el teorema Poincaré-Bendixson. Se tomó en consideración el uso de los sistemas difusos ya que, la experiencia del usuario puede ser introducida a través de reglas posibilitando mejorar el desempeño, además de la facilidad del diseño mediante etiquetas lingüísticas. Como resultado final obtenido por esta investigación tanto nivel analítico, numérico como experimental, se plantean las conclusiones generales siguientes:

Conclusiones generales

- Nuestro estudio proporciona una metodología, basada en la utilización de dos sistemas de inferencia difusa (2-FIS) para obtener órbitas periódicas estables en sistemas mecánicos mediante dos enfoques el enfoque función descriptiva y Poincaré-Bendixson.
- El diseño mediante ambos métodos permitió la obtención de expresiones analíticas explícitas que garantizan la existencia de un ciclo límite.
- La implementación de la metodología a 2-FIS en la realización de simulaciones y experimentos permite obtener las órbitas periódicas sin necesidad de utilizar una trayectoria de referencia externa para el seguimiento.

Enfoque Función Descriptiva

- El método de la función descriptiva permitió poder definir en términos de frecuencia y amplitud de la órbita periódica deseada y de esta forma definir el universo de discurso de las funciones de pertenencia y así forzar a la salida del sistema de lazo cerrado a tener un valor deseado de frecuencia y amplitud.
- El diseño basado en FD, mostró resultados alentadores para resolver el problema de la generación de órbitas periódicas y su estabilización orbital en sistemas subactuados.
- La metodología logra resultados satisfactorios alcanzando un ciclo límite estable con una frecuencia y amplitud deseadas.
- La estabilidad del movimiento periódico se verificó utilizando el criterio de Loeb.
- El diseño del 2-FIS se probó numéricamente y experimentalmente en un péndulo simple, un péndulo rotatorio invertido (péndulo de Furuta) y un carro péndulo.

Enfoque Poincaré-Bendixson

- Se estableció una metodología basada en el teorema de Poincaré-Bendixson para el diseño de las condiciones de existencia de un ciclo límite estable a la salida de un sistema de segundo orden considerando un doble sistema de inferencia difusa.
- La implementación de los diseños obtenidos con base en el teorema de Poincaré-Bendixson muestran en sus resultados numéricos y experimentales en el sistema péndulo simple que las trayectorias en lazo cerrado alcanzan un ciclo límite estable.
- Se determinaron expresiones analíticas sobre los intervalos de los parámetros de las funciones de pertenencia para que el sistema muestre un comportamiento robusto en cuanto a su estabilidad.

6.1. Recomendaciones

Para la necesaria continuidad que debe tener este trabajo se recomienda lo siguiente:

- Extender los resultados obtenidos a otros sistemas más complejos y en aplicaciones prácticas tal como en robot bípedos.

- Obtener rapidez en la convergencia hacia el movimiento periódico del desempeño de la propuesta a 2-FIS para condiciones iniciales dentro del ciclo límite, teniendo en cuenta que la respuesta tarda en alcanzar el movimiento periódico.
- Ampliar el estudio a un sistema adaptativo o auto-ajustable capaz de desarrollar las frecuencias y amplitudes en línea y así obtener un espectro de movimientos periódicos en un mecanismo en movimiento.
- Otro enfoque que queda por explorar para un trabajo futuro es utilizar los mapas de Poincaré como criterio de diseño para ajustar el controlador difuso.
- Explorar la metodología de diseño y realizar los desarrollos analíticos necesarios para ser aplicados a sistemas complejos sub-actuados o con incertidumbres.
- La evidencia numérica y experimental abre la posibilidad de abordar problemas desafiantes de generación de órbitas periódicas estables para sistemas con no linealidades no suaves como fricción, zona muerta y reacción.

