

2023

Tecnológico  
Nacional de  
México,  
Instituto  
Tecnológico  
de San Luis  
Potosí

Ricardo Jacinto Pardo  
González

# [ REPORTE DE AÑO SABÁTICO ]

B. Programa para la elaboración de Apuntes, Libros, Objetivos Educativos y Reactivos de Evaluación. / B1. Apuntes de las Asignaturas Mediciones Eléctricas (ETD-1021) y Electromagnetismo (AEF-1020) del Programa Educativo Ingeniería Electrónica (IELC-AUT-2010-211). 31/08/2023



Tecnológico Nacional de México, Instituto  
Tecnológico de San Luis Potosí

Reporte Mediciones Eléctricas de Año Sabático

---

**Apuntes de las Asignaturas Mediciones Eléctricas (ETD-1021)  
y Electromagnetismo (AEF-1020) del Programa Educativo  
Ingeniería Electrónica (IELC-AUT-2010-211).**

Ricardo Jacinto Pardo González

28/02/2023

# Apuntes de mediciones eléctricas.

## Contenido

Apuntes de mediciones eléctricas.....	2
Objetivo.....	1
Justificación:.....	1
Introducción:.....	1
Competencia a desarrollar de la asignatura: .....	2
Competencias previas:.....	2
Temario.....	3
Instrumentación didáctica.....	4
Indicadores de alcance.....	8
Indicadores de alcance.....	10
Desarrolló de apuntes de mediciones eléctricas.....	11
1.    Conceptos básicos.....	11
Introducción.....	11
1.1    Sistemas de unidades, patrones y calibración.....	11
Sistema inglés de unidades.....	12
ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LOS PATRONES DE MEDIDAS.....	12
Sistema internacional de unidades.....	14
Conversiones:.....	14
Unidades eléctricas.....	15
Patrones de medición.....	17
Clasificación de los patrones.....	17
PATRONES PARA MASA, LONGITUD Y VOLUMEN.....	18
PATRONES DE TIEMPO Y FRECUENCIA.....	19
PATRONES ELECTRICOS.....	20
1.2    Concepto de medida.....	22
1.3    Precisión, exactitud y sensibilidad.....	24
Cifras significativas.....	24
1.4    Errores en mediciones y su reducción.....	26
ERRORES de Medición en Metrología   MichellQ Teach.....	27
1.5    Tipos de corriente eléctrica.....	32



**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y  
ELECTROMAGNETISMO.**

---

Corriente eléctrica.....	32
1.6 Formas de onda.....	34
1.7 Frecuencia, período y amplitud.....	38
1.8 Valor promedio, valor máximo, valor pico a pico y valor eficaz. ....	45
1.9 Normas de seguridad en la medición de variables eléctricas. ....	50
Me da CALAMBRE tocando los electrodomésticos (Medidas Eléctricas Reglamentarias).....	51
Medidas de seguridad en mediciones eléctricas con el Multímetro. ....	51
Presentación: Seguridad Eléctrica.....	54
Material de refuerzo para el tema .....	59
Practica de laboratorio para la unidad 1.....	63
2. Instrumentos básicos y avanzados.....	65
2.1 Evaluación y comparación de medidores analógicos y digitales. ....	70
c) Cálculo de R: de las expresiones (11) y (14) se deduce que: .....	86
DIFERENCIA, VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE INSTRUMENTOS ANALÓGICOS Y DIGITALES .....	87
2.2 Operar y manejar los medidores analógicos y digitales en la medición de corriente y voltaje de c.a. y c.d. ....	97
Video para el aprendizaje sobre el uso del multímetro:.....	97
2.3 Funcionamiento, operación y aplicación de otros instrumentos. ....	109
2.3.2 Osciloscopio analógico y digital .....	121
Prácticas de laboratorio para la unidad 2. ....	144
3. Medición de parámetros.....	156
3.1 Medición y prueba de dispositivos y elementos. ....	156
3.2 Medición de potencia y energía.....	184
3.3 Efectos de carga de los instrumentos en las mediciones.....	185
Impedancia de los instrumentos de medición .....	185
Impedancia de los instrumentos de medición.....	186
file:///G:/Libros/Unidad%203/Efecto%20de%20carga.htm .....	188
Practica de laboratorio para la unidad 3.....	188
4. Instrumentos especiales y virtuales. ....	198
4.1 Analizador de estados lógicos. ....	198
<a href="https://ingenieriaelectronica.org/mas-informacion-sobre-las-cookies/">https://ingenieriaelectronica.org/mas-informacion-sobre-las-cookies/</a> .....	198
4.2 Analizador de espectros.....	198
Presentación .....	198
4.3 Equipos especiales de medición.....	200
Medidores de campo magnético .....	204
<b>MEDIDORES DE CAMPO MAGNÉTICO .....</b>	<b>205</b>

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y  
ELECTROMAGNETISMO.**

---

4.4	Introducción al manejo de instrumentos virtuales .....	211
	Practica de laboratorio para la unidad 4.....	218
5.	Diseño y elaboración de tarjetas de circuitos impresos. ....	224
5.1	Introducción a los circuitos impresos.....	224
5.2	Diseño de PCB mediante software.....	227
	Las 5 reglas principales del diseño de PCB digitales.....	233
	<b>Proteus: Programa + Manuales</b> .....	241
5.3.	Técnicas básicas para la construcción de circuitos impreso.....	241
	Tutorial #Electrónica Básica. Cap 15. Cómo hacer circuitos impresos PCB (I).....	246
	Practica de laboratorio para la unidad 5.....	247
	Bibliografía .....	247

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y  
ELECTROMAGNETISMO.**

---

Figura 1 Medición de longitud usando las longitudes de los pies individuales de 16 personas.....	11
Figura 2 Cifras significativas .....	25
Figura 3 Errores de medición: como calcularlos, reducirlos o eliminarlos.....	27
Figura 4 Gráfica de una tensión continua y una tensión pulsante.....	33
Figura 5 Gráfica de una tensión alterna.....	34
Figura 6 Gráfica de una tensión mixta. ....	34
Figura 7 Señal con forma de onda constante. ....	35
Figura 8 Formas de onda periódicas .....	36
Figura 9 Onda senoidal y Onda senoidal modificada.....	37
Figura 10 Onda cuadrada y Onda tren de pulsos.....	37
Figura 11 Onda triangular y Onda diente de sierra.....	37
Figura 12 Señales con forma de onda no periódica.....	38
Figura 13 <i>Señales con forma de onda variable en el tiempo.</i> ....	38
Figura 14 valores de una onda senoidal (o sinusoidal) .....	39
Figura 15.....	39
Figura 16 <i>Representación de una señal periódica senoidal</i> .....	44
Figura 17 <i>Representación de dos señales senoidales fuera de fase</i> .....	44
Figura 18 <i>Valor eficaz, Vef o Vrms</i> .....	49
Figura 19 Valores promedio y efectivos de algunas ondas que se encuentran con frecuencia en las mediciones eléctricas.	49
Figura 20.....	62
Figura 21 Galvanómetro de imán permanente y bobina móvil.....	65
Figura 22 Detalles de una Bobina Móvil que muestran el resorte de Control, la Aguja y sus Contrapesos.....	67
Figura 23 Detalles de Construcción de un Galvanómetro de Imán Permanente y Bobina Móvil .....	68
Figura 24 Esquema de un instrumento de imán permanente y bobina móvil .....	69
Figura 25 Conexión de un Galvanómetro utilizado como voltímetro.....	71
Figura 26 Conexión de una resistencia en serie.....	71
Figura 27 Multiplicador de resistencias independiente y de resistencias combinadas.....	72
Figura 28 Modelo practico de resistencias multiplicadoras en un voltímetro multirrango. ....	72
Figura 29 Conexión de un Galvanómetro utilizado como amperímetro .....	73
Figura 30 Conexión de una resistencia en derivación.....	74
Figura 31 Circuito de un amperímetro básico de cd. ....	74
Figura 32 A y B.....	76
Figura 33 Derivación universal o de Ayrton. ....	78
Figura 34.....	79
Figura 35.....	81
Figura 36.....	82
Figura 37.....	82
Figura 38.....	83
Figura 39.....	84
Figura 40 Ohmiometro tipo serie.....	86
Figura 41 Generador de funciones.....	110
Figura 42 Generador de funciones básico. ....	110
Figura 43.....	111
Figura 44 Generador de funciones Arbitrarias.....	112
Figura 45 Funciones Arbitrarias. ....	113
Figura 46 forma arbitraria.....	113
Figura 47 Vista frontal de generador de funciones.....	115
Figura 48 Diagrama a bloques.....	116
Figura 49 Diagrama a bloques de generador. ....	117
Figura 50 Osciloscopio Analógico.....	122
Figura 51 Osciloscopio Digital. ....	122

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y  
ELECTROMAGNETISMO.**

---

Figura 52 Osciloscopio digital Tektronix .....	128
Figura 53 Esquema de un puente de Wheatstone.....	157
Figura 54 Esquema elemental del método de comparación .....	157
Figura 55 Esquema elemental del método de sustitución.....	158
Figura 56 Método de sustitución aplicado con un amperímetro y un resistor de referencia .....	159
Figura 57.....	167
Figura 58 Esquema circuito de un puente de Wheatstone.....	167

## Objetivo

Utilizar de manera apropiada los instrumentos empleados en el laboratorio de electrónica para fomentar el reconocimiento, análisis, simulación de señales provenientes de circuitos eléctricos reales y diseñar modelos esquemáticos de circuitos impresos.

## Justificación:

La materia de mediciones eléctricas es una disciplina que para su aprendizaje necesita y hace uso de medios materiales, visuales y escritos para despertar interés dentro de los estudiantes, motivo por el cual es realizado el presente trabajo. La selección de este tema esta basado en el hecho de que el área de mediciones eléctricas es amplia y apasionante a causa de la relación Hombre – herramienta que existe en la práctica real, a la vez es una de las primeras áreas en las cuales podemos descubrir y desarrollar técnicas de aplicación práctica de equipo electrónico de manera eventual en el campo de trabajo.

## Introducción:

Muchos instrumentos de medición comunes se basan en la actualidad en la corriente eléctrica. Los instrumentos de medición son los que hacen posible la observación de cualquier fenómeno físico y su cuantificación en el proceso de medición. Durante algunos años, varias sociedades técnicas y organizaciones profesionales han hecho esfuerzos para desarrollar un conjunto de definiciones y términos que describan de una manera consistente muchas características y especificaciones que se aplican a instrumentos.

Los apuntes de la materia mediciones eléctricas estimula el pensamiento crítico, la creatividad y es a través de ellas que el proceso de aprendizaje se vitaliza y se combate así la memorización, que tanto aporta en la formación de profesionales apáticos, pasivos y nada interesados en la innovación, con escasa curiosidad e iniciativa personal. Por eso es importante que los estudiantes de ingeniería conozcan la información relacionada con estas áreas a fin que puedan aplicarla para el bien de la humanidad.

El mundo actual, la globalización, exige que el estudiante muestre dominio en éstas herramientas que le permitan gestionar, aplicar y transformar información a contextos complejos y plurales; con propuestas de solución a problemáticas diversa, con visión sustentable, lo que es, en estos tiempos, fundamental para la configuración de la sociedad del conocimiento.

Esta asignatura tiene aportaciones en los siguientes puntos al perfil del Ingeniero en Electrónica: La importancia de que el alumno adquiera los conocimientos básicos en el aula, para realizar mediciones eléctricas. Desarrolla las habilidades y destrezas en el manejo de instrumentos de medición. Utiliza los instrumentos de medición cuando realice prácticas en el laboratorio. Obtiene y simula modelos para predecir el comportamiento de circuitos electrónicos empleando plataformas computacionales. Diseña y desarrolla tarjetas de circuitos impresos para implementar proyectos. Se relaciona con las asignaturas posteriores del plan de estudio de la carrera de ingeniería electrónica, en todas aquellas asignaturas que tienen que ver con mediciones de parámetros eléctricos,

simulación y diseño de circuitos impresos. La competencia del saber y el saber hacer en las siguientes asignaturas analógicas y digitales.

En esta asignatura es organizado el temario en cinco temas, agrupando los contenidos conceptuales a lo largo de los primeros 4 temas; se incluye un último tema que se destina a la aplicación de conceptos específicos relacionados con circuitos impresos. Se comienza en el primer tema presentando los conceptos básicos de la medición y de las principales variables a medir, donde el alumno investiga, documenta y expone en el aula. En el segundo tema se analizan los instrumentos de medición con el fin de comprender los conceptos básicos, principio de funcionamiento y utilización de los instrumentos analógicos y digitales que se utilizan en las mediciones de sistemas electrónicos para adquirir y desarrollar las habilidades en el uso de los mismos. En el tercer tema se aborda la medición de parámetros con instrumentos básicos y avanzados en circuitos reales, utilizando componentes pasivos y activos. En el cuarto tema se refiere a la utilización de software educativo, se simula y se modela circuitos virtuales y con instrumentos virtuales, y posteriormente se realiza la práctica en el laboratorio de manera física. Por último, en el quinto tema se abordan conceptos específicos que servirán de apoyo en el diseño y desarrollo de tarjetas de circuitos impresos, para diferentes prototipos. Las actividades de aprendizaje son: investigar, exponer, resolver y experimentar, aplicar y transportarlos a escenarios diferentes ya sea de manera virtual o físico, utilizando software educativo o en el laboratorio, realizando proyectos al finalizar la asignatura.

El trabajo también dará oportunidad a meditar cuales son las mejores formas de facilitar el conocimiento a los estudiantes de los temas de las materias, buscando estrategias didácticas atractivas y técnicas didácticas innovadoras, ya que los temas de las materias que son motivo de la propuesta al incluir una base matemática fuerte constituyen un reto a superar para los estudiantes y para el docente implica buscar formas de mejorar los índices de aprobación, además de promover un aprovechamiento óptimo y durabilidad de los equipo de los laboratorios de Electrónica y eléctrica, entre otros, con lo que se evidencia el impacto académico de la propuesta.

## **Competencia a desarrollar de la asignatura:**

Conocer los conceptos básicos de medición, utilizar los instrumentos para la medición y el análisis de señales provenientes de circuitos eléctricos reales, simular y diseñar modelos esquemáticos de circuitos impresos.

### **Competencias previas:**

- Aplicar la investigación documental.
- Aplicar herramientas de estadística.
- Aplicar herramientas matemáticas del cálculo diferencial e integral.
- Tener conocimientos de fenómenos eléctricos y magnéticos.
- Conocimiento sobre la ley de ohm y los arreglos de resistencias en serie y paralelo.

# Temario.

## 1. Conceptos básicos.

- 1.1. Sistema de unidades, patrones y calibración.
- 1.2. Concepto de medida.
- 1.3. Precisión, exactitud y sensibilidad.
- 1.4. Errores en mediciones y su reducción.
- 1.5. Tipos de corriente eléctrica.
- 1.6. Formas de onda.
- 1.7. Frecuencia, período y amplitud.
- 1.8. Valor promedio, valor máximo, valor pico a pico y valor eficaz.
- 1.9. Normas de seguridad en la medición de variables eléctricas.

## 2. Instrumentos básicos y avanzados.

- 2.1. Evaluación y comparación de medidores analógicos y digitales.
  - 2.1.1. Voltímetro.
  - 2.1.2. Amperímetro.
  - 2.1.3. Óhmetro.
- 2.2. Operar y manejar los medidores analógicos y digitales en la medición de corriente y voltaje de c.a. y c.d.
- 2.3. Funcionamiento, operación y aplicación de otros instrumentos.
  - 2.3.1. Generador de señales.
  - 2.3.2. Osciloscopio analógico y digital.

## 3. Medición de parámetros.

- 3.1. Medición y prueba de dispositivos y elementos.
  - 3.1.1. Resistencias.
  - 3.1.2. Inductancia y capacitancia.
  - 3.1.3. Mediciones con puentes.
  - 3.1.4. Prueba de dispositivos semiconductores.
- 3.2. Medición de potencia y energía.
  - 3.2.1. Potencia y energía en c.d.
  - 3.2.2. Potencia y energía en c.a.
- 3.3. Efectos de carga de los instrumentos en las mediciones.
  - 3.3.1. Impedancia de los instrumentos de medición.
  - 3.3.2. Sondas o puntas de prueba.

## 4. Instrumentos especiales y virtuales.

- 4.1. Analizador de estados lógicos.
- 4.2. Analizador de espectros.
- 4.3. Equipos especiales de medición.
  - 4.3.1. Graficadores.
  - 4.3.2. Trazador de curvas.
  - 4.3.3. Luxómetro.
  - 4.3.4. Tacómetro.
  - 4.3.5. Medidores de campo magnético.
  - 4.3.6. Analizador de Fourier
- 4.4. Introducción al manejo de instrumentos virtuales.

## 5. Diseño y elaboración de tarjetas de circuitos impresos.

- 5.1. Introducción a los circuitos impresos.
- 5.2. Diseño de PCB mediante software.
- 5.3. Técnicas básicas para la construcción de circuitos impresos.

# Instrumentación didáctica.

## UNIDAD 1

**Tiempo: 17 horas**

### Actividades de enseñanza.

1. Investigar los conceptos clave del tema.
2. Explicar el contexto general histórico de los sistemas de medición y los patrones utilizados.
3. Investigar en diferentes fuentes los distintos sistemas de medición, sus unidades y patrones.
4. Atender y comprender la aplicación del desarrollo del procedimiento. Resolver ejercicios y casos prácticos, comentando y analizando los resultados obtenidos.
5. Reconocer y diferenciar la exactitud y la precisión de un instrumento.
6. Resolver problemas que involucren el análisis estadístico de los datos arrojados por los instrumentos de medición.
7. Realizar experimentos de laboratorio que permitan ejercitar el razonamiento, la reflexión y el uso de herramientas matemáticas.

### Actividades de aprendizaje.

Explicar el contexto general histórico de los sistemas de medición y los patrones utilizados. Investigar en diferentes fuentes los distintos sistemas de medición, sus unidades y patrones. Reconocer y diferenciar la exactitud y la precisión de un instrumento.

Resolver problemas que involucren el análisis estadístico de los datos arrojados por los instrumentos de medición.

Realizar experimentos de laboratorio que permitan ejercitar el razonamiento, la reflexión y el uso de herramientas matemáticas.

### Indicadores de alcance.

**A 70 %**

Comprende el concepto de medición y los posibles errores en la misma.

**B 30 %**

Utilizar el análisis estadístico para la interpretación de los datos.

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia.
		A	B	C	
1. Examen	60	42	18		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	11	4		Se revisará la información presentada y se retroalimenta.
3. Trabajo en equipo	20	14	6		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	3	2		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	70	30		

Principales prácticas/proyecto.



Normas de seguridad del laboratorio.

**UNIDAD 2**

**Tiempo: 19 horas**

**Actividades de enseñanza.**

1. Explicar el funcionamiento de los instrumentos básicos y la forma correcta de realizar mediciones de corriente y voltaje.
2. Manipular instrumentos digitales y analógicos.
3. Investigar en diferentes fuentes las aplicaciones y características de los instrumentos básicos y avanzados.
4. Explicar lo comprendido en la teoría.
5. Presentar ejercicios demostrativos de la forma correcta de utilizar los instrumentos.
6. Manipular osciloscopio y generador para reforzar lo comprendido en la teoría.
7. Realizar prácticas de laboratorio donde emplee de manera correcta los instrumentos básicos y avanzados.

**Actividades de aprendizaje.**

Explicar el funcionamiento de los instrumentos básicos y la forma correcta de realizar mediciones de corriente y voltaje.

Investigar en diferentes fuentes las aplicaciones y características de los instrumentos básicos y avanzados.

Presentar ejercicios demostrativos de la forma correcta de utilizar los instrumentos.

Realizar prácticas de laboratorio donde emplee de manera correcta los instrumentos básicos y avanzados.

**Indicadores de alcance.**

**A 50 %**

Utilizar los instrumentos de adecuados para realizar mediciones a circuitos eléctricos reales

**B 50 %**

.Realizar el análisis de señales provenientes de circuitos eléctricos reales.

**Matriz de evaluación.**

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia..
		A	B	C	
1. Examen	35	18	17		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	7	8		Se revisara la información presentada y se retroalimenta.
3. Trabajo en equipo	45	23	22		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	2	3		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	50	50		

Principales prácticas/proyecto.

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

---

Uso del multímetro digital (parte 1).  
Uso del multímetro digital (parte 2).  
Diseño de un medidor de amperes de c. d.  
Diseño de medidor de voltaje de c. d.  
Descripción y funcionamiento de un osciloscopio.

UNIDAD 3

**Tiempo: 12 horas**

**Actividades de enseñanza.**

1. Explicar e Investigar en diferentes fuentes los conceptos voltaje, corriente y aplicaciones de los distintos tipos de señales eléctricas.
2. Presentar ejercicios demostrativos de la extracción de parámetros de una señal de C.A.
3. Manipular instrumentos para medición y explicación verbal sobre lo comprendido en la teoría.
4. Investigar la lectura de valores de los componentes pasivos y activos.
5. Manipular diferentes instrumentos y comparar resultados de mediciones realizadas
6. Realizar prácticas de laboratorio utilizando componentes pasivos y activos.
7. Aplicar de manera correcta los instrumentos básicos y avanzados.

**Actividades de aprendizaje.**

Investigar en diferentes fuentes los conceptos voltaje, corriente y aplicaciones de los distintos tipos de señales eléctricas.

Presentar ejercicios demostrativos de la extracción de parámetros de una señal de C.A.

Investigar la lectura de valores de los componentes pasivos y activos. Realizar prácticas de laboratorio utilizando componentes pasivos y activos. Aplicar de manera correcta los instrumentos básicos y avanzados.

**Indicadores de alcance.**

**A 50 %**

Identificar los tipos de señales eléctricas y sus parámetros.

**B 50 %**

. Interpretar los códigos correspondientes para conocer los tipos de señales eléctricas

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia..
		A	B	C	
1. Examen	35	18	17		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	7	8		Se revisara la información presentada y se retroalimenta.
3. Trabajo en equipo	45	23	22		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	2	3		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	50	50		

Principales prácticas/proyecto.

Puente de wheatstone.  
 Medición de componentes pasivos.  
 Medición de voltaje y corriente en c. A.  
 Uso del vatímetro.  
 Medición del efecto de carga de los medidores en los circuitos.

UNIDAD 4

**Tiempo: 16 horas**

**Actividades de enseñanza.**

1. Exponer la aplicación y característica de los instrumentos especiales.
2. Explicar el funcionamiento general de los instrumentos virtuales.
3. Explicación verbal de lo aprendido en la teoría y manipulación de instrumentos virtuales y especiales.
4. Realizar prácticas donde se manejan instrumentos especiales.

**Actividades de aprendizaje.**

- Investigar y exponer la aplicación y característica de los instrumentos especiales.
- Explicar el funcionamiento general de los instrumentos virtuales.
- Realizar prácticas donde se manejan instrumentos especiales.

**Indicadores de alcance.**

**A 60 %**

Conocer la aplicación de algunos instrumentos especiales.

**B 40 %**

Conocer el manejo de instrumentos virtuales.

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia..
		A	B	C	
1. Examen	35	21	14		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	9	6		Se revisara la información presentada y se retroalimenta.
3. Trabajo en equipo	45	27	18		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	3	2		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	60	40		

Principales prácticas/proyecto.

Medición con analizador de estados lógicos.  
Uso del luxómetro y del tacómetro.

**UNIDAD 5**

**Tiempo: 11 horas**

**Actividades de enseñanza.**

1. Buscar y seleccionar las normas y estándares en la elaboración de circuitos impresos.
2. Aplicar una metodología en el diseño de tarjetas de circuitos impresos.
3. Identificar las opciones existentes en el software seleccionado: menús, ventanas, comandos, herramientas y librerías.
4. Investigar las técnicas de transferencia de mascarilla. Evaluar su impacto ecológico de cada una de ellas.
5. . Aplicar las técnicas de montaje y soldadura en la elaboración de circuitos impresos.
6. Aplicar técnicas de extracción y de soldado de componentes en circuitos impresos.
7. Desarrollará y realizará sus propios circuitos impresos.

**Actividades de aprendizaje.**

Investigar y seleccionar las normas y estándares en la elaboración de circuitos impresos.

Aplicar una metodología en el diseño de tarjetas de circuitos impresos.

Identificar las opciones existentes en el software seleccionado: menús, ventanas, comandos, herramientas y librerías.

Investigar las técnicas de transferencia de mascarilla.

Evaluar su impacto ecológico de cada una de ellas.

Aplicar las técnicas de montaje y soldadura en la elaboración de circuitos impresos.

Aplicar técnicas de extracción y de soldado de componentes en circuitos impresos.

**Indicadores de alcance.**

**A 60 %**

Conocer la aplicación de algunos instrumentos especiales.

**B 40 %**

Conocer el manejo de instrumentos virtuales.

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia..
		A	B	C	
1. Examen	35	21	14		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	9	6		Se revisara la información presentada y se retroalimenta.
3. Trabajo en equipo	45	27	18		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	3	2		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	60	40		

Principales prácticas/proyecto.

Elaborar diferentes diseños de tarjetas de circuitos impresos.  
Realizar un diseño completo de un circuito impreso donde se considere normas

# Desarrolló de apuntes de mediciones eléctricas.

## 1. Conceptos básicos.

### Introducción.

La importancia de las mediciones puede ser vista por cualquier persona en la vida diaria. Las mediciones son la base para poder entender todo tipo de convenio o tratado. El intercambio de mercancías se basa en su totalidad en cantidades bien conocidas. La transferencia de información sobre una cierta longitud necesita de un conocimiento específico de un patrón establecido de longitud y de la habilidad para contar las unidades de la longitud medida. Una antigua medida de longitud se basaba en el tamaño del pie humano y se usaba de manera repetida al formar a 16 personas que se encontraban saliendo de una iglesia después de misa y midiendo después la longitud total de sus pies. <sup>1</sup>

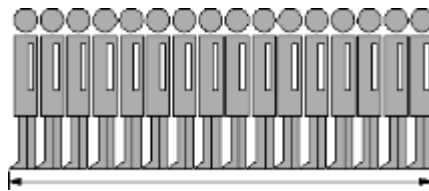


Figura 1 Medición de longitud usando las longitudes de los pies individuales de 16 personas.

Por supuesto los tamaños individuales de los zapatos eran muy diferentes entre sí y surgieron algunas dudas sobre la exactitud de tales representaciones repetidas. Considerando esto, nuestros antepasados introdujeron 16 pies para definir una unidad específica de longitud. Con esto, ellos de manera inadvertida - aunque efectiva - introdujeron medios estadísticos para promediar, cubriendo así las exigencias de exactitud de aquellos tiempos, las cuales de todos modos no eran muy altas. Es obvio que se puede obtener una exactitud mayor al recurrir a estándares fijos definidos de manera exacta y al hacer a un lado referencias humanas o “naturales”. Para estudiar la naturaleza y para describirla científicamente, uno necesita definiciones exactas de referencias o presuposiciones para todas las mediciones.

### 1.1 Sistemas de unidades, patrones y calibración.

Una sola cantidad o cifra no es suficiente para describir una cantidad física. Por ejemplo, decir que un tubo mide 4 no tiene significado a menos que se especifique una unidad de medida para longitud. Al agregar unidades al número queda claro que el tubo ahora mide 4 pies. La unidad define la magnitud de la medición. Si tenemos una medida de longitud, la unidad usada para describir la longitud podría ser un pie, una yarda o un metro, cada una de las cuales describe una magnitud diferente de longitud. La importancia de especificar las unidades de una medición para un número usado al

Martin U. Reissland, *Electrical Measurements: Fundamentals, Concepts, Applications*, (India: New Age International Publishers), p. 1.

describir una cantidad física es doblemente enfatizada cuando se indica que la misma cantidad física puede ser medida usando una variedad de diferentes unidades. Hay dos sistemas de unidades en uso en la actualidad, el Sistema Inglés de unidades y el sistema internacional de medidas.

### **Sistema inglés de unidades**

En los Estados Unidos, el sistema inglés se usa de manera actual. Este sistema consiste de varias unidades para cada una de las dimensiones o mediciones fundamentales. Estas unidades se muestran en la tabla siguiente:

**Tabla 1** Unidades del Sistema Inglés.

<b>UNIDADES DE MEDIDA DEL SISTEMA INGLÉS</b>		
<b>Longitud</b>	<b>Masa</b>	<b>Tiempo</b>
		Segundo
Pulgada		Minuto
Pie	Onza	Hora
Yarda	Libra	Día
Milla	Tonelada	Mes
		Año

El sistema inglés se usa en el campo de la ingeniería a lo largo de todos los Estados Unidos. El sistema Pie-Libra-segundo o *foot-pound-second* (FPS) en inglés es el sistema usado en los Estados Unidos cuando se trata de aspectos de la Física.

### **ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LOS PATRONES DE MEDIDAS**

En 1790, el gobierno francés, ordenó a la directiva de la Academia de las Ciencias, suministrar una propuesta para un sistema único de pesos y medidas con el objeto de reemplazar otros sistemas existentes. Los científicos franceses decidieron, como primer principio, que un sistema universal de pesos y medidas, no debería de depender de patrones hecho por el hombre, sino basarse en medidas permanentes suministrada por la naturaleza, por lo consiguiente, se escogió como *Unidad de Longitud "El Metro"*, definido como: *La millonésima parte de la distancia desde el polo al ecuador a lo largo del meridiano que atraviesa a través de París s.* Como *Unidad de Masa*, escogieron a la *masa de un centímetro cúbico de agua destilada a 4°C y a la presión atmosférica normal (760 mm Hg)* le dieron el nombre de **"Gram"**. Para la tercera unidad, **"Tiempo"**; decidieron retener el



**segundo** tradicional, definido como  $1/86,400$  parte del día medio solar.

Como un segundo principio, decidieron que las otras unidades se deberían *derivar* de las tres unidades antes mencionadas. El tercer principio que propusieron, fue que todos los *múltiplos* y *submúltiplos* se tomaran con base en el sistema decimal de unidades. A continuación se presenta una tabla al respecto:

**Tabla 2** MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DECIMALES

<b>NOMBRE</b>	<b>SÍMBOLO</b>	<b>EQUIVALENCIA</b>
yotta	Y	$10^{24}$
zetta	Z	$10^{21}$
exa	E	$10^{18}$
Peta	P	$10^{15}$
Tera	T	$10^{12}$
Giga	G	$10^9$
Mega	M	$10^6$
Kilo	K	$10^3$
Unidad		$10^0$
Mili	m	$10^{-3}$
Micro	$\mu$	$10^{-6}$
Nano	n	$10^{-9}$
Pico	p	$10^{-12}$
Femto	f	$10^{-15}$
Atto	a	$10^{-18}$
zepto	z	$10^{-21}$
yocto	y	$10^{-24}$

Las proposiciones de la Academia fueron aprobadas e introducidas como el **Sistema Métrico de Unidades de Francia** en 1875, 17 países firmaron la llamada **Convención del Metro**, adoptando como sistema legal a: “**El Sistema Métrico de Unidades**”. La Gran Bretaña y los Estados Unidos, aun cuando firmaron en la Convención, reconociendo su legalidad únicamente en las transacciones internacionales, pero no aceptaron el Sistema Métrico para uso doméstico.

## APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

La Gran Bretaña por la misma época, había estudiado un sistema de unidades eléctricas y la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia decidió que el **centímetro** y el **gramo** fueran unidades fundamentales de **longitud** y de **masa**. De aquí nació el **Sistema Absoluto de Unidades** o **Sistema C.G.S:** (Centímetro, gramo, segundo), utilizado por los físicos de todo el mundo. Con el trabajo pionero del Ingeniero italiano **Giorgi**, vinieron simplificaciones posteriores para establecer un verdadero **Sistema Universal**, ya que demostró que las unidades prácticas de *Corriente, Voltaje, Energía y Potencial empleados* eran compatibles con el **Sistema Metro-Kilogramo-Segundo**.

Un sistema más comprensivo se adoptó en 1954 y se designó en 1960 por acuerdo Internacional como: **Sistema Internacional de Unidades (S.I.)**. El sistema **SI** está reemplazando otros sistemas en la ciencia y la tecnológica, en la actualidad, hay seis unidades básicas del sistema y son:

### Sistema internacional de unidades

Todos los sistemas de pesos y medidas, métricas o no métricas, están ligadas a través de una red de acuerdos internacionales que apoyan al sistema internacional de medidas. El sistema internacional es llamado SI, usando las dos primeras iniciales de su nombre en francés *Systeme International d'Unités*. El tratado o acuerdo clave es el tratado del metro (*Convention du metre*), firmado en París el 20 de Mayo de 1875. Cuarenta y ocho naciones han ahora firmado este tratado, incluyendo todos los países más industrializados. Los Estados Unidos son un miembro de este club métrico, habiendo firmado el documento original en 1875.

Tabla 3 Unidades base del Sistema Internacional.

UNIDADES BASE DEL SISTEMA INTERNACIONAL		
Unidades base	Nombre de la cantidad	Símbolo base
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mole	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

### Conversiones:

Notación Científica a Notación Decimal

Cuando el exponente es POSITIVO, el resultado será un número mayor.

Cuando el exponente es NEGATIVO, el resultado será un número menor.

$3.45 \times 10^5 =$   
 $1.19 \times 10^{-2} =$   
 $5.17 \times 10^3 =$   
 $9.81 \times 10^{-4} =$

Si se convierte de un prefijo menor a un prefijo mayor, se genera un número menor.

470  $\mu$ volts = \_\_\_\_\_ mvolts  
 236 Kbytes = \_\_\_\_\_ Gbytes

Si se convierte de un prefijo mayor a un prefijo menor, se genera un número mayor.

3.9 mvolts = \_\_\_\_\_  $\mu$ volts  
 1986 Mbytes = \_\_\_\_\_ Kbytes

### Unidades eléctricas

Las unidades eléctricas básicas son parte del sistema centímetro-gramo-segundo, pero debido a que en muchos casos estas unidades son muy grandes o muy pequeñas para una medida conveniente, un número de unidades prácticas han sido adoptadas para su uso en Ingeniería. A continuación se brinda la definición de las unidades eléctricas más comunes que se usan en el laboratorio de Electricidad y Electrónica.

**Tabla 4** Unidades eléctricas.

Unidad	Abreviatura	Símbolo	Descripción
<b>Amper</b>	A	I	El Amper es la corriente constante que, si se mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita de sección transversal circular con valor mínimo de consideración y colocado 1 metro separado en el vacío, producirá entre estos dos conductores una fuerza igual a $2 \times 10^{-7}$ Newtons por metro de longitud
<b>Coulomb</b>	C	Q	Es la unidad estándar de cantidad en mediciones eléctricas. Es la cantidad de electricidad concentrada en un segundo por la corriente producida por una fuerza electromotriz de un volt que actúa en un circuito que cuenta con una resistencia de un ohm, o la cantidad transferida por un Amper en un segundo.

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

<b>Faradio</b>	F	C	El Faradio es la unidad estándar de Capacitancia. Cuando el voltaje a través de un Capacitor de 1 F cambia a un ritmo de un volt por Segundo (1V/s), resulta un flujo de corriente de 1 A. Una capacitancia de 1 F produce 1 V de diferencia de potencia para una carga eléctrica de un Coulomb (1C). En circuitos eléctricos y electrónicos comunes, se usan unidades de microfaradios ( $\mu\text{F}$ ), donde $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ y picofaradios (pF), donde $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ .
<b>Henry</b>	H	L	El Henry es la unidad de inductancia. Un inductor es un componente electrónico pasivo que almacena energía en forma de un campo magnético. La unidad estándar de inductancia es el Henry, se abrevia como H. Esta es una unidad de valor grande. Las unidades más comunes son el microhenry, abreviado $\mu\text{H}$ ( $1 \mu\text{H} = 10^{-6} \text{ H}$ ) y el milihenry, abreviado mH ( $1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H}$ ). De manera ocasional, se usa el nanohenry (nH), $1 \text{ nH} = 10^{-9} \text{ H}$ .
<b>Hertz</b>	Hz	f	Es la unidad de frecuencia.
<b>Joule</b>	J	W	Unidad de trabajo de energía o cantidad de calor generado cuando una fuerza de un Newton se aplica a lo largo de un desplazamiento de un metro. Un joule es el equivalente de un Watt de potencia radiada o disipada por un segundo. En unidades inglesas, la unidad térmica británica o British thermal unit (BTU) se usa para expresar energía. Un BTU es equivalente a aproximadamente 1,055 Joules.
<b>Ohm</b>	$\Omega$	R	La unidad derivada del Sistema Internacional de resistencia eléctrica; la resistencia entre dos puntos en un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 Volt entre ellos produce una corriente de 1 Amper.
<b>Segundo</b>	s	t	Es la unidad de tiempo.
<b>Siemens</b>	S	G	Unidad de conductancia eléctrica $S = A / V$
<b>Tesla</b>	T	B	Unidad de densidad de flujo magnético. Un Tesla es igual a 1 Weber por metro cuadrado del área del circuito.
<b>Volt</b>	V	V	El Volt (V) es la unidad estándar del Sistema Internacional de potencial eléctrico o fuerza electromotriz. Un potencial de un volt aparece a través de una resistencia de un ohm cuando una corriente de un Amper fluye a través de esa resistencia.
<b>Watt</b>	W	P	El Watt se usa para especificar la razón a la cual se disipa la energía eléctrica, o la razón a la cual se radia o se disipa energía electromagnética. La unidad de potencia se expresa como W or Joule/Segundo.

## APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

<b>Weber</b>	Wb	$\Phi$	Unidad de flujo magnético. El flujo que, cuando se aplica a un circuito que cuenta con una espira de alambre, produce en él una fuerza electromotriz (fem) de 1 volt a medida que se reduce a cero a un ritmo uniforme en un segundo. 1 Weber es equivalente a $10^8$ Maxwells.
--------------	----	--------	---

### Patrones de medición

Un patrón es una representación física de una unidad de medición. Los patrones se usan para determinar los valores de otras cantidades físicas por medio de un método de comparación.<sup>2</sup>

Un patrón de medición es una representación física de una medición. Una unidad se realiza con referencia a un patrón físico arbitrario o un fenómeno natural que incluyen constantes físicas y atómicas.

Los patrones de medición son mediciones y equipos de prueba con los cuales un instrumento que necesite ser calibrado es comparado, y cuya aplicación y control los establece aparte de las otras mediciones y equipo de prueba.

De todos los patrones del sistema métrico, sólo existe la muestra física de uno, el cual es el del [kilogramo](#), conservado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas. De ese patrón se han hecho varias copias para varios países.

### Clasificación de los patrones

Los patrones se definen en 4 categorías:

- a) Patrones internacionales.
  - b) Patrones primarios.
  - c) Patrones secundarios.
  - d) Patrones en uso o trabajo.
- a) Los **patrones internacionales** están definidos por acuerdos a nivel mundial. Estos patrones son preservados en la oficina internacional de de pesos y medidas en París Francia. Estos son evaluados periódicamente y revisados por medio de mediciones absolutas en términos de las unidades fundamentales de Física. Estos representan ciertas unidades de medición a la exactitud más cercana posible obtenida por la ciencia y la tecnología de las mediciones y se usan para compararlos con los patrones primarios.

- b) Los **patrones primarios** (básicos) se encuentran en los laboratorios de patrones nacionales en diferentes partes del mundo. Representan unidades fundamentales y algunas de las unidades eléctricas y mecánicas derivadas. Los patrones primarios no están disponibles para utilizarse fuera de los laboratorios nacionales. Una de sus principales funciones es la verificación y la calibración de los patrones secundarios.
- c) Los **patrones secundarios** son los patrones básicos de referencia que usan los laboratorios industriales de mediciones. Se conservan en la industria particular interesada y se verifican localmente con otros patrones de referencia en el área. Por lo general, se envían periódicamente a los laboratorios nacionales para su calibración y comparación con los patrones primarios, luego son devueltos al usuario industrial con un certificado de valor de medición en términos del patrón primario.
- d) Los **patrones de trabajo** son las herramientas principales en un laboratorio de mediciones. Se utilizan para verificar y calibrar la exactitud y comportamiento de las mediciones efectuadas en las aplicaciones industriales.

En las mediciones eléctricas y electrónicas interesan los patrones de mediciones eléctricas y magnéticas. Sin embargo las unidades eléctricas pueden generarse a partir de las unidades básicas de longitud, masa y tiempo.

### **PATRONES PARA MASA, LONGITUD Y VOLUMEN**

La unidad masa métrica se definió como la masa de un decímetro cúbico de agua a temperatura máxima de densidad. La representación material de esta unidad es el kilogramo patrón internacional. Los patrones secundarios de masa generalmente tienen una precisión de 1ppm (parte por millón) y pueden verificarse con los patrones primarios. En el comercio los patrones de trabajo están disponibles en una amplia gama para satisfacer cualquier aplicación. Los patrones de trabajo se verifican en los patrones secundarios de laboratorio.

La libra se define como 0.45359237 kg exactamente. Todos los países que conservan la libra como unidad básica de medición han adoptado la nueva definición.

La unidad métrica de longitud, el metro. Se definió en 1960 con más exactitud en términos del número de ondas emitidas por un átomo de Kriptón – 86. Por más de 20 años el metro patrón internacional fue 1, 650,763.73 longitudes de onda de la radiación rojo-naranja, en 1983 se adoptó un nuevo metro patrón: un metro es la distancia a la que se propaga la luz en el vacío en  $1/299, 792,458$  grados segundos.

La yarda se define como 0.9144 metros y una pulgada es 25.4 mm, ya que los patrones de unidades inglesas se basan en patrones métricos. Los pocos países que aun utilizan las yardas y otras unidades de medición inglesas han adoptado el término de yarda patrón imperial.

Los patrones de trabajo industriales de longitud más analizados son bloques de medida de precisión hechos de acero. El desarrollo y uso de los bloques de precisión, de bajo costo y elevada exactitud han hecho posible la fabricación de componentes industriales intercambiables con una aplicación muy económica de mediciones con precisión.

---

<sup>2</sup> H S Kalsi, *Electronic instrumentation*, (New York; McGraw Hill), p. 16.

La unidad de volumen es una cantidad derivada y no se representa por medio de un patrón internacional, calibrados en términos de las dimensiones absolutas de longitud y masa, los patrones derivados secundarios de volumen están disponibles y se pueden calibrar según los patrones primarios de NBS.

Conforme aumenta la necesidad de aumentar con patrones más exactos y se desarrolla la tecnología para crearlos. Los mejoramientos y descubrimientos serán añadidos a los patrones internacionales para mantener en armonía las necesidades mundiales.

## **PATRONES DE TIEMPO Y FRECUENCIA**

Desde tiempos remotos el hombre ha buscado un patrón de referencia para una escala uniforme de tiempo así como los medios para interpolarla y obtener lapsos de tiempo más cortos. Puesto que la escala de tiempo basada en el tiempo solar aparente no representa ninguna escala de tiempo uniforme, se buscaron tras alternativas. El tiempo solar medio daría una escala más exacta, un día solar medio es el promedio de todos los días del año. El segundo solar medio, es inadecuado como unidad fundamental de tiempo.

El sistema de tiempo universal (TU) o tiempo solar medio, se basa también en la rotación de la Tierra sobre su eje. Este sistema se conoce como TU y está sujeta a variaciones periódicas prolongadas e irregulares. La TU reconoce que la Tierra está sujeta a movimiento polar y se basa en la rotación angular real de la Tierra. El periodo o instante de tiempo de TU se puede establecer con una exactitud de pocos milisegundos, pero por lo general no se distribuye con esta exactitud.

La búsqueda de unidad de tiempo universal ha permitido que los astrónomos definan la unidad de tiempo llamada tiempo efímero (TE), que se basa en obtener variaciones astronómicas sobre el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Una desventaja del uso del segundo efímero es que solo se puede determinar con varios años de atraso y por tanto en forma indirecta. Para mediciones físicas la unidad de intervalo de tiempo se ha definido en términos de un patrón atómico.

El desarrollo y refinamiento de los resonadores atómicos han hecho posible el control de la frecuencia de un oscilador y por lo tanto, la elaboración de relojes atómicos. Una frecuencia está dada por  $h\nu = E_2 - E_1$  donde la  $h$  es la constante de Planck, la frecuencia  $\nu$  es una constante física que depende únicamente de la estructura interna del átomo. Un átomo proporciona un intervalo de tiempo constante.

Los transmisores iniciales de patrones de tiempo y frecuencia se realizan por la banda de alta frecuencia (AF). La transmisión de los patrones de tiempo y frecuencia mediante baja frecuencia y muy baja frecuencia de radio reduce este efecto ya que la propagación solo es de ondas terrestres.

Otra fuente de información de tiempo y frecuencia de precisión es el sistema de navegación de baja frecuencia (LORAN-C), se controlan con relojes de cesio y proporcionan señales dentro de Estados Unidos y otras partes del mundo.

Otra fuente de información de patrones de tiempo exactos son las transmisiones mediante televisión. Ya que la programación de televisión se distribuye vía terrestre y por satélites de enlace de microondas. No hay un efecto Doppler significativo y la frecuencia de calor se puede transmitir

con exactitud y está disponible como patrón de precisión.

## PATRONES ELECTRICOS

### *El ampere absoluto*

El sistema internacional de unidades (SI) define el ampere como la corriente constante, que al mantenerse a través de dos cables conductores paralelos de longitud infinita y sección circular despreciable alejados 1 metro de estos al vacío, produce entre estos dos conductores una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  Newton por metro de longitud. El ampere internacional se definió como la corriente que deposita plata metálica a una razón de 1,118 mg/segundo.

En 1948 el ampere absoluto reemplazo al original. El mejoramiento en las técnicas de medición de campos de fuerza da un valor al ampere muy superior a las mediciones iniciales. El ampere absoluto es actualmente la unidad fundamental de corriente eléctrica en SI y se acepta a nivel internacional.

El voltaje, la corriente y la resistencia están relacionados por la ley de Ohm. Dos tipos de patrones materiales forman una combinación, la cual sirve para mantener al ampere con alta presión durante largos periodos: la resistencia patrón y la celda patrón.

### *Patrones de resistencia*

El valor absoluto de Ohm en el sistema internacional se define en términos de las unidades fundamentales de longitud masa y tiempo. La resistencia patrón es una bobina de alambre de alguna aleación como la magnánima, la cual tiene una elevada resistividad eléctrica y un bajo coeficiente de temperatura - resistencia, la unidad de resistencia se puede representar con una precisión de unas pocas partes en 10 durante varios años. Los patrones secundarios y de trabajo se encuentran disponibles para algunos fabricantes de instrumentos en una amplia escala de valores y por lo general en múltiplos de 10 ohm.

La resistencia de transferencia se verifica con las características de estabilidad y temperatura, y régimen de potencia a una temperatura de operación especificada. Aun cuando el alambre seleccionado para la resistencia proporciona un valor constante en una amplia escala, el valor exacto de la resistencia a cualquier temperatura se puede calcular a partir de la siguiente formula:  $R = R - (1-25) = B (1-25)$  donde

### *Patrones de voltaje*

Por muchos años el volt patrón se basó en una celda electroquímica llamada celda patrón saturado o celda patrón. En el trabajo de Brian Josephson, 1960, se proporciona un nuevo patrón, se desarrolla un voltaje a través de la unión y se relaciona con la frecuencia de radiación por medio de la siguiente expresión:  $v = hf/2e$

Donde  $h$  = constante de Plank

$E$  = carga del electrón

$F$  = frecuencia de irradiación de las microondas

Hay dos tipos de celda Wenston: la celda saturada, la cual el electrolito está saturado a todas las



temperaturas por los cristales del sulfato de cadmio que cubren los electrodos, y la celda no saturada, en la cual la concentración del sulfato de cadmio produce saturación a cuatro grados centígrados.

Los patrones secundarios y de trabajo se encuentran en las celdas Weston sin saturar. La fem de una celda no saturada se encuentra entre 1.0180 V y 1.0200 V, su resistencia esta entre 500 y 800 ohm y su corriente no debe exceder a los 100  $\mu$ A.

### ***Patrones de capacitancia***

Ya que la unidad de resistencia se representa con la resistencia patrón y la unidad de voltaje con la celda de Weston patrón, muchas unidades eléctricas y magnéticas se pueden expresar en términos de estos patrones. La unidad capacitancia (farad) puede medirse con un cd. De Maxwell. Los capacitores patrón suelen construirse de placas metálicas intercaladas con aire como material dieléctrico. El área de las placas y la distancia entre estas se debe conocer con exactitud, para determinar su capacitancia.

Los patrones de trabajo de capacitancia se pueden obtener en un amplio rango de valores. Por lo general los valores se derivan del Ohm y del Farad, en lugar de los inductores construidos geoméricamente para la determinación del valor absoluto del Ohm.

La NBS selecciono el patrón Campbell de inductancia mutua como el patrón primario tanto para la inductancia como para la autoinductancia. Los patrones de trabajo de inductancia se encuentran disponibles comercialmente en una amplia gama de valores prácticos fijos y variables. La exactitud de inductancia mutua típica es de 2.5% y el rango de valores de inductancia va de 0 a 100 mH.

### ***Patrón de inductancia.***

El patrón de inductancia primaria se deriva del ohm y del farad en lugar de los inductores construidos geoméricamente para la determinación del valor absoluto del ohm. Un conjunto típico de patrones de inductancia fijos incluye valores de aproximadamente 100  $\mu$ h a 10H con una exactitud garantizada de 1% a la frecuencia de operación especificada. La exactitud de inductancia mutua típica es del 2.5% y el rango de valores de inductancia a de 0 a 200 mH. Existe una capacitancia distribuida entre los devanados de estos inductores y el error que introduce debe tomarse en cuenta.

### ***Patrón de Temperatura e Intensidad luminosa***

La temperatura termodinámica es una de las cantidades básicas del SI y su unidad es el Kelvin. La escala termodinámica Kelvin se conoce como la escala fundamental a la cuál todas las temperaturas deben referirse. Las temperaturas en esta escala se designan como K y se denotan por el símbolo T. La magnitud del Kelvin se define como la temperatura termodinámica del punto triple del agua que ocurre exactamente a 273.16 K. El punto triple del agua es la temperatura de equilibrio entre el hielo, el agua líquida y el vapor de agua.

La escala Celsius tiene dos puntos fijos fundamentales; el punto de ebullición del agua a 100 grados C y el punto triple del agua a 0.01 grados C, ambos se establecen a la presión atmosférica. La conversión entre la escala Kelvin y la escala Celsius sigue la relación:

$$T (^{\circ}\text{C}) = T (\text{K}) - T_0$$

donde  $T_0 = 273.15$  grados.

El termómetro patrón primario es un termómetro resistente de platino con una construcción especial donde el alambre de platino no está sujeto a esfuerzos.

El patrón primario de intensidad luminosa es un radiador total a la temperatura de solidificación de platino (2042 K aproximadamente). La candela se define como un sesentavo de la intensidad luminosa por  $\text{cm}^2$  del radiador total.

### **Patrones IEEE**

El Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) publica y conserva un conjunto de diferentes tipos de patrones. Estos patrones no están físicamente disponibles para comparación y verificación de patrones secundarios; se trata de procedimiento, patrones, nomenclaturas, definiciones, etc.

Grupo importante de patrones IEEE es el método de prueba patrón para probar y evaluar varios sistemas y componentes electrónicos. Los patrones del IEEE tienen un directorio de osciloscopios de laboratorio donde se especifican los controles, funciones, etc., así que el operador no tiene que capacitarse antes de emplear un dispositivo diferente.

### **Presentación de refuerzo al tema por la UAEMEX.**

<http://ri.uaemex.mx/bitstream/handle/20.500.11799/34607/secme-18970.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

### **Video de refuerzo:**

#### **UNIDADES DE MEDIDA Y PATRONES**

<https://www.youtube.com/watch?v=41eJfmLUfpE>

#### ➤ **Patrón de medida, ¿Qué es y cuál es su clasificación**

[https://www.youtube.com/watch?v=ozbDSm\\_sOsY](https://www.youtube.com/watch?v=ozbDSm_sOsY)

## **1.2 Concepto de medida.**

**Medir** es determinar el valor de una magnitud física comparándola con un patrón que se determina **unidad de medida**. Por tanto, es imprescindible que todo valor numérico resultante de una medida venga acompañado de sus unidades. Por ejemplo, si alguien dice que la velocidad de un avión es de 800 no nos da ninguna información; *¿800 qué?: ¿metros por segundo?, ¿kilómetros por hora?, ¿Millas por hora?,...*

El **proceso de medición** generalmente involucra la utilización de un instrumento como medio físico para determinar la magnitud de una variable. El medidor sirve como una extensión de las facultades humanas y en muchos casos permiten a las personas determinar el valor de una cantidad desconocida, la cual no podría medirse usando solamente las facultades sensoriales humanas. Este medidor a su vez, se auxilia de dispositivos que, actuado por energía en un medio de transmisión, suministra energía en la misma o en otra forma a un segundo sistema de transmisión, pudiendo ser ésta: **Eléctrica, Mecánica, Química, Óptica, Radiante ó Térmica**; éste dispositivo es conocido con el nombre de **Transductor**

**Medir** significa comparar la magnitud correspondiente con una unidad apropiada. Bajo el concepto

de medir se entiende la acción de registrar numéricamente magnitudes cuyo conocimiento es imprescindible para estudios científicos, en máquinas e instalaciones, en la generación, transmisión y distribución de la energía eléctrica, etc. El valor de la medida queda expresado como el producto del valor numérico por la unidad correspondiente.

- **Medir.**- Es la comparación de una magnitud con otra de la misma naturaleza llamada **Patrón ó Unidad de Medida**.

- **Medición.**- Es el conjunto de operaciones que tienen como objetivo, determinar el valor de una cantidad o variable, en donde **Variable** también es conocido con el nombre de "**Parámetro**" (**Para**-de; **Metro**-medir).

**Las mediciones se clasifican en dos tipos:**

- **Medición Estática.**- Es la cantidad o valor que está considerado como constante y es invariable en el tiempo.

- **Medición Dinámica.**- Es la cantidad o valor instantáneo dependiente del tiempo.

- **Patrón o Unidad de Medida.** - En las ciencias y la Ingeniería a, se usan dos clases de patrones o unidades de medida y estos son: **Las Unidades Fundamentales y Las Unidades Derivadas**.

- **Unidades Fundamentales.** - Son cantidades físicas que representa un fenómeno que pueden tomar cualquier valor y no requieren para su descripción de otras cantidades, dichas unidades fundamentales son seis: **Longitud, Masa, Tiempo, Carga** (Corriente Eléctrica), **Temperatura, Intensidad Luminosa y Substancia (mol)**.

- **Unidades Derivadas.** - Son aquellas cantidades físicas que para su descripción requieren cuanto menos de la repetición de las cantidades **Fundamentales**, Por ejemplo: *La Velocidad*.

### **Tipos de medición**

La medición se puede clasificar de acuerdo a la forma de realización en:

**Medida directa:** La medida o medición es directa, cuando se dispone de un instrumento de medida que la obtiene. En otras palabras Medida directa es aquella que se realiza usando un instrumento destinado a medir esa magnitud.

Ejemplos:

- Medir una longitud con una cinta métrica.
- Medir intensidad de corriente eléctrica con un amperímetro.

**Medida indirecta:** No siempre es posible realizar una medida directa. Esto se puede deber a que no existe el instrumento, no se dispone del instrumento, el instrumento que se dispone no está en el rango adecuado o porque hay algún impedimento que no permita la medición; Las medición indirecta es aquella que realizando la medición de una o varias variables, se puede calcular otra distinta que es la que se tiene interés en conocer.

Son las que calculan el valor de la medida **mediante una fórmula** previo cálculo de las magnitudes que intervienen en la fórmula por medidas directas.

Ejemplo:

- Calcular el volumen de una habitación midiendo las el alto, largo y ancho.
- Calcular la corriente en una rama de un circuito midiendo el voltaje en una resistencia del mismo.
- Midiendo la presión en dos puntos de un tanque de líquido para luego obtener la columna de agua (altura del líquido).

## 1.3 Precisión, exactitud y sensibilidad.

Esta materia es una introducción de los principios que gobiernan la operación y comportamiento de los instrumentos, además de información del uso y las limitaciones prácticas de las mediciones; la medición emplea una serie de términos, los cuales se definen a continuación:

- **Instrumento.** - Es el dispositivo mediante el cual se determina el valor o magnitud de una cantidad variable.
- **Exactitud.** - Es la aproximación con la cual la lectura de un instrumento se acerca al valor real de la variable.
- **Precisión.** - Es la medida de la reproducibilidad de las mediciones; esto es, dado el valor fijo de una variable, la precisión es una medida del grado con el cual las mediciones sucesivas difieren una de otra.
- **Sensibilidad.** - Es la relación de la señal de salida o respuesta del instrumento respecto al cambio de la entrada o variable medida.
- **Resolución.** - Es el cambio más pequeño en el valor medido al cual responde el instrumento.
- **Error.**- Es la desviación que existe a partir del valor real de la variable medida.

**Medir.- Es la comparación de una magnitud con otra de la misma naturaleza llamada Patrón o Unidad de Medida.**

- **Medición.**- Es el conjunto de operaciones que tienen como objetivo, determinar el valor de una cantidad o variable, en donde **Variable** también es conocido con el nombre de "**Parámetro**" (**Para**-de ; **Metro**-medir).

### Cifras significativas

Son denominadas cifras significativas (c.s) al conjunto de los dígitos que se conocen con seguridad en una medida.

De todas las cifras significativas siempre hay una, la última, que estará afectada por un error. Por esta razón al resto de cifras se le denominan cifras exactas.

Las cifras significativas aportan información sobre el resultado de medición. Ellas representan el uso de una o más escalas de incertidumbre en determinadas aproximaciones. Por ejemplo, se dice que 4,7 tiene dos cifras significativas, mientras que 4,07 tiene tres.

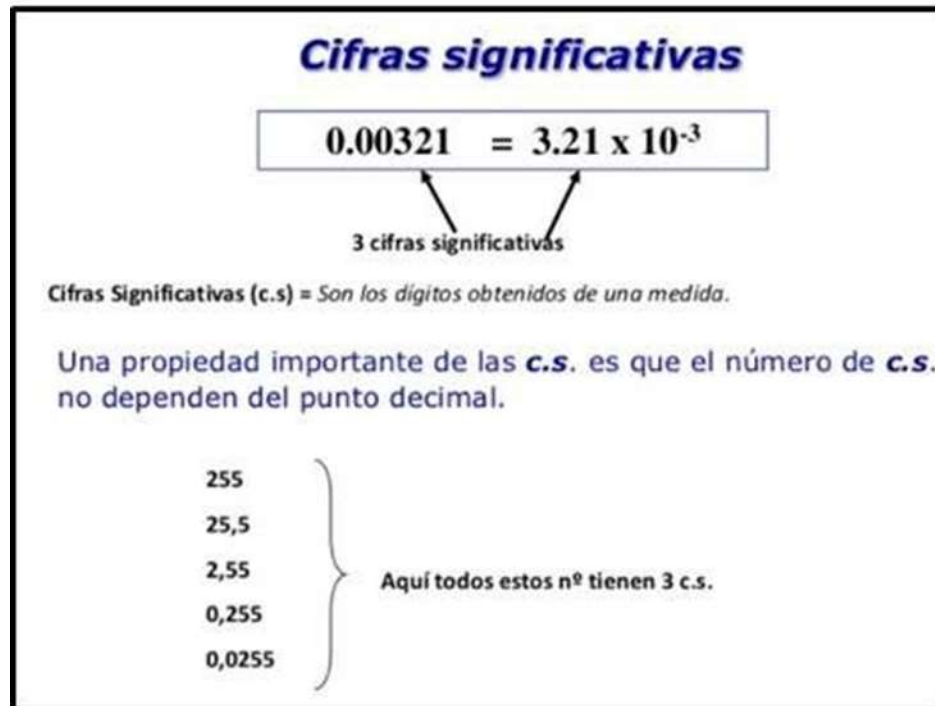


Figura 2 Cifras significativas

### Reglas de las cifras significativas

- Cualquier cifra distinta de cero se considera significativa.
  - *Ejemplos:* 25,36 m tiene 4 c.s. o 154 tiene 3 c.s.
- Se consideran cifras significativas los ceros situados entre dos dígitos distintos de cero y los situados después de la coma decimal.
  - *Ejemplos:* 2005.20 tiene 6 c.s. o 34.00 tiene 4 c.s.
- Sin embargo no se consideran cifras significativas los ceros situados al comienzo de un número, incluidos aquellos situados a la derecha de la coma decimal hasta llegar a un dígito distinto de cero.
  - *Ejemplo:* 0,000560 tiene 3 c.s. (560)
- Tampoco se consideran significativos los ceros situados al final de un número sin coma decimal, excepto si se indican con un punto.

### Redondeo

Se denomina redondeo al proceso de eliminar las cifras situadas a la derecha de la última cifra significativa.

### Reglas del redondeo

- Cuando el primero de los dígitos descartados es **cinco o mayor que cinco**, la cifra anterior se aumenta en una unidad.

*Ejemplo:* 45.367892 redondeado a 4 c.s. es 45.37. Dado que nos tenemos que quedar con 4 cifras, hay que descartar desde la 5ª en adelante, es decir desde el 7. 7 es mayor que 5 por lo que aumentamos en una unidad la anterior. Por tanto: 45.37

- Cuando el primero de los dígitos descartados es **menor que cinco**, la cifra anterior se mantiene igual.

*Ejemplo:* 123.643421 redondeado a 5 c.s. es 123,64. Dado que nos tenemos que quedar con 5 cifras, hay que descartar desde la 6ª en adelante, es decir desde el 3. 3 es menor que 5 por lo que la cifra anterior la dejamos igual. Por tanto: 123.64.

- Cuando realizamos operaciones matemáticas con valores decimales, el resultado debe redondearse hasta un número determinado de cifras significativas.
- Cuando **sumamos o restamos**, el resultado debe tener el mismo número de decimales que el valor que menos tenga:

*Ejemplo:*  $12.07 + 3.2 = 15.27$

- Cuando **multiplicamos o dividimos**, el resultado debe tener el mismo número de cifras significativas que el valor que menos tenga:

*Ejemplo:*  $12.07 \cdot 3.2 = 39$  (No 38.624 ya que 3.2 tiene 2 c.s.)

## 1.4 Errores en mediciones y su reducción.

Un análisis no muy profundo nos permitirá concluir que no todos los errores que están presentes en una dada medida reconocen orígenes ni comportamientos similares. Así, una primera causa de error la podemos encontrar en la falta de entrenamiento del operador, que no sabe aprovechar al máximo las características metrológicas de una dada instalación de medida, pero aún el más avisado de los operadores será incapaz de medir sin errores, debido a que subsisten los debidos al instrumental que utiliza, y que reconocen su causa no sólo en el comportamiento propio del mismo sino eventualmente en el efecto que produce en el circuito el hecho de conectar el aparato o sistema de medida.

Los errores pueden provenir de diferentes fuentes y por lo general se clasifican en tres categorías principales:

**Errores gruesos, humanos o graves:** son en gran parte de origen humano, como mala lectura de los instrumentos, ajuste incorrecto y aplicación inapropiada, así como equivocaciones en los cálculos.

**Errores sistemáticos:** se debe a falla de los instrumentos, como parte de defectuosas o gastadas, y efectos ambientales sobre el equipo del usuario.

Errores aleatorios o accidentales: ocurren por causas que no se pueden establecer directamente debido a variables aleatorias en los parámetros o en los sistemas de medición.

Cada uno de estos tipos de errores se analizan brevemente y se sugiere algunos métodos para su reducción o eliminación.

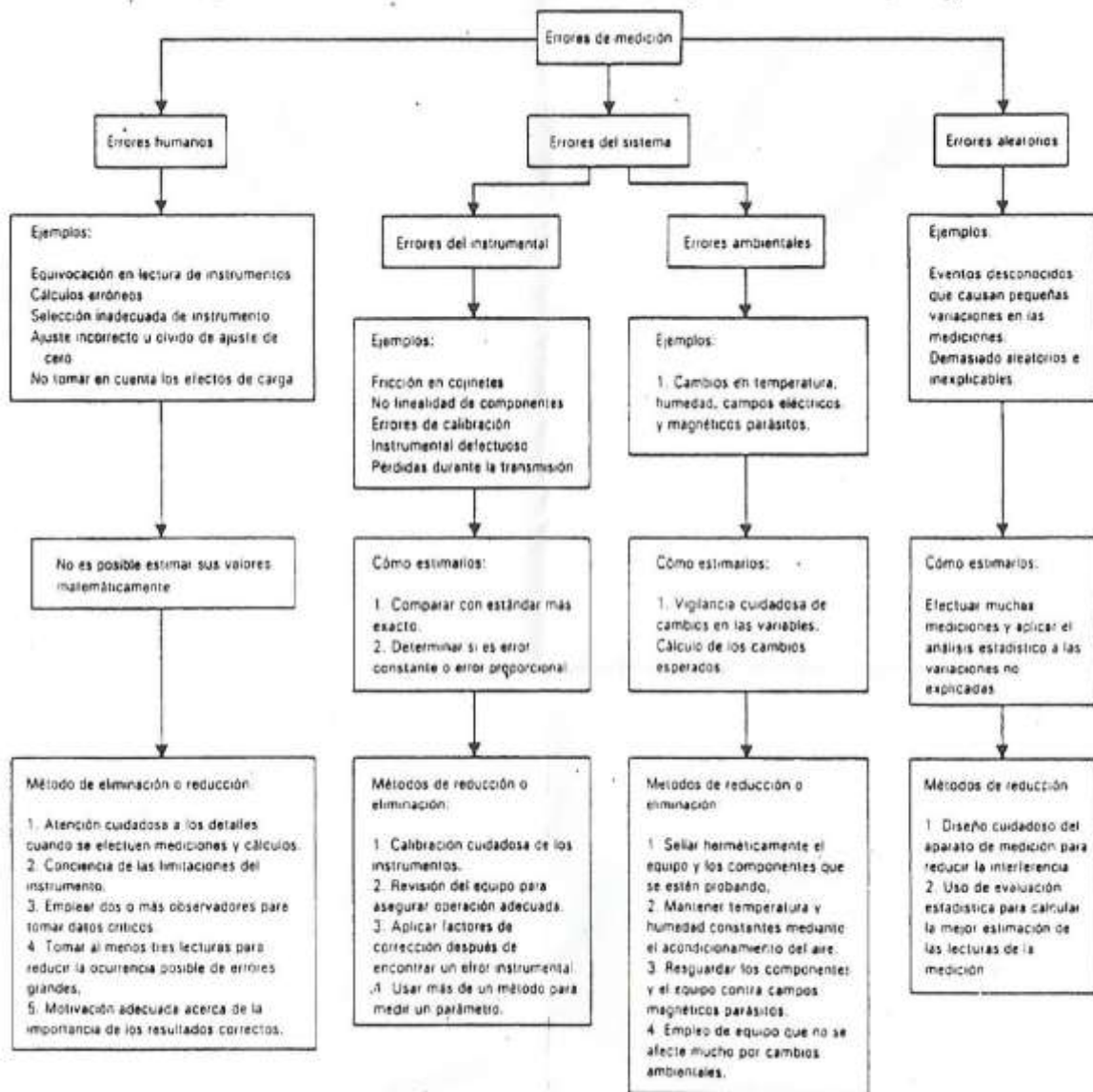


Figura 3 Errores de medición: como calcularlos, reducirlos o eliminarlos.

**Video de refuerzo:**

**ERRORES de Medición en Metrología | MichellQ Teach**

<https://www.youtube.com/watch?v=d8uc3hWyNnI>

**Tratamiento estadístico de los errores**

En su oportunidad dividimos a los errores en *sistemáticos* y *fortuitos o residuales*, englobando en esta última categoría a los que subsistían luego de haberse eliminado las causas que daban cuenta de los sistemáticos. Estos errores (fortuitos), tienen un comportamiento aleatorio, del que se puede dar cuenta mediante el análisis estadístico.

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

---

Si una vez que se han eliminado todos los errores groseros y sistemáticos, y admitiendo que todas las magnitudes de influencia, que son aquéllas que modifican la medida sin ser el objeto de ésta, están



controladas, se decide repetir la medición, se observará que los valores obtenidos exhiben pequeñas discrepancias entre sí, atribuibles exclusivamente al comportamiento aleatorio de la cantidad medida.

Se ha supuesto en el aserto anterior que el instrumento de medición es capaz de reaccionar perfectamente a los cambios de la medida, o lo que es lo mismo, que su *precisión* es mucho mayor que la de lo que se está midiendo.

Se tendrá entonces un conjunto de  $n$  valores de la cantidad medida,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , en el que cada uno de los  $x_i$  recibirá el nombre de *variante*. Muchas veces bastará con dar la colección de los valores medidos para dar por concluido el trabajo, pero la mayoría de las veces no será así, pues se requerirá una elaboración aunque sea primaria de los mismos. Es en esta parte donde entra en consideración el análisis estadístico de los errores, empleando las herramientas que se han desarrollado en los cursos correspondientes, y que aquí sólo citaremos como un caso especial de lo ya conocido por el lector.

Toda la información está contenida en las  $n$  variantes, y cuando se las pretende reemplazar por uno o más números extraídos a partir de ellas, inevitablemente se corre el riesgo de que parte de ella se pierda. En general se suele caracterizar a un conjunto de mediciones mediante dos parámetros, calculados a partir de los datos individuales:

- el primero, que da una indicación central de la medida, es la *media aritmética*, definida a partir de la expresión:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

- el segundo, que da idea de la dispersión, y que tiene en cuenta la *precisión* de la medida. Usualmente se emplea para este caso la *desviación normal* o *desviación estándar*, definida a partir de:

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (2)$$

si el número de variantes es pequeño (menor que 15...20...), o por medio de

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}} \quad (3)$$

en el caso en que las variantes sean más.

Como se aprecia en las anteriores, los errores con mayores apartamientos de la media tienen un peso comparativamente mayor que los menores, debido a la naturaleza cuadrática de las expresiones. En la gran mayoría de los casos que se presentan en las mediciones eléctricas y electrónicas, las variantes están distribuidas siguiendo la ley normal o de Gauss. En tal caso la desviación normal cobra un significado interesante desde el punto de vista probabilístico, pues existirá un 68 % de probabilidad de encontrar variantes en el intervalo de amplitud  $\pm \sigma_n$  centrado en  $\bar{X}$ . Como es natural, a medida que la amplitud del intervalo se agranda, también crecerá la probabilidad de hallar variantes en él. Así, si la amplitud se toma en  $\pm 3\sigma_n$  aquélla trepará al 99,7 %. Usualmente, en los casos de análisis estadístico de los errores, el dar la media y la desviación normal

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

---

(supuesto que se conoce la ley de distribución), permite formarse un juicio acabado sobre el universo

que se desea representar. En cuanto a la presentación de los resultados, lo usual es hacerlo de la siguiente manera:

$$X = \bar{X} \pm a\sigma \quad (4)$$

en la que  $a$  es un número real positivo, que usualmente se circunscribe al intervalo  $0 \leq a \leq 3\dots$ , entanto que  $\sigma$  representa a  $\sigma_n$  en el caso general.

En el análisis anterior, muy sucinto, se ha hecho hincapié en casos donde el número de variantes es relativamente importante, con lo cual toman pleno significado las definiciones de los intervalos dentro de los cuales existe una cierta probabilidad de encontrar variantes, definidos a partir de las leyes de Gauss. Si, en cambio, el número de variantes es reducido, digamos, menor que 10, si bien se deberá usar para la desviación normal el valor  $\sigma_{n-1}$ , ya no puede decirse que en el intervalo de amplitud  $\pm a\sigma_{n-1}$  exista una probabilidad de hallar variantes que esté dada por la distribución normal, sino que será necesario recurrir a otras distribuciones, por ejemplo la de Student. Se supone que el conocimiento de estos tópicos debe ser previo al inicio de un curso de Medidas Eléctricas, por lo que aquí sólo se darán aplicaciones de casos sencillos, remitiéndose al lector que no haya completado un curso de Estadística a la abundante bibliografía disponible sobre el tema.

**Ejemplo:**

Se efectúa una serie de mediciones de una dada tensión, utilizando un instrumento cuya precisión excede en mucho a la de los resultados obtenidos. Este instrumento está libre de errores sistemáticos. El conjunto de valores medidos, todos ellos en condiciones idénticas, es el siguiente:

U1 = 12,34 V	U5 = 12,55 V	U9 = 12,35 V	U13 = 12,00 V
U2 = 12,22 V	U6 = 12,44 V	U10 = 12,02 V	U14 = 12,55 V
U3 = 12,45 V	U7 = 12,28 V	U11 = 12,63 V	U15 = 12,60 V
U4 = 12,09 V	U8 = 12,37 V	U12 = 12,10 V	U16 = 12,47 V

Se desea determinar el valor medio de la tensión, y establecer la amplitud de un intervalo centrado en dicho valor, dentro del cual exista un 50 % de probabilidad de que se halle un nuevo valor de la tensión.

**Solución**

A partir de los valores medidos es inmediato el cálculo de la media, utilizando la expresión (1):

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{16} U_i = 12,341V$$

en la anterior se ha seguido la regla bastante aceptada de expresar el valor de la media con una cifra significativa más que las variantes individuales, en razón de ser considerada “el mejor valor” de las cantidades medidas.

Si ahora se desea calcular la desviación estándar, bastará con aplicar la ecuación (2) o (3) según corresponda. En nuestro caso particular, con un número de variantes que se sitúa en la frontera de la aplicabilidad de una o de la otra, obtenemos los siguientes resultados:

$$\sigma_{n-1} = 0,206 \text{ V}; \quad \sigma_n = 0,199 \text{ V}$$

Se ve que ambas expresiones sólo difieren entre sí en alrededor de un 3 %. Nos quedaremos con

$\sigma_{n-1}$  en virtud del reducido número de variantes de que disponemos.

Para responder a la segunda parte de la pregunta, supondremos que la población está distribuida en forma gaussiana, para lo cual recurriendo a una tabla de Gauss, por ejemplo la que se presenta con una área bajo la curva de 0,5, centrada en el valor medio, es necesario definir un intervalo a su alrededor de amplitud aproximada  $0,67 \sigma_{n-1}$ . Efectuando los cálculos correspondientes, se expresará el resultado de la siguiente forma:

$$U_{50} = (12,341 \pm 0,138) \text{ V}$$

Obsérvese la forma en que se ha expresado el resultado, utilizando más cifras significativas que las que corresponderían de la aplicación de la regla de acotación de cifras expuesta en el punto **cifras significativas**. La razón debe buscarse en los distintos conceptos involucrados: en un caso error límite, en el otro, estudio relacionado con la precisión de las medidas. De cualquier forma, es bueno notar que la expresión de  $\sigma$  con más de tres cifras significativas es carente de sentido en casi todas las aplicaciones.

## 1.5 Tipos de corriente eléctrica.

### Corriente eléctrica

Podemos definir la **corriente eléctrica** como el *número de cargas  $q$*  que se trasladan de un punto a otro en un *tiempo  $t$* .

Matemáticamente lo podemos expresar como:

$$i = \frac{q}{t}$$

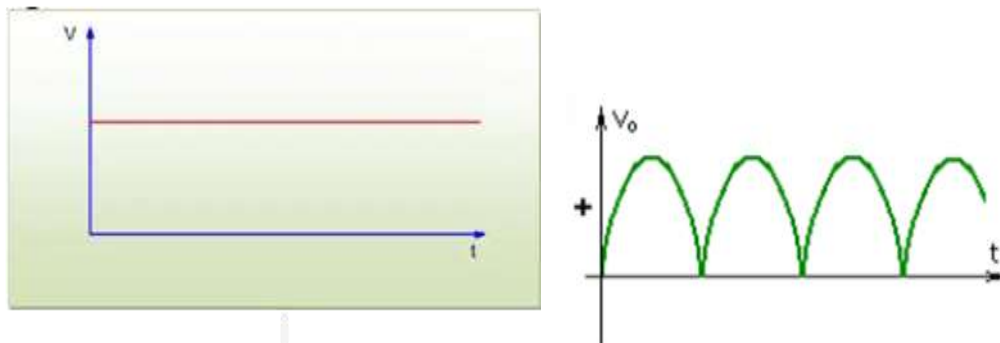
Siendo:  $i$  = corriente eléctrica [A]  $q$  = cargas eléctricas [C]  $t$  = tiempo [s]  
De lo antedicho, afirmaremos que se establecerá una corriente de 1 *Ampere* cuando la carga transportada sea de 1 *Coulomb* en 1 *segundo*.

Para denominar las corrientes pequeñas, por una cuestión de comodidad, se utilizan múltiplos del *Ampere*. Ellos son el *miliamperio* ( $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$ ), el *microamperio* ( $1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$ ) y el *pico amperio* ( $1 \text{ pA} = 10^{-9} \text{ A}$ ). Las cargas en movimiento que conforman las corrientes eléctricas se pueden establecer en diversos medios (medio líquido, sólido o gaseoso). Habitualmente, en los circuitos eléctricos o electrónicos las corrientes se producen en *sólidos* (conductores, semiconductores, inductores, resistores, etc.) o en el *vacío* (válvulas amplificadoras de alto vacío). Sin embargo, en dispositivos como acumuladores, pilas galvánicas o cubas electrolíticas se produce una circulación de corriente eléctrica a través de un líquido conteniendo compuestos químicos (denominado electrolito) que se disocia en iones, tema que no se desarrollará en estos apuntes.

### ***Voltaje y Diferencia de Potencial***

Se denomina *voltaje* o *potencial* al valor de tensión existente en un punto determinado y otro tomado como referencia. El punto de referencia puede ser tierra (potencial cero) o cualquier otro punto con un potencial diferente a cero. Si tomamos los valores de dos puntos diferentes referidos a uno común de referencia, denominaremos *diferencia de potencial* a la diferencia existente entre los potenciales medidos (tomados con el mismo punto de referencia). Dicho valor numérico será igual al voltaje medido en forma directa entre los dos puntos en cuestión.

Se dice que dos puntos de un sistema tienen una *diferencia de potencial* de *1 Volt* si es necesaria una *energía de 1 Joule* para transportar una *carga de 1 Coulomb* entre dichos puntos, es decir: **(joule)(coulomb)** Como ya es conocido existen distintas técnicas de generar una corriente eléctrica, por esto es posible generar un voltaje continuo, alterno o mixto, detallándose claras diferencias entre cada uno, así como sus aplicaciones.



**Figura 4** Gráfica de una tensión continua y una tensión pulsante.

El voltaje continuo (figura 4) tiene un valor constante en el tiempo, desde que se conecta hasta que se desconecta. La polaridad de la fuente de voltaje no varía en el tiempo que dure la conexión si es suministrada por una batería o por una fuente de

poder rectificada y estabilizada.

Las fuentes de voltaje alterno (figura 5) varían constantemente su polaridad y con ella el sentido del voltaje. El voltaje que suministran las centrales generadoras de electricidad a las casas e industrias de las ciudades y centros de producción, son de tipo alterno.

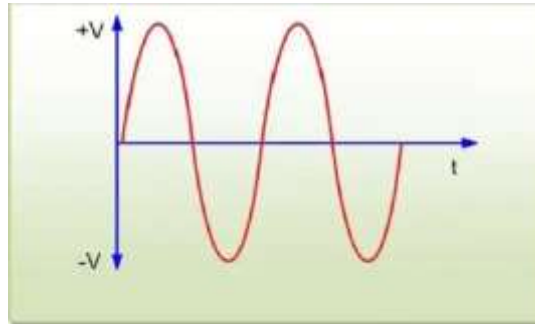


Figura 5 Gráfica de una tensión alterna.

Una voltaje mixta se compone de un voltaje continuo y un voltaje alterno superpuestos, donde su valor de voltaje no es constante y oscila alrededor de un valor medio, como en el caso de la figura 6 donde los valores de voltaje están entre los +3v y +17v. El voltaje continuo medio es de +10v.

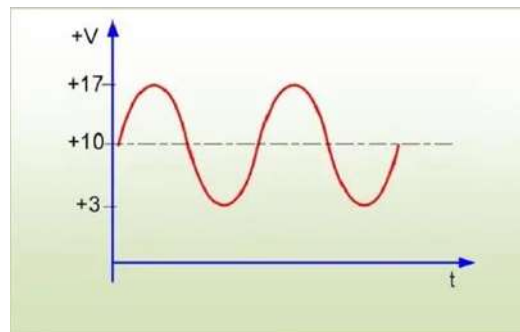


Figura 6 Gráfica de una tensión mixta.

## 1.6 Formas de onda.

Las magnitudes fundamentales que se van a calcular en un circuito son tensiones y corrientes. Estas magnitudes son provocadas por los elementos activos existentes en el circuito y su valor dependerá de la función que siga la tensión en las fuentes de tensión (o la intensidad en las fuentes de intensidad), además del resto de elementos pasivos que constituyan el circuito. A estas magnitudes le llamaremos señales, así tendremos señales de tensión y señales de corriente. Estas señales que pueden tomarse directamente de las fuentes, o de cualquier punto del circuito estarán constituidas por valores de tensión o de corriente que variarán con el tiempo, cuya representación dará lugar a una curva que

obedecerá a una función más o menos compleja. A la forma de esa curva es a lo que llamaremos forma de onda de la señal.

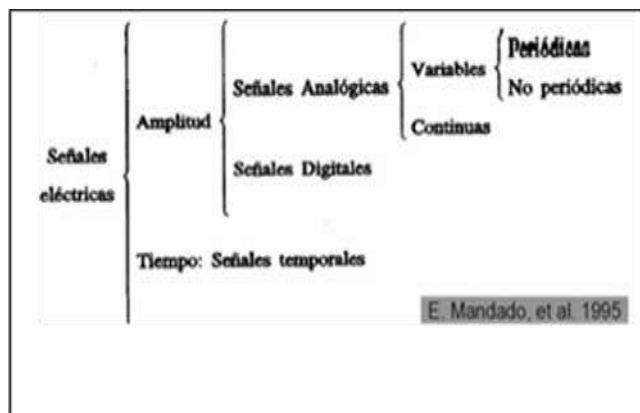
**Forma de onda.-** Es la curva que representa en cada instante la evolución de la tensión (o la intensidad)

¿Cómo pueden representarse las señales

- eléctricas?: Voltaje, Corriente, etc. Estas magnitudes varían a lo largo del tiempo y
- representan información.

Clasificación de señales eléctricas (tabla 5): atendiendo si la información va en la **amplitud** o en la frecuencia

Tabla 5 Clasificación de señales eléctricas.



- **A. Amplitud:** la información está en la amplitud (AM): analógicas y digitales
- **B. Tiempo:** La información está en la frecuencia (FM)

Las formas de onda que se pueden presentar en un circuito pueden ser infinitas, pero las podemos agrupar en cuatro grandes grupos, en los que podremos distinguir las particularidades que aparecen en los circuitos en función del tipo de forma de onda que presenten los generadores del circuito.

- **Señales con forma de onda constante** (figura 7) Las fuentes que presentan una señal constante en el tiempo, reciben el nombre de fuentes de continua. Así mismo a los circuitos que solo tengan fuentes de continua, les llamaremos circuitos de continua, en los que todas las corrientes y tensiones serán constantes en el tiempo. En este tipo de circuitos solo tendremos resistencias como elementos pasivos.

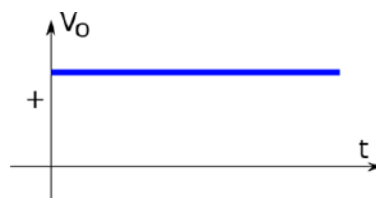


Figura 7 Señal con forma de onda constante.

- **Señales con forma de onda periódica** (figura 8) A las señales que no son constantes les llamaremos señales variables en el tiempo, las cuales tendrán su correspondiente forma de onda. De las cuales destacaremos en primer lugar las que cumple la condición de ser periódicas, es decir, hay un intervalo de tiempo y por tanto una porción de la onda que se repite continuamente.

Señal o función periódica.- Es aquella cuya forma de onda va tomando valores que se repiten en el tiempo cada cierto intervalo llamado periodo T.

$$f(t) = f(t + T) = f(t + nT) \quad n = \text{número entero}$$

Ejemplos de formas de onda periódicas se muestran en la figura 8.

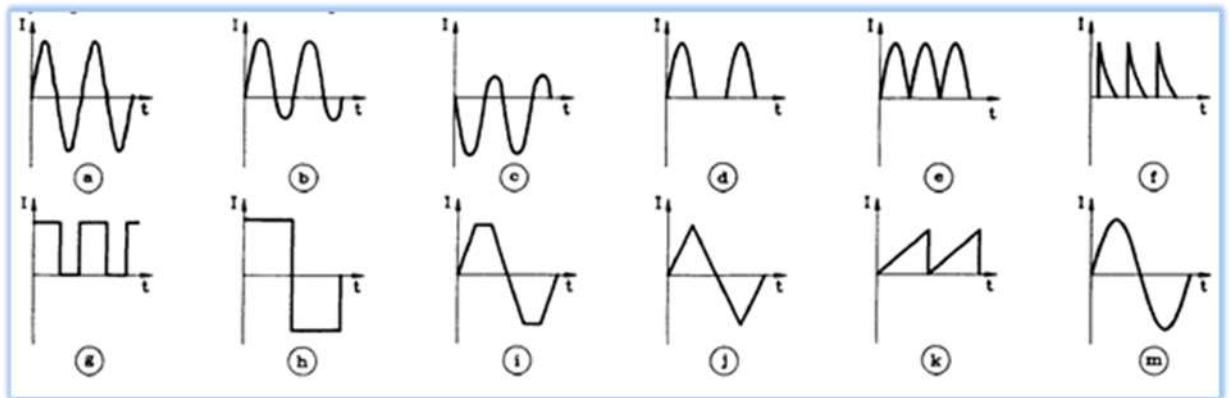


Figura 8 Formas de onda periódicas

Una característica de las señales periódicas es el concepto de alternancia, de modo que diremos que una señal o función es alterna cuando su forma de onda va tomando valores positivos y negativos alternadamente. Por ejemplo, las señales **a**, **b**, **c**, **h**, **i**, **j** y **m** de la figura 8.

De las señales periódicas, mención especial tienen las que responden a la función seno o coseno. Las fuentes que proporcionan esta forma de onda reciben el nombre de fuentes de alterna o generadores de alterna, llamados también alternadores. Esta señal es la que proporciona la máquina eléctrica generadora básica y su forma se debe al ser generada por un elemento rotativo de la máquina. En los centros de producción de energía eléctrica se utiliza este sistema, por lo que la forma de onda de la tensión en los sistemas de suministro, transporte y consumo es periódica, alterna y senoidal. Este tipo de señales son la **a** y la **m** de la figura 8, aunque de distinta frecuencia.

A los circuitos que solo tengan fuentes de alterna, les llamaremos circuitos de alterna, en los que todas las corrientes y tensiones serán de este tipo. Debido a la importancia de este tipo de circuitos, será



con estos con los que estudiaremos todos los métodos de análisis.

En los circuitos en los que exista una fuente con forma de onda periódica pero no senoidal, aplicaremos un método de análisis en el que la función periódica se puede descomponer en señales senoidales superpuestas, aplicando a cada una de ellas los métodos estudiados. Hay un tema dedicado a este tipo de señales

Dentro de las periódicas, se encuentra una serie de formas de onda de suma importancia en el estudio de la electrónica (figura 9, figura 10 y figura 11):

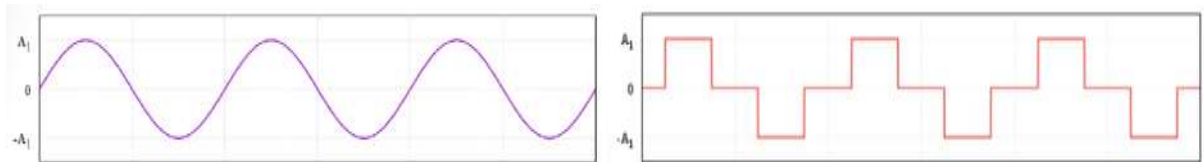


Figura 9 Onda senoidal y Onda senoidal modificada.

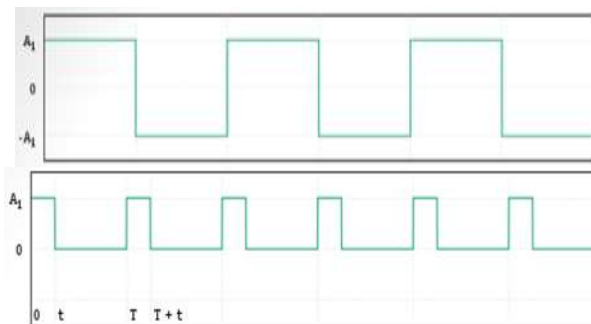


Figura 10 Onda cuadrada y Onda tren de pulsos.

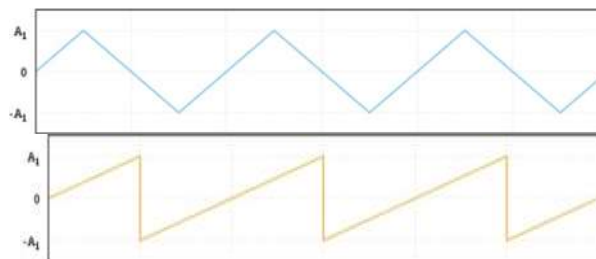


Figura 11 Onda triangular y Onda diente de sierra.

- **Señales con forma de onda no periódica:** (figura12) Las fuentes que presentan una señal variable pero no periódica, corresponden a formas de onda complejas, de las que se pueden distinguir formas simples, como cambios de la señal en un tiempo breve. Estos cambios breves provocaran respuestas en los circuitos que veremos al estudiar el régimen transitorio de los circuitos eléctricos. Como ejemplo de este tipo de señales son: la señal pulso, el escalón, la rampa, etc.

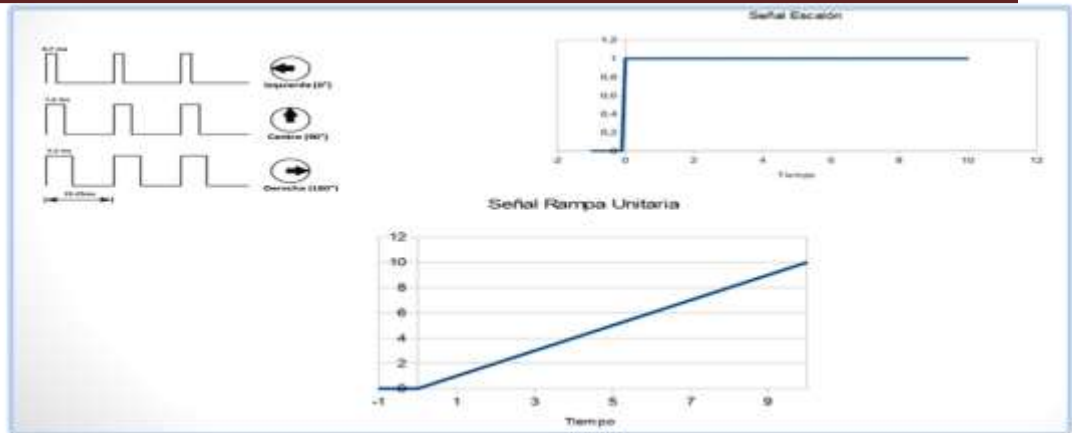


Figura 12 Señales con forma de onda no periódica.

**Señales con forma de onda variable en el tiempo** (figura 13): Dada una señal  $x(t)$  muy complicada, no siempre es posible determinar una función matemática que sea exactamente igual a  $x(t)$ . Un ejemplo es una señal de voz, como el segmento de diálogo de 50 milisegundos que aparece en la Figura 1. Este segmento es la transición de la “sh” a “u” de la elocución de la palabra inglesa “should”.

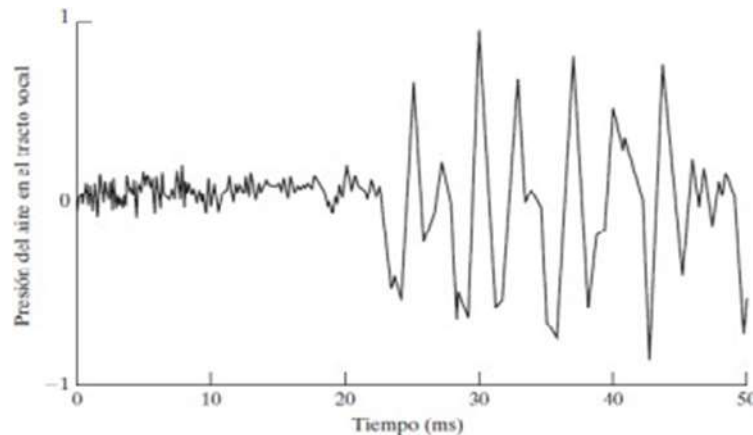


Figura 13 Señales con forma de onda variable en el tiempo.

Primero que nada el analista de sistemas debe conocer cómo modelar señales en el dominio del tiempo continuo.

## 1.7 Frecuencia, período y amplitud.

Se denomina **corriente alterna** (abreviada CA en español y AC en inglés, de Altern Current) a la corriente eléctrica en la que la magnitud y dirección varían cíclicamente.

La **forma de onda de la corriente alterna**: (figura14) más comúnmente utilizada es la de una onda senoidal, puesto que se consigue una transmisión más eficiente de la energía. Sin embargo, en ciertas aplicaciones se utilizan otras formas de onda periódicas, tales como la triangular o la cuadrada.

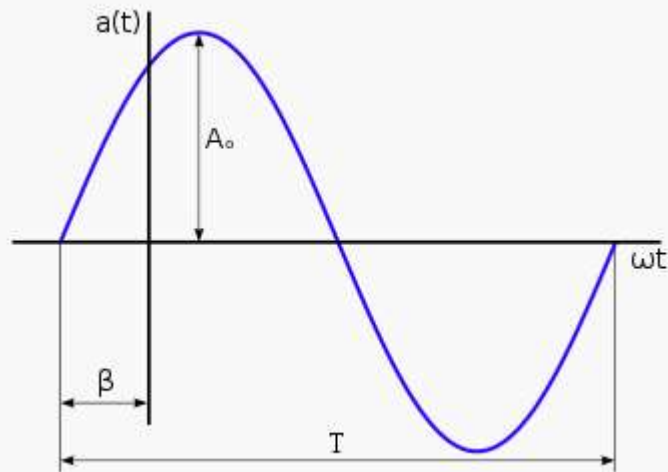


Figura 14 valores de una onda senoidal (o sinusoidal)

○ **Valor instantáneo de una onda o señal**

Es el que toma la ordenada (tensión o intensidad) en un instante,  $t$ , determinado. Este valor no es útil para cálculos y medidas eléctricas, ya que se utilizan los valores eficaces.

Una señal sinusoidal,  $a(t)$ , tensión,  $v(t)$ , o corriente,  $i(t)$ , se puede expresar matemáticamente según sus parámetros característicos (ver figura 14), como una función del tiempo por medio de la siguiente ecuación:

$$a(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \beta)$$

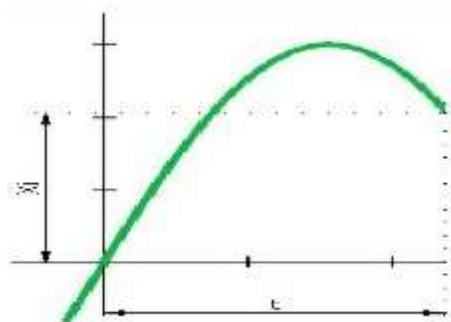


Figura 15

**Dónde:**

- $A_0$  es la amplitud en voltios o amperios (también llamado valor máximo o de pico),
- $\omega$  la pulsación en radianes/segundo, equivalente a  $2\pi f$ .
- $t$  el tiempo en segundos, y (ver figura 15)
- $\beta$  el ángulo de fase inicial en radianes.

- $f$  la frecuencia
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

○ **Período,  $T$**

Es el tiempo mínimo que tarda la onda en realizar un ciclo completo. La unidad de medida es el segundo (s)  $T = \frac{1}{f}$

**Ejercicios:**



$T = \underline{\hspace{2cm}}$



$T = \underline{\hspace{2cm}}$



$T = \underline{\hspace{2cm}}$



$T = \underline{\hspace{2cm}}$



T = \_\_\_\_\_



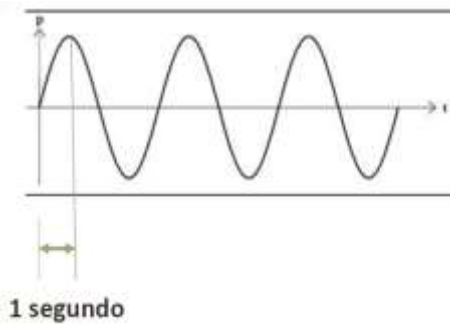
T = \_\_\_\_\_



T = \_\_\_\_\_



T = \_\_\_\_\_



T = \_\_\_\_\_

○ **Frecuencia,  $f$**

Es el número de ciclos realizados por segundo. La frecuencia es la inversa del período ( $f=1/T$ ). La unidad de medida es el Hertzio (Hz) o  $s^{-1}$

**Ejercicios:**



F

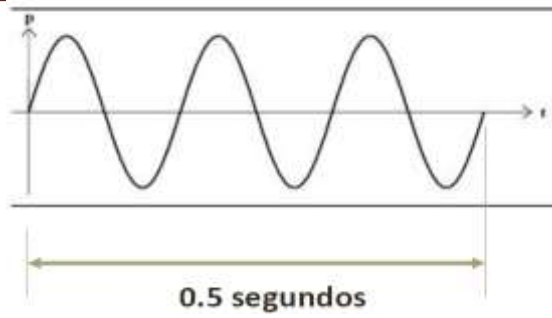
\_\_\_\_\_



F = \_\_\_\_\_



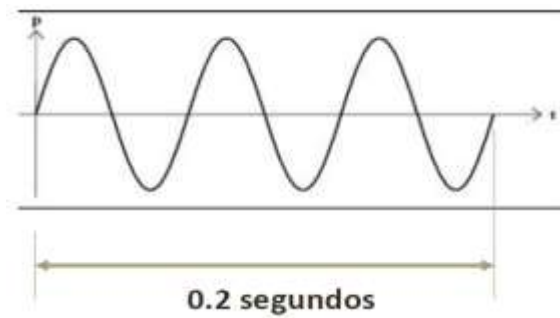
F = \_\_\_\_\_



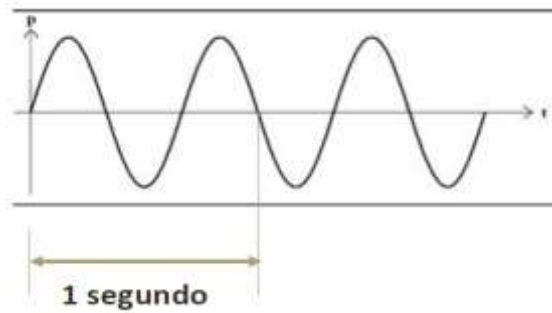
F = \_\_\_\_\_



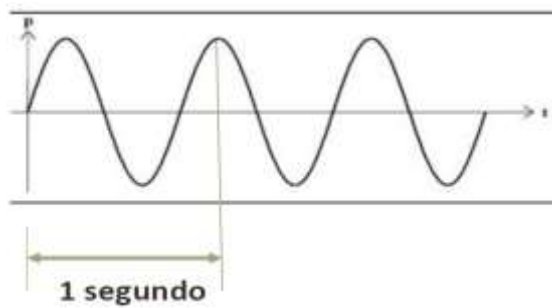
F = \_\_\_\_\_



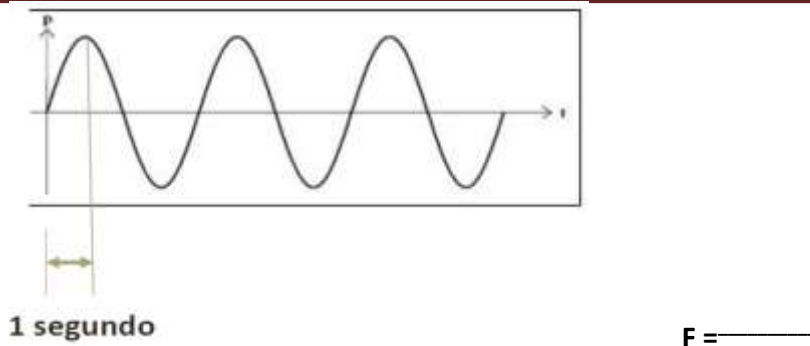
F = \_\_\_\_\_



F = \_\_\_\_\_



F = \_\_\_\_\_



○ **Fase (de una onda),  $\theta$**

Es el instante en el que estamos analizando el valor de una magnitud periódica. El ángulo de fase inicial  $\phi$  es la fracción de período que ha transcurrido a partir de un origen.

Lo explicado hasta aquí se observa en la ilustración de la figura 16. En ella está el *valor de pico*  $V_o$  (positivo y negativo) y el *período*  $T$  para un desarrollo de  $2\pi$  radianes. La amplitud existente entre el *valor de pico positivo* y el *negativo* se denomina *valor de tensión pico a pico*. En el caso ilustrado, la *tensión pico a pico* es igual al *doble* de la *tensión de pico*  $V_o$ . Se dice que dos señales periódicas senoidales se encuentran desfasadas entre sí cuando existe un *ángulo de desfase*  $\theta$  entre los valores cero con pendiente positiva de cada señal. Analicemos esto con la Fig. 17.

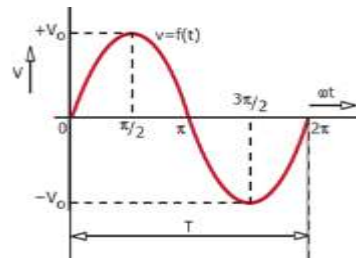


Figura 16 Representación de una señal periódica senoidal

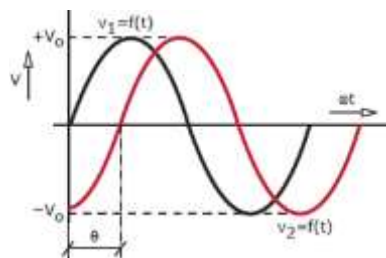


Figura 17 Representación de dos señales senoidales fuera de fase

En ella, observamos dos señales senoidales de la misma *amplitud*  $V_o$  con la misma *frecuencia*  $f$ . La señal  $v_1$  está representada en negro, mientras que la  $v_2$  se encuentra ilustrada en rojo. Ellas se encuentran desfasadas un *ángulo*  $\theta$ . Describiendo la señal  $v_1$  matemáticamente como:



$$V1 = V0 \operatorname{sen} \omega t$$

Podemos expresar matemáticamente la señal **v2** como:

$$V2 = V0(\omega t - \theta)$$

Con esta última expresión matemática, estamos afirmando que la señal **v2** se encuentra retrasada un ángulo  $\theta$  respecto a **v1**, ya que la señal **v2** se inicia un cierto ángulo  $\theta$  posterior al inicio de **v1**, y no como suele suponerse en forma errónea que es a la inversa por aparecer esta a la derecha de la señal inicial.

## 1.8 Valor promedio, valor máximo, valor pico a pico y valor eficaz.

Cuando los valores o señales aplicadas a un cierto sistema eléctrico (tensiones o corrientes) son constantes, resultan de fácil cálculo las potencias disipadas en un lapso determinado de tiempo.

Además, las mediciones que se puedan realizar sobre dichas señales constantes representan los valores reales que estas mismas poseen.

Cuando las señales aplicadas a un determinado sistema eléctrico son variables en función del tiempo, se deben obtener mediciones que representen en si mismas tales variaciones de dicha señal. Por ejemplo, se puede determinar sobre ellas su *valor medio* y su *valor cuadrático medio* (RMS). Estos valores, que ahora serán descriptos en detalle, permiten comparar efectividad de distintas formas de onda respecto de otras a ser aplicados en circuitos eléctricos específicos.

- **Valor máximo o de pico,  $V_p, V_0$**

Es el valor máximo que toma la onda y que conocemos como Amplitud. En principio habría dos valores: el valor de pico positivo y el valor de pico negativo. El valor de pico se relaciona con el Valor eficaz de la siguiente manera:

$$V_p = V_{ef} \times 1.4142 = V_{ef} \times \sqrt{2}$$

- **Valor pico a pico,  $V_{pp}$**

Supone, normalmente, el doble del valor de pico; es la máxima excursión que puede tomar la amplitud de la señal. También puede expresarse como la diferencia entre su pico o máximo positivo y su pico negativo.

$$V_{pp} = V_p \times 2$$

○ **Valor medio,  $V_m$**

El valor medio de una señal periódica cualquiera que varía a lo largo de su período  $T$  se define como:

$$\text{Valor medio} = \frac{\text{Area bajo la curva}}{\text{Periodo (segundos)}}$$

Es la media algebraica de los valores instantáneos de la onda durante un semiperíodo (Si tomásemos el período completo el valor medio sería cero). Para el caso de una intensidad de Amplitud  $i_m$ , tendríamos un valor medio de intensidad,  $I_{med}$ , de:

$$I_{med} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i_m \text{sen } \omega t = \frac{2i_m}{T} \left[ \frac{-\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2i_m}{\pi}$$

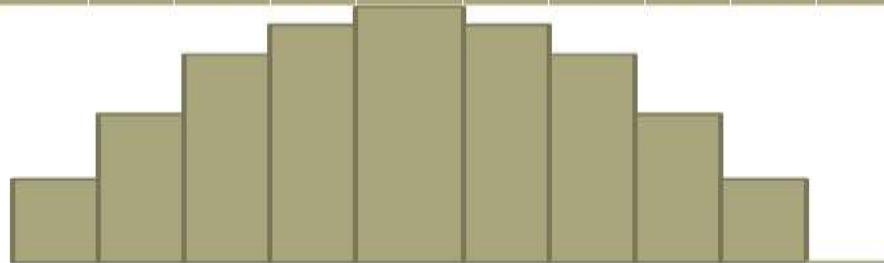
**Problema:**

**A prom = (Área entre la curva y el eje del tiempo) / (Periodo)**

voltaje	6.2V	11.8V	16.2V	19.0V	20.0V	19.0V	16.2V	11.8V	6.2V	0V
Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

**A prom = (Área entre la curva y el eje del tiempo) / (Periodo)**

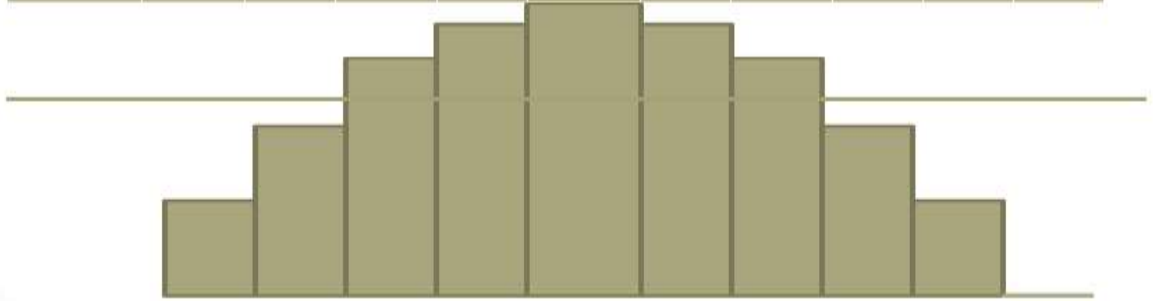
voltaje	6.2V	11.8V	16.2V	19.0V	20.0V	19.0V	16.2V	11.8V	6.2V	0V
Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



$A_{prom} = (\text{Área entre la curva y el eje del tiempo}) / (\text{Periodo})$

voltaje	6.2V	11.8V	16.2V	19.0V	20.0V	19.0V	16.2V	11.8V	6.2V	0V
---------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	----

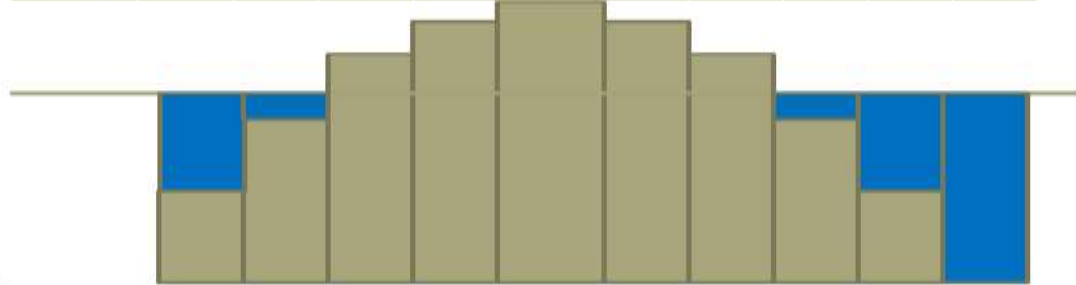
Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



$A_{prom} = (\text{Área entre la curva y el eje del tiempo}) / (\text{Periodo})$

voltaje	6.2V	11.8V	16.2V	19.0V	20.0V	19.0V	16.2V	11.8V	6.2V	0V
---------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	----

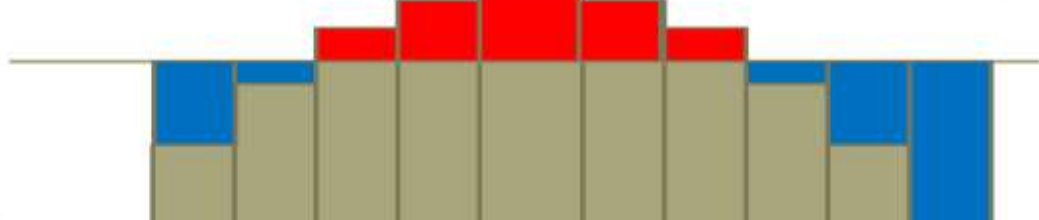
Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



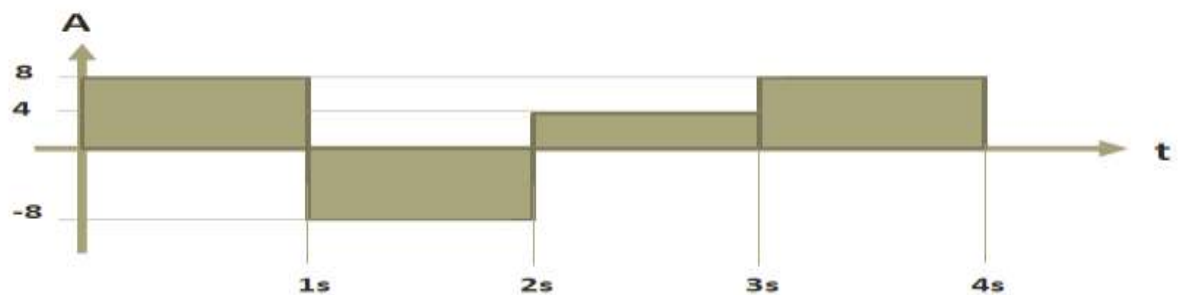
$A_{prom} = (\text{Área entre la curva y el eje del tiempo}) / (\text{Periodo})$

voltaje	6.2V	11.8V	16.2V	19.0V	20.0V	19.0V	16.2V	11.8V	6.2V	0V
---------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	----

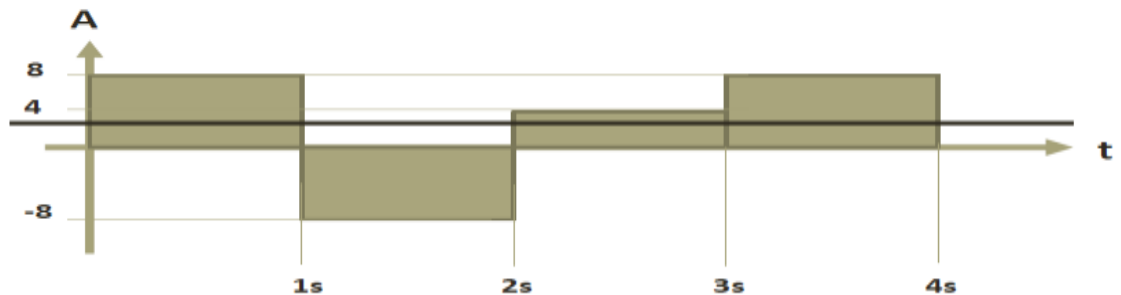
Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



Calcular el  $V_{prom}$  de la siguiente forma de onda:



Calcular el  $V_{prom}$  de la siguiente forma de onda:



$V_{prom} =$  \_\_\_\_\_

- **Valor eficaz,  $V_{ef}$  o  $V_{rms}$ .** (ver figura 18)

Valor Eficaz ( $V_{rms}$ ). Se denomina valor eficaz al valor cuadrático medio de una magnitud eléctrica. El concepto de valor eficaz se utiliza especialmente para estudiar las formas de onda periódicas, a pesar de ser aplicable a todas las formas de onda, constantes o no. En ocasiones se denomina con el extranjerismo RMS (del inglés, root mean square).

El **valor cuadrático medio** ó **RMS** (del inglés *Root Mean Square*) ó **eficaz** es utilizado con mayor frecuencia que el valor medio. Esto se debe a que el valor medio de una señal simétrica (iguales áreas debajo de las curvas tanto positivas como negativas) es cero, y este dato no aporta ninguna información útil sobre las propiedades de la misma. El *valor eficaz de una señal se relaciona con la energía que debería ser suministrada por una señal continua a un mismo circuito eléctrico para obtener idénticos resultados que con la señal periódica alterna.*

*Para su cálculo, se eleva al cuadrado la función de dicha onda (hace que los valores obtenidos sean siempre positivos aunque la señal posea valores negativos) sobre la cual se calcula su valor medio y se efectúa la raíz cuadrada del resultado obtenido. Matemáticamente se expresa como:*

$$\text{Valor RMS (eficaz)} = \sqrt{\text{Valor medio}[f(t)]^2}$$

Para una onda dada  $f(t)$ , el valor RMS se halla aplicando:

$$\text{Valor RMS (eficaz)} = \sqrt{\left(\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt\right)}$$

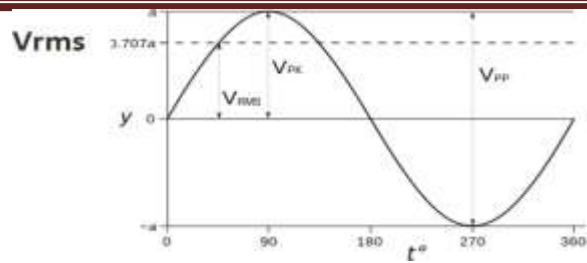


Figura 18 Valor eficaz,  $V_{ef}$  o  $V_{rms}$

El significado físico del valor eficaz es designar el valor de una corriente rigurosamente constante que al circular sobre una determinada resistencia óhmica produciría los mismos efectos caloríficos que dicha corriente variable.

**Conclusión:**  
**Para una señal senoidal**  
 **$V_{rms} = 0.7071$  (Amplitud)**

En la **figura 19**, son mostrados otros ejemplos de Valores promedio y efectivos de ondas que se encuentran con frecuencia en las mediciones eléctricas.

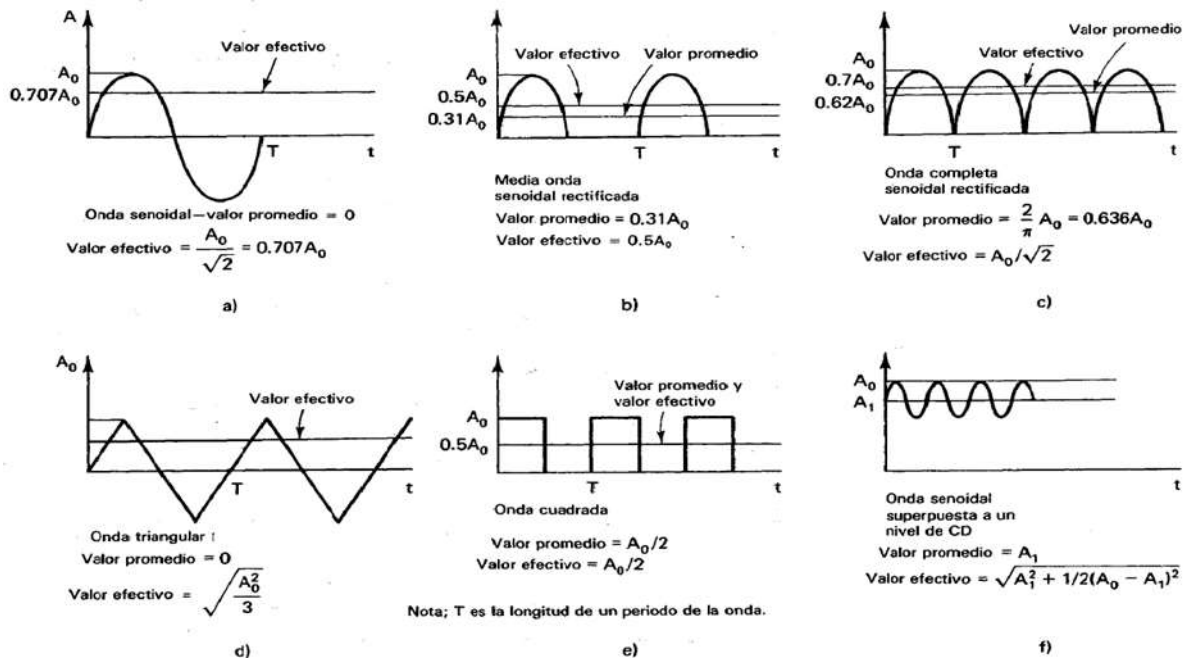
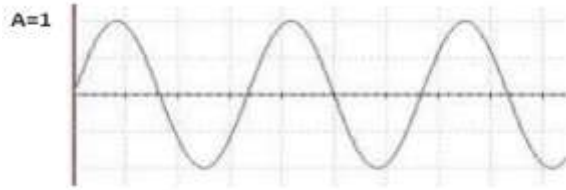


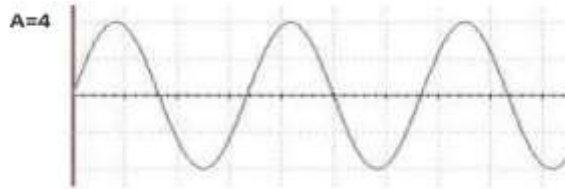
Figura 19 Valores promedio y efectivos de algunas ondas que se encuentran con frecuencia en las mediciones eléctricas.

**Ejercicios:**

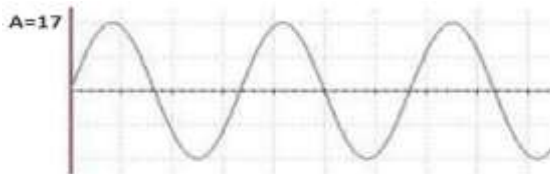
Calcule el valor rms ( $V_{rms}$ ) de la siguientes formas de onda:



Vrms = \_\_\_\_\_



Vrms = \_\_\_\_\_



Vrms = \_\_\_\_\_

○ **Factor de forma**

Es la relación entre el valor eficaz y el valor medio. Para el caso de, por ejemplo, la Intensidad,  $I$ , tendríamos:

$$F = \frac{I}{i_m} = \frac{\frac{i_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2i_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

Desde el [Canal de Youtube ElectrónicaFP](#) nos enseñan lo principal relativo a las ondas o señales:

Aquí en este video Veremos los siguientes temas: Valor promedio, valor máximo, valor pico a pico y valor eficaz.

[:// https://www.youtube.com/watch?list=PLuzS0jdNRVvq1fs0uWER3iyuUIOISZqe&v=zPEqhABAOkk](https://www.youtube.com/watch?list=PLuzS0jdNRVvq1fs0uWER3iyuUIOISZqe&v=zPEqhABAOkk) (Vasquez, 2009)

## 1.9 Normas de seguridad en la medición de variables eléctricas.

➤ **Caso de una imprudencia.**



Me da CALAMBRE tocando los electrodomésticos (Medidas Eléctricas Reglamentarias)

Domo Electra Manuel Amate

<https://www.youtube.com/watch?v=f0ecIBwHelk>

➤ Presentación:

## Medidas de seguridad en mediciones eléctricas con el Multímetro.



- Los instrumentos de medición requieren normas y precauciones de seguridad para evitar o prevenir lesiones al personal y daños a los mecanismos de medición y demás equipo.



The image shows a person in a light blue shirt and white gloves with red cuffs, holding a yellow multimeter. They are working on a complex electronic circuit board with various components and wires. The person is also wearing safety glasses.



## NORMAS DE MANEJO PARA LOS VOLTÍMETROS

- Un voltímetro es un instrumento que sirve para medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito eléctrico



## LA SIGUIENTE LISTA INDICA LAS PRECAUCIONES MÍNIMAS QUE SE DEBEN SEGUIR EN EL USO DE UN VOLTÍMETRO.

- ❖ Siempre iniciar las mediciones usando el rango más alto del voltímetro.
- ❖ Desconectar y descargar al circuito bajo prueba de manera completa antes de conectar o desconectar el voltímetro.
- ❖ En los voltímetros de CD, se tiene que vigilar la polaridad correcta del circuito para evitar daño al medidor
- ❖ Nunca se debe de usar un voltímetro de CD para medir voltaje de CA.
- ❖ Es necesario vigilar y seguir las normas de seguridad de los dispositivos eléctricos y electrónicos bajo prueba.



## NORMAS DE MANEJO PARA LOS AMPERÍMETROS

### AMPERÍMETRO

Instrumento utilizado para medir la intensidad de un circuito





### LA SIGUIENTE LISTA CONTIENE LAS PRECAUCIONES MÍNIMAS DE MANEJO PARA UN AMPERÍMETRO

- ❖ Los amperímetros siempre se deben de conectar en serie con el circuito bajo prueba.
- ❖ Siempre iniciaremos las mediciones haciendo uso del rango más alto del amperímetro.
- ❖ Se tiene que desenergizar y descargar al circuito bajo prueba por completo antes de conectar o desconectar al amperímetro.
- ❖ En los amperímetros de CD, tenemos que vigilar la polaridad correcta del circuito para evitar que el medidor se dañe.
- ❖ Nunca debemos de usar un amperímetro de CD para medir corriente de CA.
- ❖ Cumplir con las normas de seguridad de los dispositivos eléctricos y electrónicos bajo prueba.



### NORMAS DE MANEJO PARA LOS ÓHMETROS

Un óhmetro es un dispositivo electrónico que mide la resistencia de un componente o circuito electrónico. Consta de una escala con una aguja indicadora o indicador digital, un selector de rango y dos sensores.



### LAS SIGUIENTES NORMAS DE SEGURIDAD Y OPERACIÓN SON PARA EL MANEJO ADECUADO DEL ÓHMETRO Y SON LAS MÍNIMAS NECESARIAS PARA EVITAR DAÑOS Y HERIDAS.


- ❖ Asegurarse de que el circuito esté desenergizado antes de conectar el óhmetro.
- ❖ No aplicar energía a un circuito mientras se está midiendo resistencia.
- ❖ Cuando terminemos de usar el óhmetro, colocar el interruptor de encendido en la posición de apagado (off) si es que este existe o en su caso desconectar las puntas de prueba del medidor.
- ❖ En el caso de los medidores analógicos electrodinámicos ajustar siempre el óhmetro en el punto de resistencia cero después de cambiar los rangos antes de realizar medidas de resistencia.





### NORMAS DE MANEJO PARA LOS MULTÍMETROS

- ❖ Desenergizar y descargar el circuito bajo prueba por completo antes de conectar o desconectar un multímetro.
- ❖ Nunca se tiene que aplicar potencia o energía a un circuito mientras se está midiendo resistencia con un multímetro.
- ❖ Se tiene que conectar el multímetro en serie con el circuito para mediciones de corriente y en paralelo para mediciones de voltaje.
- ❖ Asegurarse de que el multímetro esté seleccionado en el modo para CA antes de intentar una medición de circuitos de CA.
- ❖ Vigilar la polaridad de CD cuando se mide CD.
- ❖ Cuando se termine de medir con un multímetro, colocar el interruptor en la posición de apagado (off), si es que hay disponible un interruptor. Si no hay ninguna posición de apagado, colocar al multímetro en el rango más alto de medición para voltaje de CA.



## Presentación: Seguridad Eléctrica.



### TIPOS DE ACCIDENTES

- **Directos**  
Se nombran de esta manera a los accidentes en los cuales las personas tienen contacto directo con algún medio de transmisión eléctrica. Como los son: cables, enchufes, cajas de conexión, entre otros. Representa el 34.5% de los accidentes.

**Nota:** La corriente eléctrica siempre busca ir a un potencial cero (idealmente tierra) por el camino más fácil (el que le ofrezca menos resistencia)

- **Indirectos**

Son denominados con este nombre los accidentes que aunque su causa principal fue el contacto con la corriente eléctrica, tiene consecuencias que derivan de este primer contacto, como son:

- a) Golpes contra objetos
- b) Quemaduras

Representa el 17.5% de los casos

- **Arcos eléctricos**

Representa el 48% de los accidentes

- **Indirectos**

Son denominados con este nombre los accidentes que aunque su causa principal fue el contacto con la corriente eléctrica, tiene consecuencias que derivan de este primer contacto, como son:

- a) Golpes contra objetos
- b) Quemaduras

Representa el 17.5% de los casos

- **Arcos eléctricos**

Representa el 48% de los accidentes



### CAUSAS QUE DESENCADENAN UN ACCIDENTE ELÉCTRICO

- Ignorancia
- Imprudencia
- Desconocimiento
- Falta de preparación
- Seguridad técnica y personal
- Negligencia



### FALLAS OPERATIVAS MÁS FRECUENTES

- Sabía que existía tensión 26,8 %
- No sabía que existía tensión 9,9 %
- Desconocía las características de la instalación 8,6 %
- Utilización de herramientas no aisladas 11,9 %
- Manipulación incorrecta 20,0 %
- Otras (reposición de fusibles, instalación de dispositivos) 22,8 %

### ¿Como afecta la corriente eléctrica a una persona?

- 1 a 10 mA Sensación de comezón
- 10 mA Contracción muscular, persona tensa y queda "pegada" al conductor.
- 20 a 30 mA Parálisis respiratoria
- 70-100mA Fibrilación cardiaca, corazón vibra y pierde ritmo, daño irreversible.



## NORMAS DE SEGURIDAD ANTE RIESGOS ELÉCTRICOS

### 1 - GENERALIDADES:

- Se consideran instalaciones eléctricas de baja tensión aquellas en que las tensiones nominales sean inferiores a 1000V.
- Antes de iniciar trabajos en baja tensión se procederá a identificar el conductor o instalación eléctrica donde se tiene que trabajar.
- Toda instalación eléctrica será considerada baja tensión mientras no se demuestre lo contrario con aparatos destinados al efecto.
- No se deben emplear escaleras metálicas para trabajos con tensión.
- - No se deben realizar trabajos con tensión en locales donde existan materiales explosivos o inflamables.

### 2 - TRABAJOS SIN TENSIÓN

- Aislar la parte en que se vaya a trabajar de cualquier posible alimentación mediante la apertura de los aparatos de seccionamiento más próximos a la zona de trabajo.
- Bloquear en posición de apertura cada uno de los aparatos de seccionamiento colocando en su mando un letrero con la prohibición de maniobra.
- Comprobar mediante un verificador la ausencia de tensión eléctrica.
- Señalizar adecuadamente la prohibición de restituir tensión eléctrica debido a la realización de trabajo.
- No se establecerá el servicio al finalizar los trabajos sin comprobar que no existe peligro alguno.
- En el propio lugar de trabajo se recomienda:
  - - Verificación de la ausencia de tensión eléctrica.
  - - En el caso de redes aéreas se procederá a la puesta en cortocircuito.
  - - Delimitar la zona de trabajo señalizándola adecuadamente.



### 3 - TRABAJOS CON TENSIÓN

- Colocarse sobre objetos aislantes ( alfombras, banquetas, escaleras aislantes, etc.).
- Utilizar cascos, guantes aislantes, gafas protectoras, herramientas aisladas y ropas apropiadas sin accesorios metálicos.
- Aislar previamente los demás conductores en tensión, próximos al lugar de trabajo, incluso el neutro.
- Cuando se realice el trabajo de instalar un contador con tensión eléctrica, además del equipo de protección personal, es necesario comprobar la correspondencia de los bornes de entrada y salida de cada fase. También se comprobará si la instalación del abonado está cortocircuitada, verificándose si hay tensión de retorno antes de conectar cada nuevo hilo de salida.



### ACTUACIÓN EN CASO DE ACCIDENTES ELÉCTRICOS

- Cortar la corriente eléctrica.
- - Provocar un cortocircuito.
- - Aislados del lado de la corriente eléctrica y del lado de tierra, separar a la víctima del conductor.
- - Comenzar la reanimación ( boca a boca y masaje cardíaco ), procurando que el tiempo de actuación sea el mínimo ya que cuando más se tarde en reaccionar menos posibilidades de salvar al accidentado habrá.





**POR SU ATENCIÓN  
¡MUCHAS GRACIAS!**

### Material de refuerzo para el tema

#### Videos:

Title\_1.avi

[https://drive.google.com/file/d/1NPYP6uivsKa-gjW5ahG\\_gjTlbdalnHlb/view?usp=share\\_link](https://drive.google.com/file/d/1NPYP6uivsKa-gjW5ahG_gjTlbdalnHlb/view?usp=share_link)

Title\_5.avi

[https://drive.google.com/file/d/18nRv4tJ-Fz0Max8pBFEUz-Yo4jUCc0-W/view?usp=share\\_link](https://drive.google.com/file/d/18nRv4tJ-Fz0Max8pBFEUz-Yo4jUCc0-W/view?usp=share_link)

➤ **10 peligrosos errores que suelen cometerse al comprobar sistemas eléctricos**

<https://www.voltimum.es/sites/www.voltimum.es/files/pdflibrary/10623-spa-01-a.pdf>

➤ **10 torpezas que a veces cometen las personas inteligentes al comprobar la electricidad.**

[https://drive.google.com/file/d/1pEDweRDw\\_bw3zrIT243aMEHiO7v8HHa3/view?usp=share\\_link](https://drive.google.com/file/d/1pEDweRDw_bw3zrIT243aMEHiO7v8HHa3/view?usp=share_link)

### ***5 Reglas de Oro que todo Profesional de la Ingeniería Eléctrica debe saber***

En electricidad, las reglas de oro son cinco reglas que definen unos procedimientos estándar de obligado cumplimiento para minimizar el riesgo eléctrico en trabajos sin tensión.

#### Resumen

- Desconectar, corte visible o efectivo
- Enclavamiento, bloqueo y señalización
- Comprobación de ausencia de tensión
- Puesta a tierra y cortocircuito
- Señalización de la zona de trabajo



### **1. Desconectar, corte visible o efectivo**

Antes de iniciar cualquier trabajo eléctrico sin tensión debemos desconectar todas las posibles alimentaciones a la línea, máquina o cuadro eléctrico. Prestaremos especial atención a la alimentación a través de grupos electrógenos y otros generadores, sistemas de alimentación interrumpida, baterías de condensadores, etc.

Consideraremos que el corte ha sido bueno cuando podamos ver por nosotros mismos los contactos abiertos y con espacio suficiente como para asegurar el aislamiento. Esto es el corte visible.

Como en los equipos modernos no es posible ver directamente los contactos, los fabricantes incorporan indicadores de la posición de los mismos. Si la aparatamenta está debidamente homologada, tenemos la garantía de que el corte se ha realizado en condiciones de seguridad. Esto es el corte efectivo.

Interruptores

Seccionadores

Pantógrafos

Fusibles

Puentes flojos

La simple observación de la timonería del dispositivo no es garantía suficiente de la apertura del mismo.

### **2. Enclavamiento, bloqueo y señalización**

Se debe prevenir cualquier posible re-conexión, utilizando para ello medios mecánicos (por ejemplo candados). Para enclavar los dispositivos de mando no se deben emplear medios fácilmente anulables, tales como cinta aislante, bridas y similares.

Cuando los dispositivos sean telemandos, se debe anular el telemando



eliminando la alimentación eléctrica del circuito de maniobra.

En los dispositivos de mando enclavados se señalará claramente que se están realizando trabajos.

Además, es conveniente advertir a otros compañeros que se ha realizado el corte y el dispositivo está enclavado.

### **3. Comprobación de ausencia de tensión**

En los trabajos eléctricos debe existir la premisa de que, hasta que no se demuestre lo contrario, los elementos que puedan estar en tensión, lo estarán de forma efectiva.

Siempre se debe comprobar la ausencia de tensión antes de iniciar cualquier trabajo, empleando los procedimientos y equipos de medida apropiados al nivel de tensión más elevado de la instalación.

Haber realizado los pasos anteriores no garantiza la ausencia de tensión en la instalación.

La verificación de ausencia de tensión debe hacerse en cada una de las fases y en el conductor neutro, en caso de existir. También se recomienda verificar la ausencia de tensión en todas las masas accesibles susceptibles de quedar eventualmente sin tensión

### **4. Puesta a tierra y en cortocircuito**

Este paso es especialmente importante, ya que creará una zona de seguridad virtual alrededor de la zona de trabajo.

En el caso de que la línea o el equipo volviesen a ponerse en tensión, bien por una realimentación, un accidente en otra línea (fallo de aislamiento) o descarga atmosférica (rayo), se produciría un cortocircuito y se derivaría la corriente de falta a Tierra, quedando sin peligro la parte afectada por los trabajos.

Los equipos o dispositivos de puesta a tierra deben soportar la intensidad máxima de defecto trifásico de ese punto de la instalación sin estropearse. Además, las conexiones deben ser mecánicamente resistentes y no soltarse en ningún momento. Hay que tener presente que un cortocircuito genera importantes esfuerzos electrodinámicos.

Las tierras se deben conectar en primer lugar a la línea, para después realizar la puesta a tierra. Los dispositivos deben ser visibles desde la zona de trabajo. Actualización (gracias a Ing. Gabriel / 4-Mar-2019): Si primero se conectan las tierras a las líneas, se corre el riesgo de recibir una descarga porque las líneas pueden estar con tensión. Primero hay que poner las tierras “a tierra” y luego recién conectar las líneas.

Es recomendable poner cuatro juegos de puentes de cortocircuito y puesta a tierra, uno al comienzo y al final del tramo que se deja sin servicio, y otros dos lo más cerca posible de la zona de trabajo.

Aunque este sistema protege frente al riesgo eléctrico, puede provocar otros riesgos, como caídas o golpes, porque en el momento del cortocircuito se produce un gran estruendo que puede asustar al técnico.

### **5. Señalización de la zona de trabajo**

La zona dónde se están realizando los trabajos se señalará por medio de vallas, conos o dispositivos análogos. Si procede, también se señalarán las zonas seguras para el personal que no está trabajando en la instalación.

#### **Equipo de seguridad® (ver fig. 20)**

Cuando se realiza una práctica o un trabajo es fundamental portar

correctamente el equipo de seguridad básico, el cual casi siempre está conformado por gafas protectoras, guantes (en caso de manejar altos voltajes), zapatos con suela antiderrapante de tipo industrial (para evitar accidentes). Estas Instituto Tecnológico de San Luis Potosí Instituto Tecnológico de San Luis Potosí. “Con tecnología y espíritu una patria forjare.” normas son proporcionadas por el laboratorio o la institución donde se esté realizando la práctica o el trabajo. Utilización de equipos apropiados: Cuando se habla de la electrónica se pueden correr muchos riesgos si utilizamos una herramienta incorrecta para un trabajo determinado o insulso si utilizamos un cable de un calibre equivocado, esto puede generar que el alambre dentro del forro del cable se caliente al punto que pueda lastimar a alguien o provocar un incendio. Es necesario entender que existe un equipo para cada trabajo y que cuando se trabaja es mejor darse el tiempo necesario para comprobar que todo este correcto.

## NORMAS DE SEGURIDAD EN ELECTRONICA

- Los espacios de trabajo de tu **laboratorio** deben de estar limpios y descongestionados. Dentro de lo posible trata de no utilizar instalaciones provisionales, ya que pueden causar un accidente si se tratasen de conexiones eléctricas
- **Nunca efectuar una instalación provisional, si debe usarse más de dos veces**



Figura 20

# Practica de laboratorio para la unidad 1.

## NORMAS DE SEGURIDAD DEL LABORATORIO



## MEDICIONES ELECTRICAS

### EXPERIMENTO No.1

## NORMAS DE SEGURIDAD DEL LABORATORIO

OBJETIVO: Que el alumno conozca el área de prácticas y las normas de seguridad en el laboratorio de Electrónica.

### INTRODUCCIÓN

Cuando un estudiante de Ingeniería Eléctrica o Electrónica hace uso de un laboratorio de electrónica y/o eléctrica debe conocer y observar las reglas de uso del mismo, de igual manera, cuando se utiliza equipo eléctrico o electrónico, el seguir las precauciones de seguridad adecuadas es tan importante como el llevar a cabo mediciones exactas.

Existen situaciones potencialmente mortales en el ambiente de un laboratorio de esta naturaleza, por lo que se debe tener conocimiento de los peligros y las posibles consecuencias de los accidentes provocados por desconocimiento u omisión de los procedimientos de seguridad. Las fuentes más comunes de accidentes en el laboratorio son los choques eléctricos, empleo de sustancias químicas peligrosas, maquinaria en movimiento y uso de cautines.

### MATERIAL.

- 1 Libreta tamaño profesional de 50 hojas
  - 1 Juego de geometría
  - 1 Lápiz y goma de borrar
  - 1 Bolígrafo de color negro y color rojo.
    - 1 Flexómetro (cinta de medir)

### DESARROLLO

1. Copie el reglamento de uso del laboratorio en la segunda página de su libreta de laboratorio.
2. Haga un croquis del laboratorio, donde se identifiquen claramente:
  - a) Los accesos al laboratorio.
  - b) Ubicación de los extinguidores de fuego.
  - c) Las diferentes áreas del laboratorio con su nombre, indicando que actividades se realizan en cada una de ellas.
  - d) Un croquis descriptivo de la distribución de las consolas de prácticas, resaltando como están ubicadas las fuentes de alimentación e instrumentos de medición en las mismas.
    - e) Donde se encuentran ubicados los cestos de basura.
    - f) Localice los puntos de tierra física y su interconexión con el laboratorio.

### CUESTIONARIO:

¿Cuál es la razón por lo que están delineadas con color amarillo las diferentes áreas de trabajo en el laboratorio?

¿En la norma ISO-9000 y NOM cómo están especificados los accesos de entrada y salida de emergencia en un laboratorio como el nuestro?

¿Qué indica el apartado de las 5'S (cinco eses) de la norma de calidad referente a seguridad en los laboratorios de electrónica?

¿Cuál es el procedimiento para instalar tierras físicas en un área de trabajo?

¿Cuenta el laboratorio con una interconexión de tierra física confiable?

Cuál es la cantidad de corriente eléctrica mínima para sufrir una fibrilación del corazón? ¿Es esto grave para la salud del ser humano?

¿Cree usted que el laboratorio de electrónica del Instituto cumple con las suficientes normas de calidad?

**Si su respuesta es afirmativa**, especifique el porqué de su respuesta;

**Si su respuesta es negativa**, especifique el porqué de su respuesta y de sugerencias para su mejoramiento.

## 2. Instrumentos básicos y avanzados.

### *Introducción.*

Los instrumentos eléctricos más comunes son: amperímetros y voltímetros que permiten medir corriente eléctrica y diferencia de potencial o tensión eléctrica, respectivamente.

El componente principal de estos instrumentos es un galvanómetro, aparato éste que detecta una pequeña corriente que pasa a su través. El tipo más utilizado de galvanómetro es el magneto-eléctrico (imán permanente y bobina móvil; tipo D'Arsonval) cuya estructura básica muestra la Fig.21.

Una bobina de alambre conductor por la que circula corriente eléctrica, al estar ubicada en un campo magnético, experimenta la acción de un par de fuerzas o momento de torsión proporcional al valor de la corriente. Este momento hace girar la bobina hasta que es equilibrado por un par antagónico proporcionado por la suspensión mecánica de la bobina (resortes en espiral).

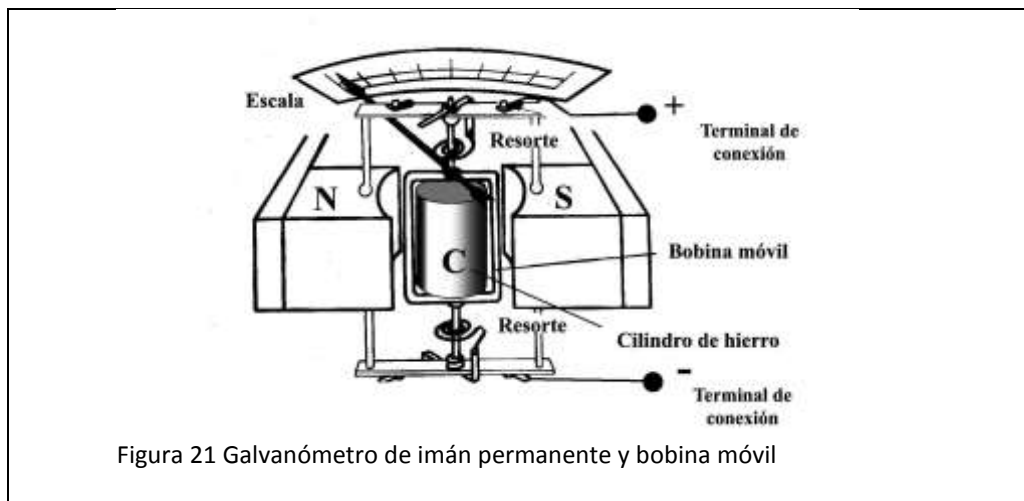


Figura 21 Galvanómetro de imán permanente y bobina móvil

Mediante un

La resistencia eléctrica del galvanómetro  $R_g$  (resistencia diseño adecuado del imán y del núcleo de la bobina (cilindro de hierro C), se consigue que el ángulo  $\alpha$  que gira la bobina sea proporcional a la corriente.

Una aguja, solidaria a la bobina, se desplaza sobre una escala señalando, directamente, el valor de la corriente eléctrica del circuito interno; incluye la resistencia de la bobina) y la corriente  $I_g$  necesaria para desviar la aguja hasta el final de la escala, son los parámetros fundamentales para construir un amperímetro o un voltímetro a partir de un galvanómetro.

### *Movimiento D'arsonval*

conductores, de tal forma que se El movimiento de la aguja imantada

observada por **Oersted** reveló que las corrientes eléctricas producen campos magnéticos y también facilita la dirección de este campo, o sea su modo de acción. Cuando el físico alemán **Jhoann Salomo C. Scheigger** supo del experimento de **Oersted** comprendió enseguida que la inclinación de la aguja podría utilizarse para detectar el paso de una corriente eléctrica y para medir su intensidad.

Para ampliar el efecto de campo magnético en un conductor, y lograr una mayor desviación con corrientes débiles, a **Schweigger** se le ocurrió superponer varios sumara su efecto magnético. Para ello enrolló un alambre en torno de la brújula, formando una especie de resorte, asumiendo que cada espira equivalí a a un conductor independiente puesto en serie con el siguiente. Sin embargo, a pesar de los múltiples dispositivos propuestos, no fue sino hasta 1881, cuando Jacques D'arsonval enrolló alambre creando la primera bobina electroimán, y de su unión con la brújula desarrollando así su "Galvanómetro De Bobina Móvil", (llamado así por sugerencia del matemático francés **André Marie Amper**, en honor al científico italiano **Galvani**).que fue cuando se contó con un instrumento verdaderamente útil, el cual con pocas modificaciones, continua empleándose hasta nuestros días.

En honor a **André Marie Amper** se denominó **Amper** a la Cantidad de corriente eléctrica que atraviesa un punto de un conductor en la unidad de tiempo. En homenaje al físico Italiano **Allessandro Volta**, se llama **Volt** a la presión o fuerza que impulsa un **Amper** a través de un conductor que presente una resistencia de un **ohm**; llamado así este último término en honor al físico Alemán **Georg Simon Ohm** quien descubrió en 1827 la famosa ley que hoy lleva su nombre.

El Movimiento básico de *Imán permanente y Bobina Móvil* conocido como **Galvanómetro** (en honor al científico italiano **Galvani**) ó *Movimiento D'Arsonval*, por su inventor. Este diseño ofrece un imán más grande en el espacio dado y se emplea cuando se requiere máximo flujo en el entrehierro. El resultado de las características antes mencionadas da un instrumento con consumo de potencia muy bajo y un flujo de corriente mínimo para una *deflexión a escala completa*.

El **Galvanómetro** es el indicador básico de corriente, ya que convierte directamente la corriente que fluye a través de él, en la magnitud angular o desviación de una aguja indicadora, siendo esta desviación proporcional a dicha corriente eléctrica.

Para su análisis se simbolizará el *Galvanómetro*, como un medidor con indicador de agujas, en serie con una resistencia llamada "**Resistencia Interna del Galvanómetro**", que corresponde a la resistencia eléctrica del alambre con que está construida la bobina del galvanómetro, ésta se denotará como " $r_m$ ". A la corriente máxima que el galvanómetro sea capaz de manejar se denotará como " $I_m$ "; este valor de corriente generalmente está marcado en la carátula del propio galvanómetro. Se deberá tener especial cuidado en la observación de la polaridad del

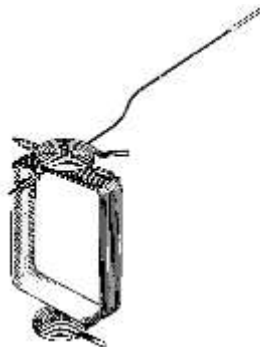


galvanómetro al momento de colocarlo, ya que de no respetarlo el indicador se puede dañar.

Este dispositivo está formado por un imán permanente en forma de herradura con piezas polares de hierro dulce unidas a él. Entre las piezas polares se encuentra un *cilindro* del mismo material, mediante el cual se obtiene una distribución uniforme del campo magnético en el entrehierro que existe en el cilindro y las piezas polares. Esta *bobina* (ver fig. 22) está montada sobre una estructura de metal ligero y se embobina de tal forma que gire libremente en el entrehierro. La *aguja*, unida, unida a la bobina, se desplaza sobre una *escala* graduada e indica la deflexión angular de la bobina dando como resultado indicar la corriente que fluye a través de ella.

de Y es el *ajuste de cero* y está unido al extremo fijo del *resorte de control frontal*. Una *espiga excéntrica* conecta a través de la caja del instrumento el objeto en forma de Y para que de esta forma sea posible ajustar el cero desde el exterior. Dos *resortes conductores* de bronce fosforado, normalmente con la misma tensión mecánica, suministran una fuerza de calibración que es opuesta al torque de la bobina móvil. El comportamiento de los resortes debe mantenerse constante con el tiempo para poder obtener exactitud en el instrumento. La corriente eléctrica se conduce hacia y desde la bobina por medio de El objeto en forma estos resortes.

Todo el sistema móvil se balancea estáticamente para todas las posiciones de deflexión por medio de tres *contrapesos de balanceo*. La aguja, los resortes y la estructura de la bobina están ensamblados por medio de las bases de los *pivotes*, conformando todo el elemento móvil, el cual se sostiene por medio de asientos de piedra. A continuación, se muestra la aguja con sus tres contrapesos de balanceo y la forma física de un *Galvanómetro D'Arsonval* (ver fig. 23).



**Figura 22** Detalles de una Bobina Móvil que muestran el resorte de Control, la Aguja y sus Contrapesos

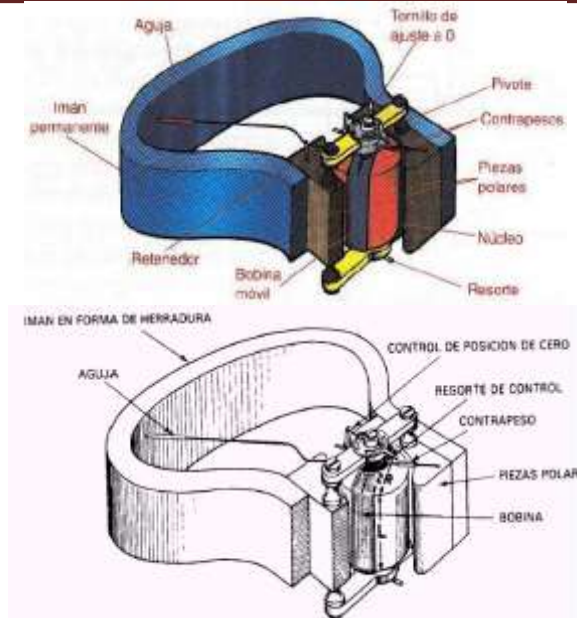


Figura 23 Detalles de Construcción de un Galvanómetro de Imán Permanente y Bobina Móvil

Este instrumento consta de un imán permanente, con dos expansiones polares, entre las cuales gira un bastidor formado por una base de aluminio, sobre el cual se monta un arrollamiento de alambre conductor muy de muy pequeña sección (o bien una bobina autosoportada).

Dentro de bastidor se encuentra un cilindro de hierro dulce, fijado al instrumento, con lo cual se disminuye la reluctancia del circuito magnético. En la figura 24 se encuentra un detalle del mismo.

El bastidor está guiado por dos semiejes de material conductor, cuyos extremos son cónicos y poseen una terminación fina, los cuales se montan sobre sendos pivotes, que le permite un movimiento giratorio.

Sobre cada semieje encontramos dos resortes arrollados en sentido contrario, los cuales se hallan fijos en un extremo a la estructura del instrumento y por la otra al semieje correspondiente, con lo cual la posición del bastidor se mantiene en una cierta posición.

El sistema está construido en forma tal, que la corriente a medir ingresa a través de uno de los resortes, pasa por el semieje correspondiente, circula por la bobina y sale por el otro semieje y su resorte.

Sobre el eje de suspensión está montada una aguja indicadora o índice que se desplaza sobre una escala adecuada, en la cual se efectúa la lectura correspondiente.



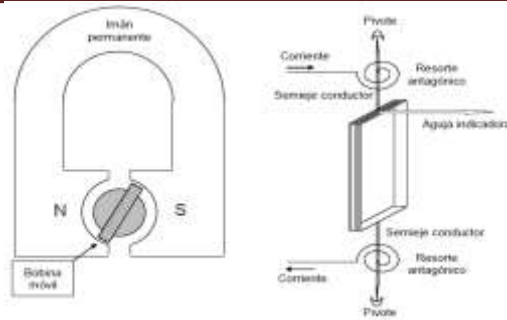


Figura 24 Esquema de un instrumento de imán permanente y bobina móvil

Debido a la forma que presenta el imán en la zona que enfrenta a la bobina, el campo magnético que atraviesa la misma es radial, lo cual hace que el mismo tenga un valor constante en cualquier posición de dicha bobina (dentro del ángulo que gira la misma).

Si se hace circular corriente por la bobina, en cada conductor de la misma se origina una fuerza, cuya magnitud está dada por la siguiente expresión

$$F = (N)(B)(I)(L)$$

Dónde: F: Fuerza [N]  
 N: número de espiras que conforman la bobina  
 B: inducción magnética producida por el imán permanente [T]  
 I: Corriente que circula por la bobina [A]  
 L: Longitud del conductor que se encuentra inmerso en el campo magnético [m]

Esta fuerza aparece en los conductores, cuya dirección es perpendicular al campo magnético, de forma tal que de un lado de la bobina tiene un sentido y en el otro lado tiene sentido contrario (Dichos sentidos se determinan por medio de alguna regla conocida). Dado que estas dos fuerzas tienen distinto sentido y además están en distintos planos de acción, se origina una cupla, cuyo valor está dado por:

$$C_m = F \cdot d = N \cdot I \cdot B \cdot L \cdot d = K \cdot I \quad (d: \text{ancho de la bobina})$$

De aquí observamos que la cupla es proporcional a la corriente que circula por la bobina, y origina un giro del sistema, el cual se detendrá cuando la cupla motora y la cupla antagónica originada por los resortes se igualen.

La cupla resistente provocada por los resortes, es proporcional al ángulo de giro de los mismos y a una constante propia de los mismos, siendo su valor:

En equilibrio:

$$C_R = K_R \cdot \theta$$

$$C_m = C_R$$

$$K \cdot I = K_R \cdot \theta$$

$$\theta = K/K_R \cdot I = K_A \cdot I$$

Con lo cual se observa que el ángulo de giro del sistema es proporcional a la corriente que circula por la bobina.

Este instrumento es apto para corriente continua, ya que de aplicar corriente alterna, el signo de la cupla estaría cambiando de sentido en función de la frecuencia de la corriente y el sistema quedaría en la posición de cero.

La aguja indicadora se desplaza sobre una escala adecuada, cuyo tarado se efectúa en base a la corriente que circula, lo cual hace que este instrumento se lo pueda utilizar para medir corrientes o tensiones con los aditamentos necesarios para limitar la corriente al valor máximo que pueda soportar la bobina, con el agregado de resistencias en serie o en paralelo.

Un galvanómetro puede utilizarse como amperímetro, siendo su alcance (máxima corriente que puede medir; aguja a fondo de escala) la corriente de valor  $I_g$ .

Asimismo puede utilizarse como voltímetro de alcance máximo  $V_g = R_g I_g$ .

- **Amperímetro:** Para ampliar  $n = \frac{I}{I_g}$  veces el alcance del galvanómetro para que funcione como amperímetro de alcance  $I$ , se le conecta una resistencia  $R_s$  en paralelo (resistencia de deriva o resistencia shunt).

- **Voltímetro:** Para ampliar  $n = \frac{V}{V_g}$  veces el alcance del galvanómetro como voltímetro, de manera que funcione como voltímetro de alcance  $V$ , se le conecta una resistencia  $R_a$  en serie (resistencia adicional).

Por el momento interesa destacar que, con la incorporación al galvanómetro de resistencias en la forma mencionada; se obtiene, en general, que las resistencias resultantes de los amperímetros son mucho menores que las resistencias resultantes de los voltímetros ( $R_A \ll R_V$ ).

- **Multímetro:** a un mismo galvanómetro se lo puede equipar con resistencias (de derivación y adicionales), de valores adecuados y disponer así de un voltamperímetro de alcances múltiples.

## 2.1 Evaluación y comparación de medidores analógicos y digitales.

**Presentación:**

**Instrumentos \_Clasificación.**

[https://docs.google.com/presentation/d/1MGnqC2a1LQt6g8rZz4\\_g](https://docs.google.com/presentation/d/1MGnqC2a1LQt6g8rZz4_g)

[Q-](#)

[Oc3t2dW96W/edit?usp=share link&ouid=105956408912005630471 &rtppof=true&sd=true](https://oc3t2dW96W/edit?usp=share_link&ouid=105956408912005630471&rtppof=true&sd=true)

### 2.1.1 Voltímetro.

Un **voltímetro** señala el valor de la tensión eléctrica o diferencia de potencial que hay entre dos puntos de un circuito eléctrico, por lo que debe conectarse a los puntos en los que existe la tensión a medir (**conexión paralelo**).

Para que un voltímetro, al incorporarlo al circuito, produzca un efecto despreciable sobre la tensión que se desea medir, su resistencia  $R_V$  debe ser mucho mayor que el resto de las resistencias del circuito paralelo del cual pasa a formar parte. En un voltímetro ideal debería cumplirse  $R_V = \infty \Omega$ .

En este caso el instrumento se debe conectar en paralelo con la carga de acuerdo a lo indicado en la figura 25.

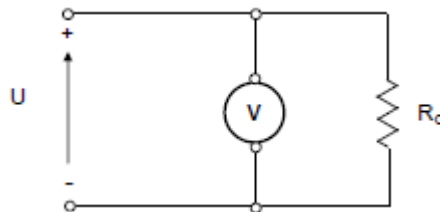


Figura 25 Conexión de un Galvanómetro utilizado como voltímetro

Debido a que la corriente que circula por el instrumento depende de la resistencia de la bobina y de la tensión aplicada, para poder utilizar el instrumento como voltímetro deberemos agregar una resistencia en serie, de acuerdo a lo indicado en la figura 26

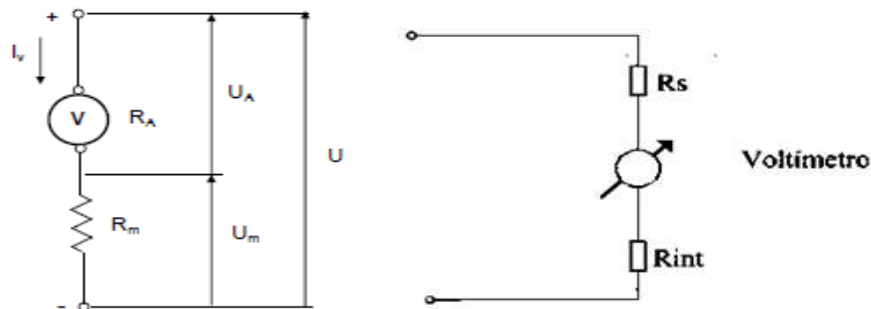


Figura 26 Conexión de una resistencia en serie

En el gráfico se cumple:

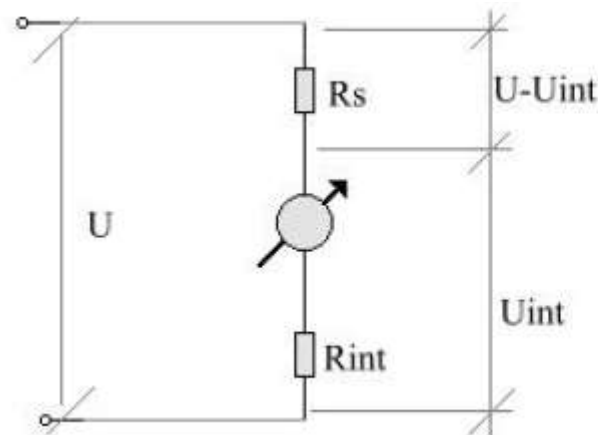
$$U = U_A + U_m = I_V \times R_A + I_V \times R_m$$

De lo que obtenemos:

$$R_m = \frac{U}{I_A} - R_A$$

En este caso el tarado de la escala se efectuará en volt.

Cálculo de la resistencia voltímetro



$$I = \frac{U - U_{int}}{R_s} = \frac{U_{int}}{R_{int}} \Rightarrow R_s = R_{int} \left( \frac{U - U_{int}}{U_{int}} \right)$$

$$R_s = R_{int} \left( \frac{U}{U_{int}} - 1 \right)$$

$$n = \frac{U}{U_{int}} = \text{multiplicación de alcance}$$

$$R_s = R_{int}(n - 1)$$

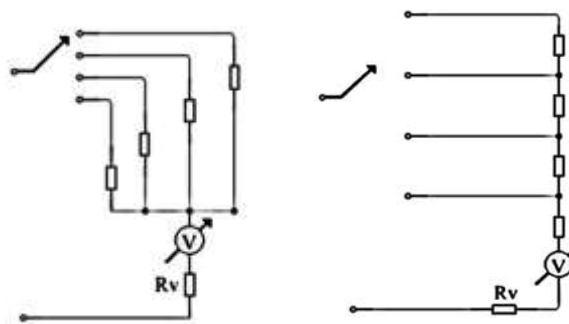


Figura 27 Multiplicador de resistencias independiente y de resistencias combinadas

**Ejemplo:**

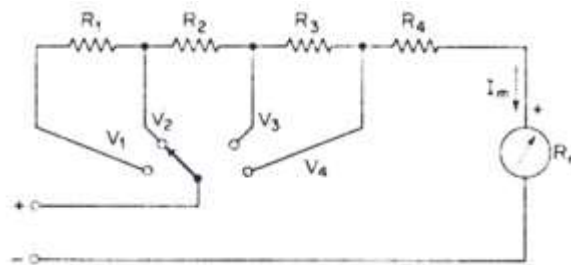


Figura 28 Modelo práctico de resistencias multiplicadoras en un voltímetro multirango.

Un movimiento básico D'Arsonval tiene una resistencia interna,  $R_m = 100 \Omega$  y una corriente a escala completa,  $I_{fsd} = 1 \text{ mA}$ , se va a utilizar como voltímetro de cd multirango con escalas de voltaje de 0 - 10 V, 0 - 50 V, 0 - 250 V, y 0 - 500 V: se empleara el circuito de la figura 28.

**SOLUCION** Para la escala de 10 V (el selector de escala en la posición  $V_1$ ), la resistencia total del circuito es:

$$R_T = \frac{10 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = R_T - R_m = 10 \text{ k}\Omega - 100 \Omega = 9 \text{ 900 } \Omega$$

Para la escala de 50 V (selector de escala en posición  $V_2$ ),

$$R_T = \frac{50 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 50 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = R_T - (R_1 + R_m) = 50 \text{ k}\Omega - 10 \text{ k}\Omega = 40 \text{ k}\Omega$$

Para la escala de 250 V (selector de escala en posición  $V_3$ ),

$$R_T = \frac{250 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 250 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = R_T - (R_1 + R_2 + R_m) = 250 \text{ k}\Omega - 50 \text{ k}\Omega = 200 \text{ k}\Omega$$

Para la escala de 500 V (selector de escala en posición  $V_4$ ),

$$R_T = \frac{500 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 500 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = R_T - (R_2 + R_3 + R_4 + R_m) = 500 \text{ k}\Omega - 250 \text{ k}\Omega = 250 \text{ k}\Omega$$

### 2.1.2. Amperímetro.

Un **amperímetro** señala el valor de la corriente que circula por su interior por lo que se debe abrir el conductor por el cual está establecida la corriente a medir e intercalar el instrumento dando con este continuidad al circuito (**conexión serie**).

Para que un amperímetro, al incorporarlo al circuito, produzca un efecto despreciable sobre la corriente que se desea medir, su resistencia **RA** debe ser muy pequeña en comparación con el resto de las resistencias del circuito serie del cual pasa a formar parte. En un amperímetro ideal debería cumplirse **RA = 0 Ω**.

El instrumento utilizado como amperímetro se debe conectar en serie con la carga cuyo valor de corriente queremos determinar, tal como se muestra en la figura 29

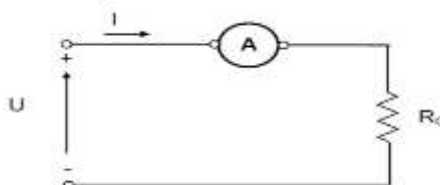


Figura 29 Conexión de un Galvanómetro utilizado como amperímetro

Debido a la pequeña corriente que admite la bobina del instrumento, para poder usar este instrumento como amperímetro, debemos poder ampliar su alcance, lo cual se efectúa mediante el agregado de resistencia en paralelo (Shunt).

En la figura 30 observamos la forma de conexión.

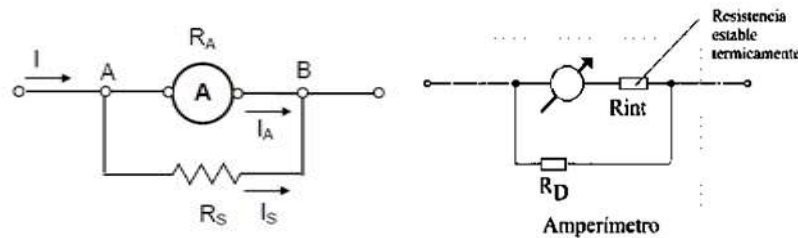


Figura 30 Conexión de una resistencia en derivación

Esta resistencia en paralelo deberá tener un valor, el cual surge del alcance que se desee obtener.

De la figura 29, la corriente que puede soportar el instrumento está indicada por **IA**, siendo **RA** la resistencia de la bobina.

Si queremos utilizar el mismo instrumento para poder efectuar mediciones de corriente cuyo valor máximo será **"I"**, la resistencia shunt a colocar, surge del siguiente análisis:

La diferencia de potencial entre los bornes A y B está dada por:  $U_{AB} = R_A \times I_A = R_S \times I_S$

$$R_S = \frac{R_A \times I_A}{I_S} = \frac{R_A \times I_A}{I - I_A} = \frac{R_A}{\frac{I}{I_A} - 1}$$

Este valor de la resistencia shunt, es menor que la resistencia de la propia bobina, para poder derivar por la misma la diferencia de corrientes.

Con el agregado de la resistencia mencionada se puede realizar el tarado de la escala para este mayor rango de corriente.

Ejemplo:

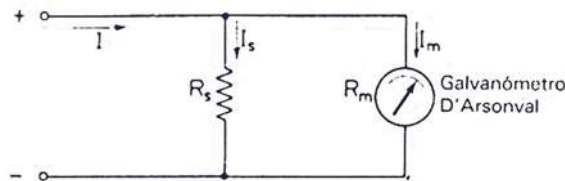


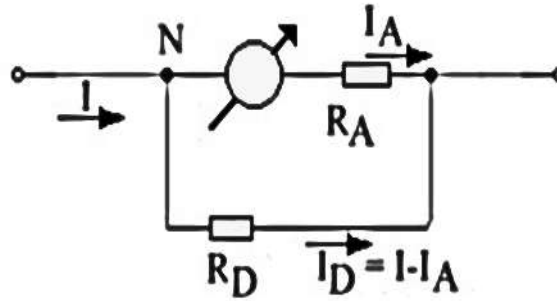
Figura 31 Circuito de un amperímetro básico de cd.

Un galvanómetro de 1 mA con una resistencia interna de 100 Ω se quiere utilizar como un amperímetro de 0 – 100 mA. Calcúlese el valor de la resistencia de derivación necesaria. Ver fig. 31)

$$I_S = I - I_m = 100 - 1 = 99 \text{ mA}$$

$$R_s = \frac{I_m \times R_m}{I_s} = \frac{1 \text{ mA} \times 100 \Omega}{99 \text{ mA}} = 1.101 \Omega$$

Cálculo de resistencia amperométrica.



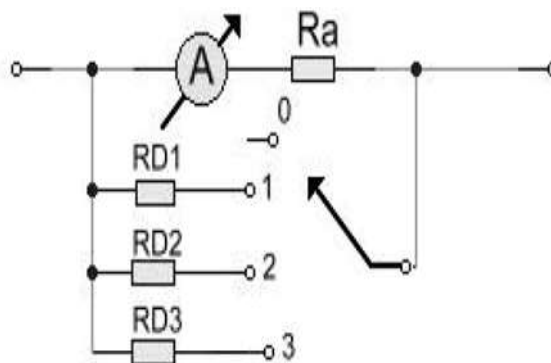
$$\sum (I)_N = 0 \Rightarrow I = I_A + I_D$$

Como  $U_A = U_D$

$$R_A I_A = R_D I_D \Rightarrow R_D = R_A \cdot \frac{I_A}{I_D} = R_A \cdot \frac{I_A}{I - I_A} \quad \text{y como } n = \frac{I}{I_A}$$

$$R_D = \frac{R_A}{\frac{I - I_A}{I_A}} = \frac{R_A}{\frac{I}{I_A} - 1}$$

$$R_D = \frac{R_A}{(n-1)}$$



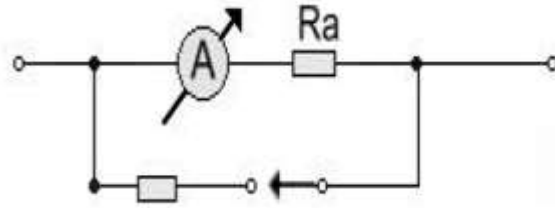


Figura 32 A y B.

La figura 32 A representa un instrumento amperométrico de múltiples alcances, que no es aconsejable su uso, por la influencia del selector, que presenta una resistencia de contacto desconocida y variable al azar, ya que depende de las superficies que están en contacto entre el electrodo fijo y el móvil del selector. La temperatura, la humedad, el pulimento o rugosidad de la superficie, presión entre contactos, óxidos, etc.

**Ejemplos:**

La figura 32B muestra el mismo selector reemplazado por su resistencia equivalente, aunque es variable y desconocida, hemos supuesto que en cierto instante tiene un valor de 0.01 ohm igual o el mismo orden que la propia resistencia del shunt RD1. En estas condiciones la serie RD1 + Rc = (0.01 + 0.01) ohm = 0.02 ohm, con lo cual la multiplicación de alcance de 5000 ohm, ahora la presencia de Rc hará que el alcance que se pretendía multiplicar 5000 veces, ahora solo se multiplique por 2501.

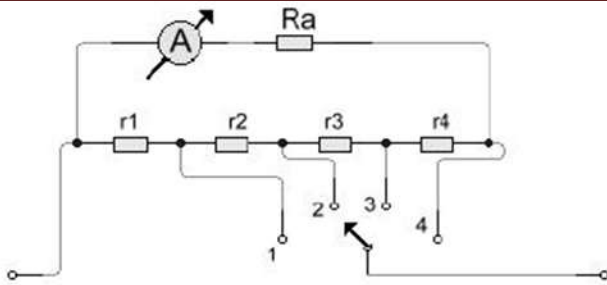
$$RD = \frac{Ra}{n - 1}$$

$$n_{(RD1)} = \frac{Ra}{RD} + RD = \frac{50}{0.01} + 1 = 4999 + 1 = 5000$$

$$n_{(RD1+RD2)} = \frac{50}{0.02} + 1 = 2501$$

Para evitar este problema se ha creado otra forma de multiplicación de alcance amperométrico llamado Shunt de alcance universal o Shunt de Ayrton, que tiene la siguiente forma:

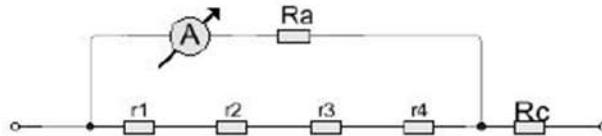




Selector en la posición 4:

Alcance:

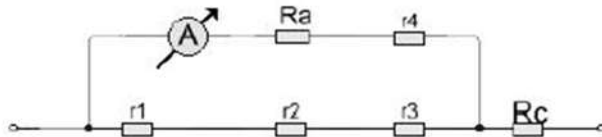
$$n4 = r1+r2+r3+r4 = \frac{RA}{n-1}$$



Selector en la posición 3:

Alcance:

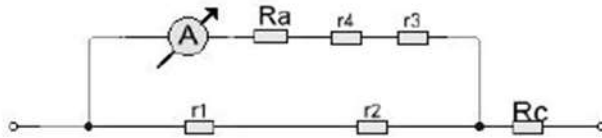
$$n3 = r1+r2+r3 = \frac{RA + r4}{n - 1}$$



Selector en la posición 2:

Alcance:

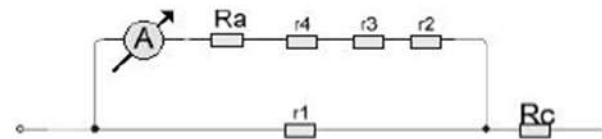
$$n2 = r1 + r2 = \frac{RA + r4 + r3}{n - 1}$$



Selector en la posición 1:

Alcance

$$n1 = r1 = \frac{RA + r4 + r3 + r2}{n - 1}$$



De éste sistema de ecuaciones se deduce  $R_c$  es independiente del alcance. Es lo mismo que estuviera en la carga, con lo cual no perturba el Shunt, ni al amperímetro.

La  $R_c$  se excluye de la malla 1, que determina el alcance, pero tiene el alcance natural del amperímetro, los tester traen éste circuito. El mismo alcance es mayor que el natural y la resistencia de contacto no se suma con la del Shunt y por lo tanto no modifica el alcance.

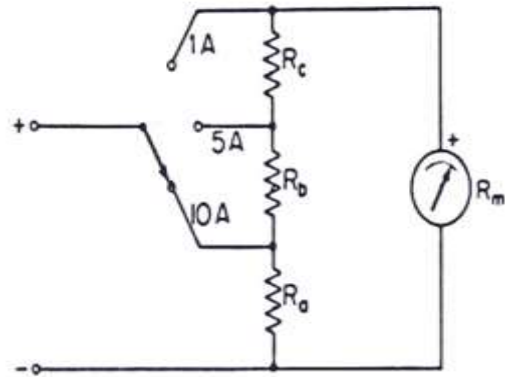


Figura 33 Derivación universal o de Ayrton.

Diseñe un amperímetro con derivación de Ayrton para escalas de corriente de 1 A, 5 A, y 10 A. Se utiliza un galvanómetro D'Arsonval con una resistencia interna de  $R_m = 50 \Omega$ , una corriente de deflexión a escala completa de 1 mA y se utiliza la configuración de la figura 33.

**Solución** Para la escala de 1 A;  $R_a + R_b + R_c$  están en paralelo con la bobina móvil de  $50 \Omega$ . Dado que el movimiento necesita 1 mA para la deflexión de escala completa, se requiere en la derivación circule una corriente de  $1 \text{ A} - 1 \text{ mA} = 999 \text{ mA}$ . Con la ecuación  $R_S = \frac{I_m \times R_m}{I_S}$  se obtiene:

$$R_a + R_b + R_c = \frac{1 \times 50}{999} = 0.05005 \Omega \quad (I)$$

Para la escala de 5 A:  $R_a + R_b$  está en paralelo con  $R_c + R_m$  ( $50 \Omega$ ). En este caso habrá una corriente de 1 mA a través de la bobina móvil y el resistor  $R_c$  en serie, así como 4999 mA a través de  $R_a + R_b$ . Con la ecuación

$R_S = \frac{I_m \times R_m}{I_S}$  se tiene:

$$R_a + R_b = \frac{1 \times (R_c + 50 \Omega)}{4999} \quad (II)$$

Para la escala de 10-A:  $R_a$  sirve como derivación y  $R_b + R_c$  están en serie con la bobina móvil. La corriente a través de ella es otra vez 1 mA y en la derivación circulan los restantes 9 999 mA. La ecuación anterior da

$$R_a = \frac{1 \times (R_b + R_c + 50 \Omega)}{9\,999} \quad (III)$$

Al resolver las tres ecuaciones simultáneas (I), (II) y (III) se obtiene:

$$4\,999 \times (I): 4\,999R_a + 4\,999R_b + 4\,999R_c = 250.2$$

$$(II): 4\,999R_a + 4\,999R_b - R_c = 50$$

Al restar (II) de (I) se obtiene:

$$5\,000R_c = 200.2$$

$$R_c = 0.04004 \Omega$$

Similarmente,

$$9\,999 \times (I): 9\,999R_a + 9\,999R_b + 9\,999R_c = 500.45$$

$$(III): 9\,999R_a - R_b - R_c = 50$$

Al restar (III) de (I) se obtiene

$$10\,000R_b + 10\,000R_c = 450.45$$

La sustitución del valor calculado de  $R_c$  en esta expresión da:

$$10\,000R_b = 450.45 - 400.4$$

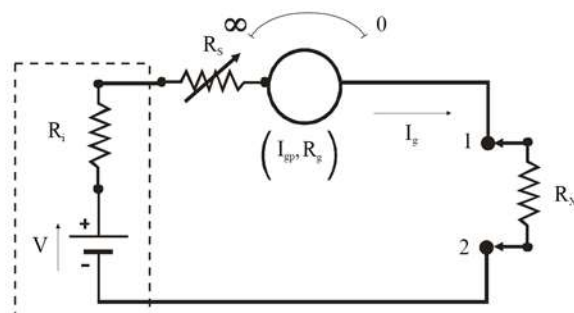
$$R_b = 0.005005 \Omega$$

$$R_a = 0.005005 \Omega$$

### 2.1.3. Óhmetro.

**Introducción teórica:** son instrumentos que miden resistencias en forma directa. Se estudiarán el óhmetro serie cuyo dispositivo final es un instrumento de imán permanente y bobina móvil.

**Óhmetro serie:** el circuito de conexión básico es:



$R_i$ : resistencia interna de la pila o fuente de energía.

$R_g$ : resistencia interna del dispositivo final.

$R_x$ : resistencia a medir.

Figura 34

RS: resistencia agregada para obtener el alcance deseado.

I<sub>gp</sub>: intensidad de corriente a plena escala del dispositivo final.

I<sub>g</sub>: intensidad de corriente para una dada R<sub>x</sub>.

I<sub>gp</sub>: intensidad de corriente a plena escala del dispositivo final.

I<sub>g</sub>: intensidad de corriente para una dada R<sub>x</sub>.

Nótese que para R<sub>x</sub> = ∞, es decir circuito abierto, es I<sub>g</sub> = 0; como consecuencia el infinito está en la parte izquierda de la escala del óhmetro.

Para R<sub>x</sub> = 0, se calibra de tal modo que la I<sub>g</sub> = I<sub>gp</sub>, es decir que al cortocircuitar los bornes de salida la deflexión debe ser a fondo de escala, por lo cual resulta que el cero está en el extremo derecho de la escala.

Esto trae como consecuencia una escala alineal. La intensidad de corriente para una R<sub>x</sub> cualquiera es:

$$I = \frac{V}{R_g + R_i + R_s + R_x} \quad (1)$$

Si se llama resistencia de entrada, a la resistencia de Thévenin vista desde los bornes 1-2 de la figura anterior, se tiene:

$$R_{os} = R_i + R_g + R_s \quad (2)$$

Los subíndices de R<sub>os</sub> indican O de entrada y S serie. Sustituyendo la expresión (2) en la (1).

$$I_g = \frac{V}{R_{os} + R_x} \quad (3)$$

Si R<sub>x</sub> = 0 resulta:

$$I_g = I_{gp} = \frac{V}{R_{os}} \quad (4) \text{ condición de ajuste.}$$

Recordando que I<sub>gp</sub> es la intensidad de corriente del dispositivo final a plena escala. Se define como *factor de deflexión* o *deflexión relativa* a:

$$F = \frac{I_g}{I_{gp}} \quad (5)$$

También se expresa a **F** como relación angular, esto es:

$$I_g = k \times \theta \quad e \quad I_{gp} = k \times \theta_p$$

$$F = \frac{\theta}{\theta_p} \quad (6)$$

θ<sub>p</sub>: es la deflexión angular a plena escala (corresponde a I<sub>gp</sub>).

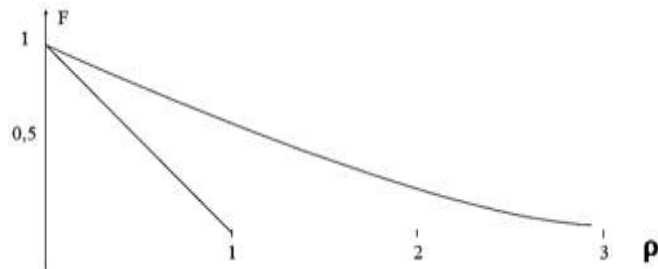
$\theta$ : es una deflexión angular cualquiera (corresponde a  $I_g$ ). de la expresión (3) y (4) se obtiene:

$$F = \frac{R_{os}}{R_{os} + R_x} = \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_{os}}} \quad (7)$$

Llamado  $\rho = \frac{R_x}{R_{os}}$  se tiene:

$$F = \frac{1}{1 + \rho} \quad (8)$$

Si se representa la expresión se obtiene una curva universal (figura 35):

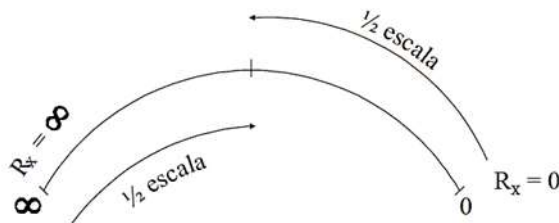


La curva es tangente a la recta 1,1.  
Para:

$$\begin{cases} \rho = 0 & R_x = 0 & F = 1 \\ \rho \rightarrow \infty & R_x \rightarrow \infty & F \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 1 & R_x = R_{os} & F = 0,5 \end{cases}$$

Figura 35

$\rho = 1$  o  $F = 0,5$  indica que el instrumento deflexiona a media escala



Nótese que el extremo izquierdo indica  $\infty$ , pero para cualquier alcance resulta el mismo valor, por lo tanto no se puede caracterizar los alcances mediante la *deflexión a plena escala*.  
Por esta razón se lo hace para el *Punto de Media Escala* que sí caracteriza cada alcance y permite la recalibración.

### Errores debido al envejecimiento de la batería: el

envejecimiento de la batería trae como consecuencia:

- Disminución de la fuerza electromotriz f.e.m,  $\Delta V$ .
- Aumento de la resistencia interna,  $\Delta R_i$ .

Para disminuir los efectos del envejecimiento se recurre a la compensación mediante la variación de  $R_s$ .

Esto es, que para compensar  $\Delta V$  y  $\Delta R_i$  se produce una variación  $\Delta R_s$ , de modo que para  $R_x = 0$ , se tenga nuevamente  $I_g = I_{gp}$ . Es decir que en un principio, con la batería nueva, la condición de ajuste será:

$$I_{gp} = \frac{V}{R_g + R_i + R_s}$$

y cuando la batería está envejecida:

$$I_{gp} = \frac{V + \Delta V}{R_s + \Delta R_s + R_g + R_i + \Delta R_i}$$

Donde  $\Delta V$  y  $\Delta R_i$  son las variaciones espontáneas con el tiempo y  $\Delta R_s$  es una variación realizada expresamente para obtener la compensación.

Se verá cuál es el error que se comete a pesar de la compensación:

Por ejemplo, un óhmetro cuya especificación sea  $R_m = 2.000\Omega$ .

Suponiendo que se desea medir una resistencia cuyo valor es  $R_x = 1.900\Omega$ , el índice del óhmetro, con batería nueva, indica  $1.900\Omega$ .

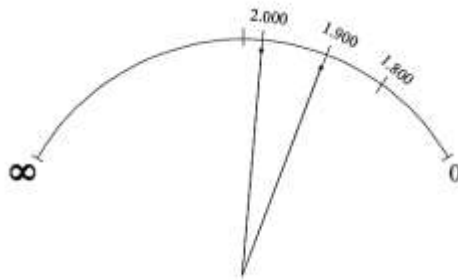


Figura 36

Cuando la pila envejece resulta:

$$I_{E|_{R_x=0}} < I_{gp}$$

ya que disminuyó su f.e.m. en  $\Delta V$  y aumentó su resistencia interna en  $\Delta R_i$ ; para conseguir que el índice de deflexión a plena escala se debe producir una variación  $\Delta R_s$ , reduciendo el valor de  $R_s$ , debido a ello la resistencia de entrada del óhmetro cambia del valor  $R_{os}$  a otro llamado  $R'_{os}$ .

Suponiendo que la resistencia de entrada en lugar del valor original de  $2\text{ K}\Omega$  es  $R_{os} = 1.900\Omega$ . Si ahora se mide nuevamente la resistencia de  $1.900\Omega$ , la intensidad de corriente que circulará por el dispositivo final será la que corresponde a la mitad de plena escala, como se indica con la línea de trazos en la figura anterior.

Como se observa la lectura que se realiza no sería correcta pues se leería  $R_x = 2.000\Omega$ ; ya que la escala es la misma independientemente del hecho de que al variar  $R_s$  la resistencia que produce una deflexión a media escala ha variado.

Método general para la determinación del error por envejecimiento de la batería: se ha visto que:

$$F = \frac{1}{1+\rho} \quad \text{con} \quad \rho = \frac{R_x}{R_{os}}$$

Sobre la base de esta expresión se puede levantar una curva de calibración de la escala del óhmetro del tipo indicado en la figura(37):

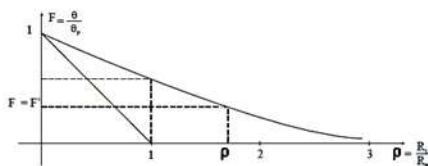


Figura 37

$R_m$ : resistencia de entrada del óhmetro (igual a la resistencia de entrada  $R_{os}$  en condiciones de diseño).  
 $R_i$ : resistencia leída o indicada, cuando la batería es nueva el valor indicado en la escala se corresponde con el valor de la resistencia medida.

Cuando la pila envejece la resistencia de entrada cambia tomando un valor  $R_{os}$ , y la ecuación según la cual deflexiona el óhmetro será<sup>85</sup>

$$F' = \frac{1}{1 + \rho'}$$

con:

$$F' = \frac{\theta'}{\theta_p}$$

$$y \quad \rho' = \frac{R_x}{R'_{os}}$$

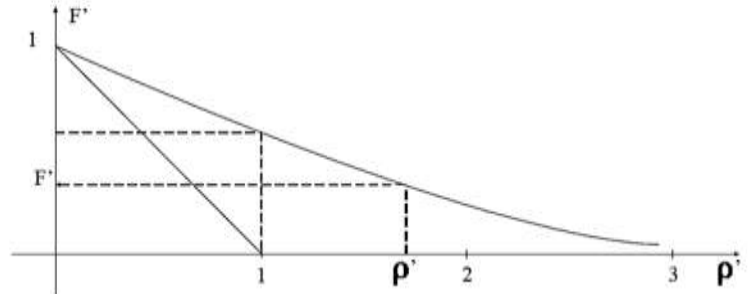


Figura 38

Se puede trazar así las curvas de deflexión que se indica en la figura N° 38 anterior. Si en estas condiciones medimos una resistencia  $R_x$ , que para este caso se supone de valor conocido, y si se conoce el valor de la resistencia de entrada  $R_{os}$  para las condiciones reales de medición, se puede calcular  $\rho'$  y de la figura se determina  $F'$  y con ella cual es la deflexión  $\theta'$ . Para ello se recurre a la curva de calibración de la figura N° 37 y con  $F = F'$ , por corresponder  $\theta = \theta'$ , se determina el valor de  $\rho$  y con ello se despeja  $R_1 = \rho \times R_m$

El error absoluto de indicación será:

$$\Delta R_x =$$

$$R_1 - R_x = \rho \times R_m - \rho \times R_{os}$$

y el correspondiente error relativo de indicación resulta:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\rho \times R_m - \rho \times R'_{os}}{\rho \times R'_{os}}$$

Pero  $F' = \frac{1}{1 + \rho'}$  y  $F = \frac{1}{1 + \rho}$ . Como  $F = F'$  resulta  $\rho = \rho'$

Nótese que las curvas son iguales, lo único que cambia es la interpretación de las mismas.

En consecuencia resulta:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_{os} - R'_{os}}{R'_{os}} \text{ pues } R_m = R_{os} \quad \therefore \frac{\Delta R_x}{R_x} = - \frac{\Delta R_{os}}{R'_{os}}$$

Se puede suponer que  $R'_{os}$  difiere poco de  $R_{os}$  finalmente queda:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = - \frac{\Delta R_{os}}{R_{os}} \quad (9)$$

Esta expresión permite determinar cuánto vale el error de indicación debido al envejecimiento de la batería. Pero para tener una idea clara de su importancia se debe expresar dicho error en



función de las variaciones perturbadoras  $\Delta V$  y  $\Delta R_i$ . Para ello se recurre a la expresión de ajuste

$$I_{gp} = \frac{V}{R_{os}} \Rightarrow R_{os} = \frac{V}{I_{gp}}$$

Tomando incrementos:

$$\Delta R_{os} = \frac{\Delta V}{I_{gp}}$$

Y reemplazando en la expresión (9) se tendrá

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = - \frac{1}{I_{gp}} \cdot \frac{\Delta V}{R_{os}} = - \frac{\Delta V}{V} \quad (10)$$

Se observa que si por envejecimiento de la batería su f.e.m. disminuye en un 10 % la indicación del óhmetro es de 10 % en exceso. Este error es excesivo y para disminuirlo se busca un método nuevo para verificar la condición de ajuste. La clave consiste en buscar una disposición circuital tal que permita variar la corriente en el dispositivo final, con los bornes del óhmetro cortocircuitados, sin modificar sensiblemente la resistencia de entrada del instrumento; pues así la expresión (9) asegura que el error de indicación no tomará valores demasiado elevados.

La solución es obtener la condición de ajuste con una resistencia variable conectada en paralelo con el dispositivo final. El circuito de la figura N° 34 se transforma en el de la figura N° 39.

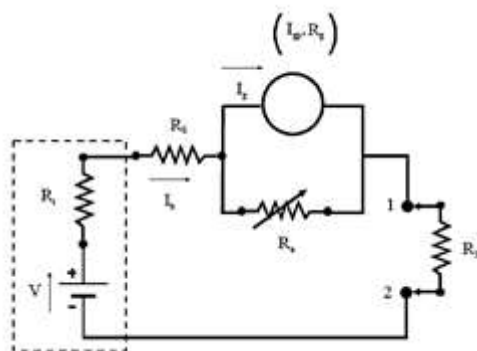


Figura 39

La resistencia de entrada vale ahora:

$$R_{os} = R_s + R_i + \frac{R_g \cdot R_a}{R_g + R_a} \quad (11)$$

En la expresión anterior  $R_i$  es despreciable frente a  $R_s$  y se verá más adelante que siempre puede lograrse condiciones de diseño tales que el paralelo  $R_g // R_a$  sea pequeño frente a  $R_s$ .

En estas condiciones la resistencia de entrada del óhmetro está determinada preponderantemente por el valor de la resistencia  $R_s$ , y las variaciones que se realicen sobre  $R_a$  para compensar el envejecimiento de la batería no influirán sensiblemente sobre el valor de la resistencia de entrada, con lo cual de acuerdo a la expresión (9), el error se mantendrá dentro de límites admisibles.

Del circuito se desprende que:



$$I_g = I_b \cdot \frac{R_a}{R_g + R_a} \text{ pero } I_b = \frac{V}{R_{os} + R_x} \therefore I_g = \frac{V}{R_{os} + R_x} \cdot \left( \frac{R_a}{R_g + R_a} \right) \quad (12)$$

Para  $R = 0$  se deduce la condición de ajuste, es decir  $I_g = I_{gp}$ .

$$I_g = \frac{V}{R_{os}} \cdot \frac{R_a}{(R_g + R_a)} \quad (13)$$

Si se relacionan las expresiones (12) y (13) se encuentra para la deflexión relativa una expresión idéntica a la del óhmetro anterior, y valen todas las consideraciones hechas en esa oportunidad, en particular que la resistencia que indica el instrumento a media escala es igual a su resistencia de entrada.

Procedimiento para el diseño del óhmetro y cálculo del error de indicación por envejecimiento de la batería:

Datos:

$$\begin{cases} R_m: \text{resistencia a media escala deseada.} \\ R_g, I_{gp}: \text{características del dispositivo final.} \end{cases}$$

Incógnitas:

$$\begin{cases} V: \text{f.e.m. de la batería.} \\ R_s: \text{resistencia serie.} \\ R_a: \text{resistencia de ajuste. Se calcula su valor nominal para una batería nueva, luego será un potenciómetro para poder efectuar la condición de ajuste.} \end{cases}$$

Hipótesis: se supone  $R_i$  despreciable, igual a cero, frente a las demás resistencias. Las expresiones que se utilizan son:

$$I_g = \frac{V}{R_{os}} \cdot \frac{R_a}{(R_g + R_a)} \quad (14)$$

Como se tienen tres incógnitas y sólo dos ecuaciones se puede adoptar arbitrariamente una de ellas.

- Se adopta el valor de  $V$ , con la restricción que se verá en el punto b.
- De la expresión (13), y teniendo en cuenta la expresión (14) se despeja el valor  $R_a$ .

$$R_a = \frac{R_g}{\frac{V}{I_{gp} \cdot R_m} - 1} \quad (15)$$

Como  $R_a$  debe ser positiva surge la condición:

$$\frac{V}{(I_{gp} \cdot R_m)} - 1 > 0 \therefore V > I_{gp} \cdot R_m \quad (16)$$

Si la última desigualdad se cumple con holgura,  $R_a$  puede hacerse suficientemente pequeña; y en consecuencia el paralelo  $R_a//R_g$  de valor pequeño frente a  $R_S$

- c) Cálculo de  $R$ : de las expresiones (11) y (14) se deduce que:

$$R_S = R_m \cdot \frac{R_g \cdot R_a}{R_g + R_a} \quad (17)$$

- d) Cálculo del error de indicación: la expresión (9) sigue siendo válida en este caso, y si se realiza el análisis para determinar el error en función de las variaciones intrínsecas  $\Delta V$  y  $\Delta R_i$  se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{1}{R_i + R_S} \cdot \left( \frac{R_g \cdot R_a}{R_g + R_a} \cdot \frac{\Delta V}{V} - \Delta R_i \right) \quad (18)$$

Nótese que si se verifica que el paralelo  $R_a//R_g$  es pequeño frente a  $R_S$ , la variación  $\Delta V/V$  se ve atenuada por la relación entre dicho paralelo y el valor de  $R_S$ . A su vez la variación de la resistencia interna aparece dividida por el valor de  $R_S$ , y su efecto sobre el error es despreciable.

**Ejemplo:**

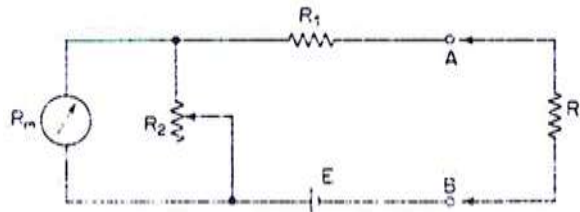


Figura 40 Ohmiometro tipo serie

En el ohmiómetro de la figura 40 utiliza un movimiento PMMC de  $50 \Omega$  básico que requiere una corriente de  $1 \text{ mA}$  a escala completa. El voltaje de la batería interna es de  $3 \text{ V}$ . La resistencia que provoca una deflexión de media escala es de  $2000 \Omega$ . Calcúlese a) los valores de  $R_1$  y  $R_2$ ; b) el valor máximo de  $R_2$ , para compensar la caída del  $10 \%$  de voltaje de la batería; c) el error de escala en la marca de media escala ( $2000 \Omega$ ) cuando  $R_2$  está en la posición dada en b).

**SOLUCION** a) La corriente de la batería total para la deflexión a escala completa es

$$I_t = \frac{E}{R_h} = \frac{3 \text{ V}}{2\,000 \, \Omega} = 1.5 \text{ mA}$$

La corriente a través de la resistencia de ajuste a cero  $R_2$  es entonces

$$I_2 = I_t - I_{fsd} = 1.5 \text{ mA} - 1 \text{ mA} = 0.5 \text{ mA}$$

El valor de la resistencia de ajuste a cero  $R_2$  es

$$R_2 = \frac{I_{fsd} R_m}{I_2} = \frac{1 \text{ mA} \times 50 \, \Omega}{0.5 \text{ mA}} = 100 \, \Omega$$

La resistencia del paralelo del movimiento y el resistor de derivación ( $R_p$ ) es

$$R_p = \frac{R_2 R_m}{R_2 + R_m} = \frac{50 \times 100}{150} = 33.3 \, \Omega$$

El valor de la resistencia limitadora de corriente  $R_1$  es

$$R_1 = R_h - R_p = 2,000 - 33.3 = 1\,966.7 \, \Omega$$

b) A la caída del 10% de voltaje de la batería,

$$E = 3 \text{ V} - 0.3 \text{ V} = 2.7 \text{ V}$$

La corriente total de la batería  $I_t$  es

$$I_t = \frac{E}{R_h} = \frac{2.7 \text{ V}}{2,000 \, \Omega} = 1.35 \text{ mA}$$

La corriente de la derivación  $I_2$  es

$$I_2 = I_t - I_{fsd} = 1.35 \text{ mA} - 1 \text{ mA} = 0.35 \text{ mA}$$

y la resistencia de ajuste a cero  $R_2$  es igual a

$$R_2 = \frac{I_{fsd} R_m}{I_2} = \frac{1 \text{ mA} \times 50 \, \Omega}{0.35 \text{ mA}} = 143 \, \Omega$$

c) La resistencia del paralelo de la bobina móvil del medidor y el nuevo valor de  $R_2$  es

$$R_p = \frac{R_2 R_m}{R_2 + R_m} = \frac{50 \times 143}{193} = 37 \, \Omega$$

Como la resistencia de media escala  $R_a$  es igual a la resistencia del circuito interna total,  $R_a$  se incrementa a

$$R_a = R_1 + R_p = 1\,966.7 \, \Omega + 37 \, \Omega = 2,003.7 \, \Omega$$

Por lo tanto, el valor verdadero en la marca de media escala del medidor es 2 003.7  $\Omega$ , aunque el medidor esté marcado en la escala con 2 000  $\Omega$ . El porcentaje de error es entonces

$$\% \text{ error} = \frac{2\,000 - 2\,003.7}{2\,003.7} \times 100\% = -0.185\%$$

El signo negativo indica que la lectura del medidor está debajo de la verdadera.

### *Tipos de Instrumentos de medición*

En general los parámetros que caracterizan un fenómeno pueden clasificarse en Analógicos y Digitales, se dice que un parámetro es analógico cuando puede tomar todos los valores posibles en forma continua, por ejemplo: el voltaje de una batería, la intensidad de luz, la velocidad de un vehículo, la inclinación de un plano, etc.

Por otra parte se dice que un parámetro es digital cuando solo puede tomar valores discretos, por ejemplo: el número de partículas emitidas por un material radioactivo en un segundo, el número de moléculas, en un volumen dado de cierto material, el número de revoluciones de un motor en un minuto, etc.

### **Instrumentos Analógicos e Instrumentos Digitales**

#### **Instrumentos Analógicos.**

El término: Analógico Se refiere a las magnitudes o valores que varían con el tiempo en forma continua como la distancia y la temperatura, la velocidad, que podrían variar muy lento o muy rápido como un sistema de audio.



FIGURA 4-24 Multímetro de propósito general: Simpson modelo 300. (Cortesía de Simpson Electric Company.)

#### **Voltímetro análogo**

En la vida cotidiana el tiempo se representa en forma analógica por relojes (de agujas), y en forma discreta (digital) por displays digitales. En la tecnología analógica es muy difícil almacenar, manipular, comparar, calcular y recuperar información con exactitud cuando esta ha sido guardada, en cambio en la tecnología digital (computadoras, por ejemplo), se pueden hacer tareas muy rápidamente, muy exactas, muy precisas y sin detenerse. La electrónica moderna usa electrónica digital para realizar muchas funciones que antes desempeñaba la electrónica analógica.

#### **Ventajas**

Bajo Costo.

En algunos casos no requieren de energía de alimentación.

No requieren gran sofisticación.

Presentan con facilidad las variaciones cualitativas de los parámetros para visualizar rápidamente si el valor aumenta o disminuye.

Es sencillo adaptarlos a diferentes tipos de escalas no lineales.

### **Desventajas**

Tienen poca resolución, típicamente no proporcionan más de 3 cifras.

El error de paralaje limita la exactitud a  $\pm 0.5\%$  a plena escala en el mejor de los casos.

Las lecturas se presentan a errores graves cuando el instrumento tiene varias escalas.

La rapidez de lectura es baja, típicamente 1 lectura/ segundo.

No pueden emplearse como parte de un sistema de procesamiento de datos de tipo digital.

### **Instrumentos Digitales.**

El término: Digital Se refiere a cantidades discretas como la cantidad de personas en una sala, cantidad de libros en una biblioteca, cantidad de autos en una zona de estacionamiento, cantidad de productos en un supermercado, etc.



### **Multímetro digital**

Los Sistemas digitales tienen una alta importancia en la tecnología moderna, especialmente en la computación y sistemas de control automático. La tecnología digital se puede ver en diferentes ámbitos: Analógico y Digital. ¿Cuál es la diferencia? mecánico: llaves electromecánicas; el relé/relay hidráulico neumático electrónico. Los dos últimos dominan la tecnología.

### Ventajas

Tienen alta resolución alcanzando en algunos casos más de 9 cifras en lecturas de frecuencia y una exactitud de  $\pm 0.002\%$  en mediciones de voltajes.

No están sujetos al error de paralaje.

Pueden eliminar la posibilidad de errores por confusión de escalas.

Tienen una rapidez de lectura que puede superar las 1000 lecturas por segundo.

Puede entregar información digital para procesamiento inmediato en computadora.

### Desventajas

El costo es elevado.

Son complejos en su construcción.

Las escalas no lineales son difíciles de introducir.

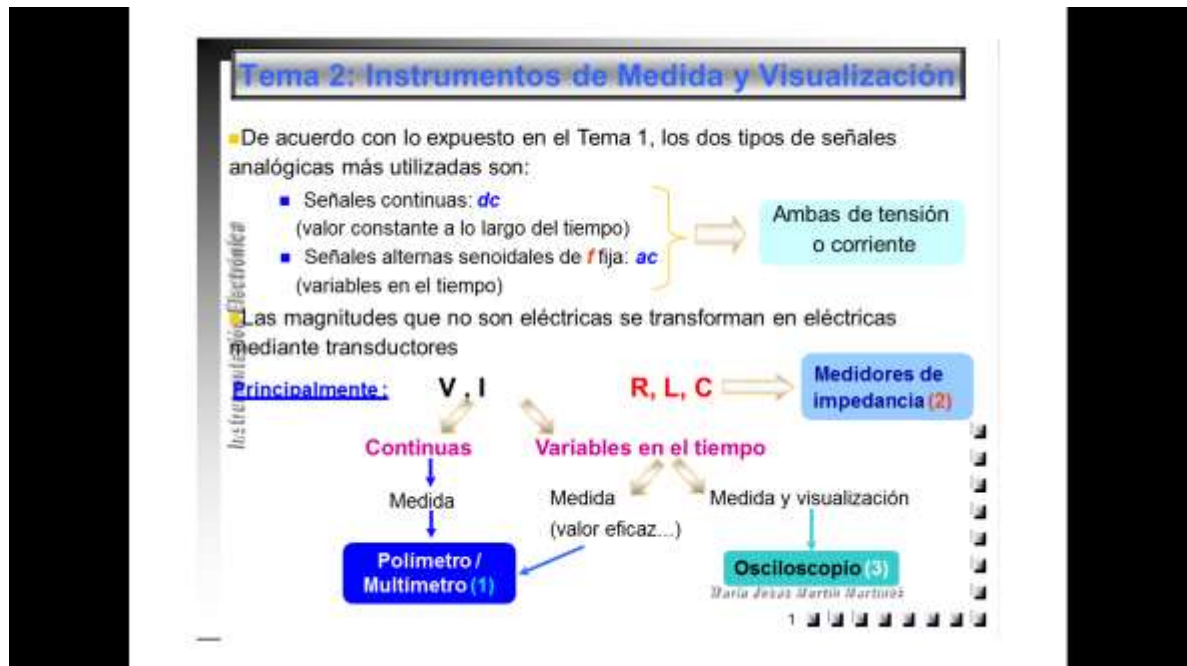
En todos los casos requieren de fuente de alimentación.

De las ventajas y desventajas anteriores puede observarse que para cada aplicación hay que evaluar en función de las necesidades específicas, cual tipo de instrumentos es el más adecuado, con esto se enfatiza que no siempre el instrumento digital es el más adecuado siendo en algunos casos contraproducente el uso del mismo.

Los instrumentos digitales tienden a dar la impresión de ser muy exactos por su indicación concreta y sin ambigüedades, pero no hay que olvidar que si su calibración es deficiente, su exactitud puede ser tanta o más mala que la de un instrumento analógico.

### Presentación de apoyo al tema 2:

#### Instrumentos de medida.





### Tema 2: Multímetros

- **Multímetros:** Miden principalmente **tensiones, corrientes y resistencias**
- Existen dos tipos de multímetros:
  - **Instrumentos analógicos** → **GALVANOMETRO:**

Diagrama de un galvanómetro con sus componentes principales etiquetados.

Fotografía de un galvanómetro físico.

Basado en el **medidor de bobina móvil**

- Una bobina situada en un campo magnético constante (imán permanente).
- Cuando la corriente pasa a través de la bobina, la hace girar un cierto ángulo que es proporcional a la corriente → **Mecanismo D'Arsonval**
- Están en desuso

Darío Jesús Martín Martínez

### Tema 2: Multímetros

- **Comparación Multímetros Digitales /Analógicos**
- **Los errores**
  - **Analógico** → los errores son como mínimo del orden del 0.5 % de la lectura más un 0.5 % del valor del fondo de escala.
  - **Digital** → los errores habituales son 0.1 % de la lectura más un 0.1 % del fondo de escala
    - La **exactitud** no viene marcada por la longitud de la escala sino porque consta de un conversor A/D de tensión. → El error se minimiza al aumentar la precisión del conversor A/D (el número de bits)
- **La resolución y exactitud** → mucho mayor en digitales a igual coste
  - En Analógicos: 1 en 120
  - Digitales: varía desde 1 en 10<sup>3</sup> (3 dígitos) hasta 1 en 10<sup>9</sup> en (9 dígitos)
- **La velocidad:**
  - Analógicos: menor de 1 medida por segundo
  - Digitales: varía desde 2 hasta > 50.000 medidas/segundo en (S.A.D.)

Darío Jesús Martín Martínez

### Tema 2: Multímetros Digitales (DMM)

- Elemento básico del DMM → **Conversor Analógico-Digital (A/D)**
- Sistema electrónico que **convierte una tensión continua** presente en su entrada en la **combinación binaria de n bits a su salida**

Diagrama de un conversor analógico-digital.

La salida está formada por tantos transistores como bits del conversor que pueden encontrarse en estado de saturación o de corte

Diagrama de un convertidor de tensión a código binario.

