

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Mecánica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**Análisis numérico del comportamiento vibratorio de un material
compuesto en un elemento estructural laminado**

presentada por

Ing. Luis Alberto Gordillo Carreño

como requisito para la obtención del grado de
Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Director de tesis

Dr. Eladio Martínez Rayón

Codirector de tesis

Dr. Dariusz Szwedowicz Wasik

Cuernavaca, Morelos, México. 8 de febrero del 2016.



Cuernavaca, mor., 27/enero/2016

OFICIO No. DIM/047/2016
Asunto: Aceptación de documento de tesis

C. DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del C. Ing. Luis Alberto Gordillo Carreño, con número de control M13CE047, de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado "Análisis numérico del comportamiento vibratorio de un material compuesto en un elemento estructural laminado", hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

DR. ELADIO MARTÍNEZ RAYÓN
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
8500740

REVISOR 1

DR. JORGE COLÍN OCAMPO
Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica
4694783

REVISOR 2

M. C. ALBERTO LÓPEZ LÓPEZ
Maestro en Ingeniería (Estructuras)
841271

REVISOR 3

DRA. CLAUDIA CORTÉS GARCÍA
Doctora en Ciencias en Ingeniería Mecánica
9336586

C.p. (Lic. Guadalupe Garrido Rivera).- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
Expediente

Iniciales AAP/mrsr



Cuernavaca, Mor., 2 de febrero de 2016
OFICIO No. SAC/084/2016

Asunto: Autorización de impresión de tesis

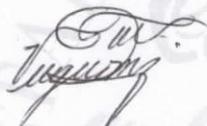
ING. LUIS ALBERTO GORDILLO CARREÑO
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTE

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **"Análisis Numérico del Comportamiento Vibratorio de un Material Compuesto en un Elemento Estructural Laminado"**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

"CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO"



DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



CENTRO NACIONAL DE
INVESTIGACIÓN Y
DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. Lic. Guadalupe Garrido Rivera.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr



Dedicatorias.

A mis padres: Gilberto Gordillo y Rosbi Carreño, que con su apoyo y cariño impulsaron mi superación personal. Gracias por estar conmigo en los momentos más difíciles de mi vida.

A mi hermano: Stalin Gordillo por ser un grandioso ejemplo en mi vida y apoyarme en todo momento

A mi familia, gracias por todo el amor y confianza que depositaron en mí.





Agradecimientos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica (DGEST) por apoyarme económicamente.

A todo el personal que labora en el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico por brindarme una formación académica de excelencia.

Al Dr. Eladio Martínez Rayón por apoyarme en todo momento en el desarrollo de esta tesis de maestría.

A mis asesores, Dra. Claudia Cortés García, Dr. Jorge Colín Ocampo, Dr. Alberto López López y Dr. Dariusz Swedowicz Wasik por todos sus consejos y aportaciones a este proyecto.

A todos mis compañeros de maestría que con su gran apoyo hicieron de este sueño una realidad.



CONTENIDO.

Lista de figuras	I
Lista de tablas.	III
Nomenclatura.....	V
Resumen.	VII
Abstract.....	VIII
Capítulo 1	1
1.1. Estado del arte.	3
1.2. Objetivos de la investigación.....	8
1.3. Objetivos específicos.....	8
1.4. Limitaciones.	9
1.5. Justificación de la investigación.....	9
1.6. Estructura del documento.	10
Capítulo 2	11
2.1. Materiales compuestos.	12
2.2. Comportamiento mecánico de un material compuesto.....	13
2.3. Relaciones esfuerzo deformación para una placa.....	14
2.3.1. Relaciones de esfuerzo-deformación para un estado plano de esfuerzos en un material ortotrópico.	16
2.3.2. Relación esfuerzo-deformación en base a la orientación de la fibra.	18
2.4. Frecuencias naturales en placas rectangulares y lisas.	20
2.5. Obtención de frecuencias naturales en placas isotrópicas bajo diversas condiciones de frontera.....	22
2.6. Frecuencia natural en placas ortotrópicas homogéneas.....	23
2.7. Frecuencia natural para placas rectangulares isotrópicas mediante funciones vigas.	24
2.8. Frecuencia natural en placas compuestas laminadas.....	25
2.9. Teoría de placas.	26
2.9.1. Primera teoría de la deformación por cortante para placas compuestas (FSDT).	26

2.9.2. Esfuerzos y deformaciones en una placa laminada basada en la teoría FSDT.....	28
2.9.3. Relaciones constitutivas y la teoría de alto orden para placas laminadas (HSDT).	29
2.10. Ecuación característica y problema de los eigenvalores (HSDT) y (FSDT).....	31
Capítulo 3	34
3.1. Verificación de la respuesta del modelo en el caso de una placa lisa isotrópica.....	36
3.2. Verificación de la respuesta del modelo en el caso de una placa ortotrópica (AS4D/9310).	37
3.3. Verificación de la respuesta del modelo en el caso de una placa ortotrópica laminada (AS4D/9310).	38
3.4. Diseño de algoritmo para el procesamiento de los desplazamientos nodales.	40
3.5. Configuración de los refuerzos para adosamiento.....	44
3.7. Implementación de refuerzos compuestos en placas adosadas.	49
Capítulo 4:	50
4.1. Frecuencias naturales numéricas y analíticas para el modelo isotrópico.	51
4.2. Frecuencias naturales numéricas y analíticas para el modelo compuesto ortotrópico.	54
4.3. Frecuencias naturales numéricas y analíticas para el modelo compuesto laminado.	58
4.4. Resultados numéricos para placas reforzadas con parches de aluminio 1050.	59
4.5. Resultados numéricos para placas reforzadas con parches compuestos AS4D/9310.	71
4.6. Resultados numéricos para placas reforzadas con parches compuestos laminados AS4D/9310.	75
4.7. Formas modales de placas reforzadas.	80
Capítulo 5:	80
Referencias bibliográficas.	86
Apéndice.	90
Apéndice A: Matriz de rigidez para laminados HSDT (cross-ply).	90
Apéndice B: Forma de la interfaz gráfica.....	93
Apéndice C. Matriz de rigidez placas compuestas laminadas.....	94
Apéndice D. Tabla de resultados para placas reforzadas.	98

Lista de figuras.

Capítulo 1.

<i>Figura 1-1. Desplazamientos totales de la placa de Kirchhoff (1850).</i>	4
<i>Figura 1-2 Placa analizada por Laura & Ercoli (1991).</i>	7
<i>Figura 1-3. Placas analizadas por Y. F. Xing en su teoría para placas ortotrópicas (2009). (S) simplemente apoyada (C) fijo o encastre.</i>	8

Capítulo 2.

<i>Figura 2- 1. Material compuesto ortotrópico y sus constantes de ingeniería en sus ejes principales 1 y 2 [Pardoen, 2014].</i>	16
<i>Figura 2- 2 Elemento diferencial de una lámina compuesta con una orientación de fibra determinada [Gibson, 1994].</i>	18

Capítulo 3.

<i>Figura 3-1. Modelo discreto de una placa ortotrópico en cantiléver (AS4D/9310).</i>	39
<i>Figura 3-2. Modelo discreto de la placa AS4D/9310 laminada.</i>	40
<i>Figura 3-3. Esquema de proceso para la obtención de las configuraciones del refuerzo adosado.</i>	41
<i>Figura 3-4. Diagrama de flujo para el procesamiento de datos obtenidos mediante el modelo numérico.</i>	43
<i>Figura 3-5. Conjunto de puntos para las primeras cuatro formas modales de la placa de acero.</i>	44
<i>Figura 3-6. Configuración de los parches del primer conjunto de diseño de refuerzos para un valor de referencia de 0.1. Condiciones de frontera: fijo en uno, dos, tres y cuatro lados.</i>	47
<i>Figura 3-7. Segundo conjunto de diseño para un valor de referencia de 0.1. Condiciones de frontera: fijo en uno, dos, tres y cuatro de sus lados.</i>	48
<i>Figura 3-8. Sección transversal del refuerzo laminado compuesto.</i>	49

Capítulo 4.

<i>Figura 4-1. Formas modales y líneas nodales del modelo numérico.</i>	52
<i>Figura 4-2. Formas modales de una placa compuesta AS4D/9310 simétrica [0 90 90 0].</i>	59
<i>Figura 4-3. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en un extremo (PCD).</i>	60

Figura 4-4. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en un extremo (SCD).	61
Figura 4-5. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fija en dos lados (PCD).	62
Figura 4-6. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fija en dos lados (SCD).	63
Figura 4-7. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en tres lados (PCD).	64
Figura 4-8. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en tres lados (SCD).	65
Figura 4-9. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en todos sus lados (PCD).	66
Figura 4-10. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en todos sus lados (SCD).	67
Figura 4-11. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con un lado fijo.	68
Figura 4-12. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con dos lados fijos.	69
Figura 4-13. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con tres lados fijos.	70
Figura 4-14. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con cuatro lados fijos.	71
Figura 4-15. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en un extremo.	73
Figura 4-16. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en dos de sus extremos.	73
Figura 4-17. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en tres de sus extremos.	74
Figura 4-18. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en cuatro de sus extremos.	75
Figura 4-19. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en uno de sus extremos.	77
Figura 4-20. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en dos de sus extremos.	77
Figura 4-21. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en tres de sus extremos.	78
Figura 4-22. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en todos sus lados.	79

Lista de tablas.

Capítulo 2.

Tabla 2-1. Valores de los coeficientes G , H y J de la ecuación 2.32. (F) Fijo, (S) Simplemente apoyada, (L) Libre [Warburton, 1954].....	21
Tabla 2-2. Coeficiente de ajuste de la ecuación 2.34 en función de sus condiciones de frontera [Warburton, 1954].	23
Tabla 2-3. Clasificación de una placa laminada. a) Placa laminada simétrica $[+45, 90, -45]_S$. b) Placa laminada anti-simétrica $[(\pm 45, 0)_3]_T$	26
Tabla 2- 4. Sección transversal de una placa laminada [Reddy, 1983].	30
Tabla 2- 5. Geometría y coordenadas de una placa laminada.	32

Capítulo 3.

Tabla 3-1. Geometría y propiedades mecánicas de la placa de acero A-36.....	37
Tabla 3-2. Propiedades mecánicas AS4D/9310 [Barbero 2014].....	38
Tabla 3-3. Refuerzos con contornos refinados.....	45

Capítulo 4.

Tabla 4-1. Frecuencias naturales de una placa con cuatro condiciones de frontera distintas.....	51
Tabla 4-2. Frecuencias naturales obtenidas por el método de elemento finito y porcentajes de error, (1) [Harrys 2002] y (2) [Eschler 1950].....	53
Tabla 4-3. Formas modales de una placa isotrópica de acero A-36.	54
Tabla 4- 4. Frecuencias naturales para una placa ortotrópica obtenidas por el método de elemento finito y (3) [Hearmon 1959].....	56
Tabla 4-5. Formas modales para una placa ortotrópica AS4D/9310.....	57
Tabla 4-6. Comparación de frecuencias naturales obtenidas a partir de FEM, [Reddy, 1983], [Mindlin, 1945] y [Reissner, 1951].....	58
Tabla 4-7. Resultados numéricos de los refuerzos compuestos homogéneos adosados.	72
Tabla 4-8. Resultados numéricos de los refuerzos compuestos laminados.....	76

Apéndices.

Tabla D-1. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Primer Conjunto de Diseño (PCD). Valor de referencia de 0.1.	98
Tabla D-2. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Segundo Conjunto de Diseño (SCD). Valor de referencia de 0.1.....	99

<i>Tabla D-3. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Primer Conjunto de Diseño (PCD). Valor de referencia de 0.2.</i>	<i>100</i>
<i>Tabla D-4. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Segundo Conjunto de Diseño (SCD). Valor de referencia de 0.2.....</i>	<i>101</i>
<i>Tabla D-5. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Primer Conjunto de Diseño (PCD). Valor de referencia de 0.3.</i>	<i>102</i>
<i>Tabla D-6. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Segundo Conjunto de Diseño (SCD). Valor de referencia de 0.3.....</i>	<i>103</i>
<i>Tabla D-7. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Primer Conjunto de Diseño (PCD). Valor de referencia de 0.4.</i>	<i>104</i>
<i>Tabla D-8. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Segundo Conjunto de Diseño (SCD). Valor de referencia de 0.4.....</i>	<i>105</i>
<i>Tabla D-9. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Primer Conjunto de Diseño (PCD). Valor de referencia de 0.5.</i>	<i>106</i>
<i>Tabla D-10. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el Segundo Conjunto de Diseño (SCD). Valor de referencia de 0.5.....</i>	<i>107</i>

Nomenclatura.