6.2. Divulgación de resultados

Revistas indexadas

1. Self-Sustaining Oscillations with an Internal Two-Fuzzy Logic System Based on the Poincaré-Bendixson Method. Lopez-Renteria, J. A., **Herrera-García, L.**, Cardenas-Maciel, S. L., Aguilar, L. T. and Cazarez-Castro, N. R., *Fuzzy Sets and Systems*.
2. Self-Excited Periodic Motion in Mechanical Systems using Two-Fuzzy Inference System: Describing Function Based Design. **Herrera-García, L.**, Cazarez-Castro, N. R., Lopez-Renteria, J. A., Cardenas-Maciel, S. L., Aguilar, L. T. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.

Congresos nacionales

- **Herrera-García, L.**, Aguilar, L. T., Lopez-Renteria, J. A., Cardenas-Maciel, S. L., Cazarez-Castro, N. R., Generación de Ciclos Límites Auto-Excitados vía Doble Controlador Difuso para una Clase de Sistemas Mecánicos. XXII Congreso Mexicano de Robótica – COMRob 2020, Tijuana, México.

- **Herrera-García, L.**, Lopez-Renteria, J. A., Cardenas-Maciel, S. L., Aguilar, L. T., Cazarez-Castro, N. R., *Diseño de un Oscilador via Doble Inferencia Difusa: Un Enfoque Basado en Poincaré-Bendixson*, Congreso Nacional de Control Automático, CNCA2019, Puebla, México.
- **Herrera-García, L.**, Cazarez-Castro N. R., Jorge A. Lopez-Renteria, Selene L. Cardenas-Maciel, y Luis T. Aguilar., Sistema Difuso para Inducir Movimientos Periódicos en un Sistema Pendular. Congreso Nacional de Control Automático, CNCA 2017, Monterrey, México.

Referencias

- [1] J.E. Ackermann. Pole placement control. *Control System, Robotics and Automation*, 8(2011):74–101, 2009.
- [2] L. T. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte. Generating self-excited oscillations via two-relay controller. *IEEE Transactions on automatic control*, 54(2): 416–420, 2009.
- [3] L. T. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte. Generating self-excited oscillations for underactuated mechanical systems via two-relay controller. *International Journal of Control*, 82(9):1678–1691, 2009.
- [4] L. T. Aguilar, I. M. Boiko, L. M. Fridman, and L. B. Freidovich. Generating oscillations in inertia wheel pendulum via two-relay controller. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 22(3):318–330, 2012.
- [5] L. T. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte. Three link serial structure underactuated robot. In *Self-Oscillations in Dynamic Systems*, pages 99–107. Springer, 2015.
- [6] L. T. Aguilar, Igor Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte. *Self-oscillations in dynamic systems*. Springer, 2015.
- [7] M. A. Aizerman. *Theory of automatic control*. Pergamon, 1963.
- [8] C. Albea, C. Canudas-de Wit, and F. Gordillo. Adaptive control of the boost dc-ac converter. In *Control Applications, 2007. CCA 2007. IEEE International Conference on*, pages 611–616. IEEE, 2007.
- [9] A. A. Andronov and S.E. Khajkin. *Theory of oscillations*. 1949.
- [10] A.A. Andronov, A.A. Vitt, and S.E. Khakin. *Theory of oscillators*.

-
- [11] Vitt A. A. Andronov, A. A. and S. E. Khaikin. *Theory of Oscillators: Adiwes International Series in Physics*, volume 4. Elsevier, 2013.
- [12] J. Aracil, F. Gordillo, and J.A. Acosta. Stabilization of oscillations in the inverted pendulum. In *XV IFAC World Congress*, 2002.
- [13] D.P. Atherton and D.R. Towill. Nonlinear control engineering—describing function analysis and design. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 7(9): 678–678, 1977.
- [14] A. Banaszuk and J. Hauser. Feedback linearization of transverse dynamics for periodic orbits. *Systems & control letters*, 26(2):95–105, 1995.
- [15] M. D. Berkemeier and R. S. Fearing. Tracking fast inverted trajectories of the underactuated acrobot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(4): 740–750, 1999.
- [16] Sašo Blažič. On periodic control laws for mobile robots. *IEEE transactions on industrial electronics*, 61(7):3660–3670, 2013.
- [17] I. A. Bogoliubov, N. N. and Mitropolskii and Y. A. Mitropolsky. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, volume 10. CRC Press, 1961.
- [18] A. G. Brito. Computation of multiple limit cycles in nonlinear control systems—a describing function approach. *Journal of Aerospace Technology and Management*, 3(1):21–28, 2011.
- [19] G. Cahen. Perturbations des oscillateurs filtrés. *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences*, 235(25):1614–1617, 1952.
- [20] C. Canudas-de Wit, B. Espiau, and C. Urrea. Orbital stabilization of underactuated mechanical systems. In *Proceedings of the 15th IFAC World Congress. Barcelona*, 2002.
- [21] S. L. Cardenas-Maciel, O. Castillo, and L. T. Aguilar. Generation of walking periodic motions for a biped robot via genetic algorithms. *Applied Soft Computing*, 11(8): 5306–5314, 2011.
- [22] S. Chatterjee. Self-excited oscillation under nonlinear feedback with time-delay. *Journal of Sound and Vibration*, 330(9):1860–1876, 2011.