D<sub>n</sub>, D<sub>n-1</sub>, ..., D<sub>0</sub>, bits desde el menos significativo al más significativo

- Los **métodos de conversión** de una variable analógica a una digital dependen:
  - De la complejidad del sistema físico
  - Del tiempo de conversión

Darío Jesús Martín Martínez

## Tema 2: Diagrama de bloques de un DMM

### Diagrama de Bloques del DMM

- En su forma más básica el Multímetro sólo consta de 2 bloques



Convertidor A/D → obtiene el valor digital (valor numérico) del resultado de la medida  
(Estudio en el TEMA 3)

### Diagrama de Bloques simplificado de un Multímetro Digital

- De este modo únicamente sirve para medir voltajes, por tanto sería solo un Digital -Volti-Meter (DVM) → Voltímetro
- Sin embargo, este sería un Voltímetro, si queremos que funcione como Multímetro debe también medir:
  - Corrientes (Amperímetro)
  - Resistencias (Ohmetro)
  - Magnitudes tanto *ac* como *dc*
  - Distintos rangos de estas magnitudes (Ejemplo: corrientes desde  $\mu\text{A}$  hasta  $\text{A}$ )

Dr. José María Martínez

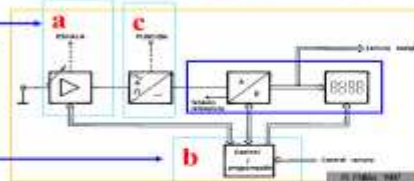
6

## Tema 2: Diagrama de bloques de un DMM

### Diagrama de Bloques completo de un Multímetro Digital

#### a → Atenuador /Amplificador

- Adecua el margen de entrada de la señal al convertor A/D
- Ofrece la impedancia de entrada adecuada
- Se puede controlar mediante un mando externo (escala)



#### b → Circuito de Control:

- Se informa de la escala de medida
  - Modificada de manera *manual* a través del panel frontal
  - Se informa directamente del A/D → en el caso de un sistema *automático*
- Determina la secuencia de operación, controla la presentación local y remota de los resultados, etc. Existen CIs que realizan todas estas funciones.

#### c → Conversión a tensión continua de:

- Resistencia → tensión *dc*
- Corriente → tensión *dc*
- Tensión *ac* → tensión *dc*

Dr. José María Martínez

7

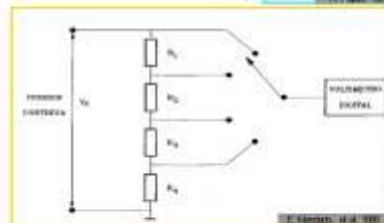
## Tema 2: Bloque Atenuador/Amplificador

- Bloque a → El A/D tiene un margen de tensiones de entrada limitada:

- Amplificar (señales pequeñas) → Amplificador (Tema 3)
- Atenuar (señales grandes) → Atenuador

### Atenuador

- Establece la **Impedancia de Entrada** ( $Z_{in}$ ) del instrumento total (del DMM) (debe ser elevada)
- Sirve para:
  - Dar **protección al DMM** contra **sobretensiones** o **sobrecorrientes**
  - Fija el **valor máximo de la señal** aplicada al A/D (el que corresponde a la salida del A/D del tipo 11.....1)
- Los atenuadores son **atenuadores resistivos** (no se utilizan capacidades)



Esquema típico de un atenuador de entrada → Voltímetro de continua digital, con varias escalas.

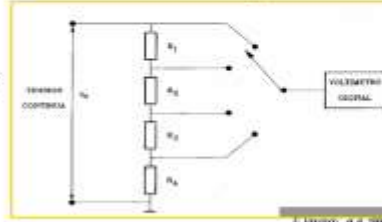
8



## Tema 2: Ejemplo de Atenuador de entrada

### Ejemplo:

- Calcular  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ , si queremos tener 4 escalas de 0.2 V, 2 V, 20 V y 200 V
- Sabiendo que el rango del conversor A/D es de 0 - 0.2 V.
- Recordar que la Impedancia de entrada del voltímetro digital debe ser muy elevada (idealmente infinita para que no entre corriente)
- Nótese que la corriente que circula a través de las resistencias es siempre la misma independientemente de la posición del interruptor.



Instrumentación Electrónica

© 2010 Pearson

María Jesús Martín Martínez

10

## Tema 2: Conversión Corriente-Tensión

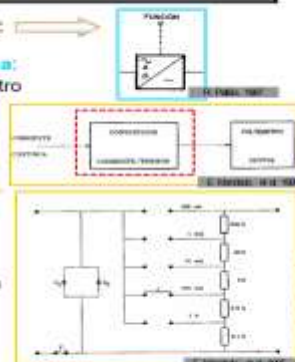
### Bloque c → Conversión a tensión continua:

- c.1 Conversión de corriente a tensión continua:
  - Se conectaría el conversor I-V antes del voltímetro digital

### Amperímetro de corriente continua

### Convertidores Corriente / Tensión

- Basados en resistencias paralelas con la corriente a medir
- El valor de  $R$  se selecciona mediante el cortocircuito de los contactos adecuados de manera que la máxima tensión de salida sea:
  - La misma para distintas escalas de  $I$  ( $V_m=0.2V$ ).
  - Coincida con la que admite el A/D
  - Incluye la atenuación por las diferentes resistencias
  - Los diodos D1 y D2 y el fusible F protegen el convertidor contra sobretensiones.



Ejemplo de conversor I-V →  
María Jesús Martín Martínez

Instrumentación Electrónica

© 2010 Pearson

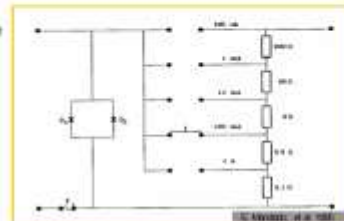
María Jesús Martín Martínez

10

## Tema 2: Ejemplo de Conversión I-V

### Ejemplo:

- Supongamos que el rango del conversor A/D (la máxima tensión de salida) es de 0 - 0.2 V.
- Calcular las escalas de corrientes en cada rama teniendo en cuenta los valores de las resistencias
  - La manera de convertir  $I \rightarrow V$  es dejar pasar corriente por la rama que circula la corriente de interés
  - De ese modo se selecciona el valor de  $R$  (cortocircuito de los contactos adecuados)
- La diferencia con el atenuador es la Impedancia de entrada  $Z_{in}$ 
  - $Z_{in}$  es baja pues las resistencias son bajas
  - $Z_{in}$  varía de unas escalas de corrientes a otras



Instrumentación Electrónica

© 2010 Pearson

María Jesús Martín Martínez

11

### Tema 2: Conversión Resistencia – Voltaje

**Bloque c → Conversión a tensión continua:**

**c.2 Conversión de resistencia a tensión continua:**

**Ohmetro**

Para convertir un valor de  $R$  a un voltaje  $dc$  para que lo acepte el A/D, nos basamos en la Ley de Ohm. Tenemos dos posibilidades:

**(a) Hacemos pasar una corriente:**

- Constante y conocida con precisión:  $I$
- Variable según el margen de las resistencias a medir
- Se mide la caída de potencial ( $V_m$ ), en la resistencia incógnita ( $R_x$ ), en paralelo mediante un voltímetro.

$$R_x = \frac{V_m}{I}$$

**Ejemplo 1 de conversor R-V → Ohmetro**

Nota: La impedancia de entrada del voltímetro es infinita.

Maria Jesús Martín Martínez

### Tema 2: Conversión Resistencia – Voltaje

**Bloque c → Conversión a tensión continua:**

**c.2 Conversión de resistencia a tensión continua:**

**Ohmetro**

**Otra Posibilidad**

**b) Se aplica una tensión**

- Constante y conocida de continua:  $V$
- Se mide la corriente que circula  $I_m$  mediante un amperímetro (en serie)

$$R_x = \frac{V}{I_m}$$

**Ejemplo 2 de conversor R-V → Ohmetro**

Nota: La impedancia de entrada del amperímetro es muy baja (prácticamente nula).

Maria Jesús Martín Martínez

### Tema 2: Conversión Resistencia – Voltaje

**Ohmetro** ¿Cuál es la diferencia principal para elegir un el montaje tipo **a** o el **b**?

- Depende de los valores de  $R_x$ 
  - El caso **a**) es adecuado para medir valores de  $R_x$  pequeñas  $\Rightarrow$  no influye la  $R_m$  del voltímetro (alta pero no nula) en el valor de  $R_x$
  - El caso **b**) es adecuado para medir valores de  $R_x$  muy elevadas  $\Rightarrow$  se minimiza el impacto de la  $R_m$  del amperímetro

**PROBLEMA:** Para medir valores de  $R_x$  tan pequeñas (montaje **a**), que las resistencias de los cables ( $R_c$ ) son del orden del valor de  $R_x$

En este caso, el voltaje que mediríamos sería

$$V_m = I(R_x + 2 R_c)$$

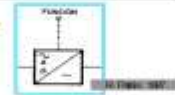
- $R_c$  aquí sería del orden de  $R_x$ , por lo que influye en el valor medido.

**Ejemplo 3 de conversor R-V → Ohmetro con  $R_x$  muy pequeña**

Maria Jesús Martín Martínez

## Tema 2: Conversión Alterna – Continua

### Bloque c → Conversión a tensión continua:



#### Conversión de alterna a continua:

- Hasta ahora hemos visto como obtener un Amperímetro o un Voltímetro de **dc**.
- Pero para poder realizar la medida de voltajes o corrientes de alterna, necesitamos los conversores de **alterna → continua**
- El diagrama de bloques es el que se muestra en la figura



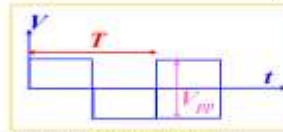
## Tema 2: Conversión Alterna – Continua

### Características de magnitudes de **dc** y **ac**

#### Caso de tensión, corriente de **dc** →

Está caracterizada por dos parámetros:

- Su magnitud
- Su polaridad → Ejemplo:  $\pm 5\text{ V}$



#### Caso de tensión, corriente de **ac** → Debemos saber en primer lugar si son periódicas. De ser así, los parámetros que las caracterizan son:

- Frecuencia, Forma (triangular, cuadrada, etc.)
- Valor pico a pico: de voltaje,  $V_{pp}$ , valor de pico de corriente,  $I_{pp}$
- Valor medio:  $V_m$  (media temporal)

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T |V(t)| dt$$

- Valor eficaz,  $V_{ef}$ , o Valor **r m s**,  $V_{rms}$  (valor cuadrático medio: *root mean square*)

$$V_{ef} = V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt}$$

Valor de una tensión **dc** que produzca la misma cantidad de energía que la **ac** (en el mismo tiempo)

## Tema 2: Conversión Alterna – Continua

### Clasificación de los voltímetros de alterna en dos tipos diferentes:

#### 1. Multímetros digitales de valor medio → Son los voltímetros de uso cotidiano. Funcionan de la siguiente manera

- Para cada tipo de señal a medir (triangular, cuadrada o sinusoidal) proporcionan un voltaje **dc** (valor medio de la magnitud alterna) → miden  $V_m$ . Este valor medio se consigue mediante la rectificación de la onda

- Posteriormente, sabiendo que para cada señal que hay una relación entre el  $V_m$  y el  $V_{rms}$ , el valor medio se convierte en valor eficaz

Se realiza multiplicando el  $V_m$  por el FACTOR DE FORMA (relaciona el  $V_m$  y el  $V_{rms}$ , y depende del tipo de señal)

- El diagrama de bloques de este Multímetro digital de valor medio:





## Tema 2: Conversión Alternar – Continua

### 2. Multímetros digitales de valor eficaz = TRUE RMS

- Son más caros
- Sirven para cualquier señal **ac**
- Estos pueden ser de dos tipos:



- El primer tipo se basa en la definición → Valor eficaz es el valor de una tensión **dc** que produzca la misma cantidad de energía que la **ac** en el mismo tiempo.
  - Emplea dos termoelementos → una termopila y una resistencia de calefacción, *aislados eléctricamente, pero con buen acoplamiento térmico*
  - La tensión **ac** de entrada calienta uno de los dos, mientras que el otro es calentado hasta alcanzar la misma temperatura, a base de aplicarle una tensión **dc** generada internamente y que se mide con precisión.
  - Su respuesta es lenta (del orden de 1 s o más)

- Otro tipo se basa en circuitos analógicos que realizan los cálculos indicados por la definición matemática mediante un circuito integrado híbrido.

$$V_{ef} = V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt}$$

- Calculan el cuadrado de la señal, obtienen la integral y realizan la raíz cuadrada).
- Han sido posible gracias a los avances de la microelectrónica
- Son más baratos y con mayor margen dinámico que los térmicos, pero con mucho error si la entrada no es simétrica.

María Jesús Martín Martínez

16

## Tema 2: Conversión Alternar – Continua

### Características o especificaciones de los Multímetros

- El margen de frecuencias → Admiten tanto tensiones **ac** como **dc**:
  - Tensiones **ac**: habitual es de 30 Hz hasta 100 kHz
  - Tiene un conmutador a la entrada (ac o dc)
- La exactitud, sensibilidad, etc. (Ver ejemplo)

### Normalmente llevan incorporados funciones automáticas

- Indicación de polaridad → Signo – si el voltaje es negativo
  - Posicionan automáticamente el punto decimal
  - Indicación de sobrecarga
- Los Multímetros que presentan capacidad de cálculo:
  - Funciones de escalado
  - Promedios de las medidas, multiplicación de relaciones
  - Cálculo estadísticos: desviaciones estándar y en % de las desviaciones típicas
  - Almacenamiento de valores máximo y mínimo

María Jesús Martín Martínez

19

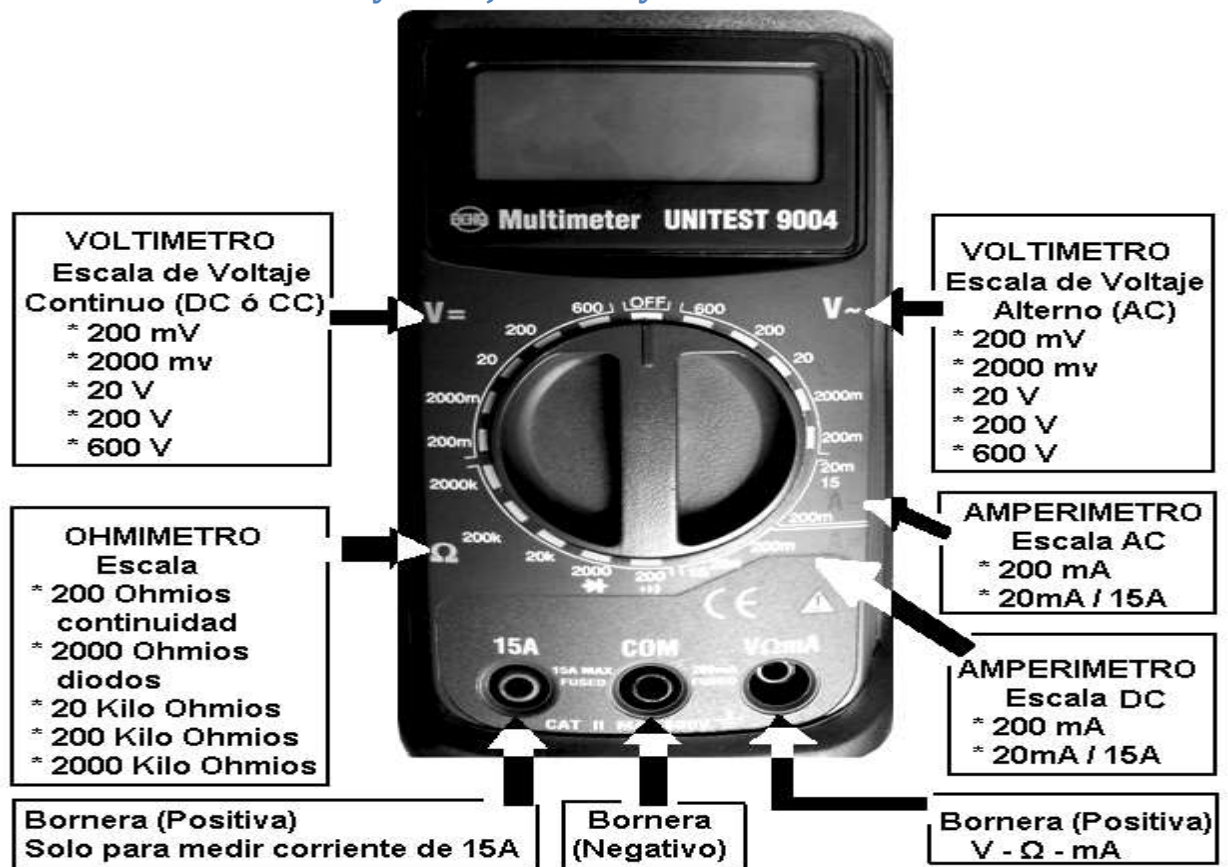
### Bibliografía y figuras cortesía de

- R. Pallás, Instrumentación Electrónica, Marcombo, 1987.
- E. Mandado, P. Mariño y A. Lago, Instrumentación Electrónica, Marcombo, 1995.
- W. Bolton, Mediciones y pruebas eléctricas y electrónicas, Marcombo, 1995.
- PROMAX, [www.promax.es](http://www.promax.es).
- Manual del osciloscopio digital Tektronix TDS 220. [www.tektronix.com](http://www.tektronix.com).

María Jesús Martín Martínez

31

## 2.2 Operar y manejar los medidores analógicos y digitales en la medición de corriente y voltaje de c.a. y c.d.

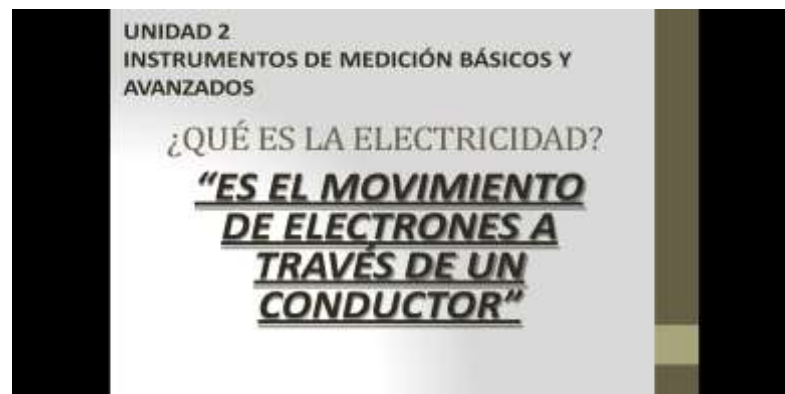


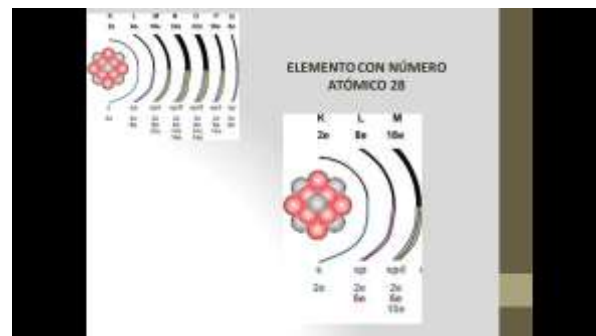
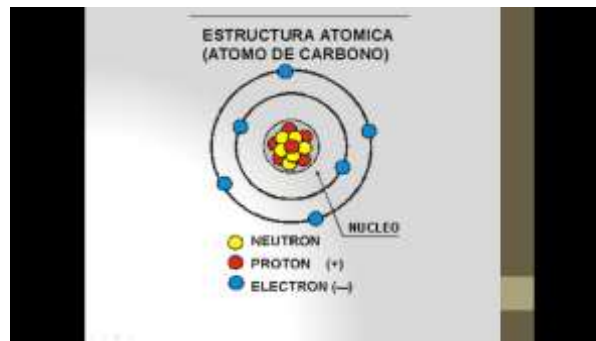
**Video para el aprendizaje sobre el uso del multímetro:**

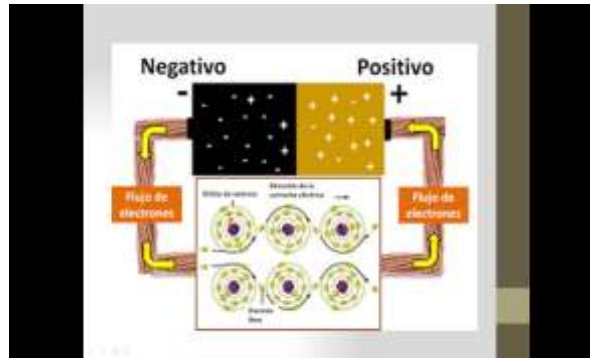
Como usar un tester o multímetro, para principiantes.mp4

<https://www.youtube.com/watch?v=OD-VMmPyCo4>

*Diapositivas para soporte del tema 2:*







CORRIENTE ELÉCTRICA  
**"ES EL MOVIMIENTO DE ELECTRONES A TRAVÉS DE UN CONDUCTOR"**

CORRIENTE ELÉCTRICA

The diagram shows a yellow wire with a negative terminal (-) on the left and a positive terminal (+) on the right. Inside the wire, several red circles with minus signs represent electrons moving from left to right. A grey arrow below the wire points from right to left, labeled 'CORRIENTE ELÉCTRICA'. A small text box at the bottom right says 'SE PRODUCE DE MOVIMIENTO A POSITIVO'.

VOLTAJE

Es la fuerza con la que los electrones son "empujados" por una fuente de voltaje.

This block contains three images: a yellow and blue battery on the left, a black multimeter in the center, and a white wall outlet on the right.

RESISTENCIA ELÉCTRICA

Es toda oposición que encuentra la corriente a su paso por un circuito eléctrico cerrado.

The image shows a single resistor with a cylindrical body and two leads extending from it.





UNIDADES DE MEDIDA

MAGNITUD	ABREVIACIÓN	SÍMBOLO	UNIDAD DE MEDIDA
CORRIENTE	I	→	Ampere
VOLTAJE	V		Volt
RESISTENCIA	R		Ohm (Ω)

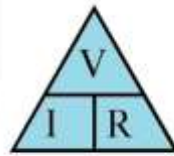


Se denomina circuito eléctrico al conjunto de elementos eléctricos conectados entre sí que permiten generar, transportar y utilizar la energía eléctrica con la finalidad de transformarla en otro tipo de energía como, por ejemplo, energía calorífica (calentador), energía lumínica (foco) o energía mecánica (motor).

Conceptos básicos de las leyes de Ohm, Kirchhoff, Lenz, Faraday y Watts.

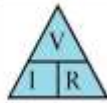
A) Ley de Ohm.

"LA CORRIENTE ELÉCTRICA ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL VOLTAJE E INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA RESISTENCIA"



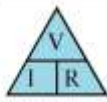
$$V = I \times R$$
$$I = V / R$$
$$R = V / I$$

Triángulo Ley de Ohm



$$V = I \times R$$
$$I = V / R$$
$$R = V / I$$

Triángulo Ley de Ohm



$$V = I \times R$$
$$I = V / R$$
$$R = V / I$$

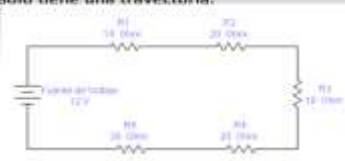
Triángulo Ley de Ohm



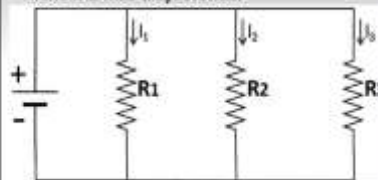


**B) Leyes de Kirchhoff.**  
Hay una ley para circuitos eléctricos en serie y otra para circuitos eléctricos en paralelo.  
Por lo tanto, iniciaremos con la explicación de este tipo de circuitos.

**Circuito serie.**  
Es aquel en donde la corriente eléctrica solo tiene una trayectoria.



**Circuito paralelo.**  
Es aquel en donde la corriente eléctrica tiene 2 o más trayectorias.



Circuito serie.



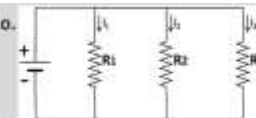
$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

Circuito serie.



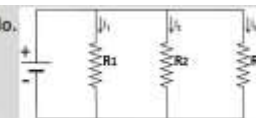
$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

Circuito Paralelo.



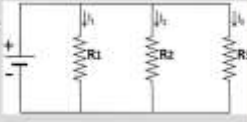
$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

Circuito Paralelo.



$$V_T = V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_n$$

Circuito Paralelo.



$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

Calcular los parámetros del siguiente circuito:



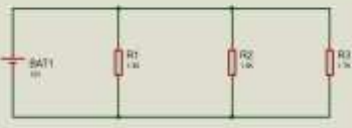
Vt=	R1=	R2=	R3=
Rt=	IR1=	IR2=	IR3=
It=	VR1=	VR2=	VR3=

Calcular los parámetros del siguiente circuito:



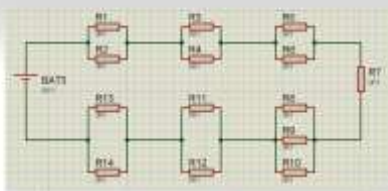
Vt=	R2=	R2=	R3=	R4=
R1=	IR1=	IR2=	IR3=	IR4=
It=	VR2=	VR2=	VR2=	VR4=

Calcular los parámetros del siguiente circuito:

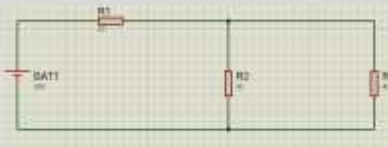


Vt=	R1=	R2=	R3=
Rt=	IR1=	IR2=	IR3=
It=	VR1=	VR2=	VR3=

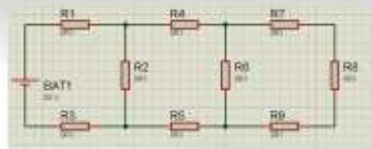
Calcular los parámetros del siguiente circuito:



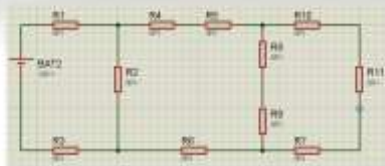
Calcular los parámetros del siguiente circuito:



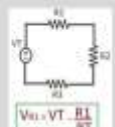
Calcular los parámetros del siguiente circuito:



Calcular los parámetros del siguiente circuito:

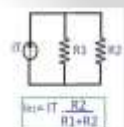


Divisor de Voltaje



$$V_o = V_t \frac{R_L}{R_L + R_1}$$

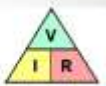
Divisor de Corriente



$$I_2 = I_t \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$


Ley de Watt

La ley de Watt dice que la potencia eléctrica es directamente proporcional al voltaje de un dispositivo y a la intensidad que circula por él.



Ley de Ohm

$V = I \times R$   
 $I = V / R$   
 $R = V / I$



Ley de Watt

$W = V \times I$   
 $V = W / I$   
 $I = W / V$

La potencia eléctrica

Es la cantidad de energía utilizada para realizar un trabajo.

Si a un determinado cuerpo le aplicamos una fuente de alimentación (es decir le aplicamos un Voltaje) se va a producir dentro del cuerpo una cierta corriente eléctrica.

Dicha corriente será mayor o menor dependiendo de la resistencia del cuerpo.

Este consumo de corriente hace que la fuente este entregando una cierta potencia eléctrica; o dicho de otra forma el cuerpo esta consumiendo determinada cantidad de potencia.

Esta potencia se mide en Watt.

Por ejemplo una lámpara eléctrica de 40 Watt consume 40 watt de potencia eléctrica. Para calcular la potencia se debe multiplicar el voltaje aplicado por la corriente que atraviesa al cuerpo.



$$P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2R$$

FÓRMULAS DE POTENCIA, VOLTAJE, CORRIENTE Y RESISTENCIA



El valor de las magnitudes de un circuito eléctrico, como la corriente, el voltaje o la resistencia, puede determinarse utilizando aparatos de medida (Multímetro).

EL MULTÍMETRO

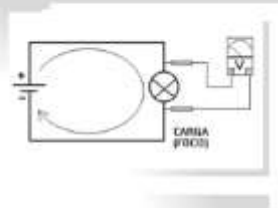


¿Cómo se mide el valor de la Resistencia?



10/10

¿Cómo se mide el valor del voltaje?



10/10

¿Cómo se mide el valor de la Corriente?



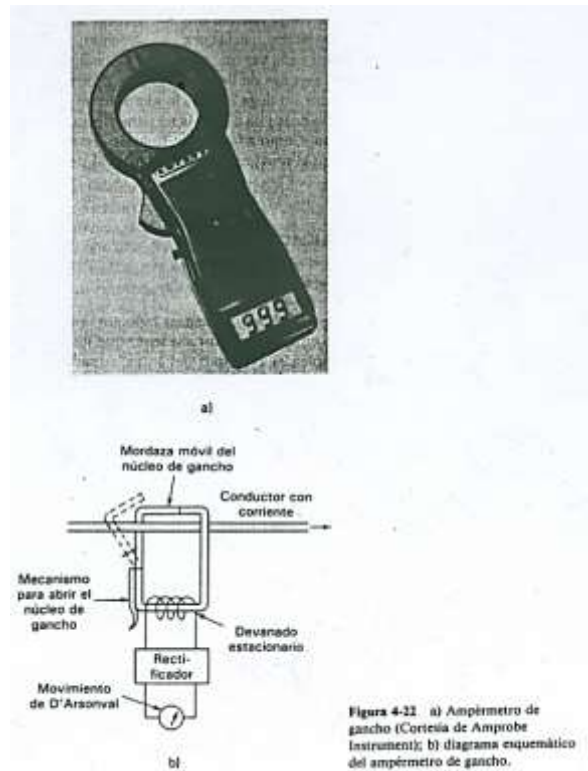
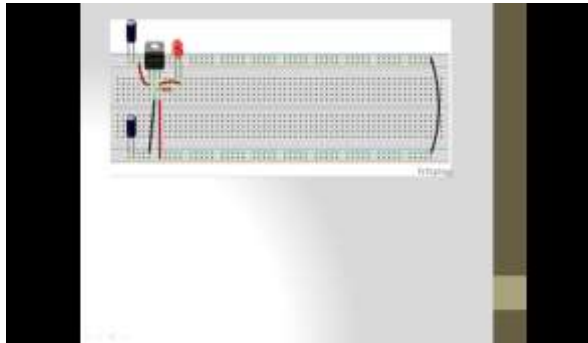
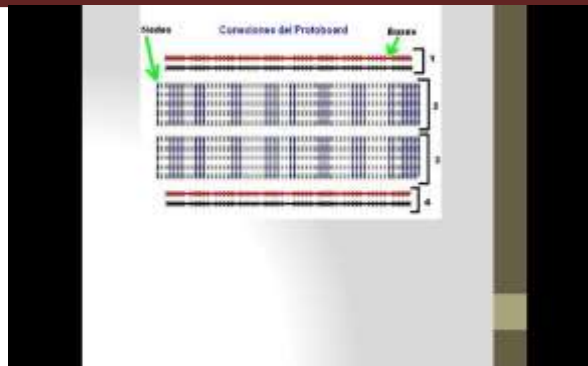
10/10

### El protoboard

El "protoboard", es un tablero con orificios conectados eléctricamente entre sí, habitualmente siguiendo patrones de columnas, en el cual se pueden insertar componentes electrónicos y cables para el armado.



10/10



### 2.3 Funcionamiento, operación y aplicación de otros instrumentos.

### 2.3.1 Generador de señales.(fig. 41)



Figura 41 Generador de funciones.

El Generador de Funciones es un equipo electrónico que produce ondas sinusoidales, cuadradas y triangulares, además de crear señales TTL (para circuitos lógicos). Sus aplicaciones incluyen pruebas y calibración de sistemas de audio, ultrasónicos y servo.

En la siguiente figura se muestra un modelo (figura 42):

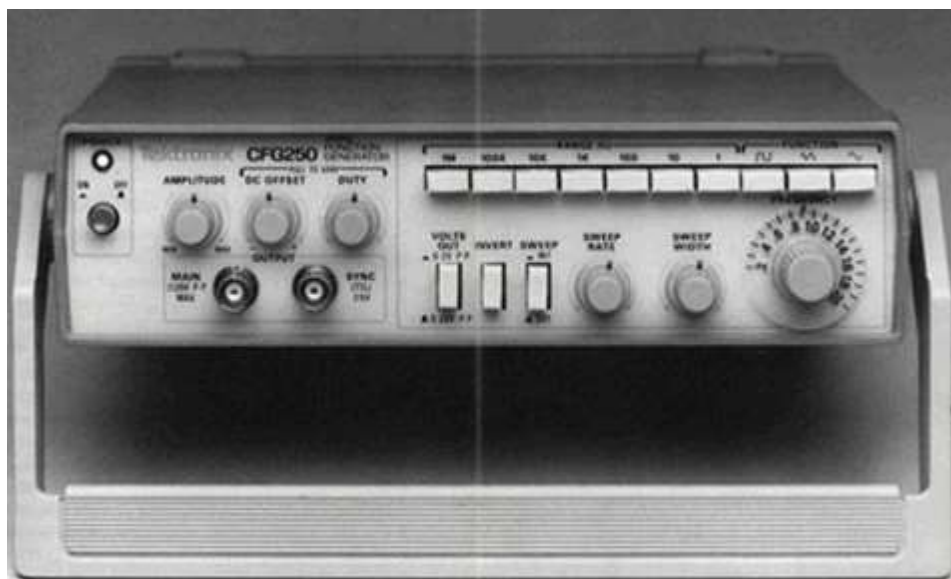


Figura 42 Generador de funciones básico.

Posee controles para ajustar la amplitud, la frecuencia, agregar una tensión DC a la onda y elegir el tipo de onda deseada. Es un instrumento muy útil porque permite ingresar, al circuito bajo inspección, señales de prueba para verificar su funcionamiento.

Si lo que se requiere es hacer una medición o una prueba de algún dispositivo electrónico, es lógico pensar en un osciloscopio para poder adquirir las señales y verificar el comportamiento del dispositivo. Sin embargo, ¿qué sucede cuando el dispositivo que queremos probar o caracterizar no es capaz de producir señales por sí mismo? Un ejemplo de estos equipos puede ser un amplificador, un multiplexor, un receptor de comunicaciones, un convertidor analógico-digital (ADC), un convertidor digital-analógico (DAC), etc. Esta es la razón por la que el **generador de funciones** es un equipo que nunca puede faltar en un banco de prueba.

Las aplicaciones de un **generador de funciones** podemos dividirla, de manera general, en tres:

- **Crear señales:** Señales creadas desde cero para simular, estimular y probar distintos circuitos y dispositivos.
- **Replicar señales:** Ya sea una anomalía, un error o una señal adquirida por un osciloscopio, podemos recrearla utilizando un generador de funciones en nuestro laboratorio para variar sus parámetros y analizarla en un ambiente controlado.
- **Generar señales (figura 43):** Señales ideales o funciones ya conocidas para utilizarlas como referencia o como señal de entrada para pruebas,



Figura 43

Este equipo sólo permite generar funciones básicas, como:

- Funciones senoidales
- Funciones cuadradas
- Funciones dientes de sierra o triangulares
- Pulsos

Se pueden modificar libremente los parámetros fundamentales de

estas señales siempre y cuando se respeten los límites del generador. Entre los parámetros que se pueden modificar se encuentran:

- Amplitud
- Frecuencia
- Fase
- Tiempo de subida y bajada (para pulsos)
- Ancho de pulso

Se cree que estos generadores son los más económicos, sin embargo, existen muchos generadores de funciones arbitrarios que son más accesibles que los generadores de funciones convencionales. Una desventaja es que son los más limitados en cuanto a sus aplicaciones, ya que rara vez permitirán agregar modulaciones, realizar barridos de frecuencia, replicar señales o crearlas.

#### **Generadores de funciones Arbitrarios (figura 44)**



**Figura 44** Generador de funciones Arbitrarias.

Los generadores de funciones arbitrarios, también llamados AFG (Arbitrary Function Generator), apoyan en muchas aplicaciones, ya que pueden generar cualquier forma de onda.

La diferencia entre un generador de funciones arbitrario y un generador de funciones convencional radica en la capacidad de generar cualquier forma de onda, ya que el generador convencional sólo puede generar las funciones básicas anteriormente mencionadas.

Los AFG cuentan con funciones arbitrarias precargadas (figura 45), como se muestra a continuación:

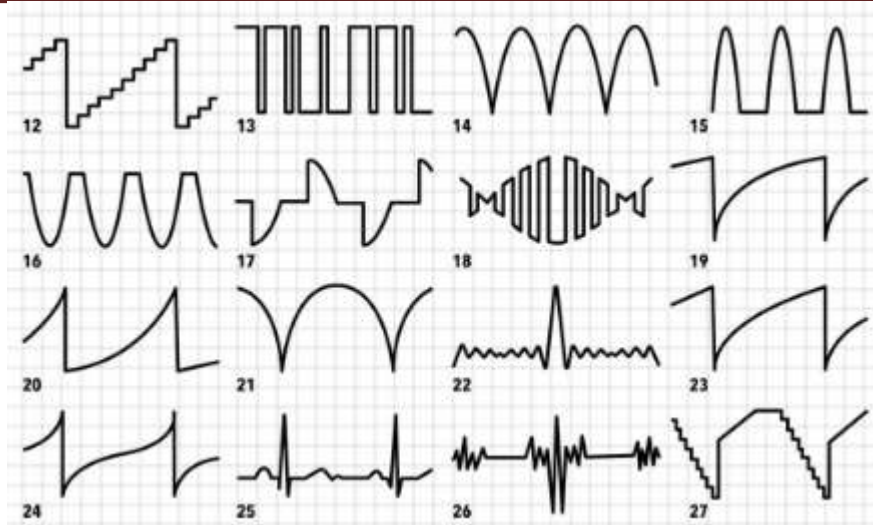


Figura 45 Funciones Arbitrarias.

Algunas funciones que se pueden ver en dicha imagen son:

- Tipo escalera (10 niveles de voltaje en pasos)
- Señal cardíaca
- Función  $\sin(x)/x$
- Tangente
- Logarítmica
- Rectificación de onda senoidal
- Señal senoidal recortada (representando un dimmer de lámpara)

Además los AFG pueden crear formas de onda complejas, agregar modulaciones analógicas como AM, FM, PM. Modulaciones digitales como ASK, FSK, PSK, QAM, IQ, etc. También permiten generar barridos complejos lineales o logarítmicos.

Lo mejor: **¡Crear nuestras propias formas de onda!** Imaginemos que queremos realizar una prueba donde queramos simular un sensor. El sensor que queremos simular empieza en 0V, sube a 5V y se mantiene ahí por unos milisegundos, después baja de manera lenta a 1V pero después sube de manera brusca a 7V, baja a 3V rápidamente y sube a 10V. Nuestra forma de onda se vería similar a la de la siguiente imagen (figura 46).



Figura 46 forma arbitraria.

Y esta forma de onda puede ser generada por un AFG.

En la biomédica, puede generar una forma de onda cardiaca con arritmias, simular un paro cardiaco y muchas cosas más para probar el sistema de monitoreo cardiaco que estamos desarrollando.

Otra función muy útil es la reconstrucción de formas de onda ya existentes. Si encontramos anomalías en nuestro diseño y queremos reproducirlo en un ambiente controlado, podemos utilizar un AFG. Al capturar una señal en un osciloscopio, podemos guardarla y exportarla a una tabla de valores en formato CSV. La mayoría de los AFG soportan la carga de formas de onda a través de estos formatos. Otra manera de reconstruir formas de onda es utilizando el software propio de cada AFG, con el podemos dibujar nuestras propias formas de onda o reconstruir alguna ya existente, tal es el caso de la voz o el sonido de un grillo.

Si quieres saber más de esta función de los AFG te recomendamos ver nuestro video en youtube <https://youtu.be/Bg-Nvy3kcto>

#### ¿Cómo seleccionar un [generador de funciones arbitrario](#) o [AFG](#)?

A diferencia de los generadores de funciones convencionales, los [AFG](#) cuentan con características especiales que hay que tomar en cuenta.

- **Ancho de banda:** Característica fundamental de cualquier generador de funciones. Se define como la frecuencia máxima de la función seno de un generador. Es decir, si tenemos un generador con ancho de banda de 50MHz, significa que podemos generar funciones senoidales de 50MHz. Si requerimos generar una función cuadrada, triangular o arbitraria, es recomendable verificar la hoja de datos del generador y corroborar que el equipo sea capaz de generar la forma de onda a la frecuencia deseada.
- **Número de canales:** Es la cantidad de canales independientes que posee cada generador.
- **Resolución vertical:** Nos permite saber la resolución en bits con la que la onda será convertida de digital a analógica. Mientras más bits, mejor calidad de señal tendremos.
- **Longitud de registro\*:** La longitud de registro será la memoria que podremos utilizar para crear o reconstruir nuestra señal arbitraria. Mientras mayor sea la longitud de registro podemos crear señales con mayor cantidad de ciclos y detalles sin tener distorsiones.
- **Velocidad de muestreo\*:** La velocidad de muestreo nos ayuda a saber la calidad con la que será reconstruida la forma de onda arbitraria almacenada en la longitud de registro.

**USO:**



- Se emplea normalmente en el diseño, prueba y reparación de dispositivos electrónicos
- Pruebas y calibración de sistemas de audio, ultrasónicos y servo.
- Trabaja en un rango de frecuencias de entre 0.2 Hz a 2 MHz. También cuenta con una función de barrido la cual puede ser controlada tanto internamente como externamente con un nivel de DC.

Las diferentes salidas del generador se pueden obtener al mismo tiempo. Por ejemplo, proporcionando una sola cuadrada para medir la linealidad de un sistema de audio, la salida en diente de sierra simultánea se puede usar para alimentar el amplificador de deflexión horizontal de un osciloscopio, con lo que se obtiene la exhibición visual de los resultados de las mediciones.

CONTROLES, CONECTORES E INDICADORES (PARTE FRONTAL) (figura 47):

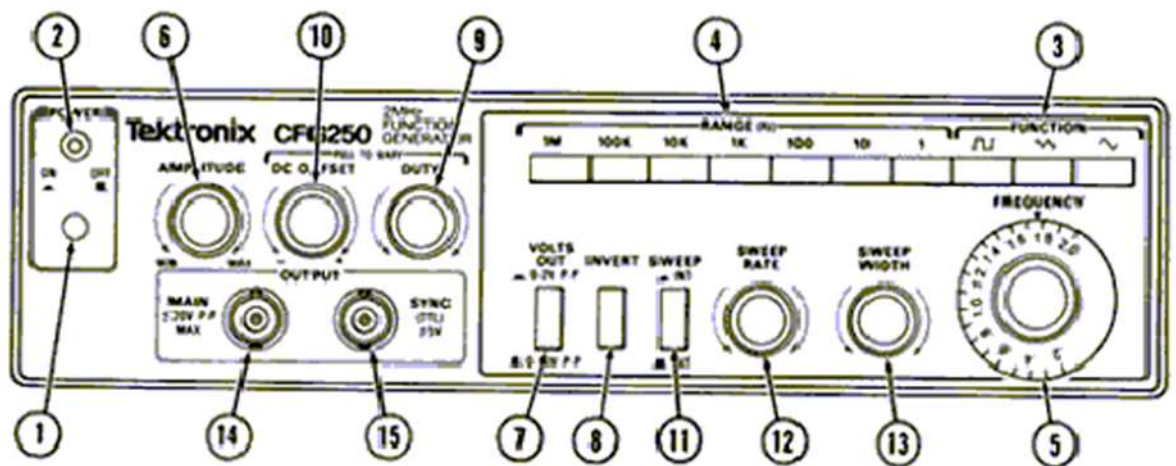


Figura 47 Vista frontal de generador de funciones.

- 1. Botón de Encendido (Power button).
- 2. Luz de Encendido (Power on light).
- 3. Botones de Función (Function buttons). Los botones de onda senoidal, cuadrada o triangular determinan el tipo de señal provisto.
- 4. Botones de Rango (Range buttons) (Hz). Esta variable de control determina la magnitud de frecuencia de la señal.
- 5. Control de Frecuencia (Frequency Control). Esta variable de control determina la frecuencia de la señal.
- 6. Control de Amplitud (Amplitude Control). Esta variable de control, dependiendo de la posición del botón de voltaje de salida (VOLTS OUT), determina el nivel de la señal del conector en la salida principal.
- 7. Botón de rango de Voltaje de salida (Volts Out range button). Presiona este botón para controlar el rango de amplitud de 0 a 2 Vp-p en circuito abierto o de 0 a 1 Vp-p con una carga de 50W . Vuelve a presionar el botón para controlar el rango de amplitud de 0 a 20 Vp-p

en circuito abierto o de 0 a 10 Vp-p con una carga de 50W.

- 8. Botón de inversión (Invert button). Si se presiona este botón, la señal del conector en la salida principal se invierte. Cuando el control de ciclo de máquina esta en uso, el botón de inversión determina que mitad de la forma de onda a la salida va a ser afectada.
- 9. Control de ciclo de máquina (Duty control). Jala este control para activar esta opción.
- 10. Offset en DC (DC Offset). Jala este control para activar esta opción. Este control establece el nivel de DC y su polaridad de la señal del conector en la salida principal. Cuando el control esta presionado, la señal se centra a 0 volts en DC.
- 11. Botón de Barrido (SWEEP button). Presiona el botón para hacer un barrido interno. Este botón activa los controles de rango de barrido y de ancho del barrido. Si se vuelve a presionar este botón, el generador de funciones puede aceptar señales desde el conector de barrido externo (EXTERNAL SWEEP) localizado en la parte trasera del generador de funciones.
- 12. Rango de Barrido (Sweep Rate). Este control ajusta el rango del generador del barrido interno y el rango de repetición de la compuerta de paso.
- 13. Ancho del Barrido (Sweep Width). Este control ajusta la amplitud del barrido.
- 14. Conector de la salida principal (MAIN output connector). Se utiliza un conector BNC para obtener señales de onda senoidal, cuadrada o triangular.
- 15. Conector de la salida TTL (SYNC (TTL) output connector). Se utiliza un conector BNC para obtener señales de tipo TTL.

#### GENERADOR DE ONDA SENOIDAL:

- En virtud de la importancia de la señal senoidal el generador de dicha onda representa la principal categoría de generadores de señales. Este instrumento cubre el rango de frecuencias a partir de algunos hertz hasta varios gigahertz.



Figura 48 Diagrama a bloques.

Diagrama de bloques de un generador de onda senoidal básico (figura 48).

El generador de onda senoidal simple consiste de dos bloques básicos, un oscilador y un atenuador. El comportamiento del generador depende de la funcionalidad de estas dos partes principales. Tanto la exactitud de la frecuencia y la estabilidad, la exactitud de amplitud depende del diseño del atenuador.

### Generador de Frecuencia de Barrido.

Este tipo de generador es muy parecido al generador de frecuencia estándar, con la diferencia de que la señal senoidal entregada, varía de frecuencia de manera automática, y no de manera manual como en el caso del generador estándar; esta frecuencia cambia automáticamente limitada por dos frecuencias límites, una inferior o mínima y una superior o máxima, los límites los define el usuario, dependiendo de las necesidades específicas

La figura muestra el diagrama de bloques de un generador de barrido básico. La semejanza con el generador de frecuencia única es evidente, sin embargo, el oscilador del generador de barrido se puede sintonizar electrónicamente, y se incluye un generador de voltaje de barrido con el generador para proporcionar el barrido en frecuencia.

#### Diagrama de bloques de un ciclo de fase fija PLL.

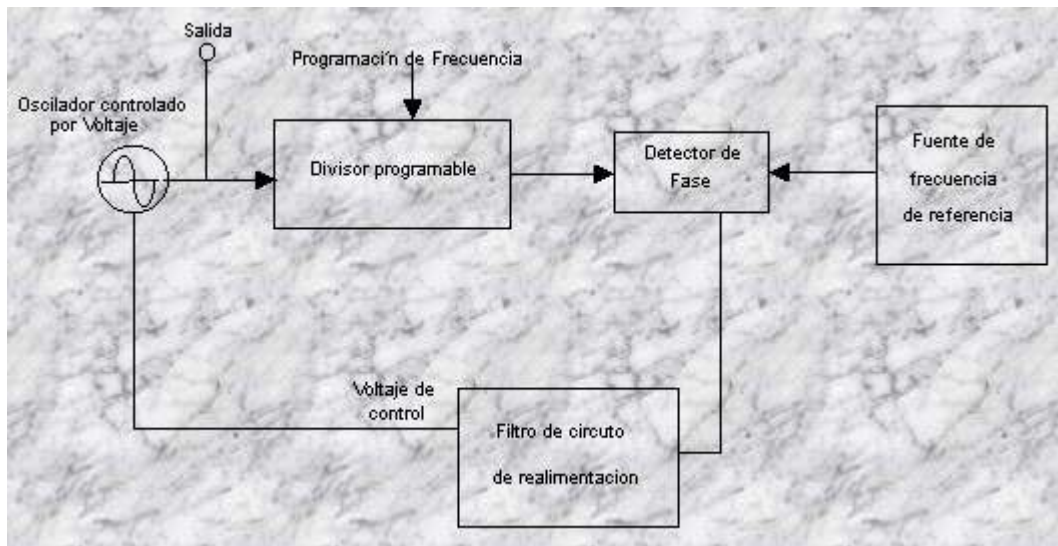


Figura 49 Diagrama a bloques de generador.

Ya que la relación entre el voltaje de barrido y la frecuencia del oscilador no es lineal, se proporciona un circuito de compensación entre el voltaje de la frecuencia de barrido y el voltaje de sintonía del oscilador. La cantidad requerida de no linealidad, y en consecuencia la cantidad de corrección depende del tipo de oscilador utilizado y del rango de frecuencias cubierto por el oscilador. Mientras más estrecho sea el rango de frecuencia de barrido, más lineal será la relación voltaje – frecuencia. Por lo general hay un límite de 2 a 1 de la frecuencia máxima - mínima de

cualquier oscilador de barrido.

### **Generadores de Pulso y de Onda Cuadrada.**

Los generadores de pulsos y onda cuadrada se utilizan a menudo con un osciloscopio como dispositivo de medición. Las formas de onda obtenidas en el osciloscopio en la salida o en puntos específicos del sistema bajo prueba proporcionan información tanto cualitativa como cuantitativa acerca del dispositivo o sistema a prueba.

La diferencia fundamental entre un generador de pulsos y uno de onda cuadrada está *ciclo de trabajo*. El ciclo de trabajo se define como la relación entre el valor promedio del pulso en un ciclo y el valor pico del pulso. Puesto que el valor promedio y el valor pico se relacionan en forma inversa a sus tiempos de duración, el ciclo de trabajo se define en términos de *ancho del pulso y el periodo o tiempo de repetición del pulso*.

Ciclo de trabajo = Ancho del pulso / Periodo

Los *generadores de onda cuadrada* producen un voltaje de salida con tiempos iguales de voltajes altos y bajos de manera que el ciclo de trabajo es igual 0.5 o al 50%. El ciclo de trabajo permanece en este valor aun cuando varíe la frecuencia de oscilación.

El ciclo de trabajo de un *generador de pulsos* puede variar; los pulsos de poca duración dan un ciclo de trabajo bajo y, por lo general, el generador de pulsos puede suministrar más potencia durante el periodo de voltaje alto que un generador de onda cuadrada. Los pulsos de corta duración reducen la disipación de potencia en el componente a prueba. A propósito, las mediciones de la ganancia del transistor se pueden efectuar con pulsos de corta duración que eviten el calentamiento de las uniones, o de esta forma se minimizan el efecto de la temperatura de la unión sobre la ganancia.

Los generadores de onda cuadrada se utilizan siempre que se desea investigar las características de baja frecuencia de un sistema; por ejemplo, para pruebas de sistemas de audio. Las ondas cuadradas son preferibles a los pulsos de corta duración si la respuesta transitoria de un sistema requiere algún tiempo para asentamiento.

#### **BIBLIOGRAFÍA:**

- [https://es.wikipedia.org/wiki/Generador\\_de\\_señales](https://es.wikipedia.org/wiki/Generador_de_señales)
- <http://www.forosdeelectronica.com/tutoriales/generador.htm>

#### **Diapositivas ilustrativas sobre el tema:**

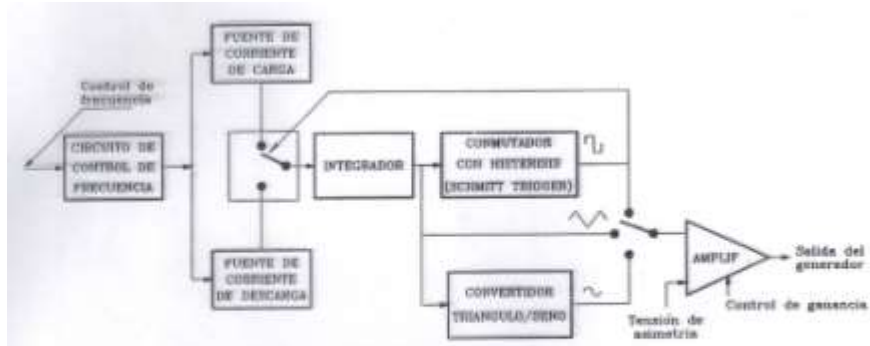
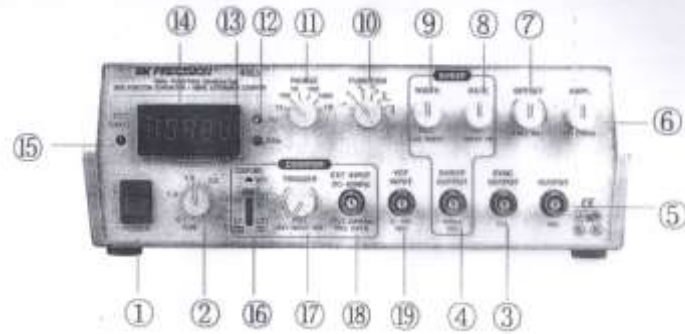


Figura 7.15 Generador de funciones.

$$v = -\frac{1}{C} \int i(t) dt$$

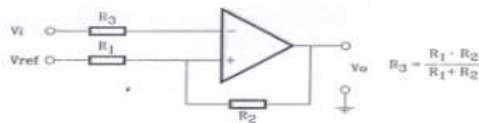


Figura 7.16 Circuito disparador de Schmitt.

Para  $V_i < V_+$   $\Rightarrow +V_0$

$$\frac{V_+ - V_{ref}}{R_1} = \frac{V_0 - V_+}{R_2}$$

$$V_+ = V_{ref} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_1$$

Para  $V_i > V_+$   $\Rightarrow -V_0$

$$\frac{V_+ - V_{ref}}{R_1} = -\frac{V_0 - V_+}{R_2}$$

$$V_+ = V_{ref} \frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_2$$

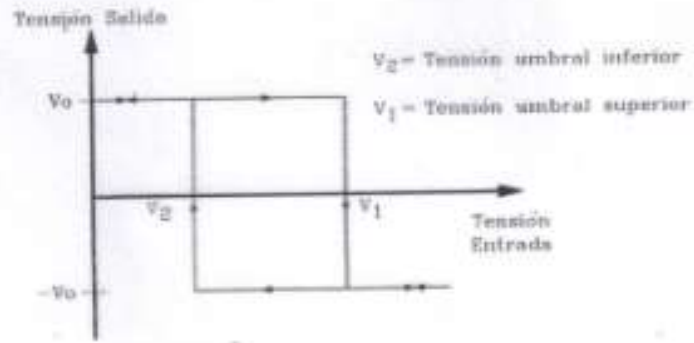


Figura 7.17 Características de transferencia del circuito comparador con histéresis.

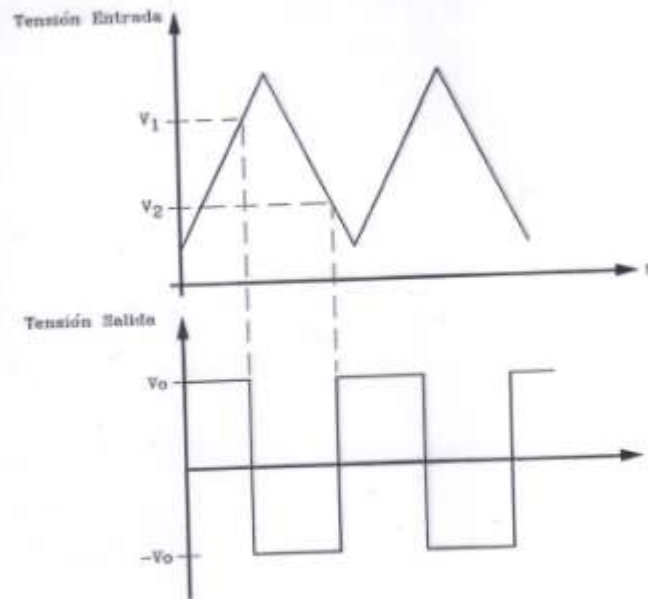


Figura 7.18 Respuesta de un circuito disparador de Schmitt a una señal triangular.

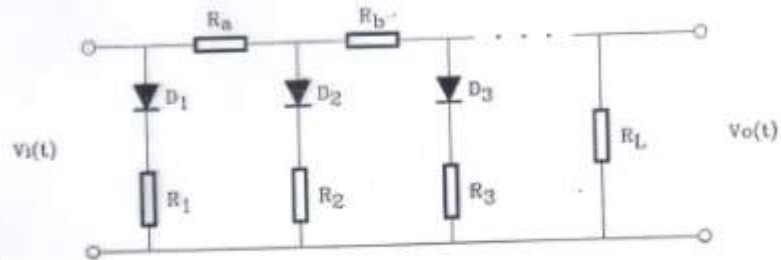
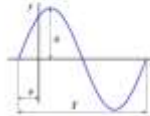


Figura 7.19 Circuito convertidor de onda triangular en onda senoidal.



### SEÑAL SENOIDAL



En matemáticas se denomina seno o senoide a la curva que representa gráficamente la función seno y también a dicha función en sí.

La forma representada es:

donde

-A es la amplitud de oscilación.

-omega es la **velocidad angular**.

-T es el **período de oscilación**.

-f es la frecuencia de oscilación.

-phi = phi\_0 es la fase de oscilación.

-phi\_0 es la fase inicial.

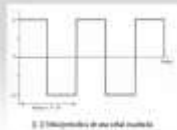
### SEÑAL TRIANGULAR



La onda triangular es un tipo de señal periódica que presenta unas velocidades de subida y bajada (Slew Rate) constantes. Lo más habitual es que sea simétrica, es decir que, los tiempos de subida y bajada son iguales.

La onda triangular tiene un contenido en armónicos muy bajo, lo que concuerda con su parecido a una onda senoidal. Tanto matemática como físicamente se puede obtener integrando en el tiempo una onda cuadrada: los niveles constantes alto y bajo de dicha onda se convierten en las pendientes (constantes) de los flancos de subida y bajada de la onda triangular.

### SEÑAL CUADRADA



Se conoce por onda cuadrada a la onda de corriente alterna (CA) que alterna su valor entre dos valores extremos sin pasar por los valores intermedios (al contrario de lo que sucede con la onda senoidal y la onda triangular, etc.).

Se usa principalmente para la generación de pulsos eléctricos que son usados como señales (1 y 0) que permiten ser manipuladas fácilmente, un circuito electrónico que genera ondas cuadradas se conoce como generador de pulsos, este tipo de circuitos es la base de la electrónica digital.

## 2.3.2 Osciloscopio analógico y digital.

Un osciloscopio es un instrumento de medición electrónico usado para la representación gráfica de señales eléctricas que pueden variar en el tiempo. Es muy usado en electrónica analógica y digital, frecuentemente junto a un analizador de espectros.

Presenta los valores de las señales eléctricas en forma de coordenadas en una pantalla, en la que normalmente el eje X (horizontal) representa tiempos y el eje

Y (vertical) representa tensiones. La imagen así obtenida se denomina oscilograma.

Los osciloscopios, clasificados según su funcionamiento interno, pueden ser tanto analógicos como digitales, siendo en teoría el resultado mostrado idéntico en cualquiera de



los dos casos.

En la siguiente figura se muestra algunos modelos:



Figura 50 Osciloscopio Analógico.



Figura 51 Osciloscopio Digital.

Son muy comunes los osciloscopios de 2 canales, con los que se puede ver 2

señales a la vez, y otros pueden tener 4 canales.

El Osciloscopio puede ayudarnos a:

- Determinar directamente el periodo y el voltaje de una señal.
- Determinar indirectamente la frecuencia de una señal.
- Determinar que parte de la señal es DC y cual AC.
- Localizar averías en un circuito.
- Medir la fase entre dos señales.
- Determinar que parte de la señal es ruido y como varia este en el tiempo.

### El osciloscopio

El osciloscopio es un instrumento que permite visualizar fenómenos transitorios así como formas de ondas en circuitos eléctricos y electrónicos. Por ejemplo en el caso de los televisores, las formas de las ondas encontradas de los distintos puntos de los circuitos están bien definidas, y mediante su análisis podemos diagnosticar con facilidad cuáles son los problemas del funcionamiento.

Los osciloscopios son de los instrumentos más versátiles que existen y los utilizan desde técnicos de reparación de televisores hasta médicos. Un osciloscopio puede medir un gran número de fenómenos, provisto del transductor adecuado (un elemento que convierte una magnitud física en señal eléctrica) será capaz de darnos el valor de una presión, ritmo cardíaco, potencia de sonido, nivel de vibraciones en un coche, etc.

Es importante que el osciloscopio utilizado permita la visualización de señales de por lo menos 4,5 ciclos por segundo, lo que permite la verificación de etapas de video, barrido vertical y horizontal y hasta de fuentes de alimentación.

Si bien el más común es el osciloscopio de trazo simple, es mucho mejor uno de trazo doble en el que más de un fenómeno o forma de onda pueden visualizarse simultáneamente.

El funcionamiento del osciloscopio está basado en la posibilidad de desviar un haz de electrones por medio de la creación de campos eléctricos y magnéticos.

En la mayoría de osciloscopios, la desviación electrónica, llamada deflexión, se consigue mediante campos eléctricos. Ello constituye la deflexión electrostática.

Una minoría de aparatos de osciloscopía especializados en la visualización de curvas de respuesta, emplean el sistema de deflexión electromagnética, igual al usado en televisión.

Este último tipo de osciloscopio carece de control del tiempo de exploración.

El proceso de deflexión del haz electrónico se lleva a cabo en el vacío creado en el interior del llamado tubo de rayos catódicos (TRC). En la pantalla de éste es donde se visualiza la información aplicada.

El tubo de rayos catódicos de deflexión electroestática está dotado con dos pares de placas de deflexión horizontal y vertical respectivamente, que debidamente controladas hacen posible la representación sobre la pantalla de los fenómenos que se desean analizar.

Esta representación se puede considerar inscrita sobre unas coordenadas cartesianas en las que los ejes horizontal y vertical representan tiempo y tensión respectivamente. La escala de cada uno de los ejes cartesianos grabados en la pantalla, puede ser cambiada de modo independiente uno de otro, a fin de dotar a la señal de la representación más adecuada para su medida y análisis.

Las dimensiones de la pantalla del TRC están actualmente normalizadas en la mayoría de instrumentos, a 10 cm en el eje horizontal (X) por 8 cm en el eje vertical (Y). Sobre la pantalla se encuentran grabadas divisiones de 1 cm cuadrado, bien directamente sobre el TRC o sobre una pieza superpuesta a él, en la que se encuentra impresa una retícula de 80 cm cuadrados. En esta retícula es donde se realiza la representación de la señal aplicada al osciloscopio.

El osciloscopio, como aparato muy empleado que es, se encuentra representado en el mercado de instrumentos bajo muchas formas distintas, no sólo en cuanto al aspecto puramente físico sino en cuanto a sus características internas y por tanto a sus prestaciones y posibilidades de aplicación de las mismas.

No obstante, a pesar de las posibles diferencias existentes, todos los osciloscopios presentan unos principios de funcionamiento comunes. Los de uso más generalizado son los que podríamos definir como "osciloscopios básicos".

Con el osciloscopio se pueden visualizar formas de ondas de señales alternantes, midiendo su voltaje pico a pico, medio y rms.

En el anterior dibujo se ve el esquema de bloques de un osciloscopio de tipo básico.

Según se observa en este dibujo, los circuitos fundamentales son los siguientes:

- Atenuador de entrada vertical
- Amplificador de vertical
- Etapa de deflexión vertical
- Amplificador de la muestra de disparo (trigger)
- Selector del modo de disparo (interior o exterior)
- Amplificador del impulso de disparo
- Base de tiempos
- Amplificador del impulso de borrado
- Etapa de deflexión horizontal
- Tubo de rayos catódicos
- Circuito de alimentación.

Una corriente alterna es aquella que cambia constantemente de valor e invierte su dirección a intervalos regulares. En el caso de un alternador, esos cambios son resultado de la rotación de la armadura o inducido, ya que cada vuelta del

alambre del embobinado corta las líneas de fuerza del campo magnético en una dirección y luego en la dirección opuesta, ocasionando así que los electrones se muevan alternativamente en una dirección y luego en la dirección contraria.

De acuerdo con esto, una alternación es el cambio de intensidad que sufre una corriente alterna mientras se mueve en una dirección, creciendo su intensidad de cero a su valor máximo y volviendo nuevamente a cero. Dos alternaciones, una en una dirección y la otra en la dirección contraria o negativa, forman un ciclo. En un alternador de dos polos, cuando la armadura haya efectuado una revolución completa habrá recorrido 360 ° eléctricos y habrá ocurrido un ciclo. El número de ciclos que ocurren durante un segundo constituye la frecuencia de la corriente alterna, la cual se simboliza con la letra  $f$ . Otro parámetro importante de la corriente alterna es el periodo, que se simboliza con la letra  $T$ , el periodo y la frecuencia son recíprocos el uno del otro, cumpliéndose la siguiente ecuación:

$$f = \frac{1}{T}$$

La frecuencia se mide usualmente en ciclos por segundo o Hertzios (Hz). En la siguiente figura nos podemos hacer una idea más clara del periodo y la frecuencia de una onda:

#### Tipos de osciloscopios

Los equipos electrónicos se dividen en dos tipos: Analógicos y Digitales. Los primeros trabajan con variables continuas mientras que los segundos lo hacen con variables discretas. Los primeros trabajan directamente con la señal aplicada, está una vez amplificada desvía un haz de electrones en sentido vertical proporcionalmente a su valor. En contraste los osciloscopios digitales utilizan previamente un conversor analógico-digital (A/D) para almacenar digitalmente la señal de entrada, reconstruyendo posteriormente esta información en la pantalla.

Ambos tipos tienen sus ventajas e inconvenientes. Los analógicos son preferibles cuando es prioritario visualizar variaciones rápidas de la señal de entrada en tiempo real. Los osciloscopios digitales se utilizan cuando se desea visualizar y estudiar eventos no repetitivos (picos de tensión que se producen aleatoriamente).

#### Osciloscopios analógicos

Cuando se conecta la sonda a un circuito, la señal atraviesa esta última y se dirige a la sección vertical. Dependiendo de donde situemos el mando del amplificador vertical atenuaremos la señal ó la amplificaremos. En la salida de este bloque ya se dispone de la suficiente señal para atacar las placas de deflexión verticales y que son las encargadas de

desviar el haz de electrones, que surge del cátodo e impacta en la capa fluorescente del interior de la pantalla, en sentido vertical. Hacia arriba si la tensión es positiva con respecto al punto de referencia (GND) ó hacia abajo si es negativa.

La señal también atraviesa la sección de disparo para de esta forma iniciar el barrido horizontal (este es el encargado de mover el haz de electrones desde la parte izquierda de la pantalla a la parte derecha en un determinado tiempo). El trazado (recorrido de izquierda a derecha) se consigue aplicando la parte ascendente de un diente de sierra a las placas de deflexión horizontal, y puede ser regulable en tiempo actuando sobre el mando TIME-BASE. El trazado (recorrido de derecha a izquierda) se realiza de forma mucho más rápida con la parte descendente del mismo diente de sierra.

De esta forma la acción combinada del trazado horizontal y de la deflexión vertical traza la gráfica de la señal en la pantalla. La sección de disparo es necesaria para estabilizar las señales repetitivas (se asegura que el trazado comience en el mismo punto de la señal repetitiva).

Como conclusión para utilizar de forma correcta un osciloscopio analógico necesitamos realizar tres ajustes básicos:

La atenuación ó amplificación que necesita la señal. Utilizar el mando AMPL para ajustar la amplitud de la señal antes de que sea aplicada a las placas de deflexión vertical.

Conviene que la señal ocupe una parte importante de la pantalla sin llegar a sobrepasar los límites.

La base de tiempos. Utilizar el mando TIME-BASE para ajustar lo que representa en tiempo una división en horizontal de la pantalla. Para señales repetitivas es conveniente que en la pantalla se puedan observar aproximadamente un par de ciclos.

Disparo de la señal. Utilizar los mandos TRIGGER LEVEL (nivel de disparo) y TRIGGER SELECTOR (tipo de disparo) para estabilizar lo mejor posible señales repetitivas.

Por supuesto, también deben ajustarse los controles que afectan a la visualización: FOCUS (enfoque), INTENS (intensidad) nunca excesiva, Y-POS (posición vertical del haz) y X-POS (posición horizontal del haz).

### **Osciloscopios digitales**

Los osciloscopios digitales poseen además de las secciones explicadas anteriormente un sistema adicional de proceso de datos que permite almacenar y visualizar la señal.

Cuando se conecta la sonda de un osciloscopio digital a un circuito, la sección vertical ajusta la amplitud de la señal de la misma forma que lo hacia el osciloscopio analógico.

El conversor analógico-digital del sistema de adquisición de datos hace un muestreo la señal a intervalos de tiempo determinados y convierte la señal de voltaje continua en una serie de valores digitales llamados muestras. En la sección horizontal una señal de reloj determina cuando el conversor

A/D toma una muestra. La velocidad de este reloj se denomina velocidad de muestreo y se mide en muestras por segundo.

Los valores digitales muestreados se almacenan en una memoria como puntos de señal. El número de los puntos de señal utilizados para reconstruir la señal en pantalla se denomina registro. La sección de disparo determina el comienzo y el final de los puntos de señal en el registro. La sección de visualización recibe estos puntos del registro, una vez almacenados en la memoria, para presentar en pantalla la señal.

Dependiendo de las capacidades del osciloscopio se pueden tener procesos adicionales sobre los puntos muestreados, incluso se puede disponer de un predisparo, para observar procesos que tengan lugar antes del disparo.

Fundamentalmente, un osciloscopio digital se maneja de una forma similar a uno analógico, para poder tomar las medidas se necesita ajustar el mando AMPL, el mando TIME-BASE así como los mandos que intervienen en el disparo.

### Terminología

Existe un término general para describir un patrón que se repite en el tiempo: onda. Existen ondas de sonido, ondas oceánicas, ondas cerebrales y por supuesto, ondas de tensión. Un osciloscopio mide estas últimas. Un ciclo es la mínima parte de la onda que se repite en el tiempo. Una forma de onda es la representación gráfica de una onda.

Una forma de onda de tensión siempre se presentará con el tiempo en el eje horizontal (X) y la amplitud en el eje vertical (Y).

La forma de onda nos proporciona una valiosa información sobre la señal. En cualquier momento podemos visualizar la altura que alcanza y, por lo tanto, saber si el voltaje ha cambiado en el tiempo (si observamos, por ejemplo, una línea horizontal podremos concluir que en ese intervalo de tiempo la señal es constante). Con la pendiente de las líneas diagonales, tanto en flanco de subida como en flanco de bajada, podremos conocer la velocidad en el paso de un nivel a otro, pueden observarse también cambios repentinos de la señal (ángulos muy agudos) generalmente debidos a procesos transitorios.



Figura 52 Osciloscopio digital Tektronix

Ejemplo de un osciloscopio Digital Tektronix modelo TDS 1000

### **Tipos de ondas**

Se pueden clasificar las ondas en los cuatro tipos siguientes:

- Ondas senoidales
- Ondas cuadradas y rectangulares
- Ondas triangulares y en diente de sierra.
- Pulsos y flancos ó escalones.

### **Ondas senoidales**

Son las ondas fundamentales y eso por varias razones: Poseen unas propiedades matemáticas muy interesantes (por ejemplo con combinaciones de señales senoidales de diferente amplitud y frecuencia se puede reconstruir cualquier forma de onda), la señal que se obtiene de las tomas de corriente de cualquier casa tienen esta forma, las señales de test producidas por los circuitos osciladores de un generador de señal son también senoidales, la mayoría de las fuentes de potencia en AC (corriente alterna) producen señales senoidales.

La señal senoidal amortiguada es un caso especial de este tipo de ondas y se producen en fenómenos de oscilación, pero que no se mantienen en el tiempo.

### **Ondas cuadradas y rectangulares**

Las ondas cuadradas son básicamente ondas que pasan de un estado a otro de tensión, a intervalos regulares, en un tiempo muy reducido. Son utilizadas usualmente para probar amplificadores (esto es debido a que este tipo de señales contienen en si mismas todas las frecuencias). La televisión, la radio y los ordenadores utilizan mucho este tipo de señales, fundamentalmente como relojes y temporizadores.

Las ondas rectangulares se diferencian de las cuadradas en no tener iguales los intervalos en los que la tensión permanece a



nivel alto y bajo. Son particularmente importantes para analizar circuitos digitales.

### **Ondas triangulares y en diente de sierra**

Se producen en circuitos diseñados para controlar voltajes linealmente, como pueden ser, por ejemplo, el barrido horizontal de un osciloscopio analógico ó el barrido tanto horizontal como vertical de una televisión. Las transiciones entre el nivel mínimo y máximo de la señal cambian a un ritmo constante. Estas transiciones se denominan rampas.

La onda en diente de sierra es un caso especial de señal triangular con una rampa descendente de mucha más pendiente que la rampa ascendente.

### **Pulsos y flancos ó escalones**

Señales, como los flancos y los pulsos, que solo se presentan una sola vez, se denominan señales transitorias. Un flanco ó escalón indica un cambio repentino en el voltaje, por ejemplo cuando se conecta un interruptor de alimentación. El pulso indicaría, en este mismo ejemplo, que se ha conectado el interruptor y en un determinado tiempo se ha desconectado. Generalmente el pulso representa un bit de información atravesando un circuito de un ordenador digital ó también un pequeño defecto en un circuito (por ejemplo un falso contacto momentáneo). Es común encontrar señales de este tipo en ordenadores, equipos de rayos X y de comunicaciones.

### **Voltaje**

Voltaje es la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un circuito.

Normalmente uno de esos puntos suele ser masa (GND, 0v), pero no siempre, por ejemplo se puede medir el voltaje pico a pico de una señal (Vpp) como la diferencia entre el valor máximo y mínimo de esta. La palabra amplitud significa generalmente la diferencia entre el valor máximo de una señal y masa. En la serie de valores que experimenta una corriente alterna o una fuerza electromotriz senoidal, en el transcurso de un ciclo, el más alto posible es cuando el inductor corta el mayor número posible de líneas de fuerza. Este valor se denomina "Valor máximo" y es positivo a  $90^\circ$  y negativo a  $270^\circ$  eléctricos. Se llama valor instantáneo al valor de la corriente o del voltaje en un momento cualquiera. El valor máximo es un valor instantáneo, lo mismo que el valor de cero y cualquier otro comprendido entre estos dos.

Desde el punto de vista práctico, es de gran importancia el "valor efectivo" o rms, que es el valor que registran los instrumentos de medición para corriente alterna. El valor rms es el que produce el mismo efecto térmico (de calor) que el de una corriente directa.

Así, por ejemplo, si una corriente directa de 5 amperios calienta el agua de una vasija a una temperatura de  $90^{\circ}\text{C}$ , una corriente alterna que produzca la misma elevación de temperatura tendrá un valor efectivo o rms de 5 amperios.

El valor medio de una onda alterna senoidal pura es cero, dado que la semionda positiva es igual y de signo contrario a la semionda negativa. De ahí que cuando se habla de valor medio siempre se refiera al valor medio de una semionda. El valor medio de una senoide simétrica se define como la media algebraica de los valores instantáneos durante un semiperiodo. También podemos decir que el valor medio es una ordenada tal que el área del rectángulo a que da lugar es igual al área del semiperiodo. Se representa añadiendo el subíndice med a la letra mayúscula de la magnitud de la cual se trate, Emed, Imed, Pmed, etcétera

### **Relaciones entre los valores pico a pico, máximo y efectivo**

El valor máximo es la mitad del valor pico a pico, y el valor rms se obtiene dividiendo el valor pico a pico por  $\sqrt{2}$ , por ejemplo si obtenemos en una medición un valor de voltaje pico a pico de 18 voltios y deseamos obtener el valor máximo y el valor rms, procederemos como sigue:

Luego el voltaje máximo en nuestro ejemplo es de 9 voltios, el voltaje rms es de 6,364 voltios y el voltaje medio es de 5,730 voltios.

### **Fase**

La fase se puede explicar mucho mejor si consideramos la forma de onda senoidal. La onda senoidal se puede extraer de la circulación de un punto sobre un círculo de  $360^{\circ}$ . Un ciclo de la señal senoidal abarca los  $360^{\circ}$ .

Cuando se comparan dos señales senoidales de la misma frecuencia puede ocurrir que ambas no estén en fase, o sea, que no coincidan en el tiempo los pasos por puntos equivalentes de ambas señales. En este caso se dice que ambas señales están desfasadas, pudiéndose medir el desfase con una simple regla de tres:

Siendo  $t$  el tiempo de retraso entre una señal y otra.

Parámetros que influyen en la calidad de un osciloscopio

### **Ancho de Banda**

Especifica el rango de frecuencias en las que el osciloscopio puede medir con precisión. Por convenio el ancho de banda se calcula desde 0Hz (continua) hasta la frecuencia a la cual una señal de tipo senoidal se visualiza a un 70.7% del valor aplicado a la entrada (lo que corresponde a una atenuación de 3dB).

### **Tiempo de subida**

Es otro de los parámetros que nos dará, junto con el anterior, la máxima frecuencia de utilización del osciloscopio. Es un parámetro muy importante si se desea medir con fiabilidad pulsos y flancos (recordar que este tipo de señales poseen transiciones entre niveles de tensión muy rápidas). Un osciloscopio no puede visualizar pulsos con tiempos de subida más rápidos que el suyo propio.

### **Sensibilidad vertical**

Indica la facilidad del osciloscopio para amplificar señales débiles. Se suele proporcionar en mV por división vertical, normalmente es del orden de 5 mV/div (llegando hasta 2 mV/div).

### **Velocidad**

Para osciloscopios analógicos esta especificación indica la velocidad máxima del barrido horizontal, lo que nos permitirá observar sucesos más rápidos. Suele ser del orden de nanosegundos por división horizontal.

### **Exactitud en la ganancia**

Indica la precisión con la cual el sistema vertical del osciloscopio amplifica ó atenúa la señal. Se proporciona normalmente en porcentaje máximo de error.

### **Exactitud de la base de tiempos**

Indica la precisión en la base de tiempos del sistema horizontal del osciloscopio para visualizar el tiempo. También se suele dar en porcentaje de error máximo.

### **Resolución vertical**

Se mide en bits y es un parámetro que nos da la resolución del conversor A/D del osciloscopio digital. Nos indica con que precisión se convierten las señales de entrada en valores digitales almacenados en la memoria. Técnicas de cálculo pueden aumentar la resolución efectiva del osciloscopio.

#### **Funcionamiento del Osciloscopio**

Los siguientes son los pasos para el correcto manejo del osciloscopio:

Poner a tierra

Una buena conexión a tierra es muy importante para realizar medidas con un osciloscopio. Por seguridad es obligatorio colocar a tierra el osciloscopio. Si se produce un contacto entre un alto voltaje y la carcasa de un osciloscopio no puesto a tierra, cualquier parte de la carcasa, incluidos los mandos, puede producirle un peligroso shock.

Mientras que un osciloscopio bien colocado a tierra, la corriente, que en el anterior caso atravesaría al usuario, se desvía a la conexión de tierra.

Para conectar a tierra un osciloscopio se necesita unir el chasis del osciloscopio con el punto de referencia neutro de tensión (comúnmente llamado tierra). Esto se consigue empleando cables de alimentación con tres conductores (dos para la alimentación y uno para la toma de tierra).

El osciloscopio necesita, por otra parte, compartir la misma masa con todos los circuitos bajo prueba a los que se conecta. Algunos osciloscopios pueden funcionar a diferentes tensiones de red y es muy importante asegurarse que está ajustado a la misma de la que disponemos en las tomas de tensión. Ponerse a tierra uno mismo. Si se trabaja en circuitos integrados (ICs), especialmente del tipo CMOS, es necesario colocarse a tierra uno mismo. Esto es debido a que ciertas partes de estos circuitos integrados son susceptibles de estropearse con la tensión estática que almacena nuestro propio cuerpo. Para resolver este problema se puede emplear una correa conductora que se conectará debidamente a tierra, descargando la electricidad estática que posea su cuerpo.

#### Ajuste inicial de los controles

Después de conectar el osciloscopio a la toma de red y de alimentarlo pulsando en el interruptor de encendido:

Es necesario familiarizarse con el panel frontal del osciloscopio. Todos los osciloscopios disponen de tres secciones básicas que llamaremos: Vertical, Horizontal, y Disparo. Dependiendo del tipo de osciloscopio empleado en particular, podemos disponer de otras secciones.

Existen unos conectores BNC, donde se colocan las sondas de medida.

La mayoría de los osciloscopios actuales disponen de dos canales etiquetados normalmente como I y II (ó A y B). El disponer de dos canales nos permite comparar señales de forma muy cómoda.

Algunos osciloscopios avanzados poseen un interruptor etiquetado como AUTOSET ó PRESET que ajustan los controles en un solo paso para ajustar perfectamente la señal a la pantalla. Si el osciloscopio no posee esta característica, es importante ajustar los diferentes controles del aparato a su posición standard antes de proceder a medir.

Estos son los pasos más recomendables:

- Ajustar el osciloscopio para visualizar el canal I. (Al mismo tiempo se colocará como canal de disparo el I).
- Ajustar a una posición intermedia la escala voltios/división del canal I (por ejemplo 1v/cm).
- Colocar en posición calibrada el mando variable de voltios/división (potenciómetro central).
- Desactivar cualquier tipo de multiplicadores verticales.
- Colocar el conmutador de entrada para el canal I en acoplamiento DC.
- Colocar el modo de disparo en automático.
- Desactivar el disparo retardado al mínimo ó desactivado.

- Situar el control de intensidad al mínimo que permita apreciar el trazo en la pantalla, y el trazo de focus ajustado para una visualización lo más nítida posible (generalmente los mandos quedaran con la señalización cercana a la posición vertical).

### **Sondas de medida**

Con los pasos detallados anteriormente, ya estamos en condiciones de conectar la sonda de medida al conector de entrada del canal I. Es muy importante utilizar las sondas diseñadas para trabajar específicamente con el osciloscopio. Una sonda no es, ni mucho menos, un cable con una pinza, sino que es un conector específicamente diseñado para evitar ruidos que puedan perturbar la medida.

Además, las sondas se construyen para que tengan un efecto mínimo sobre el circuito de medida. Esta facultad de la sondas recibe el nombre de efecto de carga, para minimizarla se utiliza un atenuador pasivo, generalmente de x10.

Este tipo de sonda se proporciona generalmente con el osciloscopio y es una excelente sonda de utilización general. Para otros tipos de medidas se utilizan sondas especiales, como pueden ser las sondas de corriente ó las activas.

### **Sondas pasivas**

La mayoría de las sondas pasivas están marcadas con un factor de atenuación, normalmente 10X ó 100X. Por convenio los factores de atenuación aparecen con el signo X detrás del factor de división. En contraste los factores de amplificación aparecen con el signo X delante (X10 ó X100).

La sonda más utilizada posiblemente sea la 10X, reduciendo la amplitud de la señal en un factor de 10. Su utilización se extiende a partir de frecuencias superiores a 5 KHz y con niveles de señal superiores a 10 mV. La sonda 1X es similar a la anterior pero introduce más carga en el circuito de prueba, pero puede medir señales con menor nivel.

Por comodidad de uso se han introducido sondas especiales con un conmutador que permite una utilización 1X ó 10X. Cuando se utilicen este tipo de sondas hay que asegurarse de la posición de este conmutador antes de realizar una medida.

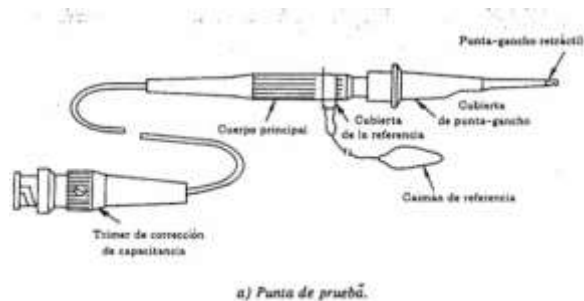
### **Compensación de la sonda**

Antes de utilizar una sonda atenuadora 10X es necesario realizar un ajuste en frecuencia para el osciloscopio en particular sobre el que se vaya a trabajar. Este ajuste se denomina compensación de la sonda y consta de los siguientes pasos.

- Conectar la sonda a la entrada del canal I.

- Conectar la punta de la sonda al punto de señal de compensación (La mayoría de los osciloscopios disponen de una toma para ajustar las sondas, en caso contrario será necesario utilizar un generador de onda cuadrada).

- Conectar la pinza de cocodrilo de la sonda a masa.
- Observar la señal cuadrada de referencia en la pantalla.
- Con el destornillador de ajuste, actuar sobre el condensador de ajuste hasta observar una señal cuadrada perfecta.



### Sondas activas

Proporcionan una amplificación antes de aplicar la señal a la entrada del osciloscopio. Pueden ser necesarias en circuitos con una potencia de salida muy baja. Este tipo de sondas necesitan para operar una fuente de alimentación.

### Sondas de corriente

Posibilitan la medida directa de las corrientes en un circuito. Las hay para medida de corriente alterna y continua. Poseen una pinza que abarca el cable a través del cual se desea medir la corriente. Al no situarse en serie con el circuito causan muy poca interferencia en él.

¿Qué podemos hacer con un osciloscopio?.

- Medir directamente la tensión (voltaje) de una señal.
- Medir directamente el periodo de una señal.
- Determinar indirectamente la frecuencia de una señal.
- Medir la diferencia de fase entre dos señales.
- Determinar que parte de la señal es DC y cual AC.
- Localizar averías en un circuito.
- Determinar que parte de la señal es ruido y como varia este en el tiempo.

### Medida de tensiones con el Osciloscopio

Las pantallas de los Osciloscopios vienen calibradas con un reticulado de modo que en función de las ganancias seleccionadas para los circuitos internos, podemos usarlas como referencias para medir tensiones. Así si la llave selectora de ganancia estuviera en la posición de 1V/div, lo que corresponde a 1 voltio por cada división, bastará centrar la señal para poder obtener diversas lecturas sobre su intensidad a partir de la forma de onda.

En la figura por ejemplo, tenemos un ejemplo de señal de 3 voltios de tensión máxima o 6 voltios de tensión pico a pico, si la llave selectora está en la posición 1V/div.

Este procedimiento no sólo se aplica a señales alternadas. También las tensiones continuas pueden medirse con el osciloscopio. Una vez centrado el trazo en la pantalla, aplicamos en la entrada vertical la tensión que queremos medir. El alejamiento del trazo en la vertical (para arriba o para abajo) va a depender de la tensión de entrada.

Si la señal analizada tiene forma de onda conocida —senoidal, triangular, rectangular— además de los valores de pico resulta fácil obtener otros valores como por ejemplo el valor medio, el valor rms. Del mismo modo si se trata de una señal de audio de forma conocida, también podemos calcular la potencia.

En cada una de las posiciones del atenuador vertical, se puede leer directamente la tensión necesaria para desviar el trazo un centímetro, en sentido vertical. Esto nos permite realizar mediciones de tensión sobre la pantalla, tanto de continua como de alterna. En ambos casos, se situará el conmutador de acoplamiento en la posición adecuada. La medida de una tensión alterna se realizará contando los centímetros o cuadros de la retícula que ocupa la señal sobre la pantalla, multiplicándolos por el factor de conversión seleccionado con el conmutador de vertical, teniendo en cuenta que cuanto mayor sea el espacio ocupado por la señal, sobre la pantalla, más fiable será la medida realizada.

Al realizar una medida de tensión continua, o bien su componente dentro de una forma de onda, lo que mediremos será el desplazamiento vertical que experimenta la deflexión a partir de una determinada referencia. Este desplazamiento nos indicará además, la polaridad de la tensión continua medida, según sea hacia la parte superior de la retícula (tensión positiva) o hacia la parte inferior (tensión negativa).

### **Medida de Tiempos con el Osciloscopio**

La distancia respecto al tiempo, entre dos puntos determinados, se puede calcular a partir de la distancia física en centímetros existente entre dichos puntos y multiplicándola por el factor indicado en el conmutador de la base de tiempos. En el ejemplo anterior si la llave selectora de intervalo de tiempo estuviera en .01 segundo, el tiempo del ciclo dibujado sería de .1 segundo, es decir, esta sería una onda de periodo igual a .1 segundo.

### **Medida de frecuencia**

La frecuencia propia de una señal determinada se puede medir sobre un osciloscopio con arreglo a dos métodos distintos:

1. A partir de la medida de un período de dicha señal según la aplicación del método anterior y empleando la fórmula:



2. Mediante la comparación entre una frecuencia de valor conocido y la que deseamos conocer.

En este caso el osciloscopio se hace trabajar en régimen X/Y (Deflexión exterior).

Aplicando cada una de las señales, a las entradas "X" e "Y" del osciloscopio y en el caso de que exista una relación armónica completa entre ambas, se introduce en la pantalla una de las llamadas "figuras de Lissajous", a la vista de la cual se puede averiguar el número de veces que una frecuencia contiene a la otra y por lo tanto deducir el valor de la frecuencia desconocida.

### Medida de fase

El sistema anterior de medida de frecuencia mediante el empleo de las "curvas de Lissajous", se puede utilizar igualmente para averiguar el desfase en grados existente entre dos señales distintas de la misma frecuencia. Hacemos trabajar el osciloscopio con deflexión horizontal exterior, aplicando a sus entradas horizontal y vertical (X/Y) las dos señales que se desean comparar.

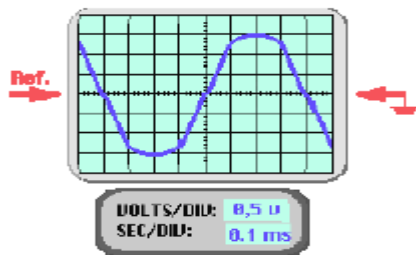
Mediante esta conexión se formará en la pantalla una "curva de Lissajous" que debidamente interpretada nos dará la diferencia de fase existente entre las dos formas de onda que se comparan.

En los anteriores dibujos, se dan algunos ejemplos de este sistema de aplicación.

Aparte de los ejemplos de medida anteriores, en el caso de que se requiera una mayor precisión en la medida de un desfase y empleando igualmente las curvas de Lissajous.

Si se dispone de un osciloscopio con doble canal vertical, se puede también medir el desfase entre dos señales de igual frecuencia, mediante la aplicación a cada canal vertical de una de las señales que se desea comparar.

El osciloscopio trabaja en este caso con su propia deflexión horizontal, con lo que se podrán comparar las señales y apreciar su grado de desfase.



$$0,1 \text{ ms} = 0,8 \text{ ms}$$
$$f = 1/T = 1/0,8\text{ms} = 1250 \text{ Hz}$$

### EJEMPLOS TENSIÓN ALTERNA Y FRECUENCIA

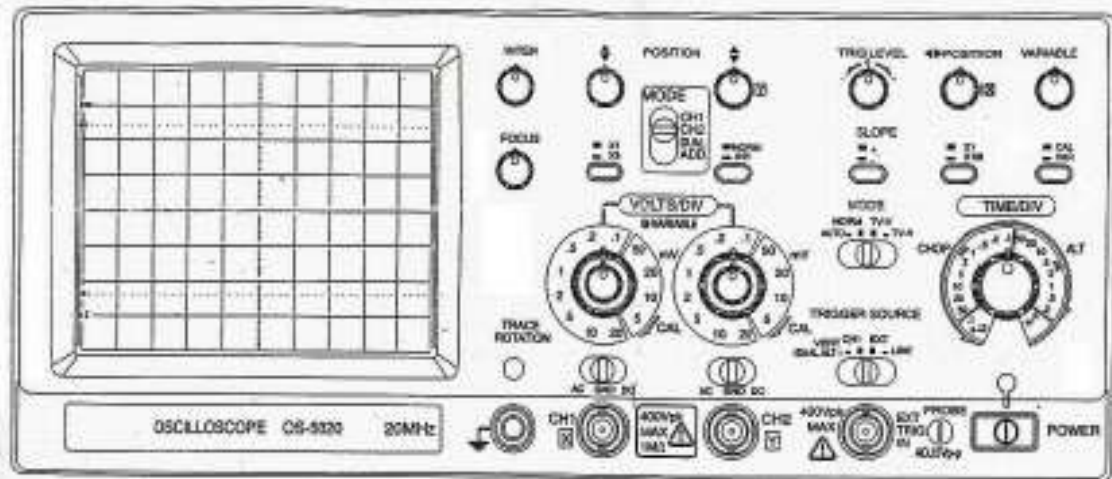
**Tensión de pico:**  
3 DIV x 0,5  
VOLTS/DIV = 1,5 V (de pico)

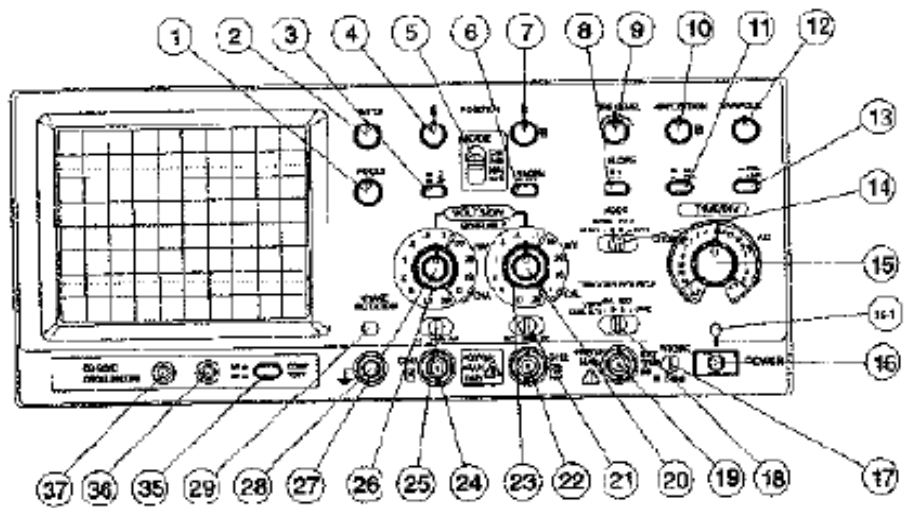
**Tensión pico-pico:**  
 $V_{p-p} = 3 \text{ V}$

**Frecuencia:** 8 DIV x

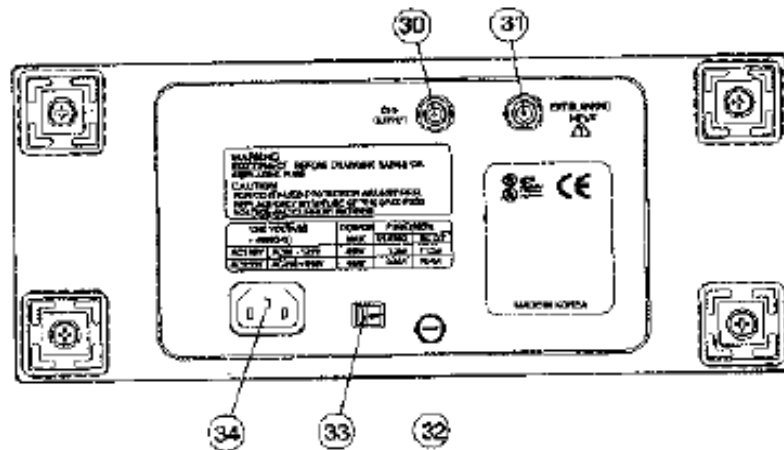


OSCILOSCOPIO EZ DIGITAL  
MODELO OS-5020 DE 20MHZ





(a) FRONT PANEL



(b) REAR PANEL

PANTALLA Y BLOQUES DE ALIMENTACIÓN

(16) POWER SWITCH	el interruptor de encendido, on cuando se encuentra oprimido y off cuando se encuentra liberado
(16-1) POWER LIGHT	Indica si el osciloscopio se encuentra encendido
(2) INTEN	Ajusta el brillo del despliegue de CRT. Al girarlo en el sentido de las agujas del reloj aumenta brillo.
(1) ENFOQUE	Para obtener la mayor nitidez de la señal en CRT
(29) ROTACIÓN	Permite ajuste con un destornillador la alineación de la señal a las líneas horizontales del CRT.
(33) SELECCIÓN DE VOLTAJE	Cambian el rango de voltaje de alimentación del osciloscopio, puede ser 115v (98v-125v) ó 230v (198v-250v).
(34) CONECTOR DE ALIMENTACION	Conector polarizado hembra para la alimentación de CA Permite retirar colocar el cable de energía
(24) CONECTOR CH1 o X	Para aplicar un señal de entrada al canal 1 del amplificador CH1 vertical, o el X-eje(horizontal) el amplificador durante el funcionamiento de X-Y.
PRECAUCION	Para Evitar un daño al osciloscopio no aplican más de 400v (DC + CA de pico) entre "CH1" la terminal y tierra.
(22) CONECTOR CH2 o Y	Para aplicar un señal de entrada al canal 2 del amplificador CH2 vertical, o el Y-eje(horizontal) el amplificador durante el funcionamiento de X-Y.
(25) CH1 interruptor de AC/GND/DC	Para seleccionar el método de acoplamiento de la entrada al CH1 . Inserción de posición de CA un condensador entre el conector de la entrada y amplificador para bloquear cualquier componente de DC en la entrada. La posición de GND conecta el amplificador a que conectó con tierra en lugar del conector de la entrada, para que una referencia de tierra puede establecerse. La posición de DC conecta la entrada directamente a su conector de la entrada y deja pasar todos los componentes de la señal.
(26) CH1 interruptor de VOLTS/DIV	Para seleccionar el factor de calibrado de deflexión de la señal de entrada alimentada al amplificador vertical. CH1
(21) CH2 interruptor de AC/GND/DC	Para seleccionar el método de acoplamiento el signo de la entrada al CH2 amplificador vertical. Inserción de posición de CA un condensador entre el conector de la entrada y amplificador para bloquear cualquier componente de DC en la entrada. La posición de GND conecta el amplificador a que conectó con tierra en lugar del conector de la entrada, para que una referencia de tierra puede establecerse. La posición de DC conecta la entrada directamente a su conector de la entrada y deja pasar todos los componentes de la señal.

BLOQUES DE BARRIDO Y DISPARO

(15) el interruptor de TIME/DIV	Para seleccionar ya sea la velocidad calibrada del barrido de la base del tiempo o la operación X-Y
(12) Variable control	Proporciona un ajuste continuo y variable de la velocidad del barrido entre los pasos del interruptor time/div . La calibración de time/div es exacta solo cuando el control variable del tiempo se detiene con un clic al girar totalmente en dirección de las manecillas del reloj.
(11) X10MAG	Para expandir la deflexión horizontal 10 veces aumentando así la velocidad efectiva de barrido también en 10 veces
(10) Horizontal POSITION control	Para ajustar la posición horizontal de los trazos exhibidos en la pantalla de TRC . Al girarlo en dirección de las manecillas del reloj mueve los trazos hacia la derecha ;al girarlo en sentido contrario hacia la izquierda.
(9) Trigger LEVEL control control de nivel de disparo	Para seleccionar la amplitud de la señal de disparo en la cual ocurre este. Cuando se gira en sentido de las manecillas del reloj. El punto de disparo se mueve hacia el pico positivo de la señal de disparo. Cuando se gira en sentido contrario, el punto de disparo se mueve hacia el pico negativo de dicha señal.
(8) Trigger slope switch (on LEVEL control)	Para seleccionar la inclinación positiva o negativa de la señal de disparo para iniciar el barrido, al oprimirlo, el interruptor Selecciona la pendiente positiva (+), al jalarlo selecciona la pendiente negativa (-).
(19) EXT TRIG IN connector	Para aplicar una señal externa de disparo a los circuitos de disparo
(14) TRIGGER MODE SWITCH	<p>Para seleccionar el modo de disparo de barrido.</p> <p>La posición AUTO selecciona un barrido de corrimiento libre en donde se exhibe una línea de base en ausencia de una señal. Esta condición cambia automáticamente a barrido disparando cuando se recibe una señal de disparo a 25 hz o mayor, y se ajustan correctamente los otros controles de disparo.</p> <p>La posición NORM solo se produce barrido cuando se recibe una señal de disparo y se ajustan los otros controles correctamente.No hay trazo visible si falta algun requerimiento de disparo. Este modo debe ser utilizado cuando la frecuencia de señal de señal es de 25hz o menor.</p> <p>La posición TV-V se utiliza para observar una señal de video compuesta en la frecuencia de campo.</p> <p>La posición TV-H se utiliza para observar una señal de video compuesta en la frecuencia de una línea</p>



<p>(18) Interruptor de fuente de disparo Trigger source switch</p>	<p>Para seleccionar conveniente la fuente de disparo</p> <p>La posición canal 1 selecciona la señal CH1 como fuente de disparo</p> <p>La posición canal 2 selecciona la señal CH2 como fuente de disparo</p> <p>La posición LINEA selecciona un disparo derivado de la línea de alimentación de CA esto permite al osciloscopio estabilizar en la pantalla las componentes de una señal relacionada con la línea, aun cuando sea muy pequeños comparados con otros componentes de señal</p> <p>La posición EXT selecciona la señal aplicada al conector EXT TRIG IN</p>
--	---

### CARACTERÍSTICAS DIVERSAS

<p>(31) EXT blanking input connector</p>	<p>Para aplicar una señal que module la intensidad del trc. El brillo del trazo se reduce con una señal positiva y se aumenta con una negativa.</p>
<p>(17) PROBE adjust</p>	<p>Proporciona una onda cuadrada de rápida subida, de amplitud exacta para un ajuste de las puntas de prueba y calibrado del amplificador vertical</p>
<p>(28) Ground connector</p>	<p>Proporciona un punto de conexión para una línea separada a tierra</p>



Parte frontal de un osciloscopio EZ digital modelo os-5020 de 20mhz funcionando

*Video sobre manejo del osciloscopio:*

**Tutorial electronica basica. Parte 27. El Osciloscopio**

**Diapositivas de apoyo al tema del osciloscopio:**

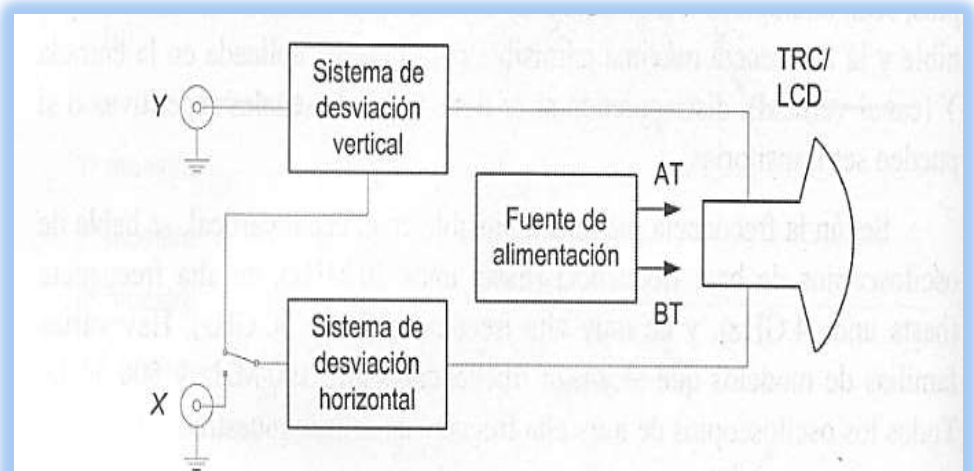


Figura 5.3 Un osciloscopio consta de tres bloques principales y una fuente de alimentación con salidas estabilizadas de alta y baja tensión continua. Los conectores para las señales de entrada suelen ser de tipo BNC.

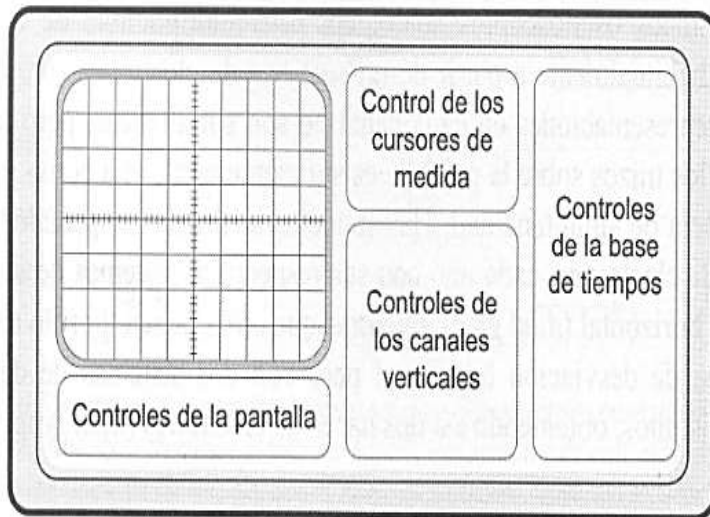


Figura 5.4 Agrupación típica de los controles en el panel frontal de un osciloscopio.



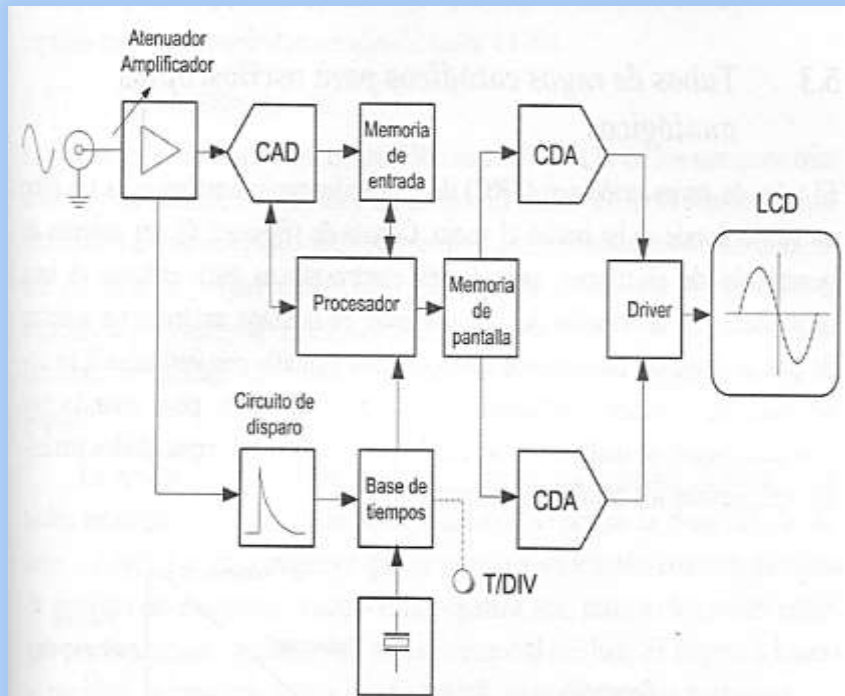


Figura 5.6 Esquema de bloques simplificado de un osciloscopio de memoria digital. La posición de cada punto en la pantalla es proporcional a la tensión de la señal de entrada en un momento determinado respecto a un instante de referencia.

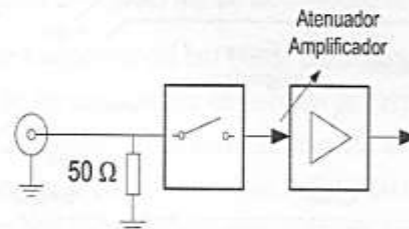
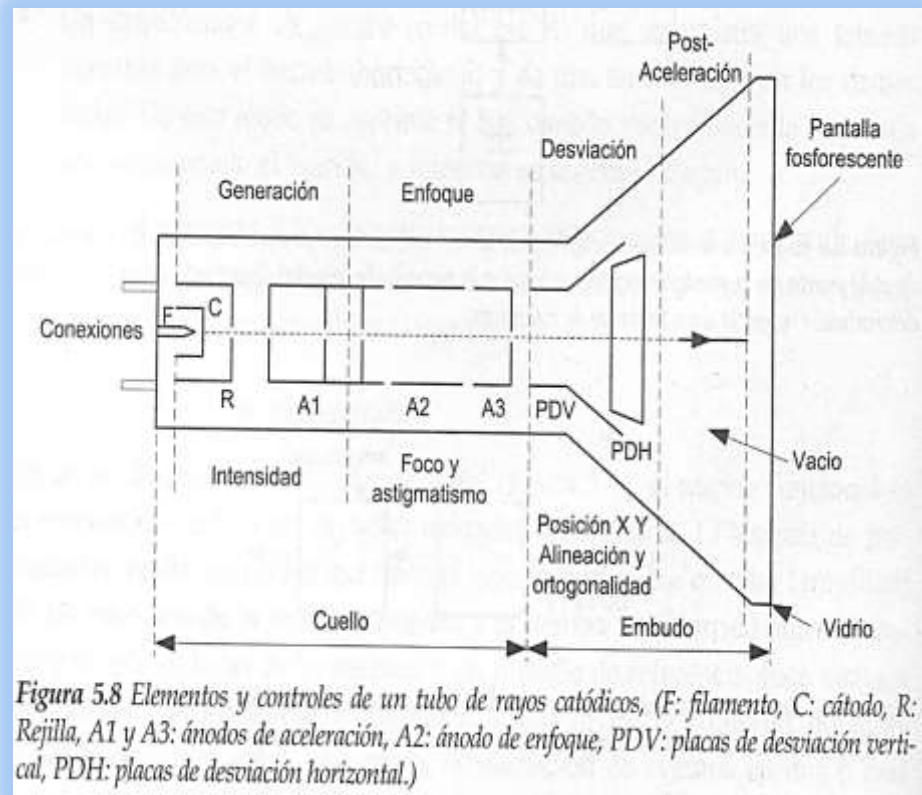


Figura 5.7 Entrada de señal (canal vertical) en un osciloscopio digital de muestreo: un muestreador precede al atenuador-amplificador.



## Prácticas de laboratorio para la unidad 2.

### 2. USO DEL MULTÍMETRO DIGITAL (parte 1).

*OBJETIVO: Que el estudiante aprenda a medir resistencia utilizando un multímetro digital de propósito general.*

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.



## MEDICIONES ELECTRICAS

### EXPERIMENTO No. 2

#### USO DEL MULTIMETRO DIGITAL

**OBJETIVO:** Que el estudiante aprenda a medir resistencia, utilizando un multímetro digital de propósito general.

#### INTRODUCCION:

El medidor electrónico indica la cantidad que se está midiendo en una pantalla numérica. Los hay que operan en forma manual, como es, seleccionando manualmente el rango adecuado para cada medición a realizar y los hay de autoescape en el cual se es necesario seleccionar el rango en cada medición ya que lo hace en forma automática. Los hay que miden voltaje de C.D., voltaje de C.A., corriente de C.D. o C.A., resistencia, capacitancia, inductancia, FREQ. de una señal, voltaje de diodo, frecuencia, etc. El límite superior de estos instrumentos digitales puede ser de 20kΩ. Y hasta 1 MHz. Dependiendo del diseño del instrumento.

Muchos de estos multímetros son portátiles (de baterías) e de mesa, con diseño muy robusto para permitir soportar las rigores de las medidas de campo. Los más modernos cuentan con interfaces de comunicación para adquisición de datos digitales a PC's.

#### MATERIAL Y EQUIPO

- 1 Multímetro Digital marca FLUKE
- 1 Tablita de experimentos o PROTO BOARD
- 1 Fuente de alimentación de 200V
- 1 Juego de cables bidireccionales
- 1 Juego de terminales
- 1 Par de terminales para almacenamiento de energía

Antes de realizar la práctica es necesario conocer como se utiliza el instrumento.

Los multímetros de uso común (DMM) miden: Resistencia (Ω), Voltaje (V), Corriente (A) y Voltaje (V) en sistemas por batería y otros por C.A. (AC), corriente, F.C.D. y en pulsos de batería.

Los multímetros comunes de mesa (DMM) o (DMM) o (DMM) de mesa se agregan DC, kHz, MHz entre otros, algunos se agregan DC, 1 a 10 en la mayoría de rango, algunos se agregan frecuencia, los multímetros de DMM de uso común para campo, estos agregan frecuencia, corriente de escape (p) a otro de corriente, los multímetros de DMM de mesa para campo y uso de mediciones pueden proporcionar otros y submedidas de la medición.

Lea estos datos antes de utilizar el multímetro.

Para evitar posibles choques eléctricos a personas presentes, siga las siguientes instrucciones:

- 1. Utilice el multímetro solamente en aquellos casos que especificamos en estos documentos, de no hacerlo así la precisión necesaria por el instrumento podría verse afectada.
- 2. No utilice el cable ni los conductores de prueba al personal sobre cualquier, o al instalar en serie funcionamiento discontinuo. En caso de duda, consulte al personal técnico de mantenimiento para el manejo.
- 3. Utilice siempre los terminales, la posición del selector y el rango apropiado para las mediciones.
- 4. Verifique el funcionamiento del multímetro mediante un circuito conocido.
- 5. No aplique una tensión superior a la indicada en el multímetro, especificada en el manual, entre los terminales o entre cualquier terminal y tierra.
- 6. Tenga cuidado al trabajar con tensiones superiores a 50 V CA u otros valores. El V.C.D. usado a 80 V C.C. Estos niveles pueden ser riesgo de choque eléctrico.
- 7. Mantenga la batería tan limpia como sea posible al indicarlo en la batería descargada (B) para evitar serios daños que pueden traer como consecuencia el riesgo eléctrico y humano.
- 8. Desconecte el sistema eléctrico al instalar o desinstalar todos los componentes de una conexión antes de llevar a cabo cualquier medición, verificación, ajuste o calibración.
- 9. No utilice el multímetro cerca de gases o vapores explosivos.
- 10. Al utilizar las conductores de prueba, mantenga los dedos lejos de las partes expuestas.
- 11. Retire las conductores de prueba del multímetro antes de abrir la tapa del multímetro o la cubierta de la batería.

Símbolos			
LA	Indicador de alarma	Hz	Frecuencia
CC	Indicador de corriente	V.C	Corriente en corriente de línea
DC	Indicador de C.C.A.	B	Indicador de batería descargada (batería con poca carga)
Ω	Indicador de resistencia	D	Indicador de diodo
F	Indicador de frecuencia	h	Indicador de frecuencia (Hz)
B	Batería descargada (batería con poca carga)	C	Indicador de corriente (C.A. o C.C.)
1000	Indicador de precisión por 1000 (Factor de conversión)	Ω	Indicador de resistencia (ohmios)
2000	Indicador de precisión por 2000 (Factor de conversión)	V	Indicador de voltaje (V)

El multímetro mide y genera los siguientes parámetros:

- Tensión y corriente C.A. (Ω) = Ohmio
- Resistencia = Ohmicidad
- Tensión y corriente = Voltaje

**Definiciones de "Voltaje" y "Corriente"**

Use "Advertencias" donde "Atención" y "Atención" puede ser peligroso o incluso a veces ser peligroso.

**Tensión peligrosa:**  
Una corriente sobre la presión de un modo (presión) peligrosa, si se aplica sobre el cuerpo y si el cuerpo es más de 10 V y un voltaje de más de 100 V.

**Atención:**  
En caso de que se aplique sobre el cuerpo, puede ser peligroso.

El uso de un multímetro de mesa o de un multímetro de campo, puede ser peligroso si se utiliza en un lugar donde se encuentren gases, vapores o líquidos inflamables.

Para evitar choques eléctricos, asegure primero el sistema eléctrico de un sistema de energía eléctrica y asegure los cables de conexión antes de realizar pruebas de resistencia, capacitancia, inductancia y frecuencia.

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

Medición de tensiones de CA y CC → → → Medición de resistencias



... Volt de CA ... Volt de CC ... Medición de CA ... Medición de CC

**1. USO DEL MULTIMETRO DIGITAL PARA MEDIR RESISTENCIAS**  
**NOTA:** El multímetro que se proporciona para la realización de esta práctica aporta automáticamente al rango, por lo que no requiere de seleccionar rango para medir.  
 En esta práctica se usará de utilidad el instrumento en las observaciones que se dan al inicio de esta instructivo de práctica.

**DESARROLLOS**

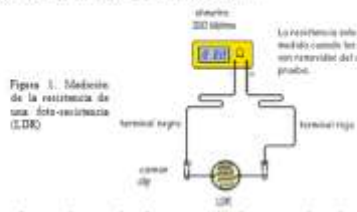
- PARTE A1**
- 1. IDENTIFICACIÓN Y MEDICIÓN DE RESISTENCIAS**
- 1.1. → Organizar las 10 resistencias que se proporcionan en un orden de menor a mayor y anotar su valor, código de colores y tolerancia, en la tabla 1.1.
- 1.2. → Colocar las resistencias en una tabla **PROVIDA** cuidando de que no estén en corto circuito.
- 1.3. → Estando las resistencias de uso del multímetro, seleccionar medir resistencia cada una de las resistencias en el modo pedido y anotar sus observaciones en la tabla 1.1.

**TABLA 1.1 MEDICIÓN DE RESISTENCIAS**

Volcan	Código	Código de Colores	Valor	Tolerancia	Resistencia Digital	Valor Medido	% Error
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0

$$\% \text{ Error} = \frac{\text{Valor Real} - \text{Valor Medido}}{\text{Valor Real}} \times 100 \%$$

- 1.4 Usando su tabla **PROVIDA** en una foto-resistencia (LDR) y mida su valor en las condiciones tal como se muestra en la figura 1 y anote sus observaciones.



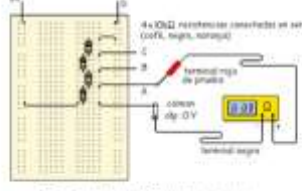
**Figura 1. Medición de la resistencia de una foto-resistencia (LDR)**

- 1.5 Tape perfectamente la ventana de su foto-resistencia (puede usar cinta adhesiva o la tesa) y mida el valor de resistencia en estas condiciones. Anote sus observaciones.

**2. MEDICIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE**

Cuando se mide la resistencia en elementos de un circuito, es necesario quitar la energía eléctrica y retirar el elemento del circuito (al menos desconectar una de las terminales del elemento a medir).

- 2.1 Arma el arreglo de resistencias en serie como se muestra en la figura 2.

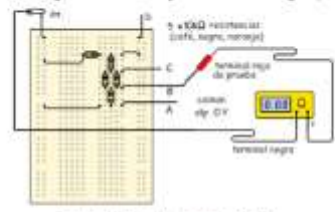


**Figura 2. Medición de Resistencias en serie**

- 2.2 Con referencia al punto de 0V, mida la resistencia en cualquiera de los puntos indicados (A, B, C y D). Anote sus mediciones como  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  y  $R_D$ .
- 2.3 Ahora mida el valor de cada una de las resistencias del circuito de la figura 2.

**3. MEDICIÓN DE RESISTENCIAS EN CIRCUITO SERIE-PARALELO.**

- 3.1 Arma el arreglo de resistencias serie-paralelo mostrado en la figura 3.



**Figura 3. Resistencias en circuito serie-paralelo**

- 3.2 Tomando como referencia 0V, mida con el multímetro el valor de resistencia en los puntos A, B, C y D. Anote sus observaciones.

**ACERCA A SU REPORTE**

Levi cálculos de los circuitos pedidos.  
 Anote en una tabla similar a la tabla 1. Sus resultados obtenidos de los puntos 2 y 3.

**3. USO DEL MULTIMETRO DIGITAL (parte 2).**

OBJETIVO: Que el estudiante aprenda a medir voltaje y corriente, utilizando un multímetro digital de propósito general.



MEDICIONES ELÉCTRICAS  
EXPERIMENTO No. 3

USO DEL MULTÍMETRO DIGITAL

**OBJETIVO:** Que el estudiante aprenda a medir voltaje y corriente, utilizando un multímetro digital de propósito general.

**INTRODUCCIÓN:**

El medidor electrónico indica la cantidad que se está midiendo en una pantalla numerada. Los hay que operan en forma manual, pero es recomendable manualmente el rango adecuado para cada medición ya que lo hace en forma automática. Los hay que miden voltaje de C.D., voltaje de C.A., corriente de C.D. y C.A., resistencia, capacitancia, inductancia, FREQ de transistores, voltaje de diodo, frecuencia, etc. El límite superior de estos instrumentos digitales puede ser de 1000V y hasta 100A. Dependiendo del diseño del instrumento.

Nota: de este multímetro es un prototipo (de batería) o de mesa, con display muy robusto para permitir soportar las vibraciones de los medidores de campo. La única medición cuenta con interfaz de comunicación para adquisición de datos aplicable a PC 8.

**MATERIAL Y EQUIPO**

- 1 Multímetro Digital marca FLUKE
- 1 Tablero de experimentos PROTO BOARD
- 1 Fotocircunscia (LED)
- 1 Juego de cables telefónicos
- 1 Juego de cables
- 1 Par de terminales para alimentación de energía
- 1 Resistencia de 100Ω y 1 de 10KΩ

**Activos Instructivos**

Antes de utilizar el instrumento leer cuidadosamente las instrucciones que se dan al inicio del instructivo de la página 2

**DESARROLLO**

I. Mediciones de Corriente de C.D.

- 1.1 Armar el circuito de la figura 3.1
- 1.2 Seleccionar en el multímetro digital la operación de medición de voltaje de c.d. y apagar la fuente de voltaje de c.d. a 6V<sub>cc</sub>.

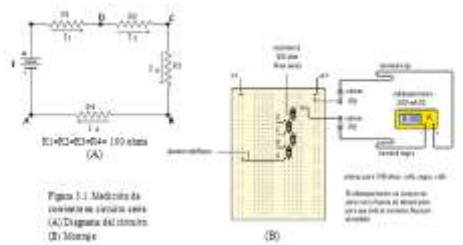


Figura 3.1. Mediciones de corriente en circuito serie.  
(A) Diagrama del circuito  
(B) Montaje

- 1.3 Insertar el multímetro en el circuito tal como se muestra en la figura 3.1 (B) seleccionando la operación de mA.
- 1.4 Utilizando los cables de alimentación, energizar el circuito armado. Anotar sus observaciones.
- 1.5 Retirar la energía del circuito. Alzar el circuito en el punto A (Figura 3.1) e intentar el multímetro seleccionando operación de resistencia de c.d. (**seguir cuidando de respetar la polaridad al insertar el multímetro**).
- 1.6 Alzarse nuevamente el circuito y observar el display del medidor. Anotar sus observaciones.
- 1.7 Retirar nuevamente la energía del circuito. Repetir los pasos del 1.3 y 1.6 para los puntos B, C y D del circuito. Anotar en cada caso sus mediciones.

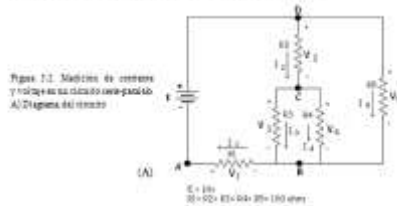
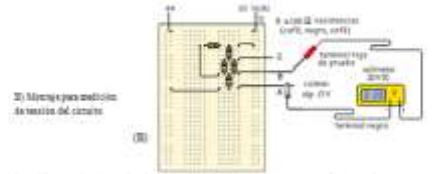


Figura 3.2. Mediciones de corriente y voltaje en un circuito serie-paralelo.  
(A) Diagrama del circuito



- 1.8 Para el circuito de la figura 3.2 (A) calcule previamente los valores de corriente en cada una de las resistencias. Y la caída de tensión entre los puntos A y B, B y C, C y D, B y D, A y D.
- 1.9 Arme el circuito de la figura 3.2
- 1.10 Testeado cuidadoso de no tener alimentado el circuito, intente el instrumento para. Mida la corriente en cada una de las resistencias. Anote sus observaciones; retire la energía y el instrumento del circuito.

2. Medición de Voltaje de C.D.

- 2.1 Seleccione en el multímetro la operación de medición de voltaje de c.d.
- 2.2 Alimente nuevamente el circuito de la figura 3.2 y mida la caída de voltaje en cada una de las resistencias. Anote sus observaciones y apague la fuente de alimentación de voltaje.
- 2.3 Arme el circuito mostrado en la figura 3.3.

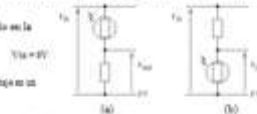


Figura 3.3a. Medición de voltaje en un circuito con LED.

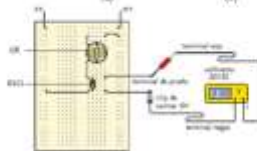


Figura 3.3b. Montaje del circuito con LED para la medición de la caída de tensión.

- 2.4 Mida tanto corriente como voltaje del circuito de la figura 3.3, en la resistencia y la LED. Póngase en contacto con sus asistente y posteriormente tapando la ventana de la LCD.

CUESTIONARIO:

1. En base a lo que acaba usted de observar, ¿cómo lo relacionaría con la Ley de Ohm?
2. ¿Cómo se comporta la tensión y la corriente en un circuito serie y cómo se comportan ambas en un circuito paralelo?
3. Cuando se tienen tres resistencias de igual valor en paralelo, ¿cuánto vale su resistencia equivalente?
4. De acuerdo con la figura 3.2, ¿cómo se comportan las corrientes en el nodo C?
5. La caída de tensión entre los puntos A y D es igual a la suma de \_\_\_\_\_
6. Explique en base a sus observaciones del punto 2.4 cómo se comporta una LCD al variar las condiciones de iluminación cuando se le aplica un voltaje.

4. DISEÑO DE MEDIDOR DE AMPERÍMETRO DE C. D.

OBJETIVO: Que el participante sea capaz de:

- a) Determinar las características de un medidor tipo D'Arsonval las cuales permiten estimar su calidad.
- b) Ampliar el rango de medición de corriente de un medidor tipo D'Arsonval a partir de sus características.
- c) Analizar y cuantificar los errores del medidor.



MEDICIONES ELÉCTRICAS

EXPERIMENTO No. 4  
Diseño de Amperímetro.

OBJETIVO: Que el participante sea capaz de:

- Determinar las características de un medidor tipo D'Arsonval las cuales permitan estimar su calidad.
- Ampliar el rango de medición de corriente de un medidor tipo D'Arsonval a partir de sus características.
- Analizar y cuantificar los errores del medidor.

MATERIAL Y EQUIPO:

- Galvanómetro de 0 - 1 mA
- Fuente de tensiones para fuente de c.d.
- Potenciometro de 10Kohms
- Potenciometro de 1 Kohms (1 o 2 Watts)
- Potenciometro de ajuste fino (10 vueltas)
  - 1 de 100 ohms
  - 1 de 500 ohms
- Multímetro Min. FLUKE
- Tabla Preto
- Juego de Cables
- Juego de cables telefónicos

PROCEDIMIENTO:

1. Obtención de la resistencia interna del medidor.

- Arme el circuito mostrado en la figura 2.1, donde  $E = 8 \text{ Vcd}$   
Es un potenciometro con un valor determinado de acuerdo a la fórmula  
 $R_x = E / I_m$

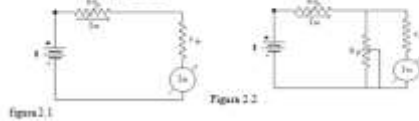


figura 2.1

Figura 2.2

- Es un potenciometro de 10Kohms, colóquelo en su valor máximo antes de energizar el circuito.
- Ajuste la fuente de voltaje a su valor de 8 Vcd y energice el circuito.
- Ajuste  $R_x$  para que haya una deflexión máxima en el galvanómetro.  
Desconecte la terminal roja (+) de la fuente de energía, y mida con cuidado el valor de  $R_x$ .
- Coloque el potenciometro de 1000 ohms ( $R_p$ ) como lo muestra la figura 2.2, teniendo cuidado de ponerlo a su valor máximo.
- Energice nuevamente el circuito y ajuste  $R_p$  hasta que en la carátula del galvanómetro se tenga una lectura a media escala.
- Nuevamente retire la energía del circuito y remueva con cuidado  $R_p$  del circuito, mida su valor con el multímetro FLUKE y anótelo.

Como alterno la aguja del medidor a media escala cierre por ambos ramos del circuito la misma corriente, entonces, el valor de  $R_p = R_x$  (anote este valor como la resistencia interna del galvanómetro).

3. Error por Calibración del medidor.

Primero armamos el circuito de la figura 2.3

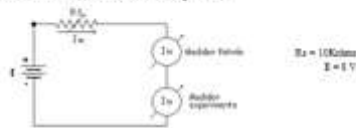


Figura 2.3

Ambos medidores están en serie, por lo que va a circular la misma corriente por ellos, esto nos va a servir para comparar las mediciones de los dos medidores y obtener un porcentaje de error por calibración del medidor experimental (galvanómetro) respecto al medidor patrón (FLUKE).

- Ya armado el circuito, ajuste  $R_x$  para obtener una deflexión máxima en el galvanómetro (medidor experimental).
- Disminuya lentamente el valor de la fuente de voltaje hasta 95 de la escala, después a 90 y así sucesivamente hasta abarcar el total de la escala de medidor experimental. Observe en todo momento la lectura en el medidor patrón y anótelas también.



**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

Registre los valores de ambos medidores y elabore una tabla como la mostrada a continuación.

\*) TABLA 2.1

MEDICIÓN PATRÓN (mA)	MED. EXPERIMENTAL (mA)	% ERRORES POR CALIBRACIÓN

Donde el % de error por calibración se obtiene de la siguiente fórmula:  

$$\% \text{ Error} = (I - I_0) \times 100 \%$$
 por calibración 
$$e = I \text{ sup.} - I \text{ patrón}$$

Con los valores de la tabla 2.1 haga una gráfica de % de error por calibración a lo largo de la escala.

**Ampliación de Rango del medidor de corriente.**

Para ampliar el rango del medidor, utilizamos el valor de su resistencia interna y calculamos el valor de la resistencia derivada para poder medir corriente en los siguientes rangos de corriente.

$$I_1 = 7mA$$

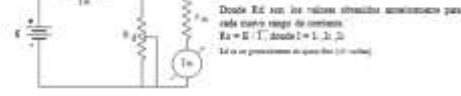
$$I_2 = 10mA$$

$$I_3 = 100mA$$

$$R_d = I_m / (n - 1) \quad n = I / I_m$$

Una vez conocida la resistencia interna del medidor, calcule los valores de  $R_d$  para cada uno de los rangos de corriente pedidos.

Para comprobar los valores calculados, construya el circuito de la figura 2.4



Para cada rango de corriente, ajuste  $E$  para observar deflexión de escala completa del medidor experimental y anótelo como valor experimental de  $E_s$ , con estos valores haga una tabla como la siguiente.

\*) TABLA 2.2

$E_s$ Teórico	$E_s$ Experimental	% Error	$R_d$ (ohms)	Rango (mA)

Dibuje una canal para cada uno de los rangos pedidos.

NOTA: No se olvide que las conclusiones y recomendaciones así como la bibliografía son muy importantes.

AL TERMINAR ESTE EXPERIMENTO, ANOTE EL MODELO Y No. DE SERIE DE TODOS LOS INSTRUMENTOS, ADEMÁS DE MARCAR CON MASKING tape EL GALVANÓMETRO CON EL NÚMERO DE SU EQUIPO

**5. MEDIDOR DE VOLMETRO DE C. D.**

**OBJETIVO:** Que el participante sea capaz de:

- a) Diseñar un medidor de voltaje de varios rangos, utilizando un galvanómetro tipo D'Arsonval
- b) Analizar y cuantificar los errores del medidor.
- c) Verificar la ley de voltajes de Kirchhoff.



MEDICIONES ELÉCTRICAS

EXPERIMENTO No. 5

DISEÑO DE VOLMETRO.

OBJETIVO: Que el participante sea capaz de:

- Diseñar un medidor de voltaje de varios rangos, utilizando un galvanómetro tipo D'Arsonval.
- Análisis y cuantificar los errores del medidor.
- Verificar la ley de voltajes de Kirchhoff.

Un voltímetro de c.d. se construye añadiendo una resistencia limitadora de corriente llamada multiplicadora, a un medidor tipo D'Arsonval (figura 3.1), así, la combinación en serie de la resistencia multiplicadora y el galvanómetro podrá utilizarse para medir un voltaje de c.d. desconocido, en función de la corriente que circula por el galvanómetro y la resistencia total del multiplicador y el galvanómetro.

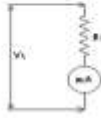


Figura 3.1

MATERIAL Y EQUIPO

- Fuente de voltaje de 0 a 10V de c.d.
- TABLA PECTO.
- Potenciometro de ajuste
- Juego de cables
- Juego de cables telefónicos
- Resistencia de 10 Kohms
- Resistencia de 2.2 Kohms
- Multímetro MARCA FLUKE

DESARROLLO EXPERIMENTAL

- Calcule los valores de resistencia multiplicadora requerida para convertir el galvanómetro en un voltímetro de c.d. con los siguientes rangos:  
 a) 0 - 5 V                      b) 0 - 10 V                      c) 0 - 25 V
- Coloque en serie con el galvanómetro un potenciometro con el valor calculado de  $R_x$  y ajuste el circuito de la figura 3.2. Los puntos A y B constituyen ahora las terminales de entrada del voltímetro experimental. El medidor patrón se utiliza para medir la fuente de c.d., la cual estará ajustado en cero Volt.

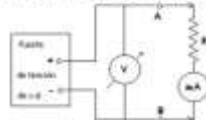
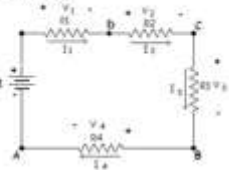


Figura 3.2

- Coloque el potenciometro ( $R_x$ ) en el valor calculado del multiplicador para el rango de 0 a 5 V. Ajuste ahora la salida de la fuente de voltaje de c.d. hasta que el voltímetro experimental se deflexione a escala cero.
- Disminuya el voltaje aplicado tal que el voltímetro experimental se deflexione en una división de la escala (0.9mA). Lea y registre las lecturas en el medidor patrón y el medidor experimental. Repita este procedimiento hasta cubrir totalmente la escala del medidor experimental.
- Repita el procedimiento de calibración descrito en los puntos 3 y 4 para cada uno de los rangos restantes, ajustando y colocando el valor de  $R_x$  en el potenciometro al valor correspondiente de resistencia multiplicadora calculada en el punto 1.
- Para el circuito de la figura 3.3, calcule las caídas de voltaje en cada una de las resistencias.



$E = 10V_{dc}$   
 $R1 = R2 = 10Kohms$   
 $R3 = R4 = 2.2 Kohms$

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

Figura 3.3

Página 2 de 7

7. Anexe al circuito de la figura 3.3, utilizando su voltmetro experimental (teniendo cuidado de seleccionar el rango más adecuado de los tres disponibles), mida las caídas de voltaje en cada una de las resistencias y registre sus lecturas en la tabla 3.1

Tabla 3.1

Voltaje teórico	Voltaje experimental	% Error teórico	% Error experimental
V1			
V2			
V3			
V4			

Anexe al reporte:

- a) **CÁLCULOS**  
Para cada uno de los tres rangos de voltaje, calcule el error entre el voltaje teórico por el voltmetro experimental y el voltaje real medido por el voltmetro patrón. Estos datos se utilizan para construir una curva de calibración o corrección. Los valores de corrección son positivos cuando el voltaje real es mayor al voltaje experimental, y negativos cuando el voltaje real es menor al experimental.
- b) **TABULACIONES**  
Prepare una tabla completa con todos los datos medidos y resultados calculados, incluya solo la información pertinente.
- c) **GRÁFICAS**  
Elabore una gráfica de calibración para cada uno de los rangos de voltaje pedidos del voltmetro experimental.  
Se acostumbra graficar las marcas de la escala de voltaje en el eje X y la corrección (calibración) de voltaje para cada división de la escala en el eje Y.

## 6. DESCRIPCIÓN Y FUNCIONAMIENTO DE UN OSCILOSCOPIO.

*OBJETIVO: Conocer el osciloscopio, su funcionamiento y operación apropiada para análisis de diversas señales de voltaje, así las aplicaciones más comunes.*



### PRÁCTICA 6

#### DESCRIPCIÓN Y FUNCIONAMIENTO DEL OSCILOSCOPIO

**OBJETIVO:** Conocer el osciloscopio, su funcionamiento y operación apropiada para el análisis de muy diversas señales de voltaje así como sus aplicaciones más comunes.

#### 1. Las partes básicas

Las partes básicas que componen un osciloscopio son las siguientes:

- 1.- Tubo de rayos catódicos
- 2.- Amplificadores horizontales y verticales
- 3.- Base de tiempo
- 4.- Fuente de poder

Tubo de rayos catódicos. El corazón del osciloscopio es el tubo de rayos catódicos que se muestra en la Fig. 1.1.

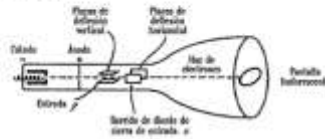


Fig. 1.1 tubo de rayos catódicos.

El tubo en sí es un recipiente de vidrio sellado con un cátodo de electrones, un sistema de deflexión (movimiento lateral y, si final una pantalla fluorescente). El aire es removido del tubo dejando un alto vacío, este es requerido porque el rayo fino de electrones producido dentro del tubo podría ser dispersado por la colisión de algunas moléculas de gas en su trayectoria.

**Amplificadores.** Los voltajes aplicados a las placas deben de ser grandes para causar alguna deflexión; notable en el rayo de electrones a través de las placas del tubo de rayos catódicos. Por lo tanto, antes de ser aplicados las placas de los voltajes de entrada deben de ser amplificadas.

En la Fig. 1.2 se muestra la conexión de los amplificadores.

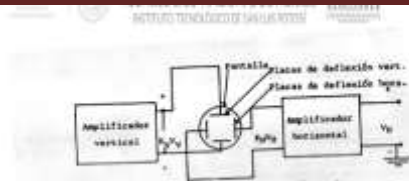


Fig. 7.2 Conexiones de los amplificadores del osciloscopio.

Basa de tiempo—La aplicación más común de un osciloscopio es el de mostrar la variación de una señal contra el tiempo. Para mostrar esta señal de tiempo, debe ser aplicada a las placas horizontales del osciloscopio. Además, este mismo voltaje debe ser rápidamente aplicado a las placas verticales, de tal manera que el rastro pueda seguir la misma trayectoria rápidamente y de esta forma el rastro de luz que se mueve aparece como una línea sólida. Finalmente, este voltaje debe ser sincronizado con la señal que está siendo mostrada, de tal manera que la misma trayectoria se actualice, retrase y una imagen estable resulte en la pantalla del osciloscopio.

Fuente de poder—El osciloscopio tiene dos suministros de potencia (o cuales son usados para proporcionar voltaje de corriente directa a varias secciones). Uno de estos suministros de potencia es de alto voltaje el cual debe de ser capaz de entregar energía de 10,000 V y es usado en el tubo de rayos catódicos. El otro es un suministro de potencia de bajo voltaje, el cual es usado en los amplificadores y circuito de disparo. El mismo suministro de bajo voltaje es de casi 350 V.

Existe una gran cantidad de variedad de modelos y tipos de osciloscopios para muy diversas aplicaciones. El que se presenta en esta práctica es el más simple, el de un solo trazo. El osciloscopio usado es el modelo 1403A, los controles de este osciloscopio simple son los siguientes:

1.- **Alínea graduada**

Mica con 8 divisiones verticales y 22 horizontales, cada división = 1 cm, con 5 marcas menores (2mm) en las líneas centrales.

2.- **Posición**

Slide el trazo sobre el eje de vertical para mejor alineamiento o referencia en la calibración.

3.- **VERT. INPUT**

Tres rangos (X, X10, X100 para el control de entrada vertical y Cal. S.L., para para la calibración de la sensibilidad.

4.- **VERT. GAIN**

Ajusta la amplitud vertical de la señal para los tres escalas del VERT. INPUT

5.- **VLM**

Entrada vertical de la señal de voltaje, del tipo unit.

6.- **AC-DC-INTD**

Selector de entrada al amplificador vertical: en AC (bloquea la componente DC, en DC para a modo directo y en GND para poner a tierra el amplificador de entrada (la señal de entrada queda en circuito abierto).

7.- **LINE MODE**

Esco posición para Interior (y) = 0, frecuencia de línea y externo.

8.- **SWEEP VARIABLE**

Ajustar la frecuencia de barrido entre los pasos del selector de frecuencia de barrido.

9.- **LINE IN**

Entrada de la señal de voltaje para el sincronismo externo.

10.- **INTD**

Entrada de la conexión externa para la horizontal.

11.- **SWEEP FREQ. IN**

Cuatro pasos para ajustar el rango de frecuencia entre 10Hz y 100 kHz en la posición LINE para la frecuencia de línea (colocando en fase con el control de fase INTD, POWER OFF, INTD). Para seleccionar la entrada horizontal externa = IN.

12.- **Posición**

Para colocar el trazo en posición horizontal del tubo de rayos catódicos.

13.- **HOR GAIN**

Ajusta de la amplitud horizontal de la señal de voltaje.

14.- **FOCUS**

Ajustar la claridad y el enfoque del punto del tubo de rayos catódicos.

15.- **INTENSITY**

Ajustar la brillantez del trazo en la pantalla.

16.- **PHASE, POWER OFF**

Ajusta la fase del barrido con frecuencia de línea. El botón externo, sincronizado al girarse en sentido horario y, lo apaga en sentido contrario hasta sentir que se abre (0°).

7.2 Descripción de los pines

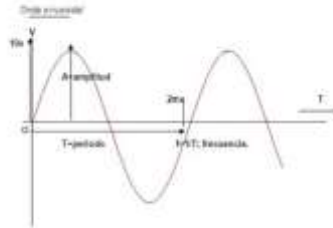
Para efectuar medición de voltaje, se calibra el osciloscopio previamente con los controles en la siguiente posición: la entrada vertical en CAL, 0.1 Vpp y el barrido de la frecuencia en 10.

Se justifica la variación de barrido para el trazo de dos ciclos, la ganancia vertical en cualquier número de cm. Poco a poco dentro del límite de pantalla como se muestra en la fig. 7.4 y la posición vertical según necesario.

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

Justo que la línea vertical vale 0.1 V pico a pico para cualquier amplitud vertical, el valor de voltaje para cada cm. Es igual a 0.1 V/cm. V. E

Para medir voltaje AC, posicione a la calibración vertical el selector AC-DI (en AC) y en la amplitud vertical en posición que desea. E



**Fig. 7.3 Calibración de amplitud vertical. E**

Una pinta de la onda entre las líneas superiores e inferiores de la mira graduada. El voltaje pico a pico está dado por la ec. 7.14

$$V_{pp}(\text{Voltaje pico a pico}) = (\text{Amplitud}) \times (\text{Multiplicador}) \quad (7.14)$$

Para efectuar la medición de voltaje de CC, coloque a la calibración vertical el selector AC-DI (en DC) y el control de sensibilidad en el punto E.

De ajuste la posición vertical de modo que el trazo (línea) representado (E) coincida en una línea horizontal general de la mira graduada. Después, es como al selector de AC-DI (en DC) y la amplitud vertical de modo que el trazo esté por debajo de la línea superior o encima de la inferior. El rango del valor voltaje es el mismo que el de la calibración ya vista, afectado por los factores  $\times 10$ ,  $\times 100$  E.

Las frecuencias desconocidas pueden medirse comparando las con un patrón por medio de la figura de Lissajous. Este método es limitado. Se conecta la frecuencia desconocida en la entrada V y se ajusta los controles de la vertical para una amplitud adecuada y la frecuencia de referencia en la entrada H. Se coloca el selector de la frecuencia en DT. Ajustando la ganancia horizontal para una adecuada anchura y la frecuencia conocida para obtener un trazo bien definido simple de Lissajous. La frecuencia se calcula a partir de la ec. 7.2 donde E.

**Fig. 7.4 Frecuencia estándar o patrón (Entrada Horizontal)**

$F_n = F$  (Frecuencia desconocida) (Entrada Vertical)

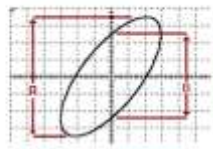
$H_n$  = Número de líneas en la línea superior

$H_v$  = Número de líneas en la línea vertical

$$F_v = F_n \left( \frac{H_n}{H_v} \right) \quad (7.2)$$

El ángulo de fase de una frecuencia dada en diferentes puntos del circuito puede determinarse por los comparos con la entrada V (V) y la entrada H (H). La frecuencia límite por los comparos con la entrada V (V) y la entrada H (H), la frecuencia límite es aproximadamente 10 kHz. Para una autoescala.

Se coloca el vector de frecuencia de barrido ANEP 198U, No. en EXT, se ajustan los controles de ganancia para una adecuada anchura, obteniendo de esta manera una elipse como se muestra en la figura 7.4



**Fig. 7.4 Medición del ángulo de fase.**

El ángulo de fase se determina por la ec. 7.3 a partir de la Fig. 7.5

$$\theta = \sin^{-1} \frac{A}{B}$$

**7.4 Descripción**

Conecte el diagrama de la Fig. 7.5 utilizando un osciloscopio de un trazo deslizado previamente, un

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

TECNOLOGICO NACIONAL DE MEXICO  
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

7.3 Desarrollo

Conecte el diagrama de la fig. 7.3 utilizando un osciloscopio de un trazo desvirtuado previamente, un generador de funciones LF2 - 1300 y un voltímetro en la salida del generador.



Fig. 7.3 Medición de voltaje para diferentes formas de onda.

Completar el cuestionario para cada magnitud de voltaje de onda senoidal del 4 (40%). Como aparece en la tabla 7.1 usando el voltímetro. Con el mismo valor mide el voltaje de pico a pico para las ondas: senoidal, triangular y cuadrada.

$V_r$ (V)	$V_{pp}$ (mV)	$V_{pp}$ (cm)	$V_{pp}$ (m)	$V_r$ (V)	$V_{pp}$ (mV)	$V_{pp}$ (cm)
400 mV						
800 mV						
3 V						
6 V						
10 V						

Tabla 7.1 Cuestionario de la medición de voltaje

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN LUIS POTOSÍ

Completar los valores de voltaje medidos en el osciloscopio con respecto al voltaje dado en la primera columna de la tabla 7.1 y por qué? En el caso de que no sean iguales los valores de voltaje de la primera columna.

- Mida la frecuencia por el método de comparación utilizando el generador de funciones LF2 - 1300 y conecte en la entrada horizontal a 100 ms un valor de voltaje de 4 V.
- Genere una frecuencia con una onda senoidal de 60, 120 y 180 Hz. Utilice el osciloscopio para visualizar claramente la señal. Utilice la eq. 7.2 para verificar el valor de la frecuencia.
- Desconecte el circuito mostrado en la Fig. 7.4 para medir el ángulo de fase y registre los valores en  $\theta_1$ .
- Complete la tabla 7.2 para los valores de resistencia dados. Utilice en la eq. 7.4 para calcular  $\theta_2$  usando  $R_0 = 1/125 \Omega$ .

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{R_0}{X} \quad (7.4)$$

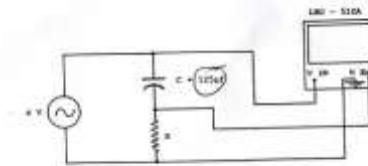


Fig. 7.4 Diagrama de conexiones.

Con la eq. 7.5 calcule el porcentaje de diferencia entre  $R_1$  y  $R_2$ , de la tabla 7.3.

$$\%Dif. = \frac{\text{Valor mayor} - \text{Valor menor}}{\text{Valor mayor}} \quad (7.5)$$

$R_1$	A	B	A/B	$D_1$	$D_2$	%Dif
35 $\Omega$						
39 $\Omega$						
47 $\Omega$						
100 $\Omega$						
150 $\Omega$						
220 $\Omega$						

Tabla 7.3 Resultados de medición de fase.

Inserir sus dos lecturas de las dos bobinas para encontrar el ángulo de fase.

#### 7.4 Conclusiones

Se vieron las partes básicas de un osciloscopio, su función y su aplicación para medir señales para diferentes tipos de ondas. Frecuencia por el método de comparación y el ángulo de fase en los dos puntos de un circuito. Se vieron otros osciloscopios como el de hazo de electrones y sus sistemas de deflexión movidos en el mismo tubo de rayos catódicos, para dos dimensiones y rayos simultáneamente. En algunos se pueden tener y ver los dos señales de señales entre sí al mismo tiempo.



#### 7.5 Preguntas

- 7.5.1 ¿Cuáles son las ventajas que posee el osciloscopio sobre otros tipos de instrumentos eléctricos de medición?
- 7.5.2 Describe cómo la pequeña marca de luz en la pantalla del osciloscopio es creada por el tubo de rayos catódicos.
- 7.5.3 Explique ¿por qué un dato permanente puede ser causado en el tubo de rayos catódicos, si se permitida la marca a quedarse estacionada en un punto de la pantalla?
- 7.5.4 ¿Qué tipos de osciloscopios existen y cuál es su función?
- 7.5.5 ¿Cuáles son los errores posibles que pueden existir en la exactitud de la medición?
- 7.5.6 ¿Existen otras maneras de medir el ángulo de fase en dos puntos de un circuito y si existen descríbalas?

## 3. Medición de parámetros.

### 3.1 Medición y prueba de dispositivos y elementos.

#### 3.1.1 Resistencias.

Si analizamos detalladamente los ejemplos hasta ahora presentados en los temas precedentes, reconoceremos en todos ellos una característica común: la medida se obtiene a partir de la lectura de un aparato indicador, es decir de la deflexión del mismo. Se los agrupa en un gran conjunto de los métodos de medida que recibe precisamente el nombre de **métodos de deflexión**. Tienen una gran ventaja, su sencillez y rapidez de interpretación, pero una desventaja que les fija sus límites: su error depende del de calibración del aparato en que se lee, y éste tiene un tope inferior del que no es posible descender.

Los elementos pasivos de un circuito, R, L y C, en particular las resistencias, son susceptibles de ser conocidas con un error mucho menor que el de graduación de un aparato. El camino lógico es entonces plantearse la pregunta: ¿podremos idear un método en el



que el resultado no dependa de la calibración de los aparatos y por lo tanto no esté afectado de errores instrumentales?. La respuesta es sí. Pensemos p. ej. en un puente de Wheatstone: el valor de la resistencia incógnita  $X$  se obtiene a partir de la relación que deben cumplir otras resistencias conocidas del circuito para lograr una indicación cero en el detector, ( $I_d = 0$ ):

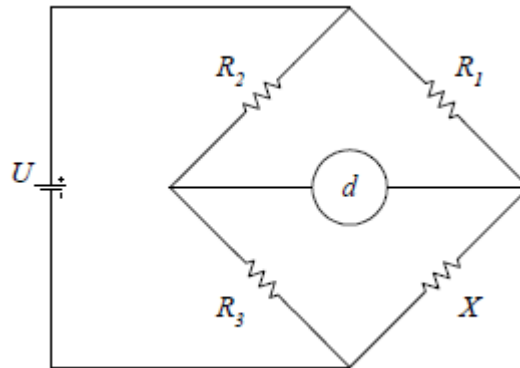


Figura 53 Esquema de un puente de Wheatstone

El detector, en esta aplicación, **no mide** la corriente en la rama correspondiente, sino que debe detectar su presencia.

No existe error de calibración del mismo que influya en el resultado.

Un método de estas características se denominará **método de cero** y será intrínsecamente más exacto que uno de deflexión.

Es bueno remarcar a esta altura que si bien no influye ningún error de calibración del detector, sí pesará la capacidad que éste tenga para censar corrientes de valores muy bajos.

Además de la clasificación en los grandes grupos que hemos mencionado más arriba existen otras posibles divisiones, que están suficientemente documentadas en la literatura. En este punto sólo citaremos otra posible división que agrupa a los métodos en **métodos de comparación y métodos de sustitución**.

Si bien toda medida es una comparación, como hemos ya visto en la primera parte, reservaremos el nombre de **método de comparación** para aquél particular en que el patrón y la incógnita coexisten en el mismo experimento, como puede apreciarse en el siguiente esquema elemental de un método de comparación aplicado a la medición de resistencias:

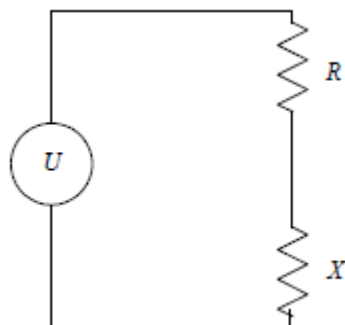


Figura 54 Esquema elemental del método de comparación

Si con un voltímetro medimos primero la caída de tensión en  $R$  y luego hacemos lo mismo con  $X$ , es evidente que el valor de esta última puede calcularse a partir de la indicación del instrumento en ambos casos y del valor de  $R$ . Fácilmente se deduce que:

$$X = \frac{U_x}{U_R} = R \quad (3.1)$$

es de notar que en la forma en que se ha planteado, se está ante un método de comparación, pero si queremos incluirlo en alguna otra de las clasificaciones de más arriba será necesario dar indicaciones sobre, por ejemplo, cómo se han medido las tensiones. Si la lectura de ellas se hace con un voltímetro común, nuestro método será de comparación pero además de deflexión, en particular de **dobles deflexión** pues depende de dos lecturas de un dado aparato, lo que si nos atenemos a lo más arriba dicho, conspirará contra su exactitud. Si, en cambio, las lecturas se hacen con un método de cero, estaremos ante un método de comparación por cero. El cálculo de los errores que afectan a un método de la naturaleza del propuesto se realiza en forma inmediata aplicando los conceptos básicos oportunamente expuestos

Como surge de los conceptos de más arriba, un sistema de medida muchas veces puede encuadrarse dentro de diferentes clasificaciones. Lo realmente importante, más que estar en condiciones de ubicarlo en uno u otro grupo, es saber discernir cuáles serán sus características básicas, y qué puede esperarse del mismo, tanto en lo que se refiere a su exactitud como a la facilidad de implementación, rapidez, y, no lo menos importante, costo. En los métodos de **sustitución**, en cambio, se requiere de un patrón (variable muchas veces), de la misma naturaleza que la incógnita, y de un dispositivo que sea capaz de detectar las diferencias que se producen en el mismo circuito cuando el patrón es reemplazado por la incógnita y viceversa. Su esquema de principio es el siguiente:

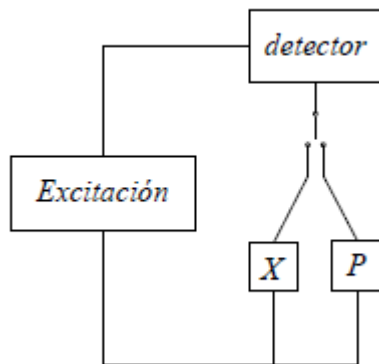


Figura 55 Esquema elemental del método de sustitución

El bloque "excitación" representa a cualquier elemento que provee una señal cuyo efecto sobre  $X$  y sobre  $P$  pueda ser detectado por el bloque "detector". Caben multitud de alternativas para los distintos elementos si se acepta la amplia definición anterior. En nuestro estudio serán de interés sólo los casos más simples, en los que las excitaciones son tensiones o corrientes, y los elementos detectores

desde voltímetros o amperímetros hasta elementos más sofisticados como puentes u otros circuitos complejos

El principio del método es muy sencillo: En una etapa de la medición se tiene el conjunto excitación detector- incógnita y se observa la indicación del detector. Luego se intercambia la incógnita por el patrón, y eventualmente se lo ajusta hasta lograr la misma indicación en el detector. En el límite, cuando el circuito no discierne entre patrón e incógnita, se concluye que ambos son iguales. La ventaja es evidente, ya que el error de  $X$  depende en forma directa del de  $P$ , al que habrá que sumarle otro, típico de estos métodos, y es el resultante del hecho de que pueden existir pequeñas diferencias entre ambos, que, si bien en teoría cambian el estado de funcionamiento del conjunto, en la práctica pasan inadvertidas. Este nuevo error, resultante de la falta de sensibilidad del conjunto, recibe el nombre de **error de insensibilidad** y es típico de todos los esquemas de medida en los que se deben detectar respuestas ante cambios en alguna situación particular.

Si reparamos en las definiciones anteriores, veremos que se ha sido muy general al hablar de los elementos que detectan variaciones y de la fuente de excitación. Dependiendo si se trata de métodos de cero (imaginemos por un instante que el conjunto fuente detector esté configurado como un puente de Wheatstone) o de deflexión, (el detector puede ser un simple amperímetro conectado en una rama de la configuración), el método de sustitución participará de las características de uno o de otro. Merece citarse aquí que el método de sustitución, en su variante de cero, es capaz de alcanzar las más altas exactitudes esperables en el campo de las Medidas Eléctricas.

Para fijar las ideas analizaremos rápidamente el siguiente circuito, que nos permite aplicar un método de sustitución por deflexión y que nos permitirá emplear los conceptos vertidos hasta ahora, tanto en lo que se refiere a métodos como a errores, e introducirnos en el análisis de la sensibilidad de los métodos de medida:

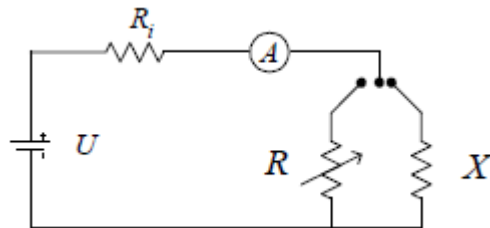


Figura 56 Método de sustitución aplicado con un amperímetro y un resistor de referencia

El manejo es muy sencillo: ajustando  $R_i$  se logra una dada indicación en el amperímetro, con la llave conectada por ejemplo a  $X$ . A continuación se cambia la llave a  $R$  y se varía ésta hasta lograr la misma indicación que en la primera parte. En este caso diremos que  $X = R$ .

Es fundamental notar que el amperímetro no está colocado para **medir** la corriente, sino para verificar que su valor sea el mismo en ambas etapas de la medida. Este detalle es el que justifica la ventaja

del método: No influye en el resultado el error de indicación de ningún instrumento, es más, éste puede estar descalibrado, mientras a igual excitación responda con igual salida, resultará igualmente útil. Lo dicho vale para cualquier detector que empleemos, aún cuando sea un circuito complejo.

En cuanto al error que afecta a  $X$ , obviamente será, por un lado, el error de  $R$ , y por el otro el error de insensibilidad, debido a que siempre nos quedará una duda respecto de las pequeñas diferencias que sabemos que, aunque existen, producen variaciones de corriente que son imperceptibles para el aparato que usamos como detector.

Para el cálculo del error de insensibilidad aplicamos un concepto muy sencillo, que se repetirá en cualquier otro circuito. Como este error aparece porque hay pequeñas variaciones de corriente que no son detectables por el amperímetro, todo lo que haremos es calcular la variación de la corriente con  $X$ , y en el límite, cuando  $I$  tienda a la mínima variación de corriente detectable, entonces, por definición,  $X$  tenderá a un valor que llamaremos **error absoluto de insensibilidad**.

Para hacerlo escribimos la expresión de la corriente en el circuito y calculamos su variación con  $X$ .

$$I = \frac{U}{R_i + R} = \frac{U}{R_i + X} \quad (3.2)$$

$I$

válida cuando  $R \rightarrow X$ . Si ahora calculamos la derivada de  $I$  respecto de  $X$  resulta

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{U}{(R_i + X)^2} \quad (3.3)$$

a partir de la cual resulta inmediato el cálculo del error de insensibilidad si se tienen en cuenta

las siguientes consideraciones:

- a) en el límite la mínima variación de corriente detectable en el amperímetro es igual a su resolución,  $\Delta OI$ ,
- b) el instrumento se lee **dos veces**: una cuando se aprecia la indicación para  $X$ , y la otra cuando se hace lo propio con  $R$ , por lo que la contribución del error deberá tomarse doble.

Teniendo en cuenta lo antes dicho, y operando en la (3.3), recordando las definiciones de error absoluto y relativo que se dieran en el Capítulo 1, se llega a la expresión del error de insensibilidad en el método estudiado:

$$e_i = \pm \frac{2\Delta_0}{X \cdot I} [X + R_i] \quad (3.4)$$

De la observación de la (3.4) se extraen las siguientes condiciones operativas:

\* el error de insensibilidad depende del circuito, como era previsible, ya que nos interesa ver cómo varía la corriente cuando se modifica uno de sus parámetros. En particular, si la excitación fuera aplicada con un generador de corriente, el circuito sería insensible a cambios

en X; \* si bien lo único que interesa es la deflexión del amperímetro, y no su exactitud, debe cuidarse que la lectura se efectúe lo más próxima posible al fondo de escala, pues el cociente  $\frac{\Delta_0 I}{I}$  se hace más pequeño cuanto mayor sea el valor de I. En los casos de instrumentos de alcances múltiples, el término anterior puede expresarse en función de la deflexión del mismo, llegándose a la conclusión que, una vez elegido el alcance, es conveniente llegar tan cerca del fondo de escala como sea posible.

El esquema elemental del método de sustitución que se ha discutido permite arribar a las ideas generales que están detrás de sus diferentes variantes. Debe remarcarse que, si se cuenta con un patrón adecuado, el error queda condicionado exclusivamente por la posible falta de sensibilidad del método, que utilizando detectores adecuados puede hacerse casi tan pequeña como se quiera. En particular, modificaciones del método de sustitución, aplicadas con puentes , o con compensadores son capaces de alcanzar las más altas exactitudes esperables en el campo de las medidas eléctricas.

En esta altura de nuestra discusión, la importancia fundamental del método que se ha citado hay que buscarla más allá de las exactitudes límites conseguibles, lo que es un campo relativamente reducido de la ingeniería, sino en la idea subyacente: con medios reducidos, y teniendo presentes sólo definiciones elementales, es posible medir con exactitudes muy superiores a las que consentiría el uso directo de cada uno de ellos.

### **Ejemplo 3.1**

Se desea medir el valor de una resistencia de aproximadamente 100  $\Omega$ ,  $\frac{1}{4}$  W, con el menor error que consiente un conjunto de aparatos de medida formado por:

\* Óhmetro (aparato cuya indicación es directamente el valor de la resistencia), con un error del orden del 5 % para una incógnita del orden de la dada;

\* Fuentes auxiliares de 2 V, corriente nominal 2 A; \* miliamperímetro de alcance 10 mA, clase 1, escala con 100 divisiones, resolución absoluta 1/10 de división;

\* Caja de resistores variables, formada por décadas de 0,1, 1, 10 y 100  $\Omega$ , cuyo error al ajustar aproximadamente 100  $\Omega$ es de  $\pm 0,2$  %. Potencia de disipación máxima:  $\frac{1}{4}$  W cada década;

\* Resistores de regulación adecuados.

### **Solución**

El listado de elementos disponibles nos permite apreciar que estamos en condiciones de aplicar el esquema elemental del método de sustitución que se ha discutido a partir de la figura 56. Es interesante notar que si se optara por la medición directa con el óhmetro, sin duda el camino más fácil, el error resultaría del orden del 5 %. Usando,

en cambio, los restantes elementos para aplicar un método de sustitución, el error resultará notablemente más pequeño.

Lo primero por hacer es determinar cuál es la corriente máxima que puede manejar tanto la incógnita como las referencias:

$$P_{ad} = 1/4 W = 0.25W \rightarrow I_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{0.25}{100}} = 50mA$$

**(3.5)**

en el caso del resistor incógnita de 100 Ω. Con el mismo mecanismo se encuentran las corrientes admisibles para cada una de las décadas de la caja de resistores.

Como nuestro miliamperímetro es de alcance 10 mA, nos interesará medir lo más cerca posible de ese valor. Si aplicamos los 2 V de la fuente directamente a la incógnita, la corriente resultante será de 20 mA, por lo que necesitaremos agregar resistencias en serie hasta lograr aproximadamente 10 mA (se colocarán otros 100 Ω en el lugar de  $R_i$  de la figura 56.

El error de insensibilidad resultante será:

$$e_i = \pm \frac{2\Delta_0}{X \cdot I} [X + R_i] = \pm \frac{2 \cdot 0.1 \text{ div}}{100 \Omega \cdot 100 \text{ div}} (100 + 100) \Omega \cdot 100 = \pm 0.4\%$$

**(3.6)**

por lo que el error total resultante de la medición será:

$$e_x = \pm(e_R + e_i) = \pm(0,2 + 0,4) = \pm 0,6\%$$

**(3.7)**

lo que representa una mejoría importante respecto de la alternativa de la medición directa.

Si se analiza la (3.6), se ve que una causa importante del error es la contribución de la resistencia extra de 100 Ω que fue necesaria para ajustar la corriente a la medible por el miliamperímetro. Si fuera necesario extremar las precauciones para achicar el error, sería deseable no colocarla, para lo cual existen dos caminos inmediatos:

- a) bajar la tensión auxiliar:
- b) colocar los resistores de regulación de modo que la resistencia Thevenin vista desde los bornes de la incógnita hacia la fuente sea la menor posible (por ejemplo, mediante un divisor de tensión en vez de un resistor serie)

## Referencias bibliográficas

- [1] Stout, Melville B.: "Basic Electrical Measurements" Pergamon Press, 1960.
- [2] Frank, Ernest: "Análisis de medidas eléctricas", Mc Graw Hill, 1969.
- [3] Cooper, William D., Helfrick, Albert D.: "Instrumentación Electrónica Moderna y Técnicas de Medición", Prentice Hall, 1991.
- [4] Dampé, Jorge L.: "Medición de resistencias elevadas", C.E.I.L.P., año 1982

### 3.1.2. Inductancia y capacitancia.

#### *La bobina o inductores.*

La bobina o inductor es un elemento muy interesante. A diferencia del condensador o capacitor, la bobina por su forma (espiras de alambre arrollados) almacena energía en forma de campo magnético. Todo cable por el que circula una corriente tiene a su alrededor un campo magnético generado por la corriente, siendo el sentido de flujo del campo magnético, el que establece la ley de la mano derecha (ver electromagnetismo). Al estar la bobina hecha de espiras de cable, el campo magnético circula por el centro de la bobina y cierra su camino por su parte exterior. Una característica interesante de las bobinas es que se oponen a los cambios bruscos de la corriente que circula por ellas. Esto significa que a la hora de modificar la corriente que circula por ellas (ejemplo: ser conectada y desconectada a una fuente de poder de corriente directa), esta tratará de mantener su condición anterior. En otras palabras:

**La bobina o inductor es un elemento que reacciona contra los cambios en la corriente a través de él, generando una tensión que se opone a la tensión aplicada y es proporcional al cambio de la corriente**

Las bobinas se miden en Henrios (H.), pudiendo encontrarse bobinas que se miden en Mili Henrios (mH). El valor que tiene una bobina depende de:

- El número de espiras que tenga la bobina (a más vueltas mayor inductancia, o sea mayor valor en Henrios).
- El diámetro de las espiras (a mayor diámetro, mayor inductancia, o sea mayor valor en Henrios).
- La longitud del cable de que está hecha la bobina.
- El tipo de material de que esta hecho el núcleo, si es que lo tiene. Qué aplicaciones tiene una bobina?
- Una de las aplicaciones más comunes de las bobinas y que forma parte de nuestra vida diaria es la bobina que se encuentra en nuestros autos y forma parte del sistema de ignición.
- En los sistemas de iluminación con tubos fluorescentes existe un elemento adicional que acompaña al tubo y que comúnmente se llama balastro
- En las fuentes de alimentación también se usan bobinas para filtrar componentes de corriente alterna y solo obtener corriente continua en la salida



#### *El condensador – capacitor*

Un condensador o capacitor es un dispositivo electrónico que está formado por dos placas metálicas separadas por un aislante llamado dieléctrico. Un dieléctrico o aislante es un material que evita el paso de la corriente.



El capacitor es un dispositivo que almacena energía en la forma de un campo eléctrico (es evidente cuando el capacitor funciona con corriente directa) y se llama capacitancia o capacidad a la cantidad de cargas eléctricas que es capaz de almacenar.

La capacidad depende de las características físicas de condensador:

- Si el área de las placas que están frente a frente es grande la capacidad aumenta
- Si la separación entre placas aumenta, disminuye la capacidad
- El tipo de material dieléctrico que se aplica entre las placas también afecta la capacidad
- Si se aumenta la tensión aplicada, se aumenta la carga almacenada

La función del dieléctrico es aumentar la capacidad del condensador.

Los diferentes materiales que se utilizan como dieléctricos tiene diferentes grados de permitividad. (Diferente capacidad para el establecimiento de un campo eléctrico

Material	Permitividad relativa (Er)
Vacío	1
Aire	1,0059
Polietileno	2,5
Porcelana	5...6
Mica	7
Pentóxido Tántalo	26
Cerámica	10 a 50000

Mientras mayor sea la permitividad mayor es la capacidad del condensador

La capacitancia de un condensador está dada por la fórmula:  $C = Er \times A / d$

Donde

- C = capacidad
- Er = permitividad
- A = área entre placas
- d = separación entre las placas

La unidad de medida es el faradio. Hay submúltiplos como el miliFaradio (mF), microFaradio (uF), el nanoFaradio (nF) y el picoFaradio (pF)

Las principales características eléctricas de un condensador son su capacidad o capacitancia y su máxima tensión entre placas (máxima tensión que es capaz de aguantar sin dañarse).

**Nunca conectar un capacitor a un voltaje superior al que puede aguantar pues puede explotar**

Algunos capacitores son polarizados (ver signo + o signo - en el cuerpo del elemento) y hay que conectarlos con cautela. **Nunca conectarlo al revés pues puede dañarse y explotar** Hay dos tipos de condensadores. Fijos y variables. ver clasificación de los capacitores



Símbolo condensador no polarizado

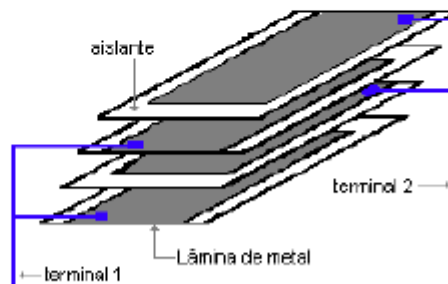


Símbolo condensador electrolítico (polarizado)

## Clasificación de los condensadores / capacitores

### Condensadores / Capacitores fijos:

Estos se diferencian entre sí por el tipo de dieléctrico que utilizan. Materiales comunes son: la mica, plástico y cerámica y para los capacitores electrolíticos, óxido de aluminio y de tantalio. Hay de diseño tubular, y de varias placas y dieléctrico intercalados. El diseño de múltiples placas es un diseño para aumentar el área efectiva de la placa. Entre placa y placa se coloca el aislante y cada placa de por medio se conecta.



### Condensadores de cerámica

- Algunos tipos de cerámica permiten una alta permitividad y se alcanza altos valores de capacitancia en tamaños pequeños, pero tienen el inconveniente que son muy sensibles a la temperatura y a las variaciones de voltaje.
- Hay otros tipos de cerámica que tienen un valor de permitividad menor, pero que su sensibilidad a la temperatura, voltaje y el tiempo es despreciable. Estos capacitores tienen un tamaño mayores que los otros de cerámica

### Condensadores de lámina de plástico

- Láminas de plástico y láminas metálicas intercaladas: Estos tipos de capacitores son generalmente más grandes que los de lámina metalizada, pero tienen una capacitancia más estable y mejor aislamiento.

- Lámina metalizada: Tiene la lámina metálica depositada directamente en la lámina de plástico. Estos capacitores tienen la cualidad de protegerse a sí mismos contra sobre voltajes. Cuando esto ocurre aparece un arco de corriente que evapora el metal eliminando el defecto.

**Condensadores de mica:** Son capacitores de bajo costo, baja corriente de fuga (corriente que pierden los condensadores y que hacen que este pierda su carga con el tiempo) y alta estabilidad. Su rango de valores va de los pF a 0.1 uF.

**Condensadores electrolíticos:** Estos capacitores pueden tener capacitancias muy altas a un precio razonablemente bajo. Tienen el inconveniente de que tienen alta corriente de fuga y un voltaje de ruptura bajo. Son polarizados y hay que tener cuidado a hora de conectarlos pues pueden estallar si se conectan con la polaridad invertida. Se utilizan principalmente en fuentes de alimentación.

**Condensadores de tantalio:** Son polarizados por lo que hay que tener cuidado a la hora de conectarlo.

#### **Condensadores / capacitores variables**

- Hay un tipo muy utilizado para la sintonía de aparatos de radio. La idea de estos es variar con la ayuda de un eje (que mueve las placas del capacitor) el área efectiva de las placas que están frente a frente y de esta manera se varía la capacitancia

- Otro tipo es el "trimmer" que se utiliza para ajustes finos, en rangos de capacitancias muy **pequeños. Normalmente éstos, después de haberse hecho el ajuste, no se vuelven a tocar.**

### **3.1.3 Mediciones con puentes.**

#### **MEDIDA DE RESISTENCIAS CON EL PUENTE DE WHEATSTONE**

- **Generalidades**

Los procedimientos de medición denominados métodos de cero, o también, **puentes de medida**, son los de máxima precisión y, por lo tanto, los más empleados en laboratorios de medida y cuando se requiere una elevada exactitud.

En estos procedimientos, se determina el valor de la magnitud buscada mediante la comparación de la misma con los valores de patrones regulables de resistencias, reactancias, etc. La comparación resultará válida cuando el aparato indicador (generalmente un galvanómetro) indique cero (corriente nula) en una determinada rama del circuito de medida.

Los valores obtenidos con estos procedimientos no están afectados por los errores ni por la calibración del aparato indicador. La exactitud depende, exclusivamente, de la sensibilidad del galvanómetro o de cualquier otro aparato indicador que se utilice. La exactitud de la medida también es independiente del valor de la tensión utilizada para la medida.

El circuito utilizado en estos métodos de medida es un cuadripolo con dos bornes de entrada y dos bornes de salida que recibe el nombre de **puente**. En los bornes de entrada se conecta la fuente de alimentación y

en los bornes de salida el instrumento medidor o indicador de cero, el cual ha de ser muy sensible.

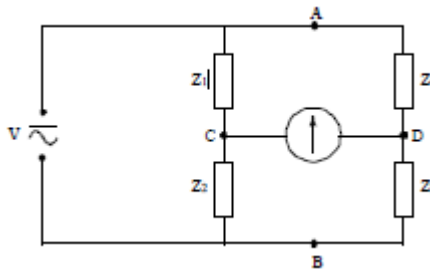


Figura 57

El circuito además de la fuente y el indicador está constituido por cuatro impedancias conectadas como se muestra en la figura 57, constituyendo lo que se denomina un puente de dos brazos. En este puente se podrá variar adecuadamente uno o más parámetros del circuito y obtener un estado de equilibrio en el cual desaparece la diferencia de potencial entre los bornes a los cuales está conectado el dispositivo indicador de cero.

**2. Puentes de** El circuito además de la fuente y el indicador está constituido por cuatro impedancias conectadas como se muestra en la figura **medida de corriente continua**

Estos puentes se caracterizan por que la fuente de alimentación es de corriente continua, por ejemplo una batería de pilas y los brazos están constituidos exclusivamente por resistencias. Se utilizan exclusivamente para la medida de resistencias.

***Puente de Wheatstone***

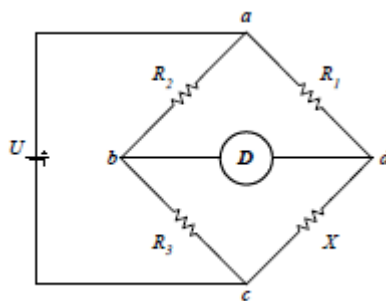


Figura 58 Esquema circuito de un puente de Wheatstone

El circuito puente de Wheatstone, cuyo esquema circuito se muestra en la figura 58, se utiliza ampliamente, ya sea como método de cero, para la medición de resistencias, o en condiciones de desequilibrio, para el control o medición de magnitudes no eléctricas

En el circuito dibujado hemos despreciado la resistencia de la batería por razones de sencillez, apreciación que en la mayoría de los casos reales resulta acertada.

El detector conectado a los bornes *b* y *d* es un instrumento sensible a la corriente continua. Como detector de cero es común el empleo de un galvanómetro de imán permanente y bobina móvil.

Como método de control posee en general, en una de sus ramas, un elemento resistivo sensible a alguna magnitud física (temperatura, longitud, presión, etc.). En tanto, como método de cero, permite medir resistencias con exactitudes que pueden ir desde algún tanto por mil hasta 10 – 20 p.p.m. (como se aprecia, la exactitud lograda es muy alta).

El puente está básicamente constituido por dos divisores de tensión, de relación variable, cuya comparación se logra mediante un adecuado detector. La condición de equilibrio ( $U_{bd} = 0$ ) se cumple siempre que:

$$R_1 * R_3 = R_2 * X \quad (1)$$

de donde, conocidas tres de las resistencias del puente, la cuarta,  $X$ , puede averiguarse a partir de:

$$X = \frac{R_1}{R_2} \times R_3 \quad (2)$$

que es la conocida ecuación de equilibrio del puente.

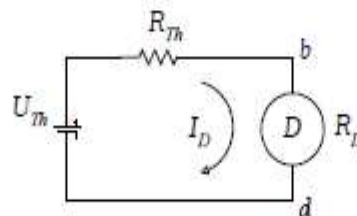
Es de destacar que las ecuaciones (4.1) y (4.2) no dependen de la tensión  $U$ , de lo que se concluye que ésta no pesa en el equilibrio, aunque, como veremos, sí lo hace en cómo se llega a él.

Generalmente, en su uso como método de cero,  $R_1$  y  $R_2$  son dos resistores de alta calidad, variables con ciertas restricciones, que reciben el nombre de **resistores de relación**, y **relación** su cociente, que se busca que sea una potencia entera de 10 por razones de simplicidad de operación. El resistor  $R_3$  es una caja de décadas de alta calidad, que recibe el nombre de **resistor de comparación**. Es dable señalar lo gráfico que resulta el nombre: ajusta la relación del divisor que se compara con el formado por  $R_1$  y  $X$ . Obviamente, la cantidad de décadas de  $R_3$  dependerá de la exactitud lograda con un dado puente.

## 4.2. Estudio del circuito

Para poder analizar el funcionamiento del puente de Wheatstone, usado en cualquiera de las aplicaciones mencionadas, se hace imprescindible determinar cuál es el comportamiento de la corriente en el detector,  $I_D$ , ante variaciones de  $X$ . Cabe remarcar que el análisis se efectuará considerando pequeños apartamientos de  $X$  respecto de su valor de equilibrio (a los que identificaremos como  $\Delta X$ ), ya que como método de cero interesará estudiar su sensibilidad, y como circuito de control en general se busca que tenga un comportamiento lineal, objetivos que sólo se logran con la restricción mencionada.

Para poder realizar el estudio hallaremos inicialmente el circuito equivalente de Thevenin, “visto” desde los bornes del detector ( $b$  y  $d$  en la figura 4.1). El resultado es el siguiente:



**Figura 4.2:** Circuito equivalente de Thevenin correspondiente a un puente de Wheatstone como el mostrado en la figura 4.1

donde:

$$R_{Th} = \frac{R_1 * X}{(R_1 + X)} + \frac{R_2 * R_3}{(R_2 + R_3)} \quad (4.3)$$

y

$$U_{Th} = \frac{U * R_2 * \Delta X}{(R_1 + X) * (R_2 + R_3)} \quad (4.4)$$

mediante las cuales podemos hallar la corriente  $I_D$  del circuito anterior, como:

$$I_D = \frac{U * R_2 * \Delta X}{(R_1 + X) * (R_2 + R_3) * (R_D + R_{Th})} \quad (4.5)$$



Con relación a la última ecuación, podemos efectuar los comentarios siguientes:

- Si el puente se emplea como método de cero, la ecuación (4.5) permitirá efectuar el análisis de la sensibilidad, como veremos en el punto siguiente.
- Si, en cambio, se emplea como método de control de alguna magnitud física, tal ecuación da la ley de variación del instrumento utilizado como detector respecto de los apartamientos de la resistencia empleada como transductor. Es importante recalcar, que la aparente linealidad de la misma es válida sólo si se cumplen los supuestos considerados para obtener el circuito equivalente (resistencia interna de la fuente despreciable y variaciones de  $X$  pequeñas respecto de su valor de equilibrio).

### 4.3. Análisis de los errores como método de cero

Si operamos con la ecuación (4.2) podemos escribir:

$$e_X = \pm(e_{R_1} + e_{R_2} + e_{R_3}) \quad (4.6)$$

o, si en el puente se conoce la relación  $R_1 / R_2 = \rho$ :

$$X = \rho + R_3 \quad (4.7)$$

y

$$e_X = \pm(e_\rho + e_{R_3}) \quad (4.8)$$

En las que se ha considerado la contribución de los errores de tarado de los resistores que componen el puente en lo que afecta a  $X$ .

Como en cualquier método de cero aparecerá un error de insensibilidad, debido a que existe una cierta corriente  $I_D$ , que corresponde a un  $\Delta X$  y que resulta indetectable.

Para el cálculo del error de insensibilidad procederemos en forma enteramente análoga a lo ya visto en el caso del compensador. Partiendo de la ecuación (4.5), cuando  $I_D \rightarrow \Delta_0 I_D$  (mínima corriente detectable), entonces  $\Delta Y \rightarrow (\Delta Y)_l$ , por lo que la expresión del error de insensibilidad se puede escribir como:

$$e_i = \frac{(\Delta Y)_l}{X} = \frac{\Delta_0 I_D \cdot (R_1 + X) \cdot (R_2 + R_3) \cdot (R_D + R_{Tn})}{U \cdot R_2 \cdot X} \quad (4.9)$$

donde  $R_{Tn}$  se obtiene de la expresión (4.3).

La ecuación (4.9) merece un análisis más detallado:

- $e_i$  es inversamente proporcional a  $U$ , de donde se obtiene una conclusión operativa importante: la tensión de alimentación puede utilizarse para ajustar el error de insensibilidad, dentro de ciertos límites.



- Análogamente a lo mencionado para la ecuación (4.5), la relación entre  $\Delta_0 I_D$  y  $(\Delta X)_i$  (si este último es pequeño) es una función lineal, lo que justifica, en algunas aplicaciones, emplear un método de interpolación también lineal para el cálculo del  $e_i$  (ver punto 4.3.2).
- Aparece en el numerador de la ecuación (4.9) un término que depende de la  $R_m$  del puente. Es evidente que si ésta es alta el error de insensibilidad puede crecer. (No debe perderse de vista que  $R_1$  y  $X$  también forman parte del denominador).
- Hay un término en el numerador que depende de  $R_D$ , por lo que, si se cambia el detector, en busca de uno de  $\Delta_0 I_D$  adecuado, debe estar atento a que la diferente  $R_D$  no arruine las ventajas probables de un  $\Delta_0 I_D$  menor. Es de destacar que este comportamiento es el mismo que ya se ha visto en el método de oposición, y será análogo al que resulte en cualquier otro método de cero que emplee un detector como el que nos ocupa.

#### 4.3.1. Determinación de la sensibilidad adecuada

Si analizamos ahora las expresiones completas que nos dan los errores que afectan a  $X$ :

$$e_X = \pm(e_{R_1} + e_{R_2} + e_{R_3} + e_i) \quad (4.10)$$

o

$$e_X = \pm(e_p + e_{R_3} + e_i) \quad (4.11)$$

vemos que poseen dos términos netamente diferenciados:

- uno que depende de las características del puente, y que no es achicable para uno ya construido (habría que cambiar de puente, y por ende de resistores);
- otro, que es el de insensibilidad, y que puede ser controlado dentro de ciertos límites por el operador. Es evidente que la idea es hacer este error pequeño con relación al anterior, de modo de no desperdiciar las bondades del aparato. El valor de  $e_i$  típicamente será del orden de 1/10 del de construcción: menor  $e_i$  no agrega nada a la exactitud, pero si complicaciones en el manejo; mayor  $e_i$  significa desaprovechar las bondades de los resistores que componen el aparato.

#### Ejemplo 4.1

Se pretende medir una resistencia  $X$  de aproximadamente 2500  $\Omega$  ( $P_{adm} = 0.5$  W), con el menor error posible. Para efectuar la medición se dispone de los siguientes elementos:

- Fuente de tensión continua, variable de 0 a 50 V,  $I_{maxima} = 5$  A,  $R_{salida} < 1$   $\Omega$ , mínima variación estable de la tensión de salida 0,01 V.
- Galvanómetro:  $k_1 = 3,2$   $\mu$ A/div,  $R_g = 300$   $\Omega$ , la resolución puede considerarse igual a 0,1 división.
- Puente de Wheatstone, con ecuación de equilibrio  $X = (R_1/R_2) \cdot R_3$ , en el cual,  $R_1$  y  $R_2$  son resistores independientes que pueden tomar valores de 100, 1000 ó 10000  $\Omega$ , ( $e_{R1} = e_{R2} = \pm 0,02\%$ ),  $R_3$  es un resistor de décadas de (10x1000 ; 10x100 ; 10x10 ; 10x1)  $\Omega$ , ( $e_{R3} = \pm 0,02\%$  para las décadas de 1000, 100 y 10  $\Omega$ , y  $\pm 0,1\%$  para la de 1  $\Omega$ ). La potencia admisible de cada una de las resistencias del puente es de 0,25 W.

Seleccione los valores de resistencia que asignará a cada una de las ramas del puente y cuál será la tensión con la que lo alimentará. Justifique cada elección.

*Solución*

Siendo la ecuación de equilibrio del puente disponible  $X = (R_1/R_2) * R_3$ , y con el fin de utilizar la mayor cantidad de décadas posibles de  $R_3$ , seleccionaremos inicialmente  $R_3 = 2500\Omega$ , con lo cual  $(R_1/R_2)$  será igual a 1. Este valor puede obtenerse, por ejemplo, haciendo  $R_1 = R_2 = 1000\Omega$  (Ref. [1]). Llegado este punto, y ya que se dispone de un único detector de cero, restaría definir cuál será el valor de la tensión de alimentación. Para ello, con los valores asignados antes a los resistores, comenzaremos calculando la máxima tensión que puede aplicársele al circuito sin provocar daños permanentes a sus componentes. Así, en la rama  $R_1$ -X, la corriente admisible está determinada por X, y es igual a:

$$I_{(R_1-X) \text{ adm}} = \sqrt{\frac{0,5}{2500}} = 14 \text{ mA}$$

En tanto, en la rama  $R_2$ - $R_3$ , la corriente admisible es igual para ambas:

$$I_{(R_2-R_3) \text{ adm}} = \sqrt{\frac{0,25}{1000}} = 16 \text{ mA}$$

Por lo tanto, la tensión máxima admisible estará definida por la rama  $R_1$ -X, y será:

$$U_{\text{adm}} = 14 \text{ mA} * 3500\Omega = 49 \text{ V}$$

El valor obtenido no implica que sea necesario aplicarlo para efectuar la medición, sino simplemente que el mismo no debe ser superado. En la práctica, en general, la tensión se aumenta progresivamente desde un valor bajo hasta conseguir una adecuada sensibilidad en la última década de  $R_3$ . Posteriormente, con el método que se desarrolla en 4.3.2, podrá hallarse el error de insensibilidad cometido.

Un cálculo adicional, no demasiado engorroso, permitiría estimar un valor de tensión que haga despreciable el error de insensibilidad. Para este ejemplo, considerando que el error total de la medición, debido a la tolerancia de los resistores en juego, será:

$$e_x = \pm(e_{R_1} + e_{R_2} + e_{R_3}) = \pm 0,06\%$$

debería buscarse que  $e_i$  sea despreciable frente al  $\pm 0,06\%$ , por ejemplo,  $e_i \leq \pm 0,006\%$ . En ese caso, empleando la ecuación 4.9, podría determinarse qué valor mínimo de  $U$  sería necesario para cumplir tal requisito.

## Puentes para C.A.

### Presentación



Figura 2.26 Polímetro digital (Cortesía de PROMAX).

## 2.3 MEDIDOR DE IMPEDANCIAS

### 2.3.1 Fundamentos

El polímetro digital estudiado en los apartados anteriores, es un instrumento que permite realizar la medida de tensiones, corrientes y resistencias. Pero en muchas aplicaciones se necesita medir la capacidad de un condensador, la inductancia de una bobina, o los componentes resistivo y reactivo de un montaje serie, de un montaje paralelo o de una combinación de ambos.

El instrumento que permite realizar la medida de resistencias, capacidades e inductancias recibe el nombre de "Medidor de impedancias".

El elemento básico de un medidor de impedancias es un puente de medida en alterna cuyo esquema se muestra en la figura 2.27.



que es equivalente a:

$$Z_1 Z_3 \angle(\theta_1 + \theta_3) = Z_2 Z_4 \angle(\theta_2 + \theta_4)$$

Por lo tanto para que el puente esté equilibrado es necesario que se verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones:

- Los productos de los módulos de las impedancias de las ramas opuestas deben ser iguales:

$$Z_1 \cdot Z_3 = Z_2 \cdot Z_4$$

- La suma de los ángulos de fase de las impedancias de las ramas opuestas deben ser iguales:

$$\theta_1 + \theta_3 = \theta_2 + \theta_4$$

### 2.3.2 Puentes de medida en alterna

Existen diversos puentes de medida en alterna que se diferencian por el tipo de impedancias con que están realizados. En sucesivos apartados se estudian los más utilizados.

#### 2.3.2.1 Puente de Maxwell

Se utiliza para medir los parámetros característicos de una bobina en función de una capacidad conocida. Su esquema se representa en la figura 2.28.

Teniendo en cuenta que en una de las ramas hay un condensador en paralelo con una resistencia, resulta más fácil resolver la ecuación de equilibrio utilizando la admitancia de dicha rama en lugar de su impedancia.

De esta forma, se obtiene que la condición de equilibrio del puente viene dada por la expresión:

$$\bar{Z}_x = \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_4 \cdot \bar{Y}_1$$

en la cual:

$$\bar{Z}_2 = R_2 ; \bar{Z}_4 = R_4 ; \bar{Y}_1 = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1$$

Por lo tanto resulta la expresión:

$$\bar{Z}_x = R_x + j\omega L_x = R_2 R_4 \left( \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right)$$

a partir de la cual se obtiene:

$$\begin{cases} R_x = \frac{R_2 R_4}{R_1} \\ L_x = R_2 R_4 C_1 \end{cases}$$

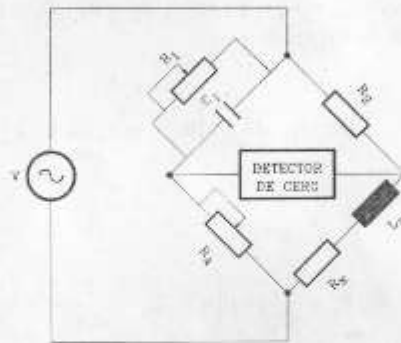


Figura 2.28 Puente de medida de Maxwell.

El puente de Maxwell está limitado a medir inductancias cuyo factor de calidad  $Q$  ( $X/R$ ) es de valor medio  $1 < Q < 10$ . Esto es debido a que un factor de calidad  $Q$  alto, hace que el desfase introducido en la rama correspondiente esté próximo a  $90^\circ$  ( $\theta_3 = 90^\circ$ ).

Dado que se ha de verificar que  $\theta_1 + \theta_3 = \theta_2 + \theta_4$  y que  $\theta_2 = \theta_4 = 0^\circ$ ,  $\theta_3$  ha de ser  $-90^\circ$ , lo cual implica que  $R_1$  debe ser muy elevado y en la práctica resulta muy difícil de conseguir. Por otro lado si el valor de  $Q$  es muy pequeño aparecen problemas de convergencia en el equilibrio de la parte resistiva e inductiva.

### 2.3.2.2 Puente de Hay

Se utiliza para medir los parámetros característicos de bobinas de valor de  $Q$  elevado y su esquema se representa en la figura 2.29.

Se diferencia del de Maxwell en que  $Z_1$  está formada por una resistencia en serie con un condensador.

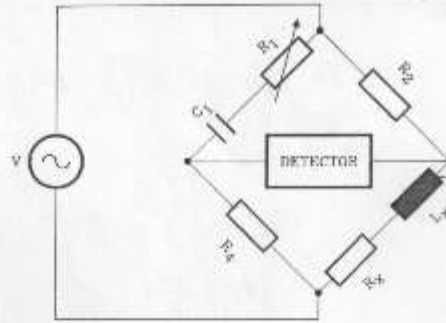


Figura 2.29 Puente de medida de Hay.

Teniendo en cuenta que  $\bar{Z}_1 = R_1 - j / \omega C_1$ ,  $\bar{Z}_2 = R_2$ ,  $\bar{Z}_4 = R_4$  y  $\bar{Z}_x = R_x + j\omega L_x$ , la condición de equilibrio viene dada por la expresión:

$$\left( R_1 - \frac{j}{\omega C_1} \right) \left( R_x + j\omega L_x \right) = R_2 R_4$$

que se convierte en:

$$R_1 R_x + \frac{L_x}{C_1} + j \left( \omega R_1 L_x - \frac{R_x}{\omega C_1} \right) = R_2 R_4$$

a partir de la cual se obtiene:

$$\begin{cases} R_1 R_x + \frac{L_x}{C_1} = R_2 R_4 \\ \omega R_1 L_x - \frac{R_x}{\omega C_1} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo ambas ecuaciones resulta finalmente:

$$\begin{cases} R_x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} \\ L_x = \frac{R_2 R_4 C_1}{1 - \omega^2 C_1^2 R_1^2} \end{cases}$$

De estas dos últimas expresiones se deduce que la resistencia  $R_x$  y la inductancia  $L_x$  dependen de la frecuencia de la onda alterna aplicada al puente. Pero como se demuestra a continuación, esto no es cierto si el valor de  $Q$  es elevado.

En efecto, si se denomina  $\theta_L$  al ángulo de fase del inductor y  $\theta_C$  al del condensador se tiene que:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta_L = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L_x}{R_x} = Q \\ \operatorname{tg} \theta_C = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega R_1 C_1} \end{cases}$$

Dado que  $\theta_2 = \theta_4 = 0^\circ$  (por ser los componentes de dichas ramas resistivos), se ha de verificar que  $\theta_L = \theta_C$ , es decir,  $\operatorname{tg} \theta_L = \operatorname{tg} \theta_C$ . Por lo tanto a partir de las expresiones anteriores resulta:

$$Q = \frac{1}{\omega R_1 C_1}$$

y sustituyendo en las ecuaciones de  $R_x$  y  $L_x$  se tiene:

$$\begin{cases} R_x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4 R_1}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} = \frac{R_2 R_4}{R_1 Q^2 \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)} \\ L_x = \frac{R_2 R_4 C_1}{1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2} = \frac{R_2 R_4 C_1}{1 + \frac{1}{Q^2}} \end{cases}$$

De estas expresiones se deduce que para valores altos de  $Q$  se cumple:

- $L_x$  es igual a  $R_2 R_4 C_1$ , expresión idéntica a la del puente de Maxwell, por ser  $1 / Q^2 \ll 1$ .
- $R_x$  posee un valor muy pequeño.

### 2.3.2.3 Puente de Schering

Es uno de los puentes de medida en alterna más importantes, utilizado principalmente para la medida de capacidades. Su esquema se muestra en la figura 2.30.

En este caso, en la rama 1 se sitúa una combinación de un condensador y una resistencia en paralelo y en la rama 4 un condensador  $C_4$  de referencia, que utiliza como dieléctrico mica de alta calidad que posee muy bajas pérdidas y por lo tanto presenta una impedancia totalmente capacitiva.



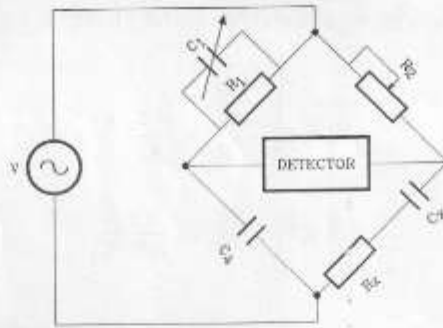


Figura 2.30 Puente de medida de Schering.

Dado que el desfase entre las ramas 2 y 4 debe ser igual al de las ramas 1 y 3, en estas últimas se debe lograr un desfase de  $90^\circ$ . La condición de equilibrio es:

$$\bar{Z}_x = \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_4 \cdot \bar{Y}_1$$

que equivale a:

$$R_x - \frac{j}{\omega C_x} = R_2 \left( -\frac{j}{\omega C_4} \right) \left( \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right)$$

de la cual se obtiene:

$$R_x - \frac{j}{\omega C_x} = \frac{R_2 C_1}{C_4} - \frac{j R_2}{\omega C_4 R_1}$$

Igualando las dos partes real e imaginaria resulta:

$$\begin{cases} R_x = \frac{R_2 C_1}{C_4} \\ C_x = \frac{C_4 R_1}{R_2} \end{cases}$$

### 2.3.3 Medidor analógico universal de impedancias

El medidor analógico de impedancias universal es un instrumento que puede medir los valores de los resistores, en continua y alterna, de los condensadores (capacidad C y factor de

disipación  $D$ ) y de los inductores (inductancia  $L$  y factor de calidad  $Q$ ) dentro de un amplio rango de valores. Para ello consta de un conjunto de impedancias resistivas, capacitivas e inductivas combinadas con un conjunto de conmutadores que, colocados en las posiciones adecuadas, configuran un mínimo de cuatro puentes de medida entre los que se incluyen los tres indicados en el apartado anterior,

Para la medida de resistencias tanto en alterna como en continua se utiliza un puente de Wheatstone en el que los elementos de la figura 2.27 son resistores.

Para la medida de la capacidad se utiliza el puente de Schering (figura 2.30) que está constituido por un condensador de referencia y resistores de precisión situados en las distintas ramas del puente que permiten determinar las pérdidas en el condensador sobre el que se realiza la medida.

Para la medida de la inductancia se utiliza el puente de Maxwell (figura 2.28) para aquellos inductores que tienen un factor de calidad,  $Q$ , bajo y el puente de Hay (figura 2.29) para inductores cuyo factor de calidad,  $Q$ , presenta valores mayores de 10.

El conjunto de impedancias y conmutadores que forman los puentes indicados anteriormente se alimentan mediante unos generadores de señales continuas y alternas de diversos rangos seleccionables por el usuario. Las señales analógicas de salida del puente se conectan a un procesador analógico formado por un conjunto de operadores realizados con amplificadores operacionales que ejecutan los cálculos adecuados y los presentan a un visualizador analógico o digital.

Los rangos de valores de los medidores de impedancia analógicos pueden variar de unos a otros. En la tabla 2.1 se representa un conjunto de rangos típicos.

MAGNITUD	RANGO
Resistencia ( $R$ )	$0,1\Omega$ $\div$ $20M\Omega$
Capacidad ( $C$ )	$1pF$ $\div$ $16\mu F$
Inductancia ( $L$ )	$1\mu H$ $\div$ $32kH$
Factor de disipación ( $D$ )	$0,001$ $\div$ $500$
Factor de calidad ( $Q$ )	$0,001$ $\div$ $500$
Precisión: %	$\pm 0,3\%$ $\div$ $3\%$ $\pm 0,10\%$ $\div$ $\pm 0,2\%$
Angulo de fase ( $\theta$ )	$0^\circ$ $\div$ $90^\circ$
Frecuencia de medida	$100Hz$ , $1kHz$ , $10kHz$

**Tabla 2.1**

#### **2.3.4 Medidor digital universal de impedancias**

La reducción del coste de los microcomputadores permite que puedan ser utilizados para realizar los cálculos necesarios para la medida de impedancias. Para ello es necesario convertir en digitales las señales de salida de los puentes de medida.

Por otra parte los conmutadores que permiten configurar los distintos puentes y los que permiten seleccionar los diferentes niveles de tensión y de frecuencia de los generadores de señales pueden ser electrónicos y estar controlados por las salidas de un microcomputador.

En la figura 2.31 se representa el esquema típico de un medidor de impedancias universal realizado con un microcomputador dotado de los siguientes elementos:

- Unidades de acoplamiento (interface) adecuadas para controlar los conmutadores de los puentes de medida y los generadores de señales.
- Una unidad de adquisición de datos cuyo elemento básico es un convertidor analógico-digital [MAND 91], que convierte en digitales las tensiones y corrientes en los elementos adecuados de los puentes.
- Un teclado que permite indicar al usuario los parámetros a medir.
- Un visualizador que proporciona la información numérica de los parámetros de las impedancias medidas.

Además muchos medidores universales de impedancias llevan incorporados circuitos convertidores de señales alternas en ondas cuadradas (ver apartado 4.1 del capítulo 4), y una unidad de acoplamiento de conteo y temporización que conjuntamente convierten un desfase en un número digital.

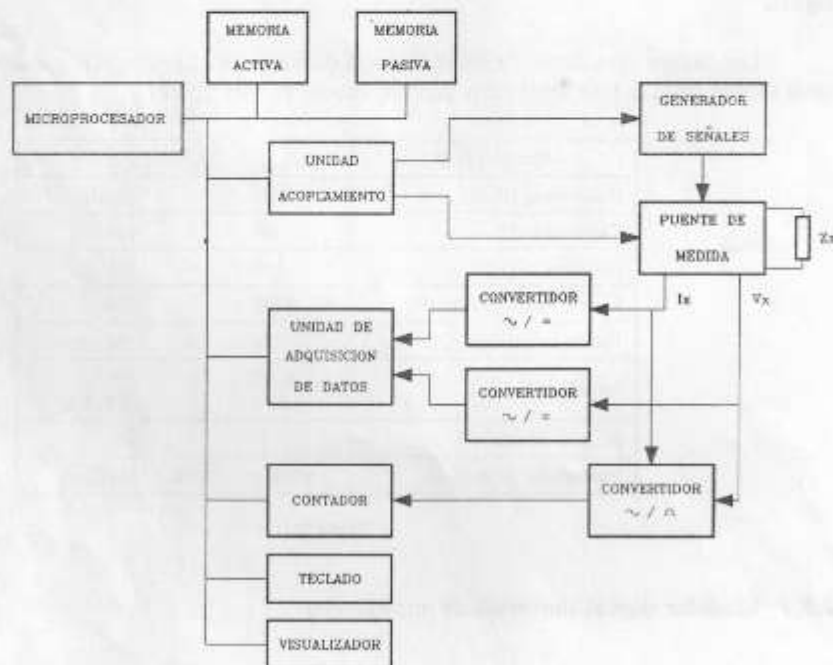


Figura 2.31 Diagrama de bloques del medidor digital universal de impedancias.

Bibliografía

- JACO 93** J. Michael Jacob. Applications and design with analog integrated circuits. Second edition. Prentice Hall, 1993.
- MAND 91** E. Mandado. Sistemas electrónicos digitales. Séptima edición. Editorial Marcombo, 1991.

3.1.4 Prueba de dispositivos semiconductores.

Diapositivas para el tema de prueba de dispositivos Semiconductores.

**CASE 52-04**

NOTES:  
 1. ALL PRAES AND NOTES ASSOCIATED WITH JEDEC DC-41 OUTLINE SHALL APPLY.  
 2. POLARITY INDICATED BY CATHODE BAND.  
 3. LEAD DIAMETER NOT CONTROLLED WITHIN "F" DIMENSION.

DIM	MILLIMETERS		INCHES	
	MIN	MAX	MIN	MAX
A	1.57	1.60	0.253	0.260
B	2.79	3.05	0.110	0.120
D	0.76	0.86	0.030	0.034
K	27.84	—	1.100	—

**CASE 60-01**

NOTES:  
 1. DIMENSIONING AND TOLERANCING PER ANSI Y14.5M, 1982.  
 2. CONTROLLING DIMENSION: INCH.

STYLE 1:  
 PIN 1: CATHODE  
 2: ANODE

DIM	MILLIMETERS		INCHES	
	MIN	MAX	MIN	MAX
A	—	11.43	—	0.452
B	—	8.89	—	0.350
C	—	7.62	—	0.300
D	1.17	1.42	0.046	0.056
K	34.90	—	0.992	—

**CASE 77-07**

NOTES:  
 1. DIMENSIONING AND TOLERANCING PER ANSI Y14.5M, 1982.  
 2. CONTROLLING DIMENSION: INCH.  
 3. Q77-01 THRU -06 OBSOLETE, NEW STANDARD Q77-07.