Símbolo.

Descripción.

Latinas.

$[C]$	Matriz de rigidez de la placa.
$[S]$	Matriz flexurante de la placa.
E_1, E_2, E_3	Módulos de elasticidad en los ejes principales 1, 2 y 3.
G_{12}, G_{23}, G_{13}	Módulos de cortante en los planos 12, 23 y 13.
m, n	Coseno y seno del ángulo de la fibra.
$X(x), Y(y)$	Función viga con respecto a x y y .
D	Rigidez de una placa isotrópica.
a, b	Longitud de los extremos de una placa.
h	Espesor de la placa.
E	Módulo de elasticidad isotrópica.
$G_{x,y}, H_{x,y}, J_{x,y}$	Constantes de Warburton.
B	Coefficiente de corrección en función de las condiciones de frontera.
D_x, D_y, D_{xy}	Rigidez de una placa ortotrópica en x , y y xy .
u, v, w	Desplazamientos de un punto de la sección transversal de la placa.
u_o, v_o, w_o	Desplazamientos iniciales de un punto de la sección transversal de la placa.
K	Curvatura de la flexión de la placa.
F	Fuerzas normales.
M	Momentos flexionantes.
$[A]$	Matriz extensional.
$[B]$	Matriz de acoplamiento.
$[D]$	Matriz de flexión.

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$	Inercia de la placa.
$[M]$	Matriz de masa.
$[Q]$	Rigidez de la placa con respecto a la orientación de sus fibras.
z	Coordenada en z de un punto de la sección transversal.
Griegas.	
$\{\sigma\}$	Vector de esfuerzos.
$\{\varepsilon\}$	Vector de deformación.
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$	Relación de Poisson para un material ortotrópico.
ρ	Densidad.
ν	Relación de Poisson para un material isotrópico.
ω_{nat}	Frecuencia natural.
ω_{FEM}	Frecuencia natural numérica.
ω_{FSDT}	Frecuencia natural basada en la teoría FSDT.
ω_{HSDT}	Frecuencia natural basada en la teoría HSDT.
λ_{iso}	Coefficiente de frecuencia isotrópica.
ψ_x, ψ_y	Deformación angular de la sección transversal de la placa.
α, β	Modos de vibración.
Siglas.	
<i>HSDT</i>	Teoría del cortante de alto orden.
<i>FSDT</i>	Primera teoría del cortante.
<i>PCD</i>	Primer conjunto de diseño.
<i>SCD</i>	Segundo conjunto de diseño.

Resumen.

El presente trabajo de investigación se centra en el estudio de la dinámica vibratoria de placas fabricadas a partir de materiales homogéneos y compuestos. Dicho estudio tiene como fin hallar las configuraciones adecuadas, de elementos agregados, que modifiquen las frecuencias naturales de una placa de acero lisa bajo cuatro condiciones de frontera distintas. Estas condiciones de frontera son: Fijo en un extremo o en cantiléver, fijo en dos lados paralelos, sujeto en tres extremos y fijo en todos sus lados.

Los elementos estructurales laminados, tienen aplicación en diferentes sistemas; carrocería de automóviles, fuselajes de avión, estructuras espaciales, carcasa de equipos industriales, electrodomésticos e inclusive en obras civiles. En cada caso pueden existir cargas fluctuantes que lleven al sistema a condiciones de resonancia.

El uso del método de elementos finitos juega un papel importante en la obtención de resultados, ya que mediante el análisis de las formas modales (modelos numéricos) es posible obtener y comparar los desplazamientos con un valor de referencia específico. En estos casos la cantidad de valores a procesar es muy grande como para ser tratado con métodos analíticos directos, por tanto, se utiliza una aproximación numérica para resolver este tipo de problemas en particular.

Cada configuración obtenida es rediseñada para suavizar los contornos de los refuerzos. Estos nuevos elementos agregados son modelados de nueva cuenta mediante el método de elementos finitos para analizar su influencia en la placa lisa (acero estructural). Los materiales utilizados como refuerzos son: aluminio y AS4D/9310 (resina epóxica-fibras de boro).

Derivado del análisis FEM, se obtuvieron las configuraciones adecuadas para modificar las frecuencias naturales en un porcentaje con respecto a una placa lisa sin refuerzo, observándose cambios considerables en sus formas modales.

Abstract.

This research focuses on the study of the vibrational dynamics of plates made from homogeneous and composite materials. This study aims to find the right settings (aggregate elements) which modify the natural frequencies of a flat steel plate under four different boundary conditions. These boundary conditions are: Fixed at one end or cantilever, fixed on two parallel sides, subject in three ends and fixed on all sides.

The laminated structural elements have application in different systems; automotive body, airframe, spatial structures, housing, industrial, appliances and even civil works. In each case fluctuating loads may exist with the system resonance conditions.

Using of the finite element method plays an important role in obtaining results, because by analyzing the mode shapes (numerical models) is possible to obtain and compare displacements with specific reference value. In these cases, the amount of data to be processed is too large to be treated with direct analytical methods, therefore a numerical approximation to solve this kind of problem in particular is used.

Each configuration obtained is redesigned to smooth the contours of the reinforcement. These new elements added new features are modeled by the finite element method to analyze their influence on the smooth plate (structural steel). The materials used as reinforcements are: Aluminum and AS4D / 9310 (epoxy resin boron fibers).

Finally, derived from finite element analysis, the appropriate settings are obtained to modify the natural frequencies in a percentage with respect to a flat plate without reinforcement, showing considerable changes in mode shapes.

Capítulo 1: Introducción.

Los elementos tipo placa se encuentran en una gran variedad de estructuras civiles y de máquinas. Debido a su aplicación, su estudio dinámico y estático es de gran interés para muchos diseñadores. Su empleo va desde la construcción de puentes, fuselajes de avión, automóviles, cascos de navíos, vehículos aeroespaciales, contenedores, etc.

Uno de los fenómenos cuyo estudio es de gran relevancia y principal objeto en las vibraciones mecánicas es la resonancia. Sus efectos se ejemplifican con el caso del puente colgante Tacoma Narrows, que en el año de 1940 colapsó a causa de que en su diseño no se consideraron sus frecuencias naturales, las cuales hicieron resonar la estructura con la excitación del viento.

Las causas de la resonancia se deben principalmente a la coincidencia de la frecuencia natural con la frecuencia de excitación o de trabajo del sistema. Dicha coincidencia genera picos de vibración muy altos que desestabilizan el equilibrio dinámico provocando, en función del tiempo, daños irreparables sobre los elementos o uniones de una estructura. Generalmente, este fenómeno puede ser percibido como un exceso de ruido u ondulaciones pronunciadas en la estructura. Los efectos provocados por la resonancia resultan catastróficos en la mayoría de los casos por lo que es necesario evitarlo.

Actualmente existen técnicas capaces de aminorar los efectos de la resonancia. Uno de estos métodos es el adosamiento de masas sobre la estructura sometida a excitaciones críticas. Al añadir masas al sistema, la dinámica del cuerpo se modifica totalmente. Esto trae como consecuencia que las frecuencias naturales del sistema cambien a rangos seguros de trabajo.

A causa de que los elementos placas se encuentran en un buen número de aplicaciones, la modificación de los parámetros que afecta su dinámica forma parte de la solución a una estructura sometida a resonancia. Sin embargo, el adosamiento de dichas masas sobre el elemento afectado requiere de una metodología para diseñar una configuración adecuada dado un determinado caso.

Como es bien sabido, otro de los parámetros que afectan enormemente las frecuencias naturales de una placa es la rigidez. Esta rigidez está en función de factores como el tipo de material, condiciones de frontera y geometrías. En tal caso, cuando una estructura está sometida a resonancia, los parámetros anteriormente citados no pueden ser modificados directamente.

Los materiales compuestos constituyen parte fundamental en la base de muchos campos de investigación y desarrollo tecnológico. Su amplia gama de propiedades le permite ser utilizado en prototipos, estructuras civiles, elementos de máquinas, partes de avión, etc. En comparación con otros materiales de ingeniería, como por ejemplo el acero, los materiales compuestos presentan propiedades mejoradas e incluso superiores. Algunas de estas propiedades son: buena rigidez, alta resistencia, capacidad de trabajar en condiciones extremas, resistencia a altas temperaturas, etc.

Dada la importancia de contar con una metodología que modifique la dinámica de una placa y con los avances en la construcción de nuevos materiales compuestos, el presente trabajo de investigación se enfoca en estudiar los parámetros que alteran la rigidez y la masa de una placa isotrópica. En base a este estudio se proponen configuraciones y ubicaciones de refuerzos sobre la placa de tal manera que se maximicen las variaciones en las frecuencias naturales de la placa.

1.1. Estado del arte.

Uno de los pioneros en el estudio del comportamiento dinámico de placas fue el físico y matemático Leonhard Euler, cuya obra “*De Motu vibratorio tympanorium*”, presentada en el año de 1766, analizaba la respuesta de una placa sometida a vibraciones libres [Euler, 1766]. Sus estudios fueron la base para posteriores investigaciones relacionadas a la dinámica de placas delgadas.

Más tarde G. Kirchhoff formuló las primeras hipótesis relacionadas con placas delgadas [Kirchhoff, 1850]. Dichas hipótesis establecían que la deformación transversal de la placa se mantenía recta y sin deformar durante la flexión de la placa (*figura 1.1*), además de que se mantenía perpendicular con respecto al plano medio. Estas deducciones tenían una estrecha relación con las hipótesis establecidas por J. Bernoulli en su teoría de vigas elásticas [Bernoulli, 1789].

Lord Kelvin y Tait aportaron nuevos avances en los estudios realizados por Kirchhoff al sustituir los momentos de torsión del plano medio de la placa por fuerzas cortantes [Kelvin, 1883]. En este punto se comenzaba a gestar el estudio de los efectos provocados por los esfuerzos cortantes en placas.

Raymond D. Mindlin y E. Reissner plantearon la primera teoría por cortante en placas delgadas o FSDT por sus siglas en inglés [Mindlin, 1945], [Reissner, 1951]. Al igual que las deducciones propuestas por Kirchhoff, la teoría por cortante consideraba que el área transversal de la placa se mantenía recta, pero no necesariamente perpendicular al plano medio de la placa. Esta rotación, debida a las fuerzas cortantes, aportaba una nueva deformación angular a las ecuaciones establecidas por Kirchhoff.

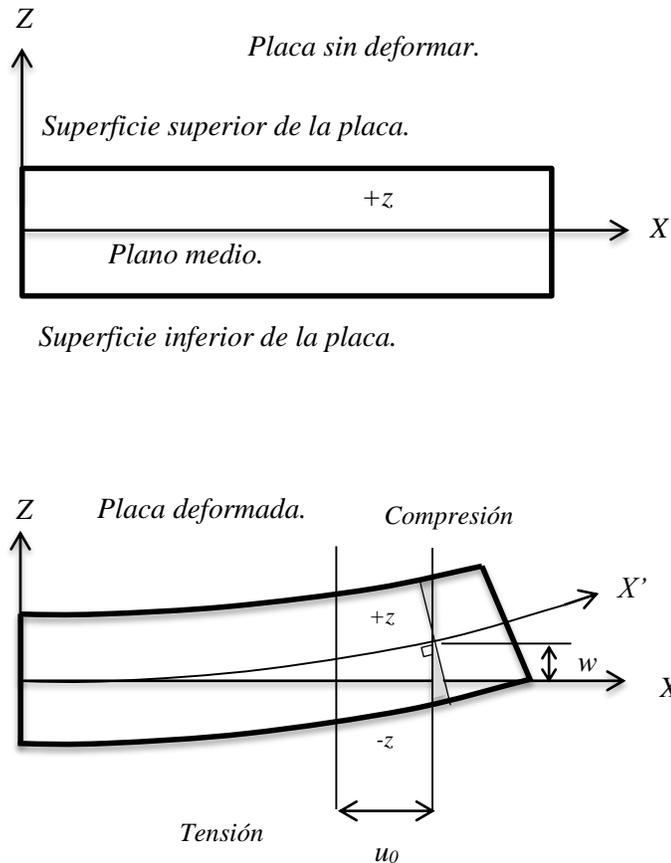


Figura 1-1. Desplazamientos totales de la placa de Kirchhoff (1850).