-
- [23] G. Chen. Stability of nonlinear systems. *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, 2001.
- [24] C. Chevallereau, G. Abba, Y. Aoustin, F. Plestan, E. Westervelt, C. C. De Wit, and J. Grizzle. Rabbit: A testbed for advanced control theory. 2003.
- [25] A. Delgado. Linealización entrada/salida de sistemas no lineales afines utilizando un filtro. *Ingeniería e Investigación*, (45):62–66, 2000.
- [26] A. Estrada, L. T. Aguilar, R. Iriarte, and L. Fridman. Two relay controller for real time trajectory generation and its application to inverted orbital stabilization of inertia wheel pendulum via quasi-continuous hosm. *Asian Journal of Control*, 14(1):58–66, 2012.
- [27] W. R. Evans. Control system synthesis by root locus method. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 69(1):66–69, 1950.
- [28] Y. Fan, D. Zhang, and U-Xuan Tan. Trajectory tracking of piezoelectric-driven stage via a hybrid controller for both periodic and non-periodic motion. *Smart Materials and Structures*, 28(2):025023, 2019.
- [29] I. Fantoni and R. Lozano. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [30] C. Fox. *An introduction to the calculus of variations*. Courier Corporation, 1987.
- [31] L. Freidovich, A. R., A. Shiriaev, and R. Johansson. Stable periodic motions of the pendubot via virtual holonomic constraints. In *Proc. 3rd IFAC Workshop Lagrangian Hamiltonian Methods Nonlinear Control*, pages 111–116, 2006.
- [32] L. Freidovich, A. Robertsson, A. Shiriaev, and R. Johansson. Stable periodic motions of inertia wheel pendulum via virtual holonomic constraints. In *Control Conference (ECC), 2007 European*, pages 3771–3776. IEEE, 2007.
- [33] L. Freidovich, A. Robertsson, A. Shiriaev, and R. Johansson. Periodic motions of the pendubot via virtual holonomic constraints: Theory and experiments. *Automatica*, 44(3):785–791, 2008.
- [34] K. Furuta, M. Yamakita, and S. Kobayashi. Swing up control of inverted pendulum. In *Proceedings IECON'91: 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, pages 2193–2198. IEEE, 1991.