STYLE 1:  
 PIN 1: EMITTER  
 2: COLLECTOR  
 3: BASE

STYLE 2:  
 PIN 1: CATHODE  
 2: ANODE  
 3: GATE

STYLE 3:  
 PIN 1: BASE  
 2: COLLECTOR  
 3: EMITTER

STYLE 5:  
 PIN 1: MT1  
 2: MT2  
 3: GATE

DIM	MILLIMETERS		INCHES	
	MIN	MAX	MIN	MAX
A	10.82	11.94	0.425	0.435
B	7.50	7.74	0.295	0.305
C	2.42	2.66	0.095	0.105
D	0.51	0.66	0.020	0.026
F	2.93	3.30	0.115	0.130
G	2.26 BSC	—	0.089 BSC	—
H	1.27	2.41	0.050	0.095
J	0.38	0.63	0.015	0.025
K	14.81	16.53	0.575	0.655
M	0	1.27	0	0.050
O	3.76	4.01	0.148	0.156
R	1.15	1.39	0.045	0.055
S	0.64	0.89	0.025	0.035
U	3.68	3.93	0.145	0.155
V	1.02	—	0.040	—

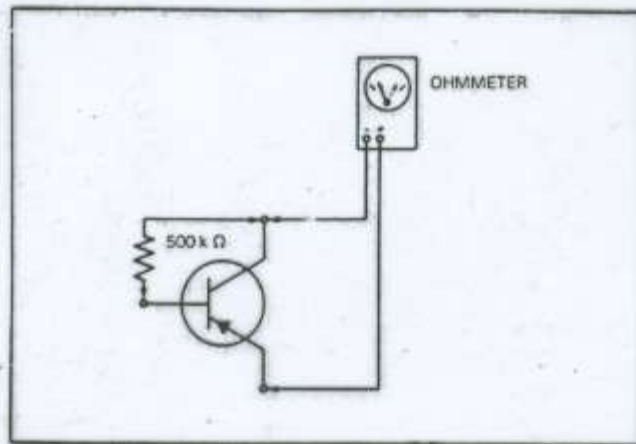


Fig. E. Gain measurement using an ohmmeter.

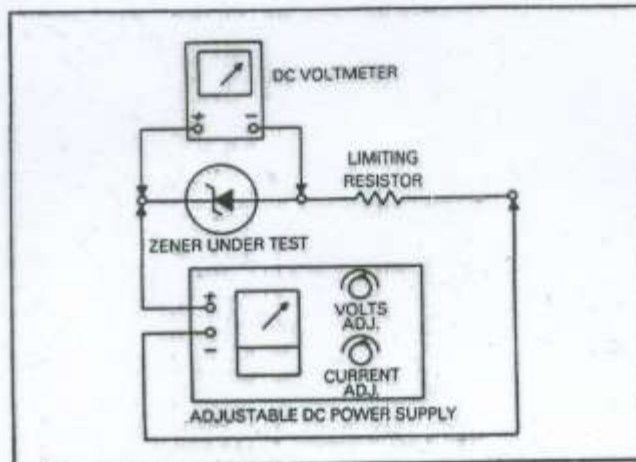


Fig. F. Hookup arrangement for testing Zener diodes.

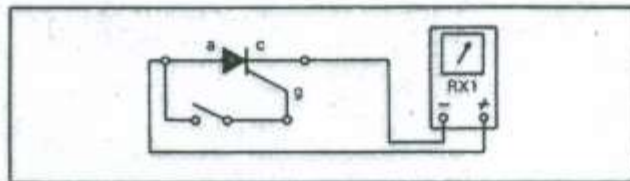


Fig. G. Hookup arrangement for testing thyristors with an ohmmeter.



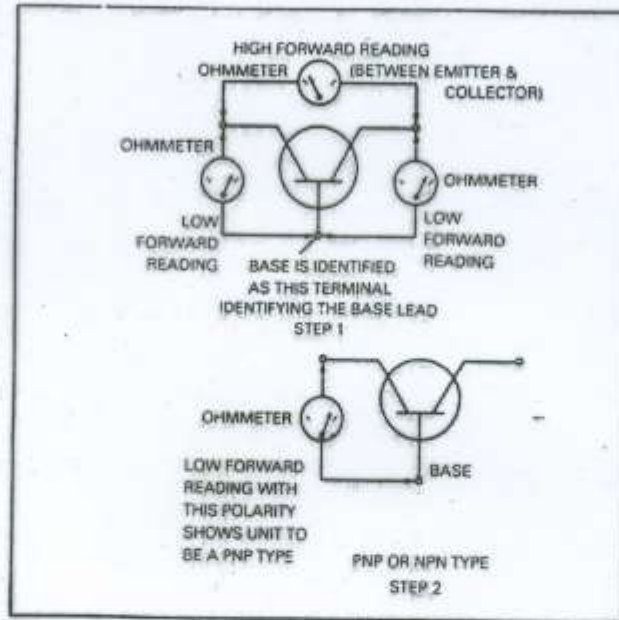


Fig. B. Hookup arrangement for identifying leads.

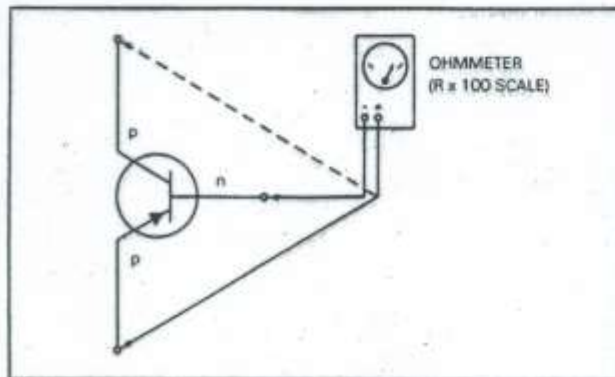


Fig. C. Method of checking the forward resistance of both junctions.

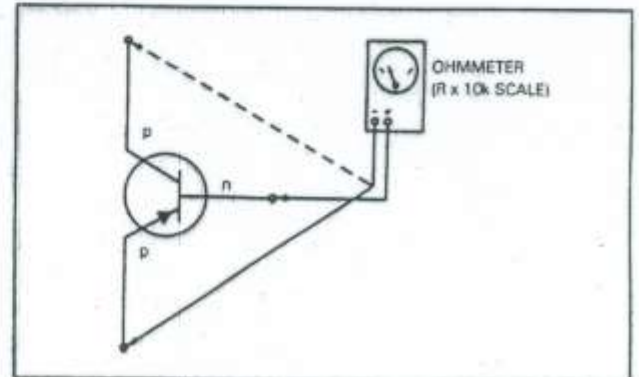


Fig. D. Method of checking the reverse resistance of both junctions.

## 3.2 Medición de potencia y energía.

### 3.2.3 Potencia y energía en c.d.

#### Teoría

Por tanto, podemos afirmar, como efectivamente ocurre, que en un circuito eléctrico la potencia eléctrica es directamente proporcional al voltaje y a la corriente. De hecho, si los valores de la resistencia y el voltaje de alimentación no cambian, es decir permanecen constantes, la potencia en la resistencia se manifiesta por el consumo de amperios: a mayor corriente, mayor potencia, y viceversa. De esta observación se deduce que:

$$\text{Potencia} = \text{Voltaje} \times \text{Intensidad}$$

En otras palabras, la potencia disipada en una resistencia es directamente proporcional a la tensión aplicada y a la cantidad de corriente que circula en el circuito. Este enunciado se puede expresar matemáticamente como una ecuación así:

$$P = V \times I$$

donde:

**P** es la potencia disipada, en vatios (W)

**V** es la tensión aplicada, en voltios (V)

**I** es la cantidad de corriente que circula, en amperios (A)

La fórmula  $P=V \times I$  se conoce como la **ley de Watt**. Para que su empleo produzca los resultados correctos las cantidades se deben expresar en unidades patrón: vatios, voltios y amperios. Si, por algún motivo se toman cantidades múltiplos o submúltiplos, estas unidades se deben convertir en unidades básicas antes de usar la fórmula representada por la ley de Watt.

Como se mencionó anteriormente, la unidad de medida de la potencia es el **vatio** y para su representación se utiliza la letra **W** (mayúscula). Igual que sucede con el voltio y el amperio, las unidades de voltaje y corriente respectivamente, el vatio también tiene múltiplos, usados principalmente en electricidad, y submúltiplos, muy empleados en electrónica. La tabla 1 relaciona las equivalencias para estas unidades.

Para medir la potencia eléctrica en vatios se emplea un instrumento llamado **vatometro**, utilizado principalmente en electricidad. En electrónica se uti-

Múltiplos y submúltiplos	Símbolo	Equivalencia
Megavatio	MW	1.000.000 W
Kilovatio	kW	1.000 W
Vatio	W	1 W
Milivatio	mW	0,001 W
Microvatio	μW	0,000001 W

Tabla 1. Equivalencia de unidades de potencia

liza con más frecuencia el multímetro. Para ello, se efectúan primero mediciones de voltaje y de corriente. A continuación, para hallar la potencia, basta con obtener el producto de estas dos magnitudes. Los siguientes ejemplos aclaran el uso de la ley de Watt.

#### Ejemplos de aplicaciones de la ley de Watt

**Ejemplo No. 1.** En el circuito de la figura 4.21, la fuente tiene un valor de 110 voltios y por la resistencia circulan 11 amperios. Calcular el valor de la potencia entregada por la fuente y absorbida por la resistencia.

**Solución.** En este caso tenemos:

$$V = 110 \text{ voltios}$$

$$I = 11 \text{ amperios}$$

$$P = ? \text{ vatios}$$

$$\text{Aplicando la ley de Watt: } P = V \times I$$

Reemplazando las letras por sus valores:

$$P = 100V \times 11 A$$

$$P = 1.210 \text{ vatios}$$

$$P = 1,21kW$$

Por tanto la potencia disipada en la resistencia es 1.210 vatios.

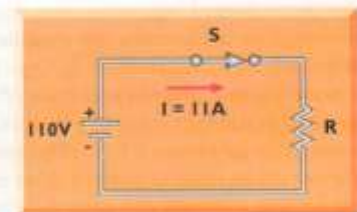


Figura 4.21. Ejemplo No. 1





### 3.2.1. Potencia y energía en c.a.

## POTENCIA APARENTE Y FACTOR DE POTENCIA

### La potencia aparente, $S$

La potencia aparente es el producto de las magnitudes de la tensión eficaz y la corriente eficaz y se utiliza frecuentemente para especificar el valor nominal de los equipos de potencia, como, por ejemplo, los transformadores. La potencia aparente se expresa de la siguiente forma:

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad (2.41)$$

En los circuitos de corriente alterna (circuitos lineales con generadores sinusoidales), la potencia aparente es la magnitud de la potencia compleja.

### Factor de potencia

El factor de potencia de una carga se define como el cociente de la potencia media y la potencia aparente:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} \quad (2.42)$$

En los circuitos de alterna que usan señales sinusoidales, los cálculos anteriores dan como resultado  $fp = \cos(\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo de fase entre las señales sinusoidales de tensión y de corriente. Sin embargo, éste es un caso especial y debería ser utilizado sólo cuando tanto la tensión como la corriente sean sinusoides. Por lo general, el factor de potencia se debe calcular a partir de la Ecuación 2.42.

## 3.3 Efectos de carga de los instrumentos en las mediciones.

### 3.3.3 Impedancia de los instrumentos de medición.

## Impedancia de los instrumentos de medición



por Luis 25 agosto, 2016 Mediciones eléctricas

La impedancia es una magnitud que lleva al limite el termino que conocemos de

la resistencia, ya que por definición: La impedancia se presenta en dispositivos o circuitos cuya principal característica es la de oponerse totalmente al paso de corriente alterna en una determinada frecuencia.

La impedancia es conocida en los cálculos matemáticos de circuitos con la letra «Z», además esta puede ser representada como un número complejo y se puede representar gráficamente en un plano vectorial.

Un vector impedancia consta de la parte real (resistencia, R) y la parte imaginaria (reactancia, X). La impedancia se puede expresar utilizando las coordenadas rectangulares en la forma  $R+jX$ , o en la forma polar como una magnitud y ángulo de fase:  $|Z| \angle \phi$ .

## Impedancia de los instrumentos de medición

Existen varios métodos para medir o calcular la impedancia, sin embargo cada método tiene sus pros y contras, algunos de estos pueden ser: Los medidores de impedancia (Multímetros), el analizador de impedancia y los medidores LCR.

El Medidor de impedancia es uno de los más conocidos y utilizados hasta la fecha, este posee la capacidad de entregar una lectura precisa y específica a la frecuencia. Sin embargo este medidor no es muy eficaz si el circuito que se está midiendo no son un inductor (L), capacitor (C) o resistencia (R) puros, si alguno de los componentes mencionados no son puros el medidor se vuelve inadecuado para determinar su función. Si este caso se llegara a dar, entonces se utiliza un analizador de impedancia, con este se puede medir y representar de manera gráfica la impedancia compleja del circuito o dispositivo que se está examinando sobre un rango de frecuencias.

El único problema de utilizar un analizador de impedancia es que el precio de estos dispositivos por lo general son muy elevados, esto da pie a que algunas personas deban utilizar medidores LCR, los cuales combinan el análisis de la impedancia con la instrumentación visual, estos medidores son mucho más baratos que los analizadores de impedancia. Los medidores LCR más comunes son: El LCR 3522 y el Tgam3550.

Medidor de impedancia LCR

3522

Medidor de impedancia LCR 3550

[Download Best WordPress Themes Free Download](#)

[Download Nulled WordPress Themes](#)

[Download Premium WordPress Themes Free](#)

[Download WordPress Themes Free](#)

[free download udemy course](#)

[download xiami firmware](#)

[Download Best WordPress Themes Free Download](#)

[udemy free download](#)



**Luis**

Nombre del autor: Luis Antonio De La Cruz Reyes.

Rango en el Staff: Administrador y fundador

Descripción: Mi nombre es Luis, un egresado de la carrera de Ingeniería Electrónica, el motivo por el cual funde y cree esta página, fue para formar un sitio que recopilara todo lo que se va aprendiendo durante la carrera, con el fin de que este conocimiento no se perdiera y sea de utilidad para las futuras generaciones.

[ingenieriaelectronica.org](http://ingenieriaelectronica.org)



Impedancia de Instrumentos.htm

**file:///G:/Libros/Unidad%203/Impedancia%20de%20Instrumentos.htm**

### 3.3.4 Sondas o puntas de prueba.



Efecto de carga.htm

# Practica de laboratorio para la unidad 3.

## 7. MEDICIÓN DE RESISTENCIAS

*OBJETIVO: Que el participante sea capaz de describir los diferentes métodos para medición de resistencias y decidir cuál es el más adecuado según la precisión deseada en la medición, el valor de la resistencia y los aparatos con que se cuenta. Debe saber utilizar los aparatos en aplicaciones prácticas efectuando los cálculos numéricos necesarios.*

**MEDICIONES ELECTRICAS**  
**EXPERIMENTO No. 7**  
**MEDICIÓN DE RESISTENCIAS**

**OBJETIVO:** Que el participante sea capaz de describir los diferentes métodos para medición de resistencias y decidir cuál es el más adecuado según la precisión deseada en la medición, el valor de la resistencia y los aparatos con que se cuenta. Debe saber utilizar los aparatos en aplicaciones prácticas efectuando los cálculos numéricos necesarios.

**MATERIAL Y EQUIPO.**

- 1 Fuente de voltaje de c.d.
- 1 Voltmetro digital MARCA TEKTRONIX
- 1 Multímetro MCA FLUKE
- 1 Potenciometro de 10KΩ
- 1 Galvanómetro (resistencia interna conocida)
- 1 Juego de resistencias
- 1 Tablita PROTO
- 1 Juego de conectores y cables para fuente de alimentación
- 1 Juego de cables telefónicos

**DESARROLLO**

1 **MEDICIÓN DE RESISTENCIAS POR EL MÉTODO DE VOLT-AMPERE**

A) **Medición de resistencias de bajo valor.**

Elabore el circuito mostrado en la figura 4.1 para medir resistencias de bajo valor.



Figura 4.1

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

Mediciones Eléctricas Experimento 4

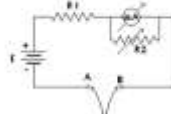
Una vez establecido el circuito, tome las lecturas siguientes:

El voltaje entre las terminales a y c ( $V_{ac}$ ), la corriente entre las terminales a y c ( $I_{ac}$ ), el voltaje entre las terminales b y c ( $V_{bc}$ ) y la corriente entre las terminales b y c ( $I_{bc}$ ).

Dibuje una tabla para registrar ordenadamente sus lecturas, indicando en cada caso el valor de resistencia equivalente ( $R_{ac}$  y  $R_{bc}$ ) medidos en forma indirecta. Basado en sus lecturas indique cuál de los dos es el método más adecuado para medir resistencias de bajo valor y cual para medir resistencias de alto valor. En cada caso explique porque.  
Repetir este procedimiento con cada una de las resistencias del rango que se le entregue.

## 2 REALIZACIÓN Y ANÁLISIS DE UN OHMETRO.

**Objetivo.** Mostrar al participante como el subinstrumento D'Arsonval puede ser adaptado para medir resistencias y como se calibra un ohmetro experimental.



- Calcule los valores de  $R_1$  y  $R_2$  para el circuito del ohmetro mostrado en la figura 4.2 con un valor de  $R_0 = 3.0 \text{ K}\Omega$ . (Estos cálculos deberá realizarlos en casa previo a la sesión de laboratorio).
- Después de armar el circuito con las terminales A y B y ajuste  $R_2$  hasta que la corriente en el instrumento sea la máxima (deflexión al 100% de la escala).

Trazo de la curva de Calibración para la Escala del Ohmetro.

- En las condiciones anteriores, coloque un potenciómetro de  $10\text{K}\Omega$  entre las terminales A y B variando su valor desde cero hasta su valor máximo de resistencia procediendo tomar lecturas cada 5 marcas de división de la escala del medidor (para hacer la lectura de resistencia en el potenciómetro deberá retirar la fuente eléctrica del circuito y posteriormente desconectar el potenciómetro).

Mediciones Eléctricas Experimento 4

- Repetir el procedimiento del punto anterior hasta obtener la escala del medidor en su totalidad.
  - Con las lecturas obtenidas en los puntos 2.3 y 2.4 para cada valor de resistencia, en papel milimétrico y a una escala adecuada grafique los puntos correspondientes a fin de obtener una curva de calibración para el ohmetro diseñado.
  - Con su ohmetro experimental mida algunas resistencias comerciales ( $1000\Omega$ ,  $3.3\text{K}\Omega$ ,  $470\Omega$  y  $10\text{K}\Omega$ ) registrando en cada caso la deflexión de la escala del medidor (en mA).
- Una vez elaborada la gráfica de calibración para el ohmetro experimental, compare el valor medido de cada una de las resistencias.

Atender a su reporte:

- Todos los cálculos para el diseño del ohmetro.
- Los datos obtenidos en las lecturas de resistencia y deflexión de la escala del medidor para la elaboración de la curva de calibración y la curva de calibración completa.
- Los datos tomados en la gráfica de calibración de las resistencias medidas.
- Deberá hacer también una tabla con las lecturas de las resistencias (en mA del galvanómetro utilizado) y el valor equivalente en ohms para cada una de ellas.

## 8. PUENTE DE WHEATSTONE.

**OBJETIVO:** Con este método comprobar 2 aspectos de medición muy importantes, el primero, es realizar la medición de resistencias utilizando un método más exacto que los anteriores y el segundo, la mecanización de valores de resistencias que presentan una tolerancia en su valor.



**MEDICIONES ELÉCTRICAS**

**EXPERIMENTO N.º 8**

**PUNTE DE WHEATSTONE**

**Objetivo:** Con esta método compararemos 2 tipos de medición muy importantes, el primero, es realizar la medición de resistencias utilizando un método más exacto que los anteriores y al segundo, la medición de valores de resistencias que presenten una tolerancia en su valor.

**Materiales y Equipo:**

- 1 Potenciometro de precisión de 1KΩ y 500Ω
- 1 Potenciometro de 10KΩ
- 1 Voltmetro electrónico Min. Tolerancia o Multímetro Packard
- 8 Resistencias de: 3.5Ω, 4.7Ω, 10Ω, 1.2KΩ, 2.2KΩ, 3.6KΩ, 33KΩ y 100KΩ
- 6 Resistencias 2 de 1KΩ, 2 de 10KΩ y 2 de 100KΩ
- 1 Tabla pinta
- 1 Juego de cables telefónicos
- 1 Juego de cables para fuente de alimentación
- 1 Juego de cizallas

**PROCEDIMIENTO**

1. Arma el circuito de la figura 5.1, donde  $R_1$  y  $R_2$  van a ser el factor de multiplicación del puente (multiplicador),  $R_p$  está formado por los 2 potenciómetros (precisión y 10KΩ), tenga cuidado de que los potenciómetros estén en su valor más elevada para evitar que se quemen. Coloque el voltmetro electrónico entre los puntos C y D del puente.

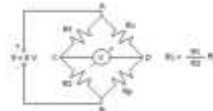


Figura 5.1

**Mediciones Eléctricas Experimento 7**

2. Coloque en  $R_1$  la resistencia de 3.5Ω y seleccione primero los valores de  $R_1$  y  $R_2$  de acuerdo a la resistencia a medir y alimente el circuito con 6 Volt de cd.
3. Varie los valores de los potenciómetros, primero el de 10KΩ y después el de ajuste fino hasta llegar la condición de equilibrio en el voltmetro. (Recuerde que la condición de equilibrio se logra cuando entre las terminales C y D del puente la caída de voltaje es cero).
4. Retire la energía del circuito y marque con cuidado  $R_p$  del circuito y mida su valor con el ohmímetro.
5. Aplicando la fórmula para  $R_x$  calcule el valor de la resistencia desconocida.
6. Repita el procedimiento de los puntos 1 al 5 para encontrar el valor de cada una de las 8 resistencias pedidas y registre sus datos en la tabla 5.1.

**TABLA 5.1**

Resistencia (valor)	$R_1$	$R_2$	Multiplicador	$R_p$	$R_x$ (**)	% de error (**)

\*\* La resistencia a medir será dada por su código de color incluida su tolerancia.  
 \*\* Al calcular el valor de  $R_x$  y el % de error, debe incluir las tolerancias de cada una de las resistencias y potenciómetros utilizados en el puente experimental.

7. Calcule el valor equivalente del arreglo de resistencias mostrada en la figura 5.2, en el deberá considerar la tolerancia ya que son valores comerciales.

$R_1 = 47Ω, R_2 = 1.2KΩ, R_3 = 3.6KΩ, R_4 = 100Ω$

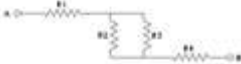


Figura 5.2

8. Arma el arreglo de resistencias mostrado en la figura 5.2 y colóquelo en su puente experimental como  $R_x$ , siga el procedimiento de los puntos 1 al 5 y encuentre su valor. Registre también sus datos en la tabla 5.1.

**USO DEL PUNTE DE WHEATSTONE**

En esta parte del experimento se compararán los valores de resistencia que usted ha obtenido con su puente experimental utilizando ahora un puente de wheatstone comercial. Los cuidadosamente al procedimiento de uso del puente (anexo a este instructivo).

**Mediciones Eléctricas Experimento 7**

## APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

9. Repetirá el procedimiento de uso del puente una y otra vez para cada una de las resistencias de la tabla 5.1.

**NOTA:** Es importante que recuerde seleccionar adecuadamente el valor del multiplicador para poder obtener el valor más exacto al medir, además de colocar todas las perillas de resistencias del puente en su valor más elevado antes de aplicar energía.

10. Registre los valores obtenidos en la tabla 5.2.

**TABLA 5.2**

Resistencia	Medición	$R_x$	$R_x \cdot 10^4$	% de error

\* Deberá anotarse aquí los valores de  $R_x$  obtenidos con su puente experimental y los obtenidos en el puente comercial.

\*\* El % de error deberá calcularse con los dos valores de  $R_x$  de la tabla 5.2.

### ASESOR

#### PROCEDIMIENTO PARA USO DEL PUNTE DE WHEATSTONE MCA. TYP MOD. 1713

##### 1. PUESTA EN CERO DEL GALVANÓMETRO

Asegúrese de que las terminales EXT. GA estén en corto circuito. Después, ponga la aguja del galvanómetro en "0" apretando el interruptor BA pero dejando el interruptor GA libre.

##### 2. MEDICIÓN DE RESISTENCIA

Conecte la resistencia desconocida a las terminales  $R_x$ . Utilice el multiplicador (MULTIPLY DEAL) para proporcionar un rango adecuado de acuerdo a la tabla. Ponga las perillas de medición (MEASURING DEALS) en un valor de "1999". Presione el switch de botón "BA", asegurada posición al switch de botón "GA" por un momento para chequear que la corriente  $I$  se reflejara en el galvanómetro.

Ajuste las perillas de medición hasta que el galvanómetro indique "0". Obtenga el valor resistencial desconocida Refiriéndose a la siguiente ecuación:

$$R_x = (\text{lectura de MULTIFICACIONES}) \times (\text{PERILLAS DE MEDICIONES})$$

$R_x$	MULTIFICADOR	valor	valor de medición
Máximo de		-----0	Indicaciones
		-----0	Quilómetros
1000 - 10000	0.001		
1000 - 10000	0.01		
1000 - 10000	0.1		
1000 - 10000	1		
10000 - 100000	10		
100000 - 1000000	100		
1000000 - 10000000	1000		

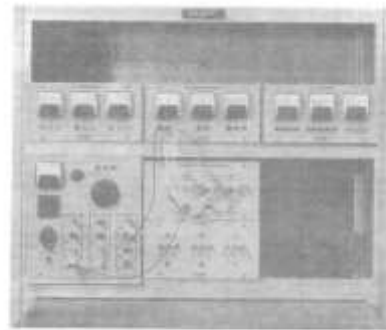
## 9. MEDICIÓN DE VOLTAJE Y CORRIENTE EN C. A.

**OBJETIVO:** Que el participante sea capaz de:

- a) Medir el valor efectivo de un voltaje alterno.
- b) Aprender a usar los voltímetros y amperímetros en c. a.
- c) Verificar la ley de Ohm en los circuitos de c. a.
- d) Calcular la potencia de un circuito de c. a.

EXPERIMENTO DE  
LABORATORIO N° 14

VOLTAJE Y CORRIENTE  
EN C.A. PARTE II





**OBJETIVOS**

1. Medir el valor efectivo de un voltaje alterno.
2. Aprender a usar los voltímetros y amperímetros de c.a.
3. Verificar la ley de Ohm en los circuitos de c.a.
4. Calcular la potencia de un circuito de c.a.

**EXPOSICIÓN**

El valor efectivo de cualquier voltaje de c.a. se define como el valor de un voltaje de c.c. que produce el mismo efecto de calentamiento. Por ejemplo, suponga que se le dispone de un voltímetro de c.c. y se desea usarlo para medir un voltaje alterno de c.a. El valor efectivo del voltaje de c.a. puede determinarse de la siguiente manera:

1) Se aplica un voltaje de c.c. a un resistor de valor  $R$  y se mide la potencia  $P$  que se disipa en él.

2) El voltaje de c.c. se reemplaza por un voltaje de c.a. de igual valor efectivo  $V_{ef}$  y se mide la potencia  $P$  que se disipa en el resistor. El valor efectivo del voltaje de c.a. es el que produce el mismo efecto de calentamiento que el voltaje de c.c. de igual valor. En la práctica, se puede utilizar un voltímetro de c.c. para medir el valor efectivo de un voltaje de c.a. si se sabe el factor de conversión que relaciona el valor efectivo de un voltaje de c.a. con el valor de un voltaje de c.c. que produce el mismo efecto de calentamiento. Este factor se conoce como el factor de conversión de voltajes de c.a. a c.c. y se denota por  $k$ .

Por lo tanto, para determinar el valor efectivo de un voltaje de c.a. se debe medir el valor de un voltaje de c.c. que produce el mismo efecto de calentamiento que el voltaje de c.a. que se desea medir. Este valor de c.c. se conoce como el valor efectivo de c.c. y se denota por  $V_{ef}$ .

**INSTRUMENTOS Y EQUIPO**

- Módulo de Fuente de Energía (120V o 240V c.a., 0.15V c.c.) EMS 350
- Módulo de Resistencia EMS 351
- Módulo de Medición de c.a. (2.5A) EMS 352
- Módulo de Medición de c.c. (20V) EMS 353
- Módulo de Medición de c.c. (200V, 2.5A) EMS 354
- Módulo de Interruptor de Maniobra EMS 355
- Cable de conexión EMS 356

14.2

1. a) Conecte la fuente de alimentación y mida el voltaje de c.c. y el valor de la potencia  $P$  que se disipa en el resistor.
2. a) Conecte el voltímetro de 20V c.c. a la fuente de voltaje de c.c. (terminales 1 y 2) de la fuente de alimentación, o a la terminal 1 y 4 del módulo de la fuente.
3. a) Conecte la fuente de energía y haga variar el voltaje de c.c. hasta obtener la misma potencia  $P$  que en los dos casos. Lea el voltaje indicado en el voltímetro de c.c. y anote los valores de  $V_{ef}$  y  $V_{c.c.}$ . Repita este procedimiento tres veces más procurando no variar el valor de  $V_{c.c.}$ . Anote los resultados en la Tabla 14.1.

	1	2	3	4
$V_{c.c.}$				
$V_{ef}$				

Tabla 14.1

4. a) ¿Obtiene los valores de  $V_{ef}$  y  $V_{c.c.}$ ?
5. a) ¿Obtiene a partir del voltaje de c.c. y la potencia  $P$  el valor de  $V_{ef}$ ?
6. a) ¿Obtiene el mismo valor de  $V_{ef}$  para diferentes valores de  $V_{c.c.}$ ?
7. a) ¿Obtiene el mismo valor de  $V_{ef}$  para diferentes valores de  $V_{c.c.}$ ?

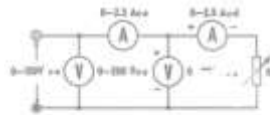


Figura 14.2

Conecte todos los instrumentos y obtenga el valor de la potencia  $P$  que se disipa en el resistor. Este valor de potencia se denota por  $P$ .

Voltaje y potencia en c.c., Parte II

**PROCEDIMIENTOS**

Advertencia: (En los Experimentos de Laboratorio se manejan altas voltajes). No haga ningún ajuste al circuito a los diagramas experimentales de circuitos que aparecen en la sección del módulo.

1. a) Encienda la corriente del Módulo EMS 352 de Interruptor de Maniobra, desde el interruptor a los diagramas experimentales de circuitos que aparecen en la sección del módulo.
2. a) Observe que el voltaje se divide en tres partes, más o menos, entre los dos resistores conectados en serie. Este voltaje se divide en tres partes, más o menos, entre los dos resistores conectados en serie. Este voltaje se divide en tres partes, más o menos, entre los dos resistores conectados en serie.
3. a) Coloque el interruptor actualizado en la posición "OFF" y ajuste y limpie el diagrama de voltaje del Experimento de Laboratorio.
4. a) Use los Módulos de Fuente de Energía, Interruptor de Maniobra, Módulo de c.a. y Módulo de c.c. para conectar el circuito de la Figura 14.1. Observe que una lámpara está conectada a la fuente de energía (de c.c.) en serie con la lámpara que está conectada a la fuente variable de c.c.

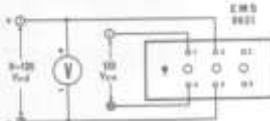


Figura 14.1

5. a) Conecte la fuente de alimentación y haga variar el voltaje de c.c. hasta que la lámpara encienda por un tiempo suficiente. Mida y registre los valores de  $V_{c.c.}$  que lea en los pines de la lámpara.

$$V_{c.c.} = \text{---} V_{c.c.}$$

Para que las lámparas tengan la misma potencia  $P$ , las dos deben tener la misma potencia. El valor de  $V_{c.c.}$  medido en una lámpara debe ser igual al valor efectivo del voltaje de c.c. de la otra lámpara.

Experimento de laboratorio N° 14

6. a) Conecte la fuente de alimentación y pliegue la lámpara de c.c. Mida todos los voltajes y la corriente.

$$V_{c.c.} = \text{---} V_{c.c.} \quad V_{ef} = \text{---} V_{ef}$$

$$I_{c.c.} = \text{---} A_{c.c.} \quad I_{ef} = \text{---} A_{ef}$$

NOTA: Trabaje con un voltaje efectivo en c.c. aplicando el voltaje de c.c. y con una corriente efectiva en c.c. que pase a través del módulo de corriente en c.c. Use los módulos indicados con:

Resistor y con el voltaje y potencia de la fuente de alimentación.

7. a) Conecte el circuito mostrado en la Figura 14.2. Coloque los interruptores de resistencia en el punto que le indique, inicialmente, 0V y 20 ohms.

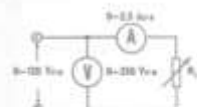


Figura 14.3

8. a) Conecte la fuente de energía y pliegue la lámpara de c.c.
9. a) Mida  $I_{c.c.}$  con una  $R_L$  de 27 ohms y con  $R_L$  de 200 ohms. Anote los resultados de  $I_{c.c.}$  en la Tabla 14.2.
10. a) Mida el voltaje de la fuente de energía de 20V c.c. y anote (a) y (b).
11. a) Haga a cero el voltaje y desconecte la fuente de alimentación.

$R_L$	27 ohms	100 ohms	200 ohms	1000 ohms
$V_{c.c.}$	20V	20V	20V	20V
$V_{ef}$				
$I_{c.c.}$				
$I_{ef}$				

Tabla 14.2

14.2

b) a) Calcule la potencia de cada elemento que tiene, usando E. 3. 1. Anote sus resultados en la Tabla 14.2.

b) Calcule la potencia proporcionada en cada uno, usando E. 3. 1. Anote sus resultados en la Tabla 14.2.

a) ¿Es igual el valor calculado de  $P_0$  al valor medido de  $P_0$ , en cada caso? \_\_\_\_\_

a) ¿Se aplica la ley de Ohm a circuitos como el de a) \_\_\_\_\_

a) ¿Casi que el producto de  $E_{eff} \times I_{eff}$  es igual a la potencia en watts disipada en la carga? \_\_\_\_\_

**PRUEBA DE CONOCIMIENTOS**

1. ¿Dnde por qué el voltaje y el experimento de así mismo, como en el Procedimiento 12?

Respuesta: \_\_\_\_\_

2. ¿Puede explicar por qué la lectura de los voltímetros y amperímetros de los circuitos para las formas de ondas eléctricas (vca) de voltaje y corriente?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

144

Experimento de laboratorio N° 14

3. Cuando un electrostató halla de un voltaje aparente 1,200 voltios en c.a., ¿se subestima que se recibe al valor efectivo (vca)? \_\_\_\_\_

4. Un sistema de distribución de c.a. opera a 600 voltios en c.a. ¿Cuál es el valor de pico del voltaje? \_\_\_\_\_

5. Dos lámparas incandescentes de 110 watts están conectadas a una línea de distribución de 110 voltios en c.a. Calcule:

a) La corriente efectiva (vca). \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

b) La potencia en vatios de la lámpara. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

c) El valor de pico de la corriente alterna. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**10. USO DEL VATIMETRO.**

**OBJETIVO:** Que el participante sea capaz de:

- a) Aprender a usar el Vatímetro.
- b) Familiarizarse con los conceptos de potencia real y aparente en un circuito de c. a.
- c) Entender el significado del ángulo de fase.
- d) Estudiar la relación entre la potencia real y la aparente.



# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

<b>OBJETIVOS</b> 1. Aprender a usar el voltímetro. 2. Practicarlos con los conceptos de potencia real y aparente en un circuito de c.a.	Módulo de Mediciones de c.a. (20V) EMS 342 Módulo de Voltajes Alternados (20V) EMS 341 Módulo de Corriente EMS 343
---	--

**EXPLICACIONES**

En circuitos de corriente alterna, la potencia (en watts) proporcionada a una carga resistiva es igual al producto del voltaje por la corriente. En los circuitos de corriente alterna, a veces no se puede usar esta fórmula para establecer la potencia en watts. Por esta razón, se ha inventado el *VA* o unidad de voltios amperios, para poder medir la potencia real (en watts).

La potencia aparente (en voltios amperios) se define como el producto del voltaje y la corriente en *VA*. La potencia aparente es igual a la potencia real sólo cuando el circuito de carga es totalmente resistivo. Para leer el caso del Experimento de Laboratorio anterior.

Cuando el circuito de carga no es del todo resistivo, la potencia aparente (*VA*) puede ser muy diferente de la potencia real (*W*). También se es el cociente de potencia reactiva y la potencia real. Por ello, se han diseñado o sólo otros experimentos para determinar lo que significa la potencia real y la aparente, y cómo se pueden determinar estas potencias.

<b>INSTRUMENTOS Y EQUIPO</b>	
Módulo de Fuente de Energía 20 (20V) c.a. EMS 302	Módulo de Resistencia EMS 311
Módulo de Instrumentación EMS 301	Módulo de Laboratorio EMS 303
Módulo de Voltaje EMS 313	Módulo de Mediciones de c.a. (20V) EMS 342

**PROCEDIMIENTO**

**Advertencias:** (En este Experimento se conectan altos voltajes! No haga ningún contacto cuando la fuente está conectada! De hecho se debe desconectar después de hacer cada medición!

2. Desmonte la construcción del Módulo EMS 342 del voltímetro analógico. Sitúelo cuidadosamente en el escritorio, los terminales de conexión y el alfilerado. En la Figura 12.1 se muestra un dibujo representativo de las conexiones del módulo.

Las conexiones internas de la bobina de corriente del módulo se hacen sobre las terminales A y B de este. Las conexiones internas de la bobina de voltaje del módulo se hacen sobre las terminales C-D. La bobina de corriente (protégala por las diadas), se conecta en serie con la línea (terminales 1 y 3 del módulo). La bobina de voltaje se conecta en paralelo con la carga de la línea (terminales 2 y 4 del módulo). La fuente de energía se debe conectar siempre a los terminales 1 y 2 (la entrada al módulo del voltaje).

La carga se debe conectar siempre a los terminales 3 y 4 (la salida del módulo del voltaje). Siempre se debe verificar las conexiones del módulo de la parte posterior del tablero!

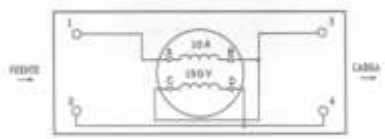


Figura 12.1

12.2 Experimento de Laboratorio N° 12

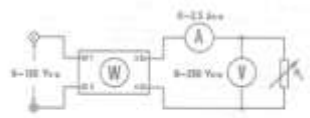


Figura 12.2

3. Use los Módulos EMS de Instrumentación, Voltímetros, Medidores de CA y Fuente de Alimentación, para conectar el circuito que se ilustra en la Figura 12.2. Asegure la medición de carga a 27 ohms (todas las interrupciones deben estar conectadas y todas las conexiones de potencia).
4. Conecte la fuente de alimentación y asegúrese de 120V c.a., antes que cualquier otro voltaje de la red conectada a través de él. Mida y anote la corriente de carga  $I_L$ .
5. Mida y anote la potencia de entrada de acuerdo con la bobina del voltaje.
6. Conecte el circuito de la Figura 12.1. Observe que cuando se conecta el que se ve en los Procedimientos 2 y 3, siempre que afecta la medición de potencia y salida del resistencia en base referenciado.

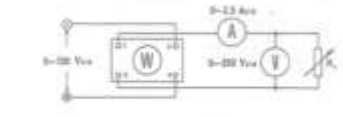


Figura 12.3

12.3

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

- 5. a) Ajuste la intensidad de carga y  $V$  sobre. Controle la fuente de energía y ajuste a  $120V$  o a la tensión de la fuente de alimentación de su conexión a través de  $R_1$ .
- b) Observe que la aguja del instrumento se desvía hasta la máxima. Esto se debe al instrumento, pero hace imposible tomar una lectura en el medidor.
- c) Reduzca a cero el voltaje y disminuya la fuente de energía.
- 6. a) Conecte de nuevo el circuito como se indica en la Figura 15.2.
- b) Según los Procedimientos 7 y 8, pero en este caso tome las mediciones a tensiones de  $50V$ . Anote sus mediciones en la Tabla 15.4.

E. 1	E. 2	E. 3	E. 4	E. 5	E. 6	E. 7	E. 8

Tabla 15.4

- 7. (Por lo general, anote los valores nominales de la potencia  $W$  y los productos de  $E \times I$ .)

**NOTA 1:** En el procedimiento 8 se demuestra que el voltaje puede modificarse convenientemente las cantidades  $E \times I$ . Por lo tanto, se puede confiar en que el voltaje indica la potencia real (en watts) en diversas condiciones de voltaje y corriente.

**NOTA 2:** En el Procedimiento 8, se puede decir que el producto  $E \times I$  es la potencia aparente proporcionada a la carga, en tanto que el valor del medidor es el voltaje correspondiente a la potencia real. En el caso de cargas inactivas, estas dos potencias son idénticas.

- 8. a) Examine la estructura del Módulo EMS 8221 de Capacitancia. Note que se incluye el módulo de corriente, ya que también contiene un pequeño dispositivo en sus acciones internas. (El Módulo de Capacitancia EMS 8221 se utilizó más detalladamente en otros Experimentos de Laboratorio.)

- b) Conecte el circuito que aparece en la Figura 15.4. Conecte cada uno de los tres terminales de un lado en paralelo y como (ponga en la posición "on") todos los interruptores. Esta preparación le permite experimentar la máxima separación disponible en el medidor. Observe que este circuito es idéntico al de la Figura 15.2, excepto que en este caso la carga de resistencia se reemplaza por una de capacitancia.

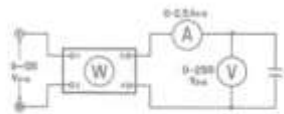


Figura 15.4

15.4

Experimentos de Laboratorio Nº 23

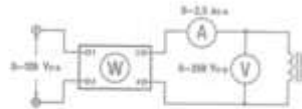


Figura 15.5

- 9. a) Conecte la fuente de energía y ajuste a  $120V$  o a la tensión de la fuente de alimentación de su conexión a través de la carga de capacitancia. Mida y anote la corriente de carga  $I_c$ .

$$I_c = \text{-----} \text{ A o mA}$$

- b) Mida y anote la potencia real de entrada, tomando una lectura en el medidor.

$$P_{\text{entrada}} = \text{-----} \text{ W}$$

- c) Calcule y anote la potencia aparente de entrada.

$$E \times I = \text{-----} \text{ VA}$$

(Observe que la potencia aparente (representada en voltios-amperios, VA) es esencialmente mayor que la potencia real (representada en watts, W).)

- d) Bajo a cero el voltaje y disminuya la fuente de alimentación.

- 10. a) Examine la estructura del Módulo de Inductancia EMS 8221. Observe que se incluye un módulo de corriente y capacitancia, en el caso de que también necesite indicaciones de estos en sus acciones internas. (El Módulo de Inductancia EMS 8221 se utilizó más detalladamente en otros Experimentos de Laboratorio previos.)

- b) Conecte el circuito indicado en la Figura 15.4. Conecte cada uno de los tres terminales de un lado en paralelo y como (ponga en la posición "on") todos los interruptores. Esta preparación le permite experimentar la máxima inductancia posible en el medidor. Note que el circuito es idéntico al de la Figura 15.2, excepto que la carga de resistencia se ha substituido por una carga de inductancia.

- 11. a) Conecte la fuente de energía y ajuste a  $120V$  o a la tensión de la fuente que alimenta a través de la carga de inductancia. Mida y anote la corriente de carga  $I_c$ .

$$I_c = \text{-----} \text{ A o mA}$$

- b) Mida y anote la potencia real de entrada, tomando una lectura en el medidor.

$$P_{\text{entrada}} = \text{-----} \text{ W}$$

- c) Calcule y anote la potencia aparente de entrada.

$$E \times I = \text{-----} \text{ VA}$$

(Observe que la potencia aparente (representada en voltios-amperios, VA) es esencialmente mayor que la potencia real (representada en watts, W).)

- d) Reduzca a cero el voltaje y disminuya la fuente de alimentación.

El estudiante

10.4

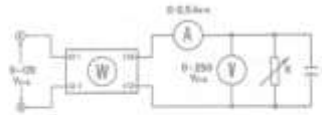


Figura 11A

11.11. Según el Procedimiento 1 utilizando los valores de resistencia y capacitancia presentados en el cuadro, como se indica en la Figura 11A. Complete todos los espacios en blanco y done todos los cálculos necesarios.

$I = \dots \text{A}$

Potencia real =  $\dots \text{W}$

Potencia aparente =  $\dots \text{VA}$

**PREGUNTA DE RESPUESTA BREVE**

1. ¿En cualquier un voltmetro para medir la potencia real proporcional a una carga variable?

Respuesta:  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

2. La potencia aparente es mayor que la real cuando el circuito contiene uno de los dos tipos mencionados de carga. ¿Cómo se relacionan entre cargas?

\_\_\_\_\_

3. ¿En qué unidades se expresa:

- a) la potencia aparente? \_\_\_\_\_
- b) la potencia real? \_\_\_\_\_

4. La relación de (Potencia real/Potencia aparente) se denomina factor de potencia (FP) de un circuito de ca. Calcule el factor de potencia para los Procedimientos 1, 2, 11 y 12.

Procedimiento 1) FP = \_\_\_\_\_

Procedimiento 2) FP = \_\_\_\_\_

Procedimiento 11) FP = \_\_\_\_\_

Procedimiento 12) FP = \_\_\_\_\_

5. De el nombre de los aparatos electrométricos que tengan un alto factor de potencia (cerca de 1) y la razón:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_

6. ¿Cuáles son los aparatos electrométricos que tienen un factor de potencia bajo?

\_\_\_\_\_

7. ¿En qué condiciones indicará un voltmetro una potencia negativa (inductiva o capacitiva)?

\_\_\_\_\_

## 11. MEDICIÓN DEL EFECTOS DE CARGA DE LOS MEDIDORES EN LOS CIRCUITOS.

**OBJETIVO:** Que el estudiante sea capaz de comprender los efectos de carga de los instrumentos en las mediciones y en un circuito.



### MEDICIONES ELECTRICAS

#### EXPERIMENTO No. 11

#### MEDICIÓN DEL EFECTOS DE CARGA DE LOS MEDIDORES EN LOS CIRCUITOS.

**OBJETIVO:** Que el estudiante sea capaz de comprender los efectos de carga de los instrumentos en las mediciones y en un circuito. Al terminar esta práctica, el alumno será capaz de:

- Analizar el efecto que presenta un circuito al acoplarse con otro.
- Utilizar un elemento de alta impedancia para medir circuitos.

**Materiales:**

- Resistencias de 100Ω [3]
- Fuente de voltaje variable
- Aceptación Operacional
- Multímetro

**Introducción**

En los diferentes instrumentos normalmente se encasota el dispositivo de medición que interactúa con la variable a medir (transductor). Este dispositivo proporcionará la información eléctrica o de otra manera (voltage, corriente, frecuencia, resistencia, etcétera) al instrumento para que pueda determinar la magnitud de la variable que se está midiendo.

Por lo tanto, ¿qué influencia tiene el efecto de carga? Para contestar esta pregunta considere los ejemplos a las microsecciones siguientes.

**Desarrollo**

P1 - Realice el circuito de la figura 1 (divisor de voltaje). Recuerde colocar al multímetro en voltaje para medición de corriente directa. Mida el voltaje como se indica.



Figura 1.- Divisor de voltaje

El medidor deberá señalar 2.5 volt. Esto se debe a que el voltaje cae en ambas resistencias es el mismo ya que son iguales en valor.

P2.- Recordando que el voltaje se comparte en el mismo (figura 2), ¿qué sucede si se introduce un tercer elemento  $R_3$  en el circuito? ¿Cuál será el voltaje que medirá?



Figura 2.- Voltaje en paralelo



Figura 3.- Nuevo circuito a medir con nuevo elemento  $R_3$ .

P3.- Utilizando un amplificador operacional (741 u otro) se realizará el circuito de la figura 4 y se leerán medidas de nuevo en las puestas señaladas (se necesitan dos multímetros, uno uno es suficiente).

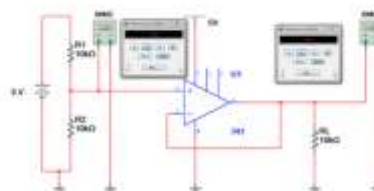


Figura 4.- Circuito con elemento aislador

P4.- Realice lo siguiente:

- Analice el circuito de la figura 2 y 3, deduzca el por qué obtuvieron esos valores para cada medición.
- De la hoja de datos del amplificador operacional obtenga impedancia de entrada ( $Z_i$ ), ese valor substitúelo por el valor de  $R_1$  en el circuito de la figura 3. Analice el

Nuevo circuito y concluya el porqué del valor obtenido.

De acuerdo con la información recabada durante la práctica, redacte una conclusión de lo que obtuvo de la misma. Prepárese su concepto de "efecto de carga".

## 4. Instrumentos especiales y virtuales.

### 4.1 Analizador de estados lógicos.



Analizador\_Estados\_logicos.htm

<https://ingenieriaelectronica.org/mas-informacion-sobre-las-cookies/>

### 4.2 Analizador de espectros.

## Presentación

### EL ANALIZADOR DE ESPECTROS

El analizador de espectros es una herramienta capaz de representar las componentes espectrales de una determinada señal a partir de su transformada de Fourier.

Esta representación en el dominio de la frecuencia permite visualizar parámetros de la señal que difícilmente podrían ser descubiertos trabajando en el dominio del tiempo con ayuda de un osciloscopio.

Es especialmente útil para medir la respuesta en frecuencia de equipos de telecomunicaciones (amplificadores, filtros, acopladores, etc ) y para comprobar el espectro radioeléctrico en una zona determinada con la ayuda de una antena.

En la pantalla del equipo la amplitud o potencia de las señales se representa en el eje y y la frecuencia en el eje x . La medida de potencia viene indicada en dBm, una unidad logarítmica relativa al milivatio.

$$P(\text{dBm})= 10\log(P(\text{mw}))$$





## CLASIFICACIÓN

- De tiempo Real
  - Filtros Múltiples
  - Analizador de Fourier
- De muestreo de frecuencias
  - Con filtro sintonizable
  - De barrido de frecuencia (heterodino)
    - Barrido en RF
    - Barrido en FI

## UTILIDAD DEL ANALIZADOR DE ESPECTRO

- Permite conocer cuanta energía posee una señal en una frecuencia en particular.

Nos interesa conocer esta información por ejemplo en los siguientes casos:

- Detección de emisiones fuera de banda en transmisores, que puedan interferir con otros canales.
- Medición de distorsión en señales moduladas (o sin modular).
- Mediciones de Interferencia electromagnética (EMI) para cumplir con regulaciones vigentes.
- Visualización clara de las componentes de una señal: Distorsión armónica, Productos de intermodulación, señales interferentes, ruido, etc.
- Mediciones en microondas en general
- Señales moduladas en AM, FM, etc.

## 4.3 Equipos especiales de medición.

### 4.3.1 Graficadores.

### 4.3.2 Trazador de curvas.

**Presentación:**

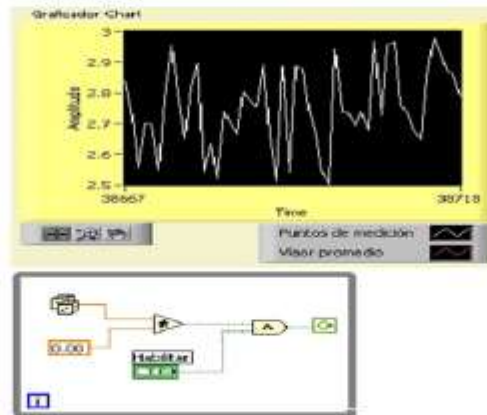
## Graficador y trazador de curvas



### Graficador

- es un indicador numérico especial que muestra gráficamente en una ventana en tiempo real, una o más señales. El graficador puede desplegar trazos simples o múltiples, con formatos (color, forma y estilo) que pueden ser diferentes para cada uno de los trazos.

Un ejemplo de trazo múltiple en un graficador de formas de ondas se muestra en la siguiente figura:



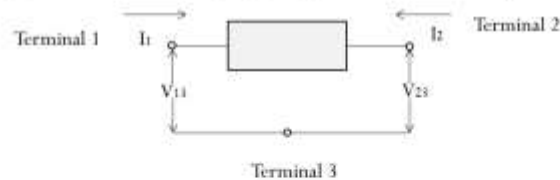
## Trazador de curvas

- Es un instrumento parecido al osciloscopio que está diseñado para permitir una indicación gráfica de las características V-I de dispositivos de tres terminales.
- Los dispositivos de tres terminales necesitan dos características independientes V-I porque hay dos puntos



## Trazador de curvas

- En la figura, la terminal 3 es común a ambos puntos de excitación y así las dos características V-I serían ( $V_{11}$  contra  $I_1$ ) y ( $V_{21}$  contra  $I_2$ ) ya que los puntos de excitación estarían entre a) las terminales 1 y 3, o b) las terminales 2 y 3.



## Funcionamiento del Trazador de curvas

- Hay una base de tiempos que ataca a un contador. Al mismo tiempo maneja un generador de onda "diente sierra"
- El contador combinado con una serie de resistencias funciona como un convertor digital analógico el cual nos provee una tensión de referencia la cual es usada para manejar un generador de corriente constante. Este generador que alimenta la base de transistor en prueba, y la onda diente de sierra alimenta el colector
- Por cada ciclo de reloj, se produce un barrido completo de la tensión del colector

## FUENTES

- [www.unicrom.com/link.asp](http://www.unicrom.com/link.asp)
- [www.webelectronica.com](http://www.webelectronica.com)

### 4.3.3 Luxómetro

### 4.3.4 Tacómetro.



Luxometro\_tacometro.htm

**file:///C:/Users/JACINT~1/AppData/Local/Temp/%7BBE870AF0-78DE-4F4A-BEFE-86706441C30C%7D/Luxometro\_tacometro.htm**

### 4.3.5 Medidores de campo magnético.

# Medidores de campo magnético

## Medidores de campo magnético

Los **medidores de campo magnético** o gaussímetros son instrumentos para medir la influencia magnética de las corrientes eléctricas y los campos magnéticos producidos. Las unidades de medida utilizadas comúnmente para los medidores de campo magnético son los tesla o los gauss. Estos se usan para medir la intensidad de la radiación magnética en conductores eléctricos, dispositivos de radiofrecuencia, transformadores eléctricos,

imanes, etc. Se utilizan para evaluar los posibles riesgos para la salud que generan estos aparatos eléctricos y comprobar si son adecuados según la normativa. Los medidores de campo magnético de Dagatron están pensados para uso profesional y son fáciles de utilizar. Consulta las características en las fichas técnicas.

## MEDIDORES DE CAMPO MAGNÉTICO



### Presentación

¿QUÉ ES?

Es un medidor digital de campo magnético EMF y ELF. Se trata de un dispositivo compacto con un gran visor y controles que pueden ser manipulados con una sola mano. Permite la medición de la intensidad de la radiación electromagnética producida por un equipo de transmisión eléctrica, líneas eléctricas, hornos micro-ondas, aires acondicionados, neveras, monitores de ordenador, dispositivos de audio y video, etc..



## CAMPO MAGNÉTICO

Todo imán está rodeado por un espacio, en el cual se manifiestan sus efectos magnéticos, a estas regiones se les llama campos magnéticos.

Se denomina Campo Magnético a la magnitud vectorial que expresa la intensidad de la fuerza magnética.

Puede estar presente en dos situaciones diferentes, una de ellas es la presencia natural en los imanes.

Un electroimán es un tipo de imán en el que el campo magnético se produce mediante el flujo de una corriente eléctrica, desapareciendo en cuanto cesa dicha corriente.

## UNIDAD DE MEDICIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO

La unidad de densidad de flujo magnético se define como Weber T(Wb) por metro cuadrado también llamado Tesla (T).

Una antigua unidad que todavía se usa hoy en día es el gauss (G)

$$1\text{T} = 1\text{wb}/\text{m}^2 = 10^4$$

Un tesla también se define como la inducción de un campo magnético que ejerce una fuerza de 1 N (Newton) sobre una carga de 1 C (culombio) que se mueve a velocidad de 1 m/s dentro del campo y perpendicularmente a las líneas de inducción magnética.

## Presentación:

### ANALIZADOR F.F.T. (FOURIER)

F.F.T. son las siglas de "Fast Fourier Transform", Transformada Rápida de Fourier "TRF".

Como hemos dicho antes los *analizadores FFT* están basados en la obtención del espectro de una señal mediante un algoritmo de cálculo denominado transformada rápida de Fourier (FFT). Este algoritmo permite calcular la transformada discreta de Fourier de cualquier señal con una reducción muy notable de operaciones aritméticas, y el consiguiente ahorro de tiempo de cálculo. Cabe señalar que la aparición de esta técnica de obtener espectros de señales revolucionó todos los conceptos del análisis frecuencial.

El funcionamiento a grandes rasgos consiste en tomar muestras (valores discretos) de la señal continua y, con estas muestras y aplicando una expresión matemática descubierta por el matemático Fourier, se obtiene el espectro correspondiente a la señal que habíamos medido. Por tanto, todo el proceso se reduce a digitalizar la señal continua a analizar y efectuar un cálculo numérico.

La precisión de los analizadores de Fourier se evalúa a través del número de líneas que pueden representar, siendo los valores más habituales los de 256, 400 y 800 líneas.

Cada línea corresponde a una banda de frecuencia de ancho constante y de valor el de la frecuencia más alta analizada dividido por el número de líneas calculadas. Así, por ejemplo, si obtenemos un espectro en el que la frecuencia más alta sea de 1,6 kHz y tenemos un analizador de 800 líneas, entonces el ancho de cada línea será de  $1,6 \text{ kHz} / 800 \text{ líneas} = 2 \text{ Hz/línea}$ . Es evidente, por tanto, el incremento de resolución frente a los analizadores de **filtros** de ancho de banda de porcentaje constante.

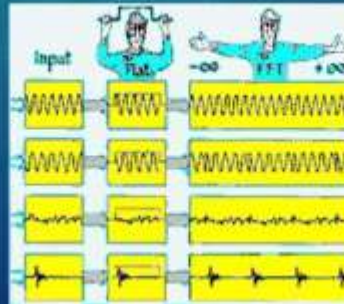
## VENTAJAS

- Una de las grandes ventajas del análisis *FFT* es la posibilidad de efectuar un zoom de una zona concreta del espectro obtenido, donde el sentido de zoom es el mismo que en fotografía. Es decir, si tenemos un espectro de 800 líneas de una señal cualquiera, un zoom nos permite efectuar una ampliación de una parte concreta del espectro que nos interese, con lo que el grado de resolución es extraordinariamente elevado.
- - Los analizadores *FFT*, recogen un trozo de señal temporal. Este depende de la frecuencia superior que se va a analizar.
- - El tiempo que recoge el analizador para hacer el análisis siempre cumple con:
- $B \cdot T = 1$
- $B$  = Ancho de banda de los filtros en Hz
- $T$  = Tiempo de integración en seg.

Una vez muestreada, se le aplica el algoritmo matemático para calcular su espectro.

## DESVENTAJAS

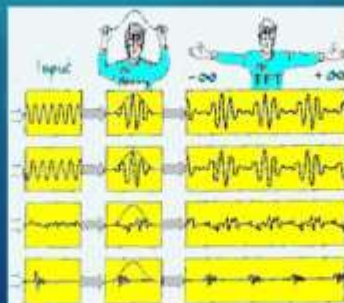
- El primer inconveniente surge del método de cálculo del **espectro**, ya que el equipo considera que esta muestra en Tiempo se va a repetir indefinidamente, de aquí que para señales continuas ocurren a veces irregularidades, pues la señal queda como cortada o distinta a como es en realidad, con la distorsión que esto produce en el análisis. En la figura, podemos ver cómo el equipo considera que son las señales.



Por supuesto existen ponderaciones en tiempo, como la *Hanning* que puede eliminar este efecto negativo de las discontinuidades a la hora de repetir la señal temporal; pero éstas también pueden distorsionar la señal de forma que su espectro quede distorsionado.

No obstante, podemos decir que para señales continuas es interesante realizar una ponderación en tiempo, tipo *Hanning* antes de realizar el algoritmo matemático.

En la figura podemos ver cómo esta ponderación trata las señales.





Aquí surge a veces otro inconveniente. Dado que el equipo coge un trozo de señal en tiempo para después procesarla, si el tiempo de cálculo es mayor que el tiempo de la señal tomada, el analizador deja de ser tiempo real, es decir, perdemos parte de la señal.

Esto tiene importancia en el análisis de señales transitorias como paso de [avión](#), [coches](#), etc.; pero en el caso de señales continuas no tiene ninguna influencia en el resultado del espectro calculado.

Normalmente estos equipos incorporan promediadores que al igual que en los analizadores digitales pueden ser lineales o exponenciales.

Para el análisis del sonido se emplean filtros de octava o *1/3 de octava*, que son filtros de porcentaje constante 73% y 23%.

## CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

- Amplia gama dinámica, también en la representación.
- Analizador Tiempo Real hasta frecuencia alta.
- Salida de Interface.
- Zoom, si es posible, que sea no destructivo.

#### 4.4 Introducción al manejo de instrumentos virtuales.

### Presentación de instrumentación virtual



Un instrumento virtual consiste de una computadora del tipo industrial o una estación de trabajo, equipada con baterías programadas (software), hardware económico, tales como placas para insertar, y manejadores (drivers) que cumplen, en conjunto, las funciones de instrumentos tradicionales. Los instrumentos virtuales representan un apartamiento fundamental de los sistemas de instrumentación basados en el hardware a sistemas centrados en el software que aprovechan la potencia de cálculo, productividad, exhibición y capacidad de conexión de las populares computadoras de escritorio y estaciones de trabajo. Aunque la PC y la tecnología de circuitos integrados han experimentado avances significativos en las últimas dos décadas, es el software el que realmente provee la ventaja para construir sobre esta potente base de hardware para crear los instrumentos virtuales, proveyendo mejores maneras de innovar y de reducir los costos significativamente. Con los instrumentos virtuales, los ingenieros y científicos construyen sistemas de medición y automatización que se ajustan exactamente a sus necesidades.

## Instrumentos Virtuales Tradicionales

Los instrumentos autónomos tradicionales, tales osciloscopios y generadores de ondas, son muy poderosos, caros y diseñados para llevar a cabo una o más tareas específicas definidos por el fabricante. Sin embargo, el usuario por lo general no puede extender o personalizar esas tareas. Las perillas y botones del instrumento, sus circuitos electrónicos y las funciones disponibles para el usuario son todas específicas a la naturaleza del instrumento. Además, deben desarrollarse una tecnología especial y costosos componentes para construirlos, lo cual los hace muy caros y lentos para adaptarlos.



## Aplicaciones Distribuidas

Un instrumento virtual no está limitado a estar confinado en una computadora autónoma. En realidad, con los recientes desarrollos en tecnologías de redes y la Internet, es más común utilizar la potencia de conectividad de los instrumentos con el fin de compartir tareas. Ejemplos típicos incluyen supercomputadoras, monitoreo distribuido y dispositivos de control, así como también datos o visualización de resultados desde múltiples sitios

## Diseño e Investigación

En la investigación y el diseño, los ingenieros y científicos demandan capacidades de rápido desarrollo y realización de prototipos. Con los instrumentos virtuales usted puede desarrollar rápidamente un programa, tomar mediciones desde un instrumento para ensayar un prototipo y analizar resultados, todo ello en una fracción del tiempo requerido para ejecutar ensayos con instrumentos tradicionales. Cuando usted necesita flexibilidad es esencial tener una plataforma ajustable y abierta, desde la computadora de mesa a los sistemas embebidos y redes distribuidas.

## Ensayos de Desarrollo y Validación

Dada la flexibilidad y poder de los instrumentos virtuales, usted puede elaborar fácilmente complejos procedimientos de ensayo. En el campo de los ensayos automáticos de diseño de verificación, usted puede crear rutinas en LabVIEW e integrarlas con programas tales como el National Instruments TestStand, que ofrece capacidades de manejo de ensayos muy poderosas. Usted puede desarrollar código dentro del proceso de diseño y luego insertar esos mismos programas dentro de herramientas funcionales para la validación, ensayo o la manufactura.

## El Software en la Instrumentación Virtual

- El software es el componente más importante de un instrumento virtual. Con la herramienta de software apropiada los ingenieros y científicos pueden crear eficientemente sus propias aplicaciones, diseñando e integrando las rutinas que requiere un proceso en particular. También pueden crear las interfaces de usuario que mejor satisfagan el objetivo de la aplicación y de aquéllos que van a interactuar con ellas. Pueden definir cómo y cuándo la aplicación adquiere datos
- desde el dispositivo, cómo los procesa; manipula y almacena los datos y cómo se presentan los resultados al usuario.

- Contando con un software poderoso, usted puede dotar a sus instrumentos con capacidades de inteligencia y de toma
- de decisiones de manera tal que se adapten cuando las señales medidas varíen inadvertidamente o cuando se requiera
- mayor o menor potencia de procesamiento. Una importante ventaja que provee el software es la modularidad. Cuando se trata de un gran proyecto, los ingenieros y científicos generalmente abordan la tarea

### **LabVIEW es la Herramienta Ideal para Crear Instrumentos Virtuales**

- LabVIEW es una parte integral de la instrumentación virtual dado que provee un medio ambiente de desarrollo de aplicaciones
- que es fácil de utilizar y está diseñado específicamente teniendo en mente las necesidades de ingenieros y
- científicos. LabVIEW ofrece poderosas características que facilitan la conexión a una gran variedad de hardware y otros
- softwares.

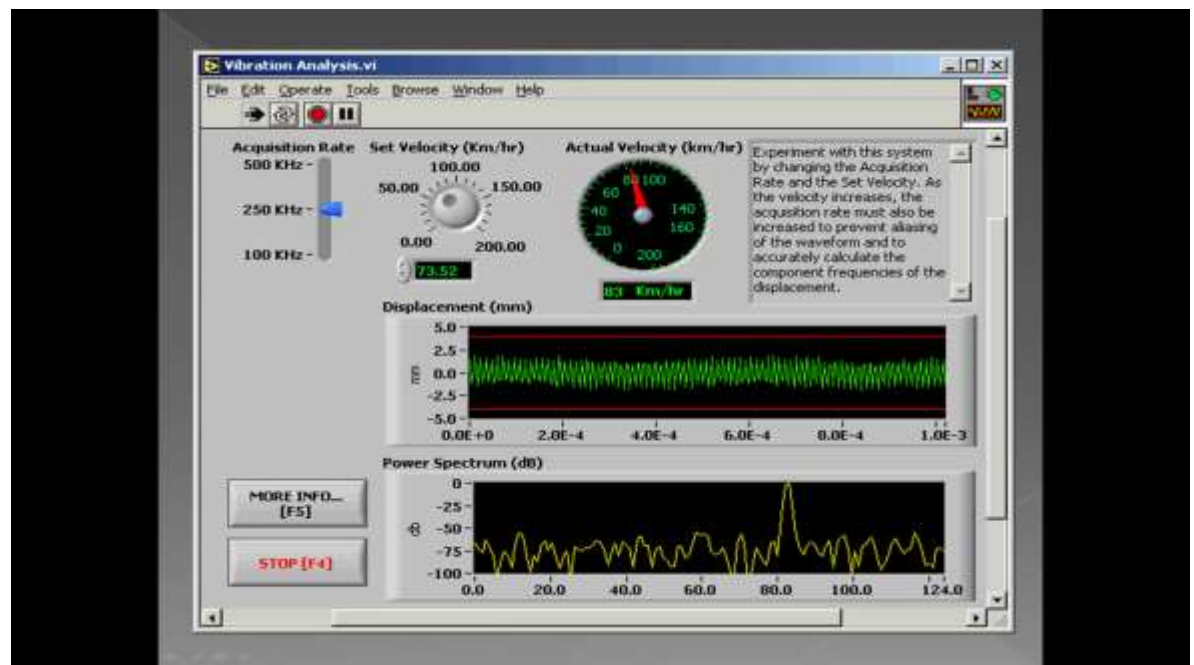
- Con LabVIEW usted puede desarrollar fácilmente aplicaciones distribuidas, aún entre diferentes plataformas. Con
- herramientas de servidores fáciles de usar, usted puede descargar rutinas que hacen un uso intensivo del procesador a
- otras máquinas para lograr una ejecución más rápida, o crear aplicaciones de monitoreo y control remoto. Una tecnología
- de servidores poderosa puede simplificar la tarea de desarrollar aplicaciones grandes y que requieran de múltiples
- computadoras. Además de ello, LabVIEW incluye tecnologías normalizadas de redes, tales como TCP/IP e incorpora
- protocolos robustos de publicación y suscripción.

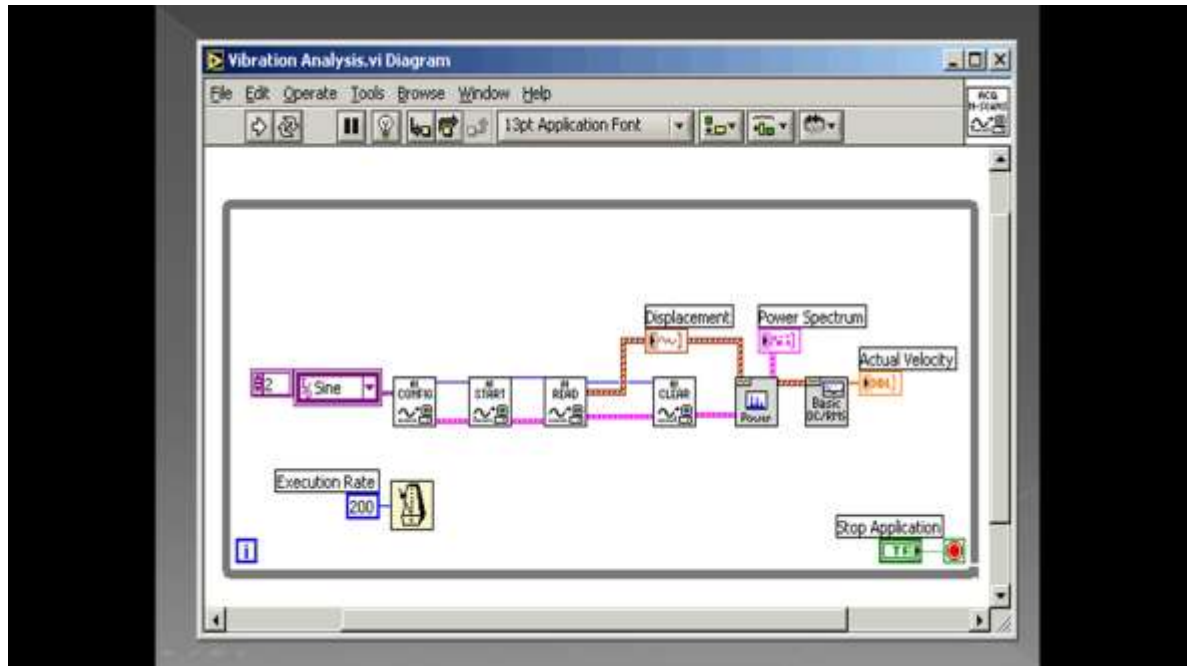
## Características de labVIEW

- Una de las características más poderosas que LabVIEW ofrece a los ingenieros y científicos es un medio ambiente de
- programación que es gráfico. Con LabVIEW usted puede diseñar instrumentos virtuales a medida creando interfaces
- gráficas de usuario en la pantalla de la computadora con la cual puede:
  - Operar el programa de instrumentación
  - Controlar el hardware seleccionado
  - Analizar datos adquiridos
- Visualizar los resultados Usted puede personalizar paneles frontales con perillas, botones, diales y gráficos a fin de emular paneles de control de
- instrumentos tradicionales, crear paneles de ensayo personalizados o representar visualmente el control y operación de
- procesos. La similitud existente entre los diagramas de flujo y los programas gráficos acorta la curva de aprendizaje
- asociada con lenguajes tradicionales basados en texto.



- LabVIEW incluye un amplio conjunto de herramientas de visualización para presentar datos en la interface del usuario
- de la instrumentación virtual, tanto para gráficos continuos como también para visualización de gráficos 2D y 3D. Usted
- puede reconfigurar de manera instantánea los atributos de la presentación de los datos, tales como: colores, tamaño de fuentes, tipos de gráfico y más, así como también efectuar rotación, enfoque (zoom) y desplazamiento dinámico en
- estos gráficos con el ratón. En lugar de programar gráficos y todos los atributos corrientes desde cero, usted simplemente
- arrastra y tira estos objetos dentro de los paneles frontales de los instrumentos.





## Practica de laboratorio para la unidad 4.

### 12. MEDICIÓN CON ANALIZADOR DE ESTADOS LÓGICOS.

*OBJETIVO: Que el alumno será capaz de comprender:*

*El manejo del analizador de estados lógicos.*

*La utilizar contadores síncronos (como divisores de frecuencia) y contadores de módulo menor que  $2^n$  a partir de contadores módulo  $2^n$ .*

**PRÁCTICA**  
**12**

**MANEJO DEL ANALIZADOR LÓGICO: CONTADORES**

**Descripción**

En esta práctica se persiguen dos objetivos:

- 1) Introducir al alumno en el manejo del analizador lógico.
- 2) Utilizar contadores internos (como división de frecuencia) y contadores de módulo menor que 2<sup>n</sup> a partir de contadores módulo 2<sup>n</sup>.

**El Analizador Lógico**

El analizador lógico es un instrumento de laboratorio que facilita convenientemente el estudio de circuitos y sistemas digitales que poseen un alto número de entradas y salidas. Al igual que el osciloscopio, el analizador lógico recibe señales de tensión, pero ofrece ventajas mucho más importantes diferentes:

- El osciloscopio puede medir simultáneamente un número reducido de señales (normalmente 2), mientras que analizador puede leer multitud de ellas (del orden de decenas). El analizador recibe cada señal mediante un cable que está conectado a un canal.
- El osciloscopio mide niveles continuos de tensión, mientras que el analizador lógico solo analiza si las señales están por encima o por debajo de un determinado nivel. De esa forma el analizador puede indicar el valor lógico de una señal (0 ó 1), pero no puede mostrar su nivel exacto de tensión.
- El osciloscopio muestra y representa continuamente las señales. El analizador, por el contrario, solo muestra las señales en ciertos instantes de tiempo para registrar su valor lógico en sus memoria interna (la acción de leer y registrar el valor lógico de las señales se denomina captura). El analizador solo puede registrar los valores lógicos que tiene las señales en los instantes de captura.

Los analizadores pueden realizar las capturas exactas en el tiempo en un periodo selectivo, para lo que disponen de un reloj interno. No obstante también pueden configurarse para que realicen las capturas cuando ocurre un flanco en una entrada especial (la entrada de reloj externo). Además pueden configurarse para que registren a

registro los datos si detecta un descenso de tensión en la entrada de datos y otro positivo en la decimosa quinta de disparo). Todo esto ocurre en el analizador en una herramienta ideal para analizar el funcionamiento de buses digitales.

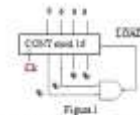
En nuestro laboratorio disponemos de analizador lógico sobre PC, así es, una tarjeta de adquisición y un programa sobre PC que funcionan como tal analizador, concretamente el modelo LA-0201.

Conecte el analizador lógico para observar las señales digitales del circuito. La conexión del analizador a la placa del circuito se hace a través de unos cables o cables. El analizador lógico opera en dos fases: primero, adquiere el valor lógico de las señales y los almacena en su memoria interna; después, representa estos valores en un monitor mediante una herramienta que facilita los procesos de visualización y medida de tiempos. Además, el analizador permite salvar los datos registrados en un fichero.

**Estado teórico**

En este apartado vamos a analizar el circuito que está mostrado en el estudio experimental. En primer lugar, se conectará adecuadamente el circuito integrado 74191 para hacerlo funcionar como un contador binario o sucesivos de módulo 16.

Posteriormente, analizaremos el circuito para observar un contador módulo 12 (Figura 1). Para ello se conecta el estado 11 (1100) mediante una puerta NAND de 2 entradas. La señal obtenida a la salida de la NAND se conecta a la entrada de carga en posición que se activa y activa en nivel lógico. Las entradas de carga en posición debe estar a 1.



En la Figura 1 se muestra el paso del contador módulo 12 desde su último estado al estado cero. De las cuatro se cuenta los segundos. Puede observar que en la señal  $Q_0$  se produce un pequeño pulso invertido debido a que el estado 12 aparece brevemente para activar la señal de LOAD y carga el 1.



# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

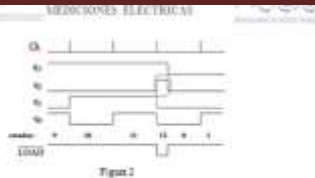


Figura 2

### Estado experimental

1. Mirese en la figura el circuito 7491. Se trata de un contador binomial de 4 bits reversible, con carga en paralelo, inhibición y salida de avance, cuyo esquema se muestra en la figura 2.
2. Debe hacer funcionar como contador ascendente de salidas 01, para ello debe fijar las salidas de acuerdo a tabla 1.

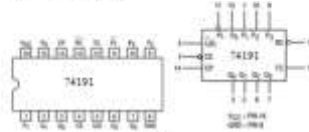


Figura 3

Tabla 1

00 00 00 00	salida de avance
01 00 01 01	salida de datos 0001 (en paralelo)
01 00 01 01	salida de carga en paralelo (avanzar un bit)
01 00 01 01	salida de habilitación de avance (avanzar un bit)
01 00 01 01	salida de habilitación de retroceso (retroceder un bit)
01 00 01 01	salida de retroceso en el flanco de subida
01 00 01 01	salida de los dos flancos de subida de avance del estado 0000
01 00 01 01	salida de los dos flancos de retroceso en estado 1111
01 00 01 01	salida de los dos flancos de avance en estado 00
01 00 01 01	salida de los dos flancos de retroceso en estado 11

3. Conecte el circuito con el analizador lógico (véase tabla 2), la fuente de alimentación y el generador de onda. **Nota importante:** En primer lugar, se realizan las conexiones con los terminales del analizador. Solo cuando se haya hecho de alimentar el circuito, Encienda por Vcc = 5V y que la salida de onda debe oscilar entre 0 y 5V.

Tabla 2

Terminal de analizador	Color del cable	Salida del circuito
Canal 0	rojo	Q0
Canal 1	verde	Q1
Canal 2	azul	Q2
Canal 3	amarillo	Q3
Canal 4	rojo	TS
TS	verde	CS
Canal 5 (Vcc)	gris	Vf

4. Conecte el analizador de forma apropiada para realizar el estado del circuito (véase el esquema anexo: "Diagrama del analizador LA2111").
5. Compruebe que el circuito opere correctamente. Visualice también las formas de onda de las salidas de salida del contador en el analizador lógico. Observe también la evolución de las salidas en formato tabla. Muestre sus resultados al profesor.
6. Modifique su montaje para obtener el contador módulo 12 del sentido retroceso (figura 3) a partir del contador ascendente usando los estados de carga en paralelo y punto 15A/UD de dos entradas (1400).

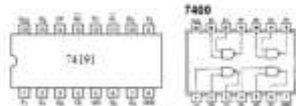


Figura 4

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

MEDEICIONES ELECTRICAS

1. Compruebe que el circuito opera correctamente. Visualice nuevamente las formas de onda de las señales de salida del convertidor en el analizador lógico. Observe también la evolución de las señales en tiempo real. Muestre sus resultados al profesor.

2. Compruebe el apantallamiento eléctrico en la salida Q2 (Figura 2 del estudio teórico). Mida la tensión de dicho punto. Para observar este efecto con el analizador necesitará modificar el sitio con el que se realiza la captura de muestra y utilizar una sonda generada internamente cuya frecuencia sea mayor que la frecuencia de operación del circuito. Incremente más la frecuencia a la que puede observar el punto apantado.

3. Mida la tensión del punto apantado. Para ello necesitará aumentar aún más la frecuencia de captura. Indique el resultado obtenido y la frecuencia que hará el trabajo.

**Muestro del software del LA-2132**

El programa que tiene que usar de la ejecución debe ser el analizador de punto USB del PC. El programa del LA2132 se ejecuta pulsando sobre el icono O-2132 disponible en el escritorio. Pulsar sobre el icono en la barra de tareas. A grandes rasgos, la ventana de aplicación presenta un cuadro de diálogo con el siguiente menú (File, View, Timing, ...) una fila de comandos o opciones que se pueden ejecutar (Go, Stop, ...) y una ventana dividida en dos partes:

- La parte superior contiene los comandos de los canales numéricos del sistema, los comandos de acceso y una barra para desplazarse a lo largo de las capturas.
- La parte inferior está destinada a presentar los datos capturados en los distintos canales de adquisición.

Antes de adquirir y transferir las señales del computador debemos analizar las condiciones de trabajo. Para ello pulsamos con el botón derecho sobre la ventana inferior y, en la ventana recién aparecida, seleccionamos las siguientes opciones:

- En la entrada "Tag Word" (en la que aparece un número en el orden 31\_3028\_0), escribimos "0" en las posiciones correspondientes a los canales de las señales de salida del convertidor.
- Para señalar que la adquisición de datos va a ser sincronizada con el flanco de bajada del reloj externo (del convertidor), en la entrada "Timing" seleccionamos "External Rising".

MEDEICIONES ELECTRICAS

- Para que realice una sola captura seleccionamos "Single" en la entrada "Acquire".
- Para que el tamaño de la captura sea de 100 muestras seleccionamos "100" en la entrada "Memory".
- Establecemos la adquisición de muestra. Usando el menú View -> Display, aparece la ventana Group Setup mostrada en la figura 4.



**Figura 4**

- Se crean tres grupos que son los siguientes:

  - El grupo 0 que llamaremos salida, está constituido por los canales del 0 al 3, que están conectados a las salidas de estado del convertidor. Deberá mostrarse en formato decimal.
  - El grupo 1, llamado  $f_{in}$  de ruido, estará constituido por el canal 4 que estará conectado a TC y se mostrará en formato.
  - El grupo 2, llamado reloj, contendrá únicamente la señal de reloj de la placa (canal 31) y se mostrará en formato.

Una vez modificados todos estos campos se puede pasar a la adquisición de los datos. Para ello pulsar la tecla (Go) y comenzará la adquisición al ritmo marcado por el reloj. Una finaliza la adquisición aparecen actualizadas sobre el listado de las líneas como las distintas formas de onda en la pantalla.

Para volver en formato tabla se necesita acceder al menú "View" (desde los comandos) y seleccionar "Data as Table window".

De acuerdo con la información recibida durante la práctica, redactar una conclusión de lo que obtiene de la misma. Proponer un concepto de "la aplicación de este equipo en su actividad laboral".

## 13. USO DEL LUXÓMETRO Y DEL TACÓMETRO.

**OBJETIVO:** Que el estudiante será capaz de:

- Identificar las diferentes partes que componen un luxómetro y un tacómetro.
- Aprender la operación del luxómetro digital para la toma de medidas instantáneas de iluminación.
- Aprender la operación del tacómetro digital para la toma de medidas instantáneas.

# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.



## MEDICIONES ELÉCTRICAS

### EXPERIMENTO No.13

#### USO DEL LUXÓMETRO Y TACÓMETRO

**OBJETIVO** Que el estudiante será capaz de:

- Identificar los diferentes paros que componen un luxómetro y un tacómetro.
- Aprender la operación del luxómetro y tacómetro digital para la toma de medidas rutinarias.

#### INTRODUCCIÓN

El luxómetro es un aparato que permite medir rápidamente y de forma sencilla la cantidad de flujo luminoso que se emite en cada unidad de área. La luz es captada por una célula fotovoltaica que la convierte en impulsos eléctricos. Dichos impulsos son interpretados y expresados en términos de luxes o foot-candle, unidades de medidas de los luxómetros. Estas unidades se reflejan en una pantalla.

Un luxómetro capta la luz por una célula fotovoltaica conectada a un circuito integrado. La cantidad de luz, o fotones, que recibe el circuito integrado son interpretados y convertidos en señales eléctricas. La señal eléctrica producida genera el movimiento de una aguja, el encendido de una luz o la aparición de una cantidad en un display, dependiendo del modelo y tipo de luxómetro que se utiliza.

Los luxómetros tienen amplias aplicaciones; por ejemplo, se utilizan para medir el brillo reflejado en los actores para que las cámaras los puedan captar correctamente, los museos adecuan el nivel de iluminación para no dañar las pinturas exhibidas, en viveros y bosques o en actividades ecologistas miden la cantidad de contaminación lumínica, entre otros.

#### MATERIAL

- Luxómetro Anagrá (LM-200LED)
- Fuente de Luz (Lámpara H.O de 175 W)
- Mesa de trabajo
- Cinta métrica



#### DESARROLLO

1.- Revisar las principales componentes del Luxómetro Anagrá LM-200LED que se utiliza para el desarrollo de la práctica. Identifique el sensor de luz, pantalla, interruptor de encendido, unidades, escalas, botones especiales. En la figura 1 se muestran los principales partes del luxómetro.

2.- De lectura y consulte las especificaciones técnicas del luxómetro Anagrá LM-200LED que a continuación se listan:

#### Especificaciones generales

Display 2000 count LCD  
Sensor Silicon photodiode and Siba  
Environment Indoor operation  
Altitude Up to 2000 m  
LED Light Measurement 1% drift, 1999 reading  
Range 200, 2,000, 20,000, 200,000 lux, 20, 200, 2,000, 20,000, 200,000 Foot-candle  
Accuracy  $\pm 2\%$  (calibrated to standard incandescent lamp 2858W) and corrected  
LED dry white-light spectrum  $\pm 8\%$  other visible light sources  
Temperature / Humidity Operating -10 °C to 40 °C (14°F to 104°F), 0 to 80 %RH  
Storage -10 °C to 50 °C (14°F to 112°F), 0 to 70 % RH  
Power Supply 9V NiMH 1604, IEC #21, 733 0957 battery  
Battery life 200 hours Auto Power Off approx. 6 use  
Dimension (Base) 133 x 43 x 18 mm (5.2 x 1.7 x 0.7")  
Dimension (Sensor) 80 x 55 x 29 mm (3.2 x 2.2 x 1.1")  
Weight 220 g (4.8 lb.) include battery  
Included Accessories User's manual, 9 volt battery, carrying case

#### 3.- Preparación del luxómetro.

Accionar el botón amarillo de encendido, el display debe mostrar lecturas en pantalla.

Retirar la tapa que cubre el sensor de luz, posicionar las lecturas en luxes con la tecla Lux/Ec y medir la iluminación del lugar de trabajo. Si la lectura indica 0L, es porque está fuera de rango y se debe de buscar la escala correcta.

$$E = \text{-----} \text{ lx}$$

Posicionar las lecturas en foot candles con la tecla Lux/Ec y medir la iluminación del lugar de trabajo.

$$E = \text{-----} \text{ fc}$$

Pulsando la tecla D-H consigue congelar el valor actual en la pantalla. Pulse nuevamente la tecla para proseguir con la medición.

Si desea registrar el valor máximo, pulse la tecla M-H.

## APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.



4.- Coloque la fuente de luz (luminario HID de 175 W) sobre la mesa de trabajo como muestra la figura 2. La tensión de alimentación del luminario es 220 V. Con ayuda de la cinta métrica mida la iluminación local a 2 m de distancia de la fuente de luz sobre la mesa. Utilice los diferentes valores de escala para medir en luxes y registre sus valores en la tabla 1.



Paso 1

Escala LUX	Lectura
200	
2000	
20000	
200000	

Tabla 1. Medición en luxes

Escala FC	Lectura
20	
200	
2000	
20000	

Tabla 2. Medición en foot-candles

Posicione las lecturas en **foot-candles**, repita el inciso anterior y registre sus valores en la tabla 2.

5.- Posicione el luxómetro sobre la mesa de trabajo para medir la iluminación en luxes a 1 m de distancia de la fuente de luz. Anote el resultado:

$$E = \text{_____} \text{ lx}$$

Posicione el luxómetro sobre la mesa de trabajo para medir la iluminación en foot-candles a 1 pie (0.3048 m) de distancia de la fuente de luz. Anote el resultado:

$$E = \text{_____} \text{ fc}$$

Son aproximadamente iguales los niveles de iluminación en luxes y foot-candles. Si consideramos que los niveles de iluminación son iguales, determine el factor de conversión entre las unidades lux y foot-candle.

$$1 \text{ (lx)} = \text{_____} \text{ (fc)}$$

6.- Desconecte la fuente de luz y guarde los cables de conexiones.

#### CUESTIONARIO

1. ¿Qué factores afectan a una de lecturas?
2. Menciona algunas aplicaciones de Luxómetro.
3. ¿Qué significan las letras CL en el símbolo que se debe hacer paraselectoral?
4. ¿Por qué en las escalas más altas registran lecturas en cero?
5. Explique cómo funciona el sensor de luz.
6. Indique los factores de conversión entre luxes y foot-candles.
7. Desarrolle los conceptos de flujo luminoso, intensidad luminosa e iluminación.

#### CONCLUSIONES

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## 5. Diseño y elaboración de tarjetas de circuitos impresos.

### 5.1 Introducción a los circuitos impresos.

#### INTRODUCCIÓN

En la actualidad los proyectos, diseños, prototipos eléctricos, electrónicos y electromecánicos crecen en complejidad, exigencia y especificaciones. La ardua labor de un equipo de trabajo o diseñador que genera un producto o solución queda totalmente bajo la responsabilidad del diseñador del circuito impreso, cuya labor va desde disminuir la funcionalidad de la aplicación debido a técnicas de layout inapropiadas, hasta mejorar su desempeño en condiciones adversas, innovar o disminuir sus requerimientos adicionales, hacer la aplicación más robusta, darle valor agregado a dicha solución generando las condiciones para que fácilmente entre a mercados internacionales y sea un producto completamente documentado y competitivo.

De esta manera, tanto el diseñador como fabricante del PCB deben tener en cuenta una gran cantidad de normas relativas a ubicación de componentes, radiación de señales electromagnéticas, interferencias entre etapas de un mismo circuito, formas, tamaños de las pistas y manejo térmico; que finalmente transforman un esquema en un diseño de PCB confiable que pueda ser fácilmente fabricado, ensamblado y probado.

De allí la necesidad de incluir normas técnicas en el diseño y fabricación de PCB; estas son emitidas y difundidas por entidades internacionales como la IEC (Internacional Electrotechnical Commission) y la IPC (Association Connecting Electronic Industries); esta última es la asociación de industrias relacionadas con interconexión electrónica y la máxima autoridad en lo que tiene que ver con el diseño de circuitos impresos en el mundo. La aplicación de estas normas garantiza el buen funcionamiento electrónico del producto final y además es de obligatorio cumplimiento para el acceso de productos en muchos países. Además, es necesario capacitarse en diseño de circuitos electrónicos o PCB (Printed circuit Board), lo cual es valorado internacionalmente como profesión.

¿QUÉ SON LOS ESTÁNDARES INTERNACIONALES?

En el campo de los circuitos impresos, los estándares son líneas de guía desarrolladas por diseñadores de PCB, fabricantes y ensambladores; para diseñadores. Son herramientas que ayudan en los procesos de:

Entender los conceptos básicos para diseñar circuitos.

Diseñar para la fabricabilidad (Design for Manufacturability – DFM), diseñar para hacer pruebas, mediciones y diseñar para que el resultado sea amigable con el medio ambiente (Design For Environment -DFE).

Minimizar el tiempo de lanzamiento al mercado de un diseño o producto

Formación como profesional en diseño y ensamble.

Obtención de un excelente producto final.

Generación de métodos de realimentación y mejora de diseños.

¿QUÉ INFORMACIÓN CONTIENEN LOS ESTÁNDARES INTERNACIONALES?

Los estándares básicos contienen información sobre:

1. Diseño de Layout
2. Consideraciones eléctricas y térmicas
3. Especificaciones de materiales
4. Especificaciones de componentes
5. Requerimientos de ensamble y montaje
6. Aspectos de fabricación de PCB
7. Características físicas de PCB
8. Documentación
9. Inspección y prueba
10. Confiabilidad

#### ¿QUIEN DISEÑA LOS ESTÁNDARES?

Los estándares los diseña el IPC (Association Connecting Electronics Industries) que es una red internacional de diseñadores que pro-mueven el diseño y ensamble de tarjetas como profesión, mejorando las oportunidades educativas para ellos y la profesión misma. Son labores del IPC la realización de programas para la industria en áreas de educación, entrenamiento, certificación, mercadeo y desarrollo. Lo integran más de 2100 diseñadores certificados como Certified Interconnect Designers (CID) y más de 180 diseñadores certificados como Advanced Certified Interconnect Designers (CID+). Organizan simposios y encuentros, además de participar en otras organizaciones como American National Standards Institute (ANSI), National Electronics Manufacturing Initiative (NEMI) y Underwriters Laboratories (UL).

#### NORMAS INTERNACIONALES PARA DISEÑO DE CIRCUITOS IMPRESOS PCB Y PRODUCTOS ELECTRÓNICOS

##### 1. ¿Qué información general contienen las normas?

Lo primero que hacen las normas es ayudar en la clasificación de los productos, para su correcta identificación, y aplicación de los criterios o ítems de cada norma, en aspectos de diseño, fabricación, ensamble y pruebas. Todo estudiante, diseñador o profesional que trabaje con productos, debería entender y clasificar así su labor.

##### 1.1. Clasificación de productos.

Para facilitar su identificación y tratamiento, los circuitos impresos y los circuitos ensamblados se clasifican, así: Clasificación del desempeño: dependiendo del uso final. Clasificación de la producibilidad: depende de la complejidad del diseño y de la precisión requerida en su producción. Cualquier clase de producto puede estar relacionado con cualquier nivel de producibilidad.

##### 1.2. Clases de desempeño.

Esto es fundamental, pues todos los productos no son iguales, las clases reflejan el aumento de la complejidad, sofisticación, los requerimientos de desempeño funcional y la frecuencia de las pruebas e inspección. El usuario o cliente del PCB es quien debe determinar la clase a la que pertenece su producto. Normalmente él no sabe o no está seguro, entonces debemos orientarlo. Clase 1: Productos Generales, de electrónica de consumo. Productos o Equipos como computadores, también hardware general militar, donde las imperfecciones físicas no son importantes y lo que se quiere es que funcione la soldadura o la placa ensamblada de circuito impreso. Estos productos ya los diseñan y producen muy bien en Asia, así que no estamos en este segmento por ahora.

Clase 2: Productos electrónicos profesionales o de servicio dedicado: Incluye equipos de comunicaciones, maquinas sofisticadas de negocios o industria, instrumentos y equipo militar, donde el rendimiento y la vida útil es necesaria, y que se desea un servicio ininterrumpido, pero no es crítico o no pone en riesgo la vida humana y las imperfecciones físicas se permiten. Este tipo de

productos se diseñan actualmente en Latinoamérica y se espera que se diseñe mucho más.

Clase 3: Productos electrónicos de alta fiabilidad. Productos comerciales y militares, donde el funcionamiento continuo y el rendimiento son crítico, vitales, no se toleran fallos o tiempos muertos, como los equipos de soporte de vida médicos, o sistemas de defensa. Los PCB requieren altos niveles de seguridad y confiabilidad. Algunas empresas en Latinoamérica hacen este tipo de diseño, rediseños y reparaciones. Debemos trabajar más intensivamente en este segmento.

### 1.3. Niveles de producibilidad.

El estándar proporciona tres niveles de producibilidad, que se relaciona con las características de una tarjeta, sus tolerancias, mediciones, ensamble, pruebas, verificación del proceso de fabricación, materiales, que se impacta en el aumento de la sofisticación de herramientas, materiales, procesos de fabricación y por su puesto en el aumento de los costos de fabricación. Esto es importante porque significa aumento en los costos y en la complejidad y confiabilidad del producto. Existen tres niveles: Nivel A: Diseño de complejidad general, preferida. El que se consigue normalmente con los fabricantes. Este es el más usado en Latinoamérica.

Nivel B: Diseño de complejidad moderada, estándar. De costo más elevado, con fabricantes especializados. Algunos proveedores en Latinoamérica pueden cumplir con este tipo.

Nivel C: diseño de alta complejidad, reducido: Donde solo lo pueden cumplir unos pocos proveedores en el mundo, selectos, con muchas normas y certificaciones.

Estos niveles no son un requerimiento de diseño, sino un método de comunicación, entre el usuario, diseñador y fabricante electrónico, del grado de dificultad de fabricación de una característica del PCB o ensamble. Sin embargo, los requisitos de la precisión, el rendimiento, la densidad de pistas, el equipo, ensamble y pruebas pueden afectar y de hecho determinar el nivel de producibilidad del diseño.

1.4. Tipos de tarjetas Los tipos de tarjetas varían según la tecnología de placas electrónicas y de componentes usados:

Tipo 1: Circuito impreso de 1 cara Es el tipo de PCB más barato. Se recomienda diseñar con consideraciones especiales para facilitar su fabricación, ensamble y reparación.

Tipo 2: Circuito impreso de 2 caras El tipo de PCB más común.

Tipo 3: Multicapa sin vías enterradas o ciegas Cuando se comienza con multicapa, se trabaja este tipo de PCB. Se debe ceñirse a las especificaciones del fabricante, para optimizar el diseño. Puede facilitar el trabajo y a la vez es más robusto que un PCB de 2 capas.

Tipo 4: Multicapa con vías enterradas o ciegas La fabricación es mediante laser. El diseño debe estar muy relacionado con la manufactura para evitar pérdidas de tiempo y problemas de confiabilidad.

Tipo 5: Núcleo de metal, multicapa sin vías enterradas o ciegas La fabricación es mediante laser. Se usa en aplicaciones aviónicas.

Tipo 6: Núcleo de metal, multicapa con vías enterradas o ciegas

### 1.5. Tipos de ensamble:

Cuando los componentes están montados sobre una cara o las dos.

Tipo 1: ensamble en una cara: el más común.

Tipo 2: ensamble en las dos caras: puede tener más costos dependiendo de la complejidad del componente.



*Normas estándares para la elaboración de circuitos impresos*

➤ Clasificación de productos:

Para facilitar su identificación y tratamiento, los circuitos impresos y los circuitos ensamblados se clasifican, así:

- Clasificación del desempeño: dependiendo del uso final.
- Clasificación de la producibilidad: depende de la complejidad del diseño y de la precisión requerida en su producción.

➤ Clases de desempeño

- Clase 1: Productos Generales, de electrónica de consumo. Productos o Equipos como computadoras, también hardware general militar, donde las imperfecciones físicas no son importantes y lo que se quiere es que funcione la soldadura o la placa ensamblada de circuito impreso.
- Clase 2: Productos electrónicos profesionales o de servicio dedicado: Incluye equipos de comunicaciones, maquinas sofisticadas de negocios o industria, instrumentos y equipo militar, donde el rendimiento y la vida útil es necesaria, y que se desea un servicio ininterrumpido, pero no es crítico o no pone en riesgo la vida humana y las imperfecciones físicas se permiten
- Clase 3: Productos electrónicos de alta fiabilidad. Productos comerciales y militares, donde el funcionamiento continuo y el rendimiento son crítico, vitales, no se toleran fallos o tiempos muertos, como los equipos de soporte de vida médicos, o sistemas de defensa. Los PCB requieren altos niveles de seguridad y confiabilidad

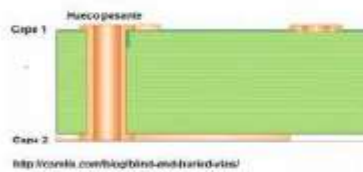
## 5.2 Diseño de PCB mediante software.

Tipo de tarjetas:

- Tipo 1: Circuito impreso de 1 cara Es el tipo de PCB más barato. Se recomienda diseñar con consideraciones especiales para facilitar su fabricación, ensamble y reparación.

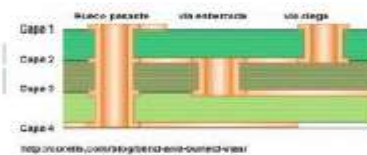


- Tipo 2: Circuito impreso de 2 caras El tipo de PCB más común.



- Tipo 3: Multicapa sin vías enterradas o ciegas Cuando se comienza con multicapa, se trabaja este tipo de PCB. Se debe ceñirse a las especificaciones del fabricante, para optimizar el diseño. Puede facilitar el trabajo y a la vez es más robusto que un PCB de 2 capas.

vías enterradas o ciegas La fabricación es mediante laser. El diseño debe estar muy relacionado con la manufactura para evitar pérdidas de tiempo y problemas de confiabilidad.



- Tipo 5: Núcleo de metal, multicapa sin vías enterradas o ciegas La fabricación es mediante laser. Se usa en aplicaciones aviónicas.



- tipos de ensamble:
  - Tipo 1: ensamble en una cara: el más común.
  - Tipo 2: ensamble en las dos caras: puede tener más costos dependiendo de la complejidad del componente.

<http://aldelta.com.co/wp-content/uploads/2017/03/Guia-basica-normas-para-circuitos-impresos-PCB-PARTE2.pdf>

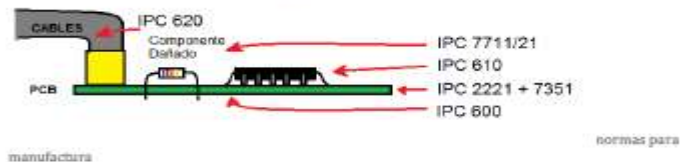
### 1. ¿Qué es la norma IPC 610?



Acceptability of electronic assemblies

La norma IPC 610 **Aceptabilidad de Ensamblajes Electrónicos**, es el estándar de calidad de circuitos impresos PCB, más usado en la industria, desarrollada por el IPC de Estados Unidos de América y las empresas líderes en producción electrónica en el mundo.

Esta reúne a su vez las siguientes normas:

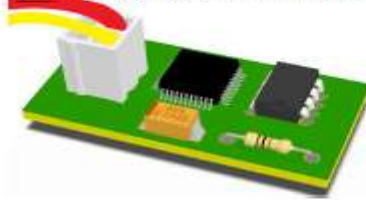


- 
- La IPC 600 para la Inspección de PCB sin ensamblar, esta es usada por todos los fabricantes de circuito impreso o PCB.
- 
- La JSTD-001 para requerimientos de soldaduras, fluxes, limpiadores. Esta la usan los soldadores y ensambladores.
- 
- La IPC 620 para aceptación de cables y harneses, de industrias como maquinaria, automotriz, espacial.

- La IPC 7711/21, para reparación, retrabajo o modificación de PCB.

Y aunque no habla de diseño, obviamente la aceptación de calidad IPC 610 es el resultado de un buen o mal diseño de producto y de PCB.

## 2. ¿Qué beneficios se obtiene al usarla?



PCB con normas IPC 600, 610, 620, 7711/21

### 2.1. Mejorar de productos y procesos:

- La norma nos da insumos para mejorar los productos y los procesos de diseño, fabricación y ensamble.
- Nos facilita la comunicación y resolución de dificultades entre diseñadores, fabricantes, y usuarios de productos o equipos electrónicos.

### 2.2. Prestar servicios:

•

- Se puede usar la norma como herramienta para prestar servicios de auditoria a otras empresas.

### 2.3. Diferenciación

- Diferenciarse de la competencia en licitaciones, contratos o servicios que exijan el personal certificado y el conocimiento de la norma.



- El derecho a usar el logo de la certificación, en documentos impresos como: tarjetas de presentación, papelería, contratos, informes, publicidad.
- Poder ser reconocido como Especialista Certificado Internacionalmente – CIS 610 (Certificatd IPC Specialis) ante el IPC de Norteamérica.

## 3. ¿Qué contenidos tiene la norma IPC 610?

### Modulo 1: Prólogo

- Nos dice el alcance de la norma.

RIVERA MATA DANIEL

RESUMEN

#18181001



contrato de manufactura electrónica

- Nos ayuda a clasificar los productos, de acuerdo su desempeño: Clase 1, 2 ó 3.
- También explica los criterios de aceptación de ensambles: ideal, aceptable, defecto, indicador de proceso.
- Y por ultimo describe cómo seleccionar, y usar ayudas visuales, e iluminación para la inspección.

#### Modulo 2 Documentos aplicables



normas para electrónica

- Nos lista las normas relacionadas con el diseño, y la producción en caso de necesidad.
- Y nos ayuda a entender los documentos involucrados en un contrato de manufactura electrónica, su prioridad e importancia

#### Módulo 3: Manejo de ensambles electrónicos

RIVERA MATA DANIEL

RESUMEN

#18181001

- Nos orienta como prevenir la la descarga Electrostática



TRANSCIENTES Y ESD

ESD y la sobrecarga EOS.

- Nos explica como tener una estación de trabajo segura.
- Y Manejar ensambles electrónicos para evitar contaminación y daños en el proceso.

#### Modulo 4: Dispositivos

- Ayuda a evaluar la Instalación segura, de hardware



hardware electrónico

- mecánico, como tuercas, tornillos, arandelas, roldanas, disipadores, elementos térmicos, aislantes, para que no interfieran o generen problemas en ensambles
- También indica como evaluar conectores y cables, sus amarres, instalación, dobleces.

#### Módulo 5: Aspectos de soldadura.

- Describe los requisitos de aceptabilidad de la soldadura, como ángulo de mojado.
- Y otras anomalías del soldado: como no mojado, soldadura fría, removida, exceso, corto-circuito, fractura o soldadura libre de plomo.
- Terminales, conexiones y cables.



- Nos orienta como prevenir la la descarga Electrostática



TRANSIENTES Y ESD

ESD y la sobrecarga EOS.

- Nos explica como tener una estación de trabajo segura.
- Y Manejar ensamblajes electrónicos para evitar contaminación y daños en el proceso.

#### Modulo 4: Dispositivos

- Ayuda a evaluar la Instalación segura, de hardware



hardware electrónico

mecánico, como tuercas, tornillos, arandelas, roldanas, disipadores, elementos térmicos, aislantes, para que no interfieran o generen problemas en ensamblajes

- También indica como evaluar conectores y cables, sus amarres, instalación, dobleces.

#### Módulo 5: Aspectos de soldadura.

- Describe los requisitos de aceptabilidad de la soldadura, como ángulo de mojado.
- Y otras anomalías del soldado: como no mojado, soldadura fría, removida, exceso, corto-circuito, fractura o soldadura libre de plomo.
- Terminales, conexiones y cables.

- Evalúa el soldado y daños a los cables.
- También su instalación: el alivio de tensión y dobleces.
- Y muchos tipos de terminales, a veces desconocidos, que podemos usar.

#### Módulo 6: Tecnología de inserción (THT), conexiones.



alta tensión en electrónica

- Nos ayuda a inspeccionar el montaje correcto de componentes y su doblado
- También los criterios de llenado y mojado de la soldadura.
- Así como cables o jumpers o puentes que a veces es necesario usar.

#### Módulo 7: Tecnología montaje superficial (SMT):

- Nos permite evaluar adhesivos de fijación de estos



aceptación de calidad

componentes así como sus daños

- Y criterios de aceptación: como los desplazamiento lateral y frontal
- El ancho, la longitud, espesor y altura del filete o menisco de soldadura
- Para todo tipo de componente SMT

**Módulo 8: Cuidados y daños de componentes, y PCB.**



- Nos orienta en los daños o defectos del cuerpo de los componentes SMT o THT, conectores, pines.
- Y en los daños o defectos a PCB sin ensamblar de:
  - Laminado
  - pistas, pads, vias,
  - Marcado o screen
  - Limpieza
  - Defectos de antisolder y recubrimientos

**4. ¿Qué es una certificación en la norma IPC 610?**



Aceptabilidad de ensamblajes electrónicos



Los estudiantes que participan en un curso de tres días y obtienen más de 70% de preguntas positivas,

adquieren la certificación CIS 610 (Certified IPC Specialist – Especialista Certificado del IPC).

Los estudiantes obtienen además:

- La norma IPC A 610 y el Certificado internacional IPC CIS 610

## Las 5 reglas principales del diseño de PCB digitales

La tecnología de PCB digitales ha recorrido un largo camino en el campo de la electrónica, mientras las innovaciones y los desarrollos satisfacen las demandas de dispositivos y aparatos electrónicos más rápidos, más pequeños y más económicos. Los PCB digitales constan de varios microprocesadores y otros circuitos electrónicos con capacidad para



gestionar miles de operaciones por segundo. En comparación con las placas de circuito analógicas, los PCB digitales cuentan con una serie de mejoras, siendo las principales la mejor adaptación de la impedancia y el mayor control de la pérdida de inserción de las líneas de transmisión.

Es muy importante que los PCB digitales se diseñen y conciban minuciosamente con el objetivo de eliminar problemas como las discontinuidades de impedancia en las líneas de transmisión, el chapado incorrecto de las interconexiones de los orificios pasantes, así como otros problemas relacionados con la integridad de la señal. Los PCB digitales poseen una serie de características que les aportan una ventaja durante el funcionamiento de un circuito electrónico. Algunas de estas características son:

- Elevado número de capas
- Estrictas tolerancias dimensionales
- Eliminación de los *stubs*
- Alta densidad de encapsulado
- Compleja estructura de apilamiento, entre otras

#### **Diferencias entre PCB analógicos y digitales**

Existen varias similitudes y diferencias en cuanto al enrutamiento analógico y digital en los PCB en términos de condensadores de bypass, fuente de alimentación, diseño de tierra, errores de tensión, interferencia electromagnética (EMI, por sus siglas en inglés), etc. causados por el enrutamiento del PCB.

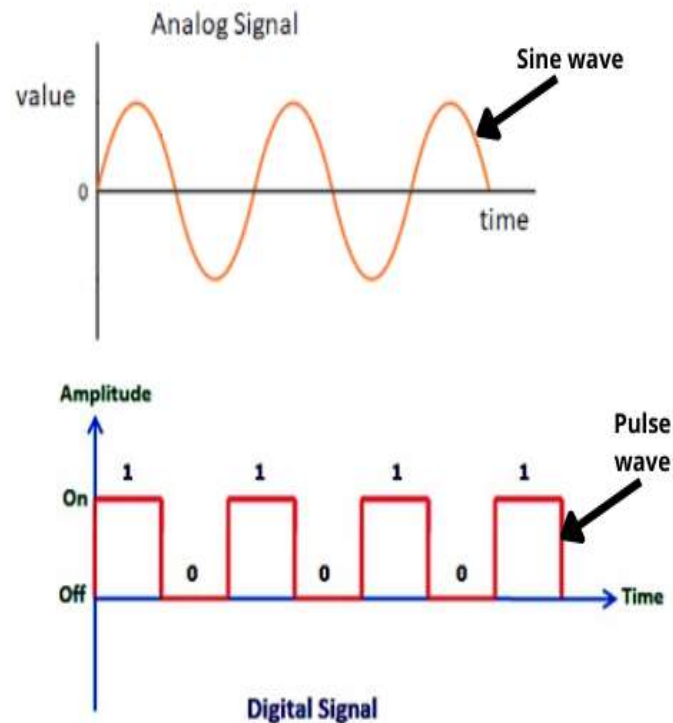


Fig. 1: - Señales analógicas y digitales  
Fuente - Proto-Electronics

Los circuitos analógicos consisten en una combinación de Op-Amps, resistencias, condensadores y otros componentes electrónicos utilizados en un PCB. Estas combinaciones de diversos componentes que forman un circuito analógico pueden variar de diferentes formas. Las dos aplicaciones principales de los circuitos analógicos son:

1. **Filtrado de señales:** En el caso de una señal continua, es necesario un filtro analógico continuo a fin de eliminar todas las frecuencias no requeridas del circuito. En comparación con un filtro digital, las aplicaciones de filtrado analógico son mucho más sencillas y más económicas.
2. **Sensores:** La conversión de datos adaptables del mundo real en información que sea reconocible por un sistema integrado o un ordenador se efectúa con la ayuda de sensores. Si no hay datos disponibles, los sensores crean una señal analógica y la convierten en señales digitales. Estos sistemas poseen baja amplitud y necesitan un acondicionamiento de la señal para aumentar su calidad y realizar un mejor aprovechamiento de todo el rango de un ADC, a diferencia de los sistemas de alta tensión.

Por otro lado, los circuitos digitales están formados por una combinación de componentes lógicos y secuenciales que se sirven de puertas lógicas que funcionan en señales digitales. En comparación con los circuitos analógicos, las señales digitales operan con la lógica de 0 y 1 para representar datos en formato digital en un único circuito integrado.

### **Criterios de selección de materiales del PCB para circuitos digitales**

Existen ciertos factores que deberían tenerse en cuenta a la hora de seleccionar materiales para PCB digitales. Algunos de ellos son:

1. **Estabilidad de la tolerancia dimensional:** El PCB digital debe incorporar materiales que aporten una estabilidad mecánica impecable, pasando por diferentes estabilidades de temperatura, vibraciones, choques y sobrecargas o sobretensiones eléctricas.
2. **Gestión térmica superior:** Los materiales deben ser capaces de proporcionar una excelente transferencia y disipación térmica, y deben garantizar que las capas no se descompongan, desprendan o despeguen a frecuencias más altas.
3. **Rendimiento potenciado de la señal:** Durante el funcionamiento del circuito, el rendimiento de la señal debe ser constante en todo el PCB con mínimas pérdidas de señal, incluso durante variaciones de frecuencia. Los diseñadores deben asegurarse de que los materiales seleccionados tengan un bajo factor de pérdida dieléctrica (Df) para garantizar que no se produzcan pérdidas.
4. **Estricto control de la impedancia:** Los PCB digitales requerirán un estricto control de la impedancia, ya que tendrán que mantener una constante dieléctrica (Dk) estable durante las operaciones a alta velocidad.
5. **Resistencia a la humedad y a los productos químicos:** Deben seleccionarse materiales con un bajo índice de absorción de humedad y productos químicos para que se produzcan variaciones mínimas en el rendimiento eléctrico deseado del PCB.

### **Materiales del PCB digital**

El fundamento o la base de una antena de PCB consiste en un sustrato y un laminado, que también determina el rendimiento del PCB. Cualidades tales como la funcionalidad, la longevidad y la rentabilidad deben considerarse prioritarias a la hora de diseñar un PCB, por lo que es crucial seleccionar el tipo de material adecuado. El material que se tiene en cuenta en el diseño de un PCB puede ejercer un efecto a corto o largo plazo sobre el rendimiento. El precio del material de un PCB es directamente proporcional al rendimiento del mismo. Si no es esencial un alto rendimiento del PCB, puede considerarse el uso de un material denominado poliéster ligero, por razón de su bajo coste y su buena versatilidad.

En la selección de los materiales, la temperatura es un parámetro que debe tenerse en cuenta. La resistencia térmica debe ser mayor que el calor producido, ya que con un exceso de calor el circuito puede fallar. La Tg (temperatura de transición vítrea) se produce en el momento en que el PCB pierde su rigidez y su capacidad de rendimiento. La Tg debe ajustarse al proceso de montaje empleado, y se recomienda una Tg con un mínimo de 170 °C para el montaje sin plomo. Para un PCB de alto rendimiento, la Tg debe ser superior a 170°C, mientras que un PCB estándar tiene una Tg de 130°C. La ventaja de contar con una elevada Tg es la gran capacidad de resistencia a los productos químicos y a la humedad.

Los materiales generalmente empleados en los sustratos del PCB van desde el FR-1 y el G-10 hasta el PTFE. Los laminados están formulados con CTE, FTFE, CEM y otros componentes diversos.

- **FR-4:** FR son las siglas en inglés de «retardante de llama» y su uso es generalizado en placas estándar. Cuenta con dos puntos de Tg: el primero es de 135°C y el segundo es de 150°C-210°C, lo que es aplicable a los usos de alta densidad.
- **G-10:** Se trata de un laminado de fibra de vidrio de alta presión El G-10 y el FR-4 se utilizan como aislantes para aplicaciones eléctricas y electrónicas.
- **PFTE (Politetrafluoroetileno):** El PFTE puede ser una buena opción en placas de alta frecuencia, microondas y alta potencia, ya que cuenta con una Tg de 160°C y 280°C.
- **CEM-1, CEM-2 y CEM-3:** Funcionan bien en aplicaciones de alta densidad. La Tg ofrecida por CEM-1, CEM-2 y CEM-3 es de 122°C, 125°C y 125°C, respectivamente
- **Poliamida-** Como sustrato, ofrece una Tg de 250°C o más para circuitos de alta potencia. En el caso de los circuitos flexibles, son preferibles los sustratos de poliamida, puesto que los sustratos de FR-4 son rígidos. Los sustratos de poliamida son ligeramente más costosos que los de FR-4, pero ofrecen una gran resistencia a las temperaturas.

### **Reglas para el diseño de PCB digitales**

La mayoría de los sistemas de diseño de PCB tienen la capacidad de transferir reglas entre el esquema y el diseño. Esto permite que el esquema controle las reglas de diseño en lugar de esperar a que se introduzcan todas las restricciones del lado del diseño, lo que representa una enorme ventaja para los diseñadores. Este nivel de organización brinda a los diseñadores la capacidad de crear reglas para la colocación de redes y componentes concretos, que son esenciales para el diseño de circuitos. La clase de red o red permite agrupar redes similares entre sí y asignarles un conjunto de reglas. Dado que las reglas de red ya están presentes en la base de datos de diseño, el diseñador no necesita depender de instrucciones escritas. Para garantizar el diseño preciso de la placa del circuito, hay algunas reglas que deben seguirse: -

1. **Valores por defecto-** La herramienta de diseño del software arrancará con valores por defecto que normalmente surgen a causa de flecos de diseños previos o valores predeterminados del sistema. El diseñador debe confirmar estos valores antes de comenzar a fin de asegurarse de que no se enruten con anchos de traza incorrectos o que se coloquen los componentes demasiado cerca. Para evitar este tipo de problemas, estos valores por defecto pueden reiniciarse a través de la configuración. Asimismo, debe asegurarse que el espaciado de los valores por defecto se configure según el esquema requerido del circuito, al objeto de evitar inconvenientes causados por configuraciones previas.

2. **Categorías-** Aunque la mayoría de las reglas pueden configurarse para redes o componentes individuales, este proceso puede llevar mucho tiempo si existen centenares de objetos con los que trabajar que requieran reglas y restricciones únicas. Algunas de las herramientas de diseño proporcionan un sistema para la instalación de categorías de redes y componentes, con el propósito de facilitar la configuración de reglas y restricciones.

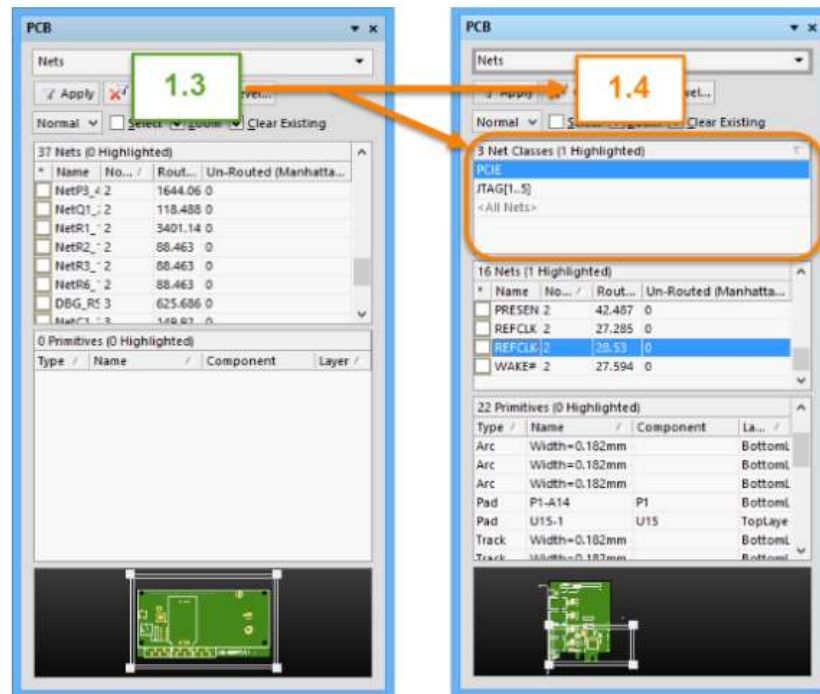


Fig. 2: Categorías de instalación  
Fuente- Circuitstudio

Por ejemplo, los anchos de traza únicos y los requisitos de espaciado pueden configurarse para un valor de redes concreto, un diseñador puede crear un conjunto de reglas para una categoría de potencia y añadirlas a las redes.

3. **Reglas de diseño de alta velocidad:** A la hora de diseñar circuitos digitales de alta velocidad, pueden configurarse longitudes de traza específicas, así como hacer coincidir las longitudes de las trazas de conexión cercanas, lo que contribuye a mejorar la estabilidad de las líneas de datos. Para enrutar las trazas juntas a diferencias establecidas, se pueden establecer pares diferenciales a distancias creando topologías de traza exclusivas para características de red concretas. Para el enrutamiento controlado por la impedancia, los anchos de las trazas pueden configurarse automáticamente, y los tamaños de las vías pueden asignarse a las categorías de redes.

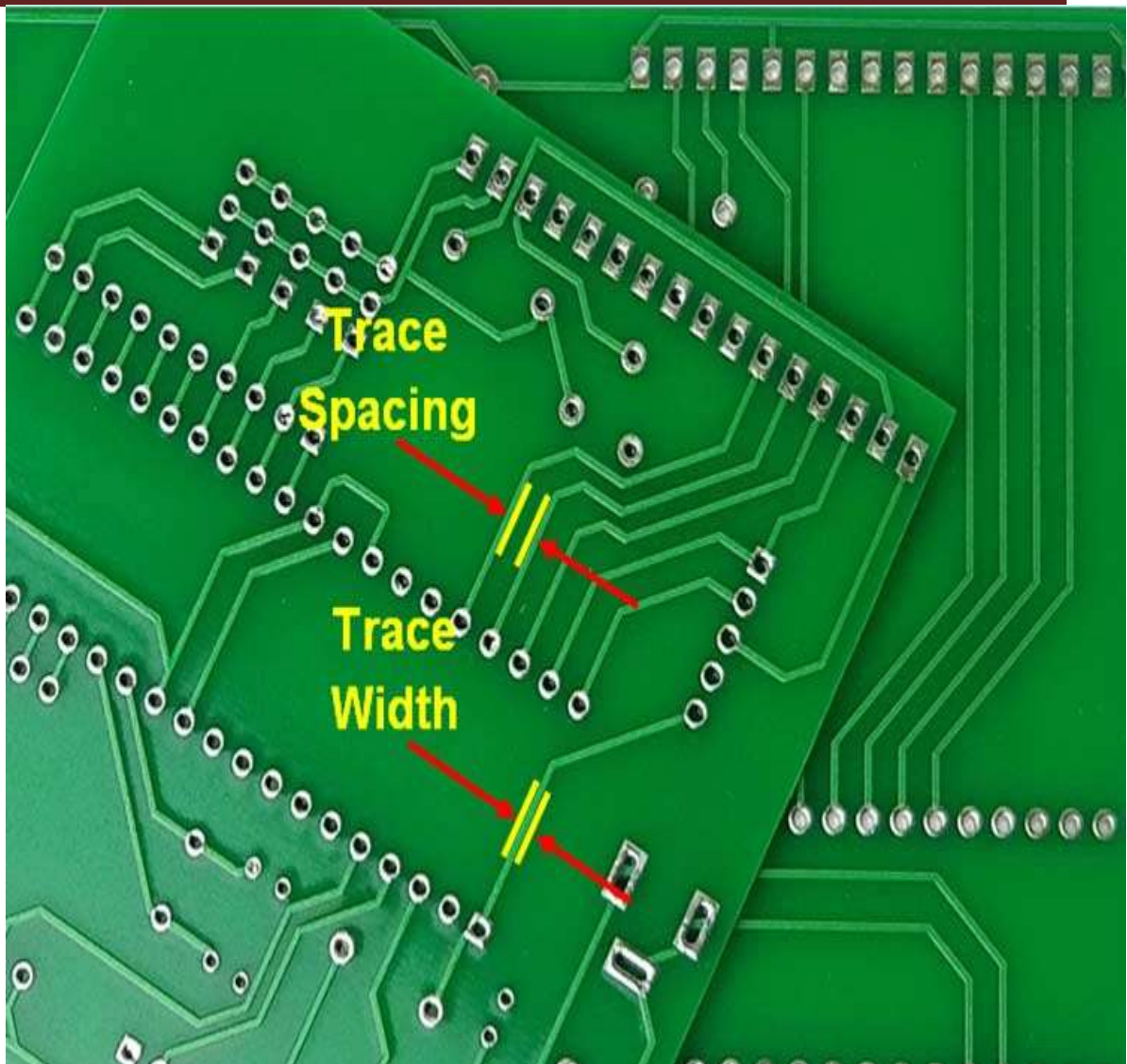
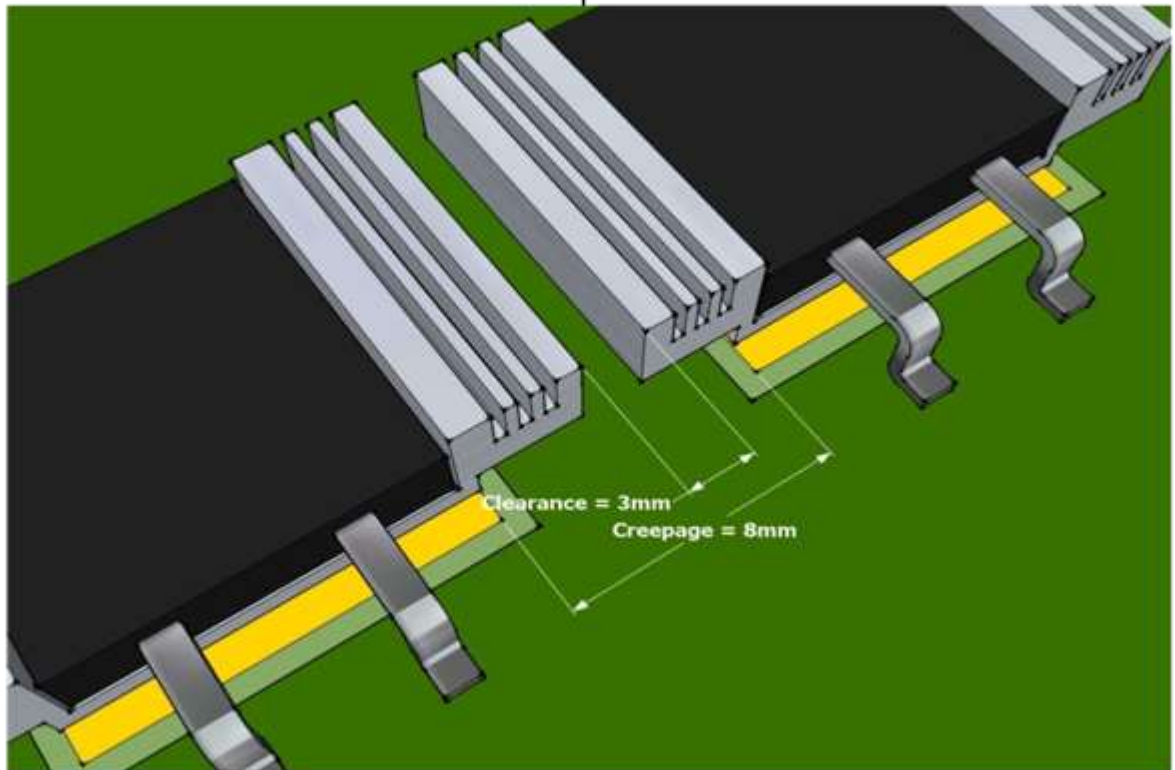


Fig. 3: - Diseño de trazas  
Fuente - PCBDesignworld

4. **Elección del espaciado correcto de la placa de circuito impreso:** La selección del espaciado correcto entre los componentes empleados en el circuito y el espaciado entre las líneas de la placa de circuito impreso ayuda a mejorar la salida eléctrica deseada y también ahorra costes y reelaboraciones. Una relación de aspecto ideal de la vía de 6:1 garantiza la fabricación de la placa donde se requiera, lo que ayuda a que la perforación esté exenta de problemas.





**Figure 4: Creepage Passes / Clearance Fails**

*Fig. 4: Espaciado del PCB*  
*Fuente- Optimumdesign*

Asimismo, durante el proceso de diseño, los componentes y los esquemas de los circuitos deben representarse correctamente en cualquier software de CAD, lo que permite a los diseñadores visualizar simulaciones precisas antes de la producción en serie.

5. **Protección frente a la descarga electrostática:** Los PCB digitales son muy vulnerables a las descargas electrostáticas que pueden producirse debido a un fallo causado durante el funcionamiento de componentes en estado sólido como circuitos integrados (CI), baterías, etc. Si no se toman en serio, los circuitos pueden funcionar mal o incluso explotar. Los diseñadores de PCB deben utilizar protectores de ESD como varistores de óxido metálico, diodos de supresión de tensión transitoria, supresores basados en polímeros, etc. al objeto de evitar los problemas provocados por las descargas electrostáticas.

## Conclusión

En el diseño de PCB digitales, deben extremarse las precauciones durante todo el proceso de diseño para garantizar que tanto el circuito como el PCB rindan al máximo. Deben tenerse en cuenta varios factores a la hora de seleccionar el material adecuado para el PCB HDI digital. Los materiales deben tener estabilidad dimensional, elevado control de la gestión térmica, resistencia a la humedad y a los productos químicos, etc. para que la señal pase a través del PCB con fluidez y sin interrupciones. El FR4 es uno de los materiales más



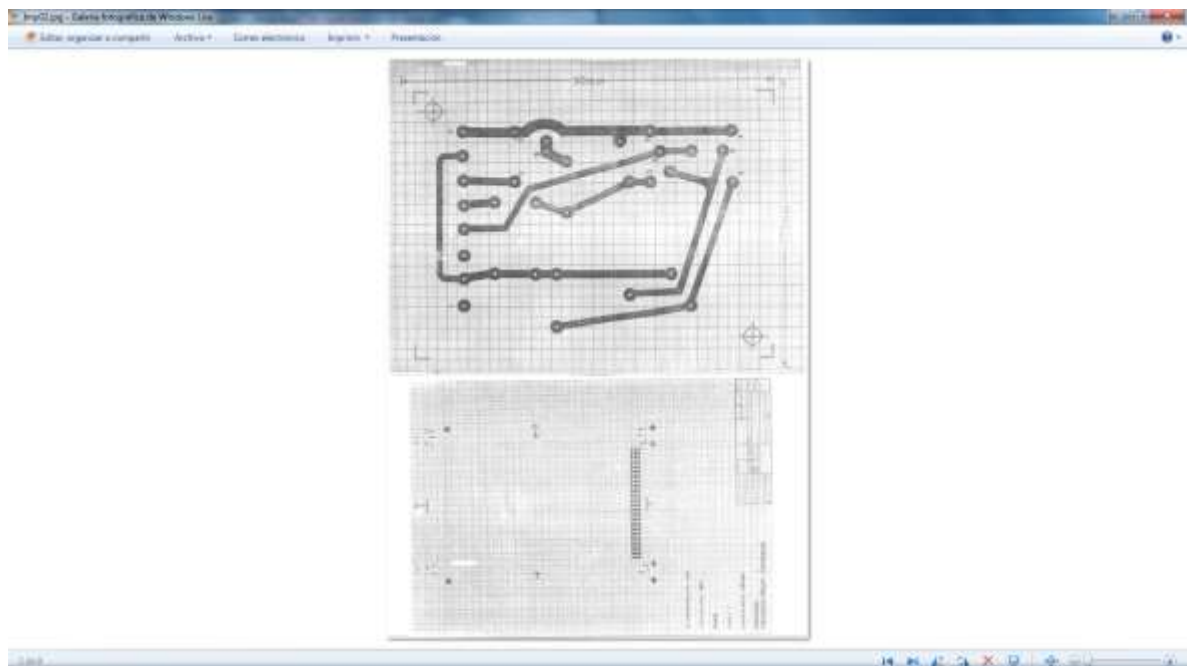
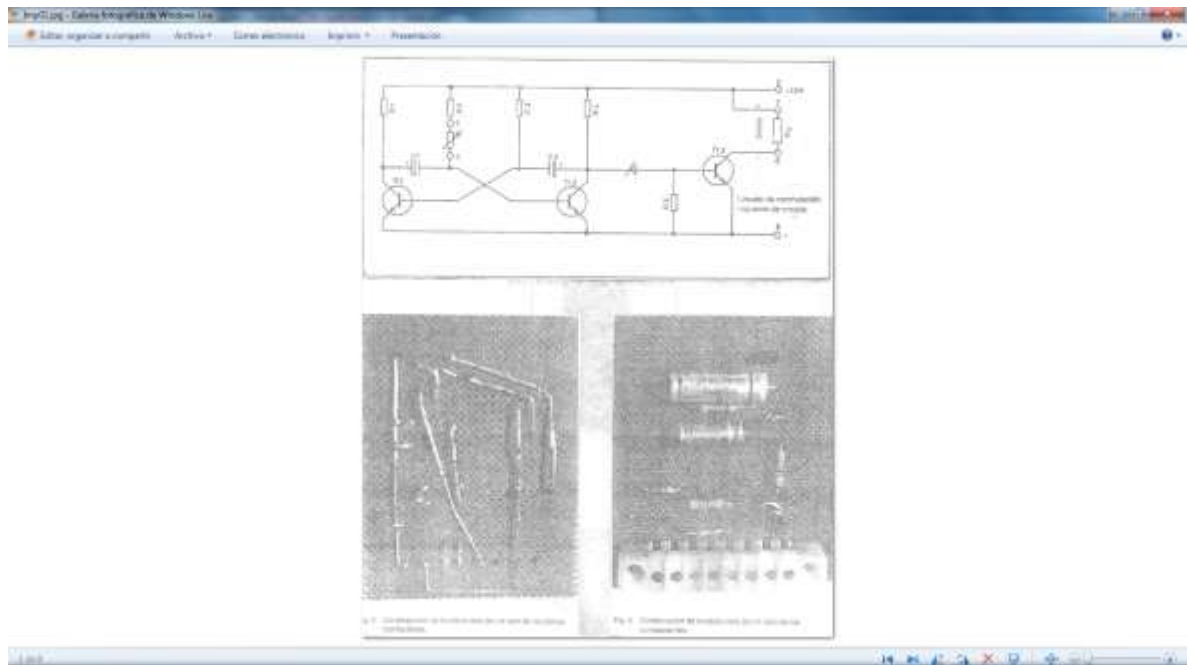
adecuados para el diseño de PCB digitales, debido a su elevada resistencia dieléctrica y a la integridad superior de la señal.

Antes de pasar a la producción en serie, es importante que los diseñadores simulen los componentes electrónicos y su funcionamiento en el PCB para obtener los resultados idóneos. En cuanto a los circuitos digitales de alta velocidad, el diseño de las longitudes de trazas es esencial, ya que mejora la estabilidad de la señal para una mejor transmisión de la misma. El espaciado de los componentes debe efectuarse de manera correcta, manteniendo la cercanía adecuada para evitar interferencias de las señales. Una relación de aspecto de las vías de 6:1 puede servir para realizar una fabricación y una perforación eficientes en la placa, lo que contribuye a aportar flexibilidad durante el proceso de cableado y soldadura. La mejor práctica posible para evitar las descargas electromagnéticas y sus efectos en los PCB consiste en utilizar diversos protectores, como varistores de óxido metálico, diodos de supresión de tensiones transitorias, supresores basados en polímeros, etc.

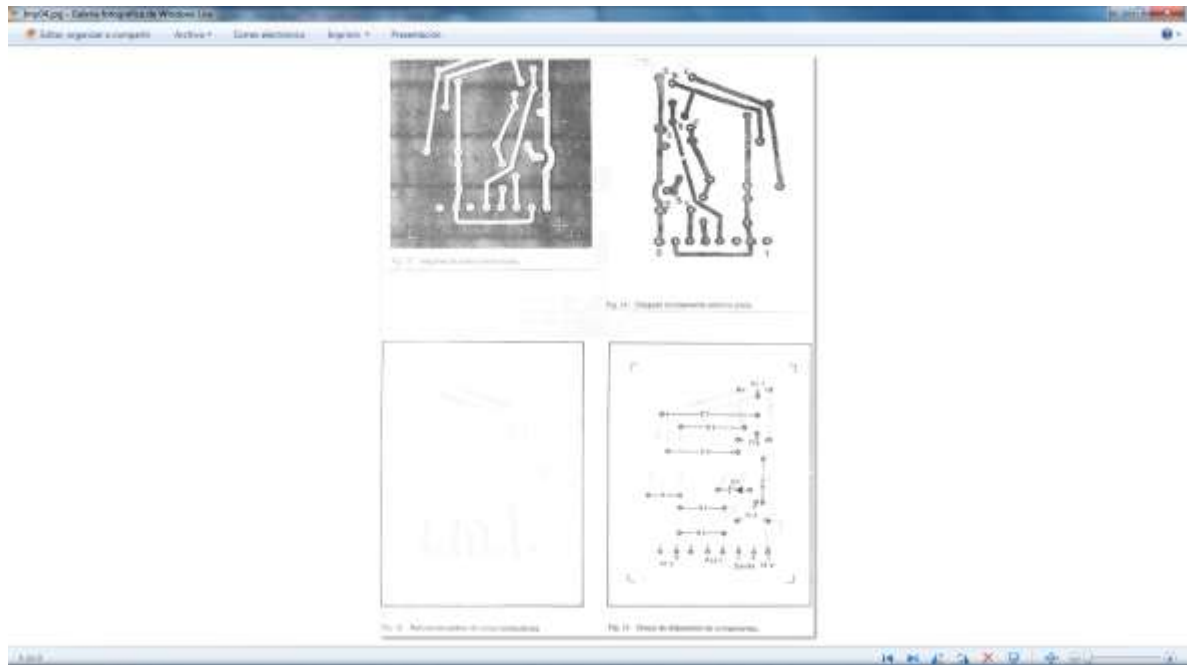
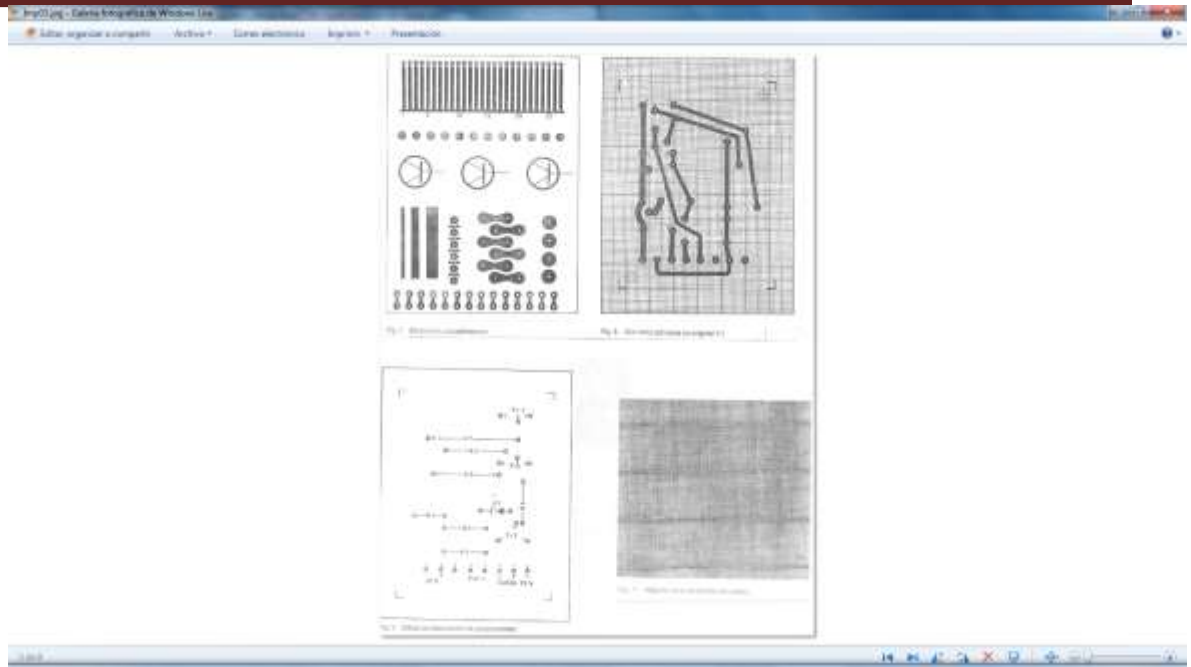
# Proteus: Programa + Manuales

<https://foroelectronico.wordpress.com/2014/04/15/proteus/>

Presentación de fabricación de PCB.



# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.





# APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

Ejercicio de calificación en el procedimiento de trabajo y de montaje

**Objetivo**

El alumno deberá ser capaz de montar y medir un puente de impedancias para determinar la impedancia de un elemento pasivo.


**Resumen**

Este ejercicio tiene como objetivo que el alumno sea capaz de montar y medir un puente de impedancias para determinar la impedancia de un elemento pasivo.

El alumno deberá ser capaz de montar y medir un puente de impedancias para determinar la impedancia de un elemento pasivo.

Medida	Instrumentos	Medio
Impedancia	Medidor de impedancias	Resistor

Medida	Instrumentos	Medio
Impedancia	Medidor de impedancias	Resistor



**Procedimiento de montaje de trabajo**

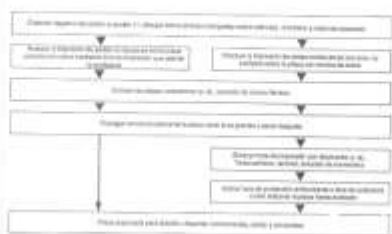
1. Montar el puente de impedancias.

2. Medir la impedancia de un elemento pasivo.

3. Comparar los resultados con los valores nominales.


Ejercicio de calificación en el procedimiento de trabajo y de montaje

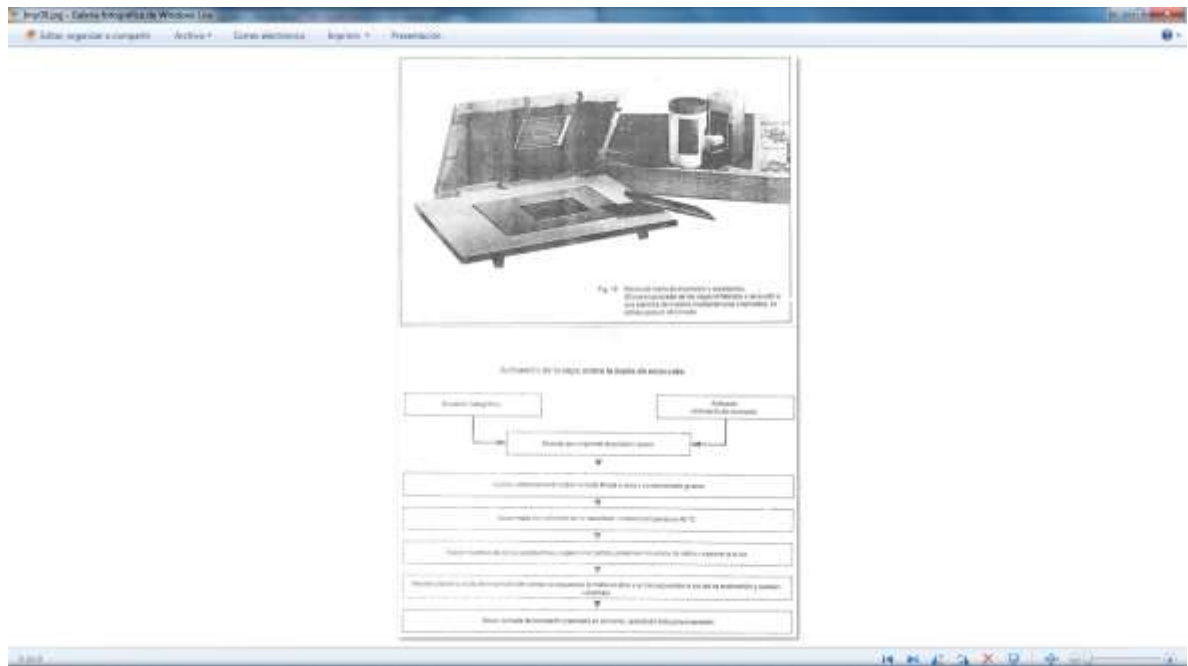
**Procedimiento de montaje**



Medida	Instrumentos	Medio
Impedancia	Medidor de impedancias	Resistor

Medida	Instrumentos	Medio
Impedancia	Medidor de impedancias	Resistor





## COMO FABRICAR PLACAS DE CIRCUITO IMPRESO (por planchado) EN

...

<https://www.youtube.com/watch?v=Klj3Zqn3NzE>

## **Tutorial Electronica Basica. Cap 25. PCB metodo de la INSOLADORA. Fuente de laboratorio 0-30V 4A**

<https://www.youtube.com/watch?v=SO2EzThHa1E&list=RDCMUCqz-FIdJBCxBkvJKq01zHew&index=15>

Tutorial #Electrónica Básica. Cap 15. Cómo hacer circuitos impresos PCB (I)  
Terrazocultor jose manuel

[https://www.youtube.com/watch?v=anadeSIFL\\_A](https://www.youtube.com/watch?v=anadeSIFL_A)

## Practica de laboratorio para la unidad 5.

### 14. ELABORAR DISEÑO LIBRE DE TARJETA DE CIRCUITOS IMPRESO.

*OBJETIVO: Que el estudiante sea capaz de desarrollar un diseño libre de tarjeta de circuito impreso, empleando alguna de las técnicas enseñadas en clase.*

### 15. REALIZAR UN DISEÑO COMPLETO DE UN CIRCUITO IMPRESO DONDE SE CONSIDERE NORMAS.

*OBJETIVO: Que el estudiante será capaz de realizar un diseño completo de un circuito impreso donde se considere normas.*

## Bibliografía

- Areny, R. P. (2007). En *Instrumentos Electrónicos básicos* (pág. 318). México: Alfaomega Grupo Editorial.
- Banda, V. (marzo de 2021). *Academia.edu*. Recuperado el 30 de Enero de 2023, de Apuntes de Instrumentación Electrónica.
- Helfrick, W. D. (1991). En *Instrumentación Electrónica Moderna y Técnicas de Medición* (pág. 450). México: PRENTICE HALL.
- Lago, E. M. (1996). En *Instrumentación Electrónica* (pág. 262). Mexico: Alfaomega / Marcombo.
- Smith, S. W. (1992). Guía para Mediciones Electrónicas y Prácticas de Laboratorio. En *Guía para Mediciones Electrónicas y Prácticas de Laboratorio* (pág. 584). México: PRENTICE HALL.



Tecnológico Nacional de México, Instituto  
Tecnológico de San Luis Potosí

Reporte Electromagnetismo de Año Sabático

---

**B. Programa para la elaboración de Apuntes, Libros, Objetivos  
Educativos y Reactivos de Evaluación. / B1. Apuntes de las  
Asignaturas Mediciones Eléctricas (ETD-1021) y  
Electromagnetismo (AEF-1020) del Programa Educativo  
Ingeniería Electrónica (IELC-AUT-2010-211).**

Ricardo Jacinto Pardo González

31/08/2023

## Contenido

Objetivo:.....	1
Justificación:.....	1
Introducción:.....	1
Competencia a desarrollar de la asignatura: .....	3
Competencias previas: .....	3
Temario.....	3
Instrumentación didáctica.....	4
Desarrolló de apuntes de electromagnetismo.....	13
1.    Unidad Electrostática .....	14
1.1    La carga eléctrica.....	14
1.2    Conductores y Aislantes Eléctricos.....	23
1.3    Interacción Eléctrica.....	26
1.4    El campo Eléctrico.....	37
1.5    La Ley de Gauss.....	67
1.6    El Potencial Eléctrico.....	81
Practica 1.....	104
Practica 2.....	106
2.    Unidad Energía Electrostática .....	111
2.1    Energía Potencial Electrostática.....	111
2.2    Capacitancia.....	119
2.3    Capacitores en serie, paralelos y mixtos.....	132
2.4    Dieléctricos en Campos Eléctricos.....	138
2.5    Momento Dipolar Eléctrico.....	147
2.6    Polarización Eléctrica.....	153
PRÁCTICA 3.....	164
PRÁCTICA 4.....	167
3.    Unidad Corriente Eléctrica .....	172
3.1    Definición de Corriente Eléctrica.....	172
3.2    Vector Densidad de Corriente.....	180
3.3    Ecuación de Continuidad.....	187
3.4    Ley de Ohm.....	194

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y  
ELECTROMAGNETISMO.**

---

3.5	Resistencias en serie, paralelas y mixtas.....	197
3.6	Ley de Joule.....	206
3.7	Fuerza Electromotriz (fem).....	208
3.8	Leyes de Kirchhoff.....	213
3.9	Resistividad y efectos de la Temperatura.....	219
3.10	Circuito R-C en Serie.....	226
	PRÁCTICA 5.....	241
	PRÁCTICA 6.....	247
4.	Unidad El campo Magnético.....	253
4.1	Interacción Magnética.....	262
4.2	Fuerza Magnética entre Conductores.....	269
4.3	Ley de Biot-Savart.....	276
4.4	Ley de Gauss del Magnetismo.....	281
4.5	Ley de Ampere.....	283
4.6	Potencial Magnético.....	291
4.7	Corriente de desplazamiento (término de Maxwell).....	296
	PRÁCTICA 7.....	310
5.	Unidad Inducción Electromagnética.....	314
5.1	Deducción de la Ley de Inducción de Faraday.....	314
5.2	Autoinductancia.....	332
5.3	Inductancia Mutua.....	335
5.4	Inductores en Serie, Paralelo y Mixtos.....	347
5.5	Circuito R-L.....	353
5.6	Energía Magnética.....	359
5.7.	Ley Faraday.....	363
	PRÁCTICA 8.....	368
6.	Unidad Propiedades Magnéticas de la Materia.....	373
6.1	Magnetización.....	374
6.2	Intensidad Magnética.....	376
6.3	Constantes Magnéticas.....	377
6.4	Clasificación Magnética de los Materiales.....	379
6.5	Circuitos Magnéticos.....	383

Bibliografía ..... 415

Tabla 1 Magnitudes Físicas..... 15

Tabla 2 Masas y cargas de las partículas que forman un átomo. .... 21

Tabla 3 Ley de los signos en electrostática. .... 26

Tabla 4 Valores de la rigidez dieléctrica de algunos materiales..... 140

Tabla 5 Constantes dieléctricas de algunos materiales. .... 142

Tabla 6 Constantes Dieléctricas (a 20 °C)..... 146

Tabla 7 Código de color para los resistores. .... 185

Tabla 8 Resistividades y coeficientes de temperatura de resistividad para diversos materiales... 185

Tabla 9 Código de colores de los resistores. .... 193

Tabla 10 Coeficiente de temperatura de algunos materiales..... 221

Tabla 11 Analogía entre campos eléctricos y magnéticos. \* ..... 256

Tabla 12. Importantes características de los elementos básicos. \* ..... 349

Tabla 13. Susceptibilidad magnética de algunas sustancias paramagnéticas y diamagnéticas a 300 K..... 379

Tabla 14. Clasificación de los materiales magnéticos ..... 380

Tabla 15. Analogía entre circuitos eléctricos y magnéticos. .... 383

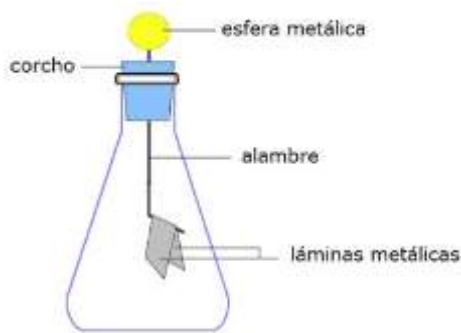


Figura 1 Electroscopio. .... 17

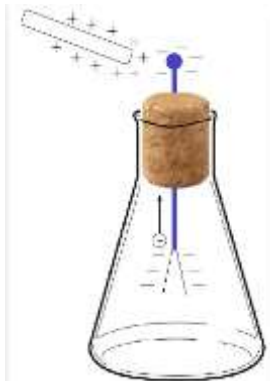


Figura 2 Generador Electrostático de Van der Graff..... 18

Figura 3 Generador electrostático de Wimshurst..... 18

Figura 4Electrización de varilla..... 19

Figura 5 Comprobación de que cargas iguales se repelen y cargas distintas se atraen. .... 19

Figura 6 Balanza de torsión de Coulomb, utilizada para determinar la ley del cuadrado inverso para una fuerza eléctrica entre dos cargas. .... 26

Figura 7 Repulsión y atracción de cargas. El vector unitario  $\mathbf{r}_{12}$  apunta en la dirección de la fuerza que ejerce  $q_1$  sobre  $q_2$ . En ambos casos se cumple la tercer Ley Newton  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ . .... 29

Figura 8 La posición de las cargas en función de los vectores de posición..... 29

Figura 9 Ejemplo 2..... 32

Figura 10 Ejemplo3.....	33
Figura 11 Ejemplo 4.....	33
Figura 12 Ejemplo 4, componentes rectangulares.....	35
Figura 13 Ejemplo 5.....	35
Figura 14 Ejemplo 6.....	36
Figura 15 La presencia de una carga produce perturbaciones a su alrededor.....	38
Figura 16 Representación grafica del campo eléctrico.....	39
Figura 17 Si $q > 0$ , la carga de prueba será repelida y en el punto P habrá un campo eléctrico en la misma dirección que $\mathbf{F}$ .....	40
Figura 18 Si $q < 0$ , la carga de prueba será atraída y en el punto P habrá un campo eléctrico en la misma dirección que $\mathbf{F}$ .....	40
Figura 19 Átomo de hidrogeno.....	42
Figura 20 Vector $\mathbf{r}$ , $\mathbf{r}$ y $\mathbf{E}$ de una carga puntual.....	43
Figura 21 Triangulo equilátero con 3 cargas.....	44
Figura 22 Cuadrado con 4 cargas en los vértices.....	45
Figura 23 Campo ejercido en el centro de un cuadrado por 4 cargas en sus vértices.....	45
Figura 24 Simplificación del campo en el centro del cuadrado usando el concepto de líneas de campo.....	46
Figura 25 Campo eléctrico en tres puntos, a, b y c, orientado por las cargas $q_1$ y $q_2$ , lo que constituye un dipolo eléctrico.....	47
Figura 26 Cargas puntuales localizadas en los vértices de un hexágono regular de lado L.....	51
Figura 27 Esfera de saúco electrizada.....	52
Figura 28 Campo eléctrico en P generado por una carga puntual en una distribución continua de carga.....	53
Figura 29 Movimiento de un electrón dentro de un campo eléctrico uniforme.....	63
Figura 30 Movimiento del electrón paralelo al campo eléctrico.....	64
Figura 31 Liberación de un electrón con cierta inclinación dentro de un campo eléctrico.....	64
Figura 32 Partícula incide perpendicular en el campo eléctrico y cerca de placa negativa.....	65
Figura 33 Grafica de movimiento rectilíneo uniforme.....	66
Figura 34 Placas electrizadas.....	66
Figura 35 Superficie cerrada hipotética Gaussiana.....	68
Figura 36 Líneas de campo eléctrico uniforme atravesando $r_n$ forma perpendicular a una superficie de área A.....	69
Figura 37 Líneas de fuerza para los dos tipos de cargas puntuales.....	69
Figura 38 Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un área A la cual forma un ángulo $\mathbf{u}$ en relación con el campo. Ya que el número de líneas que atraviesan el área $A_{\perp}$ es el mismo número que pasa a través de A, el flujo que pasa a través de $A_{\perp}$ es igual al flujo que pasa a través de A y se conoce por $\Phi\mathbf{E} = \mathbf{EA} \cos\theta$ .....	69
Figura 39 Superficie cerrada dentro de un campo eléctrico. Los vectores de área son, por convención, normales a la superficie y apuntan hacia afuera. El flujo a través de un elemento de área puede ser positivo (elemento 1), cero (elemento 2) o negativo (elemento 3).....	71
Figura 40 Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.....	72

Figura 41 Cubo con carga $q$ en el centro.....	73
Figura 42 Carl Friedrich Gauss.....	74
Figura 43 Una distribución de cargas encerrada por varias superficies. Notar que algunas líneas salen y otras entran a través de las superficies. ....	75
Figura 44 Ejemplo grafico de la divergencia de un campo eléctrico.....	77
Figura 45 Calculo de $E$ producido por una linea de carga muy larga . ....	79
Figura 46 Tubo metálico electrizado.....	79
Figura 47 Cálculo del campo eléctrico fuera de una superficie plana no conductora con carga uniforme.....	80
Figura 48 Lámina muy delgada electrizada.....	81
Figura 49 Energía potencial eléctrica. ....	82
Figura 50 Desplazamiento de una carga $q$ , desde el punto 1 al 2, siguiendo la trayectoria indicada. ....	84
Figura 51 Trabajo efectuado por el campo eléctrico producido por $q$ para mover $q_0$ desde A hasta B.....	86
Figura 52 Representación de una superficie equipotencial.....	88
Figura 53 El potencial en P debido al elemento de carga $dq$ .. ....	89
Figura 54 El potencial en $r$ debido al elemento de carga $dq'$ .....	90
Figura 55 Cálculo de la energía potencial por integración de $E$ para una sola carga puntual.....	92
Figura 56 a) El potencial eléctrico en P debido a las dos cargas $q_1$ y $q_2$ es la suma algebraica de los potenciales debidos a las cargas individuales. b) Una tercera carga $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$ se lleva desde el infinito al punto P.....	93
Figura 57 Una batería de 90 V conectada a dos placas paralelas. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud determinada por la diferencia de potencial $\Delta V$ dividida entre la separación de placa d. ....	94
Figura 58 El campo eléctrico realiza trabajo para mover a la carga $q$ de la posición a hasta la posición b. ....	112
Figura 59 La energía potencial asociada con la carga $q$ en el punto a depende de las cargas $q_1, q_2, q_3$ , y de sus distancias $r_1, r_2, r_3$ desde el punto a. ....	114
Figura 60 La parte central de la figura 58 muestra una carga puntual negativa cerca de la placa negativa, donde su energía potencial (EP) es elevada.....	116
Figura 61 Electrón acelerado en un tubo de rayos Catódicos. ....	117
Figura 62 Distribución de cargas. ....	117
Figura 63 Dibujo de la situación después de que se ha traído la tercer carga del infinito. ....	118
Figura 64 Capacitor o condensador. ....	119
Figura 65 Energía almacenada en un condensador. ....	120
Figura 66 (a) Representación esquemática de un capacitor eléctrico, (b) representación gráfica de un capacitor y (c) variación de la diferencia de potencial con la distancia de separación entre los conductores.....	121
Figura 67 Diagrama eléctrico del capacitor. a) Capacitor seco de placas planas. b) Capacitor electrolítico. c) Representación esquemática de un capacitor conectado a una batería.....	122

Figura 68 Capacitores sólidos. a) Condensadores cerámicos. b) Condensadores de película plástica. c) Estructura interna típica de los condensadores cerámicos. ....	122
Figura 69 Capacitores electrolíticos. a) Capacitores electrolíticos de tantalio. b) Capacitores electrolíticos de aluminio. c) Estructura interna típica de los condensadores electrolíticos de aluminio.....	123
Figura 70 Símbolos de los condensadores variables.....	124
Figura 71 a) Condensador variable. b) Estructura interna de los capacitores variables.....	124
Figura 72 Condensador de placas paralelas.....	127
Figura 73 Condensador cilíndrico.....	129
Figura 74 Condensador esférico.....	130
Figura 75 Tres capacitores $C_1$ , $C_2$ y $C_3$ . (a) Conectados en serie a una diferencia de potencial $\Delta V$ , (b) Conectados en paralelo a una diferencia de potencial $\Delta V$ . ....	132
Figura 76 Diagrama eléctrico de una conexión mixta de capacitores. ....	134
Figura 77 Circuito mixto 1. ....	135
Figura 78.....	138
Figura 79 Diagrama esquemático de un capacitor con dieléctrico. ....	140
Figura 80 Ecuaciones que relacionan la densidad de carga. el potencial eléctrico y el campo eléctrico.....	148
Figura 81 Un dipolo son dos cargas de igual magnitud y signo contrario separadas por una distancia. ....	151
Figura 82 Geometría para calcular el campo eléctrico producido por un dipolo. ....	151
Figura 83 Situación donde el punto P se encuentra muy alejado del dipolo, es decir $r \gg d$ . ....	152
Figura 84 Líneas de campo eléctrico (negro) y superficies equipotenciales (azul) de un dipolo eléctrico.....	153
Figura 85 Dieléctrico sin cargas libres. ....	154
Figura 86 Distribución discreta de cargas. ....	155
Figura 87 Representación gráfica de la corriente eléctrica directa. ....	173
Figura 88 Representación gráfica de la corriente alterna.....	173
Figura 89 Representación esquemática de la generación de corriente eléctrica por emisión.....	174
Figura 90 Esquema de la sección de un conductor por el que pasan cargas eléctricas para la representación de la velocidad de arrastre. ....	177
Figura 91 La corriente tiene que ver con el número de coulombs de carga que pasan a través de un punto del circuito por unidad de tiempo. ....	180
Figura 92 Las bandas de color en un resistor son un código para identificar su resistencia. Los primeros dos colores representan .....	184
Figura 93 a) Curva corriente-diferencia de potencial para un material óhmico. La curva es lineal y la pendiente es igual al recíproco de la resistencia del conductor. b) Curva no lineal corriente-diferencia de potencial correspondiente a un diodo de unión. Este dispositivo no sigue la ley de Ohm.....	187
Figura 94 Las cargas se mueven a través de cuatro regiones. ....	187
Figura 95 Representación esquemática de la resistencia eléctrica de un cuerpo. ....	189
Figura 96 a) Material óhmico. b) Material semiconductor no óhmico. ....	192



Figura 97 Ilustración de una resistencia con valor indicado de acuerdo con código de colores. ...	193
Figura 98 Esquema del código de colores para resistores. ....	193
Figura 99 Diagrama eléctrico del circuito de la ley de Ohm. ....	194
Figura 100 Graficas de corriente contra voltaje para a) un material conductor que obedece la ley de Ohm y b) un aparato no óhmico: en este caso, un diodo semiconductor.....	195
Figura 101 Resistencia polarizada. ....	196
Figura 102 Linterna. Observe como el circuito se cierra a lo largo de la banda lateral. ....	196
Figura 103 Cuatro diferentes formas de conectar tres resistores. ....	197
Figura 104 Cuatro diferentes formas de conectar tres resistores. ....	197
Figura 105 Los faros de un automóvil están conectados en paralelo. De ahí que cada uno esté expuesto a toda la diferencia de potencial suministrada por el sistema eléctrico del vehículo, lo que da el máximo brillo. Otra ventaja es si un faro se funde, el otro sigue funcionando (vea ejemplo 2) .....	199
<b>Figura 106 Etapas para reducir una combinación de resistores a un solo resistor equivalente y calcular la corriente en cada resistor. ....</b>	<b>201</b>
<b>Figura 107 Diagrama para este problema. 26.4 .....</b>	<b>203</b>
<b>Figura 108 Cuando se conecta la misma fuente dos bombillas en serie (imagen superior) consume menos potencial y brillan menos que si se conectan en paralelo -8imagen inferior)..</b>	<b>205</b>
Figura 109 Efecto Joule: cuando la corriente pasa por la resistencia se produce una caída de potencial.....	206
Figura 110 Efecto Joule. ....	207
Figura 111 Energía Elemento Diferencial.....	208
Figura 112 a) Diagrama de un circuito de una fuente de fem - (en este caso, una batería), de resistencia interna $r$ , conectada a un resistor externo, de resistencia $R$ . b) Representación gráfica que muestra cómo cambia el potencial eléctrico conforme recorremos el circuito en a) en la dirección de las manecillas del reloj. ....	209
Figura 113 (Ejemplo 2) Gráfica de potencia $\mathcal{P}$ entregada por una batería a un resistor de carga de resistencia $R$ como función de $R$ . La potencia entregada al resistor es un máximo cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna de la batería. ....	211
Figura 114 Dos redes que no pueden reducirse a combinaciones simples de resistores en serie o en paralelo. ....	213
Figura 115 a) La regla de Kirchhoff de las uniones dice que la cantidad de corriente que llega a una unión es igual a la que sale. b) Analogía con una tubería de agua. ....	213
Figura 116 Figura 26.8 Uso de las convenciones de signos cuando se aplica la regla de Kirchhoff de las espiras. En cada parte de la figura "Recorrido" es el sentido en que imaginamos ir alrededor de la espira que no necesariamente es el sentido de la corriente .....	214
<b>Figura 117 Figura 26.9 Al aplicar la regla de las uniones al punto a, se reduce el número de corrientes desconocidas, de tres a dos. ....</b>	<b>216</b>
Figura 118 Las corrientes se pueden calcular mediante las reglas de Kirchhoff. Véase el ejemplo 1. ....	216
<b>Figura 119 Circuito con varios resistores .....</b>	<b>218</b>
Figura 120, Ilustración de la medición de la corriente y el voltaje de la energía eléctrica. ....	224

Figura 121 Representación esquemática de la eficiencia.....	224
Figura 122, Esta imagen a colores X muestra un marcapasos implantado quirúrgicamente en un paciente con problema en el nodo sinoatrial, la parte del corazón que genera la señal eléctrica para generar los latidos. Para compensarlo el marcapasos (localizado cerca de la clavícula) envía pulsos eléctricos a lo largo del conductor para mantener los latidos a intervalos regulares. ....	226
Figura 123, Carga de un capacitor a) Antes de que se cierre el circuito, la carga q es igual a cero. b) Cuando el interruptor se cierra (en t=0), la corriente pasa de cero a $\mathcal{E}/R$ a medida que transcurre el tiempo, q se acerca a $Q_f$ y la corriente i se acerca a cero.....	227
Figura 124, Corriente i y carga del capacitor q como funciones del tiempo para el circuito de la figura 123. Al principio, la corriente inicial es $I_0$ y la carga del capacitor vale cero. La corriente tiende a cero en forma asintótica, y la carga del capacitor se aproxima en forma asintótica a su valor final $Q_f$ .....	228
Figura 125, Descarga de un capacitor a) Antes de que el interruptor esté cerrado en el momento t=0, la carga del capacitor es $Q_0$ y la corriente es igual a cero b) En el momento t, una vez que el interruptor se ha cerrado, la carga del capacitor es q y la corriente es i. El sentido real de la corriente opuesto al sentido que se ilustra; i es negativa. Después de un tiempo prolongado, tanto q como i tienden a cero.....	230
Figura 126 La corriente i y la carga q del capacitor como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.23. La corriente inicial es $I_0$ y la carga inicial del capacitor es $Q_0$ . Tanto i como q tienden a cero de manera asintótica.....	231
Figura 127. Circuito RC. ....	233
Figura 128 (a) Imán permanente, (b) Líneas de campo magnético $B$ uniforme.....	254
Figura 129 Líneas de campo magnético de la tierra apuntan desde el polo norte magnético a polo sur magnético. Además el polo sur magnético no coincide exactamente con el polo geográfico norte, hay una desviación de $11^\circ$ .....	254
Figura 130 La división sucesiva de una barra magnética vuelve a formar los polos norte y sur. ...	254
Figura 131 Fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Si $q>0$ la fuerza apunta hacia arriba. Si $q<0$ la fuerza se invierte. ....	258
Figura 132 Otra versión de la regla de la mano derecha. ....	258
Figura 133 Regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza sobre q. Notar que la dirección de $F$ cambia si la carga cambia de signo. ....	258
Figura 134 Dispositivo experimental de Oersted.....	259
Figura 135 Las líneas de campo magnético de un magneto permanente. ....	260
Figura 136 Líneas de campo magnético uniforme atravesando en forma perpendicular a una superficie de área A.....	260
Figura 137 Las líneas de campo que atraviesan la superficie disminuye debido a la inclinación del plano.....	260
Figura 138 Ejemplo 1.....	261
Figura 139 Ejemplo 2.....	262
Figura 140. Esquema representativo del sentido de la fuerza de origen magnético .....	264
Figura 141. Representación esquemática del sentido convencional de las líneas de fuerza de campo magnético.....	264

Figura 142. Representación gráfica de la trayectoria descrita por una partícula electrizada que incide perpendicularmente dentro del campo magnético. ....	265
Figura 143. Representación esquemática de una carga eléctrica dentro de los campos eléctrico y magnético.....	266
Figura 144.....	267
Figura 145.....	269
Figura 146. Sección de un alambre por donde se mueven los portadores de carga con velocidad $v\mathbf{d}$ Los portadores de carga son los responsables de la corriente electrica: cargas positivas o negativas. ....	269
Figura 147. Sección de segmento de alambre por donde se mueven los portadores de carga con velocidad $v\mathbf{d}$ , el campo magnético es perpendicular al segmento y va entrando en la página. ...	270
Figura 148. Fuerza sobre un segmento den alambre cuando es campo magnético es perpendicular al alambre. En ambos casos el campo magnético uniforme es perpendicular al alambre. La magnitud de la fuerza magnetica es $F = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ .....	271
Figura 149. Caso general de un alambre con corriente en presencia de una campo magneto. ....	271
Figura 150 Alambre semicircular.....	272
Figura 151 Cubo. ....	272
Figura 152.....	273
Figura 153.....	273
Figura 154. Dos alambres paralelos que transportan cada una corriente estable y ejercen una fuerza magnetica uno sobre el otro. El campo $\mathbf{B}_2$ debido a la corriente en el alambre 2 ejerce una fuerza magnetica $\mathbf{F}_1 = I_1\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2$ sobre el alambre 1. La fuerza es de atracción si las corrientes son paralelas (como se muestra) y de repulsión si las corrientes son antiparalelas. ....	274
Figura 155: Una espira rectangular donde el vector unitario $\mathbf{n}$ forma un ángulo $\theta$ co el campo magnetico uniforme B.....	275
Figura 156: Principio básico de un motor eléctrico. Notar que el conmutador está dividido en dos partes, de tal forma que el terminal positivo de la batería envía corriente a cualquiera de los alambres que toque la mitad derecha del conmutador. ....	276
Figura 157. Ley de Biot-Savart: el campo en P debido al elemento de corriente $I\mathbf{dl}$ es $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \mathbf{dl} \times \mathbf{r}$ .....	277
Figura 158. Determinación de $\mathbf{B}$ debido a un largo alambre recto con base en la ley de Biot-Savart. ....	278
Figura 159. Determinación de $\mathbf{B}$ debido a una espira de corriente.....	279
Figura 160 Campo magnético debido a una espira circular de alambre.....	280
Figura 161. Ejemplo 3.....	280
Figura 162. Líneas de campo magnético para un imán de barra. ....	282
Figura 163: Campo magnético $\mathbf{B}$ es generado por una corriente eléctrica atravesando una curva (trayectoria) cerrada C. La curva se divide en segmentos pequeños $\Delta\mathbf{l}$ y se suman los productos $\mathbf{B} \parallel \Delta\mathbf{l}$ a través de toda la curva. ....	284
Figura 164: Flujo de campo eléctrico a través de la superficies $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ : Ley de Ampere - Maxwell. ....	286

Figura 165: (pregunta rápida) Cuatro trayectorias cerradas alrededor de tres alambres conductores de corriente.....	287
Figura 166: Campo Bobina.....	288
Figura 167 Ejemplo 3.....	289
Figura 168 Trayectoria Rectangular.....	289
Figura 169 Ejemplo 4.....	290
Figura 170 Campo magnético de un Toroide.....	290
Figura 171. Ilustración del punto de origen (x, y, z') y el punto del campo (x,y, z).....	292
Figura 172. Para el ejemplo 1.....	294
Figura 173 Para el ejemplo 2 lamina infinita de corriente.....	296
Figura 174. Capacitor de placas paralelas en proceso de carga. La corriente de conducción a través de la superficie plana es $I_C$ , pero no hay corriente de conducción a través de la superficie que se abomba para pasar entre las placas. Las dos superficies tienen una frontera común por lo que esta diferencia es $I_{enc}$ lleva una contradicción aparente al aplicar la ley de ampere.....	297
Figura 175. Un capacitor que se carga con una corriente de desplazamiento igual a $I$ entre las placas, con una densidad de corriente de desplazamiento $j_D = \epsilon dE/dt$ . Esta se puede considerar como la fuente del campo magnético entre las placas.....	299
Figura 176 Porque sólo existe en los alambres unidos a las placas del capacitor, la corriente de conducción $I = dq/dt$ pasa a través de $S_1$ pero no a través de $S_2$ . Sólo la corriente de desplazamiento $I_d = \epsilon_0 d\Phi_E/dt$ pasa a través de $S_2$ . Las dos corrientes deben ser iguales por continuidad.....	302
Figura 177 Circuito formado por un Condensador de capacidad C conectado a una fuente de CA.....	302
Figura 178 Problema reto.....	303
Figura 179. Figura 5.1. Movimiento de un conductor dentro de un campo magnético.....	314
Figura 180. Movimiento de un conductor dentro de un campo magnético.....	315
Figura 181. Movimiento de un imán dentro de un campo magnético.....	315
Figura 182. Espira dentro de un campo magnético.....	317
Figura 183.....	320
Figura 184.....	321
Figura 185.....	322
Figura 186.....	323
Figura 187.....	324
Figura 188.....	325
Figura 189.....	328
<b>Figura 190.</b> .....	329
Figura 191.....	330
Figura 192.-Ejemplo 4. Los signos + y - se refieren a la fem inducida debida a la corriente variable, como los puntos A y B fueran las terminales de una batería (y las espiras fueran el interior de la batería).....	334
Figura 193. Ejemplo 5. Cable coaxial: a) vista de un extremo b) vista lateral (sección transversal).....	334

Figura 194. La corriente en la bobina <b>I1</b> da origen a un flujo magnético a través de la bobina 2.	335
Figura 195. Figura 30.2 Este cepillo dental eléctrico usa la inductancia mutua. La base contiene una bobina a la que se suministra corriente alterna desde una toma de pared. Esta corriente variable induce una fem en una bobina en el interior del cuerpo del cepillo, la cual se utiliza para recargar la batería de este último.	336
Figura 196. Un solenoide con área de sección transversal A y <b>N1</b> espiras (en color negro) está circundando concéntricamente por una bobina con <b>N2</b> espiras (en color azul).	338
Figura 197. Un transformador ideal está formado por dos bobinas enrolladas en el mismo núcleo de hierro. Un voltaje alterno $\Delta V2$ a las terminales del resistor de resistencia R.	341
Figura 198. Diagrama de circuito para un transformador.	341
Figura 199. Físico Estadounidense (1856-1943) Tesla nació en Croacia pero pasó toda su vida profesional como inventor en Estados Unidos. Fue una figura clave en el perfeccionamiento de la electricidad de corriente alterna, transformadores de alta tensión y transporte de energía eléctrica mediante líneas de transmisión de CA. El punto de vista de Tesla estuvo en desacuerdo con las ideas de Thomas Edison, que se dedicó al uso de corriente directa para transmitir energía eléctrica. El método de CA de Tesla ganó	342
Figura 200. El devanado primario de este transformador está acoplado directamente a las puntas de la clavija. El devanado secundario se conecta al cable de línea que se ve a la derecha que va a un aparato electrónico. Muchos de estos transformadores de fuente de alimentación también convierten corriente alterna en corriente directa.	343
Figura 201. a) Acople de resistores paralelo, b) Acople de resistores en serie, con sus circuitos equivalentes.	347
Figura 202. Para el ejemplo 6.11	350
Figura 203. Para el problema de la práctica 1	350
Figura 204. Para ejemplo 2	351
Figura 205. Para el problema de práctica 2	352
Figura 206. Circuito RL cuando el interruptor <b>S2</b> , está en la posición a, la batería está en el circuito. Cuando el interruptor <b>S1</b> se cierra, la corriente aumenta y se induce una Fem en el inductor que se opone a la corriente creciente. Cuando el interruptor está en la posición b, la batería ya no es parte del circuito y la corriente disminuye. El interruptor está diseñado, de modo que nunca se abre, lo que haría que la corriente se detuviera.	353
Figura 207. Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito RL que se muestra en la figura 206. El interruptor se cierra en $t=0$ , y la corriente aumenta hacia su valor máximo $\epsilon/R$ . La constante de tiempo T es el intervalo de tiempo necesario para que I alcance 63.2% de su valor máximo.	354
Figura 208. Gráfica de $dI/dt$ en función del tiempo para el circuito RL que se muestra en la figura 206. La relación de cambio en el tiempo de la corriente es máxima en $t=0$ , instante en el que se cierra el interruptor. La relación disminuye de manera exponencial con el tiempo conforme I aumenta hacia su valor máximo.	355
Figura 209. Corriente en función del tiempo para la espira del lado derecho del circuito que aparece en la figura 206. Para $t < 0$ , el interruptor <b>S2</b> está en la posición a. En $t = 0$ , el interruptor está colocado en la posición b, y la corriente pasa por su valor máximo $\epsilon/R$ .	356

Figura 210. Circuito RL. Acople mixto .....	356
Figura 211. (Ejemplo 2) Comportamiento en el tiempo de los voltajes a través del resistor y el inductor en la figura 32.2 dados los valores proporcionados en este ejemplo. ....	358
Figura 212. (Ejemplo 3) Sección de un cable coaxial largo. Los conductores interior y exterior portan iguales en direcciones opuestas. ....	361
Figura 213.....	363
Figura 214. Representación esquemática de la regla de mano izquierda. ....	364
Figura 215: Momento dipolar de una espira con corriente. La magnitud de $m=IA$ . ....	374
Figura 216: Dipolos magnéticos en un material con orientación aleatoria. El momento magnético neto es aproximadamente cero. ....	374
Figura 217: La corriente total $I$ que atraviesa la longitud transversal $b$ donde hay una densidad superficial de corriente de magnetización es $I=Jsb$ . ....	375
Figura 218. Corte transversal de un material magnetizado. El vector magnetizado $M$ apunta hacia fuera de la página. En el interior, los dipolos se anulan entre si, pero en la frontera los dipolos contribuyen a una corriente superficial. ....	376
Figura 219. Material diamagnético, $\chi_m = 0$ , los momentos magneticos atómicos son nulos y la aplicación de un campo magnético $B$ induce un magnetización contraria $B$ . ....	381
Figura 220. Material paramagnético, $\chi_m > 0$ , los $m \neq 0$ pero están orientados aleatoriamente tal que $M = 0$ . La aplicación de $B$ hace que los dipolos atómicos se alineen tal que aparece una magnetización en el mismo sentido que $B$ . ....	382
Figura 221: (a) En ausencia de un campo $B$ los momentos magnéticos de dominio tiene una orientación aleatoria. (b) Los dominios alineados con $B$ crecen y como consecuencia aparece un momento magnético neto. ....	382
<b>Figura 222. Analogía entre (a) un circuito eléctrico y (b) un circuito magnético.</b> .....	384
Figura 223 Circuito magnético elemental. ....	387
<b>Figura 224. Circuito magnético en forma de toro</b> .....	388
Figura 225. Circuito magnético con una ventana compuesta de cuatro ramas en serie (1,2, 3 y 4). ....	390
Figura 226. Circuito magnético con dos ventanas. Las ramas 2 y 3 están en paralelo de forma que el flujo de la rama 1 (el flujo total) se descompone en los de las ramas 2 y 3. ....	390
Figura 227. Circuito magnético con un entrehierro en el que se muestra el flujo total $\Phi_t$ , el flujo útil $\Phi$ y el flujo de dispersión $\Phi_d$ . ....	391
Figura 228. Circuito magnético de sección uniforme y con una sola bobina. ....	392
<b>Figura 229. Diagrama fasorial (a) y circuito equivalente (b) de un circuito magnético alimentado con c.a. y sin pérdidas en el hierro</b> .....	394
<b>Figura 230. Figura 14 Diagrama fasorial (a) y circuito equivalente (b) de un circuito magnético alimentado con c.a. y con pérdidas en el hierro</b> .....	395
<b>Figura 231 Electroimán.</b> .....	396
<b>Figura 232. (a) Núcleo toroidal para el ejemplo 8.14 (b) circuito electrónico análogo.</b> .....	397
Figura 233. Circuito magnético para el ejemplo 8.15. ....	399
<b>Figura 234. Circuito eléctrico análogo al circuito magnético de la figura 233</b> .....	400
Figura 235. Electroimán en forma de U; para el ejemplo 8.16. ....	401

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y  
ELECTROMAGNETISMO.**

---

Figura 236. Para las preguntas de repaso 6.3 y 6.4. ....	405
Figura 237. Para el problema 6.5. ....	407
Figura 238. Para el problema 6.6. ....	408
Figura 239. Para el problema 6.9. ....	408
Figura 240. Para el problema 6.10. ....	409
Figura 241. Para el problema 6.11. ....	409
Figura 242. Para el problema 6.13. ....	410
Figura 243. Para el problema 6.23. ....	411
Figura 244. . Para el problema 6.24. ....	411
Figura 245 . Para el problema 6.25. ....	412
Figura 246. Para el problema 6.26. ....	413
Figura 247. Para el problema 6.27. ....	413
Figura 248. . Para el problema 6.28. ....	413

---



# Apuntes de electromagnetismo.

---

## Objetivo:

Emplear adecuadamente los conceptos básicos de las leyes y principios fundamentales del Electromagnetismo, desarrollando habilidades para la resolución de problemas reales.

## Justificación:

La materia Electromagnetismo pertenece al grupo de formación básica de las ingenierías, ésta asignatura es la base fundamental para comprender todos los fenómenos eléctricos y magnéticos, las interacciones entre las cargas y los campos, las fuentes del campo eléctrico y magnético y sus aplicaciones, desarrollando habilidades para la resolución de problemas reales y utilizar software de simulación para verificar los conceptos de estas leyes.

## Introducción:

Hacia casi todos los ámbitos que nos rodean, que dirijamos nuestra mirada encontraremos testigos de la actividad humana relacionada con las aplicaciones de los campos eléctricos y magnéticos, y aún en sitios no afectados por el hombre, la actividad de la naturaleza afecta en sus fenómenos eléctricos y magnéticos todos.

El electromagnetismo es probablemente el área de la Física más estudiada y tal vez la mejor entendida en la actualidad. Sin embargo, el análisis de cualquier fenómeno en esta rama de la ciencia exige en primera instancia cierto entrenamiento previo en las técnicas de cálculo vectorial y de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, las cuales eventualmente desplazarán a un segundo plano la interpretación del mismo.

Los conocimientos que debe adquirir en la asignatura son imprescindibles para entender los conceptos que se explican en las demás áreas de conocimiento de la Física, así como en otras áreas de ciencias e ingeniería. Además sirve para una formación genérica que tiene por objeto comprender y analizar los problemas, así como la forma de abordarlos para la asignatura de circuitos eléctricos, de teoría electromagnética y máquinas eléctricas y conseguir la solución más adecuada con los elementos disponibles.

La comprensión acabada de estos temas se encuentra en las especialidades de ingeniería, sin embargo, en estas anotaciones aprenderemos los fundamentos que nos permitirán tener un entendimiento básico de los principios en que se basan las aplicaciones tecnológicas.

El mundo actual, la globalización, exige que el estudiante muestre dominio en éstas herramientas que le permitan gestionar, aplicar y transformar información a contextos complejos y plurales; con propuestas de solución a problemáticas diversa, con visión sustentable, lo que es, en estos tiempos, fundamental para la configuración de la sociedad del conocimiento.

La asignatura está organizada en seis temas, abordándolos de forma conceptual, ya que ésta asignatura es el primer contacto del estudiante con la electrostática.

En el primer tema, se abordan los subtemas de carga eléctrica, conductores y aislantes eléctricos, interacción eléctrica, campo eléctrico y ley de Gauss, ayudado de las operaciones con vectores en dos y tres dimensiones, y mostrando el uso de la ley de Gauss empleando superficies simétricas.

En el segundo tema se trata la energía electrostática, se estudia el trabajo realizado por campos electrostáticos y cómo se relaciona con potencial electrostático. Se estudian capacitores y cómo calcular capacitancias de distintas configuraciones, así como capacitancias de distintos arreglos. Se estudian dieléctricos dentro de campos eléctricos y cómo afectan los capacitores.

El tercer tema aborda lo referente a la corriente eléctrica, se capacita al alumno para realizar análisis de circuitos eléctricos por medio de la ley de Ohm. Se ve cómo se calcula la resistencia eléctrica de conductores y en qué forma afecta el cambio en temperatura a la resistencia eléctrica. El docente ayuda al alumno a desarrollar la habilidad de analizar circuitos básicos, apoyado en las leyes de Kirchhoff y en el uso de la ley de Joule para el cálculo de energías disipadas y entregadas. Se estudian casos más reales en que se tome en cuenta la resistencia interna de las fuentes. Se analizan circuitos RC, estudiando la carga y descarga.

En el tema cuatro se enfatizan la descripción del campo magnético, su generación, la fuerza magnética, las leyes de Ampere, de Biot–Savart, de Gauss y el potencial magnético.

En el quinto tema se estudia la ley de inducción de Faraday, la autoinducción e inducción mutua, la conexión de inductores en serie y paralelo, el circuito R-L, el almacenamiento de energía magnética.

En el último tema se consideran las propiedades magnéticas de los materiales, las características magnéticas y clasificación de los materiales, así como el análisis de los circuitos magnéticos. Se sugiere una actividad integradora en cada una de los temas que permita aplicar los conceptos estudiados con el fin de lograr la comprensión.

La propuesta de trabajo, correspondiente a Apuntes, está estructurado de manera tal que apoye al estudiante durante su curso, guiándolo paso a paso para el desarrollo de las competencias de la materia en cuestión. Este trabajo permitirá al docente actualizarse en los temas de análisis, prácticas experimentales y simulación de la materia, y de esta manera lograr un impacto positivo en la impartición de la cátedra, además de que permite fomentar el avance científico y tecnológico en la carrera. La competencia del saber y el saber hacer en las siguientes asignaturas analógicas y digitales.

Estos apuntes del docente sin duda serán de ayuda, aunque sin ninguna duda no

reemplazaran aquellos textos de la bibliografía que se mencionan y que tienen una gran profundidad y acompañados de una experiencia experimental mucho mayor que la que estos apuntes puedan aportar. Sin embargo la intención es ser un aporte rápido y útil de ayuda al estudiante diligente y aplicado.

## Competencia a desarrollar de la asignatura:

Aplica los conceptos básicos de las leyes y principios fundamentales de Electromagnetismo para la solución de problemas reales.

## Competencias previas:

- Comprende el concepto de función real e identifica tipos de funciones y sus representaciones gráficas, para aplicarlo a situaciones problemáticas.
- Emplea el concepto de derivada como la herramienta que estudia y analiza la variación de una variable con respecto a otra.
- Utiliza los conceptos y técnicas del cálculo integral para solución de problemas aplicados en la ingeniería.
- Conoce los diferentes sistemas de unidades para distinguir la unidad fundamental de unidad compuesta.
- Comprende las características de los vectores y escalares para establecer el equilibrio de una partícula en un plano
- Conoce y desarrolla las propiedades y reglas del álgebra vectorial para resolver problemas de aplicación en las diferentes áreas de ingeniería.

## Temario.

### 1. Electrostática

- 1.1 La carga eléctrica.
- 1.2 Conductores y Aislantes Eléctricos.
- 1.3 Interacción Eléctrica.
- 1.4 El campo Eléctrico.
- 1.5 La Ley de Gauss.

### 2. Energía Electrostática

- 2.1 Energía Potencial Electrostática.
- 2.2 Potencial electrostático.
- 2.3 Capacitancia.
- 2.4 Capacitores en serie, paralelo y mixtos
- 2.5 Dieléctricos en Campos Eléctricos.
- 2.6 Momento Dipolar Eléctrico.
- 2.7 Polarización Eléctrica.

### 3. Corriente Eléctrica

- 3.1 Definición de Corriente Eléctrica.
- 3.2 Vector Densidad de Corriente.

- 3.3 Ecuación de Continuidad.
- 3.4 Ley de Ohm.
- 3.5 Resistencias en serie, paralelas y mixtas.
- 3.6 Ley de Joule.
- 3.7 Fuerza Electromotriz (fem).
- 3.8 Leyes de Kirchhoff.
- 3.9 Resistividad y efectos de la Temperatura.
- 3.10 Circuito R-C en Serie.

#### 4. El campo Magnético

- 4.1 Interacción Magnética.
- 4.2 Fuerza Magnética entre Conductores.
- 4.3 Ley de Biot-Savart.
- 4.4 Ley de Gauss del Magnetismo.
- 4.5 Ley de Ampere.
- 4.6 Potencial Magnético.
- 4.7 Corriente de desplazamiento (término de Maxwell)

#### 5. Inducción Electromagnética

- 5.1 Deducción de la Ley de Inducción de Faraday.
- 5.2 Autoinductancia.
- 5.3 Inductancia Mutua.
- 5.4 Inductores en Serie, Paralelo y Mixtos.
- 5.5 Circuito R-L.
- 5.6 Energía Magnética.

#### 6. Propiedades Magnéticas de la Materia

- 6.1 Magnetización.
- 6.2 Intensidad Magnética.
- 6.3 Constantes Magnéticas.
- 6.4 Clasificación Magnética de los Materiales.
- 6.5 Circuitos Magnéticos.

## Instrumentación didáctica.

### Unidad1 Electrostática.

**Tiempo: 27 horas**

**Competencias específicas:**

Aplica las leyes básicas de la electrostática y utiliza herramientas computacionales para su verificación.

**Actividades de enseñanza.**

- 1. Realizar investigación sobre los temas.
- 2. Investigar el concepto de carga eléctrica.
- 3. Clasificar tipos de conductores y aislantes eléctricos.
- 4. Investigar el concepto de interacción eléctrica (fuerza).
- 5. Investigar los conceptos de las leyes de Coulomb y Gauss, así como los conceptos de campo

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

- eléctrico y potencial eléctrico.
6. Reforzar conocimientos apoyándose en texto.
  7. Analizar cada una de las leyes empleadas en electrostática mediante herramientas computacionales.
  8. Resolver suficientes ejercicios extra
  9. Analizar los resultados de los ejercicios realizados en clase y extractase.
  10. Realizar prácticas extras, interactuando con sus compañeros.

**Actividades de aprendizaje.**

- Investigar el concepto de carga eléctrica
- Clasificar tipos de conductores y aislantes eléctricos
- Investigar el concepto de interacción eléctrica (fuerza)
- Investigar los conceptos de las leyes de Coulomb y Gauss, así como los conceptos de campo eléctrico y potencial eléctrico.
- Analizar cada una de las leyes empleadas en electrostática mediante herramientas computacionales.
- Analizar los resultados de los ejercicios realizados en clase y extractase.

**Indicadores de alcance.**

**A 60 %**

Aplica las leyes básicas de la electrostática.

**B 40 %**

Utiliza herramientas computacionales para su verificación las leyes básicas de la electrostática.

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia.
		A	B	C	
1. Examen	60	36	24		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	9	6		Se revisara la información presentada y seretroalimenta.
3. Trabajo en equipo	20	12	8		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	3	2		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>60</b>	<b>40</b>		

Principales prácticas/proyecto.

Experimentos de electrostática (electrización de cuerpos)  
El uso y el manejo de un protoboard

**Unidad2 Energía Electrostática.**

**Tiempo: 12 horas**

**Competencias específicas:**

Comprende y aplica los conceptos básicos de energía electrostática para utilizarlos en los circuitos eléctricos

**Actividades de enseñanza.**

1. Investiga el concepto de Energía Potencial Electrostática.
2. Investiga el concepto de capacitancia.
3. Analiza la construcción de un capacitor de placas paralelas y cilíndricas con diferentes dieléctricos.
4. Calcula la energía almacenada en un capacitor e investigar sus aplicaciones.
5. Analiza el concepto de capacitancia empleando herramientas computacionales.
6. Investiga el concepto de momento dipolar eléctrico y polarización eléctrica.
7. Calcula el equivalente de capacitores conectados en serie, paralelos y mixtos.
8. Analiza los resultados de los ejercicios realizados en clase y extra clase.

**Actividades de aprendizaje.**

- Investiga el concepto de Energía Potencial Electrostática.
- Investiga el concepto de capacitancia.
- Analiza la construcción de un capacitor de placas paralelas y cilíndricas con diferentes dieléctricos.
- Calcula la energía almacenada en un capacitor e investigar sus aplicaciones.
- Analiza el concepto de capacitancia empleando herramientas computacionales.
- Investiga el concepto de momento dipolar eléctrico y polarización eléctrica
- Calcula el equivalente de capacitores conectados en serie, paralelos y mixtos.
- Analiza los resultados de los ejercicios realizados en clase y extra clase.

**Indicadores de alcance.**

**A      40 %**

Comprende los conceptos básicos de energía electrostática para utilizarlos en los circuitos eléctricos.

**B      60 %**

Aplica los conceptos básicos de energía electrostática para utilizarlos en los circuitos eléctricos.

**Matriz de evaluación.**

Evidencia de	Total	Indicador de alcance.	Evaluación formativa de la competencia.
--------------	-------	-----------------------	---

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

aprendizaje.	%	A	B	C	
1. Examen	60	24	36		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	6	9		Se revisara la información presentada y seretroalimenta.
3. Trabajo en equipo	20	8	12		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	2	3		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	40	60		

Principales prácticas/proyecto.

Capacitores y Capacitancia Carga y descarga del capacitor
--

**Unidad3 Corriente Eléctrica.**

**Tiempo: 10 horas**

**Competencias específicas:**

Aplica las leyes básicas de la electrodinámica y verifica su comportamiento mediante el uso de herramientas computacionales.

**Actividades de enseñanza.**

1. Investigar en fuentes bibliográficas los conceptos y definiciones de: corriente eléctrica, vector densidad de corriente, ecuación de continuidad, Ley de Ohm, FEM, diferencia de potencial y potencia eléctrica, circuitos resistivos simples, leyes de Kirchhoff. Ley de Joule.
2. Calcular el equivalente de resistencias conectadas en serie, paralelas y mixtas.
3. Resolver problemas aplicando las leyes de Ohm, Joule y Kirchhoff.
4. Calcular las variables eléctricas en un circuito determinado y verificar los valores experimentalmente.
5. Solucionar problemas de circuitos simples empleando herramientas computacionales.
6. Repasar conceptos apoyándose en libro de texto.
7. Repetir experimentos.
8. Resolver suficientes ejercicios extra.
9. Realizar investigación sobre los temas vistos.



**Actividades de aprendizaje.**

- Investigar en fuentes bibliográficas los conceptos y definiciones de: corriente eléctrica, vector densidad de corriente, ecuación de continuidad. Ley de Ohm, FEM, diferencia de potencial y potencia eléctrica, circuitos resistivos simples, leyes de Kirchhoff. Ley de Joule.
- Calcular el equivalente de resistencias conectadas en serie, paralelo y mixtos.
- Resolver problemas aplicando las leyes de Ohm, Joule y Kirchhoff.
- Calcular las variables eléctricas en un circuito determinado y verificar los valores experimentalmente.
- Solucionar problemas de circuitos simples empleando herramientas computacionales.

**Indicadores de alcance.**

**A 40 %**

Aplica las leyes básicas de la electrodinámica.

**B 60 %**

Verifica su comportamiento de las leyes básicas de la electrodinámica mediante el uso de herramientas computacionales.

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia.
		A	B	C	
1. Examen	60	24	36		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	6	9		Se revisara la información presentada y seretroalimenta.
3. Trabajo en equipo	20	8	12		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	2	3		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	40	60		

Principales prácticas/proyecto.

El multímetro  
Mediciones Eléctricas

**Unidad4 El campo Magnético.**

**Tiempo: 10 horas**

**Competencias específicas:**

Comprende las leyes electromagnéticas para interpretar los fenómenos magnéticos.

**Actividades de enseñanza.**

1. Realiza experimentos relacionados con fuerza magnética y campo magnético (Fuerza magnética sobre un alambre que conduce corriente, líneas de campo magnético, bobina de desmagnetizado.)
2. Investiga: Ley de Biot-Savart, Ley de Ampere, Ley de Gauss y potencial magnético.
3. Analiza cada una de las leyes empleadas en electrodinámica mediante herramientas computacionales.
4. Identifica en las máquinas y equipos eléctricos las leyes electromagnéticas que rigen su funcionamiento.
5. Analiza los resultados de los ejercicios realizados en clase y extra clase.
6. Reforzar conocimientos apoyándose en texto.
7. Resolver suficientes ejercicios extras.
8. Realizar investigación sobre los temas vistos.
9. Realizar prácticas.
10. Interactuar con sus compañeros.

**Actividades de aprendizaje.**

- Realiza experimentos relacionados con fuerza magnética y campo magnético (Fuerza magnética sobre un alambre que conduce corriente, líneas de campo magnético, bobina desmagnetizadora.)
- Investiga: Ley de Biot-Savart, Ley de Ampere, Ley de Gauss y potencial magnético.
- Analiza cada una de las leyes empleadas en electrodinámica mediante herramientas computacionales.
- Identifica en las máquinas y equipos eléctricos las leyes electromagnéticas que rigen su funcionamiento.
- Analiza los resultados de los ejercicios realizados en clase y extra clase.

**Indicadores de alcance.**

**A 50 %**

Comprende las leyes electromagnéticas.

**B 50 %**

Interpretar las leyes electromagnéticas para aplicarlas a los fenómenos magnéticos

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia.
		A	B	C	
1. Examen	60	30	30		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	8	7		Se revisara la información presentada y seretroalimenta.
3. Trabajo en equipo	20	10	10		Se comenta al equipo los resultados.

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	2	3		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	50	50		

Principales prácticas/proyecto.

Motor Eléctrico

**Unidad5 Inducción Electromagnética.**

**Tiempo: 10 horas**

**Competencias específicas:**

Aplica el concepto de inducción electromagnética para la solución de problemas.

**Actividades de enseñanza.**

1. Investiga y analizar el concepto de inducción electromagnética.
2. Deduce matemática y experimentalmente la ley de inducción de Faraday.
3. Resuelve problemas donde se aplique el concepto de inducción electromagnética.
4. Investiga los conceptos de autoinductancia e Inductancia mutua.
5. Calcula el equivalente de inductores conectados en serie, paralelos y mixtos.
6. Resuelve problemas que involucren circuitos RL.
7. Calcula la energía magnética almacenada en un inductor.
8. Reforzar conocimientos apoyándose en texto.
9. Repetir experimentos.
10. Resolver suficientes ejercicios extras.
11. Realizar investigación sobre los temas vistos.
12. Interactuar con sus compañeros.

**Actividades de aprendizaje.**

- Investiga y analizar el concepto de inducción electromagnética.
- Deduce matemática y experimentalmente la ley de inducción de Faraday.
- Resuelve problemas donde se aplique el concepto de inducción electromagnética.
- Investiga los conceptos de autoinductancia e Inductancia mutua.
- Calcula el equivalente de inductores conectados en serie, paralelos y mixtos.
- Resuelve problemas que involucren circuitos RL.
- Calcula la energía magnética almacenada en un inductor.

**Indicadores de alcance.**

**A 55 %**

Aplica el concepto de inducción electromagnética.

**B 45 %**

Utiliza herramientas computacionales para la solución de problemas de inducción electromagnética.

Matriz de evaluación.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia.
		A	B	C	
1. Examen	60	33	27		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	8	7		Se revisara la información presentada y seretroalimenta.
3. Trabajo en equipo	20	11	9		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	3	2		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	55	45		

Principales prácticas/proyecto.

Generador de corriente por medio de campo magnético  
Motor de inducción construido con una lata de refresco.

**Unidad6 Propiedades Magnéticas de la Materia.**

**Tiempo: 06 horas**

**Competencias específicas:**

Identifica las propiedades magnéticas de los materiales para clasificarlos, seleccionarlos y analizar su comportamiento en circuitos magnéticos.

**Actividades de enseñanza.**

1. Analizar los conceptos de: magnetización e intensidad magnética.
2. Describir las constantes magnéticas de los materiales.
3. Investigar en fuentes diversas la clasificación magnética de los materiales.
4. Analizar el comportamiento de circuitos magnéticos, empleando diferentes tipos de materiales.
5. Reforzar conocimientos apoyándose en texto.
6. Resolver suficientes ejercicios extras.

**APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.**

7. Realizar investigación sobre los temas vistos.
8. Realizar prácticas.

**Actividades de aprendizaje.**

- Analizar los conceptos de: magnetización e intensidad magnética.
- Describir las constantes magnéticas de los materiales.
- Investigar en fuentes diversas la clasificación magnética de los materiales.
- Analizar el comportamiento de circuitos magnéticos, empleando diferentes tipos de materiales.

**Indicadores de alcance.**

**A 45 %**

Identifica las propiedades magnéticas de los materiales para clasificarlos y seleccionarlos.

**B 55 %**

Analizar los materiales su comportamiento en circuitos magnéticos.

Evidencia de aprendizaje.	Total %	Indicador de alcance.			Evaluación formativa de la competencia.
		A	B	C	
1. Examen	60	33	27		Se resuelve examen en clase posterior.
2. Trabajo individual	15	8	7		Se revisara la información presentada y seretroalimenta.
3. Trabajo en equipo	20	14	9		Se comenta al equipo los resultados.
4. Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica	5	3	2		Se observa en clase como aplica sus conocimientos en la práctica.
Total	100	55	45		

Matriz de evaluación.

Principales prácticas/proyecto.

Transformadores monofásicos

**Desarrolló de apuntes de electromagnetismo.**

# 1.Unidad Electrostática

## *Introducción.*

En este tema se estudia el comportamiento del campo eléctrico producido por cargas eléctricas discretas y distribuciones continuas de carga en reposo relativo. Se discute la ley de Coulomb, el Principio de Superposición y la Ley de Gauss. También se estudia la formulación alternativa usando el concepto de Potencial electrostático. Se hace énfasis en la formulación vectorial de los conceptos y en la resolución de problemas.

## 1.1 La carga eléctrica.

El fenómeno electromagnético rige un campo vastísimo de nuestra realidad, para dimensionar su alcance consideremos algunos ejemplos:

Parte de la actividad del sistema nervioso, la interacción neuronal y el mismo ojo con que se leen estas líneas es gobernado por leyes del electromagnetismo.

Fenómenos climáticos como la aurora boreal, el rayo y el relámpago se explican en base a esta teoría.

La luz se entiende como ondas electromagnéticas.

Las aplicaciones prácticas son muy variadas en el mundo moderno:

Toda la tecnología electrónica (TV, PC, celulares, video juegos, etc.) esta basada fuertemente en estos principios.

Aplicaciones médicas: Rayos X, electrocardiogramas, electroencefalograma, resonancia magnética, etc.

Tarjetas de crédito, códigos de barra de supermercados, sistemas de posicionamiento geográfico, etc.

La comprensión acabada de estos temas se encuentra en las especialidades de ingeniería, sin embargo, en este curso aprenderemos los fundamentos que nos permitirían tener un entendimiento básico de los principios en que se basan las aplicaciones tecnológicas listadas anteriormente.

Era muy conocido por los antiguos griegos que al frotar un trozo de ámbar se “electrificaba” al ser frotado con piel y a la vez podía atraer pequeños objetos. De hecho la palabra "electricidad" viene del vocablo Griego ámbar (elektron).

En tiempos modernos, estamos acostumbrados a tratar con el término electricidad. Las fuerzas eléctricas son las que sostienen el mundo material. Estas fuerzas enlazan los electrones y núcleos



para formar átomos, a su vez los átomos son enlazados a otros átomos para formar moléculas. El objetivo de la **electrostática** es estudiar las fuerzas y otros efectos que se producen entre los cuerpos que poseen carga eléctrica en reposo, además de los campos eléctricos que no cambian en el tiempo.

La carga eléctrica es un atributo de las partículas elementales que la poseen, caracterizado por la fuerza electrostática que entre ellas se ejerce. Dicha fuerza es atractiva si las cargas respectivas son de signo contrario, y repulsiva si son del mismo signo.

En la naturaleza la carga eléctrica se da de dos formas en las siguientes partículas:

- a) Electrón (e) con una masa de  $9.1066 \times 10^{-31}$  [kg], la cual se define como carga negativa.
- b) Protón (p) con una masa de  $1.67248 \times 10^{-27}$  [kg], la cual se define como carga positiva.