En el año de 1954, G. B. Warburton propone una metodología para la obtención de las frecuencias naturales de una placa isotrópica [Warburton, 1954]. Dedujo la forma de onda de una placa a partir del producto de funciones vigas, lo que le permitía establecer cualquier condición de frontera con facilidad. Mediante la aplicación del método energético de Rayleigh, Warburton obtuvo una expresión para el cálculo de la constante de frecuencias λ la cual relaciona la frecuencia natural de la placa con sus propiedades mecánicas. R. F. S. Hearmon

analizó las teorías de Warburton y las aplicó a placas compuestas ortotrópicas. Como resultado, Hearmon obtuvo una expresión simple que calculaba la constante de frecuencia λ para una placa ortotrópica.

Arthur W. Leissa recopila las teorías de placas existentes en su obra “*vibration of plates*” en donde estudia una diversidad de formas geométricas con distintas condiciones de frontera [Leissa, 1970]. En esta obra se analizan diversos tópicos como la ecuación fundamental de la teoría clásica, frecuencias naturales en placas circulares, elípticas, rectangulares y triangulares. Otro aspecto que hay que recalcar de la obra de Leissa es el estudio de los efectos que provoca la inclusión de agujeros y cómo estos alteran las formas y frecuencias naturales de la placa.

K. Sobczyk analizó las vibraciones libres de una placa con propiedades alternantes [Sobczyk, 1971]. Las consideraciones tomadas por Sobczyk (1971) se basan en el análisis de las rigideces elásticas de la placa con propiedades no homogéneas. Sus estudios conllevaron a modelos matemáticos muy complejos y a técnicas probabilísticas avanzadas. Otra característica importante del trabajo de Sobczyk es la del uso de correlaciones de forma.

Peter B. Corson estudió la influencia de no homogeneidades en placas [Carson, 1973]. Carson (1973) centró su investigación experimental en la geometría de pequeñas micro fases dentro del material. De esta manera pudo obtener las correlaciones de forma estudiadas por Sobczyk (1971).

A. D. Woods formuló una metodología para la obtención de frecuencias en placas elásticas con inhomogeneidades [Woods, 1977]. Los estudios de Woods (1977) se enfocaron en el estudio de las vibraciones libres transversales de una placa elástica bajo condiciones de fronteras simplemente apoyadas. Las conclusiones de esta obra desembocaron en el desarrollo de un modelo en el que, con los arreglos matemáticos adecuados, se obtenían correlaciones de forma. Estas correlaciones son entonces utilizadas en la obtención de porcentajes de frecuencia, el cual afecta al sistema general.

Ya para el año de 1978, S. M. Dickinson realiza una comparación entre los resultados obtenidos por Warburton con otras metodologías para el cálculo de frecuencias naturales en placas ortotrópicas e isotrópicas [Dickinson, 1978]. Entre estas metodologías se encuentran los

trabajos realizados por Bassilly en el año de 1972, el cual utiliza las mismas formas de onda propuestas por Warburton y el método energético de Rayleigh-Ritz [Bassilly, 1972]. Otros trabajos relacionados a las teorías de Warburton son los realizados por D. Mohan y H. G. Kingsbury, el cual emplea el método energético de Galerkin [Mohan 1971].

En 1983, J. N. Reddy estudia los efectos de la deformación cortante en las frecuencias naturales de una placa laminada [Reddy, 1983]. Reddy propone un campo de desplazamiento parabólico para describir las deformaciones cortantes a través del espesor de la placa. Sin embargo, la solución de dichas ecuaciones es demasiado complicada por lo que la solución analítica se limita a una placa laminada simplemente soportada. Los resultados obtenidos por Reddy fueron posteriormente comparadas con los obtenidos de otras teorías como la de primer orden (FSDT), la teoría clásica de placas (CPT) y la solución exacta mediante la teoría elástica en tercera dimensión.

En el año de 1991, P. A. A. Laura estudia el comportamiento dinámico de una placa con “parches” adosados de material ortotrópico e isotrópico bajo condiciones de frontera simplemente apoyada (*figura 1-2*) [Laura, 1991]. La metodología utilizada por Laura (1991) consiste en obtener la energía de deformación y cinética de la placa isotrópica y ortotrópica. Mediante el balance energético adecuado, Laura (1991) dedujo el modelo matemático para describir el comportamiento dinámico vibratorio de placas reforzadas mediante parches. Estos modelos matemáticos fueron verificados mediante el Método de los Elementos Finitos teniendo porcentajes de error mínimos para placas cuadrangulares y rectangulares.

A. T. Nettles realiza un recopilatorio de las teorías de placas y las presenta aplicadas a una diversidad de materiales compuestos [Nettles, 1994]. En esta recopilación se deducen las relaciones constitutivas de un material ortotrópico y la rigidez a partir de la teoría de placas. Su obra forma parte fundamental para la investigación de vibraciones en placas compuestas.

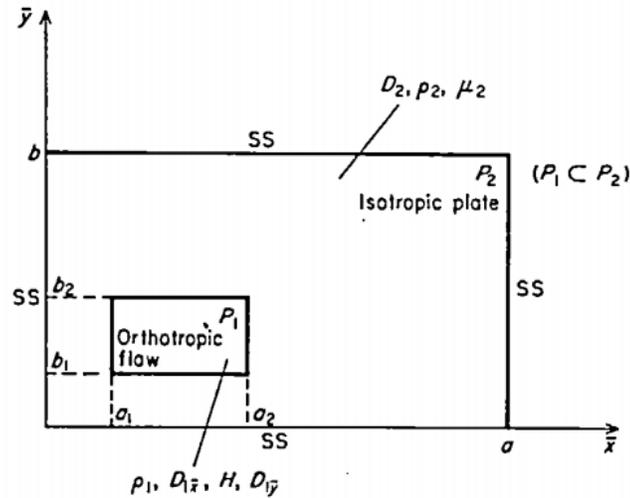


Figura 1-2 Placa analizada por Laura & Ercoli (1991).

T. Kant y K. Swaminathan refinan la teoría de alto orden propuesto por Reddy para la obtención de frecuencias naturales en placas laminadas y del tipo sándwich [Kant, 2001]. Esta teoría propuesta en un inicio por T. Kant establece nuevas deformaciones interlaminares, los cuales tienen efectos directos en la deformación transversal y normal de la placa. Su metodología, al igual que la de Reddy, emplea la técnica de Navier-Stokes como solución a los campos de desplazamientos y la obtención de los eigenvalores en la ecuación característica.

C. Brutti, M. E. Biancolini y L. Reccia evalúan el problema de la solución exacta en placas ortotrópicas. Dicha investigación toma como base los trabajos realizados por Hearmon en placas ortotrópicas compuestas [Brutti, 2004]. El resultado de los trabajos de Brutti y sus colaboradores son un conjunto de ecuaciones simples para la obtención del coeficiente de frecuencias en una placa compuesta bajo diversas restricciones.

En el año de 2009, Y. F. Xing propone una nueva solución para las vibraciones libres de una placa rectangular ortotrópica [Xing, 2009]. Mediante los resultados obtenidos analíticamente, Xing (2009), obtuvo una comparación con los datos recabados mediante el método de elemento finito (FEM) teniendo porcentajes de error bajos (figura 1-3).

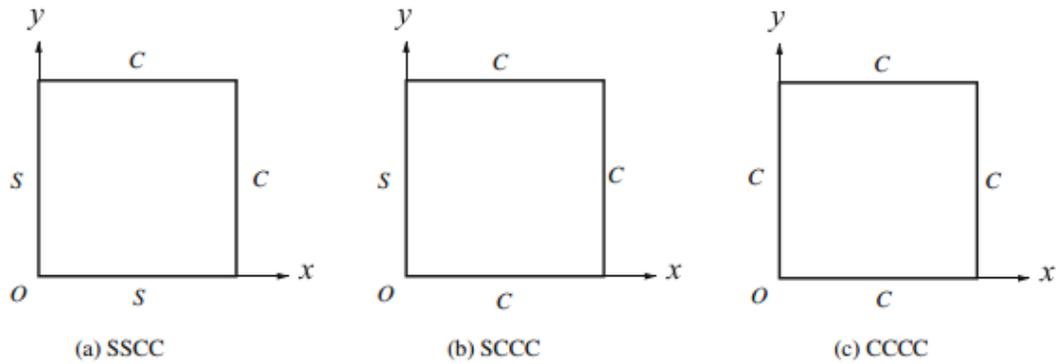


Figura 1-3. Placas analizadas por Y. F. Xing en su teoría para placas ortotrópicas (2009). (S) simplemente apoyada (C) fijo o encastre.

1.2. Objetivos de la investigación.

Analizar numéricamente los efectos de diferentes configuraciones de refuerzos superficiales en las formas y frecuencias naturales de vibración de elementos estructurales laminados para diferentes condiciones de frontera utilizando el Método de Elementos Finitos.

1.3. Objetivos específicos.

1. Efectuar un análisis por elemento finito de una placa metálica lisa: empotrada en uno, dos, tres y cuatro de sus lados.
2. Diseñar un algoritmo cuya función sea de localizar puntos de deflexión máximos y mínimos en función de un valor de referencia.
3. Obtener contornos de refuerzos y procesarlos en un software tipo CAD.
4. Establecer la localización del refuerzo en la placa lisa.
5. Identificar áreas y geometrías de refuerzos.
6. Comparar la influencia del refuerzo en las frecuencias naturales y sus formas modales.
7. Estudiar el comportamiento dinámico de una placa compuesta ortotrópica homogénea y laminadas e implementarla como refuerzo en las geometrías propuestas con los refuerzos metálicos (aluminio).
8. Comparar los resultados y establecer las conclusiones y recomendaciones.

1.4. Limitaciones.

1. El estudio se centra en analizar el comportamiento dinámico de una placa bajo cuatro condiciones de frontera distintas.
2. La placa se considera totalmente lisa. Esto quiere decir que no habrá presencia de corrugaciones, estampados o chapas en toda la superficie.
3. El material de la placa es de acero estructural A-36.
4. Los refuerzos serán placas lisas y delgadas.
5. El material utilizado para el diseño de los refuerzos es de aluminio 1050 H-14 para el caso de refuerzos metálicos.
6. Se empleará un material ortotrópico (AS4D/9310 Boro-epoxi) para el refuerzo compuesto.
7. Los rangos de trabajo no excederán los límites elásticos.

1.5. Justificación de la investigación.

La resonancia ocurre cuando la frecuencia de excitación iguala la frecuencia natural del sistema. Para evitar este problema el diseñador debe tomar en cuenta los rangos de frecuencia en los cuales opera su equipo o estructura. Si el diseñador puede cambiar la rigidez o la masa del sistema podrá desplazar a su conveniencia las frecuencias naturales y evitar así el fenómeno de resonancia.

En el caso de los elementos tipo placa existen tres tipos de rigideces, estas son: rigidez a la tracción, flexión y al cortante. Estos parámetros están relacionados con la geometría y las propiedades del material como el espesor, longitud de sus lados, relación de Poisson, módulo de cortante y de elasticidad, condiciones de frontera, etc.

En ocasiones, no es posible cambiar las variables anteriormente citadas debido a limitantes de diseño. Por tal motivo, es necesario contar con una metodología que resuelva el problema de manera rápida y eficiente. Es ahí donde reside la importancia de modificar las frecuencias naturales de los elementos tipo placa. La presente investigación propone el uso de refuerzos metálicos y compuestos para la modificación de la dinámica de la placa.

1.6. Estructura del documento.

La estructura del siguiente documento de tesis se conforma por cinco capítulos. El capítulo uno muestra los aspectos generales de la investigación realizada. Se declaran los objetivos y sus especificaciones para mayor entendimiento de la problemática a resolver. En este apartado también se encuentra el estado del arte. En él, se tiene registro de todos los antecedentes del problema y cómo se resolvieron a lo largo de la historia.

En el capítulo dos se encuentra el marco teórico. En esta sección se detallan las teorías y modelos matemáticos que describen el comportamiento de una placa isotrópica y compuesta. El entendimiento de las bases que representan el comportamiento vibratorio de un elemento placa forma el pilar fundamental del desarrollo de la metodología de solución.

En el capítulo tres se desarrolla una metodología, comenzando con la validación del modelo por elemento finito con los modelos presentados en el capítulo dos. Este estudio es importante ya que de ella se derivan el tipo de malla, los desplazamientos nodales y las frecuencias naturales. También se explica el procedimiento para la obtención de las configuraciones y dos conjuntos de diseño.