- [35] K. Furuta, M. Yamakita, and S. Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 206(4):263–269, 1992.
- [36] Francisco Gordillo, J. Aracil, and Teodoro A. Determining limit cycles in fuzzy control systems. In *Proceedings of the Sixth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 1, pages 193–198, 1997.
- [37] F. Gognard and C. Canudas de Wit. Virtual constraints for the orbital stabilization of the pendubot. In *Nonlinear And Adaptive Control: Tools and Algorithms for the User*, pages 115–145. World Scientific, 2006.
- [38] Peter Hagedorn. Non-linear oscillations. *Oxford and New York*, 1981.
- [39] Naoyuki. Hara, H. Kokame, and K. Konishi. Circular periodic motion generation for mobile robots using limit cycle systems. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, pages 4271–4276. IEEE, 2010.
- [40] J. Hauser and C. C. Chung. Converse lyapunov functions for exponentially stable periodic orbits. *Systems & Control Letters*, 23(1):27–34, 1994.
- [41] M. Hernández-Ruiz and Iliana M. Meza-Sánchez. Estabilización orbital de un robot móvil con ruedas tipo unicycle: síntesis y validación experimental. *Research in Computing Science*, 105:41–51, 2015.
- [42] L. Herrera, Y. Orlov, O. Montano, and A. Shiriaev. Model orbit output feedback tracking of underactuated mechanical systems with actuator dynamics. *International Journal of Control*, 93(2):293–306, 2020.
- [43] Z. Hou. Oscillations and limit cycles in lotka–volterra systems with delays. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(1):358–370, 2012.
- [44] A. Hurwitz. Ueber die bedingungen, unter welchen eine gleichung nur wurzeln mit negativen reellen theilen besitzt. *Mathematische Annalen*, 46(2):273–284, 1895.
- [45] Inteco. *Pendulum-Cart System User’s Manual*. Quanser Inc., Katowicka 36 31-351 Krakow, Poland, 2016.
- [46] J. Jantzen. *Foundations of fuzzy control*, volume 209. Wiley Online Library, 2007.
- [47] A. Jenkins. Self-oscillation. *Physics Reports*, 525(2):167–222, 2013.

- [48] D. F. Jenkins and K. M. Passino. An introduction to nonlinear analysis of fuzzy control systems. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 7(1):75–103, 1999.
- [49] H. K. Khalil. Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5):5–1, 1996.
- [50] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.
- [51] W. J.M. Kickert and E. H. Mamdani. Analysis of a fuzzy logic controller. In *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, pages 290–297. Elsevier, 1993.
- [52] E. Kim, H. Lee, and M. Park. Limit-cycle prediction of a fuzzy control system based on describing function method. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(1):11–22, 2000.
- [53] Al A Kolesnikov. Nonlinear oscillations control. energy invariants. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 48(2):185–198, 2009.
- [54] O. Kuljaca, L. Kuljaca, Z. Vukic, and S. Bruno. Fuzzy controller for elimination of the nonlinear resonance phenomenon. In *Proceedings of 10th Mediterranean Conference on Control and Automation–MED2002, Lisbon, Portugal*, 2002.
- [55] Ognjen. Kuljača, S. Tešnjak, and Z. Vukić. Describing function of mamdani type fuzzy regulator with input signals derived from single system input and singleton output membership functions. In *1999 IEEE Hong Kong Symposium on Robotics and Control*, 1999.
- [56] B. C. Kuo. *Sistemas de control automático*. Prentice Hall, séptima edición edition, 1996.
- [57] M. La Hera and P. Xavier. *Contributions to motion planning and orbital stabilization: case studies: Furuta pendulum swing up, inertia wheel oscillations and biped robot walking*. PhD thesis, Umeå university, 2008.
- [58] J. La Salle, S. Lefschetz, and R.C. Alverson. Stability by liapunov’s direct method with applications. *Physics Today*, 15:59, 1962.
- [59] G. A. Leonov. Generalization of the andronov-vitt theorem. *Regular and chaotic dynamics*, 11(2):281–289, 2006.
- [60] A. Liapounoff. Problème général de la stabilité du mouvement. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, volume 9, pages 203–474. Gauthier-Villars, Imprimeur-Editeur; Ed. Privat, Imprimeur-Libraire, 1907.