Curiosamente aunque sus masas son diferentes, su carga eléctrica es idéntica pero de signo contrario

Está bien establecida que la materia está constituida por moléculas, las moléculas están constituidas por átomos y los átomos poseen estructura. La descripción clásica de un átomo se puede interpretar como un modelo de esfera. En el modelo se acepta que en el núcleo están localizados los protones y neutrones en tanto que rodeando al núcleo se hallan los electrones (nube electrónica). Se ha logrado determinar que los electrones y protones poseen carga eléctrica con signo contrario mientras que los neutrones no poseen carga. La unidad de medida de la carga eléctrica es el coulomb (C). Las características más relevantes de estas partículas se listan en la **tabla1**. La carga neta del núcleo se considera como  $Ze$ , siendo  $Z$  el número atómico y  $e$  la carga fundamental ( $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ ). Existen muchas técnicas experimentales para adicionar o extraer electrones a un átomo, éste procedimiento se conoce con el nombre de ionización. La materia en su estado natural o no perturbado es neutro, mientras que cuando un átomo posee un exceso o ausencia de carga (electrones) se denomina un átomo ionizado (cargado). En todo el proceso de transferencia de la carga se cumple con dos principios fundamentales: (i) Principio de conservación de la carga: Éste principio establece que en todo sistema aislado, la carga que sale de un objeto es igual a la carga que entra al otro objeto, (ii) Cuantización de la carga: Este principio establece que en la transferencia de carga siempre se hace en un número entero de cargas elementales.

**Tabla 1 Magnitudes Físicas.**

Partícula	Símbolo	Carga	Masa
Protón	<b>P</b>	<b>e</b>	1.000
Neutrón	<b>n</b>	<b>0</b>	1.001
Electrón	$e^-$	$-e$	0.000545
Positrón	$e^+$	<b>e</b>	0.000545
Muón	$\mu, \mu$	$-e, +e$	0.1126

Mesón pi(positivo, negativo)	$\pi^+, \pi^-$	$-e, +e$	0.1488
PiÓN neutro	$\pi^0$	<b>0</b>	0.1138
Fotón	$\gamma$	<b>0</b>	0
Neutrino	$\nu$	<b>0</b>	0
Lambda	$\Lambda^0$	<b>0</b>	1.189
Mesón $\rho$	$\rho^+, \rho^-, \rho^0$	<b>+e, -e, 0</b>	0.82
Mesón $\omega$	$\omega$	<b>0</b>	0.836

### **Electrización.**

La **electrización** es el fenómeno mediante el cual los materiales ganan o pierden electrones, debido de a que se rompe el estado de equilibrio o de neutralidad eléctrica del átomo.

La **electricidad estática** es el fenómeno que se caracteriza por el incremento o déficit de electrones en la superficie de los cuerpos

La fuerza debida al campo eléctrico es mayor a la fuerza debida al campo gravitacional.

**Cuerpos eléctricamente neutros** son todos los materiales existentes en la naturaleza que, en equilibrio y sin excitación, no contienen carga eléctrica.

**Electrización negativa:** es el fenómeno que se manifiesta en un cuerpo, el cual por algún medio externo de excitación gana electrones.

**Electrización positiva:** es el fenómeno que se manifiesta en un cuerpo, el cual por algún medio de excitación pierde electrones.

### **Métodos de electrización.**

Se listan a continuación algunos de los métodos experimentales más populares para cargar objetos eléctricamente,

1. **conducción**, se da cuando hay movimiento de carga eléctrica a través del objeto.
2. **inducción**, movimiento de carga sin hacer contacto mecánico entre los objetos.
3. **fricción**, transferencia de carga cuando hay contacto directo entre los objetos.
4. **fotoluminiscencia**, la presencia de luz induce carga eléctrica en el objeto.
5. **piezoeléctrico**, la diferencia de presión puede causar exceso de carga.

### **Aparatos electrostáticos.**

#### **Electroscopio.**

Un electroscopio es un dispositivo que se emplea para la detección de cargas eléctricas. La carga eléctrica, en tanto, es el nivel de electricidad que presenta un cuerpo. Con un electroscopio, por lo

tanto, se puede conocer si un elemento dispone de carga eléctrica. Este artefacto cuenta con una vara de metal dispuesta de forma vertical, con un par de láminas finas de aluminio o de oro en el extremo inferior y una esfera en el sector superior.

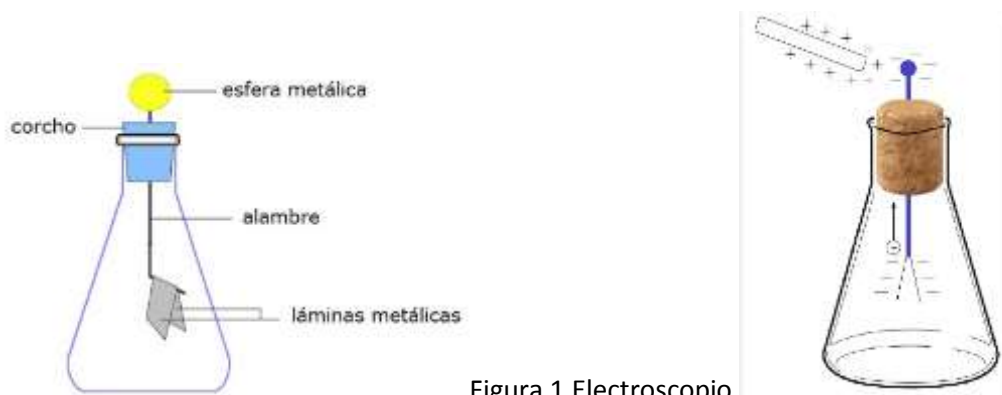


Figura 1 Electroscopio.

Esta vara se encuentra dentro de un **recipiente de vidrio** que tiene una estructura de cobre en contacto con tierra. Cuando un objeto cargado eléctricamente se acerca a la esfera del electroscopio, la vara se electriza y las láminas de **aluminio**, si se cargan con el mismo signo, se **separan** ya que se repelen. A mayor cantidad de carga de idéntico signo, mayor separación.

Una vez que el objeto es alejado de la esfera, las láminas retoman su posición inicial en el electroscopio. Esto se debe a que el aluminio pierde la **polarización**.

Si las láminas de aluminio se **juntan**, en cambio, quiere decir que el electroscopio y el objeto acercado a la esfera cuentan con signos opuestos. Es importante mencionar que la carga del electroscopio se pierde de manera gradual por la conductividad del **aire** que producen sus iones.

### Generadores electrostáticos

Son aparatos electrostáticos que tienen la propiedad de generar carga eléctrica estática mediante la transformación de la energía mecánica en energía eléctrica; la mayoría de los generadores eléctricos transforman la energía por el método de fricción. Los aparatos más utilizados en el laboratorio son:

1. El **generador electrostático de Van der Graff** es un instrumento que utiliza una cinta móvil para acumular grandes cantidades de carga eléctrica en el interior de una esfera metálica hueca. Las cargas se obtienen mediante el rozamiento de la cinta con otro cuerpo (efecto triboeléctrico).

Este tipo de generador eléctrico fue desarrollado inicialmente por el físico Robert J. Van de Graaff, en el MIT, alrededor de 1929 para realizar experimentos de física nuclear.

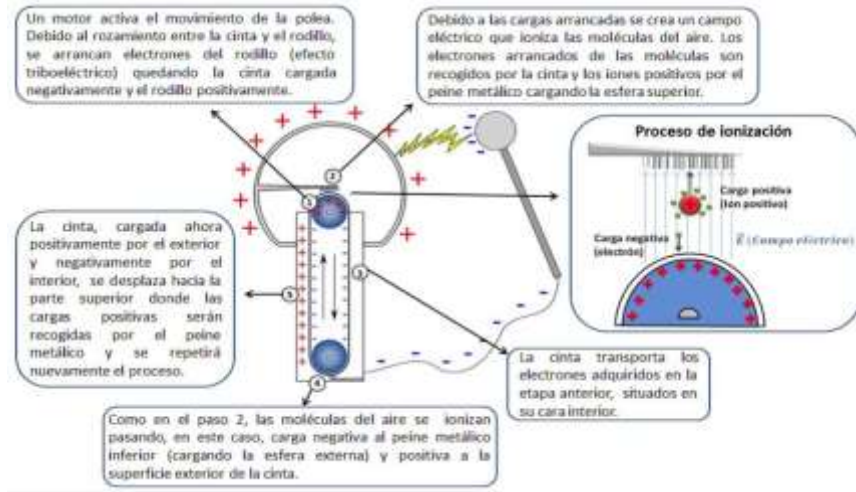


Figura 2 Generador Electrostático de Van der Graff.

2. El **generador electrostático de Wimshurst** es un “generador electrostático “de alto voltaje “desarrollado entre 1880 y 1883 por el inventor “británico” James Wimshurst (1832-1903). Tiene un aspecto característico con dos grandes discos a contra rotación (giran en sentidos opuestos) montados en un plano vertical, dos barras cruzadas con cepillos metálicos, y dos esferas de metal separadas por una distancia donde saltan las chispas.

Video de la **generador electrostático de Wimshurst** [https://youtu.be/www8\\_E1vKMs](https://youtu.be/www8_E1vKMs)

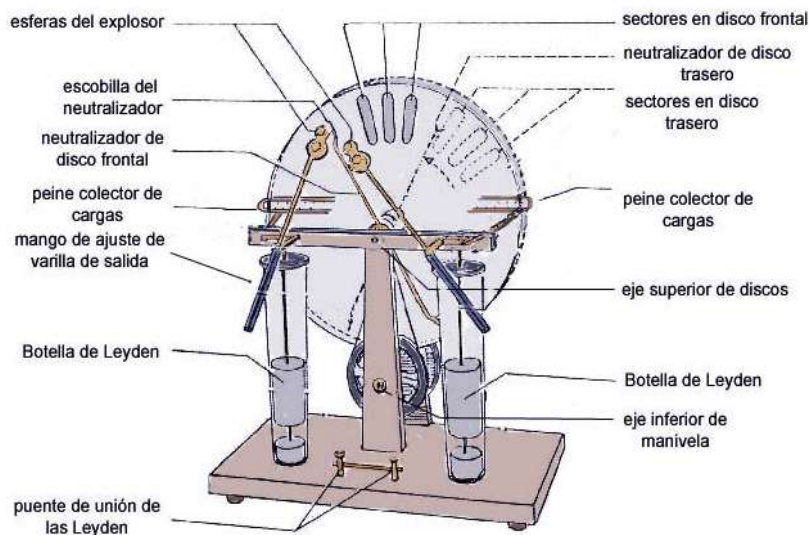


Figura 3 Generador electrostático de Wimshurst.

### **Electrostática.**

La electrostática es una rama de la física que estudia los fenómenos provocados por cargas en reposo.

### Carga eléctrica.

La carga eléctrica es un atributo de las partículas elementales que la poseen, caracterizado por la fuerza electrostática que entre ellas se ejerce.

Lo primero que muestran los experimentos con cargas eléctricas es la existencia de dos tipos de carga, una llamada positiva y otra negativa. Esto contrasta con la masa gravitatoria, ya que siempre dos masas se atraen.

Cuando frotamos una varilla de vidrio contra un pedazo de seda, la varilla de vidrio queda “electrificada” o “cargada” y llamamos a esa carga **positiva**. Ahora si frotamos una varilla de goma contra un pedazo de piel, entonces la varilla queda con carga **negativa** (Fig. 4)

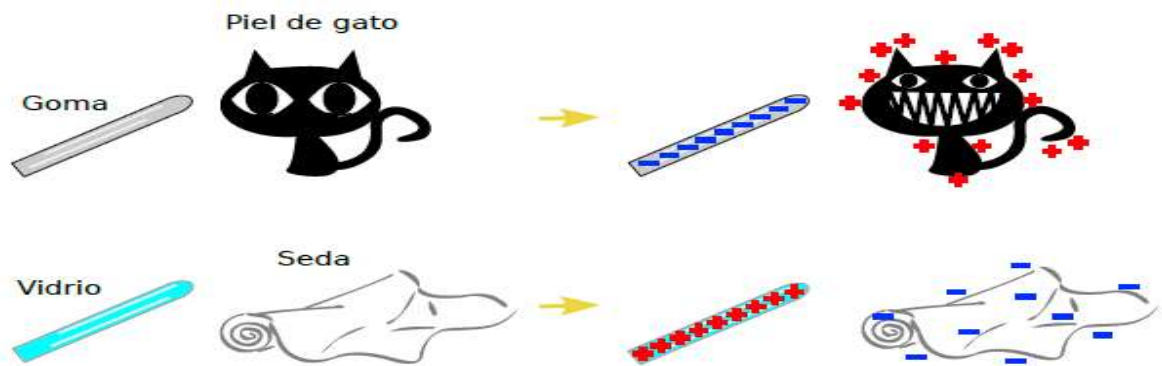


Figura 4 Electrificación de varilla.

También se puede comprobar experimentalmente (Figura 5) que cargas iguales se repelen y cargas distintas se atraen.

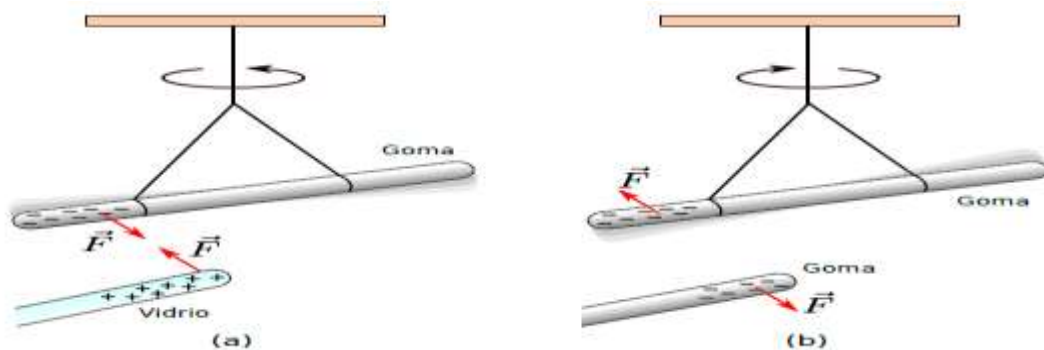


Figura 5 Comprobación de que cargas iguales se repelen y cargas distintas se atraen.

**Ley de los signos:** en la interacción de dos cargas dicha fuerza es atractiva si las cargas respectivas son de signo contrario, y repulsiva si son del mismo signo.

La carga libre más pequeña que se conoce es la correspondiente al electrón. Es una carga negativa cuyo valor absoluto es  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  culombios [C]. La antipartícula que corresponde al electrón es el positrón. Éste tiene la misma masa, su carga es positiva y con el mismo valor

numérico que la del electrón. La otra partícula elemental cargada que interviene en la constitución de los átomos es el **protón**, cuya carga es positiva y del mismo valor que  $e$ , siendo su masa unas 2000 veces mayor; su antipartícula es el antiprotón, con carga  $-e$  y masa de valor idéntico a la del protón.

Los protones se encuentran en el núcleo mientras que los electrones se distribuyen en torno a dicho núcleo cuando forman parte del mismo átomo, es decir, cuando no están libres. En el sistema internacional de unidades (SI) la unidad de carga es el culombio. Se define a partir de la intensidad de corriente, que definiremos la unidad básica en el SI conocida como amperio [A]; un culombio es un amperio por segundo,  $[C] = [A \times s]$ .

### ***Principio de conservación de la carga eléctrica***

Otra interesante propiedad de los átomos aislados es que su carga total o carga neta  $Q_T$  es exactamente igual a cero, es decir, el átomo siempre es neutro,  $Q_T = \sum_j q_j = 0$

Es importante destacar que  $Q_T$  se puede escribir como la suma de todas las cargas positivas  $Q_+ = \sum_{j=1}^N q_j^+$  presentes en el núcleo debido a los protones, y de todas las cargas negativas

$Q_- = \sum_{j=1}^N q_j^-$  que poseen los electrones que orbitan al núcleo, es decir,

$$Q_T = \sum_{j=1}^N q_j^+ + \sum_{j=1}^N q_j^- = 0.$$

En todos los experimentos realizados hasta ahora se ha constatado que en un sistema aislado o cerrado la carga se conserva, es decir, la suma de las cargas positivas y negativas no varía en un sistema aislado, cualquiera que sea el fenómeno observado.

### ***Cuantificación de la carga eléctrica***

La primera observación de la naturaleza discreta de la carga la hizo Faraday en su estudio sobre la electrólisis. El experimento de Millikan puso de manifiesto dicha naturaleza discreta y sirvió para determinar, de forma aproximada, el valor de la carga del electrón. Hasta ahora todas las cargas libres que se han medido son múltiplo de la carga del electrón. Teniendo en cuenta los experimentos realizados, se entiende por cuantificación de la carga eléctrica la condición por la cual toda carga es un múltiplo entero, positivo o negativo, de la carga del electrón.

Los experimentos demuestran además que la carga está **cuantizada**. Esto quiere decir que la carga viene en múltiplos enteros de una carga elemental ( $e$ ). Por ejemplo si un cuerpo tiene una carga neta  $Q$ , entonces necesariamente se cumple que

$$Q = Ne$$

Donde  $N = 1, 2, 3, \dots$  es un número **entero** y  $e$  es la **carga fundamental**, que tiene un valor de  $1.602 \times 10^{-19}$  C. Donde la unidad de carga es llamada **Coulomb (C)**. Esto quiere decir que **no puede haber una carga más pequeña que**  $1.602 \times 10^{-19}$  C. Coulomb (C) es la unidad de carga.

$$N = \frac{1 C}{e} = \frac{1 C}{1.60219 \times 10^{-19} C} = 6.2414 \times 10^{18} \text{ electrones}$$

**Notar** que la unidad de carga eléctrica (1 Coulomb) es una cantidad Extremadamente grande, ya que son necesario  $6.2414 \times 10^{18}$  electrones para completar una carga de  $-1.0 C$ . Por ejemplo, si dos cargas de un Coulomb cada una están separadas un metro, entonces aplicando la ley de Coulomb, la fuerza de repulsión es aproximadamente  $9 \times 10^9 N$ . ¡Esto es alrededor de un millón de toneladas!

**Electrización estática.**

Es el proceso mediante el cual un cuerpo gana o pierde electrones. Así, cuando el cuerpo gana electrones se electriza negativamente y cuando pierde electrones se electriza positivamente.

**Carga puntual.**

Para el estudio y análisis matemático de los fenómenos provocados por las partículas y cuerpos cargados eléctricamente, estos se consideran como si la cantidad de carga eléctrica se encontrara concentrado en un solo punto . Es debido a esta consideración que a los cuerpos electrizados se les denomina **carga puntuales**.

Para darse una idea del tamaño de las partículas que constituyen un átomo, se muestran en la tabla2, las masas de los electrones, protones y neutrones junto con sus respectivas cargas.

**Tabla 2 Masas y cargas de las partículas que forman un átomo.**

Partícula	Masa (kg)	Carga (C)
electrón	$9.11 \times 10^{-31}$	$-1.602 \times 10^{-19} (-e)$
protón	$1.673 \times 10^{-27}$	$+1.602 \times 10^{-19} (+e)$
neutrón	$1.675 \times 10^{-27}$	0

La carga eléctrica del electrón está asociada con su energía expresada en Joule (J), a la cual se le denomina **electrón volt** (eV).  $1 eV = 1.602 \times 10^{-19} J$

Por su parte, la masa del neutrón es igual a la suma de la masa del electrón y del protón, la cual se expresa con la siguiente fórmula:

$$m_n = m_e + m_p = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} + 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1.6748 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

**Ejemplo:**

¿Cuál es la carga total de 75.0 kg de electrones?

**Solución:** La masa de un electrón es  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , de tal manera que una masa  $M = 75.0 \text{ kg}$  contiene



$$N = \frac{M}{m_e} = \frac{75 \text{ Kg}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ Kg}} = 8.3 \times 10^{31} \text{ electrones}$$

La carga de un electrón es  $-e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , por lo tanto la carga de  $N$  electrones es

$$Q = N(-e) = 8.3 \times 10^{31} \times (-1.602 \times 10^{-19} \text{ C}) = -1.32 \times 10^{13} \text{ C}$$

### Constante de Avogadro.

En química y en física (electricidad), la **Constante de Avogadro** ( $N_A$ ) indica el número de partículas que pueden ser átomos o moléculas que se encuentran en un mol de sustancia.

$$\frac{N_p}{m} = \frac{N_A}{m_{at}}$$

Entonces:

$$N_A = \text{Número de Avogadro} = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$N_p = N_{at} \text{ número de átomos o partículas por m}^3$$

$$m_{at} = \text{Masa atómica (g/mol)}$$

$$m = \text{masa (g)}$$

De sus estudios experimentales, Avogadro pudo concluir el siguiente enunciado:

El volumen de un gas a una presión y temperatura determinada es proporcional al número de átomos o moléculas, independientemente de la naturaleza del gas.

### Problema resuelto.

Considere que se tiene un pequeño trozo de plata, eléctricamente neutro, cuya masa es de 12 g. La plata tiene 47 electrones por átomo y su masa atómica o masa molar es de 107.87 g/mol. Determinar:

- a) El número de átomos.
- b) El número de electrones del trozo de plata.
- c) Si el trozo de plata se electriza negativamente hasta que la carga es de 1 mC, calcular el número de electrones ganados,  $N_{ega}$ .

### Solución:

La solución de este problema se obtiene considerando que el cociente del número de Avogadro sobre la masa atómica es igual al cociente del número de partículas entre la masa del cuerpo. Así:

$$\frac{N_p}{m} = \frac{N_A}{m_{at}}$$

- a) En este caso, primero se despeja  $N_p$  de la ecuación y se determina el número de átomos o partículas que se tiene en la cantidad de masa indicada:

$$N_p = \frac{mN_A}{m_{at}} = \frac{12g(6.022 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})}{107.87 \text{ mol}} = 6.6991749 \times 10^{22} \text{ átomos}$$

- b) Para establecer el número de electrones del trozo de plata, se debe determinar el número de electrones del trozo de plata. Así:

$$N_e = (N_{at})(47e) = (6.6991749 \times 10^{22})(47) = 3.1486122 \times 10^{24} \text{ electrones}$$

- c) Para tener 1 mC de carga, se considera la carga del electrón y se determina la cantidad de electrones que debe agregarse  $N_{eA}$ :

$$N_{ega} = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ C}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}} = 6.242972 \times 10^{15} \text{ electrones ganados}$$

## 1.2 Conductores y Aislantes Eléctricos.

### ***Tipos de materiales***

Las fuerzas entre dos objetos cargados pueden ser muy grandes. La mayoría de los objetos son eléctricamente neutros; tienen igual cantidad de cargas positivas que negativas.

Los metales son buenos conductores de carga eléctrica, mientras que los plásticos, madera, y goma no lo son (se les llama aislantes). La carga no fluye muy fácilmente en los aislantes comparado con los metales.

Los materiales están divididos en tres categorías, dependiendo cuanto fácilmente permitan el flujo de carga (ej. electrones) a los largo de ellos. Estos son:

Tipos de materiales.

Conductores - por ejemplo los metales.

Aisladores - por ejemplo: goma, madera, plástico.

Semiconductores - el silicio es un buen ejemplo.

Superconductores - compuesto no metálico.

### **Materiales Conductores.**

Son aquellos en los que es fácil establecer una corriente eléctrica como los metales, porque sus átomos tienen uno o más electrones en su capa externa que no están anclados a núcleos de átomos determinados; en cambio, son libres para desplazarse a través del material. Los metales son excelentes conductores de la corriente eléctrica por la misma razón por la que son buenos conductores de calor: los electrones de su capa atómica externa están “suelos”.

### **Materiales Aislantes.**

Son aquellos materiales, como caucho y vidrio, los electrones están fuertemente enlazados con determinados átomos, y pertenecen a ellos. No están libres para desplazarse entre otros átomos del material. En consecuencia, no es fácil hacer que fluyan. Esos materiales son malos conductores de la corriente eléctrica por la misma razón que en general son deficientes conductores del calor. Se dice que esos materiales son buenos **aislantes**.

Todas las sustancias se pueden ordenar según su capacidad de conducir cargas eléctricas. Las que quedan arriba de la lista son los conductores, y al último quedan los aislantes. Esos extremos en la lista están muy alejados. Por ejemplo, la conductividad de un metal puede ser más de un millón de billones, mayor que la de un aislante, como el vidrio. En un cordón común de un aparato eléctrico, los electrones recorren varios metros de alambre en vez de pasar en forma directa de uno a otro alambre a través de una pequeña fracción de un centímetro de aislamiento de caucho o de vinil.

Dato curioso: es más fácil establecer una corriente eléctrica a través de cientos de kilómetros de alambre metálico que a través de unos pocos centímetros de material aislante.

### **Semiconductores**

El hecho de que una sustancia se clasifique como conductor o aislante depende de lo firmemente que sus átomos retengan a sus electrones. Un trozo de cobre es un buen conductor, mientras que un pedazo de madera es un buen aislante. Sin embargo, hay algunos materiales, como el silicio y el germanio, que no son buenos conductores ni buenos aislantes. Están a la mitad del intervalo de resistividades eléctricas; son aislantes regulares en su forma cristalina pura, y se vuelven conductores excelentes cuando se reemplaza uno de sus átomos, entre 10 millones de ellos, con una impureza que agregue o quite un electrón a la estructura cristalina. A los materiales que puede hacerse que se comporten a veces como aislantes y a veces como conductores se les llama

**semiconductores.** Las capas delgadas de materiales semiconductores, una sobre otra, forman los *transistores*, que sirven para controlar el flujo de las corrientes en los circuitos, para detectar y amplificar las señales de radio y para producir oscilaciones en los transmisores; también funcionan como interruptores digitales. Esos sólidos diminutos fueron los primeros componentes eléctricos, en los cuales los materiales con distintas características eléctricas no se interconectaron con alambres, sino que se unieron físicamente en una estructura. Requieren muy poca energía y en uso normal duran en forma indefinida.

Un semiconductor también puede conducir cuando se ilumina con luz del color adecuado. Una placa de selenio puro es, normalmente, un buen aislante, y toda carga eléctrica que se acumula en su superficie se quedará ahí durante largo tiempo en la oscuridad. Sin embargo, si la placa se expone a la luz, la carga desaparece casi de inmediato. Si una placa cargada de selenio se expone a una distribución de luz, como la distribución de claros y oscuros que forma esta página, la carga saldrá sólo de las áreas expuestas a la luz. Si se unta su superficie con un polvo de plástico negro, ese polvo sólo se adheriría a las áreas cargadas, donde la placa no se ha expuesto a la luz. Ahora, si sobre la placa se pone una hoja de papel con carga eléctrica en su cara trasera, el polvo de plástico negro se atraería hacia el papel y formaría la misma figura que, digamos, la de esta página. Si el papel se calentara para fundir el plástico y pegarlo en el papel, pagarías a quien te lo entregara y le llamarías copia Xerox.

### **Superconductores**

Un conductor ordinario sólo tiene una resistencia pequeña al paso de la carga eléctrica. La resistencia de un aislante es mucho mayor (en los siguientes temas explicaremos el tema de la resistencia eléctrica). Es notable que a temperaturas suficientemente bajas, ciertos materiales tienen resistencia cero (conductividad infinita) contra el flujo de la carga. Son **superconductores**. Una vez establecida una corriente eléctrica en un superconductor, los electrones fluyen en forma indefinida. Si no hay resistencia eléctrica, la corriente atraviesa un superconductor sin perder energía; no hay pérdida de calor cuando fluyen las cargas. La superconductividad en los metales, cerca del cero absoluto, fue descubierta en 1911. En 1987 se descubrió la superconductividad a temperaturas “altas” (mayores que 100 °K), en un compuesto no metálico. Cuando se escribió estos apuntes, se estaba investigando intensamente la superconductividad tanto a temperaturas “altas” como a temperaturas bajas. Entre sus aplicaciones potenciales están la transmisión de energía a larga distancia sin pérdidas, y los vehículos de levitación magnética a gran velocidad, para reemplazar a los tradicionales trenes sobre rieles.

## 1.3 Interacción Eléctrica.

### ***Ley de los signos en electrostática.***

Esta ley establece que al interactuar dos cargas eléctricas del mismo signo se manifiesta una fuerza de repulsión, en tanto que cuando las son de signo opuesto se ejerce una fuerza de atracción. A continuación, se presenta de manera esquemática el tipo de fuerza que se establece de acuerdo con el signo de ambas cargas eléctricas:

(+)	(+)	Genera fuerza de repulsión
(-)	(-)	Genera fuerza de repulsión
(+)	(-)	Genera fuerza de atracción
(-)	(+)	Genera fuerza de atracción

Tabla 3 Ley de los signos en electrostática.

### ***Ley de Coulomb.***

Charles Coulomb (1736-1806) midió las magnitudes de las fuerzas eléctricas entre objetos con carga; para hacerlo usó la balanza de torsión, que él mismo inventó (figura 6). El principio de operación de la balanza de torsión es el mismo que el del aparato usado por Cavendish para medir la constante de la gravedad, con esferas eléctricamente neutras reemplazadas por esferas con carga. La fuerza eléctrica entre las esferas A y B de la figura 6 provoca que se atraigan o se repelan, y el movimiento resultante provoca que la fibra suspendida se tuerza.

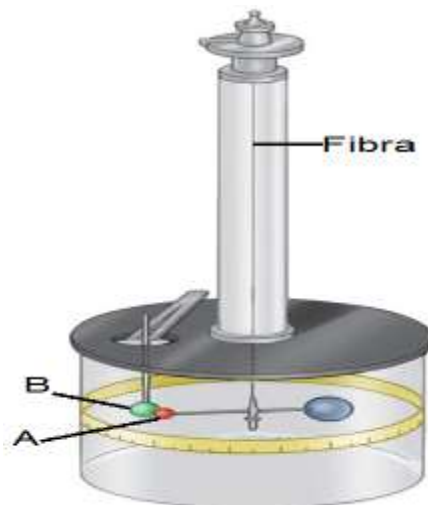


Figura 6 Balanza de torsión de Coulomb, utilizada para determinar la ley del cuadrado inverso para una fuerza eléctrica entre dos cargas.

Gracias a que el momento de torsión de recuperación de la fibra torcida es proporcional al ángulo de rotación de la fibra, una lectura de este ángulo da una medida cuantitativa de la fuerza eléctrica de atracción o de repulsión. Una vez cargadas las esferas por frotación, la fuerza eléctrica entre ambas se vuelve muy grande en comparación con la atracción de la gravedad y, por lo tanto, esta última fuerza se puede ignorar.

A partir de los experimentos de Coulomb, se generalizan las propiedades de la **fuerza eléctrica** entre dos partículas inmóviles con carga. Para ello se usa el término **carga puntual** que hace referencia a una partícula con carga de tamaño cero. El comportamiento eléctrico de electrones y protones queda muy bien descrito si se representan como cargas puntuales. Debido a observaciones experimentales es posible encontrar la magnitud de una fuerza eléctrica (a veces llamada *fuerza de Coulomb*) entre dos cargas puntuales establecidas por la **ley de Coulomb**:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (1.1)$$

Donde  $k_e$  es una constante conocida como **constante de Coulomb**. En sus experimentos, Coulomb demostró que el valor del exponente de  $r$  era **2**, con una incertidumbre de unos cuantos puntos porcentuales. Experimentos recientes han comprobado que el exponente es **2**, con una incertidumbre de unas cuantas partes en  $10^{16}$ . Los experimentos también muestran que la fuerza eléctrica, como la fuerza de gravedad, es conservativa.

El valor de la constante de Coulomb depende de la elección de las unidades. La unidad de carga del SI es el **coulomb** (C). La constante de Coulomb o constante de proporcionalidad del medio  $k_e$  en unidades del SI tiene el valor

$$k_e = 8.9876 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (1.2)$$

Además esta constante se expresa como

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.3)$$

donde la constante  $\epsilon_0$  (griega minúscula épsilon) se conoce como la **permitividad del vacío**, cuyo valor es

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (1.4)$$

La magnitud de la constante electrostática está en función de la velocidad de la luz en el vacío:

$$k_e = 10^{-7} c^2 \quad (1.5)$$

Dónde:  $c$  = velocidad de la luz.

### **Constante dieléctrica.**

A la permitividad del medio también suele llamársele constante dieléctrica del medio.

La permitividad es la facilidad que presenta el medio para la transmisión del campo eléctrico.

La permitividad es, por tanto, una cantidad escalar cuya magnitud depende sola mente del medio.

### **Permitividad relativa**

La permitividad relativa,  $\epsilon_r$  constituye la relación de la permitividad del medio respecto de la permitividad del vacío, además, es una cantidad que carece de unidades, por esa razón recibe el nombre de cantidad adimensional.

La permitividad relativa se define matemáticamente como el cociente de la permitividad del medio entre la permitividad del vacío, según la siguiente ecuación:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

Por su parte la constante  $k_e$  de proporcionalidad se le llama constante electrostática del medio y su valor se determina de manera experimental; por tanto, se concluye que esta es inversamente proporcional al producto de la permitividad del medio y por  $4\pi$ . Así, el valor de la permitividad se determina mediante la siguiente ecuación:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{1}{(4)(3.1416)(8.85 \times 10^{-12})(1)} = 8.987 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

Entonces, el valor de la constante,  $k_e$ , (**permitividad del espacio vacío**) para el aire se considera igual que para el vacío.

*La ley de Coulomb es válida cuando dos objetos cargados actúan como cargas puntuales. Una esfera conductora cargada interactúa con otro objeto cargado como si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera.*

Ahora, sabemos que la fuerza es un vector, así que la forma correcta de formular la ley de Coulomb en forma vectorial es<sup>1</sup>

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Nota 1: El vector  $\hat{r}_{12}$  apunta de "1" a "2" y el símbolo  $\vec{F}_{12}$  significa "fuerza 1 sobre 2", pero en otros libros de texto la fuerza sobre la carga  $q_2$  también se escribe simplemente  $\vec{F}_2$



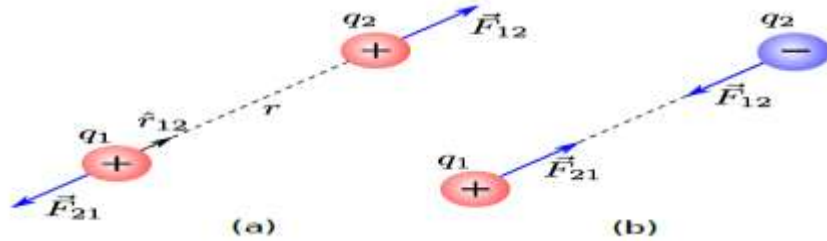


Figura 7 Repulsión y atracción de cargas. El vector unitario  $\hat{r}_{12}$  apunta en la dirección de la fuerza que ejerce  $q_1$  sobre  $q_2$ . En ambos casos se cumple la tercer Ley Newton  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

Según la figura 7-(a),  $\hat{r}_{12}$  es un vector unitario que apunta desde la carga  $q_1$  a la  $q_2$  y  $\vec{F}_{12}$  es la fuerza sobre la carga  $q_2$  debido a la carga  $q_1$ . Puesto que esta fuerza debe obedecer a la tercera ley de Newton entonces debe cumplirse que  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

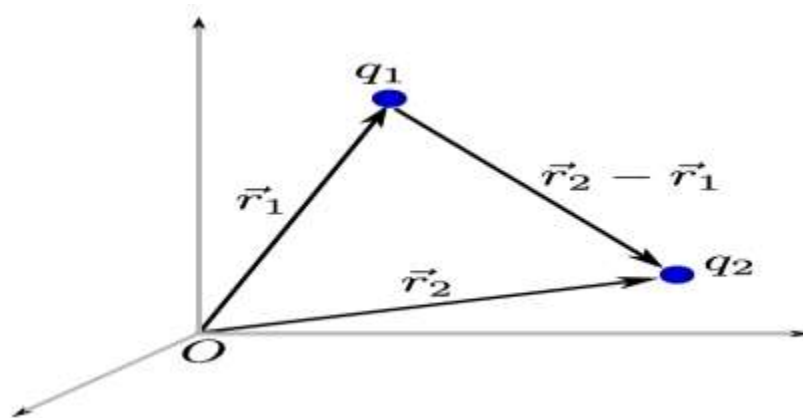


Figura 8 La posición de las cargas en función de los vectores de posición.

En otros textos la forma vectorial de la ley de Coulomb es como sigue: si  $\vec{r}_1$  es el vector posición de la carga  $q_1$  y  $\vec{r}_2$  es el vector posición de la carga  $q_2$ , entonces las distancia entre las cargas está dada por el módulo del vector  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (ver figura 8), así la fuerza de la carga  $q_1$  sobre la  $q_2$  es:

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

La escribimos:

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

donde hemos reemplazado el vector unitario<sup>2</sup>  $\hat{r}_{12}$  por  $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$  y  $r_{12} = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Así podemos expresar la fuerza en diferentes formas:

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = k_e \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \vec{r}_{12} = k_e q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Nota 2: Recordar que para obtener un vector unitario que apunte en la dirección de  $\vec{A}$ , debemos dividir ese vector por su módulo, es decir  $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

Adoptamos la expresión siguiente por ser la más usada:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k_e q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}} \quad (1.7)$$

Por lo tanto, una carga igual a 1 C es aproximadamente igual a la carga de  $6.24 \times 10^{18}$  electrones o protones. Esta cantidad es muy pequeña en comparación con el número de electrones libres presentes en  $1 \text{ cm}^3$  de cobre, que es del orden de  $10^{23}$ . Aun así, 1 C es una cantidad de carga sustancial. En los experimentos en que se carga por frotación una varilla de hule o de vidrio, se obtiene una carga neta del orden de  $10^{-6}$  C. En otras palabras, sólo una fracción muy pequeña de la carga total disponible se ha transferido entre la varilla y el material contra el que se frota.

### ***Método para la aplicación de la ley de Coulomb.***

Para determinar la fuerza de atracción o de repulsión entre dos o más cargas estáticas localizadas horizontal o verticalmente mediante la aplicación de la ecuación que expresa la ley de Coulomb, se recomienda seguir el siguiente procedimiento:

1. Como primer paso se aplica la ley de los signos, con el fin de determinar si la fuerza es de repulsión o de atracción, así como también el sentido de la fuerza; en este caso es importante recordar que la carga de referencia es la que experimenta la fuerza ejercida por las otras cargas sobre esta, esto indica el sentido de la fuerza.
2. Luego, se aplica la ecuación de la ley de Coulomb para determinar la magnitud de la fuerza, considerando solo la magnitud de la carga, sin tomar en cuenta el signo negativo al hacer las operaciones matemáticas.
3. El siguiente paso es trazar todas las fuerzas en un sistema de coordenadas cartesianas, considerando que su origen debe coincidir con el punto en donde se halla la carga eléctrica, sobre la cual se requiere determinar la fuerza resultante.
4. Enseguida, la fuerza resultante se determina mediante la suma vectorial de todas las fuerzas. En este caso, se recomienda aplicar el método analítico de suma de vectores por

el método de componentes rectangulares, es decir aplicando las funciones trigonométricas **seno, coseno y tangente**, según corresponda.

5. Para determinar el ángulo de dirección del vector resultante se aplica la función tangente, pero auxiliándose con la gráfica de las fuerzas representadas en el sistema de coordenadas cartesianas.

### **Problemas resueltos.**

#### **Problema Resuelto.**

La fuerza de repulsión entre dos cargas eléctricas separadas entre sí una distancia de 4 cm, es de  $6 \times 10^{-3}$  N. Si una de las cargas es el triple de la otra, determinar el valor de cada una de las cargas, considerando que el medio en que se encuentran dichas cargas es el aire.

#### **Solución.**

De acuerdo al planteamiento del problema, primero determinamos los siguientes valores.

$$F = 6 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$q_1 = q$$

$$q_2 = 3q$$

$$k_e = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$$

Por tanto:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Sustituyendo variables:

$$F = \frac{3k_e q^2}{r^2}$$

Despejando:

$$q = \sqrt{\frac{r^2 F}{3k_e}}$$

Por último, sustituyendo:

$$q_1 = q = \sqrt{\frac{(6 \times 10^{-3} \text{ N})(0.04 \text{ m})^2}{3(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2)}} = 1.88 \times 10^{-8} \text{ C}$$

$$q_2 = 3q = 3(1.88 \times 10^{-8} \text{ C}) = 5.65 \times 10^{-8} \text{ C}$$

#### **Problema Resuelto.**

Tres cargas están configuradas de acuerdo a la figura 9. Encontrar la fuerza sobre la carga  $q_3$  asumiendo que  $q_1 = 6.0 \times 10^{-6}$  C,  $q_2 = -q_1 = -6.0 \times 10^{-6}$  C,  $q_3 = +3.0 \times 10^{-6}$  C y  $a = 2.0 \times 10^{-1}$  m.

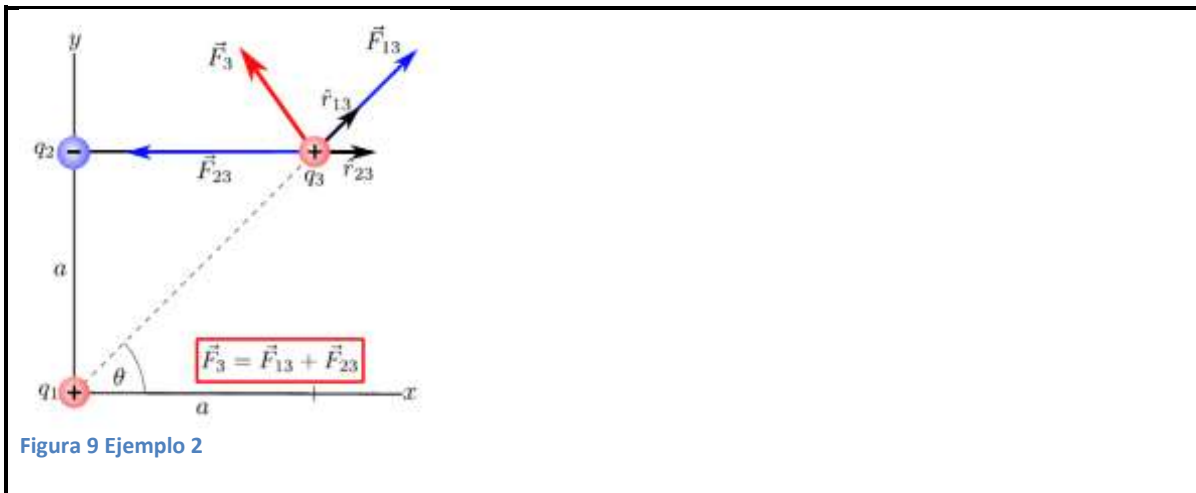


Figura 9 Ejemplo 2

**Solución:** Usando el principio de superposición, la fuerza sobre  $q_3$  es

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = k_e \left( \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} \right)$$

La tarea “complicada” aquí es encontrar los vectores unitarios  $\hat{r}_{13}$  y  $\hat{r}_{23}$ .

De acuerdo a la figura, el vector  $\vec{r}_{13}$  apunta desde la carga  $q_1$  hacia la carga  $q_3$ :

$$\vec{r}_{13} = \sqrt{2} a \cos \theta \hat{i} + \sqrt{2} a \sin \theta \hat{j}$$

así, si dividimos este vector por su módulo ( $\sqrt{2}a$ ) obtenemos el vector unitario  $\hat{r}_{13}$

$$\hat{r}_{13} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j})$$

puesto que  $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . El vector  $\hat{r}_{23}$  es más fácil, pues éste apunta en la dirección positiva de x:

$$\hat{r}_{23} = \hat{i}$$

Así la fuerza total es:

$$\vec{F}_3 = k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) + k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{i}$$

y sabiendo que  $r_{13} = \sqrt{2}a$  y  $r_{23} = a$ , obtendremos finalmente:

$$\vec{F}_3 = \frac{k_e q_1 q_3}{(\sqrt{2}a)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) + \frac{k_e q_2 q_3}{a^2} \hat{i} = \frac{k_e q_1 q_3}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{4} (\hat{i} + \hat{j}) + \frac{k_e q_2 q_3}{a^2} \hat{i}$$

Si reemplazamos los valores numéricos, obtendremos  $\vec{F}_3$  (en unidades de Newton):

$$\vec{F}_3 = -2.615 \hat{i} + 1.429 \hat{j}$$

La magnitud de  $\vec{F}_3$  es  $\sqrt{(-2.615)^2 + (1.429)^2} \approx 3.0 \text{ N}$

Una forma alternativa de resolver este problema es primero calcular las magnitudes de cada una de las las fuerzas  $F = k_e \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2}$  y luego calcular sus componentes.

#### Problema Resuelto.

Dos cargas de  $14 \times 10^{-6} \text{ C}$  y de  $-8 \times 10^{-6} \text{ C}$ , respectivamente, están separadas a una distancia de 30 cm en el aire. Determinar la fuerza resultante que experimenta una tercera carga de  $5 \times 10^{-6} \text{ C}$ ,

colocada en medio de la recta horizontal que une a las dos cargas (véase figura 10)



Figura 10 Ejemplo3.

Los datos del problema son los siguientes:

$$q_1 = 14 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_2 = -8 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$r_1 = 0.15 \text{ cm}$$

$$r_2 = 0.15 \text{ cm}$$

**Solución.**

Primero, se escribe la fórmula que nos permitirá determinar la fuerza en el caso de este problema:

$$F = \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}$$

Luego, se determinan las fuerzas entre  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ ; acto segundo, se suman vectorialmente, según la figura 10.

Enseguida se despeja la formula y se sustituyen las variables:

$$F_{1-3} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(14 \times 10^{-6} \text{ C})(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.15 \text{ m})^2} = 28 \text{ N}$$

Así:

$$F_{3-2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-6} \text{ C})(8 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.15 \text{ m})^2} = 16 \text{ N}$$

Como se observa en la figura 10,  $F_{1-3}$  es una fuerza de repulsión con sentido a la derecha, mientras que  $F_{3-2}$  es una fuerza de atracción, también con sentido a la derecha; por tanto, la fuerza resultante es la suma vectorial de ambas fuerzas.

Por tanto:

$$F_r = F_{1-3} + F_{3-2} = 28 \text{ N} + 16 \text{ N} = 44 \text{ N}$$

**Problema Resuelto.**

Considérese que se coloca una carga eléctrica en cada uno de los vértices de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 11. Determinar la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre la carga  $q_1$ , considerando los datos que se listan a continuación y tomando en cuenta que todas las cargas se encuentran en el aire.

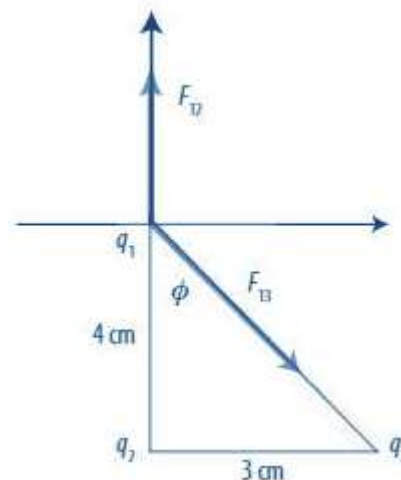
$$q_1 = 6 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_2 = 16 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_3 = -9 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$k_e = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Figura 11 Ejemplo 4.



**Solución.**

Primero se escribe la fórmula que nos permitirá determinar la magnitud y la dirección de la fuerza resultante de este problema:

$$F = \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}$$

Luego, empleamos la ley de los signos con el objeto de determinar el sentido de las fuerzas de interacción. Como se recordará, las fuerzas de atracción o de repulsión se ejercen por la carga eléctrica cercana a la carga de referencia. Es importante observar qué efecto de sentido de fuerza provocan las otras cargas sobre la carga de referencia.

A continuación, trazamos todas las fuerzas en un sistema de coordenadas cartesianas, donde el origen es el punto sobre el cual se desea determinar la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

El sentido de las fuerzas establece de acuerdo con los siguientes aspectos:

- ✓  $q_1$  experimenta fuerza de repulsión provocada por  $q_2$  por tanto, el sentido de  $F_{21}$  es hacia arriba
- ✓  $q_1$  experimenta fuerza de atracción provocada por  $q_3$  por tanto, el sentido de  $F_{23}$  es hacia  $q_3$

Luego, se realiza la representación de las fuerzas electrostáticas generadas entre las cargas. Entonces, se aplica la ecuación de la ley de Coulomb para determinar la magnitud de las fuerzas:

$$F_{1-2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)(6 \times 10^{-6} \text{ C})(16 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.04 \text{ m})^2} = 540 \text{ N}$$

Para determinar  $F_{2-3}$ , primero se establece la distancia; para ello, recurriremos a la ecuación del teorema de Pitágoras o bien a alguna función trigonométrica, debido a que la distribución de cargas forma un triángulo rectángulo. Así:

$$d_{1-3} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

$$F_{1-3} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2)(6 \times 10^{-6} \text{ C})(9 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.05 \text{ m})^2}$$

Por tanto,  $F_{1-3}$ , es una fuerza de atracción que tiene dos componentes rectangulares. Para calcular estas componentes, primero debemos calcular el ángulo entre estas; para ello, utilizamos la función tangente:

$$\phi = \tan^{-1}(3/4) = 36.86^\circ$$

A continuación se determina las componentes de la fuerza  $F_{1-3}$  mediante la aplicación de las funciones trigonométricas seno y coseno. En este caso, se recomienda aplicar la función seno cuando se trata de calcular el cateto opuesto al ángulo, pero cuando se desea calcular la componente adyacente al ángulo se deberá aplicar la función coseno. El signo de la fuerza se obtiene observando la figura 10, en la cual identificamos cómo están distribuidas las fuerzas en el sistema cartesiano.

De este modo:

$$F_{1-3x} = F_{1-3} \sin \phi = (194.4 \text{ N})(\sin 36.86^\circ) = 116.613 \text{ N}$$

$$F_{1-3y} = F_{1-3} \cos \phi = (194.4 \text{ N})(\cos 36.86^\circ) = 155.54 \text{ N}$$

A continuación, realizamos la suma vectorial de las componentes rectangulares:

$$F_x = 116.61 \text{ N}$$

$$F_y = F_{1-2} - F_{1-3y} = 540 \text{ N} - 155.54 \text{ N} = 384.46 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{(116.613 \text{ N})^2 + (384.446 \text{ N})^2} = 401.75 \text{ N}$$

La dirección de la fuerza resultante se determina aplicando la función tangente y observando la figura 12, donde están trazadas las fuerzas resultantes y sus componentes rectangulares.

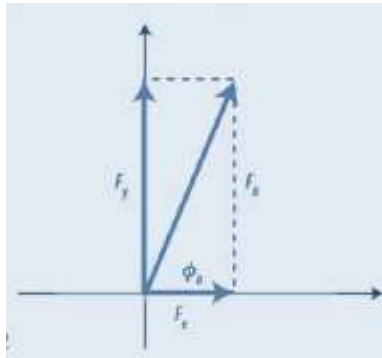


Figura 12 Ejemplo 4, componentes rectangulares

Por tanto:

$$\phi_R = \tan^{-1}(384.46/116.61) = 73.12^\circ$$

$$F_R = 401.75 \text{ N } [73.12^\circ]$$

**Problema Resuelto. ¿Dónde es cero la fuerza neta?**

Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 13. La carga positiva  $q_1 = 15.0 \mu\text{C}$  está en  $x = 2 \text{ m}$ , la carga positiva  $q_2 = 6.00 \mu\text{C}$  está en el origen y la fuerza neta que actúa sobre  $q_3$  es cero. ¿Cuál es la coordenada x de  $q_3$ ?

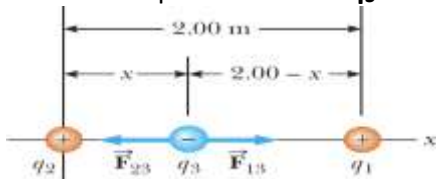


Figura 13 Ejemplo 5.

Nota: Tres cargas puntuales se colocan a lo largo del eje x. Si la fuerza resultante que actúa sobre  $q_3$  es cero, la fuerza  $F_{13}$  que ejerce  $q_1$  sobre  $q_3$  debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza  $F_{23}$  que  $q_2$  ejerce sobre  $q_3$ .

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Ya que  $q_3$  está cerca de otras dos cargas, experimenta dos fuerzas eléctricas. Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, en este problema las fuerzas se encuentran a lo largo de la misma línea, como se indica en la figura 12. Como  $q_3$  es negativa, mientras que  $q_1$  y  $q_2$  son positivas, las fuerzas  $F_{13}$  y  $F_{23}$  son de atracción.

**Categorizar** Ya que la fuerza neta sobre  $q_3$  es cero, la carga puntual se modela como una partícula en equilibrio.

**Analizar** Escriba una expresión para la fuerza neta sobre la carga  $q_3$  cuando está en equilibrio:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = -k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} \hat{i} + k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2} \hat{i} = 0$$



Mueva el segundo término a la derecha de la ecuación e iguale los coeficientes del vector unitario  $\hat{i}$ :

$$k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2}$$

Elimine  $k_e$  y  $|q_3|$  y reordene la ecuación:  $(2.00 - x)^2|q_2| = x^2|q_1|$

Reduzca la ecuación cuadrática a una forma más simple:  $3.00x^2 + 8.00x - 8.00 = 0$

Resuelva la ecuación cuadrática para la raíz positiva:  $x = 0.775 \text{ m}$

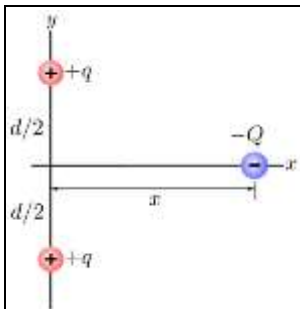
**Finalizar** La segunda raíz de la ecuación cuadrática es  $x = -3.44 \text{ m}$ , otra posición donde las *magnitudes* de las fuerzas sobre  $q_3$  son iguales, aunque dichas fuerzas están en la misma dirección.

**¿Qué pasaría si?** Suponga que  $q_3$  se restringe a moverse sólo a lo largo del eje x. Desde su posición inicial en  $x = 0.775 \text{ m}$ , se jala una pequeña distancia a lo largo del eje x. Cuando se libera, ¿regresa al equilibrio o se jala aún más desde el equilibrio? Es decir, ¿el equilibrio es estable o inestable?

**Respuesta** Si  $q_3$  se mueve hacia la derecha,  $\vec{F}_{13}$  se vuelve mayor y  $\vec{F}_{23}$  menor. El resultado es una fuerza neta hacia la derecha, en la misma dirección que el desplazamiento. Por lo tanto, la carga  $q_3$  continuaría moviéndose hacia la derecha y el equilibrio es *inestable*.

Si  $q_3$  se restringe a permanecer en una coordenada  $x$  fija pero se le permite moverse arriba y abajo en la figura 13, el equilibrio es estable. En este caso, si la carga se jala hacia arriba (o hacia abajo) y se libera, se mueve de regreso hacia la posición de equilibrio y oscila en torno a este punto.

**Problema Resuelto.**



Ahora un problema más difícil. En la figura 14 se muestran dos cargas positivas  $+q$  y una carga negativa  $-Q$  que puede moverse libremente y que se encuentra inicialmente en reposo. Si las dos cargas  $q$  están fijas:

- a) Determinar el periodo de movimiento de la carga  $-Q$ .

Figura 14 Ejemplo 6.

**Solución:** puesto que las dos cargas positivas atraen a  $-Q$ , esta carga se desplazará a lo largo del eje x. Una vez que pase hacia el lado negativo, volverá a ser atraída hacia el lado positivo, y así sucesivamente, de manera que  $-Q$  comenzará a moverse de un lado para otro describiendo un movimiento oscilatorio.

La magnitud de la fuerza ejercida por una de las cargas  $q$  sobre  $-Q$  será:

$$F_{qQ} = k_e \frac{qQ}{r^2}$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + (d/2)^2}$ . Puesto que por simetría la fuerza resultante, debido a las dos cargas  $q$ , será en la dirección horizontal, debemos entonces calcular la componente horizontal de  $F_{qQ}$

$$F_x = k_e \cos \theta = k_e \frac{qQ}{r^2} \cos \theta$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre la línea  $qQ$  y el eje horizontal, es decir  $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}$

$$F_x = k_e \frac{qQ}{r^2} \frac{x}{r} = k_e \frac{qQ}{x^2 + (d/2)^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}} = k_e \frac{qQx}{(x^2 + (d/2)^2)^{3/2}}$$

pero, en la expresión anterior  $F_x$  es la fuerza debido a una sola carga, por lo tanto, la magnitud de la fuerza total sobre  $-Q$  será el *doble*

$$k_e \frac{qQx}{(x^2 + (d/2)^2)^{3/2}}$$

Ahora, para describir el movimiento de  $-Q$ , usamos la segunda ley de Newton ( $F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$ )

$$k_e \frac{qQx}{(x^2 + (d/2)^2)^{3/2}} = -m \frac{d^2x}{dt^2}$$

donde  $m$  es la masa de  $-Q$  y se ha introducido el signo  $(-)$  debido que la fuerza sobre la carga  $-Q$  actúa como restauradora (como en un resorte). Lamentablemente esta es una ecuación diferencial difícil de resolver, pero podemos hacer una aproximación razonable si suponemos que  $x$  es pequeño comparado con  $d$  ( $x \ll d$ ), entonces  $(x^2 + (d/2)^2)^{3/2}$  es aproximadamente igual  $(0 + (d/2)^2)^{3/2} = (d/2)^3$ , por lo tanto podemos escribir

$$\frac{16k_e qQx}{d^3} = -m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{16k_e qQx}{md^3} = 0$$

Si definimos  $\omega^2 = \frac{16k_e qQ}{md^3}$ , nuestra ecuación queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico, cuya solución se conoce y el periodo  $T = 2\pi/\omega$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{md^3}{k_e qQ}}$$

- b) ¿Cuál será la rapidez de  $-Q$  cuando esté en el punto medio de las dos cargas  $q$ , si inicialmente es soltada a una distancia  $a \ll d$  desde el centro?

**Solución:** La rapidez será máxima en el punto medio de oscilación y está dada por:

$$v_{max} = \omega A$$

donde  $A$  es la amplitud máxima que en este caso es  $a$

$$v_{max} = \omega a = \sqrt{\frac{16k_e qQ}{md^3}} a = 4a \sqrt{\frac{k_e qQ}{md^3}}$$

## 1.4 El campo Eléctrico.

### *Campo eléctrico*

La presencia de una carga eléctrica produce una fuerza sobre todas las otras cargas presentes. La fuerza eléctrica produce una "acción a distancia"; los objetos cargados pueden influenciar a otros sin tocarlos

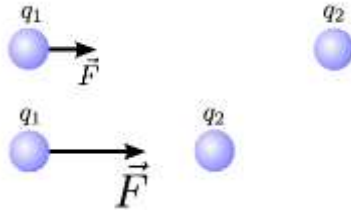


Figura 15 La presencia de una carga produce perturbaciones a su alrededor.

Viendo la figura 15, la ley de Coulomb nos permite calcular la fuerza ejercida por la carga  $q_2$  sobre la  $q_1$ . Si acercamos la carga  $q_2$  hacia  $q_1$  entonces la magnitud de la fuerza sobre  $q_1$  se incrementará. Sin embargo, este cambio no ocurre instantáneamente (ninguna señal se puede propagar más rápidamente que la luz). Las cargas ejercen una fuerza sobre las otras mediante *perturbaciones* que ellas generan en el espacio que las rodean. Estas *perturbaciones* se llaman *campos eléctricos*. Cada objeto cargado genera un campo eléctrico que influye el espacio alrededor, como un campo de fuerza conservativa. El cual se puede determinar mediante la ubicación de una carga positiva de prueba en esta región. El campo eléctrico es una cantidad vectorial y, por ende, tiene magnitud, dirección y sentido.

### ***Carga eléctrica de prueba $q_0$ .***

Con este nombre se designa a la carga eléctrica positiva de prueba cuya magnitud es tan extremadamente pequeña que para efectos de cálculo su valor es despreciable.

### ***Líneas de fuerza.***

Para representar la naturaleza vectorial del campo eléctrico, es conveniente tratar de visualizarlo mediante **líneas de fuerza** de campo eléctrico. En vez de dibujar una infinidad de flechas de vectores en el espacio que rodea a la carga, es quizás más útil dibujar un patrón de algunas líneas que parten de la carga y se extienden hasta el infinito. Estas líneas, también llamadas **líneas de campo eléctrico**, apuntan en la dirección que aceleraría una carga de prueba positiva colocada en esa línea.

Con sus investigaciones, Faraday en 1834 concluyó que las líneas de fuerza tienen las siguientes propiedades físicas:

- Las líneas de fuerzas del campo eléctrico son radiales a la carga eléctrica en el espacio volumétrico que la rodea.
- Las líneas de fuerza de campo eléctrico salen de las cargas eléctricas positivas y entran a las cargas eléctricas negativas.
- En cada punto del espacio solo pasa una línea de fuerza, pero si se cruzan dos o más, entonces deberá calcularse la línea de fuerza resultante a través de una suma vectorial.
- La densidad o el flujo de líneas de fuerza de campo eléctrico es proporcional a la intensidad de campo eléctrico a la que llamó **flujo eléctrico** ( $\phi_E$ ).

***Espectro del campo eléctrico.***

Con base a los resultados de los estudios de Faraday, el espectro de campo eléctrico se puede definir como la representación gráfica del campo eléctrico para cada uno de las cargas eléctricas, como se muestra en la figura 16.

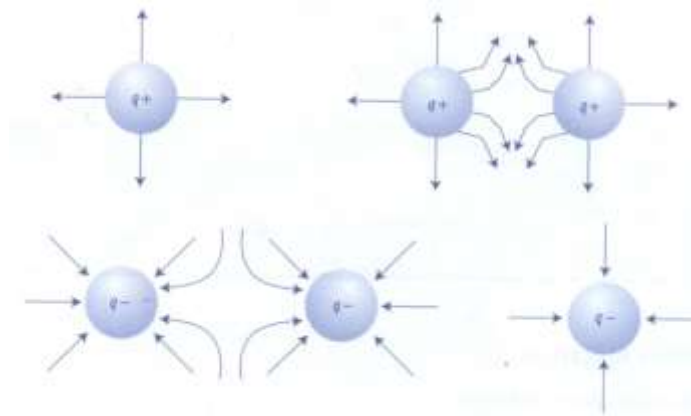


Figura 16 Representación grafica del campo eléctrico.

***Intensidad de campo eléctrico.***

La intensidad de campo eléctrico (**E**) representa la cuantificación o magnitud del campo eléctrico; se define como el campo eléctrico  $\vec{E}$  generado por una carga **Q** puede ser medido poniendo una carga de prueba **q<sub>0</sub>** en alguna posición (ver figura 16). La carga de prueba “sentirá” una fuerza eléctrica de magnitud  $F = k_e q_0 Q / r^2$ . Entonces se define el campo eléctrico  $\vec{E}$  a una distancia **r** de la carga **Q**. La intensidad de campo eléctrico es una cantidad vectorial, por tanto es posible definirla matemáticamente, como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.8)$$

Dónde:

$\vec{F}$  = La fuerza expresada en Newton(**N**) para el sistema MKS.

**q<sub>0</sub>** =La carga eléctrica expresada en Coulomb (**C**) para el sistema MKS.

$\vec{E}$  = La intensidad de campo eléctrico expresada en Newton sobre Coulomb (**NC**) para el sistema MKS.

***Campo eléctrico de cargas puntuales***

Queremos encontrar el campo eléctrico ejercido por una carga puntual positiva **q**. Como en la figuras 17 y 18, si ponemos una carga de prueba **q<sub>0</sub>** a una distancia **r** de **q**, la fuerza sobre **q<sub>0</sub>** es:

$$\vec{F} = k_e \frac{q q_0}{r^2} \hat{r}$$

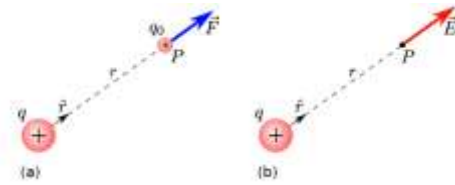


Figura 17 Si  $q > 0$ , la carga de prueba será repelida y en el punto P habrá un campo eléctrico en la misma dirección que  $\vec{F}$ .

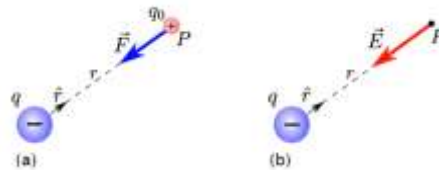


Figura 18 Si  $q < 0$ , la carga de prueba será atraída y en el punto P habrá un campo eléctrico en la misma dirección que  $\vec{F}$ .

entonces, de acuerdo a la definición,  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$

Pero si se sustituye la ecuación de la ley de Coulomb en la ecuación de campo eléctrico se obtiene la siguiente ecuación

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1.9)$$

Es más conveniente escribir la fórmula anterior en función de radios vectores. Si tenemos una carga  $q_i$  con radio vector  $\vec{r}_i$  el campo eléctrico generado por  $q_i$  en la posición  $\vec{r}$  es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^3}$$

La unidad de campo eléctrico debería ser fuerza por unidad de carga (N/C), pero por razones que se explicarán más adelante la unidad elegida es V/m (Volt/metro).

En la definición anterior se supone que las cargas que generan el campo permanecen fijas en su posición cuando se acerca la carga de prueba  $q_0$ . Para evitar perturbaciones a estas cargas, se usan cargas de prueba muy pequeñas. De hecho,  $\vec{E}$  se puede definir en forma operacional:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

El [principio de superposición](#) también es aplicable al campo eléctrico. Dado un conjunto de cargas puntuales  $q_1, q_2, q_3 \dots q_N$ , el campo eléctrico en un punto  $P$  de espacio localizado a distancias  $r_1, r_2, r_3 \dots r_N$  de las cargas, está dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = k_e \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

De forma similar a como se definió en la ecuación (1.8), ahora si tenemos  $N$  cargas  $q_1, q_2, q_3 \dots q_N$  con vectores posición  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots \vec{r}_N$  entonces el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto situado en  $\vec{r}$  será:

$$\vec{E} = k_e \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

**Ecuación (1.9) Campo eléctrico.**

Ahora bien, cuando se tiene una partícula con distribución uniforme de carga, esta se divide en elementos diferenciales de carga,  $dq$  y la suma se sustituye por una integral. Lo cual da como resultado la ecuación 1.10:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \tag{1.10}$$

Invariablemente, un campo eléctrico uniforme siempre tiene la misma intensidad y dirección en todos los puntos, y siempre se representa a través de líneas de fuerzas paralelas y equidistantes.

***Proceso de solución de campo eléctrico.***

Para resolver problemas de este tipo, por lo general se recomienda realizar cada uno de los puntos del siguiente proceso:

1. Como es sabido, mediante la aplicación de la fórmula de intensidad de campo eléctrico es posible determinar las intensidades para cada carga con respecto al punto elegido. No obstante, resulta importante recordar que en dicho punto solo se considera una carga de prueba positiva de magnitud despreciable; por tanto, su campo también es despreciable. Así pues, en caso de existir una carga eléctrica en ese punto, no se determina su campo debido a que matemáticamente sería infinito.
2. El segundo paso de este proceso, consiste en trazar un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen sea el punto con respecto al cual se desea determinar la intensidad de campo eléctrico total.
3. Luego, se eligen los sentidos de las intensidades de campo eléctrico de cada una de las cargas respecto al punto deseado aplicando la teoría de Faraday, la cual establece que las líneas de campo eléctrico salen de las cargas positivas, pero entran a las cargas negativas.
4. Una vez después, las intensidades de campo eléctrico, determinadas con anterioridad, se suman vectorialmente mediante el método de componentes rectangulares. Es importante

hacer notar que para dichas intensidades se aplican las funciones trigonométricas de seno y coseno, según corresponda.

5. Luego, mediante la función trigonométrica tangente y con el de la gráfica se determina la dirección y el sentido de la intensidad de carga eléctrica resultante en el punto deseado.
6. En este punto, el signo de las cargas eléctricas solamente se considera con el fin de identificar el sentido de la dirección de las líneas de fuerza de campo eléctrico, sin embargo, en el desarrollo de operaciones para calcular la magnitud de la intensidad de campo eléctrico, el signo de dichas cargas no se considera; por este motivo, se recomienda considerar solo el valor absoluto de las cargas eléctricas.

### Problemas resueltos.

#### Problema Resuelto 1.

Determinar la fuerza que experimenta una carga de prueba positiva de  $11.5 \times 10^{-9}$  C, cuando se encuentra en una región de campo eléctrico de 800 N/C.

**Solución:**

Dónde:

$$q_0 = 11.5 \times 10^{-9} \text{ C}$$

$$E = 800 \text{ N/C}$$

$$E = F / q_0$$

$$F = (E) (q_0) = (800 \text{ N/C}) (11.5 \times 10^{-9} \text{ C}) = 9.2 \times 10^{-6} \text{ N}$$

#### Problema Resuelto 2.

El radio del átomo de hidrógeno es  $0.53 \times 10^{-10}$  m. Determina la magnitud del campo eléctrico originado por su núcleo en las proximidades del electrón.

**Solución:**

El núcleo del átomo de hidrógeno es un protón. La magnitud del campo eléctrico originado por él cerca del electrón es:

$$E = \frac{F}{q_e}$$

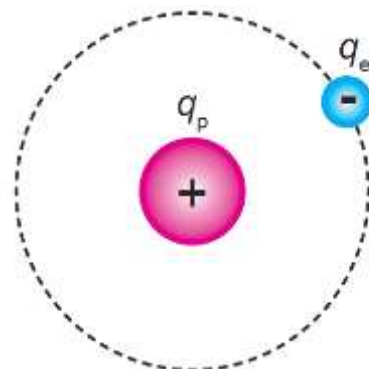


Figura 19 Átomo de hidrógeno.



$$q_p = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$k_e = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$r = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$F$  es la fuerza ejercida sobre el electrón y  $q_e$  la carga de éste. Según la ley de Coulomb, la fuerza es:

$$F = k_e \frac{q_p q_e}{r^2}, \text{ donde } q_p \text{ es la carga del protón. Por consiguiente:}$$

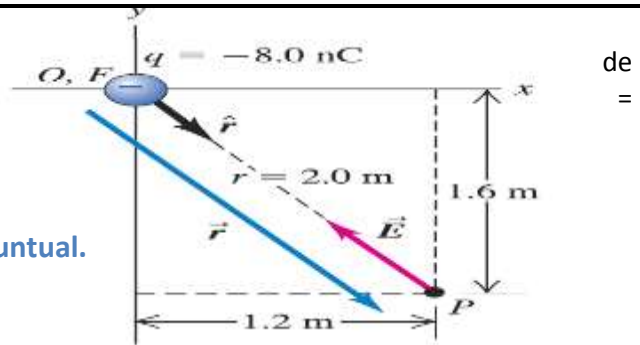
$$E = \frac{k_e \frac{q_p q_e}{r^2}}{q_e} = k_e \frac{q_p}{r^2} = \left( 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \right) \frac{1.6 \times 10^{-19}}{(0.53 \times 10^{-10} \text{ m})^2}$$

$$E = 5.1 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

### Problema Resuelto 3.

Una carga puntual  $q = -8.0 \text{ nC}$  está situada en el origen. Encuentre el vector campo eléctrico en el punto de campo  $x = 1.2 \text{ m}$ ,  $y = -1.6 \text{ m}$  (Fig. 20).

**Figura 20** Vector  $\vec{r}$ ,  $\hat{r}$  y  $\vec{E}$  de una carga puntual.



**Solución:**

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** El campo eléctrico está dado en forma vectorial por la ecuación (1.8). Para emplear esta ecuación, se utiliza el sistema de coordenadas de la figura 20 para hallar la distancia del punto de origen  $F$  (la posición de la carga  $q$ ) al punto de campo  $P$ , así como el vector unitario  $\hat{r}$  que apunta en la dirección de  $F$  a  $P$ .

**EJECUTAR:** La distancia de la carga al punto de origen  $F$  (que en este ejemplo está en el origen  $O$ ) al punto de campo  $P$  es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.2 \text{ m})^2 + (-1.6 \text{ m})^2} = 2.0 \text{ m}$$

El vector unitario  $\hat{r}$  está orientado del punto de origen al punto de campo. Esto equivale al cociente del vector de desplazamiento  $\vec{r}$  del punto de origen al punto de campo (que se muestra desplazado hacia un lado en la figura 20 para no ocultar los otros vectores) entre su magnitud  $r$ :

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{xi + yj}{r} = \frac{(1.2 m)i + (-1.6 m)j}{2.0 m} = 0.60i - 0.80j$$

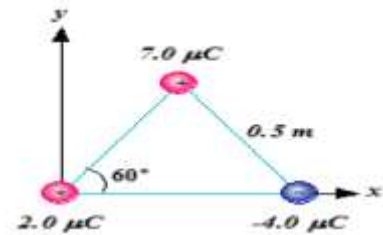
Por tanto, el vector de campo eléctrico es:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = (9.0 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2) \frac{(-8.0 \times 10^{-9} \text{ C})}{(2.0 \text{ m})^2} (0.60i - 0.80j) \\ &= (-11 \text{ N/C})i + (14 \text{ N/C})j \end{aligned}$$

**Problema Resuelto 4.**

Tres cargas puntuales están localizadas en los vértices de un triángulo equilátero. Calcule la fuerza neta sobre la carga de 7.0  $\mu\text{C}$ .

Figura 21 Triángulo equilátero con 3 cargas.



**Solución:**

El campo eléctrico debido a la carga de 2 $\mu\text{C}$ , es:

$$\vec{E}_1 = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2)(2 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.5 \text{ m})^2} \hat{r}$$

Pero:

$$\hat{r} = \cos 60^\circ \hat{i} + \sin 60^\circ \hat{j} = 0.5\hat{i} + 0.86\hat{j}$$

Luego:

$$\vec{E}_1 = (3.6 \times 10^4 \hat{i} + 6.19 \times 10^4 \hat{j}) \text{ N/C}$$

El campo eléctrico debido a la carga de -4 $\mu\text{C}$ , es:

$$\vec{E}_2 = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2)(-4 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.5 \text{ m})^2} \hat{r}$$

donde

$$\hat{r} = \cos 60^\circ \hat{i} - \sin 60^\circ \hat{j} = 0.5\hat{i} - 0.86\hat{j}$$

Luego:

$$\vec{E}_2 = (7.2 \times 10^4 \hat{i} - 1.23 \times 10^5 \hat{j}) \text{ N/C}$$

El campo eléctrico resultante, está dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (1.08 \times 10^5 \hat{i} - 6.11 \times 10^4 \hat{j}) \text{ N/C}$$

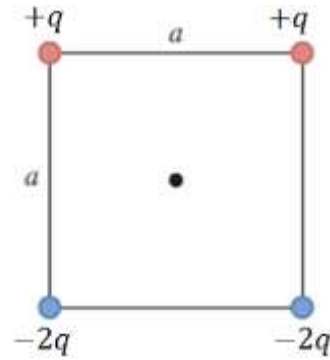
Luego la fuerza neta sobre la carga de 7 $\mu\text{C}$ , es:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E} = (7.0 \mu\text{C})(1.08 \times 10^5 \hat{i} - 6.11 \times 10^4 \hat{j}) \frac{\text{N}}{\text{C}} \\ \vec{F} &= q\vec{E} = (7.56 \times 10^{-1} \hat{i} - 4.2 \times 10^{-1} \hat{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

**Problema Resuelto 5.**

Encontrar en función de  $\epsilon_0$ ,  $a$ , y  $q$ , la magnitud y dirección del campo eléctrico generado por el cuadrado mostrado en la figura 22 en (a) el centro del cuadrado y (b) la parte media de la base inferior.

Figura 22 Cuadrado con 4 cargas en los vértices.



**Solución:**

Debido a los requisitos del problema, se debe usar la constante  $\epsilon_0 = 1/4\pi k_e$ . Primero se aplican los pasos para encontrar el campo en el centro del cuadrado.

1. El dibujo ya está proporcionado por el enunciado.
2. El punto está marcado de negro en el dibujo. Si el origen se ubica en la esquina inferior izquierda, sus coordenadas son  $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$ .
3. Las cuatro cargas ejercen campo, se denotarán como 1, 2, 3 y 4 desde la inferior izquierda y de ahí en adelante en el sentido de las agujas del reloj (ver figura 23).
4. La distancia entre todas las cargas y el centro es  $a/\sqrt{2}$ . Por la dirección de las flechas se encuentra

$$\vec{E}_1 = \frac{2q[-\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q[\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{q[-\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2}$$

$$\vec{E}_4 = \frac{2q[\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2}$$

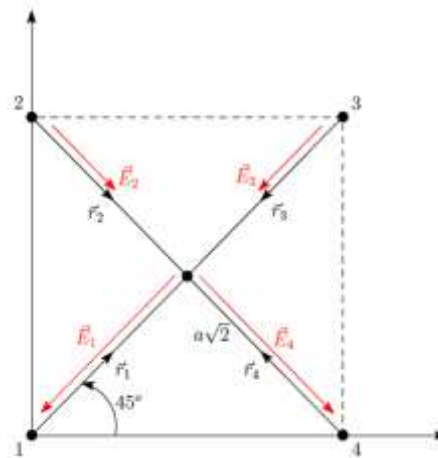


Figura 23 Campo ejercido en el centro de un cuadrado por 4 cargas en sus vértices.

6. Se suman los campos encontrando que:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left[ \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left( -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right] \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left[ 0\hat{i} - \frac{6}{\sqrt{2}}\hat{j} \right] \end{aligned}$$

7. Con la información dada, la magnitud y dirección del campo son:

$$|\vec{E}| = \frac{3q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}, \quad \phi = 270^\circ$$

Una manera más sencilla de desarrollar el problema anterior es explotando más profundamente el concepto de las líneas de campo (ver figura 24). Se dibuja una línea para las cargas con magnitud  $q$  y dos para las de magnitud  $2q$ , respetando su dirección de acuerdo con el campo generado. Como se indica en la figura, las líneas se simplifican y el campo se puede visualizar como el generado por tres veces el campo 2 (el producido por la carga 2) más tres veces el campo 3 (el generado por la carga 3). Con esto  $\vec{E} = 3\vec{E}_2 + 3\vec{E}_3$  y simplificando se obtiene la misma respuesta.

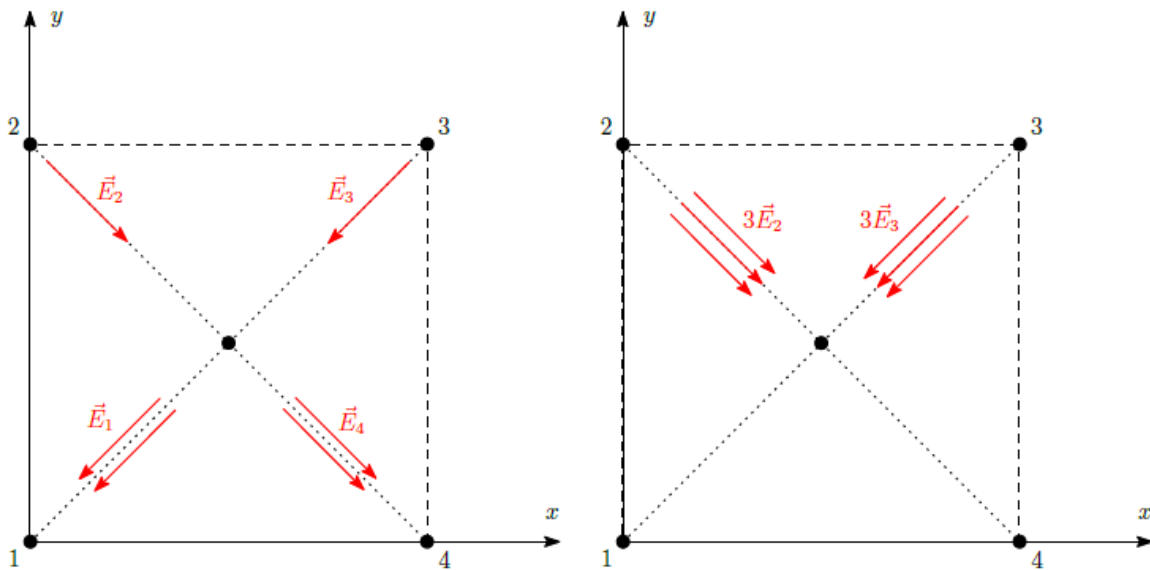


Figura 24 Simplificación del campo en el centro del cuadrado usando el concepto de líneas de campo.

Para calcular el campo sobre la parte media de la base inferior, se hace un procedimiento similar. Siguiendo los mismos pasos se encuentra (el lector puede verificar por sí mismo):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \\ &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2} (-\hat{i} + 0\hat{j}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2} \left( \frac{a/2}{\sqrt{5}a/2} \hat{i} - \frac{a}{\sqrt{5}a/2} \hat{j} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2} \left( -\frac{a/2}{\sqrt{5}a/2} \hat{i} - \frac{a}{\sqrt{5}a/2} \hat{j} \right) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2} (\hat{i} + 0\hat{j})$$

$$= \frac{2q}{5\pi\epsilon_0 a^2} \left( 0\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j} \right)$$

O

$$|\vec{E}| = \frac{4q}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 a^2}, \quad \phi = 270^\circ$$

Es importante aclarar que en ambos casos no hay campo en la dirección  $z$ , ya que el problema fue planteado en dos dimensiones. Muchas veces se omitirá el cálculo de esta componente.

### Problema Resuelto 6.

Los campos eléctricos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  en el punto  $a$  están dirigidos hacia la derecha. El campo  $\vec{E}_3$  en el punto  $c$  es la suma vectorial de  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ . El campo  $\vec{E}_b$  en el punto  $b$  está dirigido hacia la izquierda.

Figura 25 Campo eléctrico en tres puntos,  $a$ ,  $b$  y  $c$ , orientado por las cargas  $q_1$  y  $q_2$ , lo que constituye un dipolo eléctrico.

### Solución:

**IDENTIFICAR:** Se necesita encontrar el campo eléctrico total en tres puntos diferentes originado por dos cargas puntuales. Usaremos el principio de superposición:

**PLANTEAR:** En la figura 25 se muestra el sistema de coordenadas y las ubicaciones de los tres puntos del campo,  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

**EJECUTAR:**  $a$ ) En el punto  $a$ , los campos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , ocasionados por la carga positiva  $q_1$  y la carga negativa  $q_2$ , respectivamente, están dirigidos hacia la derecha. Las magnitudes de  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  son:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.060 \text{ m})^2}$$

$$= 3.0 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.040 \text{ m})^2}$$

$$= 6.8 \times 10^4 \text{ N/C}$$

Las componentes de  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  son:

$$E_{1x} = 3.0 \times 10^4 \text{ N/C} \quad E_{1y} = 0$$

$$E_{2x} = 6.8 \times 10^4 \text{ N/C} \quad E_{2y} = 0$$

De ahí que en el punto **a**, el campo eléctrico total  $\vec{E}_a = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  tenga las componentes:

$$(E_a)_x = E_{1x} + E_{2x} = (3.0 + 6.8) \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$(E_a)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

En el punto **a**, el campo total tiene una magnitud de  $9.8 \times 10^4 \text{ N/C}$  y está dirigido hacia la derecha; por lo tanto,

$$\vec{E}_a = (9.8 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{i}$$

b) En el punto **b**, el campo  $\vec{E}_1$  debido a  $q_1$  se dirige hacia la izquierda; mientras que el campo  $\vec{E}_2$  debido a  $q_2$  tiene dirección hacia la derecha. Las magnitudes de  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  son:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.040 \text{ m})^2}$$

$$= 6.8 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.140 \text{ m})^2}$$

$$= 0.55 \times 10^4 \text{ N/C}$$

Las componentes de  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  y el campo  $\vec{E}_b$  total en el punto **b** son:

$$E_{1x} = -6.8 \times 10^4 \text{ N/C} \quad E_{1y} = 0$$

$$E_{2x} = 0.55 \times 10^4 \text{ N/C} \quad E_{2y} = 0$$

$$(E_b)_x = E_{1x} + E_{2x} = (-6.8 + 0.55) \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$(E_b)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

Es decir, el campo eléctrico en **b** tiene una magnitud de  $6.2 \times 10^4 \text{ N/C}$  y se dirige hacia la izquierda, por lo que

$$\vec{E}_b = (-6.2 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{i}$$

c) En el punto **c**, tanto  $\vec{E}_1$  como  $\vec{E}_2$  tienen la misma magnitud, ya que dicho punto está equidistante de ambas cargas y las magnitudes de las cargas son las mismas:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.130 \text{ m})^2}$$

$$= 6.39 \times 10^3 \text{ N/C}$$

La dirección de  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  se ilustran en la figura 25. Las componentes **x** de ambos vectores son las mismas:

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos \alpha = (6.39 \times 10^3 \text{ N/C}) \left( \frac{5}{13} \right)$$

$$= 2.46 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Por simetría, las componentes **y**  $E_{1y}$  y  $E_{2y}$  son iguales y opuestas, por lo que suman cero. De aquí que las componentes del campo  $\vec{E}_c$  total sean

$$(E_c)_x = E_{1x} + E_{2x} = 2(2.46 \times 10^3 \text{ N/C}) = 4.9 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$(E_c)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

De modo que en el punto **c** el campo eléctrico total tiene una magnitud de  $4.9 \times 10^3 \text{ N/C}$  y está dirigido hacia la derecha, por lo que

$$\vec{E}_c = (4.9 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{i}$$

**EVALUAR:** Una manera alternativa de calcular el campo eléctrico en **c** consiste en usar la expresión vectorial para el campo de una carga puntual, ecuación (1.8). El vector de desplazamiento  $\vec{r}_1$  desde  $q_1$  hasta el punto **c**, a una distancia **r** de 13.0 cm, es



$$\vec{r}_1 = r \cos \alpha \hat{i} + r \sin \alpha \hat{j}$$

Entonces, el vector unitario que va de  $q_1$  a  $c$  es

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}$$

y el campo debido a  $q_1$  en el punto  $c$  es

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j})$$

Por simetría, el vector unitario  $\hat{r}_2$  que va de  $q_2$  al punto  $c$ , tiene la componente  $x$  opuesta pero la misma componente  $y$ , así que el campo en  $c$  debido a  $q_2$  es

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} \hat{r}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} (-\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j})$$

Como  $q_2 = -q_1$ , el campo total en  $c$  es

$$\begin{aligned} \vec{E}_c &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q_1)}{r^2} (-\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} (2 \cos \alpha \hat{i}) \\ &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.13 \text{ m})^2} \left[ 2 \left( \frac{5}{13} \right) \right] \hat{i} \\ &= (4.9 \times 10^3 \text{ N/C}) \hat{i} \end{aligned}$$

como se había obtenido antes.

### Problema Resuelto 7.

Un hexágono regular de lado  $L$ , posee cargas en cada uno de los vértices. Determinar el campo eléctrico en el centro del hexágono y evalué para cuando  $L=1 \text{ cm}$  y  $q = 1 \mu\text{C}$ , tal como se indica en la figura (26), para cuando;  $q_1 = q_2 = q_6 = q$  y  $q_3 = q_4 = q_5 = -q$ .

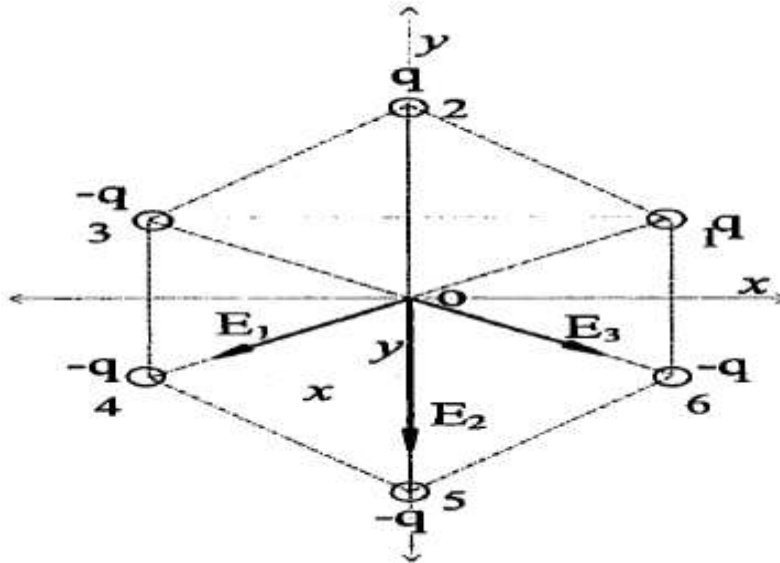


Figura 26 Cargas puntuales localizadas en los vértices de un hexágono regular de lado L.

**Solución:**

El campo eléctrico resultante en el centro geométrico del hexágono, se determina a partir de la superposición de los campos individuales creados por cada una de las cargas:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_T &= \sum_i^6 \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 + \vec{E}_5 + \vec{E}_6 \\
 \vec{E}_T &= kq \frac{-x\hat{i} - y\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + kq \frac{-y\hat{j}}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} + kq \frac{x\hat{i} - y\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= kq \frac{-x\hat{i} - y\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + kq \frac{-y\hat{j}}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} + kq \frac{-x\hat{i} + y\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= kq \left( \frac{-2x\hat{i} - 2y\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + kq \frac{-2y}{y^3} \hat{j} = -2kq \left( \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) - \frac{2kq}{y^2} \hat{j} \\
 &= 2kq \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} - 2kq \left( \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y^2} \right) \hat{j} \\
 &= -kq \sqrt{3}l \left( \frac{1}{\left(\frac{3}{4}l^2 + \frac{1}{4}l^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{i} - kql \left( \frac{1}{\left(\frac{3}{4}l^2 + \frac{1}{4}l^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{4}l^2} \right) \hat{j} \\
 &= -\frac{kq\sqrt{3}}{l^2} \hat{i} - \frac{9kq}{l^2} \hat{j} = -\frac{2kq\sqrt{3}}{l^2} \hat{i} - \frac{9kq}{l^2} \hat{j}
 \end{aligned}$$

Evaluando para cuando;  $k = 9 \times 10^9$ ,  $q = 1 \mu\text{C}$  y  $l = 10 \text{ cm}$ .

$$\begin{aligned}\vec{E}_T &= \frac{2(9 \times 10^9)(10^{-6})(1,73)}{10^{-4}} \hat{i} \text{ N/C} - \frac{9(9 \times 10^9)(10^{-6})}{10^{-4}} \hat{j} \text{ N/C} \\ &= 31,14 \times 10^7 \hat{i} \text{ N/C} - 81 \times 10^7 \hat{j} \text{ N/C}\end{aligned}$$

La magnitud del campo eléctrico está dado por;

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{(31,14 \times 10^7)^2 + (81 \times 10^7)^2} \text{ N/C} = \sqrt{969,69 + 6561} \times 10^7 \text{ N/C} \\ &= 86,78 \times 10^7 \text{ N/C}\end{aligned}$$

**Problema Resuelto 8.**

Una pequeña esfera de saúco de 2.5 g. es electrizada y se encuentra suspendida de un hilo de masa despreciable dentro de un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura 27. Cuando  $E = (-5 \hat{i} + 7 \hat{j}) \times 10^5 \text{ N/C}$ , la esfera está en equilibrio y el ángulo es de  $\theta = 47^\circ$ . Determinar:

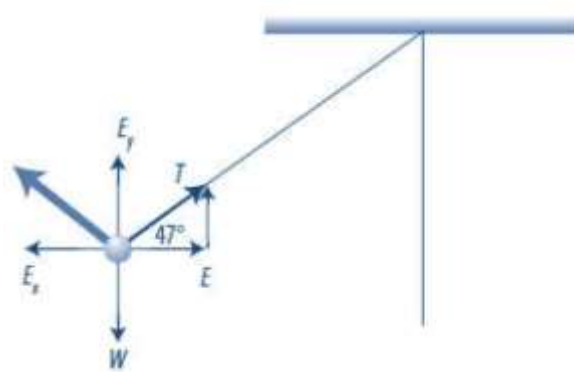


Figura 27 Esfera de saúco electrizada.

- a) La carga en la esfera.
- b) La tensión del hilo.

**Solución:**

Primero, establecemos los datos de referencia:

$$\theta = 47^\circ$$

$$E_x = -5 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_y = 7 \times 10^5 \text{ N/C}$$

- a) Puesto que la bola está en equilibrio, se tiene que la suma de fuerzas es igual a cero:

$$F_R = T + qE + W = 0$$

Ahora, de la definición del peso tenemos que:

$$W = mg$$

Mientras que la definición de campo eléctrico tenemos:

$$F = qE$$

Así pues:

$$\sum F_x = -qE_x + T \cos 47^\circ = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = qE_y + T \sin 47^\circ - mg = 0 \quad (b)$$

Ahora, despejamos la tensión de T de la ecuación (a):

$$T = \frac{qE_x}{\cos 47^\circ}$$

Luego, sustituimos en la ecuación (b):

$$qE_y + \left[ \frac{qE_x}{\cos 47^\circ} \right] \sin 47^\circ - mg = 0$$

$$qE_y + \left[ \frac{qE_x}{\cos 47^\circ} \right] \sin 47^\circ - mg = q \left[ E_y + \frac{E_x}{\cos 47^\circ} \sin 47^\circ \right] - mg = 0$$

$$q = \frac{mg}{\left[ E_y + \frac{E_x \cos 47^\circ}{\cos 47^\circ} \right]} = \frac{(2 \times 10^3 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{\left[ 7 \times 10^5 + \frac{(5 \times 10^5)(0.7313)}{.06819} \right]}$$

$$q = \frac{196 \times 10^{-3} \text{ N}}{7 \times 10^5 + 5036 \times 10^5} = 1.585 \times 10^{-8} \text{ C}$$

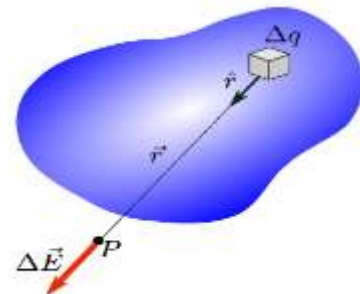
- b) Con base en el resultado del inciso a), usamos este para  $q$  en la ecuación (a), Considerando que el sistema está en equilibrio, entonces la fuerza en el eje  $x$  es cero, por tanto, podemos establecer que la tensión es:

$$T = \frac{F_x + qE_x}{\cos 47^\circ} = \frac{0 + (1.585 \times 10^{-8} \text{ C})(5 \times 10^5 \text{ N/C})}{0.6819} = 0.0116 \text{ N}$$

### ***Distribuciones continuas de carga***

Hasta el momento hemos vivido en el maravilloso mundo de las cargas puntuales (o distribuciones discretas de cargas). Como ya sabemos la carga está siempre cuantificada, donde la cantidad más pequeña de carga es  $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ . El espacio total cubierto por cualquier carga es muy pequeño comparado con la distancia entre dos cargas. Hasta el momento hemos idealizado la situación y hemos supuesto

que la carga puntual ocupa la extensión de un punto (volumen cero). Sin embargo en la realidad los cuerpos cargados ocupan un volumen finito y no pueden ser



**Figura 28** Campo eléctrico en P generado por una carga puntual en una distribución continua de carga.

considerados como un punto.

En una distribución de carga continua, todas las cargas están muy próximas las unas a las otras. Supongamos que tenemos un volumen como en la figura 28 y queremos calcular  $\vec{E}$  en el punto  $P$  exterior. Tomamos un elemento de volumen  $\Delta V$  con carga  $\Delta q$ , entonces el campo en el punto  $P$  debido a esta pequeña carga es:

$$\Delta \vec{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r}$$

donde  $r$  es la distancia desde el elemento de carga  $\Delta q$  al punto  $P$ . Ahora, si nos imaginamos que dividimos el volumen total en muchos “cubitos” de volumen  $\Delta V$ , el campo en  $P$  será aproximadamente igual a la suma de pequeñas contribuciones:

$$\vec{E} \approx k_e \sum \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

para una distribución continua debemos hacer  $\Delta q_i \rightarrow 0$  ( $\Delta q_i \rightarrow dq$ )

$$\vec{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$\boxed{\vec{E} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}} \quad (1.11)$$

### **Densidad de carga.**

En la práctica es conveniente describir la distribución de cargas en función de **densidades de carga**, pues la carga puede estar distribuida en una línea, superficie o volumen.

<b>Densidad volumétrica de carga</b>	$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{Q}{V}$	$\frac{C}{m^3}$
<b>Densidad superficial de carga</b>	$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{Q}{S}$	$\frac{C}{m^2}$
<b>Densidad lineal de carga</b>	$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{Q}{l}$	$\frac{C}{m}$

En el caso de que, por ejemplo,  $\rho$  sea uniforme

$$\rho = \frac{q}{V}$$

donde  $q$  es la carga total y  $V$  el volumen total de la distribución.

La forma analítica de las distribuciones de carga se puede usar para encontrar la carga total. Por ejemplo, puesto que  $dq = \rho dV$ , se integra y se obtiene

$$\boxed{q = \int_V \rho dV}$$

aquí  $\rho$  es variable, así que no puede salir fuera de la integral. Similarmente, para una distribución superficial y una lineal:

$$q = \int_S \sigma dS \quad \text{ó} \quad q = \int_L \lambda dl$$

Así el campo eléctrico puede escribirse, por ejemplo, en función de  $\rho$

$$\vec{E} = k_e \int_{vol} \hat{r} \frac{\rho}{r^2} dv$$

Mediante vectores de posición,  $\hat{r} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  y  $r^2 = |\vec{r} - \vec{r}'|^2$ , entonces la expresión anterior queda:

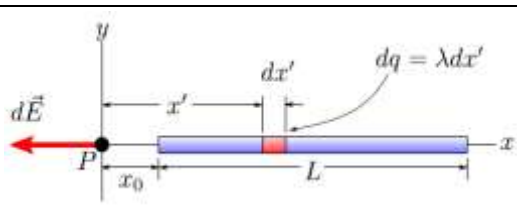
$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int_{vol} \rho(\vec{r}') dv' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Si la carga no tiene distribución uniforme en un volumen, superficie o línea, las cantidades de cargas  $dq$  en un elemento pequeño de volumen, superficie o longitud son

$$dq = \rho dV \quad dq = \sigma dS \quad dq = \lambda dl$$

**Problemas resueltos.**

**Problema resuelto Campo producido por una barra cargada.**



Una barra de longitud  $L$  y densidad lineal positiva de carga  $\lambda$ . Calcular el campo eléctrico en un punto  $P$  sobre el eje  $x$  a una distancia  $x_0$  de uno de los extremos de la barra.

**Solución:**

Visualizamos la situación de acuerdo a la figura. Como  $\lambda$  es positiva, el campo eléctrico apuntará hacia la izquierda. Tomamos un pequeño segmento  $dx'$  de la barra que llevará una carga  $dq$ . El campo eléctrico debido a esta carga infinitesimal en el punto  $P$  es  $d\vec{E}$ . La densidad de carga lineal es uniforme y está dada por  $\lambda = Q/L$ , donde  $Q$  es la carga total (¡pero no es un dato del problema!), por lo tanto el campo es

$$d\vec{E} = -k_e \frac{dq}{x'^2} \hat{i}$$

Recordar que el campo apunta hacia la izquierda (de ahí el signo -). Si reemplazamos  $dq = \lambda dx'$

$$d\vec{E} = -k_e \frac{\lambda dx'}{x'^2} \hat{i}$$

para encontrar  $\vec{E}$  debemos integrar en los límites de la barra:

$$\vec{E} = -k_e \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{\lambda dx'}{x'^2} \hat{i} = -k_e \lambda \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{dx'}{x'^2} \hat{i} = -k_e \lambda \left( -\frac{1}{x} \right)_{x_0}^{x_0+L} \hat{i} = -k_e \lambda \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+L} \right) \hat{i} = -k_e \lambda \frac{L}{x_0(x_0+L)} \hat{i}$$

la magnitud de  $\vec{E}$  es:

$$E = k_e \lambda \frac{L}{x_0(x_0+L)}$$

Notar que si en vez de  $\lambda$  se hubiera dado  $Q$ , entonces escriba aquí la ecuación.

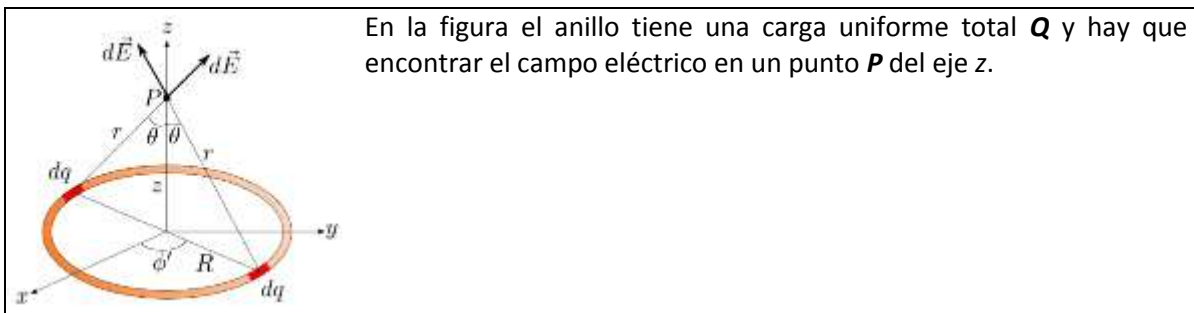
$$E = k_e \frac{Q}{L} \frac{L}{x_0(x_0+L)} = k_e \frac{Q}{x_0(x_0+L)}$$

Si el punto  $P$  está muy alejado del extremo de la barra, entonces  $x' \gg L$  y  $x_0 + L \approx x_0$

$$E \approx k_e \frac{Q}{x_0^2}$$

que no es otra cosa que la magnitud del campo eléctrico de una carga puntual.

### Problema resuelto Anillo cargado uniformemente



**Solución:** Lo primero que hay que preguntarse es: ¿Cuál es la dirección de  $\vec{E}$ ? Por simetría debería apuntar en la dirección positiva del eje  $z$ . En el dibujo hemos elegido un elemento de carga  $dq$  de tal manera que el campo en el punto  $P$  es  $d\vec{E}$ . Pero al otro lado del anillo hay otro elemento de carga que generará un campo eléctrico de igual magnitud en el punto  $P$  de tal manera que el campo total en  $P$  deberá ser la suma de los dos campos. Si analizamos las componentes de estos



campos, veremos que las componentes horizontales (paralelas al plano  $x y$ ) se van a cancelar y solamente las componentes paralelas al eje  $z$  van a sobrevivir. Así podemos decir *a priori* que el campo eléctrico en  $P$  debe apuntar hacia  $+z$ .

$$dE_z = dE \cos \theta = k_e \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k_e \lambda R d\phi'}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{k_e z \lambda R d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde hemos usado el hecho que la longitud de arco  $Rd\phi'$  lleva una carga  $dq = \lambda R d\phi'$  y la distancia del elemento de carga al punto  $P$  es  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ . El campo entonces depende de una sola variable de integración  $0 \leq \phi' \leq 2\pi$

$$E_z = \int_0^{2\pi} \frac{k_e z \lambda R d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k_e z \lambda R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{k_e z \lambda R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi$$

La expresión anterior no es totalmente correcta, pues la densidad  $\lambda$  no se conoce y se usó solamente como una variable auxiliar. Pero sabemos que  $\lambda = Q/2\pi R$ , así que

$$E_z = \frac{k_e z \lambda R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi = \frac{k_e z \frac{Q}{2\pi R} R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi = \frac{k_e Q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Este problema se puede resolver más fácilmente a partir de la expresión inicial

$$dE_z = dE \cos \theta = k_e \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k_e dq}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{k_e dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde hemos evitado usar la variable  $\phi'$ . Si tomamos la integral indefinida

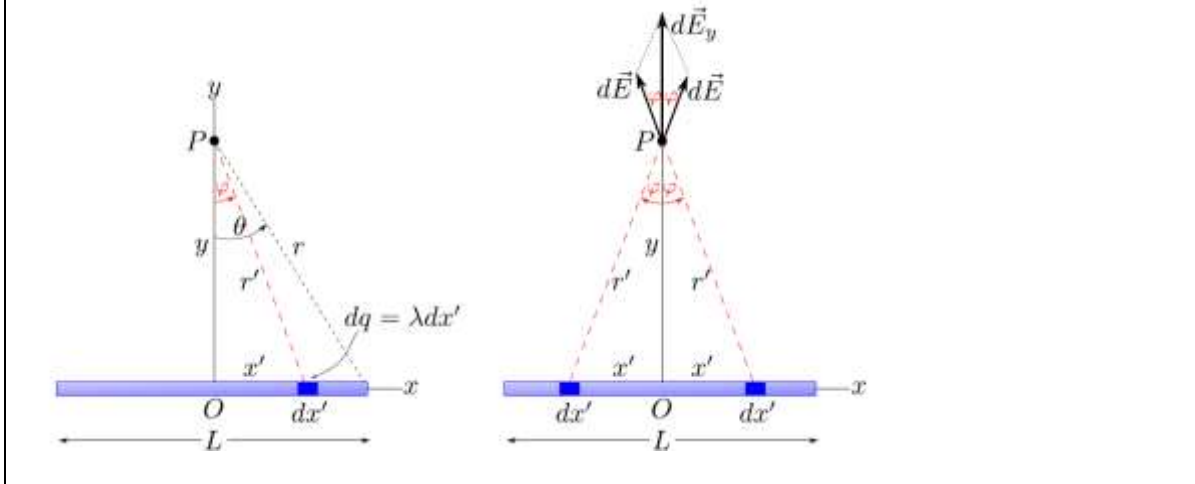
$$E_z = \int \frac{k_e dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k_e}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dq = \frac{k_e Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Este es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Notar que el campo eléctrico es cero en el centro ( $z = 0$ ). Si  $z$  está muy alejado del centro del anillo, entonces  $R^2 + z^2 \approx z^2$  y  $E_z \approx k_e Q/z^2$  y el anillo se comporta como una carga puntual.

**Problema resuelto Alambres finitos e infinitos.**

Una alambre no conductor de longitud  $L$ , densidad de carga uniforme  $\lambda$  y carga total  $Q$  se extiende a lo largo del eje  $x$  (ver figura). Calcular el campo eléctrico en un punto  $P$ , localizado a una distancia  $y$  del centro del alambre.



**Solución:** Según la figura de la izquierda, la contribución al campo eléctrico en  $P$  debido al elemento de línea  $dx'$  que lleva una carga  $dq = \lambda dx'$  es

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} = \frac{k_e \lambda dx'}{x'^2 + y^2}$$

Ahora debemos usar **argumentos de simetría** para resolver este problema más fácilmente. De acuerdo a la figura de la derecha la componente horizontal del campo en  $P$  debe anularse porque dado un elemento de carga  $dq$  en  $x' > 0$ , existe otro  $dq$  en  $x' < 0$ . Por lo tanto el campo resultante debe apuntar en la dirección de  $y$ . La magnitud de  $d\vec{E}_y$  será

$$dE_y = dE \cos \varphi = \frac{k_e \lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{k_e \lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

que queda expresada en términos de la única variable  $x'$ . Integramos:

$$E_y = k_e \lambda y \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = 2k_e \lambda y \int_0^{L/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}}$$

Esta no es una integral fácil; la podemos buscar en una tabla de integrales, o hacer el cambio de variables:

$$x' = y \tan \varphi \Rightarrow dx' = y \sec^2 \varphi d\varphi$$

y al sustituir:

$$E_y = 2k_e \lambda y \frac{\sin \theta}{y^2} = 2k_e \lambda \frac{\sin \theta}{y} = \boxed{2k_e \frac{\lambda}{y} \frac{L/2}{\sqrt{y^2 + (L/2)^2}}} \quad \text{alambre finito}$$

Partiendo de este resultado podemos calcular el campo debido a un alambre infinito. Solo debemos hacer  $\theta \rightarrow \pi$  ó  $L \rightarrow \infty$

$$\boxed{E_y = \frac{2k_e \lambda}{y}} \quad \text{alambre infinito}$$

Podemos hacer una **variación de este problema** y resolver mediante vectores de posición, usando

$$d\vec{E}(\vec{r}) = k_e dq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Con  $\vec{r} = y\hat{j}$  y  $\vec{r}' = x\hat{i}$  de tal forma que  $\vec{r} - \vec{r}' = y\hat{j} - x\hat{i}$  y  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$d\vec{E}(\vec{r}) = k_e dq \frac{y\hat{j} - x\hat{i}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Aquí vamos a integrar entre  $-\infty$  y  $+\infty$  para obtener el resultado del alambre infinito. Poniendo  $dq = \lambda dx$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{y\hat{j} - x\hat{i}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k_e \lambda \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\hat{j} dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx \hat{i}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}}_0 \right]$$

La integral del lado derecho es cero, pues el argumento es una función impar. Así que el campo es

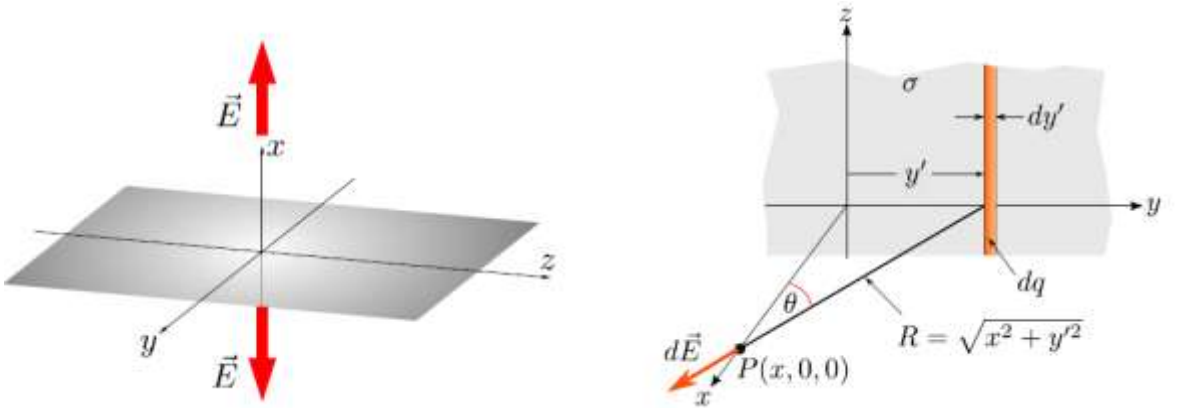
$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \lambda y \hat{j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 2k_e \lambda y \hat{j} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{2k_e \lambda}{y} \hat{j}}$$

La integral anterior es la misma que resolvimos anteriormente, así que no es necesario repetirla.

Así que nuevamente hemos obtenido el campo eléctrico. La diferencia es que con este método no tuvimos la necesidad de recurrir a argumentos de simetría y la componente  $x$  se anuló naturalmente.

**Problema resuelto Plano infinito.**

Imaginemos un plano infinito que coincide con el plano  $(y z)$  y que tiene una densidad superficial uniforme de carga  $\sigma$  y queremos calcular el campo en un punto  $P(x, 0, 0)$ , es decir a una distancia  $x$  del plano (el plano coincide con la hoja).



**Solución:** En la figura de la izquierda las líneas de campo son perpendiculares al plano ( $E_y = E_z = 0$ ) y además la magnitud del campo será independiente de las coordenadas  $(y, z)$ . Es por eso que hemos elegido en forma arbitraria, en la figura de la derecha, el punto  $P$  a lo largo del eje  $x$ . Elegimos convenientemente una cinta de ancho  $dy'$  y largo infinito que llevará una carga  $dq$ . Esta cinta está a una distancia  $R = \sqrt{x^2 + y'^2}$  de  $P$ . Para todos los efectos, esta cinta es un “alambre” infinito con carga  $dq$ . En el [ejemplo anterior](#) vimos que el campo eléctrico a una distancia  $r$  de un alambre infinito con densidad de carga  $\lambda$  era:

$$E_{al} = \frac{2k_e \lambda}{r}$$

aplicando esta fórmula a nuestro caso, la magnitud del campo eléctrico debido a la cinta (alambre) infinita es

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{2k_e \lambda'}{R} \cos \theta$$

¿Por qué el  $\cos \theta$ ? Porque el  $\vec{E}$  total tiene solo componente  $x$ .

Debemos hacer notar que  $\lambda'$  sería la densidad lineal de carga de la cinta, pero lamentablemente  $\lambda'$  no se conoce. Podemos solucionar esto recordando que  $\sigma = Q'/A$  y  $\lambda' = Q'/L$ .  $A$  es el área de un rectángulo de ancho  $dy'$  y largo  $L$  ( $A = Ldy'$ ). Por lo tanto podemos deducir que  $\lambda' = \sigma dy'$

$$dE_x = \frac{2k_e \sigma dy'}{R} \cos \theta = \frac{2k_e \sigma dy'}{\sqrt{x^2 + y'^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}} = 2k_e \sigma x \frac{dy'}{x^2 + y'^2}$$

Ese es el campo de una cinta. Si sumamos el efecto de todas cintas (son infinitas), obtenemos

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} 2k_e \sigma x \frac{dy'}{x^2 + y'^2} = 2k_e \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdy'}{x^2 + y'^2}$$

esta integral es "conocida":  $\int \frac{x dy'}{x^2 + y'^2} = \tan^{-1}(y'/x)$ . Finalmente

$$E_x = 2k_e \sigma \left[ \arctan\left(\frac{y'}{x}\right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 2k_e \sigma \left( \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2k_e \sigma \pi$$

Sustituyendo  $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  obtenemos la conocida fórmula

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

que es independiente de la distancia  $x$  al plano.

**Problema resuelto**

Una distribución continua de carga es definida como  $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}$  de distribuye en la región  $x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  y  $0 \leq z \leq 1$  y es cero en el resto del espacio. Encontrar el campo eléctrico en el origen.

**Solución:** La región es claramente un cubo y además la densidad de carga no es uniforme. La expresión general de  $\vec{E}$  para el campo eléctrico en  $P(x, y, z)$  cuyo radio vector es  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int_{vol} \rho(\vec{r}') dV' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

En nuestro caso  $\vec{r} = 0$  (el origen), además  $\vec{r} - \vec{r}' = -(x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k})$ ,  $|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}$  y  $\rho(\vec{r}') = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{5/2}$  por lo tanto

$$\vec{E}(0) = k_e \int_{vol} (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{5/2} dx' dy' dz' \frac{-(x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k})}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

donde  $dV' = dx'dy'dz'$  es el elemento de volumen. Ahora ponemos los límites de integración y además, por comodidad nos olvidamos de los *prima*

$$\begin{aligned}\vec{E}(0) &= -k_e \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} dx dy dz \frac{(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -k_e \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) dx dy dz\end{aligned}$$

Por la simetría de la expresión anterior, cada una de las componentes de  $\vec{E}(0)$  tendrá la misma magnitud. Así calculamos  $E_x$

$$\begin{aligned}E_x &= -k_e \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) x dx dy dz \\ &= -k_e \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^3 + xy^2 + xz^2) dx dy dz \\ &= -k_e \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} y^2 + \frac{x^2}{2} z^2 \right]_0^1 dy dz = -k_e \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2 \right) dy dz \\ &= -k_e \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{2} z^2 y \right]_0^1 dz = -k_e \int_0^1 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} z^2 \right) dz \\ &= -k_e \left[ \frac{1}{4} z + \frac{1}{6} z + \frac{1}{6} z^3 \right]_0^1 = -k_e \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) \\ &= -9 \times 10^9 \times \frac{7}{12}\end{aligned}$$

por lo tanto  $E_x = E_y = E_z = -5.25 \times 10^9$  N/C y

$$\boxed{\vec{E}(0) = -5.25 \times 10^9 (-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})} \text{ [N/C]}$$

La magnitud de  $\vec{E}$  es  $\sqrt{(-5.25)^2 + (-5.25)^2 + (-5.25)^2} \times 10^9 = 9.1 \times 10^9$  N/C y  $\vec{E}$  estará dirigido en la dirección  $(-\hat{i}, -\hat{j}, -\hat{k})$ .

### ***Carga eléctrica en movimiento dentro de campo eléctrico uniforme***

Un campo eléctrico uniforme puede ser generado por dos placas paralelas electrizadas estáticamente, una positiva y otra negativamente.

Cuando un electrón o partícula electrizada entra en una región de campo eléctrico adquiere una aceleración, lo que modifica su trayectoria, presentándose tres condiciones particulares:

1. Si la partícula incide perpendicularmente en el campo eléctrico y cercana a la placa negativa, esta describe un movimiento semiparabólico.
2. Si electrón gana energía y se libera de la placa negativa al ser acelerado, este describe un movimiento rectilíneo uniforme mientras llega a la placa positiva.

3. Cuando el electrón se libera de la placa negativa con cierta inclinación respecto de respecto del campo eléctrico, entonces describe una trayectoria parabólica mientras llega a la placa positiva.

La aceleración del electrón o de una partícula electrizada dentro de un campo eléctrico se logra igualando dos fuerzas que experimenta, una debida al campo eléctrico y otra debida al fenómeno dinámico determinado por la segunda ley de Newton.

Así, del campo eléctrico determinado por la ecuación:  $E = \frac{F}{q}$

Se despeja la fuerza **F**:  $F = Eq$

De la dinámica también se manifiesta otra fuerza, la cual se determina en función de la masa y la aceleración de la partícula, con base de la segunda ley de Newton:

$$F = ma$$

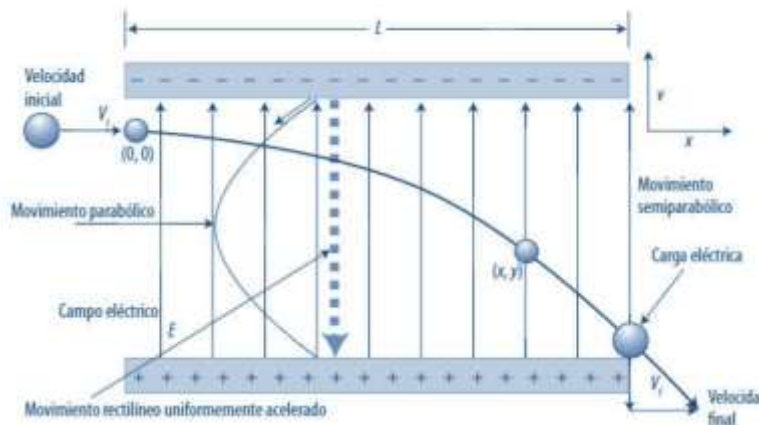
Ahora, al relacionar estas dos ecuaciones se obtiene:

$$ma = qE$$

$$a = \frac{q}{m} E$$

Como el campo eléctrico (**E**) es uniforme, la aceleración de **q** es constante y la trayectoria descrita por la carga en su movimiento es una parábola.

En la figura 29 se representan las trayectorias descritas por un electrón dentro del campo eléctrico uniforme, en función del sentido de su velocidad de entrada respecto al campo eléctrico.



**Figura 29** Movimiento de un electrón dentro de un campo eléctrico uniforme.

Cuando la carga eléctrica de un electrón es liberada desde la placa negativa, por efecto del campo eléctrico, tiende a alcanzar la placa positiva; entonces, la aceleración de la carga eléctrica únicamente aumenta o disminuye por efecto del campo eléctrico, lo que genera también un incremento o decremento de la velocidad, según sea el caso. Bajo estas condiciones, la partícula



describe un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA), como se representa en la figura 30.

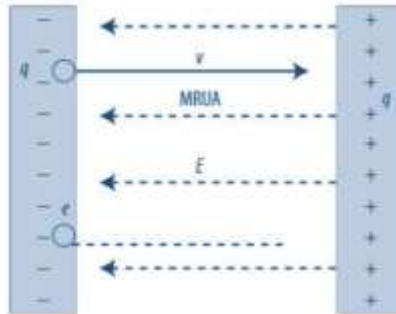


Figura 30 Movimiento del electrón paralelo al campo eléctrico.

Una tercera condición es cuando el electrón entra a la región de campo eléctrico formado cierto ángulo de inclinación con respecto al campo, donde este tendrá dos componentes, una vertical y otra horizontal (véase figura 31)

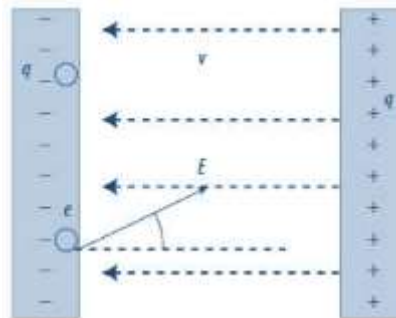


Figura 31 Liberación de un electrón con cierta inclinación dentro de un campo eléctrico.

### Problemas resueltos.

#### Problema resuelto 1

Un electrón incide perpendicularmente dentro de una región de campo eléctrico de  $820 \text{ N/C}$ , originado por dos placas de  $5 \text{ m}$  de longitud cada una, polarizadas positiva y negativamente, respectivamente, las cuales se encuentran dentro de una campana al vacío, separadas entre sí  $3 \text{ m}$ . Si el electrón sale de las placas, determinar:

- La aceleración del electrón al incidir en el campo.
- El tiempo que tarda el electrón al chocar con la placa positiva.
- La velocidad inicial.
- La velocidad con que choca con la placa positiva.

Solución:

- a) Puesto que se trata de un movimiento parabólico, pero que es lanzado desde cierta altura, utilizamos fórmulas del movimiento en caída libre, puesto que, como habremos de recordar, cuando baja el cuerpo en movimiento en tiro parabólico se combinan los movimientos de caída libre con un movimiento rectilíneo uniforme horizontal. Por tanto, determinamos la aceleración con la ecuación:

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(820 \text{ N/C})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 1.44 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$$

Este problema indica que el electrón parte únicamente con velocidad horizontal es decir  $V_0 = V_x$ . Esto provoca un movimiento rectilíneo uniforme horizontal, mientras que la velocidad vertical inicia igual a cero; es decir, que  $V_y = 0$ , puesto que verticalmente parte del reposo. Sin embargo, por efecto de la aceleración y el campo eléctrico, la velocidad vertical aumenta, comportándose como un movimiento en caída libre. De esta manera, la combinación de los dos movimientos describe una trayectoria parabólica (véase la figura 32)

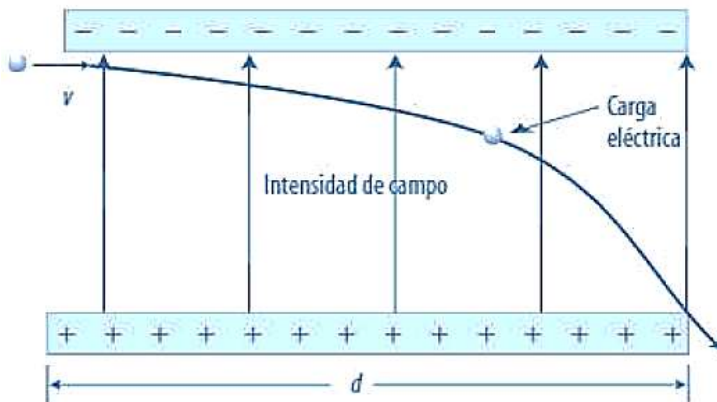


Figura 32 Partícula incide perpendicular en el campo eléctrico y cerca de placa negativa.

- b) El tiempo que tarda el electrón en caer y chocar con la placa positiva, se determina mediante una ecuación del movimiento de caída libre, ya que la velocidad vertical aumenta por causa de la aceleración, provocando que el proyectil llegue a la placa positiva. Así tenemos:

$$h = V_{0y}t + \frac{at^2}{2}$$

Puesto que  $V_{0y} = 0$ , la ecuación anterior se reduce:

$$h = \frac{at^2}{2}$$

Luego, despejamos el tiempo,  $t$ , y obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Enseguida, sustituimos valores y obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{(2)(3 \text{ m})}{1.44 \times 10^{14} \text{ m/s}^2}} = 2.0411 \times 10^{-7} \text{ s}$$

- c) La velocidad inicial se determina considerando que la velocidad  $V_{0x}$  es constante durante todo el movimiento; por tanto, podemos considerar que se trata de un movimiento rectilíneo uniforme

(Véase la figura 33)

$$V_x = \frac{x}{t}$$

$$V_x = \frac{x}{t} = \frac{5 \text{ m}}{2.0411 \times 10^{-7} \text{ s}} = 2.44 \times 10^7 \text{ m/s}$$

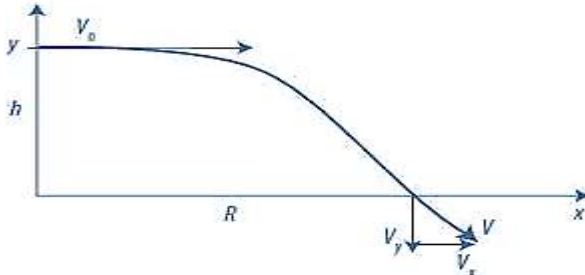


Figura 33 Grafica de movimiento rectilíneo uniforme.

d) Para calcular la velocidad de choque con la placa positiva, debemos considerar que la velocidad del electrón tiene dos componentes, una velocidad horizontal  $V_x$ , la cual permanece constante, y una velocidad vertical  $V_y$ , la cual inicialmente es cero, pero que adquirió un valor máximo por efecto del campo eléctrico. Por tanto, la velocidad final de choque,  $V_f$ , se determina mediante la suma vectorial de las componentes de velocidades, aplicando la siguiente ecuación:

$$V_F = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

En este caso, determinamos la componente  $V_y$  mediante la ecuación de caída libre y considerando que inicialmente la velocidad vertical es cero:

$$V_y = gt = at$$

Luego, sustituimos los valores que se obtienen:

$$V_y = (1.44 \times 10^{14} \text{ m/s}^2)(2.0411 \times 10^{-7} \text{ s}) = 2.93 \times 10^7 \text{ m/s}$$

De esta manera, considerando los valores de las dos velocidades, obtenemos la velocidad final:

$$V_F = \sqrt{(2.44 \times 10^7 \text{ m/s})^2 + (2.93 \times 10^7 \text{ m/s})^2} = 3.81 \times 10^7 \text{ m/s}$$

### Problema resuelto 2

Supóngase que se tiene un par de placas conductoras electrizadas estáticamente, las cuales están separadas 8 cm, entre sí, que se encuentran colocadas en una campana al vacío. Por otra parte, la intensidad de campo eléctrico entre placas es de 4500 N/C y desde la superficie de la placa negativa se libera un electrón (véase figura 34). Determinar:

- El tiempo que tarda el electrón en alcanzar la placa positiva.
- La velocidad del electrón al chocar con la placa positiva.

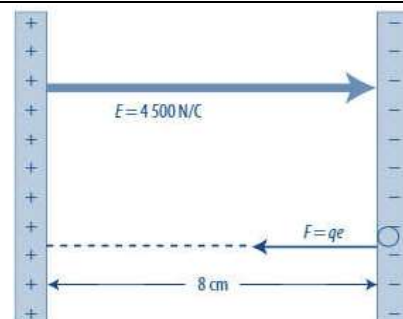


Figura 34 Placas electrizadas.

**Solución:**

Primero, anotamos los datos de referencia:

$$E = 4\,500 \text{ N/C}$$

$$d = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$$

$$q_e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Luego, escribimos la fórmula correspondiente:

$$E = \frac{F}{q}$$

Ahora, sustituimos los valores y tenemos:

$$F = Eq = (4\,500 \text{ N/C})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) = 7.2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

De la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{7.2 \times 10^{-16} \text{ N}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 7.9034 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$$

Del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, tenemos que:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Debido a que parte del reposo, la velocidad inicial es cero:

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(0.08 \text{ m})}{7.90 \times 10^{14} \text{ m/s}^2}} = 1.42 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Del movimiento rectilíneo con aceleración constante, tenemos:

$$V = v_0 + at$$

Debido a que parte del reposo, la velocidad inicial es cero:

$$V = at = (790.34 \times 10^{12} \text{ m/s}^2)(1.42 \times 10^{-8} \text{ s}) = 11.24 \times 10^6 \text{ m/s}$$

## 1.5 La Ley de Gauss.

Esta sección está dedicada al estudio de los fenómenos físico que involucran conceptos de flujo eléctrico y ley de Gauss. Estos conceptos son muy importantes en entendimiento de fenómenos relacionados con el electromagnetismo, puesto que involucran directamente en su aplicabilidad la ley de Coulomb. Para tener claridad sobre los conceptos, es relevante conocer y tener manejo operativo en tomo a los conceptos matemáticos de integrales de entorno aplicados a superficies abiertas y cerradas.

Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), matemático alemán conocido por sus diversas contribuciones al campo de la física, en especial por sus estudios de electromagnetismo y de los fenómenos físicos en el campo de la electricidad. Realizo destacadas investigaciones sobre los fenómenos eléctricos estáticos. Sus estudios estuvieron relacionados con la **intensidad de campo eléctrico, la carga eléctrica que lo genera y el número de líneas de fuerza**. Como resultados de sus estudios, estableció una ecuación que relaciona dichas variables y elaboró un enunciado que en la actualidad se llama ley de Gauss, la cual establece:

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es numéricamente igual a la carga eléctrica total de un cuerpo electrizado dentro de la superficie.

La ley de Gauss constituye un método alternativo para calcular el campo eléctrico producido por distribuciones de carga de elevada simetría.

La ley de Gauss dice que el flujo eléctrico neto que atraviesa una superficie hipotética gaussiana cerrada es igual a la carga neta dividida por la permitividad eléctrica del vacío  $\epsilon_0$ .

$$\varphi_e = \oint \vec{E} * d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

donde  $q_{in}$  representa la carga neta dentro de la superficie y  $\vec{E}$  representa el campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie cerrada. El símbolo  $\oint$  representa una integral sobre una superficie cerrada. El campo eléctrico situado a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$  se determina usando el Teorema de Gauss de la siguiente manera:

$$\varphi_e = \oint \vec{E} * d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

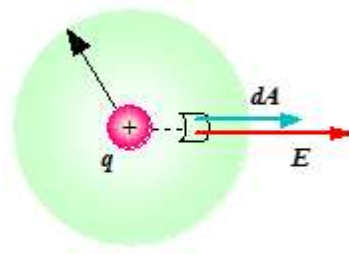


Figura 35 Superficie cerrada hipotética Gaussiana.

### Líneas de campo eléctrico

Para representar la naturaleza vectorial del campo eléctrico, es conveniente tratar de visualizarlo mediante **líneas de fuerza** de campo eléctrico. En vez de dibujar una infinidad de flechas de vectores en el espacio que rodea a la carga, es quizás más útil dibujar un patrón de algunas líneas que parten de la carga y se extienden hasta el infinito. Estas líneas, también llamadas **líneas de campo eléctrico**, apuntan en la dirección que aceleraría una carga de prueba positiva colocada en esa línea. (ver figura 36)



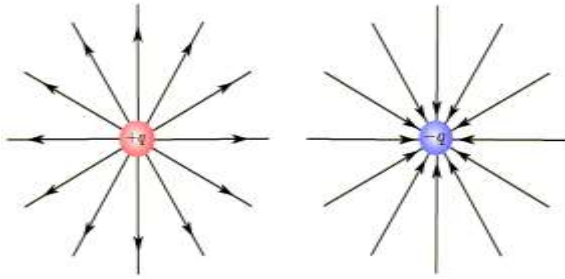


Figura 37 Líneas de fuerza para los dos tipos de cargas puntuales.

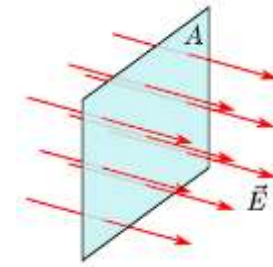


Figura 36 Líneas de campo eléctrico uniforme atravesando en forma perpendicular a una superficie de área A.

### Flujo eléctrico.

Ya hemos visto que los campos eléctricos pueden ser representados geoméricamente mediante las **líneas de campo eléctrico**. Ya vimos que las líneas indican la dirección del campo eléctrico y las densidad de las líneas indican la magnitud del campo.

Vamos a introducir una nueva cantidad matemática llamada **flujo de campo eléctrico**, la cual medirá el número de líneas que pasan a través de una superficie.

Para ilustrar el concepto, consideremos un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  y que es perpendicular a una superficie de área  $A$  tal como muestra la figura 37. Queremos definir una cantidad que de cuenta del número de líneas de campo que atraviesan esa superficie. Usamos la letra  $\phi$  para definir el flujo eléctrico (un escalar)

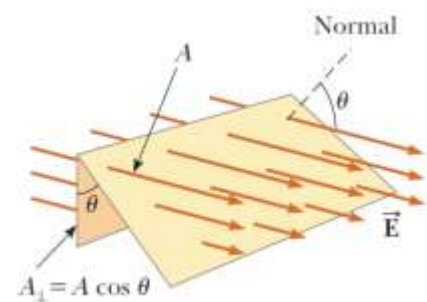


Figura 38 Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme que penetra en un área  $A$  la cual forma un ángulo  $\theta$  en relación con el campo. Ya que el número de líneas que atraviesan el área  $A_{\perp}$  es el mismo número que pasa a través de  $A$ , el flujo que pasa a través de  $A_{\perp}$  es igual al flujo que pasa a través de  $A$  y se conoce por  $\Phi_E = EA \cos \theta$ .

$$\Phi_E \equiv EA \quad (1.12)$$

Recuerde que el número de líneas por unidad de área (la *densidad de líneas*) es proporcional a la magnitud del campo eléctrico. Por lo tanto, el total de líneas que penetran en la superficie es proporcional al producto  $EA$ . A este producto de la magnitud del campo eléctrico  $E$  y al área superficial  $A$ , perpendicular al campo, se le conoce como **flujo eléctrico**  $\Phi_E$  (phi mayúscula).

Con base en las unidades del SI correspondientes a  $E$  y  $A$ ,  $E$  se expresa en newton por metros al cuadrado entre coulomb ( $N \cdot m^2/C$ ). **El flujo eléctrico es proporcional al número de las líneas de campo eléctrico que penetran en una superficie.**

Si la superficie en cuestión no es perpendicular al campo, el flujo que pasa a través de él debe ser menor que el resultante si se utiliza la ecuación (1.12). Lo anterior es comprensible si toma en

consideración la figura 38, donde la normal en relación con la superficie  $A$  forma un ángulo  $u$  con el campo eléctrico uniforme. Observe que el número de líneas que atraviesan el área  $A$  es igual al número que atraviesa el área  $A_{\perp}$ , la cual es una proyección del área  $A$  a un plano con orientación perpendicular al campo. Observe en la figura 38 que ambas áreas están relacionadas por la fórmula  $A_{\perp} = A \cos u$ . Dado que el flujo que atraviesa  $A$  es igual al flujo que atraviesa  $A_{\perp}$ , entonces el flujo que pasa a través de  $A$  es

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \theta \quad (1.13)$$

A partir de este resultado, se observa que el flujo que atraviesa una superficie de área  $A$  fija tiene un valor máximo  $EA$  cuando la superficie es perpendicular al campo (cuando la normal de la superficie es paralela al campo,  $u = 0^\circ$  en la figura 38; el flujo es cero si la superficie es paralela al campo (cuando la normal de la superficie es perpendicular al campo,  $u = 90^\circ$ ).

En la explicación anterior se ha supuesto un campo eléctrico uniforme. En situaciones más generales, el campo eléctrico varía a lo largo de una superficie. Por lo tanto, la definición de flujo conocida en la ecuación 1.13 tiene significado sólo para un elemento de área pequeño sobre el cual el campo es casi constante. Considere una superficie dividida en un gran número de elementos pequeños, cada uno de área  $\Delta A$ . Es conveniente definir un vector  $\vec{\Delta A}$ , cuya magnitud representa el área del elemento  $i$ -ésimo sobre la superficie y cuya dirección está definida como *perpendicular* al elemento de superficie, como se muestra en la figura 39. El campo eléctrico  $\vec{E}$  en la ubicación de este elemento forma un ángulo  $u$  con el vector  $\vec{\Delta A}$ . El flujo eléctrico  $\Delta\Phi_E$  a través de este elemento es

$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos \theta_i = \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta A}_i$$

donde se utiliza la definición de producto escalar de dos vectores ( $A \cdot B = AB \cos u$ ). Al sumar las contribuciones de todos los elementos, obtiene el flujo total a través de la superficie.

$$\Phi_E \approx \sum \vec{E}_i \cdot \vec{\Delta A}_i$$

Si supone que el área de cada elemento se acerca a cero, en tal caso el número de elementos se acercaría al infinito y la suma se reemplaza por una integral. Debido a eso, la definición general del flujo eléctrico es

$$\Phi_E \equiv \int_{\text{superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (1.14)$$

La ecuación (1.14) es una *integral de superficie*, lo que significa que debe ser evaluada sobre la superficie en cuestión. En general, el valor de  $\Phi_E$  depende tanto del patrón de campo como de la superficie.

A menudo interesa la evaluación del flujo que pasa a través de una *superficie cerrada*, misma que se define como aquella que divide el espacio en una región exterior y una interior, de manera que



no es posible pasar de una región a la otra sin atravesarla. Por ejemplo, la superficie de una esfera tiene una superficie cerrada.

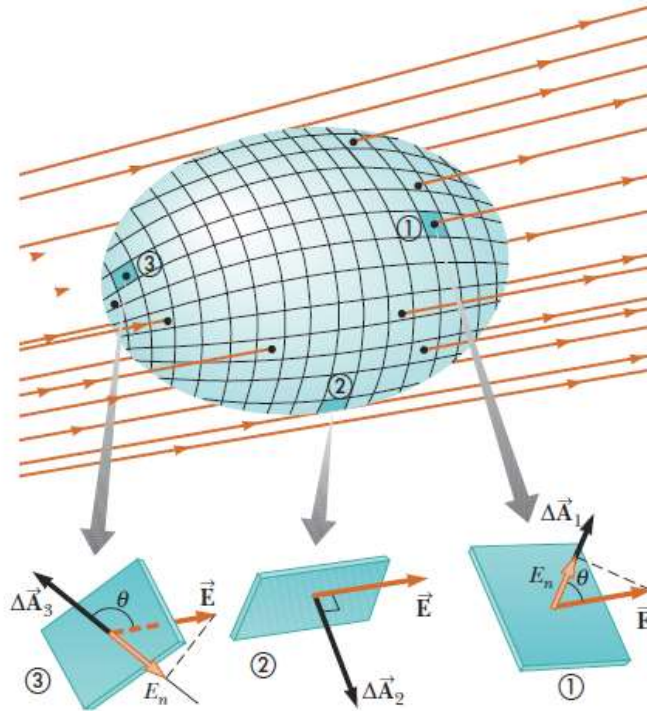


Figura 39 Superficie cerrada dentro de un campo eléctrico. Los vectores de área son, por convención, normales a la superficie y apuntan hacia afuera. El flujo a través de un elemento de área puede ser positivo (elemento ①), cero (elemento ②) o negativo (elemento ③)

En la superficie cerrada de la figura 39 los vectores  $\Delta\vec{A}$ , apuntan en direcciones diferentes para diferentes elementos de superficies, pero en cada uno de ellos estos vectores son normales a la superficie, y, por convención, siempre apuntan hacia afuera. En el elemento identificado como ①, las líneas de campo cruzan la superficie del lado interno al externo y  $u < 90^\circ$ ; por lo tanto, el flujo  $\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_1$  a través de este elemento es positivo. Por lo que se refiere al elemento ②, las líneas de campo rozan la superficie (perpendicular al vector  $\Delta\vec{A}_2$ ); por lo tanto  $u = 90^\circ$  y el flujo es igual a cero. Para elementos como el elemento ③, donde las líneas de campo atraviesan la superficie del exterior al interior,  $180^\circ > u > 90^\circ$  y el flujo es negativo porque el  $\cos u$  también es negativo. El flujo *neto* a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que salen de la superficie, donde número neto significa *la cantidad de líneas que salen de la superficie menos la cantidad de líneas que entran*. Si salen más líneas de las que entran, el flujo neto es positivo. Si entran más líneas de las que salen, el flujo neto es negativo. Se utiliza el símbolo  $\oint$  para representar una integral sobre una superficie cerrada, puede decir que el flujo neto  $\Phi_E$  a través de una superficie cerrada es de la forma

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

donde  $E_n$  representa el componente del campo eléctrico normal a la superficie.

**Flujo de un campo eléctrico no uniforme**

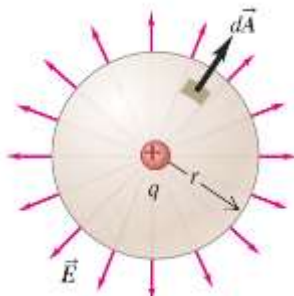
¿Qué pasa si el campo eléctrico no es uniforme, sino que varía de un punto a otro del área A? O, ¿qué ocurre si A es parte de una superficie curva? Aquí se divide A en muchos elementos pequeños dA, cada uno de los cuales tiene un vector unitario  $\hat{n}$  perpendicular a él, y un vector de área  $d\vec{A} = \hat{n} dA$ . El flujo eléctrico se calcula a través de cada elemento y los resultados se integran para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E \cos \phi \, dA = \int E_{\perp} \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{(definición general del flujo eléctrico)} \quad (1.15)$$

Esta integral se llama **integral de superficie** de la componente  $E_{\perp}$  en el área, o integral de superficie de  $\vec{E} * d\vec{A}$ . Las diversas formas de la integral expresan el mismo concepto en términos diferentes. En problemas específicos, una forma resulta en ocasiones más conveniente que otra. El ejemplo siguiente al final de esta sección ilustra el uso de la ecuación (1.15).

En la ecuación (1.15) el flujo eléctrico  $\int E_{\perp} \, dA$  es igual al valor *medio* de la componente perpendicular del campo eléctrico, multiplicado por el área de la superficie

**Ejemplo 1 de flujo eléctrico a través de una esfera.**



Una carga puntual positiva  $q = 3.0 \mu\text{C}$  está rodeada por una esfera centrada en la carga y cuyo radio mide 0.20 m (figura 40). Determine el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga.

**Figura 40 Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.**

**Solución:**

**IDENTIFICAR:** En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme, por lo que se debe usar la definición general de flujo eléctrico.

**PLANTEAR:** Se usa la ecuación (1.15) para calcular el flujo eléctrico (la variable que se busca). Como la esfera está centrada en la carga puntual, en cualquier punto sobre la superficie de la esfera,  $\vec{E}$  está dirigido hacia el exterior en forma perpendicular a la superficie. La dirección positiva tanto para  $\hat{n}$  como para  $E_{\perp}$  es hacia el exterior, por lo que  $E_{\perp} = E$  y el flujo a través del elemento de superficie dA es  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \, dA$ . Esto simplifica en gran medida la integral en la ecuación (1.15).

**EJECUTAR:** En cualquier punto de la esfera, la magnitud de  $\vec{E}$  es

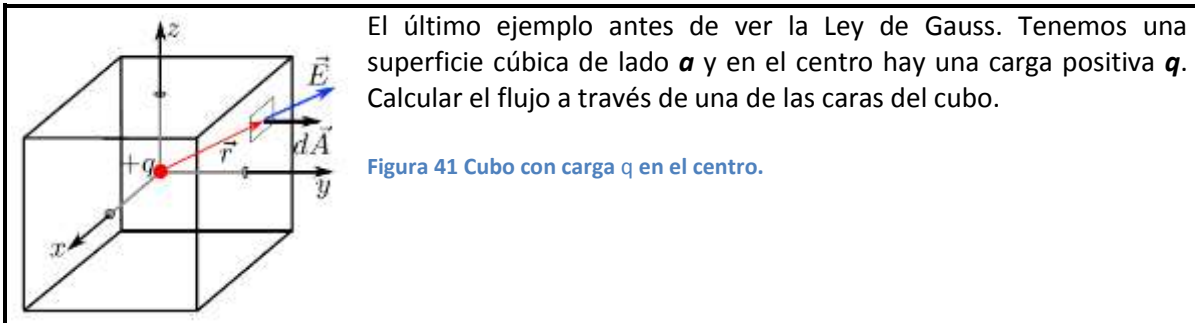
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{3.0 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.20)^2} = 6.75 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Puesto que  $E$  es igual en todos los puntos, se puede sacar de la integral  $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$  de la ecuación (1.15); lo que resta es la integral  $\int dA$ , que es el área total  $A = 4\pi r^2$  de la superficie esférica. Así, el flujo total que sale de la esfera es

$$\Phi_E = EA = (6.75 \times 10^5 \text{ N/C})(4\pi)(0.20 \text{ m})^2 = 3.4 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Que el flujo  $\vec{E}$ , es independiente del tamaño de la superficie; abatiéndose el mismo resultado para una superficie esférica. En realidad, el flujo a través de *cualquier* superficie que encierre una sola carga puntual es independiente de la forma o el tamaño de la superficie, como se ve.

**Ejemplo 2 de flujo eléctrico a través de una esfera.**



**Solución:** de acuerdo a la figura 41 vamos a calcular el flujo a través de la cara derecha. El origen de coordenadas se encuentra en el centro del cubo y el cubo se extiende entre  $-a/2$  y  $a/2$  en las tres direcciones. El vector  $\vec{r}$  va desde el origen al elemento de área  $d\mathbf{A}$ . El flujo es:

$$\Phi = \int_{\text{cara}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Puesto que el cubo tiene lado  $a$  y la carga está en el centro, cualquier punto de la cara derecha tiene coordenadas  $(x, a/2, z)$ . Por otro lado el campo eléctrico en el elemento de área  $d\mathbf{A}$  debido a la carga puntual es  $\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$ . Donde  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} + z\hat{k}}{r}$  y  $r = \sqrt{x^2 + z^2 + (a/2)^2}$ .

El vector  $d\vec{A}$  es perpendicular a la cara y se puede escribir como  $d\vec{A} = dA\hat{j} = dx dz \hat{j}$ . Por lo tanto

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{k_e q}{r^2} \left( \frac{x\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} + z\hat{k}}{r} \right) \cdot dA\hat{j} = k_e q \frac{a}{2} \frac{dA}{r^3} = k_e q \frac{a}{2} \frac{dx dz}{2(x^2 + z^2 + (a/2)^2)^{3/2}}$$

El flujo resulta de calcular la doble integral:

$$\Phi = k_e q \frac{a}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx dz}{(x^2 + z^2 + a^2/4)^{3/2}} = k_e q \frac{a}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left| \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{(x^2 + z^2 + a^2/4)^{3/2}} \right| dz$$

podemos encontrar la integral entre paréntesis en una tabla:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{(x^2 + z^2 + a^2/4)^{3/2}} = \frac{4a}{(a^2 + 4z^2)\sqrt{a^2/2 + z^2}}$$

al sustituir calculamos otra integral más difícil

$$\Phi = k_e q \frac{a}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{4a}{(a^2 + 4z^2)\sqrt{a^2/2 + z^2}} dz = k_e q \frac{a}{2} \frac{4\pi}{3a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{a}{2} \frac{4\pi}{3a} = \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}$$

El flujo resultó ser  $\frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0}$ . Si ahora queremos calcular el flujo a través de las 6 caras del cubo obtenemos  $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Este resultado es el mismo que para una carga encerrada en una esfera (ver ejemplo anterior). Esto nos hace sospechar que tal vez el resultado sea independiente de la superficie elegida. En efecto, esta es una ley llamada [Ley de Gauss](#)

### Ley de Gauss

La **ley de Gauss** es una alternativa a la ley de Coulomb. Aunque equivale por completo a la ley de Coulomb, la ley de Gauss ofrece una forma distinta de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. La formuló Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Muchas áreas de las matemáticas llevan la marca de su influencia; Gauss también realizó contribuciones igualmente significativas en la física teórica (figura 42).



Figura 42 Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss ayudó a desarrollar varias ramas de las matemáticas, incluidos la geometría diferencial, el análisis real y la teoría de números. Una de sus invenciones es la “curva de campana” de la estadística. Gauss también realizó investigaciones de vanguardia sobre el magnetismo de la Tierra y calculó la órbita del primer asteroide que se descubrió.

La ley de Gauss es una de las leyes elementales del electromagnetismo que viene de la observación experimental y que también puede ser demostrada matemáticamente. En los dos ejemplos anteriores ya vimos 5 La demostración rigurosa de la ley de un adelanto de esta ley.

#### Forma integral de la ley de Gauss.

Ley de Gauss.

El flujo eléctrico total a través de una superficie es igual a la carga encerrada dividido por la permitividad.

Si el medio donde está la carga es el vacío, entonces la permitividad es  $\epsilon_0$

$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La carga neta encerrada,  $q_{enc}$ , puede ser cualquier distribución de carga y no necesariamente cargas puntuales. El flujo además es independiente de la superficie cerrada. En su forma integral

$$\Phi = \oint_S \vec{E} * d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Forma integral de la ley de Gauss.

La superficie  $S$  se llama superficie Gaussiana y es una **superficie imaginaria** que sirve para calcular la integral de superficie  $\oint_S \vec{E} * d\vec{A}$ . Como la integral es independiente de  $S$ , entonces podemos escoger la superficie más conveniente con el objetivo de facilitar el cálculo de la integral.

En la figura siguiente tenemos una distribución de cargas encerradas dentro de tres superficies Gaussianas,  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$

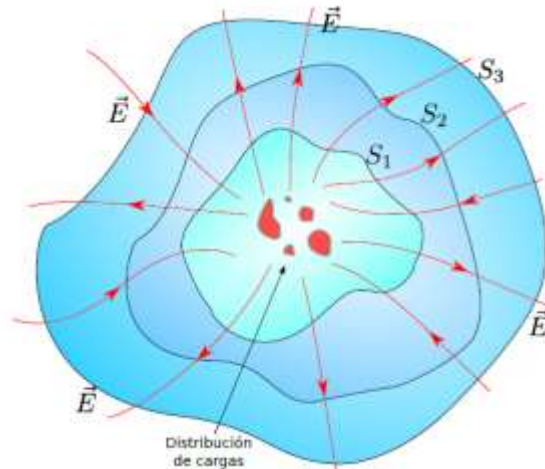


Figura 43 Una distribución de cargas encerrada por varias superficies. Notar que algunas líneas salen y otras entran a través de las superficies.

Notar que las líneas de campo eléctrico salen y entran a través de las tres superficies, pues las cargas pueden ser positivas o negativas. (Nota: en efecto podría ocurrir que la carga total positiva sea igual a la carga total negativa. En ese caso la carga neta sería cero y por lo tanto el flujo es cero.) El teorema de Gauss dice que el flujo a través de cualquiera de estas superficies es el mismo:

$$\Phi = \oint_{S_1} \vec{E} * d\vec{A} = \oint_{S_2} \vec{E} * d\vec{A} = \oint_{S_3} \vec{E} * d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

El flujo es independiente de la superficie elegida.

Calcular el flujo eléctrico mediante la ley de Gauss puede ser bastante más fácil que mediante integración directa. Por otro lado, la aplicación de la ley de Gauss está limitada a problemas donde haya un cierto grado de simetría de la distribución de carga.

### Forma diferencial de la ley de Gauss.

A veces es conveniente escribir la ley de Gauss en su forma diferencial. Partamos por la expresión:

$$\oint_S \vec{E} * d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Sea  $V$  es el volumen que encerrado por la superficie  $S$ . Si  $\rho(\vec{r})$  es la densidad de carga, entonces la carga encerrada se obtiene

$$q_{enc} = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

por lo tanto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (1.16)$$

Usando el **teorema de la divergencia** (Ver donde para un campo vectorial  $\vec{G}$  se cumple:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{G}) dV = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{A}$$

)podemos reemplazar la integral de superficie en ecuación 1.16 por una integral de volumen:

$$\oint_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Si pasamos todo bajo una sola integral

$$\oint_V \left( \nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \right) dV = 0$$

Esta integral es cero dado cualquier volumen  $V$ , así que la única alternativa para que la integral sea nula es que el integrando sea siempre cero. De esto obtenemos la **forma diferencial** de la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad \text{Forma diferencial de la ley de Gauss.}$$

Recordemos la interpretación de la divergencia de un campo vectorial. En el caso del campo eléctrico, la interpretación es la misma.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\Delta V}$$

$\nabla \cdot \vec{E}$  es una medida del flujo del campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de una región infinitesimal del espacio. Es decir la divergencia de  $\vec{E}$  da cuenta de cuanto flujo por unidad de volumen es generado o perdido en un punto.

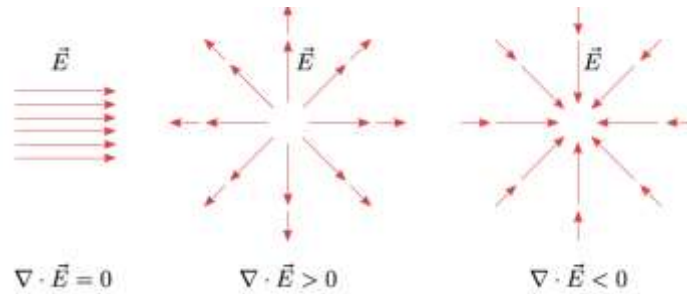


Figura 44 Ejemplo grafico de la divergencia de un campo eléctrico.

La figura 44 ilustra la idea de la divergencia de  $\vec{E}$  en un punto. Ese punto corresponde a:

- Un sumidero si  $\nabla \cdot \vec{E} < 0$ , (lineas entran o convergen).
- Una fuente  $\nabla \cdot \vec{E} > 0$ , (lineas salen o divergen).
- Una transferencia pura si  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  (por ejemplo para un campo uniforme).

#### Estrategia para resolver problemas. Ley de Gauss

**IDENTIFICAR** *los conceptos relevantes:* La ley de Gauss tiene su máxima utilidad en situaciones en que la distribución de carga tiene simetría esférica o cilíndrica, o está distribuida de manera uniforme en un plano. En estos casos se determina la dirección de  $\vec{E}$  a partir de la simetría de la distribución de la carga. Si se conoce la distribución de carga, se puede usar la ley de Gauss para obtener la magnitud de  $\vec{E}$ . En forma alternativa, si se conoce el campo, se emplea la ley de Gauss para determinar los detalles de la distribución de carga. En cualquier caso, el análisis comienza con la pregunta: ¿Cuál es la simetría?

**PLANTEAR** *el problema* mediante los siguientes pasos:

1. Seleccione la superficie que se usará en la ley de Gauss. Es frecuente llamarla *superficie gaussiana*. Si se busca determinar el campo en un punto particular, entonces ese punto debe localizarse en la superficie gaussiana.
2. La superficie gaussiana no tiene que ser una superficie física real, como la de un cuerpo sólido. Es frecuente que la superficie apropiada sea una superficie geométrica imaginaria; puede estar en el espacio vacío, contenida en un cuerpo sólido, o ambas cosas.
3. Por lo general es posible evaluar la integral en la ley de Gauss (sin emplear una computadora) sólo si la superficie gaussiana y la distribución de carga tienen alguna propiedad de simetría. Si la distribución de carga tiene simetría cilíndrica o esférica, elija un cilindro coaxial o una esfera concéntrica como la superficie gaussiana, respectivamente.

**EJECUTAR** *la solución* como sigue:



1. Resuelva la integral en la ecuación (1.15), lo que quizá parezca un trabajo intimidante, pero la simetría de la distribución de la carga y la selección cuidadosa de una superficie gaussiana facilitan la tarea.
2. Con frecuencia puede considerarse la superficie gaussiana cerrada como constituida por varias superficies separadas, tales como los lados y extremos de un cilindro. La integral sobre toda la superficie cerrada siempre es igual a la suma de las integrales sobre todas las superficies separadas. Algunas de esas integrales pueden ser igual a cero, como las que se describen más adelante en los puntos 4 y 5.
3. Si  $\vec{E}$  es *perpendicular* (normal) en cada punto de la superficie con área  $A$ , si apunta *hacia fuera* desde interior de la superficie, y si también tiene la misma *magnitud* en todos los puntos de la superficie, entonces  $E_{\perp} = E = \text{constante}$  y  $\int E_{\perp} dA$  sobre la superficie es igual a  $EA$ . Si en vez de ello,  $\vec{E}$  es perpendicular y apunta *hacia dentro*, entonces  $E_{\perp} = -E$  y  $\int E_{\perp} dA = -EA$ .
4. Si  $\vec{E}$  es *tangente* a la superficie en cada punto, entonces  $E_{\perp} = 0$  y la integral sobre la superficie es igual a cero.
5. Si  $\vec{E} = 0$  en cada punto de la superficie, la integral es cero.
6. En la integral  $\oint E_{\perp} dA$ ,  $E_{\perp}$  siempre es la componente perpendicular del campo eléctrico *total* en cada punto de la superficie gaussiana cerrada. En general, este campo puede deberse parcialmente a cargas dentro de la superficie y parcialmente a cargas afuera de ella. Aun cuando *no* hubiera carga dentro de la superficie, el campo en puntos de la superficie gaussiana no necesariamente es igual a cero. Sin embargo, en ese caso, la *integral* sobre la superficie gaussiana —es decir, el flujo eléctrico total a través de la superficie— es siempre igual a cero.
7. Una vez evaluada la integral, en la ecuación (1.15) se despeja la variable que se busca.

**EVALUAR la respuesta:** Es frecuente que el resultado sea una *función* que describe cómo varía la magnitud del campo eléctrico según la posición. Hay que estudiar esta función con ojo crítico para ver si tiene sentido.

### **Aplicaciones de la ley de Gauss**

**EJEMPLO 1.** Línea larga de carga uniforme.

Un alambre recto muy largo posee una carga positiva uniforme por unidad de longitud,  $\lambda$ . Calcule el campo eléctrico en puntos cerca (pero fuera) del alambre y lejos de sus extremos.

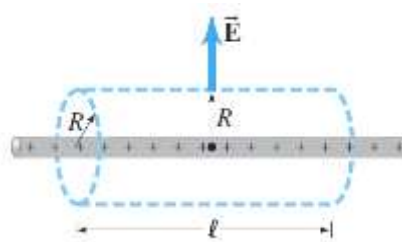


Figura 45 Cálculo de  $\vec{E}$  producido por una línea de carga muy larga .

PLANTEAMIENTO Dada la *simetría*, esperamos que el campo eléctrico esté dirigido radialmente hacia fuera y que dependa sólo de la distancia perpendicular  $R$  desde el alambre. Dada la simetría cilíndrica, el campo será el mismo sobre todos los puntos de una superficie gaussiana con forma de cilindro con el alambre a lo largo de su eje (figura 45).  $\vec{E}$  es perpendicular a esta superficie en todos los puntos. Para aplicar la ley de Gauss necesitamos una superficie cerrada, así que incluimos las dos tapas planas del cilindro. Dado que  $\vec{E}$  es paralelo a estas tapas, no hay flujo eléctrico a través de ellas (el coseno del ángulo entre  $\vec{E}$  y  $d\vec{A}$  sobre las tapas es  $\cos 90^\circ = 0$ ).

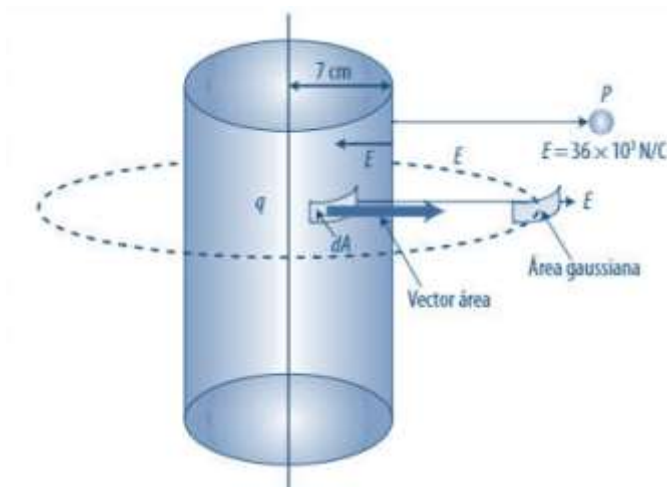
SOLUCIÓN Para la superficie gaussiana que hemos elegido, la ley de Gauss da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi R\ell) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

donde  $\ell$  es la longitud de nuestra superficie gaussiana ( $\ell \ll$  que la longitud del alambre) y  $2\pi R$  es su circunferencia. Por lo tanto,

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$$

### Problema resuelto 1



Considérese que se tiene un tubo metálico de 7 cm de radio y 240 cm de largo, cuya superficie está electrizada uniformemente. Dado que el campo eléctrico radial a 19 cm, fuera de su eje, es de  $36 \times 10^3 \text{ N/C}$  (véase figura 46), determinar:

- La carga total.
- El campo eléctrico a 4 cm del eje medio radialmente hacia afuera del punto medio.

Figura 46 Tubo metálico electrizado.

**Solución:**

a) De la ley de Gauss tenemos que el flujo eléctrico se determina por la siguiente ecuación:

$$\Phi = \int E \cdot dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$q = \epsilon_0 \int E \, dA$$

Pero, el área del cilindro es  $A = 2\pi rL$ . Por tanto:

$$q = \epsilon_0 E 2\pi rL = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)(36 \times 10^3 \text{ N/C})(2\pi)(2.4 \text{ m})(0.19 \text{ m}) \\ = \mathbf{9.1283 \times 10^{-1} \text{ C}}$$

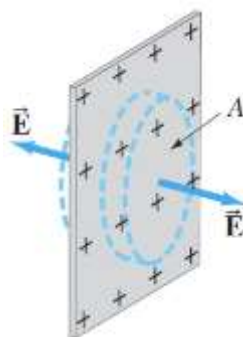
En este problema,  $r$  es la distancia que hay desde el cilindro hasta el punto donde se midió el campo eléctrico.

b) El campo eléctrico en el interior del tubo es cero, debido a que la carga está distribuida en el tubo.

**EJEMPLO 2.** Plano de carga infinito.

Se distribuye carga de manera uniforme, con una densidad superficial de carga  $\sigma$  ( $\sigma =$  carga por unidad de área  $= dQ/dA$ ), sobre una superficie plana no conductora muy larga, pero muy delgada. Determine el campo eléctrico en puntos cercanos al plano.

PLANTEAMIENTO Elegimos como superficie gaussiana un cilindro pequeño cerrado, con su eje perpendicular al plano, que se extiende a través del plano como se muestra en la figura 47. Dada la simetría, esperamos que  $\vec{E}$  esté dirigido de forma perpendicular al plano a ambos lados, como se muestra en la figura, y que sea uniforme sobre las tapas del cilindro, cada una con área  $A$ .



**Figura 47** Cálculo del campo eléctrico fuera de una superficie plana no conductora con carga uniforme.

SOLUCIÓN Puesto que no hay flujo eléctrico sobre las paredes curvas de nuestra superficie cilíndrica, todo el flujo es a través de las dos tapas. Así que la ley de Gauss da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

donde  $Q_{enc} = \sigma A$  es la carga encerrada por nuestro cilindro gaussiano. El campo eléctrico es, por lo tanto,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

### Problema resuelto 2.

Una lámina muy delgada de material conductor eléctrico de 60 x 80 cm está electrizada estáticamente y tiene una carga uniforme de 18,6  $\mu\text{C}$  (véase figura 48). Determinar el campo eléctrico a 7 cm por delante de la lámina.

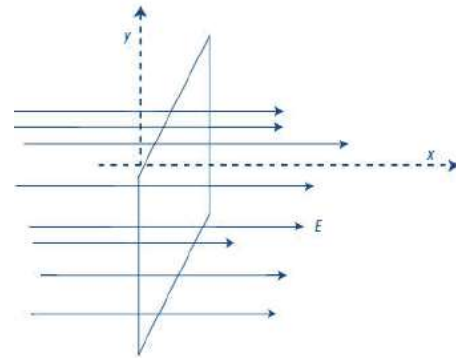


Figura 48 Lámina muy delgada electrizada

Puesto que la distancia a la lámina es mucho menor que las dimensiones de la lámina y que el campo electrizado es uniforme, entonces podemos decir que este tiene el mismo valor en todos los puntos cerca nos a la placa. Por otra parte , el vector de área y el vector campo eléctrico son paralelos y por tanto el ángulo formado entre ellos es cero y el coseno cero es igual a la unidad. Así, en este problema necesitamos aplicar directamente la ecuación de campo eléctrico para una placa:

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{18.6 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.6 \text{ m})(0.8 \text{ m})} = 38.75 \times 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{38.75 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2}{2(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)} = 2189265.537 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

## 1.6 El Potencial Eléctrico.

Recuerda que un objeto tiene energía potencial gravitacional debido a su ubicación en un campo gravitacional. Asimismo, un objeto con carga tiene energía potencial eléctrica gracias a su lugar en un campo eléctrico. Al igual que se requiere trabajo para levantar un objeto masivo contra el campo gravitacional de la Tierra, se requiere trabajo para mover una partícula cargada contra el campo eléctrico de un cuerpo cargado. Ese trabajo cambia la energía potencial eléctrica de la

partícula cargada.<sup>1</sup> Veamos la partícula con la carga positiva pequeña a cierta distancia de una esfera con carga positiva, en la **figura 49 b**. Si empujas la partícula para acercarla a la esfera, gastarás energía para vencer la repulsión eléctrica; esto es, efectuarás trabajo al empujar la partícula cargada contra el campo eléctrico de la esfera. Este trabajo efectuado para mover la partícula hasta su nuevo lugar aumenta su energía. A la energía que posee la partícula en virtud de su ubicación se le llama **energía potencial eléctrica**. Si se suelta la partícula, acelera alejándose de la esfera, y su energía potencial eléctrica se transforma en energía cinética.

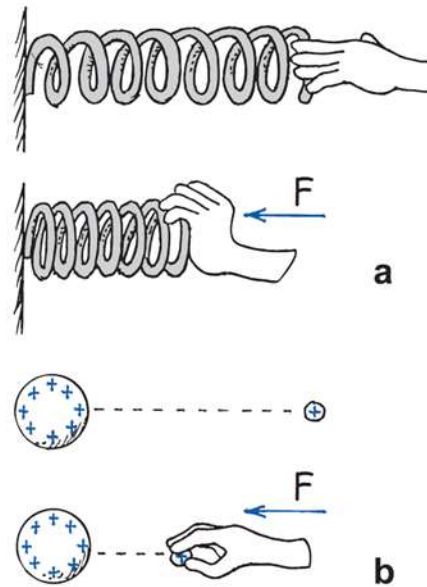


Figura 49 Energía potencial eléctrica.

*Descripción de la figura 49. Energía potencial eléctrica. Parte a, al comprimirse el resorte tiene más E.P. mecánica. Parte b, la partícula cargada, en forma parecida, tiene más E.P. eléctrica cuando es empujada para acercarla a la esfera cargada. En ambos casos, la mayor EP se debe al trabajo efectuado.*

Si ahora empujamos a una partícula con el doble de la carga efectuamos el doble de trabajo, por lo que la partícula con carga doble en el mismo lugar tiene el doble de energía potencial eléctrica que antes. Una partícula con tres veces la carga tiene tres veces la energía potencial; diez veces la carga, diez veces la energía potencial, y así sucesivamente. Más que manejar la energía potencial de un cuerpo cargado conviene, cuando se trabaja con partículas cargadas en campos eléctricos, considerar la energía potencial eléctrica *por unidad de carga*. Tan sólo se divide la cantidad de energía potencial eléctrica en cualquier caso entre la cantidad de carga. Por ejemplo, una partícula con diez veces la carga que otra, y en el mismo lugar, tendrá energía potencial eléctrica diez veces mayor; pero tener energía potencial diez veces mayor equivale a que la energía por unidad de

<sup>1</sup> Este trabajo es positivo si aumenta la energía potencial eléctrica de la partícula cargada, y negativo si la disminuye.

carga sea igual. Al concepto de energía potencial por unidad de carga se le llama **potencial eléctrico**; es decir:

$$\text{Potencial eléctrico} = \frac{\text{energía potencial eléctrica}}{\text{carga}}$$

La ecuación se lee, Potencial eléctrico = energía potencial eléctrica sobre carga. O se puede leer, Potencial eléctrico = energía potencial eléctrica ÷ carga.

La unidad de medida del potencial eléctrico es el volt, por lo que al potencial eléctrico se le llama con frecuencia *voltaje*. Un potencial eléctrico de 1 volt (1 V) equivale a 1 joule (1 J) de energía por 1 coulomb (1 C) de carga.

$$1 \text{ Volt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{coulomb}}$$

La ecuación se lee, 1 Volt = 1 Joule sobre coulomb.

Así, una batería de 1,5 volts cede 1,5 joule de energía por cada coulomb de carga que pasa por ella. Son comunes los nombres *potencial eléctrico* y *voltaje*, por lo que se puede usar cualquiera. Aquí, usaremos tales nombres de forma indistinta.

La importancia del potencial eléctrico (el voltaje) es que se le puede asignar un valor definido a determinado lugar. Se puede hablar de los potenciales eléctricos en distintos lugares de un campo eléctrico, haya cargas o no que ocupen esos lugares (una vez definida la posición de voltaje cero). Al igual que con los voltajes en varios lugares de un circuito eléctrico. En los siguientes temas verás que el lugar de la terminal positiva de una batería de 12 volts, se mantiene a un voltaje 12 volts mayor, que el lugar de la terminal negativa. Cuando un medio conductor conecta esas terminales con distinto voltaje, se moverán entre ellas cargas en el conductor.

Frota un globo en tu cabello y quedará cargado negativamente, ¡quizás hasta con algunos miles de volts! Si la carga fuera de 1 coulomb, equivaldrían a varios miles de joules de energía. Sin embargo, 1 coulomb es una cantidad de carga muy grande. La de un globo frotado en el cabello se parece más, normalmente, a mucho menos que un millonésimo de coulomb. En consecuencia, la energía asociada con el globo cargado es muy, muy pequeña. Un alto voltaje equivale a gran cantidad de energía sólo si interviene una gran cantidad de carga. Hay una diferencia importante entre la energía potencial eléctrica y el potencial eléctrico.

Dato curioso: el alto voltaje de baja energía es similar a las inofensivas chispas a alta temperatura que emiten las luces de bengala. Recuerda que la temperatura es energía cinética promedio por molécula, lo cual significa que la energía total es grande sólo para un gran número de moléculas. Asimismo, el alto voltaje significa una gran cantidad de energía sólo para una gran cantidad de carga. ¡Eureka!

En resumen: *potencial eléctrico* y *potencial* significan lo mismo (energía potencial eléctrica por unidad de carga) en unidades de volts. Por otro lado, *diferencia de potencial* es lo mismo que *voltaje* (la *diferencia* en potencial eléctrico entre dos puntos), también en unidades de volts.

**Trabajo y energía potencial**

Consideremos una carga  $q$ , que interactúa con otra carga  $Q$ . Para determinar el trabajo total que hace la fuerza eléctrica para llevar la carga siguiendo la trayectoria mostrada en la figura (50), se hace a partir de la superposición de los trabajos realizados por la fuerza eléctrica en pequeños desplazamientos. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica en el desplazamiento desde una posición  $\vec{r}_1$  hasta la posición  $\vec{r}_2$ , está dado por:

$$dW = \vec{F} * d\vec{l} = \frac{kqQ}{r^2} \hat{r} * d\vec{l} \quad (1.17)$$

pero el desplazamiento  $\vec{l}$  tiene dos componentes, según la geometría tiene una paralela y otra perpendicular al vector  $\vec{r}$ . La única componente de la fuerza que si hace trabajo es la componente paralela al radio vector, la cual está dada por  $d\vec{r}$ . Entonces:

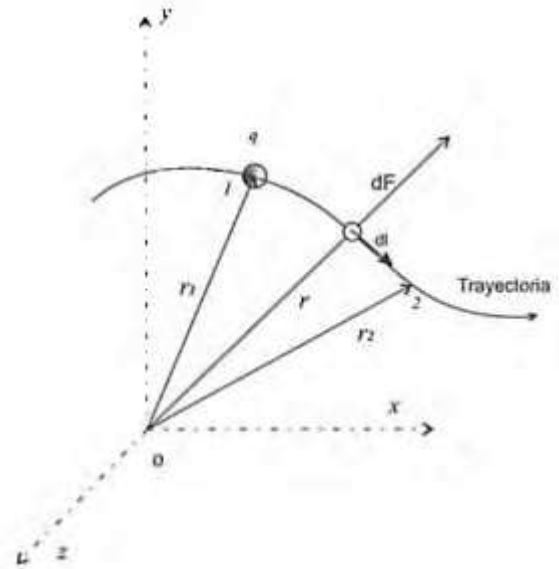


Figura 50 Desplazamiento de una carga  $q$ , desde el punto 1 al 2, siguiendo la trayectoria indicada.

$$\begin{aligned} dW &= \frac{kqQ}{r^2} dr = kqQ \frac{dr}{r^2} \\ \nabla W &= \int dW = kqQ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= -kqQ \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Este resultado (1.18) es bien importante, puesto que revela que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica solo depende únicamente de las posiciones inicial y final, no depende de la trayectoria seguida por la carga. Esta condición también es aceptada para definir cuando una fuerza es conservativa.

$$\begin{aligned} \nabla W &= -kqQ \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\ &= - \left( \frac{kqQ}{r_2} - \frac{kqQ}{r_1} \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$



$$= -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

donde se ha definido las constantes  $U_1$  y  $U_2$  como;

$$U_2 = \frac{kqQ}{r_2} \quad \text{y} \quad U_1 = \frac{kqQ}{r_1}$$

La ecuación 1.19) representa la definición de energía potencial eléctrica de la carga  $q$  en los puntos 1 y 2 respectivamente. Entonces  $\Delta U$ , es la variación de energía potencial eléctrica de la carga puntual  $q$ . El signo menos de la expresión(1.19), indica que cuanto más se aleja la carga  $q$ , de la fuente de campo eléctrico la energía potencial disminuye: Por otro lado, las unidades en el sistema internacional "SI", de la energía potencial eléctrica son;  $U = \text{Julios} = \text{J}$ .

### **Potencial eléctrico.**

Existe una propiedad vectorial que dice que si tenemos un campo vectorial  $\vec{A}$  y ocurre que el rotor de ese campo es cero ( $\nabla \times \vec{A} = \mathbf{0}$ ), entonces  $\vec{A}$  puede ser expresado como el gradiente de un campo escalar. Es decir existe una función escalar  $f(x, y, z)$  tal que  $\vec{A} = \nabla f$ . ¿Por qué? Bueno, se puede demostrar fácilmente que para cualquier  $f$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

Recordemos que si tenemos una distribución continua en un volumen  $V$ , el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int_V \rho(\vec{r}') dv' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

entonces se puede demostrar que  $\nabla \times \vec{E} = 0$  por lo tanto existe un escalar  $V$  tal que  $\vec{E} = \nabla V$ . El escalar es llama **potencial electrostático o eléctrico** y se acostumbra a incluir un **signo menos** por conveniencia

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V} \tag{1.20}$$

Podemos aplicar *el teorema fundamental para gradientes* (El teorema fundamental para gradientes, dice que si  $\vec{A} = \nabla \phi$ , entonces

$$\int_a^b \vec{A} * d\vec{r} = \phi(b) - \phi(a)$$

) al campo  $\vec{E}$  que se deriva de un potencial ( $\vec{E} = \nabla V$ ). En este caso se cumple que

$$- \int_A^B \vec{E} * d\vec{l} = V_B - V_A$$

lo cual nos lleva a definir el escalar diferencia de potencial eléctrico

$$\nabla V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} * d\vec{l} \tag{1.21}$$

**Significado físico del potencial**

También se puede justificar la existencia del potencial electrostático teniendo en cuenta que la fuerza electrostática es una fuerza conservativa, es decir, el trabajo hecho por la fuerza, para mover una carga de prueba desde un punto hasta otro, es independiente del camino que conecta a los dos puntos. Por ejemplo, consideremos el campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{k_e q}{r^2} \hat{r}$$

radiado por una carga puntual,  $q$ , en el origen de coordenadas (ver figura 51). La fuerza sobre una carga de prueba  $q_0$  es  $q_0 \vec{E}$  y entonces el término

$$dW = q_0 \vec{E} * d\vec{l}$$

es el trabajo hecho por el campo para mover la carga  $q_0$  una pequeño desplazamiento  $d\vec{l}$ . El trabajo total efectuado para mover  $q_0$  desde A hasta B está dado por la integral de línea

$$W = \int_A^B q_0 \vec{E} * d\vec{l} = \int_A^B q_0 \left( \frac{k_e q}{r^2} \hat{r} \right) * d\vec{l}$$

El campo es radial, por lo tanto si expresamos  $d\vec{l}$  en coordenadas esféricas

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta \hat{\phi}$$

tendremos  $\hat{r} * d\vec{l} = dr$  y entonces

$$W = k_e q_0 q \int \frac{dr}{r^2} = k_e q_0 q \int_A^B \frac{dr}{r} = k_e q_0 q \left[ -\frac{1}{r^2} \right]_A^B = k_e q_0 q \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$W = k_e q_0 q \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \tag{1.22}$$

(Nota: El trabajo no depende de la trayectoria, sino del punto de partida y llegada.)  
Expresión que depende sólo de los puntos A y B.

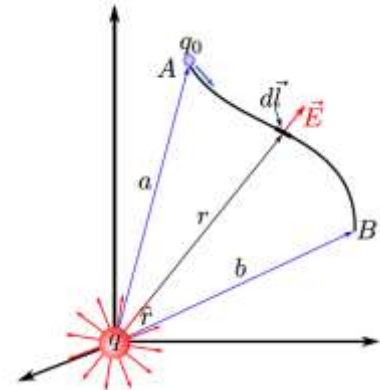


Figura 51 Trabajo efectuado por el campo eléctrico producido por  $q$  para mover  $q_0$  desde A hasta B.

En el caso anterior, calculamos el trabajo efectuado por la fuerza debido a  $q$  para mover la carga  $q_0$  desde  $A$  hasta  $B$ . Si ahora actuamos de forma externa para mover la carga desde  $A$  hasta  $B$ , tendremos que efectuar un trabajo  $-W$ .

(Nota: El trabajo hecho por  $\vec{E}$  tiene signo contrario al trabajo efectuado por una fuerza externa.)

En el caso general, donde tenemos un campo  $\vec{E}$ , se define el cambio de *energía potencial electrostática* (también *energía potencial eléctrica* o simplemente *energía potencial*) como

$$\Delta U \equiv U_B - U_A = -W = -q_0 \int_A^B \vec{E} * d\vec{l} \quad 1.23$$

y puesto que  $q_0\vec{E}$  es una fuerza conservativa, la integral de línea no depende de la trayectoria para ir desde  $A$  hasta  $B$ .

(Nota: De hecho, la diferencia  $U_B - U_A$  nos dice que la integral depende sólo de los puntos inicial y final de la trayectoria.)

Si ahora dividimos  $\Delta U$  por  $q_0$  obtenemos una cantidad que es independiente de  $q_0$  y que tiene el nombre de diferencia de *potencial electrostático* (también *potencial eléctrico* o simplemente *potencial*) y se define como

$$\Delta V = V_B - V_A \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} * d\vec{l} \quad 1.24$$

y cuya unidad es el "Volt"

$$1 V = 1 \text{ volt} = \frac{1 J}{1 C} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}}$$

Puesto que  $\Delta V = - \int_A^B \vec{E} * d\vec{l}$  (o  $dV = -\vec{E} * d\vec{l}$ ), el campo eléctrico y el potencial están relacionados entre si. En efecto, recordemos que habíamos encontrado al principio de esta sección que existía una función escalar tal que  $\vec{E} = -\nabla V$ . El potencial es una cantidad escalar y es mucho más fácil evaluar  $V$  que  $\vec{E}$ , lo cual indica que ahora tenemos una manera más fácil de obtener  $\vec{E}$ .

### EJEMOLO 1

En cierta región del espacio el potencial está dado por  $V(x, y) = x^2 + xy$ . Si el potencial está en Volt y las distancias en metros calcular el campo eléctrico en el punto  $(2, 1)$ .

**Solución:** Usando  $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} = (-2x - y)\hat{i} - x\hat{j}$ , y evaluado en  $(2, 1)$  se tiene  $\vec{E} = -5\hat{i} - 2\hat{j}$ .

### Notas:

El valor de  $V$  en una posición no tiene sentido (Al igual que en el caso gravitacional, sólo las diferencias de (energía) potencial tienen significado) a menos que definamos una posición de referencia donde el potencial valga cero. Es usual elegir  $A$  en el infinito del tal forma que  $V_\infty = 0$  de tal manera que podemos definir el potencial en un punto  $B$  como

$$V_B = - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Hay que hacer notar que el punto de referencia en el infinito podría ser una elección inapropiada para algunas distribuciones infinitas de carga (por ejemplo un alambre) donde el campo no decae tan rápido como para que la integral se haga cero.

Hay que tener cuidado de no confundir **energía potencial electrostática** con **potencial electrostático**. La energía potencial se mide en “Joule” y es un número único (es trabajo) mientras que el potencial se mide en “Volt” (Joule/Coulomb) y es diferente en todas partes del espacio.

**Potencial eléctrico de cargas puntuales**

Dada una carga  $q$  (ver figura 51), habíamos encontrado que

$$W = k_e q_0 q \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

entonces la diferencia de potencial es

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{W}{q_0} = -\frac{1}{q_0} k_e q_0 q \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = k_e q \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

Si elegimos la referencia  $V = 0$  en  $a = \infty$ , definimos el potencial de una carga  $q$  a una distancia  $b = r$  como:

$$V = \frac{U}{q_0} = k_e \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

(potencial debido a una carga puntual) 1.25

**Superficie equipotencial.**

Una superficie equipotencial (figura 52) se define como el conjunto de puntos que integran una trayectoria cerrada circular alrededor de una carga eléctrica, donde todos los puntos tienen la misma magnitud de potencial eléctrico. Por lo general, se representa por una trayectoria circular cerrada, rodeando la carga eléctrica puntual, en donde todos los puntos de la trayectoria se encuentran al mismo potencial eléctrico.

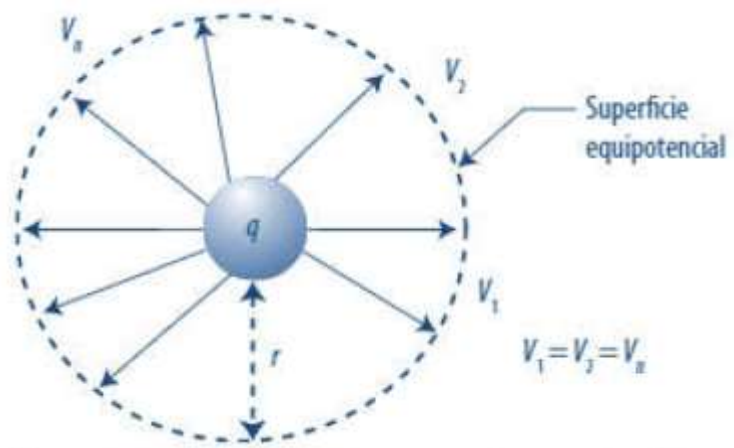


Figura 52 Representación de una superficie equipotencial.

Cuando una carga eléctrica se mueve sobre la trayectoria de una superficie equipotencial, la carga no desarrolla trabajo o energía, debido a que no hay cambio en el potencial eléctrico. Por esa razón, se establece que la energía potencial eléctrica de la carga es cero.

**Potencial eléctrico debido a varias cargas puntuales.**

Para obtener el potencial eléctrico resultante de dos o más cargas se aplica el principio de superposición. Es decir, el potencial eléctrico total en un punto  $P$  debido a varias cargas, es la suma de los potenciales individuales:

$$V_P = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{1.26}$$

En cada caso  $r_i$  es la distancia desde la carga  $q_i$  al punto  $P$ . El potencial en función de los vectores de posición es:

$$V(\vec{r}) = k_e \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{1.27}$$

donde  $\vec{r}$  es el vector posición del punto donde queremos calcular el potencial y  $\vec{r}_i$  es la posición individual de cada carga.

**Potencial eléctrico de distribuciones continuas de carga.**

Para una distribución continua de cargas consideramos un elemento de carga  $dq$  en el volumen  $V$ . (figura 53)

El potencial en  $P$  debido a  $dq$  es  $dV = k_e \frac{dq}{r}$  y por lo tanto el potencial total en  $P$  será

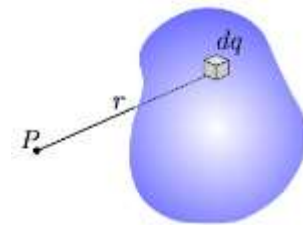


Figura 53 El potencial en P debido al elemento de carga dq..

$$V_P = k_e \int \frac{dq}{r} \tag{1.28}$$

La otra manera de expresar el potencial (figura 54) es cuando se especifica el radio vector  $\vec{r}$  del punto  $P$

$$V(r) = k_e \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = k_e \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

1.29

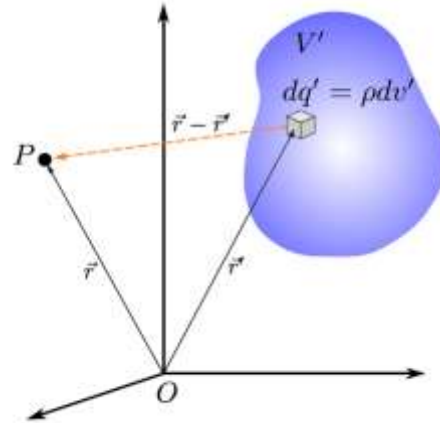


Figura 54 El potencial en  $\vec{r}$  debido al elemento de carga  $dq'$ .

en esta ecuación  $\vec{r}'$  es el radio vector de un elemento de carga  $dq$  en la distribución de cargas, ecuación (1.29).

### Diferencia de potencial eléctrico.

En la expresión del potencial para una carga puntual o una distribución continua estamos suponiendo que  $V(\infty) = 0$ , pero hay casos en que esa elección no es posible. Siempre hay que tener en mente que lo que se está calculando es en realidad una diferencia de potencial.

$$\Delta V = V_P - V_{ref} = k_e \int \frac{dq}{r}$$

donde  $V_{ref}$  es el potencial de referencia. Además, observemos que  $\Delta V$  se expresa mediante una integral indefinida, pero también se puede escribir

$$\Delta V = V_P - V_{ref} = k_e \int_{ref}^P \frac{dq}{r}$$

En cualquiera de los dos casos, hay una constante que hay que determinar y en la mayoría de los casos se impone la condición de que  $V = 0$  en el infinito.

### EJEMOLO 2

Este es un ejemplo interesante cuando la referencia no es en el infinito. Se tiene una carga puntual  $q$  en el origen y se pide encontrar el potencial a una distancia  $r$  de la carga con la condición de que el potencial es cero en el punto  $(1, 0, 0)$ .

**Solución:** Al elegir la referencia  $V = 0$  en  $r = \infty$ , la solución es trivial  $V = k_e \frac{q}{r}$ , pero debemos recordar que estrictamente, calculamos

$$V - V_{ref} = k_e \frac{q}{r}$$

el punto (1, 0, 0) se encuentra a una distancia de 1, es decir como el potencial es esférico, todos los puntos en una esfera de radio 1 se encuentran al mismo potencial (la esfera es una superficie equipotencial). La condición es que  $V(1) = 0$ , lo que permite calcular  $V_{ref}$  y obtener el resultado

$$V = k_e q \left( \frac{1}{r} - 1 \right)$$

**Problema resuelto 1.** Fuerza eléctrica y potencial eléctrico.

En el interior de un acelerador lineal, un protón (carga  $+e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) se desplaza en línea recta de un punto **a** a otro punto **b** una distancia total  $d = 0.50 \text{ m}$ . A lo largo de esta línea, el campo eléctrico es uniforme con magnitud  $E = 1.5 \times 10^7 \text{ V/m}$  en la dirección de **a** a **b**. Determine a) la fuerza sobre el protón; b) el trabajo realizado sobre este por el campo; c) la diferencia de potencial  $V_a - V_b$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este problema usa la relación entre el campo eléctrico (que es un dato conocido) y la fuerza eléctrica (que es una de las variables buscadas). También utiliza la relación entre fuerza, trabajo y diferencia de energía potencial.

**PLANTEAR:** Se da el campo eléctrico, por lo que es fácil encontrar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el protón. El cálculo del trabajo que realiza esta fuerza sobre el protón también es fácil porque  $\vec{E}$  es uniforme, lo que significa que la fuerza es constante. Una vez que se conoce el trabajo, se determina la diferencia de potencial empleando la ecuación (1.24).

**EJECUTAR:** a) La fuerza sobre el protón está en la misma dirección que el campo eléctrico, y su magnitud es

$$F = qE = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1.5 \times 10^7 \text{ N/C}) = 2.4 \times 10^{-12} \text{ N}$$

b) La fuerza es constante y está en la misma dirección que el campo eléctrico, de manera que el trabajo efectuado sobre el protón es

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = (2.4 \times 10^{-12} \text{ N})(0.50 \text{ m}) = 1.2 \times 10^{-12} \text{ J}$$



$$= (1.2 \times 10^{-12} J) \frac{1 eV}{1.602 \times 10^{-19} J} = 7.5 \times 10^6 eV = 7.5 MeV$$

c) De la ecuación (1.24), la diferencia de potencial es el trabajo por unidad de carga, que es

$$V_a - V_b = \frac{W_{a \rightarrow b}}{q} = \frac{1.2 \times 10^{-12} J}{1.602 \times 10^{-19} C} = 7.5 \times 10^6 J/C$$

$$= 7.5 \times 10^6 V = 7.5 MV$$

Se obtiene el mismo resultado con más facilidad si se recuerda que 1 electrón volt es igual a 1 volt multiplicado por la carga  $e$ . Como el trabajo realizado es  $7.5 \times 10^6 eV$  y la carga es  $e$ , la diferencia de potencial es  $(7.5 \times 10^6 eV)/e = 7.5 \times 10^6 V$ .

**EVALUAR:** El resultado del inciso c) puede comprobarse con las ecuaciones (1.23) o (1.24) para calcular la integral del campo eléctrico. El ángulo  $\phi$  entre el campo constante y el desplazamiento es igual a cero, por lo que la ecuación (1.24) se convierte en

$$V_a - V_b = \int_a^b E \cos \phi \, dl = \int_a^b E \, dl = E \int_a^b dl$$

La integral de  $dl$  de  $a$  a  $b$  tan sólo es la distancia  $d$ , por lo que una vez más se obtiene

$$V_a - V_b = Ed = (1.5 \times 10^7 V/m)(0.50 m) = 7.5 \times 10^6 V$$

**Problema resuelto 2.** Cálculo del potencial por integración.

Calcule el potencial a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$ , por medio de la integración del campo eléctrico, como en la ecuación (1.24)(figura 55)

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Este problema pide encontrar el potencial eléctrico a partir del campo eléctrico.

**PLANTEAR:** Para obtener el potencial  $V$  a una distancia  $r$  de la carga puntual, se establece que el punto  $a$  en la ecuación (1.24) sea la distancia  $r$ , y que el punto  $b$  esté en el infinito (figura 55). Como de costumbre, elegimos que el potencial sea cero a una distancia infinita a partir de la carga.

**EJECUTAR:** Para resolver la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos  $a$  y  $b$ . El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura 55, de manera que  $d\vec{l}$  esté en la dirección radial y tenga magnitud  $dr$ . Si  $q$  es

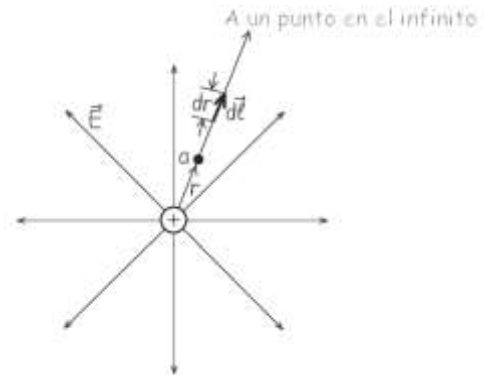


Figura 55 Cálculo de la energía potencial por integración de  $\vec{E}$  para una sola carga puntual.

positiva,  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  siempre son paralelos, por lo que  $\phi = 0$  y la ecuación (1.24) se convierte en  $V - 0 = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left| -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_r^\infty = 0 - \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Esto concuerda con la ecuación (1.25). Si  $q$  es negativa,  $\vec{E}$  se dirige radialmente hacia la carga, en tanto que  $d\vec{l}$  sigue yendo en forma radial, por lo que  $\phi = 180^\circ$ . Como  $\cos 180^\circ = -1$ , se agrega un signo menos al resultado anterior. Sin embargo, la magnitud del campo  $E$  siempre es positiva, y como  $q$  es negativa, se debe escribir  $E = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r} = -q/4\pi\epsilon_0 r$ , lo que da otro signo menos. Los dos signos menos se cancelan y el resultado anterior de  $V$  es válido para cargas puntuales de cualquier signo.

**Problema resuelto 3.** Potencial eléctrico debido a dos cargas puntuales.

Como se muestra en la figura 56a, una carga  $q_1 = 2.00 \mu\text{C}$  se ubica en el origen y una carga  $q_2 = -6.00 \mu\text{C}$  se ubica en  $(0, 3.00)$  m.

**A)** Encuentre el potencial eléctrico total debido a estas cargas en el punto  $P$ , cuyas coordenadas son  $(4.00, 0)$  m.

**B)** Encuentre el cambio en energía potencial del sistema de dos cargas más una tercera carga  $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$  conforme la última carga se mueve del infinito al punto  $P$  (figura 56b).

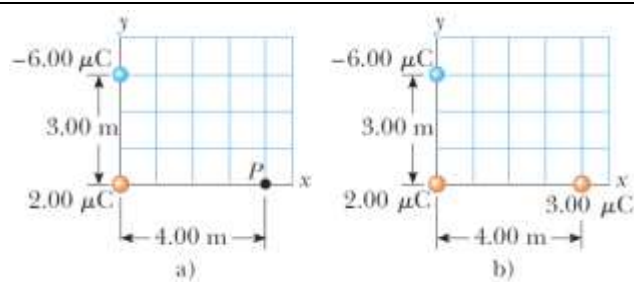


Figura 56 a) El potencial eléctrico en  $P$  debido a las dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  es la suma algebraica de los potenciales debidos a las cargas individuales. b) Una tercera carga  $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$  se lleva desde el infinito al punto  $P$ .

A) Encuentre el potencial eléctrico total debido a estas cargas en el punto  $P$ , cuyas coordenadas son  $(4.00, 0)$  m.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Reconozca que las cargas de  $2.00 \mu\text{C}$  y de  $-6.00 \mu\text{C}$  son cargas fuente y establecen un campo eléctrico así como un potencial en todos los puntos del espacio, incluido el punto  $P$ .

**Categorizar** El potencial se evalúa con una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación para el sistema de dos cargas fuente:  $V_P = k_e \left( \frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right)$

Sustituya valores numéricos:  $V_p = (8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \left( \frac{2.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{4.00 \text{ m}} - \frac{-6.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{5.00 \text{ m}} \right)$   
 $= -6.29 \times 10^3 \text{ V}$

**B)** Encuentre el cambio en energía potencial del sistema de dos cargas más una tercera carga  $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$  conforme la última carga se mueve del infinito al punto  $P$  (figura 56b).

**SOLUCIÓN**

Asigne  $U_i = 0$  para el sistema en una configuración en que la carga  $q_3$  está en el infinito. Use la ecuación para evaluar la energía potencial para la configuración en que la carga está en  $P$ :

$$U_f = q_3 V_p$$

Sustituya valores numéricos para evaluar  $U$ :

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_f - U_i = q_3 V_p - 0 = (3.00 \times 10^{-6} \text{ C})(-6.29 \times 10^3 \text{ V}) \\ &= -1.89 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

Por lo tanto, ya que la energía potencial del sistema disminuyó, un agente externo tiene que hacer trabajo positivo para retirar la carga del punto  $P$  de regreso al infinito.

**¿Qué pasaría si?** Trabaja este ejemplo con una compañera de clase y ella le dice: “¡Espera un minuto! En el inciso B) se ignoró la energía potencial asociada con el par de cargas  $q_1$  y  $q_2$ !”. ¿Cómo respondería?

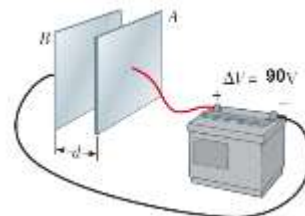
**Respuesta** Dado el enunciado del problema, no es necesario incluir esta energía potencial porque en el inciso B) pide el *cambio* en energía potencial del sistema conforme  $q_3$  se lleva desde el infinito. Ya que la configuración de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  no cambia en el proceso, no hay  $\Delta U$  asociada con estas cargas. Sin embargo, si el inciso B) hubiese pedido encontrar el cambio en energía potencial cuando *las tres* cargas inician separadas desde el infinito y después se llevan a las posiciones en la figura 56b, tendría que calcular el cambio usando la siguiente ecuación

$$U = k_e \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

**Problema resuelto 4.**

Se tienen dos placas metálicas conductoras, separadas 3 cm entre sí, conectadas a una batería de 90 V. El sistema se encuentra dentro de una campana al vacío. Determinar:

- a) La fuerza que experimenta el electrón para liberarse desde la placa negativa.
- b) La aceleración que adquiere el electrón.
- c) La velocidad inicial del electrón al liberarse.



**Figura 57** Una batería de 90 V conectada a dos placas paralelas. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud determinada por la diferencia de potencial  $\Delta V$  dividida entre la separación de placa  $d$ .

**Solución.**

Primero, establecemos los datos de referencia:

$$V = 90 \text{ V}$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$d = 3 \text{ cm}$$

- a) En este caso, primero relacionamos las ecuaciones de campo eléctrico y de potencial eléctrico

$$\text{De campo eléctrico:} \quad F = Eq$$

$$\text{De potencia eléctrica:} \quad V = Ed \quad \therefore \quad E = \frac{V}{d}$$

Finalmente, relacionamos las ecuaciones:

$$F = Eq = \frac{Vq}{d} = \frac{(90 \text{ V})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{0.03 \text{ m}} = 4.8 \times 10^{-16} \text{ N}$$

- b) Ahora. Determinamos la aceleración:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4.8 \times 10^{-16} \text{ N}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 5.268 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$$

- c) Para determinar la velocidad que adquiere el electrón al ser liberado, se considera la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1q = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2q$$

Puesto que el electrón se libera desde el reposo, su velocidad inicial es cero, entonces su energía potencial es máxima. Pero, cuando el electrón choca con la placa positiva, su energía cinética es máxima, porque lleva máxima velocidad, aunque su energía potencial es cero. Esto indica que toda la energía potencial inicial se convirtió en energía cinética. De esta manera tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = qV$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(90 \text{ V})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 5.6225 \times 10^6 \text{ m/s}$$

**Estrategia para resolver problemas.** Cálculo del potencial eléctrico.

**IDENTIFICAR** *los conceptos relevantes:* Recuerde que potencial es *energía potencial por unidad de carga*. La comprensión de este enunciado lo llevará lejos.

**PLANTEAR** *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo que muestre con claridad las ubicaciones de las cargas (que pueden ser puntuales o una distribución continua de carga) y su elección de los ejes coordenados.
2. Indique en el dibujo la posición del punto en que se desea calcular el potencial eléctrico  $V$ . En ocasiones esta posición será arbitraria (por ejemplo, un punto a una distancia  $r$  del centro de una esfera con carga).

**EJECUTAR** *la solución* como sigue:

1. Para encontrar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales utilice la ecuación (1.26). Si se da una distribución continua de carga, hay que ver la manera de dividirla en elementos infinitesimales para luego emplear la ecuación (1.28). Realice la integración utilizando los límites apropiados que incluyan toda la distribución de carga. En la integral tenga cuidado con la cantidades geométricas que varían y las que permanecen constantes.
2. Si se da el campo eléctrico, o si se puede encontrar con alguno de los métodos presentados anteriormente, tal vez sea más fácil usar la ecuación (1.24) para calcular la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ . Cuando sea apropiado, hay que ejercer la libertad de definir qué  $V$  es igual a cero en algún lugar conveniente, y elegir éste como punto  $b$ . (Para cargas puntuales, por lo general será el infinito. Para otras distribuciones de carga —en especial aquellas que se extienden al infinito—, quizá sea más conveniente o necesario que  $V_b$  sea igual a cero a cierta distancia finita de la distribución de carga. Esto es como definir que al nivel del suelo  $U$  es igual a cero en problemas relacionados con la gravitación.) En esas condiciones, el potencial en cualquier otro punto (por ejemplo,  $a$ ) se obtiene con las ecuaciones (1.24) con  $V_b = 0$ .
3. Hay que recordar que el potencial es una cantidad *escalar*, no un *vector*, por lo que ¡no tiene componentes! Sin embargo, tal vez se tengan que usar componentes de los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  cuando se use la ecuación (1.24).

**EVALUAR** *la respuesta:* Compruebe que la respuesta concuerde con la intuición. Si el resultado da  $V$  como función de la posición, elabore una gráfica de esta función para ver si es razonable. Si se conoce el campo eléctrico es posible hacer una comprobación aproximada del resultado para  $V$  verificando que  $V$  disminuye si nos movemos en la dirección de  $\vec{E}$ .

Problemas para resolver.

1.1 Se tiene un trozo de plata, eléctricamente neutro, que tiene una masa de 15 g. Como se sabe, la plata tiene 47 electrones por átomo y su masa molar es de 107.87 g/mol.

- Determina el número de electrones que tiene dicha masa.
- Si se desea que la masa tenga una carga de 15 mC, determina el número de electrones que se deben añadir.

1.2 Se tiene un trozo de cobre cuya masa es 5 g, su número atómico es 29 y su masa atómica es de 63.546 g/mol. Si se electriza negativamente, hasta que su carga sea de 2 mC, determina el número de electrones acumulados.

1.3 Determina la masa de un trozo de plata si de acuerdo a la tabla periódica su número atómico es 47, con un electrón libre por cada átomo, su masa atómica es de 107.87 g/mol y si tiene una carga eléctrica de  $7 \mu\text{C}$ .

1.4 La fuerza de repulsión entre dos cargas eléctricas separadas 5 cm, entre sí, es de  $15 \times 10^{-3} \text{ N}$ . Si una de las cargas es el triple de la otra, determina el valor de cada una de las cargas, considerando que el medio en que se encuentran dichas cargas es el aire.

1.5 Un sistema de dos cargas eléctricas de  $-5 \mu\text{C}$  y  $20 \mu\text{C}$  están separadas, entre sí, en el aire a una distancia de 20 cm.

- Determina la magnitud de la fuerza.
- Indica si es de atracción o repulsión.

1.6 Dos cargas eléctricas de  $35 \mu\text{C}$  y  $48 \mu\text{C}$ , respectivamente, separadas entre sí en el aire, experimentan una fuerza de repulsión de 56 N. Determina la separación entre estas.

1.7 Determina la fuerza ejercida sobre  $q_3$ , debido a la interacción de las cargas  $q_1$  y  $q_2$ , que se sitúan tal como se muestra en la figura 1.49. Donde:  $q_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ C}$ ,  $q_2 = -1 \times 10^{-3}$ ,  $q_3 = 12 \times 10^{-3} \text{ C}$ .



Figura 1.49

1.8 Dos cargas de  $20 \times 10^{-6} \text{ C}$  y de  $-10 \times 10^{-6} \text{ C}$ , respectivamente, están separadas 20 cm en el aire. Determina la fuerza resultante que experimenta una tercera carga de  $4 \times 10^{-6} \text{ C}$ , colocada en medio de la recta que une a las dos cargas, como se muestra en la figura 1.50.



Figura 1.50

1.9 Se coloca una carga eléctrica en cada uno de los vértices de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 1.51. Determina la magnitud y dirección de la fuerza resultante sobre la carga  $q_1$ , considerando que todas las cargas se encuentran en el aire.  $q_1 = 9 \times 10^{-6} \text{ C}$ ,  $q_2 = 10 \times 10^{-6} \text{ C}$ ,  $q_3 = 5 \times 10^{-6} \text{ C}$ .

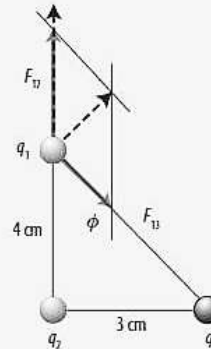


Figura 1.51

1.10 Dos cargas,  $q_1 = -30 \mu\text{C}$  y  $q_2 = 15 \mu\text{C}$ , se colocan a una distancia entre sí de 16 cm. ¿Cuál será la fuerza resultante que experimenta una tercera carga de  $-1 \mu\text{C}$  colocada a la mitad de la recta que las une.

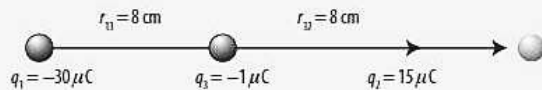


Figura 1.52

1.11 Se tienen cargas eléctricas en los vértices de un triángulo equilátero. Si el sistema está en el aire, determina la magnitud y dirección de fuerza eléctrica que experimenta la carga de  $7 \mu\text{C}$ .

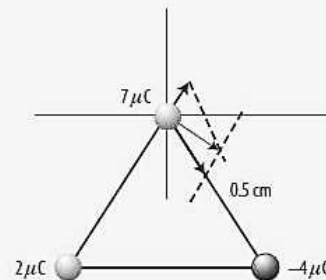


Figura 1.53

1.12 Del siguiente sistema de cargas localizadas en el aire, determina en la carga  $q_c$ :

- La magnitud de la fuerza resultante sobre  $q_c$ .
- La dirección de la fuerza resultante.
- La energía del sistema de cargas, si  $q_c = 10 \mu\text{C}$ .