En el capítulo cuatro se muestran los resultados de los análisis numéricos (sistema placa-refuerzo). En este apartado se analizan las tendencias de las frecuencias, así como también el grado de influencia de los refuerzos isotrópicos y compuestos. Finalmente, en el capítulo cinco se describen las conclusiones y las recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 2: Marco teórico.

En este capítulo se describen los modelos matemáticos para la obtención de las frecuencias naturales en placas homogéneas y no homogéneas. El entendimiento de estos modelos conllevará a la calibración de los modelos numéricos para la obtención de frecuencias y formas modales en placas con refuerzos.

Se introducen los conceptos de placas compuestas ortotrópicas, laminadas e isotrópicas. También se analizan los trabajos de Warburton (1954) para la obtención de frecuencias en placas homogéneas y su posterior aplicación en placas ortotrópicas realizadas por Hearmon (1959). Se presenta la relación que existe entre la orientación de las fibras refuerzo en una matriz de un material compuesto. Finalmente se analizan los modelos matemáticos propuestos por Reddy (1983) para el cálculo de frecuencias en placas laminadas mediante el método de los eigenvalores y eigenvectores.

2.1. Materiales compuestos.

Un material compuesto es aquel cuyas propiedades se derivan de la unión de dos o más componentes. Estos componentes por sí solos carecen de las mejoras presentadas por un material compuesto. Generalmente los materiales compuestos se dividen en dos partes fundamentales, estos son: fibras y refuerzos. Ambas en conjunto presentan propiedades mejoradas como [Jones, 1999]:

- Mejor resistencia.
- Rigidez.
- Resistencia a la corrosión.
- Peso.
- Mayor vida a la fatiga.
- Mayor resistencia al desgaste.
- Aislamiento acústico.

Las fibras dan a la matriz la consistencia necesaria para resistir eficientemente los esfuerzos. El diámetro de estas puede variar de entre 5 y 15 micrómetros y son manufacturadas mediante máquinas textiles especiales [Gay, 2003]. Estas fibras se encuentran de dos formas, siendo de fibras largas y continuas hasta pequeñas fibras cortas.

En ocasiones un material compuesto puede ser clasificado en función de la orientación de sus fibras. Estas son [Gay, 2003]:

- Unidireccionales: Las fibras están orientadas en una sola dirección.
- Bidimensionales: Entretejidas o no entretejidas.
- Tridimensionales: Las fibras están orientadas en muchas direcciones.

Por otra parte, la matriz es el componente que mantiene a las fibras unidas y en la orientación en la que se requiere que trabajen. La matriz de un material compuesto se puede clasificar como:

- Matriz polimérica: Siendo la más común y de mayor empleo a nivel ingeniería. Por citar algunos ejemplos se tiene las resinas epóxica, los termoplásticos, poliésteres y silicones.
- Matriz mineral: Las matrices minerales son empleados para aplicaciones que requieran resistencias a altas temperaturas.
- Matriz metálica: En este apartado entran las aleaciones como el aluminio y titanio.

2.2. Comportamiento mecánico de un material compuesto.

Existe una infinidad de comportamientos mecánicos en un material compuesto. Esto depende en gran medida de los elementos que constituyen al material. Sin embargo, en la mayoría de los casos pueden ser analizados mediante las teorías mecánicas existentes. Los materiales que comúnmente se usan en la ingeniería presentan dos características principales [Barbero, 2011]:

- Homogéneos: Presentan las mismas propiedades a través de todo el cuerpo. Esto quiere decir que sus propiedades son independientes de la posición.
- Isotrópicos: Las propiedades son las mismas bajo distintas direcciones en el cuerpo.

Sin embargo, para un material compuesto este tipo de comportamiento no existe ya que depende directamente de las fibras y la matriz que lo conforman. Esto abre el campo a tres propiedades mecánicas diferentes. Estos son [Jones, 1999]:

- No homogeneidad: Las propiedades del material son diferentes a través de todo el cuerpo.

- Ortogonalidad: Las propiedades del material son simétricas con respecto a tres planos ortogonales.
- Anisotropía: No existen planos de simetría por lo que las propiedades dependen de la orientación.

2.3. Relaciones esfuerzo deformación para una placa.

Para una placa que respete los rangos de elasticidad, las relaciones esfuerzo deformación están dadas por la ley generalizada de Hooke. Estas relaciones dan como resultado dos importantes matrices que caracterizan al material: La matriz de rigidez y flexurante. En notación compacta, estas relaciones están dadas por las ecuaciones (2.1) y (2.2):

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.1)$$

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.2)$$

en donde $[C]$ y $[S]$ corresponde a la matriz de rigidez y flexurante respectivamente. Como puede observarse y derivado de la ley de Hooke, la matriz de flexurante $[S]$ es la inversa de la matriz de rigidez $[C]$. Para un material isotrópico, la matriz de rigidez tiene un total de 2 componentes independientes que pueden ser obtenidas a partir de las tres constantes de ingeniería que lo caracterizan. Estas constantes son: módulo de elasticidad, módulo de cortante y relación de Poisson. La ecuación (2.3) muestra la matriz de rigidez para una placa isotrópica en la cual C_{11} y C_{12} definen por completo la matriz [Barbero, 2011].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Para un material compuesto que exhiba propiedades anisotrópicas, existe un total de 36 constantes independientes. Esto se debe a que no existen planos de simetría en donde las propiedades sean las mismas. En la ecuación (2.4) se muestra la matriz de rigidez de una placa anisotrópica.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Sin embargo, la mayoría de los materiales compuestos exhiben un comportamiento ortotrópico, el cual tiene tres planos simétricos y ortogonales. Las relaciones esfuerzo-deformación de un material ortotrópico están expresadas en la ecuación (2.5) [Jones, 1999]. Para conformar dicha matriz es necesario 9 propiedades ingenieriles correspondientes a cada eje de simetría.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

En la ecuación (2.5) puede observarse que para un material ortotrópico existen un total de 9 componentes que definen la rigidez del sistema. Estos componentes están definidos en la ecuación (2.6) a (2.10) [Kant, 2001]

$$C_{11} = \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}; \quad C_{12} = \frac{E_1(\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta}; \quad (2.6)$$

$$C_{13} = \frac{E_1(\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta}; \quad C_{22} = \frac{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{\Delta}; \quad (2.7)$$

$$C_{23} = \frac{E_2(\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta}; \quad C_{33} = \frac{E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}; \quad (2.8)$$

$$C_{44} = G_{23}; \quad C_{55} = G_{31}; \quad C_{66} = G_{12} \quad (2.9)$$

$$\Delta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}) \quad (2.10)$$

Como se verá en secciones posteriores, estos coeficientes pueden ser aplicados tanto en el espacio como en el plano dependiendo de los ejes de simetría del material. Sin embargo, para un sistema bidimensional, las propiedades referenciadas al eje principal 3 son despreciadas lo que conlleva a un análisis más simplificado y sencillo.

2.3.1. Relaciones de esfuerzo-deformación para un estado plano de esfuerzos en un material ortotrópico.

Un material compuesto con fibras unidireccionales de refuerzo o UDC, por sus siglas en inglés, se caracteriza por tener fibras alineadas y continuas embebidas en una matriz polimérica. Esta configuración le permite tener propiedades mejoradas con respecto a los materiales de ingeniería comunes, ya que une la gran resistencia a la tracción de las fibras con la resistencia al corte y flexión de la matriz polimérica. Dada la facilidad para cambiar la orientación de las fibras, las propiedades de la lámina tienden a variar con respecto al ángulo que estas forman con un eje de referencia. Esto genera que las rigideces de la placa dependan en gran medida de la orientación de las fibras y el apilamiento de los pliegues [Pardoen, 2014]. En la figura 2-1 se muestra una lámina compuesta (UDC) y sus constantes ingenieriles.

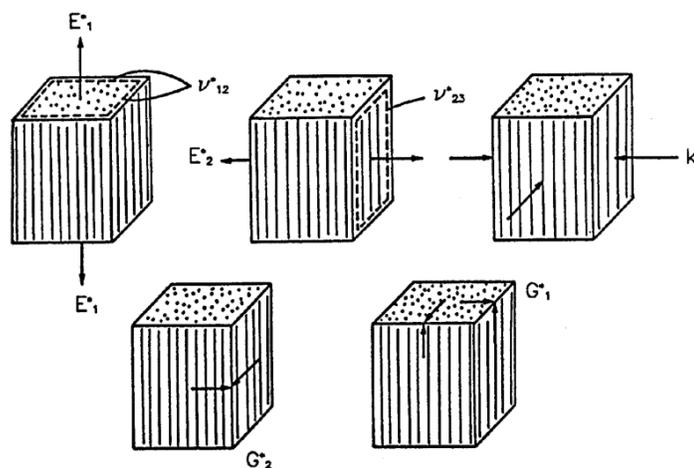


Figura 2- 1. Material compuesto ortotrópico y sus constantes de ingeniería en sus ejes principales 1 y 2 [Pardoen, 2014].

Los materiales UDC son estudiados generalmente en el plano (plano xy). Una lámina UDC es sometida a esfuerzos planos en la mayoría de los casos por lo que los esfuerzos en z son despreciables. El estado de esfuerzo para una lámina UDC se define como:

$$\sigma_3 = 0; \sigma_4 = 0; \sigma_5 = 0 \quad (2.11)$$

$$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 \neq 0; \sigma_6 \neq 0 \quad (2.12)$$

en donde el esfuerzo principal $\sigma_3 = 0$ reduce la forma de las ecuaciones (2.6) a (2.10) en la siguiente forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Los componentes que definen por completo la matriz de rigidez para una lámina compuesta con fibras continuas se expresa como [Jones, 1999]:

$$c_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad c_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.14)$$

$$c_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad c_{66} = G_{12} \quad (2.15)$$

Además, dadas las propiedades elásticas del material y a la relación que existe en el componente C_{12} , las relaciones de Poisson cumplen con la siguiente condición:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.16)$$

La matriz de cortante está definida por los módulos de corte correspondientes tal y como se describe en la ecuación (2.17) [Barbero, 2011]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & 0 \\ 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

donde la ecuación (2.17) queda como:

$$c_{44} = G_{23}; \quad c_{55} = G_{13} \quad (2.18)$$

2.3.2. Relación esfuerzo-deformación en base a la orientación de la fibra.

En secciones previas se analizó la matriz de rigidez y flexurante de un material compuesto unidireccional. En esta sección se rediseñará dicha matriz en función del ángulo de la fibra con respecto a un eje de referencia fijo. En la figura 2-2 se muestra un pequeño cubo diferencial cuyas fibras están orientadas a cierto ángulo θ con respecto a un sistema de referencia xy .

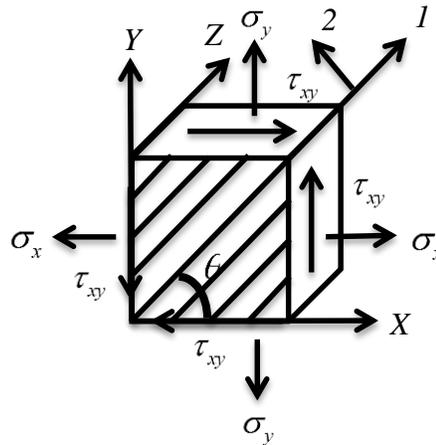


Figura 2- 2 Elemento diferencial de una lámina compuesta con una orientación de fibra determinada [Gibson, 1994].