- [61] J. H. Lilly. *Fuzzy control and identification*. John Wiley & Sons, 2011.
- [62] J. Loeb. Frequency response. *Advances in Nonlinear Servo Theory*, pages 260–268, 1956.
- [63] V. Juárez Luna and L. T. Aguilar. Two relay based control for orbital stabilization of inertia wheel pendulum—the bounded input case. In *Variable Structure Systems (VSS), 2010 11th International Workshop on*, pages 313–318. IEEE, 2010.
- [64] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 55(3):531–534, 1992.
- [65] U. Mackenroth. Linear dynamical systems. In *Robust Control Systems*, pages 85–132. Springer, 2004.
- [66] E.H. Mamdani. Applications of fuzzy set theory to control systems: a survey. In *Fuzzy automata and decision processes*, pages 77–88. North-Holland, 1977.
- [67] I. R. Manchester. Transverse dynamics and regions of stability for nonlinear hybrid limit cycles. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):6285–6290, 2011.
- [68] R. K. Miller and Anthony N M. *Ordinary differential equations*. Academic Press, 1982.
- [69] N Minorsky, R Bellman, and R Kalaba. Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded action. *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, eds. R. Bellmann and R. Kalaba, (New York: Dover, 1964), pages 141–149, 1942.
- [70] A. Murgan. A general stability criterion of the oscillations in nonlinear systems. *Proceedings of the IEEE*, 59(1):78–79, 1971.
- [71] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall, tercera edición edition, 1998.
- [72] K. Ogata and Y. Yang. *Modern control engineering*, volume 4. Prentice hall India, 2002.
- [73] J. Olivier, J. Le Claire, and L. Loron. An efficient switching frequency limitation process applied to a high dynamic voltage supply. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 23(1):153–162, 2008.

- [74] J. Olivier, J. Le Claire, and L. Loron. A nonlinear phenomenon on self-oscillating current controllers: The indirect synchronization. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(3):1106–1111, 2010.
- [75] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2013.
- [76] J. Perng. Limit-cycle analysis of dynamic fuzzy control systems. *Soft Computing*, 17(9):1553–1561, 2013.
- [77] H. Poincaré. Oeuvres complètes paris gauthier-villars 1952. *Tome VIII Mécanique céleste et astronomie*.
- [78] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7:375–422, 1881.
- [79] Quanser. *Rotary Pendulum (ROTPEN) Inverted Pendulum Trainer*. Quanser Inc., 119 Spy Court Markham, Ontario L3R 5H6, Canada, 2011.
- [80] Babuska R. Fuzzy and neural control. disc course lecture notes. *Delft University of Technology. Delft, the Netherlands*, 2001.
- [81] S. Riachy, T. Floquet, Y. Orlov, and J.P. Richard. Stabilization of the cart-pendulum system via quasi-homogeneous switched control. In *Variable Structure Systems, 2006. VSS'06. International Workshop on*, pages 139–142. IEEE, 2006.
- [82] Yuri S., Christopher E., Leonid F., and Arie L. *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, 2014.
- [83] A. Sharma and S.C. Sinha. Control of nonlinear systems exhibiting chaos to desired periodic or quasi-periodic motions. *Nonlinear Dynamics*, 99(1):559–574, 2020.
- [84] S. M. Shinnars. *Modern control system theory and design*. John Wiley & Sons, 1998.
- [85] A. Shiriaev, J. W. Perram, and C. Canudas-de Wit. Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: Virtual constraints approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(8):1164–1176, 2005.
- [86] A. Shiriaev, L. Freidovich, A. Robertsson, and R. Johansson. Virtual-constraints-based design of stable oscillations of furuta pendulum: theory and experiments. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 6144–6149. IEEE, 2006.

- [87] A. S. Shiriaev, L. B. Freidovich, A. Robertsson, R. Johansson, and A. Sandberg. Virtual-holonomic-constraints-based design of furuta pendulum: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(4):827–832, 2007.
- [88] A. S. Shiriaev, L. B. Freidovich, and I. R. Manchester. Can we make a robot ballerina perform a pirouette? orbital stabilization of periodic motions of underactuated mechanical systems. *Annual Reviews in Control*, 32(2):200–211, 2008.
- [89] T. Šijak, S. Tešnjak, and O. Kuljača. Stability analysis of fuzzy control system using describing function method. In *9th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2001.
- [90] J. E. Slotine, L. Weiping, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [91] J. J. Slotine and L. Weiping. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [92] M. Sugeno. An introductory survey of fuzzy control. *Information sciences*, 36(1-2): 59–83, 1985.
- [93] G. Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Soc., 2012.
- [94] Eleuterio C. Urrea O. *Contribution to the problem of orbital stabilization: application to a five degrees of freedom underactuated robot*. PhD thesis, Grenoble INPG, 2003.
- [95] W. E. Vander Velde. *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [96] Juan E Velázquez-Velázquez, Rosalba Galván-Guerra, and Leonid Fridman. Robust generation of self-oscillation in pendulum systems: A switched integral sliding mode control approach. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):7163–7168, 2017.
- [97] C. Vivas-Venegas and F. Rubio. Improving the performance of orbitally-stabilizing controls for the furuta pendulum. In *IFAC workshop on Hamiltonian SystemsSevilla*, 2003.
- [98] Z. Vukic. *Nonlinear control systems*. CRC Press, 2003.
- [99] Li-Xin Wang. *A course in fuzzy systems and control*. Prentice-Hall, Inc., 1996.