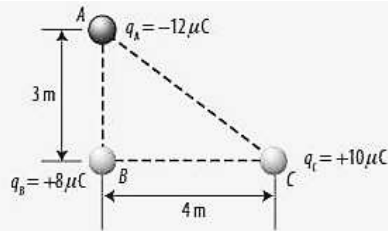


Figura 1.54

1.13 Dos cuerpos cargados positivamente, cuyas magnitudes son  $4q$  y  $q$ , están fijas en los extremos opuestos de una barra aislante horizontal y separados entre sí una distancia  $d = 30$  cm. Considera que un tercer cuerpo electrizado se desliza sobre la barra. Determina la posición de la tercera carga respecto a la primera ( $4q$ ) cuando se encuentra en equilibrio.

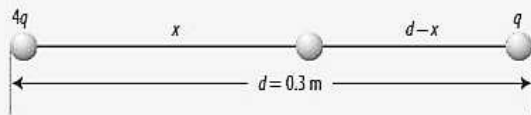


Figura 1.55

**ALERTA:** Aplica la ley de Coulomb, considerando que las fuerzas sobre la carga central son de la misma magnitud; pero, de sentido opuesto.

1.14 Dos partículas electrizadas positivamente se encuentran separadas 5 cm. Si entre estas se ejerce una fuerza de repulsión de 2.4 N y si una tiene el triple de carga que la otra, determina el número de electrones que le faltan a cada partícula. El medio en que se encuentran es el aire.

1.15 Se tienen dos partículas electrizadas negativamente, una con  $8.4 \times 10^{14}$  electrones y la otra con una quinta parte de los electrones de la primera. Si al interactuar en el aire y sin considerar el efecto de la gravedad, se ejerce una fuerza de  $5.6 \times 10^2$  N, determina la distancia de separación entre las partículas.

1.16 Determina la magnitud y dirección de la fuerza resultante que experimenta la carga  $q_1$  con respecto a las otras cargas eléctricas, si todas están ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de 12 cm por lado. Considera los siguientes datos: el medio es el aire y  $q_1 = 10 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 7 \mu\text{C}$  y  $q_3 = 3 \mu\text{C}$ .

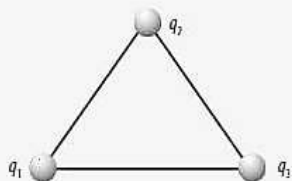


Figura 1.56

1.17 Se tiene un sistema de tres cargas eléctricas colocadas en los vértices de un triángulo rectángulo de 8 cm de alto y

3 cm de base, situado en el aire, como se indica en la figura 1.57. Determina:

- La magnitud y dirección de la fuerza resultante de origen eléctrico que experimenta la carga  $q_1$  con respecto a las otras.
- La energía eléctrica de  $q_1$ .
- El potencial eléctrico en el punto de la carga eléctrica uno.

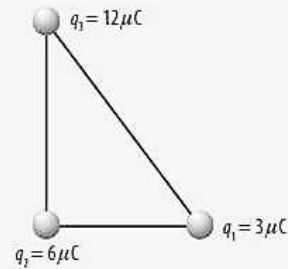


Figura 1.57

1.18 Determina la fuerza que experimenta una carga de prueba positiva de  $50 \times 10^{-9}$  C, cuando se encuentra en una región de campo eléctrico de 750 N/C.

1.19 Una carga eléctrica de  $75 \times 10^{-6}$  C genera una intensidad de campo eléctrico de  $1.5 \times 10^5$  N/C. Si la carga eléctrica está en el aire, determina la distancia que hay de la carga eléctrica hasta el punto donde se midió el campo eléctrico.

1.20 Calcula la intensidad de campo eléctrico que experimenta una carga eléctrica de prueba positiva colocada en el vértice de un triángulo rectángulo, si en los otros dos vértices están colocadas cargas de  $-25 \times 10^{-9}$  C y  $35 \times 10^{-9}$  C, respectivamente, como se muestra en la figura 1.58.

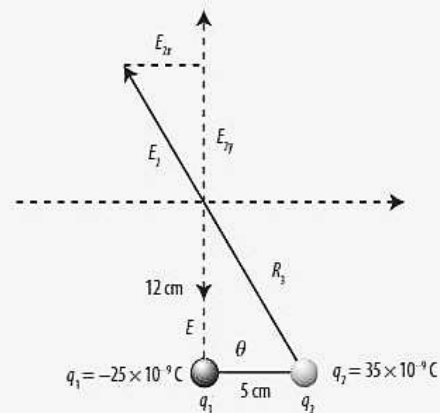


Figura 1.58

1.21 Dos cargas puntuales de  $2 \mu\text{C}$  se localizan sobre el eje horizontal de forma simétrica, desde el origen en  $x = 1$  m y en  $x = -1$  m, respectivamente.

- Determina el campo eléctrico sobre el eje  $y$ , en  $y = 0.5$  m.



- b) Calcula la fuerza sobre una carga de  $-5 \mu\text{C}$  situada en el eje  $y$  y en  $y = 0.5 \text{ m}$ .

**Nota:** Considera que el campo eléctrico es la suma de los campos producidos por cada carga.

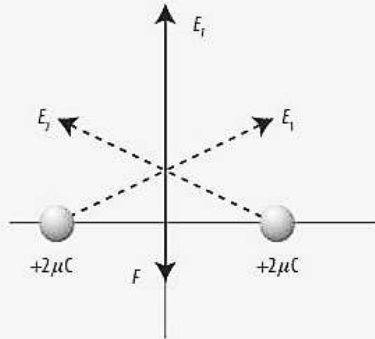


Figura 1.59

**1.22** Se tiene una pequeña esfera de saúco de 3 g suspendida de un hilo de material aislante y de masa despreciable, cuya longitud es de 20 cm. La esfera se encuentra dentro de un campo eléctrico uniforme horizontal hacia la derecha de  $5 \times 10^3 \text{ N/C}$ . Calcula:

- La tensión del hilo si está en equilibrio cuando el hilo forma un ángulo de  $20^\circ$  con la vertical.
- La carga eléctrica de la esfera.

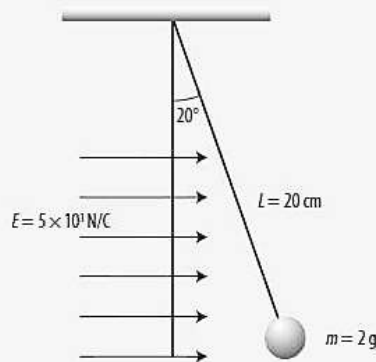


Figura 1.60

**1.23** Una esfera de corcho cargada eléctricamente, de 1.5 g de masa, está suspendida de un hilo de masa despreciable dentro de un campo eléctrico uniforme de

$$E = (3 \times 10^5 \mathbf{i} + 5 \times 10^5 \mathbf{j}) \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Si la esfera queda en equilibrio a la derecha cuando  $\theta = 35^\circ$  con la vertical, determina:

- La carga eléctrica de la esfera.
- La tensión en la cuerda.

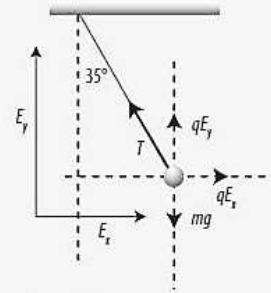


Figura 1.61

**1.24** Una esferita de caucho de 12 g de masa se suspende con un hilo de 15 cm de longitud, de masa despreciable, dentro de un campo eléctrico uniforme horizontal hacia la izquierda de  $10000 \text{ N/C}$ . Si la esferita se mantiene en equilibrio cuando el hilo forma un ángulo de  $25^\circ$  con la vertical, como se muestra en la figura 1.62, determina:

- La carga de la esfera.
- La tensión del hilo.

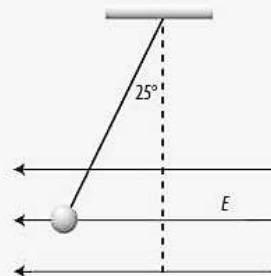


Figura 1.62

**1.25** Una esfera de 4 g está suspendida de un hilo de 40 cm de longitud y de masa despreciable; al aplicarle un campo eléctrico uniforme horizontal hacia la derecha de  $300 \text{ V/m}$ , la esfera se desplaza hasta quedar en equilibrio cuando el ángulo de inclinación entre el hilo y la vertical es de  $28^\circ$ . Determina:

- La tensión del hilo.
- La carga eléctrica de la esfera.

**1.26** Determina la fuerza que experimenta una carga de prueba positiva de  $11.5 \times 10^{-9} \text{ C}$ , cuando se encuentra en una región de campo eléctrico de  $800 \text{ N/C}$ .

**1.27** Una carga eléctrica de  $25 \times 10^{-6} \text{ C}$  genera una intensidad de campo eléctrico de  $13 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Si la carga eléctrica está en el aire, determina la distancia que hay de la carga eléctrica hasta el punto.

**1.28** Calcula la intensidad de campo eléctrico en un punto cercano a una carga eléctrica puntual, si en dicho punto un electrón experimenta una fuerza igual a su peso y se sabe que la masa del electrón es de  $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , y su carga eléctrica es de  $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

**1.29** Determina la intensidad de campo eléctrico en un punto donde está situada una partícula cuya carga es de  $1.6 \times 10^{-19}$  C y su masa es de  $1.67 \times 10^{-27}$  kg y en el caso en el que la partícula experimenta una fuerza igual a su peso.

**1.30** Una varilla metálica de 30 cm de longitud forma un semicírculo. La varilla está electrizada uniformemente y la magnitud de su carga eléctrica total es de  $15 \mu\text{C}$ . Determina el campo eléctrico en el centro del semicírculo.



Figura 1.63



**ALERTA:** Considera la densidad de carga longitudinal en función del arco e integra en función del ángulo.

**1.31** Se tienen dos placas metálicas cargadas eléctricamente y separadas 10 cm, entre sí, en el vacío; en tanto, el campo eléctrico entre las placas es uniforme con intensidad  $E = 5000$  N/C. Un electrón es liberado desde el reposo, sobre la superficie de la placa negativa. Determina:

- El tiempo que tarda en alcanzar la placa positiva.
- La velocidad al chocar con la placa positiva.

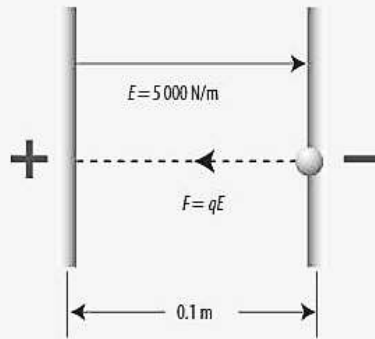


Figura 1.64

**1.32** Dos placas metálicas separadas 5 cm se conectan a una fuente de 12 V. Si las placas están en el vacío, determina:

- El campo eléctrico entre las placas.
- La fuerza sobre un electrón libre entre las placas.
- La energía potencial perdida por un electrón, cuando va de la placa negativa a la positiva.
- La velocidad que adquiere al soltarlo desde la placa negativa al momento inmediato anterior de chocar con la placa positiva.
- La aceleración del electrón.

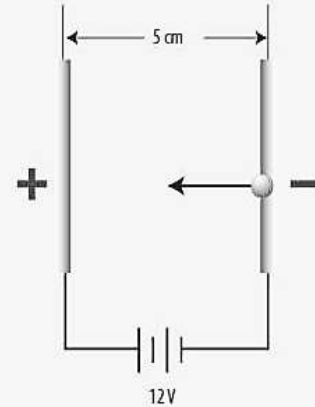


Figura 1.65

**1.33** En un átomo de hidrógeno, calcula:

- La fuerza de atracción que experimenta el electrón si el radio de su órbita es de  $0.529 \times 10^{-10}$  m.
- La velocidad tangencial del electrón.

**1.34** Dos placas planas y paralelas verticales con cargas iguales en magnitud y de signo contrario están separadas 2.5 cm. Si de la placa negativa se libera un electrón y tarda en chocar con la placa opuesta 13 ns, determina:

- La magnitud del campo eléctrico entre las placas.
- La velocidad del electrón al chocar; despreciar el efecto de la gravedad.

**1.35** El campo eléctrico entre dos placas paralelas verticales es de 12000 V/m, las placas están separadas 4 cm. Si se desprende un electrón de la placa negativa, determina:

- El tiempo que tarda en chocar con la placa positiva.
- La velocidad con la cual choca.
- La energía cinética en el momento en el que se produce el choque.

**1.36** La separación entre dos placas metálicas verticales cargadas es de 15 cm en el vacío; en tanto, el campo eléctrico entre las placas es uniforme con intensidad  $E = 3000$  N/C. Un electrón se suelta desde el reposo, justo sobre la superficie de la placa negativa. Determina:

- El tiempo que tarda el electrón en alcanzar la otra placa.
- La velocidad que alcanza el electrón justo cuando golpea la placa positiva.

**1.37** Un electrón que se aceleró con una diferencia de potencial de 480 V entra en un campo eléctrico uniforme (véase figura 1.66 en la página siguiente) de 4500 V/m de forma perpendicular al campo, después de 35 ns, determina:

- La posición del electrón.
- La energía total del electrón; despreciar el efecto de la gravedad.

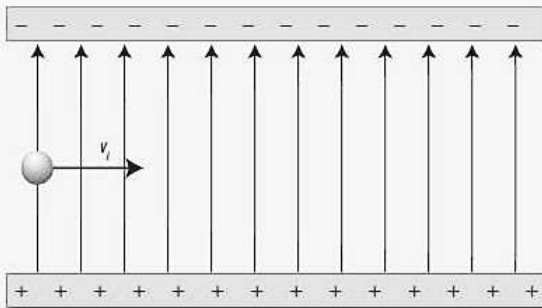


Figura 1.66

**1.38** Si una gota de aceite cargada eléctricamente se mantiene en reposo entre dos placas horizontales separadas 2 cm, las cuales generan un campo eléctrico de  $5.35 \times 10^4$  V/m hacia arriba, determina:

- La diferencia de potencial entre placas.
- La masa de la gota si tiene un exceso de  $5.3 \times 10^{18}$  electrones.

**1.39** Si la magnitud del potencial eléctrico a una distancia de una carga eléctrica puntual es de 750 V y el campo eléctrico es de 340 V/m. Determina:

- La distancia a que se encuentra la carga.
- La magnitud de la carga.

**1.40** Calcula la magnitud y dirección del campo eléctrico a una distancia de 5 cm del extremo sobre la línea longitudinal de una barra delgada de 10 cm, cargada eléctricamente de forma uniforme con una carga de  $50 \times 10^{-6}$  C.

**1.41** Determina el campo eléctrico generado por un aro de 5 cm de radio, cargado eléctricamente de forma uniforme con una carga de  $15 \mu\text{C}$ , en un punto sobre el eje que pasa por el centro del aro perpendicular a su plano y a una distancia de 7.5 cm del centro.

**1.42** Una partícula de 2.5 g, cargada negativamente, se deja caer desde el reposo en el vacío, a una altura de 8.5 cm. Al caer, la partícula lo hace dentro de un campo eléctrico uniforme de  $9.5 \times 10^3$  N/C hacia arriba. Si la carga es de  $10 \mu\text{C}$ , determina la velocidad con que cae.

**1.43** a) Determina la carga negativa que debe tener una partícula de 20 g de masa si queda suspendida en un campo eléctrico uniforme de 25 000 V/m.

b) Indica el sentido del campo eléctrico.

**1.44** Se tiene una caja triangular dentro de un campo eléctrico de  $2.4 \times 10^5$  N/C. Determina el flujo eléctrico a través de:

- la superficie cuadrada vertical.
- la superficie inclinada.
- la superficie total.

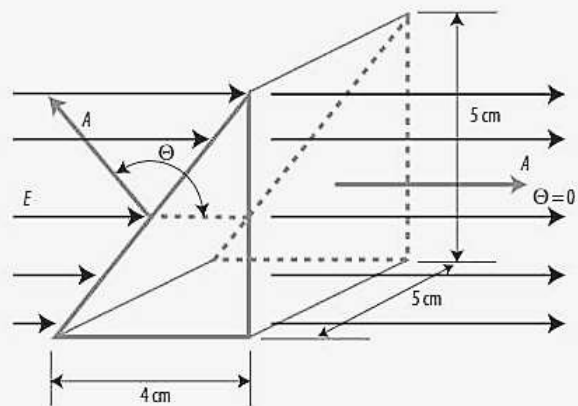


Figura 1.67

**1.45** Determina el campo eléctrico a 10 cm de una carga eléctrica puntual aislada de  $15 \mu\text{C}$ , que está en el aire.

**Nota:** El campo eléctrico debido a una carga puntual aislada  $q$  se determina considerando una superficie gaussiana y aplicando posteriormente la ley de Gauss.

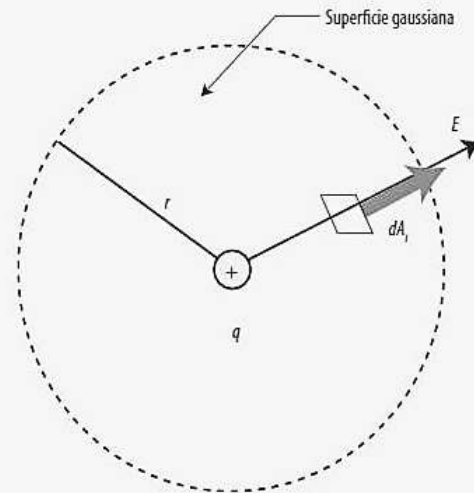


Figura 1.68

**1.46** Una placa conductora de  $30 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$  se encuentra electrizada de forma uniforme con una carga total de  $4 \times 10^{-8}$  C. Determina:

- La densidad de carga sobre la placa.
- El campo eléctrico que sale de una superficie de la placa.

**1.47** Una gran placa tiene una densidad de carga eléctrica uniforme de  $8.6 \mu\text{C}$  por centímetro cuadrado. Determina la intensidad de campo eléctrico a 10 cm por delante de la placa.



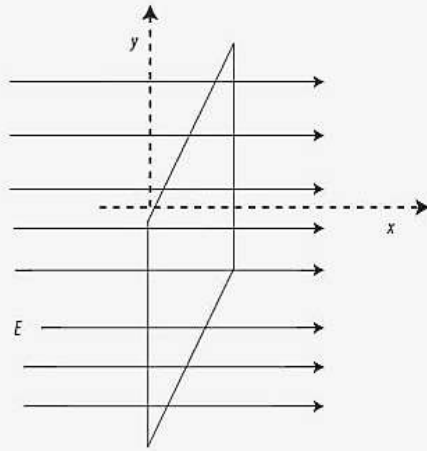


Figura 1.69

1.48 Un tubo cilíndrico metálico con 5 cm de radio y 170 cm de largo tiene carga eléctrica distribuida uniforme en su superficie, el campo eléctrico a 9 cm radial hacia afuera de su eje es  $36 \times 10^3$  N/C. Determina:

- La carga total.
- El campo eléctrico a 3 cm del eje.

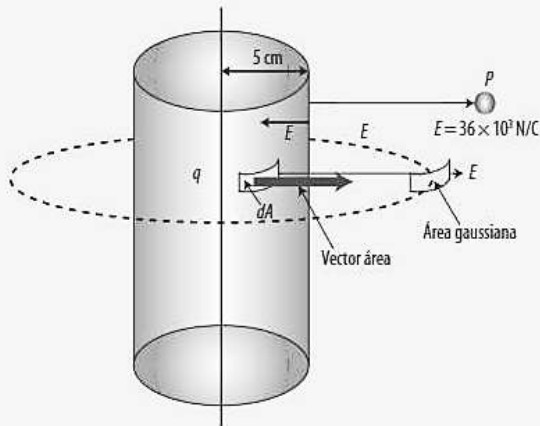


Figura 1.70

1.49 Determina cuál es la intensidad de campo eléctrico entre dos placas cargadas positiva y negativamente que están separadas 3 cm, si para trasladar una carga de  $3 \mu\text{C}$  desde la placa negativa hasta la positiva se requiere desarrollar un trabajo de 0.12 J.

1.50 Se tienen tres cargas eléctricas  $q_1 = 24 \times 10^{-6}$  C,  $q_2 = -16 \times 10^{-6}$  C y  $q_3 = 14 \times 10^{-6}$  C colocadas en los vértices de un triángulo como se muestra en la figura 1.71. Determina la energía potencial en el punto en que se encuentra colocada la carga  $q_3$ .

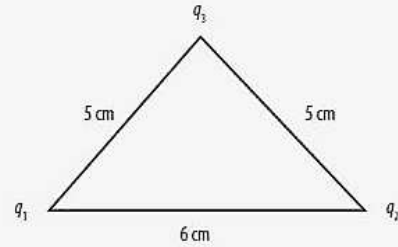


Figura 1.71

1.51 Hay un sistema de dos cargas eléctricas de  $5 \mu\text{C}$  y  $-10 \mu\text{C}$  separados 7 cm. Calcula la energía si se coloca una tercera carga de  $4 \mu\text{C}$  a 3 cm de la carga de  $5 \mu\text{C}$  entre la línea recta que las une. Determina también la energía total cuando se coloca a 2 cm.



Figura 1.72

1.52 Dos cargas puntuales de  $-8 \mu\text{C}$  y de  $15 \mu\text{C}$  se encuentran en el aire, separadas 80 cm. Calcula la energía debida a una tercera carga de  $-3 \mu\text{C}$  que se coloca en el centro de la recta que une a las dos cargas.

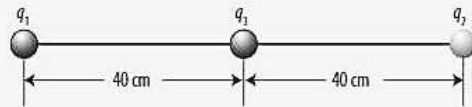


Figura 1.73

1.53 Una partícula con carga  $q = 3 \mu\text{C}$  y masa de 0.015 kg está atada a un hilo no conductor de longitud  $L = 17.5$  cm de largo, el cual está atado en un punto del pivote p. La partícula está sobre una mesa horizontal libre de fricción. En un instante dado, la partícula es liberada del reposo, cuando la posición del hilo forma un ángulo de  $60^\circ$ , con un campo eléctrico uniforme de  $E = 350$  V/m horizontalmente. Determina la velocidad de la partícula cuando el hilo y el campo eléctrico son colineales.

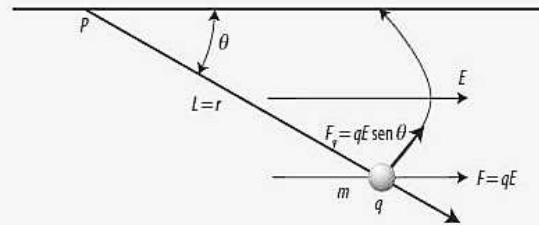


Figura 1.74



ALERTA: Se sugiere utilizar el principio de trabajo y energía.

**1.54** Se tienen dos placas metálicas, conectadas a una batería de 120 V. Considera que las placas están dentro de una campana al vacío. Determina:

- El campo entre las placas.
- La fuerza del electrón entre las placas.
- La energía potencial que requiere el electrón cuando va de *b* a *a*.
- La velocidad que adquiere al instante de chocar con la placa positiva.

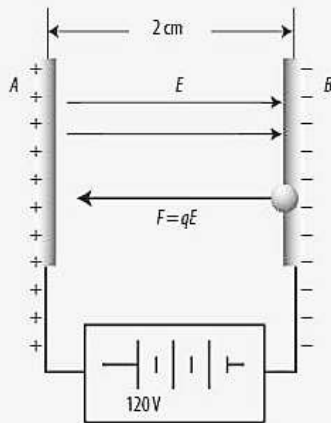


Figura 1.75

**1.55** Determina el potencial eléctrico que existe en una región de campo eléctrico, si para trasladar una carga eléctrica de  $2 \times 10^{-4}$  C entre dos puntos localizados dentro del campo eléctrico se requiere una energía eléctrica de  $50 \times 10^{-3}$  J.

**1.56** Determina el número de electrones de una carga eléctrica que se mueve entre dos puntos dentro de un campo eléctrico donde la diferencia de potencial es de 1.5 V, si la energía eléctrica requerida es de 0.65 J.

**1.57** Se tienen dos placas planas separadas 2 cm conectadas a las terminales de una fuente de corriente directa cuyo voltaje es de 750 V. Para un electrón que se encuentra en la placa negativa. Determina:

- La intensidad de campo eléctrico entre las placas.
- La fuerza de enlace que se ejerce sobre el protón.
- La aceleración que adquiere el electrón cuando se libera.
- La velocidad con que choca con la placa positiva.

**1.58** Se tiene un capacitor de placas planas y paralelas separadas 1 cm conectado a una batería de 12 V. Determina:

- La fuerza que experimenta el electrón para liberarse desde la placa negativa.

b) La aceleración que adquiere el electrón.

c) La velocidad al chocar con la placa positiva.

**1.59** Determina el potencial eléctrico total en el punto *P* debido a la interacción de las cargas eléctricas colocadas como se muestra en la figura 1.76.  $q_1 = 50 \times 10^{-6}$  C,  $q_2 = -10 \times 10^{-6}$  C,  $q_3 = 20 \times 10^{-6}$  C.

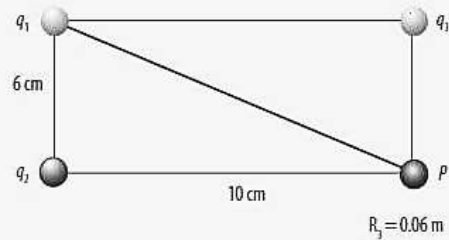


Figura 1.76

**1.60** En un punto dentro del campo eléctrico a cierta distancia de la carga eléctrica se mide un potencial eléctrico de 800 V con una intensidad de campo eléctrico de 12 300 N/C. Determina:

- La distancia del punto a la carga.
- La magnitud de la carga eléctrica.

**1.61** En un punto cercano a una carga eléctrica se mide que el potencial eléctrico es de 100 V y el campo eléctrico es de 40 N/C. Determina la magnitud de la carga eléctrica.

**1.62** Dos placas metálicas paralelas separadas 4 cm están conectadas a una batería de 28 V. Determina la aceleración que adquiere un electrón cuando se libera de la placa negativa, si la carga eléctrica del electrón es de  $1.6 \times 10^{-19}$  C y su masa es de  $9.1 \times 10^{-31}$  kg.

**1.63** Un electrón se mueve paralelo al eje horizontal, con velocidad inicial de  $2.7 \times 10^6$  m/s. Su velocidad se reduce hasta  $1.09 \times 10^5$  m/s cuando ha recorrido 5 cm.

- Calcula la diferencia de potencial.
- Indica el punto de mayor potencial.

**1.64** Un conductor esférico tiene un radio de 14 cm y una carga de  $26 \mu\text{C}$ . Calcula:

- El campo eléctrico en el centro de la esfera.
- El potencial y campo eléctrico para 20 cm.

**1.65** En un punto del espacio, se ha determinado que el potencial eléctrico es  $V = 7x - 2x^2y + 3yz^2$ . Determina:

- Las ecuaciones del campo eléctrico en los ejes *x*, *y* y *z*.
- La magnitud del campo eléctrico en un punto con coordenadas (3, 1, -2).

**PROBLEMA RETO.**

Si se colocan dos partículas electrizadas positivamente con cargas de  $2\ \mu\text{C}$  y  $3.4\ \mu\text{C}$ , respectivamente, separadas horizontalmente 8 cm, determina la distancia desde la carga de  $2\ \mu\text{C}$  hasta un punto  $P$  sobre la línea que une las dos cargas, si al colocar una carga de prueba en ese punto la carga de prueba no experimenta fuerza alguna de tipo eléctrico.

## Practica 1.

Experimentos de electrostática (electrización de cuerpos)

**Realiza los siguientes experimentos o dos semejantes a estos.**

Frote un globo inflado con tu pelo o con una franela.

1



Aproxímalo a un chorro delgado de agua.

*(También intenta sustituir el globo por otros objetos de plástico)*

**¿Por qué los objetos se comportan como lo hacen?**

2



Aproxímalo a una lata metálica acostada sobre una superficie horizontal plana.

### Construye un electroscopio

3



(haz clic sobre la imagen para detalles)

### **¿Para qué sirve este aparato?**

Describe brevemente su funcionamiento.

*Además puedes agregar otros experimentos que también pongan en evidencia de la existencia de la carga eléctrica, así como de que hay dos tipos.*

## Realiza un video corto donde muestres los experimentos funcionando.

Subes el video a YouTube y en este espacio colocas el enlace.

El tiempo sugerido de duración del video es de unos 5 – 9 minutos aproximadamente.

Trabajaran en equipo, manteniendo la sana distancia física entre compañeros.

### Ejemplo de enlace:

El enlace es

<https://youtu.be/QSGd2ZDGG3o>

## Los elementos a tomar en cuenta para evaluar el video son:

INDICADOR	DESCRIPTOR	EXCELENTE 20	MUY BIEN 15	REGULAR 10	NO 0
<i>Calidad del Video.</i>	<i>Claridad y Resolución.</i>				
<i>Organización del video.</i>	<i>Edición / uso de subtítulos.</i>				
<i>Participación en el video.</i>	<i>Todos participan.</i>				
<i>Orden del Experimento.</i>	<i>Descripción de material y pasos a seguir.</i>				
<i>Realización del experimento.</i>	<i>Funcionan.</i>				



## Practica 2.

### Superficies Equipotenciales y Campo Eléctrico

---

#### OBJETIVOS

- Determinar el campo eléctrico utilizando métodos experimentales.
- Encontrar una serie de superficies equipotenciales a partir de mediciones de diferencia de potencial.
- Determinar las líneas de campo eléctrico a partir del gradiente de la función del voltaje.

#### INTRODUCCIÓN

##### *Función Potencial de Campo Eléctrico*

Uno de los grandes problemas que se han tenido que resolver durante el desarrollo de la teoría electromagnética y de las telecomunicaciones ha sido el de definir la forma como se distribuye y viaja la energía en el espacio. Para resolver éste problema, se ha optado por utilizar funciones que a cada punto del espacio y momento del tiempo, le asignen un valor igual a la cantidad de energía por unidad de volumen ( $W_e$  y  $W_m$ ), que hay almacenada en él; o a la cantidad de energía por unidad de superficie ( $\vec{S}$ ), que fluye a través de él.

Sin duda alguna, el uso de las funciones mencionadas atrás resulta ser de gran utilidad; sin embargo, la definición de la regla de correspondencia de dichas funciones (para algunas situaciones en particular), resulta ser un problema extremadamente complicado, que frecuentemente implica la solución de ecuaciones diferenciales no lineales.

Para resolver el problema, se han planteado métodos alternativos, que permiten obtener los mismos resultados, pero con mucho menos trabajo. Uno de estos métodos consiste en definir dos funciones llamadas: Campo Eléctrico y Campo Magnético; las cuales son relativamente fáciles de encontrar y se pueden usar para calcular a  $\vec{S}$ ,  $W_e$  y  $W_m$ .

La medición directa del campo eléctrico es muy complicada, por lo que requiere de equipos muy complejos y caros. Sin embargo, hay una función llamada *Función de Potencial Eléctrico*, que se puede medir con gran facilidad y que permite determinar al campo eléctrico sin muchas complicaciones.

Antes de definir a la función de potencial, recordemos que el *CAMPO ELÉCTRICO* es una función vectorial de variable vectorial, que a cada punto del espacio le asocia la fuerza que siente una carga unitaria y puntual al estar en él. El campo eléctrico se mide en:

$$\frac{\text{Newtons}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Volts}}{\text{metro}}$$

El *POTENCIAL ELÉCTRICO* ( $V$ ), es una función real de variable vectorial, que a cada punto del espacio le asocia el trabajo que se debe realizar para mover a una carga unitaria y puntual desde un punto donde el campo es igual a cero, hasta el punto en cuestión. El potencial eléctrico se mide en:

$$\frac{\text{Joules}}{\text{Coulomb}} = \text{VOLTS}$$

Considerando la definición de ambas funciones, es fácil pensar que:  $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

o despejando  $\vec{E}$ ,  $\vec{E} = -\nabla V$

Considerando la definición de la función potencial, se puede pensar que el trabajo necesario para mover a una carga desde un punto A hasta un punto B, es igual a la resta del valor del potencial en A menos el valor del potencial en B:

$$V_{AB} = V_A - V_B = W \text{ para mover 1 Coulomb de A hacia B.}$$

A la cantidad  $V_{AB}$ , se le llama diferencia de potencial o voltaje entre A y B, y se puede medir con relativa facilidad, usando un VÓLTMETRO.

## MATERIAL

- Multímetro con puntas.
- Cables banana - caimán.
- Cable de alimentación para fuente de corriente directa.
- Caja con arena.
- Electrodo de distintas características.

## DESARROLLO

Utilizando los elementos disponibles, haga las mediciones que considere necesarias para determinar la regla de correspondencia de la función de Campo Eléctrico, debida a dos placas planas paralelas cargadas eléctricamente.

1. - Arme el dispositivo que se muestra en la figura. Alisar la superficie de la arena lo mejor posible.

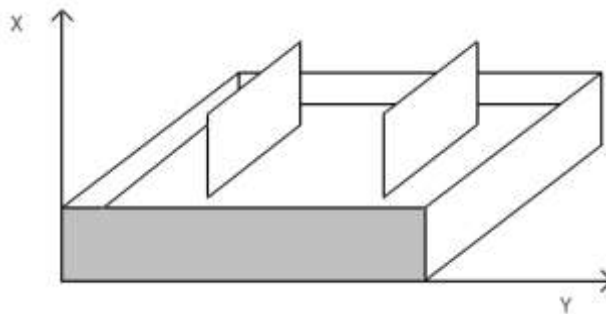
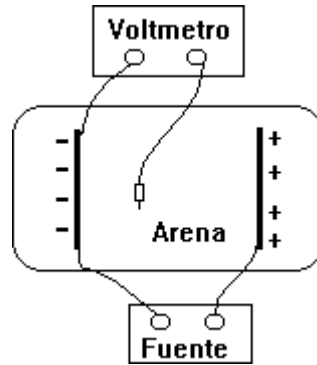


Figura 1.

2. - Conecte la fuente de voltaje con 30 volts de corriente directa como se muestra en la siguiente figura, para suministrar carga eléctrica a las placas conductoras:

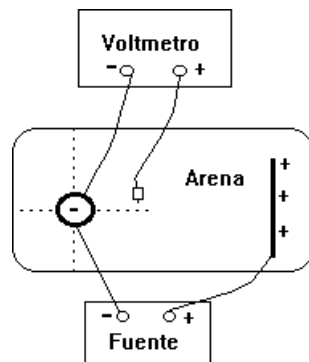


3. - Con ayuda del voltímetro, haga las mediciones que considere necesarias para poder definir la regla de correspondencia de la función de Potencial Eléctrico. Localizar 5 líneas equipotenciales y trazarlas sobre la arena

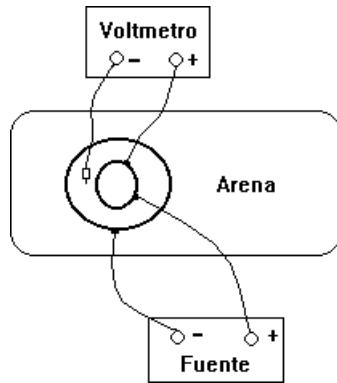
4. -. A partir de la función de potencial obtenida atrás, determine la regla de correspondencia de la función de Campo Eléctrico. Trazar las líneas de campo eléctrico sin borrar las equipotenciales.

5. - Realizar experimentos similares para diferentes configuraciones de placas: Para todos los casos obtenga las superficies equipotenciales que determinen la función potencial, así como el campo eléctrico.

a) Una línea y una placa plana con cargas de diferente signo.



b) Dos cilindros concéntricos con cargas de diferente signo.



Dos cilindros delgados separados

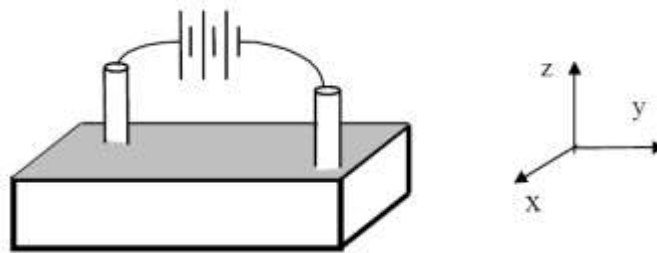


Figura 2.

c) Dos cilindros delgados cercanos (dipolo)

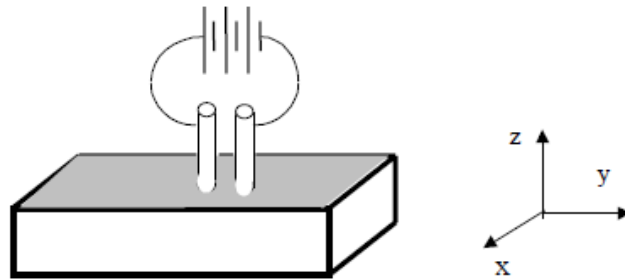


Figura 3.

d) Dos cilindros concéntricos de diferente diámetro

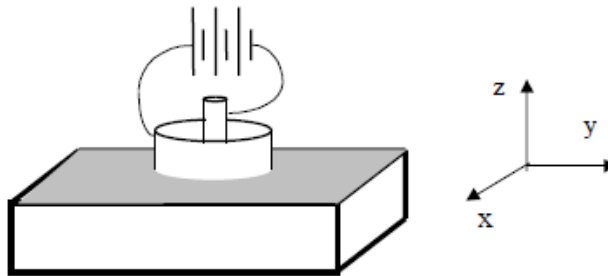


Figura 4.

Responder a las siguientes preguntas:

6. ¿Son superficies equipotenciales los electrodos?
7. ¿Existe alguna diferencia de potencial sobre el eje z?
8. ¿Existe diferencia de potencial dentro y fuera de las superficies cerradas de la figura 4?
9. Comprobar que las líneas de campo eléctrico corresponden al gradiente del voltaje (ubicar un punto cualquiera en la figura 1 ó 3 y medir las diferencias de potencial en varias direcciones para una distancia  $d$ , observar en qué dirección es mayor).

### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Alonso, Marcelo y J. Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.  
Serway, Raymond A. y John W. Jewett, Jr. Física II, 3ª edición.  
Resnik Halliday Krane. Física Volumen 2, 5ª edición, Ed. Patria.  
Vega, I. P. N. Electromagnetismo, 1ª edición, Ed. Patria  
Young, Freedman, Sears, Zemansky. Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12ª edición, Ed. Addison – Wesley, PEARSON  
Reyes, Salcedo, y Carrillo. Manual de Experimentos de Electromagnetismo, ITAM.

### REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

<http://www.jfinternational.com/mf/electricidad-magnetismo.html>

<http://www.acienciasgalilei.com/videos/3electricidad-mag.htm>

[http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo\\_electrico/fuerza/fuerza.htm](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo_electrico/fuerza/fuerza.htm)

[http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02sc-physics-ii-electricity-and-magnetism-fall-2010/discrete-and-continuous-distributions-of-charge/MIT8\\_02sc\\_notes08.pdf](http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02sc-physics-ii-electricity-and-magnetism-fall-2010/discrete-and-continuous-distributions-of-charge/MIT8_02sc_notes08.pdf)

□ [Aplicaciones de la Ley de Gauss | Video 1 - YouTube](#)

<https://www.youtube.com/watch?v=8euXYmOsLBQ>

**FUERZA Y CAMPO ELÉCTRICO. LÍNEAS DE FUERZA**

<https://www.youtube.com/watch?v=ltbR0CieTHU>

**Carga Eléctrica y Ley de Coulomb**

<https://www.youtube.com/watch?v=3QG8EsRO-To>

**Proyecto - Botella De Leyden - FI UNAM**

<https://www.youtube.com/watch?v=QPO1t4y4T7M>

**Electric Field Applet, Charges and Fields.**

<https://phet.colorado.edu/en/simulations/charges-and-fields>

<https://phet.colorado.edu/es/simulations/charges-and-fields>

**Simulación eduMedía, Física, Electricidad y Magnetismo.**

<https://www.edumedia-sciences.com/es/node/74-electricidad-y-magnetismo>

## 2.Unidad Energía Electroestática

### *Introducción.*

En las secciones anteriores vimos que el concepto de energía fue sumamente útil para tratar los temas de la mecánica. El punto de vista de la energía es especialmente útil para la electricidad. No sólo expande la ley de la conservación de la energía, sino que también nos ofrece otra manera de tratar los fenómenos eléctricos. Además, en muchos casos, la energía es una poderosa herramienta para solucionar problemas con más facilidad que si se utilizan fuerzas y campos eléctricos.

En la unidad anterior, cuando estudiábamos el potencial, se introdujo el concepto de energía potencial referido a una carga puntual. Ahora vamos a estudiar la energía electrostática debida a la interacción de un conjunto de cargas. Dado que nos referimos a condiciones estáticas, la energía se debe a posiciones relativas de las cargas, por tanto es una energía potencial

Esta unidad se analiza el primero de los tres *elementos simples de circuitos* que se interconectan mediante alambres para formar un circuito eléctrico. Los circuitos eléctricos son la base de la gran mayoría de los dispositivos que se utilizan el día de hoy. Analizará los *capacitores*, dispositivos que almacenan carga eléctrica. Esta explicación se complementará en la unidad 3 con el estudio de los *resistores* y en la unida 5 con el estudio de los *inductores*. En futuros cursos consecutivos verá elementos de circuito más complejos, como los *diodos* y los *transistores*.

Los capacitores se usan de manera regular en diversidad de circuitos eléctricos. Por ejemplo, se usan para sintonizar la frecuencia de los receptores de radio, en filtros de fuentes de energía eléctrica, para eliminar las chispas en los sistemas de encendido de los automóviles y como dispositivos de almacenamiento de energía en unidades de destello electrónico.

En esta unidad se estudia el principio del funcionamiento del capacitor eléctrico, la definición de los conceptos y las variables eléctricas, así como el análisis matemático de las variables para el diseño del capacitor (considerando sus diferentes geometrías y materiales). Asimismo se analiza el almacenamiento de energía eléctrica y las características eléctricas de cada conexión; además, también se lleva a cabo la resolución de problemas teórico – prácticos para una mejor comprensión del tema.

### 2.1 Energía Potencial Electroestática.

La energía potencial debida a la interacción de cargas estáticas, recibe el nombre de energía electrostática. Esta energía es el trabajo necesario para situar las cargas en sus posiciones respectivas. Dicho trabajo se hace mediante fuerzas que en cada punto son del mismo módulo y

dirección pero sentido contrario al que tiene el campo electrostático. La energía electrostática de un sistema de cargas puntuales considera las posiciones relativas de las cargas, sin tener en cuenta la energía de creación de las propias cargas. Si tenemos una carga  $q$  en el seno de un campo eléctrico  $E$ , el trabajo del campo para trasladar la carga desde un punto a otro es:

$$W = q \int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{l} = -q(V_2 - V_1)$$

El trabajo que realizan las fuerzas externas contra el campo, sin que varíe la energía cinética de la carga, es de signo contrario al obtenido anteriormente, ya que la fuerza es de signo opuesto en cada punto del recorrido. Este trabajo es la variación de energía electrostática del sistema debido al traslado de la carga desde un punto a otro.

$$W_e = q(V_2 - V_1)$$

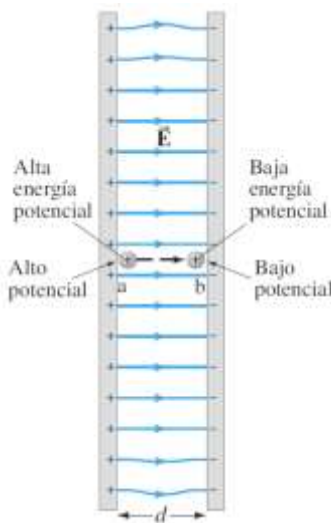
Si consideramos el punto 1 situado en el infinito y el origen de potenciales en dicho punto,  $V_1 = 0$ , la energía electrostática de una carga en un punto de potencial  $V_2$  será la obtenida en el capítulo tres, es decir,

$$W_e = qV_2$$

En el sistema internacional SI la unidad de energía electrostática es el julio [J] igual a culombio por voltio. Esta unidad es muy grande por lo que en la física atómica y del estado sólido se suele utilizar la unidad conocida como **electrón voltio** [eV], que es el trabajo requerido para mover un electrón de un punto a otro entre los que existe la diferencia de potencial de un voltio.

$$1 [eV] = 1.60 \times 10^{-19} [C] \times 1 [V] = 1.6 \times 10^{-19} [J]$$

Para aplicar la conservación de la energía necesitamos definir la energía potencial eléctrica, como lo hicimos para otros tipos de energía potencial. Como vimos en la unidad 1, la energía potencial puede definirse sólo para fuerzas conservativas. El trabajo que efectúa una fuerza conservativa sobre un objeto en movimiento, entre dos posiciones cualesquiera, es independiente de la trayectoria que siga el objeto. La fuerza electrostática entre dos cargas (ecuación,  $F = k Q_1 Q_2 / r^2$ ) es conservativa, ya que la dependencia en la posición es justa como la dependencia en la posición en el caso de la fuerza gravitacional,  $1/r^2$ , la cual, como vimos en secciones pasadas, es una fuerza conservativa. Así que podemos definir también la energía potencial  $U$  para la fuerza electrostática.



En la unidad 1 vimos que el cambio en energía potencial entre dos puntos  $a$  y  $b$  es igual al negativo del trabajo realizado por la fuerza conservativa para mover un objeto desde  $a$  hasta  $b$ :  $\Delta U = -W$ . De esta manera, definimos el cambio en la energía potencial eléctrica,  $U_b - U_a$ , cuando una carga puntual  $q$  se mueve de un punto  $a$  a otro punto  $b$ , como el negativo del trabajo que efectúa la

**Figura 58 El campo eléctrico realiza trabajo para mover a la carga  $q$  de la posición  $a$  hasta la posición  $b$ .**



fuerza eléctrica para mover la carga desde  $a$  hasta  $b$ . Por ejemplo, considere el campo eléctrico producido entre dos placas paralelas con cargas iguales y opuestas; suponemos que su separación es pequeña en comparación con su largo y su ancho, así que el campo  $\vec{E}$  debe ser uniforme sobre la mayor parte de la región entre las placas (figura 58). Ahora considere una pequeña carga puntual positiva  $q$  localizada en el punto  $a$  muy cerca de la placa positiva, como se muestra en la figura. Esta carga  $q$  es tan pequeña que no afecta a  $\vec{E}$ . Si esta carga  $q$  en el punto  $a$  se deja en libertad, la fuerza eléctrica realizará trabajo sobre la carga y la acelerará hacia la placa negativa. El trabajo  $W$  que efectúa el campo eléctrico  $E$  para mover la carga una distancia  $d$  es

$$W = Fd = qEd$$

donde usamos la ecuación  $F = qE$ . El cambio en energía potencial eléctrica es igual al negativo del trabajo realizado por la fuerza eléctrica:

$$U_b - U_a = -W = -qEd \quad (\text{Uniforme } \vec{E}) \quad (2.1)$$

para este caso de campo eléctrico  $\vec{E}$  uniforme. En el caso ilustrado, la energía potencial disminuye ( $\Delta U$  es negativa); mientras la carga eléctrica en la partícula se acelera desde el punto  $a$  hasta el punto  $b$  en la figura 58, la energía cinética  $K$  de la partícula aumenta en la misma cantidad. De acuerdo con la ley de conservación de la energía, la energía potencial eléctrica se transforma en energía cinética, de manera que la energía total se conserva. Observe que la carga positiva  $q$  tiene su energía potencial máxima en el punto  $a$ , cerca de la placa positiva. (En este punto, la carga tiene la mayor capacidad de realizar un trabajo (sobre otro objeto o sistema)) Lo contrario sería cierto para una carga negativa: su energía potencial sería máxima cerca de la placa negativa.

Cuando la fuerza eléctrica efectúa trabajo positivo sobre la carga, la energía cinética aumenta y la energía potencial disminuye. La diferencia en energía potencial,  $U_b - U_a$ , es igual al negativo del trabajo,  $W_{ba}$ , que realiza el campo eléctrico para mover la carga desde  $a$  hasta  $b$ ; por lo mismo, la diferencia de potencial  $V_{ba}$  es

$$V_{ba} = \Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -\frac{W_{ba}}{q} \quad (2.2)$$

Observe que el potencial eléctrico, al igual que el campo eléctrico, no depende de nuestra carga de prueba  $q$ .  $V$  depende de las otras cargas que generan el campo, pero no de  $q$ ;  $q$  adquiere energía potencial cuando está inmersa en el potencial  $V$  debido a otras cargas. Podemos ver, a partir de nuestra definición, que la placa positiva en la figura 58 está a un potencial mayor que la placa negativa. Así que un objeto cargado positivamente se desplaza de manera natural de una zona de mayor potencial hacia una zona de menor potencial. Una carga negativa hace justo lo contrario.

Como la diferencia de potencial eléctrico se define como la diferencia de energía potencial por unidad de carga, entonces, el cambio de energía potencial de una carga  $q$  cuando se desplaza entre dos posiciones  $a$  y  $b$  es:

$$\Delta U = U_b - U_a = q(V_b - V_a) = qV_{ba} \quad (2.3)$$

Esto es, si un objeto con carga  $q$  se desplaza a través de una diferencia de potencial  $V_{ba}$ , su energía potencial cambia en una cantidad  $qV_{ba}$ . Por ejemplo, si la diferencia de potencial entre las dos placas de la figura 58 es de 6 V, entonces una carga de +1 C que se mueve (digamos, por una fuerza externa) del punto  $b$  al punto  $a$ , ganará  $(1\text{ C})(6\text{ V}) = 6\text{ J}$  de energía potencial eléctrica. (Y perderá 6 J de energía potencial eléctrica, si se desplaza de  $a$  a  $b$ .) De la misma forma, una carga de +2 C ganará 12 J y así sucesivamente. Es decir, la diferencia de energía potencial es una medida de cuánta energía puede adquirir una carga eléctrica en una situación dada y, como la energía es la capacidad de realizar un trabajo, la diferencia de potencial eléctrico es también una medida de cuánto trabajo puede efectuar una carga dada. La cantidad exacta depende tanto de la diferencia de potencial como de la carga.

**Por lo tanto e resumen podemos concluir:**

La energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales separadas una distancia  $r$ , representa el trabajo requerido para ensamblar el sistema desde una separación infinita. Si las dos partículas tienen cargas de igual signo la energía es positiva, pero si tienen cargas de signos opuestos la energía es negativa. La expresión para la energía electrostática viene dada por:

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad \left( \begin{array}{l} \text{energía potencial eléctrica de} \\ \text{dos cargas puntuales } q_1 \text{ y } q_2 \end{array} \right) \quad (2.4)$$

Suponga que el campo eléctrico  $\vec{E}$  en el que se desplaza la carga  $q_0$  se debe a varias cargas puntuales  $q_1, q_2, q_3, \dots$  a distancias  $r_1, r_2, r_3, \dots$  de  $q_0$ , como se ilustra en la figura 59. Por ejemplo,  $q_0$  podría ser un ion positivo que se mueve en presencia de otros iones (figura 59). El campo eléctrico total en cada punto es la *suma vectorial* de los campos debidos a las cargas individuales, y el trabajo total realizado sobre  $q_0$  durante cualquier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. De la ecuación (2.4) se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba  $q_0$  en el punto  $a$  en la figura 59 es la *suma algebraica* (no la suma vectorial):

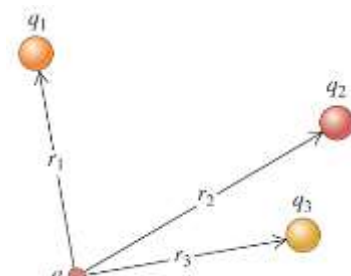


Figura 59 La energía potencial asociada con la carga  $q$  en el punto  $a$  depende de las cargas  $q_1, q_2, q_3$ , y de sus distancias  $r_1, r_2, r_3$  desde el punto  $a$ .

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \left( \begin{array}{l} \text{carga puntual } q_0 \text{ y} \\ \text{conjunto de carga } q_i \end{array} \right) \quad (2.5)$$

Cuando  $q_0$  está en un punto  $b$  diferente, la energía potencial está dada por la misma expresión, pero  $r_1, r_2, \dots$  son las distancias desde  $q_1, q_2, \dots$  al punto  $b$ . El trabajo efectuado sobre la carga  $q_0$  cuando se desplaza de  $a$  hasta  $b$  a lo largo de cualquier trayectoria es igual a la diferencia  $U_a - U_b$  entre las energías potenciales cuando  $q_0$  está en  $a$  y en  $b$ .

Se puede representar *cualquier* distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales, por lo que la ecuación (2.5) muestra que siempre es posible encontrar una función de la energía potencial para *cualquier* campo eléctrico estático. Se infiere que **para todo campo eléctrico debido a una distribución de carga estática, la fuerza ejercida por ese campo es conservativa.**

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) definen que  $U$  es igual a cero cuando todas las distancias  $r_1, r_2, \dots$  son infinitas, es decir, cuando la carga de prueba  $q_0$  está muy lejos de todas las cargas que producen el campo. Igual que para cualquier función de la energía potencial, el punto en que  $U = 0$ , es arbitrario; siempre se puede sumar una constante que haga a  $U$  igual a cero en cualquier punto que se elija. En los problemas de electrostática, por lo general lo más sencillo es elegir que este punto se encuentre en el infinito

La ecuación (2.5) da la energía potencial asociada con la presencia de la carga de prueba  $q_0$  en el campo producido por  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . Pero también hay energía potencial implicada en el arreglo de estas cargas. Si se comienza con las cargas  $q_1, q_2, q_3, \dots$  todas separadas entre sí por distancias infinitas, y luego se las acerca de manera que la distancia entre  $q_i$  y  $q_j$  sea  $r_{ij}$ , la energía potencial *total*  $U$  es la suma de las energías potenciales de interacción para cada par de cargas. Esto se escribe como

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.6)$$

Esta suma se extiende a todas las *pares* de cargas; no se permite que  $i = j$  (porque eso sería la interacción de una carga consigo misma), y sólo se incluyen términos con  $i < j$  para garantizar que cada par se tome en cuenta sólo una vez. Así, para explicar la interacción entre  $q_3$  y  $q_4$ , se incluye un término con  $i = 3$  y  $j = 4$ , pero no un término con  $i = 4$  y  $j = 3$ .

**Por lo siguiente:**

La energía potencial eléctrica total de un sistema de  $N$  cargas puntuales se obtiene sumando la energía para cada par de cargas y sumando los términos algebraicamente:

$$U = W_e = \frac{1}{2} k_e \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|r_j - r_i|} \quad (2.7)$$

o también:

$$U = k_e \sum_{j > i} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

donde  $U$  se denomina energía de ensamble.

La autoenergía o energía potencial eléctrica de un sistema continuo puede obtenerse mediante:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dv$$

Cuando se conoce la función potencial en una región del espacio, el vector de campo eléctrico se puede calcular como el gradiente negativo del potencial:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

En coordenadas cartesianas el gradiente negativo se expresa mediante:

$$\vec{E} = -\nabla V = \hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

Las componentes escalares del campo eléctrico en coordenadas cartesianas, están dadas por:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordenadas cilíndricas el campo eléctrico puede expresarse mediante:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} - \hat{\phi} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordenadas esféricas el campo eléctrico puede expresarse mediante:

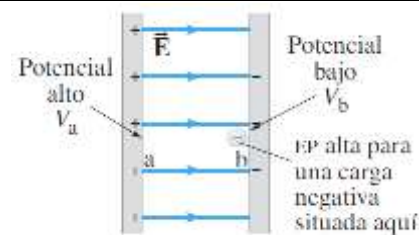
$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

**Problemas resueltos.**

**Problema resuelto 1.** Una carga negativa.

Considere una carga negativa, como un electrón, que se coloca cerca de la placa negativa de la figura 58, en el punto **b**, indicada de nuevo en la figura 60. Si el electrón puede moverse libremente, ¿su energía potencial eléctrica aumenta o disminuye? ¿Cómo cambia el potencial eléctrico?

**Nota:** Una carga negativa tiene alta energía potencial cuando el potencial **V** es bajo.

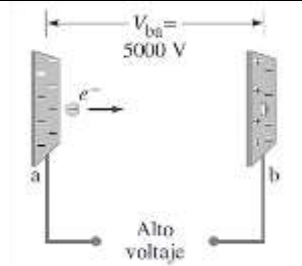


**Figura 60** La parte central de la figura 58 muestra una carga puntual negativa cerca de la placa negativa, donde su energía potencial (EP) es elevada.

**RESPUESTA** Un electrón liberado en el punto **b** se desplazará hacia la placa positiva. Conforme el electrón se desplaza hacia la placa positiva, su energía potencial *disminuye* en tanto que su energía cinética aumenta, así que  $U_a < U_b$  y  $\Delta U = U_a - U_b < 0$ . Sin embargo, observe que el electrón se mueve desde el punto **b** de bajo potencial hacia el punto **a** con mayor potencial:  $V_{ab} = V_a - V_b > 0$ . (Los potenciales  $V_a$  y  $V_b$  se deben a las cargas en las placas, no a la carga del electrón). Los signos de  $\Delta U$  y  $\Delta V$  son opuestos, porque la carga es negativa.

**Problema resuelto 2.** Electrón en un tubo de rayos catódicos.

Considere que un electrón en un tubo de rayos catódicos es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial  $V_b - V_a = V_{ba} = +500 V$  (figura 61). *a)* ¿Cuál es el cambio en la energía potencial del electrón? *b)* ¿Cuál es la velocidad del electrón ( $m = 9.1 \times 10^{-31} kg$ ) como resultado de esta aceleración?



**Figura 61** Electrón acelerado en un tubo de rayos Catódicos.

**NOTA:** La energía potencial eléctrica no depende de la masa, sólo de la carga y el voltaje. La velocidad *sí* depende de  $m$ .

**PLANTEAMIENTO** El electrón acelerado hacia la placa positiva disminuirá su energía potencial en una cantidad  $\Delta U = qV_{ba}$  (ecuación 2.3). La pérdida de energía potencial será igual a la ganancia en energía cinética (conservación de energía).

**SOLUCIÓN** *a)* La carga de un electrón es  $q = -e = -1.6 \times 10^{-19} C$ . Por lo tanto, el cambio en su energía potencial es

$$\Delta U = qV_{ba} = (-1.6 \times 10^{-19})(+500 V) = -8.0 \times 10^{-16} J$$

El signo menos indica que la energía potencial disminuye. La diferencia de potencial  $V_{ba}$  tiene signo positivo, porque el potencial final  $V_b$  es mayor que el potencial inicial  $V_a$ . Los electrones negativos son atraídos hacia el electrodo positivo y repelidos del electrodo negativo.

*b)* La energía potencial perdida por el electrón se convierte en energía cinética  $K$ . De la conservación de la energía,  $\Delta K + \Delta U = 0$ , así que

$$\Delta K = -\Delta U$$

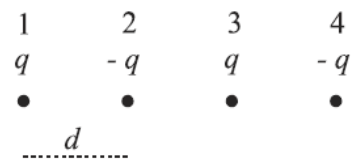
$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = -q(V_b - V_a) = -qV_{ba}$$

donde la energía cinética inicial es cero, puesto que el electrón parte del reposo. Despejamos  $v$ :

$$v = \sqrt{-\frac{2qV_{ba}}{m}} = \sqrt{-\frac{2(-1.6 \times 10^{-19} C)(5000 V)}{9.1 \times 10^{-31} kg}} = 4.2 \times 10^7 m/s$$

**Problema resuelto 3.**

Disponemos cuatro cargas como indica la figura 62. Calcular la energía electrostática de la distribución.



**Figura 62** Distribución de cargas.

**Solución.**

No se tiene en cuenta la energía propia de las cargas.

Calculamos la energía electrostática del sistema mediante la ecuación (2.6 y 2.7), que en este caso, teniendo en cuenta que  $q_1 = q, q_2 = -q, q_3 = q$  y  $q_4 = -q$ , se expresa de la forma siguiente:

$$W_e = \frac{2}{8\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q^2}{d} + \frac{q^2}{2d} - \frac{q^2}{3d} - 2\frac{q^2}{d} + \frac{q^2}{2d} + 2\frac{q^2}{d} - \frac{q^2}{2d} + \frac{q^2}{d} - \frac{q^2}{2d} + \frac{q^2}{3d} \right)$$

$$U = W_e = -\frac{7}{12\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d}$$

**Problema resuelto 4.** Sistema de cargas puntuales.

Dos cargas puntuales se localizan en el eje  $x$ ,  $q_1 = -e$  en  $x = 0$  y  $q_2 = +e$  en  $x = a$ . a) Determine el trabajo que debe realizar una fuerza externa para llevar una tercera carga puntual  $q_3 = +e$  del infinito a  $x = 2a$ . b) Determine la energía potencial total del sistema de tres cargas.

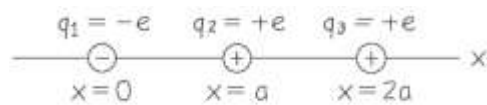


Figura 63 Dibujo de la situación después de que se ha traído la tercer carga del infinito.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Este problema implica la relación entre el trabajo efectuado para mover una carga puntual y el cambio en la energía potencial. También implica la expresión para la energía potencial de un conjunto de cargas puntuales.

**PLANTEAR:** La figura 63 presenta el arreglo final de las tres cargas. Para determinar el trabajo que se requiere para traer a  $q_3$  del infinito, se usa la ecuación (2.5) para encontrar la energía potencial asociada con  $q_3$  en la presencia de  $q_1$  y  $q_2$ . Después se emplea la ecuación (2.6) para determinar la energía potencial total del sistema.

**EJECUTAR:** a) El trabajo que debe hacer una fuerza externa  $\overrightarrow{F}_{ext}$  sobre  $q_3$  es igual a la diferencia entre dos cantidades: la energía potencial  $U$  asociada con  $q_3$  cuando está en  $x = 2a$  y la energía potencial que tiene cuando está infinitamente lejos. La segunda de éstas es igual a cero, por lo que el trabajo que debe realizarse es igual a  $U$ . Las distancias entre las cargas son  $r_{13} = 2a$  y  $r_{23} = a$ , por lo que a partir de la ecuación (2.5),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a} \right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Si  $q_3$  se lleva del infinito a lo largo del eje  $+x$ , es atraída por  $q_1$  pero repelida con más fuerza por  $q_2$ ; por ello, debe hacerse un trabajo positivo para llevar  $q_3$  a la posición  $x = 2a$ .

b) La energía potencial total del conjunto de tres cargas está dado por la ecuación (2.6):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a} \right) = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

**EVALUAR:** Como el resultado en el inciso *b*) es negativo, el sistema tiene menos energía potencial que si las tres cargas estuvieran infinitamente alejadas. Una fuerza externa tendría que hacer trabajo *negativo* para traerlas del infinito y acomodarlas en su arreglo, y trabajo *positivo* para llevarlas de regreso al infinito

## 2.2 Capacitancia.

La energía eléctrica se puede almacenar en un dispositivo común, que se llama **condensador** o **capacitor**, que hay en casi todos los circuitos eléctricos. Los condensadores se usan como almacenes de energía. La almacenan para hacer funcionar el *flash* en las cámaras fotográficas. La rápida liberación de energía es evidente en la corta duración del destello. Asimismo, pero en escala mayor, se almacenan enormes cantidades de energía en los bancos de condensadores que alimentan a láseres gigantes en algunos laboratorios de investigación.

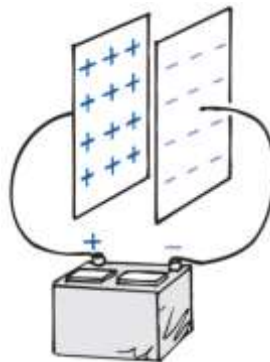


Figura 64 Capacitor o condensador.

*Descripción de la figura 64. Condensador. Un condensador consiste en dos placas metálicas paralelas a corta distancia entre sí. Cuando se conectan a un acumulador, las placas adquieren cargas iguales y opuestas. El voltaje entre las placas coincide entonces con la diferencia de potencial entre las terminales del acumulador.*

El condensador más sencillo es un par de placas conductoras separadas por una corta distancia, pero sin tocarse. Cuando las placas se conectan con algún dispositivo que las cargue, como el acumulador de la Imagen 16 pasan electrones de una placa a la otra. Eso sucede cuando la terminal positiva del acumulador tira de los electrones de la placa conectada a ella. Esos electrones, de hecho, son bombeados a través del acumulador, y van desde la terminal negativa hasta la placa opuesta. Las placas del condensador tienen entonces cargas iguales y opuestas: la



placa positiva conectada con la terminal positiva del acumulador, y la placa negativa conectada con la terminal negativa. El proceso de carga se completa cuando la diferencia de potencial entre las placas es igual a la diferencia de potencial entre las terminales del acumulador, que es el voltaje del acumulador. Cuanto mayor sea el voltaje del acumulador y mayores y más próximas estén las placas, mayor será la carga que se pueda almacenar. En la práctica las placas pueden ser membranas metálicas delgadas separadas por una delgada hoja de papel. Este “emparedado de papel” se enrolla para ahorrar espacio, y se mete en un cilindro.

Un condensador cargado se descarga cuando entre las placas se forma una trayectoria conductora. La descarga de un condensador puede ser una experiencia desagradable si estás en el camino conductor. La transferencia de energía llega a ser fatal cuando implica altos voltajes, por ejemplo, en la fuente de poder de un aparato de TV, aun cuando éste se haya desconectado. Es la causa principal de tantos letreros de advertencia que tienen esos aparatos.

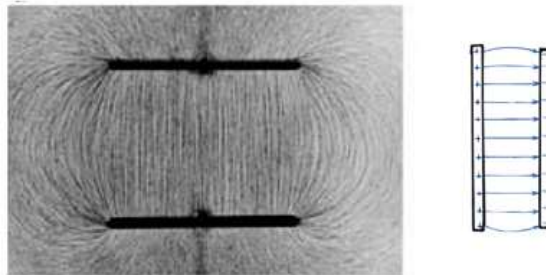


Figura 65 Energía almacenada en un condensador.

La energía almacenada en un condensador proviene del trabajo necesario para cargarlo. La energía se guarda en el campo eléctrico entre sus placas. Entre placas paralelas el campo eléctrico es uniforme, como los que se ven en la figura 65. Así, la energía almacenada en un condensador es la energía de su campo eléctrico. Como dato curioso debes saber que la energía del Sol se irradia en forma de campos eléctricos y magnéticos. El hecho de que la energía esté contenida en los campos eléctricos es verdaderamente trascendental.

Esta sección está dedicada al estudio de los dispositivos denominados capacitores o condensadores, estos dispositivos se constituyen como uno de los elementos básicos de la electrónica. Los capacitores en su parte básica están constituidos por dos conductores de forma arbitraria separados una distancia, los cuales están en disposición de almacenar cargas iguales pero de signo opuesto. La estructura del capacitor está caracterizada por dos aspectos muy importantes; (i) La geometría de los conductores, la cual debe garantizar que toda línea de fuerza que comienza en uno termina en el otro conductor, y (ii) el medio que separa los dos conductores.

La carga neta de un capacitor, está determinada por la carga que hay en uno de los conductores, mientras que la diferencia de potencial entre los dos conductores es proporcional a la carga.

(Figura 66) 
$$Q \sim \Delta V \rightarrow Q = C\Delta V$$

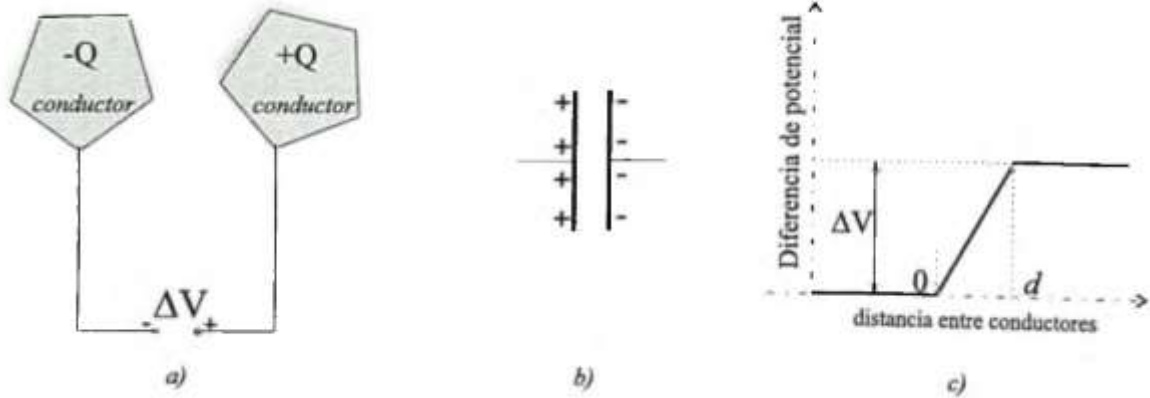


Figura 66 (a) Representación esquemática de un capacitor eléctrico, (b) representación gráfica de un capacitor y (c) variación de la diferencia de potencial con la distancia de separación entre los conductores.

La constante de proporcionalidad  $C$ , se denomina capacitancia eléctrica y se define como:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \quad (2.8)$$

#### Definición de capacitancia

La **capacitancia** se podría definir como la capacidad que posee el dispositivo para almacenar carga eléctrica. También, se puede afirmar que lo que almacena el dispositivo es energía en forma de campo eléctrico. La capacitancia es el análogo al volumen de un recipiente para almacenar un gas (una masa), y la presión del gas es directamente proporcional al número de moléculas. Para un gas ideal la ecuación de estado está dada por:

$$PV = nRT \quad \rightarrow \quad n = \frac{P}{RT}V \quad (2.9)$$

de donde  $P$ ,  $V$ ,  $n$ ,  $R$ , y  $T$  son; la presión, volumen, número de moléculas, constante real y temperatura absoluta del gas respectivamente. La analogía entre la capacitancia y el volumen se representa entre las ecuaciones (2.8) y (2.9).

La capacitancia de un capacitor se define como la carga sobre cualquiera de las placas (electrodos o armaduras) dividida por la diferencia de potencial eléctrico entre ellas.

$$C = \frac{|Q|}{\Delta V} = \frac{|Q|}{V}$$

$C$  es una constante cuyo valor depende de la geometría del sistema (tamaño, forma, separación de las placas y naturaleza del medio dieléctrico que llena el espacio entre las placas).

Por convenio  $Q$  es la carga situada sobre el electrodo, placa o armadura positiva del capacitor y

$$\Delta V$$

es la diferencia de potencial entre el electrodo con carga positiva y el electrodo con carga negativa.

**Definición de capacitor (o condensador)**

Es un dispositivo que consta de dos conductores (llamados conductores, armaduras o placas) que poseen cargas iguales y opuestas y que sirve para almacenar cargas energía.

**Definición de capacidad**

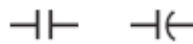
Es la expresión de la magnitud de la capacitancia del capacitor.

**Unidad de capacidad**

La unidad de capacidad en el sistema mks y SI se denomina Faradio (F):  $1F = 1C/V$ .

Las unidades la capacitancia eléctrica, en el Sistema Internacional (SI) son:  $\frac{Coulomb}{voltios} = \frac{C}{V} = Faraday = F$ . Esta unidad de medida tienen múltiplos y sub-múltiplos; siendo  $1 F = 10^6 \mu F = 10^9 nF = 10^{12} pF$ .

En los diagramas de circuito, un capacitor se representa con cualquiera de estos símbolos:



De acuerdo con su construcción física, son identificados dos tipos de capacitores eléctricos:

1. **Capacitor seco de placas planas** separadas por un material aislante sólido.
2. **Capacitor electrolítico** construido con dos placas conductoras separadas por un material aislante líquido o en forma de pasta semilíquida.

En la figura 67 es observada la representación del diagrama eléctrico de cada uno de los dos tipos de capacitor expuestos antes.

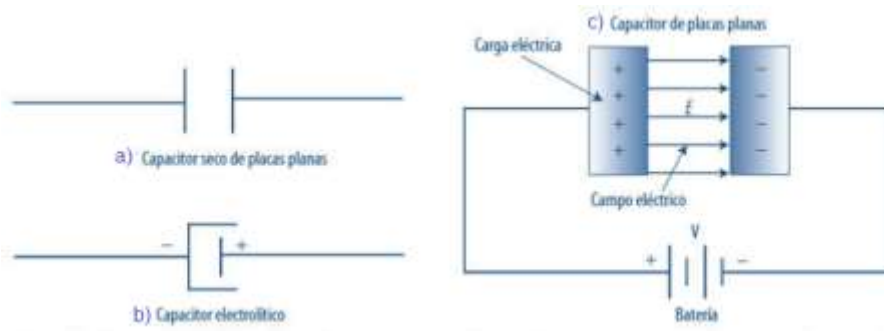


Figura 67 Diagrama eléctrico del capacitor. a) Capacitor seco de placas planas. b) Capacitor electrolítico. c) Representación esquemática de un capacitor conectado a una batería.

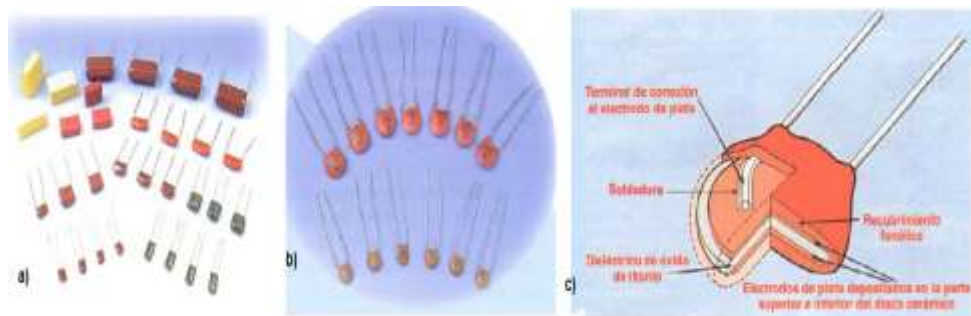


Figura 68 Capacitores sólidos. a) Condensadores cerámicos. b) Condensadores de película plástica. c) Estructura interna típica de los condensadores cerámicos.

### Capacitores sólidos. (Fig. 68)

Son aquellos capacitores que no tienen polaridad y están contruidos con dos películas conductoras eléctricas paralelas separadas por un material aislante, llamado dieléctrico, como el plástico, la cerámica, la mica, el papel parafinado, entre otros, recubierto con poliéster, baquelita o alguna resina. Por lo general, sus capacidades son pequeñas, las cuales van desde 10 picofaradios (pF) hasta aproximadamente 100 microfaradios ( $\mu\text{F}$ ); no obstante, estos últimos se consideran los más comerciales, debido a que tienen propiedad de soportar altos voltajes, hasta el orden de 1500 V. Por lo común, este tipo de capacitores se utiliza para iniciar la marcha de motores de corriente alterna y en diversos circuitos eléctricos y electrónicos.

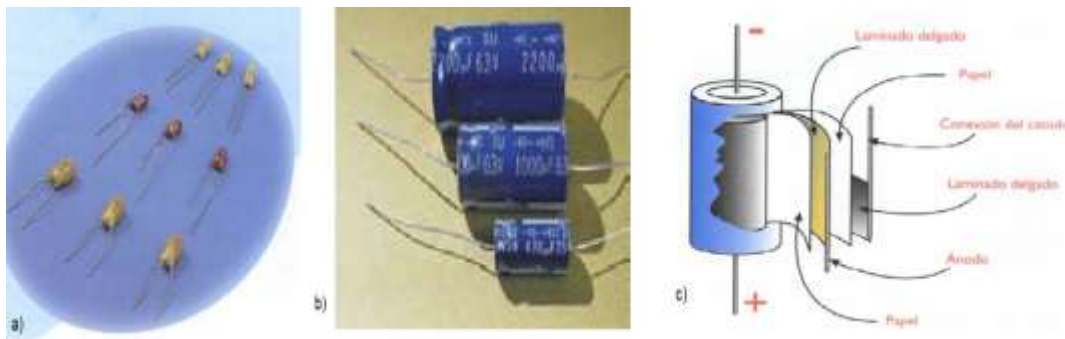


Figura 69 Capacitores electrolíticos. a) Capacitores electrolíticos de tantalio. b) Capacitores electrolíticos de aluminio. c) Estructura interna típica de los condensadores electrolíticos de aluminio.

### Capacitores electrolíticos. (fig. 69)

Son aquellos dispositivos constituidos por dos conductores eléctricos paralelos en forma de cilindros concéntricos, que se encuentran sumergidos dentro de una sustancia aislante líquida similar al aceite. Estos capacitores tienen polaridad eléctrica, ya que en lugar de invertir su polaridad eléctrica positiva y negativa, aspecto que debe tomarse muy en cuenta al conectarlos a la corriente eléctrica, ya que en su lugar de invertir su polaridad, el capacitor se destruiría. Es común que estos capacitores se construyen con geometría cilíndrica; asimismo, tienen la propiedad de manejar valores altos de capacitancia, desde un microfaradio hasta del orden de 500 milifaradios; sin embargo, su voltaje es bajo, por lo general del orden de 15 a 200 V. Este tipo de condensador eléctrico se construye a base de películas cilíndricas de aluminio en paralelo, separadas por un material aislante líquido llamado electrolito y recubiertas por plástico. En este tipo de capacitor el cilindro exterior es de polaridad negativa, mientras que el interior es de polaridad positiva.

### Condensadores variables

Nos permiten obtener valores de capacidad comprendidos entre un valor máximo y un valor mínimo preestablecidos por el fabricante. Son accionados por medios mecánicos y dependiendo de si son diseñados para variar constantemente su valor o para ser ajustados a un valor determinado, pueden ser ajustados a un valor determinado, pueden clasificarse como

**condensadores variables** y como **condensadores ajustables**. En la **figura 70** se observan los símbolos usados para representarlos.

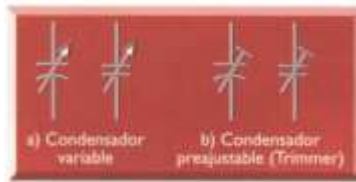


Figura 70 Símbolos de los condensadores variables.

En los **condensadores variables**, **figura 71**, sus láminas metálicas son móviles. La mitad de ellas están fijas y la otra mitad pueden accionarse mediante un eje, y hacer que entren en las ranuras que separan a las primeras variando así la superficie enfrentada entre las placas. Dependiendo de su valor pueden tener dos o más placas, son relativamente robustos debido a que deben soportar un gran número de manipulaciones y su dieléctrico es por lo general el aire.

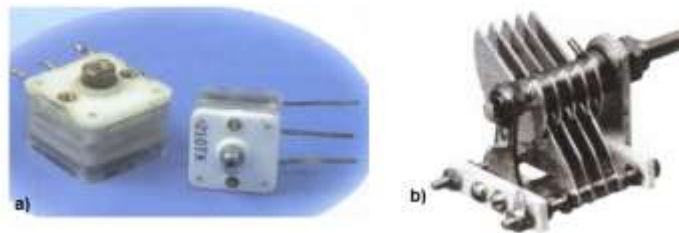


Figura 71 a) Condensador variable. b) Estructura interna de los capacitores variables.

Son empleados principalmente en los circuitos de sintonía de los receptores de radio. Su capacidad puede variar entre los 5 pF y los 500 pF típicamente. En la figura 71 se muestra la estructura interna de este tipo de condensador.

Los dieléctricos empleados en los **condensadores ajustables** pueden ser: mica, vidrio, aire o cerámica, o una combinación de ellos, por ejemplo mica-aire, cerámica-aire, etc. Se basan también en la variación de la superficie enfrentada entre las placas o la distancia que exista entre ellas. Son más frágiles que los ya que normalmente se ajustan al valor deseado y se fijan para que no se muevan de nuevo. Son usados por lo general para compensar o ajustar pequeñas diferencias en la calibración de los equipos y sistemas electrónicos. Son conocidos también como trimmers y su capacidad es muy pocos picofaradios.

Actualmente se dispone comercialmente de condensadores en estado sólido denominados **varactores** o **varicaps**. Son condensadores variables, pero a diferencia de los ya mencionados, su función de un voltaje externo aplicado a sus terminales. Pueden proporcionar capacidades inferiores a los 0.4 pF (usadas en microondas), hasta superiores a los 2000 pF (para tareas de alta frecuencia). Se usan principalmente en circuitos de sintonía de radio y televisión, en circuitos multiplicadores de frecuencia, etc.

Debido a que un coulomb es una magnitud de carga eléctrica muy grande, las dimensiones físicas de un capacitor, cuya capacidad es de un faradio, son en extremo grandes, a tal grado que si el material que separa las placas o esferas conductoras fuera el vacío, el capacitor sería exageradamente grande, que no cabría en la tierra. Debido a esto, por lo general en la práctica no se utiliza la unidad de faradio y, por tanto, solo se emplean submúltiplos de la unidad:

- El **milifaradio** (mF):  $1 \text{ mF} = 1 \times 10^{-3} \text{ F}$ .
- El **microfaradio** ( $\mu\text{F}$ ):  $1 \mu\text{F} = 1 \times 10^{-6} \text{ F}$ .
- El **nanofaradio** (nF):  $1 \text{ nF} = 1 \times 10^{-9} \text{ F}$ .
- El **picofaradio** (pF):  $1 \text{ pF} = 1 \times 10^{-12} \text{ F}$

### Ejemplo 1

Calcular la cantidad de electrones acumulados en una de las placas de un capacitor de  $2300 \mu\text{F}$ , cuando es conectado con una fuente cuyo potencial eléctrico es de  $72 \text{ V}$ .

#### Solución.

Primero, establecemos los valores de referencia:

$$C = 2300 \mu\text{F}$$

$$V = 72 \text{ V}$$

Luego, escribamos la fórmula correspondiente:

$$Q = CV$$

Por último, sustituimos los valores:

$$Q = CV = (2300 \times 10^{-6} \text{ F})(72 \text{ V}) = 0.1656 \text{ C}$$

$$N_e = \frac{Q}{q_e} = \frac{0.1656 \text{ C}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 1035 \times 10^{15} \text{ electrones}$$

#### Densidad de carga superficial $\sigma$ .

La densidad de carga superficial,  $\sigma$ , se define relacionando la carga,  $q$ , respecto al área superficial,  $A$ , del cuerpo electrizado; matemáticamente, esta se define por el cociente de la carga entre el área de las placas y se representa con la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{q}{a} \tag{2.10}$$

La unidad de la densidad de carga eléctrica en el sistema Internacional es coulomb sobre metro cuadrado  $\left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right)$ .

Utilizando la ecuación de la ley de Gauss:

$$\epsilon_0 EA = q$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

Despejando el área de la ecuación 2.10 y sustituyéndola en estas últimas ecuaciones se tiene:

$$E = \frac{q}{\frac{\epsilon_0 q}{\sigma}} = \frac{q\sigma}{\epsilon_0 q} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Hasta obtener:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

De esta manera, la ecuación 2.11 expresa la intensidad de campo eléctrico, E, entre dos placas en función de la densidad de carga eléctrica,  $\sigma$ , y la permitividad del vacío.  $\epsilon_0$ , el cual, para problemas teóricos, se considera igual a la del aire.

### Ejemplo 2

Se tiene un par de placas circulares de 7 cm de diámetro, separadas por aire. Al ser electrizadas, estas generan un campo eléctrico entre placas de 15600 V/m. Determinar:

- La densidad de carga superficial.
- La carga en cada placa.

### Solución.

Primero, establecemos los valores de referencia:

$$r = 0.07 \text{ m}$$

$$E = 15600 \text{ V/m}$$

- Para establecer la densidad de carga superficial,  $\sigma$ , utilizamos la ecuación siguiente:

$$\sigma = E\epsilon_0 = (15600 \text{ V/m})(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2) = 138.060 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

- Ahora, para determinar la carga en cada placa, usamos la ecuación siguiente y sustituimos:

$$\begin{aligned} q &= \sigma A = \sigma \pi r^2 = (138.060 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2)(3.1416)(0.07 \text{ m})^2 \\ &= 2.12527355 \times 10^{-9} \text{ C} \end{aligned}$$

### Clases de capacitores

Entre los condensadores de capacitancias fijas y variables se encuentran:

- El condensador de placas planas paralelas - El condensador cilíndrico - El condensador esférico.



### Cálculo de capacidad

**EJEMPLO 3:** Condensador de placas paralelas.

Este condensador consiste en dos placas metálicas paralelas de área  $A$ , cargadas con una carga  $Q$  y separadas por una distancia  $d$ . Si ignoramos los efectos de borde podemos considerar el campo en el interior como uniforme, es decir estamos haciendo la aproximación de dos planos infinitos. Si las placas tienen una densidad superficial de carga  $\sigma$ , la carga se puede expresar como  $Q = \sigma A$ . Fácilmente se obtiene que la magnitud del campo en el interior es

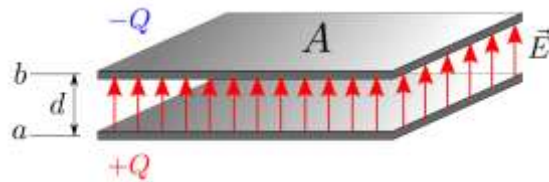


Figura 72 Condensador de placas paralelas.

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

La diferencia de potencial se obtiene de

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \sigma / \epsilon_0 dl = - \sigma / \epsilon_0 \int_a^b dl = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = -Ed$$

donde  $b-a = d$ . Tomando el módulo de  $\Delta V$ , la capacidad es

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \boxed{\frac{\epsilon_0 A}{d}} \quad (2.12)$$

### Problemas resueltos

#### Problema resuelto 1.

Un capacitor de laboratorio de placas planas de  $12.4 \text{ cm}^2$ , separadas  $1.2 \text{ mm}$  entre sí por aire es electrizado con  $36 \text{ V}$ . Calcular:

- El campo eléctrico.
- La capacidad.
- La carga sobre cada placa.
- La densidad de carga.

**Solución.**

Primero, establecemos los valores de referencia:

$$A = 12.4 \text{ cm}^2 = 12.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$V = 36 \text{ volts}$$

$$d = 1.2 \text{ mm} = 1.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

a) Campo eléctrico

Para calcularlo, utilizamos la siguiente ecuación y sustituimos:

$$V = Ed$$
$$E = \frac{V}{d} = \frac{36 \text{ V}}{1.2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 30 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) La capacidad

Para determinar la capacidad, empleamos la siguiente ecuación y sustituimos:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)(12.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{1.2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 9.145 \times 10^{-12} \text{ F}$$

c) Carga eléctrica sobre la placa

Para calcularla, utilizamos la siguiente ecuación y sustituimos:

$$q = CV = (9.145 \times 10^{-12} \text{ F})(36 \text{ V}) = 3.2922 \times 10^{-10} \text{ C}$$

d) Densidad de carga

Para determinar esta, utilizamos la siguiente ecuación:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ahora, sustituimos los valores y tenemos:

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)(30 \times 10^3 \text{ V/m}) = 26.55 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

## Problemas resueltos

### Problema resuelto 2.

Se tiene un capacitor de placas planas rectangulares de 17 cm x 28 cm, separadas entre sí por aire 0.6 mm. Determinar su capacidad.

### Solución.

Primero, establecemos los valores de referencia:

$$A = 0.17 \times 0.28 = 0.0476 \text{ m}^2$$

$$d = 0.6 \text{ mm} = 6 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

Ahora, escribimos la ecuación correspondiente para determinar la capacidad y sustituimos los valores:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)(0.0476 \text{ m}^2)}{6 \times 10^{-4}} = 0.7021 \times 10^{-9} \text{ F}$$

**EJEMPLO 4:** Condensador cilíndrico.

Este condensador consiste en un cilindro sólido de radio  $a$  y carga  $+Q$  rodeado coaxialmente por una cáscara cilíndrica de radio  $b$  y carga opuesta  $-Q$ . La capacidad se calcula conociendo el campo eléctrico entre  $a$  y  $b$  el cual es idéntico al del alambre infinito:

$$\vec{E} = \frac{2k_e\lambda}{r} \hat{r}$$

El campo es radial y hemos elegido el largo  $L$  del cilindro lo suficientemente grande como para que la aproximación sea válida.

La diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  es

$$\Delta V = V_b - V_a = \int_a^b \vec{E} * d\vec{l} = - \int_a^b \frac{2k_e\lambda}{r} \hat{r} * d\vec{l}$$

en coordenadas cilíndricas

$$\hat{r} * d\vec{l} = \hat{r} * (dr\hat{r} + r d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}) = dr$$

por lo tanto

$$\Delta V = V_b - V_a = -2k_e\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = -2k_e\lambda \ln(b/a)$$

por lo tanto la capacidad es

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{2k_e\lambda \ln(b/a)}$$

pero  $\lambda = Q/L$ , donde  $L$  es el largo del cilindro

$$C = \frac{L}{2k_e \ln(b/a)}$$

también se expresa como capacidad por unidad de longitud:

$$\boxed{\frac{C}{L} = \frac{1}{2k_e \ln(b/a)}} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \quad (2.13)$$

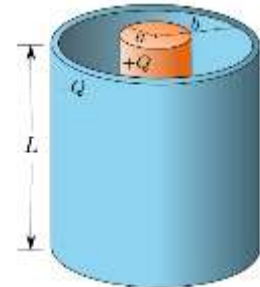


Figura 73 Condensador cilíndrico.



Superficie gaussiana

Para calcular el campo eléctrico entre  $a$  y  $b$ , se usa la ley de Gauss. Para ello elegimos una superficie gaussiana consistente en un cilindro coaxial de radio  $r$  (ver figura). El procedimiento es casi idéntico al del alambre infinito y el resultado es

$$\vec{E} = \frac{2k_e\lambda}{r} \hat{r}$$

**EJEMPLO 5:** Condensador esférico.

Un condensador esférico consiste de un cascarón conductor de radio  $b$  y carga  $-Q$  concéntrico con una esfera conductora más pequeña de radio  $a$  y carga  $+Q$ . Encontrar la capacidad de este sistema.

**Solución:** Lo primero es encontrar la diferencia de potencial entre los conductores. Por medio de la ley de Gauss encontramos fácilmente que el campo eléctrico para una distancia desde el centro de la esfera más pequeña es

$$E_r = k_e \frac{Q}{r^2} \quad a < r < b$$

Este campo es radial, y por medio de integración obtenemos la diferencia de potencial

$$V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = - \int_a^b k_e \frac{Q}{r^2} dr = -k_e Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} = k_e Q \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

Notar que la diferencia de potencial es negativa. A nosotros nos interesa la magnitud para calcular la capacidad

$$\Delta V = |V_b - V_a| = k_e Q \frac{(b - a)}{ab}$$

entonces

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{ab}{k_e(b - a)}$$

Con la expresión anterior podemos calcular la capacidad de un conductor aislado. Si hacemos que  $b \rightarrow \infty$ , la capacidad es

$$C = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{ab}{k_e(b - a)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a}{k_e(1 - a/b)} = \frac{a}{k_e} = 4\pi k_e a$$

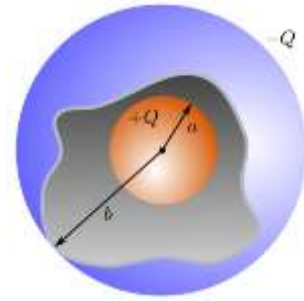


Figura 74 Condensador esférico.

**EJEMPLO 6:** Esfera conductora eléctrica.

Para determinar la ecuación que permite calcular la capacidad de una esfera conductora, se realiza un análisis a partir de la ecuación general de capacitancia:

$$c = \frac{Q}{V}$$

Sin embargo, el potencial eléctrico de la esfera está determinado por:

$$V = \frac{k_e Q}{R}$$

Pero:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_e} \quad C = \frac{Q}{\frac{k_e Q}{R}}$$

Así, al efectuar el desarrollo algebraico en esta última ecuación se determina finalmente que la capacidad de la esfera puede calcularse mediante la siguiente ecuación:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Donde R es el radio de la esfera expresado en metros.

### Problemas resueltos

#### Problema resuelto 3.

Supóngase que la Tierra es una esfera conductora eléctrica de radio 6370 km. Determinar su capacidad.

**Solución.**

Para la resolución de este problema, aplicamos de manera directa la ecuación para la capacidad de una esfera:

$$C = 4\pi\epsilon_0 r = 4\pi(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(6.37 \times 10^6 \text{ m}) = 7.08 \times 10^{-4} \text{ m}$$

#### Problema resuelto4.

Determinar la capacidad y la carga eléctrica de una esfera metálica conductora, cuyo radio es de 35 cm y a la que se le aplica un potencial eléctrico de 24 V.

**Solución.**

Primero, establecemos los valores de referencia:

$$R = 35 \text{ cm} = 0.35 \text{ m}$$

$$V = 24 \text{ V}$$

Luego, determinamos la capacitancia utilizando la ecuación siguiente:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C = (4)(3.1416)(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(0.35 \text{ m}) = 3.8924 \times 10^{-11} \text{ F}$$

Ahora, debemos determinar la carga que almacena la esfera en la superficie mediante la siguiente ecuación:

$$C = Q/V$$

Por último, despejamos Q:

$$Q = CV = (3.8924 \times 10^{-11} \text{ F})(24 \text{ V}) = 9.3418 \times 10^{-10} \text{ C}$$

#### Problema resuelto5.

Establecer si es posible construir una esfera metálica conductora con una magnitud de su capacidad de un faradio.

**Solución.**

Para la solución de este problema, aplicamos la siguiente ecuación y realizamos las sustituciones necesarias:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Por tanto, tenemos que:

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1\text{F}}{4(3.1416)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)} = 8.9917 \times 10^9 \text{ m}$$

De acuerdo con este resultado, podemos determinar que el radio de la esfera en cuestión es mucho mayor que el radio de la Tierra, por lo que sería imposible construir una esfera de un faradio, pues no cabría dentro la Tierra.

## 2.3 Capacitores en serie, paralelos y mixtos

En los circuitos eléctricos suele conectarse capacitores entre sí, ya sea en serie, paralelo y mixto. Discutiremos, cual es el efecto de la conexión de capacitores.

### Acople Serie.

Consideremos tres capacitores con capacitancia;  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  inicialmente descargados, conectados y aislado del medio externo, tal como se indica en la figura (75a). El efecto de conectar los' capacitores en esta forma, es el de que al aplicar el potencial en la placa del capacitor  $C_1$  aparece una carga  $+Q$  esta a su vez induce una carga  $-Q$  en la placa del mismo capacitor  $C_1$ , esta carga negativa induce una" carga  $+Q$  en el capacitor  $C_2$ , la cual induce en el mismo capacitor una carga  $-Q$ , esta carga induce una carga  $+Q$  en el capacitor  $C_3$ , la cual induce en el mismo capacitor una carga  $-Q$ . Esta última carga está en la placa del capacitor que está conectado a la diferencia de potencial  $\Delta V$ . Este acople acondiciona la situación a que si, en la placa del capacitor aparece un carga  $+Q$ , en la otra placa aparece otra carga de compensación  $-Q$ . Si hacemos un suma total de todas las cargas que parecen en cada una de las placas de los tres capacitores se demuestra que las cargas  $+Q$  del capacitor uno y  $-Q$  del capacitor tres no se cancelan y son las que están conectadas a la diferencia de potencial. La conclusión de esta conexión, es que en cada capacitor se almacena una carga  $Q$  y que la carga total de la configuración es  $Q$ .

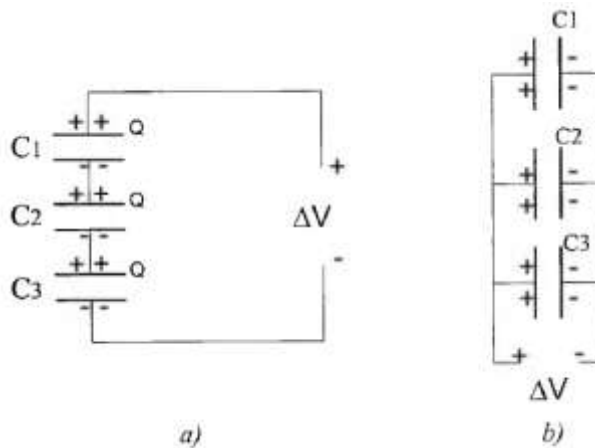


Figura 75 Tres capacitores  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ . (a) Conectados en serie a una diferencia de potencial  $\Delta V$ , (b) Conectados en paralelo a una diferencia de potencial  $\Delta V$ .

La diferencia de potencial de cada capacitor es;  $\Delta V_1$ ,  $\Delta V_2$  y  $\Delta V_3$ , respectivamente. El potencial total sería:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

en términos de la diferencia de potencial de cada uno de los capacitores,

$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q}{C_e}$$

de donde se puede concluir, la capacitancia equivalente de esta conexión es:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \text{o} \quad C_e = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \quad (2.13a)$$

generalizando para n-capacitores, la capacitancia equivalente es:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad \text{o} \quad C_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}$$

Lo relevante de este tipo de conexión es:

1. La carga en cada capacitor es igual.
2. La carga neta de la conexión, es la carga de un capacitor.
3. La diferencia de potencial aplicada se divide en la suma de las diferencias de potenciales de cada capacitor, es decir esta conexión sirve como un divisor de potencial.
4. Si la capacitancia es diferente, la carga en el acople estará limitada por capacitancia más pequeña.

**Acople Paralelo.**

Consideremos tres capacitores con capacitancia;  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  inicialmente descargados, conectados y aislado del medio externo, tal como se indica en la figura(75b). Para esta conexión los tres capacitores están conectados al mismo potencial  $\Delta V$ , de donde se puede aseverar que;

$$C_1 = \frac{Q_1}{\Delta V} \Rightarrow Q_1 = C_1 \Delta V$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{\Delta V} \Rightarrow Q_2 = C_2 \Delta V$$

$$C_3 = \frac{Q_3}{\Delta V} \Rightarrow Q_3 = C_3 \Delta V$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V + C_3 \Delta V = (C_1 + C_2 + C_3) \Delta V = C_e \Delta V$$

la capacitancia equivalente del acople de los tres capacitores es:

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 \quad (2.13b)$$

generalizando para n-capacitores acoplados en paralelo, la capacitancia equivalente es,

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i$$

**Conexión mixta de capacitores.**

Consiste en la combinación de conexión en serie y en paralelo en el mismo arreglo o circuito de capacitores (véase la figura 76). Sin embargo, no hay una fórmula única para determinar la capacidad total del capacitor equivalente, así como las características eléctricas de carga y de voltaje para cada capacitor de una conexión mixta, por lo que el circuito se analiza por partes aplicando las ecuaciones de circuitos en serie y en paralelo según corresponda.



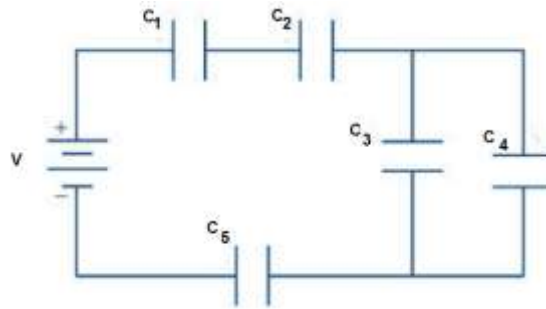


Figura 76 Diagrama eléctrico de una conexión mixta de capacitores.

Al observar el circuito de la conexión mixta de capacitores representado en la figura 76 es posible determinar que  $C_3$  y  $C_4$  están en paralelo, pero el equivalente de estos dos están en serie con  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_5$ ; asimismo, se percibe de forma inmediata que los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  están en serie.

**Estrategia para resolver problemas.** Capacitancia equivalente

**IDENTIFICAR** *los conceptos relevantes:* El concepto de capacitancia equivalente es útil siempre que se conectan dos o más capacitores.

**PLANTEAR** *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo del arreglo de los capacitores.
2. Determine si los capacitores están conectados en serie o en paralelo. Cuando hay combinaciones más complicadas, a veces es posible identificar partes que son conexiones simples en serie o en paralelo.
3. Recuerde que cuando se dice que un capacitor tiene carga  $Q$ , siempre significa que la placa con mayor potencial tiene carga  $+Q$ , y la otra placa tiene carga  $-Q$ .

**EJECUTAR** *la solución* como sigue:

1. Cuando los capacitores están conectados en serie, como en la figura 75a, siempre tienen la misma carga, considerando que estaban sin carga antes de conectarse. Las diferencias de potencial *no* son iguales a menos que las capacitancias sí lo sean. La diferencia de potencial total a través de la combinación es la suma de las diferencias de potencial individuales.
2. Cuando los capacitores están conectados en paralelo, como en la figura 75b, la diferencia de potencial  $V$  siempre es la misma para todos los capacitores individuales. Las cargas en los capacitores individuales *no* son iguales a menos que las capacitancias sean las mismas. La carga total en la combinación es la suma de las cargas individuales.
3. Para combinaciones más complicadas, identifique las partes que sean conexiones simples en serie o paralelo y sustitúyalas por sus capacitancias equivalentes, en una reducción paso a paso. Si luego se necesita encontrar la carga o la diferencia de potencial para un capacitor individual, regrese por el camino en reducción paso a paso, hasta llegar a los capacitores originales.

**EVALUAR** *la respuesta:* Compruebe que el resultado tenga sentido. Si los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente  $C_{eq}$  debe ser *menor* que cualquiera de las

capacitancias individuales. Por el contrario, si los capacitores están conectados en paralelo,  $C_{eq}$  debe ser *mayor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

**Resumen**

La capacidad equivalente a  $n$  capacitores conectados en paralelo está dada por:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

La capacidad equivalente a  $n$  capacitores conectados en serie está dada por:

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}$$

La expresión anterior se obtiene de la relación:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

La capacidad equivalente es menor que la capacidad de cualquiera de los capacitores de la combinación. Cuando se tienen solamente dos capacitores conectados en serie, la capacidad equivalente es igual a la razón del producto de las capacidades a la suma de las capacidades:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

**Problemas resueltos**

**Problema resuelto 1.**

Considere el circuito mixto de capacitores que se representa en la figura 77 (donde las cantidades indicadas son en microfaradios). Calcular:

- a) La capacidad equivalente o resultante.
- b) La carga de cada capacitor.
- c) El voltaje de cada Capacitor.

Donde:

- $C_1 = 100 \mu F$
- $C_2 = 80 \mu F$
- $C_3 = 80 \mu F$
- $C_4 = 20 \mu F$
- $C_5 = 40 \mu F$
- $V = 120 \text{ volts}$

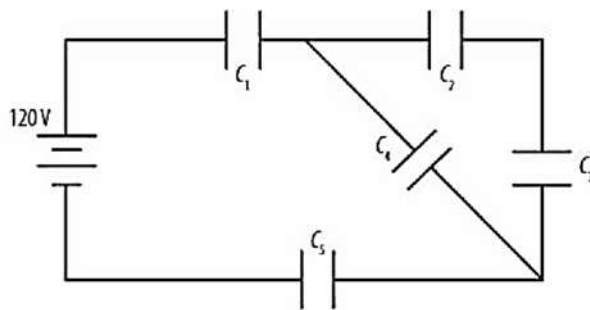


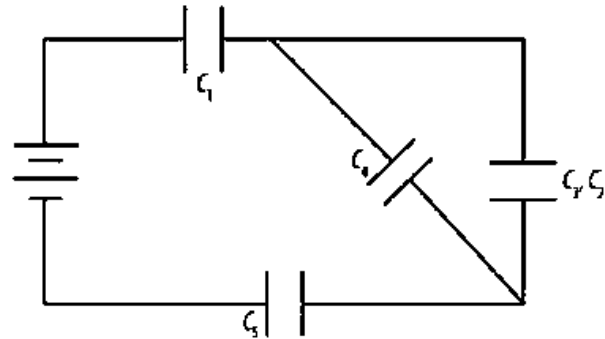
Figura 77 Circuito mixto 1.

**Solución**

Para resolver problemas de circuitos mixtos de capacitores, se recomienda iniciar el análisis desde el extremo opuesto de la batería y realizar el recorrido hacia la batería, aplicando por separado las condiciones en serie y en paralelo, dependiendo de la conexión de los capacitores; asimismo, también se recomienda dibujar el circuito parcial hasta terminar con el último cálculo o hasta obtener la capacidad equivalente. Pero, para calcular la carga o el voltaje en cada capacitor, el análisis se hace desde el último circuito recorriendo hasta el circuito original.

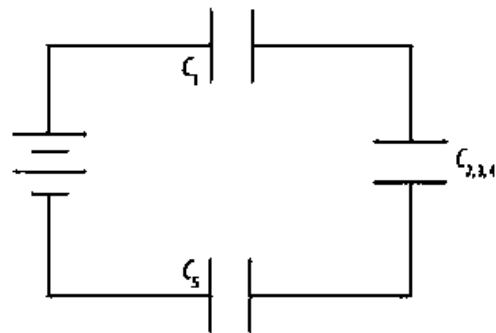
a) Como podemos observar  $C_2$  y  $C_3$  están en serie, entonces tenemos:

$$C_{2,3} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{(80 \mu\text{F})(80 \mu\text{F})}{80 \mu\text{F} + 80 \mu\text{F}} = 40 \mu\text{F}$$



b) Como podemos notar  $C_{2,3}$  y  $C_4$  están en paralelo, por lo que el circuito queda de la siguiente manera:

$$C_{2,3,4} = C_{2,3} + C_4 = 40 \mu\text{F} + 20 \mu\text{F} = 60 \mu\text{F}$$



c) En el circuito anterior, podemos observar que  $C_1$ ,  $C_{2,3,4}$  y  $C_5$  están conectados en serie; por tratarse de tres capacitores, determinamos su equivalente de la siguiente manera:

$$C_{1,2,3,4,5} = C_e = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2,3,4}} + \frac{1}{C_5}} = \frac{1}{\frac{1}{100 \mu\text{F}} + \frac{1}{60 \mu\text{F}} + \frac{1}{40 \mu\text{F}}} = 19.3573 \mu\text{F}$$

Ahora, establecemos la carga total con la ecuación:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Esto es:

$$Q = C_e V = (19.3573 \times 10^{-6} \text{ F})(120 \text{ V}) = 2322.8803 \times 10^{-6} \text{ C}$$

d) Ahora regresamos al circuito del inciso b), puesto que los capacitores están en serie, entonces la carga eléctrica es igual en los tres capacitores pero el voltaje de la batería se distribuye proporcionalmente en los capacitores y por tanto se puede determinar el voltaje en cada capacitor, mediante la fórmula:

$$Q_{C1} = 2322.8803 \times 10^{-6} \text{ C}, Q_{C234} = 2322.8803 \times 10^{-6} \text{ C}, Q_{C5} = 2322.8803 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Acto seguido, despejamos  $V$  y obtenemos:

$$V = \frac{Q}{C}$$

$$V_{C1} = \frac{Q_{C1}}{C_1} = \frac{2322.8803 \times 10^{-6} \text{ C}}{100 \times 10^{-6} \text{ F}} = 23.2288 \text{ V}$$

$$V_{C234} = \frac{Q_{C234}}{C_{234}} = \frac{2322.8803 \times 10^{-6} \text{ C}}{60 \times 10^{-6} \text{ F}} = 38.7146 \text{ V}$$

$$V_{C5} = \frac{Q_{C5}}{C_5} = \frac{2322.8803 \times 10^{-6} \text{ C}}{40 \times 10^{-6} \text{ F}} = 58.072 \text{ V}$$

- e) Ahora, pasamos al circuito del inciso a), donde se nota que  $C_{2,3,4}$  está formado por el paralelo de  $C_{2,3}$  con  $C_4$ , por tanto el voltaje es el mismo; es decir:

$$V_{C2,3} = 38.7146 \text{ V}$$

$$V_{C4} = 38.7146 \text{ V}$$

Puesto que ya conocemos su capacitancia, entonces ya podemos calcular las cargas eléctricas partiendo de la ecuación  $C = \frac{Q}{V}$ , al despejar  $Q$ :

$$Q_{C4} = V_{C4} C_4 = (38.7146 \text{ V})(20 \times 10^{-6} \text{ F}) = 774.293 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_{C2,3} = V_{C2,3} C_{2,3} = (38.7146 \text{ V})(40 \times 10^{-6} \text{ F}) = 1548.584 \times 10^{-6} \text{ C}$$

- f) Por último, pasamos al circuito original en donde observamos que  $C_{2,3}$  está formado por la serie  $C_2$ , con  $C_3$  y, por tanto, la carga es la misma. Así, conociendo la carga, por tanto:

$$Q_{C1} = Q_{C2} = Q_{C3} = 1548.584 \times 10^{-6} \text{ C}$$

ahora podemos determinar el voltaje en cada capacitor con la misma ecuación  $C = \frac{Q}{V}$ , esto es:

$$V_{C2} = \frac{Q_{C2}}{C_2} = \frac{(1548.584 \times 10^{-6} \text{ C})}{(80 \times 10^{-6} \text{ C})} = 19.35 \text{ V}$$

$$V_{C3} = \frac{Q_{C3}}{C_3} = \frac{(1548.584 \times 10^{-6} \text{ C})}{(80 \times 10^{-6} \text{ C})} = 19.35 \text{ V}$$

Problema resuelto 2.

Para el siguiente circuito mixto de capacitores (véase figura 78), determinar:

- La carga eléctrica de  $C_2$
- El voltaje del capacitor  $C_2$

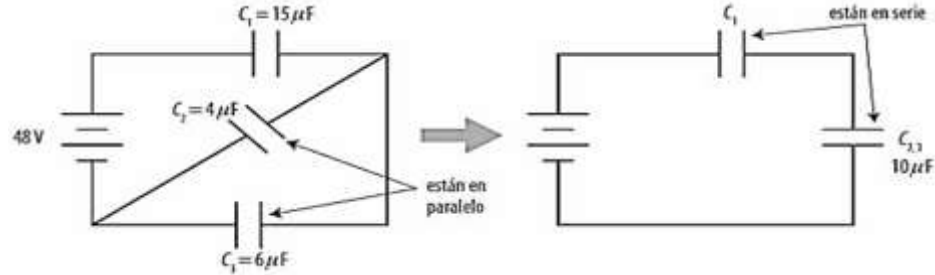


Figura 78

**Solución.**

- Dado que  $C_2$  está en paralelo con  $C_3$ :

$$C_{2,3} = C_2 + C_3 = 4 \mu\text{F} + 6 \mu\text{F} = 10 \mu\text{F}$$

$$C_{1,2,3} = \frac{(C_1)(C_{2,3})}{C_1 + C_{2,3}} = \frac{(15 \mu\text{F})(10 \mu\text{F})}{(15 \mu\text{F}) + (10 \mu\text{F})} = 6 \mu\text{F}$$

$$Q_T = CV = (6 \times 10^{-6} \text{ F})(48 \text{ V}) = 288 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$V_{C1} = \frac{288 \times 10^{-6} \text{ C}}{15 \times 10^{-6} \text{ F}} = 19.2 \text{ V}$$

$$V_{C_{2,3}} = 48 \text{ V} - 19.2 \text{ V} = 28.8 \text{ V}$$

- Como ya sabemos, en paralelo el voltaje es igual. Por tanto:

$$V_C = V_C = 28.8 \text{ V}$$

$$Q_C = C_2 V_C = (4 \times 10^{-6} \text{ F})(28.8 \text{ V}) = 115.2 \times 10^{-6} \text{ C}$$

## 2.4 Dieléctricos en Campos Eléctricos.

Estudiar los fenómenos que se producen cuando se pone un material dieléctrico (aislante) en presencia de un campo electrostático; y la caracterización de dichos materiales mediante la susceptibilidad y permitividad.



### *Capacitores con dieléctrico.*

Cuando en lugar de aire se coloca cualquier otro material aislante entre las placas, las esferas o los cilindros conductores de un capacitor, inminentemente cambian sus características eléctricas. Como ya se dijo antes, a estos materiales aislantes se les conoce como **dieléctricos**. De esta manera, los capacitores con dieléctrico diferente al aire adquieren las siguientes propiedades:

1. Incrementa considerablemente su capacidad.
2. Disminuye la distancia de separación entre las placas, los cilindros o las esferas, según sea el caso.
3. Disminuye el voltaje que puede soportar.
4. Adquiere mayor solidez mecánica.

No obstante, el voltaje que puede soportar un capacitor, aun con el dieléctrico, no puede ser muy elevado, ya que este siempre tiene un valor finito, debido a que todos los materiales aislantes dieléctricos soportan un valor máximo de voltaje.

### **Rigidez dieléctrica.**

Se define **rigidez dieléctrica** como el valor límite de intensidad de campo eléctrico que puede soportar el material aislante o dieléctrico sin que pierda sus propiedades eléctricas.

La rigidez dieléctrica también se define en función del voltaje. Así pues, esta es el máximo voltaje que puede soportar el material aislante o dieléctrico sin que pierda sus propiedades eléctricas.

Cada material tiene su propio valor de la rigidez dieléctrica, es decir, es una característica propia de cada material y se determina experimentalmente, su unidad en el sistema internacional es N/C pero en la industria es más práctico utilizar la unidad técnica volt por metro (V/m).

Cuando el campo eléctrico o voltaje es mayor al límite que pueden soportar los materiales aislantes, entonces pierden su propiedad aislante y la carga eléctrica lo atraviesa en forma de **arco** eléctrico; cuando este fenómeno ocurre se dice que se perforó o rompió el dieléctrico.

Por ejemplo, la resistencia del aire seco que separa dos electrodos a los que se les aplica una diferencia de potencial eléctrico se rompe alrededor de los 7 000 V por centímetro; en cambio, para el aire húmedo la resistencia se reduce de manera considerable hasta alrededor de los 3 000 V por centímetro. En tanto, en condiciones de lluvia, esta es mucho menor debido a que las sales contenidas en el agua son conductoras de la electricidad, provocando la formación del arco eléctrico desde la superficie de la Tierra hasta la superficie inferior de la capa atmosférica. A este fenómeno se le conoce como **rayo**.

Como ya se dijo al inicio de este capítulo, en la fabricación de los capacitores se utiliza como dieléctrico los materiales de mica, cerámica, papel parafinado y plásticos, entre otros.

En tanto, para la fabricación de los capacitores electrolíticos se utiliza como dieléctrico una sustancia líquida, de tipo aceite, constituida a base de **dióxido de titanio**, solución que tiene la propiedad de incrementar considerablemente la capacidad de los capacitores; sin embargo, su uso también provoca la reducción del voltaje hasta el orden de 40 a 50%. Por lo común, este tipo de capacitores se fabrica hasta con una capacidad de 250 000  $\mu\text{F}$  y voltajes del orden de 200 V.

En la tabla siguiente se indica el valor de la rigidez dieléctrica de los materiales empleados con mayor frecuencia en la fabricación de los capacitores electrolíticos (dimensionada en el sistema internacional y en el sistema técnico).

Tabla 4 Valores de la rigidez dieléctrica de algunos materiales.

Material	Rigidez dieléctrica $\frac{N}{C}$
Baquelita	16
Aire seco a 1 atm.	3
Aceite de transformador	16
Mica	200
Papel parafinado	51
Plástico	28
Plástico de nitrocelulosa	250
Teflon	59
Vidrio	118

El principio de funcionamiento de un capacitor con dielectrico consiste basicamente en al aplicar una diferencia de potencial eléctrico entre sus placas conductoras eléctricas , como se muestra en figura 79, los electrones de la ultima capa y nivel electrónico se polarizan en sentido contrario de la carga eléctrica de las placas, de tal manera que al moverse los electrones de los átomos del material dieléctrico estos dejan huecos, lo que provoca que los átomos quedan cargados positivamente; así, esta orientación de las cargas negativas hacia la placa cargada positivamente genera un campo eléctrico,  $E_p$ , entre las placas del capacitor. La magnitud del campo eléctrico de las placas,  $E_p$ , es mucho mayor que el campo eléctrico del dieléctrico,  $E_d$ .

Puesto que el campo eléctrico es una cantidad vectorial que posee magnitud, dirección y sentido, y considerando que los campos eléctricos en el capacitor con dieléctrico tienen sentido contrario, como se muestra en la figura 79, entonces el campo eléctrico total,  $E$ , se determina por la suma vectorial:

$$E = E_p - E_d$$

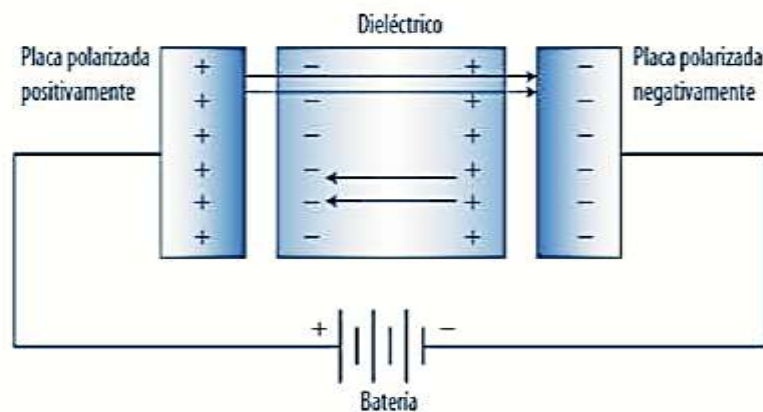


Figura 79 Diagrama esquemático de un capacitor con dieléctrico.



Este fenómeno provoca que la intensidad de campo eléctrico total y que el potencial eléctrico o voltaje entre placas del capacitor disminuyan, puesto que el potencial se relaciona por la ecuación  $C = Q/V$ . Esto es, al disminuir el voltaje entonces la magnitud de la capacitancia o capacidad del condensador se incrementa con el dieléctrico.

La calidad de los materiales utilizados como dieléctricos se especifica con base en una constante  $k_d$  conocida como constante dieléctrica del material.

Todos los materiales dieléctricos tienen diferente permitividad, la cual se conoce como **permitividad absoluta**,  $\epsilon$ , la cual indica el grado de facilidad que presenta ese material dieléctrico al paso del campo eléctrico.

Es obligación del fabricante de los materiales dieléctricos especificar su permitividad relativa en lugar de su permitividad absoluta.

### Permitividad relativa $\epsilon_r$

La **permitividad relativa**,  $\epsilon_r$ , está definida por la relación de la permitividad absoluta con respecto a la permitividad de vacío o del aire. Desde la perspectiva matemática, la permitividad relativa se define como el cociente de la permitividad absoluta entre la permitividad del vacío o aire y se representa con la ecuación siguiente:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

La permitividad relativa es una cantidad adimensional; por consiguiente, tanto la permitividad relativa del vacío como la del aire valen uno.

### Constante dieléctrica

Cuando la permitividad relativa se determina en función de las capacitancias del capacitor con dieléctrico respecto del capacitor sin dieléctrico o con aire se le conoce como constante dieléctrica,  $k_d$ , la cual se define matemáticamente como el cociente resultante de la capacidad de un capacitor con dieléctrico,  $C$ , entre la capacidad,  $C_0$ , del mismo capacitor, pero sin dieléctrico o con aire. La ecuación de la constante dieléctrica en función de las capacidades se deduce con el siguiente análisis:

- De capacitor sin dieléctrico:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \\ \epsilon_0 &= \frac{C_0 d}{A} \end{aligned} \quad (a)$$

- De capacitor con dieléctrico:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \\ \epsilon_0 &= \frac{Cd}{\epsilon_r A} \end{aligned} \quad (b)$$

- Al igualar las ecuaciones (a) y (b), y despejando  $\epsilon_r$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{C_0 d}{A} &= \frac{Cd}{\epsilon_r A} \\ \epsilon_r &= k_d = \frac{C}{C_0} \end{aligned}$$

De esta manera, la constante dieléctrica,  $k_d$ , es una cantidad escalar adimensional, por tanto carece de unidades y es igual en magnitud a la permitividad relativa,  $\epsilon_r$ .

La constante dieléctrica del vacío, la cual se considera igual a la del aire, es igual a uno.

Al despejar a la capacidad,  $C$ , de la ecuación anterior se determina la capacidad de cualquier capacitor que contenga dieléctrico. Así pues:

$$C = k_d C_0$$

Como ya se vio en páginas anteriores, también se ha deducido la ecuación con el fin de determinar la capacidad de un capacitor sin dieléctrico o con aire, donde se encontró que su capacidad está en función de la permitividad del vacío,  $\epsilon_0$ , por el área de las placas,  $A$ , y dividido por la distancia de separación de las placas según la siguiente ecuación:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Si se relacionan estas dos últimas ecuaciones y se reducen las variables, es posible establecer que la capacidad del condensador de placas planas con dieléctrico se determina mediante la siguiente ecuación:

$$C = \frac{k_d \epsilon_0 A}{d}$$

Es importante destacar aquí, que con el mismo procedimiento también es posible determinar la ecuación para el capacitor cilíndrico con dieléctrico. Entonces, la ecuación es la siguiente:

$$C = \frac{2k_d \pi \epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

En tanto, para el caso del capacitor esférico con dieléctrico la ecuación es la siguiente:

$$C = \frac{4\pi k_d \epsilon_0 r_a r_b}{r_a - r_b}$$

Es importante hacer notar que el fabricante de los materiales especifica el valor de la constante dieléctrica,  $k_d$ . Enseguida se muestran los valores de las constantes dieléctricas para algunos materiales más utilizados.

Tabla 5 Constantes dieléctricas de algunos materiales.

Material	Constante $k_d$	Material	Constante $k_d$
Vacío	1	Papel parafinado	2
Aire	1.006	Aceite de transformador	4
Baquelita	7	Teflón	2
Vidrio	7.5	Agua	81
Mica	5	Dióxido de titanio	100
Plástico	3	Plástico nitrocelulosa	9
POliestireno	2.6	Porcelana	6.5

### Problemas Resueltos

**Problema resuelto 1.**

Un capacitor de placas planas circulares separadas 2 milímetros en el aire tiene una capacidad de 4 nF; al colocarle un material aislante entre sus placas, su capacidad aumenta hasta 380 nF, además de que cuando se le aplica cierto potencial al capacitor con dieléctrico, su carga eléctrica en las placas es de  $1.8 \times 10^{-6}$  C. Determinar:

- a) Constante dieléctrica.
- b) Radio de las placas.
- c) Densidad de carga de las placas.

**Solución.**

Primero, establecemos los datos de referencia:

$$d = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$C_0 = 4 \text{ nF} = 4 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$C = 380 \text{ nF} = 380 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$Q = 1.8 \times 10^{-6} \text{ C}$$

- a) Constante dieléctrica:

$$k_d = \frac{C}{C_0} = \frac{380 \times 10^{-9} \text{ F}}{4 \times 10^{-9}} = 95$$

- b) Radio de la placa:

$$A = \pi r^2$$

$$C = \frac{\epsilon_0 k_d A}{d} = \frac{\epsilon_0 k_d \pi r^2}{d}$$

$$r = \sqrt{\frac{Cd}{\pi k_d \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{(380 \times 10^{-9} \text{ F})(2 \times 10^{-3} \text{ m})}{(3.1416)(95)(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)}} = 0.5364 \text{ m}$$

- c) Densidad de carga de las placas:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{1.8 \times 10^{-6} \text{ C}}{(3.1416)(0.5364 \text{ m})^2} = 19.91 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

**Problema resuelto 2.**

Calcular la constante dieléctrica del material utilizado entre las placas circulares de 12 cm de radio, separadas 0.4 milímetros, si al construir un capacitor de laboratorio se midió que la capacidad fue de 98 nanofaradios.

**Solución.**

Primero, establecemos los datos de referencia:

$$r = 0.12 \text{ m}$$

$$d = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$C = 98 \times 10^{-9} \text{ F}$$

Ahora, escribimos la ecuación que nos permitirá determinar el cálculo solicitado en el planteamiento del problema:

$$k_d = \frac{C}{C_0}$$

Por último, sustituimos:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)(3.1416)(0.12 \text{ m})^2}{4 \times 10^{-4} \text{ m}} = 10.00913 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$k_d = \frac{C}{C_0} = \frac{98 \times 10^{-9} \text{ F}}{10.00913 \times 10^{-10} \text{ F}} = 97.910$$

**Problema resuelto 3.**

La constante dieléctrica de un material es de 48 y su rigidez dieléctrica es de  $23.4 \times 10^3 \text{ V/m}$ , el cual se utilizó en la fabricación de un capacitor de placas paralelas. La capacidad de este capacitor es de  $2.6 \mu\text{F}$  y la diferencia de potencial en sus placas es de 750 V. Calcular:

- a) Área de las placas del capacitor.
- b) Energía almacenada.

**Solución.**

a) Primero, calculamos la carga del capacitor utilizando su ecuación general:

$$Q = CV$$

Luego, determinamos la separación entre placas mediante la ecuación de campo para carga puntual, debido a que el campo eléctrico entre placas es uniforme y constante. Pero, primero establecemos los datos de referencia:

$$K_d = 48$$

$$E = 23.4 \times 10^3 \text{ V/m}$$

$$C = 2.6 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$V = 750 \text{ volts}$$

$$q = CV = (2.6 \times 10^{-6} \text{ F})(750 \text{ V}) = 1.95 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Entonces:

$$E = \frac{K_e q}{r^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{K_e q}{E}} = \sqrt{\frac{48(1.95 \times 10^{-4})}{23.4 \times 10^3 \text{ V/m}}} = 6.3245 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 k 2\pi r^2}{d}$$



$$A = \frac{Cd}{K_d \epsilon_0} = \frac{2.6 \times 10^{-6} (6.3245 \times 10^{-4})}{48(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2)} = 3.8709 \text{ m}^2$$

b) Para determinar la energía almacenada en el capacitor se utiliza la siguiente ecuación, en la cual se sustituyen los valores correspondientes:

$$E_c = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (2.6 \times 10^{-6} \text{ F})(750 \text{ V})^2 = 0.7312 \text{ J}$$

**Resumen:**

**Energía almacenada en un capacitor.**

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.14)$$

Es útil pensar en la energía almacenada en el capacitor como si estuviera almacenada en el campo eléctrico entre las placas. Como ejemplo, calculemos la energía almacenada en un capacitor de placas paralelas en términos del campo eléctrico.

Hemos visto que el campo eléctrico entre dos placas paralelas cercanas es (aproximadamente) uniforme y que su magnitud está relacionada con la diferencia de potencial a través de  $V = Ed$ , donde  $d$  es la separación entre las placas. La ecuación 2.12 nos muestra también que  $C = \epsilon_0 A/d$  para un capacitor de placas paralelas. Así

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (E^2 d^2) = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Ad}$$

La cantidad  $Ad$  es el volumen entre las placas en donde existe el campo eléctrico  $E$ . Si dividimos ambos lados entre el volumen, obtendremos una expresión para la energía por unidad de volumen o **densidad de energía**,  $u$ :

$$u = \text{densidad de energía} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.15)$$

La energía eléctrica almacenada por unidad de volumen en una región del espacio es proporcional al campo eléctrico al cuadrado en esa región. Obtuvimos la ecuación 2.15 para el caso especial de un capacitor de placas paralelas. Pero puede demostrarse que es válida para cualquier región del espacio donde haya un campo eléctrico. Observe que las unidades concuerdan: para  $(\epsilon_0 E^2)$  tenemos  $(\text{C}^2/\text{N} * \text{m}^2)(\text{N}/\text{C})^2 = \text{N}/\text{m}^2 = (\text{N} * \text{m})/\text{m}^3 = \text{J}/\text{m}^3$ .

**Densidad de energía**

La densidad de energía está dada por:

$$\sigma = u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

**Capacitancia de un capacitor con dieléctrico.**

Cuando la región entre las placas de un capacitor se llena completamente con un material de constante dieléctrica  $K$ , la capacidad aumenta en el factor  $K$ :

$$C = K \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

**Variaciones de energía debidas a la intromisión de un dieléctrico en un capacitor.**

$$U - U_0 = \frac{U_0}{K} - U_0 = -U_0 \left( \frac{K-1}{K} \right);$$

carga constante

$$U - U_0 = KU_0 - U_0 = (K - 1)U_0$$

potencial constante.

**Dieléctricos.**

Entre las placas de la mayoría de los capacitores hay una hoja aislante de material, como papel o plástico, llamada **dieléctrico**. Esto cumple varios propósitos. Primero que nada, los dieléctricos tienen un rompimiento eléctrico (lo que permite que la carga eléctrica fluya) menos rápido que en el aire, así que pueden aplicarse mayores voltajes sin que pase la carga a través de la separación. Más aún, un dieléctrico facilita que las placas se localicen más cerca una de la otra sin tocarse, lo que da lugar a un incremento en la capacitancia, porque  $d$  es menor en la ecuación 2.12. Por último, se encuentra de manera experimental que si un dieléctrico llena el espacio entre los dos conductores, se incrementa la capacitancia en un factor  $K$  conocido como la **constante dieléctrica**. Así,

$$C = KC_0 \tag{2.16}$$

donde  $C_0$  es la capacitancia cuando el espacio entre los dos conductores del capacitor es un vacío, y  $C$  es la capacitancia cuando el espacio se ha llenado con un material con constante dieléctrica  $K$ .

Tabla 6 Constantes Dieléctricas (a 20 °C)

Material	Constante dieléctrica $K$	Esfuerzo dieléctrico (V/m)
Vacío	1.0000	
Aire (a 1 atm)	1.0006	$3 \times 10^6$
Parafina	2.2	$10 \times 10^6$
Poliestireno	2.6	$24 \times 10^6$
Vinílico (plástico)	2-4	$50 \times 10^6$
Papel	3.7	$15 \times 10^6$
Cuarzo	4.3	$8 \times 10^6$
Aceite	4	$12 \times 10^6$
Vidrio, pyrex	5	$14 \times 10^6$
Porcelana	6-8	$5 \times 10^6$
Mica	7	$150 \times 10^6$
Agua (líquida)	80	
Titanato de estroncio	300	$8 \times 10^6$

La tabla 6 indica los valores de la constante dieléctrica para varios materiales. También se muestra en la tabla 6 el **esfuerzo dieléctrico** (también conocido como **resistencia dieléctrica** o **intensidad dieléctrica**), que corresponde al campo eléctrico máximo permitido antes de que ocurra el rompimiento eléctrico (es decir, que fluya la carga). Para un capacitor de placas paralelas (véase la ecuación 2.12),

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \quad [\text{capacitor de placas paralelas}] \quad (2.17)$$

cuando el espacio entre las placas está completamente lleno con un dieléctrico cuya constante dieléctrica es  $K$ . (El caso en el que el dieléctrico llena sólo en forma parcial el espacio entre las placas se analizará brevemente en el Problema resuelto 4.) La cantidad  $K\epsilon_0$  aparece tan a menudo en las ecuaciones que definimos una nueva cantidad

$$\epsilon = K\epsilon_0 \quad (2.18)$$

llamada la **permitividad** del material. Así que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas puede escribirse como

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Observe que  $\epsilon_0$  representa la permitividad del espacio libre (vacío), como en la ley Coulomb.

La densidad de energía almacenada en un campo eléctrico  $E$  (sección Energía almacenada en un capacitor.) en un dieléctrico está dada por (véase la ecuación 2.15)

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad [E \text{ en un dieléctrico}]$$

## 2.5 Momento Dipolar Eléctrico.

### ***Las ecuaciones de Poisson y Laplace.***

Recordemos la forma diferencial de la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

y puesto que ahora sabemos que  $\vec{E} = -\nabla V$ , podemos combinar estos dos términos

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

La expresión  $\nabla \cdot \nabla$  corresponde al laplaciano  $\nabla^2$ , el producto “punto” entre dos operadores “nabla”, entonces obtenemos la **ecuación de Poisson**



$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ecuación de Poisson

El operador  $\nabla^2$  involucra derivadas parciales respecto a las coordenadas. Si conocemos  $\rho(x, y, z)$  y las condiciones de borde apropiadas, estaremos en condiciones de resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales.

Hay algunos problemas de electrostática donde  $\rho$  es cero en casi todas las partes del espacio. Entonces la ecuación de Poisson se reduce a la **ecuación de Laplace**:

$$\nabla^2 V = 0$$

Ecuación de Laplace

Para resolver cualquiera de las dos ecuaciones diferenciales, tendremos que hacer consideraciones de simetría y expresar el Laplaciano en un sistema de coordenadas adecuado para facilitar los cálculos.

**Conexión entre el campo eléctrico, el potencial eléctrico y la densidad de carga.**

Es interesante hacer un resumen de la relación entre las tres cantidades más importantes que hemos visto hasta ahora: el campo eléctrico, el potencial eléctrico y la densidad de carga. La figura 80 resume estas ecuaciones y puede ser de ayuda cuando se trate de obtener una de estas cantidades a partir de otra.

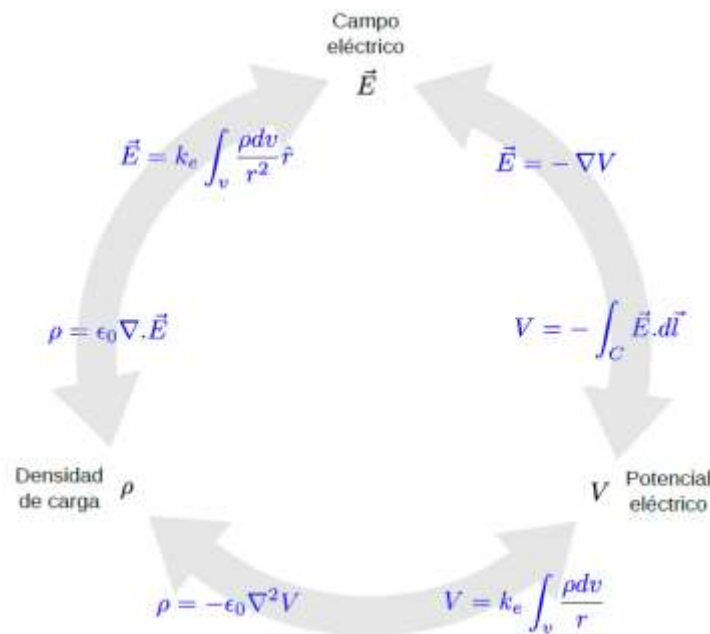


Figura 80 Ecuaciones que relacionan la densidad de carga, el potencial eléctrico y el campo eléctrico.

**Ejemplos 1.**

Se sabe que el potencial está dado por  $V = 80r^{0.6}$ . Asumiendo condiciones del espacio libre, encontrar:

(a) El campo eléctrico: sabemos que  $\vec{E} = -\nabla V$ , pero puesto que  $V$  depende de  $r$  el campo eléctrico debe ser expresado en coordenadas esféricas. El operador gradiente en coordenadas esféricas es

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

y como  $V = V(r)$  se reduce a:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = -80(0.6)r^{-0.4} \hat{r} = -48r^{-0.4} \hat{r}$$

(b) La densidad de carga volumétrica en  $r = 0.5$  m: La densidad se obtiene de  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ . En coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

y nuevamente por se ve reducido a

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r)$$

$$\rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 48r^{-0.4}) = -48\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{1.6}) = -48\epsilon_0 \frac{1}{r^2} (1.6)r^{0.6} = \boxed{-\frac{76.8\epsilon_0}{r^{1.4}}}$$

y evaluada en  $r = 0.5$

$$\boxed{\rho(0.5) = -1.79 \text{ nC/m}^3}$$

Por supuesto que hubiéramos obtenido  $\rho$  directamente de la ecuación de Poisson  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . En coordenadas esféricas el laplaciano es:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

y que en nuestro caso se reduce a  $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)$ .

(c) La carga total encerrada en la superficie  $r = 0.6$ : La manera más fácil es usando la ley de Gauss eligiendo una superficie esférica de radio  $r$ :

$$Q_{enc} = \epsilon_0 \int_{\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int -48r^{-0.4} \hat{r} \cdot d\vec{A} = -48r^{-0.4} \int dA$$

donde hemos usado el hecho de que el campo es radial y es paralelo a  $d\vec{A}$  y además es constante en cualquier parte de la superficie de la esfera.

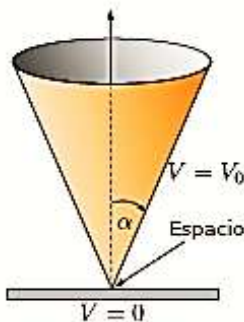
$$Q_{enc} = -48\epsilon_0 r^{-0.4} 4\pi r^2$$

y al evaluar  $Q_{enc}(0.6) = -2.36 \text{ nC}$ .

OTRA MANERA es integrar la densidad de carga  $\rho(r) = -\frac{76.8\epsilon_0}{r^{1.4}}$  usando coordenadas esféricas en

$$Q_{enc} = \int \rho(r) dV$$

**Ejemplo 2.**



Ahora un ejemplo donde se involucren coordenadas esféricas. Se tiene un cono conductor a potencial  $V_0$  como se muestra en la figura. Calcular el potencial en todo el espacio.

**Solución:** Debido a la simetría, las superficies equipotenciales son conos con  $\theta = \text{constante}$ , independiente del ángulo  $\phi$  y de  $r$ . El laplaciano en coordenadas esféricas es (ver sección 1.2)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

y puesto que  $V$  solo depende del ángulo azimutal  $\theta$ , la ecuación de Laplace queda

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

al excluir  $r = 0$  y  $\theta = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

vemos que al integrar una vez en  $\theta$

$$\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} = A$$

La segunda integral es

$$V = \int \frac{A}{\sin \theta} d\theta + B$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes de integración. Esta integral no es trivial y se puede buscar en una tabla

$$V = A \ln \left( \tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

Con las condiciones de borde  $V(\pi/2) = 0$  y  $V(\alpha) = V_0$ ,  $\alpha < \pi/2$ , se obtienen las constantes

$$V(\theta) = V_0 \frac{\ln(\tan \frac{\theta}{2})}{\ln(\tan \frac{\alpha}{2})}$$

El campo eléctrico se obtiene de  $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$

$$\vec{E}(r, \theta) = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln(\tan \frac{\alpha}{2})} \hat{\theta}$$

Todavía le podemos sacar más información de este problema. Por ejemplo el campo eléctrico en la superficie del cono es (haciendo  $\theta = \alpha$ )

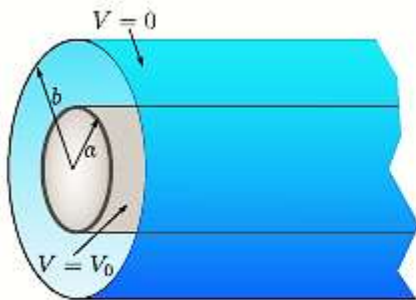
$$\vec{E}(r, \alpha) = -\frac{V_0}{r \sin \alpha \ln(\tan \frac{\alpha}{2})} \hat{\theta}$$

y es perpendicular a la superficie del cono.

Usando el teorema de Gauss podemos determinar la densidad de carga superficial del cono (para ello elegimos un cilindro perpendicular a la superficie del cono como superficie Gaussiana). Obtenemos

$$\sigma = -\frac{\epsilon_0 V_0}{r \sin \alpha \ln(\tan \frac{\alpha}{2})}$$

### Ejemplo 3.



Supongamos que tenemos dos cilindros coaxiales muy largos, a diferente potencial como se muestra en la figura. Encontrar el potencial entre los cilindros.

**Solución:** Debido a la simetría del problema, las superficies equipotenciales son cilindros concéntricos de radio  $r = \text{constante}$ . Usando coordenadas cilíndricas, el potencial no depende de  $\phi$  ni de  $z$ . La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

la cual se ve reducida a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

para ello debe cumplirse que

$$r \frac{\partial V}{\partial r} = A \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r} \Rightarrow V(r) = A \ln r + B$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes, que se determinan con las condiciones de borde  $V(a) = V_0$  y  $V(b) = 0$ , obteniéndose

$$V(r) = V_0 \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

De aquí podemos obtener inmediatamente el campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left( \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{V_0}{r \ln(b/a)} \hat{r}$$

### El momento dipolar eléctrico

El concepto de momento dipolar eléctrico merece una sección especial. Es un concepto útil en átomos y moléculas y también en dieléctricos como veremos más adelante.

Se define un **dipolo eléctrico** (figura 81) a un sistema de dos cargas iguales y de signo contrario, separadas entre sí por una pequeña distancia.

El momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  es una magnitud vectorial cuyo módulo equivale al producto de la carga  $Q$  por la distancia entre las cargas

$$p = Qd$$

La dirección del vector  $\sim p$  va desde la carga negativa a la positiva

$$\vec{p} = Q\vec{d}$$

y la unidad de momento dipolar es  $[C * m]$ , pero en la práctica se usa la unidad Debye [D], donde  $1D = 3.335 \times 10^{-30} C * m$ .

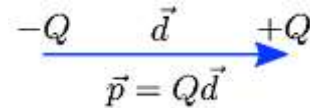


Figura 81 Un dipolo son dos cargas de igual magnitud y signo contrario separadas por una distancia.

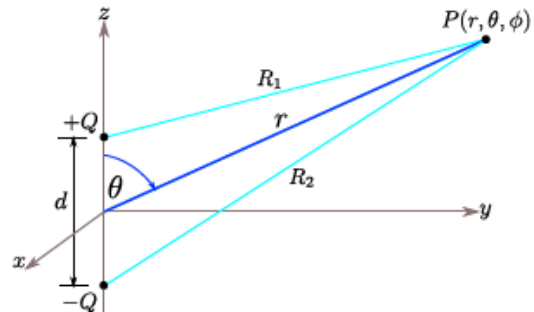


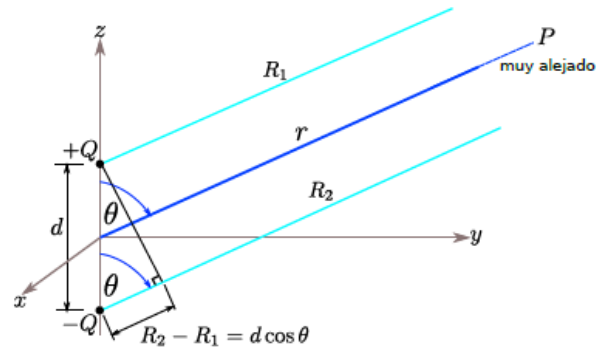
Figura 82 Geometría para calcular el campo eléctrico producido por un dipolo.

Ahora procederemos a calcular el potencial eléctrico debido a un dipolo. En la figura.82 elegimos coordenadas esféricas para describir el problema.

El punto  $P$  tiene coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , pero da lo mismo cualquier valor de  $\phi$ , así que colocamos el punto  $P$  en el plano  $yz$  ( $\phi = 0$ ). El potencial en  $P$  será la suma de los potenciales de las cargas puntuales por separado:

$$V = k_e \frac{Q}{R_1} + k_e \frac{(-Q)}{R_2} = k_e Q \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = k_e Q \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

Ahora la idea es expresar el potencial en función de  $r$  y  $\theta$ . Esto no resulta en una expresión simple, pero para efectos prácticos necesitamos conocer el potencial a una distancia  $r$  muy grande comparada con  $d$  ( $d \ll r$ ). Cuando  $P$  se encuentra muy alejado del dipolo, las líneas  $R_1$ ,  $r$  y  $R_2$  son prácticamente paralelas, tal como muestra la figura 83.



Podemos seguir dos caminos para la aproximación:

Figura 83 Situación donde el punto  $P$  se encuentra muy alejado del dipolo, es decir  $r \gg d$ .

(a) De acuerdo a la figura  $R_2 - R_1 \approx d \cos \theta$  y  $R_1 R_2 \approx r^2$ , con lo cual el potencial es

$$V \approx k_e Q \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = k_e \frac{Q d \cos \theta}{r^2}$$

(b) La otra forma es que de acuerdo a la figura  $R_1 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta$  y  $R_2 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta$

$$\begin{aligned} V &= V \approx k_e Q \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = k_e Q \left( \frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos \theta} \right) \\ &= k_e Q \left( \frac{r + \frac{d}{2} \cos \theta - r + \frac{d}{2} \cos \theta}{\left( r - \frac{d}{2} \cos \theta \right) \left( r + \frac{d}{2} \cos \theta \right)} \right) \end{aligned}$$

después de simplificar

$$V \approx k_e \frac{Q d \cos \theta}{r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta}$$

y después de considerar que  $d \ll r$ ,  $r^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta$  y tenemos

$$V \approx k_e \frac{Q d \cos \theta}{r^2}$$

Potencial de un dipolo a una gran distancia.

Notar que el potencial es cero en el plano  $xy$  ( $\theta = \pi/2$ ). Además de la figura anterior  $\vec{d} \cdot \hat{r} = d \cos \theta$ , y como  $\vec{p} = Q\vec{d}$ , podemos reescribir el potencial en función del momento dipolar:



$$V \approx k_e \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

El campo eléctrico producido por el dipolo se calcula usando el gradiente en coordenadas esféricas

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}\right)$$

$$\vec{E} = k_e \frac{Qd}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

Campo eléctrico de un dipolo a una gran distancia (ver figura 84)

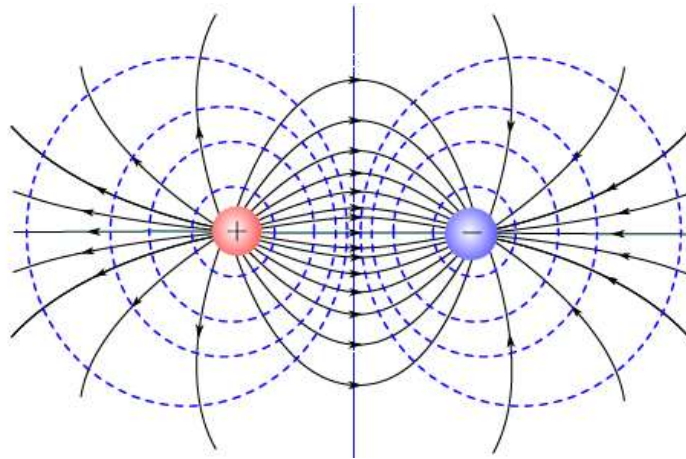


Figura 84 Líneas de campo eléctrico(negro) y superficies equipotenciales (azul) de un dipolo eléctrico.

## 2.6 Polarización Eléctrica.

### Introducción.

Comenzamos estudiando los agregados de dipolos para introducir los conceptos de polarización eléctrica, después deducimos el campo debido a un medio polarizado e introducimos el vector desplazamiento eléctrico. A continuación estudiamos el teorema de Gauss en dieléctricos e introducimos los conceptos de susceptibilidad y permitividad, magnitudes que, desde un punto de vista macroscópico, caracterizan a los dieléctricos. Terminamos analizando las condiciones para los vectores de campo en la superficie de separación entre un dieléctrico y el vacío, un conductor u otro dieléctrico. Para ello comenzamos introduciendo el vector polarización eléctrica que es un promedio macroscópico del momento dipolar que tienen los átomos o moléculas del material.

### Polarización eléctrica.

Un dieléctrico polarizado se puede considerar como un conjunto muy numeroso de pequeños dipolos en el vacío. Para caracterizar dicho conjunto de dipolos se introduce el concepto de polarización de la forma siguiente:

La **polarización** se define como el momento dipolar por unidad de volumen cuando dicho volumen es muy pequeño; en forma matemática:

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta v}$$

Donde  $\Delta p = \sum p_m$  es la suma vectorial de todos los momentos dipolares

que existen en el volumen elemental  $\Delta v$ ;  $p_m$  es el momento dipolar de cada átomo o molécula en  $\Delta v$ .

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta v}$$

Como en todas las magnitudes que representan un valor medio, la polarización asocia a cada punto, cuyo entorno es el volumen  $\Delta v$  un vector **P** que es el valor medio de los momentos dipolares de los átomos o moléculas existentes en el citado volumen.  $\Delta v$  se considera muy pequeño en comparación con las dimensiones del sistema, pero en su interior existe un gran número de moléculas o átomos con momentos  $p_m$ . La polarización **P** es por tanto una función de punto que caracteriza al dieléctrico desde un punto de vista macroscópico.

Dado que las dimensiones de **p** son carga por distancia [ $C \cdot m$ ], las dimensiones del vector polarización serán [ $C/m^2$ ]; es decir, la unidad de medida de **P** en el SI es el *culombio partido por metro cuadrado* [ $C/m^2$ ];.

**Resumen.**

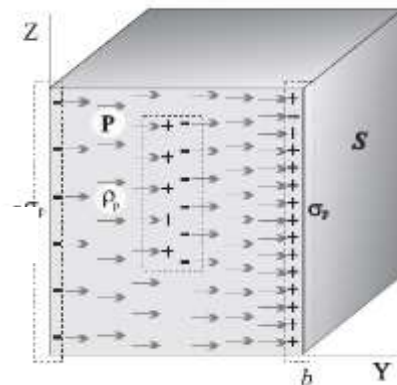
La polarización se define como el momento dipolar por unidad de volumen cuando dicho volumen es muy pequeño; en forma matemática:

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{m=1}^N p_m$$

**Ejemplo 1.**

En la figura 85 se muestra un dieléctrico sin cargas libres, cuya polarización es de la forma  $P = k(y + b)u_y$  y  $P = 0$  para  $y < b$ . El espesor de la placa es  $b$  y su superficie  $S$ . Calcular las densidades de carga de polarización y comprobar que la suma de todas en cero.

Figura 85 Dieléctrico sin cargas libres.





**Solución.**

Las densidades de carga superficial se obtienen mediante la ecuación,

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

En la cara izquierda  $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_y$ ,  $y = 0$ , por tanto,

$$\sigma_{pi} = -\mathbf{u}_y \cdot k(0 + b)\mathbf{u}_y = -k b$$

En la cara de la derecha  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_y$ ,  $y = b$ , por tanto,

$$\sigma_{pd} = \mathbf{u}_y \cdot k(b + b)\mathbf{u}_y = 2 k b$$

La densidad  $\rho_p$  se calcula a partir de la ecuación,

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{P}$ ,

$$\rho_p = -\nabla \cdot k(y + b)\mathbf{u}_y = -\left(0 + \frac{\partial P_y}{\partial y}k(y + b) + 0\right)$$

$$\rho_p = -k$$

La carga superficial será,

$$Q_S = S(2 k b - k b) = S k b \quad [C]$$

La carga distribuida el interior se obtiene multiplicando la densidad por el volumen,

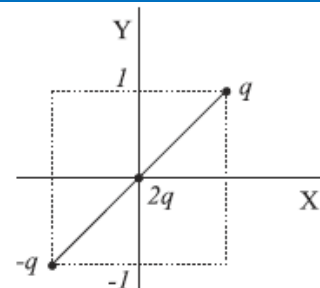
$$Q_V = S d \rho_p = -S k b$$

Es decir la suma de las dos distribuciones de carga es nula como cabía esperar de un dieléctrico sin cargas libres.

### Ejemplo 2.

La figura 86 muestra una distribución discreta de cargas sobre el plano YZ. Calcular los momentos multipolares y los términos multipolares del potencial.

Figura 86 Distribución discreta de cargas.



Solución.

*Momento monopolar*

$$Q = \sum_{i=1}^3 q_i = -q + 2q - q = 0$$

*Momento dipolar*

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^3 q_i \mathbf{r}_i$$

Los valores de  $\mathbf{r}_i$  son,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \quad \text{carga } -q \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = 0 \quad \text{carga } 2q \\ \mathbf{r}_3 &= -(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad \text{carga } -q \end{aligned}$$

El momento dipolar será,

$$\mathbf{p} = -q(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) + 0 - q(-(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)) = 0$$

*Momento cuadripolar*

La distribución está en el plano XY, en consecuencia toda componente que lleve la coordenada  $z$  es nula. Teniendo en cuenta la relación,

$$Q_{jk} = \sum_{i=1}^N q_i (3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk})$$

calculamos los distintos elementos de la matriz.

$r_i^2 = 2$  para las cargas negativas y  $r_i^2 = 0$  para la carga  $2q$ .

$$Q_{xx} = -q(1 \times 3 - 2) + 0 - q(1 \times 3 - 2) = -2q$$

$$Q_{yy} = -q(1 \times 3 - 2) + 0 - q(1 \times 3 - 2) = -2q$$

$$Q_{zz} = -(2 \times (-q)) - (2 \times (-q)) = 4q$$

por tanto se cumple la relación,

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$$

Las componentes cruzadas que contienen  $z$  son nulas,

$$Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

Por la simetría del tensor,

$$Q_{xy} = Q_{yx} = -q \cdot 3 \times 1 \times 1 + 0 - q \cdot 3 \cdot (-1) \times (-1) = -6q$$

El potencial viene dado por el término cuadrupolar, ya que los otros son nulos,

$$V(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \frac{j k}{r^5} Q_{jk}$$

$$V(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^5} (-2x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 12xy)$$

### Ejemplo 3.

Dada una distribución lineal de carga entre los puntos  $(0, -a, 0)$  y  $(0, a, 0)$ , cuya forma es  $\lambda = \lambda_0 \cos(\pi y'/a)$ , calcular, de forma aproximada y mediante los momentos multipolares, el potencial en el punto  $(0, 0, 4a)$ .

**Solución.**

En primer lugar calculamos los momentos multipolares.

*Momento monopolar*

$$dl = dy', \quad \lambda = \lambda_0 \cos(\pi y'/a)$$

$$Q = \int_{-a}^a \lambda_0 \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy' = \lambda_0 \left[ \frac{a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \right]_{-a}^a = 0$$

*Momento dipolar*

$$\mathbf{r}' = y' \mathbf{u}_y.$$

**Nota:**

El momento dipolar  $\mathbf{p}$  es la integral de volumen,

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv'$$

Se sustituye en la ecuación de momento dipolar p  $\rho(r')dv'$  por  $\lambda_0 \cos(\pi y'/a)dy'$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_{-a}^a \mathbf{u}_y y' \lambda_0 \cos(\pi y'/a) dy' \\ \mathbf{p} &= \mathbf{u}_y \lambda_0 \left\{ \left[ y' \frac{a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \right]_{-a}^a - \int_{-a}^a \frac{a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy' \right\} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{u}_y \lambda_0 \left\{ 0 - \left[ -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \right]_{-a}^a \right\} = 0 \end{aligned}$$

*Momento cuadrupolar*

Las coordenadas de los puntos donde se sitúa la carga se caracterizan por que las componentes son  $x = 0$  y  $z = 0$ , por tanto,

$$Q_{xy} = Q_{yx} = Q_{xz} = Q_{zx} = Q_{yz} = Q_{zy} = 0$$

es decir, solo quedan los componentes de la diagonal.

La distancia  $r'^2 = y'^2$ .

Nota:

El tercero, conocido como término cuadrupolar  $V_Q$  es el potencial debido al momento cuadrupolar  $Q_{ik}$  con respecto al origen.

$$V_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \frac{j k}{r^5} \int_V (3 j' k' - \delta_{jk} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv'$$

$$\text{con } j = x, y, z ; k = x, y, z$$

Aplicando la ecuación conocida como término cuadrupolar  $V_Q$  y sustituyendo  $\rho(r')$  por  $\lambda(y')$  y  $dv'$  por  $dy'$

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_{-a}^a (3 \cdot 0 - y'^2) \lambda_0 \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy' \\ Q_{xx} &= -\lambda_0 \left\{ \left[ y'^2 \frac{a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \right]_{-a}^a - \int_{-a}^a 2y' \frac{a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy' \right\} \\ Q_{xx} &= -\lambda_0 \left\{ 0 - 2 \frac{a}{\pi} \frac{a}{\pi} \left( \left[ -y' \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \right]_{-a}^a + \int_{-a}^a \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy' \right) \right\} \\ Q_{xx} &= -\lambda_0 \left\{ -4 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 a + \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y'}{a}\right) \right]_{-a}^a \right\} \end{aligned}$$

$$Q_{xx} = 4\lambda_o \frac{a^3}{\pi^2}$$

$$Q_{zz} = \int_{-a}^a (3 \cdot 0 - y'^2) \lambda_o \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy' = Q_{xx}$$

$$Q_{zz} = 4\lambda_o \frac{a^3}{\pi^2}$$

$$Q_{yy} = \int_{-a}^a (3 \cdot y'^2 - y'^2) \lambda_o \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy' = \int_{-a}^a 2 y'^2 \lambda_o \cos\left(\frac{\pi y'}{a}\right) dy'$$

$$Q_{yy} = -2Q_{xx} = -8\lambda_o \frac{a^3}{\pi^2}$$

Una vez conocidos los momentos dipolares calculamos el potencial en el punto  $(0, 0, 4a)$  aplicando la ecuación de momento dipolar  $\mathbf{P}$  adaptada a nuestra distribución de carga. Dado que  $Q = 0$  y  $p = 0$ , sólo queda la parte correspondiente al término cuadripolar. Los elementos que contienen la coordenada  $x$  e  $y$  son nulos, dado que son nulas dichas coordenadas, por tanto,

$$V(\mathbf{r}) \simeq V_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \frac{j k}{r^5} Q_{jk}$$

$$V(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \frac{1}{r^5} z^2 Q_{zz}$$

$$V(a) \simeq \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \frac{1}{4^5 a^5} 4^2 a^2 4\lambda_o \frac{a^3}{\pi^2} = \frac{\lambda_o}{128 \pi^3 \epsilon_o}$$



**Problemas para resolver.**

**2.1** Determina la carga superficial de cada una de las placas de un capacitor de laboratorio, de placas planas de  $8 \times 12$  cm, separadas 0.2 milímetros por aire, cuando el capacitor se conecta hacia una batería de 12 volts.

**2.2** La capacidad de un capacitor de placas rectangulares es de 4.6 nanofaradios, separadas 0.24 milímetros. Si el ancho de su placa es de 2 centímetros, ¿cuál será la longitud de la placa?

**2.3** En un laboratorio se tienen dos placas metálicas cuadradas de 6 centímetros, separadas 0.15 milímetros por aire. Calcula su capacidad.

**2.4** Se tiene un capacitor de placas planas cuadradas de 4 centímetros, separadas por aire 0.08 milímetros, que se conecta a una fuente de 36 V. Determina la carga superficial de cada placa.

**2.5** A un capacitor de laboratorio se le conecta un potencial de 12 V. Si sus placas son cuadros de 8 centímetros y su capacidad es de 4 nanofaradios, calcula la densidad de carga superficial.

**2.6** Se requiere construir un capacitor de laboratorio con dos placas planas circulares separadas 0.12 milímetros, de tal manera que su capacidad sea de 15 nanofaradios. Determina el radio de las placas.

**2.7** Se sabe que la capacidad de un capacitor de placas planas circulares para laboratorio es de 0.3 nanofaradios y que el radio de sus placas es de 6 centímetros con núcleo de aire. Determina la distancia de separación de sus placas.

**2.8** En un capacitor de placas planas circulares de 9 cm de diámetro, separadas 0.2 milímetros por aire, se ha detectado que la carga de sus placas es de 6.7561 nanocoulombs. Determina el potencial eléctrico en sus placas.



**ALERTA:** Determine primero la capacidad del capacitor mediante la ecuación del capacitor de placas planas, a continuación utilice la ecuación general que relaciona capacidad, carga y voltaje.

**2.9** Se requiere saber cuál es la capacidad que genera un par de placas conductoras circulares de 6 centímetros de diámetro, separadas por aire 0.2 milímetros.

**2.10** Se necesita conocer cuál es la cantidad de carga eléctrica almacenada en cada placa de un capacitor de 0.47 microfaradios, cuando se conecta a una fuente de voltaje de 60 V.

**2.11** Se desea conocer la constante dieléctrica de un material, el cual está compactado en una placa delgada, si al ser colocado entre dos placas de un capacitor de laboratorio se midieron 5.5 nanofaradios, mientras que con aire la capacidad era de 0.22 nanofaradios.

**2.12** Determina la dimensión de las placas conductoras cuadradas que se utilizaron para construir un capacitor, si su capacidad fue de 10 nanofaradios y se utilizó un dieléctrico entre sus placas, cuya constante dieléctrica es de 38, y la distancia entre placas es de 0.4 milímetros.

**2.13** Calcula la capacidad que tendrá un capacitor de laboratorio de placas planas circulares de 18 cm de diámetro, separadas por un material aislante cuya constante dieléctrica es de 22 y el espesor de 0.4 mm.

**2.14** Se construye un capacitor de placas circulares de 7 cm de radio con una película de material aislante, cuya constante dieléctrica es de 28 y su espesor es de 0.3 mm. Determina la capacidad del dispositivo sin dieléctrico.



**ALERTA:** Calcula primero la capacidad del capacitor con dieléctrico, después utilice la ecuación que relaciona la constante dieléctrica y las capacidades con y sin dieléctrico.

**2.15** Determina el radio que tendrá una esfera conductora eléctrica para que su capacidad sea de un faradio.

**2.16** Determina la carga eléctrica de una esfera conductora de 36 centímetros de diámetro, cuando se le aplica un potencial eléctrico de 90 volts.

**2.17** Un material, cuya constante dieléctrica es de 38 y su rigidez dieléctrica es de  $13 \times 10^6$  V/m, se utiliza para construir un capacitor de 140 nanofaradios. Calcula la separación de las placas.

**2.18** Calcula el área para un capacitor de placas planas cuya constante dieléctrica es de 42, considerando que tiene una capacidad de 18 nanofaradios y la separación entre las placas es de 1.3 milímetros.

**2.19** Un capacitor electrolítico de 3 300 microfaradios es conectado hacia una fuente de voltaje de 48 volts. Determina la energía almacenada.

**2.20** Si en un capacitor electrolítico de 4 700 microfaradios, al ser polarizado con una fuente de voltaje, se midió que la energía almacenada es de 9.6 joules. Determina la carga almacenada.



**ALERTA:** Utiliza la ecuación de energía del capacitor para determinar el voltaje, después emplea la ecuación que relaciona voltaje, capacidad y carga.

**2.21** Calcula la cantidad de electrones acumulados en una de las placas del capacitor, si al conectarse hacia una batería de 12 volts almacena la energía de 64 microjoules.



**ALERTA:** Combina la ecuación de energía del capacitor con la ecuación general de carga, capacidad y voltaje para determinar la carga, después considerando la carga del electrón calcule el número de electrones.

**2.22** Calcula la capacidad total de tres capacitores conectados en paralelo cuyos valores son:  $C_1 = 0.22 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0.47 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 0.15 \mu\text{F}$ .

**2.23** Se tienen dos capacitores conectados en serie. ¿Cuál será el valor del capacitor equivalente si sus valores son:  $C_1 = 470 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 320 \mu\text{F}$ ?

**2.24** Se tienen tres capacitores de  $600 \mu\text{F}$  conectados en serie. Determina la capacidad equivalente.

**2.25** En un circuito en serie de dos capacitores iguales, se ha medido que el capacitor equivalente es de  $360 \mu\text{F}$ . ¿Cuál es el valor de cada capacitor?

**2.26** Se tiene una conexión mixta de tres capacitores, como se ilustra en la figura 2.16. Determina la capacidad equivalente.

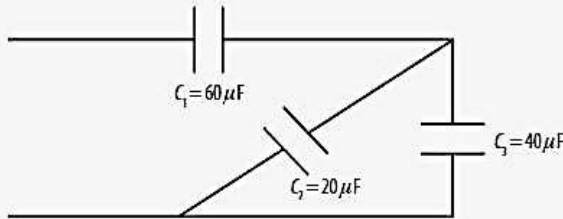


Figura 2.16

**2.27** Para el circuito eléctrico de capacitores que se ilustra en la figura 2.17, determina la capacidad equivalente.

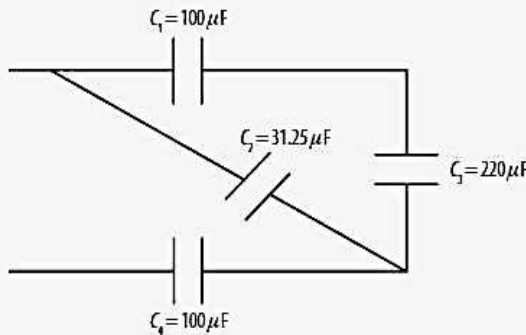


Figura 2.17

**2.28** Determina la capacidad equivalente del siguiente circuito mixto de capacitores (véase figura 2.18).

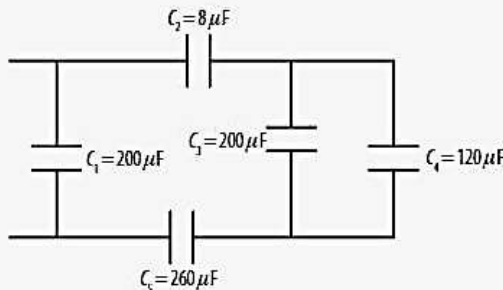


Figura 2.18



**ALERTA:** Inicie el análisis del circuito desde el extremo posterior a las terminales en las que se requiere conocer la capacidad equivalente, utilizando las características eléctricas de conexión serie y paralelo de capacitores, según corresponda.

**2.29** Un capacitor electrolítico de  $1200 \mu\text{F}$  está conectado a una fuente de potencia eléctrica; durante una medición, se midió que la energía almacenada fue de 84 microjoules. Determina su carga eléctrica.

**2.30** La energía eléctrica que en determinado instante se almacena en un capacitor electrolítico fue medida en un laboratorio con un valor de 109 microjoules; si el reporte indica que en esa condición la carga eléctrica en sus placas es de 34.86 microcoulombs, ¿cuál será la capacidad del capacitor?

**2.31** Se requiere probar un capacitor electrolítico de  $4700 \mu\text{F}$  utilizando una fuente de poder que suministra la energía de 23 J. Determina el voltaje de la fuente.

**2.32** La energía que almacena un capacitor es de 0.0134 J cuando está conectado a una fuente de potencial de 120 V. Determina el número de electrones que se acumula en la placa negativa del capacitor.

**2.33** Determina la energía almacenada en un capacitor electrolítico el cual, al ser conectado hacia una fuente de poder de 60 volts, adquiere una carga eléctrica de  $980 \mu\text{C}$ .

**2.34** En un circuito eléctrico están conectados dos capacitores en serie hacia una fuente de potencia de 36 V. Si los capacitores son de  $C_1 = 3200 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 4700 \mu\text{F}$ , calcula la energía total almacenada en los capacitores.

**2.35** Calcula la carga total almacenada en el circuito de capacitores que se muestra en la figura 2.19.

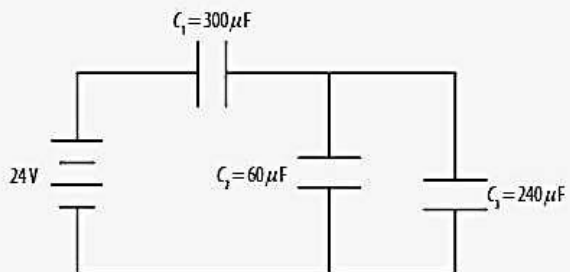


Figura 2.19



**ALERTA:** Calcula primero la capacidad equivalente de la conexión mixta de capacitores, después utilizando la ecuación general que relaciona carga, capacidad y voltaje determina la carga.

**2.36** Determina la carga eléctrica total almacenada en dos capacitores,  $C_1 = 300 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 900 \mu\text{F}$ , conectados en serie hacia una batería de 48 V.



**2.37** Determina la carga eléctrica total almacenada en tres capacitores,  $C_1 = 150 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 300 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 600 \mu\text{F}$ , conectados en paralelo con una fuente de poder de 24 V.

**2.38** Para el circuito mixto de capacitores que se muestra en la figura 2.20, calcula el voltaje en el capacitor  $C_3$ .

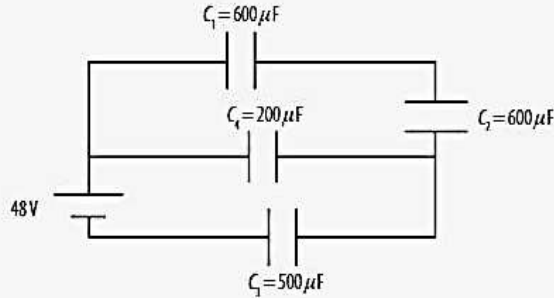


Figura 2.20



**ALERTA:** Analiza el circuito desde el extremo posterior a la fuente de voltaje, para determinar primero la capacidad equivalente utilizando las características de conexión paralelo y serie de capacitores, después utilice la ecuación general que relaciona capacidad carga y voltaje del capacitor.

**2.39** Para el siguiente circuito mixto de capacitores (véase figura 2.21), cuyas capacidades son:  $C_1 = 320 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 80 \mu\text{F}$  y  $C_3 = 400 \mu\text{F}$ , determina el voltaje del capacitor  $C_2$ .

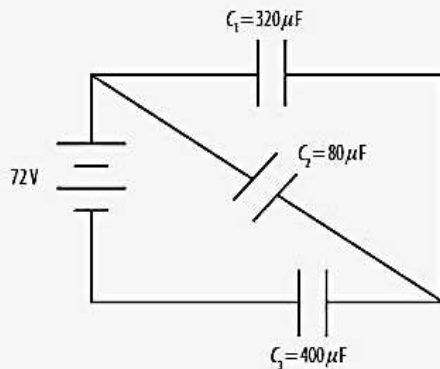


Figura 2.21

**2.40** Para la conexión de capacitores del problema 2.39, determina la carga del capacitor uno.

**2.41** Para el circuito de capacitores que se ilustra en la figura 2.22, determina:

- El voltaje para el capacitor  $C_1$ .
- La carga para el capacitor  $C_2$ .

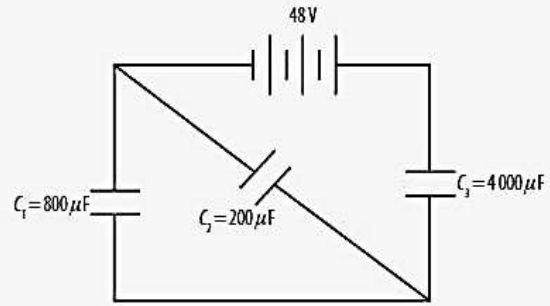


Figura 2.22

**2.42** Calcula la capacidad de un capacitor de placas planas cuyas dimensiones son 45 cm x 60 cm y que están separadas en el aire 1.5 mm.

**2.43** Determina la capacidad,  $C$ , y la carga eléctrica,  $Q$ , de una esfera metálica conductora, si su radio es de 55 centímetros y se le aplica un potencial de 20 V.

**2.44** Determina la capacidad  $C_0$  de un capacitor de placas circulares, cuyo radio es de 20 centímetros y están separadas 0.5 milímetros en el aire, y calcula el valor de la constante dieléctrica,  $k_d$ , del material entre sus placas, si al colocarlo aumenta su capacidad hasta 16.62 nanofaradios.

**2.45** Encuentra la carga eléctrica de las placas de un capacitor cuando se le aplica una diferencia de potencial de 200 V, si la energía eléctrica almacenada en esas condiciones es de  $9 \times 10^{-2}$  J. Asimismo, determina: ¿cuál es su capacidad?

**2.46** Se tiene un par de placas planas circulares de 23 centímetros de diámetro, separadas por aire 0.3 milímetros; al colocar entre estas una placa de material aislante, su capacitancia es de 90.6944 nF. ¿Cuál es el valor de la constante dieléctrica  $k_d$ ?

**2.47** Si al capacitor con dieléctrico del problema 46 se le aplica un potencial de 160 volts, ¿cuál será la densidad de carga eléctrica en sus placas?

**2.48** Para el circuito mixto de capacitores que se ilustra en la figura 2.23, determina la carga eléctrica total.

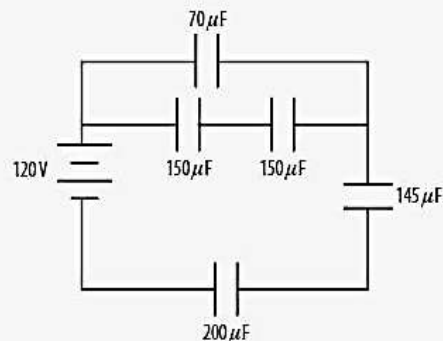


Figura 2.23

2.49 Considera la conexión mixta de capacitores que se ilustra en la figura 2.24 y determina:

- La capacidad equivalente.
- La energía eléctrica que almacena.

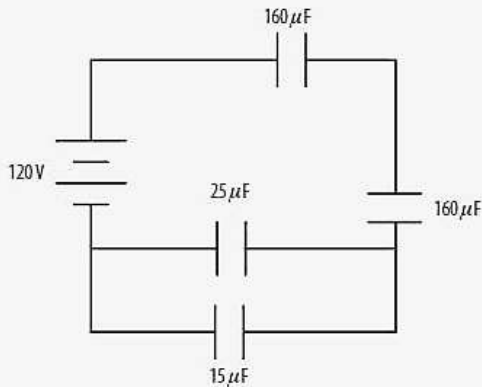


Figura 2.24

2.50 Demuestra que la ecuación para determinar la energía total de dos capacitores de igual magnitud conectados en serie es:

$$E_C = \frac{CV^2}{4}$$

2.51 Se utilizan dos placas circulares de 6 centímetros de radio separadas por una placa de material aislante cuya constante dieléctrica es de 126. Si la capacidad obtenida es de 2.7 nanofaradios, ¿cuál es el espesor del aislante?

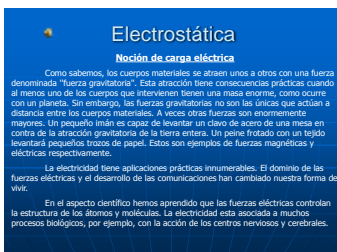
### Problema reto.

El circuito sintonizado de un radio receptor tiene un capacitor tandem variable sin dieléctrico, que está construido con 6 placas semicirculares iguales, cuyo radio es de 2 centímetros cada una y están colocadas entre sí a una distancia de 3 centímetros y conectadas eléctricamente en paralelo. Un segundo juego de placas idénticas está intercalado a la mitad de las del primer juego, si consideramos que el segundo juego puede girar como una unidad, calcula la capacitancia cuando el ángulo de rotación es de 30°.

### Presentaciones.



<https://slideplayer.es/slide/5411575/>



<https://leoberrios.files.wordpress.com/2011/03/electrostatica1.ppt>

Prácticas de laboratorio.

## PRÁCTICA 3

### Capacitores y Capacitancia

---

#### OBJETIVOS

- Comprender el concepto de capacitancia y los factores eléctricos y físicos de los cuales depende.
- Estudiar las características eléctricas de algunos materiales.
- Construir un capacitor.

#### INTRODUCCIÓN

El *capacitor* es un dispositivo comúnmente utilizado para almacenar energía eléctrica. Para poder almacenar energía en un dispositivo como este se genera una diferencia de potencial entre dos materiales conductores los cuales se separan por un material dieléctrico.

Cuando se conecta un capacitor a una fuente de voltaje, los electrones (cargas) tratan de moverse de un extremo de la fuente al otro. Pero como hay un material dieléctrico en el camino, no pueden pasar y se acumulan en los conductores. Este proceso proporciona cargas iguales y de signo contrario a los conductores. Si se desconecta la fuente de voltaje, las cargas que se habían acumulado no encontrarán un camino que les permita abandonar a los conductores, por lo que quedarán atrapadas en el dispositivo el cual queda cargado y almacena una energía. La energía que puede almacenar un capacitor depende de la cantidad de cargas que se acumulen en los conductores. Obviamente, esto depende del voltaje proporcionado por la fuente, pero también depende de la geometría de los conductores y de las características del dieléctrico.

Para cuantificar las características de almacenamiento de energía de un capacitor, se le asocia un número llamado: *capacitancia*. La capacitancia se define como la cantidad de carga que se almacena el capacitor, por unidad de diferencia de potencial aplicada entre sus terminales:

$$C = \frac{Q}{V} \left[ \frac{C}{V} \right]$$

Las unidades asociadas a la capacitancia son Coulomb entre Volt y a esta nueva unidad se le llama *Farad*.

Retomando las definiciones de carga y diferencia de potencial a partir del campo eléctrico la ecuación se puede escribir:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \epsilon \vec{E} * d\vec{S}}{-\int_a^b \vec{E} * d\vec{L}} \quad \left[ \frac{C}{V} = F \right]$$

Se puede observar que la capacitancia conserva una relación constante con el campo eléctrico en numerador y denominador, por lo cual puede ser independiente del potencial y de la carga. Es relativamente sencillo llegar a la definición de la capacitancia a partir de las dimensiones y características físicas de los conductores y el dieléctrico y entonces la capacitancia queda expresada como:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} [F]$$

Dónde:  $S$  es la superficie común entre los conductores [ $m^2$ ]

$d$  es la distancia que separa a los conductores [m]

$\epsilon_r$  es una característica inherente al dieléctrico llamada *permitividad relativa* [F/m]

$\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre,  $8.85 * 10^{-12}$  [F/m]

### **MATERIAL**

- Placas conductoras de aluminio.
- Tubos conductores de cobre.
- Distintos materiales dieléctricos.
- Puente de impedancias.
- Material para construir un capacitor.

### **DESARROLLO**

- 1.- Investigar las permitividades de los siguientes materiales: vidrio, corcho, papel, aire, plástico.
- 2.- Formar un capacitor de placas planas con dieléctrico de aire como se muestra en la figura 1. Mida experimentalmente la capacitancia del dispositivo.
- 3.- Midiendo las dimensiones físicas de la placa conductora, la separación entre conductores y con el valor de la permitividad del aire, calcular teóricamente la capacitancia. ¿Se ajusta a lo medido anteriormente?
- 4.- Modifique las características físicas (área, separación y material aislante)

del capacitor y compruebe las relaciones de proporcionalidad (directa e inversa) expresadas en la fórmula planteada en la introducción.

5.- Introduzca plástico como dieléctrico en el capacitor construido en el punto 2 y mida la capacitancia obtenida. A partir de este valor calcule la permitividad relativa del plástico. Compárela con el valor teórico investigado en el punto 1.

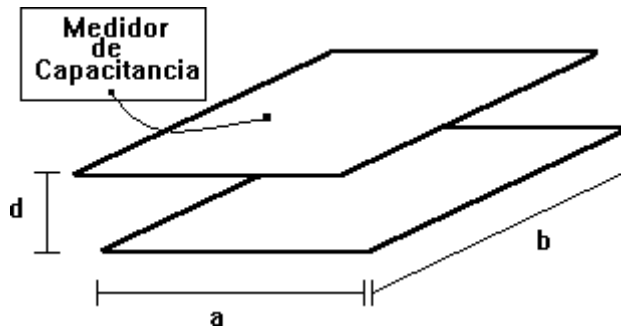


Figura 1

6.- Repita el paso anterior para los demás dieléctricos.

7.- Formar un capacitor con dos cilindros concéntricos y dieléctrico de aire como se muestra en la figura 2. Calcular el valor teórico de la capacitancia, medirla con el puente de impedancias y comparar los valores.

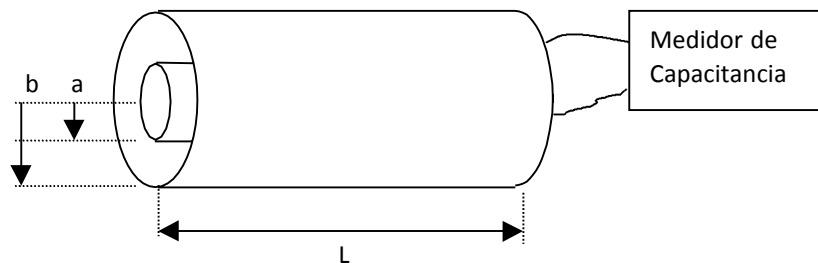


Figura 2

8.- Introducir diferentes dieléctricos, modificar las áreas comunes entre los cilindros y verificar el cambio de capacitancia.

9.- Construya un capacitor de placas planas enrolladas de 150 [nF]. Para esto es necesario realizar cálculos teóricos para determinar las dimensiones y características de conductores y aislantes.

10.- Si conectara el capacitor a una fuente de 50 [V], ¿cuánta carga quedaría almacenada?

## BIBLIOGRAFÍA

HAYT, William, *Engineering Electromagnetics*, McGraw-Hill.

# PRÁCTICA 4

## Energía y Potencia

---

### OBJETIVOS

- Comprender los conceptos de energía y potencia en un campo eléctrico.
- Utilizar los conocimientos de carga, distribución de carga y capacitores para poder obtener la energía y potencia contenidas en un campo producido en el laboratorio.

### INTRODUCCIÓN

Un campo eléctrico producido por un número de cargas contenidas en una cierta región del espacio tendrá asociada una energía. Esta energía estará formada por energía cinética y energía potencial. Para simplificar el sistema se puede considerar que las cargas que se encuentren en movimiento lo hagan muy despacio y aproximar la región a un sistema quasi-estático, o bien, imaginar el sistema en un instante como si se le hubiera tomado una fotografía en ese momento.

Supóngase que se tiene un espacio libre de cargas y un agente externo comienza a posicionar un número de cargas en una región. Para poder mover las cargas hasta su posición final, se debe vencer una fuerza eléctrica y esto implicará un trabajo del agente externo. Una vez que se hayan colocado todas las cargas, éstas contendrán una energía potencial (que generaría un movimiento) igual al trabajo que se realizó para colocarlas en el estado terminal. Si se tienen  $n$  cargas disponibles en el infinito, al tomar la primera carga y dejarla en la posición 1, no se realiza trabajo ya que no hay otras cargas presentes en la región. Al tomar la carga 2 y llevarla a su posición, se deberá vencer una fuerza  $F_{12}$  y se realizará un trabajo correspondiente:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \hat{a}_{12} \text{ [N]} \quad \rightarrow \quad (1)$$

$$W_{q_2} = q_2 V_{21} \quad [J] \quad (2)$$

Al tomar una tercera carga, se deberá de tomar en cuenta la fuerza de la carga uno y de la carga dos, al tomar la carga cuatro serán tres cargas y tres fuerzas y así sucesivamente.

$$W_{q_3} = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$

$$W_{q_4} = q_4 V_{41} + q_4 V_{42} + q_4 V_{43}$$

3

El trabajo total realizado será la energía potencial del campo y esta se obtiene de la sumade los trabajos realizados por todas las cargas. La expresión final será:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k V_k \quad [J] \quad (4)$$

Dónde:  $q_k$  es la  $k$ -ésima carga  
 $V_k$  es el potencial absoluto en  $k$  debido a todas las cargas excepto la  $k$ -ésima

Si el conjunto de cargas no es discreto sino una distribución en alguna región, lineal, superficial o volumétrica, entonces se debe reemplazar la distribución y su integral correspondiente:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_l \rho_l V dl \quad [J]$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_s \rho_s V ds \quad [J]$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv \quad [J]$$

Si se utilizan los vectores de campo eléctrico y densidad de flujo, la energía se puede expresar como:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \bar{D} * \bar{E} dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon E^2 dv \quad [J]$$

Si en lugar de la energía se busca la potencia instantánea en el campo (trabajo por unidad de tiempo) se puede recurrir a la ecuación 1 o bien a la ecuación 4 cuando el número de cargas  $n$ , es uno. De aquí se puede deducir:

$$W = qV$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(qV)$$



$$\frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt}$$

Y finalmente se tiene que

$$P = \frac{dW}{dt} = VI \quad [Watts]$$

Dónde:  $P$  es la potencia, equivalente a la energía disipada por unidad de tiempo

$I$  es la corriente que circula por la diferencia de potencial  $V$ .

Este resultado es en general, independiente del tipo de material. Tampoco depende de la naturaleza del movimiento de la carga.

### **MATERIAL**

- Multímetro con puntas.
- Cables banana - caimán.
- Cable de alimentación para fuente de corriente directa.
- Caja con arena.
- 2 electrodos cilíndricos.
- 2 placas de aluminio.
- Regla.
- Fuente de corriente directa.

### **DESARROLLO**

1.- Deducir la fórmula de energía en un campo electrostático:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k V_k \quad [J]$$

Nota: Recordar que  $V_{12} = -V_{21}$

2.- Alisar la superficie de la arena lo mejor posible, insertar las placas de aluminio en la arena de forma paralela, como se muestra en la figura 1. Medir experimentalmente con la ayuda del multímetro la capacitancia que se forma entre las placas conductoras. Si se considera una diferencia de potencial de 20 volts entre las placas, realizar las mediciones necesarias para poder calcular la carga ( $Q$ ) de las placas, la permitividad relativa de la arena  $\epsilon_r$ , y el trabajo ( $W$ ) si se considera un tiempo de un segundo.

3.- Polarizar las placas con 20 volts de corriente directa y medir la corriente ( $I$ ). Calcular la potencia ( $P$ ) y el trabajo ( $W$ ). Comparar con los valores

calculados y comentar sobre los resultados.

Recordar que la corriente debe de ser medida en serie con respecto al circuito.

4.- A partir de los cálculos anteriores, obtener la distribución de carga superficial ( $\rho_s$ ).

5.- Repita desde el paso 2, colocando en lugar de las placas dos electrodos cilíndricos en la caja de arena como se muestra en la figura 2, realice las mediciones y cálculo del 2 y 3 y obtenga la distribución de carga lineal ( $\rho_l$ ).

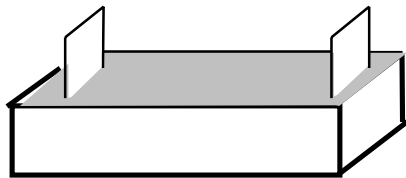


Figura 1

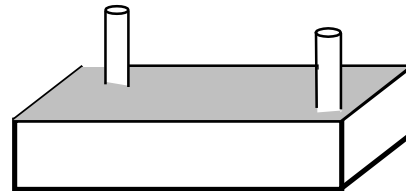


Figura 2

### **BIBLIOGRAFÍA**

JOHNK, Carl T., *Ingeniería Electromagnética, Campos y Ondas*, Limusa, 5a. edición.

### Referencias Bibliográficas.

- Alonso, Marcelo y J. Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.
- Serway, Raymond A. y John W. Jeweett, Jr. Física II, 3ª edición.
- Resnik Halliday Krane. Física Volumen 2, 5ª edición, Ed. Patria.
- Vega, I. P. N. Electromagnetismo, 1ª edición, Ed. Patria
- Young, Freedman, Sears, Zemansky. Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12ª edición, Ed. Addison – Wesley, PEARSON
- Reyes, Salcedo, y Carrillo. Manual de Experimentos de Electromagnetismo, ITAM.
- Victoriano López Rodríguez, Electromagnetismo I, UNED
- Luis Álvarez Thon, Electromagnetismo FMF-241 (2014), Universidad Andrés Bello.
- Matthew N. O. Sadiku, Elementos de electromagnetismo, 3ª edición, OXFORD.
- Luis Vargas D., Apuntes de Electromagnetismo (2015), Universidad de Chile.
- Giancoli, Volumen II, 4ª Edición, Física para Ciencias e Ingeniería con física Moderna, PEARSON.
- Germán Arenas Sicard, Electricidad y Magnetismo (2008), Universidad Nacional de Colombia.
- CEKIT S. A., Curso fácil de electrónica básica, Editorial Conosur S.A.
- Miguel Ángel Rodríguez Pozueta, Materiales y circuitos magnéticos, Universidad de Cantabria.
- Bernabé Franco, Carlos Javier Jaimes O., Apuntes De Electromagnetismo, Universidades Tecnológicas de Santander.
- Jesús Fabián Jurado, Electromagnetismo para Ingeniería (2013). Universidad Nacional de Colombia.

### Referencias Electrónicas.

- <https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/resources/chap5capacitance/>
- <http://mit.usiu.ac.ke/courses/physics/8-02sc-physics-ii-electricity-and-magnetism-fall-2010/capacitors/capacitance-capacitors-energy-stored-in-capacitors/>
- <https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-slides/>
- <https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-activities/>
- <http://www.acienciasgalilei.com/videos/3electricidad-mag.htm>

## 3.Unidad Corriente Eléctrica

### *Introducción.*

En esta unidad dejamos de estudiar el fenómeno de las cargas eléctricas en reposo para abordar un nuevo tema que esta relacionado con los fenómenos que ocurren cuando las cargas eléctricas (electrones) están en movimiento dentro de un conductor; asimismo, también está dedicado al estudio de las características eléctricas de los materiales conductores y de los aisladores eléctricos y la resistencia que tienen los materiales al paso de la corriente y su efecto por temperatura, así como el análisis de los diferentes tipos de circuitos eléctricos conectados a una o más baterías y de las leyes físicas que se requiere aplicar para el estudio de los diversos circuitos eléctricos.

### 3.1 Definición de Corriente Eléctrica.

#### *Concepto y definiciones.*

A continuación se estudian los principales conceptos y definiciones que son de gran importancia para el estudio de la electrodinámica.

**Electrodinámica.** Es una rama de la física que aborda el estudio de los fenómenos originados por las cargas eléctricas en movimiento.

**Corriente eléctrica.** Se le llama así al flujo de electrones dentro de un conductor eléctrico como los metales. Este fenómeno es posible cuando se conecta el conductor a una fuente de energía o potencial eléctrico, lo que provoca una diferencia de potencial entre los extremos del conductor, debido que esto logra excitar a los electrones localizados en el nivel energético llamado banda de valencia, lo cual, a su vez, produce que estos se trasladen a un nivel energético superior, conocido como banda de conducción dentro del propio átomo, excitando a los electrones de otros átomos y generando un flujo de electrones que circulan de un lugar a otro dentro del conductor.

**Intensidad de corriente eléctrica.** Esta se define en función de la carga que pasa través de un conductor en función del tiempo. Matemáticamente se representa con la siguiente ecuación:

$$I = \frac{Ne}{t} \quad (3.1)$$

Dónde:

N= Número de electrones.

t=Tiempo expresado en segundos.

I=Intensidad de corriente eléctrica (cuya unidad es el ampare).

Por el sentido de movimiento de electrones, la corriente eléctrica se clasifica en: **corriente eléctrica directa (CD) y corriente eléctrica alterna (CA).**

**Corriente eléctrica directa (CD).** Esta se caracteriza porque el sentido del flujo o movimiento de electrones no cambia y siempre lleva el mismo sentido durante todo el tiempo. Esta se representa mediante la gráfica de la figura 87.



Figura 87 Representación gráfica de la corriente eléctrica directa.

**Corriente eléctrica alterna (CA).** Es la corriente que se caracteriza porque el flujo o movimiento de los electrones está cambiando de dirección y sentido periódicamente con respecto al tiempo. Esta se representa mediante la gráfica de la figura 88.

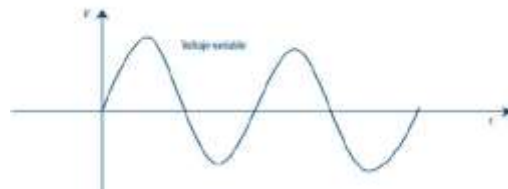


Figura 88 Representación gráfica de la corriente alterna.

Cuando se requiere analizar los circuitos eléctricos, resulta necesario determinar el sentido de la corriente eléctrica; por tanto, es importante explicar de manera correcta el criterio técnico con el cual se puede identificar el sentido de la corriente en cada rama del circuito que se desea analizar; no obstante, es importante hacer notar que siempre deben identificarse dos sentidos de la corriente: el sentido verdadero y el sentido convencional.

**Sentido verdadero.** El fenómeno de la corriente eléctrica, como ya se dijo antes, se origina por la excitación de electrones que se encuentran en el nivel energético de valencia y pasan a un nivel energético mayor de conducción; esto es, de un potencial menor a un potencial mayor, debido a que el electrón el que se mueve desde un punto de menor potencia a otro de mayor potencia dentro del campo eléctrico.

**Sentido convencional.** Por acuerdo internacional, cuando se estableció el Sistema Internacional de Pesas y Medidas, se determinó que el sentido de la corriente eléctrica será de un punto de mayor potencia a otro de menor potencia; esto es, de más a menos, por esta razón este se denominó sentido convencional de la corriente. Es importante hacer notar aquí que toda la industria eléctrica y electrónica en todo el mundo adoptó el sentido convencional de la corriente eléctrica;

así pues, con este principio técnico se diseñan y construyen todos los aparatos de medición eléctrica y electrónicos.

### Métodos para generación de corriente eléctrica

De acuerdo con el fenómeno físico que se manifiesta con la generación de la corriente eléctrica, se identifican tres formas para la generación de corriente eléctrica.

- a) Por inducción.
- b) Por ionización.
- c) Por emisión.

**c Generación de corriente eléctrica por inducción.** Es la generación de la corriente eléctrica en materiales sólidos. En esta, el movimiento de electrones se da a lo largo de todo el conductor, este fenómeno ocurre cuando el conductor se mueve dentro de una región de campo magnético.

**b) Generación de corriente eléctrica por ionización.** Es el fenómeno de generación de corriente eléctrica que se manifiesta en materiales líquidos y gaseosos, como es el electrolito de las baterías, en los plasmas de las lámparas luminiscentes o en el aire cuando se rompe su rigidez dieléctrica y se establece un arco eléctrico, como en el caso del rayo. El fenómeno de ionización se da por disociación molecular de las sustancias, es decir reorientando átomos cargados eléctricamente, a lo que se denomina iones. Estos átomos se pueden cargar positiva o negativamente, y pueden reagruparse en sentidos contrarios hacia los electrodos sumergidos en sustancias electrolíticas o gaseosas, lo que provoca la generación de una diferencia de potencial entre los dos electrodos.

c) Generación de corriente eléctrica por emisión. Se denomina así a la generación de corriente eléctrica en un electrodo llamado cátodo que se localiza en un espacio al vacío, como el de una válvula o bulbo; por ejemplo, el cinescopio de un televisor, un tubo de rayos X, etcétera. En este caso, se coloca un potencial negativo al cátodo de la válvula y se logra una emisión de electrones, los cuales son atraídos por otro electrodo llamado ánodo, el cual, a su vez, está conectado hacia un potencial positivo respecto al cátodo, lográndose una corriente eléctrica entre los dos electrodos, sin que exista una conexión eléctrica entre ellos como se muestra en la figura 89

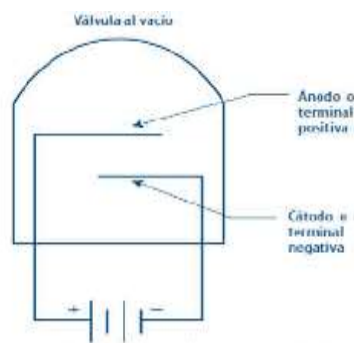


Figura 89 Representación esquemática de la generación de corriente eléctrica por emisión.

### Intensidad de corriente eléctrica

En ningún caso, resulta práctico cuantificar el flujo de electrones o la corriente eléctrica de un conductor; resulta más conveniente medir su magnitud a través de una variable llamada **intensidad de corriente** ( $I$ ).

La **intensidad de corriente promedio** se define en función de la carga y el tiempo, como la razón de la cantidad de carga,  $Q$ , que pasa por la sección trasversal de un conductor con respecto al tiempo,  $t$ , esta se representa matemáticamente en la expresión (3.2):

$$I = \frac{Q}{t} \quad (3.2)$$

En tanto, matemáticamente la intensidad de corriente instantánea está dada por la ecuación (3.3):

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (3.3)$$

Dónde:

$Q$  = Carga cuya unidad en el sistema internacional o MKS es el coulomb (C).

$t$  = Tiempo expresado en segundos(s) en el Sistema Internacional.

$I$  = Intensidad de corriente expresada mediante el cociente de  $\frac{C}{s}$  cuyo resultado en el Sistema Internacional se llama ampere (A):  $\frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}} = \text{ampere (A)}$  así:  $A = \frac{C}{s}$ .

Hacemos notar que aunque la corriente eléctrica, conceptualmente, es una cantidad vectorial, la intensidad de corriente es una cantidad escalar porque solo indica la magnitud de la corriente eléctrica.

En la práctica es usual utilizar submúltiplos del amperio, como: el miliamperio (mA), el microamperio ( $\mu$ A) y el picoamperio (pA).

Es importante resaltar aquí que también se ha cuantificado, de manera experimental, que la intensidad de corriente eléctrica de un ampere tiene la siguiente equivalencia:

$$1A = 6.24 \times 10^{18} e$$

### **Problemas resueltos.**

#### **Problema resuelto 1.**

La corriente que circula por un conductor durante el proceso de carga de un capacitor disminuye en forma exponencial de acuerdo con la siguiente ecuación :

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

Donde  $I_0$  es la corriente inicial (en  $t=0$ ) y  $\tau$  es una constante de tiempo.



Para un punto sobre el conductor, determinar:

- a) La ecuación para establecer la carga.
- b) La magnitud de la carga que pasa entre  $t=0$  y  $t=\tau$ .
- c) La magnitud de la carga para  $t=5\tau$ .
- d) La magnitud de la carga para  $t=\infty$ .

**Solución.**

a) Primero, determinamos la ecuación para calcular la carga:

$$dq = I dt$$

$$q = \int_0^t I dt$$

$$q = \int_0^t I_0 e^{-t/\tau} dt$$

En este caso, resolveremos la integral mediante la siguiente fórmula:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

Entonces, tenemos:

$$q = I_0 \tau \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

b) Debido a que  $t=\tau$ , entonces tenemos:

$$Q = I_0 \tau - (1 - e^{-1}) = 0.6321 I_0 \tau$$

c) Considerando que  $t=5\tau$ ; por tanto, tenemos:

$$Q = I_0 \tau (1 - e^{-5}) = 0.993262 I_0 \tau$$

d) Dado que ahora  $t = \infty$ , tenemos que:

$$Q = I_0 \tau (1 - e^{-\infty}) = I_0 \tau$$

### Velocidad de arrastre

Como es de suponer, existen diferencias claras entre los materiales conductores, semiconductores y aislantes, con respecto a la distancia entre las bandas de valencia y las de conducción. Así, en los materiales conductores existe un traslape entre los dos niveles energéticos y, por tanto, los electrones de la banda de valencia pasan con mayor facilidad a la banda de conducción, mediante una mínima excitación, de tal forma que en un conductor eléctrico, aunque no exista una diferencia de potencial en sus extremos, existe un movimiento desordenado y sentidos de dirección aleatorios de electrones, cuya velocidad promedio es cero.

Así pues, la **velocidad de arrastre** ( $v_d$ ) es la velocidad promedio constante con que se arbitrariamente los electrones dentro de un conductor en sentido contrario a la dirección del campo eléctrico.

Es importante aclarar que la velocidad de arrastre de los electrones provocada por una diferencia de potencial eléctrico en los extremos del conductor es aproximadamente igual a la velocidad de la luz, es decir  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , a lo largo del conductor. No obstante, en ausencia de potencial eléctrico en el conductor, esta es en extremo pequeña, del orden de  $10^5$  a  $10^2 \text{ m/s}$  con sentido aleatorio.

Los electrones dentro del conductor se mueven siguiendo direcciones aleatorias, debido a las constantes colisiones entre los átomos, lo que provoca que el movimiento sea zigzag y a una velocidad de colisión del orden de  $10^6 \text{ m/s}$ . Cuando existe un campo eléctrico en el conductor, siempre se ejerce una fuerza sobre los electrones, los cuales adquieren una velocidad promedio constante en contra del campo del orden de  $10^6 \text{ m/s}$ ; esta velocidad de arrastre es proporcional a la intensidad de corriente  $I$  que pasa por el conductor, pero es inversamente proporcional a la carga del electrón,  $q_e$ , del número,  $n$ , de electrones por unidad del volumen y del área,  $A$ , de la sección transversal del conductor (ver figura 90), expresada en la ecuación 3.4

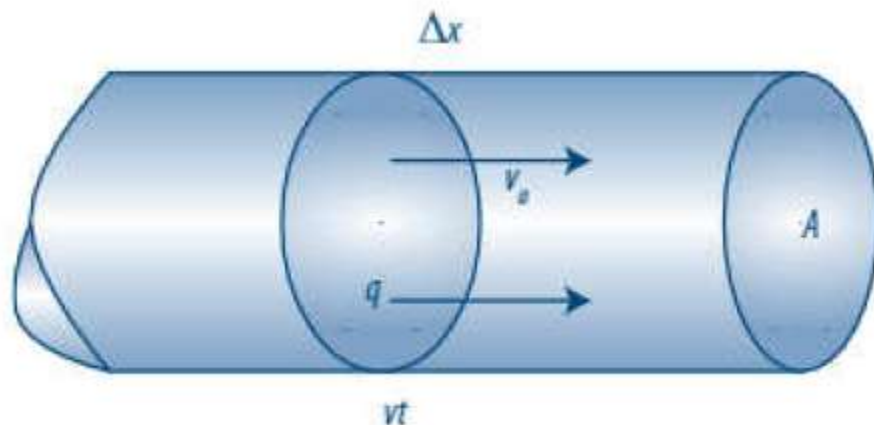


Figura 90 Esquema de la sección de un conductor por el que pasan cargas eléctricas para la representación de la velocidad de arrastre.

$$V_a = \frac{I}{(q_e n A)} \quad (3.4)$$

$$I = n q v_{aA}$$

Dónde:

N=Número de electrones libres por unidad de volumen del material.

$V_a$  = -Velocidad de arrastre en  $m/s$ .

$q$ = Carga de electrón  $1.602 \times 10^{-19}C$ .

$A$ =Área de la sección transversal del conducto en  $m^2$ .

El número de electrones libres,  $n$ , para cada materia se determina en función del volumen,  $V$ , la densidad,  $\rho$ , los electrones libres o de valencia  $N_v$ , de cada átomo del material, la masa atómica  $m_{at1}$  y el número de Avogadro,  $N_A$ .

Es importante destacar que volumen está relacionado con la masa atómica,  $mat^1$  y la densidad,  $\rho$ .

Por tanto, se representa con la siguiente ecuación:

$$V = \frac{m_a}{\rho}$$
$$n = \frac{(N_A)N_v}{V}$$

### **Problemas resueltos.**

#### **Problema resuelto 1.**

Por un alambre de cobre de cobre circula una corriente de 40 amperes; las mediciones indican que la velocidad de arrastre es de  $0.45 \text{ mm/s}$ . Si la densidad del cobre es de  $8.93 \times 10^6 \text{ g/m}^3$ , el número de valencia para el cobre es de 1 y su masa atómica es de  $63.5 \text{ g/mol}$  y sabiendo que el número de Avogadro es  $6.02 \times 10^{23}$ , determinar el diámetro del alambre.

**Solución:**

**Primero establecemos los datos de referencia:**

$$I = 40 \text{ A}$$

$$V_a = 0.45 \text{ m/s} = 4.5 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$\rho = 8.93 \times 10^4 \text{ g/m}^3$$

$$N_{v=1}$$

Luego, determinamos el volumen:

$$V = \frac{m_a}{\rho} = \frac{63.54 \text{ g/mol}}{8.93 \times 10^6 \text{ g/m}^3} = 7.1153 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$n = \frac{(N_A)N_v}{V} = \frac{6.02 \times 10^{23} \frac{\text{part}}{\text{mol}} (1)}{7.1153 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 8.4606 \times 10^{28} \text{ e/m}^3$$

$$v_a = \frac{I}{(q_e n A)}$$

$$A = \frac{I}{v_a n q_e} = \frac{40 \text{ A}}{0.45 \times 10^{-3} \text{ m/s} (8.46 \times 10^{28}) (1.6 \times 10^{-19})} = 6.5663 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(6.5663 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}{\pi}} = 2.8914 \times 10^{-3} \text{ m}$$

### Problema resuelto 2.

Se utiliza un alambre de cobre de 6 mm de diámetro de sección transversal, cuya densidad de corriente es de 42 A. Si el cobre tiene  $8.46 \times 10^{28} \text{ e/m}^3$ , calcular la velocidad de arrastre en el conductor.

**Solución:**

Primero establecer los datos de referencia:

$$I=42 \text{ A}$$

$$n=8.46 \times 10^{28} \text{ e/m}^3$$

$$d=0.006 \text{ m}$$

$$r=0.003 \text{ m}$$

Enseguida, utilizamos la siguiente ecuación y sustituimos datos. Así tenemos:

$$v_a = \frac{I}{(q_e n A)}$$

$$A = \pi r^2 = (3.1416)(0.003 \text{ m})^2 = 2.8274 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$v_a = \frac{I}{q_e n A} = \frac{42 \text{ A}}{(1.6 \times 10^{-19}) (8.46 \times 10^{28} \text{ e/m}^3) (2.8284 \times 10^{-5} \text{ m}^2)} = 1.097 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

**Problema resuelto 3.**

Se tiene un conductor eléctrico, cuya sección transversal es de  $4\text{mm}^2$ , por el cual circula una intensidad de corriente eléctrica durante  $6.2\text{ s}$ . El manual del fabricante indica que la velocidad de arrastre del material es de  $3.098 \times 10^5\text{ m/s}$ , mientras que el número de electrones por metro cubico es de  $9.65 \times 10^{27}$ . Determinar:

- a) La carga eléctrica
- b) La intensidad de corriente.