Dada la figura 2-2, la sumatoria de todas las fuerzas en los planos de corte 1 y 2 dan como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.19)$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.20)$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.21)$$

De este sistema de ecuaciones se deriva la matriz de transformación denotada por $[T]$. Esta matriz puede ser aplicada para la obtención de esfuerzos y deformaciones en los ejes principales [Nettles, 1994]:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen}^2 \theta & 2\text{sen}\theta \cos \theta \\ \text{sen}^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\text{sen}\theta \cos \theta \\ -\text{sen}\theta \cos \theta & \text{sen}\theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Reacomodando la ecuación (2.22) en (2.13) se llegan a las siguientes expresiones que modifican los componentes de la matriz de rigidez de una placa compuesta ortotrópica [Nettles, 1994]:

$$\overline{c_{11}} = c_{11}m^4 + 2(c_{12} + 2c_{66})m^2n^2 + c_{22}n^4 \quad (2.23)$$

$$\overline{c_{12}} = (c_{11} + c_{22} - 4c_{66})m^2n^2 + c_{12}(m^4 + n^4) \quad (2.24)$$

$$\overline{c_{22}} = c_{11}n^4 + 2(c_{12} + 2c_{66})m^2n^2 + c_{22}m^4 \quad (2.25)$$

$$\overline{c_{16}} = (c_{11} - c_{12} - 2c_{66})m^3n + (c_{12} - c_{22} + 2c_{66})mn^3 \quad (2.26)$$

$$\overline{c_{26}} = (c_{11} - c_{12} - 2c_{66})n^3m + (c_{12} - c_{22} + 2c_{33})nm^3 \quad (2.27)$$

$$\overline{c_{26}} = (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 2c_{66})m^2n^2 + c_{66}(m^4 + n^4) \quad (2.28)$$

en donde los valores de C indican los coeficientes de rigidez de la placa sin un ángulo de rotación establecido. Los valores de m y n denotan los cosenos y senos del ángulo de rotación de la fibra. Para la ecuación (2.17) también existen relaciones que modifican su magnitud. Estas relaciones son [Barbero, 2011]:

$$\overline{c_{44}} = c_{44}m^2 + c_{55}n^2 \quad (2.29)$$

$$\overline{c_{55}} = c_{44}n^2 + c_{55}m^2 \quad (2.30)$$

2.4. Frecuencias naturales en placas rectangulares y lisas.

Existe un total de 21 combinaciones diferentes en las cuales una placa puede estar apoyada [Leissa, 1970]. Estas condiciones de frontera definen en gran medida la rigidez y las ecuaciones que dominan el comportamiento dinámico de una placa. En el año de 1954, Warburton presenta una metodología para obtener de manera analítica y aproximada la frecuencia natural de una placa bajo distintas condiciones de frontera [Warburton, 1954]. Su trabajo se basó en el uso de funciones viga, las cuales, definían la forma de onda de una placa sometida a vibraciones libres. La ecuación (2.31) muestra la relación empleada por Warburton (1954) que describe los desplazamientos de una placa flexionante.

$$W(x, y) = X(x) Y(y) \quad (2.31)$$

en donde $X(x)$ y $Y(y)$ representa la forma modal de una viga en el eje x y y respectivamente. Las ventajas que presenta el uso de las funciones viga para describir la forma modal de una placa reside en el hecho de que se consideran las condiciones de frontera de la placa tanto en x como en y . Gracias a la predicción de la forma modal de la placa mediante el uso de las funciones vigas, Warburton (1954) implementa el método energético de Rayleigh, el cual establece una relación entre la energía potencial máxima de la placa y su energía de deformación. De esta relación se deriva la siguiente ecuación:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 D}{a^4 \rho} \left\{ G_x^4 + G_y^4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 [\nu H_x H_y + (1-\nu) J_x J_y] \right\} \quad (2.32)$$

donde a y b representan las dimensiones de la placa, ρ la densidad del material y ν su relación de Poisson. El valor D se define como la rigidez a la flexión para una placa isotrópica, este valor está dada por Leissa (1970):

$$D = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \quad (2.33)$$

donde E y h indican el módulo de elasticidad y espesor de la placa respectivamente. Los coeficientes G , H y J son obtenidas a partir de la tabla 2-1 en donde x y y son remplazados

dependiendo del eje en el cual se analiza la placa. Los valores m y n representan las líneas nodales perpendiculares y paralelas de la placa.

Este método de solución es aproximado, ya que el uso de las funciones viga no definen perfectamente las ondulaciones que sufre la placa durante la flexión, no obstante, el error es muy pequeño en comparación con otros métodos de solución.

<i>C.F.</i>	m, n	G	H	J
<i>F-F</i>	2	1.506	1.248	1.248
	3, 4, 5, ...	$m - 0.5$	$(m - 0.5)^2[1 - 2/(m - 0.5)\pi]$	$(m - 0.5)^2[1 - 2/(m - 0.5)\pi]$
<i>F-S</i>	2, 3, 4, ...	$m - 0.75$	$(m - 0.75)^2[1 - 1/(m - 0.75)\pi]$	$(m - 0.75)^2[1 - 1/(m - 0.75)\pi]$
<i>F-L</i>	1	0.597	-0.0870	0.471
	2	1.494	1.347	3.284
	3, 4, 5, ...	$m - 0.5$	$(m - 0.5)^2[1 - 2/(m - 0.5)\pi]$	$(m - 0.5)^2[1 - 2/(m - 0.5)\pi]$
<i>S-S</i>	2, 3, 4, ...	$m - 1$	$(m - 1)^2$	$(m - 1)^2$
	1	0	0	$3/\pi^2$
<i>S-L</i>	2, 3, 4, ...	$m - 0.75$	$(m - 0.75)^2[1 - 1/(m - 0.75)\pi]$	$(m - 0.75)^2[1 - 1/(m - 0.75)\pi]$
<i>L-L</i>	0	0	0	0
	1	0	0	$12/\pi^2$
	2	1.506	1.248	5.017
	3, 4, 5, ...	$m - 0.5$	$(m - 0.5)^2[1 - 2/(m - 0.5)\pi]$	$(m - 0.5)^2[1 - 6/(m - 0.5)\pi]$

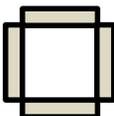
Tabla 2-1. Valores de los coeficientes G, H y J de la ecuación 2.32. (F) Fijo, (S) Simplemente apoyada, (L) Libre [Warburton, 1954].

2.5. Obtención de frecuencias naturales en placas isotrópicas bajo diversas condiciones de frontera.

Una forma de obtener las frecuencias naturales de una placa isotrópica bajo cualquier condición de frontera es mediante el uso de la ecuación (2.34) [Harrys 2002]. Esta ecuación a diferencia de la metodología presentada en la sección previa, propone el uso de un coeficiente de corrección B . Este coeficiente involucra dos aspectos importantes: condiciones de frontera y modos de vibración. En la tabla 2-2 se presentan los valores de dicho coeficiente en función de estos dos aspectos.

$$\omega_n = B \sqrt{\frac{Eh^2}{\rho a^4 (1-\nu^2)}} \text{ rad / seg} \quad (2.34)$$

Cabe señalar que esta ecuación no sólo se aplica a placas cuadrangulares, sino que también su uso se extiende a otras geometrías (p.e. geometrías circulares, rectangulares, etc.).

Diagrama.	Condiciones de frontera.	Valor del coeficiente B							
		1	2	3	4	5	6	7	8
	<i>Un lado fijo-tres lados libres</i>	1.01	2.47	6.20	7.94	9.01			
	<i>Todos los lados fijos.</i>	10.40	21.21	31.29	38.04	38.22	47.73		
	<i>Dos lados fijos-dos lados libres.</i>	2.01	6.96	7.74	13.89	18.25			
	<i>Todos los lados libres.</i>	4.07	5.94	6.91	10.39	17.80	18.85		

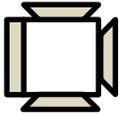
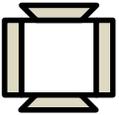
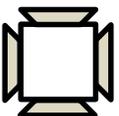
	Un lado fijo-tres lados simplemente soportados.	6.83	14.94	16.95	24.89	28.99	32.71		
	Dos lados fijos-dos lados simplemente soportados.	8.37	15.82	20.03	27.34	29.54	37.31		
	Todos los lados simplemente soportados.	5.7	14.26	22.82	28.52	37.08	48.49		

Tabla 2-2. Coeficiente de ajuste de la ecuación 2.34 en función de sus condiciones de frontera [Warburton, 1954].

2.6. Frecuencia natural en placas ortotrópicas homogéneas.

La obtención analítica de frecuencias naturales para placas ortotrópicas homogéneas es muy similar a la metodología propuesta por Warburton (1954). La diferencia entre un método y otro reside en la manipulación de las propiedades ortogonales del material. Esto quiere decir que en un material isotrópico y, debido a sus características mecánicas, existe una sola rigidez a la flexión D mientras que para un material compuesto existe un total de tres rigideces D_x , D_y y D_{xy} .

Estas rigideces contribuyen en gran medida sobre la dinámica vibratoria de una placa. Hearmon (1959) estudio dicha influencia y propuso una ecuación en la cual conjuntaba los datos presentados en la tabla 2-2 para la obtención de un parámetro de frecuencias λ .

$$\lambda_{ORT}^2 = \frac{\rho h \omega^2 a^2 b^2}{\pi^2 H} = \frac{D_x}{H} G_x^4 \frac{b^2}{a^2} + \frac{D_y}{H} G_y^4 \frac{a^2}{b^2} + 2 \left[H_x H_y + 2 \frac{D_{xy}}{H} (J_x J_y - H_x H_y) \right] \quad (2.35)$$

en donde D_x , D_y y D_{xy} representan las rigideces a la flexión. G , H y J son las constantes establecidas en la tabla 2-1. La constante H está definida por la ecuación (2.36) como [Dickinson, 1978]:

$$H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy} \quad (2.36)$$

Las rigideces de una placa ortotrópica la define Brancolini (2005) como:

$$D_x = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.37)$$

$$D_y = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.38)$$

$$D_{xy} = \frac{G_{12} h^3}{12} \quad (2.39)$$

en dado caso de que el estudio se realice sobre placas cuadrangulares y despejando ω , la ecuación (2.35) se reduce a la siguiente expresión:

$$\omega_{nat} = \sqrt{\left\{ \frac{D_x}{H} G_x^4 + \frac{D_y}{H} G_y^4 + 2 \left[H_x H_y + 2 \frac{D_{xy}}{H} (J_x J_y - H_x H_y) \right] \right\} \frac{\pi^2 H}{\rho h a^4}} \quad (2.40)$$

2.7. Frecuencia natural para placas rectangulares isotrópicas mediante funciones vigas.

En la sección 2.6 se presentó una metodología con la cual se pueden obtener, de manera analítica y aproximada, las frecuencias naturales de una placa ortotrópica bajo la combinación de cualquiera de las seis condiciones de frontera presentada en la tabla 2-1. Esta metodología puede ser extendida a placas isotrópicas y lisas mediante el proceso utilizado por Eschler (1950). La expresión final está dada por la ecuación 2.41 en donde se aprecia el valor de la rigidez de

una placa isotrópica, ecuación (2.33), y las constantes G , H y J de la tabla 2-1 para las condiciones dadas.

$$\lambda_{ISO}^2 = \frac{\rho h \omega^2 a^4}{\pi^4 D} = G_x^4 + G_y^4 \frac{a^4}{b^4} + 2 \frac{a^2}{b^2} [\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y] \quad (2.41)$$

2.8. Frecuencia natural en placas compuestas laminadas.

Una placa compuesta laminada es aquella cuya estructura está conformada por un número definido de placas ortotrópicas con una secuencia de apilamiento definida. Estas placas compuestas se dividen en dos ramas que son: placas laminadas *anti-simétricas* y *simétricas*.

Las placas laminadas *anti-simétricas* se caracterizan por tener una secuencia de apilamiento no simétrico con respecto al plano medio de la placa. Al no existir dicha simetría, las rigideces varían de manera alternada a través de todo su espesor. Por otra parte, las placas *simétricas*, tienen simetría con respecto a su plano medio. Dada la simetría existente, las rigideces son las mismas con respecto al eje medio de la placa. Como se verá a continuación dicha clasificación afecta la complejidad en la resolución de problemas dinámicos en placas laminadas.

En la figura 2-3 se ilustra la clasificación de las placas laminadas simétricas y anti-simétricas, así como dos ejemplos respectivos de cada rama. Ambos sistemas de placas (*simétricas* y *anti-simétricas*) pueden subdividirse en *cross-ply* y *angle-ply*. Las placas cuyo apilamiento es del tipo *cross-ply* se caracterizan por tener solo dos ángulos de orientación (0° y 90°). Por otra parte, los sistemas *angle-ply* se caracterizan por tener ángulos variados comprendidos en un rango de 0° a 90° .

El modo de análisis de ambos sistemas varía considerablemente ya que, como se verá más adelante, las rigideces de cada pliego o placa ortotrópica apilada contribuye significativamente en la rigidez total del sistema.