-
- [100] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.
- [101] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information sciences*, 8(3):199–249, 1975.
- [102] L. A. Zadeh. Syllogistic reasoning in fuzzy logic and its application to usuality and reasoning with dispositions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, (6):754–763, 1985.
- [103] Dennis Zill, Warren S Wright, and Michael R Cullen. *Advanced engineering mathematics*. Jones & Bartlett Learning, 2011.
- [104] H. Zimmermann. *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer Science & Business Media, 2011.

Anexo I

Código desarrollado en lenguaje de programación Matlab para el cómputo de las derivadas parciales con respecto de las funciones de transferencia de los sistemas mecánicos y la función descriptiva del 2-FIS. Con el objetivo de realizar el análisis de la estabilidad orbital mediante el criterio de Loeb para el enfoque función descriptiva.

```
1 clc;           % LIMPIA EL PROMPT DEL MATLAB
2 clear;        % LIMPIA EL HISTORICO DEL WORKSPACE DEL MATLAB
3 close all;    % CIERRA TODAS LAS FIGURAS Y OBJETOS DE MATLAB
4 syms w A      % DECLARACION DE LAS VARIABLES SIMBOLICAS FRECUENCIA (w)Y
                AMPLITUD (A)
5
6 k1 = -21.828620333669850; % GANANCIA FIS1
7 k2 = -5.017997916285752; % GANANCIA FIS2
8 s=1i*w;      % DECLARACION DEL OPERADOR DE LAPLACE
9
10 %FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL PENDULO DE FURUTA
11 GJW= ((2.298*s^2) - (6.687e-07*s) + 2.253e-15)/(s^4 + (17*s^3) + (104*s
    ^2) + (268*s) + 240);
12
13 REGJW = double(subs(real(GJW),[A,w],[0.1,7])); % PARTE REAL DEL SISTEMA
    GJW
14 IMGJW = double(subs(imag(GJW),[A,w],[0.1,7])); % PARTE IMAGINARIA DEL
    SISTEMA GJW
15
16 %PARTE REAL FUNCION DESCRIPTIVA (NAW)
17 RENAW=(2/pi)*(k1*(asin(0.0990/A)+(0.0990/A)*sqrt(1-((0.0990^2)/(A^2))))
    );
18 %PARTE IMAGINARIA FUNCION DESCRIPTIVA (NAW)
19 IMNAW=(2/pi)*(1i*w*(k2)*((asin(0.699/(A*w))+(0.699/(A*w))*sqrt
    (1-(0.699^2/(A*w)^2)))));
20 % FUNCION DESCRIPTIVA
21 NAW=RENAW+IMNAW;
22 % CALCULO DEL TERMINO EN LAZO ABIERTO (GH)
23 GH = NAW*GJW;
```

```
24 GH=simplify(GH);
25 % CALCULO DE LA ECUACION DE BALANCE ARMONICO (1+GH)
26 LC=simplify((1+GH));
27 % PARTE REAL DE (1+GH)
28 U=simplify(real(LC));
29 % PARTE IMAGINARIA DE (1+GH)
30 V=simplify(imag(LC));
31
32 % DERIVADAS PARCIALES
33 DPURA = diff(U,A);      % DERIVADA PARCIAL DE U RESPECTO a A
34 DPURW  = diff(U,w);     % DERIVADA PARCIAL DE U RESPECTO a w
35 DPVRA  = diff(V,A);     % DERIVADA PARCIAL DE V RESPECTO a A
36 DPVRW  = diff(V,w);     % DERIVADA PARCIAL DE V RESPECTO a w
37
38 %EVALUACION DE LOS PARAMETROS (A,w) EN LAS DERIVADAS PARCIALES
39
40 DPURA1 = double (subs(DPURA,[A,w],[0.1,7]));
41 DPURW1  = double (subs(DPURW,[A,w],[0.1,7]));
42 DPVRA1  = double (subs(DPVRA,[A,w],[0.1,7]));
43 DPVRW1  = double (subs(DPVRW,[A,w],[0.1,7]));
44
45 %CALCULO DEL CRITERIO DE LOEB
46 CL=double((DPURA1*DPVRW1)-(DPURW1*DPVRA1));
```