**Solución:**

- a) La carga eléctrica se obtiene de manera directa de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\Delta q = nAv_s \Delta t q_e$$

$$\Delta q = \left( 9.65 \times 10^{27} \frac{e}{\text{m}^3} \right) (4 \times 10^{-6} \text{ m}^2) \left( 3.098 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (6.2 \text{ s}) (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})$$

$$\Delta q = 1.1877 \text{ C}$$

- b) Ahora, calculemos la intensidad de corriente:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nq_e v_s A$$

$$I = \left( 9.65 \times 10^{27} \frac{e}{\text{m}^3} \right) (4 \times 10^{-6} \text{ m}^2) \left( 3.098 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1.602 \times 10^{-19} \text{ C}) = 0.1915 \text{ A}$$

Nota: Convención: La dirección de la corriente es opuesta al movimiento de los electrones. Esta convención ha permanecido así sólo por razones históricas.

### 3.2 Vector Densidad de Corriente.

**Densidad de corriente**

Vamos a introducir este concepto de la forma más sencilla posible. La densidad de corriente  $J$  se define como la cantidad de corriente por unidad de área. Si tomamos como referencia la figura 91

$$j = \frac{I}{A} \quad [A/m^2]$$

Esta definición sólo es válida si la densidad de corriente es uniforme y la corriente es perpendicular a la superficie. En

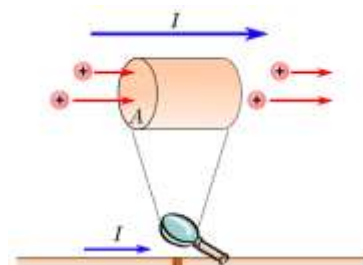


Figura 91 La corriente tiene que ver con el número de coulombs de carga que pasan a través de un punto del circuito por unidad de tiempo.

realidad la densidad de corriente es un vector  $\vec{J}$ . Si el flujo de carga es a través de cualquier superficie  $S$ , la corriente se puede calcular:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Piense en un conductor de área de sección transversal  $A$  que transporta una corriente  $I$ . La **densidad de corriente**  $J$  en el conductor se define como la corriente por unidad de área. Dado que la corriente es  $I = nqv_d A$ , la densidad de corriente es igual a

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d \quad (3.5)$$

donde  $J$  tiene unidades en el SI de amperes por cada metro cuadrado. Esta expresiones válida sólo si la densidad de corriente es uniforme y sólo si la superficie del área de sección transversal  $A$  es perpendicular a la dirección de la corriente.

**Tan pronto como se mantiene una diferencia de potencial a través del conductor se establece una densidad de corriente y un campo eléctrico.** En algunos materiales, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico:

$$J = \sigma E \quad (3.6)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\sigma$  se conoce como **conductividad** del conductor. Los materiales que obedecen la ecuación 3.6, siguen la **ley de Ohm**, en honor a Georg Simón Ohm. De una manera más específica, la ley de Ohm afirma que

en muchos materiales (inclusive la mayor parte de los metales) la relación de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante  $\sigma$  que es independiente del campo eléctrico que produce la corriente.

Se dice que los materiales que obedecen esta relación cumplen con la ley de Ohm, la cual establece que:

**Para muchos materiales conductores, la razón de la densidad de corriente y el campo eléctrico es una constante llamada conductividad ( $\sigma$ ) del conductor.**

### Conductividad

Con la ayuda del concepto de conductividad ( $\sigma$ ) de la ley de Ohm, es posible explicar y cuantificar el grado de conducción de corriente eléctrica por un cuerpo hecho de cierto material; es interesante hacer notar que ni todos los materiales son perfectos conductores ni tampoco excelentes aislantes de la electricidad, sino que la mayor parte presenta las dos propiedades: resistencia y conductividad, aunque en determinadas cantidades y rangos.

Así pues, la conductividad se define como:

**El grado de facilidad por unidad de longitud que presenta un conductor al paso de la corriente eléctrica.**

De acuerdo con esta definición, se deduce que la resistividad y la conductividad son fenómenos inversos entre si y pueden relacionarse de acuerdo como se plantea en la ecuación 3.6:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \text{o bien} \quad \rho = \frac{1}{\sigma} \quad (3.7)$$

La unidad de la conductividad en el sistema MKS es el inverso del ohm metro; esto es: ohm por metro o bien ( $\Omega\text{m}$ )<sup>-1</sup> Así pues, la conductividad es una cantidad escalar:

Conductancia (G)

Es la propiedad que tienen los materiales para conducir energía eléctrica. La conductancia se define como:

**La facilidad que presentan los cuerpos contruidos de cierto material para permitir el paso de la corriente eléctrica a través de ellos.**

Es una cantidad escalar y su unidad es el mho, que también se conoce con el nombre de **siemens**; la conductancia constituye el inverso de la resistencia eléctrica. Es decir la resistencia y la conductancia son fenómenos inversos entre si, lo que se representa en la ecuación 3.8.

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{O bien} \quad R = \frac{1}{G} \quad (3.8)$$

#### Problema resuelto 4.

Determinar la densidad de corriente de un conductor cuyo diámetro de sección transversal es de 4mm, si este soporta que a través de él pase una carga de 70 C en 4 segundos.

#### Solución:

Primero establecemos los datos de referencia:

$$D = 0.004 \text{ m}$$

$$r = 0.002 \text{ m}$$

$$Q = 70 \text{ C}$$

$$t = 4\text{s}$$

$$I = Q/t$$

Luego, determinamos la intensidad de corriente:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{70\text{C}}{4\text{s}} = 17.5\text{A}$$

Ahora calculemos el área de la sección transversal del conductor:



$$A = \pi r^2 = (3.1416) (0.002m)^2 = 1.2566 \times 10^{-5} m^2$$

Por último, determinamos el valor de la densidad de corriente:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{(17.5 A)}{(1.5566 \times 10^{-4} m^2)} = 1392605.7 \frac{A}{m^2}$$

**Problema resuelto 5**

Las características eléctricas de un conductor de cierto material indican que la velocidad de arrastre de los electrones es de 1.2 m/s y que el número de electrones por metro cubico de ese material es de  $9.76 \times 10^{26}$ . Determinar la densidad de corriente que soporta el conductor.

**Solución:**

$$J = v_a n q_e = \left(1.2 \frac{m}{s}\right) \left(9.76 \times 10^{26} \frac{\text{portadores}}{m^3}\right) 1.6 \times 10^{-19} C = 1.87 \times 10^8 \frac{A}{m^2}$$

**Resistividad y resistencia eléctrica.**

Los materiales que obedecen la ley de Ohm y por tanto cumplen esta simple correspondencia entre  $E$  y  $J$ , se conocen como materiales *óhmicos*. Sin embargo, se ha encontrado experimentalmente que no todos los materiales tienen esta propiedad. Aquellos materiales y dispositivos que no obedecen la ley de Ohm se dice que son materiales *no óhmicos*. La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, sino más bien una relación empírica válida únicamente para ciertos materiales.

Si consideramos un segmento de alambre recto de área de sección transversal uniforme  $A$  y de longitud  $\ell$ , como se muestra en la figura 27.5 obtendrá una ecuación que resulte útil en aplicaciones prácticas. De un extremo al otro del alambre se mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V = V_b - V_a$ , lo que genera en el alambre un campo eléctrico y una corriente. Si supone que el campo es uniforme, la diferencia de potencial está relacionada con el campo mediante la relación

$$\Delta V = E\ell$$

Por tanto, la densidad de corriente en el alambre se expresa en la forma

$$J = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{\ell}$$

Ya que  $J = I/A$ , la diferencia de potencial a través del alambre es

$$\Delta V = \frac{\ell}{\sigma} J = \left(\frac{\ell}{\sigma A}\right) I = RI$$

1 No debe confundir la conductividad  $\sigma$  con la densidad de carga superficial, para la cual se utiliza el mismo símbolo.

2 Este resultado es consecuencia de la definición de diferencia de potencial:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \int_a^b dx = E\ell$$

La cantidad  $R = \ell/\sigma A$  se conoce como la **resistencia** del conductor que es definida como la relación de la diferencia de potencial aplicada a un conductor entre la corriente que pasa por el mismo:

$$R = \frac{\Delta V}{I} \quad (3.9)$$

Al estudiar los circuitos eléctricos utilizara esta ecuación una y otra vez. Con este resultado se observa que la resistencia tiene unidades del SI de volts por ampere. Un volt por ampere se define como un ohm ( $\Omega$ ).

$$1\Omega = 1V/A \quad (3.10)$$

Esta expresión indica que si una diferencia de potencial de 1 V a través de un conductor origina una corriente de 1 A, la resistencia del conductor será de 1  $\Omega$ . Por ejemplo, si un aparato doméstico conectado a una fuente de 120 V de diferencia de potencial conduce una corriente de 6 A, su resistencia es de 20  $\Omega$ .

La mayoría de los circuitos eléctricos usan elementos llamados **resistores** para controlar la corriente en las diferentes partes del circuito. Dos tipos comunes son la *resistencia de material aglomerado*, que contiene carbono, y la *resistencia bobinada*, que consiste en una bobina de alambre. Los valores de los resistores en ohm, por lo general se indican mediante código de colores, como se muestra en la figura 92 y la tabla 7. El recíproco de la conductividad es la **resistividad**<sup>3</sup>  $\rho$ :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (3.12)$$

donde  $\rho$  está en ohms-metros ( $\Omega \cdot m$ ). Ya que  $R = \ell/\sigma A$ , es posible expresar la resistencia a lo largo de la longitud  $\ell$  de un bloque uniforme de material de la forma

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (3.13)$$

Todo material óhmico tiene una resistividad característica que depende de las propiedades del material y de la temperatura. Adicionalmente, como se puede observar por la ecuación 3.13, la resistencia de una muestra depende tanto de su geometría como de su resistividad. La tabla 8 presenta las resistividades de una diversidad de materiales a 20°C. Observe el enorme intervalo existente, desde valores muy reducidos para buenos conductores, como el cobre y la plata, hasta valores muy elevados para los buenos aislantes como el vidrio y el hule. Un conductor ideal debería tener una resistividad igual a cero, y un aislador ideal una resistividad infinita.

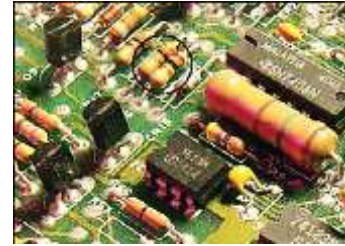


Figura 92 Las bandas de color en un resistor son un código para identificar su resistencia. Los primeros dos colores representan los dos primeros dígitos del valor de la resistencia. El tercer color representa la potencia de diez del multiplicador del valor de la resistencia. El último color es la tolerancia del valor de la resistencia. Por ejemplo, los cuatro colores de los resistores en el círculo son rojo (= 2), negro (= 0), naranja (=  $10^3$ ) y oro (= 5%), por lo que el valor de la resistencia es de  $20 \times 10^3 \Omega = 20 \text{ k}\Omega$  con un valor de tolerancia de 5% = 1 k. (Los valores de estos colores se tomaron de la tabla 7)

Tabla 7 Código de color para los resistores.

Color	Numero	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	1	
Café	1	$10^1$	
Rojo	2	$10^2$	
Naranja	3	$10^3$	
Amarillo	4	$10^4$	
Verde	5	$10^5$	
Azul	6	$10^6$	
Violeta	7	$10^7$	
Gris	8	$10^8$	
Blanco	9	$10^9$	
Oro		$10^{-1}$	5%
Plata		$10^{-2}$	10%
Sin color			20%

3 No se debe confundir la resistividad  $r$  con la densidad de masa o con la densidad de carga, para las cuales se utiliza el mismo símbolo.

Tabla 8 Resistividades y coeficientes de temperatura de resistividad para diversos materiales.

Material	Resistividad <sup>a</sup> ( $\Omega$ m)	Coficiente de temperatura <sup>b</sup> $\propto [(\text{°C})^{-1}]$
Plata	$1.59 \times 10^{-8}$	$3.8 \times 10^{-3}$
Cobre	$1.7 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Oro	$2.44 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2.82 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5.6 \times 10^{-8}$	$4.5 \times 10^{-3}$
Hierro	$10 \times 10^{-8}$	$5.0 \times 10^{-3}$
Platino	$11 \times 10^{-8}$	$3.92 \times 10^{-3}$
Plomo	$22 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Aleación nicromo <sup>c</sup>	$1.50 \times 10^{-6}$	$0.4 \times 10^{-3}$
Carbono	$3.5 \times 10^{-5}$	$-0.5 \times 10^{-3}$
Germanio	0.46	$-48 \times 10^{-3}$
Silicio	$2.3 \times 10^3$	$-75 \times 10^{-3}$
Vidrio	$10^{10}$ a $10^{14}$	
Hule vulcanizado	$\sim 10^{13}$	
Azufre	$10^{15}$	
Cuarzo (fundido-9)	$75 \times 10^{16}$	

- a. Todos los valores están a 20°C. Los elementos de la tabla se consideran libres de impurezas.
  - b. Vea la sección 3.9 Resistividad, resistencia y efectos de la temperatura.
  - c. Aleación de níquel y cromo usada comúnmente en elementos calefactores.
  - d. La resistividad del silicio es muy sensible a la pureza. El valor puede cambiar en varios órdenes de magnitud cuando es dopado con otros átomos.
- 

### Resistencia y resistividad

La resistividad es una propiedad de una *sustancia*, en tanto que la resistencia es la propiedad de un *objeto*. Ya ha visto antes pares similares de variables. Por ejemplo, la densidad es una propiedad de una sustancia, en tanto que la masa es la propiedad de un objeto. La ecuación 3.13 relaciona la resistencia con la resistividad y la ecuación que relaciona la masa con la densidad.

La ecuación 3.13 muestra que la resistencia de un conductor cilíndrico conocido como un alambre es proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área de sección transversal. Si se duplica la longitud de un alambre, su resistencia se duplica. Si se duplica su área de sección transversal, su resistencia disminuye a la mitad. Esta situación es similar al flujo de un líquido por una tubería. Conforme se incrementa la longitud de la tubería, aumenta la resistencia al flujo. Conforme aumenta el área de sección transversal de la tubería, pasará más líquido a través de una sección transversal determinada de la tubería en un intervalo unitario de tiempo. Debido a eso, fluirá más líquido para un mismo diferencial de presión aplicado a la tubería, y se reducirá la resistencia al flujo..

Los materiales y otros dispositivos óhmicos tienen una correspondencia lineal corriente-diferencia de potencial en un amplio intervalo de diferencias de potencial aplicadas (figura 93a). La pendiente de la curva  $I$  en función de  $\Delta V$  en la región lineal, tiene un valor  $1/R$ . Los materiales no óhmicos tienen una correspondencia no lineal de corriente -diferencia de potencial. Un dispositivo semiconductor común con características  $I$  en función de  $\Delta V$  no lineales, es el *diodo* de unión (figura 93b). La resistencia de este dispositivo es baja para corrientes en una dirección ( $\Delta V$  positiva) y elevada para corriente en la dirección opuesta ( $\Delta V$  negativa). De hecho, la mayor parte de los dispositivos

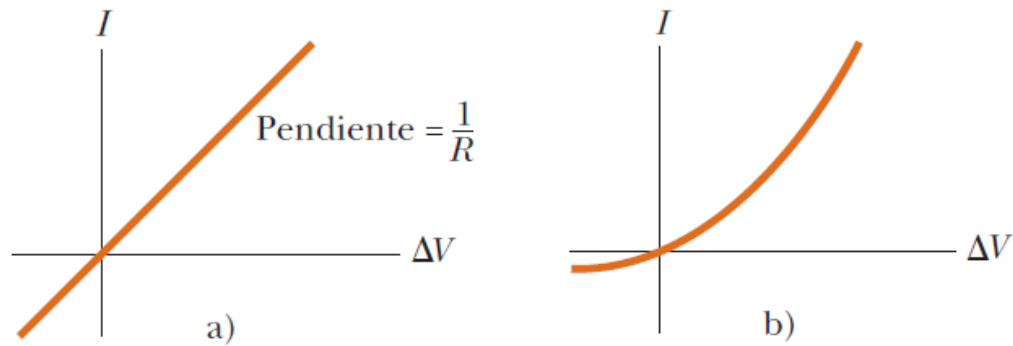


Figura 93 a) Curva corriente-diferencia de potencial para un material óhmico. La curva es lineal y la pendiente es igual al recíproco de la resistencia del conductor. b) Curva no lineal corriente-diferencia de potencial correspondiente a un diodo de unión. Este dispositivo no sigue la ley de Ohm.

electrónicos modernos, como los transistores, tienen correspondencias no lineales de corriente — diferencia de potencial; su operación correcta depende de la forma en que violan la ley de Ohm.

**Pregunta rápida 1** Imagine cargas positivas y negativas en movimiento horizontal a través de las cuatro regiones que se muestran en la figura 94. Clasifique de menor a mayor la corriente en las cuatro regiones.

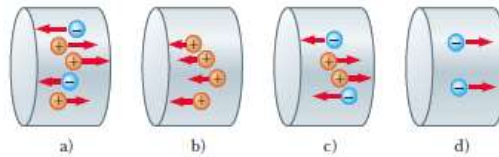


Figura 94 Las cargas se mueven a través de cuatro regiones.

**Pregunta rápida 2** Un alambre cilíndrico tiene un radio  $r$  y una longitud  $\ell$ . Si tanto  $r$  como  $\ell$  se duplican, la resistencia en el alambre: a) aumenta, b) disminuye, o c) no se modifica.

**Pregunta rápida 3** En la figura 93b, conforme aumenta el voltaje aplicado, la resistencia del diodo: a) aumenta, b) disminuye o c) no se modifica.

### 3.3 Ecuación de Continuidad.

La densidad de corriente de corriente  $\vec{j}$  y la densidad volumétrica de carga  $\rho$  son cantidades que están relacionadas por medio de una ecuación diferencial, llamada ecuación de continuidad. Si calculamos  $I = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{A}$  en una superficie cerrada que encierra un volumen  $V$ , entonces la corriente que entra en la superficie es

$$I = - \oint_s \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

el signo menos es porque  $d\vec{A}$  siempre apunta hacia afuera en una superficie cerrada mientras que  $\vec{j}$  entra. Aplicando el teorema de la divergencia

$$I = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\int_V \nabla \cdot \vec{j} dv \quad (*)$$

Pero sabemos que  $I = \frac{dQ}{dt}$  y la carga  $Q$  se puede obtener a partir de la densidad de carga  $Q = \int_V \rho dv$ , así que

$$I = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dv \right)$$

el volumen es fijo y debemos considerar que la densidad depende de las coordenadas y también del tiempo, por lo tanto la derivada dentro de la integral debe ser una derivada parcial

$$I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (**)$$

Igualando (\*) y (\*\*)

$$-\int_V \nabla \cdot \vec{j} dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \Rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) dv = 0$$

puesto que  $V$  es arbitrario, entonces para que la expresión anterior sea cero, el integrando deber ser cero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

La ecuación de continuidad es una ley fundamental de la física relacionada con la conservación de la carga: las cargas eléctricas no se crean ni se destruyen.

#### EJEMPLO 4.2

Consideremos una densidad de corriente dirigida radialmente hacia afuera y que decrece exponencialmente con el tiempo,  $J = \frac{1}{r} e^{-t\hat{r}}$ . Calcular la densidad de carga.

**Solución:** Usando la ecuación de continuidad  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ ;  $-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{r} e^{-t\hat{r}} \right)$  aquí debemos recordar que la divergencia en coordenada esféricas es  $\nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r)$  cuando  $\vec{j}$  sólo depende de  $r$  como es en el presente caso:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r} e^{-t} \right) = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

con esto se establece una ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} e^{-t}$$

la densidad depende de las coordenadas y del tiempo, así que al integrar con respecto a  $t$  aparece una constante de integración que depende de las coordenadas.

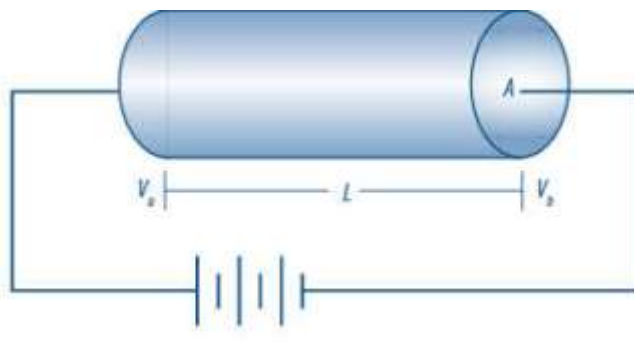
$$\rho(r, t) = \int -\frac{1}{r^2} e^{-t} dt + C(r) = \frac{1}{r^2} e^{-t} + C(r)$$

asumiendo que la densidad se anula en un tiempo largo ( $\rho \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ ), se encuentra que  $C(r) = 0$ . Por lo tanto

$$\rho(r, t) = \frac{1}{r^2} e^{-t}$$

### **Cuantificación de la resistencia**

Mediante la experimentación se ha podido comprobar que la magnitud de la resistencia eléctrica de un conductor está determinada en función de las características eléctricas del material con el que está fabricado; es decir, por la resistividad de este y las dimensiones físicas del cuerpo. De esta manera, la magnitud de la resistencia del cuerpo es directamente proporcional a la longitud pero inversamente proporcional a su área de sección transversal multiplicada por una constante de proporcionalidad que es la resistividad del material; por tanto, la magnitud de la resistencia se representa mediante la ecuación 3.14 y se ejemplifica en la figura 95.



**Figura 95 Representación esquemática de la resistencia eléctrica de un cuerpo.**

Así, la diferencia de potencial en los extremos del conductor se determina por la ecuación (a):

$$\Delta V = V_b - V_a \quad (a)$$

De igual manera, la diferencia de potencia está dada en función del campo eléctrico dentro del conductor por la ecuación (b)

$$\Delta V = EL \quad (b)$$

Por su parte, la densidad de corriente también se expresa en función de la conductividad y del campo eléctrico y a la conductividad del material; esta relación es el fundamento de la ley de Ohm que se representa mediante la ecuación (c):

$$J = \sigma E \quad (c)$$

De esta manera combinando las ecuaciones (b) y (c) se tiene:



$$J = \sigma \frac{\Delta V}{L}$$

Luego, despejando  $\Delta V$  se tiene:

$$\Delta V = \frac{JL}{\sigma} \quad (d)$$

Sin embargo, la densidad de corriente en función de la intensidad y del área está dada por la ecuación:

$$J = \frac{I}{A}$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación (d) se obtiene:

$$\Delta V = \left(\frac{I}{A}\right) \left(\frac{L}{\sigma}\right) = \frac{IL}{A\sigma}$$
$$\Delta V = \left[\frac{L}{A\sigma}\right] I \quad (e)$$

Por consiguiente, la ecuación (e) es la presentación práctica de la ley de Ohm; donde el término  $\frac{L}{A\sigma}$  es el efecto correspondiente a la resistencia del material, mientras que la  $I$  es la corriente a través del conductor; por tanto, la resistencia eléctrica está dada por la expresión:

$$R = \frac{L}{\sigma A} \quad (f)$$

Al sustituir la conductividad como función de la resistividad,  $\rho = 1/\sigma$  se tiene:

$$R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{L}{\frac{1}{\rho} A} = \frac{L}{A} \rho$$

Entonces. Al reducir términos se obtiene la ecuación 3.14 para determinar la resistencia:

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (3.14)$$

Dónde:

L= Longitud en metros.

A=Área de sección transversal en  $m^2$ .

$\rho$  = Resistividad del material en Ohm.

R = Resistencia del material en ohm.

Como ya se dijo antes, la resistividad cuantifica una característica propia de cada materia; por tanto tiene un valor diferente para cada uno. De acuerdo con esto en la tabla 8 se listan los valores de resistividad para algunos materiales.

### Problema resuelto 6

Determinar la resistencia eléctrica de un hilo de plata de 3 m de longitud y 3 mm de diámetro, considerando que la resistividad de la plata es de  $1.59 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ .

**Solución:**

Primero establecemos los datos de referencia:

$$L = 3 \text{ m}$$

$$D = 0.003 \text{ m}$$

$$P = 1.59 \times 10^8 \Omega \cdot \text{m}$$

Luego consideramos, la ecuación de la resistividad:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Por último realizamos la sustitución:

$$R = \frac{(1.59 \times 10^8)(3 \text{ m})}{(3.1416)(1.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 6.7481 \times 10^{-3} \Omega$$

**Problema resuelto 7**

Para fabricar un alambre de forma cilíndrica se usan dos gramos de cobre. Si se requiere que este tenga una resistencia de  $0.65 \Omega$ , es necesario determinar:

- a) La longitud del alambre.
- b) El diámetro

**Solución:**

Primero, consideramos:

$$\rho_m = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL}$$

$$A = \frac{m}{\rho_m L}$$

Ahora, de la ecuación de la resistencia tenemos que:

$$A = \frac{\rho L}{R}$$

Luego, si despejamos A en ambas ecuaciones y las igualamos, tenemos que:

$$L = \sqrt{\frac{mR}{\rho_m \rho}} = \sqrt{\frac{(0.002 \text{ kg})(0.65 \Omega)}{\left(8920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)(1.72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})}} = 2.91 \text{ m}$$

Por último, empleamos la ecuación de resistencia y tenemos:

$$d = \sqrt{\frac{4\rho L}{\pi R}} = \sqrt{\frac{4(1.72 \times 10^{-8} \Omega m)(2.91 m)}{3.1416(0.65 \Omega)}} = 3.1316 \times 10^{-4} m$$

### Resistencias Eléctricas.

El resistor eléctrico es un dispositivo fabricado con el fin de que este tenga un valor determinado de resistencia al paso de la corriente eléctrica.

### Tipos de resistores.

Hoy día, en el mercado hay dos tipos de resistores, los cuales se describen a continuación:

**Resistores de composición:** Este tipo de resistor está hecho de carbón. Se caracteriza porque su resistencia está impresa en el cuerpo del resistor mediante franjas de colores, las cuales se leen mediante un código de colores, donde los primeros dos colores son dos dígitos del valor de la resistencia; en tanto, el tercer color representa la potencia en base 10 o ceros que se agregan a los dos primeros dígitos y el último color es la tolerancia del valor de la resistencia. Más adelante, en esta misma sección se describen estos colores y sus equivalencias.

**Resistencias de alambre enrollado:** En este tipo de resistor consta de una bobina de alambre y su valor está impreso en el cuerpo del resistor.

Los resistores o materiales óhmicos tiene una relación lineal de corriente-voltaje en un amplio rango de voltaje, en tanto que en los materiales no óhmicos la relación corriente-voltaje es no lineal; por ejemplo, un diodo. En la figura 96 se representan las gráficas de estos dos casos

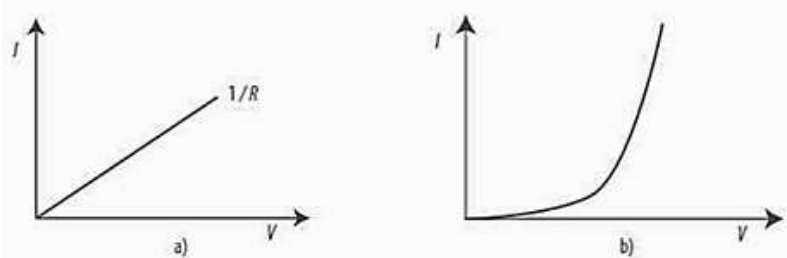


Figura 96 a) Material óhmico. b) Material semiconductor no óhmico.

### Código de colores

Por lo general, los fabricantes de los resistores de composición colocan en el cuerpo del resistor cuatro franjas de colores; las tres primeras están muy cercanas en el extremo izquierdo, mientras que la última, más distante, se ubica en el lado derecho. Por consiguiente, la forma correcta de leer el valor de la resistencia es de izquierda a derecha. Las primeras dos franjas representan los números de la cantidad total de la resistencia, la tercera franja representa indica el número de ceros que se deben agregar a la derecha de los dos primeros números, con lo cual se obtiene el valor total de la resistencia en ohm, mientras que la cuarta franja solo indica el porcentaje de tolerancia del valor del elemento. En la tabla 9 aparece este código de colores, donde en la columna de la izquierda se lista el color mientras que en la columna de la derecha aparece el valor correspondiente

Tabla 9 Código de colores de los resistores.

Color	Valor
Negro	Cero
Café	Uno
Rojo	Dos
Naranja	Tres
Amarillo	Cuatro
Verde	Cinco
Azul	Seis
Violeta	Siete
Gris	Ocho
Blanco	Nueve
Color de la cuarta Franja	Tolerancia %
Oro	5
Plata	10
Sin color	20

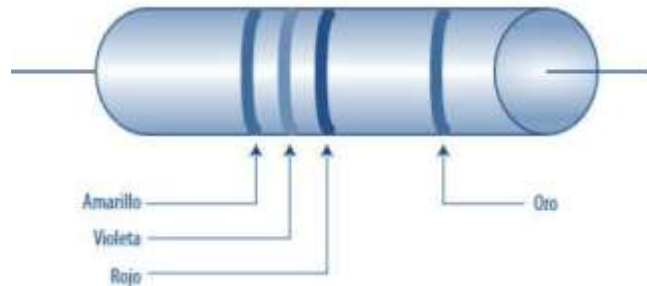


Figura 97 Ilustración de una resistencia con valor indicado de acuerdo con código de colores.

Para el resistor ilustrado en la figura 97, las dos primeras franjas, de izquierda a derecha, corresponden al cuatro y siete, respectivamente, mientras que la tercera franja corresponde al dos; por tanto, el valor de la resistencia es de 4700 ohm, con una tolerancia de 5%, debido a que la cuarta franja es de color oro, esto significa que el valor verdadero de la resistencia se encuentra entre  $4\ 700 \pm 5\%$ .

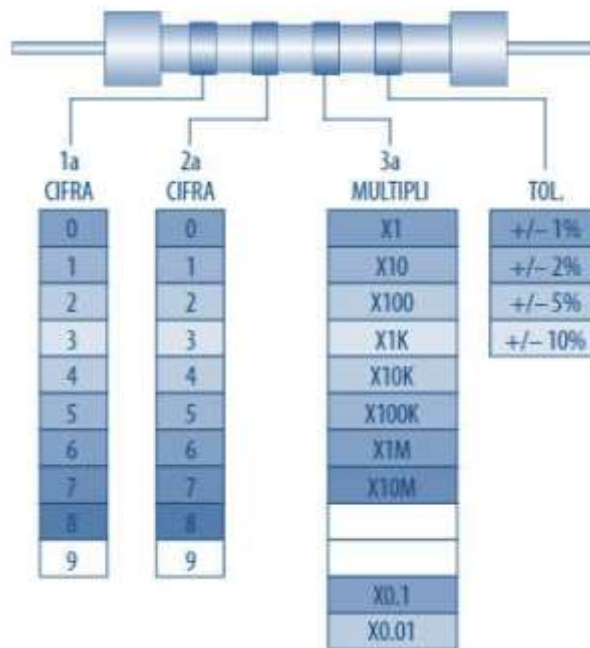


Figura 98 Esquema del código de colores para resistores.

### 3.4 Ley de Ohm.

Para producir una corriente eléctrica en un circuito se requiere establecer una diferencia de potencial. Una manera de lograr una diferencia de potencial a través de un alambre es conectar sus extremos a las terminales opuestas de una batería (véase figura 99)



Figura 99 Diagrama eléctrico del circuito de la ley de Ohm.

Fue Georg Simón Ohm (1787-1854) quien estableció en forma experimental que la corriente en un alambre de metal es proporcional a la diferencia de potencial  $V$  aplicada a sus extremos:

$$I \propto V.$$

Si conectamos, por ejemplo, un alambre a una batería de 6 V, el flujo de corriente será dos veces mayor que si el alambre estuviera conectado a una batería de 3 V. Se encuentra también que invertir el signo del voltaje no afecta la magnitud de la corriente.

Una analogía útil compara el flujo de corriente eléctrica en un alambre con el flujo de agua en un río, o en una tubería, afectado por la gravedad. Si el río o la tubería corren de manera horizontal, la tasa de flujo es pequeña. Pero si un extremo está más alto que el otro, la tasa de flujo, o la corriente, será mayor. Cuanto mayor sea la diferencia de alturas, más rápida será la corriente. En la unidad 1 vimos que la diferencia de potencial es análoga, en el caso gravitacional, a la altura de un acantilado. Lo anterior se aplica en el presente caso a la altura a través de la cual se da el flujo. Así como un incremento en la altura puede producir un incremento en el flujo de agua, una mayor diferencia de potencial eléctrico, o voltaje, produce una mayor corriente eléctrica.

La magnitud de una corriente en un alambre depende no sólo del voltaje, sino también de la resistencia que ofrece el alambre al flujo de los electrones. Las paredes de una tubería, o la ribera de un río y las rocas en el camino, ofrecen resistencia a la corriente de agua. De la misma manera, el flujo de los electrones encuentra obstáculos en las interacciones con los átomos del alambre. A mayor resistencia, menos corriente para un voltaje dado  $V$ . Definimos entonces la *resistencia* eléctrica de forma que la corriente es inversamente proporcional a la resistencia; esto es,

$$I = \frac{V}{R} \quad (3.15)$$

donde  $R$  es la **resistencia** del alambre o de otros aparatos,  $V$  es la diferencia de potencial aplicada a través del alambre o del aparato e  $I$  es la corriente que circula por él. La ecuación 3.15 se escribe de manera habitual como

$$V = IR \quad (3.16)$$

Como ya se mencionó, Ohm encontró experimentalmente que en un metal conductor  $R$  es una constante independiente de  $V$ , resultado que se conoce como la ley de Ohm. A la ecuación 3.16,  $V = RI$ , se le llama en ocasiones ley de Ohm, pero sólo cuando nos referimos a materiales o aparatos para los cuales  $R$  es una constante independiente de  $V$ . Sin embargo,  $R$  no es una constante para muchas sustancias que no sean metales, como los diodos, los tubos de vacío, los transistores, etcétera. Aun el filamento de una bombilla eléctrica no es un material óhmico: la resistencia medida es baja para pequeñas corrientes, pero mucho más alta a su corriente normal de operación, que la pone a una alta temperatura necesaria para hacerla brillar (3000 K). Así que la "ley" de Ohm no es una ley fundamental, sino más bien una descripción de cierto tipo de materiales: metales conductores, cuya temperatura no cambia mucho. A los materiales o aparatos que no siguen la ley de Ohm ( $R = \text{constante}$ ) se les conoce como materiales no óhmicos. Véase la figura 100.

La unidad de resistencia se llama **ohm**, que se abrevia con la letra griega omega mayúscula  $\Omega$ . Puesto que  $R = V/I$ , vemos que  $1.0 \Omega$  equivale a  $1.0 V/A$ .

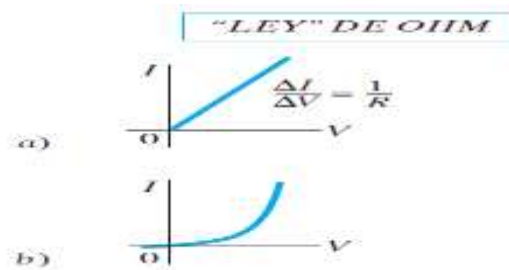


Figura 100 Gráficas de corriente contra voltaje para a) un material conductor que obedece la ley de Ohm y b) un aparato no óhmico: en este caso, un diodo semiconductor.

**EJEMPLO CONCEPTUAL Corriente y potencial.** Una corriente  $I$  entra a un resistor  $R$  como se indica en la figura 101. a) ¿El potencial es mayor en el punto A o en el punto B? b) ¿La corriente es mayor en el punto A o en el punto B?

RESPUESTA a) La carga positiva siempre fluye de + a -, de un potencial alto a un potencial bajo. Piense de nuevo en la analogía gravitacional: una masa se moverá de una región de alto potencial gravitacional a otra de menor potencial. Así que para una corriente positiva  $I$ , el punto A está a un potencial mayor que el punto B.

b) Por conservación de carga, cualquier cantidad de carga que fluya hacia el resistor en el punto A será igual a la cantidad de carga que emerja en el punto B. La carga o la corriente no se "gasta" en el resistor, así como un objeto que cae a través de un potencial gravitacional no gana ni pierde masa. En consecuencia, la corriente es la misma en los puntos A y B.

Un decremento en el potencial eléctrico, como del punto A al punto B en el ejemplo anterior, se conoce generalmente como caída de potencial o caída de voltaje.

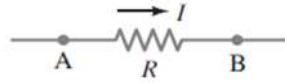


Figura 101 Resistencia polarizada.

**EJEMPLO Resistencia de una bombilla de linterna.** Una pequeña bombilla de linterna (figura 102) toma 300 mA de su batería de 1.5 V. *a)* ¿Cuál es la resistencia de la bombilla? *b)* Si la batería se debilita y el voltaje cae a 1.2 V, ¿en cuánto variará la corriente?

**PLANTEAMIENTO** Podemos aplicar la ley de Ohm a la bombilla, donde el voltaje aplicado a través de ella es el voltaje de la batería.

**SOLUCIÓN** *a)* Convertimos 300 mA a 0.30 A y usamos la ecuación 3.15 o 3.16:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.5 \text{ V}}{0.30 \text{ A}} = 5.0 \Omega$$

*b)* Si la resistencia permanece constante, la corriente sería

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1.2 \text{ V}}{5.0 \Omega} = 0.24 \text{ A} = 240 \text{ mA}$$

es decir, una disminución de 60 mA.

**NOTA** Con la corriente menor en el inciso *b)*, la temperatura del filamento de la bombilla sería menor y la bombilla brillaría menos. Además, la resistencia depende de la temperatura, así que nuestros cálculos son tan sólo una aproximación.

### Problema resuelto 8

Se tiene un conductor cilíndrico de 2 mm de radio 1.6 m de longitud, cuya resistividad es  $3.5 \times 10^5 \Omega m$ , conectado a una batería de 9 V, durante 5 segundos. Determinar:

- La carga eléctrica.
- El número de electrones.

### Solución

De acuerdo a las ecuaciones estudiadas antes tenemos que:

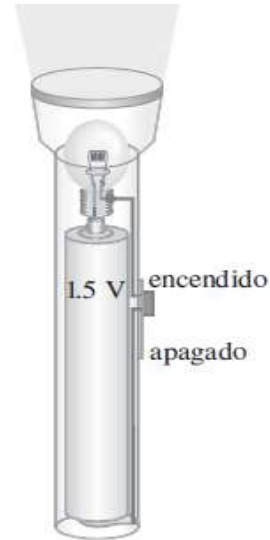


Figura 102 Linterna. Observe como el circuito se cierra a lo largo de la banda lateral.



a)

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{(3.5 \times 10^{-5} \Omega\text{m})(1.6\text{m})}{(3.1416)(2 \times 10^{-3} \text{m})^2} = 4.4563 \Omega$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{9\text{V}}{4.4563 \Omega} = 2.019 \text{A}$$

$$I = \frac{q}{t}$$

b)

$$q = It = (2.019 \text{A})(5 \text{s}) = 10.097 \text{C}$$

$$N = \frac{q}{q_e} = \frac{10.097 \text{C}}{1.6 \times 10^{-19} \text{C}} = 6.3112 \times 10^{19} \text{ electrones}$$

### 3.5 Resistencias en serie, paralelas y mixtas.

Los resistores se encuentran en toda clase de circuitos, desde secadoras para el cabello y calentadores espaciales hasta circuitos que limitan o dividen la corriente, o reducen o dividen un voltaje. Es frecuente que tales circuitos contengan varios resistores, por lo que es apropiado considerarlos como combinaciones de resistores. Un ejemplo sencillo es una guirnalda de bombillas eléctricas de las que se usan en la decoración navideña; cada bombilla actúa como resistor, y desde la perspectiva del análisis de circuitos una guirnalda de bombillas tan sólo es una combinación de resistores.

Suponga que se tiene tres resistores con resistencias  $R_1, R_2$  y  $R_3$ , La figura 104 muestra cuatro formas diferentes en que éstos se pueden conectar entre los puntos a y b. Cuando se conectan en secuencia varios elementos de circuito, como resistores, baterías y motores —como en la figura 104a— con una sola trayectoria de corriente entre los puntos, se dice que están conectados en serie. En la unidad 2 se estudiaron los capacitores en serie; vimos que, en virtud del principio de conservación de la carga, todos tenían la misma carga si al principio se hallaban descargados. Es frecuente que al estudiar circuitos estemos más interesados en la corriente, que es el flujo de carga por unidad de tiempo.

Se dice que los resistores de la figura 104b están conectados en paralelo entre los puntos a y b. Cada resistor ofrece una trayectoria alternativa entre los puntos. Para los

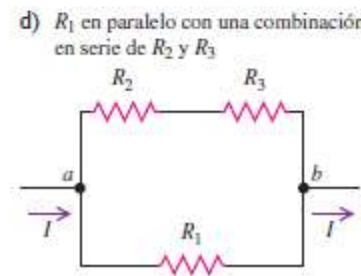
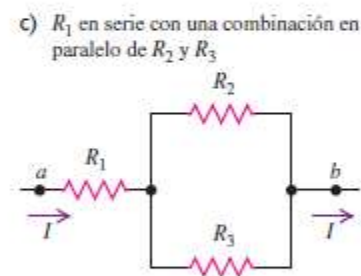
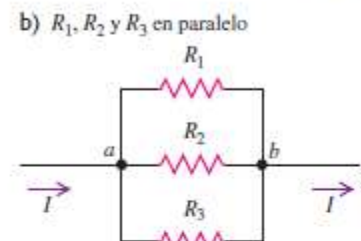
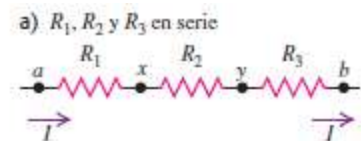


Figura 104 Cuatro diferentes formas de conectar tres resistores.

elementos de circuito conectados en paralelo, la diferencia de potencial es la misma a través de cada elemento. En la unidad 2 se estudiaron los capacitores en paralelo.

En la figura 104c, los resistores  $R_2$  y  $R_3$  están en paralelo, y esta combinación está en serie con  $R_1$ . En la figura 104d,  $R_2$  y  $R_3$  están en serie, y esta combinación está en paralelo con  $R_1$ .

Para cualquier combinación de resistores siempre es posible encontrar un resistor único que podría remplazar la combinación y dar como resultado la misma corriente y diferencia de potencial totales. Por ejemplo, una guirnalda de bombillas navideñas podría remplazarse por una sola bombilla elegida de manera apropiada para que tomara la misma corriente y tuviera la misma diferencia de potencial entre sus terminales que la guirnalda original. La resistencia de este resistor único se llama resistencia equivalente de la combinación. Si se remplazara cualquiera de las redes de la figura 104 por su resistencia equivalente  $R_{eq}$ , se podría escribir

$$V_{ab} = IR_{eq}, \text{ o bien, } R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I}$$

donde  $V_{ab}$  es la diferencia de potencial entre las terminales a y b de la red, e I es la corriente en el punto a o b. Para calcular una resistencia equivalente, se supone una diferencia de potencial  $V_{ab}$  a través de la red real, se calcula la corriente I correspondiente y se obtiene la razón  $V_{ab}/I$ .

### Resistores en serie

Es posible determinar ecuaciones generales para la resistencia equivalente de una combinación de resistores en serie o en paralelo. Si los resistores están en serie, como en la figura 104a, la corriente I debe ser la misma en todos ellos. (Como se vio al inicio de la unidad, la corriente no “se gasta” cuando pasa a través de un circuito.) Al aplicar  $V = IR$  a cada resistor, se obtiene

$$V_{ax} = IR_1 \quad V_{xy} = IR_2 \quad \dots \quad V_{yb} = IR_3$$

Las diferencias de potencial a través de cada resistor no necesitan ser las mismas (excepto para el caso especial en que las tres resistencias son iguales). La diferencia de potencial  $V_{ab}$  a través de toda la combinación es la suma de estas diferencias de potencial individuales:

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

Por lo que

$$\frac{V_{ab}}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

La razón  $V_{ab}/I$  es, por definición, la resistencia equivalente  $R_{eq}$ . Por lo tanto,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Es fácil generalizar esto a cualquier número de resistores:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots (\text{Resistores en serie}) \quad (3.17)$$

La resistencia equivalente de cualquier número de resistores en serie es igual a la suma de sus resistencias individuales.

La resistencia equivalente es mayor que cualquiera de las resistencias individuales. Comparemos este resultado con la ecuación (2.13a) para capacitores en serie. Los resistores en serie se suman directamente porque el voltaje a través de cada uno es directamente proporcional a su resistencia y a la corriente común. Los capacitores en serie se suman en forma recíproca porque el voltaje es directamente proporcional a la carga común, pero inversamente proporcional a la capacitancia individual.

### Resistores en paralelo

Si los resistores están en paralelo, como en la figura 104b, la corriente a través de cada resistor no necesita ser la misma. Pero la diferencia de potencial entre las terminales de cada resistor debe ser la misma e igual a  $V_{ab}$  (figura 105). (Recuerde que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera no depende de la trayectoria tomada entre los puntos.) Denotemos las corrientes en los tres resistores con  $I_1, I_2, I_3$ . Luego, de  $I = V/R$

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \quad I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

En general, la corriente es diferente a través de cada resistor. Como la carga no se acumula o escapa del punto a, la corriente total  $I$  debe ser la suma de las tres corrientes en los resistores:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \text{ o bien,}$$

$$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Pero por definición de resistencia equivalente  $R_{eq} I / V_{ab} = 1/R_{eq}$  por lo que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

De nuevo, es fácil generalizar a cualquier número de resistores en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (\text{Resistores en paralelo}) \quad (3.18)$$

**Para cualquier número de resistores en paralelo, el recíproco de la resistencia equivalente es igual a la suma de los recíprocos de sus resistencias individuales.**

La resistencia equivalente siempre es menor que cualquier resistencia individual.

Figura 105 Los faros de un automóvil están conectados en paralelo. De ahí que cada uno esté expuesto a toda la diferencia de potencial suministrada por el sistema eléctrico del vehículo, lo que da el máximo brillo. Otra ventaja es si un faro se funde, el otro sigue funcionando (vea ejemplo 2)



Se puede comparar este resultado con la ecuación (2.13b) para capacitores en paralelo. Los resistores en paralelo se suman recíprocamente porque la corriente en cada uno es proporcional al voltaje común a través de ellos, e inversamente proporcional a la resistencia de cada uno. Los capacitores en paralelo se suman directamente porque la carga en cada uno es proporcional al voltaje común a través de ellos y directamente proporcional a la capacitancia de cada uno.

Para el caso especial de dos resistores en paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \text{y} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{dos resistores en paralelo}) \quad (3.19)$$

### Estrategia para resolver problemas

### Resistores en serie y en paralelo

**IDENTIFICAR** *los conceptos relevantes:* Muchas redes de resistores están constituidas por resistores en serie, en paralelo o una combinación de ambos. El concepto clave es que una red de ese tipo se puede sustituir por un solo resistor equivalente.

**PLANTEAR** *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo de la red de resistores.
2. Determine si los resistores están conectados en serie o en paralelo. Observe que es frecuente considerar redes como las de las figuras 104c y 104d, como combinaciones de arreglos en serie y en paralelo.
3. Determine cuáles son las variables que se buscan. Éstas podrían incluir la resistencia equivalente de la red, la diferencia de potencial a través de cada resistor, o la corriente que cruza cada resistor.

**EJECUTAR** *la solución* como sigue:

Utilice la ecuación (3.17) o (3.18) para encontrar la resistencia equivalente para una combinación en serie o en paralelo, respectivamente.

1. Si la red es más compleja, trate de reducirla a combinaciones en serie y en paralelo. Por ejemplo, en la figura 104c primero se reemplaza la combinación en paralelo de  $R_2$  y  $R_3$  con su resistencia equivalente; esto forma una combinación en serie con  $R_1$ . En la figura 104d, la combinación de  $R_2$  y  $R_3$  en serie forma una combinación en paralelo con  $R_1$ .
2. Cuando se calculen diferencias de potencial, recuerde que cuando los resistores están conectados en serie, la diferencia de potencial total a través de la combinación es igual a la suma de las diferencias de potencial individuales. Cuando los resistores están conectados en paralelo, la diferencia de potencial es la misma para cada resistor, e igual a la diferencia de potencial a través de la combinación en paralelo.
3. Recuerde los enunciados análogos para la corriente. Cuando los resistores se conectan en serie, la corriente es la misma a través de cada resistor e igual a la que pasa a través de la

combinación en serie. Cuando los resistores se conectan en paralelo, la corriente total a través de la combinación es igual a la suma de corrientes a través de los resistores individuales.

**EVALUAR** la respuesta: Compruebe si los resultados son congruentes. Si los resistores están conectados en serie, la resistencia equivalente debe ser mayor que la de cualquier resistor individual; si están en paralelo, la resistencia equivalente debe ser menor que la de cualquier resistor individual.

**Ejemplo 1.** Resistencia equivalente.

Calcule la resistencia equivalente de la red que se ilustra en la figura siguiente y obtenga la corriente en cada resistor. La fuente de fem tiene resistencia interna insignificante

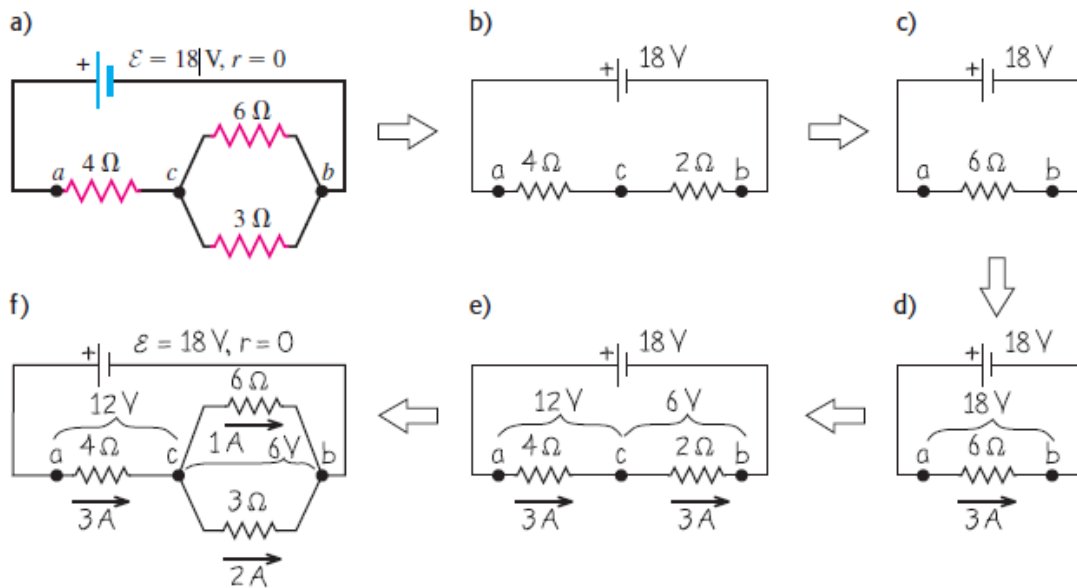
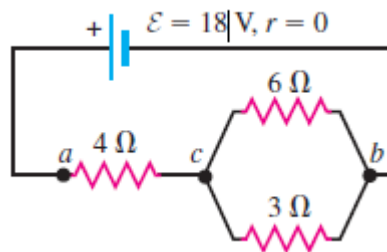


Figura 106 Etapas para reducir una combinación de resistores a un solo resistor equivalente y calcular la corriente en cada resistor.

**Solución**

Identificar: Esta red de tres resistores es una *combinación* de resistencias en serie y en paralelo, como la de la figura 104c. Los resistores de  $6\ \Omega$  y  $3\ \Omega$  están en paralelo, y su combinación está en serie con el resistor de  $4\ \Omega$ .

**PLANTEAR:** Primero se determina la resistencia equivalente  $R_{eq}$  de esta red en su conjunto. Dado este valor, se calcula la corriente en la fem, que es la misma que la corriente en el resistor de  $4\ \Omega$ . Esta misma corriente se divide entre los resistores de  $6\ \Omega$  y  $3\ \Omega$ ; se determina cuánta corriente va hacia cada resistor utilizando el principio de que la diferencia de potencial debe ser la misma a través de estos dos resistores (porque están conectados en paralelo).

**EJECUTAR:** Las figuras 106b y 106c muestran los pasos sucesivos para reducir la red a una sola resistencia equivalente. De acuerdo con la ecuación (3.18), los resistores de  $6\ \Omega$  y  $3\ \Omega$  en paralelo de la figura 106a equivalen al resistor único de  $2\ \Omega$  de la figura 106b:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} = \frac{1}{2\ \Omega}$$

El mismo resultado se obtiene mediante la ecuación (3.19).] De la ecuación (3.17), la combinación en serie de este resistor de  $2\ \Omega$  con el resistor de  $4\ \Omega$  es equivalente al resistor único de  $6\ \Omega$  de la figura 106c

Para encontrar la corriente en cada resistor de la red original, se invierten los pasos con los que se redujo la red. En el circuito que se muestra en la figura 106d (idéntico al de la figura 106c), la corriente es  $I = \frac{V_{ab}}{R} = (18\ V)/(6\ \Omega) = 3\ A$ . Así que la corriente en los resistores de  $4\ \Omega$  y  $2\ \Omega$  de la figura 106e (idéntica a la figura 106b) también es de  $3\ A$ . Por lo tanto, la diferencia de potencial  $V_{cb}$  a través del resistor de  $2\ \Omega$  es  $V_{cb} = -IR = (3A)(2\Omega) = 6\ V$ . Esta diferencia de potencial también debe ser de  $6\ V$  en la figura 106f (idéntica a la figura 106a).

Con  $I = V_{cb}/R$ , las corrientes en los resistores de  $6\ \Omega$  y  $3\ \Omega$  de la figura 106f son  $(6\ V)/(6\ \Omega) = 1\ A$  y  $(6\ V)/(3\ \Omega) = 2\ A$ , respectivamente.

**EVALUAR :** Observe que para los dos resistores en paralelo entre los puntos  $c$  y  $b$  de la figura 106f, hay el doble de corriente a través del resistor de  $3\ \Omega$  que a través del resistor de  $6\ \Omega$ , es decir, pasa más corriente por la trayectoria de menos resistencia, de acuerdo con la ecuación (3.19). También note que la corriente total a través de estos dos resistores es de  $3\ A$ , la misma que pasa a través del resistor de  $4\ \Omega$  entre los puntos  $a$  y  $c$ .

### Ejemplo 2      Combinaciones en serie contra combinaciones en paralelo

Dos bombillas idénticas se conectan a una fuente con  $\mathcal{E} = 8\ V$  y resistencia interna despreciable. Cada bombilla tiene una resistencia  $R = 2\ \Omega$ . Calcule la corriente a través de cada bombilla, la diferencia de potencial a través de ésta y la potencia que se le entrega, y haga lo mismo para toda la red si las bombillas están conectadas *a*) en serie y *b*) en paralelo. *c*) Suponga que una de las bombillas se funde, es decir, su filamento se rompe y la corriente ya no puede fluir a través de él. ¿Qué pasa con la otra bombilla, para el caso de conexión en serie? ¿Y en el de conexión en paralelo?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Las bombillas son resistores conectados en serie y en paralelo.

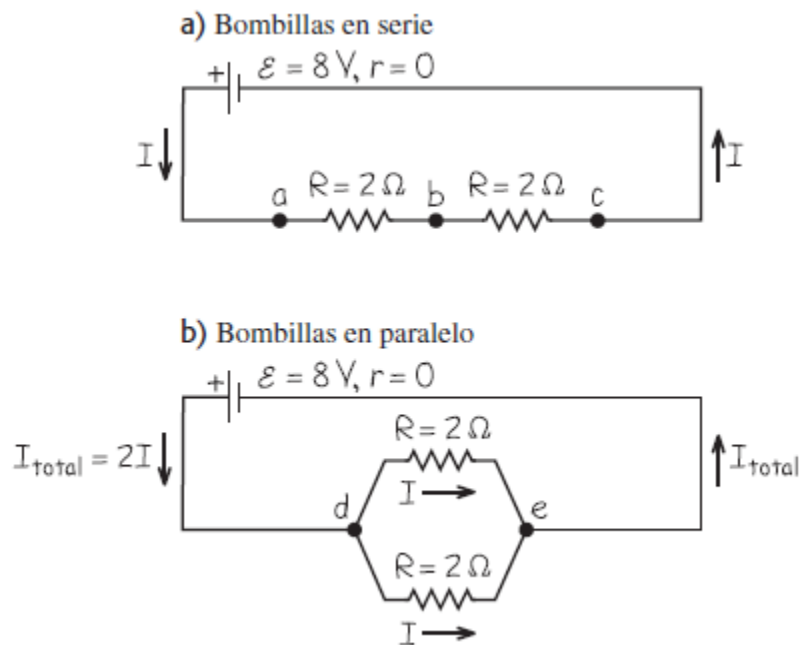


Figura 107 Diagrama para este problema. 26.4

**PLANTEAR:** Las figuras 107a y 107b muestran los diagramas de los circuitos en serie y en paralelo, respectivamente. Una vez que se ha calculado la corriente a través de cada bombilla, se obtiene la potencia entregada a cada una por medio de la ecuación  $P = I^2 R = V^2/R$ .

**EJECUTAR.**

- a) De acuerdo con la ecuación (3.17), la resistencia equivalente de las dos bombillas entre los puntos  $a$  y  $c$  en la figura 107a es la suma de sus resistencias individuales.

$$R_{eq} = 2R = 2(2\Omega) = 4\Omega$$

La corriente es la misma a través de cada bombilla en serie:

$$I = \frac{V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{8V}{4\Omega} = 2A$$

Como las bombillas tienen la misma resistencia, la diferencia de potencial es la misma a través de cada una:

$$V_{ab} = V_{bc} = IR = (2A)(2\Omega) = 4V$$



Ésta es la mitad del voltaje terminal de 8 V de la fuente. De acuerdo con la ecuación  $P = I^2 R = V^2/R$ , la potencia entregada a cada bombilla es

$$P = I^2 R = (2A)^2 (2\Omega) = 8W \quad \text{o bien,}$$

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{V_{bc}^2}{R} = \frac{(4V)^2}{2\Omega} = 8W$$

La energía total entregada a las dos bombillas es  $P_{total} = 2P = 16W$ . De manera alternativa, la potencia total se puede calcular utilizando la resistencia equivalente  $R_{eq} = 4\Omega$ , a través de la cual la corriente es  $I = 2A$  y la diferencia de potencial es  $V_{ac} = 8V$ :

$$P_{total} = I^2 R_{eq} = (2A)^2 (4\Omega) = 16W \quad \text{o bien,}$$

$$P_{total} = \frac{V_{ac}^2}{R_{eq}} = \frac{(8V)^2}{4\Omega} = 16W$$

b) Si las bombillas están en paralelo, como en la figura 107b, la diferencia de potencial  $V_{de}$  a través de cada bombilla es la misma e igual a 8 V, el voltaje terminal de la fuente, por lo que la corriente a través de cada bombilla es

$$I = \frac{V_{de}}{R} = \frac{8V}{2\Omega} = 4A$$

y la potencia entregada a cada bombilla es

$$P = I^2 R = (4A)^2 (2\Omega) = 32W \quad \text{o bien,}$$

$$P = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8V)^2}{2\Omega} = 32W$$

Tanto la diferencia de potencial como la corriente a través de cada bombilla son el doble de grandes que en el caso de la conexión en serie. Por lo tanto, la potencia entregada a cada bombilla es *cuatro* veces mayor, y cada bombilla brilla más que en el caso en serie. Si la meta es producir la máxima cantidad de luz por cada bombilla, el arreglo en paralelo es superior a la conexión en serie

La potencia total entregada a la red en paralelo  $P_{total} = 2P = 64W$  cuatro veces mayor que para el caso en serie. El incremento en la potencia en comparación con la conexión en serie no se obtiene “gratis”, ya que la energía se extrae cuatro veces más rápido de la fuente en la conexión en paralelo que en la conexión en serie. Si la fuente es una batería, se agotará cuatro veces más rápido.

También se puede encontrar la potencia total mediante la resistencia equivalente  $R_{eq}$  dada en la ecuación (3.18):

$$\frac{1}{R_{eq}} = 2 \left( \frac{1}{2\Omega} \right) = 1\Omega^{-1} \quad \text{o bien, } R_{eq} = 1\Omega$$

La corriente total a través del resistor equivalente es  $I_{total} = 2I = 2(4 \text{ A}) = 8 \text{ A}$ , y la diferencia de potencial a través del resistor equivalente es de 8 V. Así, la potencia total es

$$P_{total} = I^2 R_{eq} = (8 \text{ A})^2 (1 \Omega) = 64 \text{ W} \quad \text{o bien,}$$

$$P_{total} = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8 \text{ V})^2}{1 \Omega} = 64 \text{ W}$$

La diferencia de potencial a través de la resistencia equivalente es la misma para ambos casos, en serie y en paralelo, pero para este último caso el valor de  $R_{eq}$  es menor, por lo que  $P_{total} = V^2/R_{eq}$  es mayor.

- c) En el caso en serie, fluye la misma corriente a través de las dos bombillas. Si una de éstas se fundiera no habría corriente en todo el circuito, y ninguna bombilla brillaría.

En el caso en paralelo, la diferencia de potencial a través de cualquier bombilla permanecería igual a 8 V, aun si una de las bombillas se fundiera. De ahí que la corriente a través de la bombilla en funcionamiento sería igual a 4 A, y la potencia entregada a esa bombilla seguiría igual a 32 W, como antes de que la bombilla se fundiera. Ésta es otra ventaja de un arreglo en paralelo de bombillas: si una de ellas falla, las demás no se ven afectadas. Este principio se utiliza en los sistemas de distribución domésticos.

**EVALUAR:** Nuestro cálculo no es completamente exacto porque la resistencia  $V = RI$  de bombillas reales *no* es una constante independiente de la diferencia de potencial  $V$  a través de la bombilla. (La resistencia del filamento aumenta con la temperatura de funcionamiento creciente y, por lo tanto, con  $V$  en aumento.) Pero es verdad que las bombillas conectadas en serie a través de una fuente, brillan menos que cuando se conectan en paralelo con la misma fuente (figura 108).

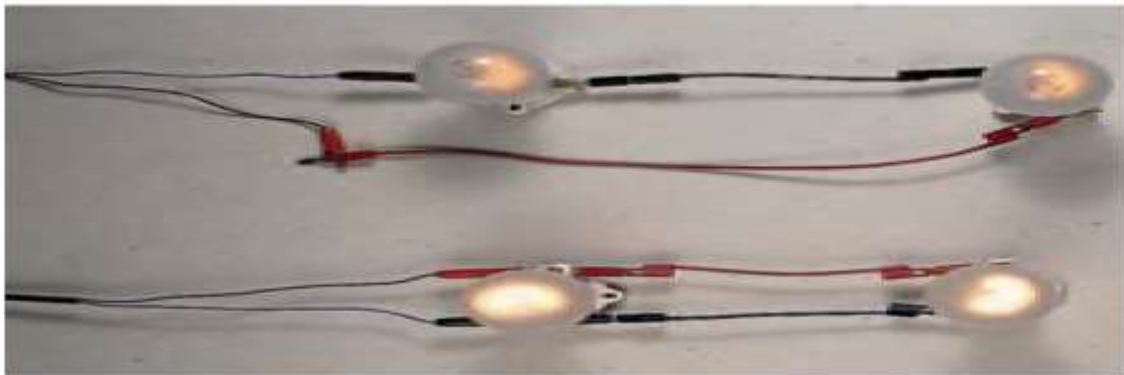


Figura 108 Cuando se conecta la misma fuente dos bombillas en serie (imagen superior) consume menos potencial y brillan menos que si se conectan en paralelo -8imagen inferior)

### 3.6 Ley de Joule.

En términos simples el "efecto Joule" es el fenómeno que ocurre en conductor por el cual circula una corriente eléctrica. Parte de la energía cinética de los electrones se transforma en calor debido a los choques que sufren con los átomos del material conductor por el que circulan, en consecuencia la temperatura del conductor aumenta.

De acuerdo a la figura 109 las cargas eléctricas que atraviesan una resistencia entran con una energía  $qV_1$  mayor que con la que salen  $qV_2$ . La diferencia de energía es:

$$\Delta U = qV_2 - qV_1 = q(V_2 - V_1) = qIR$$

La rapidez con la que las cargas pierden la energía es la potencia disipada en la resistencia  $R$

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (qIR) = IR \frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{P = I^2 R} \quad [W]$$

A nivel microscópico la potencia es:

Ley de Joule.

$$\boxed{P = \int_V \vec{E} * \vec{J} dv} \quad (3.20)$$

Un caso especial para la expresión anterior es cuando tenemos un conductor de sección transversal constante. En ese caso  $d\mathbf{v} = d\mathbf{A}dl$  y además la densidad de corriente y el campo van en la dirección de la longitud ( $\vec{E} \parallel \vec{J} \parallel d\vec{l}$ ). Considerando esto la expresión anterior se puede escribir

$$P = \int_V \vec{E} * \vec{J} dv = \underbrace{\int_L E dl}_V \underbrace{\int_S J dA}_I$$

donde  $I$  es la corriente y como  $\mathbf{V} = \mathbf{I}R$  recobramos la expresión para el caso macroscópico

$$P = I^2 R.$$

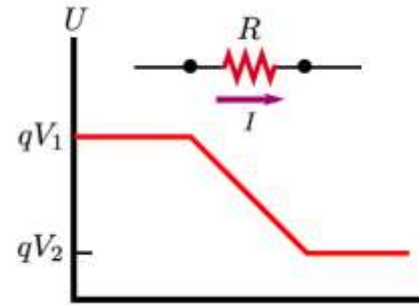


Figura 109 Efecto Joule: cuando la corriente pasa por la resistencia se produce una caída de potencial.

## Efecto Joule

Consideremos la configuración de la Figura:

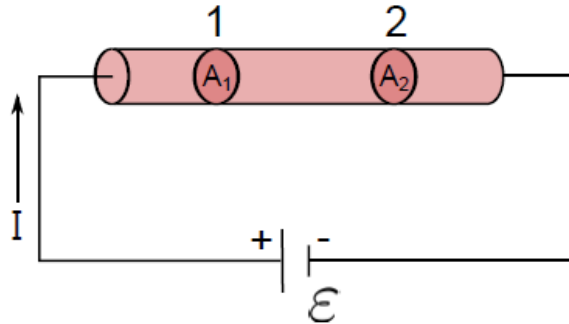


Figura 110 Efecto Joule.

La energía de la carga en el disco 1 es:

$$U_1 = \Delta Q_1 V_1$$

Donde  $\Delta Q_1$  es la carga que atraviesa el plano  $A_1$  y  $V_1$  es el potencial en 1.

Similarmente la energía en el disco 2 es:

$$U_2 = \Delta Q_2 V_2$$

Por lo tanto la diferencia de energía es:

$$\Delta U = \Delta Q_1 V_1 - \Delta Q_2 V_2$$

Pero  $\Delta Q_1$  y  $\Delta Q_2$  son iguales (no hay acumulación de carga).

$$\Delta U = \Delta Q (V_1 - V_2)$$

Por otra parte la potencia es el cambio de la energía en el tiempo, o sea:

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} (V_1 - V_2) \Rightarrow P = I (V_1 - V_2)$$

Y haciendo coincidir 1 con el comienzo del conductor, y 2 con el fin tenemos que:

$$P = I \Delta V$$

¿Qué es la potencia disipada en el material?

Dicha potencia se expresa en un calentamiento del material producto de las colisiones entre las partículas. Esta potencia es suministrada por la fem. Como  $\Delta V = RI$ , la expresión usual de esta potencia es:

$$P = RI^2 \quad \text{ò} \quad P = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (3.20^a)$$

En general, para un material cualquiera tendremos:

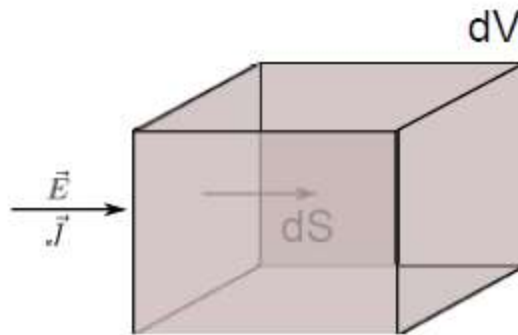


Figura 111 Energía Elemento Diferencial

La potencia disipada en el elemento de volumen es:  $dP = \underbrace{(\vec{J} \cdot d\vec{s})}_I \cdot \underbrace{(\vec{E} \cdot d\vec{r})}_{dv} \Rightarrow dP = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{r}$ .

Como todos los vectores son paralelos  $d\vec{s} \cdot d\vec{r} = dv$  y podemos escribir finalmente la expresión:

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{E} dv$$

La cual representa la potencia disipada en un material de volumen  $\Omega$ .

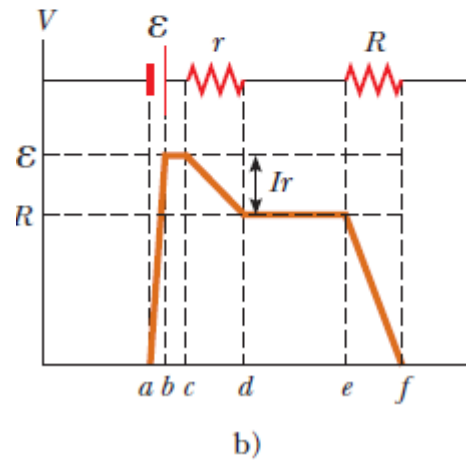
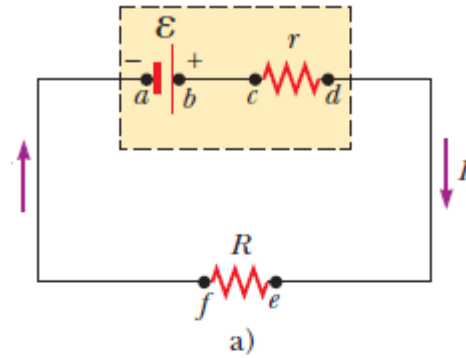
### 3.7 Fuerza Electromotriz (fem).

**Fuerza Electromotriz:** En la sección 3.4 se explicó un circuito en el cual la batería produce una corriente. Por lo general, en esta explicación se utiliza una batería como fuente de energía. Ya que en un circuito particular la diferencia de potencial en las terminales de la batería es constante, la corriente en el circuito es constante en magnitud y dirección y recibe el nombre de **corriente directa**. A la batería se le conoce como *fuerza de fuerza electromotriz*, o más comúnmente, *fuerza de fem*. (Lo que se conoce como *fuerza electromotriz* es un desafortunado equívoco histórico, pues describe no una fuerza, sino una diferencia de potencial en volts.) **La fem  $\mathcal{E}$  de una batería es el voltaje máximo posible que ésta puede suministrar entre sus terminales.** Se puede pensar que una fuente de fem es como una “bomba para las cargas”. Cuando existe una diferencia de potencial entre dos puntos, la fuente mueve las cargas “hacia arriba”, del potencial más reducido al más elevado. En forma general se considera que la conexión de alambres en un circuito no tiene resistencia.

La terminal positiva de la batería se encuentra a un potencial más alto que la negativa. Puesto que una batería está hecha de materia, existe una resistencia al flujo de las cargas dentro de la misma.

Esta resistencia recibe el nombre de **resistencia interna**

$r$ . En el caso de una batería ideal con una resistencia interna igual a cero, la diferencia de potencial a través de la batería (conocida como *voltaje entre las terminales*) es igual a su fem. Sin embargo, en una batería, en un circuito donde exista corriente, el voltaje entre las terminales *no* es igual a la fem de la batería. Para entender esto, considere el diagrama del circuito de la figura 112a, donde se representa la batería como el rectángulo en línea discontinua que contiene una fem  $\mathcal{E}$ , ideal y libre de resistencia, en serie con una resistencia interna  $r$ . Un resistor de resistencia  $R$  es conectado en las terminales de la batería. Ahora imagine que pasa de  $a$  a  $d$  en la batería y mida el potencial eléctrico en diferentes ubicaciones. Conforme pasa de la terminal negativa a la positiva, el potencial *aumenta* en una cantidad  $\mathcal{E}$ . Sin embargo, conforme se mueve a través de la resistencia  $r$ , el potencial *disminuye* en una cantidad  $Ir$ , donde  $I$  es la corriente del circuito. Debido a eso, el voltaje entre las terminales de la batería  $\Delta V = V_d - V_a$  es:



$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir. \quad (3.21)$$

De esta expresión, observe que  $\mathcal{E}$  es equivalente al **voltaje en circuito abierto**, es decir, el voltaje entre las terminales cuando la corriente es igual a cero. La fem es el voltaje nominal de una batería; por ejemplo, la fem de una pila D es de 1.5 V. La diferencia de potencial real entre las terminales de la batería depende de la corriente en la misma, como se describen la ecuación 3.21.

Figura 112 a) Diagrama de un circuito de una fuente de fem - (en este caso, una batería), de resistencia interna  $r$ , conectada a un resistor externo, de resistencia  $R$ . b) Representación gráfica que muestra cómo cambia el potencial eléctrico conforme recorremos el circuito en a) en la dirección de las manecillas del reloj.

La figura 112b es una representación gráfica de los cambios en el potencial eléctrico conforme se recorre el circuito en el sentido de las manecillas del reloj. Al estudiar la figura 112a, es claro que el voltaje entre las terminales  $\Delta V$  debe ser igual a la diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia externa  $R$ , conocida como **resistencia de carga**. El resistor de carga puede ser un simple elemento de circuito resistivo, como el de la figura 112a, o podría ser la resistencia de algún aparato eléctrico (como un tostador, un calentador eléctrico o una lámpara) conectado a la batería (o, en el caso de aparatos domésticos, al contacto de pared). El resistor representa una *carga* en la batería porque ésta debe suministrar energía para que el aparato que contiene la resistencia funcione. La diferencia de potencial de un extremo a otro de la resistencia de carga es  $\Delta V = IR$  Al combinar esta expresión con la ecuación 3.21

$$\varepsilon = IR + Ir \quad (3.22)$$

Al resolver en función de la corriente,

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \quad (3.23)$$

Esta ecuación muestra que la corriente en este circuito simple depende tanto de la resistencia de carga  $R$  externa a la batería como de la resistencia interna  $r$ . Si  $R$  es mucho mayor que  $r$ , como es el caso de muchos circuitos útiles en la vida cotidiana, ignore  $r$ .

Si multiplica la ecuación 3.22 por la corriente  $I$

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r \quad (3.24)$$

Esta ecuación indica que, ya que la potencia es  $\mathcal{P} = I\Delta V$ , la potencia total de salida  $I\varepsilon$  de la batería es entregada a la resistencia de carga externa con un valor  $I^2R$  y a la resistencia interna con un valor  $I^2r$ .

### PREVENCIÓN DE RIESGOS

#### OCULTOS

#### ¿Qué es constante en una batería?

Una interpretación común pero equivocada es pensar que la batería es una fuente de corriente constante.

La ecuación 3.23 muestra claramente que no es así. La corriente del circuito depende de la resistencia  $R$  conectada a la batería. Tampoco es verdad que la batería sea una fuente de voltaje constante entre las terminales, como se muestra en la figura 112. **Una batería es una fuente de fem constante.**

**Pregunta rápida 1** Para maximizar el porcentaje de energía que una batería entrega a un aparato, ¿cómo debería ser la resistencia interna de la misma? a) Tan baja como sea posible) tan alta como sea posible, o c) el porcentaje no depende de la resistencia interna.

#### **EJEMPLO 1** *Voltaje entre las terminales de una batería*

*Una batería tiene una fem de 12.0 V y una resistencia interna de 0.05Ω. Sus terminales están conectadas a una resistencia de carga de 3.00 Ω*

- A) Encuentre la corriente en el circuito y el voltaje entre las terminales de la batería.*
- B) Calcule la potencia entregada al resistor de carga, la potencia entregada a la resistencia interna de la batería y la potencia entregada por la batería.*

#### **SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Estudie la figura 112a, que muestra un circuito consistente con el enunciado del problema. La batería entrega energía al resistor de carga.

**Categorizar** Este ejemplo involucra cálculos simples de esta sección, así que se le clasifica como un problema de sustitución

Use la ecuación 3.23 para encontrar la corriente en el circuito:  $I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{12.0\text{ V}}{(3.00\Omega+0.05\Omega)} = \mathbf{3.93\text{ A}}$

Use la ecuación 3.21 para encontrar el voltaje entre las terminales



$$\Delta V = \varepsilon - Ir = 12.0 \text{ V} - (3.93 \text{ A})(0.05 \Omega) = \mathbf{11.8 \text{ V}}$$

Para comprobar este resultado, calcule el voltaje a través

$$\Delta V = IR = (3.93 \text{ A})(3.00 \Omega) = \mathbf{11.8 \text{ V}} \quad \text{de la resistencia de carga } R:$$

**B)** Calcule la potencia entregada al resistor de carga, la potencia entregada a la resistencia interna de la batería y la potencia entregada por la batería.

**SOLUCIÓN**

Use la ecuación 3.20a para encontrar la potencia  $\mathcal{P}_R = I^2 R = (3.93 \text{ A})^2 (3.00 \Omega) = \mathbf{46.3 \text{ W}}$  entregada al resistor de carga:

Encuentre la potencia entregada a la resistencia interna:  $\mathcal{P}_r = I^2 r = (3.93 \text{ A})^2 (0.05 \Omega) = \mathbf{0.772 \text{ W}}$

Encuentre la potencia entregada por la batería al  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_r = 46.3 \text{ W} + 0.772 \text{ W} = \mathbf{47.1 \text{ W}}$   
Sumar estas cantidades:

**¿Qué pasaría si?** Conforme una batería envejece, su resistencia interna aumenta. Suponga que la resistencia interna de esta batería se eleva a  $2.00 \Omega$  hacia el final de su vida útil. ¿Cómo altera esto la habilidad de la batería para entregar energía?

**Respuesta** Conecte el mismo resistor de carga de  $3.00 \Omega$  a la batería.

Encuentre la nueva corriente en la batería:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{12.0 \text{ V}}{(3.00 \Omega + 2.00 \Omega)} = 2.40 \text{ A}$$

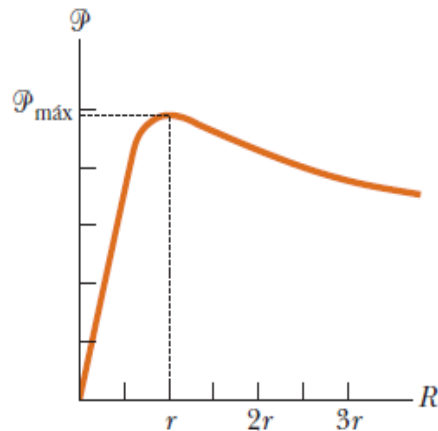
Encuentre el nuevo voltaje entre las terminales:  $\Delta V = \varepsilon - Ir = 12.0 \text{ V} - (2.40 \text{ A})(2.00 \Omega) = 7.2 \text{ V}$

Encuentre las nuevas potencias entregadas al resistor  $\mathcal{P}_R = I^2 R = (2.40 \text{ A})^2 (3.00 \Omega) = 17.3 \text{ W}$  de carga y la resistencia interna:

$$\mathcal{P}_r = I^2 r = (2.40 \text{ A})^2 (2.00 \Omega) = 11.5 \text{ W}$$

El voltaje entre las terminales sólo es 60% de la fem. Observe que 40% de la potencia de la batería se entrega a la resistencia interna cuando  $r$  es  $2.00 \Omega$

Cuando  $r$  es  $0.05 \Omega$  como en el inciso B), este porcentaje sólo es 1.6. En consecuencia, aun cuando la fem permanezca fija, el aumento en resistencia interna de la batería reduce significativamente la capacidad de ésta para entregar energía.



**Figura 113 (Ejemplo 2) Gráfica de potencia  $\mathcal{P}$  entregada por una batería a un resistor de carga de resistencia  $R$  como función de  $R$ . La potencia entregada al resistor es un máximo cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna de la batería.**

**EJEMPLO 2** Igualación de carga

Encuentre la resistencia de carga  $R$  para la cual se entrega la potencia máxima a la resistencia de carga en la figura 112a.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Piense en variar la resistencia de carga de la figura 112a y el efecto sobre la potencia entregada a la resistencia de carga. Cuando  $R$  es grande, hay muy poca corriente, de modo que la potencia  $I^2R$  que se entrega al resistor de carga es pequeña. Cuando  $R$  es pequeña, la corriente es grande y hay una pérdida significativa de potencia  $I^2r$  conforme se entrega energía a la resistencia interna. Por lo tanto, la potencia entregada al resistor de carga es pequeña una vez más. Para algún valor intermedio de la resistencia  $R$ , la potencia se debe maximizar.

**Categorizar** El circuito es el mismo que en el ejemplo 1. Sin embargo, en este caso, la resistencia de carga  $R$  es una variable.

**Analizar** Encuentre la potencia entregada a la resistencia de carga mediante la ecuación 3.20a, con  $I$  conocida por la ecuación 3.23

$$1) \mathcal{P} = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$$

Derive la potencia respecto a la resistencia de carga  $R$  e iguale la derivada a cero para maximizar la potencia

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{dR} &= \frac{d}{dR} \left[ \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} \right] = \frac{d}{dR} [\mathcal{E}^2 R(R+r)^{-2}] = 0 \\ [\mathcal{E}^2 (R+r)^{-2}] + [\mathcal{E}^2 R(-2)(R+r)^{-3}] &= 0 \\ \frac{\mathcal{E}^2 (R+r)}{(R+r)^3} - \frac{2\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^3} &= \frac{\mathcal{E}^2 (r-R)}{(R+r)^3} = 0 \end{aligned}$$

Resuelva para  $R$ :

$$R = r$$

**Finalizar** Para comprobar este resultado, grafique  $\mathcal{P}$  contra  $R$ , como en la figura 113. La gráfica muestra que  $\mathcal{P}$  alcanza un valor máximo en  $R = r$ . La ecuación 1) muestra que este valor máximo es  $\mathcal{P}_{\text{máx.}} = \mathcal{E}^2 / 4r$ .

### 3.8 Leyes de Kirchhoff.

Muchas redes de resistores prácticas no se pueden reducir a combinaciones sencillas en serie y en paralelo. La figura

114a ilustra una fuente de potencia de cd con fem  $\mathcal{E}_1$  que carga una batería con fem menor  $\mathcal{E}_2$  y que alimenta corriente a una bombilla con resistencia  $R$ . La figura 114b es un circuito “puente”, que se utiliza en muchos tipos diferentes de medición y sistemas de control. No se necesitan principios nuevos para calcular las corrientes en esa clase de redes, pero existen algunas técnicas que ayudan a manejar en forma sistemática los problemas que plantean. A continuación se describen los métodos desarrollados por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

En primer lugar, hay dos términos que usaremos con frecuencia. Una **unión** en un circuito es el punto en que se unen tres o más conductores. Las uniones también reciben el nombre de *nodos* o *puntos de derivación*. Una **espira** es cualquier trayectoria cerrada de conducción. En la figura 114a los puntos  $a$  y  $b$  son uniones, pero los puntos  $c$  y  $d$  no lo son; en la figura 114b, los puntos  $a, b, c$  y  $d$  son uniones, pero los puntos  $e$  y  $f$  no lo son. Las líneas en color azul de las figuras 114a y 114b ilustran algunas espiras posibles en estos circuitos.

Las reglas de Kirchhoff consisten en los dos siguientes enunciados:

**Regla de Kirchhoff de las uniones:** *la suma algebraica de las corrientes en cualquier unión es igual a cero.* Es decir,

$$\sum I = 0 \quad (\text{regla de las uniones, válida en cualquier unión}) \quad (3.25)$$

**Regla de Kirchhoff de las espiras:** *la suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier espira, incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, debe ser igual a cero.* Es decir,

$$\sum V = 0 \quad (\text{regla de las espiras, válida para cualquier espira cerrada}) \quad (3.26)$$

Figura 114 Dos redes que no pueden reducirse a combinaciones simples de resistores en serie o en paralelo.

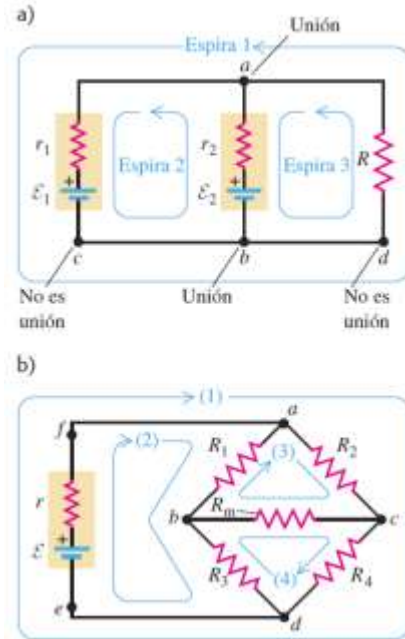
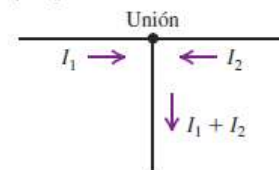


Figura 115 a) La regla de Kirchhoff de las uniones dice que la cantidad de corriente que llega a una unión es igual a la que sale. b) Analogía con una tubería de agua.

a) Regla de Kirchhoff de las uniones



b) Analogía de la tubería de agua para la regla de Kirchhoff de las uniones



La regla de las uniones se basa en la *conservación de la carga eléctrica*. En una unión no se puede acumular carga eléctrica, por lo que la carga total que entra a ella por unidad de tiempo debe ser igual a la carga total que sale por unidad de tiempo (véase la figura 115a). La carga por unidad de tiempo es corriente, por lo que si consideramos como positivas las corrientes que entran a una unión y negativas las que salen, la suma algebraica de las corrientes en la unión debe ser igual a cero. Es como un ramal T en una tubería de agua (figura 115b); si entra 1 litro por minuto en un tubo, no pueden salir 3 litros por minuto de los otros dos tubos. Hemos de confesar que se usó la regla de las uniones (sin decirlo) en la sección 3.5 con la finalidad de obtener la ecuación (3.18) para los resistores en paralelo.

La regla de las espiras es el enunciado de que la fuerza electrostática es *conservativa*. Suponga que recorre una espira y mide las diferencias de potencial entre los extremos de elementos sucesivos del circuito. Al regresar al punto de partida, debería de encontrar que la *suma algebraica* de esas diferencias es igual a cero; de lo contrario, no se podría afirmar que el potencial en ese punto tiene un valor definido.

### Convenciones de signo para la regla de las espiras

Para aplicar la regla de las espiras, se necesitan algunas convenciones de signos. La Estrategia para resolver problemas 26.2 describe en detalle cómo utilizarlas, pero a continuación se da una descripción rápida. Primero suponga un sentido de la corriente en cada ramal del circuito e indíquelo en el diagrama correspondiente. En seguida, a partir de cualquier punto del circuito, realice un recorrido imaginario de la espira sumando las fem y los  $IR$  conforme los encuentre. Cuando se pasa a través de una fuente en la dirección de  $-$  a  $+$ , la fem se considera *positiva*; cuando se va de  $+$  a  $-$ , la fem se considera *negativa* (figura 116a). Cuando se va a través de un resistor en el *mismo* sentido que el que se supuso para la corriente, el término  $IR$  es *negativo* porque la corriente avanza en el sentido del potencial decreciente. Cuando se pasa a través de un resistor en el sentido *opuesto* a la corriente que se supuso, el término  $IR$  es *positivo* porque representa un aumento de potencial (figura 116b).



**Figura 116** Figura 26.8 Uso de las convenciones de signos cuando se aplica la regla de Kirchhoff de las espiras. En cada parte de la figura "Recorrido" es el sentido en que imaginamos ir alrededor de la espira que no necesariamente es el sentido de la corriente

Las dos reglas de Kirchhoff son todo lo que se necesita para resolver una amplia variedad de problemas de redes. Por lo general, algunas de las fem, corrientes y resistencias son conocidas y otras no. Siempre se debe obtener de las reglas de Kirchhoff cierto número de ecuaciones independientes igual al número de incógnitas, de manera que sea posible resolverlas simultáneamente. A menudo, la parte más difícil de la solución suele ser, no la comprensión de los principios básicos, ¡sino seguir la pista de los signos algebraicos!

Estrategia para resolver problemas. **Reglas de Kirchhoff**

**IDENTIFICAR** *los conceptos relevantes*: Las reglas de Kirchhoff son herramientas importantes para analizar cualquier circuito más complicado que una sola espira.

**PLANTEAR** *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un diagrama *grande* del circuito, de manera que haya espacio para escribir leyendas. Identifique todas las cantidades, conocidas y desconocidas, incluidos el sentido supuesto para cada corriente y fem desconocidas. Es frecuente que no se conozca de antemano el sentido real de una corriente o fem, pero esto no importa. Si el sentido real de una cantidad particular es opuesto al que se supuso, el resultado tendrá signo negativo. Si las reglas de Kirchhoff se utilizan correctamente, darán tanto los sentidos como las magnitudes de las corrientes y fem desconocidas.
2. Al escribir las leyendas para las corrientes, por lo general es mejor usar de inmediato la regla de las uniones para expresar las corrientes en términos del menor número posible de cantidades. Por ejemplo, la figura 117a muestra un circuito con las leyendas correctas, y la figura 117b representa el mismo circuito con otras leyendas después de aplicar las reglas de las uniones al punto  $a$  para eliminar  $I_3$ .
3. Determine cuáles cantidades son las variables que se buscan.

**EJECUTAR** *la solución* como sigue:

1. Elija cualquier espira cerrada en la red y designe un sentido (horario o antihorario) para recorrer la espira cuando se aplique la regla de las espiras. El sentido no tiene que ser el mismo que el que se supuso para la corriente.
2. Recorra la espira en el sentido elegido, sumando las diferencias de potencial a medida que se atraviesen. Recuerde que una diferencia de potencial positiva corresponde a un incremento en el potencial, y una negativa indica una disminución en el potencial. Una fem se considera positiva si se atraviesa de  $(-)$  a  $(+)$ , y negativa si se va de  $(+)$  a  $(-)$ . Un término  $IR$  es negativo si se pasa por el resistor en el mismo sentido de la corriente supuesta, y positivo si se atraviesa en sentido opuesto. La figura 116 resume estas convenciones de signo.
3. Iguale a cero la suma del paso 2.
4. Si es necesario elija otra espira para obtener una relación diferente entre las incógnitas, y continúe así hasta que tenga tantas ecuaciones independientes como incógnitas, o hasta que cada elemento de circuito haya quedado incluido en al menos una de las espiras elegidas.
5. Resuelva simultáneamente las ecuaciones para determinar las incógnitas. Este paso implica álgebra, no física, pero a veces es muy complejo. Tenga cuidado con las manipulaciones algebraicas, pues un error de signo resulta fatal para toda la solución.
6. Este mismo sistema de registro se usa para encontrar el potencial  $V_{ab}$  de cualquier punto  $a$  con respecto a cualquier otro punto  $b$ . Comience en  $b$  y sume los cambios de potencial

que encuentre al ir de  $b$  a  $a$ , usando las mismas reglas de los signos del paso 2. La suma algebraica de estos cambios es  $V_{ab} = V_a - V_b$

**EVALUAR la respuesta:** Compruebe todos los pasos algebraicos. Una estrategia útil es considerar una espira distinta de las utilizadas para resolver el problema; si la suma de las caídas de potencial alrededor de la espira no es igual a cero se cometió un error en alguno de los cálculos. Como siempre, pregúntese si las respuestas tienen sentido.

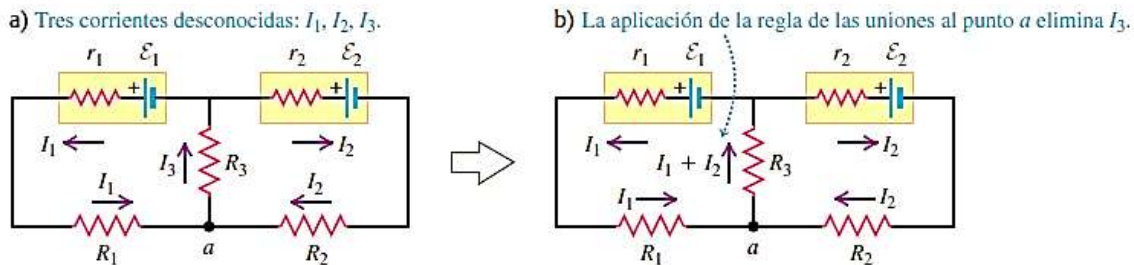


Figura 117 Figura 26.9 Al aplicar la regla de las uniones al punto  $a$ , se reduce el número de corrientes desconocidas, de tres a dos.

### EJEMPLO 1 Uso de las reglas de Kirchhoff

Calcule las corrientes  $I_1, I_2$  e  $I_3$  en los tres segmentos del circuito de la figura 118.

Elija arbitrariamente las direcciones de la corriente

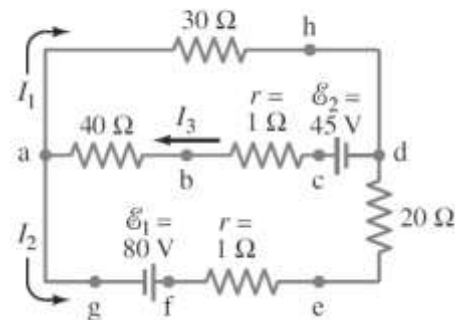


Figura 118 Las corrientes se pueden calcular mediante las reglas de Kirchhoff. Véase el ejemplo 1.

### PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN

- 1. Diseñe las corrientes** e identifique sus direcciones. La figura 118 presenta los rótulos  $I_1, I_2$  e  $I_3$  para la corriente en los tres segmentos separados. Puesto que la corriente (positiva) tiende a alejarse de la terminal positiva de una batería, las direcciones de  $I_2$  e  $I_3$  se eligen como se muestra en la figura 118. La dirección de  $I_1$  no es obvia por anticipado, así que arbitrariamente se elige la dirección indicada. Si la corriente en realidad fluye en el sentido opuesto, la respuesta tendrá un signo negativo.
- 2. Identifique las incógnitas.** Se tienen tres incógnitas y, por consiguiente, se necesitan tres ecuaciones, lo que se obtiene aplicando las reglas de Kirchhoff de los nodos y de las espiras.
- 3. Regla de los nodos.** Aplique la regla de Kirchhoff de los nodos a las corrientes en el punto  $a$ , donde entra  $I_3$  y salen  $I_2$  e  $I_1$ :

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad \text{a)}$$

Esta misma ecuación se cumple en el punto  $d$ , así que no se obtiene nueva información al escribir una ecuación para el punto  $d$

4. **Regla de las espiras.** Aplique la regla de Kirchhoff de las espiras a dos espiras cerradas diferentes. Primero se aplica a la espira superior *ahdcba*. Comience (y termine) en el punto *a*. De *a* a *h* se tiene una disminución de potencial  $V_{ha} = -(I_1)(30 \Omega)$ . De *h* a *d* no hay cambio, pero de *d* a *c* el potencial aumenta en 45 V: esto es,  $V_{cd} = +45 V$ . De *c* a *a* el potencial disminuye a través de las dos resistencias en una cantidad  $V_{ac} = -(I_3)(40\Omega + 1\Omega) = -(41\Omega)I_3$ . Por lo tanto, se tiene  $V_{ha} + V_{cd} + V_{ac} = 0$  o

$$i. \quad -30I_1 + 45 - 41I_3 = 0, \quad (b)$$

donde se omitieron las unidades (volts y amperes), así que las operaciones algebraicas se pueden efectuar con más facilidad. Para la segunda espira, tome la espira exterior *ahdefga*. (En vez de ello, bien podría elegirse la espira inferior *abcdefga*). De nuevo, comenzamos en el punto *a* y obtenemos  $V_{ha} = -(I_1)(30 \Omega)$  y  $V_{dh} = 0$ . Pero cuando la carga de prueba positiva se lleva de *d* a *e*, en realidad se va “colina arriba”, contra la corriente, o al menos contra la dirección *supuesta* de la corriente, que es lo que cuenta en este cálculo. Por lo tanto  $V_{ed} = I_2(20 \Omega)$  tiene un signo *positivo*. De igual modo,  $V_{fe} = I_2(1 \Omega)$ . De *f* a *g* existe una disminución de 80 V en el potencial, pues se va de la terminal de potencial alto de la batería a la de potencial bajo. En consecuencia,  $V_{gf} = -80 V$ . Finalmente,  $V_{ag} = 0$  y la suma de los cambios de potencial alrededor de esta espira es

$$-30I_1 + (20 + 1)I_2 - 80 = 0.$$

el trabajo principal está hecho. El resto es álgebra.

5. **Resuelva las ecuaciones.** Se tienen tres ecuaciones —indicadas como *a*), *b*) y *c*)—y tres incógnitas. A partir de la ecuación *c*) se tiene

$$I_2 = \frac{80+30I_1}{21} = 3.8 + 1.4I_1. \quad d)$$

De la ecuación *b*) se obtiene

$$I_3 = \frac{45-30I_1}{41} = 1.1 - 0.73I_1 \quad e)$$

Al sustituir las ecuaciones *d*) y *e*) en la ecuación *a*):

$$I_1 = I_3 = I_2 = 1.1 - 0.73I_1 - 3.8 - 1.4I_1$$

Despejamos  $I_1$  reuniendo términos:

$$3.1 I_1 = -2.7$$

$$I_1 = -0.87 A.$$

El signo negativo indica que el sentido de  $I_1$  en realidad es opuesto al que se supuso inicialmente y se indica en la figura 118. Advierta que la respuesta automáticamente se presenta en amperes porque todos los valores estuvieron en volts y ohms. A partir de la ecuación (*d*) se tiene



$$I_2 = 3.8 + 1.4I_1 = 3.8 + 1.4(-0.87) = 2.6 \text{ A}$$

Y de la ecuación ( e )

$$I_3 = 1.1 - 0.73I_1 = 1.1 - 0.73(-0.87) = 1.7 \text{ A.}$$

Esto completa la solución.

**NOTA** Las incógnitas en diferentes situaciones no necesariamente son corrientes. Es posible que las corrientes estén dadas y uno tenga que despejar la resistencia o el voltaje desconocidos. En ese caso, las variables son diferentes, pero la técnica es la misma.

### Ejemplo 2 Una red compleja

La figura 119 muestra un circuito “puente” del tipo descrito al principio de esta sección (véase la figura 114b). Calcule la corriente en cada resistor y la resistencia equivalente de la red de cinco resistores.

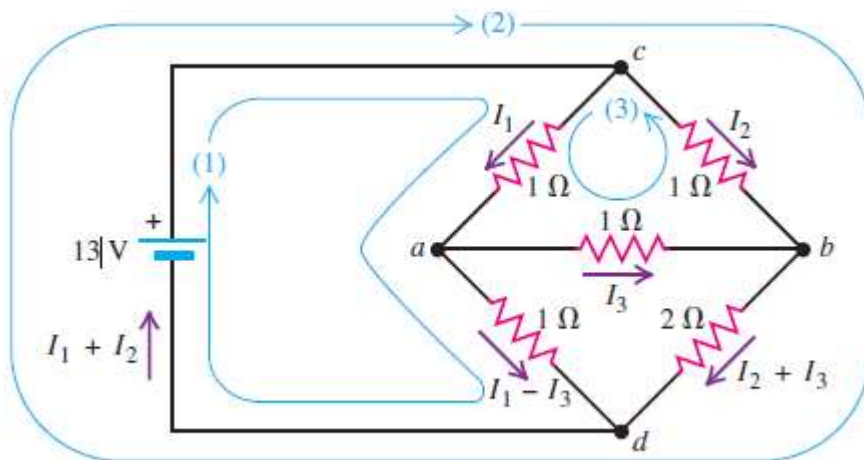


Figura 119 Circuito con varios resistores

### SOLUCION

**IDENTIFICAR:** Esta red no se puede representar en términos de combinaciones en serie y en paralelo. De ahí que se deben utilizar las reglas de Kirchhoff para encontrar los valores de las variables buscadas.

**PLANTEAR:** Hay que calcular cinco diferentes corrientes, pero aplicando la regla de las uniones a los nodos  $a$  y  $b$ , es posible representarlas en términos de tres corrientes desconocidas, como se aprecia en la figura. La corriente en la batería es  $I_1 + I_2$

**EJECUTAR:** Se aplica la regla de las espiras a las tres espiras que se indican, con lo que se obtienen las siguientes tres ecuaciones:

$$13 V - I_1(1\Omega) - (I_1 - I_3)(1\Omega) = 0 \quad (1)$$

$$-I_1(1\Omega) - (I_2 + I_3)(2\Omega) + 13V = 0 \quad (2)$$

$$-I_1(1\Omega) - I_3(1\Omega) + I_2(1\Omega) = 0 \quad (3)$$

Éste es un conjunto de tres ecuaciones simultáneas para las tres corrientes desconocidas. Se pueden resolver con varios métodos; un procedimiento muy directo es despejar  $I_2$  en la tercera ecuación, con lo que se obtiene  $I_2 = I_1 + I_3$ , y luego se sustituye esta expresión en la segunda para eliminar  $I_2$ . Al hacer esto quedan dos ecuaciones:

$$13 V = I_1(2\Omega) - I_3(1\Omega) \quad (1')$$

$$13 V = I_1(3\Omega) + I_3(5\Omega) \quad (2')$$

Ahora se elimina  $I_3$  multiplicando la ecuación (1') por 5 y sumando las dos ecuaciones, para obtener

$$78 V = I_1(13\Omega) \quad I_1 = 6A$$

Este resultado se sustituye en la ecuación (1') para obtener  $I_3 = -1A$ ; finalmente, de la ecuación (3) se obtiene  $I_2 = 5A$ . El valor negativo de  $I_3$  indica que su sentido es opuesto a nuestra suposición inicial.

La corriente total a través de la red es  $I_1 + I_2 = 11 A$  y la caída de potencial a través de ella es igual a la fem de la batería, es decir, 13 V.

La resistencia equivalente de la red es

$$R_{eq} = \frac{13 V}{11 A} = 1.2 \Omega$$

**EVALUAR:** Los resultados de  $I_1 = 6 A$ ,  $I_2 = 5 A$  e  $I_3 = -1 A$  se revisan sustituyendo estos valores en las tres ecuaciones (1), (2) y (3). ¿Qué es lo que observa?

### 3.9 Resistividad y efectos de la Temperatura.

#### **Resistividad ( $\rho$ )**

**Resistividad:** La resistividad  $\rho$  de un material es la razón de las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente. Los buenos conductores tienen poca resistividad; los buenos aislantes tienen alta resistividad. La ley de Ohm, que obedecen en forma aproximada muchos materiales, establece que  $r$  es una constante independiente del valor de  $E$ . La resistividad por lo general se

incrementa con la temperatura; para cambios pequeños de temperatura, esta variación queda representada aproximadamente por la ecuación (3.28), donde  $\alpha$  es el coeficiente de temperatura de la resistividad.

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (3.27)$$

Dónde:

$\rho$  = Resistividad.

E = Campo eléctrico.

J = Densidad de corriente.

### **Efecto de la temperatura sobre la resistividad**

La resistividad de los materiales experimenta una variación con la temperatura que está dada por:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (3.28)$$

Dónde:

$\rho$  = Resistividad a una temperatura T (en °C)

$\rho_0$  = Resistividad a una temperatura de referencia (20°C)

$\alpha$  = Coeficiente térmico  $\left(\frac{1}{^\circ\text{C}}\right)$                        $\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}$

$\Delta\rho$  = Variación de resistividad ( $\Omega m$ )

$\Delta T$  = Variación de temperatura

### **Efecto de la temperatura sobre la resistencia**

Dado que la resistencia es proporcional a la resistividad, la variación de la resistencia por temperatura está determinada por una ecuación semejante con la que se calcula la resistividad.

A través de la experimentación ha sido posible comprobar que la resistencia eléctrica se incrementa en proporción directa con el aumento de temperatura y que su valor disminuye cuando la temperatura baja, por tanto, la variación de resistencia.  $\Delta R$ , es directamente proporcional a la variación de la temperatura  $\Delta T$ , la cual a su vez, esta relacionada por un coeficiente de temperatura  $\alpha$ . Por este motivo, la variación de la resistencia está en función directa de tres variables:

a) La resistencia inicial  $R_0$ , medida a 20 grados Celsius (20°C).

b) La variación de temperatura  $\Delta T$  en °C

c) El coeficiente térmico  $\alpha$  en  $^{\circ}\text{C}^{-1}$

Así, la cuantificación de la variación de resistencia se puede determinar mediante la ecuación 3.29:

$$\Delta R = \alpha R_0 \Delta T \quad (3.29)$$

Es importante aclarar que en este caso la temperatura se expresa en grados Celsius o centígrados ( $^{\circ}\text{C}$ ), así como también que el coeficiente de temperatura tiene un valor característico par cada material y su unidad es el grado centígrado a la menos uno ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ), o bien  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}}$ . En tanto,  $\Delta R$  y  $R_0$  se expresa en ohms, aclarando que  $R_0$  es la resistencia del cuerpo medida a 20 grados centígrados y  $\Delta T$  es igual a la temperatura final menos la temperatura inicial ( $\Delta T = T - T_0$ ).

En esta tabla 10 se indican los coeficientes de temperatura de algunos materiales:

**Tabla 10 Coeficiente de temperatura de algunos materiales.**

<b>Material</b>	<b>Coeficiente térmico <math>\alpha</math> (<math>^{\circ}\text{C}^{-1}</math>)</b>
Plata	0.0038
Cobre	0.00426
Aluminio	0.0039
Platino	0.00392
Hierro	0.006
Constatan	0.000002
Nicromel	0.0004

Por tanto, la resistencia final  $R$ , de un elemento, considerando el efecto de la temperatura, será igual a la suma de variación de la resistencia  $\Delta R$ , que a su vez se obtiene de la suma de la temperatura más la resistencia  $R_0$  y que debe medirse a veinte grados centígrados; esto es:

$$R = R_0 + \alpha R_0 \Delta T$$

Al reducir variables se obtiene la ecuación 3.30, con la cual es posible determinar la resistencia total:

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta T) \quad (3.30)$$

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (3.31)$$

Dónde:

$R$  = Resistencia final en  $\Omega$ .

$R_0$  = Resistencia a veinte grados centígrados en  $\Omega$ .

$\alpha$  = Coeficiente de temperatura en  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

$\Delta T$  = Variación de la temperatura en  $^{\circ}\text{C}$ .

### Problema resuelto 1

La resistencia de un alambre de platino es de  $9 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ . Calcular el valor de la resistencia total cuando la temperatura sube a  $65^\circ\text{C}$  y el coeficiente de temperatura es de  $0.00392^\circ\text{C}^{-1}$

#### Solución

Primero establecemos los datos de referencia:

$$R_0 = 9\Omega \text{ a } 20^\circ\text{C}$$

$$T_0 = 20^\circ\text{C}$$

$$T = 65^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 0.00392^\circ\text{C}^{-1}$$

$$R = R_0 (1 + \alpha\Delta T)$$

Luego, para realizar los cálculos, tenemos la ecuación:

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Por último, sustituimos:

$$R = 9 \Omega [1 + 0.00392^\circ\text{C}^{-1}(65^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})] = 10.5876 \Omega$$

### Problema resuelto 2

Calcular el coeficiente de temperatura de cierto material, si un alambre de ese material tiene una resistencia de  $41 \Omega$  a  $0^\circ\text{C}$  la resistencia se incrementa a  $53.4 \Omega$

#### Solución

Primero establecemos los datos de referencia:

$$R_0 = 41\Omega \text{ a } 20^\circ\text{C}$$

$$T_0 = 20^\circ\text{C}$$

$$T = 70^\circ\text{C}$$

$$R = 53.4 \Omega$$

$$R = R_0 (1 + \alpha\Delta T)$$

Luego, sustituimos en la ecuación correspondiente:

$$\alpha = \frac{\frac{R}{R_0} - 1}{\Delta T} = \frac{\frac{53.4 \Omega}{41 \Omega} - 1}{70^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}} = 0.00604^\circ\text{C}^{-1}$$

### Problema resuelto 3

La resistencia de un alambre de nicromo es de  $6 \Omega$  a  $98^\circ\text{C}$ . Si el coeficiente de temperatura para el nicromel es de  $0.0004^\circ\text{C}^{-1}$ . Calcular:

- a) La resistencia del alambre si este se coloca en un horno cuya temperatura es de  $780^\circ\text{C}$ .
- b) La variación de la resistencia  $\Delta R$

#### Solución

Primero establecemos los datos de referencia:

$$R = 6 \Omega$$

$$T_0 = 98^\circ\text{C}$$

$$T = 780^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 0.0004^\circ\text{C}^{-1}$$

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$$

En este caso, en primera instancia determinamos la resistencia  $R_0$  a veinte grados centígrados, despejándola de la ecuación  $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$ . Así, tenemos:

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha\Delta T} = \frac{6\Omega}{1 + 0.0004^\circ\text{C}^{-1}(98 - 20)^\circ\text{C}} = 5.8184 \Omega$$

A continuación, calculamos la resistencia a  $780^\circ\text{C}$

$$\Delta T = 780^\circ\text{C} - 98^\circ\text{C} = 682^\circ\text{C}$$

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T) = (5.8184 \Omega) [1 + (0.0004^\circ\text{C}^{-1})(682^\circ\text{C})] = 7.4056 \Omega$$

Finalmente, determinamos la variación de resistencia mediante la ecuación:

$$\Delta R = R - R_0$$

Así, cuando sustituimos tenemos:

$$\Delta R = 7.4056 \Omega - 5.8184 \Omega = 1.5872 \Omega$$

**Eficiencia.**

La **eficiencia**, a la que también se le llama **rendimiento**, se utiliza para cuantificar o evaluar la calidad de los aparatos y los equipos eléctricos, electromecánicos. Para el caso particular del estudio de la electrodinámica, que se trata en esta unidad, pero en especial en el caso de la electricidad, es posible ejemplificar el concepto de la eficiencia de un



Figura 120, ilustración de la medición de la corriente y el voltaje de la energía eléctrica.

motor eléctrico o de un transformador, lo que significa que no toda la energía eléctrica que entro al aparato salió transformada en energía mecánica o eléctrica, sino que un aparato de esta se pierde en calor, entonces, se dice que ni el motor ni el transformador trabajan con el 100 % de eficiencia.



Figura 121 Representación esquemática de la eficiencia.

El concepto de la eficiencia se define en función de las variables de entrada y de salida. Es decir, se considera tanto la energía que entra, la que se pierde y la que sale del aparato; por consiguiente, la eficiencia  $n$ , **es la razón de dividir la energía de salida entre la energía de entrada en un sistema**; no obstante, también se puede tomar cualquier otra variable como el voltaje, la corriente, etcétera.

$$n = \frac{P_s}{P_e} \times 100$$

La eficiencia es un valor constante que no tiene unidades, por tanto únicamente se puede expresar en porcentaje. Sin embargo, cuando se realizan cálculos, la eficiencia debe expresarse en decimales; esto es, si el aparato tiene una eficiencia de 80 % , entonces  $n = 80 \%$  o bien  $n = 0.8$ .



#### Problema resuelto 4

El transformador de una máquina de soldar tiene 75 % de eficiencia y esta conectado a una fuente eléctrica de 120 V. Si al operar entrega a su salida 7 200 W de potencia a 20 V, calcular:

- La corriente que consume.
- La potencia de entrada.
- La cantidad de calor por pérdida de energía durante 5 minutos.

#### Solución

Cuando conocemos la potencia de salida y la eficiencia, podemos determinar con facilidad la potencia de entrada. Entonces:

$$P_e = \frac{P_s}{n} = \frac{7\,200\text{ W}}{0.75} = 9\,600\text{ W}$$

Asimismo, también podemos determinar la corriente de salida si utilizamos la fórmula de potencia eléctrica:

$$I_s = \frac{P_s}{V_s} = \frac{7\,200\text{ W}}{20\text{ V}} = 360\text{ A}$$

Una vez que conocemos la potencia de entrada, podemos determinar la corriente de entrada:

$$I_e = \frac{P_e}{V_e} = \frac{9\,600\text{ W}}{120\text{ V}} = 80\text{ A}$$

En este caso, la potencia perdida está determinada por  $P_p = P_e - P_s$ .

Por tanto:

$$P_p = 9\,600\text{ W} - 7\,200\text{ W} = 2\,400\text{ W}$$

Ahora, podemos calcular la cantidad de energía transformada en calor, si convertimos los minutos a segundo:

$$Q = (0.239)(2\,400\text{ W})(300\text{ s}) = 172\,080\text{ Cal.}$$

#### Problema resuelto 5

Se tiene encendido durante 8 horas un reflector de 1 000 watts, el cual está conectado a una línea de 120 Determinar la corriente que consume y el costo de energía consumida si la compañía de luz cobra 75 centavos el Kilowatt-hora.

### Solución

En este caso, primero determinamos la corriente de consumo mediante la fórmula de potencia:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1000 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 8.3333 \text{ A}$$

Ahora, calculamos la energía total de consumo:

$$E = P_t = (1\,000 \text{ W})(8 \text{ h}) = 8000 \text{ W} \cdot \text{h} = 8 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

Luego, podemos calcular el costo simplemente por un producto:

Costo = (8 kW/h)(\\$0.75) = \\$6.00, es decir, el costo por mantener el reflector es de \\$6.00.

## 3.10 Circuito R-C en Serie.

En los circuitos que hemos analizado hasta este momento hemos supuesto que todas las fem y resistencias son *constantes* (independientes del tiempo), por lo que los potenciales, las corrientes y las potencias también son independientes del tiempo. Pero en el simple acto de cargar o descargar un

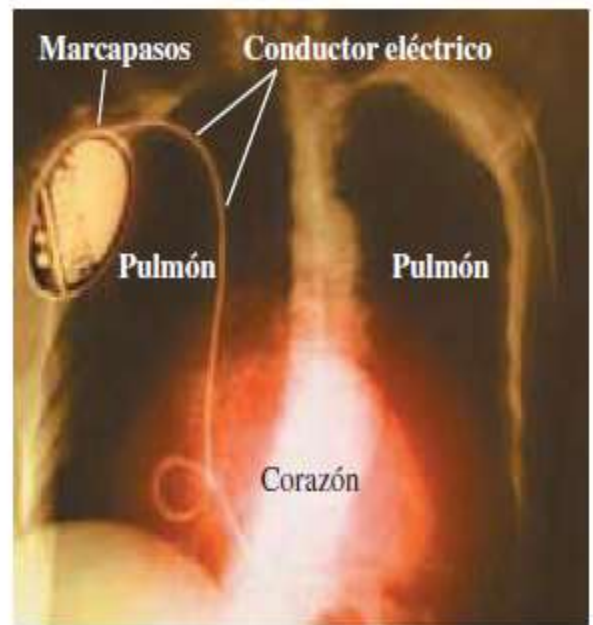
capacitor se encuentra una situación en la que las corrientes, los voltajes y las potencias *sí* cambian con el tiempo.

Muchos dispositivos importantes incorporan circuitos en los que un capacitor se carga y descarga alternativamente. Éstos incluyen marcapasos cardiacos (figura 122), semáforos intermitentes, luces de emergencia de los automóviles y unidades de flash electrónico. Comprender lo que pasa en esa clase de circuitos tiene gran importancia práctica.

### Carga de un capacitor

La figura 123 muestra un circuito simple para cargar un capacitor. Un circuito como éste, que tiene un resistor y un capacitor conectados en serie, se llama **circuito R-C**. Se ha idealizado la batería (o fuente de energía

*Figura 122, Esta imagen a colores X muestra un marcapasos implantado quirúrgicamente en un paciente con problema en el nodo sinoatrial, la parte del corazón que genera la señal eléctrica para generar los latidos. Para compensarlo el marcapasos (localizado cerca de la clavícula) envía pulsos eléctricos a lo largo del conductor para mantener los latidos a intervalos regulares.*



eléctrica) para que tenga una fem  $\varepsilon$  constante y una resistencia eléctrica igual a cero ( $r = 0$ ), y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión.

Se comienza con el capacitor descargado (figura 123a); después, en cierto momento inicial,  $t = 0$ , se cierra el interruptor, lo que completa el circuito y permite que la corriente alrededor de la espira comience a cargar el capacitor (figura 123b). Para todos

**Figura 123, Carga de un capacitor** a) Antes de que se cierre el circuito, la carga  $q$  es igual a cero. b) Cuando el interruptor se cierra (en  $t=0$ ), la corriente pasa de cero a  $\varepsilon/R$  a medida que transcurre el tiempo,  $q$  se acerca a  $Q_f$  y la corriente  $i$  se acerca a cero.

los efectos prácticos, la corriente comienza en el mismo instante en todas las partes conductoras del circuito, y en todo momento la corriente es la misma en todas ellas.

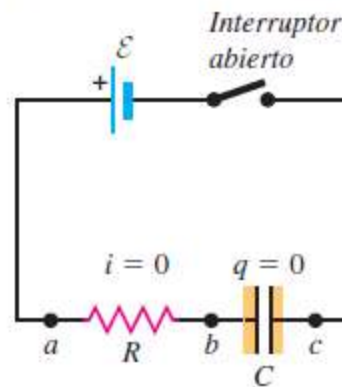
**CUIDADO** Las letras minúsculas significan que hay variación con el tiempo. Hasta este momento hemos trabajado con diferencias de potencial (voltajes), corrientes y cargas constantes, y hemos utilizado letras mayúsculas  $V$ ,  $I$  y  $Q$ , respectivamente, para denotar esas cantidades. Para diferenciar entre cantidades que varían con el tiempo y aquellas que son constantes, usaremos letras minúsculas,  $v$ ,  $i$  y  $q$  para voltajes, corrientes y cargas, respectivamente, que varían con el tiempo. Se sugiere al lector que en su trabajo siga esta convención. ■

Como el capacitor de la figura 123 al principio está descargado, la diferencia de potencial  $v_{bc}$  a través suyo es igual a cero en  $t=0$ . En ese momento, según la regla de Kirchhoff de las espiras, el voltaje  $v_{ab}$  a través del resistor  $R$  es igual a la fem de la batería  $\varepsilon$ . La corriente inicial ( $t = 0$ ) a través del resistor, que llamaremos  $I_0$ , está dada por la ley de Ohm:  $I_0 = v_{ab} / R = \varepsilon/R$ .

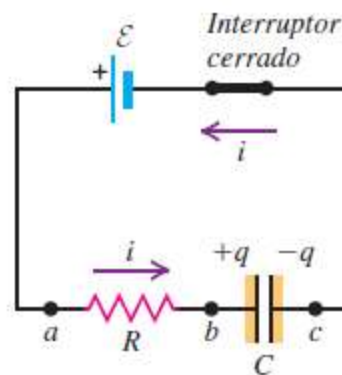
A medida que el capacitor se carga, su voltaje  $v_{bc}$  aumenta y la diferencia de potencial  $v_{bc}$  a través del resistor disminuye, lo que corresponde a una baja de la corriente.

La suma de estos dos voltajes es constante e igual a  $\varepsilon$ . Después de un periodo largo, el capacitor está cargado por completo, la corriente baja a cero y la diferencia de potencial  $v_{ab}$  a través del

a) Capacitor descargado al inicio



b) Carga del capacitor



Quando el interruptor se cierra, a medida que transcurre el tiempo, la carga en el capacitor se incrementa y la corriente disminuye.

resistor se vuelve cero. En ese momento aparece la totalidad de la fem  $\varepsilon$  de la batería a través del capacitor y  $v_{bc} = \varepsilon$ .

Sea  $q$  la carga en el capacitor e  $i$  la corriente en el circuito al cabo de cierto tiempo  $t$  después de haberse cerrado el interruptor. Asignamos el sentido positivo a la corriente en correspondencia al flujo de carga positiva hacia la placa izquierda del capacitor, como se aprecia en la figura 123b. Las diferencias de potencial instantáneas  $v_{ab}$  y  $v_{bc}$  son

$$v_{ab} = iR \qquad v_{bc} = \frac{q}{C}$$

Con la regla de Kirchoff de las espiras, se obtiene

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \tag{3.32}$$

El potencial cae en una cantidad  $iR$  conforme se va de  $a$  a  $b$ , y en  $q/C$  al pasar de  $b$  a  $c$ . Al despejar  $i$  en la ecuación (3.32), se encuentra que:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} \tag{3.33}$$

En el momento  $t = 0$ , cuando el interruptor se encuentra cerrado, el capacitor está descargado

Y  $q = 0$ . Al sustituir  $q = 0$  en la ecuación (3.33), se encuentra que la corriente *inicial*  $I_0$  está dada por  $I_0 = \varepsilon/R$ , como ya se había dicho. Si el capacitor no estuviera en el circuito, el último término de la ecuación (3.33) no estaría presente, por lo que la corriente sería *constante* e igual a  $\varepsilon/R$ .

Conforme la carga se incrementa, el término  $q/RC$  se hace más grande y la carga del capacitor tiende a su valor final, al que llamaremos  $Q_f$ . La corriente disminuye y finalmente se vuelve cero. Cuando  $i = 0$ , la ecuación (3.33) da

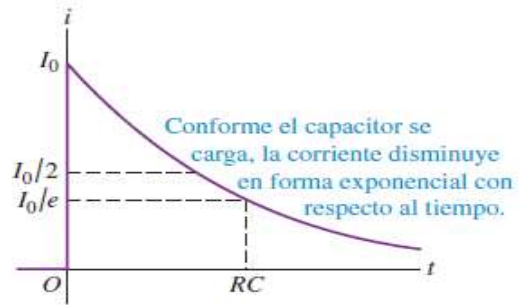
$$\frac{\varepsilon}{R} = \frac{Q_f}{RC} \qquad Q_f = C\varepsilon \tag{3.34}$$

Observe que la carga final  $Q_f$  no depende de  $R$ .

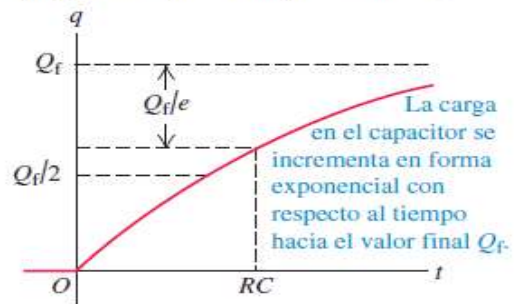
En la figura 124, la corriente y la carga del capacitor se ilustran como funciones del tiempo. En el instante en que el interruptor se cierra ( $t = 0$ ), la corriente pasa de cero a su valor inicial  $I_0 = \varepsilon/R$ ; después de eso, tiende gradualmente a cero. La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final dado por la ecuación (3.34),  $Q_f = C\varepsilon$

**Figura 124, Corriente  $i$  y carga del capacitor  $q$  como funciones del tiempo para el circuito de la figura 123. Al principio, la corriente inicial es  $I_0$  y la carga del capacitor vale cero. La corriente tiende a cero en forma asintótica, y la carga del capacitor se aproxima en forma asintótica a su valor final  $Q_f$**

**a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga**



**b) Gráfica de la carga de un capacitor contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga**



Es posible obtener expresiones generales para la carga  $q$  y la corriente  $i$  como funciones del tiempo. Con la elección del sentido positivo para la corriente (figura 123b),  $\dot{i}$  es igual a la tasa a la que la carga positiva llega a la placa izquierda (positiva) del capacitor, por lo que  $i = dq/dt$ . Al sustituir esta expresión en la ecuación (3.33), se tiene

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\varepsilon)$$

Al reordenar, se obtiene:

$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{dt}{RC}$$

y luego se integran ambos lados. Podemos cambiar las variables de integración a  $q'$  y  $t'$  con la finalidad de utilizar  $q$  y  $t$  para los límites superiores. Los límites inferiores son  $q' = 0$  y  $t' = 0$ :

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\varepsilon} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

Se efectúa la integración y se obtiene:

$$\ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Se aplica la función exponencial (es decir, se toma el logaritmo inverso) y se despeja  $q$ , para obtener:

$$\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} = e^{-t/RC}$$

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \quad (\text{Circuito R-C, con capacitor en carga}) \quad (3.35)$$

La corriente instantánea  $i$  tan sólo es la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.35):

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \quad (\text{Circuito R-C, capacitor en carga}) \quad (3.36)$$

La carga y la corriente son ambas funciones *exponenciales* del tiempo. La figura 124a es la gráfica de la ecuación (3.36), y la figura 124b es la gráfica de la ecuación (3.35).

### Constante de tiempo

Una vez que el tiempo es igual a  $RC$ , la corriente en el circuito  $R$ - $C$  ha disminuido a  $1/e$  (alrededor de 0.368) de su valor inicial. En ese momento la carga del capacitor ha alcanzado el  $(1 - 1/e) = 0.632$  de su valor final  $Q_f = C\varepsilon$ . Por lo tanto, el producto  $RC$  es una medida de la rapidez con que se carga el capacitor. El término  $RC$  recibe el nombre de **constante de tiempo**, o **tiempo de relajación**, del circuito, y se denota por  $\mathcal{T}$ .

$T = RC$  (Constante de tiempo para un circuito  $R$ - $C$ )

(3.37)

Cuando  $T$  es pequeña, el capacitor se carga con rapidez; cuando es grande, el proceso de carga toma más tiempo. Si la resistencia es pequeña, es fácil que fluya la corriente y el capacitor se carga rápido. Si  $R$  está en ohms y  $C$  en farads,  $T$  está en segundos.

En la figura 124a, el eje horizontal es una *asíntota* de la curva. En sentido estricto,  $i$  nunca llegará exactamente a cero. Pero cuanto más tiempo transcurra, más se acercará a ese valor. Después de que pasa un tiempo igual a  $10RC$ , la corriente ha bajado a 0.000045 de su valor inicial. De manera similar, la curva de la figura 124b se acerca a la asíntota, la recta horizontal punteada  $Q_f$ . La carga  $q$  nunca toma ese valor exacto, pero después de un tiempo igual a  $10RC$ , la diferencia entre  $q$  y  $Q_f$  sólo es de 0.000045 veces el valor de  $Q$ . Se invita al lector a comprobar que el producto  $RC$  está expresado en unidades de tiempo.

### Descarga de un capacitor

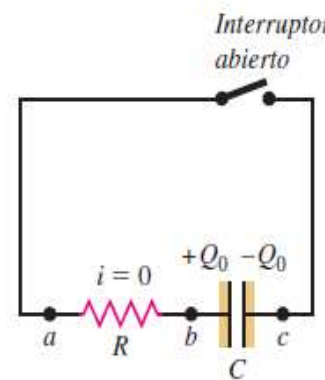
Ahora suponga que después de que el capacitor de la figura 123b ha adquirido una carga  $Q_0$ , se retira la batería del circuito  $R$ - $C$  y se conectan los puntos  $a$  y  $c$  a un interruptor abierto (figura 125a). Después se cierra el interruptor y en el mismo instante se reajusta el cronómetro a  $t = 0$ ; en ese momento,  $q = Q_0$ . Luego, el capacitor se *descarga* a través del resistor y su carga disminuye finalmente a cero.

Otra vez,  $i$  y  $q$  representan la corriente y la carga como función del tiempo en cierto instante después de que se hizo la conexión. En la figura 125b se hace la misma elección del sentido positivo para la corriente que en la figura 123b. Entonces, la regla de Kirchhoff de las espiras da la ecuación (3.33) pero con  $\varepsilon = 0$ ; es decir,

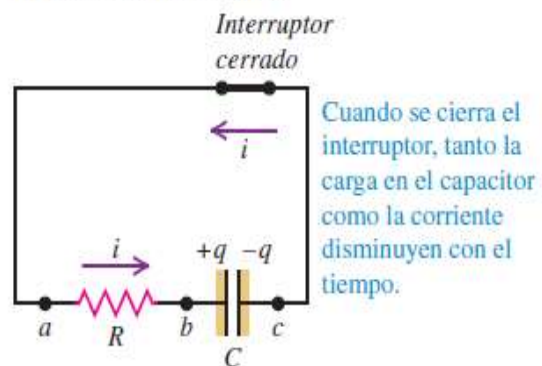
$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad (3.38)$$

Figura 125, Descarga de un capacitor a) Antes de que el interruptor esté cerrado en el momento  $t=0$ , la carga del capacitor es  $Q_0$  y la corriente es igual a cero b) En el momento  $t$ , una vez que el interruptor se ha cerrado, la carga del capacitor es  $q$  y la corriente es  $i$ . El sentido real de la corriente opuesto al sentido que se ilustra;  $i$  es negativa. Después de un tiempo prolongado, tanto  $q$  como  $i$  tienden a cero.

a) Capacitor inicialmente cargado



b) Descarga del capacitor





La corriente  $i$  ahora es negativa; esto se debe a que la carga positiva  $q$  está saliendo de la placa izquierda del capacitor de la figura 125b, por lo que la corriente va en sentido opuesto al que se ilustra en la figura. En el momento  $t = 0$ , cuando  $q = Q_0$ , la corriente inicial es  $I_0 = -Q_0/RC$ .

Para encontrar  $q$  como función del tiempo se reordena la ecuación (3.38), de nuevo se cambian los nombres de las variables a  $q'$  y  $t'$ , y se procede a integrar. Esta vez los límites para  $q'$  son de  $Q_0$  a  $q$ . Se obtiene

$$\int_{Q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt'$$

$$\ln \frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (\text{Circuito R-C, capacitor en descarga}) \quad (3.39)$$

La corriente instantánea  $i$  es la derivada de ésta con respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-t/RC} \quad (\text{Circuito R-C, capacitor en descarga}) \quad (3.40)$$

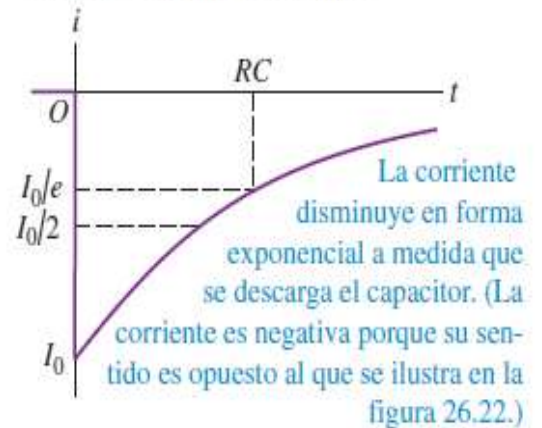
En la figura 126 están graficadas la corriente y la carga; ambas cantidades tienden a cero en forma exponencial con respecto al tiempo. Al comparar los resultados con las ecuaciones (3.35) y (3.36), se observa que las expresiones para la corriente son idénticas, aparte del signo de  $I_0$ . En la ecuación (3.39), la carga del capacitor tiende a cero de manera asintótica, en tanto que en la ecuación (3.35) es la *diferencia* entre  $q$  y  $Q$  la que tiende a cero en forma asintótica.

Hay consideraciones sobre la energía que amplían nuestra comprensión del comportamiento de un circuito R-C. Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es  $P = \varepsilon i$ . La tasa instantánea a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es  $i^2 R$  y la tasa a que la energía se almacena en el capacitor es  $iv_{bc} = iq/C$ . Al multiplicar la ecuación (3.32) por  $i$  se obtiene:

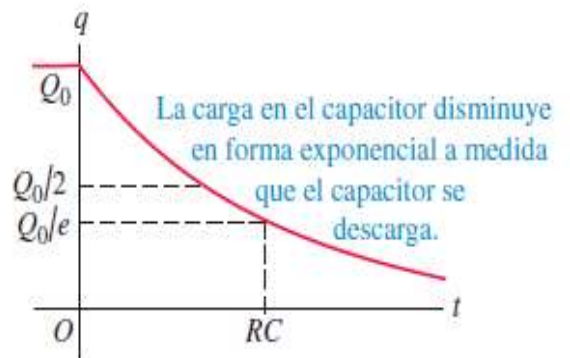
$$\varepsilon i = i^2 R + \frac{iq}{C} \quad (3.41)$$

Figura 126 La corriente  $i$  y la carga  $q$  del capacitor como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.23. La corriente inicial es  $I_0$  y la carga inicial del capacitor es  $Q_0$ . Tanto  $i$  como  $q$  tienden a cero de manera asintótica.

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



b) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para un capacitor en descarga





Esto significa que de la potencia  $\varepsilon i$  suministrada por la batería, una parte ( $i^2 R$ ) se disipa en el resistor y otra parte ( $iq/C$ ) se almacena en el capacitor.

La energía *total* suministrada por la batería durante la carga del capacitor es igual a la fem de la batería  $\varepsilon$  multiplicada por el total de la carga  $Q_f$ , o  $\varepsilon Q_f$ . La energía total almacenada en el capacitor, según la ecuación (2.14), es  $\varepsilon Q_f/2$ . Así, *exactamente la mitad* de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor. Es un poco sorprendente que esta división por la mitad de la energía no dependa de  $C$ ,  $R$  o  $\varepsilon$ . Este resultado también se puede verificar en detalle tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia en la ecuación (3.41). Se deja ese cálculo para entretenimiento del lector (véase el problema 26.87 **reto 2**).

**Ejemplo 1** Carga de un capacitor

Un resistor con resistencia  $10\text{ M}\Omega$  está conectado en serie con un capacitor cuya capacitancia es  $1.0\ \mu\text{F}$  y una batería con fem de  $12.0\text{ V}$ . Antes de cerrar el interruptor en el momento  $t = 0$ , el capacitor se descarga. *a)* ¿Cuál es la constante de tiempo? *b)* ¿Qué fracción de la carga final hay en las placas en el momento  $t = 46\text{ s}$ ? *c)* ¿Qué fracción de la corriente inicial permanece en  $t = 46\text{ s}$ ?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Ésta es la misma situación que se ilustra en la figura 123, con  $R = 10\text{ M}\Omega$ ,  $C = 1.0\ \mu\text{F}$  y  $\varepsilon = 12.0\text{ V}$ . La carga y la corriente varían con el tiempo, según se ilustra en la figura 124. Las variables que se buscan son *a)* la constante de tiempo, *b)* la carga  $q$  en  $t = 46\text{ s}$  dividida entre la carga final  $Q_f$  y *c)* la corriente  $i$  en  $t = 46\text{ s}$  dividida entre la corriente inicial  $I_0$ .

**PLANTEAR:** La carga para un capacitor que se está cargando está dada por la ecuación (26.12), y la corriente por la ecuación (3.35). La ecuación (3.37) da la constante de tiempo.

**EJECUTAR:** *a)* De acuerdo con la ecuación (3.37), la constante de tiempo es

$$\tau = RC = (10 \times 10^6 \Omega)(1.0 \times 10^6 F) = 10\text{ s}$$

*b)* A partir de la ecuación (3.35),

$$\frac{q}{Q_f} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - e^{-(46\text{ s})(10\text{ s})} = 0.99$$

El capacitor está cargado al 99% después de un tiempo igual a  $4.6 RC$ , o  $4.6$  constantes de tiempo.

*c)* De acuerdo con la ecuación (3.36),

$$\frac{i}{I_0} = e^{-4.6} = 0.010$$

Después de  $4.6$  constantes de tiempo, la corriente ha disminuido al 1.0% de su valor inicial.

**EVALUAR:** La constante de tiempo es relativamente grande porque la resistencia es muy grande. El circuito cargará con más rapidez si se utiliza una resistencia más pequeña

**Ejemplo 2** Descarga de un capacitor

El resistor y el capacitor descritos en el ejemplo 1 se reconectan como se ilustra en la figura 125. Originalmente, se da al capacitor una carga de  $5.0 \mu\text{F}$  y luego se descarga al cerrar el interruptor en  $t = 0$ . a) ¿En qué momento la carga será igual a  $0.50 \mu\text{C}$ ? b) ¿Cuál es la corriente en ese momento?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Ahora el capacitor se descarga, por lo que la carga  $q$  y corriente  $i$  varían con el tiempo como se ilustra en la figura 126. Las variables que se buscan son a) el valor de  $t$  en el que  $q = 0.50 \mu\text{C}$  y b) el valor de  $i$  en ese momento.

**PLANTEAR:** La carga está dada por la ecuación (3.39), y la corriente por la ecuación (3.40).

**EJECUTAR:** a) Al despejar el momento  $t$  en la ecuación (26.16), se obtiene:

$$t = -RC \ln \frac{q}{Q_0} = -(10 \times 10^6 \Omega)(1.0 \times 10^{-6} \text{F}) \ln \frac{0.50 \mu\text{C}}{5.0 \mu\text{C}} = 23 \text{ s}$$

Esto es 2.3 veces la constante de tiempo  $\tau = RC = 10\text{s}$ .

b) De la ecuación (3.40), con  $Q_0 = 5.0 \mu\text{C} = 5.0 \times 10^{-6} \text{C}$ ,

$$i = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = -\frac{5.0 \times 10^{-6} \text{C}}{10 \text{ s}} e^{-2.3} = -5.0 \times 10^{-8} \text{A}$$

Cuando el capacitor se está descargando, la corriente tiene el signo opuesto del que tiene cuando el capacitor se está cargando.

**EVALUAR:** Hubiéramos podido evitar el trabajo de calcular  $e^{-t/RC}$  advirtiendo que, en el tiempo en cuestión,  $q = 0.10 Q_0$ ; según la ecuación (26.16) esto significa que  $e^{-t/RC} = 0.10$ .

**Problema resuelto**

Considérese el interruptor del circuito que se ilustra en la figura 127, el cual inicialmente está abierto; sin embargo, después se cierra repentinamente. Determinar:

- a) La constante de tiempo antes de cerrar el interruptor.
- b) La constante de tiempo después de cerrarlo.
- c) La corriente de descarga 3 segundos después de cerrar el interruptor.

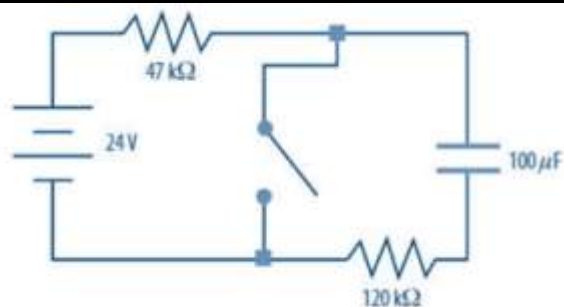


Figura 127. Circuito RC.

**Solución**

a) Antes de que se cierre el interruptor, debemos sumar todas las resistencias:

$$R = 47 \times 10^3 \Omega + 120 \times 10^3 \Omega = 167 \times 10^3 \Omega$$

Por tanto, la constante de tiempo es:

$$\tau = RC = (167 \times 10^3 \Omega)(100 \times 10^{-6} F) = 16.7 \text{ s}$$

b) Al cerrar el interruptor, solo debemos considerar la resistencia de 120 kΩ. Así

$$\tau = (120 \times 10^3 \Omega)(100 \times 10^{-6} F) = 12 \text{ s}$$

c) Para determinar la corriente de descarga en 3 segundos.

Dado que el voltaje al que se cargó el capacitor es igual al voltaje de la batería, es decir 24 volts, tenemos:

$$I_0 = \frac{V}{R} = \frac{24 \text{ V}}{120 \times 10^3 \Omega} = 2 \times 10^{-4} \text{ A}$$

Ahora, se determina la corriente de descarga 3 s después de cerrar el interruptor:

$$I(t) = -I_0 e^{\frac{-t}{RC}} = -2 \times 10^{-4} e^{\frac{-3 \text{ s}}{(120 \times 10^3 \Omega)(100 \times 10^{-6} F)}} = 1.55 \times 10^{-4} \text{ A}$$

**Evalúe su comprensión de la sección** La energía almacenada en un capacitor es igual a  $q^2/2C$ . Cuando se descarga un capacitor, ¿qué fracción de la energía inicial permanece después de transcurrido un tiempo igual a una constante de tiempo? i)  $1/e$ ; ii)  $1/e^2$ ; iii)  $1 - 1/e$ ; iv)  $(1 - 1/e)^2$ ; v) la respuesta depende de cuánta energía haya almacenada inicialmente.

**PROBLEMA RETO 1.**

Una casa habitación de interés social tiene instalados 7 focos incandescentes de 75 watts cada uno, los cuales operan en promedio 4 horas diarias durante dos meses. Así mismo, en la casa hay un refrigerador 750 watts que opera 25 minutos por hora diario, durante todo el bimestre, una plancha de 1 kW que opera cuatro horas por semana, 1 motobomba de 1 hp que opera 10 minutos diarios, aparatos de video y sonido que en conjunto consumen una potencia de 100 watts y operan 31 horas diarias. Determina el costo a pagarle a la CFE si este cobra 4.5 pesos por kilowatt-Hora.

**PROBLEMA RETO 2.**

En un capacitor en proceso de carga la corriente está dada por la ecuación (3.36). a) La potencia instantánea suministrada por la batería es  $\mathcal{E}i$ . Intégrela para calcular la energía total suministrada por la batería. b) La potencia instantánea disipada en el resistor es  $I^2R$ . Intégrela para obtener la energía total disipada en el resistor. c) Encuentre la energía final almacenada en el capacitor y demuestre que es igual a la energía total suministrada por la batería menos la energía disipada en el resistor, como se obtuvo en los incisos a) y b). d) ¿Qué fracción de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor? ¿Cómo depende de  $R$  esta fracción?

### Problemas para resolver.

**3.1** La corriente que circula por un conductor disminuye conforme se descarga un capacitor y está dada por la ecuación  $I = I_0 e^{-t/\tau}$ , donde  $I_0$  es la corriente inicial (en  $t = 0$ ) y  $\tau$  es la constante de tiempo del capacitor. Determina la magnitud de la carga que pasa por el conductor:

- Entre  $t = 0$  s y  $t = 10$  s.
- Entre  $t = 0$  s y  $t = \infty$  s.

**3.2** Determina la corriente promedio que genera la rotación de una esfera con una carga de 12 nC, si la frecuencia angular de rotación es 300 rad/s.

**3.3** Se tiene un alambre de cobre de 6 mm de diámetro de sección transversal y la intensidad de corriente es de 60 A. Si el cobre tiene  $8.5 \times 10^{28}$  e/m<sup>3</sup>, calcula la velocidad de arrastre en el conductor si se sabe que no existe diferencia de potencial en sus extremos y  $q_e = 1.6 \times 10^{19}$  C.

**3.4** Un alambre de cobre calibre 14 con una sección transversal de 2.081 mm<sup>2</sup> se usa para una instalación eléctrica residencial. Si en promedio se consume una corriente de 13.5 A, calcula la velocidad de arrastre sabiendo que el número de valencia del cobre es 1, la densidad de masa es de 8.95 g/cm<sup>3</sup> y la masa atómica es de 63.5 g/mol.

**3.5** Después de una medición, resulta que la carga eléctrica promedio a través de un conductor de 6 mm de diámetro es de 28 C durante 8 s. Si el fabricante especifica que las mediciones de laboratorio indican que la velocidad de arrastre de ese material es de 0.136 m/s, determina el número de electrones por metro cúbico del material.

**3.6** Cuando en las terminales de un conductor se presenta una diferencia de potencial o voltaje, por lo general se provoca una circulación de corriente de 35 A. Calcula el tiempo requerido en el que pasan 160 C.

**3.7** Se tiene un conductor eléctrico que alimenta la marcha de un automóvil, el cual consume 40 A durante 15 s que dura el proceso de arranque. Determina:

- La carga eléctrica.
- El número de electrones que pasan por el conductor.

**3.8** Se tiene un conductor eléctrico calibre 14, cuyo diámetro es de 2.69 mm, el cual puede soportar una intensidad de corriente eléctrica máxima de 35 A durante 10 s. El manual del fabricante indica que la velocidad de arrastre del material es de  $3.098 \times 10^5$  m/s, y el número de electrones por metro cúbico es de  $9.65 \times 10^{27}$ . Determina:

- La carga eléctrica que pasa por el conductor.
- La intensidad de corriente.

**3.9** Determina la densidad de corriente de un conductor calibre 12, cuyo diámetro de sección transversal es de 3.01 mm, si soporta que pase a través de este una carga de 200 C en 5 s.

**3.10** La carga que pasa por una superficie de 25 mm<sup>2</sup> de área varía en función del tiempo de acuerdo con  $q = 4t^3 + 3t^2 + 6$ , donde  $t$  está expresado en segundos. Determina:

- La corriente que pasa a través de la superficie en  $t = 3$  s.
- La densidad de corriente.

**3.11** Las características eléctricas de un conductor de cierto material indican que la velocidad de arrastre de los electrones es de  $1.2 \times 10^{-3}$  m/s y que el número de electrones por metro cúbico de ese material es de  $9.76 \times 10^{24}$ . Determina la densidad de corriente que soporta el conductor.

**3.12** Determina la resistencia de un hilo de plata de 5 m de longitud y 2.5 mm de diámetro, si la resistividad de la plata es de  $1.05 \times 10^{-8}$  Ωm.

**3.13** Una línea de transmisión de energía eléctrica de cobre tiene una sección transversal de 53.48 mm<sup>2</sup>. Si la distancia desde el punto de generación hasta el punto de consumo es de 545 km, ¿qué resistencia presenta el conductor  $\rho_{Cu} = 1.7 \times 10^{-8}$  Ωm?

**3.14** Un alambre de nicromo de 10 m de longitud presenta una resistencia de 0.642 Ω. Determina el radio de la sección transversal del alambre si su resistividad es de  $1.5 \times 10^{-6}$  Ωm.

**3.15** Se tiene un alambre de calibre doble cero de una línea de transmisión de 430 km de longitud y 67.44 mm<sup>2</sup> de sección transversal, el cual presenta una resistencia eléctrica de 108.4 Ω.

- Calcula la resistividad del material.
- Identifica de qué material se trata.

**3.16** Con 10 g de cobre se desea fabricar un alambre uniforme cilíndrico (la densidad del cobre es de 8.95 g/cm<sup>3</sup> y su resistividad es de  $1.7 \times 10^{-8}$  Ωm) que tenga una resistencia de 1.5 Ω. Determina:

- La longitud del alambre.
- El diámetro del alambre.

**3.17** Con 20 g de cobre se debe fabricar un alambre uniforme de sección circular (la densidad del cobre es de 8.95 g/cm<sup>3</sup> y su resistividad es de  $1.7 \times 10^{-8}$  Ωm) que tenga una resistencia eléctrica de  $R = 0.5$  Ω. Determina:

- La longitud del alambre.
- El diámetro del alambre.

**3.18** Se mantiene una diferencia de potencial de 5 V a través de un alambre de tungsteno de 1.5 m de longitud que tiene un área de sección trasversal de 0.62 mm<sup>2</sup>. Determina la corriente que circula por el alambre.

**3.19** Se tiene un conductor cilíndrico calibre 8 de 8.37 mm<sup>2</sup> de sección transversal y 1.6 m de longitud, cuya resistividad es de  $2.82 \times 10^{-8}$  Ωm, conectado a una batería de 9 V durante 5 segundos. Determina:

- La carga eléctrica que circula por el conductor.
- El número de electrones.



Problemas para resolver.

**3.20** La resistencia de un conductor de plata es de  $2.4 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ . Calcula el valor de la resistencia total cuando la temperatura sube a  $90^\circ\text{C}$ , si el coeficiente de temperatura es de  $0.0038^\circ\text{C}^{-1}$ .

**3.21** Calcula el coeficiente de temperatura de cierto material, si un alambre de dicho material tiene una resistencia de  $16.45 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$  y que, por efectos de la corriente que circula, aumenta su temperatura a  $75^\circ\text{C}$  e incrementa su resistencia a  $25.34 \Omega$ .

**3.22** La temperatura de un alambre de tungsteno se incrementa mientras un alambre de aluminio se mantiene a temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$ . Determina la temperatura a la cual la resistividad del alambre de tungsteno será el triple de la del cobre (la resistividad del aluminio es de  $2.82 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$  y la del tungsteno es de  $5.6 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ , mientras que el coeficiente térmico del tungsteno es de  $4.5 \times 10^{-3}^\circ\text{C}^{-1}$ ).

**3.23** Una lámpara incandescente con filamento de tungsteno tiene una resistencia de  $27 \Omega$  a temperatura ambiente de  $20^\circ\text{C}$ , cuando está encendida su resistencia se incrementa hasta  $135 \Omega$ . Calcula la temperatura del filamento sabiendo que el coeficiente de temperatura del tungsteno es de  $\alpha = 4.5 \times 10^{-3}^\circ\text{C}^{-1}$ .

**3.24** La resistencia de un alambre de nicromo es de  $6 \Omega$  a  $20^\circ\text{C}$ . Si el coeficiente de temperatura para el nicromo es de  $0.0004^\circ\text{C}^{-1}$ , determina:

- a) La resistencia del alambre si este se usa como sensor de temperatura a la salida de la turbina, donde la temperatura es de  $480^\circ\text{C}$ .
- b) Si la variación es lineal, ¿cuál es el rango de valores de la corriente cuando la fuente es de  $26 \text{ V RMS}$ ?

**3.25** Determina la potencia y el voltaje o diferencia de potencial aplicado en las terminales de una resistencia eléctrica de  $330 \Omega$ , si por esta pasa una carga de  $60 \text{ C}$  durante  $20 \text{ s}$ .

**3.26** Una lámpara incandescente de  $60 \text{ W}$  se conecta a un voltaje de  $127 \text{ V}$ . Calcula:

- a) La resistencia del filamento.
- b) La intensidad de corriente.

**3.27** Un horno eléctrico que tiene una potencia de  $1000 \text{ W}$  se conecta a un voltaje de  $127 \text{ V}$ . Calcula:

- a) La corriente que consume.
- b) La resistencia calefactora.

**3.28** En una lámpara ahorradora de energía se disipan  $26 \text{ W}$  de potencia, si se conecta a una línea de  $127 \text{ V RMS}$ . Determina:

- a) La corriente.
- b) La carga eléctrica en  $\text{C}$  que pasa por la resistencia durante  $24$  horas.

**3.29** Una resistencia eléctrica que se usa para calentar agua libera  $75 \text{ cal}$  por segundo al conectarse a una batería de automóvil de  $12 \text{ V}$ . Calcula el valor de la resistencia.

**3.30** Un automóvil híbrido tiene un motor eléctrico que opera con un banco de baterías de  $12 \text{ V}$ , cuyo almacenamiento de energía es de  $6.48 \times 10^6 \text{ J}$ . Considérese que el motor eléctrico consume  $7.5 \text{ kW}$  y que el auto se mueve a una velocidad de  $65 \text{ km/h}$ . Determina:

- a) La corriente consumida por el motor.
- b) La distancia que recorre hasta que se descarga la batería.

**3.31** Un automóvil híbrido con un motor eléctrico de  $10 \text{ hp}$  se alimenta con dos baterías de  $55$  amperes-hora y  $12 \text{ V}$  cada una. Considérese que las baterías están en su carga máxima y que el auto usa el motor eléctrico para mantener una velocidad constante de  $60 \text{ km/h}$ . Calcula:

- a) La corriente que consume el motor.
- b) La distancia que recorre el auto hasta agotarse la energía de las baterías.

**3.32** Calcula la cantidad de calor que se disipa en la resistencia eléctrica de una plancha cuyo valor es de  $13.6 \Omega$  y está conectada a una línea eléctrica de  $127 \text{ V}$  durante  $1$  hora. También determina la potencia y el costo si la compañía de luz cobra a  $80$  centavos el kilowatt-hora.

**3.33** Una línea de transmisión de calibre doble cero, cuyo diámetro es  $9.26592 \text{ mm}$  y su resistencia es de  $0.255512 \Omega/\text{km}$ , transporta  $190 \text{ A}$  durante  $300 \text{ km}$ . Calcula:

- a) La energía que se pierde en la línea si al centro de consumo llegan  $100 \text{ MW}$ .
- b) El voltaje en la línea.

**3.34** El transformador de una máquina de soldar tiene una eficiencia de  $95\%$  y está conectado a una línea de corriente eléctrica de  $127 \text{ V}$ . Al operar, este transformador entrega a su salida  $4200 \text{ W}$  de potencia a  $20 \text{ V}$ . Calcula:

- a) La corriente que consume.
- b) La potencia de entrada.
- c) La cantidad de calor por pérdida de energía durante  $5$  minutos.

**3.35** Durante  $8 \text{ h}$  se tiene encendida una lámpara incandescente de  $100 \text{ watts}$ , la cual está conectada a una línea de  $127 \text{ V RMS}$ . Determina la corriente que consume y el costo de la energía consumida si la compañía de luz cobra a  $95$  centavos el kilowatt-hora.

**3.36** En una batería de un auto con una  $fem$  de  $13.5 \text{ V}$ , el voltaje entre las terminales a-b de la batería es de  $123 \text{ V}$  cuando está entregando  $50 \text{ W}$  de potencia a un resistor de carga externo  $R$ . Determina: a) el valor de  $R$  y b) la resistencia interna de la batería (véase figura 3.40).

Problemas para resolver.

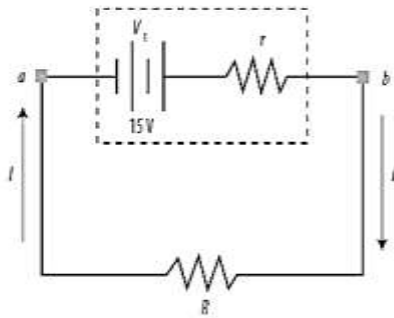


Figura 3.40

3.37 Una batería de automóvil tiene una fem de 12.6 V y una resistencia interna de 0.09  $\Omega$ . Si en el arranque del automóvil el motor de marcha consume 35 A, calcula:

- La resistencia de la marcha.
- El voltaje de la marcha.
- La energía interna transformada en calor dentro de la batería.

3.38 Un calefactor eléctrico está especificado para 1500 W, una parrilla eléctrica para 1000 W y un tostador para 750 W. Los tres aparatos se conectan a un circuito común de 120 V. Determina la corriente que consume cada aparato.

3.39 Del circuito de resistores conectados en serie que se muestra en la figura 3.41, calcula:

- La resistencia equivalente.
- La corriente que circula por el circuito.
- El voltaje en el resistor  $R_2$ .

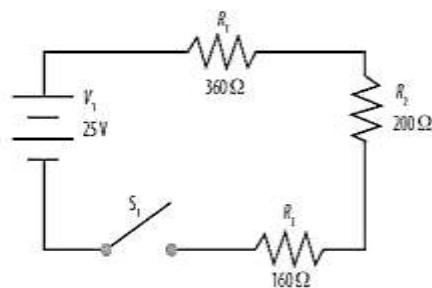


Figura 3.41

3.40 Del circuito de resistores conectados en paralelo que se muestra en la figura 3.42, calcula:

- La resistencia equivalente.
- La potencia entregada por la fuente.
- La corriente en el resistor  $R_3$ .

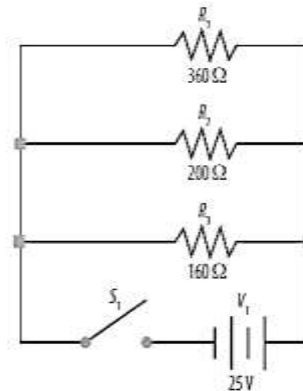


Figura 3.42

3.41 Al conectar en serie dos resistores dan una resistencia equivalente de 300  $\Omega$  y al conectarse en paralelo dan una resistencia equivalente de 66.66  $\Omega$ . Determina el valor de cada resistencia.

3.42 Determina la resistencia equivalente, la corriente que suministra la fuente, el voltaje y las corrientes de cada resistencia del siguiente circuito, si este es alimentado con una batería de 120 V.

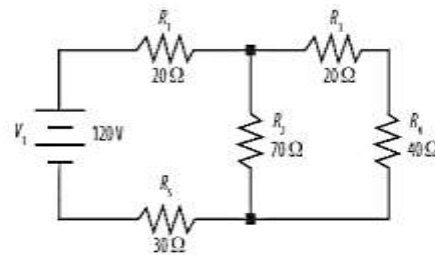


Figura 3.43

**ALERTA:** Comenzar a reducir desde el extremo opuesto a la fuente agrupando los resistores que están en serie y en paralelo según corresponda hasta tener la resistencia equivalente.

3.43 Del circuito de resistores conectados en serie y en paralelo de la figura 3.44, determina:

- La resistencia equivalente.
- La corriente en  $R_4$ .
- El voltaje en  $R_5$ .

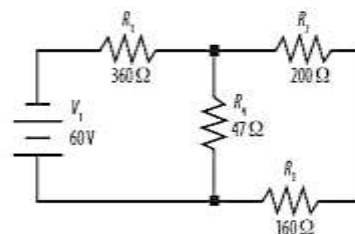


Figura 3.44

Problemas para resolver.

3.44 Del circuito de resistores conectados en serie y en paralelo de la figura 3.45, determina:

- La resistencia equivalente.
- La corriente en  $R_4$ .
- El voltaje en  $R_1$ .

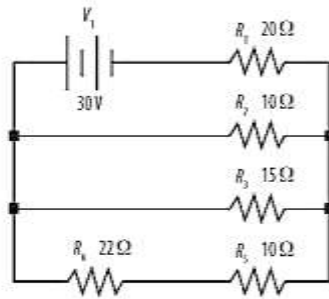


Figura 3.45

3.45 Determina las corrientes que circulan en cada una de las ramas del siguiente circuito.

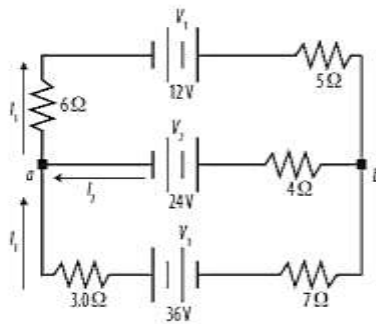


Figura 3.46

3.46 Aplicando las leyes de Kirchhoff, determina las corrientes que pasan a través de cada trayectoria del siguiente circuito.

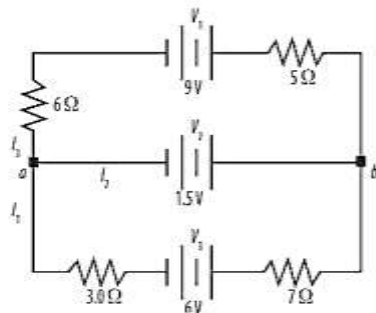


Figura 3.47

3.47 Determina las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  en el circuito mostrado en la figura 3.48.

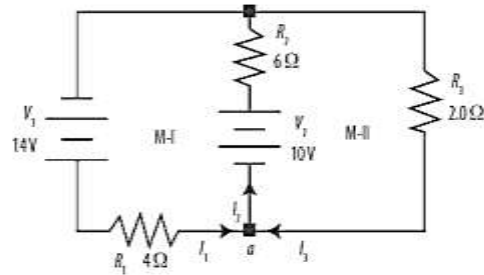


Figura 3.48

3.48 Del circuito de la figura 3.49, determina:

- La corriente que pasa por  $R_1$ .
- La corriente que pasa por  $R_2$ .
- La corriente que pasa por  $R_3$ .

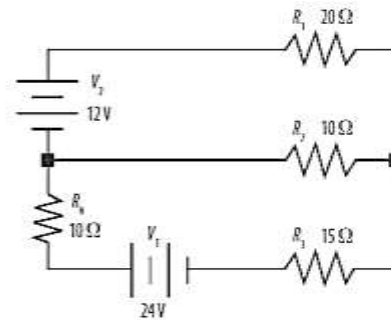


Figura 3.49

3.49 Del circuito de la figura 3.50, determina:

- La corriente que pasa por  $R_1$ .
- La corriente que pasa por  $R_2$ .
- La corriente que pasa por  $R_3$ .

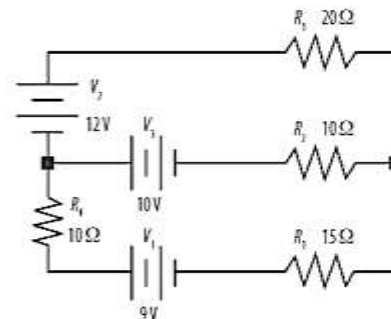


Figura 3.50



Problemas para resolver.

3.50 Del circuito de la figura 3.51, determina:

- a)  $I_1$ .
- b)  $I_2$ .
- c)  $I_3$ .

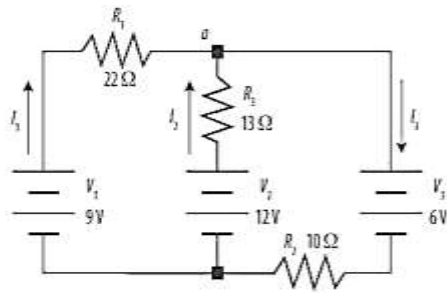


Figura 3.51

3.51 Se tiene un circuito resistencia capacitor RC conectado en serie; la resistencia es  $R = 1.8 \text{ M}\Omega$ ,  $C = 9.1 \text{ }\mu\text{F}$  y  $V = 25 \text{ V}$ . Determina:

- a) La constante de tiempo del circuito.
- b) La carga máxima en el capacitor después de que se cierra el interruptor.
- c) La corriente en el resistor 5 segundos después de iniciado el proceso.

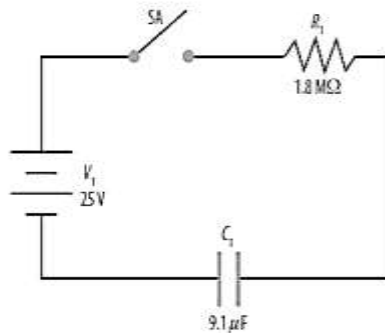


Figura 3.52

3.52 El interruptor del siguiente circuito inicialmente está abierto, pero después se cierra de manera repentina. Determina:

- a) La constante de tiempo antes de cerrar el interruptor.
- b) La constante de tiempo después de cerrarlo.
- c) La corriente máxima en el proceso de carga del capacitor.
- d) La corriente que pasa por el interruptor en 3 segundos después de cerrar el interruptor.

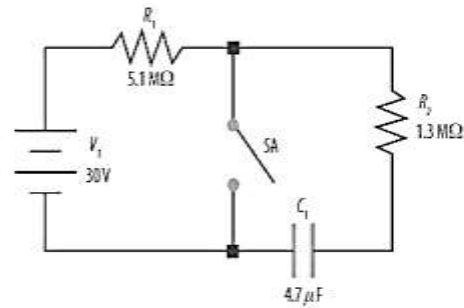


Figura 3.53

**ALERTA:** Al cerrarse el interruptor la corriente que circula por el interruptor es la suma de las corrientes de la fuente más la del capacitor.

3.53 Se tiene un circuito RC conectado a una batería de 50 V, la resistencia es de  $5.1 \text{ M}\Omega$ , la energía máxima del capacitor es de 3.96 J cuando está totalmente cargado. Calcula:

- a) La carga acumulada en la placa.
- b) La corriente cuando el tiempo es de 3.2 segundos en proceso de carga.

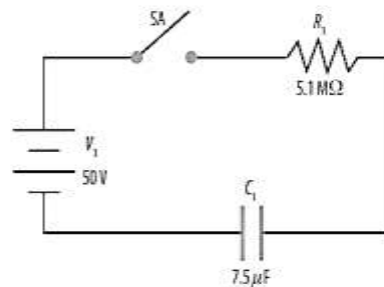


Figura 3.54

3.54 En un circuito RC conectado a una fuente de voltaje de 24 V mediante una resistencia de  $15 \text{ k}\Omega$ , el tiempo en que queda totalmente cargado es de 2 s. Calcula:

- a) La magnitud del capacitor.
- b) La carga después de 1 s.

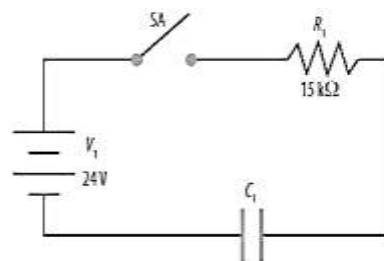


Figura 3.55

**Problemas para resolver.**

3.55 En el circuito de la figura 3.56, determina:

- El voltaje aplicado en el capacitor cuando el interruptor está cerrado.
- El tiempo que tarda el capacitor en descargarse hasta la décima parte de su voltaje inicial, cuando se abre el interruptor.

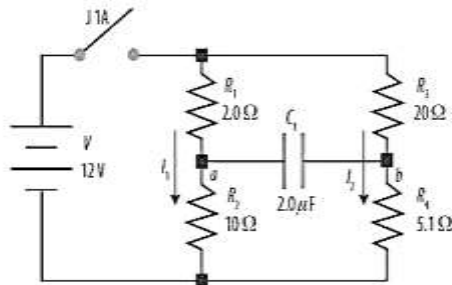


Figura 3.56

**ALERTA:** Un capacitor totalmente cargado se comporta como un circuito abierto.

3.56 A un alambre de tungsteno de 1.5 m de longitud y un área de sección transversal de  $0.6 \text{ mm}^2$  se le aplica una diferencia de potencial de 9 V. Determina la corriente en el alambre.

3.57 Considera el circuito mostrado en la figura 3.57. Determina:

- La resistencia equivalente.
- La corriente en el resistor de  $R_5 = 20 \Omega$ .

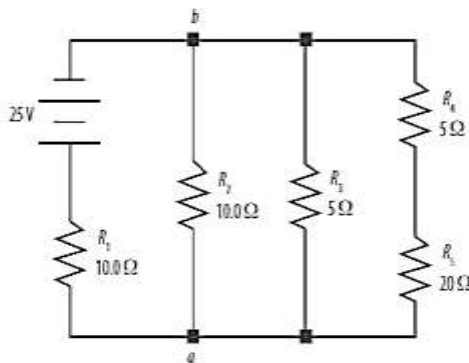


Figura 3.57

3.58 Al pasar corriente a un automóvil con su batería baja se conecta en paralelo la batería descargada a la batería del automóvil en marcha. Determina:

- La potencia entregada por la batería en buen estado.
- La energía consumida por la marcha si se tardó 15 s en arrancar el auto.

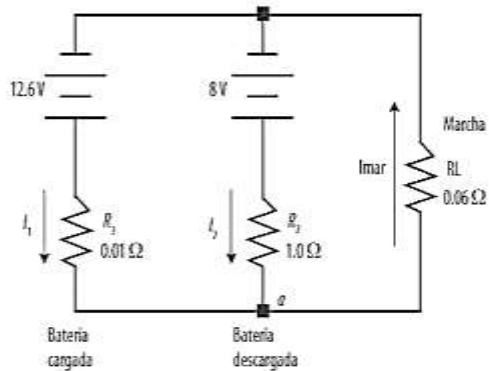


Figura 3.58

3.59 Un calefactor de alambre de nicromo se conecta a una fuente de 115 V. El calefactor está a una temperatura de  $20^\circ \text{C}$  y la corriente es de 1.6 A; sin embargo, esta disminuye a medida que el calefactor se calienta. Cuando el calefactor alcanza una temperatura máxima a la que funciona, la corriente ha disminuido a 1.3 A. Determina:

- La potencia que el calefactor consume cuando se encuentra a su temperatura de funcionamiento.
- La temperatura máxima del elemento calefactor.

3.60 Al conectar un resistor de  $750 \Omega$  en paralelo con un circuito de resistencia desconocida, la corriente a través de la resistencia desconocida se duplica. Determina la magnitud de la resistencia desconocida en ausencia del resistor de  $750 \Omega$ .

## PRÁCTICA 5

### Resistencia y Resistividad

#### OBJETIVOS

- Conocer y utilizar el concepto de corriente eléctrica.
- Definir la cantidad llamada resistencia eléctrica, medirla e investigar los factores que modifican su valor.
- Conocer la ley de Ohm.
- Definir y calcular la resistividad de materiales o medios diversos.
- Calcular la potencia eléctrica de un elemento conductor y experimentar con sus efectos.

#### INTRODUCCIÓN

##### CORRIENTE ELÉCTRICA Y LEY DE OHM

La corriente eléctrica se define como el movimiento de cargas con respecto al tiempo. De forma matemática se puede expresar como

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{d}{dt} q(t) \quad \left[ \frac{C}{s} = A \right]$$

y las unidades de esta corriente se definen como Amperes o Coulomb por segundo. La corriente representa la rapidez con la cual fluye la cantidad de carga positiva,  $\Delta q$ , a través de un área transversal al movimiento, el sentido de éste se representa con una flecha que por convención tiene dirección de positivo a negativo.

El instrumento que nos permite medir la corriente se llama amperímetro, está polarizado para indicarnos el sentido corriente (o del movimiento de los huecos con carga positiva contrario al movimiento de los electrones libres en el material) y se conecta en serie.



Si la lectura de un amperímetro es positiva entonces el sentido de la corriente

(convencional) es el indicado en la figura superior.

### POTENCIA

Recordemos que el trabajo necesario para desplazar una cantidad de carga  $\Delta q$  de un punto A, hasta un punto B, en una región donde existe un campo eléctrico, se calcula con el modelo siguiente:

$$W_{AB} = \Delta q V_{AB}$$

Sea  $\Delta t$  el tiempo requerido para realizar el movimiento de las cargas

$$W_{AB} = \frac{\Delta q}{\Delta t} V_{AB} \Delta t$$

$$\frac{W_{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} V_{AB}$$

Si  $\Delta t$  es muy pequeño o bien, si tomamos el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, la división de trabajo entre tiempo se convierte en potencia y la carga entre tiempo se convierte en corriente:

$$P(t) = i(t)v(t) \quad \left[ AV = \frac{J}{s} = W \right]$$

Las unidades de esta potencia se definen como Watts, volts por amperes o joule porsegundo.

### MATERIAL

- 3 metros de alambre de nicromel de calibre 34 ó 32 AWG (código de identificación comercial).
- Cables banana - caimán.
- Fuente de voltaje
- Multímetro con puntas
- 2 soportes universales
- Tableros de alambre de nicromel.
- Caja con arena
- Electrodo superficiales
- Varias
- Regla

### DESARROLLO

1. Conecte el alambre de nicromel (de un metro de longitud

aproximadamente y calibre 36 AWG) con la fuente de voltaje continuo ( $V_{cc}$ ) como se ilustra en la figura 1. Por medio del multímetro (amperímetro) mida la corriente del conductor.

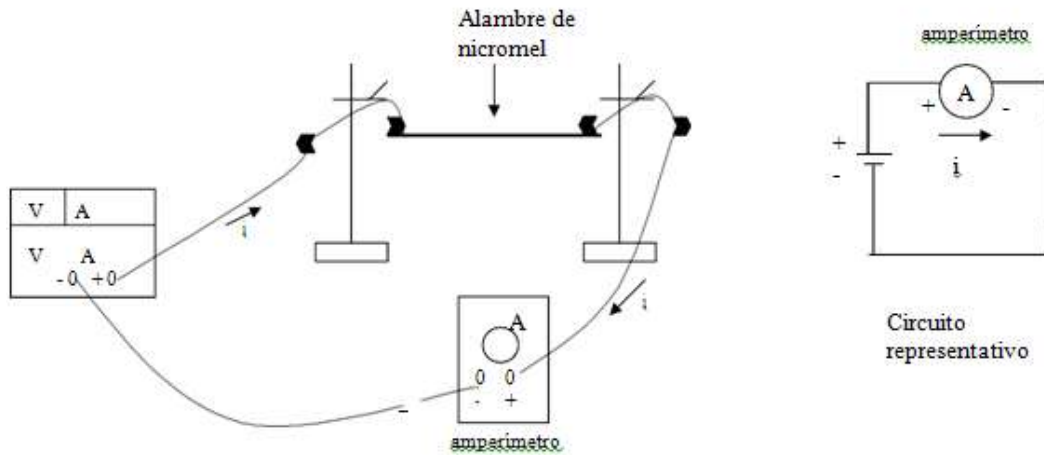


Figura 1

**PREGUNTA 1**

Mida el valor correspondiente de la corriente. Registre sus resultados, gráfíquelos con la corriente como abscisas y el voltaje como ordenadas, observe y comente.

La pendiente  $m$  de la recta obtenida se denomina resistencia del elemento:

$$V_{AB} = m i(t) \quad (\text{ley de Ohm}) \quad m = R = \text{resistencia}; \quad [V/A] = [Ohm] = [\Omega]$$

**PREGUNTA 2**

Anote el valor de la pendiente de la recta, es decir, de la resistencia del elemento. Utilizando el óhmetro (multímetro) y los tableros de alambres de nicromel, mida el área transversal, la longitud de los alambres y determine la relación de proporcionalidad entre la resistencia de un elemento y su longitud, así como la de la resistencia con respecto a su área transversal. Anote los resultados en las tablas siguientes.

Investigar la relación AWG contra área transversal.

Calibre AWG	A [mm <sup>2</sup> ]	R[Ω]
10		
12		
18		
22		
36		
38		

Longitud [cm]	R[Ω]

**PREGUNTA 3**

Dibuje las gráficas de resistencia contra longitud y resistencia contra área transversal.

¿Qué relación de proporcionalidad existe?

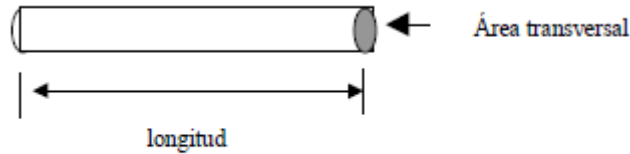


Figura 2

Además de la longitud y área transversal existe un tercer parámetro inherente al material que se llama *resistividad*. Realice las mediciones necesarias para que pueda calcular la resistividad de la muestra de arena de la caja. Asegúrese de que los electrodos toquen perfectamente la arena.

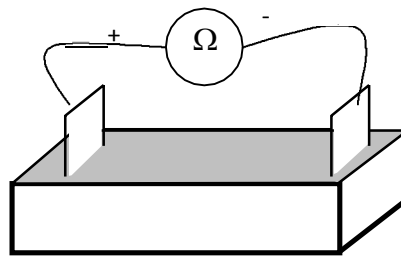


Figura 3

Anote sus resultados en la tabla siguiente: Solicite los resultados obtenidos por otros equipos.

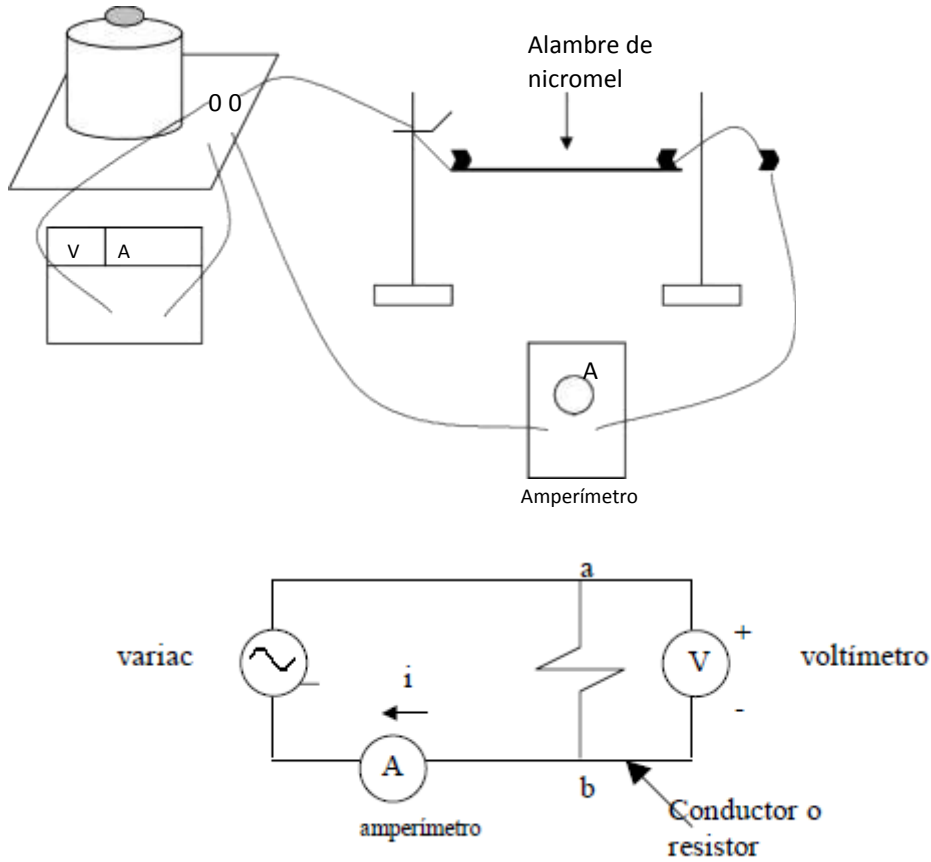
Tipo de material	Resistividad

**PREGUNTA 4**

¿Qué concluye de los resultados de la tabla?

El último experimento consiste en hacer circular una corriente alterna a través de un conductor delgado. Observe los efectos que ocurren en un conductor a medida que la potencia se incrementa, para ello conecte los elementos como se muestra en la figura siguiente.

Nota: Desconecte el variac, ajuste la perilla para que la diferencia de potencial sea nula, realice las conexiones, después enciéndalo.



Aplique diversos valores de diferencia de potencial y anote sus lecturas en la tablasiguiente. Deduzca las unidades de la resistividad.

$V_{AB}$ [V]	$i$ [A]	$R$ [ $\Omega$ ]	Potencia [watts]	Resistividad [ $\zeta$ ?]
0				
5				
10				
15				
20				
...				

**PREGUNTA 5**

¿En qué tipo de energía se transforma la energía potencial cinética de los electrones libres que fluyen dentro de un conductor? ¿Es este proceso reversible?



**PREGUNTA 6**

¿Qué puede concluir con respecto a la resistencia del nicromel (material conductor) cuando su temperatura se incrementa?

**PREGUNTA 7**

¿Qué conclusiones puede obtener con respecto a la potencia de un elemento eléctrico?

**PREGUNTA 8**

¿Se puede decir que la resistividad de un material es constante?

***BIBLIOGRAFÍA***

ROBERT L. BOYLESTAD, *Análisis Introductorio de Circuitos*, Trillas.

J.D. WILLSON, *Física con Aplicaciones*, McGraw-Hill.

STANLEY WOLF, *Guía para Mediciones y Prácticas de Laboratorio*, Prentice Hall.

## PRÁCTICA 6

### USO DEL MULTIMETRO DIGITAL

---

**OBJETIVOS:** Que el estudiante aprenda a medir resistencia, utilizando un multímetro digital de propósito general.

#### INTRODUCCIÓN



El medidor electrónico indica la cantidad que se está midiendo en una pantalla numérica. Los hay que operan en forma **manual**, esto es, seleccionando manualmente el rango adecuado para cada medición a realizar y los hay de **auto rango** en el cual no es necesario seleccionar el rango en cada medición ya que lo hace en forma automática. Los hay que miden voltaje de C.D. voltaje de C.A., corriente de C.D. y C.A., resistencia, capacitancia, inductancia, HFE de transistores, voltaje de diodo, frecuencia, etc. El límite superior de estos instrumentos digitales puede ser de 10KHz. Y hasta 1 MHz. Dependiendo del diseño del instrumento. Muchos de estos multímetros son portátiles (de baterías) o de mesa; con diseño muy robusto para permitir soportar los rigores de los medidores de campo. Los más modernos cuentan con interfaces de comunicación para adquisición de datos aplicables a PC'S.

#### MATERIAL Y EQUIPO

- 1 Multímetro Digital marca FLUKE
- 1 Tablilla de experimentos PROTO BOARD
- 1 Fotoresistencia de 200 $\Omega$
- 1 juego de cables telefónicos
- 1 Juego de caimanes
- 1 Par de terminales para alimentación de energía

**Antes de realizar la práctica es necesario conocer cómo se utiliza el instrumento.** Los multímetros de valor eficaz (RMS) real **Modelo 175** (en adelante "el medidor") son alimentados por baterías y tienen pantalla de 6000 recuentos, 3 3/4 cifras y un gráfico de barras. Estos medidores cumplen las normas CAT III y CAT IV IEC 61010. La norma de seguridad IEC 61010 define cuatro categorías de sobretensión (CAT I a IV) con base en la magnitud del riesgo originado en impulsos transitorios. Los medidores de CAT III están diseñados para proteger contra impulsos transitorios existentes en instalaciones de equipo fijo a nivel de distribución; los medidores de CAT IV lo están para proteger a nivel de suministro primario (conductores aéreos o subterráneos de la red pública).


## APUNTES Y MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA MATERIA DE MEDICIONES ELÉCTRICAS Y ELECTROMAGNETISMO.

⚠ Léase antes de utilizar el medidor:			
Para evitar posibles choques eléctricos o lesiones personales, siga las siguientes indicaciones:			
<ul style="list-style-type: none"> <li>» Utilice el medidor solamente de acuerdo con las especificaciones dadas en este manual, de no hacerlo así la protección provista por el instrumento podría verse afectada.</li> <li>» No utilice el medidor o los conductores de prueba si parecen estar dañados, o si el medidor no está funcionando correctamente. En caso de duda, solicite servicio técnico de mantenimiento para el medidor.</li> <li>» Utilice siempre los terminales, la posición del selector y el rango correctos para las mediciones.</li> <li>» Verifique el funcionamiento del medidor midiendo una tensión conocida.</li> <li>» No aplique una tensión superior a la tensión nominal, especificada en el medidor, entre los terminales o entre cualquier terminal y tierra.</li> <li>» Tenga cuidado al trabajar con tensiones superiores a 30 V CA valor eficaz (rms), 42 V CA cresta o 60 V CC. Estas tensiones presentan riesgos de choque eléctrico.</li> <li>» Reemplace la batería tan pronto como aparezca el indicador de la batería descargada (  ) para evitar lecturas falsas que podrían traer como consecuencia choques eléctricos y lesiones.</li> <li>» Desconecte el suministro eléctrico al circuito y descargue todos los condensadores de alta tensión antes de efectuar pruebas de resistencia, continuidad, diodos o capacitancia.</li> <li>» No utilice el medidor cerca de gases o vapores explosivos.</li> <li>» Al utilizar los conductores de prueba, mantenga los dedos detrás de las protecciones dactilares.</li> <li>» Retire los conductores de prueba del medidor antes de abrir la caja del medidor o la cubierta de la batería.</li> </ul>			
Símbolos			
~	CA (corriente alterna)	⇔	Fusible
=	CC (corriente continua)	CE	Cumple las normas de la Unión Europea
m ~	CC/CA	CSA	Canadian Standards Association (Asociación canadiense de normas)
+	Conexión a tierra	II	Aislamiento doble
⚠	Información importante: consulte el manual	UL	Underwriters Laboratories, Inc. Medidor de acuerdo a IEC 61010-1:54CJ
🔋	Batería (Batería descargada cuando aparece en la pantalla)	N10140	Cumple las normas australianas pertinentes
	Inspeccionado y acreditado por TÜV (Technischer Überwachungs Verein) Product Services.	VDE	VDE (Verband Deutscher Elektroniker)

El medidor mide o prueba las siguientes características:

- » Tensión y corriente CA / CC
- » Resistencia
- » Tensión y frecuencia
- » Diodos
- » Continuidad
- Capacitancia

### **Declaraciones de "advertencia" y "precaución"**

Una “  **Advertencia** ” identifica condiciones y acciones peligrosas que podrían causar lesiones o incluso el fallecimiento.

### **Tensión peligrosa**

Para alertarle sobre la presencia de una tensión potencialmente peligrosa, el medidor muestra el símbolo *h* al detectar una tensión > 30 V o una sobrecarga de tensión (OL).

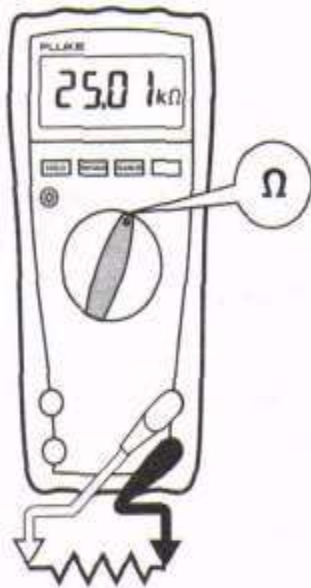
### **Mediciones básicas**

Las figuras en las siguientes páginas muestran cómo realizar las mediciones básicas. Al conectar los conductores de prueba al circuito o dispositivo, conecte el conductor de prueba común (COM) antes de conectar el conductor con tensión; al retirar los conductores, desconecte primero el conductor con tensión antes de desconectar el conductor de prueba común.

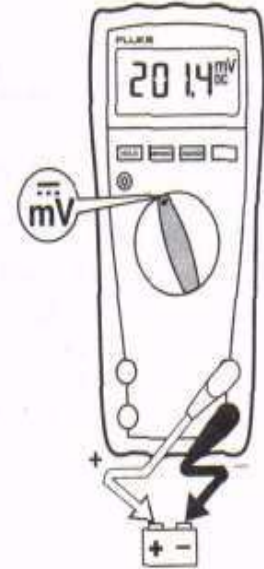
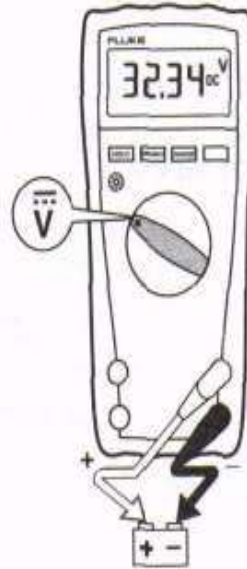
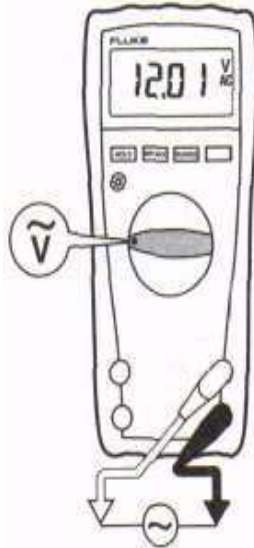
## Advertencia

Para evitar choques eléctricos, lesiones personales o daños al medidor, desconecte la alimentación del circuito y descargue todos los condensadores de alta tensión antes de realizar pruebas de resistencia, continuidad, diodos o capacitancia.

### Medición de resistencia



### Medición de tensiones de CA y CC



Volts de CA

Volts de CD

millivolts de CD

## 1. USO DEL MULTÍMETRO DIGITAL PARA MEDIR RESISTENCIAS

NOTA: El multímetro que se proporcionó para la realización de esta práctica ajusta automáticamente el rango, por lo que no requiere de seleccionar rango para medir.

Es importante que antes de utilizar el instrumento lea las instrucciones que se dan al inicio de este instructivo de práctica.

## DESARROLLO

### PARTE A

#### 1. IDENTIFICACIÓN Y MEDICIÓN DE RESISTENCIAS.

- 1.1 Organice las 10 resistencias que se le proporcionan en valor, de menor a mayor y anote su valor, código de color y tolerancia, en la tabla 1.1.
- 1.2 Coloque las resistencias en su tablilla Protoboard cuidando de que no estén en corto circuito
- 1.3 Siguiendo las instrucciones de uso del multímetro, seleccione medir resistencias mida cada una de las resistencias en el orden pedido y anote sus observaciones en la tabla 1.1

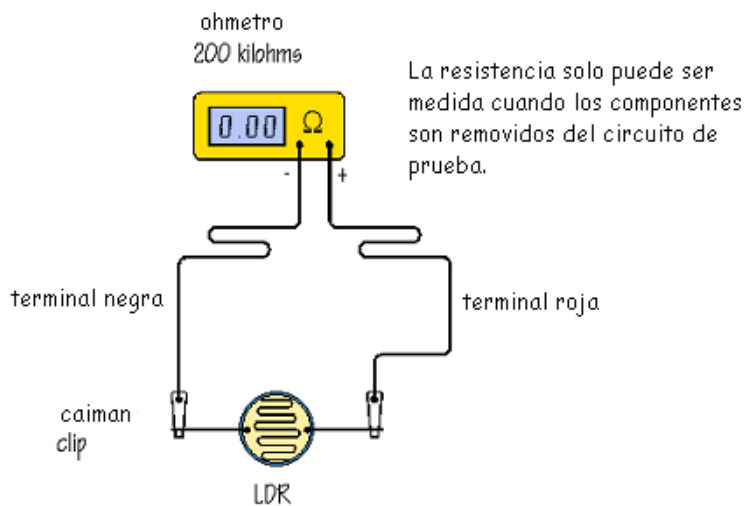
TABLA 1.1 MEDICION DE RESISTENCIAS

Valor en Ohms	Código de Colores	% tol.	Potencia Disipada	Valor Medido	% Error

$$\%Error = \frac{Valor Real - Valor Medido}{Valor Real} \times 100\%$$

1.4 Usando su tablilla Protoboard monte en ella la foto-resistencia (LDR) y mida su valor con luz ambiente tal como se muestra en la figura 1 y anote sus observaciones

Figura 1. Medición de la resistencia de una foto-resistencia (LDR)



1.5 Tape perfectamente la ventana de su foto-resistencia (puede usar cinta aislante o la mano) y mida el valor de resistencia en estas condiciones. Anote sus observaciones

## 2. MEDICIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE

Cuando se mide la resistencia en elementos de un circuito, es necesario quitar la energía eléctrica y retirar el elemento del circuito (al menos desconectar una de las terminales del elemento a medir).

2.1 Arme el arreglo de resistencias en serie como se muestra en la figura 2.

2.2 Con referencia al punto de 0 V, mida la resistencia en cada uno de los puntos indicados (A, B, Cy D). Anote sus mediciones como R<sub>A</sub>, R<sub>B</sub>, R<sub>C</sub> y R<sub>D</sub>.

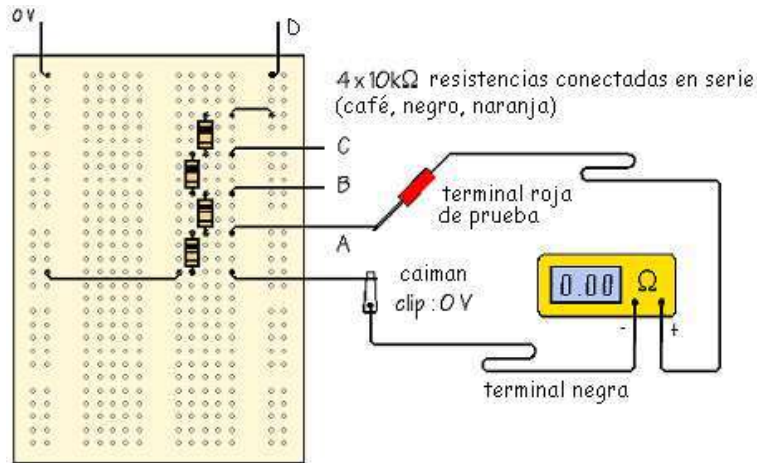


Figura 2. Medición de Resistencias en serie

2.3 Ahora mida el valor de cada una de las resistencias del circuito de la figura 2.

### 3. MEDICIÓN DE RESISTENCIAS EN CIRCUITO SERIE-PARALELO.

3.1 Arme el arreglo de resistencias serie-paralelo mostrado en la figura 3,

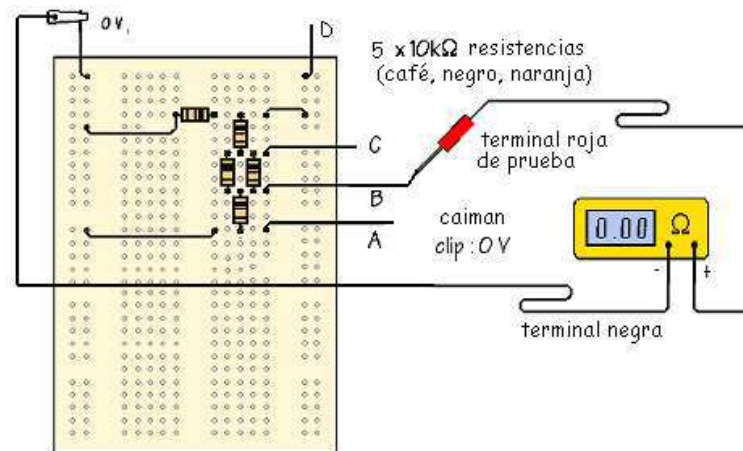


Figura 3. Resistencias en circuito serie-paralelo

3.2 Tomando como referencia 0V, mida con el óhmetro el valor de resistencia en los puntos A, B, C y D. Anote sus observaciones

#### ANEXE A SU REPORTE

Los cálculos de los circuitos pedidos.

Anote en una tabla similar a la tabla 1 los resultados obtenidos de los puntos 2 y 3.



### **Referencias Bibliográficas.**

Alonso, Marcelo y J. Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.  
Serway, Raymond A. y John W. Jeweett, Jr. Física II, 3ª edición.  
Resnik Halliday Krane. Física Volumen 2, 5ª edición, Ed. Patria.  
Vega, I. P. N. Electromagnetismo, 1ª edición, Ed. Patria  
Young, Freedman, Sears, Zemansky. Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12ª edición, Ed. Addison – Wesley, PEARSON  
Reyes, Salcedo, y Carrillo. Manual de Experimentos de Electromagnetismo, ITAM.  
Victoriano López Rodríguez, Electromagnetismo I, UNED  
Luis Álvarez Thon, Electromagnetismo FMF-241 (2014), Universidad Andrés Bello.  
Matthew N. O. Sadiku, Elementos de electromagnetismo, 3ª edición, OXFORD.  
Luis Vargas D., Apuntes de Electromagnetismo (2015), Universidad de Chile.  
Giancoli, Volumen II, 4ª Edición, Física para Ciencias e Ingeniería con física Moderna, PEARSON.  
Germán Arenas Sicard, Electricidad y Magnetismo (2008), Universidad Nacional de Colombia.  
CEKIT S. A., Curso fácil de electrónica básica, Editorial Conosur S.A.  
Miguel Ángel Rodríguez Pozueta, Materiales y circuitos magnéticos, Universidad de Cantabria.  
Bernabé Franco, Carlos Javier Jaimes O., Apuntes De Electromagnetismo, Universidades Tecnológicas de Santander.  
Jesús Fabián Jurado, Electromagnetismo para Ingeniería (2013). Universidad Nacional de Colombia.  
Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos, 3ª edición, Mc Graw Hill.

### **Referencias Electrónicas.**

<http://ww.ifinternational.com/mf/electricidad-magnetismo.html>  
<http://www.acienciasgalilei.com/videos/3electricidad-mag.htm>  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-activities/>  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-slides/>  
<http://mit.usiu.ac.ke/courses/physics/8-02sc-physics-ii-electricity-and-magnetism-fall-2010/capacitors/capacitance-capacitors-energy-stored-in-capacitors/>  
**Circuito combinado paralelo y serie - resolución por ley de Ohm | Ejercicio**  
<https://www.youtube.com/watch?v=atCl1QMMVBY>

Circuitos, pero sin Memorizar Fórmulas

<https://www.youtube.com/watch?v=kHZ8SD7jiiA>

Uso del multímetro

[https://www.youtube.com/watch?v=tT\\_hYtrp9xl](https://www.youtube.com/watch?v=tT_hYtrp9xl)



## 4.Unidad El campo Magnético

### *Introducción.*

Esta unidad inicia con el estudio de los fenómenos del magnetismo asociados con los materiales, mediante la definición de los conceptos y la representación del campo y flujo magnético, luego, se aborda el estudio de los efectos magnéticos que se producen en las cargas eléctricas en movimiento, o corriente eléctrica que circula a través de un conductor dentro de un campo magnético, enseguida, se analizan las leyes científicas, con sus modelos matemáticos, con el objetivo de determinar la fuerza magnética, la inducción magnética y el momento magnético.

En el siglo XIII A.C. los chinos utilizaron por primera vez la brújula, que básicamente consta de una aguja magnética. Los griegos descubrieron en el año 800 A.C. que ciertas piedras como la magnetita ( $Fe_3O_4$ ) atraían pedacitos de hierro.

Todo imán tenga la forma que tenga tiene dos polos llamados polo norte y polo sur. Los polos diferentes se atraen y los polos iguales se repelen. Los polos magnéticos no pueden aislarse es decir no se han podido encontrar monopolos.

En el año de 1819 Hans Christian Oersted encontró que una corriente eléctrica en un alambre desviaba una aguja de una brújula situada en sus proximidades, dando origen a la ciencia del ELECTROMAGNETISMO, que relaciona efectos eléctricos con efectos magnéticos.

El avance de la ciencia en el ámbito de la aplicación tecnológica de los imanes y/o electroimanes es bastante considerable. La correlación y su explicación entre el magnetismo y la electricidad está bastante claro, pero se unen esfuerzos para optimizar aún más el desempeño de los dispositivos que utilizan como elementos activos los imanes. La humanidad ha estado interesada desde mucho tiempo atrás en los fenómenos magnéticos, se presume que alrededor de 800 años AC los griegos ya utilizaban dispositivos que involucran efectos magnéticos. La magnetita es un material natural que presenta la propiedad de atraer ciertos materiales.

La fenomenología ha demostrado que en los imanes se discrimina dos partes. Estas partes se denominan polos y están localizados en los extremos del imán; polo norte *N* y polo sur *S*. La interacción entre dos polos se presenta de dos tipos; atractivo y/o repulsivo. Esta interacción establece que; dos polos del mismo signo se rechazan y de diferente signo se atraen. También se ha establecido que no puede existir un polo aislado. Es decir, no se pueden separar los dos polos. Para ayudar al entendimiento de los fenómenos magnéticos, es muy útil hacer un paralelismo con los fenómenos eléctricos.

Características más importantes del campo eléctrico	Características más importantes del campo magnético
■ La carga eléctrica es fuente de campo eléctrico, el cual decrece con el cuadrado de la distancia.	■ La carga eléctrica en movimiento es fuente de campo magnético
o La carga inmersa en un campo eléctrico experimenta fuerza eléctrica	■ La carga en movimiento inmersa en un campo magnético experimenta fuerza magnética.

Consideramos un imán permanente en forma de barra en una región del espacio libre, si dejamos caer limaduras de hierro sobre la región circundante al imán, las limaduras se alinearían en cada punto (figura (128)). Si unimos en forma tangencial cada limadura se formara una línea continua, a estas líneas se denominan líneas de fuerza magnética. Por otro lado, si consideremos una región  $s$ , en diferentes regiones del espacio inmerso en el imán, podemos concluir que la densidad de líneas en los polos es mayor que en otra región, y decrece a medida que se aleja del imán. La tangente en cada punto de las líneas magnéticas es un vector tangente denominado, vector campo magnético y se denota con  $B$ . Si se toma una región cercana a los polos (figura(128)) y se amplía, se observa que las líneas de fuerza son casi uniformes.

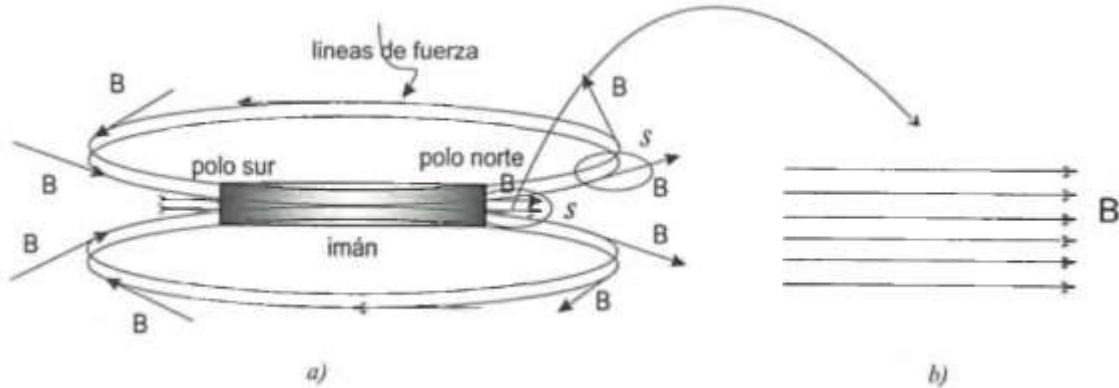


Figura 128 (a) Imán permanente, (b) Líneas de campo magnético  $\vec{B}$  uniforme.

Aparte del campo eléctrico que vimos en las primeras unidades, ahora necesitamos el concepto de campo magnético que se origina debido al movimiento de las cargas.

El origen del magnetismo se remonta al descubrimiento de la magnetita ( $Fe_3O_4$ ) que es capaz de atraer pedazos de hierro. También se descubrió que cualquier magneto (imán) no importa su forma, tiene dos polos, llamados polo norte (N) y polo sur (S), los cuales ejercen fuerzas sobre otros polos magnéticos similarmente como lo hacen las cargas eléctricas entre ellas. Al igual que las cargas eléctricas, los polos iguales se repelen y los polos distintos se atraen. El nombre "polo" viene del hecho de que una brújula se orienta de acuerdo al campo magnético de la tierra y los polos magnéticos son cercanos a los polos geográficos (Fig. 129).

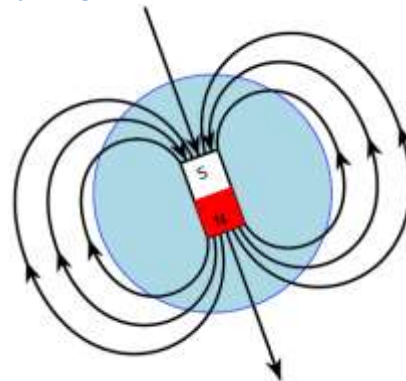
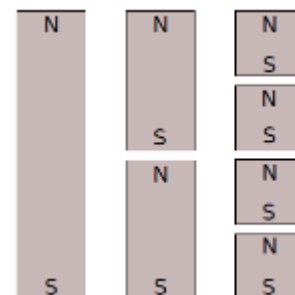


Figura 129 Líneas de campo magnético de la tierra apuntan desde el polo norte magnético a polo sur magnético. Además el polo sur magnético no coincide exactamente con el polo geográfico norte, hay una desviación de  $11^\circ$ .

La designación tradicional de polos norte y sur tiene su analogía con las cargas positivas y negativas. En el caso eléctrico

Figura 130 La división sucesiva de una barra magnética vuelve a formar los polos norte y sur.



podemos tener cargas positivas o negativas aisladas, pero en el caso magnético no es posible aislar los polos. Si uno considera un imán con sus dos polos es imposible separarlos. Si partimos el imán en dos partes aparecerán dos nuevos polos norte y sur en cada uno de los trozos. Si después partimos estos dos imanes en dos trozos tendremos cuatro imanes cada uno con un polo norte y sur. Podríamos seguir así casi indefinidamente. En consecuencia no se pueden aislar los polos magnéticos (Fig. 130).

Tras haber dedicado en las unidades anteriores a los campos eléctricos estáticos, caracterizados por  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{D}$ , ahora dirigiremos nuestra atención a los campos magnéticos estáticos, los cuales se caracterizan por  $\mathbf{H}$  o  $\mathbf{B}$ . Entre los campos eléctricos y magnéticos existen semejanzas y diferencias. Así como  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  se relacionan entre sí en el espacio material lineal de acuerdo con  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  se relacionan entre sí de acuerdo con  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . En la tabla 11 se abunda en la analogía entre cantidades de los campos eléctricos y magnéticos. En esta unidad se presentarán algunas cantidades del campo magnético, y otras más en la siguiente. Tal analogía se incluye aquí para demostrar que la mayoría de las ecuaciones que hemos deducido en relación con los campos eléctricos pueden servir para obtener las correspondientes ecuaciones relativas a campos magnéticos con sólo sustituir las cantidades equivalentes. Esto revela que no se aprenderán nuevos conceptos.

Oersted<sup>1</sup> fijó en 1820 el vínculo definitivo entre los campos eléctricos y magnéticos. Como ya sabemos, un campo electrostático es producto de cargas estáticas o estacionarias. El movimiento de cargas a una velocidad constante produce a su vez un campo magnético estático (o magnetostático). Así un campo magnetostático es producto de un flujo constante de corriente (o corriente directa). Tal flujo de corriente puede deberse a corrientes de magnetización, como en el caso de los imanes permanentes; a corrientes de haces de electrones, como en el caso de tubos al vacío, o a corrientes de conducción como en el de alambres portadores de corriente. En esta unidad se examinarán campos magnéticos en el vacío debidos a corriente directa, y en el siguiente campos magnetostáticos en el espacio material.

Nuestro estudio de la magnetostática no es un lujo prescindible, sino una necesidad indispensable. Los motores, transformadores, micrófonos, brújulas, timbres telefónicos, controles de enfoque de televisión, anuncios publicitarios, vehículos de alta velocidad de suspensión magnética, dispositivo para el almacenamiento de memoria, separadores magnéticos etc., implican fenómenos magnéticos y son de enorme importancia en nuestra vida diaria<sup>2</sup>.

---

1 Luego de 13 años de frustrantes esfuerzos, Hans Christian Oersted (1777-1851), profesor danés de física, descubrió que la electricidad puede producir magnetismo.