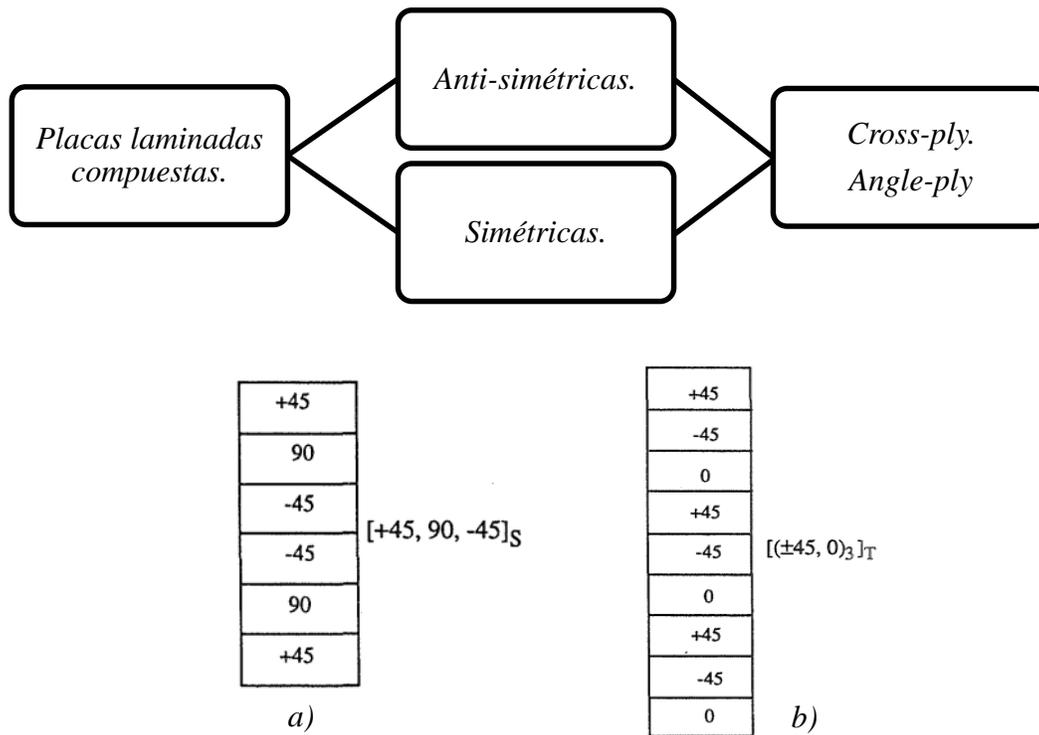


Tabla 2-3. Clasificación de una placa laminada. a) Placa laminada simétrica $[+45, 90, -45]_S$.
b) Placa laminada anti-simétrica $[(\pm 45, 0)_3]_T$.

2.9. Teoría de placas.

2.9.1. Primera teoría de la deformación por cortante para placas compuestas (FSDT).

La primera teoría por deformación cortante, FSDT por sus siglas en inglés, establece las siguientes hipótesis para describir el comportamiento de una placa compuesta sometida a esfuerzos [Nettles, 1994].

1. El espesor de la placa es muy pequeña en consideración a sus otras dimensiones.
2. Los pliegos o placas de la lámina están perfectamente unidas.
3. Las líneas perpendiculares a la superficie media de la placa h permanecen rectas y perpendiculares a la superficie después de la deformación.
4. La placa laminada es linealmente elástica.

Estas hipótesis son necesarias para definir el campo de desplazamiento FSDT. Nettles (1994) define el campo de desplazamientos FSDT como:

$$u = u_0 - z \frac{\delta w}{\delta x} \quad (2.42)$$

$$v = v_0 - z \frac{\delta w}{\delta x} \quad (2.43)$$

$$w = w_0 \quad (2.44)$$

en donde u , v y w representan los desplazamientos a través del espesor de la placa. El valor de z indica la localización de un punto con respecto a la superficie media de la placa (*ver figura 2-4*). En la figura 1-1 se presenta el comportamiento de una placa deformada bajo las hipótesis presentadas anteriormente. Aplicando la ley de Hooke a los desplazamientos en las ecuaciones (2.42) a (2.44) se tiene:

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta u_0}{\delta x} - z \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta v}{\delta y} = \frac{\delta v_0}{\delta y} - z \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\delta u_0}{\delta y} + \frac{\delta v_0}{\delta x} - 2z \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \quad (2.47)$$

que en su forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_6 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

en donde K representa las curvaturas en los ejes x , y y xy . Sustituyendo la ecuación (2.48) en (2.13) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{c_{11}} & \overline{c_{12}} & 0 \\ \overline{c_{12}} & \overline{c_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{c_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \overline{c_{11}} & \overline{c_{12}} & 0 \\ \overline{c_{12}} & \overline{c_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{c_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_6 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Siendo esta última forma la expresión general que relaciona las deformaciones por traslación y rotación del plano transversal de la placa con su rigidez, ecuaciones (2.14) a (2.16).

2.9.2. Esfuerzos y deformaciones en una placa laminada basada en la teoría FSDT.

Debido a que el esfuerzo sobre cada pliego de la placa varía a través del espesor a causa de la variación de rigideces, es conveniente definir los esfuerzos en función de la superficie media [Nettles, 1994]. Estas relaciones están dadas por:

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz \quad N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz \quad N_6 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 dz \quad (2.50)$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz \quad M_6 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 z dz \quad (2.51)$$

en donde N y M representan las fuerzas normales y momentos en los ejes x , y y el plano xy de la placa. Dichas sumatorias satisfacen el equilibrio estático de la placa sometido a esfuerzos.

De las ecuaciones (2.50) a (2.51) y sustituyendo en (2.49) se tienen las propiedades constitutivas del material. Estas propiedades están descritas en tres matrices denotadas por A , B y D las cuales son llamadas matrices extensional, acoplamiento y flexión respectivamente. Escritas de manera matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

de donde [Reddy, 1983]:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q}_{ij} dz = \sum_{k=1}^n \left[\overline{Q}_{ij} \right]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.53)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q}_{ij} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\overline{Q}_{ij} \right]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.54)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q}_{ij} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[\overline{Q}_{ij} \right]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.55)$$

En la figura 2-4 se muestra la ubicación de cada coordenada en la ecuación (2.53) a (2.55) [Nettles, 1994].

2.9.3. Relaciones constitutivas y la teoría de alto orden para placas laminadas (HSDT).

Las teorías de alto orden, HSDT por sus siglas en inglés, definen el comportamiento mecánico de la sección transversal h de una manera más precisa que las teorías FSDT. Sin embargo, la resolución analítica de dichas ecuaciones representa un reto para los investigadores e ingenieros de placas. Reddy (1983) propuso el siguiente conjunto de ecuaciones para el desplazamiento de un punto cualquiera a través del espesor de una placa:

$$u = u_0 - z \left[\psi_x - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_x + \frac{\delta w}{\delta x} \right) \right] \quad (2.56)$$

$$v = v_0 - z \left[\psi_y - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_y + \frac{\delta w}{\delta y} \right) \right] \quad (2.57)$$

$$w = w_0 \quad (2.58)$$

en donde ψ_x y ψ_y son la rotación de la sección transversal perpendicular al eje x y y respectivamente. Este nuevo campo de desplazamiento da como resultado una nueva matriz constitutiva. Esta matriz constitutiva que relaciona los esfuerzos con las deformaciones de la placa está dada por [Reddy, 1983]:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & & B_{22} & B_{26} & & E_{22} & E_{26} \\ & \text{sim.} & A_{66} & \text{sim.} & & B_{66} & \text{sim.} & & E_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ & & & & D_{22} & D_{26} & & F_{22} & F_{26} \\ & & & \text{sim.} & & D_{66} & \text{sim.} & & F_{66} \\ & \text{simetrica} & & & & & H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ & & & & & & & H_{22} & H_{26} \\ & & & & & & \text{sim.} & & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_6^0 \\ \kappa_1^2 \\ \kappa_2^2 \\ \kappa_6^2 \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

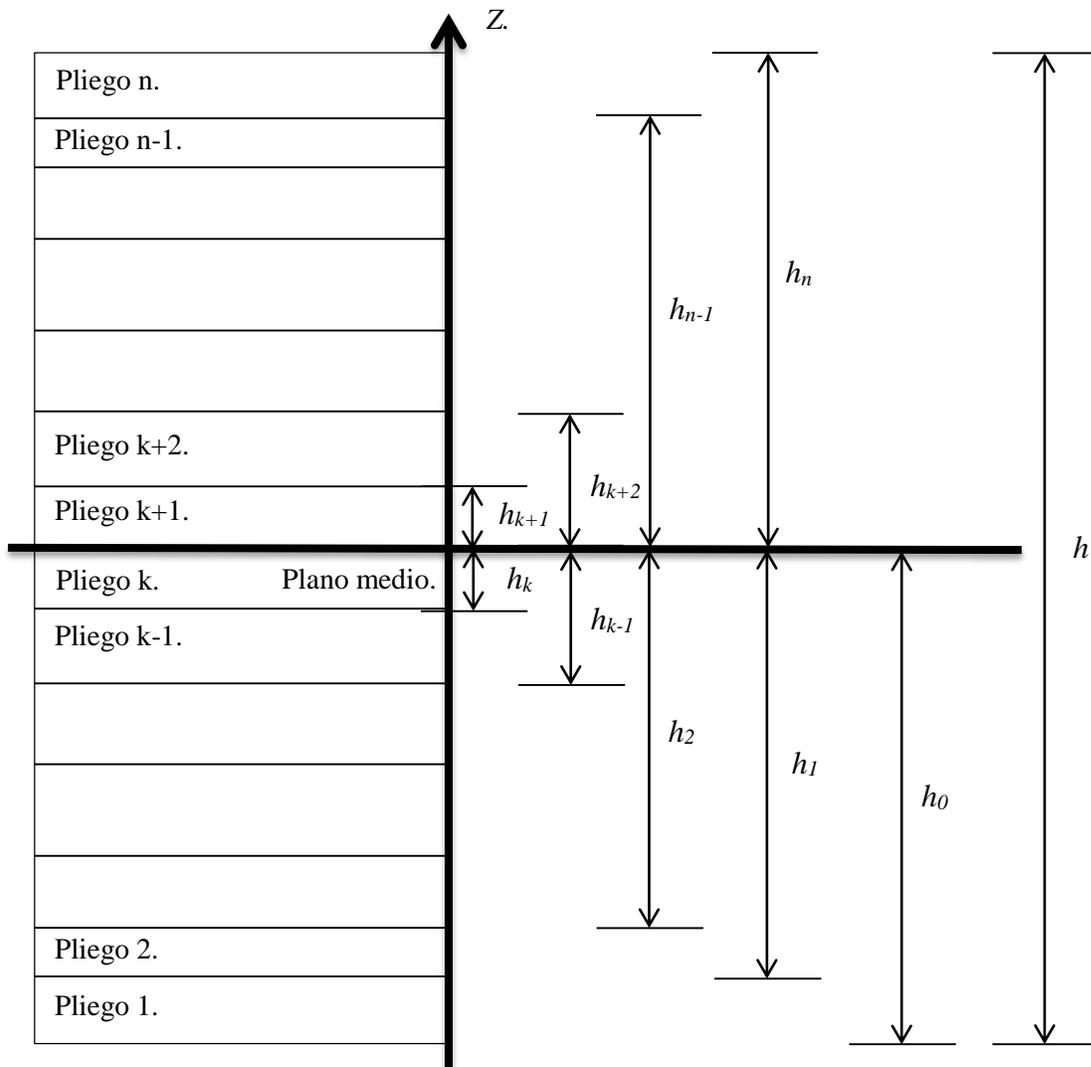


Tabla 2- 4. Sección transversal de una placa laminada [Reddy, 1983].

y para los esfuerzos cortantes se tiene [Reddy, 1983]:

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \\ R_2 \\ R_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} & D_{44} & D_{45} \\ A_{45} & A_{55} & D_{45} & D_{55} \\ \text{sim.} & & F_{44} & F_{45} \\ & & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \\ \varepsilon_4^2 \\ \varepsilon_5^2 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

donde los valores de A , B , D , E , F y H están expresados como [Reddy, 1983]:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.61)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} (1, z^2, z^4) dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (2.62)$$

Shenoi (1999) define las inercias de la placa como:

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.63)$$

Estas constantes forman la base de la teoría de Reddy para la obtención de las frecuencias naturales en placa laminadas. Cada una de ellas forma dos matrices importantes cuya importancia se mostrará más adelante: matriz de masa y rigidez.