Índice de figuras

2.1. Función de pertenencia tipo triangular $\mu(x, 3, 6, 8)$	11
2.2. Función de pertenencia tipo singleton $\mu(x, 1)$	12
2.3. Función de pertenencia tipo trapezoidal $\mu(x, 1, 5, 7, 8)$	13
2.4. Función de pertenencia tipo gaussiana $\mu(x, 2, 5)$	13
2.5. Función de pertenencia del tipo sigmoide $\mu[x, 2, 4]$	14
2.6. Estructura de controlador difuso basado en reglas.	16
2.7. Diagrama de la función descriptiva.	20
2.8. Punto de intercepción en $-1/N(A_1, \omega)$ y $G(j\omega)$	21
2.9. (a) Ciclo límite sin equilibrio en \mathcal{R} ; (b) Ciclo límite con equilibrio repulsor en \mathcal{R}	23
2.10. Diagrama de aplicación del criterio de Loeb utilizando Matlab [®]	26
3.1. Funciones de pertenencia con x_1 y x_2 como variables de entrada y ψ_1 y ψ_2 como salidas.	30
3.2. Esquema a doble sistema de inferencia difusa (2-FIS).	34
3.3. Regiones de la dinámica.	39
3.4. Foco inestable en el sistema para cualquier condición inicial en $R_{(0,0)}$	41
3.5. Soluciones en las regiones $R(m, \pm 1)$, $m = -1, 0, 1$	42
3.6. Soluciones en las regiones $R(\pm 1, 0)$	43
3.7. Comportamiento de las soluciones vía Poincaré-Bendixson.	47
4.1. Representación física de un péndulo simple.	52
4.2. Configuración experimental que muestra el sistema de péndulo y el sistema de dSPACE [®] entrada/salidas.	53
4.3. Representación péndulo Furuta.	56
4.4. Plataforma experimental péndulo Furuta.	56
4.5. Sistema mecánico sub-actuado carro-péndulo [45]	57
4.6. Configuración sistema carro - péndulo [45].	58

4.7.	Proceso controlado por computadora [45].	59
4.8.	Descripción de fuerzas del sistema [45].	59
5.1.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del 2-FIS aplicada al sistema pendular simple.	69
5.2.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite.(c) Señal del sistema 2-FIS aplicado al sistema pendular simple.	70
5.3.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del 2-FIS aplicada al sistema pendular simple.	72
5.4.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite.	74
5.5.	Posición angular del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite.	75
5.6.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del 2-FIS aplicada al sistema pendular simple.	77
5.7.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del péndulo Furuta bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada de control del sistema a 2-FIS.	79
5.8.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada de control del sistema a 2-FIS.	81
5.9.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del péndulo Furuta con condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de entrada del sistema a 2-FIS.	83
5.10.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema carro-péndulo bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada del sistema a 2-FIS.	86
5.11.	(a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema pendular bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Entrada de control del sistema a 2-FIS.	88

5.12. (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del péndulo Furuta con condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de control del sistema a 2-FIS.	89
5.13. (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema carro-péndulo bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de salida del 2-FIS.	91
5.14. (a) Posición angular en función del tiempo. (b) Plano fase del sistema carro-péndulo bajo condición inicial dentro y fuera del ciclo límite. (c) Señal de salida del 2-FIS.	93