2 En J. K. Watson, *Applications of Magnetism*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1980, se refieren diversas aplicaciones del magnetismo

*Tabla 11 Analogía entre campos eléctricos y magnéticos.\**

Concepto	Eléctrico	Magnético
Leyes básicas	$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_r^2} \mathbf{a}_r$ $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$ $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$
Ley de la fuerza	$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = Q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$
Elemento de origen	$dQ$	$Q\mathbf{u} = I d\mathbf{l}$
Intensidad de campo	$E = \frac{V}{\ell} \text{ (V/m)}$	$H = \frac{I}{\ell} \text{ (A/m)}$
Densidad de flujo	$\mathbf{D} = \frac{\Psi}{S} \text{ (C/m}^2\text{)}$	$\mathbf{B} = \frac{\Psi}{S} \text{ (Wb/m}^2\text{)}$
Relación entre campos	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
Potenciales	$\mathbf{E} = -\nabla V$ $V = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon r}$	$\mathbf{H} = -\nabla V_m \text{ (J} = 0\text{)}$ $\mathbf{A} = \int \frac{\mu I d\mathbf{l}}{4\pi R}$
Flujo	$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ $\Psi = Q = CV$ $I = C \frac{dV}{dt}$	$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ $\Psi = LI$ $V = L \frac{dI}{dt}$
Densidad de energía	$w_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$	$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$
Ecuación de Poisson	$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$

\* Una analogía similar aparece en R. S. Elliot. "Electromagnetic theory: A simplified representation", en *IEEE Trans. Ed11c.*, vol. E-24, núm. 4, noviembre de 1981, pp. 294-296.

Son dos las principales leyes que rigen a los campos magnetostáticos: 1. la ley Biot-Savart<sup>3</sup> y 2. la ley de los circuitos, de Ampere.<sup>4</sup> Como la de Coulomb de la electrostática, la ley de Biot-Savart es la ley general de la magnetostática; y como la ley de Gauss respecto de la de Coulomb, la ley de Ampere es un caso especial de la de Biot-Savart es de fácil aplicación a problemas que implican una distribución simétrica de corriente. En esta unidad primero enunciaremos y aplicaremos las dos leyes de la magnetostática y después las deduciremos.

3 Alrededor de 1820 Ampere y Jean-Baptiste Biot y Félix Savart realizaron experimentos y análisis del efecto de un elemento de corriente.

4 André-Marie Ampere (1775-1836), físico francés, desarrolló el descubrimiento de Oersted y propuso los conceptos de elemento de corriente y fuerza entre elementos de corriente.

### ***Campo magnético Fuerzas.***

El campo magnético se encuentra rodeando cualquier sustancia magnética o cualquier carga móvil.

El campo magnético  $\mathbf{B}$  puede definirse en términos de la fuerza magnética ejercida sobre un objeto de prueba apropiado, que puede ser una partícula cargada que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ . La fuerza magnética sobre una partícula cargada viene dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Esto significa, que el campo magnético se define en términos de la fuerza que actúa sobre la partícula cargada en movimiento. Como puede verse la fuerza magnética es proporcional a la carga  $q$  y a la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula. La magnitud y dirección de la fuerza depende de la velocidad de la partícula y de la dirección del campo magnético. La fuerza  $\mathbf{F}$  es perpendicular al plano formado por  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{B}$ . La fuerza magnética sobre una carga positiva está en dirección opuesta a la dirección de la fuerza sobre una carga negativa que se mueve en la misma dirección. Si el vector velocidad forma un ángulo  $\theta$  con el campo magnético, la magnitud de la fuerza es proporcional al  $\sin\theta$ . Un campo magnético estático puede cambiar la dirección de la velocidad pero no la magnitud de la velocidad o la energía cinética de una partícula cargada.

### **Unidades**

La unidad SI del campo magnético es el Weber por metro cuadrado ( $\text{Wb}/\text{m}^2$ ) llamado también Tesla (T).

$$1T = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{C} * \text{m}/\text{s}} = \frac{\text{N}}{\text{A} * \text{m}}$$

Otra unidad de uso común es el gauss (G), que se relaciona con el tesla por medio de:

$$1T = 10^4 \text{ G}$$

En los laboratorios los imanes convencionales pueden producir hasta 2.5T. Los imanes superconductores que se han construido producen hasta 25T. El campo magnético en puntos cercanos a la superficie de la tierra es de  $0.5 \times 10^{-4} \text{ G}$ .

A continuación vamos a estudiar los **campos magnéticos estáticos**, pero, por el momento, sin preocuparnos cuál es el origen de ellos. En la primera parte vimos que si poníamos una carga de prueba  $q$  en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ , la carga experimenta una fuerza dada por

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Ahora si ponemos la misma carga en movimiento con velocidad  $\vec{v}$  en presencia del campo magnético, **experimentalmente** se demuestra que la carga experimenta una fuerza

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

donde el vector  $\vec{B}$  se llama **inducción magnética**.<sup>1</sup> La unidad de  $\vec{B}$  es el Tesla (T) o Weber por metro cuadrado (Wb/m<sup>2</sup>) donde

$$1\text{T} = 1 \text{ N/Am}$$

1 En otros textos también se usa el término *densidad de flujo magnético*.-

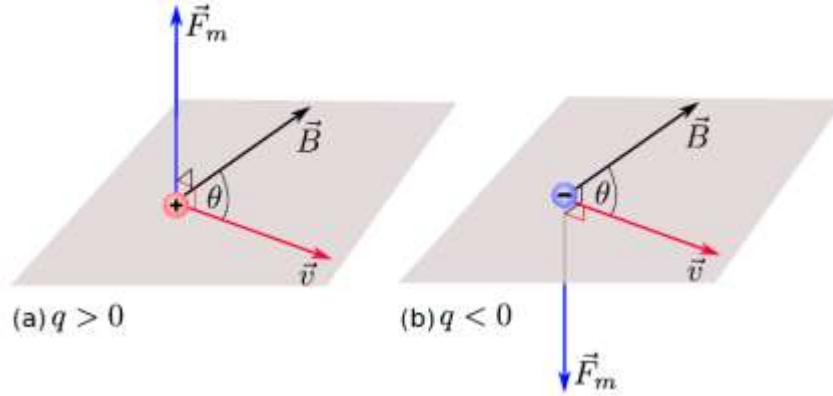


Figura 131 Fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Si  $q > 0$  la fuerza apunta hacia arriba. Si  $q < 0$  la fuerza se invierte.

Como hay un producto cruz involucrado el vector  $\vec{F}_m$  es perpendicular a  $\vec{v}$  y a  $\vec{B}$  (Fig. 131). La magnitud de la fuerza magnética sobre la carga es

$$F_m = |q|vB \sin \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo menor entre  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . De esta expresión se desprende que la fuerza es nula si  $\vec{v}$  es paralelo o antiparalelo a  $\vec{B}$  ( $\theta = 0$  o  $\theta = 180^\circ$ ) y es máxima cuando  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares ( $\theta = 90^\circ$ ).

También se pueden usar reglas gráficas para recordar la dirección de la fuerza, tal como se muestra en las dos figuras siguientes (figura 132 y 133):

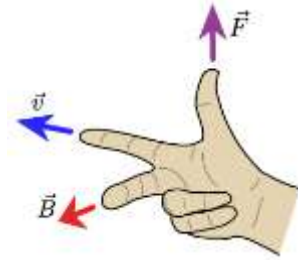
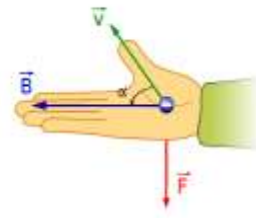
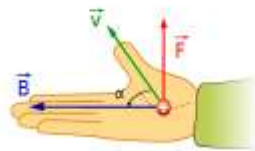
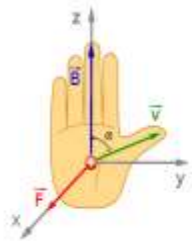


Figura 133 Regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza sobre  $q$ . Notar que la dirección de  $\vec{F}$  cambia si la carga cambia de signo.

Figura 132 Otra versión de la regla de la mano derecha.

Si sumamos la fuerza eléctrica y la magnética obtenemos la **fuerza de Lorentz**:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

## EXPERIMENTO DE OERSTED

La magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), un imán permanente que se encuentra en la naturaleza, se conoce desde la antigüedad, y su capacidad de orientarse en la dirección norte-sur tuvo una aplicación destacada en la navegación. En el siglo XIII, Pierre de Maricure estudió como se orientaba una aguja magnética en una esfera hecha de magnetita, su trabajo le llevo a introducir el concepto de polo magnético. Gilbert realizó sus investigaciones sobre el magnetismo terrestre y descubrió que la tierra es un enorme imán esférico y por tanto las agujas imanadas se orientaba en la dirección de los polos de la tierra, su obra de Magnete se publicó el año 1600.

Los fenómenos eléctricos provocados por la presencia de cargas eléctricas se estudiaban de forma independiente de los fenómenos observados en la interacción de materiales imanados como la magnetita. Oersted realizó un experimento en el que mostraba la relación entre corriente eléctrica y campo magnético.

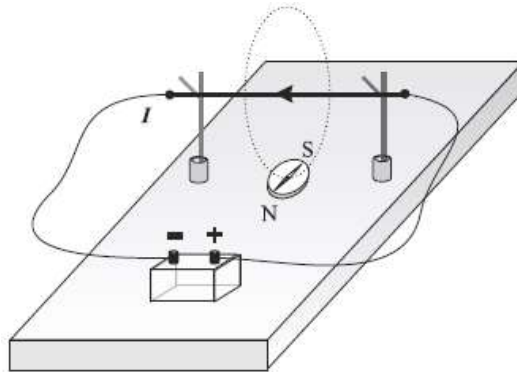


Figura 134 Dispositivo experimental de Oersted.

En Julio de 1820 Oersted mostró que una corriente eléctrica modificaba la orientación de una aguja magnética, es decir, ejercía una fuerza sobre ella. Con este descubrimiento puso de manifiesto la conexión entre los fenómenos de origen eléctrico y magnético. La corriente crea una perturbación a su alrededor que tiene como consecuencia una fuerza sobre el material imanado (aguja magnética) similar a la ejercida por otra aguja magnética.

El dispositivo experimental de Oersted se muestra esquemáticamente en la figura 134. Con él comprobó que si la aguja magnética se situaba encima del hilo se orienta en sentido contrario al que se produce cuando se sitúa debajo. Esto indica que la perturbación creada por la corriente orienta la aguja magnética en forma circular en torno al eje por el que circula dicha corriente.

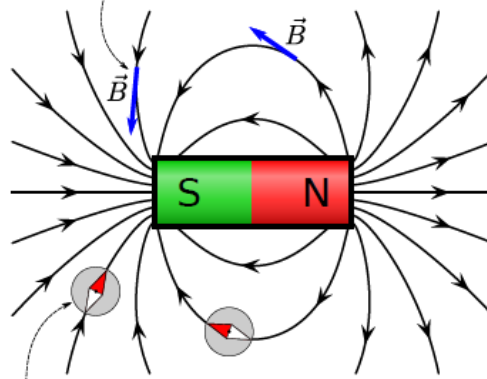
### Flujo magnético.

El flujo magnético se define de la misma forma que el flujo eléctrico. Los campos magnéticos pueden ser representados geoméricamente mediante las líneas de campo magnético. Las líneas indican la dirección del campo magnético y las densidad de las líneas indican la magnitud del campo (figura 135).



En cada punto, la línea de campo es tangente al vector campo magnético.

En las zonas donde las líneas de campo son más densas, el campo magnético es mayor.



En cada punto, las líneas de campo apuntan en la misma dirección que lo hacen las agujas de una brújula, entonces las líneas de campo salen del polo N hacia el polo S.

Figura 135 Las líneas de campo magnético de un magneto permanente.

Introducimos una cantidad matemática llamada **flujo de campo magnético**, la cual medirá el número de líneas que pasan a través de una superficie.

Para ilustrar el concepto, consideremos un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  y que es perpendicular a una superficie de área  $A$  tal como muestra la figura 136. El flujo magnético  $F_m$  es un escalar definido como

$$F_m \equiv BA$$

Es decir,  $F_m$  es simplemente la magnitud del campo uniforme multiplicado por el área. Esta es la definición más sencilla de flujo

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2$$

Siguiendo la analogía con el campo eléctrico, consideremos el mismo campo magnético uniforme  $\vec{B}$  y supongamos que la superficie está inclinada en un ángulo  $\theta$  como se muestra en la figura 137. El área efectiva que "verá" el campo será  $A' = A \cos \theta$ , entonces el flujo es

$$\Phi_m = BA' = BA \cos \theta$$

De esta expresión, vemos que el flujo será máximo cuando  $\theta = 0$  y será mínimo (cero) cuando  $\theta = \pi/2$ . Pero la expresión anterior se puede escribir como un producto punto

$$\Phi_m = \vec{B} * \vec{A}$$

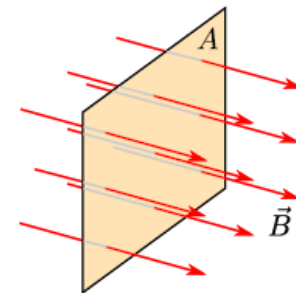


Figura 136 Líneas de campo magnético uniforme atravesando en forma perpendicular a una superficie de área  $A$ .

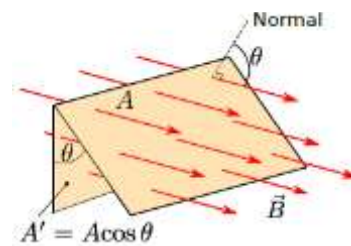


Figura 137 Las líneas de campo que atraviesan la superficie disminuye debido a la inclinación del plano.

Donde  $\vec{A}$  es un vector de magnitud  $A$  y perpendicular a la superficie. A veces también es conveniente escribir lo anterior como

$$\Phi_m = A\vec{B} \cdot \hat{n}$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular a la superficie, de tal manera que  $\vec{A} = A\hat{n}$ .

El flujo magnético se define de la misma forma que el flujo eléctrico. La integral de superficie

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

es el flujo magnético a través de la superficie  $S$  limitada por un contorno  $C$ .

Una situación especial es cuando la superficie es cerrada. En ese caso usamos el hecho de que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  (ley de Gauss en magnetismo), lo que trae como consecuencia que

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

es decir, **el flujo magnético a través de una superficie cerrada es nulo.**

**EJEMPLO 1(figura 138)**

Una espira rectangular de ancho  $a$  y largo  $b$  está localizada cerca de un alambre largo que lleva una corriente  $I$ . La distancia entre el alambre y el lado más cercano a la espira es  $c$ . el alambre es paralelo a lado de largo  $b$ . Encontrar el flujo total de campo magnético a través de la espira, debido a la corriente en el alambre.

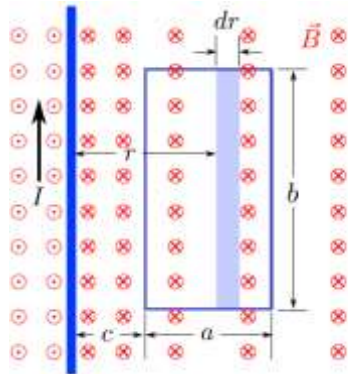


Figura 138 Ejemplo 1

**Solución:** En la figura, la magnitud del campo magnético generado un alambre con corriente  $I$  es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

donde  $r$  es la distancia al alambre y el campo apunta hacia adentro en la región donde se encuentra la espira. Puesto que el campo es variable con la distancia al alambre, elegimos una franja de ancho  $dr$  y largo  $b$  a una distancia  $r$  del alambre. El flujo es:

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B dA$$

donde hemos puesto  $\vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot dA$  porque  $\vec{B}$  es paralelo a  $d\vec{A}$ . Además  $dA = bdr$ . Reemplazando:

$$\Phi_m = \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} = \left[ \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln r \right]_c^{a+c} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{c} \right)$$

**EJEMPLO 2(figura 139)**

Un conductor delgado a lo largo del eje  $z$  lleva una corriente de 16A en la dirección  $\hat{k}$ , un cascarón cilíndrico de radio  $r = 6$  lleva una corriente de 12A en la dirección  $-\hat{k}$  y otro cascarón cilíndrico de radio  $r = 10$  lleva una corriente de 4A en la dirección  $-\hat{k}$ .

- (a) Encontrar  $\vec{H}$  en todo el espacio.  
 (b) Hallar el flujo total a través de la superficie  $1 < r < 7, 0 < z < 1$ .

(a) Encontrar  $\vec{H}$  en todo el espacio.

**Solución:** Usamos la ley de Ampere  $\oint_C \vec{H} * d\vec{l} = I$  donde ya sabemos que  $\vec{H}$  tiene la dirección  $\hat{\phi}$  o  $-\hat{\phi}$  de acuerdo a la regla de la mano derecha. La trayectoria  $C$  será una circunferencia de radio  $r$  y concéntrica con el eje  $z$ .

(i) Para  $0 < r < 6$ :  $2\pi r H = 16 \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{16}{2\pi r} \hat{\phi}}$

(ii) Para  $6 < r < 10$ :  $2\pi r H = 16 - 12 \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{4}{2\pi r} \hat{\phi}}$

(iii) Para  $r > 10$ :  $2\pi r H = 16 - 12 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{H} = 0}$

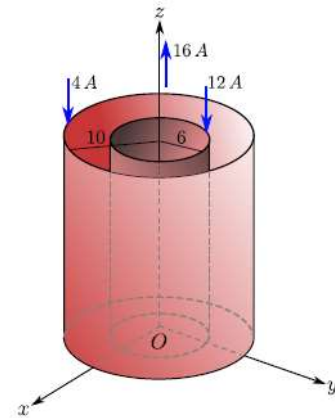


Figura 139 Ejemplo 2.

(b) Hallar el flujo total a través de la superficie  $1 < r < 7, 0 < z < 1$ .

**Solución:** La superficie corresponde a un rectángulo de ancho 6 y alto 1 perpendicular al plano  $xy$ . Un elemento de área en este rectángulo es  $dA = dzdr$ , además usamos  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  para calcular el flujo

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B} * d\vec{A} = \int B dA = \int B dr dz \\ &= \int_0^1 \int_1^6 \frac{16\mu_0}{2\pi r} dr dz + \int_0^1 \int_6^7 \frac{4\mu_0}{2\pi r} dr dz \\ &= 2 \frac{\mu_0}{\pi} [4 \ln 4 + \ln 7/6] = 5.9 \mu Wb \end{aligned}$$

**Nota:** Hemos usado a propósito la forma,  $\oint_C \vec{H} * d\vec{l} = I$  de la ley de Ampère, aunque en este caso no era necesario pues con  $\oint_C \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 I$  habría sido más directo.

## 4.1 Interacción Magnética.

### Movimiento de partículas en un campo magnético

En el tema de electrostática presentado en la unidad 1 se estudió que las cargas eléctricas en reposo manifiestan entre ellas una fuerza de repulsión o de atracción.

En el magnetismo, cuando una partícula o carga eléctrica está en movimiento dentro de un campo magnético, también se manifiesta fuerza de atracción y repulsión, pero de origen electromagnético. Esto se debe a la interacción del campo magnético fijo que actúa sobre el pequeñísimo campo magnético generado por las cargas eléctricas en movimiento. La magnitud de la fuerza magnética que experimenta la carga eléctrica en movimiento, dentro del campo magnético fijo, es proporcional a la magnitud de la carga eléctrica, a su velocidad y a la inducción magnética. También se ha comprobado de manera experimental que la dirección de la fuerza es perpendicular a la velocidad de la carga y a la inducción magnética. Mientras que la magnitud de la fuerza es directamente proporcional a la carga por su velocidad, multiplicada vectorialmente por la inducción magnética; es decir, se determina mediante el producto de la carga  $q$  por la velocidad  $v$  y multiplicado en forma vectorial por la inducción magnética  $\beta$ . Lo anterior se representa con la siguiente expresión matemática.

$$F = (qv) \times (\beta) \quad (4.1)$$

Por definición matemática, el producto vectorial para vectores expresados en notación polar es igual al producto de la magnitud de los vectores por el seno del ángulo entre ellos

$$F = qv\beta \sin \theta$$

Dónde:

$\theta$  = El ángulo formado entre los vectores velocidad  $v$  y la inducción magnética  $\beta$ .

$q$  = Carga eléctrica expresada en Coulomb C.

$v$  = Velocidad de la carga eléctrica expresada en m/s

$\beta$  = Inducción magnética expresada en teslas.

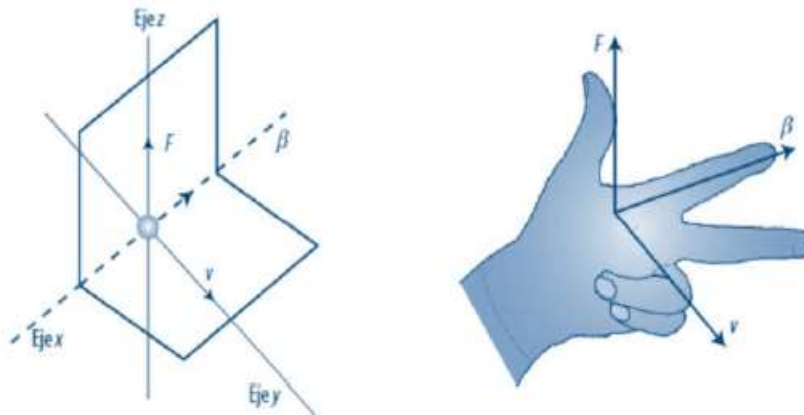
$F$  = Magnitud de la fuerza en N

Un dispositivo electrónico donde se presenta este fenómeno es en la válvula al vacío, también llamada tubo de rayos catódicos, por ejemplo, el cinescopio de televisión.

Es importante resaltar que la dirección de la fuerza que se manifiesta sobre las partículas electrizadas siempre es perpendicular a la dirección de la velocidad y a la inducción magnética.

Un método muy práctico para determinar el sentido de la fuerza que experimenta una carga eléctrica cuando entra en una región de campo magnético uniforme es utilizando la regla de la mano izquierda, la cual establece lo siguiente:

Con el dedo índice de la mano izquierda señalando el sentido del campo magnético, entonces el dedo medio indica la dirección de la velocidad y el dedo pulgar indica el sentido de la fuerza, como se muestra en la figura 140.

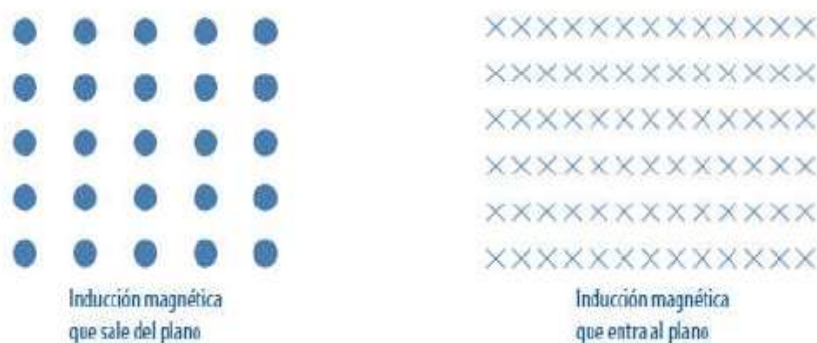


**Figura 140. Esquema representativo del sentido de la fuerza de origen magnético**

Es importante notar que algunos textos utilizan la regla de la mano derecha cambiando la relación de los dedos respecto de las variables, en este caso establece con el dedo medio de la mano derecha se indica el sentido del campo magnético, entonces el dedo índice indicará el sentido de la velocidad de la partícula y el dedo pulgar el sentido de la fuerza que experimenta.

Se aclara que, ya sea la regla de la mano izquierda o de la derecha puedan aplicarse para identificar los sentidos de la fuerza y velocidad de una partícula electrizada dentro del campo magnético, solo debe considerarse adecuadamente la indicación de los dedos.

Una forma práctica que comúnmente se utiliza para representar el sentido del campo magnético en una región, donde se considera que su magnitud es uniforme en ese espacio, es mediante puntas de flecha que indican que el campo magnético sale del plano, y mediante equis que serían la cola de la flecha para indicar que la inducción magnética está entrando al plano.

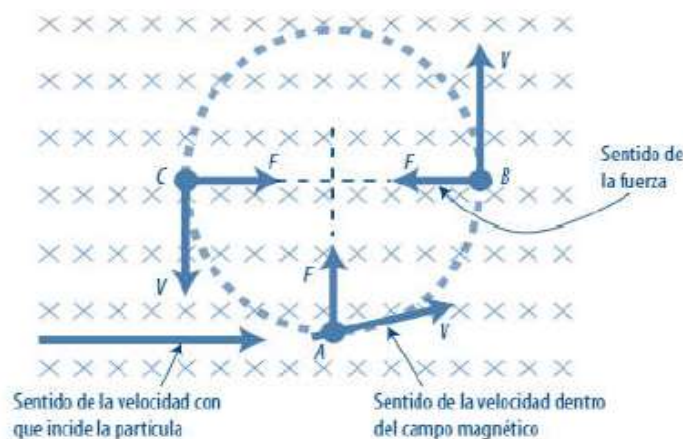


**Figura 141. Representación esquemática del sentido convencional de las líneas de fuerza de campo magnético.**

Cuando una partícula cargada eléctricamente lleva una velocidad cuya dirección es diferente a  $90^\circ$  con respecto a las líneas de campo magnético, al entrar en la región de campo magnético, la fuerza magnética sobre la partícula provoca que se desvíe de su trayectoria original de movimiento, siguiendo una trayectoria helicoidal mientras la partícula está dentro de un campo magnético y después sale de este.

Pero si la velocidad de la partícula en movimiento incide dentro del campo magnético en forma perpendicular, es decir a  $90^\circ$ , entonces la partícula describe una trayectoria circular dentro del campo magnético.

También se aplica la regla de la mano izquierda para determinar el sentido de la trayectoria que describe la partícula dentro del campo, y se encuentra que la partícula está sometida a una fuerza cuyo sentido es hacia arriba, originando que al desviarse la partícula pase por el punto A, como lo muestra la figura 142, y nuevamente aplicando la regla de la mano izquierda ocupará el punto B, y así sucesivamente hasta describir una trayectoria circular, debido a que también queda sometida al efecto de la fuerza centrípeta de origen dinámico.



**Figura 142. Representación gráfica de la trayectoria descrita por una partícula electrizada que incide perpendicularmente dentro del campo magnético.**

La magnitud del radio de la trayectoria circular que describe la partícula se determina relacionando la fuerza magnética  $F_m$ , cuyo sentido es hacia dentro de la trayectoria circular, así esta fuerza corresponde con la fuerza centrípeta  $F_c$  de dinámica del movimiento circular es igual en magnitud y sentido con la fuerza magnética.

Cuando la fuerza de origen magnético sobre la partícula incide perpendicularmente en el campo está determinada por la siguiente ecuación:

$$F = qv\beta \sin \theta = qv\beta \sin 90^\circ = qv\beta$$

$$F = F_c = qv\beta \tag{a}$$

De la dinámica del movimiento circular, al describir una trayectoria circular la fuerza centrípeta de la partícula está determinada por la siguiente ecuación:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \tag{b}$$

Donde m es la masa de la partícula en kg, v es la velocidad tangencial en m/s y r el radio de la trayectoria en m.

Para que se describa la trayectoria circular la fuerza magnética debe ser igual a la fuerza centrípeta, por tanto, igualando las ecuaciones (a) y (b) se obtiene el radio de la trayectoria.

$$qv\beta = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{q\beta} \dots\dots\dots(4.2)$$

**Fuerza de Lorentz**

Hendrik Antoon Lorentz ( 1853-1928) físico holandés considero el efecto la fuerza que experimenta una partícula cargada positivamente cuando se localiza dentro de una región donde existe un campo eléctrico y también un campo magnético; entonces, comprobó que se manifiestan sobre la partícula dos fuerzas, una fuerza por efecto del campo eléctrico,  $F_e$ . y otra provocada por el campo magnético,  $F_m$ .

Del campo eléctrico  $F_e = qE$ . Del campo magnético  $F_m = qV \times \beta$ .

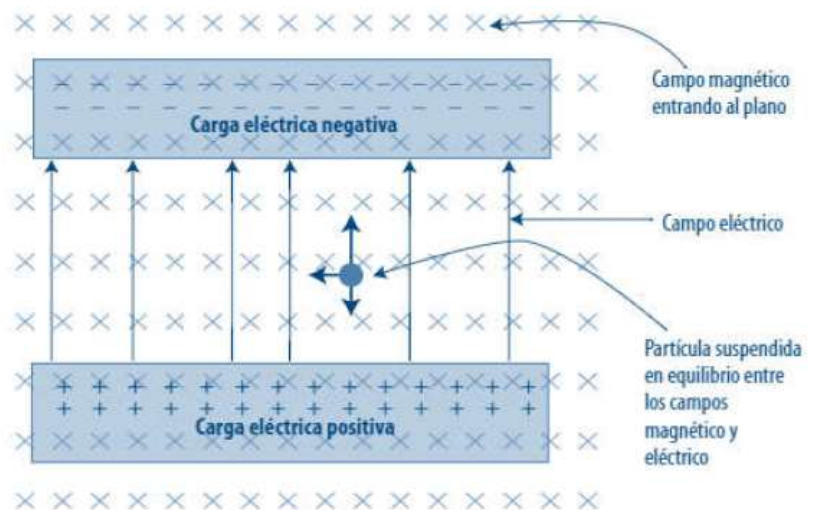
Lorentz determinó que la fuerza total sobre la partícula que se encuentra en un espacio donde existe un campo eléctrico y magnético será la suma vectorial de las dos fuerzas:

$$F_T = F_m + F_e = qE + (qV) \times \beta$$

$$F_T = q[E + v \times \beta] \tag{4.3}$$

Con frecuencia, a esta ecuación se le llama fuerza de Lorentz.

Bajo estas condiciones de la existencia al mismo tiempo de un campo eléctrico y otro magnético al incidir la partícula en una región, es posible que la partícula electrizada puede pasar a través de dicha región en donde existen los campos sin desviarse, variando los campos eléctrico y magnético, esto se cumple cuando la fuerza de origen magnético,  $F_m$ , es igual a la fuerza de origen eléctrica,  $F_e$  sobre la partícula.(Figura 143)



**Figura 143. Representación esquemática de una carga eléctrica dentro de los campos eléctrico y magnético.**



Cuando una partícula electrizada se mueve dentro de una región donde existe un campo eléctrico y magnético, se manifiesta las siguientes condiciones

- La fuerza eléctrica actúa en la dirección del campo eléctrico en tanto que la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
- La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula cargada independientemente de si la partícula está en movimiento, mientras que la fuerza magnética actúa sobre una partícula cargada solo cuando la partícula está en movimiento.
- La fuerza efectúa trabajo al desplazar una partícula, en tanto que la fuerza magnética asociada con un campo magnético estable no ejerce trabajo cuando se desplaza una partícula.

La energía cinética de una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético no puede ser alterada por un campo magnético aislado, por tanto, cuando una partícula cargada se mueve a una velocidad  $v$  a través de un campo magnético, el campo puede alterar la dirección del vector velocidad pero no puede cambiar la rapidez o la energía cinética de la partícula.

Durante el proceso de incidencia de la partícula electrizada dentro de una región de campo magnético también se cumple el principio de conservación de la energía y por tanto la energía cinética de la partícula será transformada, en el instante de entrar en la región de campo magnético, en energía eléctrica cuya magnitud esta determinada por el producto de su carga eléctrica por el potencial eléctrico.

En el instante en que la partícula entra en la región de campo magnético, su energía es cinética debido a su movimiento y está determinada por la siguiente ecuación.

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

Cuando la partícula electrizada se encuentra dentro de la región de campo magnético su energía cinética se conserva, y su magnitud está en función de su carga  $q$  y del potencial eléctrico  $V$ , expresado por la siguiente ecuación:

$$E_E = qV$$

Aplicando el principio de conservación de la energía se igualan las dos expresiones, por tanto se concluye con la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

### Problema resuelto

Un protón con velocidad de  $2 \times 10^7$  m/s incide  $30^\circ$  en una región de campo magnético de 1.5 teslas. Determinar la magnitud, dirección y sentido de la fuerza que experimenta el protón. (Figura 144)

### Solución

Primero, establecemos los datos de referencia:

$$\beta = 1.5 \text{ T}$$

$$v = 2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\theta = 30^\circ$$

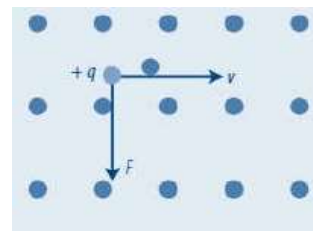


Figura 144.

Luego, utilizamos la ecuación de la fuerza:

$$F = qV\beta \sin \theta$$

$$F = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \left( 2 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1.5 \text{ T}) \sin 30^\circ = 2.4 \times 10^{-12} \text{ N}$$

La dirección y sentido de la fuerza se determinan suponiendo que las líneas de inducción salen del plano; luego al aplicar la regla de la mano izquierda, encontramos que la fuerza está direccionada hacia abajo.

#### Problema resuelto

Un electrón se mueve en una órbita circular de 14 cm de radio en un campo magnético uniforme de 0.35 T, perpendicular a la velocidad del electrón. Determinar:

- a) La velocidad lineal del electrón.
- b) La velocidad angular.
- c) La frecuencia y el periodo.

#### Solución

Para este caso, usamos la siguiente ecuación:

$$r = \frac{mv}{q\beta}$$

De esta ecuación despejamos v:

$$v = \frac{qBr}{m_e} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.35 \text{ T})(0.14 \text{ m})}{9.1091 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 8.606 \times 10^9 \text{ m/s}$$

De movimiento circular uniforme tenemos:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m_e} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.35 \text{ T})}{9.1091 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 6.1476 \times 10^{10} \text{ rad/s}$$

Del movimiento circular tenemos:

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6.1476 \times 10^{10} \text{ rad/s}}{(2) (3.1416 \text{ rad})} = 9.784 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{9.784 \times 10^9 \text{ Hz}} = 1.022 \times 10^{-10} \text{ s}$$

#### Problema resuelto

Durante un experimento se aceleraron electrones desde el reposo a través de una diferencia de potencia de 370 V. Si los electrones siguieron una trayectoria circular de radio 7.2 cm, determinar la magnitud y la dirección del campo magnético.

**Solución**

Debido a que la trayectoria del haz de electrones es circular, podemos asegurar que el campo magnético es perpendicular a la velocidad lineal, como se muestra en la figura 145, donde las X muestran un campo magnético entrando a la página.

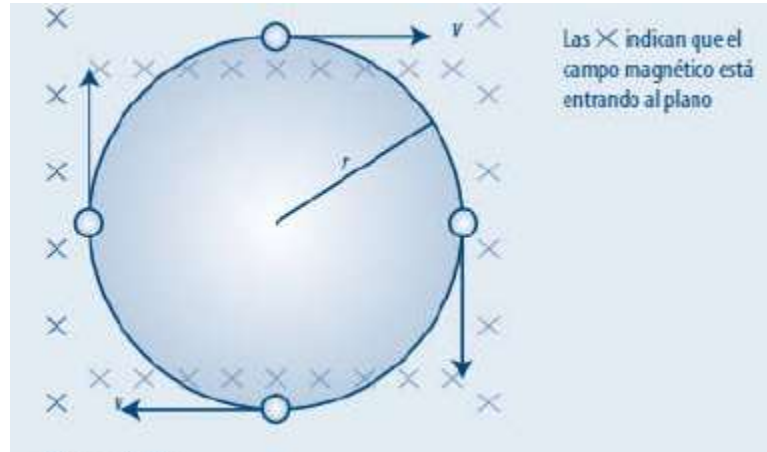


Figura 145.

Del principio de conservación de energía, sabemos que al inicio la energía del electrón es potencial y está en función de su carga y del voltaje, y que después, durante el movimiento, se transforma en energía cinética:

$$\frac{1}{2} m_e V^2 = q_e V$$

$$V = \sqrt{\frac{2q_e V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) 370V}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 11.4065 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Ahora, determinamos el campo magnético:

$$\beta = \frac{m_e V}{q_e r} = \frac{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) (11.4065 \times 10^6 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(7.2 \times 10^{-2} \text{ m})} = 9.0103 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$$

## 4.2 Fuerza Magnética entre Conductores.

### Fuerza magnética sobre un conductor con corriente

Ya vimos que existe una fuerza sobre una carga en movimiento en presencia de un campo magnético. Ahora si tenemos un alambre por el cual pasa una corriente, entonces es de esperar que se ejerza una fuerza sobre el alambre, pues después de toda una corriente son cargas en movimiento. La fuerza

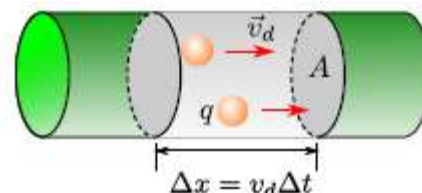


Figura 146. Sección de un alambre por donde se mueven los portadores de carga con velocidad  $\vec{v}_d$ . Los portadores de carga son los responsables de la corriente eléctrica: cargas positivas o negativas.

total sobre el alambre será la suma vectorial de todas las fuerzas sobre cada una de las cargas. Consideremos un conductor con una sección de área  $A$  (Fig. 146). El volumen del trozo de largo  $\Delta x$  es  $A\Delta x$ . Si  $n$  representa el número de portadores de carga<sup>2</sup> móviles por unidad de volumen (densidad de portadores de carga), entonces el número de portadores de carga en la sección de largo  $\Delta x$  es  $nA\Delta x$ . En consecuencia, la carga total en esa sección es  $\Delta Q = (\text{número de portadores}) \times (\text{carga de portador}) = (nA\Delta x)q$

Si los portadores se mueven con **velocidad de deriva**  $\vec{v}_d$  entonces en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  estos se desplazarán una distancia

$$\Delta x = v_d \Delta t$$

si suponemos que este tiempo es el mismo que se demoran los portadores para pasar de una cara a la otra:

$$\Delta Q = (nAv_d \Delta t)q$$

al dividir ambos lados por  $\Delta t$ , obtenemos la corriente en un conductor en términos de cantidades microscópicas

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nAv_d q$$

Consideremos ahora un campo magnético perpendicular al segmento de alambre tal como muestra la figura 147. La fuerza magnética sobre una carga  $q$  con velocidad  $\vec{v}_d$  es

$$\vec{F}_q = q\vec{v}_d \times \vec{B}$$

Para encontrar la fuerza total sobre el segmento multiplicamos  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$  por el número de cargas en el segmento de alambre. El volumen del segmento es  $AL$ , lo que significa que el número de cargas es  $nAL$

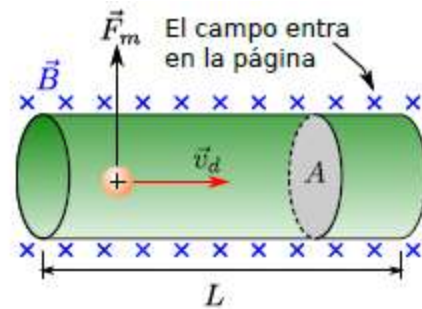
$$\vec{F}_m = nAL (q\vec{v}_d \times \vec{B})$$

pero ya sabemos que la corriente es  $I = nAv_d q$  y si la reemplazamos en

la expresión anterior

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B} \tag{4.4}$$

donde  $\vec{L}$  es un vector de magnitud  $L$  y apunta en la misma dirección que la corriente.



**Figura 147. Sección de segmento de alambre por donde se mueven los portadores de carga con velocidad  $\vec{v}_d$ , el campo magnético es perpendicular al segmento y va entrando en la página.**

El resultado anterior es muy importante y nos vamos a encontrar frecuentemente con campos magnéticos que son perpendiculares a un segmento de alambre. La expresión  $\vec{F}_m = I \vec{L} \times \vec{B}$  indica claramente que la fuerza es perpendicular al campo magnético y a la dirección de la corriente. Esto queda ilustrado en la figura 148 donde el campo magnético se muestra entrando en la página o apuntando hacia arriba. La magnitud de la fuerza es:

$$F_m = IBL$$

Ahora vamos a ver el CASO GENERAL donde el alambre no necesariamente está en una línea recta y  $\vec{B}$  y puede tener cualquier dirección. La referencia es la figura 149 y supongamos que por el elemento de línea  $d\vec{l}$  pasa una corriente  $I$ . La fuerza sobre ese segmento es

$$dF_m = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

donde  $d\vec{F}_m$  se dirige hacia afuera de la página. La ecuación anterior puede ser integrada sobre un circuito parcial o completo.

$$\vec{F}_m = I \int_a^b d\vec{l} \times \vec{B}$$

donde  $a$  y  $b$  representan los extremos del alambre. Si el circuito es cerrado

$$\vec{F}_m = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B}$$

Un caso especial es cuando  $\vec{B}$  es uniforme, pues este puede salir fuera de la integral

$$\vec{F}_m = I \left\{ \oint_C d\vec{l} \right\} \times \vec{B}$$

La integral de línea cerrada es fácil de evaluar, pues la suma de vectores infinitesimales que forman un circuito cerrado es cero. De este modo

$$\vec{F}_m = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad (\vec{B} \text{ Uniforme})$$

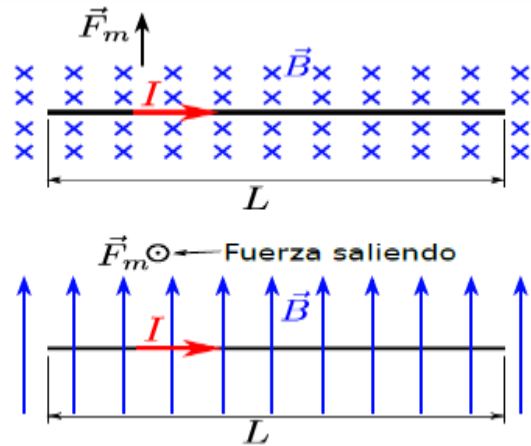


Figura 148. Fuerza sobre un segmento de alambre cuando el campo magnético es perpendicular al alambre. En ambos casos el campo magnético uniforme es perpendicular al alambre. La magnitud de la fuerza magnética es  $F = IBL$

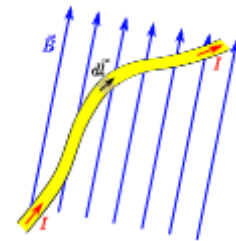


Figura 149. Caso general de un alambre con corriente en presencia de un campo magnético.

**EJEMPLO 1.**

Un alambre que se dobla en forma de un semicírculo de radio  $R$  forma un circuito cerrado y lleva una corriente  $I$ . El alambre está sobre el plano  $xy$ , y un campo uniforme se dirige a lo largo del eje  $+y$  como se muestra en la figura 150. Encontrar la magnitud y dirección de la fuerza sobre la parte recta del alambre y sobre la parte curva.

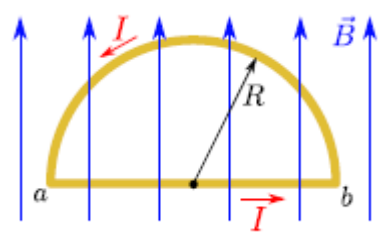


Figura 150 Alambre semicircular.

**Solución:** Como el campo magnético uniforme es perpendicular al segmento recto  $ab$ , la magnitud de la fuerza sobre ese segmento es simplemente  $F_{ab} = ILB = I2RB$ , además la dirección de la fuerza es hacia afuera de la página. Sólo nos falta calcular la fuerza sobre el segmento curvo. La respuesta es muy sencilla pues sabemos que la fuerza total sobre el circuito cerrado es cero, entonces la magnitud de la fuerza es también  $I2RB$ , pero con dirección entrando en la página. En resumen, las dos fuerzas son:

$$\vec{F}_{ab} = 2RIB\hat{k} \qquad \vec{F}_{ba} = -2RIB\hat{k}$$

Es un buen ejercicio obtener en forma explícita  $\vec{F}_{ba}$

**EJEMPLO 2**

En la figura 151, el cubo tiene un lado de 40.0 cm. Los cuatro segmentos rectos de alambre  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ , y  $da$  forman un circuito cerrado que lleva una corriente  $I = 5.00$  A, en la dirección mostrada. Un campo magnético uniforme de magnitud  $B = 0.0200$  T se dirige a lo largo de la dirección  $y$ . Determinar la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre cada segmento.

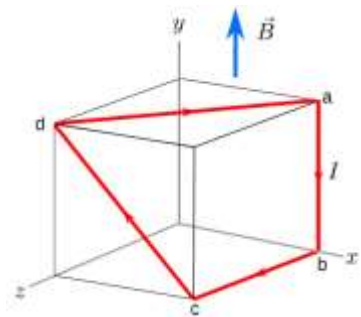


Figura 151 Cubo.

**Solución:** Este es un caso de un segmento de alambre recto en presencia de un campo magnético uniforme. Entonces podemos usar la ecuación  $\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$  para este problema.

En primer lugar, obtenemos las direcciones de las corrientes (en unidades de metros):

$$\vec{L}_{ab} = -0.400\hat{j} \quad \vec{L}_{bc} = 0.400\hat{k} \quad \vec{L}_{cd} = -0.400\hat{j} + 0.400\hat{j} \quad \vec{L}_{da} = 0.400\hat{i} - 0.400\hat{k}$$

Considerando que el campo magnético es  $\vec{B} = 0.0200\hat{j}$ , formamos los productos cruz para obtener las fuerzas (en Newton). En el primer caso la fuerza es nula porque  $\vec{B}$  es paralelo al segmento  $ab$

$$\vec{F}_{ab} = I\vec{L}_{ab} \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{F}_{bc} = I\vec{L}_{bc} \times \vec{B} = -40.0 \times 10^{-3}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{cd} = I\vec{L}_{cd} \times \vec{B} = -40.0 \times 10^{-3}\hat{i}$$

$$\vec{F}_{da} = I\vec{L}_{da} \times \vec{B} = 40.0 \times 10^{-3}(\hat{i} + \hat{k})$$

Notar que la fuerza total sobre el circuito es cero.

### EJEMPLO 3

Un conductor es suspendido por dos alambres flexibles como se muestra en la figura 152. El conductor tiene una masa por unidad de longitud de 0.0400 kg/m. Existe un campo magnético uniforme entrando en la página de magnitud 3.60 T. ¿Cuál debe ser la corriente en el conductor para que la tensión en los alambres de soporte sea cero? ¿Cuál es la dirección de la corriente?

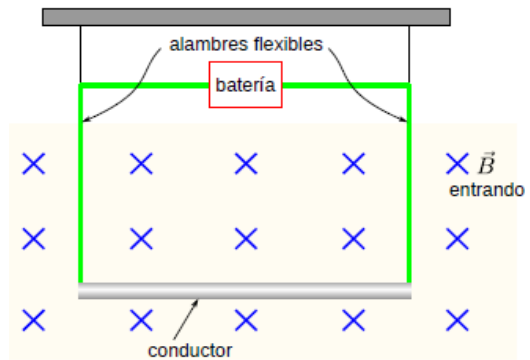


Figura 152

#### Solución:

En ausencia de campo magnético, la tensión de los cables debe igualar al peso del conductor. Para que la tensión de los cables sea cero, la fuerza magnética debe ser igual al peso del conductor. La figura muestra la dirección que debe tener la corriente para que la fuerza magnética apunte hacia arriba. Entonces la condición es (figura 153)

$$mg = F_m = ILB$$

donde  $L$  es el largo y  $m$  la masa del conductor. De esta expresión obtenemos la corriente

$$I = \frac{mg}{LB}$$

De esta expresión no conocemos ni  $L$  ni  $m$ . Sin embargo  $m/L = 0.0400 \text{ kg/m}$  es la masa por unidad de longitud. Luego

$$I = \frac{0.0400 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{3.60 \text{ T}} = 0.109 \text{ A}$$

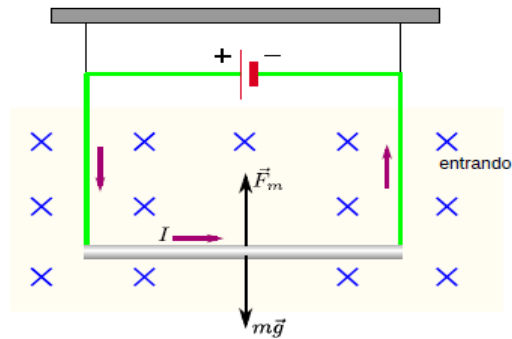


Figura 153

### Fuerza magnética entre dos conductores paralelos

En el tema anterior se describió la fuerza magnética que actúa sobre un conductor que lleva una corriente, colocado en un campo magnético externo. Ya que la corriente en un conductor genera su propio campo magnético, es fácil entender que dos conductores que transportan una corriente ejercen fuerzas magnéticas entre sí. Estas fuerzas se utilizan como base para definir el amperio y el coulomb.

Imagine dos alambres largos, rectos, paralelos, separados por una distancia  $a$  y que llevan corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en la misma dirección, como se muestra en la figura 154. Es posible



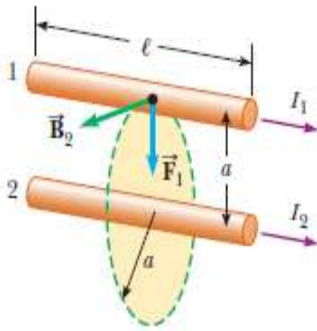


Figura 154. Dos alambres paralelos que transportan cada una corriente estable y ejercen una fuerza magnética uno sobre el otro. El campo  $B_2$  debido a la corriente en el alambre 2 ejerce una fuerza magnética  $F_1 = I_1 \ell B_2$  sobre el alambre 1. La fuerza es de atracción si las corrientes son paralelas (como se muestra) y de repulsión si las corrientes son antiparalelas.

determinar la fuerza ejercida sobre un alambre debido al campo magnético desplegado por el otro alambre. El alambre 2, que lleva una corriente  $I_2$  y se identifica arbitrariamente como alambre fuente, crea un campo magnético  $\vec{B}_2$  en la ubicación del alambre 1, el alambre de prueba. La dirección de  $\vec{B}_2$  es perpendicular al alambre 1, como se muestra en la figura 154. De acuerdo con la ecuación 4.4, la fuerza magnética en un tramo de longitud  $\ell$  del alambre 1 es  $\vec{F}_1 = I_1 \vec{\ell} \times \vec{B}_2$ . En vista de que en este caso  $\ell$  es perpendicular a  $\vec{B}_2$ , la magnitud de  $\vec{F}_1$  es  $F_1 = I_1 \ell B_2$ . Ya que la magnitud de  $\vec{B}_2$  está dada por la ecuación  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ ,

$$F_1 = I_1 \ell B_2 = I_1 \ell \left( \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ell \quad (4.5)$$

La dirección de  $\vec{F}_1$  es hacia el alambre 2, debido a que  $\ell \times \vec{B}_2$  va en esa dirección. Si se calcula el campo establecido por el alambre 1 sobre el alambre 2, se encontrará que la fuerza  $\vec{F}_2$  que actúa sobre el alambre 2 es de igual magnitud y de dirección opuesta a  $\vec{F}_1$ . Esto es lo que se esperaba, ya que la tercera ley de Newton debe cumplirse. Cuando las corrientes se encuentran en direcciones opuestas (esto es, cuando en la figura 154 se invierte una de las corrientes), las fuerzas se invierten y los alambres se repelen. En consecuencia, **conductores paralelos que llevan corrientes en una misma dirección se atraen, y conductores paralelos que llevan corrientes en direcciones opuestas se repelen.**

Debido a que es igual la magnitud de las fuerzas en ambos alambres, simplemente se señala la magnitud de la fuerza magnética entre alambres como  $F_B$ . Puede volver a escribir esta magnitud en función de la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (4.6)$$

La fuerza entre dos alambres paralelos es utilizada para definir el **ampere** de esta manera: Cuando  $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$  es la magnitud de la fuerza por unidad de longitud presente entre dos alambres largos y paralelos que llevan corrientes idénticas y están separados 1 m, se define la corriente en cada alambre como 1 A.

El valor  $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$  se obtiene a partir de la ecuación 30.12 con  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$  y  $a = 1 \text{ m}$ . Puesto que esta definición se basa en una fuerza, puede utilizarse una medición mecánica para estandarizar al ampere. Por ejemplo, el National Institute of Standards and Technology utiliza un instrumento llamado *balanza de corriente* para mediciones básicas de corriente. Los resultados son utilizados para estandarizar otros instrumentos más convencionales, como los amperímetros.

La unidad del SI de carga, el **coulomb**, se define en función del ampere: cuando un conductor lleva una corriente estable de 1 A, la cantidad de carga que fluye a través de la sección transversal del conductor durante 1 s es 1 C.

En la deducción de las ecuaciones 4.5 y 4.6, se supone que ambos alambres son largos, en comparación con la distancia que los separa. De hecho, sólo un alambre necesita ser largo. Las ecuaciones describen con precisión las fuerzas que un alambre largo y un alambre recto paralelo de longitud limitada  $\ell$  ejercen uno sobre el otro.

**Pregunta rápida** Un resorte relajado en espiral sin corriente se cuelga del techo. Cuando se cierra un interruptor para que exista una corriente en el resorte, ¿las espiras se a) acercan, b) separan o c) no se mueven en absoluto?

**Torque sobre una espira con corriente**

En la sección vimos que un campo magnético ejerce una fuerza sobre un conductor con corriente y también concluimos que si el campo es uniforme la fuerza neta sobre un circuito cerrado es cero. Sin embargo a pesar que la fuerza neta es cero, eso no significa que el torque neto sea cero. Por ejemplo la figura 155 muestra una espira rectangular en presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . La magnitud de las fuerzas sobre los segmentos de longitud  $a$  son

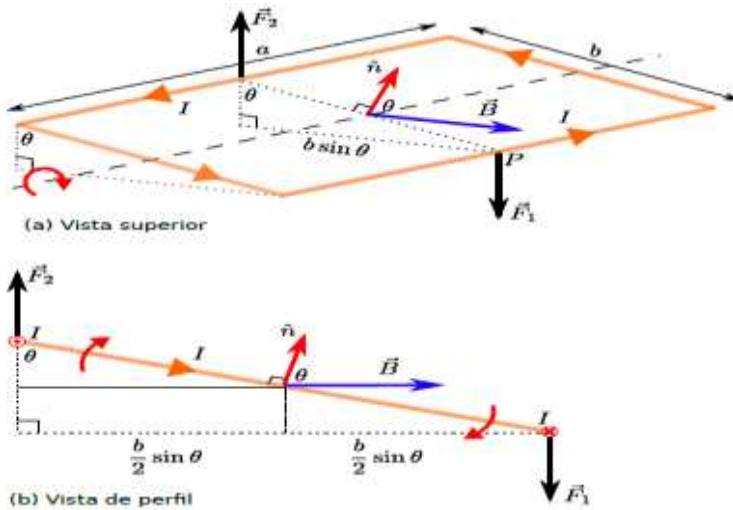


Figura 155: Una espira rectangular donde el vector unitario  $\hat{n}$  forma un ángulo  $\theta$  co el campo magnético uniforme  $B$ .

$$F_1 = IaB \quad F_2 = IaB$$

pero con direcciones opuestas de tal manera que ellas forman una par de fuerzas que ejercen un torque que hace girar la espira. Para cada fuerza, el brazo de palanca es  $\frac{b}{2} \sin \theta$ , entonces la magnitud de los torques es:

$$\mathcal{T}_1 = \frac{b}{2} \sin \theta F_1 = \frac{b}{2} \sin \theta IaB \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_2 = \frac{b}{2} \sin \theta F_2 = \frac{b}{2} \sin \theta IaB$$

La magnitud del torque total sobre la espira es

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = IabB \sin \theta = IAB \sin \theta$$

donde  $A = ab$  es el área de la espira. Si la espira tiene  $N$  vueltas el torque es

$$\mathcal{T} = NIAB \sin \theta$$

Este torque hace girar la espira de tal forma que  $\hat{n}$  tiende a estar paralelo a  $\vec{B}$ . Una forma conveniente de expresar este torque es en forma vectorial

$$\vec{\mathcal{T}} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

donde  $\vec{A}$  es un vector de magnitud  $A = ab$  y es perpendicular a la superficie formada por la espira.

El torque sobre una espira con corriente en presencia de un campo magnético es la base cómo funcionan los motores eléctricos. Como muestra la figura 156, la armadura de un motor consiste en una espira de alambre (con muchas vueltas) que puede rotar en un eje. Cuando una corriente pasa a través de la espira, el campo magnético ejerce un torque sobre la armadura y causa que esta rote. La corriente no puede ser constante porque la armadura solo oscilaría alrededor de la posición de equilibrio. Para mantener el motor girando, se usa un conmutador, que tiene como función revertir la dirección de la corriente cada  $180^\circ$ . La inversión de la corriente hace que el motor siempre e impide que este llegue a la posición de equilibrio.

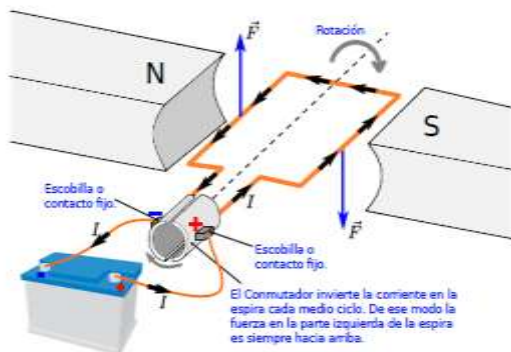


Figura 156: Principio básico de un motor eléctrico. Notar que el conmutador está dividido en dos partes, de tal forma que el terminal positivo de la batería envía corriente a cualquiera de los alambres que toque la mitad derecha del conmutador.

### 4.3 Ley de Biot-Savart.

La utilidad de la ley de Ampere para determinar el campo magnético  $\vec{B}$  debido a corrientes eléctricas particulares está restringida a situaciones donde la simetría de las corrientes dadas permite evaluar  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  con facilidad. Esto, desde luego, no invalida la ley de Ampere ni reduce su importancia fundamental. Recuerde el caso eléctrico, donde la ley de Gauss se considera fundamental, pero está limitada en su uso para calcular realmente  $\vec{E}$ . Con frecuencia debemos determinar el campo eléctrico  $\vec{E}$  mediante otro método que suma las aportaciones debidas a elementos de carga infinitesimales  $dq$  por medio de la ley de Coulomb  $dE = (1/4\pi\epsilon_0) (dq/r^2)$  Un equivalente magnético a esta forma infinitesimal de la ley de Coulomb sería útil para corrientes que no tienen gran simetría. Tal ley la desarrollaron Jean Baptiste Biot (1774-1862) y Felix Savart

(1791-1841), poco después del descubrimiento de Oersted en 1820 de que una corriente produce un campo magnético. De acuerdo con Biot y Savart, una corriente  $I$  que fluye en cualquier trayectoria se puede considerar como muchos pequeños (infinitesimales) elementos de corriente, como en el alambre de la figura 157. Si  $d\ell$  representa cualquier longitud infinitesimal a lo largo de la cual fluye la corriente, entonces el campo magnético  $d\vec{B}$ , en cualquier punto P en el espacio, debido a este elemento de corriente, está dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.7) \text{ Ley de Biot Savart}$$

donde  $\vec{r}$  es el vector de desplazamiento desde el elemento  $d\vec{\ell}$  hasta el punto P, y  $\hat{r} = \vec{r} / r$  es el vector unitario (magnitud = 1) en la dirección de  $\vec{r}$  (véase la figura 157).

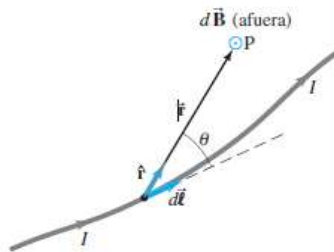


Figura 157. Ley de Biot-Savart: el campo en P debido al elemento de corriente  
 $I d\vec{\ell}$  es  $d\vec{B} = (\mu_0 I / 4\pi) (d\vec{\ell} \times \hat{r} / r^2)$ .

La ecuación 4.7 se conoce como **ley de Biot-Savart**. La magnitud de  $d\vec{B}$  es

$$dB = \frac{\mu_0 I d\ell \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (4.8)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $d\ell$  y  $\vec{r}$  (figura 157). El campo magnético total en el punto P se encuentra entonces al sumar (integrando) todos los elementos de corriente:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Advierta que esto es una suma *vectorial*. La ley de Biot-Savart es el equivalente magnético de la ley de Coulomb en su forma infinitesimal. Incluso es una ley de cuadrado inverso, como la ley de Coulomb.

Una importante diferencia entre la ley de Biot-Savart y la ley de Ampere es que en la ley de Ampere [ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc}$ ],  $\vec{B}$  no necesariamente se debe sólo a la corriente encerrada por la trayectoria de integración. Pero en la ley de Biot-Savart el campo  $d\vec{B}$  en la ecuación 4.7 se debe sólo, y por completo, al elemento de corriente  $I d\vec{\ell}$ . Para encontrar el  $\vec{B}$  total en cualquier punto del espacio, es necesario incluir *todas* las corrientes.

**EJEMPLO 1.**

**$\vec{B}$  debido a corriente  $I$  en un alambre recto.** Para el campo cerca de un largo alambre recto que conduce una corriente  $I$ , demuestre que la ley de Biot-Savart produce el mismo resultado que la ecuación  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ ,

**PLANTEAMIENTO** Calcule el campo magnético en la figura 158 en el punto P, que está a una distancia perpendicular  $R$  de un alambre infinitamente largo. La corriente se mueve hacia arriba, y tanto como que aparece en el producto cruz de la ecuación 4.7, están en el plano de la página. En consecuencia, la dirección del campo debido a cada elemento de corriente debe dirigirse hacia el plano de la página, como se indica (regla de la mano derecha para el producto cruz). Por lo tanto, todos tienen la misma dirección en el punto P, y se suman para dar a la misma dirección, en concordancia con los resultados anteriores.

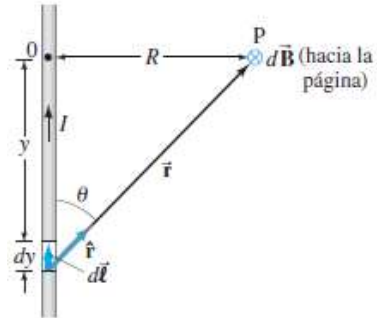


Figura 158. Determinación de  $\vec{B}$  debido a un largo alambre recto con base en la ley de Biot-Savart.

**SOLUCIÓN** La magnitud de será

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{dy \sin \theta}{r^2}$$

donde  $dy = d\ell$  y  $r^2 = R^2 + y^2$ . Note que se integra sobre  $y$  (la longitud del alambre), de manera que  $R$  se considera constante. Tanto  $y$  como  $\theta$  son variables, pero no son independientes. De hecho,  $y = -R/\tan \theta$ . Advierta que  $y$  se mide como positivo hacia arriba desde el punto 0, así que para el elemento de corriente que se considera,  $y < 0$ . Entonces,

$$dy = +R \csc^2 \theta d\theta = \frac{R d\theta}{(R/r)^2} = \frac{r^2 d\theta}{R}$$

A partir de la figura 158 se puede ver que  $y = -\infty$  corresponde a  $\theta = 0$  y que  $y = +\infty$  corresponde a  $\theta = \pi$  radianes. Así que la integral se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta = \left[ -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos \theta \right]_0^{\pi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Ésta es justo la ecuación ( $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ) para el campo cerca de un alambre largo, donde se usó  $R$  en vez de  $r$ .

**EJEMPLO 2**

**Espira de corriente.** Determine  $\vec{B}$  para puntos sobre el eje de una espira de alambre circular, de radio  $R$ , que conduce una corriente  $I$ , figura 159.

**PLANTEAMIENTO** Para un elemento de corriente en la parte superior de la espira, el campo magnético  $d\vec{B}$  en el punto P sobre el eje es perpendicular a  $\vec{r}$  como se muestra, y tiene magnitud (ecuación 4.7)

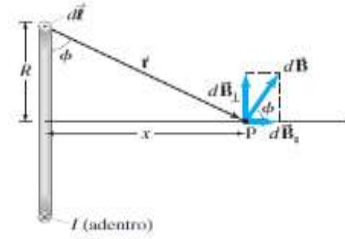


Figura 159. Determinación de  $\vec{B}$  debido a una espira de corriente.

$$dB = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2}$$

pues  $d\vec{\ell}$  es perpendicular ha  $\vec{r}$  de manera que  $|d\vec{\ell} \times \hat{r}| = d\ell$ . Es posible descomponer  $d\vec{B}$  en componentes  $dB_{\parallel}$  y  $dB_{\perp}$ , que son paralela y perpendicular al eje, como se observa.

**SOLUCIÓN** Cuando se suma sobre todos los elementos de la espira, la simetría indica que las componentes perpendiculares se cancelarán en lados opuestos, de manera que  $B_{\perp} = 0$ . En consecuencia, el  $\vec{B}$  total apuntará a lo largo del eje y tendrá magnitud

$$B = B_{\parallel} = \int dB \cos \phi = \int dB \frac{R}{r} = \int dB \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donde  $x$  es la distancia de P desde el centro del anillo,  $yr^2 = R^2 + x^2$ . Ahora ponga  $dB$  de la ecuación anterior e integre en torno a la espira de corriente, y note que todos los segmentos  $d\vec{\ell}$  de corriente están a la misma distancia, desde el punto P:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int d\ell = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pues  $\int d\ell = 2\pi R$ , la circunferencia de la espira.

**NOTA** En el centro mismo de la espira (donde  $x = 0$ ), el campo tiene su valor máximo

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad [\text{en el centro de la espira de corriente}]$$

Recuerde a partir de la sección anterior que una espira de corriente, como la que acabamos de examinar (figura 159), se considera un **dipolo magnético**. Ahí se vio que una espira de corriente tiene un momento dipolar magnético

$$\mu = NIA,$$

donde  $A$  es el área de la espira y  $N$  el número de vueltas en la espira, y cada una conduce una corriente  $I$ . En la sección anterior también se vio que un dipolo magnético colocado en un campo magnético externo experimenta una torca (o torque) y posee energía potencial, tal como un dipolo eléctrico. En el ejemplo 2 se observó otro aspecto de un dipolo magnético: el campo magnético *producido por* un dipolo magnético tiene magnitud, a lo largo del eje del dipolo, de

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Esto se puede expresar en términos del momento dipolar magnético  $\mu = IA = I\pi R^2$  (para una sola espira  $N = 1$ ):

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [\text{dipolo magnético}] \quad (4.8a)$$

(Tenga cuidado en distinguir  $\mu$  para momento dipolar, de  $\mu_0$ , la constante de permeabilidad magnética). Para distancias lejanas de la espira,  $x \gg R$ , esto se convierte en

$$B \approx \frac{\mu_0 \mu}{2\pi x^3} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Sobre el eje,} \\ \text{dipolo magnético, } x \gg R \end{array} \right] \quad (4.8b)$$

El campo magnético sobre el eje de un dipolo magnético aumenta con el cubo de la distancia, tal como lo hace el campo eléctrico en el caso de un dipolo eléctrico.  $B$  disminuye como el cubo de la distancia, también para puntos que no están sobre el eje, aunque el factor multiplicador no es el mismo. El campo magnético debido a una espira de corriente se puede determinar en varios puntos con base en la ley de Biot-Savart y los resultados están en concordancia con los experimentos. En la figura 160 se muestran las líneas de campo en torno a una espira de corriente.

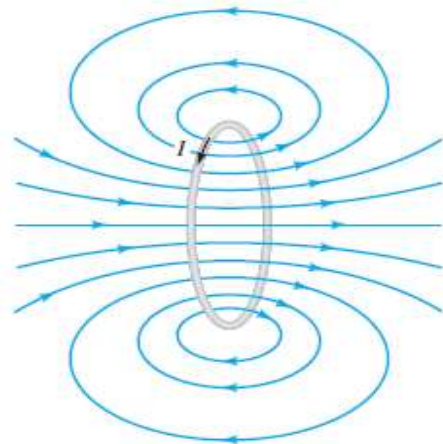


Figura 160 Campo magnético debido a una espira circular de alambre.

### EJEMPLO 3

**$\vec{B}$  debido a un segmento de alambre.** Un cuarto de una espira circular de alambre conduce una corriente  $I$ , como se muestra en la figura 161. La corriente  $I$  entra y sale sobre segmentos rectos de alambre, como se ilustra; los alambres rectos están a lo largo de la dirección radial desde el centro  $C$  de la porción circular. Determine el campo magnético en el punto  $C$ .

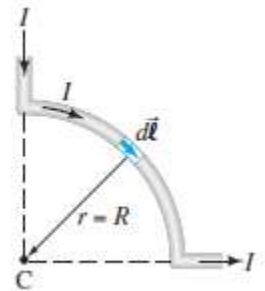


Figura 161. Ejemplo 3

**PLANTEAMIENTO** La corriente en las secciones rectas no producen campo magnético en el punto  $C$ , porque  $d\vec{l}$  y  $\hat{r}$  en la ley de Biot-Savart (ecuación 4.7) son paralelos y, por lo tanto  $d\vec{l} \times \hat{r} = 0$ . Cada pieza  $d\vec{l}$  de la sección curva del alambre produce un campo  $d\vec{B}$  que apunta hacia la página en  $C$  (regla de la mano derecha).



**SOLUCIÓN** La magnitud de cada  $d\vec{B}$  debido a cada  $d\ell$  de la porción circular de alambre es (ecuación 4.8)

$$dB = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R^2}$$

donde  $r = R$  es el radio de la sección curva y  $\sin \theta$  en la ecuación 4.8 es  $\sin 90^\circ = 1$ . Con  $r = R$  para todos los segmentos  $d\vec{\ell}$  se integra sobre un cuarto de círculo.

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{4} 2\pi R \right) = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

## 4.4 Ley de Gauss del Magnetismo.

### *Propiedades del campo magnético en el espacio libre*

Es un hecho experimental que todos los campos magnéticos pueden ser descritos en función de una distribución de corriente. Es decir, para corrientes estacionarias, el campo magnético siempre toma la forma descrita en la sección anterior:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} dv_1$$

donde  $\vec{J}_1$  es una densidad de corriente. Se puede demostrar matemáticamente que si  $\vec{B}$  tiene la forma de la ecuación anterior entonces se cumple que

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}_2) = 0$$

La divergencia de  $\vec{B}$  es nula. También se le conoce como ley de Gauss del magnetismo.

Esta forma diferencial también se puede expresar en forma integral al aplicar el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{A} = 0$$

Donde la integral de superficie se aplica a una superficie que rodea a un **volumen arbitrario**. Este hecho implica que no hay fuentes de flujo magnético y **las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas**. En otras palabras, no hay polos magnéticos aislados (monopolos).

El hecho de que la divergencia del campo magnético se anule puede ser postulado sin mayor demostración. Similarmente se puede postular que

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}_2) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}_2)$$

En resumen, las dos expresiones

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \gamma \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

constituyen los postulados fundamentales de la magnetostática en el vacío. En especial, la expresión  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  también se conoce como la ley de Gauss en magnetismo.

### Ley de Gauss para magnetismo

Casi estamos en condiciones de enunciar las ecuaciones de Maxwell, pero primero es necesario discutir el equivalente magnético de la ley de Gauss. Como vimos en unidades anteriores, para un campo magnético  $\vec{B}$  el flujo magnético  $\Phi_B$  a través de una superficie se define como

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

donde la integral está sobre el área de una superficie, ya sea abierta o cerrada. El flujo magnético a través de una superficie cerrada (esto es, una superficie que encierra por completo un volumen) se expresa como

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

En el caso eléctrico, en la sección 1.5 se vio que el flujo eléctrico  $\Phi_E$  a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta total  $Q$  encerrada por la superficie, dividida entre  $\epsilon_0$  (ecuación Ley de Gauss):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

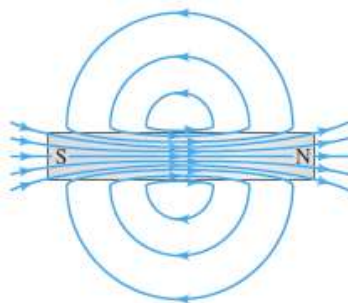


Figura 162. Líneas de campo magnético para un imán de barra.

Esta relación es la ley de Gauss para electricidad.

Es posible escribir una relación similar para el flujo magnético. Sin embargo, vimos que, a pesar de búsquedas intensas, jamás se han observado polos magnéticos aislados (monopolos), el equivalente magnético de cargas eléctricas solas. Por lo tanto, la ley de Gauss para el magnetismo es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (4.9)$$

En términos de líneas de campo magnético, esta relación dice que tantas líneas entran al volumen encerrado como las que salen de él. Si de hecho no existen los monopolos magnéticos, entonces

no hay “fuentes” o “sumideros” de donde partan o donde se detengan las líneas de campo magnético, el correspondiente a las líneas de campo eléctrico que parten de cargas positivas y terminan en cargas negativas. Así, las líneas de campo magnético deben ser continuas. Incluso para un imán de barra, un campo magnético  $\vec{B}$  existe tanto adentro como afuera del material magnético, y las líneas de  $\vec{B}$  son espiras cerradas, como se muestra en la figura 162.

## 4.5 Ley de Ampere.

Esta ley permite encontrar campos magnéticos en casos donde la ley de Biot-Savart resultaría muy complicada de aplicar. La ley de Ampere es útil cuando queremos calcular el campo magnético de distribuciones de corriente de alta simetría. Esta ley es análoga a la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico de distribuciones de carga de alta simetría.

Consideremos el caso de un alambre largo con corriente  $I$ . Ya hemos calculado que la magnitud del campo magnético, generado por la corriente, a una distancia  $y$  del alambre está dado por la expresión

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

Esta expresión nos muestra que la magnitud del campo magnético es directamente proporcional a la corriente en el alambre.

En general, el campo magnético en el espacio alrededor de una corriente eléctrica es proporcional a la corriente eléctrica, la cual sirve como fuente de campo magnético. Esto es en analogía como el campo eléctrico en el espacio es proporcional a la carga que genera el campo.

Consideremos la figura 163 donde una corriente eléctrica  $I$  atraviesa la superficie creada por una trayectoria cerrada  $C$ . Si dividimos la trayectoria en trozos pequeños de longitud  $\Delta l$  entonces definimos los vectores  $\Delta \vec{l}$  tangentes a la trayectoria. En cada punto del trozo de trayectoria tendremos un campo magnético  $\vec{B}$ . La **ley de Ampere** establece que para *cualquier trayectoria cerrada* debe cumplirse que

$$\sum B_{\parallel} \Delta l = \mu_0 I$$

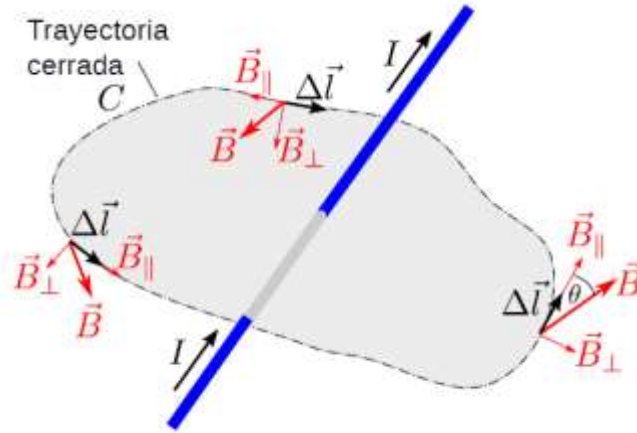


Figura 163: Campo magnético  $\vec{B}$  es generado por una corriente eléctrica atravesando una curva (trayectoria) cerrada C. La curva se divide en segmentos pequeños  $\Delta l$  y se suman los productos  $B_{\parallel} \Delta l$  a través de toda la curva.

Donde  $B_{\parallel}$  es la componente tangencial (paralela) a la trayectoria en todo punto. Esta suma es para todos los trozos y **no depende de la trayectoria**.

La expresión anterior se puede escribir en forma equivalente mediante vectores

$$\sum \vec{B} * \Delta \vec{l} = \sum B \cos \theta \Delta l = \mu_0 I$$

donde  $B \cos \theta = B_{\parallel}$  y  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\Delta \vec{l}$ .

Por supuesto que la precisión de esta suma depende de cuantos trozos  $\Delta l$  se elijan para dividir la trayectoria entera. La forma más correcta de la ley de Ampere es en su forma integral

$$\sum \vec{B} * \Delta \vec{l} \quad \rightarrow \quad \int \vec{B} * d\vec{l}$$

Así tenemos la ley de Ampere

$$\oint_C \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 I \tag{4.10}$$

Esta es una integral de línea para una trayectoria cerrada.

La ley de Ampere establece tres condiciones importantes para la suma  $\sum \vec{B} * \Delta \vec{l}$  (o integral  $\oint_C \vec{B} * d\vec{l}$ ):

Es independiente (no depende) de la forma de la curva C alrededor de la corriente.

Es independiente por donde pase la corriente a través de la superficie rodeada por la curva C.

Depende solamente de la corriente total que pase a través de la superficie que rodea la curva C.

Este resultado se obtuvo para el caso particular de un alambre recto muy largo con corriente I. Sin embargo, *experimentalmente* se cumple que cuando una trayectoria cerrada arbitraria  $\Gamma$  es

atravesada por una corriente estable  $I$ , se cumple la siguiente relación general de la ecuación (4.10), donde  $I = I_{\text{neto encerrada}}$  representa la corriente total encerrada por la curva cerrada  $\Gamma$  (curva Amperiana). Esta es la llamada ley de Ampere. Usando el teorema de Stokes, esta ley se puede escribir en forma diferencial

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \quad (4.11)$$

donde  $d\vec{S}$  es el vector diferencial que sale de la superficie que es limitada por la curva Amperiana  $\Gamma$ . Por otra parte, la corriente que atraviesa la superficie  $S$  limitada por la Amperiana  $\Gamma$ , se puede escribir en la forma  $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ , donde  $\vec{J}$  es la densidad de corriente por unidad de área que estudiamos en las Unidades anteriores. Reemplazando en (4.11), se tiene

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.12)$$

dado que la superficie  $d\vec{S}$  es arbitraria, se cumple que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.13)$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Ampere (4.30). Esta no es una ecuación de Maxwell, dado que no toma en cuenta la variación de los campos eléctricos en el tiempo  $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ . La generalización de esta ley viene dada por

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.14)$$

El último término de la derecha fue obtenido por Maxwell. Esta ley se denomina ley de Ampere-Maxwell y fue fundamental para el desarrollo de la física electromagnética.

### ***Ley de Ampere-Maxwell***

La ley de Ampere en su forma estática, relaciona la circulación del campo magnético en un contorno cerrado con la corriente que atraviesa la superficie que encierra el contorno. Ahora bien, para el caso dinámico esta relación se modifica sustancialmente. Para determinar esta relación consideremos

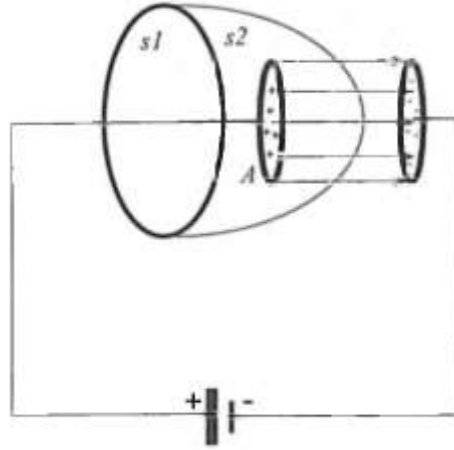


Figura 164: Flujo de campo eléctrico a través de las superficies  $S_1$  y  $S_2$ : Ley de Ampere - Maxwell.

una superficie cerrada constituida por dos superficies,  $S_1$  y  $S_2$ , tal como se indica en la figura (164). Para esta geometría en particular, la ley de Ampere está bien definida para el contorno de la superficie  $S_1$ , mientras que para el contorno de la superficie  $S_2$  no. Ya que el flujo a través de esta superficie es cambiante en el tiempo. La discriminación de este comportamiento es atribuida a Maxwell. Si el conductor de área  $A$ , de la figura (164) está conectado mecánicamente a una fuente de voltaje, la carga de este conductor aumenta en el tiempo. El flujo de campo eléctrico a través de la superficie  $S_2$ , está dado por;

$$\frac{dy}{dx}(\Phi_E) = A \frac{dy}{dx} \Phi_E = \frac{A d\sigma}{\epsilon_0 dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} I_d$$

donde,

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E$$

La corriente  $I_d$ , se denomina corriente de desplazamiento. Con esta consideración la ley de Ampere establecida a través de las superficies  $S_1$  y  $S_2$  será:

$$\oint \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E \right)$$

donde  $I$ , es la corriente de conducción, la cual está correlacionada con el movimiento de carga real, tal como electrones protones e iones. Aunque la carga no puede cruzar físicamente la superficie  $S_2$ , las líneas de campo eléctrico si la cruzan, produciendo una corriente de desplazamiento  $I_d$ .

**Pregunta rápida** Clasifique de menor a mayor las magnitudes de  $\oint \vec{B} * d\vec{S}$  para las trayectorias cerradas de la figura 165.

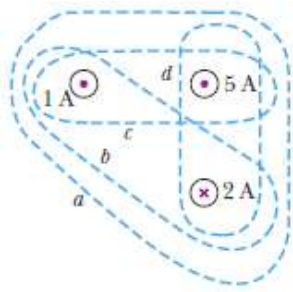


Figura 165: (pregunta rápida) Cuatro trayectorias cerradas alrededor de tres alambres conductores de corriente.

### Estrategia para resolver problemas **Ley de Ampere**

**IDENTIFICAR** los conceptos relevantes: Al igual que la ley de Gauss para la electricidad, la ley de Ampere siempre se cumple, pero es más útil en situaciones en las que el modelo del campo magnético tiene un alto grado de simetría. En tales situaciones, se usa la ley de Ampere para encontrar una relación entre el campo magnético como función de la posición y la corriente que genera el campo.

**PLANTEAR** el problema de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Seleccione la trayectoria de integración que se usará con la ley de Ampere. Si lo que quiere es determinar el campo magnético en cierto punto, entonces la trayectoria debe pasar por ese punto. La trayectoria de integración no necesita ser ninguna frontera física real. Por lo general, es una curva puramente geométrica; puede estar en el espacio vacío, incrustada en un cuerpo sólido o tener algo de ambas cosas. La trayectoria de integración debe tener suficiente *simetría* para hacer posible la evaluación de la integral. Si el problema tiene simetría cilíndrica, la trayectoria de integración por lo general será un círculo coaxial con el eje del cilindro.
2. Determine la(s) variable(s) buscada(s). Generalmente, una de ellas será la magnitud del campo  $\vec{B}$  como función de la posición.

**EJECUTAR** la solución como sigue:

1. Efectúe la integral a lo largo de la trayectoria de integración que haya elegido. Si es tangente a toda la trayectoria de integración o a una parte de ella y tiene la misma magnitud  $B$  en todos los puntos, entonces su integral de línea es igual al producto de  $B$  por la longitud de esa porción de la trayectoria. Si es  $\vec{B}$  perpendicular a alguna porción de la trayectoria, esa parte no hace ninguna contribución a la integral.
2. En la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ ,  $\vec{B}$  siempre es el campo magnético *total* en cada punto de la trayectoria. Este campo puede ser causado en parte por corrientes encerradas por la trayectoria y en parte por otras fuera de ella. Si *no* hay corrientes netas contenidas dentro de la trayectoria, el campo en los puntos sobre la trayectoria no necesariamente es igual a cero, pero la integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  siempre es igual a cero.
3. Determine la corriente  $I_{enc}$  encerrada por la trayectoria de integración. El signo de esta corriente está dado por alguna regla de la mano derecha. Doble los dedos de su mano derecha de manera que sigan la trayectoria de integración en la dirección en que realizó la

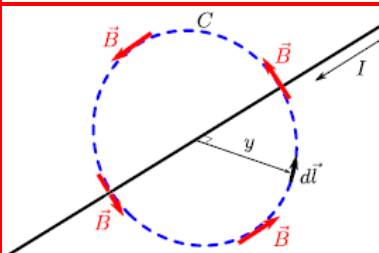


integración. Entonces, su pulgar apunta en la dirección de la corriente positiva. Si es  $\vec{B}$  tangente a la integración en todos los puntos a lo largo de la trayectoria e  $I_{enc}$  es positiva, entonces la dirección  $\vec{B}$  de es la misma que la dirección de la trayectoria de integración; si en vez de ello,  $I_{enc}$  es negativa,  $\vec{B}$  está en la dirección opuesta a la dirección de integración.

4. Utilice la ley de Ampere,  $\oint \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 I$ , para despejar la variable buscada.

**EVALUAR la respuesta:** Si el resultado es una expresión para la magnitud del campo como función de la posición, se puede comprobar examinando la forma en que se comporta la expresión en diferentes límites.

**EJEMPLO 1:** Campo magnético debido a un alambre largo



Este problema se resuelve muy fácilmente usando la ley de Ampere

$$\sum \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 I$$

Para ello elegimos una curva que rodee al alambre. En este caso elegimos una circunferencia por conveniencia. Si observamos la figura vemos que  $\vec{B}$  es siempre paralelo al elemento de longitud

$\Delta\vec{l} (B = B_{\parallel})$ , por lo tanto  $\vec{B} * \Delta\vec{l} = B \Delta l$

$$\sum \vec{B} * \Delta\vec{l} = \sum B \Delta l = \mu_0 I$$

El campo puede salir fuera de la suma pues este constante en cualquier punto de la trayectoria circular de radio y. Entonces obtenemos

$$B \sum \Delta l = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi y = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

**EJEMPLO 2.** Figura 166: Campo Bobina

Calcule el campo producido por una bobina infinita de N espiras (vueltas) por unidad de largo y que lleva una corriente I.

**Solución:**

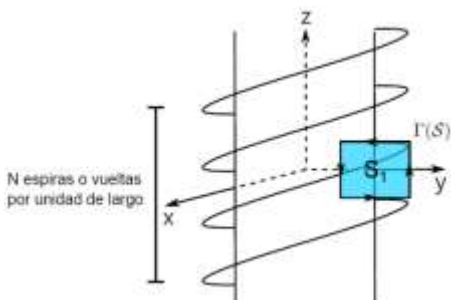


Figura 166: Campo Bobina.

Por simetría los campos tendrán dirección según Z. Llamemos a los campos en el interior:  $\vec{B}_i = B_i \hat{k}$  y en el exterior  $\vec{B}_e = B_e \hat{k}$

Por la geometría del problema, el campo afuera puede suponerse despreciable, ya que el campo de espiras

contiguas se cancela.

Para la interior tomamos el contorno  $\Gamma(S)$  de la superficie S cuya mitad esta dentro de la bobina y la otra está afuera. Se cumple:

$$\oint_{\Gamma_i(S)} \vec{B}_i * d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

Pero tomando una trayectoria de largo  $l$  en el eje Z se tiene  $I_{total} = NI l$ , ya que no hay corriente enlazada afuera de la bobina. Luego:

$$-B_i l = -\mu_0 NI l \Rightarrow \therefore \vec{B}_i = \mu_0 NI \hat{k}$$

La corriente enlazada es negativa dado el sentido de la trayectoria utilizada en la Figura 7.14. Así, en un solenoide (o bobina) ideal el campo al interior es constante y nulo en el exterior.

**EJEMPLO 3:**Figura167: Campo magnético de un solenoide

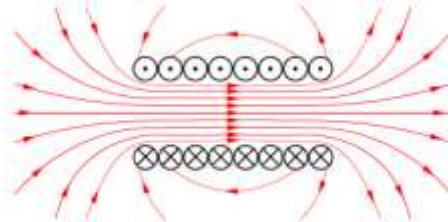


Figura 167 Ejemplo 3.

Un solenoide es un alambre largo enrollado en la forma de una hélice. Con esta configuración se produce un campo magnético aproximadamente uniforme en el espacio (interior) rodeado por el alambre. Calcular  $\vec{B}$  cuando el

largo del solenoide es lo suficientemente largo para evitar problemas de borde.

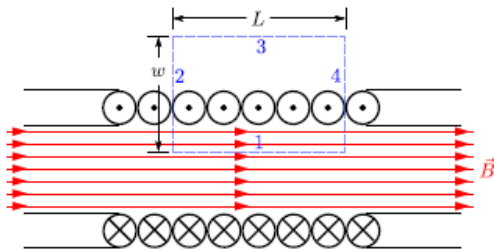


Figura 168 Trayectoria Rectangular.

**Solución:** Cuando el alambre es suficientemente largo, el campo en el interior es aproximadamente uniforme. En la figura de la izquierda se muestra un corte vertical del solenoide. Para usar la ley de Ampere elegimos una trayectoria rectangular (1234) de tal manera que la corriente la atraviese (Figura 168)

$$\int_{1234} \vec{B} * d\vec{l} = \mu_0 I'$$

La integral se puede dividir en cuatro contribuciones: En el interior (1)  $\vec{B}$  es uniforme y paralelo a  $d\vec{l}$ . En (2) y (4)  $\vec{B}$  es perpendicular a  $d\vec{l}$  y las contribuciones serán cero. En el exterior (3)  $\vec{B}$  es aproximadamente nulo, es decir la contribución en el segmento 3 es aproximadamente cero:

$$\underbrace{B \int_1 d\vec{l}}_{(\vec{B} \parallel d\vec{l})} + \underbrace{\int_2 \vec{B} * d\vec{l}}_{0(\vec{B} \perp d\vec{l})} + \underbrace{\int_3 \vec{B} * d\vec{l}}_{0(\vec{B} \approx 0)} + \underbrace{\int_4 \vec{B} * d\vec{l}}_{0(\vec{B} \perp d\vec{l})} = \mu_0 I'$$

Aquí  $I'$  es la corriente que atraviesa el rectángulo. Por el rectángulo pasan varias vueltas del alambre. Si definimos  $n$  como el número de vueltas por unidad de longitud del solenoide

$$n = \frac{\text{vueltas}}{\text{longitud}}$$

entonces el número de vueltas en la longitud  $L$  es  $nL$ . Con esto la corriente es  $I' = nLI$  y tenemos

$$B \int_1 dl = \mu_0 nLI \Rightarrow BL = \mu_0 nLI \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 nLI}$$

Notar, que en este caso, hemos usado integrales y no sumatorias para aplicar la ley de Ampere. El procedimiento es el mismo y por supuesto que el resultado sería el mismo.

**EJEMPLO 4:** Campo magnético de un toroide.

Un toroide de sección circular y radio interior  $a$  consiste de  $N$  vueltas de alambre que lleva una corriente  $I$ . Calcular el campo magnético dentro del toroide (figura169).

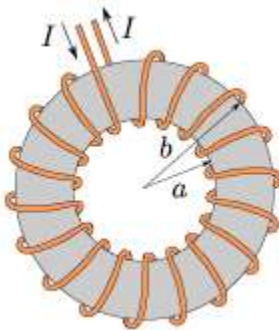


Figura 169 Ejemplo 4

**Solución:**

Este es un problema estándar en todos los libros de texto. La simetría cilíndrica asegura que  $\vec{B}$  solo tiene componente  $\phi$  y que es constante a lo largo de la trayectoria circular de radio  $r$  de la figura 170 de abajo.

Además suponemos que el campo magnético al exterior del toroide es nulo. Es el mismo argumento que usamos para resolver el ejemplo 3 de un solenoide (esto es razonable, pues después de todo un toroide es un solenoide doblado).

Para aplicar la ley de Ampere usamos el contorno (trayectoria) circular de radio  $r$ . Además consideramos el hecho de que  $\vec{B}$  es tangente a la curva y por lo tanto  $\vec{B} * \Delta\vec{l} = B\Delta l$

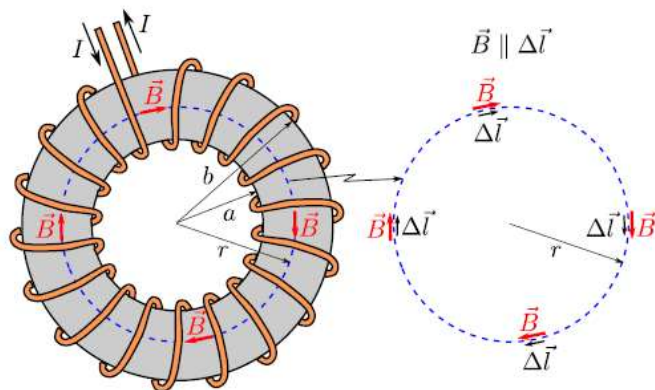


Figura 170 Campo magnético de un Toroide.

$$\sum \vec{B} * \Delta\vec{l} = \sum B \Delta l = B \sum \Delta l = \mu_0 NI$$

La cantidad  $NI$  representa la corriente total que atraviesa el círculo de radio  $r$ . Luego

$$B2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}}$$

Notar que el resultado no depende de  $a$  y tampoco de la forma de la sección transversal del toroide.

## 4.6 Potencial Magnético.

### *Potenciales magnéticos escalar y vectorial*

Como se recordará, la asociación del potencial eléctrico  $V$  con la intensidad del campo eléctrico  $E$  ( $E = -\nabla V$ ) nos permitió simplificar ciertos problemas de campos electrostáticos. De la misma manera, es posible definir un potencial asociado con el campo magnetostático  $B$ . Tal potencial magnético puede ser un escalar  $V_m$  o un vector  $A$ . Para definir  $V_m$  y  $A$  es preciso recordar dos importantes identidades:

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (4.15a)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0 \quad (4.15b)$$

Las cuales rigen siempre sobre cualquier campo escalar  $V$  y campo vectorial  $A$ .

De igual modo que  $E = -\nabla V$ , la relación con  $H$  del potencial magnético escalar  $V_m$  (en amperes) se define de acuerdo con

$$\boxed{H = -\nabla V_m} \quad \text{Si } J = 0 \quad (4.16)$$

La condición añadida a esta ecuación es importante y debe ser explicada. La combinación de las ecuaciones (4.16) y ( $\nabla \times H = J$ ) resulta en

$$J = \nabla \times H = \nabla \times (-\nabla V_m) = 0 \quad (4.17)$$

puesto que  $V_m$  debe satisfacer la condición expresada por la ecuación (4.15a). En consecuencia, la definición del potencial magnético escalar  $V_m$  sólo rige en una región en la que  $J = 0$ , como en la ecuación (4.16). Cabe hacer notar asimismo que, al igual que  $V$  en el caso de los campos electrostáticos,  $V_m$  satisface la ecuación de Laplace; por tanto,

$$\nabla^2 V_m = 0, \quad (J = 0) \quad (4.18)$$

Sabemos ya que en un campo magnetostático  $\nabla \cdot B = 0$ . Para satisfacer al mismo tiempo las ecuaciones ( $\nabla \cdot B = 0$ ) y (4.15b), el *potencial magnético vectorial*  $A$  (en Wb/m) puede definirse de tal forma que

$$\boxed{B = \nabla \times A} \quad (4.19)$$

Así como se definió

$$V = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.20)$$

es posible definir

$$A = \int_L \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R} \quad \text{para corriente de línea} \quad (4.21)$$

$$A = \int_S \frac{\mu_0 K dS}{4\pi R} \quad \text{para corriente superficial} \quad (4.22)$$

$$A = \int_v \frac{\mu_0 J dv}{4\pi R} \quad \text{para corriente volumétrica} \quad (4.23)$$

En vez de hacerlo de la ecuación (4.20) las ecuaciones (4.21) a (4.23) podrían obtenerse de las ecuaciones (4.21) a (4.23). La ecuación (4.21), por ejemplo puede deducirse de la (4.21) en asociación con la (4.19). Ello implica expresar la ecuación (4.21) como

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (4.24)$$

donde  $\mathbf{R}$  es el vector de distancia desde el elemento lineal  $d\mathbf{l}'$  en el punto de origen  $(x', y', z')$  hasta el punto del campo  $(x, y, z)$ , como se muestra en la figura 7.19, y  $R = |\mathbf{R}|$ ; esto es;

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (4.25)$$

Por tanto,

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{(x-x')\mathbf{a}_x + (y-y')\mathbf{a}_y + (z-z')\mathbf{a}_z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

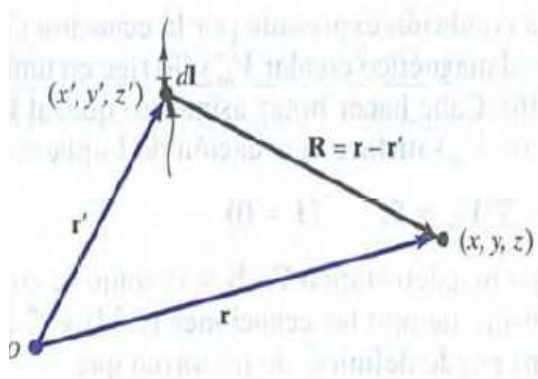


Figura 171. Ilustración del punto de origen  $(x, y, z')$  y el punto del campo  $(x, y, z)$

o

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \left( \frac{1}{R} \right) \quad \left( = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \right) \quad (4.26)$$

donde la derivación se realiza respecto de  $x, y, z$ . Al sustituir esta expresión en la ecuación (4.24) se obtiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L I d\mathbf{l}' \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \quad (4.27)$$

Se aplica entonces la identidad vectorial

$$\nabla \times (fF) = f\nabla \times F + (\nabla f) \times F \quad (4.28)$$

donde  $f$  es un campo escalar y  $F$  un campo vectorial. Si se adopta  $f = 1/R$  y  $F = dI'$  tenemos

$$dI' \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla \times dI' - \nabla \times \left( \frac{dI'}{R} \right)$$

Puesto que  $\nabla$  opera respecto de  $(x, y, z)$  mientras que  $dI'$  es una función de  $(x', y', z)$   $\nabla \times dI' = \mathbf{0}$  Por tanto

$$dI' \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\nabla \times \frac{dI'}{R} \quad (4.29)$$

Con esta ecuación, la ecuación (4.27) se reduce a

$$\mathbf{B} = \nabla \times \int_L \frac{\mu_0 I dI'}{4\pi R} \quad (4.30)$$

La comparación de la ecuación (4.30) con la ecuación (4.29) indica que

$$\mathbf{A} = \int_L \frac{\mu_0 I dI'}{4\pi R}$$

lo que comprueba la ecuación (4.21).

De la sustitución de la ecuación (4.19) en la ecuación ( $\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ) y la aplicación del teorema de Stokes se obtiene

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

o

$$\boxed{\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}} \quad (4.31)$$

Así, el flujo magnético a través de un área dada puede hallarse por medio de la ecuación (7.32) o (7.51). De igual modo, el campo magnético puede determinarse mediante  $V_m$  o  $A$ ; la elección depende de la naturaleza del problema de que se trate, aunque  $V_m$  sólo puede emplearse en una región sin origen. El potencial magnético vectorial es, así un recurso muy eficaz y elegante para la resolución de problemas electromagnéticos, particularmente los relativos a antenas. Como se advertirá en el capítulo 13, en problemas de antenas es más fácil hallar  $\mathbf{B}$  si antes se calcula  $\mathbf{A}$ .

### EJEMPLO 1

Dado el potencial magnético vectorial  $\mathbf{A} = -\rho^2/4\mathbf{a}_z$ ,  $Wb/m$ , calcule el flujo magnético total que cruza la superficie  $\phi = \pi/2$ ,  $1 \leq \rho \leq 2$  m,  $0 \leq z \leq 5$  m.

**Solución:**

Este problema puede resolverse de dos maneras: con la ecuación ( $\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ) o (4.31).

**Método 1:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\phi = \frac{\rho}{2} \mathbf{a}_\phi, \quad d\mathbf{S} = d\rho dz \mathbf{a}_\phi$$

Por tanto,

$$\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_{\rho=1}^5 \rho d\rho dz = \frac{1}{4} \rho^2 \Big|_1^5 dz = \frac{15}{4} dz$$

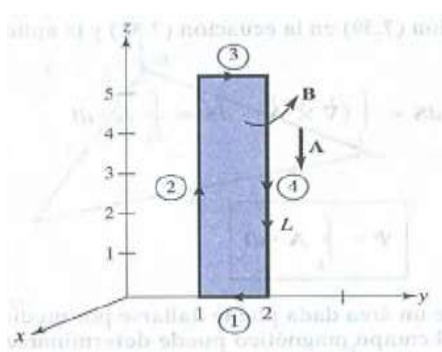
$$\Psi = 3.75 \text{ Wb}$$

**Método 2:**

Se usa

$$\Psi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$$

donde  $L$  es la trayectoria que circunscribe a la superficie  $S$   $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  y  $\Psi_4$  las evaluaciones de  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  a lo largo de los segmentos de  $L$  marcados con los números 1 a 4, respectivamente, en la figura 172.. Puesto que  $\mathbf{A}$  sólo cuenta con la componente  $z$ ,



$$\Psi_1 = 0 = \Psi_3$$

Figura 172. Para el ejemplo 1.

Esto es,

$$\Psi = \Psi_2 + \Psi_4 = -\frac{1}{4} \left[ (1)^2 \int_0^5 dz + (2)^2 \int_5^0 dz \right] = \frac{1}{4} (1 - 4)(5) = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ Wb}$$

como se obtuvo anteriormente. Nótese que la dirección de la trayectoria  $L$  debe coincidir con la de  $d\mathbf{S}$ .

**Ejercicio 1**

Cierta distribución de corriente produce el potencial magnético vectorial  $\mathbf{A} = x^2 y \mathbf{a}_x + y^2 x \mathbf{a}_y - 4xyz \mathbf{a}_z \text{ Wb/m}$ . Calcule

- a)  $\mathbf{B}$  en  $(-1, 2, 5)$
- b) El flujo a través de la superficie definida por  $z = 1, 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4$

**Respuestas:** a)  $20\mathbf{a}_x + 40\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \text{ Wb/m}^2$  y b)  $20 \text{ Wb}$ .



**EJEMPLO 2**

Si el plano  $z = 0$  porta una corriente uniforme  $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$ ,

$$H = \begin{cases} 1/2 K_y \mathbf{a}_x, & z > 0 \\ -1/2 K_y \mathbf{a}_x, & z < 0 \end{cases}$$

Esto se obtuvo en la sección 4.5 aplicando la ley de Ampere. Obténgalo ahora mediante el concepto de potencial magnético vectorial.

**Solución:**

Considérese la lámina de corriente de la figura 7.21. Con base en la ecuación (7.42),

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 K dS}{4\pi R}$$

En este problema,  $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$ ,  $dS = dx' dy'$ , y en el caso de  $z > 0$ ,

$$\begin{aligned} R = |R| &= |(0, 0, z)(x', y', 0)| && (4.8.1) \\ &= [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2} \end{aligned}$$

donde las coordenadas primas remiten al punto de origen y las no primas al punto del campo. Es necesario (y usual) distinguir entre ambos puntos para evitar confusiones (véase la fig. 171). Por consiguiente,

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \frac{\mu_0 K_y dx' dy' \mathbf{a}_y}{4\pi [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{1/2}} \\ d\mathbf{B} &= \nabla \times d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial z} dA_y \mathbf{a}_x \\ &= \frac{\mu_0 K_y z dx' dy' \mathbf{a}_x}{4\pi [(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}} \\ B &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx' dy'}{[(x')^2 + (y')^2 + z^2]^{3/2}} && (4.8.2) \end{aligned}$$

Para mayor facilidad en el integrando podemos convertir la coordenadas cartesianas en cilíndricas, de modo que

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{4\pi} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\rho' d\phi' d\rho'}{[(\rho')^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 K_y z \mathbf{a}_x}{2} \left. \frac{-1}{[(\rho')^2 + z^2]^{1/2}} \right|_{\rho'=0}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0 K_y \mathbf{a}_x}{2} \end{aligned}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{K_y}{2} a_x \quad \text{respecto de } z < 0$$

Mediante el simple reemplazo de  $z$  por  $-z$  en la ecuación (4.8.2) y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene

$$H = -\frac{K_y}{2} a_x, \quad \text{respecto de } z > 0$$

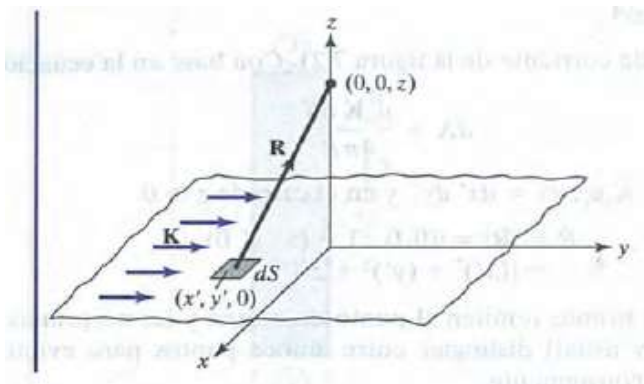


Figura 173 Para el ejemplo 2 lamina infinita de corriente.

Ejercicio 2.

Repita el ejemplo 2 empleando esta vez la ley de Biot-Savart para determinar  $H$  en los puntos  $(0, 0, h)$  y  $(0, 0, -h)$ .

## 4.7 Corriente de desplazamiento (término de Maxwell)

### Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell

Hemos visto que un campo magnético que varía de lugar a un campo eléctrico inducido. Uno de los ejemplos más notables de la simetría de la naturaleza es que un campo *eléctrico* variable da origen a un campo *magnético*. Este efecto tiene una enorme importancia, ya que explica la existencia de las ondas de radio, los rayos gamma y la luz visible, así como de todas las demás formas de ondas electromagnéticas.

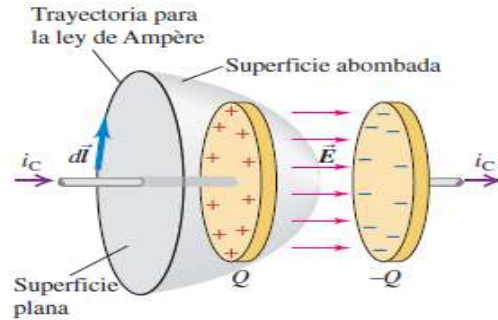
### Generalización de la ley de Ampere

Para ver el origen de la relación entre los campos eléctricos variables y los campos magnéticos, volvamos a la ley de Ampere, tal como se expresó en la sección 4.5, ecuación (4.10):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

El problema con la ley de Ampere expresada en esta forma es que está *incompleta*. Para ver por qué, consideremos el proceso de cargar un capacitor (figura 174). Alambres conductores llevan corriente  $i_C$  hacia una placa y fuera de la otra; la carga  $Q$  se incrementa, y el campo eléctrico  $\vec{E}$  entre las placas aumenta. La notación  $i_C$  indica corriente de *conducción* para diferenciarla de otra clase de corriente que vamos a encontrar y que se llama corriente de *desplazamiento*,  $i_D$ . Se usan minúsculas para  $i$  y  $v$  para denotar valores instantáneos de corrientes y diferencias de potencial, respectivamente, que pueden variar con el tiempo.

Figura 174. Capacitor de placas paralelas en proceso de carga. La corriente de conducción a través de la superficie plana es  $I_C$ , pero no hay corriente de conducción a través de la superficie que se abomba para pasar entre las placas. Las dos superficies tienen una frontera común por lo que esta diferencia es  $I_{enc}$  lleva una contradicción aparente al aplicar la ley de ampere.



Apliquemos la ley de Ampere a la trayectoria circular que se muestra. La integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  alrededor de esta trayectoria es igual a  $\mu_0 I_{enc}$ . Para el área circular plana limitada por el círculo,  $I_{enc}$  es tan sólo la corriente  $I_C$  en el conductor de la izquierda. Pero la superficie que se abomba hacia la derecha está delimitada por el mismo círculo, y la corriente a través de esa superficie es igual a cero. Por lo tanto,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es igual a  $\mu_0 i_C$  y al mismo tiempo es igual a cero! Ésta es una contradicción evidente.

Pero algo más ocurre en la superficie abombada. A medida que el capacitor se carga, el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el *flujo* eléctrico  $\Phi_E$  a través de la superficie aumentan. Sus tasas de cambio se pueden determinar en términos de la carga y la corriente. La carga instantánea es  $q = Cv$  donde  $C$  es la capacitancia y  $v$  es la diferencia de potencial instantánea. Para un capacitor de placas paralelas,  $C = \epsilon_0 A / d$ , donde  $A$  es el área de las placas y  $d$  es la separación. La diferencia de potencial  $v$  entre las placas es  $v = Ed$  donde  $E$  es la magnitud del campo eléctrico entre las placas. (Se ignora el efecto de borde y se supone que  $\vec{E}$  es uniforme en la región comprendida entre las placas.) Si esta región se llena con un material con permitividad  $\epsilon_0$ , por  $\epsilon$  en todo lugar; en el análisis que sigue se empleará  $\epsilon$ .

Al sustituir estas expresiones para  $C$  y  $v$  en  $q = Cv$ , la carga en el capacitor,  $q$ , se expresa como

$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E \tag{4.32}$$

donde  $\Phi_E = EA$  es el flujo eléctrico a través de la superficie.

A medida que el capacitor se carga, la tasa de cambio de  $q$  es la corriente de conducción,  $i_C = dq / dt$ . De la derivada de la ecuación (4.32) con respecto al tiempo se obtiene

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{4.33}$$

Ahora, con un pequeño esfuerzo de imaginación, inventamos una **corriente de desplazamiento** ficticia,  $i_D$  en la región entre las placas, definida como

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{Corriente de desplazamiento}) \quad (4.34)$$

Es decir, imaginamos que el flujo cambiante a través de la superficie curva en la, figura 174 es en cierto modo equivalente, en la ley de Ampere, a una corriente de conducción a través de esa superficie. Incluimos esta corriente ficticia, junto con la corriente real de conducción,  $i_C$ , en la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i_C + i_D)_{enc} \quad (\text{Ley de Ampere generalizada}) \quad (4.35)$$

La ley de Ampere planteada en esta forma es obedecida sin importar cuál superficie se use en la figura 174. Para la superficie plana,  $i_D$  es igual a cero; para la superficie curva,  $i_C$  es cero; e  $i_C$  para la superficie plana es igual a  $i_D$  para la superficie curva. La ecuación (4.35) sigue siendo válida en un material magnético siempre que la magnetización sea proporcional al campo externo y se sustituya  $\mu_0$  por  $\mu$ .

La corriente ficticia  $i_D$  fue inventada en 1865 por el físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), quien la llamó corriente de desplazamiento. Hay una *densidad de corriente de desplazamiento* correspondiente  $j_D = i_D/A$ ; a partir de  $\Phi_E = EA$  y dividiendo la ecuación (29.34) entre  $A$ , se encuentra

$$j_D = \epsilon \frac{dE}{dt} \quad (4.36)$$

Hemos sacado el concepto prácticamente de la nada, tal como hizo Maxwell, pero vemos que esto nos permite salvar la ley de Ampere en situaciones como las de la figura 174.

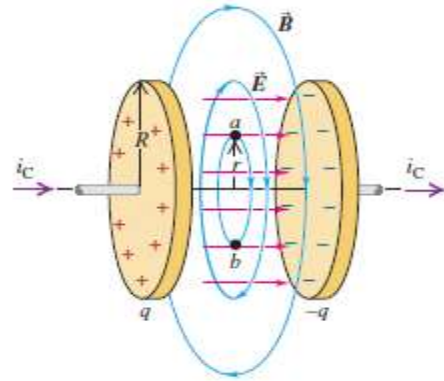
Otro beneficio de la corriente de desplazamiento es que permite generalizar la regla de las uniones (también llamada ley de corrientes) de Kirchhoff, que se estudió en la sección 3.8. Si se considera la placa izquierda del capacitor, se tiene una corriente de conducción que entra en ella, pero ninguna que salga. Sin embargo, cuando incluimos la corriente de desplazamiento, se tiene corriente de conducción que entra por un lado y una corriente de desplazamiento igual que sale por el otro lado. Con este significado general del término “corriente”, podemos hablar de corriente que pasa *a través* del capacitor.

### **Realidad de la corriente de desplazamiento**

En este momento, tal vez el lector se pregunte si la corriente de desplazamiento tiene un significado físico real, o si sólo es un truco para satisfacer la ley de Ampere y la regla de Kirchhoff de las uniones o de los nodos. A continuación se describe un experimento fundamental que ayuda a responder esta pregunta. Se toma un área plana circular entre las placas del capacitor, como se ilustra en la figura 175. Si la corriente de desplazamiento realmente desempeña el papel que afirmamos en la ley de Ampere, entonces debe haber un campo magnético en la región

comprendida entre las placas mientras el capacitor se está cargando. Podemos usar la ley de Ampere generalizada, que incluye la corriente de desplazamiento, para predecir cuál debiera ser este campo.

Figura 175. Un capacitor que se carga con una corriente de desplazamiento igual a  $i_C$  entre las placas, con una densidad de corriente de desplazamiento  $j_D = e dE/dt$ . Esta se puede considerar como la fuente del campo magnético entre las placas.



Para ser específicos, pensemos en un capacitor de placas circulares con radio  $R$ . Para encontrar el campo magnético en un punto en la región comprendida entre las placas a una distancia  $r$  del eje, se aplica la ley de Ampere a un círculo de radio  $r$  que pase por el punto en cuestión, con  $r < R$ . Este círculo pasa por los puntos  $a$  y  $b$  en la figura 175. La corriente total encerrada por el círculo es  $j_D$  veces su área, o  $(i_D / \pi R^2)(\pi r^2)$ . La integral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  en la ley de Ampère sólo es el producto de  $B$  por la circunferencia  $2\pi r$  del círculo, y como  $i_D = i_C$  en el capacitor en proceso de carga, la ley de Ampere se convierte en:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_C \quad \text{o bien,} \quad B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} i_C \quad (4.37)$$

Este resultado predice que en la región comprendida entre las placas,  $\vec{B}$  es igual a cero en el eje y se incrementa en forma lineal con la distancia desde el eje. Un cálculo similar demuestra que *afuera* de la región entre las placas (es decir, para  $r > R$ ,  $\vec{B}$  sería el mismo que si el alambre fuera continuo y no hubiera placas).

Cuando *medimos* el campo magnético en esta región, encontramos que realmente está ahí y se comporta tal como predice la ecuación (4.37). Esto confirma directamente el papel que tiene la corriente de desplazamiento como fuente del campo magnético. Con esto queda establecido, más allá de toda duda razonable, que la corriente de desplazamiento, lejos de ser un simple artificio, es un hecho fundamental de la naturaleza. El descubrimiento de Maxwell fue un paso audaz de un genio extraordinario.

### ***Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo***

Ahora estamos en posición de reunir en un solo paquete *todas* las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes. Este paquete consiste en cuatro ecuaciones, las llamadas **ecuaciones de Maxwell**. Maxwell no descubrió todas las ecuaciones por sí solo (aunque sí desarrolló el concepto de corriente de desplazamiento), sino que las reunió y reconoció su importancia, en particular para predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Por ahora, enunciaremos las ecuaciones de Maxwell en su forma más sencilla, para el caso en que hay cargas y corrientes en un espacio en que, por lo demás, está vacío. En la unidad 6 estudiaremos cómo modificar estas ecuaciones si está presente un material dieléctrico o magnético.

Dos de las ecuaciones de Maxwell implican una integral de  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$  sobre una superficie cerrada. La primera es sencillamente la ley de Gauss para campos eléctricos, la cual afirma que la integral de superficie de  $E_{\perp}$  sobre cualquier superficie cerrada es igual a  $1/\epsilon_0$  multiplicado por la carga total  $Q_{enc}$  encerrada dentro de la superficie:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (\text{Ley de Gauss para } \vec{E}) \quad (4.38)$$

La segunda es la relación análoga para campos *magnéticos*, la cual establece que la integral de superficie de  $B_{\perp}$  sobre cualquier superficie cerrada siempre es igual a cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{Ley de Gauss para } \vec{B}) \quad (4.39)$$

Este enunciado significa, entre otras cosas, que no hay monopolos magnéticos (cargas magnéticas individuales) que actúen como fuentes del campo magnético.

La tercera ecuación es la ley de Ampere con la corriente de desplazamiento incluida. Esta ley establece que tanto la corriente de conducción  $i_C$  como la corriente de desplazamiento  $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ , donde  $\Phi_E$  es el flujo eléctrico, actúan como fuentes del campo magnético:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{enc} \quad (\text{Ley de Ampere}) \quad (4.40)$$

La cuarta y última ecuación es la ley de Faraday; establece que un campo magnético cambiante o un flujo magnético inducen un campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Ley de Faraday}) \dots \dots \dots (4.41)$$

Si hay un flujo magnético cambiante, la integral de línea en la ecuación (4.41) es diferente de cero, lo que demuestra que el campo  $\vec{E}$  producido por un flujo magnético cambiante no es conservativo. Recuerde que esta integral de línea debe llevarse a cabo sobre una trayectoria cerrada *constante*.

Vale la pena examinar con más detenimiento el campo total  $\vec{E}$  y el papel que desempeña en las ecuaciones de Maxwell. En general, el campo total  $\vec{E}$  en un punto en el espacio puede ser la superposición de un campo electrostático  $\vec{E}_C$  provocado por una distribución de cargas en reposo y un campo  $\vec{E}_n$  no electrostático inducido magnéticamente. (El subíndice *c* significa Coulomb o conservativo; el subíndice *n* indica no Coulomb, no electrostático, o no conservativo). Es decir,

$$\vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_n$$

La parte electrostática  $\vec{E}_C$  *siempre* es conservativa, por lo que  $\oint \vec{E}_C \cdot d\vec{l} = 0$ . Esta parte conservativa del campo no contribuye a la integral en la ley de Faraday, por lo que en la ecuación (29.21) se puede tomar  $\vec{E}$  como el campo eléctrico total  $\vec{E}$  que incluye tanto la parte de  $\vec{E}_C$  debida a las cargas como a la parte inducida magnéticamente  $\vec{E}_n$ . De manera similar, la parte no conservativa

$\vec{E}_n$  del campo  $\vec{E}$  no contribuye a la integral en la ley de Gauss porque esta parte del campo no es causada por cargas estáticas. De aquí que  $\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{A}$  siempre es igual a cero. Se concluye que en todas las ecuaciones de Maxwell,  $\vec{E}$  es el campo eléctrico total; estas ecuaciones no hacen distinción entre campos conservativos y no conservativos.

**Simetría en las ecuaciones de Maxwell**

En las cuatro ecuaciones de Maxwell hay una simetría notable. En el espacio vacío, donde no hay cargas, las dos primeras ecuaciones, (4.38) y (4.39), tienen forma idéntica, una contiene a  $\vec{E}$  y la otra a  $\vec{B}$ . Cuando se comparan las otras dos ecuaciones, la (4.40) dice que un flujo eléctrico cambiante origina un campo eléctrico, y la ecuación (4.41) afirma que un flujo magnético cambiante origina un campo eléctrico. En el espacio vacío, donde no hay corriente de conducción,  $i_C = 0$  y las dos ecuaciones tienen la misma forma, aparte de una constante numérica y un signo negativo, con los papeles de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  intercambiados en las dos ecuaciones.

Las ecuaciones (4.40) y (4.41) se pueden volver a escribir en forma distinta pero equivalente incluyendo las definiciones de flujo eléctrico y flujo magnético,  $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$  y  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ , y respectivamente. En el espacio vacío, donde no hay carga ni corriente de conducción,  $i_C = 0$  y  $Q_{enc} = 0$ , y tenemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{4.42}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \dots\dots\dots \tag{4.43}$$

De nuevo, se observa la simetría entre los papeles que tienen  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en estas expresiones.

La característica más notable de estas ecuaciones es que un campo de *cualquier* tipo que varíe con respecto al tiempo induce un campo del otro tipo en las regiones vecinas del espacio. Maxwell reconoció que estas relaciones predecían la existencia de perturbaciones electromagnéticas consistentes en campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo y que viajan o se *propagan* de una región del espacio a otra, aunque no haya materia presente en el espacio intermedio. Tales perturbaciones, llamadas *ondas electromagnéticas*, constituyen la base física para las ondas luminosas, las ondas de radio y televisión, la radiación infrarroja y ultravioleta, los rayos x y el resto del espectro electromagnético. En el capítulo 32 volveremos a este tema de importancia vital.

Aunque tal vez no sea obvio, *todas* las relaciones básicas entre campos y sus fuentes están contenidas en las ecuaciones de Maxwell. La ley de Coulomb se deduce de la ley de Gauss, la de Biot y Savart se deduce de la de Ampere, y así sucesivamente. Cuando se agrega la ecuación que define los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en términos de las fuerzas que ejercen sobre una carga  $q$ , a saber,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{4.44}$$



¡Se tienen *todas* las relaciones fundamentales del electromagnetismo!

Por último, se observa que las ecuaciones de Maxwell tendrían mucha más simetría entre los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  si existieran cargas magnéticas individuales (monopolos magnéticos). El lado derecho de la ecuación (4.39) contendría la carga *magnética* total encerrada por la superficie, y el lado derecho de la ecuación (4.41) incluiría un término de corriente de monopolos magnéticos. Quizás nos da una idea inicial de por qué algunos físicos desearían que existieran los monopolos magnéticos, pues ayudarían a perfeccionar la belleza matemática de las ecuaciones de Maxwell.

El descubrimiento de que el electromagnetismo puede ser condensado en una forma tan limpia y elegante es muy satisfactorio. En cuanto a concisión y generalidad, las ecuaciones de Maxwell pertenecen a la misma categoría que las leyes de Newton del movimiento y las leyes de la termodinámica. En realidad, uno de los objetivos principales de la ciencia es expresar relaciones muy amplias y generales en forma concisa y compacta. La síntesis de Maxwell del electromagnetismo es un enorme logro intelectual, comparable a la síntesis newtoniana y al desarrollo de la relatividad y la mecánica cuántica en el siglo xx

**Evalúe su comprensión de la sección** a) ¿Cuál de las ecuaciones de Maxwell explica el funcionamiento de un lector de tarjetas de crédito? b) ¿Cuál de ellas describe la forma en que un alambre que conduce una corriente estable genera un campo magnético?

**Pregunta rápida** En un circuito *RC*, el capacitor comienza a descargarse. **i)** Durante la descarga en la región de espacio entre las placas del capacitor, ¿hay a) corriente de conducción pero no corriente de desplazamiento, b) corriente de desplazamiento pero no corriente de conducción, c) corriente de conducción y de desplazamiento o d) ningún tipo de corriente? **ii)** En la misma región del espacio, ¿hay a) un campo eléctrico pero no un campo magnético, b) un campo magnético pero no un campo eléctrico, c) campos eléctrico y magnético o d) ningún campo?

**EJEMPLO Corriente de desplazamiento en un capacitor**

Un voltaje que varía sinusoidalmente se aplica a través de un capacitor de  $8.00 \mu F$ . La frecuencia del voltaje aplicado es de  $3.00 \text{ kHz}$  y la amplitud del voltaje es de  $30.0 \text{ V}$ . Encuentre la corriente de desplazamiento en el capacitor.

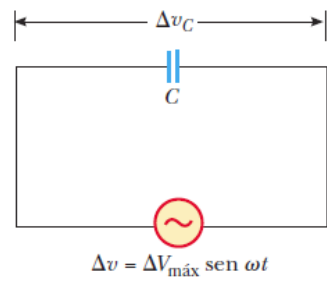


Figura 177 Circuito formado por un Condensador de capacidad C conectado a una fuente de CA.

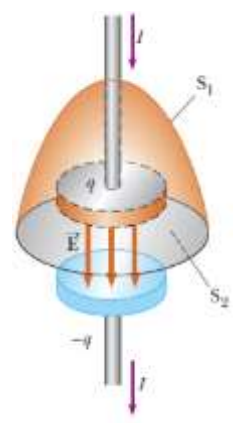


Figura 176 Porque sólo existe en los alambres unidos a las placas del capacitor, la corriente de conducción  $I = dq/dt$  pasa a través de  $S_1$  pero no s través de  $S_2$ . Sólo la corriente de desplazamiento  $I_d = \epsilon_0 d \Phi_E/dt$  pasa a través de  $S_2$ . Las dos corrientes deben ser iguales por continuidad.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** La figura 177 representa el diagrama de circuito para esta situación. La

figura 176 muestra un acercamiento del capacitor y el campo eléctrico entre las placas.

**Categorizar** Los resultados se evalúan con ecuaciones discutidas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Evalúe la frecuencia angular de la fuente a partir de la ecuación:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(3.00 \times 10^3 \text{ Hz}) = 1.88 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$$

Use la ecuación para expresar el voltaje a través del capacitor como función del tiempo:

$$\Delta v_C = \Delta V_{max} \sin \omega t = (30.0 \text{ V}) \sin(1.88 \times 10^4 t)$$

Use la ecuación  $I_d = \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt}$  para encontrar la corriente de desplazamiento como función del tiempo. **Note** que la carga en el capacitor es  $q = C\Delta v_C$ :

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (C\Delta v_C) = C \frac{d}{dt} (\Delta v_C) \\ &= (8.00 \times 10^{-6} \text{ F}) \frac{d}{dt} [(30.0 \text{ V}) \sin(1.88 \times 10^4 t)] \\ &= (4.52 \text{ A}) \cos(1.88 \times 10^4 t) \end{aligned}$$

**PROBLEMA RETO**

Una partícula de 5 mg de masa y una carga de 20 mC que fue acelerada con una diferencia de potencial de 575 V entra en forma perpendicular en una región de campo magnético de 14 cm. La partícula sale de la región con un desplazamiento de 7 cm (véase figura 178). La región es una mesa horizontal, donde el campo está entrando a la en forma que se desprecia el efecto de la gravedad. Determina:

- a) La velocidad con que entra la partícula.
- b) La magnitud del campo magnético que desvía la partícula, si tarda 6 ms en recorrer los 7 cm para salir del campo magnético.

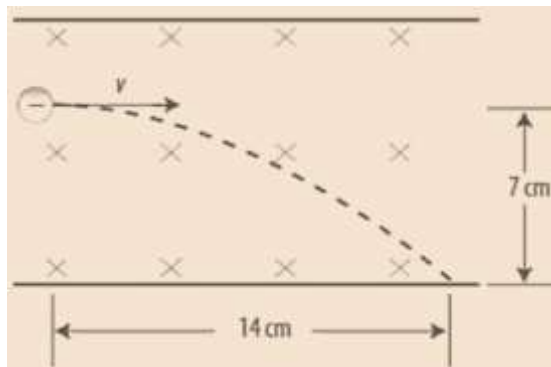


Figura 178 Problema reto.

**Problemas para resolver.**

**4.1** Una partícula con carga positiva de  $3.5 \times 10^{-18}$  C incide con velocidad de  $2 \times 10^6$  m/s, formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, en una región de campo magnético de 0.55 T saliendo de la página. Determina la magnitud de la fuerza que experimenta la carga.

**4.2** Se desea que una partícula de 5 mg de masa y carga de  $-2.5 \times 10^{-3}$  C, cuando incide con velocidad de  $2 \times 10^3$  m/s, adquiera una trayectoria circular de 3 cm de radio. Determina:

- a) La magnitud del campo magnético necesaria.
- b) La fuerza que experimenta la carga.
- c) El ángulo entre el campo y la velocidad.

**4.3** Un electrón incide perpendicularmente en una región de campo magnético producido por un imán permanente de neodimio, cuya densidad de flujo magnético es de 9500 gauss, con velocidad de  $5 \times 10^4$  m/s. Determina:

- a) La fuerza que actúa sobre el electrón.
- b) El radio de la trayectoria del electrón.

**4.4** Se requiere que un flujo de electrones adquiera un radio de curvatura de 15 cm al entrar perpendicularmente a un campo magnético con una velocidad de  $3.5 \times 10^4$  m/s. Calcula:

- a) La aceleración normal.
- b) La inducción magnética.

**4.5** Un protón describe una trayectoria circular de 20 cm de radio dentro de un campo magnético producido por un electroimán de 6.5 T. Determina la velocidad de la partícula al incidir perpendicularmente dentro del campo magnético.

**4.6** Un flujo de electrones es acelerado desde el reposo con una diferencia de potencial de 220 V, para entrar dentro de un campo de inducción magnética de  $765 \mu\text{T}$  producido por bobinas. Calcula:

- a) El radio de la trayectoria.
- b) La velocidad angular de los electrones.
- c) El periodo de la trayectoria.

**4.7** En un espectrómetro de masas con un campo eléctrico verticalmente hacia abajo de 25000 V/m y un campo magnético entrando perpendicular a la página se hace incidir un haz de electrones a una velocidad de  $5.6 \times 10^5$  m/s. Calcula la magnitud de la densidad de flujo magnético para mantener horizontal la velocidad del haz.

**4.8** Una partícula cargada eléctricamente con 20 mC, que se mueve con una velocidad de  $[(4i + 2j + 5k) \times 10^3]$  m/s, siente una fuerza de origen magnético de  $(-3i + 10j + 2k)$  N. Si la componente del campo magnético en el eje y es cero, determina la magnitud del campo en los ejes x y z.

**4.9** Una partícula de 1.5 g de masa con  $10 \times 10^8$  electrones en exceso se mueve hacia la derecha de forma horizontal con una velocidad de  $5.4 \times 10^4$  m/s y entra en un campo magnético de  $(-0.05i + 0j - 0.075k)$  T. Calcula la aceleración de la partícula.

**4.10** Una partícula de  $1.5 \times 10^{-7}$  kg que tiene un déficit de electrones tal que tiene una carga positiva de  $8 \mu\text{C}$ , se mueve dentro de un campo magnético de  $0.093 \text{ Wb/m}^2$ . Se requiere que en un punto, P, la partícula tenga una velocidad de  $6 \times 10^4$  m/s, formando un ángulo de  $35^\circ$  entre la velocidad y el campo. Calcula la aceleración normal de la partícula en el punto P.

**4.11** Una partícula de 3 g de masa que tiene una carga de  $50 \mu\text{C}$  se mueve con velocidad constante de  $3.5 \times 10^4$  m/s sobre el eje x positivo. En la región existe un campo eléctrico hacia arriba de 950 V/m y un campo magnético perpendicular a la velocidad. Determina:

- a) La magnitud del campo magnético.
- b) La dirección del campo.

**4.12** Para acelerar protones se usa un ciclotrón con un campo magnético de 9500 gauss; sus "des" tienen un radio de 100 cm. Determina:

- a) La frecuencia del movimiento de los protones.
- b) La velocidad lineal adquirida por los protones.
- c) El periodo del movimiento.

**4.13** Una partícula de 5 mg de masa y una carga de  $20 \mu\text{C}$  entra en una región de campo magnético con dirección del eje de las x positivo de  $0.45 \text{ Wb/m}^2$  con velocidad de  $5.2 \times 10^4$  m/s hacia arriba, con un ángulo de  $65^\circ$  con respecto al campo, despreciando los efectos de la gravedad, determina:

- a) La velocidad angular de la partícula.
- b) El radio de la trayectoria.
- c) Cuánto se desplaza la partícula sobre el eje x en 9 ns.

**4.14** Una partícula de 2 mg de masa y una carga de 10 mC entra con una velocidad de 320 m/s en forma perpendicular en una región de un campo magnético de 14 cm. La partícula sale de la región con un desplazamiento de 7 cm, como se muestra en la figura 4.56. Determina la magnitud del campo magnético.

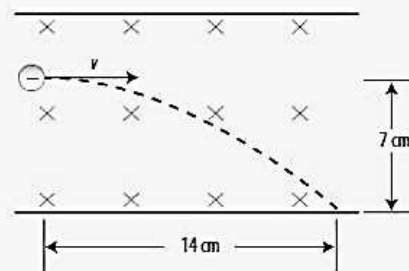


Figura 4.56

**ALERTA:** Aplica las ecuaciones de posición de un movimiento parabólico.



**4.15** Un alambre por el que circula una corriente de 3.5 A se dobla siguiendo las aristas del cubo mostrado en la figura 4.57. Dado que el cubo tiene 25 cm por arista y está dentro de un campo magnético de  $0.093 \text{ Wb/m}^2$ , calcula la magnitud de la fuerza y su dirección en las secciones:

- a)  $0a$
- b)  $ab$
- c)  $bc$

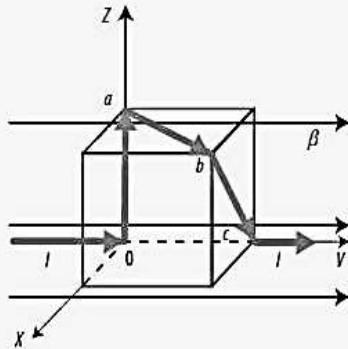


Figura 4.57

**4.16** Una sección de 20 cm de un cable en posición horizontal pasa dentro de un campo magnético cuya magnitud es de  $(0.035i + 0.085j) \text{ T}$ . Si el conductor lleva una corriente de 3.4 A hacia la derecha, calcula la fuerza que experimenta la sección del cable que está dentro del campo magnético.

**4.17** Al colocar un conductor eléctrico de 1.6 m por el cual circulan 25 amperes en una región de campo magnético de 0.48 T, experimenta una fuerza de 2.5 N. Determina el ángulo entre el conductor y la inducción magnética.

**4.18** Durante su operación, el cable de una máquina de soldar conduce una corriente de 75 A. El cable pasa por una región de campo magnético uniforme de 50 cm, formando un ángulo de  $85^\circ$ . En esta sección el cable experimenta una fuerza de 3.4 N, calcula la magnitud del campo.

**4.19** Para observar el efecto del campo magnético en un conductor por el que circula una corriente, se prepara un experimento denominado columpio eléctrico, en el que se usa una sección de 10 cm de conductor de cobre, el cual tiene 8 g de masa. Si durante el experimento el conductor se desvía  $11.5^\circ$ , como se muestra en la figura 4.58, y la corriente se regula para que pasen 3 A. Calcula:

- a) La magnitud del campo magnético.
- b) La dirección del campo.

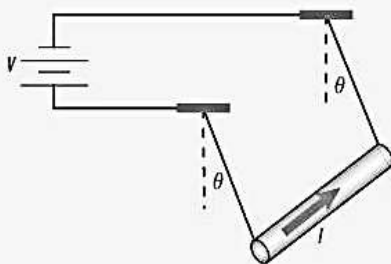


Figura 4.58

**4.20** Se tienen dos conductores rectos paralelos de longitud infinita por los que circulan 7.5 A y 10 A, respectivamente, en el mismo sentido; los conductores están separados 75 cm en el aire.

- a) Determina la magnitud de la fuerza por unidad de longitud que experimentan los conductores.
- b) Establece el tipo de fuerza que se genera.

**4.21** Se tienen dos conductores rectos paralelos, separados entre sí 15 cm, por los cuales circulan corrientes de 30 y 50 A, respectivamente, en el mismo sentido; en una sección de 35 cm un tercer conductor es paralelo a los dos primeros y está a 5 cm del conductor de 50 A y a 10 cm del que conduce 30 A. Si el tercer alambre lleva una corriente de 5 A en sentido contrario a los dos primeros, calcula la fuerza que experimenta el tercer conductor.

**4.22** Se tienen tres conductores paralelos por los que circulan las corrientes y los sentidos que se muestran en la figura 4.59. Determina la fuerza por unidad de longitud sobre el conductor 2 debida a los otros conductores.

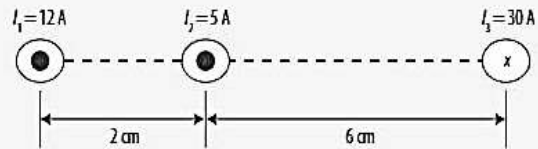


Figura 4.59

**4.23** Una sección de 15 cm de un conductor de calibre 14 tiene una masa de 20 g por la que pasa una corriente de 12 A y se encuentra levitando dentro de un campo magnético. Determina:

- a) El sentido de la corriente.
- b) La magnitud del campo entrando a la página para que esto suceda.

**4.24** Una bobina de 10 espiras rectangular de 3 cm de ancho por 5 cm de largo está dentro de un campo magnético horizontal generado por un imán permanente de 12000 gauss, como se muestra en la figura 4.60. Si por la bobina circula una corriente de 1.2 A, determina:

- a) El momento de torsión.
- b) El sentido de giro.

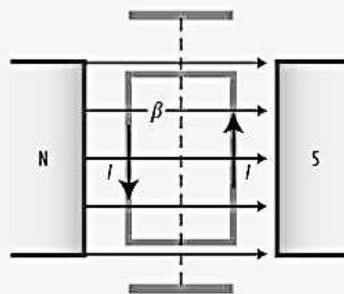


Figura 4.60

4.25 Una bobina de 15 espiras rectangular de 3 cm de ancho por 5 cm de largo está dentro de un campo magnético horizontal generado por un imán permanente de 12000 gauss, como se muestra en la figura 4.61. Si por la bobina circula una corriente de 0.95 A, determina:

- El momento de torsión.
- El sentido de giro.

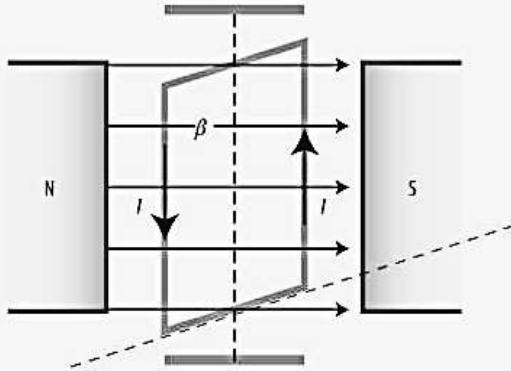


Figura 4.61

4.26 Una bobina rectangular consta de 100 vueltas y tiene 10 cm de ancho y 13 cm de largo, mientras que la espira está en la posición que se muestra en la figura 4.62. Determina:

- La magnitud del momento de torsión ejercido sobre la bobina por un campo magnético uniforme de 0.89 T dirigido a lo largo del eje x cuando la corriente es  $I = 1.5$  A en la dirección indicada.
- La dirección esperada de rotación de la espira.

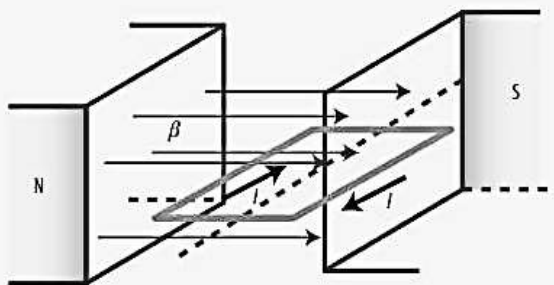


Figura 4.62

4.27 Una bobina circular de 10 espiras y 7.5 cm de radio está dentro de un campo magnético horizontal generado por un imán permanente de 12000 gauss, como se muestra en la figura 4.63; la bobina puede rotar alrededor del eje y. Si se requiere un par de 1.2 Nm, determina:

- La corriente que debe circular.
- El momento magnético de la bobina.

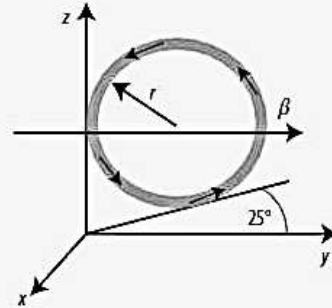


Figura 4.63

4.28 Alrededor de una esfera de material aislante de 4 cm de radio se enrolla una bobina de 350 vueltas y se coloca dentro de un campo magnético de 1.35 T; se le hace pasar a la bobina una corriente de 3.5 A en el sentido que se ilustra en la figura 4.64. Determina:

- La magnitud del momento de torsión.
- El sentido en el que tiende a desplazarse la esfera.

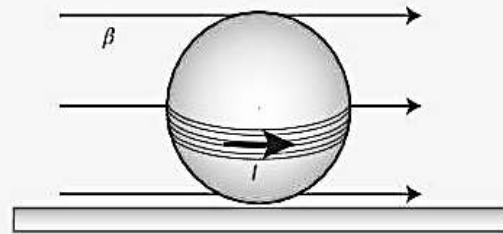


Figura 4.64

4.29 Empleando la ley de Biot-Savart, calcula la magnitud y dirección de inducción magnética en el punto P, situado en la bisectriz del conductor recto horizontal por el que circula una corriente de 7 A, en el sentido que se muestra en la figura 4.65.

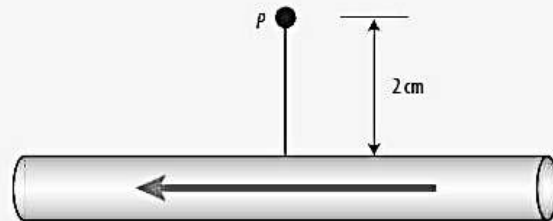


Figura 4.65

4.30 Empleando la ley de Biot-Savart, calcula la magnitud y dirección de la inducción magnética en el punto P generadas por una corriente de 12 A; el conductor hace una curva de un cuarto de vuelta de 15 cm de radio, como se muestra en la figura 4.66.



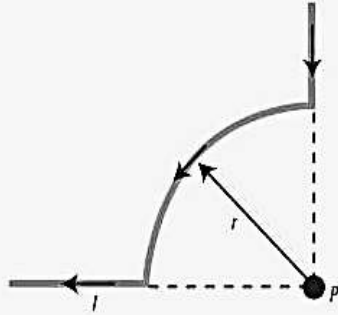


Figura 4.66

4.31 Empleando la ley de Biot-Savart, calcula la magnitud y dirección de la inducción magnética en el punto  $P$ , generadas por una corriente de 25 A; el conductor tiene un dobléz de  $90^\circ$  formando un triángulo rectángulo de 10 cm por lado, como se muestra en la figura 4.67.

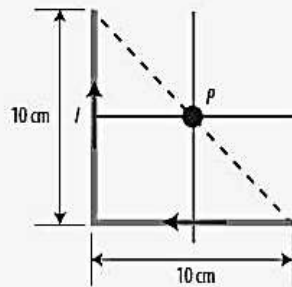


Figura 4.67

4.32 Empleando la ley de Biot-Savart, calcula la magnitud y dirección de la inducción magnética generadas por una corriente de 5.4 A que circula por una bobina hecha con 100 vueltas, en el punto  $P$  situado a 7 cm del centro y hacia la derecha sobre el eje  $x$ , perpendicular al plano de la bobina; la bobina es circular con un radio de 20 cm y la corriente circula en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

4.33 Un conductor se dobla formando una espira circular de 5 cm de radio y dos secciones rectas, como se muestra en la figura 4.68. El alambre está en un plano vertical y conduce una corriente  $I = 10$  A. Determina:

- La magnitud del campo magnético en el centro de la espira.
- La dirección del campo magnético en el centro de la espira.



Figura 4.68

4.34 Dos conductores paralelos separados 12 cm llevan corrientes en el mismo sentido, el conductor uno lleva 35 A, en tanto que el conductor 2 lleva 17 A. Calcula la inducción magnética en un punto  $P$  el cual forma un triángulo isósceles, como se muestra en la figura 4.69.

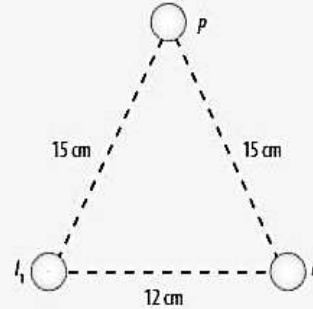


Figura 4.69

4.35 En un plano cartesiano  $x$ - $y$ , por el punto  $-5i$  cm pasa un conductor que lleva una corriente de 32 A, por el punto  $6j$  cm pasa un segundo conductor con una corriente de 63 A. En ambos conductores, la corriente está saliendo del plano; determina la inducción magnética total en el origen.

4.36 En un experimento de laboratorio se desea que partículas de unicel de 5 miligramos y carga eléctrica de  $50 \mu\text{C}$  se deslicen horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de  $3.1 \times 10^3$  m/s y 2 cm arriba de la mesa, para ello se usa un alambre por el que se hace pasar una corriente eléctrica. Determina:

- La intensidad de la corriente.
- La dirección de la corriente.

4.37 Cuatro conductores paralelos se encuentra en las esquinas de un cuadrado de 12 cm por lado, llevan corrientes iguales de 15 A con sentidos, como se muestra en la figura 4.70. Calcula la inducción magnética en un punto  $P$  en el centro del cuadrado.

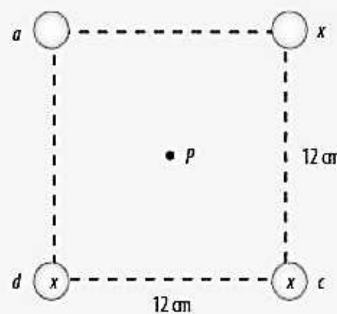


Figura 4.70

**ALERTA:** Usa la regla de la mano derecha para determinar el sentido del vector inducción magnética en  $P$ .

**4.38** Determina el flujo magnético a través de la espira de 7.5 cm de radio cuando pasan líneas de inducción de un campo magnético horizontal generado por un imán permanente de 12000 gauss.

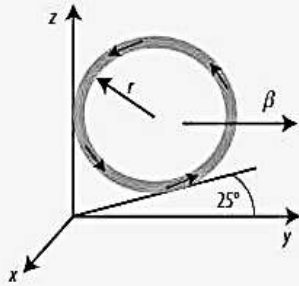


Figura 4.71

**4.39** Calcula el flujo magnético a través de la superficie plana de la semiesfera de 15 cm de radio cuando pasan líneas de inducción de un campo magnético generado por un electroimán de  $(-0.4i + 0.5j)$  T.

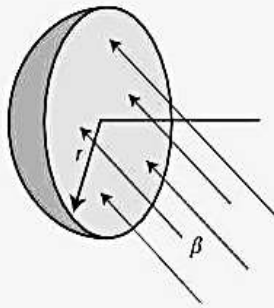


Figura 4.72

**4.40** Un campo magnético de 0.85 teslas pasa a través de un área rectangular de 12 cm x 5 cm. Si el plano del aro forma un ángulo de 40° con las líneas de campo magnético, calcula el flujo magnético a través del área.

**4.41** Determina el flujo magnético a través de una espira de ancho  $a = 3$  cm y largo  $b = 15$  cm, situada a 12 cm y paralela a un conductor recto que conduce una corriente de 25 A, como se muestra en la figura 4.73.

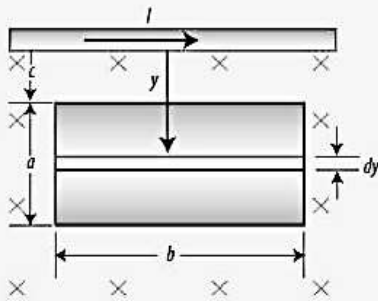


Figura 4.73

**4.42** Un solenoide de 3 cm de radio y 10 cm de longitud tiene 300 vueltas uniformemente enrolladas. Si su núcleo es de aire y se alimenta con 8.5 A, determina:

- La magnitud de la inducción magnética producida por el solenoide.
- El flujo magnético a través de su área de sección transversal.

**4.43** Un solenoide de 3 cm de radio y 10 cm de longitud tiene 300 vueltas uniformemente enrolladas. Si su núcleo es de hierro con una permeabilidad relativa de 5000 y se alimenta con 8.5 A, determina:

- La magnitud de la inducción magnética producida por el solenoide.
- El flujo magnético a través de su área de sección transversal.

**4.44** Para generar una inducción magnética de 2.5 T se emplea un solenoide de 6 cm de radio y 20 cm de longitud; el solenoide se hace con 2500 vueltas uniformemente enrolladas en un núcleo de hierro dulce, cuya permeabilidad magnética es de 5000. Determina la corriente necesaria.

**4.45** A un toroide de 1500 vueltas de alambre con un radio interior de 3 cm y un radio exterior de 8 cm se le hace pasar una corriente de 17 A. Calcula:

- La inducción magnética.
- El flujo en la sección transversal circular del toroide si es aire.

**4.46** A un toroide, devanado en un núcleo circular de permaloy, cuya permeabilidad relativa es de 80000, con 300 vueltas de alambre con un radio interior de 5 cm y un radio exterior de 8 cm, se le hace pasar una corriente de 3.5 A. Calcula:

- La inducción magnética.
- El flujo en la sección transversal circular del toroide.

**4.47** Un alambre con una masa por unidad de longitud de 0.7 g/cm conduce una corriente de 5.3 A; el alambre está en posición horizontal. Determina la magnitud del campo magnético mínimo necesario para levantar verticalmente el alambre.

**4.48** Un electrón que se mueve a  $7 \times 10^6$  m/s a través de un campo magnético producido por un poderoso imán de laboratorio de 2 T, que experimenta una fuerza magnética de  $7.2 \times 10^{-13}$  N de magnitud. Determina el ángulo entre la velocidad del electrón y el campo magnético.

**4.49** Un protón que tiene una energía cinética de 8.9 MeV sigue una trayectoria circular con un radio de 25 cm. Determina la intensidad del campo magnético en la que se mueve el protón.

**4.50** Al entrar una partícula con un electrón de exceso en forma perpendicular a un campo magnético de 3500 gauss



generado por un imán permanente, este gira a una frecuencia de 3500 Hz. Calcula:

- a) La masa.
- b) La velocidad angular.

**4.51** Al colocar un aro de 6 cm de radio 6 cm a la derecha de una masa magnética positiva de 450 A m, las líneas de fuerza magnética inciden sobre el área del aro a  $21^\circ$  con las líneas de campo. Determina:

- a) La densidad de flujo.
- b) El flujo magnético que atraviesa el área.

**4.52** Se tiene una lámina de  $2 \times 3$  cm colocada dentro de una región de campo magnético, a 4 cm de un polo magnético positivo de 350 Am. Determina el flujo magnético en las siguientes condiciones:

- a) Cuando está colocada verticalmente.
- b) Cuando la placa se rota 30 grado a la derecha alrededor de la vertical.

**4.53** Un electrón que se mueve a lo largo del eje y positivo, con una velocidad de  $3.5 \times 10^4$  m/s perpendicular a un campo magnético; asimismo, experimenta una desviación magnética en la dirección y negativa de las x, siguiendo una trayectoria circular de 5.2 cm de radio. Determina:

- a) La magnitud del campo.
- b) La dirección del campo.

**4.54** Un protón que se mueve a  $3.6 \times 10^7$  m/s a través del campo magnético generado por la Tierra, que es de  $0.5 \times 10^{-4}$ , donde T experimenta una fuerza magnética de  $2.5 \times 10^{-16}$  N de magnitud. Calcula el ángulo entre la velocidad del protón y el campo.

**4.55** Un protón de rayos cósmicos se mueve en el espacio interestelar con una energía cinética de 12 MeV y ejecuta una órbita circular con un radio igual al de la órbita de Venus alrededor del Sol, que es de  $1.08 \times 10^{11}$  m. Determina la magnitud del campo magnético en esta región del espacio.

**4.56** Un protón que tiene una energía cinética de 25 MeV entra de forma perpendicular a un campo magnético de 2 T de intensidad y sigue una trayectoria circular. Determina:

- a) El radio de la trayectoria.
- b) El periodo del movimiento.

**4.57** Una bobina enrollada en un núcleo circular con un radio interior de 0.7 m y radio exterior de 1.3 m tiene 900 vueltas de alambre de calibre doble cero, la bobina conduce una corriente de 300 A. Determina la intensidad del campo magnético en el centro del toroide y el flujo magnético a través de la sección circular del núcleo.

## PRÁCTICA 7

### “BALANZA MAGNETICA”

#### OBJETIVO:

Aplicar la ley de Biot-Savart para el cálculo del campo magnético.

#### **INTRODUCCION:**

Como un campo de aplicación del magnetismo presentamos un dispositivo que nos permite utilizar los conceptos fundamentales de Campo magnético, Fuerza de Lorenz, Corriente eléctrica y Peso. El resultado es una Balanza magnética. El principio básico es la FUERZA QUE EJERCE UN CAMPO DEBIDO A UNA CORRIENTE.

Con un comportamiento directamente proporcional al aumento de la corriente. Experimentalmente se pesaron 9 objetos para obtener un margen de error correspondiente a su peso exacto. Con la recomendación de que estos deberían ser pequeños y ligeros. La fuente de alimentación de corriente con un rango de 0.5 a 1.0A.

#### **ALGUNOS ASPECTOS**

Para poder comenzar tenemos que saber que a base de un campo magnético y corriente en una espira se pueden crear fuerzas en algunas direcciones, para este caso en clase se calculó la fórmula que ocurre en una espira circular de radio R, a la cual se le hace pasar una corriente y un campo pasa a través del sistema, la cual es:

$$M = \frac{2RIB}{g}$$

Donde

- M** es la masa de la espira
- R** el radio de la espira
- I** es la corriente que se hace pasar por la espira
- B** campo que pasa por el sistema
- g** constante de la gravedad

#### **MATERIAL**

- Madera (Tabla y palitos)
- Un imán de bocina
- Alambre magneto
- Una fuente de alimentación (para corriente variable)
- Multímetro (para medir corriente)

Entre otros materiales más pequeños.

**PROCEDIMIENTO:**

1. Con la ayuda de la tabla de madera, se procede a colocar cuatro palitos de madera alrededor de un imán de bocina, de forma que los cuatro palitos quede en los vértices de un cuadrado que encierre al imán
2. Se sujeta un pequeño embobinado en la parte superior de la bocina, de manera que quede separado aproximadamente unos 5 cm, y las puntas del embobinado se conectan a la toma de la fuente de alimentación de corriente variable, donde se proporcionara la corriente inicial para mantener a flote la bobina.
3. Se procede a introducir el elemento a pesar en el centro de la bobina, y se debe aumentar la corriente hasta llegar a la marca inicial o a la posición inicial de la bobina.

**CALCULOS A REALIZAR:**

Con la ayuda de un multímetro, se debe medir la corriente que se aplicara sobre la bobina, también debemos medir R el radio de la espira, y el peso de al espira, todo esto es para poder calcular el campo B que pasa por el sistema con la siguiente fórmula:

$$B = \frac{Mg}{2RI}$$

Después de esto solo basta colocar nuestros objetos sobre el papel de la espira, obviamente la espira tendra a bajar una distancia, entonces nosotros aumentos la entrada de corriente y subirá nuevamente hasta el límite; en donde mediremos la cantidad de corriente en ese instante, ya que con la temperatura se va reduciendo la conductividad del cobre; a nosotros nos interesa la corriente que aumentamos, es decir un  $\Delta I$  para levantar nuevamente la espira.

Utilizando este  $\Delta I$  y substituyéndola en la ecuación, podemos obtener la masa aproximada de nuestro objeto:

$$M = \frac{2R\Delta IB}{g} \text{ donde } \Delta I = I_1 - I_0$$

El porcentaje de error es

$$\%error = \frac{\%peso \text{ real} - \%peso \text{ experimental}}{\%peso \text{ real}} 100$$

**Nota:** para obtener el peso real se compara con la lectura de una Balanza Exacta Digital, para tener una mayor exactitud

**CUESTIONARIO**

1. Deduzca la ecuación que relaciona la masa con el campo magnético a partir de la ley de Biot-Savart
2. ¿Qué sucede si se invierte el sentido de la corriente?
3. Si aumenta la corriente, que observa en el experimento?
4. Es posible mantener a una altura constante la balanza, sino, de que depende?
5. ¿Cuál es el error con respecto al peso real?

**Referencias Bibliográficas.**

Alonso, Marcelo y J. Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.

Serway, Raymond A. y John W. Jeweett, Jr. Física II, 3ª edición.

Resnik Halliday Krane. Física Volumen 2, 5ª edición, Ed. Patria.

Vega, I. P. N. Electromagnetismo, 1ª edición, Ed. Patria

Young, Freedman, Sears, Zemansky. Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12ª edición, Ed. Addison – Wesley, PEARSON

Reyes, Salcedo, y Carrillo. Manual de Experimentos de Electromagnetismo, ITAM.

Victoriano López Rodríguez, Electromagnetismo I, UNED

Luis Álvarez Thon, Electromagnetismo FMF-241 (2014), Universidad Andrés Bello.

Matthew N. O. Sadiku, Elementos de electromagnetismo, 3ª edición, OXFORD.

Luis Vargas D., Apuntes de Electromagnetismo (2015), Universidad de Chile.

Giancoli, Volumen II, 4ª Edición, Física para Ciencias e Ingeniería con física Moderna, PEARSON.

Germán Arenas Sicard, Electricidad y Magnetismo (2008), Universidad Nacional de Colombia.

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta, Materiales y circuitos magnéticos, Universidad de Cantabria.

Bernabé Franco, Carlos Javier Jaimes O., Apuntes De Electromagnetismo, Universidades Tecnológicas de Santander.

Edgar Álvaro Méndez, José A. Andrade Lucio, Manual de Experimentos de física III, FIMEE, Universidad de Guanajuato.

**Referencias Electrónicas.**

<http://ww.jfinternational.com/mf/electricidad-magnetismo.html>

<http://www.acienciasgalilei.com/videos/3electricidad-mag.htm>

<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-activities/>

<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-slides/>

**Transformación del campo magnético caso carga puntual**

<https://www.youtube.com/watch?v=IMlgLPOLXoQ>

## 5.Unidad Inducción Electromagnética

### Introducción.

En esta unidad se estudiarán los fenómenos físicos relacionados con la corriente eléctrica generada a partir del magnetismo, para ello se iniciará con la explicación de la ley de la inducción magnética determinada experimentalmente por los investigadores Faraday y Lenz para calcular la fuerza electromotriz (fem) en un conductor en movimiento dentro de un campo magnético, después se presenta el estudio y cuantificación de la inductancia de una bobina y su aplicación en el diseño de un transformador eléctrico. Más tarde se expondrá la deducción y aplicación de las leyes de Maxwell, para terminar la unidad explicando el proceso de diseño de un generador eléctrico. Cabe mencionar que en cada tema se explicará los conceptos físicos, se deducirán las ecuaciones matemáticas y se resolverán con detalle problemas a fines al tema.

Por la importancia del término, antes de iniciar el siguiente tema se presenta la definición de inducción electromagnética.

**Inducción electromagnética.** Es la generación de una fem y corriente eléctrica en un conductor en movimiento que corta las líneas de flujo dentro de un campo magnético uniforme.

### 5.1 Deducción de la Ley de Inducción de Faraday.

Cuando una corriente eléctrica fluye por un conductor se genera un campo magnético alrededor del propio conductor (este fenómeno lo comprobó el danés **Hans Christian Oersted**), pero ocurre un fenómeno contrario cuando un conductor se mueve dentro del campo magnético. El científico británico **Michel Faraday** y el estadounidense **Joseph Henry** de forma separada comprobaron matemática y experimentalmente que un campo magnético puede generar una corriente eléctrica cuando existe entre ellos un movimiento relativo entre el campo magnético y el conductor. A este fenómeno lo llamaron **fuerza electromotriz inducida**.

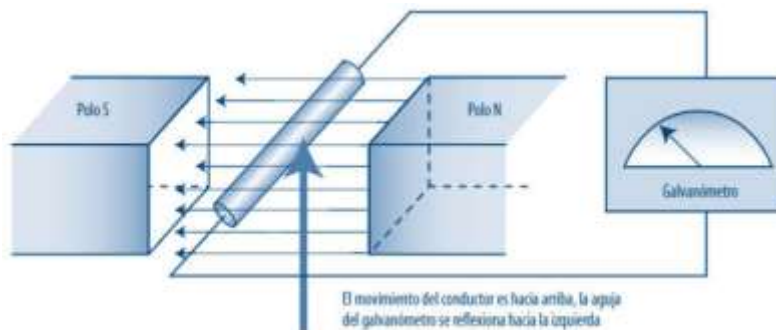


Figura 179. Figura 5.1. Movimiento de un conductor dentro de un campo magnético

Faraday descubrió que cuando un conductor corta las líneas de flujo del campo magnético se genera una fuerza electromotriz (fem) en los extremos del conductor, al mismo tiempo que se induce una corriente eléctrica en el

propio conductor mientras está en movimiento. Detectó la magnitud de dicha corriente utilizando

galvanómetro (figura179). Faraday también comprobó a mayor velocidad del movimiento del conductor, era mayor la corriente inducida debido a que la aguja del galvanómetro experimentaba mayor deflexión.

Así también, Faraday observó el cambiar el sentido del movimiento de la bobina también cambiaba el sentido de corriente inducida, debido a que la aguja del galvanómetro se movía hacia la izquierda.

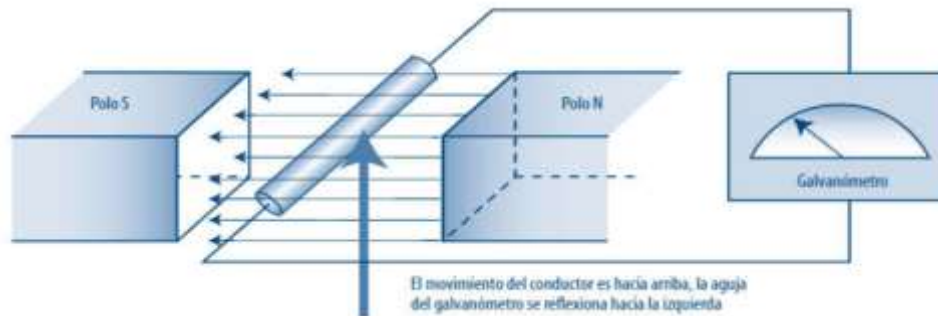


Figura 180. Movimiento de un conductor dentro de un campo magnético.

Si el lugar del conductor, se utiliza una bobina que se mueve dentro del campo magnético, la corriente inducida se incrementa y su valor es directamente proporcional al número de espiras y a la velocidad del movimiento.

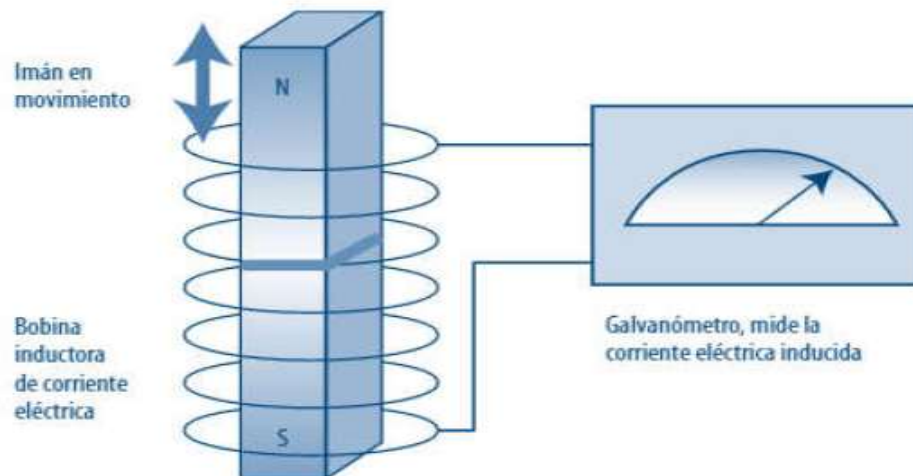


Figura 181. Movimiento de un imán dentro de un campo magnético

La corriente eléctrica inducida se genera por el movimiento relativo entre la bobina y el campo magnético y, por tanto, puede moverse el campo magnético generado por el imán permaneciendo fija la bobina o bien darse el caso inverso, manifestándose el mismo efecto de inducción.

En la figura 181 cuando el imán se mueve en un sentido, la aguja del galvanómetro sufre una deflexión hacia un lado, pero al invertir el sentido del movimiento del imán, la aguja del



galvanómetro también experimenta una deflexión pero en sentido contrario. El mismo fenómeno se manifiesta cuando el imán se mantiene fijo y la bobina se mueve. Del análisis de estos fenómenos, Faraday concluyó los siguientes fundamentos:

1. Debido al movimiento relativo entre el conductor o bobina y el campo magnético se induce en la bobina o conductor una fem.
2. La dirección de la fem inducida depende de la dirección del movimiento relativo entre el conductor y el campo magnético.
3. La magnitud de la fem es directamente proporcional a la velocidad con la que las líneas de campo magnético se cortan por el conductor.
4. La magnitud de la fem inducida es directamente proporcional al número de espiras del conductor que corta las líneas de flujo magnético.

De sus estudios experimentales Faraday concluyó con un enunciado al que posteriormente se le llamó ley de Faraday, que establece lo siguiente:

El movimiento relativo entre el campo magnético y un conductor induce una fem en el conductor que es proporcional al número de conductores por la rapidez con que se corta el flujo magnético.

La ley de Faraday se representa matemáticamente con la siguiente ecuación:

$$fem = \varepsilon = N \frac{d\phi_{\beta}}{dt} \quad (5.1)$$

Donde  $\varepsilon$  es la fuerza electromotriz (fem), cuya unidad es el volt (v) N es el número de conductores,  $d\phi_{\beta}$  es la diferencia del flujo magnético, cuya unidad es el weber (Wb), y dt es la diferencia del tiempo expresada en segundos (s)

En el sistema internacional la fem se expresa en una unidad llamada volt, que corresponde a weber entre segundo, y es una cantidad escalar.

$$1 \text{ volt} = \frac{1 \text{ weber}}{1 \text{ segundo}} = 1 \text{ V.}$$

También se hace notar que se puede lograr la variación del flujo magnético modificando la inducción magnética que pasa a través de una espira o, de otra forma, modificando el área efectiva en un campo magnético.

Para una bobina de N espiras que encierra un área dentro de un campo magnético, el flujo magnético ( $\phi_{\beta}$ ) a través de la espira esta definido matemáticamente mediante el producto escalar del vector área (A) y el vector inducción magnética ( $\beta$ ) y representado por la siguiente ecuación:

$$\phi_{\beta} = \beta A \cos \theta \tag{a}$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector área y el vector inducción magnética, por lo que para una bobina de N espiras la fem inducida se determina sustituyendo la ecuación (a) en la ecuación 5.1, de donde se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{N(d\beta A \cos \theta)}{dt} \tag{5.2}$$

Al considerar que el campo permanece constante, pero durante el movimiento el área efectiva por la que pasa el flujo magnético está combinado, y tomando como referencia el movimiento entre 2 puntos, se cuantifican 2 ángulos, ángulo inicial  $\theta_{\beta i}$  y el ángulo final  $\theta_{\beta f}$  deduciendo la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = \frac{N\beta[A \cos \theta_{\beta f} - A \cos \theta_{\beta i}]}{t} \tag{5.3}$$

Donde A es el vector área de la bobina definida como: el vector imaginario cuya magnitud es igual al área de la superficie cuyo sentido está saliendo de la superficie y es perpendicular a esta.

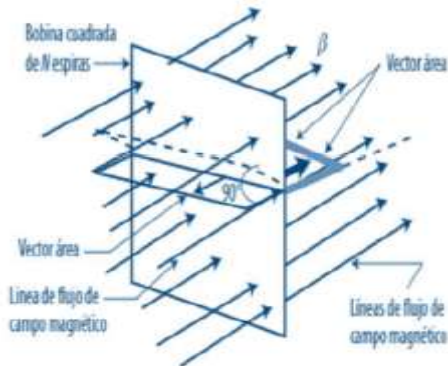
N= -Número de espiras.

$\beta$  = -Inducción magnética  $T = Wb/m^2$

$\varepsilon$  = Fem inducida (volts).

t= Tiempo (s)

$\theta$  = Ángulo entre las líneas de campo magnético y el vector área.



**Figura 182. Espira dentro de un campo magnético**

A Partir de la ecuación 5.2 se observa que puede inducirse una fem en el círculo de varias formas:

- c) Variante B con respecto al tiempo.
- d) Variante A con respecto al tiempo.
- e) Variante  $\theta$  con respecto al tiempo.
- f) Puede ocurrir una combinación de las anteriores.

Si la superficie de la bobina inicialmente es paralela al flujo, entonces el ángulo inicial  $\theta_{\beta i}$  entre el vector área y el flujo es de  $90^\circ$ , pero si la bobina se gira hasta que es perpendicular a las líneas de flujo magnético, entonces el vector área de la bobina será paralela a las líneas de flujo, por tanto el ángulo final  $\theta_{\beta f}$  entre el flujo y el vector área es cero, y el coseno de cero es igual a la unidad, entonces la ecuación de la inducción magnética está dada por:

$$\varepsilon = \frac{N\beta A}{t} \quad (5.3 \text{ a})$$

**Problema resuelto**

Una bobina cuadrada de 20 cm. Tiene 300 espiras. Se mueve dentro de un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la bobina. Si el campo cambia linealmente de 0 a 0.8 T en 0.3 s, calcular la fem inducida en el instante en que corta el flujo final.

**Solución**

Primero obtenemos los datos del problema:

$$N = 300$$

$$A = 0.2^2 = 0.04 \text{ m}^2$$

$$t = 0.3 \text{ s.}$$

$$\beta_i = 0$$

$$\beta_{i=0.8 \text{ T}} = 0.8 \text{ Wb/m}^2$$

$$\phi_i = 0$$

Para  $t = 0.3 \text{ s}$  sustituimos los valores en la ecuación:

$$\phi_f = BA \cos 0 = (0)(0.2 \text{ m})^2 \cos 0 = 0$$

$$\phi_f = BA \cos 0 = (0.8 \text{ Wb/m}^2) (0.04 \text{ m}^2) (1) = 0.032 \text{ Wb}^2$$

Después determinamos  $\Delta\phi$  :

$$\Delta\phi = \phi_f - \phi_i = 0.32 \text{ Wb} - 0 = 0.032 \text{ Wb}$$

$$\varepsilon = \frac{N\Delta\phi_b}{\Delta t} = \frac{300(0.32 \text{ Wb}-0)}{(0.3-0) \text{ s}} = 32 \frac{\text{Wb}}{\text{s}} = 32 \text{ V}$$

**Problema resuelto**

Un conductor que se desplaza perpendicularmente dentro de un campo magnético corta las líneas

de flujo desde 0.6 Wb hasta 2.6 Wb, induciéndose una fem de 120 V. Determinar: a) el tiempo en que se hizo el recorrido y b) su frecuencia, si el alambre oscila siempre a la misma distancia.

### Solución

Los datos que se tienen para resolver el problema son los siguientes:

$$\phi_{B_i} = 0.6 \text{ Wb}$$

$$\phi_{B_f} = 2.6 \text{ Wb}$$

$$\varepsilon = 120 \text{ V}$$

- a) Para determinar el tiempo utilizamos la ley de Faraday; expresándola en función de la variación del flujo magnético  $\Delta\phi_B$  entre dos puntos.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\phi_B}{\Delta t}$$

$$\Delta\phi_B = \phi_{B_f} - \phi_{B_i} = 2.6 \text{ Wb} - 0.6 \text{ Wb} = 2 \text{ Wb}$$

$$\Delta t = t = t_f - t_i$$

$$t = \frac{\Delta\phi}{\varepsilon} = \frac{2 \text{ Wb}}{120 \text{ V}} = 0.01666666 \text{ s}$$

- b) Determinar la frecuencia de oscilación

$$f = \frac{1}{2T} = \frac{1}{(2)0.01666666} = 3 \text{ Hz}$$

### Problema resuelto

Una bobina de 150 espiras tarda 0.01 s en recorrer los polos de un imán desde un punto donde el flujo es de  $0.2 \times 10^5$  Wb hasta otro punto donde el flujo es de  $7 \times 10^{-5}$  Wb. Calcular el valor de la fem inducida.

### Solución

Establecemos los datos del problema:

$$N = 150$$

$$t = 0.01 \text{ s.}$$

$$\phi_{\beta i} = 0.2 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

$$\phi_{\beta f} = 7 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Determinamos el cambio en el flujo magnético ( $\Delta\phi_{\beta}$ ) y en el tiempo ( $\Delta t$ ):

$$\Delta\phi_{\beta} = \phi_{\beta f} - \phi_{\beta i} = 7 \times 10^{-4} \text{ Wb} - 2 \times 10^{-5} \text{ Wb} = 6.8 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Delta t = t_f - t_i = 0.01 \text{ s} - 0 = 0.01 \text{ s}$$

Para calcular la fem sustituimos los valores:

$$\varepsilon = (150) \frac{6.8 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{0.01 \text{ s}} = 10.2 \text{ V}$$

### **FEM de movimiento**

Consideremos una barra conductora recta de longitud  $l$  moviéndose con una velocidad  $\vec{V}$  a través de un campo magnético  $\vec{B}$  dirigido perpendicularmente a  $\vec{V}$ . Una fem igual a  $Blv$  se induce entre los extremos de la barra, veámoslo (Figura 183)

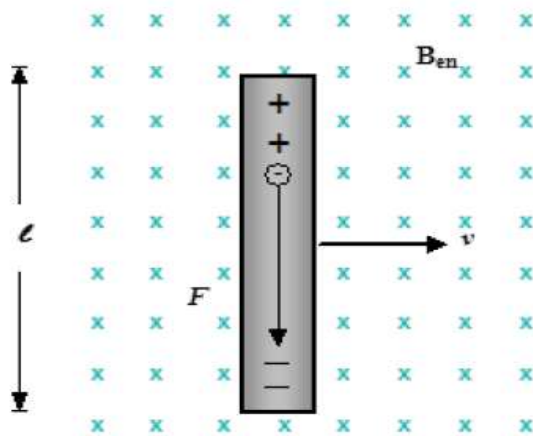


Figura 183.

Los electrones en el conductor experimentarán una fuerza magnética a lo largo del conductor dada por  $\vec{F}_m = q \vec{V} \times \vec{B}$ , que producirá el desplazamiento de los electrones hacia el extremo inferior del conductor dejando una carga neta positiva en el extremo superior. Debido a la separación de las cargas se produce un campo eléctrico en el interior del conductor produciendo una fuerza eléctrica sobre los electrones dada por  $\vec{F}_e = q \vec{E}$  dirigida hacia arriba. En el momento en que la fuerza magnética es balanceada por la fuerza eléctrica, las cargas dejan de fluir y la condición de equilibrio requerida es:

$$F_m = F_e$$

$$\Rightarrow qvB = qE$$

$$\Rightarrow vB = E$$

La relación entre el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre los extremos del conductor es:

$$V = El = vBl$$

donde el extremo superior está a mayor potencial que el extremo inferior.

Cuando el conductor en movimiento es parte de una trayectoria conductora cerrada, como el circuito mostrado en la figura 184, que consta de una barra conductora de longitud  $l$  deslizándose a lo largo de dos rieles conductores paralelos, el cálculo de la fem inducida, de la corriente inducida y de la potencia se efectúa de la siguiente manera

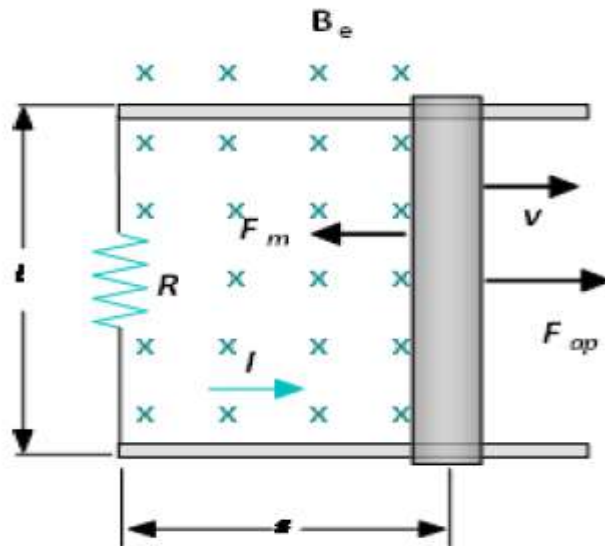


Figura 184.

Barra conductora deslizándose con velocidad  $\vec{V}$  a lo largo de dos rieles conductores por acción de una fuerza aplicada  $\vec{F}_{ap}$ .

Un campo magnético  $B$  uniforme y constante se aplica al plano del circuito. Cuando la barra se jala hacia la derecha con una velocidad variable  $\vec{V}$  por la influencia de una fuerza aplicada  $\vec{F}_{ap}$ , las cargas libres de la barra experimentarán una fuerza magnética a lo largo de la longitud de la barra. Esta fuerza a su vez produce una corriente inducida, puesto que la rapidez de cambio de flujo magnético a través de la espira y por ende la fem inducida es proporcional al cambio de área de la espira que se produce cuando la barra se mueve a través del campo magnético.

El flujo magnético externo a través del circuito está dado por  $\varphi_m = Bl_x$ , siendo  $l_x$  el área del circuito en cualquier instante.

De la ley de Faraday se sigue que la fem inducida es:

$$\varepsilon = \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(Blx) = -Blv$$

Si la resistencia del circuito es R, la magnitud de la corriente inducida está dada por:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

La potencia disipada por la fuerza aplicada es:

$$P = Fap^v = (ILB)v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

Esta potencia mecánica es igual a la potencia eléctrica  $I\varepsilon$  suministrada por la fem inducida y también es igual a la rapidez con que se disipa energía en la resistencia,  $I^2 R$ .

### Ejemplos

#### Ejemplo 1. Fem Inducida en una Barra que Gira.

Una barra conductora de longitud  $l$  gira con una velocidad  $w$  alrededor de un pivote fijo en su extremo. Un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  está dirigido perpendicularmente al plano de rotación, como se muestra en la figura 185.

Encuentre la fem inducida entre los extremos de la barra.

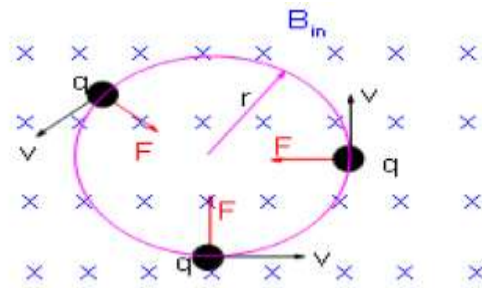


Figura 185

### Solución

Considérese un segmento de barra de longitud  $dr$  que se mueve con velocidad  $v$ .

La fem inducida en el conductor está dada por:

$$d\varepsilon = Bvdr$$

$$\varepsilon = B \int vdr = Bw \int_0^l r dr = \frac{1}{2} Bwl^2$$



**Ejemplo 2.** Fuerza Magnética sobre una Barra que se Desliza (Figura 186).

Una barra de masa  $m$  y longitud  $l$  se mueve sobre dos rieles paralelos, en presencia de un campo magnético dirigido hacia dentro de la página. Si se le imprime a la barra una velocidad inicial  $v_0$  hacia la derecha y después se libera. Encuéntrese la velocidad de la barra como una función del tiempo.

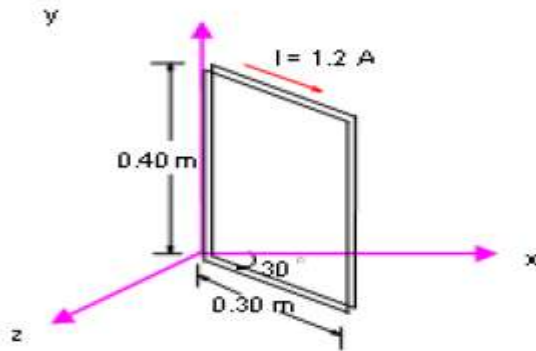


Figura 186.

**Solución**

La corriente inducida circula en sentido contrario a las manecillas del reloj y la fuerza magnética es  $F_m = -IlB$  donde el signo negativo denota que la fuerza está hacia la izquierda y retarda el movimiento.

De la segunda ley de Newton

$$F_x = ma = m \frac{dv}{dt} = -IlB$$

Como la corriente inducida está dada por la ecuación  $I = \frac{Bvl}{R}$ , entonces:

$$F_x = -\frac{Bvl}{R} \cdot lB = -\frac{B^2vl^2}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2l^2}{mR}\right) dt$$

Integrando esta última ecuación, utilizando como condiciones iniciales  $v = v_0$ , para  $t = 0$ , se encuentra que:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \frac{B^2l^2}{mR} t = -\frac{t}{\tau}$$

$$\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La fem inducida viene dada por:

$$\varepsilon = IR = Blv_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

y la corriente inducida viene dada por:

$$I = \frac{Blv}{R} = \frac{Blv}{R} = \frac{Blv_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R}$$

### **Ley de Lenz**

La ley de Lenz establece que:

La polaridad de la fem inducida produce una corriente que crea un flujo magnético que se opone al cambio en el flujo magnético a través del circuito.

Considérese un imán de barra que se mueve hacia la derecha introduciéndose en una espira estacionaria, como se muestra en la figura 187.

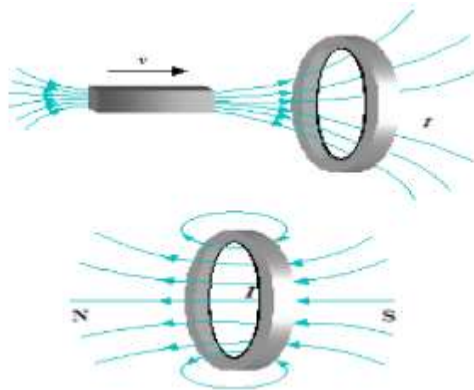


Figura 187.

- Cuando el imán se mueve, en la espira conductora estacionaria se induce una corriente en la dirección mostrada.
- Esta corriente inducida produce su propio flujo hacia la izquierda para contrarrestar el incremento del flujo externo hacia la derecha.

**Aplicación de la Ley de Lenz:**

La figura 188 muestra una barra que se halla horizontalmente a través de un par de rieles paralelos por una cuerda (se supone que sin masa) que pasa sobre una polea ideal a la cual está sujeta y suspendida una masa  $M$ . El campo magnético uniforme tiene una magnitud  $B$ , la barra deslizante tiene una masa  $m$  y la distancia entre los rieles es  $l$ . Los rieles son conectados en uno de sus extremos por una resistencia de carga  $R$ . Deduzca una expresión que dé el valor de la velocidad horizontal como función del tiempo, suponiendo que la masa suspendida se dejó caer cuando la barra está en reposo para  $t = 0$ . Suponga que no hay fricción entre la barra y los rieles.

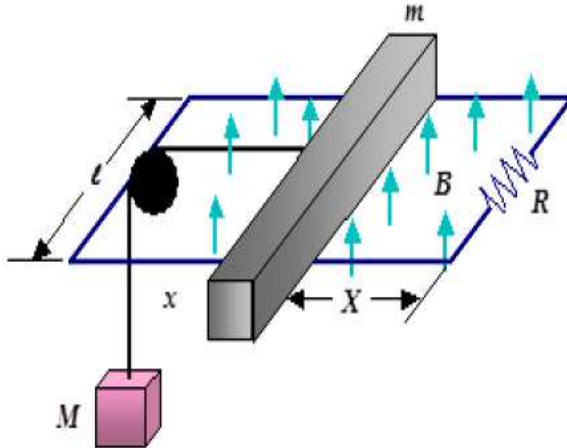


Figura 188.

**Solución**

$$\overline{F_m} = mg$$

De la cinemática se sabe que la posición de la barra en función del tiempo es:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Teniendo en cuenta que la aceleración es  $a = Mg/m$ , se sigue que:

$$x = \frac{1}{2} \frac{mg}{m} t^2$$

De la definición de fem:

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{dA}$$

Pero  $A = lvt$ , entonces:

$$\varepsilon = -\beta \frac{d}{dt} lvt = -Blv$$

$$\varepsilon = -\beta \frac{d}{dt} l \left[ \frac{1}{2} \frac{Mg}{m} t^2 \right]$$

$$\varepsilon = -\beta \frac{1}{2} \frac{Mg}{m} t$$

La velocidad está dada por:

$$v = -\frac{\varepsilon}{Bl}$$

$$v = -\frac{\frac{Bl}{2} \frac{Mg}{m} t}{By}$$

Simplificando se obtiene:

$$v = -\frac{Mg}{2m} t$$

De la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F = ma :$$

$$\mu g - IlB = ma$$

Reemplazando el valor de I, se obtiene:

$$\mu g - \frac{\varepsilon}{R} l \beta = ma$$

$$\mu g + \frac{\beta^2 l^2}{2} \frac{ug}{mR} t = ma$$

$$\mu g \left[ 1 + \frac{\beta^2 l^2}{2} \frac{t}{mR} \right] = m \frac{dv}{dt}$$

$$dv = \frac{\mu g}{m} \left[ 1 + \frac{\beta^2 l^2}{2} \frac{t}{mR} \right] dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \frac{\mu g}{m} \left[ 1 + \frac{\beta^2 l^2}{2} \frac{t}{mR} \right] dt$$

$$v = \frac{Mg}{m}t + \frac{Mg}{m^2 R} B^2 l^2 \frac{t^2}{2}$$

$$dv = \frac{\epsilon B d}{mR} dt$$

$$\int dv = \frac{\epsilon B d}{mR} \int dt$$

$$\int dv = -\frac{v d^2 B^2}{mR} t$$

$$\ln v \Big|_{v_0}^v = -\frac{d^2 B^2}{mR} t$$

$$\ln \left( \frac{v}{v_0} \right) = -\frac{d^2 B^2}{mR} t$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-\frac{d^2 B^2}{mR} t}$$

$$v = v_0 e^{-\frac{d^2 B^2}{mR} t},$$

que indica claramente que v decrece con el tiempo.

### FEM inducidas y campos eléctricos

Consideremos una espira de radio r situada en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de la espira como se muestra en la figura 189.

Si el campo magnético cambia en el tiempo, se induce en la espira una fem dada por:  $\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$ .

La corriente inducida implica la aparición de un campo eléctrico E, tangente a la espira. El trabajo que se realiza para mover una carga de prueba q alrededor de la espira es igual a qε. El trabajo realizado por fuerza eléctrica sobre la carga eléctrica está dado por qE(2πr), donde 2πr es la longitud de la circunferencia de la espira. Luego igualando las dos expresiones para el trabajo se sigue que:

$$q\epsilon = qE(2\pi Rr)$$

$$E = \frac{\epsilon}{2\pi r}$$

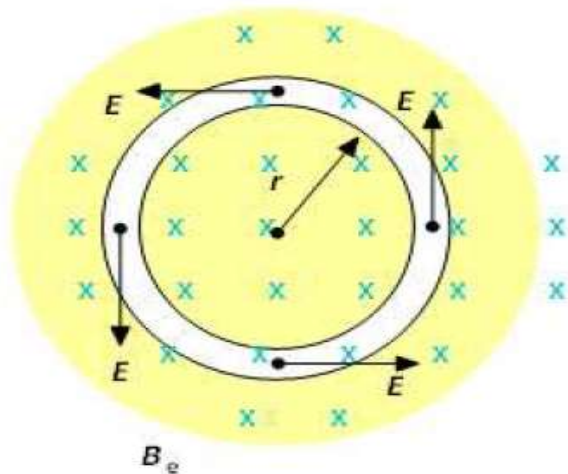


Figura 189.

Teniendo en cuenta que  $\varepsilon = -\frac{d\varphi_m}{dt}$ , siendo  $\varphi_m = BA = \pi r^2 B$ , se encuentra que el campo eléctrico inducido puede expresarse como:

$$E = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\varphi_m}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

El signo menos indica que el campo eléctrico inducido  $E$  se opone al cambio del campo magnético.

En general, la fem para cualquier trayectoria cerrada puede ser expresada como la integral de línea  $\vec{E} \cdot \vec{dl}$  sobre la trayectoria.

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\varphi_m}{dt}$$

Obsérvese que el campo eléctrico inducido  $\vec{E}$  que aparece en la ecuación anterior no es conservativo, varía en el tiempo y es generado por la variación de un campo magnético.

### Campo Eléctrico Debido a un Solenoide:

Un largo solenoide de radio  $R$  tiene  $n$  vueltas por unidad de longitud y conduce una corriente que varía en el tiempo sinusoidalmente  $I = I_0 \cos \omega t$ , donde  $I_0$  es la máxima corriente y  $w$  es la frecuencia angular de la fuente de corriente como se aprecia en la figura 190

Ejemplos:

- a. Determine el campo eléctrico fuera del solenoide, a una distancia  $r$  de su eje.

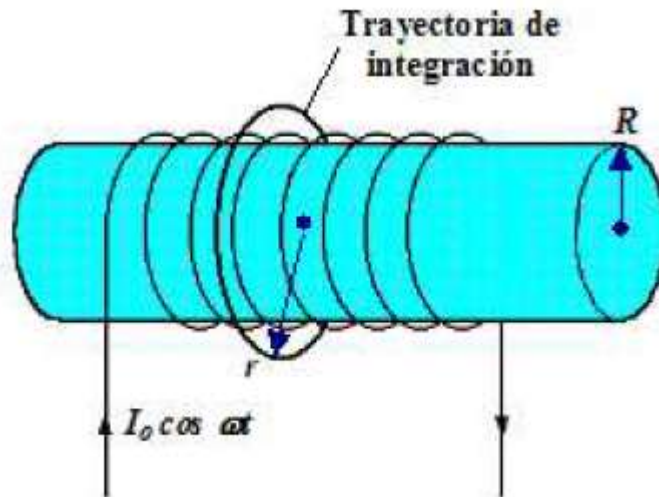


Figura 190.

Solución.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} [\beta (\pi R^2)] = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\varepsilon (2\pi r) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$B = \mu_0 n I \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \mu_0 \frac{N}{e} \frac{d}{dt} I_0 \cos \omega t$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{e} \frac{d}{dt} I_0 \text{sen} \omega t$$

$$\varepsilon (2\pi r) = -\pi R^2 \mu_0 n I_0 \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = \pi R^2 \mu_0 n I_0 \omega \text{sen} \omega t$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2r} \text{sen} \omega t$$

$r > R$



b. Cuál es el campo eléctrico dentro del solenoide a una distancia  $r$  de su eje.

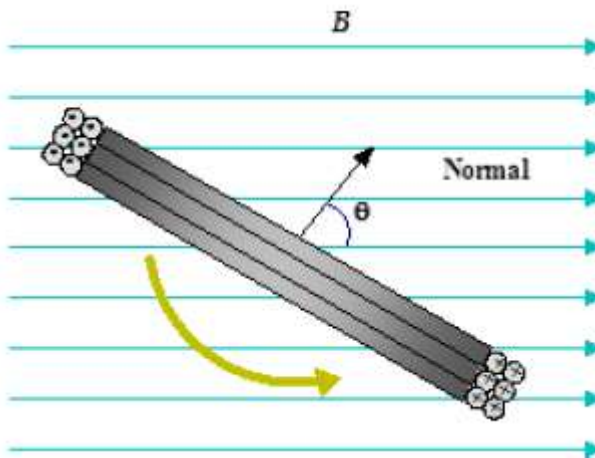
$$\varepsilon = (2\pi r) = \pi R^2 \mu_0 n l_0 \omega \sin \omega t \Rightarrow E = \frac{\mu_0 n l_0 r \sin \omega t}{2}$$

$$r < R$$

### **Generadores y motores**

Los generadores y motores son dispositivos que operan por el principio de inducción electromagnética. El generador de corriente alterna (o generador de AC), es un dispositivo que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Un generador de AC consta de una bobina de alambre que se hace girar dentro de un campo magnético. Cuando la espira gira, el flujo magnético a través de esta cambia con el tiempo, induciendo una fem y una corriente en un circuito externo. Supóngase que la bobina tiene  $N$  espiras de área  $A$  y que gira con velocidad angular  $w$ . Si  $\theta$  es el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano de la espira como en la figura (191), entonces el flujo magnético a través de la espira en cualquier instante  $t$  está dado por:

$$\Phi_m = BA \cos \theta = \cos \omega t$$



**Figura 191.**

Bobina con  $N$  espiras de área  $A$  que gira con velocidad angular  $w$  dentro de un campo magnético  $B$ . La fem inducida varía sinusoidalmente en el tiempo.

Donde se ha utilizado la relación entre el desplazamiento angular y la velocidad angular  $\theta = \omega t$ . Por lo tanto la fem inducida en la bobina está dada por:

$$\varepsilon = -N \frac{d\phi_m}{dt} = -NAB \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = NAB \sin \omega t$$

De la ecuación anterior se ve que la fem tiene un valor máximo  $\varepsilon_{max} = NAB\omega$ . El cual ocurre cuando  $\theta = 90^\circ$ . O  $\theta = 270^\circ$ . La fem es nula cuando  $\omega t = 0$ .o  $180^\circ$  La frecuencia de los generadores comerciales es por lo general de 60Hz.

Los motores son dispositivos que convierten la energía eléctrica en energía mecánica. Se suministra corriente a la bobina por medio de una batería y el momento de torsión que actúa sobre la bobina provoca la rotación. A medida que la bobina gira, el flujo variable induce una fem en ella; esta fem siempre actúa para reducir la corriente en la bobina. Esta contra fem aumenta en magnitud con el aumento de la rapidez rotacional de la bobina.

### Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre, en forma integral, son:

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

2. Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2)$$

3. Ley de Faraday - Henry:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d\phi_m}{dt} \quad (3)$$

4. Ley de Ampere- Maxwell:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tau + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (4)$$

La ecuación (1) establece que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta dentro de la superficie dividida entre la constante  $\varepsilon_0$ .

La ecuación (2) establece que el flujo magnético total a través de una superficie cerrada es cero.

La ecuación (3) describe la relación entre un campo eléctrico y un flujo magnético variable. Como consecuencia de la ley de inducción de la Ley de Faraday se induce una corriente en una bobina conductora colocada dentro de un campo magnético que varía en el tiempo.

La ecuación (4) describe la relación entre los campos eléctrico y magnético y las corrientes eléctricas.

## 5.2 Autoinductancia.

El concepto de inductancia se aplica también a una sola bobina aislada de  $N$  vueltas. Cuando una corriente variable pasa a través de una bobina (o solenoide), dentro de la bobina se produce un flujo magnético variable, y éste, a la vez, induce una fem en esa misma bobina. Esta fem inducida se opone al cambio en el flujo (ley de Lenz). Por ejemplo, si la corriente a través de la bobina aumenta, el flujo magnético creciente induce una fem que se opone a la corriente original y tiende a retardar su aumento. Si la corriente disminuye en la bobina, el flujo decreciente induce una fem en la misma dirección que la corriente, lo que, de esta forma, tiende a mantener la corriente original. El flujo magnético  $\Phi_B$  que pasa a través de  $N$  espiras de una bobina es proporcional a la corriente  $I$  en la bobina, así que la **autoinductancia**  $L$  (en analogía con la inductancia mutua, ecuación  $M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}$ ) se define como

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (5.4)$$

Así, la fem  $\varepsilon$  inducida en una bobina de autoinductancia  $L$  es, de acuerdo con la ley de Faraday,

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (5.5)$$

Al igual que la inductancia mutua, la autoinductancia se mide en henrys. La magnitud de  $L$  depende de la geometría y de la presencia de un material ferromagnético. La Autoinductancia (inductancia, para abreviar) se puede definir, como anteriormente, para cualquier circuito o parte de un circuito.

Los circuitos siempre contienen algo de inductancia, pero con frecuencia ésta es muy pequeña a menos que el circuito contenga una bobina de muchas espiras. Una bobina que tenga autoinductancia  $L$  significativa se llama **inductor**. La inductancia se representa en los diagramas de circuitos mediante el símbolo



[símbolo de inductor]

Cualquier resistencia que pueda tener un inductor también se debe mostrar por separado. La inductancia tiene un propósito útil en ciertos circuitos. Sin embargo, con frecuencia, la inductancia se debe evitar en un circuito. Los resistores de precisión por lo general consisten en alambre devanado y, por lo tanto, tendrían inductancia así como resistencia. La inductancia se puede minimizar al enrollar el alambre aislado de vuelta sobre sí mismo en el sentido opuesto, de manera que la corriente en direcciones opuestas produzca poco flujo magnético neto; a esto se le llama **devanado no inductivo**.

Si un inductor tiene resistencia despreciable, es la inductancia (o fem inducida) la que controla una corriente variable. Si a la bobina se aplica una fuente de voltaje variable o alterno, este voltaje aplicado apenas se equilibrará por la fem inducida de la bobina (ecuación 5-5). En consecuencia, es posible ver a partir de la ecuación 5-5 que, para una  $\varepsilon$  dada, si la inductancia  $L$  es grande, el

cambio en la corriente será pequeño y por ende la corriente misma, si es ca, será pequeña. Cuanto mayor sea la inductancia, menor será la ca. Así, una inductancia actúa un tanto como una resistencia para impedir el flujo de corriente alterna. Para esta cualidad de un inductor se usa el término *reactancia* o *impedancia*. Se verá que la reactancia depende no sólo de la inductancia  $L$ , sino también de la frecuencia. Aquí se menciona un ejemplo de su importancia. La resistencia del primario en el transformador por lo general es muy pequeña, acaso menor a  $1\Omega$ . Si la resistencia sola limitara la corriente en un transformador, una enorme corriente fluiría al aplicar un alto voltaje. De hecho, un voltaje de cd aplicado a un transformador puede quemarlo. Es la fem inducida (o reactancia) de la bobina la que limita la corriente a un valor razonable

Los inductores comunes tienen inductancias que van de aproximadamente  $1\mu H$  a  $1 H$  (donde  $1 H = 1 \text{ henry} = 1 \Omega \cdot s$ ).

### **EJEMPLO 3 Inductancia de un solenoide.**

a) Determine una fórmula para la autoinductancia  $L$  de un largo solenoide firmemente devanado que contiene  $N$  espiras de alambre en su longitud  $l$  y cuya área transversal es  $A$ . b) Calcule el valor de  $L$ , si  $N = 100$ ,  $l = 5.0 \text{ cm}$ ,  $A = 0.30 \text{ cm}^2$  y el solenoide está lleno con aire.

**PLANTEAMIENTO** Para determinar la inductancia  $L$ , por lo general es más sencillo comenzar con la ecuación 5.4, así que primero necesitamos determinar el flujo.

**SOLUCIÓN** a) De acuerdo con la ecuación, el campo magnético dentro de un solenoide (si se ignoran los efectos de los bordes) es constante:  $B = \mu_0 n l$ , donde  $n = N/l$ , de manera que

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}.$$

b) Puesto que  $\mu_0 = 4\pi \times 10^7 \text{ T} \cdot \text{m/A}$ , entonces

$$L = \frac{(4\pi \times 10^7 \text{ T} \cdot \text{m/A})(100)^2(3.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2)}{(5.0 \times 10^{-2} \text{ m})} = 7.5 \mu H.$$

**NOTA** Las líneas de flujo magnético se “desvían” fuera del solenoide (véase la figura 28-15), en especial cerca de los extremos, de manera que la fórmula sólo es una aproximación.

### **EJEMPLO CONCEPTUAL 4 Dirección de la fem en un inductor.**

A través de la bobina en la figura 192, pasa una corriente de izquierda a derecha, como se indica. a) Si la corriente aumenta con el tiempo, ¿en qué dirección está la fem inducida? b) Si la corriente disminuye con el tiempo, ¿en qué dirección está la fem inducida?

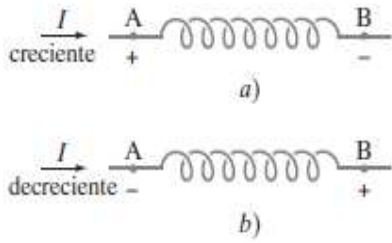


Figura 192.-Ejemplo 4. Los signos + y - se refieren a la fem inducida debida a la corriente variable, como los puntos A y B fueran las terminales de una batería (y las espiras fueran el interior de la batería).

RESPUESTA a) A partir de la ley de Lenz se sabe que la fem inducida se debe oponer al cambio en el flujo magnético. Si la corriente aumenta, de igual modo lo hace el flujo magnético. La fem inducida actúa para oponerse al flujo creciente, lo que significa que actúa como una fuente de fem que se opone a la fuente externa de fem que impulsa la corriente. De manera

que la fem inducida en la bobina actúa para oponerse a  $I$  en la figura 192a. En otras palabras, el inductor se puede considerar como una batería con una terminal positiva en el punto A (que tiende a bloquear la corriente que entra a A), y negativa en el punto B. b) Si la corriente disminuye, entonces, de acuerdo con la ley de Lenz, la fem inducida

actúa para reforzar el flujo, como una fuente de fem que refuerza la fem externa. La fem inducida actúa para aumentar  $I$  en la figura 30-4b, de manera que, en esta situación, podemos pensar en la fem inducida como en una batería con su terminal negativa en el punto A que atrae más corriente(+) que se desplaza hacia la derecha.

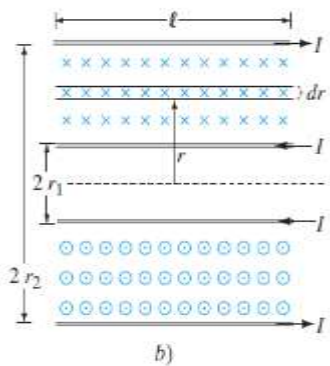
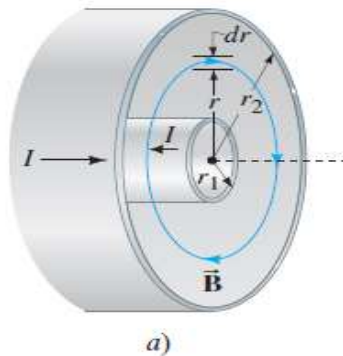


Figura 193. Ejemplo 5. Cable coaxial: a) vista de un extremo b) vista lateral (sección transversal).

**Inductancia de un cable coaxial.** Determine la inductancia por unidad de longitud de un cable coaxial cuyo conductor interno tiene radio  $r_1$  y el conductor externo tiene un radio  $r_2$ , figura 193.

Suponga que los conductores son delgados tubos huecos, de manera que dentro del conductor interno no hay campo magnético, y que el campo magnético dentro de ambos conductores delgados se puede despreciar.

Los conductores transportan corrientes iguales  $I$  en direcciones opuestas

PLANTEAMIENTO Es necesario encontrar el flujo magnético,  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ , entre los conductores. Las líneas de  $\vec{B}$  son círculos que rodean al conductor interno (en la figura 193a sólo se ilustra uno). De acuerdo con la ley de Ampere,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$  la magnitud del campo a lo largo del círculo a una distancia  $r$  del centro, cuando el conductor interno transporta una corriente  $I$ , es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

El flujo magnético a través de un rectángulo de ancho  $dr$  y longitud  $\ell$  (a lo largo del cable, figura 193b), a una distancia  $r$  del centro, es

$$d\Phi_B = B(\ell dr) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ell dr.$$

**SOLUCIÓN** El flujo total en una longitud  $\ell$  de cable es

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Como toda la corriente  $I$  fluye en un sentido en el conductor interno, y la misma corriente  $I$  fluye en sentido opuesto en el conductor externo, sólo se tiene una espira, de manera que  $N = 1$  en la ecuación 5.4. En consecuencia, la autoinductancia para una longitud  $\ell$  es

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

La inductancia por unidad de longitud es

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Advierta que  $L$  sólo depende de factores geométricos y no de la corriente  $I$

### 5.3 Inductancia Mutua.

En la sección 4.2 estudiamos la interacción magnética entre dos alambres que transportan corrientes *estables*; la corriente en uno de los alambres genera un campo magnético que ejerce una fuerza sobre la corriente en el otro alambre. Pero cuando hay una corriente variable en uno de los circuitos, surge una interacción adicional. Considere, dos bobinas de alambre cerca una de la otra, como se ilustra en la figura 194. Una corriente que circula por la bobina 1 produce un campo magnético  $\vec{B}$  y, por lo tanto, un flujo magnético a través de la bobina 2. Si la corriente en la bobina 1 cambia, el flujo a través de la bobina 2 también cambia; de acuerdo con la ley de Faraday, esto induce una fem en la bobina 2. De este modo, un cambio en la corriente de un circuito puede inducir otra corriente en un segundo circuito.

Analícemos con más detalle la situación que aparece en la

Figura 194. La corriente en la bobina  $I_1$  da origen a un flujo magnético a través de la bobina 2.

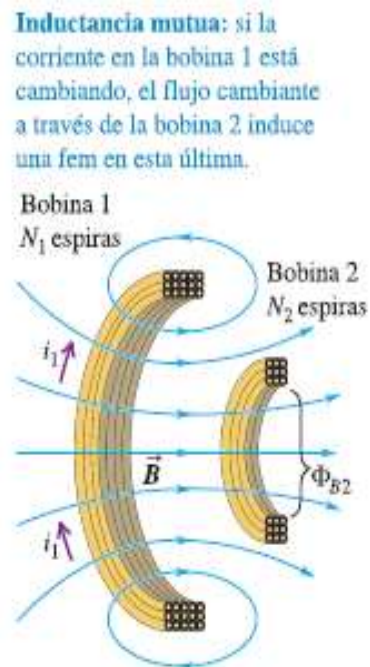


figura194. Para representar las cantidades que varían con el tiempo usaremos letras minúsculas; por ejemplo, una corriente variable en el tiempo se representa con  $i$ , a menudo con un subíndice para identificar el circuito. En la figura 194, una corriente  $i$ , establece un campo magnético (indicado por las líneas de color azul), y algunas de estas líneas de campo pasan a través de la bobina 2. Denotaremos con  $\Phi_{B2}$  el flujo magnético a través de cada espira de la bobina 2, causado por la corriente  $I_1$  en la bobina 1. (Si el flujo es diferente a través de las distintas espiras de la bobina, entonces  $\Phi_{B2}$  denota el flujo medio.) El campo magnético es proporcional a  $I_1$ , de manera que  $\Phi_{B2}$  también es proporcional a  $I_1$ . Cuando  $I_1$  cambia,  $\Phi_{B2}$  cambia; este flujo cambiante induce una fem  $\varepsilon_2$  en la bobina 2, dada por

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} \quad (5.6)$$

Podríamos representar la proporcionalidad entre  $\Phi_{B2}$  e  $I_1$  en la forma  $\Phi_{B2} = (\text{constante}) I_1$ , pero, en vez de ello, es más conveniente incluir el número de espiras  $N_2$  en la relación. Al introducir una constante de proporcionalidad  $M_{21}$ , llamada **inductancia mutua** de las dos bobinas, escribimos

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1 \quad (5.6)$$

donde  $\Phi_{B2}$  es el flujo a través de *una sola* espira de la bobina 2. De ahí que,

$$N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

y la ecuación (30.1) se rescribe como

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (5.7)$$

Es decir, un cambio en la corriente  $i_1$  en la bobina 1 induce una fem en la bobina 2, que es directamente proporcional a la tasa de cambio de (figura 195).