2.10. Ecuación característica y problema de los eigenvalores (HSDT) y (FSDT).

Debido a la complejidad de las ecuaciones establecidas por Reddy (1983), la solución exacta se derivó a una sola condición de frontera. Dichas condiciones están establecidas en las ecuaciones (2.64) a (2.67) en donde se aprecia que la solución exacta mediante la teoría HSDT existe para dos tipos de placas laminadas: *cross ply* y *angle ply*.

$$u(x, 0) = u(x, b) = v(0, y) = v(a, y) = 0 \quad (\text{cross-ply}) \quad (2.64)$$

$$u(0, y) = u(a, y) = v(x, 0) = v(x, b) = 0 \quad (\text{angle-ply}) \quad (2.65)$$

$$w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(a, y) = 0 \quad (2.66)$$

$$\psi_x(x, 0) = \psi_x(x, b) = \psi_y(0, y) = \psi_y(a, y) = 0 \quad (2.67)$$

en donde u , v y w representan los desplazamientos en los ejes de referencia xyz . En ambos casos los desplazamientos z están restringidos. Los valores de ψ representan las restricciones a flexión dependiendo el eje de referencia. En la figura 2-5 se muestra la geometría y el sistema de coordenadas para una placa rectangular laminada.

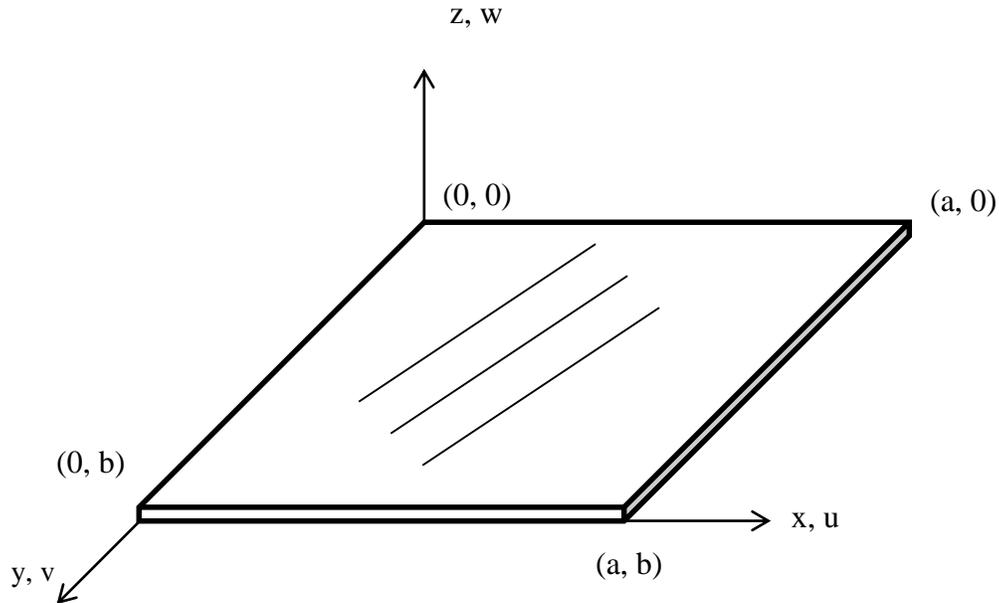


Tabla 2-5. Geometría y coordenadas de una placa laminada.

Dado que las condiciones elásticas se respetan en todo momento, la ecuación característica que define la dinámica de una placa laminada ortotrópica, se define como [Shenoi, 1999]:

$$([C] - \lambda[M])\{\Delta\} = \{0\} \quad \Delta = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

En términos de sus componentes queda:

$$\left(\begin{array}{ccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ & & & C_{44} & C_{45} \\ sim. & & & & C_{55} \end{array} \right) \begin{array}{l} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{array} - \lambda \left(\begin{array}{ccccc} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ & & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ & & & M_{44} & M_{45} \\ sim. & & & & M_{55} \end{array} \right) \begin{array}{l} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{array} = \{0\} \quad (2.69)$$

donde U , V y W son los desplazamientos modales en función al modo de vibración. Los valores de X y Y son las pendientes de la curva modal. Los valores de la matriz de masa $[M]$ y de rigidez $[C]$ están dados en el apéndice A de este documento.

La solución de la ecuación (2.69) conlleva a la obtención de las frecuencias naturales de un laminado. Cabe señalar que los coeficientes m y n definen las formas modales de las cuales se analiza la placa. Esta expresión es aplicable para las teorías HSDT y FSDT.

Las expresiones m y n están incluidas en dos constantes definidas por Sheno (1999) como:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad (2.70)$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b} \quad (2.71)$$

Capítulo 3: Metodología.

A través del uso del método de elementos finitos se modelaron tres tipos de placas: isotrópico (acero), ortotrópico y laminado (AS4D/9310). Las dimensiones de cada placa son de 500x500x1 mm y cada una de ellas se encuentra bajo distintas condiciones de encastre. En los modelos numéricos se utilizaron elementos tipo Shell para representar el comportamiento de la placa bajo vibraciones libres. El tipo de procesador utilizado está basado en los algoritmos de *Lanczos* implementados en *Abaqus Explicit*.

Los modelos tienen una malla de 10x10 mm por lo que en total se obtuvieron 2,500 elementos y 2,601 nodos. Para llegar a dichas dimensiones de malla, se compararon los resultados analíticos de los modelos matemáticos de cada placa y los valores de los modelos numéricos (FEM). En cada una de las comparaciones se utilizó un porcentaje de error menor al 1%.

El diseño de cada refuerzo o parche se realizó a partir del comportamiento de las formas modales de una placa lisa de acero. Para ello fue necesario procesar los desplazamientos de cada nodo de la malla. La configuración de cada refuerzo depende de:

1. *El valor de referencia preestablecido.* Este valor puede variar de 0.1 hasta 0.5 del desplazamiento normalizado de la placa.
2. *El tipo de material de la placa.* Las rigideces y la densidad de la placa varían en función del tipo de material (homogéneo o no homogéneo).
3. *Las condiciones de frontera.*
4. *El modo de vibración.*

Dos conjuntos de diseño se derivan en la construcción de los refuerzos. El primer conjunto de diseño (PCD) cubre los valores de desplazamiento nodales que exceden el valor de referencia preestablecido. El segundo conjunto de diseño (SCD) ocupa la zona en donde el valor de desplazamiento es menor que la referencia.

El conjunto placa-refuerzo se analizó en base a los criterios establecidos anteriormente. Como una primera etapa en el estudio de los efectos de los refuerzos en la dinámica vibratoria de la placa de acero, se utilizó aluminio y el compuesto AS4D/9310. Los resultados son entonces comparados para ubicar los refuerzos cuya influencia son máximas y mínimas sobre la dinámica de la placa lisa de acero.

De esta manera se determinan los siguientes criterios a cumplir en la metodología:

1. La validación de los resultados del método de elementos finitos (FEM): Mediante el uso de los modelos matemáticos presentados en el capítulo 2, se validará la eficiencia de los modelos numéricos.
2. La obtención del mallado adecuado para ser implementados en los modelos placa refuerzo: Es necesario encontrar el mallado más óptimo que ahorre tiempo y velocidad de procesamiento.
3. Los desplazamientos nodales de la forma modal de la placa: Es importante contar con los desplazamientos nodales de la placa para ser analizados y procesados.
4. Proponer configuraciones adecuadas para el diseño de los refuerzos: Derivado del análisis de las formas modales, se proponen configuraciones adecuadas para cada tipo de modo de vibración y condiciones de frontera.

3.1. Verificación de la respuesta del modelo en el caso de una placa lisa isotrópica.

El análisis modal y de frecuencias una placa lisa isotrópica forma parte importante en el ajuste dinámico de la misma. Se obtendrán dos aspectos fundamentales de la dinámica vibratoria de la placa para el análisis: frecuencias naturales y formas modales. La primera de ellas servirá de referencia para comparar la influencia de la adición del refuerzo mientras que el segundo aspecto proporcionará información cuyo procesamiento ayudará a identificar las formas y la ubicación de los parches que serán adosados.

Para iniciar el estudio dinámico de placas se propone utilizar una placa de acero estructural A-36 de dimensiones 500x500x1 mm. Esta placa estará sujeta a 4 condiciones de fronteras distintas: fijo en uno, dos, tres y cuatro lados. En la tabla 3-1 se presentan la geometría las propiedades mecánicas de la placa a estudiar.

Dados los datos de la tabla 3-1 es posible construir un modelo numérico para su solución mediante el método de elementos finitos (FEM). Para comenzar con el diseño del modelo es necesario definir el tipo de elemento que se utilizará en la simulación. Para este caso de estudio es conveniente el uso de los elementos tipo *shell*. Estos elementos tienen un total de cinco grados de libertad en sus nodos los cuales son: traslación en los ejes *xyz* y rotación en los planos *xy* y *yz*. Una de las ventajas en el empleo de los elementos tipo *shell*

reside en la rapidez con la que se realiza el procesamiento de la información, además de que es posible modificar los espesores de la placa sin necesidad de modificar las dimensiones del modelo.

<i>Geometría y propiedades de la placa.</i>	<i>Magnitud.</i>
<i>Lado a.</i>	500mm
<i>Lado b.</i>	500mm
<i>Espesor.</i>	1mm
<i>Módulo de elasticidad (E)</i>	200Gpa
<i>Módulo de cortante (G)</i>	160Gpa
<i>Relación de Poisson (ν)</i>	0.26
<i>Densidad (ρ)</i>	7,850kg/m ³

Tabla 3-1. Geometría y propiedades mecánicas de la placa de acero A-36.

En cuanto a las características de la malla se propone el uso de elementos cuadrangulares o del tipo *quad*, dado que la geometría de la placa es cuadrangular. En total se generaron 2,500 elementos con un número de 2,601 nodos distribuidos por todo el cuerpo de la placa. La dimensión de cada elemento es de 10x10 mm.

3.2. Verificación de la respuesta del modelo en el caso de una placa ortotrópica (AS4D/9310).

Otro de los pasos fundamentales en el cumplimiento de los criterios de la metodología, es el estudio de una placa de material compuesto ortotrópico para su posterior adosamiento en placas lisas e isotrópicas. Hearmon (1959) estudio el comportamiento de una placa ortotrópica homogénea implementando el método energético de Rayleigh tal y como Warburton (1954) lo hizo en sus trabajos para placas isotrópicas.

Para comprobar el modelo de placa compuesto se propone un material de fibras de Boro embebidas en una resina epoxi (AS4D/9310). Este material exhibe propiedades ortotrópicas y sus constantes de ingeniería se presentan en la tabla 3-2.

<i>Propiedades.</i>	<i>Unidades.</i>	<i>AS4D/9310</i>
E_1	Gpa	133.86
$E_2 = E_3$	Gpa	7.706
$G_{12} = G_{13}$	Gpa	4.306
G_{23}	Gpa	2.76
$\nu_{21} = \nu_{13}$		0.301
ν_{23}		0.396
ν_{12}		0.0173

Tabla 3-2. Propiedades mecánicas AS4D/9310 [Barbero 2014].

Los valores de la tabla 3-2 son introducidos en el modelo numérico. La geometría de la placa es de 500x500x1 mm y su densidad de 1,520 kg/m³. Como primera aproximación se modelo una placa bajo cuatro condiciones de fronteras distintas (citadas en la sección 3.1). El modelo discreto para una placa en cantiléver se muestra en la figura 3-1 en donde los triángulos de color naranja representan el encastre de uno de sus lados.

3.3. Verificación de la respuesta del modelo en el caso de una placa ortotrópica laminada (AS4D/9310).

A diferencia de las placas compuestas homogéneas, un laminado presenta una rigidez que depende del número de pliegos aglomerados a través de todo su espesor. Estas, aunado con la orientación de las fibras, son variables cuya modificación altera en gran medida el valor de las frecuencias y sus formas modales. Para analizar el comportamiento dinámico de una placa compuesta laminada se emplearán dos teorías diferentes. Estas teorías son: La teoría del alto orden por deformación cortante (HSDT) y la primera teoría por deformación cortante (FSDT).

Se propone para el análisis una placa laminada del tipo *cross-ply* simétrica de cuatro pliegos [0/90]s. El material de la placa compuesta analizada es de Boro-Epoxi AS4D/9310 (propiedades mecánicas mostradas en la tabla 3-2) y sus dimensiones son de 500x500x10 mm. La matriz de rigidez general para la placa está dada en el *apéndice B* de este documento.