También se podría escribir la definición de la inductancia mutua, ecuación (30.2), como

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1}$$

Si las bobinas están en el vacío, el flujo  $\Phi_{B2}$  a través de cada espira de la bobina 2 es directamente proporcional a la corriente  $i_1$ . Entonces, la inductancia mutua  $M_{21}$  es una constante que sólo depende de la geometría de las dos bobinas (el tamaño, la forma, el



**Figura 195. Figura 30.2** Este cepillo dental eléctrico usa la inductancia mutua. La base contiene una bobina a la que se suministra corriente alterna desde una toma de pared. Esta corriente variable induce una fem en una bobina en el interior del cuerpo del cepillo, la cual se utiliza para recargar la batería de este último.



número de espiras y la orientación de cada una, así como la separación entre ellas). Si está presente un material magnético,  $M_{21}$  también depende de las propiedades magnéticas de éste. Si el material tiene propiedades magnéticas no lineales, es decir, si la permeabilidad relativa  $K_m$  (definida en la unidad 4) no es constante y la magnetización no es proporcional al campo magnético, entonces  $\Phi_{B2}$  deja de ser directamente proporcional a  $i_1$ . En ese caso, la inductancia mutua también depende del valor de  $i_1$ . En este análisis supondremos que cualquier material magnético que esté presente tiene, una  $K_m$  constante, por lo que el flujo es directamente proporcional a la corriente y  $M_{21}$  sólo depende de la geometría.

Podría volverse a hacer el análisis para el caso opuesto, en el que una corriente cambiante  $i_2$  en la bobina 2 causa un flujo cambiante  $\Phi_{B1}$  y una fem  $\varepsilon_1$  en la bobina 1. Esperaríamos que la constante correspondiente  $M_{12}$  fuera diferente de  $M_{21}$  porque, en general, las dos bobinas no son idénticas y el flujo a través de ellas no es el mismo. Sin embargo,  $M_{12}$  *siempre* es igual a  $M_{21}$ , aun cuando las dos bobinas no sean simétricas. A este valor común lo llamamos simplemente inductancia mutua, y lo denotamos

con el símbolo  $M$ , sin subíndices; este valor caracteriza por completo la interacción de la fem inducida de las dos bobinas. De esta forma, podemos escribir

$$\varepsilon_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \varepsilon_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad (\text{fem mutuamente inducidas}) \quad (5.8)$$

donde la inductancia mutua  $M$  es

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2} \quad (\text{Inductancia mutua}) \quad (5.9)$$

Los signos negativos en la ecuación (5.8) son un reflejo de la ley de Lenz. La primera ecuación dice que un cambio en la corriente en la bobina 1 provoca un cambio en el flujo magnético a través de la bobina 2, lo que induce una fem en esta última que se opone al cambio del flujo; en la segunda ecuación las dos bobinas intercambian su papel.

**CUIDADO Sólo una corriente variable en el tiempo induce una fem.** Note que sólo una corriente *variable en el tiempo* en una bobina puede inducir una fem y, por lo tanto, una corriente en una segunda bobina. Las ecuaciones (5.8) demuestran que la fem inducida en cada bobina es directamente proporcional a la *tasa de cambio* de la corriente en la otra bobina, no al valor de la corriente. Una corriente estable en una bobina, sin importar su intensidad, no puede inducir una corriente en una bobina cercana. ■

La unidad del SI para la inductancia mutua se llama **Henry** (1 H), en honor del físico estadounidense Joseph Henry (1797-1878), uno de los descubridores de la inducción electromagnética. Según la ecuación (5.9), un Henry es igual a *un weber por ampere*. Otras

unidades equivalentes obtenidas con la ecuación (5.8) son *un volt-segundo por ampere, un ohm-segundo, o un joule*.

$$1 H = 1 \frac{Wb}{A} = 1 V \cdot \frac{s}{A} = 1 \Omega \cdot s = 1 J/A^2$$

Así como el farad es una unidad muy grande de capacitancia (véase la sección 24.1), el Henry es una unidad muy grande de inductancia mutua. Como se ilustra en el ejemplo 30.1, los valores comunes de la inductancia mutua son del orden del milihenry (mH) o microhenry ( $\mu H$ ).

### Desventajas y usos de la inductancia mutua

La inductancia mutua puede ser inconveniente en los circuitos eléctricos, pues las variaciones de corriente en un circuito inducen fem no deseadas en otros circuitos cercanos. Para minimizar estos efectos, los sistemas de circuitos múltiples deben diseñarse de manera que  $M$  sea tan pequeña como se pueda; por ejemplo, dos bobinas podrían colocarse muy alejadas o con sus planos perpendiculares.

Felizmente, la inductancia mutua también tiene muchas aplicaciones útiles. Un *transformador*, usado en los circuitos de corriente alterna para subir o bajar voltajes, no tiene diferencias fundamentales con las dos bobinas ilustradas en la figura 194. Una corriente alterna variable en el tiempo en una bobina del transformador produce una fem variable en la otra bobina; el valor de  $M$ , que depende de la geometría de las bobinas, determina la amplitud de la fem inducida en la segunda bobina y, por lo tanto, la amplitud del voltaje de salida

### Ejemplo 1 Cálculo de la inductancia mutua

En una forma de bobina de Tesla (un generador de alto voltaje que tal vez haya visto en algún museo de ciencia), un solenoide largo con longitud  $l$  y área de sección transversal  $A$ , tiene un devanado muy compacto con  $N_1$  espiras de alambre. Una bobina con  $N_2$  espiras lo circunda concéntricamente (figura 196). Calcule la inductancia mutua

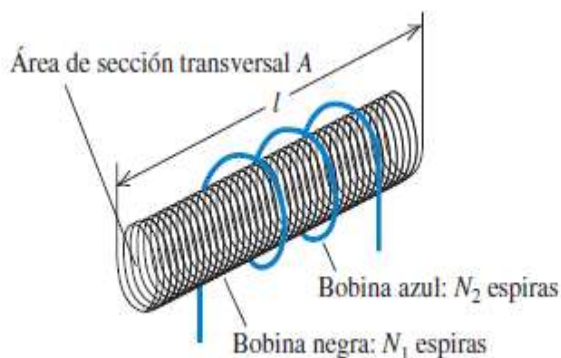


Figura 196. Un solenoide con área de sección transversal  $A$  y  $N_1$  espiras (en color negro) está circundando concéntricamente por una bobina con  $N_2$  espiras (en color azul).

**PLANTEAR:** Se aplica la ecuación (5.9) para determinar la inductancia mutua  $M$ . De acuerdo con esa ecuación, necesitamos conocer ya sea *a*) el flujo  $\Phi_{B2}$  a través de cada espira de la bobina exterior debido a la corriente  $i_1$  en el solenoide, o *b*) el flujo  $\Phi_{B1}$  a través de cada espira del solenoide interno debido a la corriente  $i_2$  en la bobina externa. Elegimos la opción *a*) puesto que tenemos una expresión sencilla para el campo en el centro de un solenoide largo que conduzca corriente, dada por la ecuación ( $B = \mu_0 n I$ ). Note que no se da el valor de la corriente  $i_1$  en el solenoide. No obstante, esta omisión no debe ser motivo de alarma: el valor de la inductancia mutua no depende del valor de la corriente, por lo que la cantidad  $i_1$  debe cancelarse cuando se calcule  $M$ .

**EJECUTAR:** De acuerdo con el ejemplo de un solenoide largo que conduce una corriente  $i_1$  produce un campo magnético que apunta a lo largo del eje del solenoide. La magnitud del campo  $B_1$  es proporcional a  $i_1$  y a  $n_1$ , el número de espiras por unidad de longitud:

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

El flujo a través de una sección transversal del solenoide es igual a  $B_1 A$ . Como un solenoide muy largo no produce campo magnético por fuera de sus espiras, este flujo también es igual al flujo  $\Phi_{B2}$  a través de cada espira de la bobina circundante exterior, sin importar cuál sea el área de la sección transversal de la bobina exterior. De acuerdo con la ecuación (30.5), la inductancia mutua  $M$  es

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1} \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l} A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

**EVALUAR:** La inductancia mutua de dos bobinas cualesquiera siempre es proporcional al producto  $N_1 N_2$  de sus números de espiras. Observe que la inductancia mutua  $M$  sólo depende de la geometría de las dos bobinas, no de la corriente.

A continuación se presenta un ejemplo numérico para dar idea de las magnitudes. Suponga que  $l = 0.50 \text{ m}$ ,  $A = 10 \text{ cm}^2 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $N_1 = 1000$  espiras y  $N_2 = 10$  espiras. De esta forma,

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m})(1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(1000)(10)}{0.50 \text{ m}} = 25 \times 10^{-6} \text{ Wb/A} = 25 \times 10^{-6} \text{ H} \\ = 25 \mu\text{H}$$

**Ejemplo 2** Fem debida a la inductancia mutua

En el ejemplo 1, suponga que la corriente  $i_2$  en la bobina circundante exterior está dada por  $i_2 = (2.0 \times 10^6 \text{ A/s})t$  (de hecho, las corrientes en alambres pueden intensificarse con esta rapidez durante periodos breves). *a*) En el tiempo  $t = 3.0 \mu\text{s}$ , ¿qué flujo magnético medio a través de cada espira del solenoide es causado por la corriente en la bobina exterior circundante? *b*) ¿Cuál es la fem inducida en el solenoide?

## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** En el ejemplo 1 se encontró la inductancia mutua relacionando la corriente en el solenoide con el flujo producido en la bobina exterior. En este ejemplo se da la corriente en la bobina exterior y se desea encontrar el flujo resultante en el solenoide. El punto clave es que la inductancia mutua es la *misma* en cualquier caso.

**PLANTEAR:** Dado el valor de la inductancia mutua  $m = 25 \mu H$  del ejemplo 1, se aplica la ecuación (5.9) para determinar el flujo  $\Phi_{B1}$  a través de cada espira del solenoide causado por una corriente dada  $i_2$  en la bobina exterior. Después, se emplea la ecuación (5.8) para determinar la fem inducida en el solenoide por la variación con respecto al tiempo de la corriente en la bobina exterior.

**EJECUTAR:** a) En el tiempo  $t = 3.0 \mu s = 3.0 \times 10^{-6} s$ , la corriente en la bobina exterior (bobina 2) es  $i_2 = (2.0 \times 10^6 A/s)(3.0 \times 10^{-6} s) = 6.0 A$  Para encontrar el flujo medio a través de cada espira del solenoide (bobina 1), se despeja  $\Phi_{B1}$  en la ecuación (5.9):

$$\Phi_{B1} = \frac{M i_2}{N_1} = \frac{(25 \times 10^{-6} H)(6.0 A)}{1000} = 1.5 \times 10^{-7} Wb$$

Note que éste es un valor *medio*; el flujo puede variar en forma considerablemente el centro y los extremos del solenoide.

b) La fem inducida  $E_1$  está dada por la ecuación (5.4):

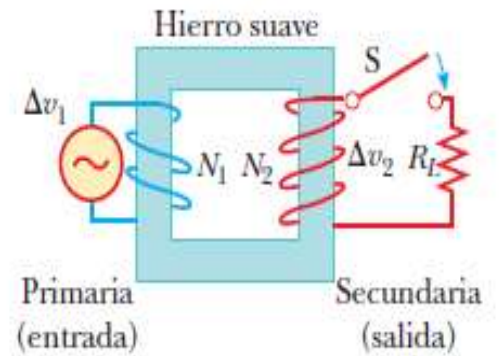
$$\varepsilon_1 = -M \frac{di_2}{dt} = -(25 \times 10^{-6} H) \frac{d}{dt} [(2.0 \times 10^6 A / s)t] = -(25 \times 10^{-6} H)(2.0 \times 10^6 A / s) = -50 V$$

**EVALUAR:** Ésta es una fem inducida sustancial, en respuesta a una tasa de cambio muy rápida de la corriente. Al operar una bobina de Tesla hay una corriente alterna de alta frecuencia y no una corriente continua en aumento como la de este ejemplo; también  $di_2/dt$  y  $\varepsilon_1$  alternan, con amplitudes que llegan a ser miles de veces más grandes que las de este ejemplo.

### El transformador y la transmisión de energía

Como se explicó en la unidad 4, es económico usar un voltaje alto y una corriente baja para minimizar la pérdida  $I^2 R$  en las líneas de transmisión cuando la energía eléctrica se transmite a grandes distancias. En consecuencia, son comunes líneas de 350 kV y, en muchas áreas, incluso se usan líneas con voltajes más altos (765 kV). En el extremo receptor de tales líneas, el consumidor requiere potencia a bajo voltaje (por seguridad y para eficiencia en diseño). En la práctica, el voltaje reduce a aproximadamente 20 000 V en una estación distribuidora, luego a 4000 V para entrega a áreas residenciales y finalmente a 120 V y 240 V en el sitio del consumidor. Por lo tanto, se necesita un dispositivo que pueda cambiar el voltaje y la corriente alternos sin causar cambios apreciables en la potencia entregada. El transformador CA es tal dispositivo

En su forma más sencilla, el **transformador de CA** consta de dos bobinas de alambre enrolladas alrededor de un núcleo de hierro, como se ilustra en la figura 197. (Compárelo con el experimento de Faraday de la figura 195.) La bobina de la izquierda, que está conectada a la fuente de entrada de voltaje alterno y tiene  $N_1$  vueltas, se denomina *devanado primario* (o *primaria*). A la bobina de la derecha, formada por  $N_2$  vueltas y conectada a un resistor de carga  $R$ , se le llama *devanado secundario* (o *secundaria*). El propósito del núcleo de hierro es aumentar el flujo magnético a través de la bobina y proporcionar un medio en el que casi todas las líneas de campo magnético que pasan a través de una bobina lo hagan por la otra. Las pérdidas por corrientes de eddy se reducen con el uso de un núcleo laminado. La transformación de energía en energía interna en la resistencia finita de los alambres de la bobina suele ser muy pequeña. Los transformadores representativos tienen eficiencias de potencia de 90 a 99%. En la explicación que sigue se supone un *transformador ideal*, en el que las pérdidas de energía en los devanados y el núcleo son igual a cero.



**Figura 197.** Un transformador ideal está formado por dos bobinas enrolladas en el mismo núcleo de hierro. Un voltaje alterno  $\Delta V_2$  a las terminales del resistor de resistencia  $R$ .

La ley de Faraday expresa que el voltaje  $\Delta V_1$  en las terminales del circuito primario es

$$\Delta V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.10)$$

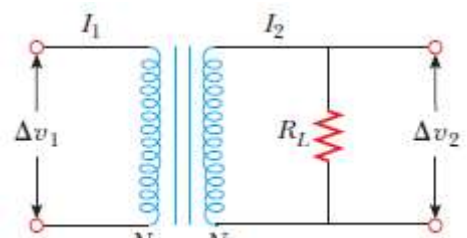
donde  $\Phi_B$  es el flujo magnético que pasa por cada vuelta. Si supone que todas las líneas de campo magnético permanecen dentro del núcleo de hierro, el flujo que pasa por cada vuelta del primario es igual al flujo que pasa por cada vuelta del secundario. Por esto, el voltaje en las terminales del secundario es

$$\Delta v_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.11)$$

Resolviendo la ecuación 5.10 para  $d\Phi_B / dt$  y si sustituimos el resultado en la ecuación 33.40, encontramos que

$$\Delta v_2 = \frac{N_2}{N_1} \Delta v_1 \quad (5.12)$$

Cuando  $N_2 > N_1$  el voltaje de salida  $\Delta V_2$  es mayor que el voltaje de entrada  $\Delta V_1$ . Esta configuración se conoce como *transformador elevador*. Cuando  $N_2 < N_1$ , el voltaje de salida es menor que el voltaje de entrada, y se tiene un *transformador reductor*.



**Figura 198.** Diagrama de circuito para un transformador.

Cuando se cierra el interruptor del circuito secundario, se induce una corriente  $I_2$  en el secundario. (En esta explicación las mayúsculas 1 y  $\Delta V$  se refieren a los valores rms.) Si la carga del circuito

secundario es una resistencia pura, la corriente inducida está en fase con el voltaje inducido. La potencia alimentada al circuito secundario la proporciona la fuente de CA conectada al circuito primario, como se observa en la figura 198. En un transformador ideal, sin pérdidas, la potencia  $I_1\Delta V_1$  suministrada por la fuente es igual a la potencia  $I_2\Delta V_2$  en el circuito secundario. Es decir,

$$I_1\Delta V_1 = I_2\Delta V_2 \quad (5.13)$$

El valor de la resistencia de carga  $R_L$  determina el valor de la corriente del secundario porque  $I_2 = \Delta V_2 / R_L$ . Además, la corriente del primario es  $I_1 = \Delta V_1 / R_{eq}$  donde

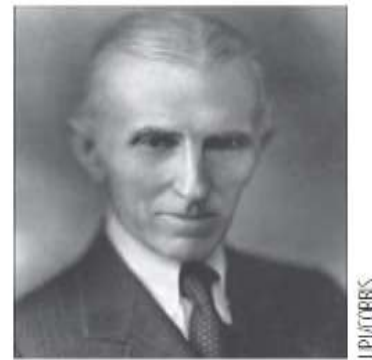
$$R_{eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L \quad (5.14)$$

es la resistencia equivalente de la resistencia de carga cuando se ve desde el lado del primario. Este análisis permite inferir que un transformador se puede usar para acoplar resistencias entre el circuito primario y la carga. De esta forma se logra una máxima transferencia de potencia entre una fuente de potencia y la resistencia de carga. Por ejemplo, un transformador conectado entre la salida de  $1k\Omega$  de un amplificador de audio y un altavoz de  $8\Omega$  asegura la transmisión de tanta señal de audio como sea posible al altavoz. En terminología de equipos estéreo, esto se llama *acoplamiento de impedancias*.

Muchos aparatos electrónicos comunes para uso doméstico requieren voltajes bajos para funcionar de manera apropiada. Un transformador pequeño que se conecta directamente a la toma de la pared, como el que se ilustra en la figura 200, puede proporcionar el voltaje adecuado. La fotografía muestra los dos devanados enrollados alrededor de un núcleo común de hierro que se encuentra dentro de estas pequeñas "cajas negras". Este transformador convierte los 120 V de CA del tomacorriente a 12.5 de CA. (¿Puede usted determinar la relación de los números de vueltas de las dos bobinas?) Algunas cajas negras también utilizan diodos para convertir la corriente alterna en corriente directa.

Al relacionar las ecuaciones del transformador se tiene la ecuación general del transformador eléctrico:

$$\frac{V_e}{V_s} = \frac{I_s}{I_e} = \frac{N_e}{N_s} = \frac{R_{eq}}{R_L}$$



NIKOLA TESLA

Figura 199. Físico Estadounidense (1856-1943) Tesla nació en Croacia pero pasó toda su vida profesional como inventor en Estados Unidos. Fue una figura clave en el perfeccionamiento de la electricidad de corriente alterna, transformadores de alta tensión y transporte de energía eléctrica mediante líneas de transmisión de CA. El punto de vista de Tesla estuvo en desacuerdo con las ideas de Thomas Edison, que se dedicó al uso de corriente directa para transmitir energía eléctrica. El método de CA de Tesla ganó



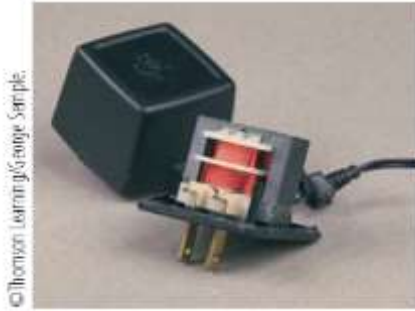


Figura 200. El devanado primario de este transformador está acoplado directamente a las puntas de la clavija. El devanado secundario se conecta al cable de línea que se ve a la derecha que va a un aparato electrónico. Muchos de estos transformadores de fuente de alimentación también convierten corriente alterna en corriente directa.

Este transformador es más pequeño que el de la fotografía con que se inicia este capítulo. Además, es un transformador reductor. Baja el voltaje a 4000 a 240 V al momento de entregar energía a un grupo de residencias.



Dónde:

$N_e$  = Número de espiras de la bobina primaria.

$N_s$  = Número de espiras de la bobina secundaria.

$V_e$  = Voltaje del primario (volts).

$V_s$  = Voltaje del secundario (volts).

$I_e$  = Corriente del primario (amperes).

$I_s$  = Corriente del secundario (amperes).

$R_{eq}$  = Resistencia equivalente de la resistencia de carga cuando se ve desde el lado del primario.

$R_L$  = Resistencia de carga.



Para un transformador real se deben considerar las pérdidas de potencia y energía eléctrica, ello se hace mediante la eficiencia  $\eta$  del transformador, la cual está determinada en términos de la potencia de salida con respecto a la potencia de entrada.

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} (100)$$

Recuerde que la eficiencia se expresa en porcentaje de 0% a 100%, pero al efectuar operaciones se expresa en decimales, es decir de 0 a 1.

#### EJEMPLO 7 La economía de la potencia de CA

Una estación de generación de electricidad necesita entregar energía a una capacidad de 20 MW a una ciudad a 1.0 km de distancia. Un voltaje común para los generadores de potencia comerciales es de 22 kV, pero se usa un transformador de subida para impulsar el voltaje a 230 kV antes de la transmisión.

**A)** Si la resistencia de los alambres es de  $2.0 \Omega$  y la energía cuesta aproximadamente 10 ¢/ kWh, estime cuánto le cuesta a la compañía convertir la energía a energía interna en los alambres durante un día

#### SOLUCIÓN

**Conceptualizar** La resistencia de los alambres están en serie con la resistencia que representa la carga (hogares y negocios). Por lo tanto, hay una caída de voltaje en los alambres, esto es, parte de la energía transmitida se convierte en energía interna en los alambres y nunca alcanza la carga.

**Categorizar** Este problema trata de encontrar la potencia entregada a una carga resistiva en un circuito CA. Ignore cualquier característica capacitiva o inductiva de la carga e iguale el factor potencia a 1.

**Analizar** Calcule  $I_{rms}$  en los alambres a partir de la ecuación:

$$I_{rms} = \frac{\mathcal{P}_{prom}}{\Delta V_{rms}} = \frac{20 \times 10^6 W}{230 \times 10^3 V} = 87 A$$

Determine la proporción a la que se entrega la energía a la resistencia en los alambres a partir de la ecuación:

$$\mathcal{P}_{prom} = I_{rms}^2 R = (87 A)^2 (2.0 \Omega) = 15 kW$$

Calcule la energía  $T_{ET}$  entregada a los alambres durante el curso de un día:

$$T_{ET} = \mathcal{P}_{prom} \Delta t = (15 kW)(24 h) = 360 kWh$$

Encuentre el costo de esta energía con una proporción de 10¢/ kWh:

$$\text{Costo} = (360 \text{ kWh})(\$0.10/\text{kWh}) = \$36$$

B) Repita el cálculo para una situación en la cual la planta eléctrica entrega la energía con un voltaje original de 22 kV.

### SOLUCIÓN

Calcule  $I_{rms}$  en los alambres a partir de la ecuación:

$$I_{rms} = \frac{\mathcal{P}_{prom}}{\Delta V_{rms}} = \frac{20 \times 10^6 \text{ W}}{22 \times 10^3 \text{ V}} = 910 \text{ A}$$

A partir de la ecuación  $\mathcal{P}_{prom} = I_{rms}^2 R$ , determine la cantidad de entrega de energía a la resistencia en los alambres:

$$\mathcal{P}_{prom} = I_{rms}^2 R = (910 \text{ A})^2 (2.0 \Omega) = 1.7 \times 10^3 \text{ kW}$$

Calcule la energía entregada a los alambres durante el curso de un día:

$$T_{ET} = \mathcal{P}_{prom} \Delta t = (1.7 \times 10^3 \text{ kW}) (24 \text{ h}) = 4.1 \times 10^4 \text{ kWh}$$

Encuentre el costo de esta energía con una proporción de 10¢/ kWh:

$$\text{Costo} = (4.1 \times 10^4 \text{ kWh})(\$0.10/\text{kWh}) = \$4.1 \times 10^3$$

**Finalizar** Note el tremendo ahorro que es posible a través del uso de transformadores y líneas de transmisión de voltaje alto. Tales ahorros, en combinación con la eficiencia de usar corriente alterna para operar motores, conduce a la adopción universal de la corriente alterna en lugar de la corriente directa para redes eléctricas comerciales.

### Problema resuelto

La bobina primaria de un transformador ideal tiene 100 espiras, y se aplican 100 V circulando una corriente de 1 A. Si se requiere que en su salida haya 600 V, determinar el número de espiras de devanado secundario.

### Solución

Los datos que tenemos para solucionar el problema son:

$$N_e = 100$$

$$V_e = 100 \text{ V}$$

$$I_e = 1 \text{ A}$$

$$V_s = 600 \text{ V}$$

$$\frac{N_e}{N_s} = \frac{V_e}{V_s}$$
$$N_s = \frac{V_s N_e}{V_e} = \frac{(600 V)(100)}{100 V} = 600$$

A continuación determinamos la corriente en el devanado secundario:

$$\frac{V_e}{V_s} = \frac{I_s}{I_e}$$

Al sustituir los valores:

$$I_s = \frac{I_e V_e}{V_s} = \frac{1 A (100 V)}{600 V} = 0.16 A$$

### Problema resuelto

Se tiene un transformador elevador de voltaje cuyo devanado primario tiene 80 espiras y la bobina secundaria tiene 720 espiras; está conectado a la línea de CA a 120 V de donde consume 20 A. La eficiencia del transformador es de 95 %. Calcular: a) la corriente en el secundario y b) el voltaje en el secundario.

### Solución

Los datos que se tienen para resolver el problema son:

$$N_e = 80$$

$$V_e = 120 V$$

$$I_e = 20 A$$

$$N_s = 720$$

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} (100)$$

Determinar la potencia del primario:

$$P_e = V_e I_e = (120 V)(20 A) = 2\,400 W$$

De la ecuación de eficiencia se despeja la potencia del devanado secundario para obtener  $P_s$ :

$$P_s = \frac{\eta P_e}{100} = \frac{95 (2\,400 W)}{100} = 2\,280 W$$

$$V_s = \frac{N_s V_e}{N_e} = \frac{(720 V)(120 V)}{80} = 1080 V$$

Con la potencia del devanado secundario se puede calcular la corriente:

$$I_s = \frac{P_s}{V_s} = \frac{2\,280 W}{1080 V} = 2.11 A$$

## 5.4 Inductores en Serie, Paralelo y Mixtos.

### Acople de inductancia: Serie y Paralelo

Al igual que los resistores y capacitores se pueden acoplar en serie paralelo o mixto para obtener una inductancia equivalente. Figura (201): Para esta descripción consideremos el caso de tres inductores;  $L_1, L_2, L_3$  que están conectados en serie a una diferencia de potencial  $\Delta V$  (201 b): El potencial en cada uno de los inductores es:

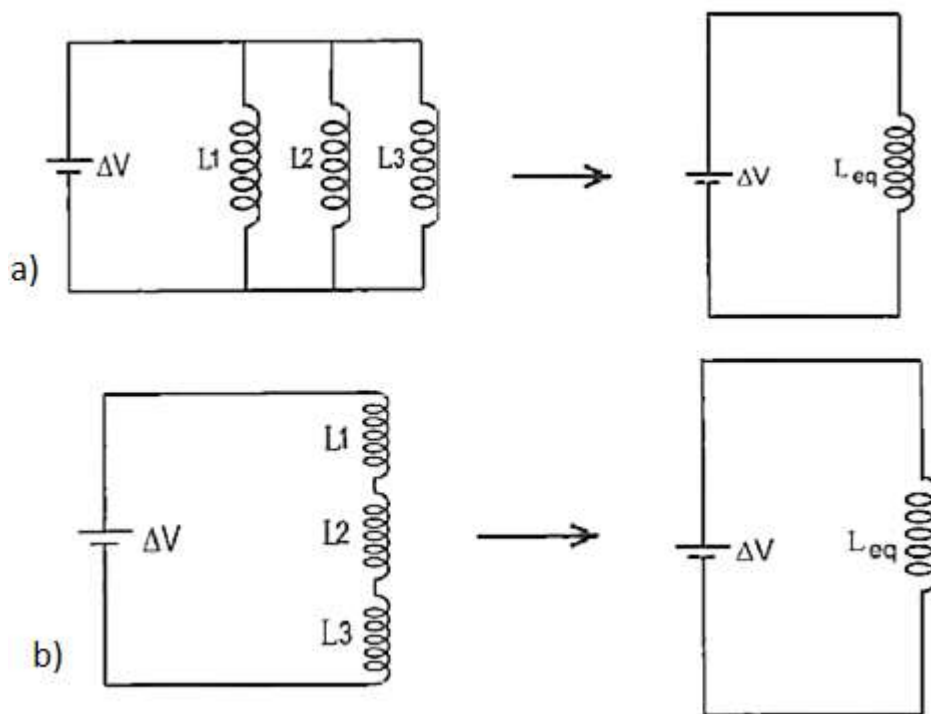


Figura 201. a) Acople de resistores paralelo, b) Acople de resistores en serie, con sus circuitos equivalentes.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

La sustitución de  $\varepsilon_k = L_k di/dt$  da por resultado

$$L_1 \frac{dI}{dt}, L_2 \frac{dI}{dt}, L_3 \frac{dI}{dt}$$

luego el potencial total es,

$$\varepsilon = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + L_3 \frac{dI}{dt}$$

$$L \frac{dI}{dt} = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{dI}{dt}$$

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + L_3}$$

Generalizando la expresión de la inductancia equivalente para n-inductores

$$L = \sum_i^n L_i \quad (5.15)$$

Así,

La inductancia equivalente de inductores conectados en serie es la suma de las inductancias individuales.

Los inductores en serie se combinan exactamente de la misma manera que resistores en serie.

Considérese ahora una conexión en paralelo de 3 inductores, como se muestra en la figura 201 a, cuyo circuito equivalente es mostrado también. Entre los inductores ocurre la misma tensión. Al aplicar la LCK,

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Pero  $i_k = \frac{1}{L_k} \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0)$ ; por lo tanto,

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v dt + i_2(t_0) + \frac{1}{L_3} \int_{t_0}^t v dt + i_3(t_0) \\ &= \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) \\ &= \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{L_k} \right) \int_{t_0}^t v dt + \sum_{k=1}^N i_k(t_0) = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N}} \quad (5.17)$$

Se puede deducir la expresión de la inductancia equivalente de  $n$  inductores conectados en paralelo, la cual está dada por:

$$\frac{1}{L} = \sum_i^n \frac{1}{L_i} \quad (5.18)$$

Por efecto de la LCK, es de esperar que la corriente inicial  $i(t_0)$  a través de  $L_{eq}$  en  $t = t_0$  sea la suma de las corrientes de los inductores en  $t_0$ . Así, de acuerdo con la ecuación (5.16).

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

De acuerdo con la ecuación (6.30)

La inductancia equivalente de inductores en paralelo es el recíproco de la suma de los recíproco de las inductancias individuales

Nótese que los inductores en paralelo se combinan de la misma manera que los resistores en paralelo.

En este caso de dos inductores en paralelo ( $N = 2$ ), la ecuación (5.18) se convierte en

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{o} \quad L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (5.19)$$

En tanto todos los elementos permanezcan iguales, las transformaciones  $\Delta$ -Y referentes a los resistores que se explicaron en la unidad 3 pueden extenderse a capacitores e inductores.

**Tabla 12. Importantes características de los elementos básicos. \***

Relación	Resistor ( $R$ )	Capacitor ( $C$ )	Inductor ( $L$ )
$v-i$ :	$v = iR$	$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$	$v = L \frac{di}{dt}$
$i-v$ :	$i = v/R$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$
$p$ o $w$ :	$p = i^2 R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2} C v^2$	$w = \frac{1}{2} L i^2$
En serie:	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
En paralelo:	$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
En cd:	Igual	Circuito abierto	Cortocircuito
Variable de circuitos que no puede cambiar abruptamente:	No aplicable	$v$	$i$

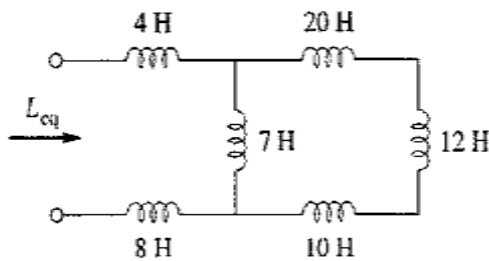
+ Se supone la convención pasiva de los signos.

Resulta conveniente resumir en este momento las características más importantes de los tres elementos básicos de circuitos que se han estudiado. Tal resumen se ofrece en la tabla 12.

La transformación delta a estrella que vio en la unidad 3 para resistores puede extenderse para capacitores e inductores.

**Ejemplo 1**

Halle la inductancia equivalente del circuito que aparece en la figura 202.



**Figura 202. Para el ejemplo 6.11**

**Solución:**

Los inductores de 10, 12 y 20 H. están en serie; así su combinación da por resultado una inductancia 42 H. Este inductor de 42 H está en paralelo con el inductor de 7H, los que se combinan para dar como resultado

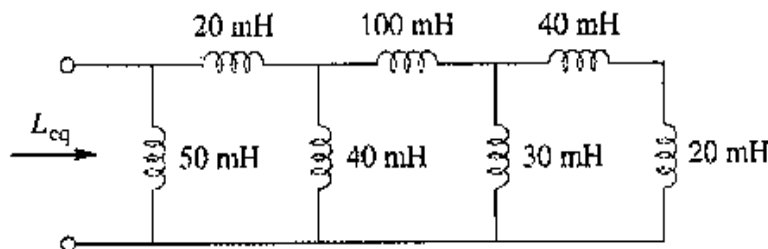
$$\frac{7 \times 42}{7 + 42} = 6 H$$

Este inductor de 6 H está en serie con los inductores de 4 y 8 H. Así.

$$L_{eq} = 4 + 6 + 8 = 18 H$$

**Problema de práctica 1**

Calcule la inductancia equivalente para la red inductiva en escalera de la figura 203.



**Figura 203. Para el problema de la práctica 1**

**Respuesta:** 25 mH.



**Ejemplo 2**

En relación con el circuito de la figura 204,  $i(t) = 4(2 - e^{-10t}) \text{ mA}$ . Si  $i_0(0) = -1 \text{ mA}$ , halle a)  $i_1(0)$ ; b)  $v(t)$ ,  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ ; c)  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ .

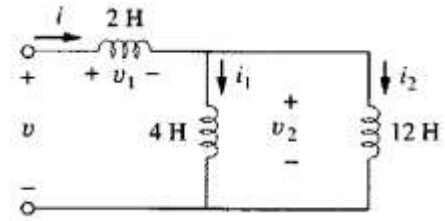


Figura 204 Para ejemplo 2.

**Solución:**

a) Partiendo de  $i(t) = 4(2 - e^{-10t}) \text{ mA}$ ,  $i(0) = 4(2 - 1) = 4 \text{ mA}$ . Puesto que  $i = i_1 + i_2$ ,

$$i_1(0) = i(0) - i_2(0) = 4 - (-1) = 5 \text{ mA}$$

b) La inductancia equivalente es

$$L_{eq} = 2 + 4 \parallel 12 = 2 + 3 = 5 \text{ H}$$

Así

$$v(t) = L_{eq} \frac{di}{dt} = 5(4)(-1)(-10)e^{-10} \text{ mV} = 200e^{-10r} \text{ mV}$$

y

$$v_1(t) = 2 \frac{di}{dt} = 2(-4)(-10)e^{-10t} \text{ mV} = 80e^{-10t} \text{ mV}$$

Dado que  $v = v_1 + v_2$ ,

$$v_2(t) = v(t) - v_1(t) = 120e^{-10t} \text{ mV}$$

c) La corriente  $i_1$  se obtiene de esta manera:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{4} \int_0^t v_2 dt + i_1(0) = \frac{120}{4} \int_0^t e^{-10t} dt + 5 \text{ mA} \\ &= [-3e^{-10t}]_0^t + 5 \text{ mA} = -3e^{-10t} + 3 + 5 = 8 - 3e^{-10t} \text{ mA} \end{aligned}$$

De igual modo,

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{1}{12} \int_0^t v_2 dt + i_2(0) = \frac{120}{12} \int_0^t e^{-10t} dt - 1 \text{ mA} \\ &= [-e^{-10t}]_0^t - 1 \text{ mA} = -e^{-10t} + 1 - 1 = -e^{-10t} \text{ mA} \end{aligned}$$

Repárese en que  $i_1(t) + i_2(t) = i(t)$

### Problema de la práctica 2

En el circuito de la figura 6.34,  $i_1(t) = 0.6 e^{-2t}$  A. Si  $i(0) = 1.4$  A, halle:

a)  $i_2(0)$ ; b)  $i_2(t)$  e  $i(t)$ ; c)  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  y  $v(t)$ .

**Respuesta:** a) 0.8 A , b)  $(-0.4 + 1.2e^{-2t})$  A,  $(-0.4 + 1.8 e^{-2t})$  A.

c)  $-36e^{-2t}$  V,  $-7.2e^{-2t}$  V,  $-28.8e^{-2t}$  V.

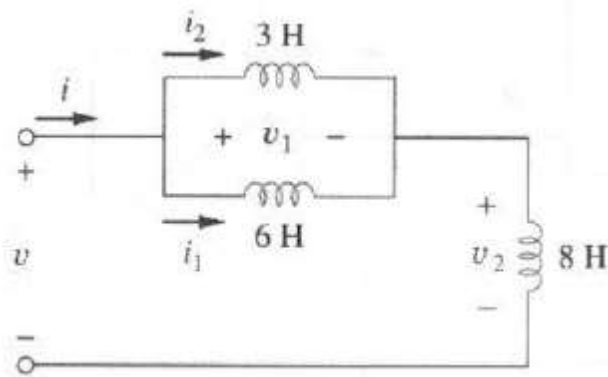


Figura 205. Para el problema de práctica 2

### Conductor lineal

Halle la inductancia por unidad de longitud de un conductor coaxial, el cual está conformado por un conductor interno de radio  $a$  y otro externo de radio  $b$ .

### Solución


Las dos corrientes del alambre coaxial están enlazadas por el flujo a través de la superficie concéntrica de radio  $r$  y longitud  $l$ . El flujo a través de esa superficie es,

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA = \frac{\mu_0 l}{2\pi r} dA = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I \int_a^b dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln \frac{a}{b}$$

luego la autoinductancia será:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \frac{a}{b} \quad \text{o} \quad \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a}{b}$$

## 5.5 Circuito R-L.

Si un circuito contiene una bobina, como un solenoide, la autoinductancia de ésta impide que la corriente en el circuito aumente o disminuya de manera instantánea. Un elemento  de circuito con una gran inductancia se conoce como **inductor** y utiliza el símbolo de circuito. Siempre suponga que la inductancia del resto del circuito se puede ignorar en comparación con la del inductor, sin embargo. Recuerde que incluso un circuito sin una bobina tiene algo de inductancia que puede afectar su comportamiento.

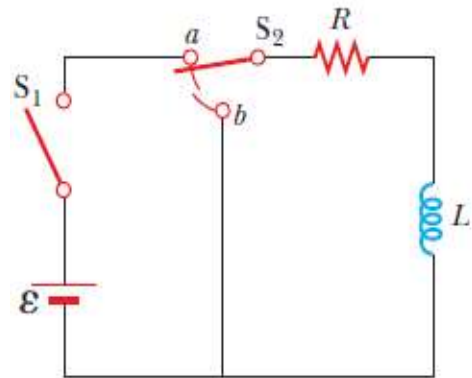


Figura 206. Circuito RL cuando el interruptor  $S_2$ , está en la posición  $a$ , la batería está en el circuito. Cuando el interruptor  $S_1$  se cierra, la corriente aumenta y se induce una Fem en el inductor que se opone a la corriente creciente. Cuando el interruptor está en la posición  $b$ , la batería ya no es parte del circuito y la corriente disminuye. El interruptor está diseñado, de modo que nunca se abre, lo que haría que la corriente se detuviera.

Dado que la inductancia en un inductor resulta en una fuerza contraelectromotriz, **un inductor en un circuito se opone a los cambios en la corriente dentro de dicho circuito**. El inductor intenta mantener la corriente igual a como estaba antes de que ocurriera el cambio. Si el voltaje de la batería en el circuito se incrementa para aumentar la corriente, el inductor se opone a este cambio, y el aumento de corriente no es instantáneo. Si se reduce el voltaje de la batería, el inductor da como resultado una reducción lenta de la corriente en vez de una caída inmediata. Por lo tanto, el inductor hace que el circuito sea lento en reaccionar a los cambios en el voltaje.

Considere el circuito que se muestra en la figura 206, que contiene una batería de resistencia interna despreciable. Este circuito es un **circuito RL** porque los elementos conectados a la batería son un resistor y un inductor. Las líneas curvas en el interruptor  $S_2$  sugieren que este interruptor nunca se puede abrir; siempre está en  $a$  o en  $b$ . (Si el interruptor no se conecta ni a  $a$  ni a  $b$ , cualquier corriente en el circuito súbitamente se detiene.) Suponga que  $S_2$  se pone en  $a$  y que el interruptor  $S_1$  se abre para  $t < 0$  y luego se cierra en  $t = 0$ . La corriente en el circuito comienza a aumentar y en el inductor se induce una fuerza contraelectromotriz (ecuación  $E_L = -L \frac{dI}{dt}$ ) que se opone a la corriente creciente.

Con esto en mente, es posible aplicar la regla de la espira de Kirchhoff a este circuito, recorriendo el circuito en el sentido de las manecillas del reloj:

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (5.20)$$

donde  $IR$  es la caída de voltaje a través del resistor. (Las reglas de Kirchhoff se desarrollan para circuitos con corrientes estables, pero también pueden aplicarse a un circuito en que la corriente está cambiando, si imagina que representan un circuito en un *instante* de tiempo.) Ahora debe buscar una solución para esta ecuación diferencial, una similar a la que aplicó para un circuito RC (véase la sección 3.10.)

Una solución matemática de la ecuación 5.20 representa la corriente en el circuito como una función del tiempo. Para determinar esta solución, cambie las variables, haciendo que  $x = (\varepsilon/R) - I$ , para que  $dx = -dI$ . Con estas sustituciones, escriba la ecuación 5.20 de la siguiente manera

$$x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$

Reordenado e integrado esta última expresión, tiene

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L} t$$

donde  $x_0$  es el valor de  $x$  en el tiempo  $t = 0$ . Si toma el antilogaritmo de este resultado, obtiene

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

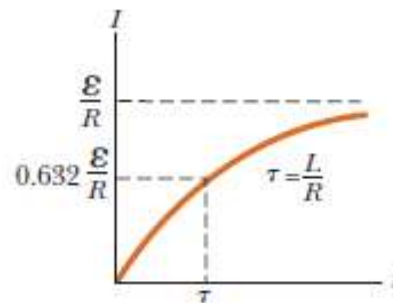
Porque  $I = 0$  en  $t = 0$ , observe a partir de la definición de  $x$  que  $X_0 = \varepsilon/R$ . En consecuencia, esta última expresión es equivalente a

$$\frac{\varepsilon}{R} - I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

Esta expresión muestra cómo la corriente es afectada por el inductor. La corriente no aumenta de manera instantánea hasta su valor de equilibrio final cuando el

interruptor se cierra, sino que aumenta de acuerdo con una función exponencial. Si retira la inductancia del circuito, al hacer que  $L$  tienda a cero, el término exponencial será cero y en este caso la corriente no depende del tiempo; en ausencia de la inductancia la corriente aumenta de manera instantánea a su valor de equilibrio final.



**Figura 207.** Gráfica de la corriente en función del tiempo para el circuito RL que se muestra en la figura 206. El interruptor se cierra en  $t=0$ , y la corriente aumenta hacia su valor máximo  $\varepsilon/R$ . La constante de tiempo  $T$  es el intervalo de tiempo necesario para que  $I$  alcance 63.2% de su valor máximo.

También escriba esta expresión como

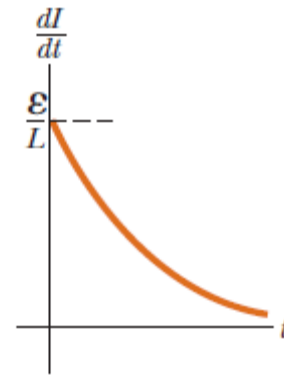
$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/T}) \quad (5.21)$$

donde la constante  $\mathcal{T}$  es la **constante de tiempo** del circuito  $RL$ :

$$\mathcal{T} = \frac{L}{R} \quad (5.22)$$

Físicamente,  $\mathcal{T}$  es el intervalo de tiempo necesario para que la corriente en el circuito alcance  $(1 - e^{-1}) = 0.632 = 63.2\%$  de su valor final  $\varepsilon/R$ . La constante de tiempo es un parámetro útil para comparar el tiempo de respuesta de diferentes circuitos.

La figura 207 representa la corriente en función del tiempo en el circuito  $RL$ . Observe que el valor de equilibrio de la corriente, que se presenta cuando  $t$  tiende a infinito, es igual a  $\varepsilon/R$ . Verifique esto con  $dI/dt$  igual a cero en la ecuación 5.20 y resolviendo en función de la corriente  $I$ . (En el equilibrio, el cambio en la corriente es igual a cero.) Por tanto, al inicio la corriente aumenta con mucha rapidez y después se acerca gradualmente al valor de equilibrio  $\varepsilon/R$  conforme  $t$  tiende a infinito.



**Figura 208.** Grafica de  $dI/dt$  en función del tiempo para el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 206. La relación de cambio en el tiempo de la corriente es máxima en  $t=0$ , instante en el que se cierra el interruptor. La relación disminuye de manera exponencial con el tiempo conforme  $I$  aumenta hacia su valor máximo.

Investigue la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente. Tomando la primera derivada con el tiempo de la ecuación 5.21, da

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-t/T} \quad (5.23)$$

Este resultado muestra que la rapidez del cambio en el tiempo de la corriente es máximo (igual a  $\varepsilon/L$ ) en  $t = 0$  y disminuye exponencialmente hasta cero conforme  $t$  tiende a infinito (figura 208).

Ahora considere el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 206. Suponga que el interruptor  $S_2$  se ha colocado en la posición  $a$  (y el interruptor  $S_1$  permanece cerrado) el suficiente tiempo para permitir que la corriente llegue a su valor de equilibrio  $\varepsilon/R$ . En este caso, el circuito queda descrito por la espira externa de la figura 206. Si  $S_2$  se mueve de  $a$  a  $b$ , el circuito queda descrito ahora sólo por la espira a la derecha de la figura 206. Por lo tanto, la batería ha sido eliminada del circuito. Con  $\varepsilon = 0$  en la ecuación 5.20 obtenemos

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

Queda como un problema (problema 10) para demostrar que la solución de esta ecuación diferencial es

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/T} \quad (5.24)$$

donde  $\varepsilon$  es la fem de la batería e  $I_i = \varepsilon/R$  es la corriente inicial en el instante en que el interruptor se coloca en  $b$ .

Si el circuito no incluyera un inductor, la corriente se reduciría de inmediato a cero al retirar la batería. Cuando el inductor está presente, se opone a la disminución de la corriente y hace que ésta disminuya en forma exponencial. Una gráfica de la corriente en función del tiempo (figura 209) muestra que la corriente disminuye continuamente con el tiempo.

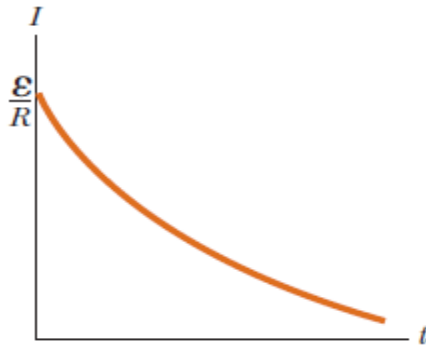


Figura 209. Corriente en función del tiempo para la espira del lado derecho del circuito que aparece en la figura 206. Para  $t < 0$ , el interruptor  $S_2$  está en la posición  $a$ . En  $t = 0$ , el interruptor está colocado en la posición  $b$ , y la corriente pasa por su valor máximo  $\varepsilon/R$ .

**Pregunta rápida** Considere el circuito de la figura 206, con  $S_1$  abierto y  $S_2$  en la posición  $a$ . Ahora se cierra el interruptor  $S_1$ . **i)** En el instante en que se cierra, ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? a) el resistor, b) el inductor, c) el inductor y el resistor. **ii)** Después de un tiempo considerable, ¿a través de cuál elemento de circuito el voltaje es igual a la fem de la batería? Elija entre las mismas respuestas

**Ejemplo 1.** Circuito RL: Acople mixto.

Consideremos el circuito mostrado en la figura (210). Cuando el interruptor  $s$ , se cierra en un tiempo  $t=0$ . Determinar la corriente en el inductor y la corriente a través del interruptor como función del tiempo.

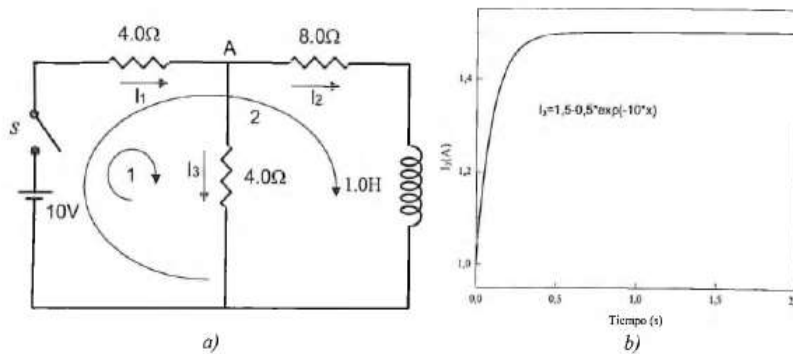


Figura 210. Circuito RL. Acople mixto

**Solución**

Cuando se cierra el interruptor  $s$ , para el nodo  $A$ , se cumple que;

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

en la malla 1 se cumple que,

$$10 - 4I_1 - 4I_2 = 0$$

en la malla 2 se cumple que,

$$10 - 4I_1 - 8I_3 - (1,0) \frac{dI_3}{dt} = 0$$

de combinar las dos ecuaciones anteriores, resulta;

$$I_1 = \frac{10}{8} + \frac{1}{2}I_3$$

al reemplazar esta última ecuación en la tercera ecuación, se tiene;

$$\frac{dI_3}{dt} + 10I_3 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI_3}{5 - 10I_3} dt$$

$$\frac{dI_3}{\frac{1}{2} - I_3} = 10dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2} - I_3\right) = -10t$$

$$I_3(t) = \frac{1V}{2\Omega} (1 - e^{-10t}) = \frac{1}{2}A(1 - e^{-10s^{-1}t})$$

para la corriente  $I_1$ , se tiene

$$I_1 = \frac{10}{8} + \frac{1}{2}I_3 = \left[\frac{5}{4} + \frac{1}{4}(1 - e^{-10s^{-1}t})\right]A = \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{4}(e^{-10s^{-1}t})\right]A$$

**EJEMPLO .2** Constante de tiempo de un circuito  $RL$

Considere de nuevo el circuito de la figura 206. Suponga que los elementos del circuito tienen los siguientes valores:

$$\varepsilon = 12.0 \text{ V}, R = 6.00 \Omega \text{ y } L = 30.0 \text{ mH.}$$

**A)** Encuentre la constante de tiempo del circuito.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Debe comprender el comportamiento de este circuito a partir de la explicación de esta sección.



**Categorizar** Los resultados se evalúan con las ecuaciones desarrolladas en esta sección, de modo que este ejemplo es un problema de sustitución

Evalúe la constante de tiempo a partir de la ecuación 32.8:..... $T = \frac{L}{R} = \frac{50.0 \times 10^{-3} H}{6.00 \Omega} = 5.00 \text{ ms}$

**B)** El interruptor  $S_2$  está en la posición  $a$  y el interruptor  $S_1$  se cierra en  $t = 0$ . Calcule la corriente en el circuito en  $t = 2.00 \text{ ms}$ .

**SOLUCIÓN**

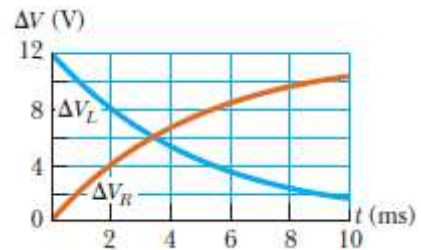
Evalúe la corriente en  $t = 2.00 \text{ ms}$  a partir den la ecuación 5.21:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/T}) = \frac{12.0 \text{ V}}{6.00 \Omega} (1 - e^{-2.00 \frac{\text{ms}}{5.00 \text{ms}}}) = 2.00 \text{ A} (1 - e^{-0.400}) = 0.659 \text{ A}$$

**C)** Compare la diferencia de potencial a través del resistor con que cruza el inductor.

**SOLUCIÓN**

En el instante en que el interruptor se cierra, no hay corriente y por tanto no hay diferencia de potencial a través del resistor. En dicho instante, el voltaje de la batería aparece por completo a través del inductor en la forma de una fuerza contraelectromotriz de 12.0 V conforme el inductor intenta mantener la condición de corriente cero. (El extremo superior del inductor en la figura 206 está a un mayor potencial eléctrico que el extremo inferior.) Conforme pasa el tiempo, la fem a través del inductor disminuye y la corriente en el resistor (y por tanto el voltaje a través de él) aumenta como se muestra en la figura 211. La suma de los dos voltajes en todo momento es 12.0 V.



**Figura 211. (Ejemplo 2) Comportamiento en el tiempo de los voltajes a través del resistor y el inductor en la figura 32.2 dados los valores proporcionados en este ejemplo.**

**¿Qué pasaría sí?** En la figura 211, los voltajes a través del resistor y el inductor son iguales en 3.4 ms. ¿Y sí usted quiere retrasar la condición en la que los voltajes sean iguales en cierto instante posterior, como  $t = 10.0 \text{ ms}$ ? ¿Para lograr esto cuál parámetro,  $L$  o  $R$ , requeriría menos ajuste, en términos de un cambio porcentual?

**Respuesta** La figura 211 muestra que los voltajes son iguales cuando el voltaje a través del inductor. Ha caído a la mitad de su valor original. En consecuencia, el intervalo de tiempo requerido para que los voltajes sean iguales es la *vida media*  $t_{1/2}$  del decaimiento. La vida media se introdujo en la sección **¿Qué pasaría sí?** del ejemplo 28.10 para describir el decaimiento exponencial en los circuitos  $RC$ , donde  $t_{1/2} = 0.693 \tau$ .

A partir de la vida media deseada de 10.0 ms, use el resultado del ejemplo 28.10 para encontrar la constante de tiempo del circuito:

$$\mathcal{T} = \frac{t_{1/2}}{0.693} = \frac{10.0 \text{ ms}}{0.693} = 14.4 \text{ ms}$$

Mantenga  $L$  fija y encuentre el valor de  $R$  que dé esta constante de tiempo:

$$\mathcal{T} = \frac{L}{R} \rightarrow R = \frac{30.0 \times 10^{-3} \text{ H}}{14.4 \text{ ms}} = 2.08 \Omega$$

Ahora mantenga  $R$  fija y encuentre el valor apropiado de  $L$ :

$$\mathcal{T} = \frac{L}{R} \rightarrow L = \mathcal{T}R = (14.4 \text{ ms})(6.00 \Omega) = 86.4 \times 10^{-3} \text{ H}$$

El cambio en  $R$  corresponde a una disminución de 65%, comparada con la resistencia inicial. ¡El cambio en  $L$  representa un aumento de 188% en inductancia! Por lo tanto, un ajuste porcentual mucho más pequeño en  $R$  puede lograr el efecto deseado del ajuste que se requeriría en  $L$ .

## 5.6 Energía Magnética.

### ***Energía almacenada en un campo magnético***

Cuando un inductor de inductancia  $L$  conduce una corriente  $I$  que cambia a una razón  $dI/dt$ , la energía se suministra al inductor a una razón

$$P = I\mathcal{E} = LI \frac{dI}{dt}$$

donde  $P$  representa la potencia y se usa la ecuación 5.5. Calculemos ahora el trabajo necesario para aumentar la corriente en un inductor, de cero a algún valor  $I$ . De acuerdo con la última ecuación, el trabajo  $dW$  realizado en un tiempo  $dt$  es

$$dW = P dt = LI dI.$$

Por lo tanto, el trabajo total realizado para aumentar la corriente de cero a  $I$  es

$$W = \int dW = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2.$$

Este trabajo realizado es igual a la energía  $U$  almacenada en el inductor cuando conduce una corriente  $I$  (y se toma  $U = 0$  cuando  $I = 0$ ):

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \tag{5.25}$$

Esto se puede comparar con la energía almacenada en un capacitor,  $C$ , cuando la diferencia de potencial a través de él es  $V$  (véase la unidad 2):

$$U = \frac{1}{2} CV^2.$$

**EJERCICIO 1** ¿Cuál es la inductancia de un inductor si tiene una energía almacenada de? 1.5 J cuando en él hay una corriente de 2.5 A? a) 0.48 H, b) 1.2 H, c) 2.1 H, d) 4.7 H, e) 19 H.

Así como se puede considerar que la energía almacenada en un capacitor reside en el campo eléctrico entre sus placas, del mismo modo se puede considerar que la energía en un inductor está almacenada en su campo magnético. Para expresar la energía en términos del campo magnético, usemos el resultado del ejemplo 3, de la sección 5.2, de que la inductancia de un solenoide ideal (se ignoran los efectos de borde) es  $L = \mu_0 N^2 A / \ell$ . Puesto que el campo magnético  $B$  en un solenoide se relaciona con la corriente  $I$  mediante  $B = \mu_0 NI / \ell$ , se tiene

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \right) \left( \frac{B\ell}{\mu_0 N} \right) = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A\ell.$$

Podemos considerar que esta energía reside en el volumen encerrado por los devanados, que es  $A\ell$ . Así, la energía por unidad de volumen o **densidad de energía** es

$$\mu = \text{densidad de energía} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \tag{5.26}$$

Es posible demostrar que esta fórmula, la cual se dedujo para el caso especial de un solenoide, es válida para cualquier región del espacio donde exista un campo magnético. Si está presente un material ferromagnético,  $\mu_0$  se sustituye por  $\mu$ . Esta ecuación es análoga a la de un campo eléctrico,  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ .

En ambos casos, la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo.

**Pregunta rápida** Se realiza un experimento que requiere la densidad de energía más alta posible en el interior de un solenoide muy largo que transporta corriente. ¿Cuál de las siguientes opciones aumenta la densidad de energía? (Puede haber más de una elección correcta.) a) Aumentar el número de vueltas por cada unidad de longitud en el solenoide, b) incrementar el área de la sección transversal del solenoide, c) aumentar sólo la longitud del solenoide mientras se mantiene fijo el número de vueltas por cada unidad de longitud fija o d) incrementar la corriente en el solenoide.

**EJEMPLO 2** ¿Qué ocurre con la energía en el inductor?

Considere una vez más el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 206, con el interruptor  $S_2$  en la posición  $a$  y a la corriente en su valor de estado estable. Cuando  $S_2$  se pasa a la posición  $b$ , la corriente en la espira derecha decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión  $I = I_i e^{-t/\mathcal{T}}$ , donde  $I_i = \mathcal{E}/R$  es la corriente inicial en el circuito y  $\mathcal{T} = L/R$  es la constante de

tiempo. Demuestre que toda la energía inicialmente almacenada en el campo magnético del inductor aparece como energía interna en el resistor conforme la corriente decae a cero.

**SOLUCIÓN**

**Conceptualizar** Antes de que  $S_2$  se ponga en  $b$ , desde la batería se entrega energía con una relación constante al resistor, y la energía se almacena en el campo magnético del inductor. Después de  $t = 0$  cuando  $S_2$  está en la posición  $b$ , la batería ya no puede proporcionar energía y la energía se entrega sólo al resistor desde el inductor.

**Categorizar** La espira derecha del circuito se modela como un sistema aislado, de modo que la energía se transfiere entre componentes del sistema pero no sale del sistema.

**Analizar** La energía en el campo magnético del inductor en cualquier tiempo es  $U$ . La relación  $dU/dt$  con la que sale la energía del inductor y se entrega al resistor es igual a  $I^2R$ , donde  $I$  es la corriente instantánea.

Sustituya la corriente conocida por la ecuación 5.24 en  $dU/dt = I^2R$

$$\frac{dU}{dt} = I^2R = (I_i e^{-Rt/L})^2 R = I_i^2 R e^{-2Rt/L}$$

Resuelva para  $dU$  e integre esta expresión sobre los límites  $t = 0$  a  $t \rightarrow \infty$ :

$$U = \int_0^\infty I_i^2 R e^{-2Rt/L} dt = I_i^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt$$

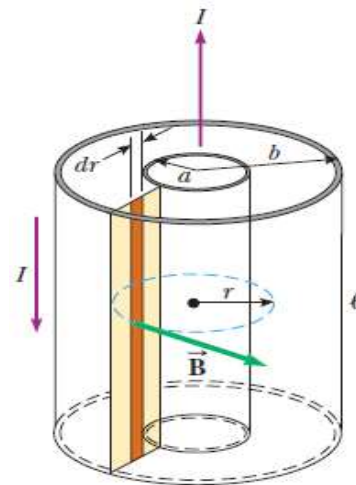
Se puede demostrar que el valor de la integral definida es  $L/2R$  (véase el problema 26). Use este resultado para evaluar  $U$ :

$$U = I_i^2 R \left( \frac{L}{2R} \right) = \frac{1}{2} L I_i^2$$

**Finalizar** Este resultado es igual a la energía inicial almacenada en el campo magnético del inductor, dado por la ecuación 5.26, como se debía comprobar.

**EJEMPLO 3.** El cable coaxial

Con frecuencia los cables coaxiales se usan para conectar dispositivos eléctricos como su sistema estereofónico y en la recepción de señales de los sistemas de televisión por cable. Modele un cable coaxial largo como dos cubiertas conductoras cilíndricas delgadas y concéntricas de radios  $a$  y  $b$  y longitud  $\ell$ , como en la figura 212. Las cubiertas conductoras portan la misma corriente  $I$  en direcciones opuestas. Calcule la inductancia  $L$  de este cable.



**Figura 212. (Ejemplo 3) Sección de un cable coaxial largo. Los conductores interior y exterior portan iguales en direcciones opuestas.**

## SOLUCIÓN

**Conceptualizar** Considere la figura 100. Aunque no se tiene una bobina visible en esta geometría, imagine una rebanada radial delgada del cable coaxial tal como el rectángulo dorado claro en la figura 212. Si los conductores interior y exterior se conectan a los extremos del cable (arriba y abajo de la figura), esta rebanada representa una gran espira conductora. La corriente en la espira establece un campo magnético entre los conductores interior y exterior que pasa a través de esta espira. Si la corriente cambia, el campo magnético cambia y la fem inducida se opone al cambio original en la corriente en los conductores.

**Categorizar** Esta situación se clasifica como una en la que se debe regresar a la definición fundamental de inductancia, ecuación 5.2.

**Analizar** Debe encontrar el flujo magnético a través del rectángulo dorado claro de la figura 212. La ley de Ampere (vea la sección 4.5) dice que el campo magnético en la región entre las cubiertas se debe al conductor interior y que su magnitud es  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ , donde  $r$  se mide desde el centro común de las cubiertas. El campo magnético es cero afuera de la cubierta exterior ( $r > b$ ) porque la corriente neta que pasa a través del área encerrada por una trayectoria circular que rodea el cable es cero; por tanto, a partir de la ley de Ampere,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ . El campo magnético es cero adentro de la cubierta interior porque la cubierta es hueca y no hay corriente presente dentro de un radio  $r < a$ .

El campo magnético es perpendicular al rectángulo dorado claro de longitud  $\ell$  y ancho  $b - a$ , la sección transversal de interés. Ya que el campo magnético varía con la posición radial a través de este rectángulo, debe usar el cálculo para encontrar el flujo magnético total.

Divida el rectángulo dorado claro en tiras de ancho  $dr$  como la tira más oscura en la figura 212. Evalúe el flujo magnético a través de tal tira:

$$\Phi_B = \int B dA = \int B \ell dr$$

Sustituya para el campo magnético e integre en todo el rectángulo dorado claro:

$$\Phi_B = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ell dr = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Use la ecuación 5.2 para encontrar la inductancia del cable:

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Finalizar** La inductancia aumenta si  $\ell$  aumenta, si  $b$  aumenta o si  $a$  disminuye. Este resultado es consistente con la conceptualización: cualquiera de estos cambios aumenta el tamaño de la espira representada por la rebanada radial y a través de la que pasa el campo magnético, que aumenta la inductancia.

## 5.7. Ley Faraday.

Experimentos llevados a cabo por Michael Faraday en Inglaterra en 1831 e independientemente por Joseph Henry en los Estados Unidos en el mismo año, demostraron que una corriente eléctrica podría ser inducida en un circuito por un campo magnético variable.

**La ley de inducción de Faraday establece que:**

La magnitud de la fem inducida en un circuito es igual a la razón de cambio del flujo magnético a través del circuito.

También se podría expresar como:

La fem inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez de cambio del flujo magnético a través del circuito.

Este enunciado se puede expresar analíticamente mediante  $\varepsilon = -\frac{d\varphi_E}{dt}$  donde  $\varepsilon$  es la fem inducida y  $\varphi_E$  es el flujo eléctrico, que puede expresarse como

$$\varphi_E = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Si el circuito consta de N espiras, la fem inducida es:  $\varepsilon = -N \frac{d\varphi_E}{dt}$

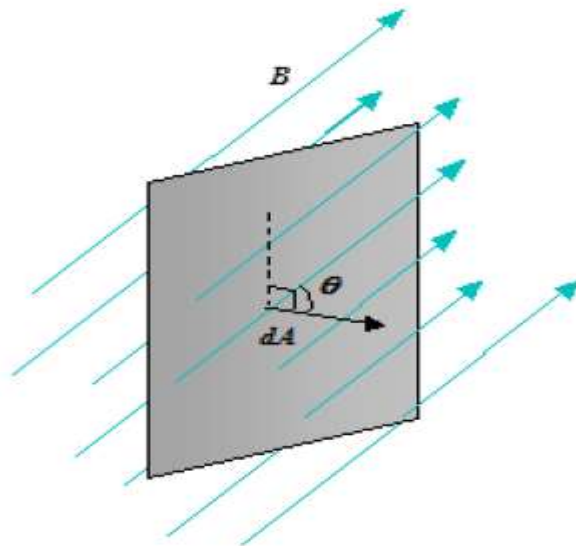


Figura 213.

Consideremos una espira conductora de área A en presencia de un campo magnético uniforme B, el cual forma un ángulo  $\theta$  con la normal a la espira como se indica en la figura 213, en este caso, el flujo a través de la espira es  $BA \cos \theta$  y la fem inducida puede expresarse como:

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}(BA \cos \theta)$$

De esta expresión, se ve que la fem puede ser inducida en el circuito de varias formas:

1. Variando la magnitud de  $B$  con respecto al tiempo.
2. Variando el área con respecto al tiempo
3. Cambiando el ángulo  $q$  entre  $\vec{B}$  y la normal al plano con respecto al tiempo, y
4. Cualquier combinación de éstas.

Ahora bien, para determinar el sentido de la corriente eléctrica inducida se utiliza la regla de la mano izquierda, la cual establece que (Figura 214):

Con el dedo índice de la mano izquierda se indica el sentido del campo magnético, el dedo medio manifiesta el sentido de la velocidad de movimiento, entonces el dedo pulgar indica el sentido de la corriente eléctrica inducida.



Figura 214. Representación esquemática de la regla de mano izquierda.

**Problema Reto:**

1. El transformador eléctrico de una máquina de soldar entrega una corriente de 320 A. a 12 V. su eficiencia es de 63% y está conectada a la línea 120 V. Si su bobina secundaria tiene 16 espiras, calcula a) la potencia de consumo, b) la potencia que se pierde, c) el número de espiras de la bobina primaria, d) la corriente de consumo y e) la cantidad de calor que libera por cada 10 minutos de trabajo continuo.



### Problemas para resolver.

5.1 Un conductor eléctrico se mueve dentro de un campo magnético cortando las líneas de fuerza perpendicularmente, desde 0.18 Wb hasta 0.37 Wb, durante 0.2 s. ¿Cuál es la fem inducida?

5.2 Se induce en un conductor una fem de 1.3 V, cuando corta perpendicularmente el flujo magnético mientras se desplaza entre dos puntos dentro del campo magnético. Si parte de un punto donde el flujo es de 0.016 Wb y tarda 8 milisegundos, determina el flujo magnético donde se detiene el conductor.

5.3 Mientras un conductor se desplaza entre dos puntos dentro del campo magnético desde 0.143 a 2.687, se generan en el conductor 12 V. Calcula el tiempo de desplazamiento.

5.4 Una bobina de 120 espiras se desplaza durante 14 milisegundos dentro del campo magnético de los polos de un imán de herradura, desde un punto donde el flujo magnético es de  $1.8 \times 10^{-3}$  Wb hasta otro punto donde el flujo es de  $4.6 \times 10^{-3}$  Wb. Determina la fem inducida en la bobina.

5.5 El área de una bobina de 10 espiras corta las líneas de fuerza de campo magnético desde  $3.5 \times 10^{-2}$  Wb y se detiene en 23 milisegundos induciendo en la bobina una fem de 17.4 V. ¿Cuál será el flujo magnético del punto donde se detuvo la bobina?

5.6 Determina el tiempo en que una bobina de 48 espiras se desplaza en un campo magnético cortando líneas de flujo desde cero hasta 0.23 Wb, si se inducen en la bobina 12.8 V.

5.7 Se tiene una bobina cuadrada de 5 centímetros por lado, dentro de una región de campo magnético; la superficie de la bobina es perpendicular al campo magnético, mientras se mueve desde un punto donde el flujo es de 3.57 Wb hasta otro donde el campo es cero, tarda 0.05 s induciendo 20 V. Calcula el número de espiras de la bobina.

5.8 ¿Cuál es la inducción magnética en una región donde una bobina de  $2 \times 8$  cm, y de 34 espiras, colocada en una posición en la que su vector área forma  $28^\circ$  respecto a las líneas de flujo, si tarda 0.013 s y genera 223 V?

5.9 Una bobina de  $64 \times 10^4$  m<sup>2</sup> está en una región de campo magnético de 4.6 Wb/m<sup>2</sup>; su vector área tiene  $68^\circ$  respecto al flujo inicial, en un instante gira hasta colocarse a  $14^\circ$  respecto al flujo. Si la bobina tiene 70 espiras induciendo 34.2 V, ¿qué tiempo tardó la bobina en el movimiento?

5.10 El plano de una bobina de  $48 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup> y 1200 espiras es paralelo a las líneas de flujo magnético en una región donde el campo es de 6.8 Wb/m<sup>2</sup>; en un instante se gira la bobina hasta que su plano se sitúa a cierta inclinación en 0.1983 segundos, induciendo 7.9 V. Calcula el ángulo respecto a las líneas de flujo de la posición final de la bobina.

5.11 Una bobina cuadrada de 65 espiras cuyo plano superficial inicialmente está en paralelo con una de las líneas de flujo del campo magnético de 4.6 Wb/m<sup>2</sup>, al girar su plano  $38^\circ$  respecto a las líneas de campo, tarda 0.15 s induciendo 19.6 V. Calcula las dimensiones de la bobina.



ALERTA: Utiliza la ecuación de fem inducida en la bobina y aplica el área de un cuadrado.

5.12 El vector área de una bobina rectangular de  $4 \times 9$  cm, situada en una región de campo magnético de 2.8 Wb/m<sup>2</sup>, forma un ángulo de  $79^\circ$  respecto a las líneas de flujo magnético con sentido hacia la derecha del plano de esta hoja, en un instante de 0.023 s, gira la bobina hacia la horizontal hasta que su plano permanece estático, induciendo una fem de  $36.7^\circ$ . Calcula el ángulo de inclinación respecto a la horizontal en el sentido de las líneas de campo magnético.

5.13 Se tiene un conductor de 0.65 cm de largo en una región de campo magnético de 8.36 Wb/m<sup>2</sup> cortando las líneas de flujo a  $38^\circ$ . Si el conductor se mueve a 60 km/h, determina la fem inducida en el conductor.

5.14 Un conductor eléctrico se mueve a 90 km/h, dentro de una región de campo magnético de 6.354 Wb/m<sup>2</sup> con inclinación de  $82^\circ$  respecto a las líneas de flujo magnético. ¿Cuál será la longitud si se inducen 18 V?

5.15 Un conductor de 26 cm de un circuito magnético de 12.486 Wb/m<sup>2</sup> se está moviendo a razón de 20 cm en 13 milisegundos con cierta inclinación entre el flujo y la velocidad del conductor, e induciendo 48 V. Determina el ángulo de inclinación.

5.16 En una región de campo magnético un conductor de 35 cm se mueve en forma horizontal recorre 14 cm en 8 milisegundos, corta perpendicularmente las líneas de campo magnético, e induce 9.6 V. Calcula el valor del campo magnético.

5.17 Una bobina de 60 espiras tiene una resistencia de 2.3  $\Omega$ , su diámetro es de 4 cm y está vertical entre los polos de un imán alineados horizontalmente, las terminales de la bobina están conectadas a un resistor de 200  $\Omega$  y en un instante se retira la bobina del imán y fluyen hacia el resistor 6.8 milicoulombs. Determina el campo magnético entre los polos.



ALERTA: Utiliza la ecuación de la ley de Ohm despejando el potencial, sustituye la corriente en función de la carga y del tiempo, e iguala con la ecuación de fem inducida en la bobina.

5.18 Se tiene una bobina rectangular de 18 por 24 cm dentro de una región de campo magnético cuyas líneas de fuerza magnética son horizontales hacia la izquierda; inicialmente el plano de la bobina es paralelo al flujo, en un instante de 8 milisegundos se gira la bobina en sentido contrario de las manecillas del reloj hasta una posición donde la inducción magnética es de 3.8 Wb/m<sup>2</sup>. Si en las terminales de la bobina se generaron 25 volts y su posición tiene una inclinación de  $42^\circ$ , calcula el número de espiras.

5.19 Un aro metálico de 6 centímetros de radio tiene una resistencia de  $3 \times 10^{-2}$   $\Omega$ ; está colocado sobre la parte superior de un solenoide de 90 espiras, que tiene 60 cm de



Problemas aplicados a la realidad



Problemas para resolver con tecnología



longitud con núcleo de aire y colocado verticalmente; su radio es de 4 centímetros. Si la corriente en el solenoide está cambiando a razón de 160 A/s, calcula la corriente inducida en el aro.

**5.20** Una bobina de 250 espiras presenta una resistencia de  $6 \Omega$  y tiene un diámetro de 8 cm; cuando es introducida entre los polos de un imán fluye una carga de  $1.5 \times 10^{-3}$  coulombs hacia un resistor conectado a la bobina. Calcula la inducción magnética del imán.

**5.21** Una bobina plana de  $N$  espiras tiene una resistencia de  $4.5 \Omega$  y 4 cm de diámetro; está entre los polos de un imán donde el campo magnético es de  $9.645 \times 10^{-3}$  Wb/m<sup>2</sup>; en un instante se extrae del campo del imán circulando la carga de  $2.5 \times 10^{-3}$  coulombs. Determina el número de espiras de la bobina.

**SR** **5.22** Un circuito eléctrico formado por un resistor de  $7 \Omega$  con sus terminales dobladas en U sobre las que se desliza a 9 km/h un alambre recto de 25 cm, está colocado en un campo magnético de  $0.92$  Wb/m<sup>2</sup> que entra al plano de esta página. Determina la corriente en el alambre.

**5.23** Mientras se desliza un conductor de 35 cm sobre las terminales de un resistor de  $6 \Omega$ , se induce una corriente de 0.24 A dentro de un campo magnético de  $2.36$  Wb/m<sup>2</sup> que entra en el plano. Determina la velocidad de desplazamiento.

**5.24** Al moverse un conductor de 40 cm perpendicularmente a las líneas de flujo magnético sobre las terminales en U de un resistor de  $8 \Omega$ , colocado en un campo magnético de  $6.48$  Wb/m<sup>2</sup>, induce una corriente de 0.18 A. Calcula la fuerza que provoca el movimiento.

**5.25** Calcula la fem inducida en los extremos de un conductor recto de 1.2 m de largo que gira a 420 rpm, respecto a un punto de giro localizado en un extremo de la varilla, si está colocada en un campo magnético de 0.6 T que sale del plano de la hoja.

**ALERTA:** Encuentra primero la frecuencia, después el periodo, el área del círculo descrito por rotación del conductor y al final la fem inducida.

**5.26** Un conductor rectilíneo de 45 cm gira alrededor de un punto en sus extremos, a 360 rpm, dentro de un campo induciendo una fem de 13.8 V. Si corta perpendicularmente las líneas de flujo, ¿cuál es la magnitud del campo?

**5.27** Una varilla de 17 cm de longitud gira desde uno de sus extremos a 720 rpm, dentro de un campo magnético, cortando perpendicularmente las líneas de flujo. Determina el flujo magnético que corta en cada vuelta si induce una fem de 2.62 V.

**5.28** Un clavo está girando a 120 rpm en un campo magnético de  $3.28$  Wb/m<sup>2</sup> e induce una fem de 0.19 V. ¿Cuál es la longitud del clavo?

**5.29** Se tiene una espira rectangular de  $60 \times 10$  cm en paralelo y a 0.4 cm de su longitud hay un alambre recto paralelo por el que circulan 25 A/s. Determina la fem inducida en la bobina.

**5.30** Se tiene una bobina rectangular de 35 espiras y  $90 \times 8$  cm. En paralelo con su longitud está una varilla conductora por la que fluye una corriente variable con el tiempo de 48 A/s separada 0.8 cm. Determina la fem en las terminales de la bobina debida al campo magnético que genera el conductor.

**5.31** ¿Cuál será la inductancia de una bobina de 80 espiras de 6 cm de diámetro con núcleo de aire, si el espesor del alambre es de 2 mm?

**5.32** Calcula la inductancia de una bobina con 120 espiras cuyo diámetro es de 8 cm, devanado sobre un material ferromagnético cuya permeabilidad relativa es de 790 y su longitud es de 24 cm.

**5.33** Una bobina de 70 espiras con núcleo de aire tiene una inductancia de 134.68 mHy y 3 cm de diámetro. Determina su longitud.

**5.34** ¿Cuántas espiras tiene una bobina de 6 cm de diámetro con núcleo de aire de 9 cm de longitud, si su inductancia es de  $380 \times 10^{-4}$  Hy?

**5.35** Se requiere construir en el laboratorio una bobina de 0.924 Hy utilizando un material ferromagnético como núcleo cuya permeabilidad relativa es de 1300, utilizando alambre de 2.5 mm de diámetro y que tendrá 180 espiras. ¿Cuál será el diámetro del núcleo?

**ALERTA:** Determina el área transversal de la bobina, después con el área del círculo determina el radio y finalmente su diámetro.

**5.36** Un solenoide de  $38 \mu$ Hy está conectado a una fuente de alimentación cuya corriente se reduce desde 5.9 hasta 3.6 A en 1.15 s. Calcula la fem inducida.

**5.37** Un solenoide de 30 espiras con núcleo de aire tiene un diámetro de 12 cm y una longitud de 8 cm se coloca en un medio de material ferromagnético el cual se satura cuando el campo es de  $8.3$  Wb/m<sup>2</sup>. Si la corriente es de 7 A, determina: a) la inductancia con núcleo de aire, b) la constante magnética y c) la inductancia de la bobina con núcleo.

**5.38** El devanado primario de un transformador eléctrico ideal tiene 180 espiras y está conectado a la línea de 120 V de CA. Si se requiere un voltaje de salida de 760 V, determina: a) el número de espiras del devanado secundario y b) si consume 1.2 A, ¿cuál es la corriente de salida?

**5.39** Un transformador ideal es alimentado con 120 V de CA. a) Si entrega en su salida 12 A, ¿cuál es la relación del número de espiras entre los devanados? y b) si entrega 2.5 A, ¿cuál es la corriente de consumo?

**5.40** Un transformador ideal de 240 W está conectado a la línea de 120 V y entrega a su salida 8.5 A. Determina: a) la corriente de entrada y b) el voltaje de salida.

**5.41** Se tiene un transformador reductor que entrega 18 V a 5 A cuya eficiencia es de 85%. Calcula la potencia de consumo.

**5.42** Un transformador elevador entrega 1500 V y es alimentado con 120 V. Si su eficiencia es de 79%, su corriente de salida es de 100 mA. ¿Cuál será la corriente de consumo?

**5.43** Un transformador entrega 235 W a 500 W, tiene una eficiencia de 85% y consume 4.6 A. ¿Qué voltaje alimenta el devanado primario del transformador?

**5.44** Se tiene un transformador de 90 W de salida cuya eficiencia es de 78. Si permanece, determina la potencia que se pierde en el transformador.

**5.45** Se tiene un transformador que consume 1.36 A cuando se alimenta con 120 V. Si su eficiencia es de 86%, determina la cantidad de calor que se libera cuando trabaja 20 min.



**ALERTA:** Calcula primero la potencia de entrada y con la ecuación de eficiencia determina la potencia de salida, la diferencia de potencias será la que se pierde en el transformador. Finalmente determina la cantidad de calor disipado en el transformador.

**5.46** El devanado secundario de un transformador de 76% entrega 16 V a 3 A. Determina: a) la potencia de entrada y b) la corriente de entrada.

**5.47** Se desea construir un transformador elevador que entregue 680 V con eficiencia de 88% y corriente de salida de 60 mA. Si se alimenta con 120 V, calcula: a) la corriente de entrada y b) el número de espiras del devanado secundario si el primario tiene 78 espiras.

**5.48** La bobina de un generador eléctrico automotriz es de  $10 \times 7$  cm y tiene 380 espiras; está dentro de un campo magnético de  $0.098 \text{ Wb/m}^2$  y está girando a 480 rpm. Determina la fem máxima que genera.



**ALERTA:** Obtén primero el número de revoluciones por segundo, determina la velocidad angular, encuentra la fem máxima y finalmente la fem instantánea.

**5.49** El rotor de un generador eléctrico está integrado por una bobina rectangular de  $12 \times 6$  cm que tiene 420 espiras y está girando a 780 rpm entre la armadura, cuyo campo magnético es de  $0.086 \text{ Wb/m}^2$ . Determina la fem inducida a 20 milisegundos de pasar por el punto cero.

**5.50** La bobina móvil de un generador eléctrico automotriz mide  $11 \times 8$  cm. Al girar a 540 rpm en el campo magnético de  $0.074 \text{ Wb/m}^2$  generado por la armadura, se induce en la bobina una fem máxima de 15.4 V. Calcula el número de espiras que tiene la bobina.

## PRÁCTICA 8

### “EL MOTOR ELECTRICO”

**OBJETIVO:** Aplicar la ley de Ampere y la ley de Faraday.

#### INTRODUCCION

La vida moderna sería impensable sin la existencia de los motores, estos se encuentran en todas partes: en la industria, el transporte, el hogar, etc. Para cualquier lado que volteemos, podemos encontrar una máquina que funcione con un motor.

Un motor eléctrico es una máquina que convierte energía eléctrica en energía mecánica. Cuando la electricidad proveniente de una batería u otra fuente de energía se conectan a un motor, se consigue que el eje comience a girar. Hay motores que funcionan con una fuente de corriente continua (CC) como una batería, y hay otros que lo hacen con una fuente de corriente alterna (CA). Si bien existen muchos diseños de motores eléctricos, el principio en todos es el mismo.

Hay dos principios de física relacionados entre si que explican la operación de los motores eléctricos. El primero es el principio de la inducción electromagnética, descubierto en 1831 por el científico e inventor británico Michael Faraday. El principio establece que cuando un circuito eléctrico se mueve en un campo magnético o cuando se hace variar la intensidad del campo magnético que pasa a través de un circuito eléctrico inmóvil, se inicia o “induce” una corriente eléctrica en el circuito. El segundo principio es el inverso al primero, o sea, el de la reacción electromagnética, observado por el físico francés André Marie Ampere en 1820.

De esta forma, cuando se tiene una corriente eléctrica que se transporta por un conductor, tal como un alambre de cobre situado en un campo magnético, este alambre experimentará una fuerza. Si el conductor se enrolla en una bobina con muchas vueltas en posiciones precisas y con conexiones eléctricas, la fuerza creada hará que la bobina gire sobre su propio eje. Cuando la bobina gira, hace girar al eje del motor.

Los motores constan de dos unidades básicas: el campo, que es el electroimán con su bobinado; y la armadura, que es la estructura que soporta los conductores que cortan el campo magnético y llevan la corriente excitatriz en el motor.

#### **MATERIAL:**

Para poder realizar un Motor Eléctrico, es necesario tener:

Una pila alcalina

Una Goma ancha

Dos clips de papel grandes

Un Imán de cerámica rectangular

Alambre de cobre esmaltado grueso

Un tubo

Papel de lija fino

Pegamento

Bloque pequeño de Madera para la base



**PROCEDIMIENTO:**

¿Cómo se puede producir electricidad a partir de dos imanes?

Esta fue la pregunta que bombardeo la cabeza del físico inglés Michael Faraday en el siglo XIX. Sus investigaciones y experimentos le llevaron a convertirse en el primer científico experimental que descubrió la relación que existe entre la electricidad y el magnetismo.

¿Se puede producir electricidad a partir de un imán?

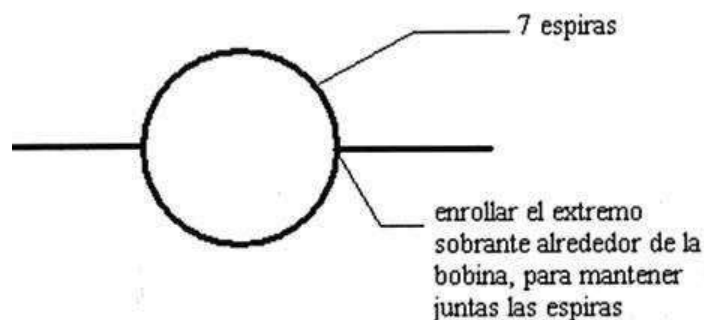
Michael Faraday fue el hombre que descubrió que un imán es susceptible de generar corriente eléctrica. Para demostrar esta teoría, el físico británico enrolló sobre un anillo de hierro dulce dos bobinas cilíndricas separadas, pero conectadas entre sí. Faraday puso en contacto la primera bobina con una batería y la segunda con un galvanómetro. En el momento de cerrar y abrir la corriente en la primera de las bobinas, la desviación de la aguja del galvanómetro indicó la presencia de una corriente inducida en la segunda bobina.

Con este experimento, Faraday aportó un nuevo concepto a la física moderna: inducción electromagnética. Este hallazgo le condujo a la creación de la dinamo- máquina que transforma la energía mecánica en energía eléctrica- y le empujó para conseguir formular las leyes generales que rigen el comportamiento electromagnético de la materia.

El motor de rotación electromagnética de Faraday se define a partir de la rotación de imanes alrededor de un cuerpo conductor de electricidad; sin embargo, durante el desarrollo del proyecto se trata todo lo contrario; es decir, la rotación de conductores en torno a un imán.

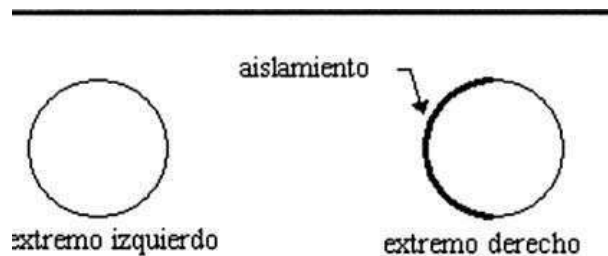
Para llevar a cabo el desarrollo del motor eléctrico, fue necesario seguir las siguientes instrucciones:

1. Comenzando aproximadamente después de 3 pulgadas del extremo del alambre, se debe envolver 7 veces alrededor del tubo. Es necesario cortar el alambre, dejando un sobrante de 3 pulgadas enfrente del punto de partida original.
2. Envolver los dos extremos sobrantes alrededor de la bobina para fijarla, y extender los dos extremos perpendiculares a la bobina.

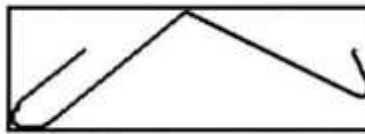


**Nota:** Es importante que se asegure de centrar los dos extremos de los dos lados de la bobina, ya que el balance es muy importante del motor eléctrico.

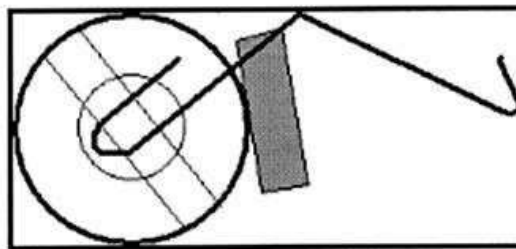
3. En un extremo, utilizar el papel de lija fino para quitar totalmente el aislante del cable. Se debe dejar cerca de  $\frac{1}{4}$  pulgada de aislante en el extremo donde el cable se ha enrollado a la bobina. Para el otro extremo, es necesario colocar la bobina plana sobre una superficie y lijar, suavemente, solo la parte superior para eliminar el aislamiento de solo la mitad superior del cable. Una vez más, se debe dejar  $\frac{1}{4}$  pulgada de aislante completo en el extremo y donde el cable envuelve la bobina. Esto se puede observar en la siguiente figura:



4. Doblar los dos clips de papel de la siguiente forma. Esto será útil para sostener la bobina formada por el alambre de cobre esmaltado.



5. Pegar el imán de cerámica en la cara de la batería de la siguiente forma:

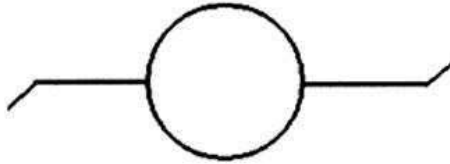


6. Colocar la bobina en la horquilla formada por los extremos de la derecha de los clips de papel. Es posible que se deba ayudar a empezar a girar la bobina; sin embargo, después de ello la bobina debe comenzar a girar rápidamente. Si esto no es posible; es decir, si la bobina no gira, es necesario cerciorarse de que ha sido eliminado todo el aislante de los extremos del cable. Además, si la bobina gira irregularmente, debemos observar que los

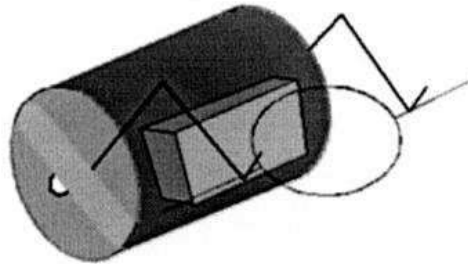
extremos estén centrados en los laterales de la bobina. Es necesario resaltar que el motor está en fase solamente cuando se sostiene horizontalmente.

7. Para mostrarlo, se necesitará probablemente construir una horquilla pequeña para sostener el motor en la posición apropiada. Puede ser que también ayude el doblar los extremos de la bobina un poco, de modo que, como se desliza a la derecha o a la

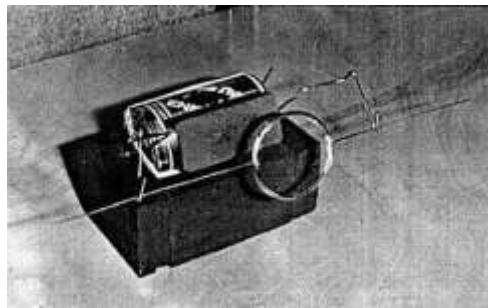
izquierda, los dobleces lo mantengan en la posición apropiada. Esto se puede observar claramente en la siguiente figura.



Una vez realizado todo el procedimiento anterior, es necesario completar nuestro motor eléctrico de la siguiente manera:



Finalmente así queda nuestro motor eléctrico:



## CUESTIONARIO

1. Explique las fuerzas que actúan sobre la espira que produce movimiento
2. Si se invierte la polaridad, ¿qué sucede con el movimiento de la espira?
3. Explique el principio físico sobre el cual se basa el experimento
4. Calcule el campo magnético que se produce
5. ¿Cómo incrementaría el campo magnético



**Referencias Bibliográficas.**

Alonso, Marcelo y J. Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.  
Serway, Raymond A. y John W. Jeweett, Jr. Física II, 3ª edición.  
Resnik Halliday Krane. Física Volumen 2, 5ª edición, Ed. Patria.  
Vega, I. P. N. Electromagnetismo, 1ª edición, Ed. Patria  
Young, Freedman, Sears, Zemansky. Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12ª edición, Ed. Addison – Wesley, PEARSON  
Reyes, Salcedo, y Carrillo. Manual de Experimentos de Electromagnetismo, ITAM.  
Victoriano López Rodríguez, Electromagnetismo I, UNED  
Luis Álvarez Thon, Electromagnetismo FMF-241 (2014), Universidad Andrés Bello.  
Matthew N. O. Sadiku, Elementos de electromagnetismo, 3ª edición, OXFORD.  
Luis Vargas D., Apuntes de Electromagnetismo (2015), Universidad de Chile.  
Giancoli, Volumen II, 4ª Edición, Física para Ciencias e Ingeniería con física Moderna, PEARSON.  
Bernabé Franco, Carlos Javier Jaimes O., Apuntes De Electromagnetismo, Universidades Tecnológicas de Santander.  
Jesús Fabián Jurado, Electromagnetismo para Ingeniería (2013). Universidad Nacional de Colombia.  
Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos, 3ª edición, Mc Graw Hill.  
Edgar Álvaro Méndez, José A. Andrade Lucio, Manual de Experimentos de física III, FIMEE, Universidad de Guanajuato.  
Serway, Raymond A. Y John W Jewett, Jr.(2004). Física II. 3ª. Edición. México. Ed. Thomson Learning  
Paul E. Tippens (2007). Física conceptos y aplicaciones, 7ª. Edición. México, Ed. McGraw-Hill.  
Halliday Resnick (1987) Fundamentos de física versión ampliada. 2ª. (Alonso) (Serway R. A.) (Krane) (Vega) (Young) (Reyes) (Rodríguez) (MarcadorDePosición1) (Thon) (Sadiku) (D.) (Giancoli) (Germán Arenas Sicard) (A.) (Pozueta) (Bernabé Franco) (Jurado, Electromagnetismo para Ingeniería (2013)) (Jurado, Electromagnetismo para Ingeniería (2013).) (Charles K. Alexander) (Edgar Álvaro Méndez) (Serway R. A.) (Tippens) (Resnick)Edición. México. Ed. CECSA.

**Referencias Electrónicas.**

<http://ww.ifinternational.com/mf/electricidad-magnetismo.html>  
<http://www.acienciasgalilei.com/videos/3electricidad-mag.htm>  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-activities/>  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-slides/>

<http://mit.usiu.ac.ke/courses/physics/8-02sc-physics-ii-electricity-and-magnetism-fall-2010/capacitors/capacitance-capacitors-energy-stored-in-capacitors/>  
[Circuitos, pero sin Memorizar Fórmulas](https://www.youtube.com/watch?v=kHZ8SD7jiiA)  
<https://www.youtube.com/watch?v=kHZ8SD7jiiA>

## 6. Unidad Propiedades Magnéticas de la Materia

### *Introducción.*

En el siglo XIII A.C. los chinos utilizaron por primera vez la brújula, que básicamente consta de una aguja magnética. Los griegos descubrieron en el año 800 A.C. que ciertas piedras como la magnetita ( $Fe_3O_4$ ) atraían pedacitos de hierro.

Todo imán tenga la forma que tenga tiene dos polos llamados polo norte y polo sur. Los polos diferentes se atraen y los polos iguales se repelen. Los polos magnéticos no pueden aislarse es decir no se han podido encontrar monopolos.

En el año de 1819 Hans Christian Oersted encontró que una corriente eléctrica en un alambre desviaba una aguja de una brújula situada en sus proximidades, dando origen a la ciencia del ELECTROMAGNETISMO, que relaciona efectos eléctricos con efectos magnéticos.

Los medios materiales están compuestos por átomos y moléculas, que a su vez se componen de partículas como los protones como los protones, neutrones y electrones. Los protones y neutrones se concentran en el núcleo se asimila a una corriente sobre una espira, esta produce un momento magnético llamado momento magnético orbital. Además los electrones se caracterizan por tener un momento magnético intrínseco llamado espín. Los protones del núcleo también tienen un momento magnético intrínseco pero es despreciable frente a los momentos orbitales de espín de los electrones. Los distintos átomos que componen un material pueden tener un momento magnético total distinto de cero o nulo, dependiendo de que los momentos orbitales y de espín correspondientes a los electrones se anulen o no entre sí. Cuando los átomos tienen un momento magnético distinto de cero, puede suceder que su orientación sea al azar, lo que ocurre en los materiales llamados paramagnéticos, o bien que se produzca una orientación espontánea de todos los momentos en una dirección, como ocurre en los medios ferromagnéticos.

Si ponemos un material en presencia de un campo magnético los dipolos se orientan en la dirección del campo debido al par de fuerzas que se ejerce sobre cada dipolo magnético. Además el campo perturba el momento orbital e induce un cambio en los momentos magnéticos orbitales. En resumen, un material puede ser considerado como una distribución de dipolos sobre el volumen que ocupa dicho material.

## 6.1 Magnetización.

El campo magnético producido por una corriente en una espira nos da un indicio acerca de lo que causa por las cuales ciertos materiales poseen fuertes propiedades magnéticas.

Cuando calculamos el torque sobre una espira cuadrada con corriente  $I$ , la fórmula que obtuvimos es

$$\vec{T} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

pero a pesar de que la deducción fue para un caso especial, la fórmula anterior es válida para una espira con cualquier forma. La cantidad  $I\vec{A}$  aparece en forma muy frecuente en la teoría magnética, así que le daremos un nombre, **momento magnético dipolar**:

$$\vec{m} = I\vec{A}$$

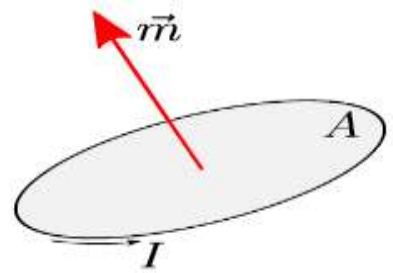


Figura 215: Momento dipolar de una espira con corriente. La magnitud de  $m=IA$ .

Donde  $\vec{A}$  es un vector perpendicular a la superficie y de magnitud  $A$ . En general cualquier espira con corriente tiene un campo magnético y por lo tanto un dipolo magnético, incluso a nivel atómico donde se puede imaginar al electrón como una corriente eléctrica en una espira circular. Como todos los materiales están compuestos por átomos, es razonable pensar que a nivel macroscópico los materiales también posean un momento magnético.

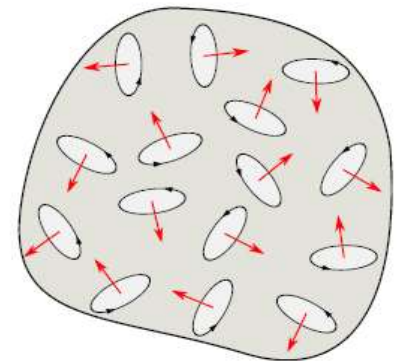


Figura 216: Dipolos magnéticos en un material con orientación aleatoria. El momento magnético neto es aproximadamente cero.

Cuando no hay un campo magnético externo, los dipolos magnéticos de los átomos de la mayoría de los materiales tienen orientaciones aleatorias (Fig. 216) de tal manera que no hay un momento magnético neto. (.Con excepción de los imanes permanentes).La aplicación de un campo magnético externo implica una alineación de los momentos magnéticos de los electrones. Tal como el estado de polarización de una sustancia se describe por medio del vector de polarización  $\vec{P}$ , el estado magnético de una sustancia se describe mediante el **vector de magnetización**  $\vec{M}$

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{m}_k}{\Delta v}$$

donde  $n$  es la cantidad de átomos por unidad de volumen y la expresión  $n\Delta n$  es la cantidad de átomos en el volumen  $\Delta v$ . De acuerdo a esta definición  $\vec{M}$  representa una **densidad volumétrica de momento magnético** y tiene una analogía directa con el vector de polarización  $\vec{P}$ .

Teniendo un campo magnético externo  $\vec{B}_0$  y el vector  $\vec{M}$ , el campo magnético total en un punto dentro de un material o sustancia depende de ambos.

En la sección de electrostática definimos dos cantidades escalares, densidad superficial de polarización y densidad volumétrica de polarización. Análogamente en magnetismo, es conveniente definir dos cantidades vectoriales

El vector

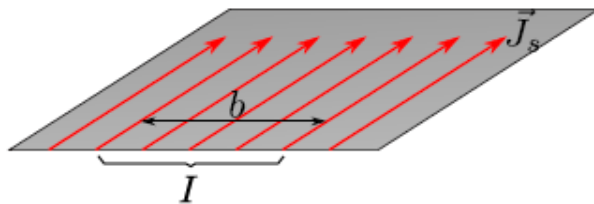
$$\vec{J}_v = \nabla \times \vec{M} \quad [A/m^2]$$

es la **densidad volumétrica de corriente de magnetización**.

Y el vector

$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \hat{n} \quad [A/m]$$

es la densidad superficial de corriente de magnetización. Donde  $\hat{n}$  es un vector unitario normal que apunta hacia afuera de la frontera.



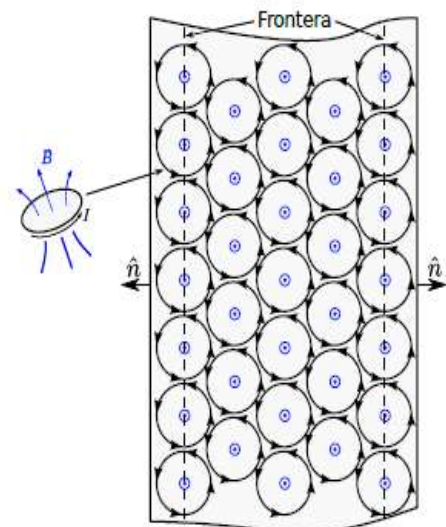
**Figura 217:** La corriente total  $I$  que atraviesa la longitud transversal  $b$  donde hay una densidad superficial de corriente de magnetización es  $I = J_s b$ .

La unidad de  $J_s$  es “amperes por metro de ancho”, es decir si la densidad de corriente superficial,  $J_s$ , es uniforme, la corriente total  $I$  en un ancho  $b$  es (Fig. 217)

$$I = J_s b$$

donde asumimos que el ancho  $b$  es medido perpendicularmente a la dirección de la corriente. Para una  $J_s$  no uniforme es necesario integrar

$$I = \int J_s dN$$



donde  $dN$  es el diferencial de longitud transversal a la dirección de la corriente.

Para entender la expresión  $\vec{J}_s = \vec{M} \times \hat{n}$  podemos recurrir a la figura 218 que representa un corte transversal de un material magnetizado de cierto espesor. En la superficie del material (lado izquierdo y derecho de las líneas punteadas), los dipolos magnéticos contribuyen a una corriente superficial efectiva. Claramente el producto cruz  $\vec{M} \times \hat{n}$  es un vector que sigue la trayectoria circular de cada dipolo.

**Figura 218. Corte transversal de un material magnetizado. El vector magnetizado  $\vec{M}$  apunta hacia fuera de la página. En el interior, los dipolos se anulan entre si, pero en la frontera los dipolos contribuyen a una corriente superficial.**

## 6.2 Intensidad Magnética.

Cuando se aplica un campo magnético externo  $\vec{B}$ , los dipolos magnéticos del material se alinean con  $\vec{B}$  y lo mismo ocurre con el momento magnético inducido. El resultado es que el campo magnético total en presencia de un material magnético sea diferente de su valor en el espacio libre. A nivel macroscópico la magnetización se puede describir en términos de la densidad de corriente volumétrica de magnetización,  $\vec{J}_v$ . Si a la ecuación

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Le agregamos  $\vec{J}_v$  tenemos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_v)$$

Y como  $\vec{J}_v = \nabla \times \vec{M}$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \Rightarrow \nabla \times \left( \frac{\vec{M}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

con esto definimos una nueva cantidad, llamada **intensidad de campo magnético**  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

de tal forma que obtenemos una nueva ecuación:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Notar que  $\vec{J}$  es la densidad de corriente libre (de una batería, etc.).

La forma integral de la ecuación anterior se obtiene tomando la integral de superficie en ambos lados y aplicando el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

donde C es el contorno (trayectoria cerrada) que limita la superficie S.

Esta ecuación es la **ley de Amparé en un medio magnético**.

### 6.3 Constantes Magnéticas.

Un **campo magnético** es una zona del espacio que tiene la propiedad de que si se coloca una carga eléctrica en movimiento en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza. Este campo vectorial se caracteriza por la magnitud **inducción magnética**  $\vec{B}$  que en el Sistema Internacional se mide en Teslas (T).

Un campo magnético puede ser originado por la presencia de otras cargas eléctricas en movimiento y también por la existencia de campos eléctricos variables en el tiempo. Al analizar las máquinas eléctricas nos referiremos exclusivamente a campos magnéticos creados sólo por cargas en movimiento, que normalmente van consistir en corrientes eléctricas circulando por conductores.

Las **líneas de inducción magnética** son líneas cerradas que son tangentes en cada uno de sus puntos al vector inducción magnética  $\vec{B}$ . La concentración de líneas de inducción en una zona del espacio es proporcional al valor de la inducción magnética en dicha zona.

Supongamos una zona del espacio donde no hay ningún medio material; es decir, estamos en el vacío. En esta zona existen cargas en movimiento y/o campos eléctricos variables que crean un campo magnético cuya inducción  $\vec{B}$  se puede calcular así:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{6.0}$$

En esta expresión la **excitación magnética o intensidad magnetizante**  $\vec{H}$  es una magnitud que depende del valor de las causas que crean el campo magnético (corrientes y variaciones del campo eléctrico) y de su geometría, es independiente de las características del medio y en el Sistema Internacional se mide en Amperios/metro (A/m). Por otra parte,  $\mu_0$  es la **permeabilidad magnética del vacío**, que en el Sistema Internacional vale  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Henrios/metro (H/m).

Supongamos que ahora esta zona del espacio se rellena con un medio material manteniendo inalterables las causas del campo magnético y, por consiguiente, se conserva el valor de la intensidad magnetizante  $\vec{H}$ . Cada átomo de este medio material tiene electrones que giran sobre

sí mismos y que recorren orbitas cerradas alrededor del núcleo. Estos movimientos de estas partículas cargadas originan efectos magnéticos que inicialmente están distribuidos al azar y se cancelan entre sí. Sin embargo, bajo la acción de un campo magnético externo los movimientos de los electrones se modifican y dan lugar a un efecto magnético resultante no nulo que modifica la inducción magnética  $\vec{B}$  con respecto a la que se obtendría en vacío. Este efecto magnético del medio material se cuantifica mediante la magnitud **magnetización o imanación**  $\vec{M}$  de tal manera que ahora se cumple que

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (6.1)$$

En un medio homogéneo e isótropo se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{M} = X_m \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) &= [\mu_0 (1 + X_m)] \vec{H} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (6.2)$$

En la expresión anterior la **permeabilidad magnética absoluta**  $\mu$  es un parámetro que representa la influencia de las propiedades magnéticas del medio sobre la inducción  $\vec{B}$  y que se puede expresar así:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \cdot \mu_r = \mu_0 \cdot (1 + X_m) \\ \mu_r &= 1 + X_m \end{aligned} \quad (6.3)$$

En estas relaciones  $\mu_r$  es un parámetro adimensional denominado **permeabilidad relativa** y  $X_m$  es otro parámetro adimensional denominado **susceptibilidad magnética** que representa el efecto adicional de los electrones del medio material sobre la inducción magnética  $\vec{B}$

En los medios lineales los parámetros  $\mu$ ,  $\mu_r$  y  $X_m$  son constantes, mientras que en los medios no lineales estos parámetros son funciones de  $\vec{H}$  (y, por consiguiente, de  $\vec{B}$ ).

En situaciones cuando el medio magnético es lineal e isótropo, la magnetización es directamente proporcional a  $\vec{H}$

$$\vec{M} = X_m \vec{H}$$

donde la cantidad adimensional  $X_m$  es la **susceptibilidad magnética**. **Nota** aquí hay una clara analogía con la susceptibilidad eléctrica  $\vec{P} = X^E \vec{E}$ .

Al sustituir esta ecuación en  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$$\begin{aligned} \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - X_m \vec{H} \Rightarrow \\ \vec{B} = \mu_0 (1 + X_m) \vec{H} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{aligned}$$



Con

$$\mu_r = (1 + X_m) = \frac{\mu}{\mu_0}$$

aquí  $\mu_r$  es una cantidad adimensional llamada **permeabilidad relativa del medio** y  $\mu = \mu_r \mu_0$  es la **permeabilidad absoluta**. **Nota** notar la analogía de  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  y  $\mu = \mu_r \mu_0$  con el caso de un dieléctrico  $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$  y  $\epsilon = K \epsilon_0$ .

En general todos los materiales son magnéticos (aunque la mayoría muy débilmente). Para ver el grado de magnetismo de un material es útil analizar los valores de  $X_m$ , que se obtienen de observaciones experimentales. En efecto, al analizar la fórmula  $\vec{B} = \mu_0(1 + X_m)\vec{H}$  vemos que dependiendo del signo de  $X_m$  el campo magnético en el interior de una material puede aumentar o disminuir. La tabla siguiente muestra valores de la susceptibilidad magnética para algunos materiales. Los materiales son clasificados de acuerdo al signo de  $X_m$ . Si  $X_m > 0$  decimos que es un material paramagnético. En cambio si  $X_m < 0$  el material es diamagnético.

**Tabla 13. Susceptibilidad magnética de algunas sustancias paramagnéticas y diamagnéticas a 300 K.**

Substancia paramagnética	$\chi_m$	Substancia diamagnética	$\chi_m$
Aluminio	$2.3 \times 10^{-5}$	Bismuto	$-1.66 \times 10^{-5}$
Calcio	$1.9 \times 10^{-5}$	Cobre	$-9.8 \times 10^{-6}$
Cromo	$2.7 \times 10^{-4}$	Diamante	$-2.2 \times 10^{-5}$
Litio	$2.1 \times 10^{-5}$	Oro	$-3.6 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$	Plomo	$-1.7 \times 10^{-5}$
Niobio	$2.6 \times 10^{-4}$	Mercurio	$-2.9 \times 10^{-5}$
Oxigeno	$2.1 \times 10^{-6}$	Nitrógeno	$-5.0 \times 10^{-9}$
Platino	$2.9 \times 10^{-4}$	Plata	$-2.6 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$6.8 \times 10^{-5}$	Silicio	$-4.2 \times 10^{-6}$

## 6.4 Clasificación Magnética de los Materiales.

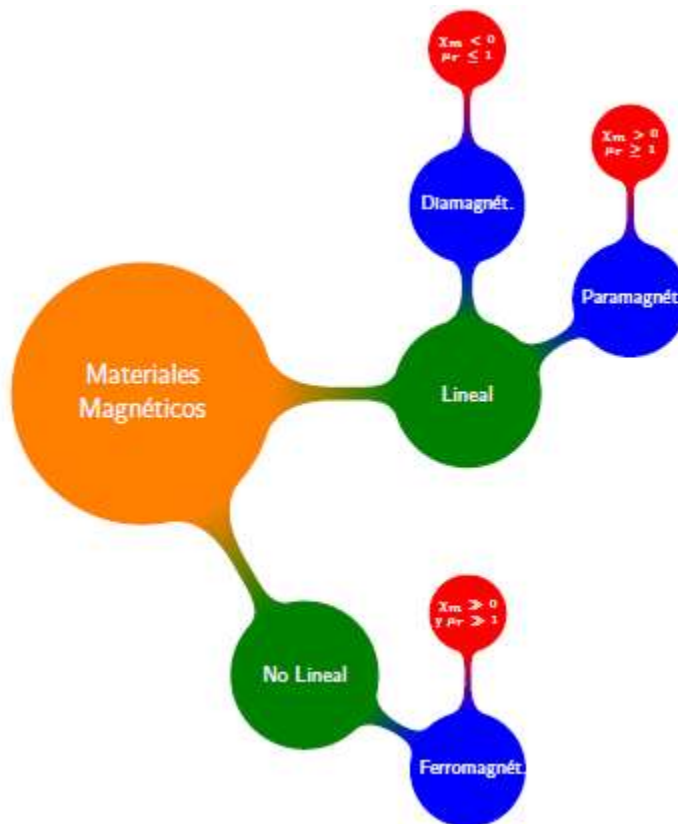
Los materiales se pueden comportar de diferente manera frente a la acción de un campo magnético externo dando lugar a diferentes valores de  $\mu, \mu_r, \gamma$  de  $X_m$ . Esto permite clasificar el comportamiento magnético de los materiales según el valor de estos parámetros. Así, tendremos

materiales diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos (Tabla 14). Los materiales diamagnéticos y paramagnéticos se engloban en la denominación de materiales amagnéticos.

**Tabla 14. Clasificación de los materiales magnéticos**

Tipos de material		$\mu$		$\mu_r$		$\chi_m$
<i>Amagnéticos</i>	<i>Diamagnéticos</i>	$\mu \approx \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu_r \approx 1$	$\mu_r < 1$	del orden de $-10^{-5}$
	<i>Paramagnéticos</i>		$\mu > \mu_0$		$\mu_r > 1$	del orden de $+10^{-3}$
<i>Ferromagnéticos</i>		$\mu \gg \mu_0$		$\mu_r \gg \gg 1$		de valor muy alto (entre $10^3$ y $10^5$ )

Es común realizar la siguiente clasificación de los materiales magnéticos dependiendo del valor  $\mu R$ .

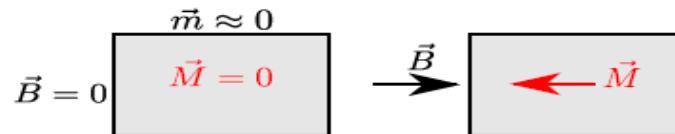


Los más importantes son los ferromagnéticos y en general,  $X_m$  es altamente dependiente de la temperatura ( $\text{alta } T^0 \Rightarrow X_m \text{ disminuye}$ ).

La relación específica entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  depende de  $T^0$  y de la historia, por ello bajo diferentes condiciones  $\mu_r$  puede variar de 50 a 600. Más adelante veremos aplicaciones específicas de estos materiales.

### Materiales diamagnéticos

En los materiales diamagnéticos el valor de  $X_m$  es negativo y el campo magnético se debilita por la presencia del material. Esto se justifica por medio de la figura 219. En ausencia de un campo magnético externo  $\vec{B}$ , tenemos un material con sus dipolos atómicos nulos y por tanto una magnetización total  $\vec{M} = 0$ . Al aplicar un campo magnético externo  $\vec{B}$  el material se magnetiza de tal forma que el vector  $\vec{M}$  se opone a  $\vec{B}$ . Esto es debido a la **ley de Lenz** que veremos más adelante.



**Figura 219. Material diamagnético,  $\vec{M} = 0$ , los momentos magnéticos atómicos son nulos y la aplicación de un campo magnético  $\vec{B}$  induce una magnetización contraria  $\vec{M}$ .**

### Materiales paramagnéticos

El paramagnetismo solo ocurre ante la presencia de un campo magnético externo. En ausencia de un  $\vec{B}$  externo, el momento magnético atómico o molecular es distinto de cero,  $\vec{m} \neq 0$ , pero como estos están orientados aleatoriamente, la magnetización,  $\vec{M}$  es nula. Al aplicar el campo magnético  $\vec{B}$  los dipolos se orientan en favor de  $\vec{B}$  de tal forma que aparece una magnetización  $\vec{M}$  que va en la misma dirección de  $\vec{B}$ . Como consecuencia el campo magnético total se incrementa por la presencia del material (Fig. 220)

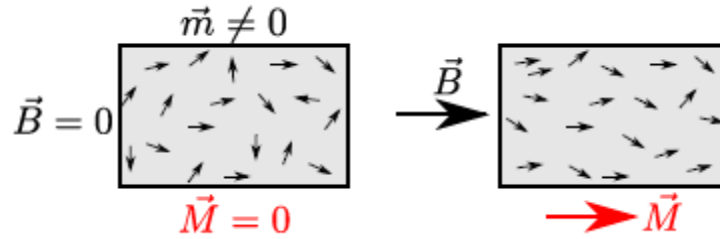


Figura 220. Material paramagnético,  $X_m > 0$ , los  $\vec{m} \neq 0$  pero están orientados aleatoriamente tal que  $\vec{M} = 0$ . La aplicación de  $\vec{B}$  hace que los dipolos atómicos se alineen tal que aparece una magnetización en el mismo sentido que  $\vec{B}$ .

### Materiales ferromagnéticos

Los materiales ferromagnéticos (por ejemplo hierro, níquel y cobalto) son otra clase de material magnético. Como muestra la figura 5.20 el material tiene una magnetización permanente incluso en ausencia de un campo magnético externo. Estos tipos de materiales son no lineales, es decir no están regidos por las ecuaciones  $\vec{M} = X_m \vec{H}$  y  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . Además  $X_m$  es un número muy grande.

El ferromagnetismo puede ser ilustrado con la figura 221 donde se muestran que el material se divide en **dominios magnetizados**, que contienen una gran cantidad de átomos ( $10^{15}$  o  $10^{16}$ ) magnetizados dando como resultado una magnetización neta en esa región, incluso en ausencia de un campo magnético. Cada dominio es separado por una pared de dominio que no está magnetizada.

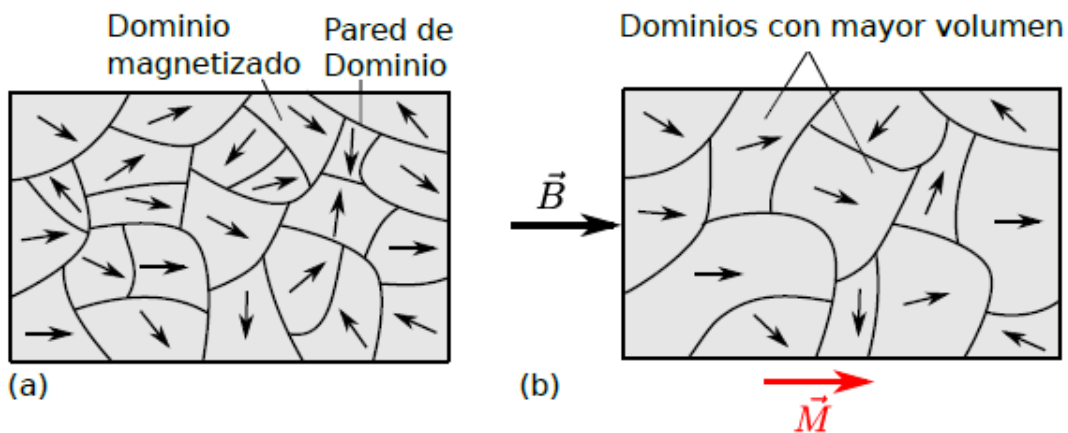


Figura 221: (a) En ausencia de un campo  $\vec{B}$  los momentos magnéticos de dominio tienen una orientación aleatoria. (b) Los dominios alineados con  $\vec{B}$  crecen y como consecuencia aparece un momento magnético neto.

En una muestra no magnetizada, los momentos magnéticos en los dominios están orientados aleatoriamente de tal forma que el momento magnético neto es cero. Cuando la muestra se

coloca en un campo magnético externo, los dominios alineados con el campo magnético aumentan su volumen

## 6.5 Circuitos Magnéticos.

El concepto de circuitos magnéticos se 'basa en la resolución de ciertos problemas de campo magnético mediante el método de circuitos. Los dispositivos magnéticos como toroides, transformadores, motores, generadores y relevadores pueden considerarse circuitos magnéticos. Su análisis se simplifica si se explota una analogía entre circuitos magnéticos y eléctricos. Una vez hecho esto es posible aplicar directamente conceptos de circuitos eléctricos a la resolución de circuitos magnéticos análogos.

La analogía entre circuitos magnéticos y eléctricos se resume en la tabla 15 y se describe gráficamente en la figura 222, las que conviene examinar detenidamente. Para comenzar, en la tabla aparecen dos términos nuevos. La *fuerza magnetomotriz (fm)  $\mathcal{F}$*  (en ampere-vueltas) se define como

$$\mathcal{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

Tabla 15. Analogía entre circuitos eléctricos y magnéticos.

<i>Eléctrico</i>	<i>Magnético</i>
Conductividad $\sigma$	Permeabilidad $\mu$
Intensidad de campo $E$	Intensidad de campo $H$
Corriente $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	Flujo magnético $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Densidad de corriente $J = \frac{I}{S} = \sigma E$	Densidad de flujo $B = \frac{\Psi}{S} = \mu H$
Fuerza electromotriz (fe) $V$	Fuerza magnetomotriz (fm) $\mathcal{F}$
Resistencia $R$	Reluctancia $\mathcal{R}$
Conductancia $G = \frac{1}{R}$	Permeancia $\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}}$
Ley de Ohm $R = \frac{V}{I} = \frac{\ell}{\sigma S}$	Ley de Ohm $\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\Psi} = \frac{\ell}{\mu S}$
o $V = E\ell = IR$	o $\mathcal{F} = H\ell = \Psi\mathcal{R} = NI$
Leyes de Kirchhoff	Leyes de Kirchhoff
$\sum I = 0$	$\sum \Psi = 0$
$\sum V - \sum RI = 0$	$\sum \mathcal{F} - \sum \mathcal{R} \Psi = 0$

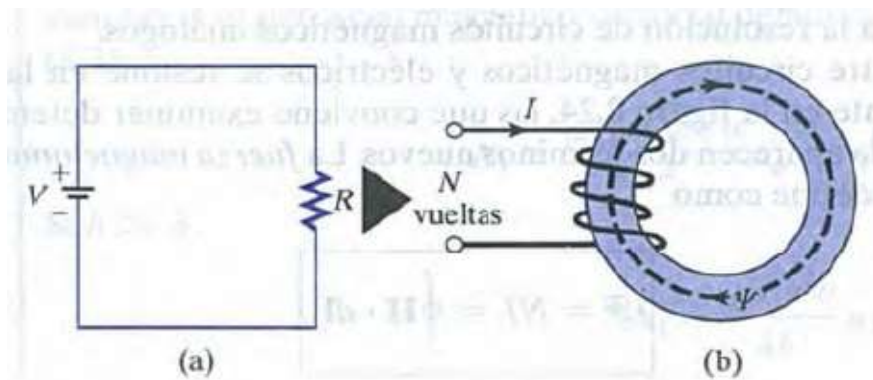
El origen de la fuerza magnetomotriz en circuitos magnéticos suele ser una bobina portadora de corriente como la que aparece en la figura 222. Por su parte, la reluctancia  $\mathfrak{R}$  (en ampere-vueltas/weber) se define como

$$\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu S} \quad (6.4)$$

donde  $\ell$  y  $S$  son la longitud media y el área de la sección transversal del núcleo magnético, respectivamente. El recíproco de la reluctancia es la *permeancia*  $\mathcal{P}$ . La relación básica para elementos de circuitos es la ley de Ohm ( $V = IR$ ):

$$\mathfrak{F} = \psi \mathfrak{R} \quad (6.5)$$

Con base en esto es posible aplicar las leyes de la corriente y el voltaje de Kirchhoff a nodos y espiras de un circuito magnético dado, tal como se hace respecto de un circuito eléctrico. También las reglas de la adición de voltajes y para la combinación de resistencias



**Figura 222. Analogía entre (a) un circuito eléctrico y (b) un circuito magnético.**

en serie y en paralelo son aplicables a la fuerza magnetomotriz y la reluctancia. Así, en el caso de  $n$  elementos en serie de un circuito magnético,

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \dots = \psi_n \quad (6.6)$$

y

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \dots + \mathfrak{F}_n \quad (6.7)$$

En el de  $n$  elementos en paralelo de un circuito magnético,

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_n \quad (6.8)$$

y

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \dots = \mathcal{F}_n \quad (6.9)$$

Señalemos algunas diferencias entre circuitos eléctricos y magnéticos. En contraste con la corriente  $I$  en un circuito eléctrico, el flujo magnético no fluye. Asimismo, en un circuito eléctrico la conductividad  $\sigma$  es independiente de la densidad de corriente  $J$ , mientras que en un circuito magnético la permeabilidad  $\mu$ , varía con la densidad de flujo  $B$ . Ésta es la causa de que en la mayor parte de los dispositivos magnéticos de uso práctico se empleen materiales ferromagnéticos (no lineales). Pese a estas diferencias, el concepto de circuito magnético sirve como un análisis aproximado de dispositivos magnéticos.

Resulta interesante analizar el caso de una bobina; pues, como es sabido, estas poseen un campo magnético constante en su interior (sí y solo sí se considera un largo infinito, o bien, si esta es cerrada). Por ello, si consideramos las distintas permeabilidades de los materiales, se puede llegar a una analogía con los circuitos eléctricos explicados anteriormente.

Primero debemos recordar las relaciones que poseen estos circuitos, como lo son por ejemplo, las leyes de Kirchhoff que dicen:

1.  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ : Al aplicarle el teorema de la divergencia, nos arroja que la integral  $\int \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_i I_i = 0$ . Lo que nos demuestra que toda la corriente que entra a un nodo del circuito, debe salir

2.  $\nabla \times \vec{E} = 0$  Suponiendo que estamos en un circuito electrostático, al aplicarle el teorema de Stokes, no arroja que la integral  $\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \sum_k V_k = 0$  Lo que nos demuestra que toda caída de tensión es igual a la tensión total suministrada. Nótese que esto también es válido para circuitos con corriente alterna, aplicando los conceptos de flujo, a través de la integral del campo magnético.

Dicho esto, podemos destacar las siguientes leyes del magnetismo para entablar una similitud con lo anteriormente mencionado.

Esto es:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

Recordando que estamos en una bobina, notamos que la primera relación se cumple para el flujo magnético ( $\emptyset$ ), mientras que la relación de voltaje se cumple para el factor  $NI$ .

Así, hemos concluido la relación de Kirchhoff para el magnetismo.



Tan sólo falta encajar un término, que resulta de la relación que existe con la permeabilidad propia de cada material. Esto –porque si recordamos – la definición de resistencia (en circuitos eléctricos), esta está dada por:

$$R = \frac{1}{\mathcal{A}g}$$

Destacando que el único factor que la diferencia de los otros materiales, es su propio factor  $g$ . Por ello es que, podemos plantear nuestra relación con la resistencia, a través del factor llamado reluctancia que está definido por:

$$R = \frac{l}{\mathcal{A}\mu}$$

Cabe señalar que para la reluctancia, se cumplen de forma análoga a las resistencias, las leyes de circuitos. Siendo estas:

1. Disposición Paralela:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathcal{R}_i}$$

2. Disposición en Serie:

$$\mathcal{R}_{eq} = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i$$

Un conjunto de líneas de campo magnético que delimitan una superficie cerrada por cuyas paredes laterales no pasa ningún flujo y que por su interior conduce un flujo  $\Phi$  constituyen un circuito magnético. Físicamente un circuito magnético se materializa en una canalización para las líneas de campo realizada íntegramente o en gran medida con material ferromagnético.

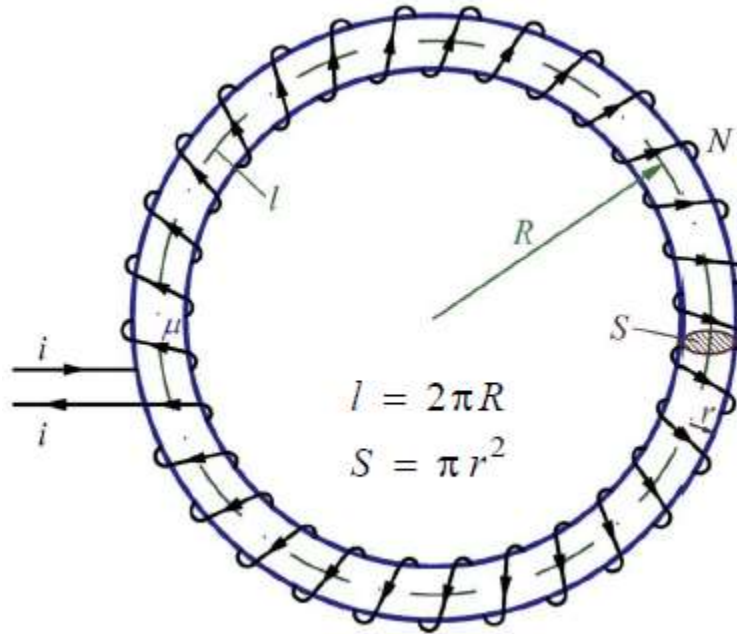


Figura 223 Circuito magnético elemental.

En efecto, la alta permeabilidad  $\mu$  de los materiales ferromagnéticos hace que las líneas de campo circulen preferentemente por dichos materiales y esto permite canalizar el flujo magnético a través de ellos.

En resumen, en el interior de este toro tanto la inducción magnética  $\vec{B}$  como la intensidad magnetizante  $\vec{H}$  tienen el mismo valor en todos sus puntos y ambas tienen dirección tangencial. Aplicando el Teorema de Ampere a lo largo de la línea media  $l$  del toro se deduce que

$$\mathcal{F} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_l H \cdot dl = H \cdot l = N \cdot i \rightarrow H = \frac{N}{l} i \quad (4)$$

(• = Producto escalar de vectores)

Es decir, que el valor  $H$  de la intensidad magnetizante depende linealmente de la corriente  $i$  de la bobina y se puede controlar  $H$  mediante  $i$ .

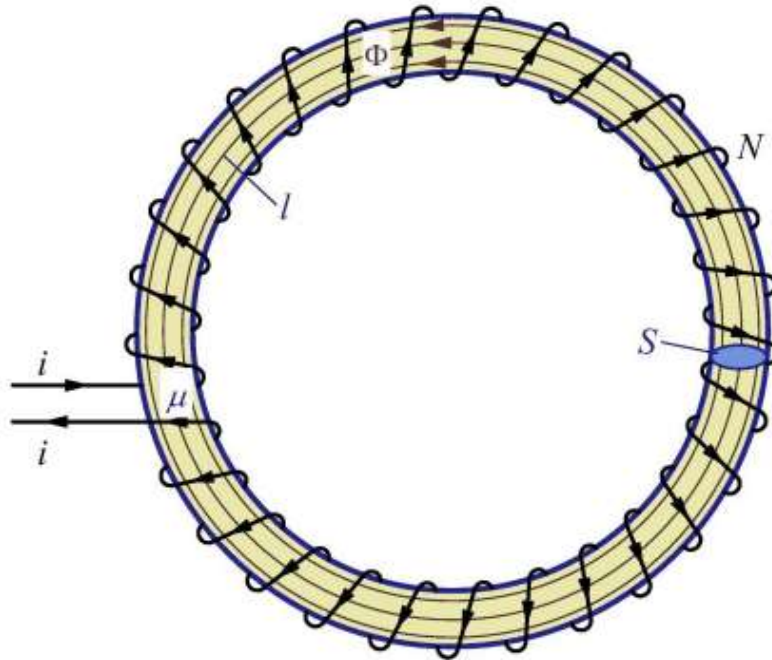


Figura 224. Circuito magnético en forma de toro

Consideremos el circuito magnético en forma de toro, que ya se representó en la Fig. 223, cuyas líneas de campo en su interior son circunferencias concéntricas, como se aprecia en la Fig. 224. Como ya se indicó en el apartado dedicado a la curva de imanación, la inducción  $B$  es prácticamente constante en todos los puntos del toro y está relacionada con la excitación  $H$  por medio de la permeabilidad  $\mu$  (ecuación  $(\vec{B} = \mu\vec{H})$ ). Además, al aplicar el Teorema de Ampere sobre la circunferencia media, cuya longitud es  $l$ , se obtiene la relación (4). A partir de todo esto se deduce que:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B \cdot dS = B \cdot S \rightarrow B = \frac{\Phi}{S}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \rightarrow B = \mu H \rightarrow H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu S}$$

$$\mathcal{F} = N \cdot i = \oint_l H \cdot dl = \oint_l H \cdot dl = H \cdot l = \frac{l}{\mu S} \Phi \rightarrow \mathcal{F} = H \cdot l = \mathcal{R} \cdot \Phi \quad (5a)$$

Por lo tanto, se deduce que en los circuitos magnéticos se cumple la Ley de Hopkinson

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \Phi \quad (5b)$$

Donde  $\mathcal{F}$  es la **fuerza magnetomotriz** (f.m.m.) y  $\mathcal{R}$  es la **reluctancia del circuito magnético**.

Si, como sucede en el toro de las Figs. 223 y 224, el circuito magnético presenta una sección uniforme  $S$ , tiene una longitud media  $l$  y está construido por un material homogéneo de permeabilidad magnética absoluta  $\mu$ , su reluctancia  $\mathcal{R}$  se calcula así

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \quad (6)$$

La fuerza magnetomotriz  $\mathcal{F}$  del circuito magnético de la Fig. 224 vale

$$\mathcal{F} = N \cdot i \quad (7)$$

Donde N es el número de espiras de la bobina e i es la corriente que circula por ella (Figs. 223 y 224).

Se denomina permeancia  $\Lambda$  a la inversa de la reluctancia. Luego, de las expresiones anteriores se deduce que

$$\Lambda = \frac{1}{\mathcal{R}} = \mu \frac{S}{l}$$
$$\mathcal{F} = \frac{\Phi}{\Lambda} \rightarrow \Phi = \mathcal{F} \cdot \Lambda \quad (8)$$

En el Sistema Internacional  $\mathcal{F}$  se mide en Amperios (A) o Amperios-vuelta (Av),  $\Phi$  en Webers (Wb),  $\Lambda$  en Henrios (H) y  $\mathcal{R}$  en *Henrios*<sup>-1</sup> ( $H^{-1}$ ).

El hecho de que la permeabilidad  $\mu$  de los materiales ferromagnéticos no sea constante hace que la reluctancia  $\mathcal{R}$  de las piezas fabricadas con estos materiales tampoco lo sea, sino que dependa del flujo magnético que la atraviesa (y de su historia previa, a no ser que se desprece el fenómeno de la histéresis magnética). Por lo tanto, la aplicación de la Ley de Hopkinson (5b) requiere de un proceso iterativo en el que se parte de un valor supuesto para  $\mu$ , se calcula mediante (6) la reluctancia  $\mathcal{R}$  correspondiente y se determinan el flujo  $\mu$  mediante (5b) y la inducción B por cociente del flujo  $\Phi$  entre la sección S. Seguidamente se obtiene el valor de la permeabilidad  $\mu$  que corresponde a dicha inducción y se vuelve a iniciar el cálculo con este nuevo valor de  $\mu$ . Y así sucesivamente hasta que en un paso de la iteración el valor final y el supuesto inicialmente para  $\mu$  difieran en menos de un error preestablecido.

Si en su recorrido las líneas de campo de un circuito magnético se encuentran con zonas de diferentes propiedades magnéticas y/o geometría (circuito magnético serie), la reluctancia total del circuito magnético se puede descomponer en las reluctancias parciales de estas zonas, de forma que la reluctancia total es igual a la suma de las reluctancias parciales (Fig. 225).

Muchas veces las líneas de inducción cerradas que definen un circuito magnético, el cual encierra un flujo total, se pueden agrupar formando circuitos magnéticos parciales.

Cada uno de estos circuitos parciales tiene un recorrido cerrado, utiliza una parte de las líneas de campo totales y conduce sólo una parte del flujo total, de forma que la suma de los flujos de todos los circuitos magnéticos parciales es igual al flujo total. En este caso los circuitos parciales están en paralelo y la permeancia total es igual a la suma de las permeancias de los circuitos magnéticos parciales (Fig. 226).

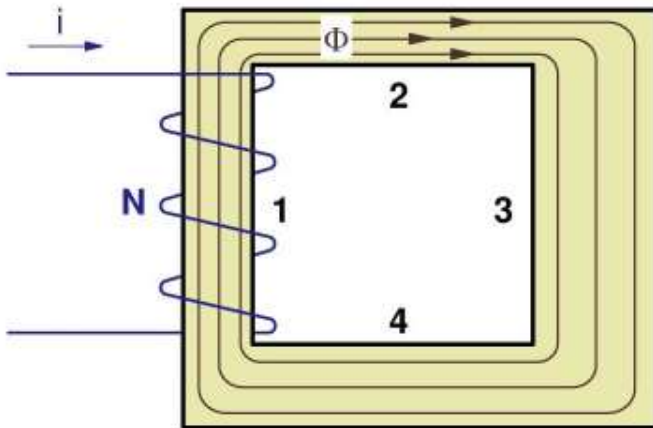


Figura 225. Circuito magnético con una ventana compuesta de cuatro ramas en serie (1,2, 3 y 4).

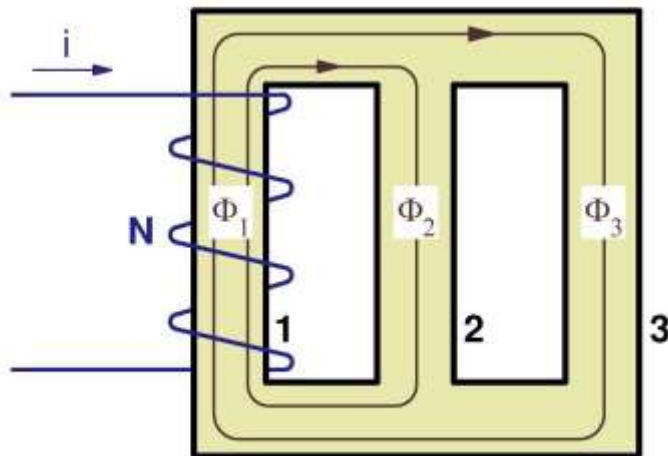


Figura 226. Circuito magnético con dos ventanas. Las ramas 2 y 3 están en paralelo de forma que el flujo de la rama 1 (el flujo total) se descompone en los de las ramas 2 y 3.

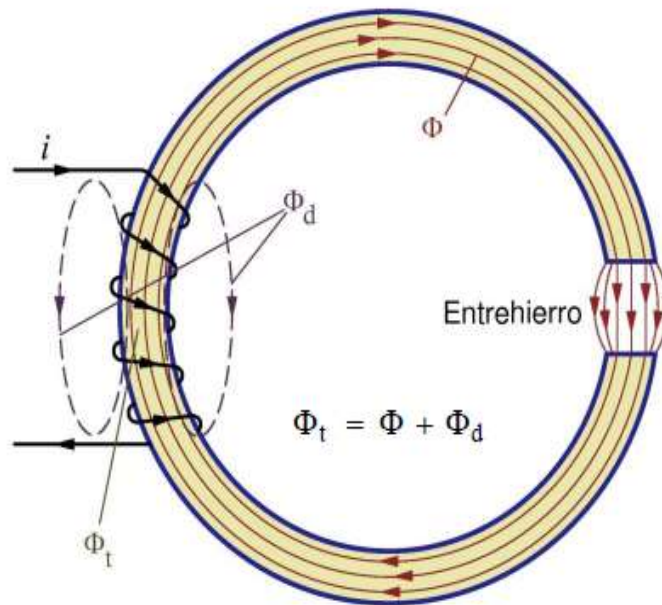


Figura 227. Circuito magnético con un entrehierro en el que se muestra el flujo total  $\Phi_t$ , el flujo útil  $\Phi$  y el flujo de dispersión  $\Phi_d$ .

Aunque la elevada permeabilidad magnética de los materiales ferromagnéticos hace que la mayor parte de las líneas de campo queden conducidas por los circuitos magnéticos realizados con dichos materiales, el aire y, en general, los materiales amagnéticos no actúan de “aislantes magnéticos” y una pequeña parte de las líneas de inducción se “escapan” del circuito magnético y circulan por fuera de él. Por lo tanto, además del flujo útil, que es el que se ha representado en la Fig. 224 y que denominaremos  $\Phi$  (en algunos textos este flujo se representa también por  $\Phi_u$ ), existe un flujo asociado a las líneas de campo que se escapan del circuito magnético, el cual se denomina flujo de dispersión o de fugas  $\Phi_d$  (en muchos textos este flujo se representa también por  $\Phi_\sigma$  o por  $\Phi_l$ ). Estos dos flujos se han representado en la Fig. 227 y, evidentemente, el flujo total  $\Phi_t$  originado por las bobinas del circuito magnético es la suma de ambos:

$$\Phi_t = \Phi + \Phi_d \quad (9)$$

El coeficiente de dispersión o de Hopkinson  $\nu$  es un parámetro que toma valores comprendidos entre 1,1 y 1,3 y que se define mediante esta relación:

$$\nu = \frac{\Phi_t}{\Phi} = \frac{\Phi + \Phi_d}{\Phi} = 1 + \frac{\Phi_d}{\Phi} \quad (10)$$

Como se muestra en la Fig. 7 hay veces que es preciso incluir una pequeña parte de material amagnético dentro de un circuito magnético, la cual se denomina entrehierro. Normalmente los

entrehierros están formados por aire. Las líneas de campo en su paso por un entrehierro sufren una expansión (Fig. 227) que aumenta la sección a través de la cual circula el flujo magnético. En este texto, salvo que se indique lo contrario, se despreciará esta expansión y se supondrá que la sección por la que pasa el flujo en el entrehierro es la misma que en el material ferromagnético.

El circuito magnético de la Fig. 227 es un circuito magnético serie, pues en él están en serie el entrehierro y el resto del circuito que está fabricado con material ferromagnético. Por lo tanto, la reluctancia total del circuito magnético es la suma de las reluctancias del entrehierro y de la parte de material ferromagnético. Dado que la permeabilidad de los materiales ferromagnéticos es mucho mayor que la de los materiales amagnéticos, a poca longitud que tenga el entrehierro (ver la relación (6)) su reluctancia es mucho mayor que la del material ferromagnético y es preponderante. Por este motivo, en una primera aproximación se suele despreciar la reluctancia de las piezas de material ferromagnético y analizar estos circuitos magnéticos empleando solamente la reluctancia de los entrehierros

### CIRCUITOS MAGNÉTICOS ALIMENTADOS CON CORRIENTE ALTERNA

#### Circuito magnético sin pérdidas en el hierro

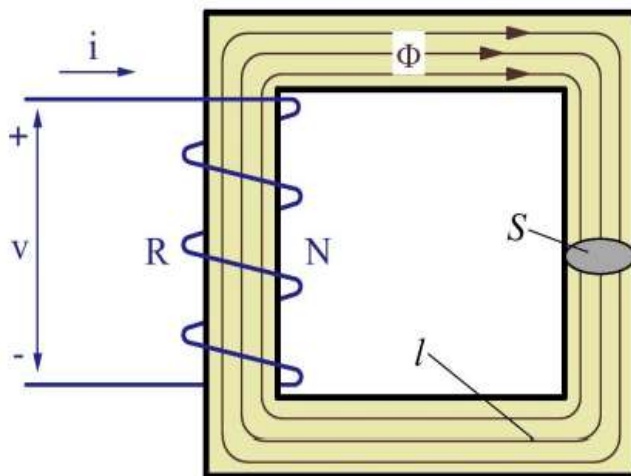


Figura 228. Circuito magnético de sección uniforme y con una sola bobina.

En la Fig. 228 se muestra un circuito magnético homogéneo cuyo núcleo, construido con un material de permeabilidad  $\mu$ , es de sección  $S$  uniforme y su longitud media es  $l$ . Este circuito magnético tiene una sola bobina de  $N$  espiras que presenta una resistencia eléctrica  $R$ . Aceptaremos que este circuito magnético tiene un flujo de dispersión despreciable y sólo tiene el flujo  $\Phi$  que circula por su interior. Por lo tanto, todas las espiras de la bobina abrazan el mismo flujo  $\Phi$  y, consecuentemente, el flujo total concatenado  $\psi$  de esta bobina tiene un valor igual al producto  $N \cdot \Phi$ . La reluctancia  $R$  de este circuito magnético viene dada por la relación (6) y su fuerza magnetomotriz  $\mathfrak{R}$  se obtiene mediante (7).

Si la bobina se alimenta con una tensión continua  $V$ , por ella circulará una corriente continua  $I$ , cuyo valor es independiente de la reluctancia  $\mathfrak{R}$  pues viene dado por la Ley de Ohm:



$$I = \frac{V}{R} \quad (20)$$

El flujo entonces se obtiene de la Ley de Hopkinson (5):

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathfrak{R}} = \frac{N \cdot I}{\mathfrak{R}} = \frac{N}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{V}{R} \quad (21)$$

Luego, cuando un circuito magnético se alimenta con una tensión continua el flujo que va a circular en él dependerá del valor de la resistencia de su bobina y de las propiedades magnéticas del núcleo, mientras que la corriente en la bobina es independiente de las características magnéticas del núcleo magnético.

Ahora el circuito magnético de la Fig. 12 se va a alimentar con una tensión alterna  $v$  que varía con el tiempo  $t$  según esta ley

$$V = \sqrt{2} V \cos \omega t = \sqrt{2} \cos(2\pi f) t \quad (22)$$

Nótese que se está utilizando la nomenclatura habitual de representar con letras minúsculas ( $i$ ,  $v$ ) a los valores instantáneos de las tensiones y corriente alternas, mientras que con mayúsculas ( $I$ ,  $V$ ) se designa a sus valores eficaces. En corriente continua se utilizan letras mayúsculas ya que estas magnitudes son constantes.

La tensión alterna  $v$  (dada por la relación (22)) hace que por la bobina circule una corriente alterna  $i$  que, a su vez, origina un flujo alterno  $\Phi$  el cual, al ser variable en el tiempo, induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) en la bobina que se puede calcular mediante la Ley de Faraday. Luego en la bobina los valores instantáneos de la tensión  $v$  y de la corriente  $i$  están relacionados mediante esta expresión:

$$V = R i + \frac{d\Psi}{dt} = R i + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (23)$$

En la mayor parte de los casos prácticos la caída de tensión en la resistencia  $R$  es despreciable frente a la fuerza electromotriz producida por las variaciones temporales de flujo magnético. En este caso se puede escribir que

$$V = \frac{d\Psi}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \Phi = \frac{\int V dt}{N} \quad (24)$$

Teniendo en cuenta que el valor de  $v$  viene dado por la expresión (22) se llega al siguiente resultado:

$$\Phi = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} V \sin \omega t = \Phi_M \sin \omega t \quad (25)$$

Luego:

$$\Phi_M = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} V = \frac{\sqrt{2}}{N(2\pi f)} V = \frac{1}{4,44 N f} V \quad (26a)$$

$$V = 4,44 N f \Phi_M \quad (26b)$$

En consecuencia, cuando un circuito magnético se alimenta con corriente alterna el flujo depende de la tensión y de la frecuencia, sin que influyan las características magnéticas del núcleo (no interviene la reluctancia  $\mathcal{R}$ ). Sin embargo, dado que el flujo y la corriente se relacionan mediante la ley de Hopkinson (5), para obtener el valor del flujo  $\Phi$ -que, según acabamos de comprobar y como muestra la ecuación (26a), viene impuesto por la tensión y la frecuencia- deberá circular por la bobina una corriente proporcional a la reluctancia  $\mathcal{R}$ . Es decir, el valor de la corriente va a depender de las propiedades magnéticas del circuito; justo al contrario que cuando el circuito magnético está alimentado con una tensión continua.

Las relaciones (22) y (25) muestran que la tensión y el flujo están desfasados  $90^\circ$ . Por otra parte, si suponemos que el circuito magnético no tiene pérdidas en el hierro la corriente  $i$  que circula por la bobina se dedica únicamente a generar el flujo, luego debe estar en fase con él y, además, es proporcional a él (según la Ley de Hopkinson (5)). De esto se deduce que el diagrama fasorial que relaciona estas magnitudes es el representado en la Fig. 229a, donde se aprecia que es similar al de una bobina ideal sin resistencia. Esto indica que el comportamiento de este circuito magnético puede ser representado por el circuito equivalente de la Fig. 229b

La reactancia  $X_\mu$  de la bobina equivalente está relacionada con su inductancia  $L_\mu$  así:

$$X_\mu = 2 \pi f L_\mu \quad (27)$$

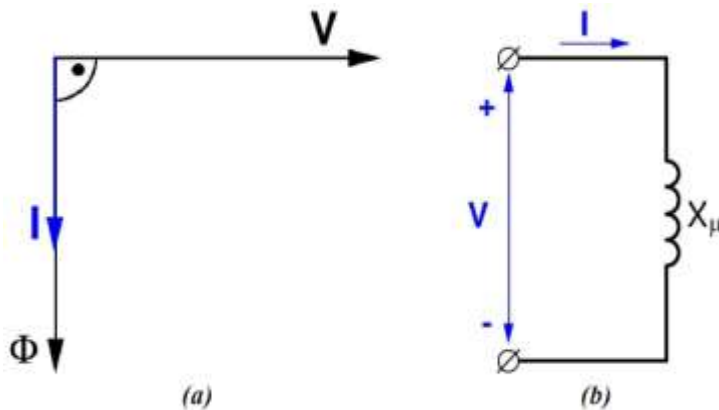


Figura 229. Diagrama fasorial (a) y circuito equivalente (b) de un circuito magnético alimentado con c.a. y sin pérdidas en el hierro

Teniendo en cuenta la Ley de Hopkinson (5), la inductancia  $L_\mu$  se

obtiene de esta manera:

$$L_\mu = \frac{\Psi}{i} = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N \mathcal{F}}{i \mathcal{R}} = \frac{N Ni}{i \mathcal{R}}$$

$$L_\mu = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{\mu N^2 S}{l} \quad (28)$$

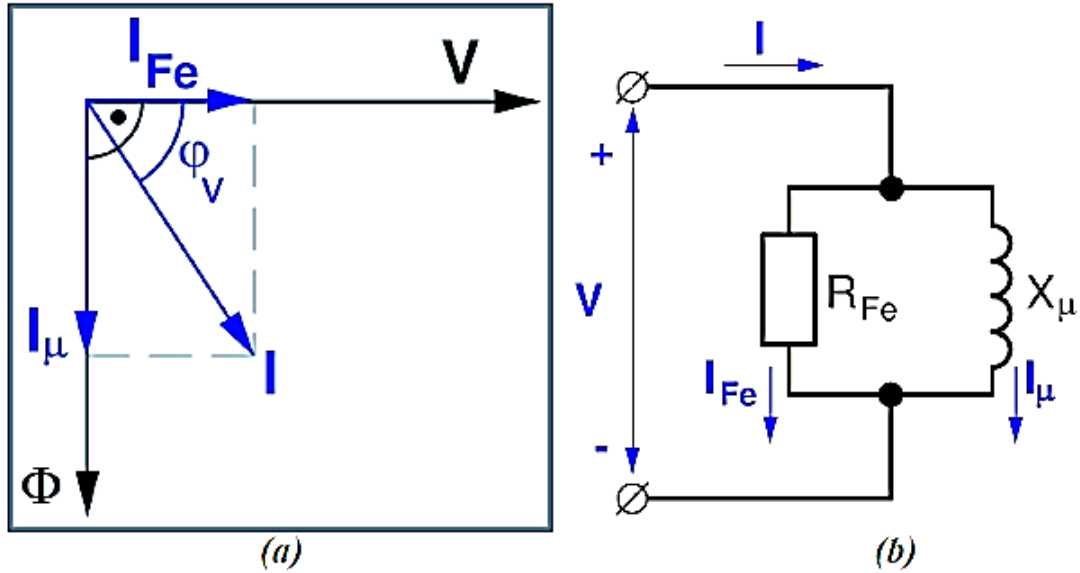


Figura 230. Figura 14 Diagrama fasorial (a) y circuito equivalente (b) de un circuito magnético alimentado con c.a. y con pérdidas en el hierro

Supongamos ahora que la bobina sigue teniendo una resistencia  $R$  pequeña, pero que las pérdidas en el hierro  $P_{Fe}$  ya no son despreciables. Estas pérdidas, que se producen en el núcleo magnético debidas a la histéresis y a las corrientes de Foucault, exigen que por la bobina se consuma una potencia activa para que luego esta potencia se pueda transformar en dichas pérdidas. Por lo tanto, la corriente tiene que estar desfasada con respecto a la tensión un ángulo  $\omega_V$  inferior a  $90^\circ$  (Fig. 230a) de tal manera que suceda lo siguiente:

$$P_{Fe} = V \cdot I \cdot \cos \omega_V \quad (29)$$

Esto permite dividir la corriente en dos componentes perpendiculares entre sí (Fig. 230a):

$$\begin{aligned} I_{Fe} &= I \cos \omega_V \\ I_{\mu} &= I \sin \omega_V \end{aligned} \quad (30)$$

Una de estas componentes es la corriente magnetizante  $I_{\mu}$  que es la que genera el flujo y, por consiguiente, es paralela a éste y sólo consume potencia reactiva. La otra componente es la corriente de pérdidas en el hierro  $I_{Fe}$  que es paralela a la tensión, por lo que sólo consume potencia activa, potencia que tiene que tener un valor igual a  $P_{Fe}$ . De todo esto se deduce que el circuito equivalente de un circuito magnético alimentado con corriente alterna y con pérdidas en el hierro es el representado en la Fig. 230b. En él aparecen la reactancia magnetizante  $X_{\mu}$ , que se calcula como se indicó en el apartado anterior (ecuaciones (27) y (28)), y la resistencia de pérdidas en el hierro  $R_{Fe}$ . Aplicando la Ley de Ohm a las dos ramas del circuito equivalente de la Fig. 14b se deducen estas fórmulas:

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}}$$

$$X_{\mu} = \frac{V}{I_{\mu}} \tag{31}$$

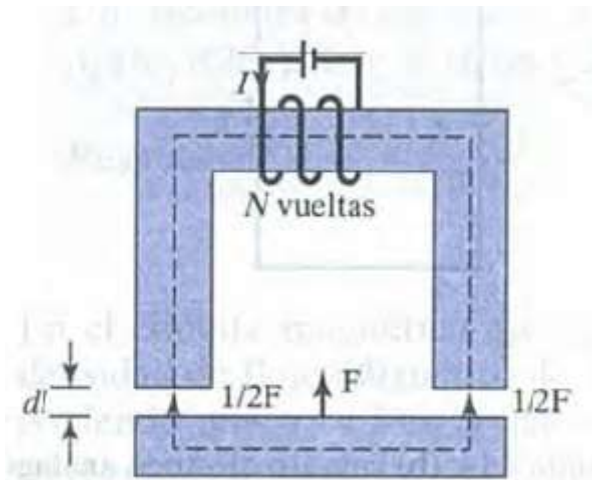
Combinando las expresiones (29), (30) y (31) se consigue llegar finalmente la siguiente relación

$$P_{Fe} = V I_{Fe} = V \frac{V}{R_{Fe}} = \frac{V^2}{R_{Fe}}$$

$$R_{Fe} = \frac{V^2}{P_{Fe}} \tag{32}$$

**Fuerza sobre materiales magnéticos.**

Es de interés práctico determinar la fuerza que un campo magnético ejerce sobre una pieza de material magnético situada en ese campo. Esto es útil en sistemas electromecánicos como electroimanes, relevadores, máquinas giratorias y suspensión magnética. Considérese, por ejemplo, un electroimán de hierro de permeabilidad relativa constante como el que se muestra en la figura 231. La bobina tiene N vueltas y porta una corriente I. Si se ignora el efecto de borde, el campo magnético en el entrehierro es el mismo que en el hierro ( $B_{1n} = B_{2n}$ ). Para hallar la fuerza entre las dos piezas de hierro se calcula el cambio que resultaría en la energía total si ambas piezas del circuito magnético estuvieran separadas por un desplazamiento diferencial  $d\ell$ . El trabajo requerido para efectuar



**Figura 231 Electroimán.**

tal desplazamiento es igual al cambio en la energía almacenada en el entrehierro (suponiendo una corriente constante); es decir,

$$-F dl = dW_m = 2 \left[ \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} S dl \right] \tag{8.74}$$

donde  $S$  es el área de la sección transversal del entrehierro, el factor 2 da cuenta de las dos entrehierros y el signo negativo indica que la fuerza actúa para reducir el entrehierro (o que se trata de una fuerza de atracción). Así,

$$F = -2 \left( \frac{B^2 S}{2\mu_0} \right) \quad (8.75)$$

Cabe señalar que en este caso se ejerce fuerza sobre la pieza inferior, no sobre la pieza superior portadora de corriente que da origen al campo. La fuerza de tracción a través de un entrehierro simple puede obtenerse de la ecuación (8.75), de esta manera:

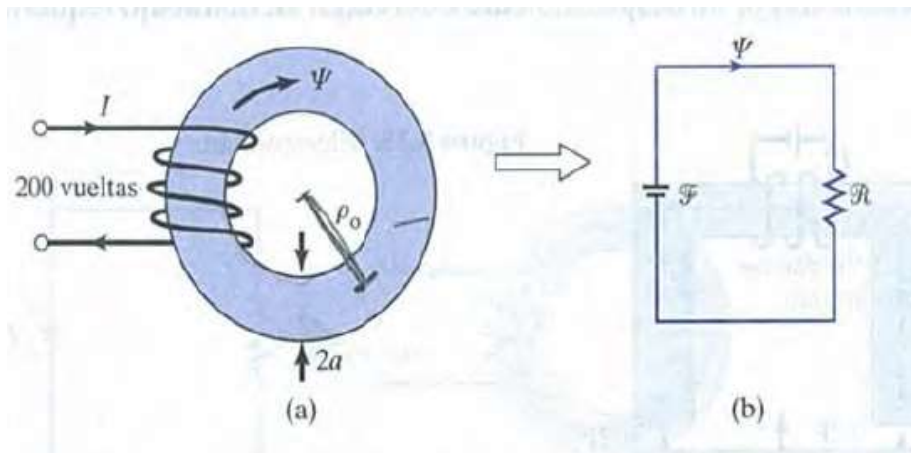
$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad (8.76)$$

Adviértase la semejanza entre la ecuación (8.76) y la deducida en el ejemplo 5.8 para el caso electrostático. La ecuación (8.76) puede usarse para calcular la fuerza en muchos tipos de dispositivos, entre ellos relevadores máquinas giratorias y suspensión magnética. La presión de tracción (en  $N/m^2$ ) en una superficie magnetizada es

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} BH \quad (8.77)$$

equivalente a la densidad de energía  $W_m$ , en el entrehierro.

**Ejemplo 8.14.** El núcleo toroidal que se presenta en la figura 8.26(a) tiene  $p_0 = 10$  cm y sección transversal circular con  $a = 1$  cm. Si el núcleo es de acero ( $\mu_r = 1000 \mu_0$ ) y cuenta con una bobina con 200 vueltas, calcule el monto de corriente que un flujo de 0.5 m Wb producirá en el núcleo.



**Figura 232. (a) Núcleo toroidal para el ejemplo 8.14 (b) circuito electrónico análogo.**

**Solución:**

Este problema puede resolverse de dos formas: con el método de campo magnético (procedimiento directo) o mediante analogía con un circuito eléctrico (procedimiento indirecto).

**Método 1.** Puesto que el valor de  $\rho_0$  es elevado en comparación con el de  $a$ , a partir del ejemplo 7.6,

$$B = \frac{\mu NI}{e} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi \rho_0}$$

$$\Psi = BS = \frac{\mu_0 \mu_r NI \pi a^2}{2\pi \rho_0}$$

$$I = \frac{2\rho_0 \Psi}{\mu_0 \mu_r N a^2} = \frac{2(10 \times 10^{-2})(0.5 \times 10^{-3})}{4\pi \times 10^{-7}(1000)(200)(1 \times 10^{-4})} = \frac{100}{8\pi} = 3.979 \text{ A}$$

**Método 2.** El núcleo toroidal de la figura 232(a) es análogo al circuito eléctrico de la figura 232(b). Con base en el circuito y la tabla 8.4

$$\mathcal{F} = NI = \Psi \mathcal{R} = \Psi \frac{\ell}{\mu S} = \Psi \frac{2\pi \rho_0}{\mu_0 \mu_r \pi a^2}$$

$$I = \frac{2\rho_0 \Psi}{\mu_0 \mu_r N a^2} = 3.979 \text{ A}$$

como se obtuvo anteriormente.

**Ejercicio 8.14**

Un conductor de radio  $a$  se dobla para formar una espira circular de radio medio  $\rho_0$  (fig. 232a). Si  $\rho_0 = 10 \text{ cm}$  y  $2a = 1 \text{ cm}$ ., calcule la inductancia interna de la espira.

**Respuesta:** 31.42 nH.

**Ejemplo 8.15** En el circuito magnético que aparece en la figura 233, calcule la corriente que una densidad de flujo magnético de  $1.5 \text{ Wb/m}^2$  en el entrehierro producirá en la bobina, suponiendo que  $\mu = 50\mu_0$  y que todas las ramas comparten una misma área de sección transversal de  $10 \text{ cm}^2$ .

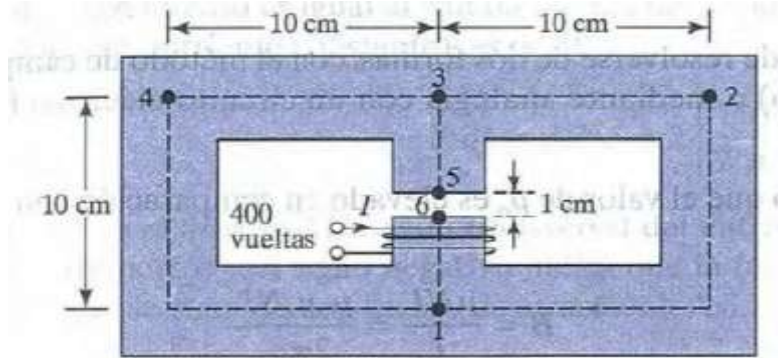


Figura 233. Circuito magnético para el ejemplo 8.15.

**Solución:**

El circuito magnético de la figura 233 es análogo al circuito eléctrico de la figura 234. En la figura  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$  son las reluctancias en las trayectorias 143, 123, 35 y 16, 56 (entrehierro), respectivamente. Así,

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{30 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})} = \frac{3 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{9 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(50)(10 \times 10^{-4})} = \frac{0.9 \times 10^8}{20\pi}$$

$$\mathcal{R}_a = \frac{1 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(1)(10 \times 10^{-4})} = \frac{5 \times 10^8}{20\pi}$$

Al combinar  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_3$  como resistores en paralelo

$$\mathcal{R}_{1,2} = \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{R}_1}{2} = \frac{1.5 \times 10^8}{20\pi}$$

La reluctancia total es

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_a + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_{1,2} = \frac{7.4 \times 10^8}{20\pi}$$



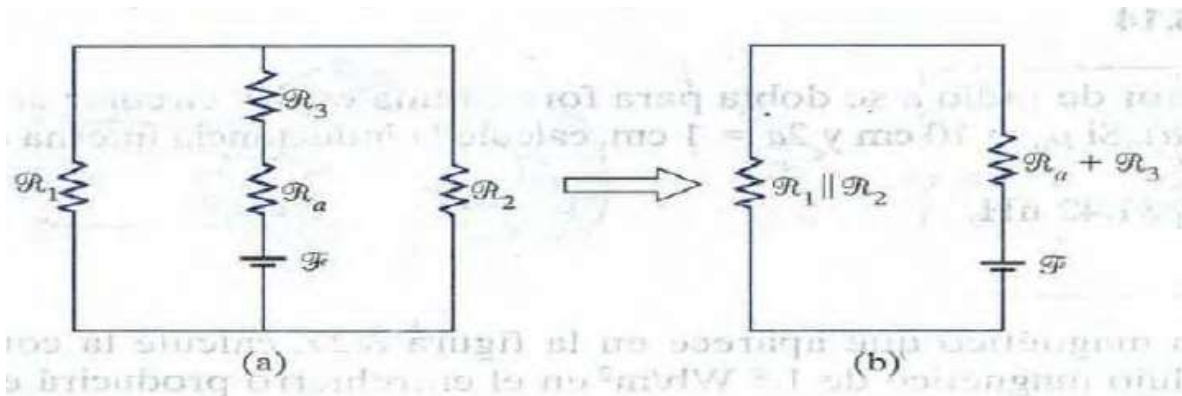


Figura 234. Circuito eléctrico análogo al circuito magnético de la figura 233

La fuerza magnetomotriz es

$$\mathcal{F} = NI = \Psi_a R_T$$

Pero  $\Psi_a = \Psi = B_a S$ . Por consiguiente

$$I = \frac{B_a S \mathcal{R}_T}{N} = \frac{1.5 \times 10 \times 10^4 \times 7.4 \times 10^8}{400 \times 20\pi} = 44.16$$

### Ejercicio 8.15

El toroide de la figura 8.26(a) tiene una bobina de 1000 vueltas en torno a su núcleo. Si  $\rho_0 = 10$  cm y  $a = 1$  cm, ¿qué corriente se requiere para establecer un flujo magnético de 0.5 mWb

a) Si el núcleo es no magnético?

b) Si el núcleo es de  $\mu = 500$ ?

**Respuestas:** a) 795.8 y b) 1.592 A.

**Ejemplo 8.16.** Un electroimán en forma de U como el que se muestra en la figura 235 está diseñado para levantar una masa de 400 kg (incluida la del contacto). La horquilla de hierro ( $\mu_r = 3000$ ) tiene una sección transversal de  $40 \text{ cm}^2$  y longitud media de 50 cm, y los entrehierros 0.1 mm de largo cada uno. Ignore la reluctancia del contacto y calcule el número de vueltas en la bobina cuando la corriente de excitación es de 1 A.

Solución:

La fuerza de tracción en uno y otro de los dos entrehierros debe equilibrar el peso. Por tanto,

$$F = 2 \frac{(B_a^2 S)}{2\mu_0} = mg$$

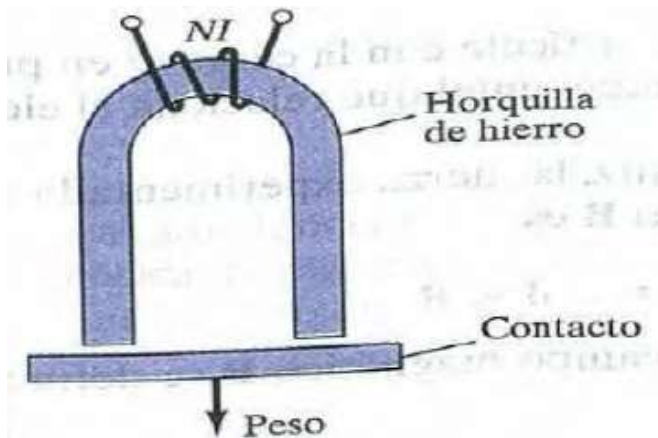


Figura 235. Electroimán en forma de U; para el ejemplo 8.16.

$$B_a^2 = \frac{mg\mu_0}{S} = \frac{400 \times 9.8 \times 4\pi \times 10^{-7}}{40 \times 10^{-4}}$$

$$B_a = 1.11 \text{ Wb/m}^2$$

Pero

$$\mathcal{F} = NI = \Psi(\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i)$$

$$\mathcal{R}_a = \frac{\ell_a}{\mu S} = \frac{2 \times 0.1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{6 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{50 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 3000 \times 40 \times 10^{-4}} = \frac{5 \times 10^6}{48\pi}$$

$$\mathcal{F}_a = \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_i} \mathcal{F} = \frac{6}{6 + 5} NI = \frac{6}{11} NI$$

Puesto que

$$\mathcal{F}_a = H_a \ell_a = \frac{B_a \ell_a}{\mu_0}$$

$$N = \frac{11 B_a \ell_a}{6 \mu_0 I} = \frac{11 \times 1.11 \times 0.1 \times 10^{-3}}{6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}$$

$$N = 162$$

**Ejercicio 8.16**

Halle la fuerza sobre el entrehierro del circuito magnético descrito en el ejemplo 8.15.

**Respuesta:** 895.2 N

**Resumen**

1. La ecuación de la fuerza Lorentz

$$F = Q(E + u \times B) = m \frac{du}{dt}$$

relaciona la fuerza que actúa sobre una partícula con la carga  $Q$  en presencia de campos electromagnéticos. Expresa la ley: fundamental que relaciona al electromagnetismo con la mecánica.

2. Con base en la ley de la fuerza de Lorentz, la fuerza experimentada por un elemento de corriente  $I dl$  en un campo magnético  $B$  es

$$dF = Idl \times B$$

Con fundamento en esta expresión, el campo magnético  $B$  se define como la fue por unidad de elemento de corriente.

3. El torque sobre una espira de corriente con momento magnético  $\mathbf{m}$  en un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  es

$$T = m \times B = ISa_n \times B$$

4. Un dipolo magnético es una barra imantada o una pequeña espira filamentosa de corriente; debe su nombre al hecho de que las líneas de su campo  $\mathbf{B}$  son similares a las líneas del campo  $E$  de un di polo eléctrico.

5. Un material se magnetiza al ser sometido a un campo magnético. La magnetización  $\mathbf{M}$  es el momento magnético dipolar por unidad de volumen del material. En el caso de materiales lineales,

$$M = X_m H$$

donde  $X_m$  es la susceptibilidad magnética del material.

6. De acuerdo con sus propiedades magnéticas, los materiales son lineales (diamagnéticos o paramagnéticos) o no lineales (ferromagnéticos). En cuanto a los materiales lineales,

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 (1 + X_m) H = \mu_0 (H + M)$$

Donde  $\mu$  = permeabilidad y  $\mu_r = \mu/\mu_0$  = permeabilidad relativa del material. En cuanto a los materiales no lineales,  $B = \mu(H)$ , lo cual significa que  $\mu$ . no tiene un valor fijo; la relación entre  $B$  y  $H$  suele representarse mediante una curva de magnetización

7. Las condiciones en la frontera que **H** o **B** deben satisfacer en la interfaz entre dos medios diferentes son

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$(H_1 - H_2) \times a_{n12} = K \quad \text{o} \quad H_{1t} = H_{2t} \quad \text{si } K = 0$$

donde  $a_{n12}$  es un vector unitario dirigido del medio 1 al medio 2.

8. La energía en un campo magnetostático está dada por

$$W_m = \frac{1}{2} \int B \cdot H \, dv$$

En el caso de un inductor portador de corriente  $I$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Así, la inductancia  $L$  puede hallarse mediante

$$L = \frac{\int B \cdot H \, dv}{I^2}$$

9. La inductancia  $L$  de un inductor también puede determinarse a partir de su definición básica: la razón del eslabonamiento de flujo magnético a la corriente a través del inductor; esto es,

$$L = \frac{\lambda}{I} = \frac{N\Psi}{I}$$

Así, suponiendo una corriente  $I$ , se determinan  $B$  y  $\Psi = \int B \cdot dS$  y se halla finalmente  $L = N\Psi/I$ .

10. Un circuito magnético puede analizarse de la misma manera que un circuito eléctrico. Sencillamente, téngase en cuenta la semejanza entre

$$\mathcal{F} = NI = \oint H \cdot dl = \Psi \mathcal{R} \quad \text{y} \quad V = IR$$

es decir,

$$\mathcal{F} \leftrightarrow V, \Psi \leftrightarrow I, \mathcal{R} \leftrightarrow R$$

Por tanto, las leyes de Ohm y Kirchhoff se aplican a circuitos magnéticos tanto como a eléctricos.

11. La presión magnética (o fuerza por unidad de-área de una superficie) sobre una pieza de material magnético es

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{2} BH = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

donde  $B$  es el campo magnético en la superficie del material.

### Preguntas de repaso

6.7. ¿Cuáles de los enunciados siguientes acerca de la fuerza eléctrica  $F_e$ , y la fuerza magnética  $F_m$ , sobre una partícula cargada no son ciertos?

- a)  $F_e$  y  $F_m$  son paralelas entre sí, mientras que  $B$  y  $F_m$  son perpendiculares entre sí.
- b) Tanto  $F_e$ , como  $F_m$  dependen de la velocidad de la partícula cargada.
- c) Tanto  $F_e$ , como  $F_m$  pueden realizar trabajo.
- d) Tanto  $F_e$ , como  $F_m$  son producidas cuando una partícula cargada se mueve a una velocidad constante.
- e) La magnitud de  $F_m$  suele ser reducida en comparación con la de  $F_e$ .
- f)  $F_e$  es una fuerza de aceleración, en tanto que  $F_m$  es exclusivamente una fuerza de desviación.

6.2. Dos alambres paralelos angostos portan corrientes en la misma dirección. La fuerza experimentada por uno debida al otro es:

- a) Paralela a las líneas
- b) Perpendicular a las líneas de atracción.
- c) Perpendicular a las líneas y de repulsión.
- d) Cero.

6.3 La fuerza sobre la longitud diferencial  $dl$  en el punto  $P$  en la espira conductora circular que aparece en la figura 236 es:

- a) De dirección hacia fuera a lo largo de  $OP$ .
- b) De dirección hacia dentro a lo largo de  $OP$ .

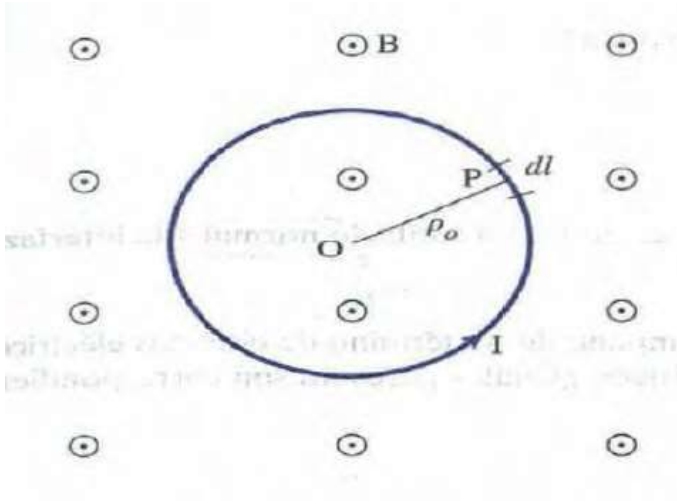


Figura 236. Para las preguntas de repaso 6.3 y 6.4.

c) En la dirección del campo magnético.

d) Tangencial a la espira en P.

6.4. La fuerza resultante sobre la espira circular de la figura 236 tiene una magnitud de

a)  $2\pi\rho_0 IB$

b)  $\pi\rho_0^2 IB$

c)  $2\rho_0 IB$

d) Cero

6.5 ¿Cuál es la unidad de la carga magnética?

a) Ampere-metro cuadrado.

b) Coulomb.

c) Ampere.

d) Ampere-metro.

6.6. ¿Cuál de los materiales siguientes requiere el menor valor de intensidad de campo magnético para magnetizarse?

a) Níquel.

b) Plata.

c) Tungsteno.

d) Cloruro de sodio.

6.7. Identifique e l enunciado que no es cierto con relación a materiales ferromagnéticos.

- a) Su valor de  $X_m$  es alto.
- b) Tienen un valor fijo de  $\mu_r$
- c) La pérdida de energía es proporcional en ellos a l área de la espira de histéresis.
- d) Pierden su propiedad de no linealidad por encima de la temperatura curie.

6.8. ¿Cuál de las fórmulas siguientes es errónea?

- a)  $B_{1n} = B_{2n}$
- b)  $B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2r}^2}$
- c)  $H_1 = H_{1n} + H_{1t}$
- d)  $a_{n21} \times (H_1 - H_2) = K$ , donde  $a_{n21}$  es un vector unitario normal a la interfaz y dirigido de la región 2 a la región 1.

6.9. Cada uno de los pares siguientes se compone de un término de circuitos eléctricos y e l correspondiente término de circuitos magnéticos. ¿Cuáles pares no son correspondientes?

- a)  $V$  y  $\mathcal{F}$
- b)  $G$  y  $\mathcal{P}$
- c)  $\mathcal{E}$  y  $\mu$
- d)  $IR$  y  $H\mathcal{R}$
- e)  $\sum I = 0$  y  $\sum \Psi = 0$

6.10. Una bobina de varias capas con 2000 vueltas de alambre muy delgado tiene 20 mm de largo y un grosor de devanado de 5 mm. Si porta una corriente de 5 mA, genera una fuerza magnetomotriz de

- a) 10 A-t
- b) 500 A-t
- c) 2 000 A-t
- d) Ninguna de las anteriores

Respuestas: 6.1 b, c, 6.2 b, 6.3 a, 6.4 d, 6.5d, 6.6 a, 6.7b, 6.8c, 6.9c, d, 6.10 a.



**PROBLEMAS PARA RESOLVER**

6.1 Un electrón con velocidad  $u = (3a_x + 12a_y - 4a_z) \times 10^5$  m/s no experimenta ninguna fuerza neta en cierto punto de un campo magnético  $B = 10a_x + 20a_y + 30a_z$  mW/m<sup>2</sup>. Halle B en ese punto.

6.2 Una partícula cargada de 1 kg de masa y carga de 2 C se pone en movimiento en el origen a una velocidad de  $10a_z$  m/s en un campo magnético  $B = 1a_x$  Wb/m<sup>2</sup>. Encuentre su ubicación y energía cinética en  $t = 2$  s.

6.3 Una partícula con 1 kg de masa y carga de 2 C se pone en movimiento, a partir de un estado de reposo, en el punto (2, 3, -4) en una región en la que  $E = 4a_y$  -V/m y  $B = 5a_x$  Wb/m<sup>2</sup>. Calcule

- a) La ubicación de la partícula en  $t = 1$  s.
- b) Su velocidad y energía cinética en esa ubicación.

6.4 Una carga de -2 mC se pone en movimiento en el punto (0, 1, 2) a una velocidad de  $5a_x$  m/s en un campo magnético  $B = 6a_y$  Wb/m<sup>2</sup>. Determine la posición y velocidad de la partícula 10 s después suponiendo que la masa de la carga es de 1 gramo. Describa el movimiento de la carga.

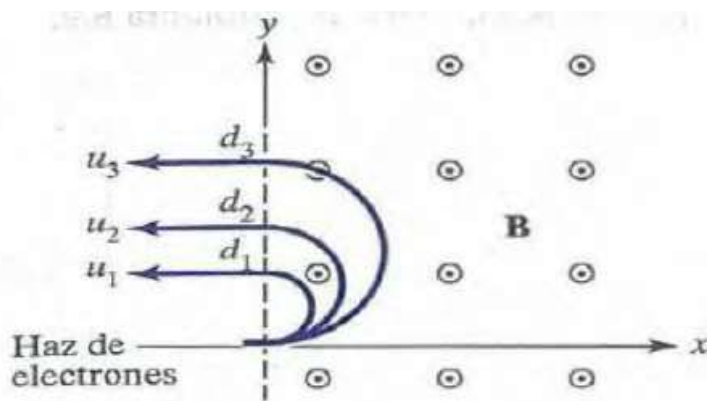


Figura 237. Para el problema 6.5.

\*6.5. Tras inyectar un haz de electrones en forma normal al contorno del plano de un campo uniforme  $B_0a_z$ , es posible dispersarlos según su velocidad, como se observa en la figura 237.

- a) Demuestre que los electrones serían expulsados del campo en trayectorias paralelas al haz de entrada, como se muestra en la figura.
- b) Deduzca una expresión para la distancia de salida  $d$  sobre el punto de entrada.

6.6 Dado que  $B = 6xa_x - 9ya_y + 3za_z$  Wb/m<sup>2</sup>, halle la fuerza total experimentada por la espira rectangular (en el plano  $z = 0$ ) que aparece en la figura 238..

6.7 Un. Elemento de corriente de 2 cm de longitud se localiza en el origen en el vacío y porta una corriente de 12 mA a lo largo de  $a_x$ . Una corriente filamentososa de  $15a_z$ . A se localiza a su vez a lo largo de  $x = 3, y = 4$ . Halle la fuerza sobre el filamento de corriente.

\*6.8. Tres líneas infinitas  $L_1, L_2$  y  $L_3$  definidas por  $x = 0, y = 0$ ;  $x = 0, y = 4$ , y  $x = 3, y = 4$ , respectivamente, portan corrientes filamentosas de -100 A, 200 A y 300 A a lo largo de  $a_z$ . Halle la fuerza por unidad de longitud sobre

a)  $L_2$  debida a  $L_1$ .

b)  $L_1$  debida a  $L_2$ .

c)  $L_3$  debida a  $L_1$ .

d)  $L_3$  debida a  $L_1$  y  $L_2$  Indique en cada caso si se trata de una fuerza de repulsión o atracción.

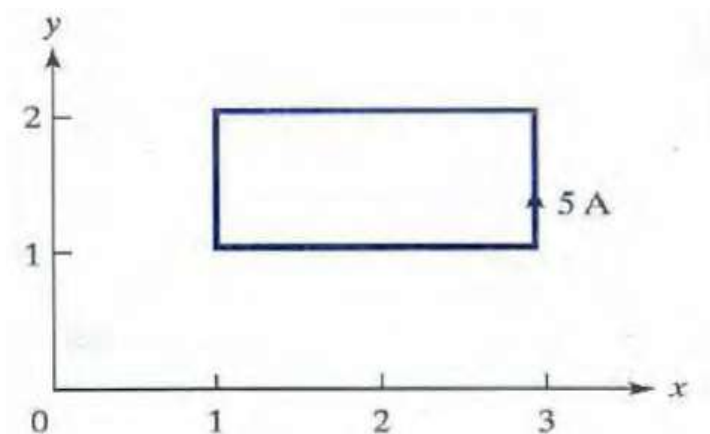


Figura 238. Para el problema 6.6.

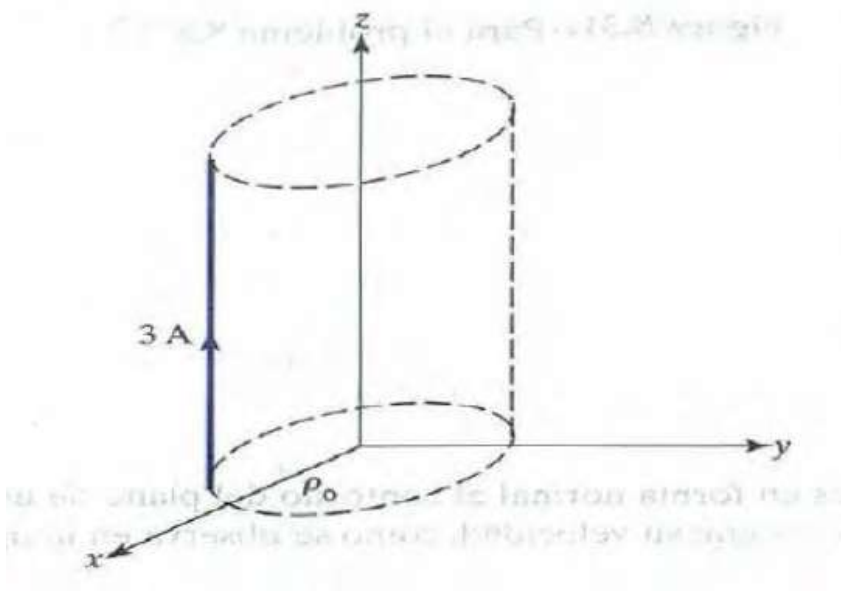


Figura 239. Para el problema 6.9.

6.9. Un conductor de 2 m de largo que porta 3 A se coloca en paralelo a l eje z a una distancia de  $\rho_0 \rho_0 = 10 \text{ cm}$ , como se muestra en la figura 239. Si el campo en la región es  $(\phi/3) a_\rho \text{ Wb/m}^2$  ¿cuánto trabajo se requiere para que el conductor dé una vuelta alrededor del eje z?

\*6.10. Una espira conductora triangular portadora de una corriente de 2 A se sitúa cerca de un conductor recto de longitud infinita con una corriente de 5 A, como se ilustra en la figura 240. Calcule a) la fuerza sobre el lado 1 de la e espira triangular y b) la fuerza total sobre la espira.

6.11. Una línea de transmisión trifásica se compone de tres conductores sostenidos en los puntos A, B y C para formar un triángulo equilátero como el que aparece en la figura 241. En cierto instante, tanto el conductor A como el conductor B portan una c corriente de 75 A, mientras que e l conductor C porta una corriente de r e torno de 150 A. Halle la fuerza por metro sobre el conductor C en ese instante.

\*6.12. Un tubo de longitud infinita de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  es de un material conductor magnético, porta una corriente total  $I$  y e está colocado a lo largo del eje z. Si se halla expuesto a un campo magnético constante  $B_0 a_\rho$ , determine la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre él.

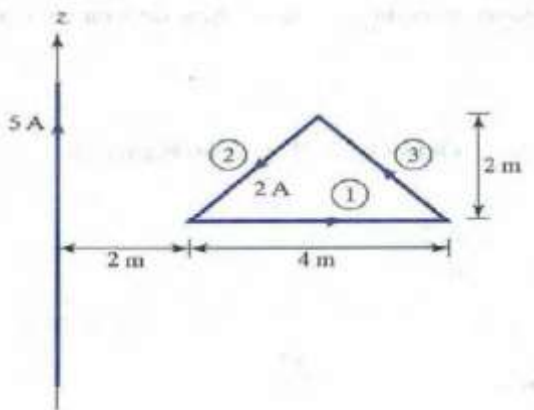


Figura 240. Para el problema 6.10

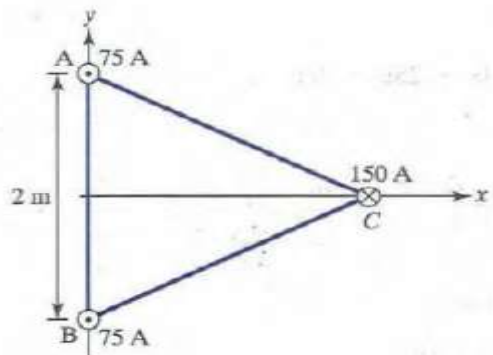


Figura 241. Para el problema 6.11

\*6.13 Un conductor de longitud infinita está incrustado en una masa de hierro ( $\mu_r = 2000\mu_0$ ), de la que está aislado, como se muestra en la figura 242. Con base en la teoría de las imágenes, estime la densidad de flujo magnético en el punto  $P$ .

6.14. Un galvanómetro dispone de una bobina rectangular de 10 por 30 mm por lado que gira en torno al centro del lado más corto. Montada en un campo magnético radial, en su plano actúa un campo magnético constante de  $0.4 \text{ Wb/m}^2$ . Si cuenta con 1000 vueltas y porta una corriente de 2 mA, halle el torque que experimenta.

6.15. Un pequeño imán ubicado en el origen produce  $B=0.5a \text{ mWb/m}^2$  en  $(10, 0, 0)$ . Halle  $B$  en

a)  $(0,3,0)$

b)  $(3,4,0)$

c)  $(1, 1, 1)$

6.16 Un bloque de hierro ( $\mu_r = 5000\mu_0$ ) se coloca en un campo magnético uniforme con  $1.5 \text{ Wb/m}^2$ . Si el hierro se compone de  $8.5 \times 10^{28}$  átomos/ $\text{m}^3$ , calcule: a) la magnetización  $M$ , b) la corriente magnética promedio.

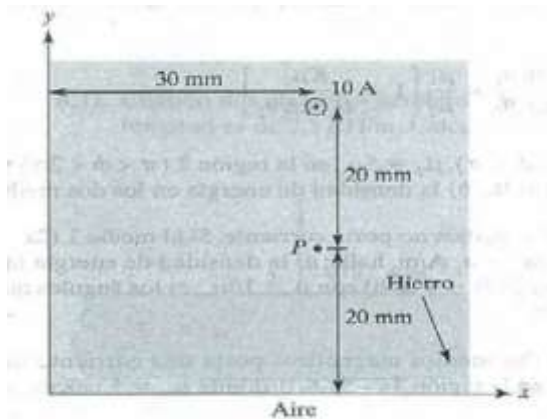


Figura 242. Para el problema 6.13.

6.17. Un solenoide de 10 cm de longitud y 1 cm de radio cuenta con 450 vueltas. Calcule su inductancia.

6.18. El núcleo de un toroide es de  $12 \text{ cm}^2$  y el material con el que está hecho tiene  $\mu = 200$  si su radio medio es de 50 cm, calcule el número de vueltas necesarias para obtener una inductancia de 2.5 H.

6.19. Demuestre que la inductancia mutua entre la espira rectangular y la corriente lineal infinita que se presentaron en la figura 8.4 es

$$M_{12} = \frac{\mu b}{2\pi} I_n \ln \left[ \frac{a + \rho_0}{\rho_0} \right]$$

Calcule  $M_{12}$  cuando  $a = b = \rho_0 = 1 \text{ m}$

6.20. Compruebe que la inductancia mutua entre los solenoides coaxiales devanados cerrados de longitud  $\ell_1$  y  $\ell_2$  ( $\ell_1 \gg \ell_2$ ), Vueltas  $N_1$  y  $N_2$  y radios  $r_1$  y  $r_2$  con  $r_1 = r_2$  es

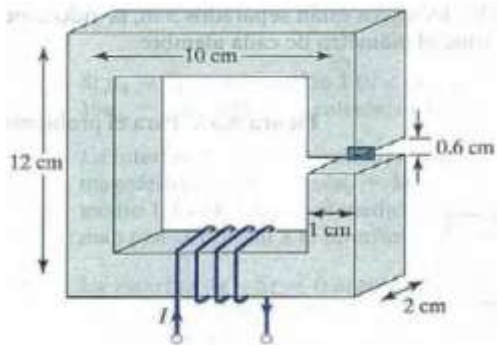
$$M_{12} = \frac{\mu N_1 N_2}{\ell_1} \pi r^2$$

6.21 Un anillo de cobalto ( $\mu_r = 600$ ) tiene un radio medio de 30 cm. Si una bobina enrollada en el anillo porta 12 A, calcule el número de vueltas requeridas para establecer una densidad de flujo magnético promedio de 1.5 Wb/m en el anillo.

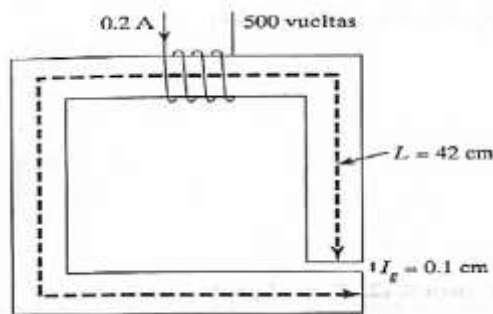
6.22. Remítase a la figura 8.27. Si la corriente en la bobina es de 0.5 A, halle la fuerza magnetomotriz y la intensidad de campo magnético en el entrehierro. Suponga que  $\mu = 500 \mu_0$  y que todas las ramas comparten un área de sección transversal de  $10 \text{ cm}^2$ .

6.23 La bobina de 2000 vueltas del circuito magnético que aparece en la figura 243 tiene una corriente de 10 A. Suponga que todas las ramas tienen una sección transversal de  $2 \text{ cm}^2$  y que el material del núcleo es hierro con  $\mu_r = 1500$ . Calcule  $R$ ,  $\mathcal{F}$  y  $\Psi$  respecto de

- a) El núcleo
- b) El entrehierro.



**Figura 243. Para el problema 6.23**



**Figura 244. Para el problema 6.24**

6.24. Considere el circuito magnético que se presenta en la figura 244. Suponiendo que el núcleo ( $\mu_r = 1000 \mu_0$ ) posee una sección transversal uniforme de  $4 \text{ cm}^2$ , determine la densidad de flujo en el entrehierro.

6.25. Considere el relevador electromagnético que se muestra en la figura 245. ¿Qué fuerza actúa sobre su armadura (parte móvil) si el flujo en el entrehierro es de  $2 \text{ mWb}$ ? El área de éste es de  $0.3 \text{ cm}^2$  y su longitud de  $1.5 \text{ mm}$ .

6.26. Un toroide con entrehierro como el que aparece en la figura 246 posee una sección transversal cuadrada. Un conductor largo portador de corriente  $I_2$  está insertado en el entrehierro.  $\ell_a = 1 \text{ mm}$ , Calcule

- a) La fuerza sobre el entrehierro cuando  $I_2 = 0$  y la permeabilidad relativa del toroide es de 300.
- b) La fuerza sobre el conductor cuando  $I_2 = 2 \text{ mA}$ . y la permeabilidad del toroide es infinita. Ignore en ambos casos el efecto de borde en el entrehierro.

6.27. En la figura 247 se muestra una sección de un electroimán bajo el cual se halla una placa que soporta una carga. El electroimán posee un área de contacto de  $200 \text{ cm}^2$  por polo, en tanto que el polo intermedio cuenta con una bobina con 1000 vueltas e  $I = 3 \text{ A}$ . Calcule la masa máxima que el electroimán podría levantar. Suponga que la reluctancia del electroimán y la placa es despreciable.

6.28. En la figura 248 se presenta la sección transversal de un sistema electromecánico cuyo émbolo se mueve libremente entre dos casquillos no magnéticos. Suponiendo que todos los tramos comparten la misma área de sección transversal  $S$ , demuestre que

$$F = \frac{2 N^2 I^2 \mu_0 S}{(a + 2x)} a_x$$

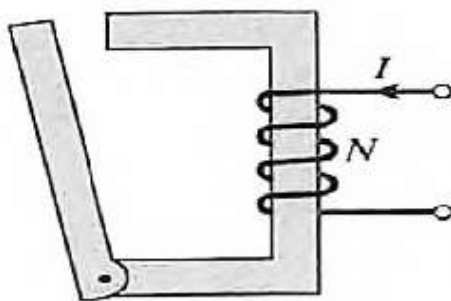


Figura 245 . Para el problema 6.25

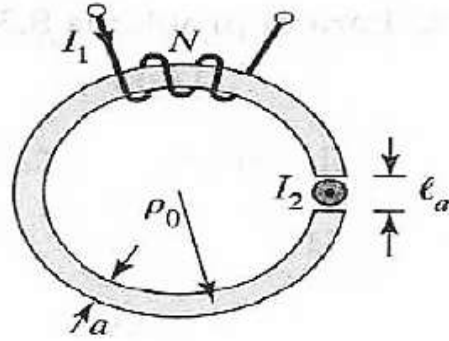


Figura 246. Para el problema 6.26

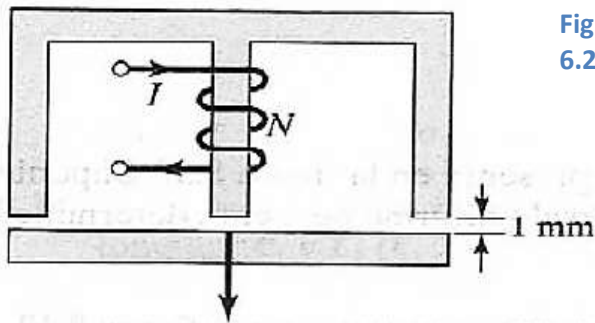


Figura 247. Para el problema 6.27

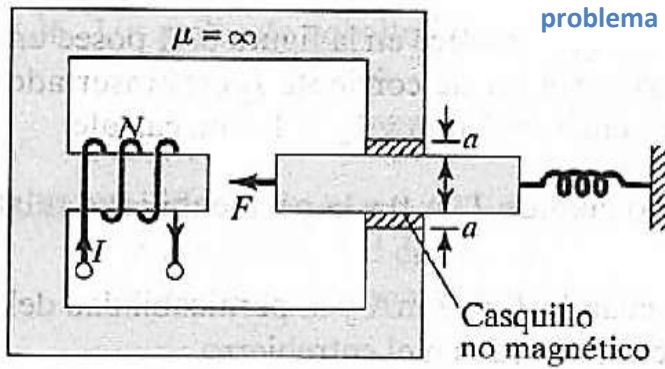


Figura 248. . Para el problema 6.28



### Referencias Bibliográficas.

- Alonso, Marcelo y J. Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.  
Serway, Raymond A. y John W. Jewett, Jr. Física II, 3ª edición.  
Resnik Halliday Krane. Física Volumen 2, 5ª edición, Ed. Patria.  
Vega, I. P. N. Electromagnetismo, 1ª edición, Ed. Patria  
Young, Freedman, Sears, Zemansky. Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12ª edición, Ed. Addison – Wesley, PEARSON  
Reyes, Salcedo, y Carrillo. Manual de Experimentos de Electromagnetismo, ITAM.  
Victoriano López Rodríguez, Electromagnetismo I, UNED  
Luis Álvarez Thon, Electromagnetismo FMF-241 (2014), Universidad Andrés Bello.  
Matthew N. O. Sadiku, Elementos de electromagnetismo, 3ª edición, OXFORD.  
Luis Vargas D., Apuntes de Electromagnetismo (2015), Universidad de Chile.  
Giancoli, Volumen II, 4ª Edición, Física para Ciencias e Ingeniería con física Moderna, PEARSON.  
Bernabé Franco, Carlos Javier Jaimes O., Apuntes De Electromagnetismo, Universidades Tecnológicas de Santander.  
Jesús Fabián Jurado, Electromagnetismo para Ingeniería (2013). Universidad Nacional de Colombia.  
Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku, Fundamentos de circuitos eléctricos, 3ª edición, Mc Graw Hill.  
Edgar Álvaro Méndez, José A. Andrade Lucio, Manual de Experimentos de física III, FIMEE, Universidad de Guanajuato.  
Serway, Raymond A. Y John W Jewett, Jr.(2004). Física II. 3ª. edición. México. Ed. Thomson Learning  
Paul E. Tippens (2007). Física conceptos y aplicaciones, 7ª. edición. México, Ed. McGraw-Hill.  
Halliday Resnick (1987) Fundamentos de física versión ampliada. 2ª. edición. México. Ed. CECSA.

### Referencias Electrónicas.

- <http://ww.ifinternational.com/mf/electricidad-magnetismo.html>  
<http://www.acienciasgalilei.com/videos/3electricidad-mag.htm>  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-activities/>  
<https://ocw.mit.edu/courses/8-02-physics-ii-electricity-and-magnetism-spring-2007/pages/class-slides/>  
<http://mit.usiu.ac.ke/courses/physics/8-02sc-physics-ii-electricity-and-magnetism-fall-2010/capacitors/capacitance-capacitors-energy-stored-in-capacitors/>  
[Circuitos, pero sin Memorizar Fórmulas](#)

<https://www.youtube.com/watch?v=kHZ8SD7jiiA>

**Constantes magnéticas**

<https://www.youtube.com/watch?v=myFEsGcbpfU>

## Bibliografía

(s.f.).

A., C. S. (s.f.). Curso fácil de electrónica básica. Editorial Conosur S.A.

Alonso, M. y. (s.f.). Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.

Bernabé Franco, C. J. (s.f.). Apuntes De Electromagnetismo. Universidades Tecnológicas de Santander.

Charles K. Alexander, M. N. (s.f.). Fundamentos de circuitos eléctricos, 3a edición. Mc Graw Hill.

D., L. V. (s.f.). Apuntes de Electromagnetismo (2015). , Universidad de Chile.

Edgar Álvaro Méndez, J. A. (s.f.). Manual de Experimentos de física III. FIMEE, Universidad de Guanajuato.

Germán Arenas Sicard. (s.f.). Universidad Nacional de Colombia.

Giancoli. (s.f.). Física para Ciencias e Ingeniería con física Modern, Volumen II, 4a Edición. PEARSON.

Jurado, J. F. (s.f.). Electromagnetismo para Ingeniería (2013). Universidad Nacional de Colombia.

Krane, R. H. (s.f.). Física Volumen 2, 5a edición. Ed. Patria.

Pozueta, M. Á. (s.f.). Materiales y circuitos magnéticos. Universidad de Cantabria.

Resnick, H. (s.f.). (1987) Fundamentos de física versión ampliada. 2ª. edición. México. Ed. CECSA.

Reyes, S. y. (s.f.). Manual de Experimentos de Electromagnetismo. ITAM.

Rodríguez, V. L. (s.f.). Electromagnetismo I.

Sadiku, M. N. (s.f.). Elementos de electromagnetismo, 3a edición. OXFORD.

Serway, R. A. (s.f.). (2004). Física II. 3ª. edición. México. Ed. Thomson Learning.

Serway, R. A. (s.f.). Física II, 3a edición.

- Thon, L. Á. (s.f.). Electromagnetismo FMF-241 (2014). Universidad Andrés Bello.
- Tippens, P. E. (s.f.). (2007). Física conceptos y aplicaciones, 7ª. edición. México,. Ed. McGraw-Hill.
- Vega, I. P. (s.f.). Electromagnetismo, 1a edición. Ed. Patria.
- Young, F. S. (s.f.). Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12a. Ed. Addison – Wesley,  
PEARSON.
- (s.f.).
- A., C. S. (s.f.). Curso fácil de electrónica básica. Editorial Conosur S.A.
- Alonso, M. y. (s.f.). Finn. Física Volumen II, Campos y ondas.
- Bernabé Franco, C. J. (s.f.). Apuntes De Electromagnetismo. UniversidadesTecnológicas de  
Santander.
- Charles K. Alexander, M. N. (s.f.). Fundamentos de circuitos eléctricos, 3a edición. Mc Graw Hill.
- D., L. V. (s.f.). Apuntes de Electromagnetismo (2015). , Universidad de Chile.
- Edgar Álvaro Méndez, J. A. (s.f.). Manual de Experimentos de física III. FIMEE, Universidad de  
Guanajuato.
- Germán Arenas Sicard. (s.f.). Universidad Nacional de Colombia.
- Giancoli. (s.f.). Física para Ciencias e Ingeniería con física Modern, Volumen II, 4a Edición.  
PEARSON.
- Jurado, J. F. (s.f.). Electromagnetismo para Ingeniería (2013). Universidad Nacional de Colombia.
- Jurado, J. F. (s.f.). Electromagnetismo para Ingeniería (2013). Universidad Nacional de.
- Krane, R. H. (s.f.). Física Volumen 2, 5a edición. Ed. Patria.
- Pozueta, M. Á. (s.f.). Materiales y circuitos magnéticos. Universidad de Cantabria.
- Resnick, H. (s.f.). (1987) Fundamentos de física versión ampliada. 2ª. edición. México. Ed. CECSA.
- Reyes, S. y. (s.f.). Manual de Experimentos de Electromagnetismo. ITAM.
- Rodríguez, V. L. (s.f.). Electromagnetismo I.
- Sadiku, M. N. (s.f.). Elementos de electromagnetismo, 3a edición. OXFORD.
- Serway, R. A. (s.f.). (2004). Física II. 3ª. edición. México. Ed. Thomson Learning.

Serway, R. A. (s.f.). Física II, 3a edición.

Thon, L. Á. (s.f.). Electromagnetismo FMF-241 (2014). Universidad Andrés Bello.

Tippens, P. E. (s.f.). (2007). Física conceptos y aplicaciones, 7ª. edición. México,. Ed. McGraw-Hill.

Vega, I. P. (s.f.). Electromagnetismo, 1a edición. Ed. Patria.

Young, F. S. (s.f.). Física Universitaria con Física Moderna Volumen 2, 12a. Ed. Addison – Wesley,  
PEARSON.



## **POLÍTICAS ACADÉMICAS GENERALES DEL AÑO SABÁTICO DEL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO**

CARTA DE RECONOCIMIENTO DEL AUTOR DE LOS DERECHOS A FAVOR DEL TECNIM

Ciudad de México, 31-/Agosto/2023

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO.  
PRESENTE

Bajo protesta de decir verdad Ricardo Jacinto Pardo González personal docente adscrito al Instituto Tecnológico de San Luis Potosí del Tecnológico Nacional de México, manifiesto que en cumplimiento de mis actividades relacionadas con el Año Sabático elaboré la obra titulada "Apuntes de la materia de Mediciones Eléctricas (ETD-1021) y Apuntes de la materia de Electromagnetismo (AEF-1020)". Con base en lo anterior, y con fundamento en los artículos 83 de la Ley Federal del Derecho de Autor y 46 de su Reglamento, reconozco que el Tecnológico Nacional de México es titular de los derechos patrimoniales sobre la misma y le corresponden las facultades relativas a la divulgación, integridad de la obra y de colección, conservando el derecho a figurar como autor.

Asimismo, respondo por la autoría y originalidad de la citada obra; y relevo de toda responsabilidad al Tecnológico Nacional de México de cualquier demanda o reclamación que llegara a formular alguna persona física o moral que considere que con esta obra es afectado en alguno de los derechos protegidos por la Ley en cita, asumiendo todas las consecuencias legales y económicas.

ATENTAMENTE

AUTOR Ricardo Jacinto Pardo González