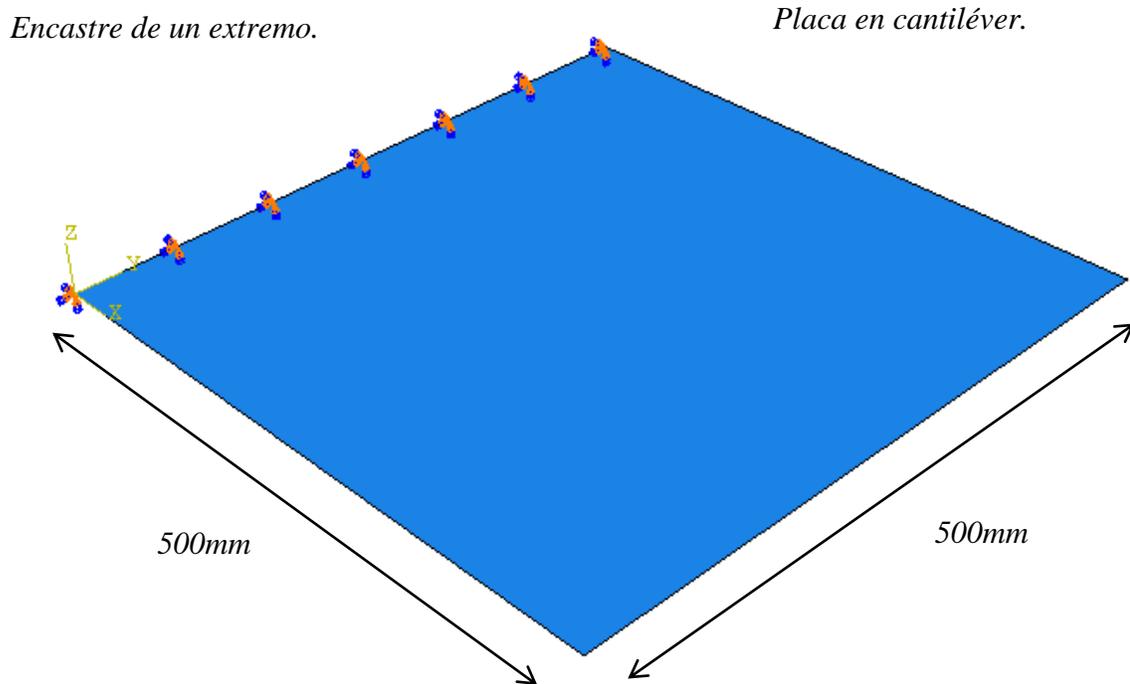


Figura 3-1. Modelo discreto de una placa ortotrópica en cantiléver (AS4D/9310).

Para comparar los resultados numéricos y analíticos de frecuencias y formas modales se presenta el modelo discreto en la figura 3-2. Las condiciones de frontera son simplemente apoyadas, esto quiere decir que los desplazamientos en el eje z y las rotaciones en xz y yz son restringidas. Las restricciones del modelo se adaptan a las ecuaciones propuestas por Reddy (1983).

Placa simplemente apoyada.

Espesor total de la placa: 10mm.
Espesor de cada pliego: 2.5mm.

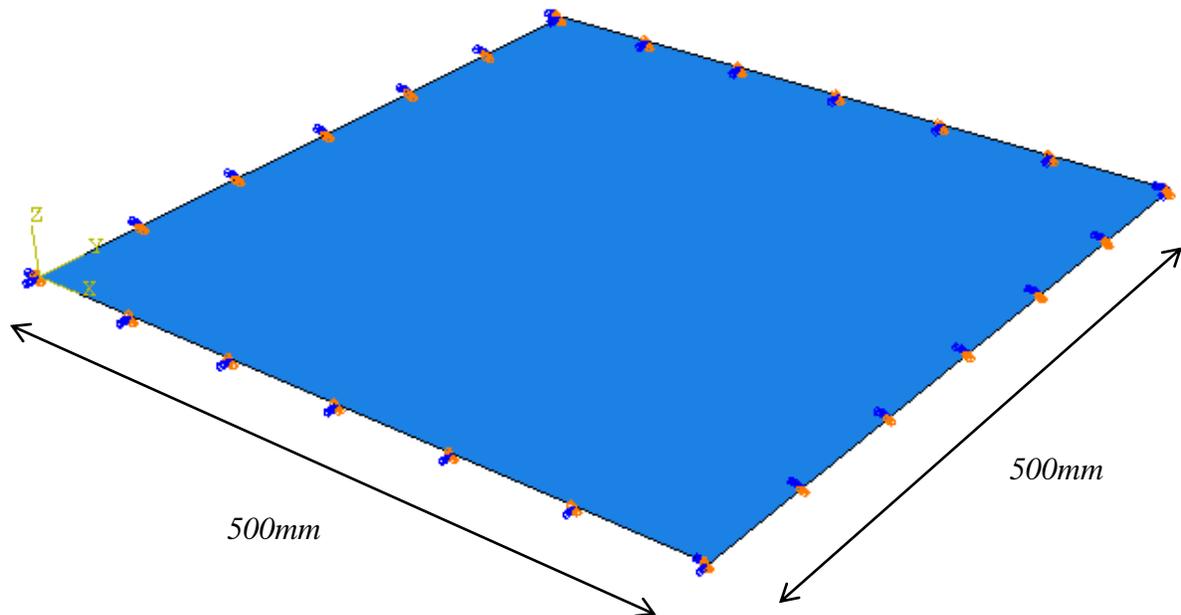


Figura 3-2. Modelo discreto de la placa AS4D/9310 laminada.

Para este modelo se utilizaron elementos tipo *shell* y una malla cuadrícula. El tamaño de cada elemento de malla es de 10x10 mm y en total hay 2,601 unidades cuadrangulares distribuidos por toda la superficie.

3.4. Diseño de algoritmo para el procesamiento de los desplazamientos nodales.

El objetivo del algoritmo para la obtención de los contornos de refuerzos se enlista a continuación:

1. Diferenciar entre un valor de referencia (0.1-0.5) y los desplazamientos nodales de la placa isotrópica (formas modales).
2. Obtener el conjunto de puntos que delimitan el contorno del refuerzo.
3. Exportar las coordenadas a una hoja de cálculo para su posterior refinamiento en un software tipo CAD.
4. Obtener datos auxiliares como: número de nodos que exceden el valor de referencia, áreas de contorno, frecuencias naturales y formas modales.
5. Desplegar los resultados en una interfaz gráfica.

En la figura 3-3 se muestra un esquema de procesamiento de datos comenzando con la simulación de los modelos de placas hasta la configuración final del refuerzo adosado y su posterior modelado numérico. En la figura 3-4 se despliega un diagrama de flujo que muestra cada proceso del algoritmo.

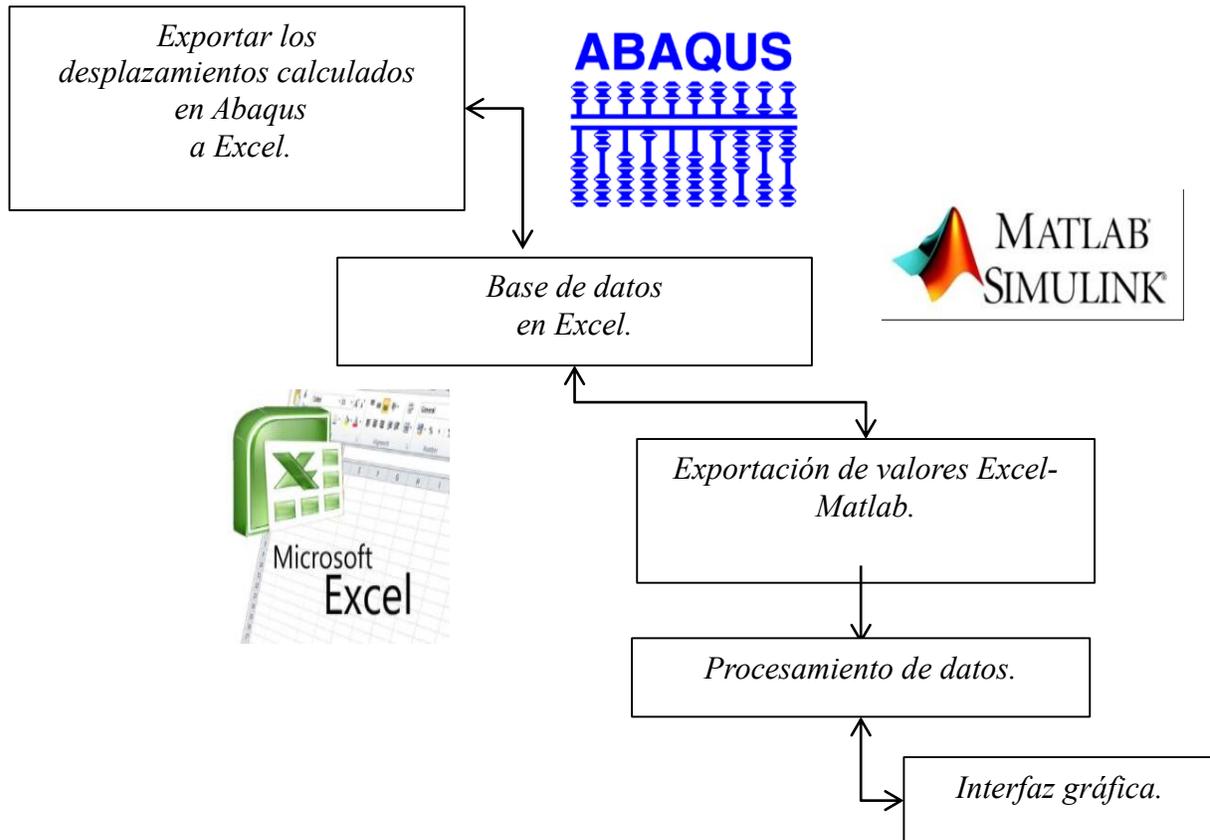


Figura 3-3. Esquema de proceso para la obtención de las configuraciones del refuerzo adosado.

Tal y como se muestra en el diagrama de flujo de la figura 3-3, el primer paso en el diseño de los refuerzos adosados en la placa de acero, es el de construir una base de datos en la que estén contenidos los desplazamientos nodales de cada forma modal. Esto se realiza mediante la creación de un *set* o lista de puntos tomando como referencia la malla de la placa lisa (*Capítulo 3, sección 3.1*).

En resumen, el conjunto de puntos tomados son los desplazamientos de cada nodo de la malla en la placa, esto es, un total de 2,600 elementos y 2,601 nodos. Considerando esta

información y tomando en cuenta que se analizaron las primeras 5 formas modales para 4 condiciones de frontera diferentes (fijo en uno, dos, tres y cuatro lados de la placa) se tiene un total de 52,020 datos para procesar.

Para diferenciar entre el valor de referencia establecido (valores entre 0.1 y 0.5) es necesario agrupar los valores mayores y menores al punto de referencia. Esto es, separar ambos conjuntos de puntos para localizar las zonas en donde se encuentra. Sin embargo, la importancia del algoritmo es la de obtener los contornos de dichas áreas para su posterior refinamiento en un software tipo CAD. Por este motivo se asigna a cada conjunto de desplazamiento nodal un valor de 0 y 1. Así, para el caso en que los desplazamientos nodales sean mayores al valor de referencia se le asigna el valor de 1, mientras que para los valores que se encuentran por debajo se le asigna el valor de 0.

La importancia de esto reside en que la suma de cada par de valores da como resultado 1 (para el caso en el que exista un punto del contorno) y 2 (en caso de que no exista una coordenada del contorno).

Esta discriminación da como resultado el conjunto de puntos que se muestra en la figura 3-5. Las ecuaciones (3-1) y (3-2) muestran la discriminación hecha por el programa:

$$P_i + P_{i+1} = 1 \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad \text{Coordenada} \quad (3-1)$$

$$P_i + P_{i+1} = 2 \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad \text{No coordenada} \quad (3-2)$$

Finalmente, cada coordenada obtenida del algoritmo es desplegada en la interfaz gráfica (GUI, *apéndice B*) para posteriormente ser exportada a una hoja de cálculo. Teniendo estos datos guardados en la hoja de cálculo y mediante un *macro*, es posible trasladar los puntos al software CAD para su rediseño mediante una curva o *spline*.

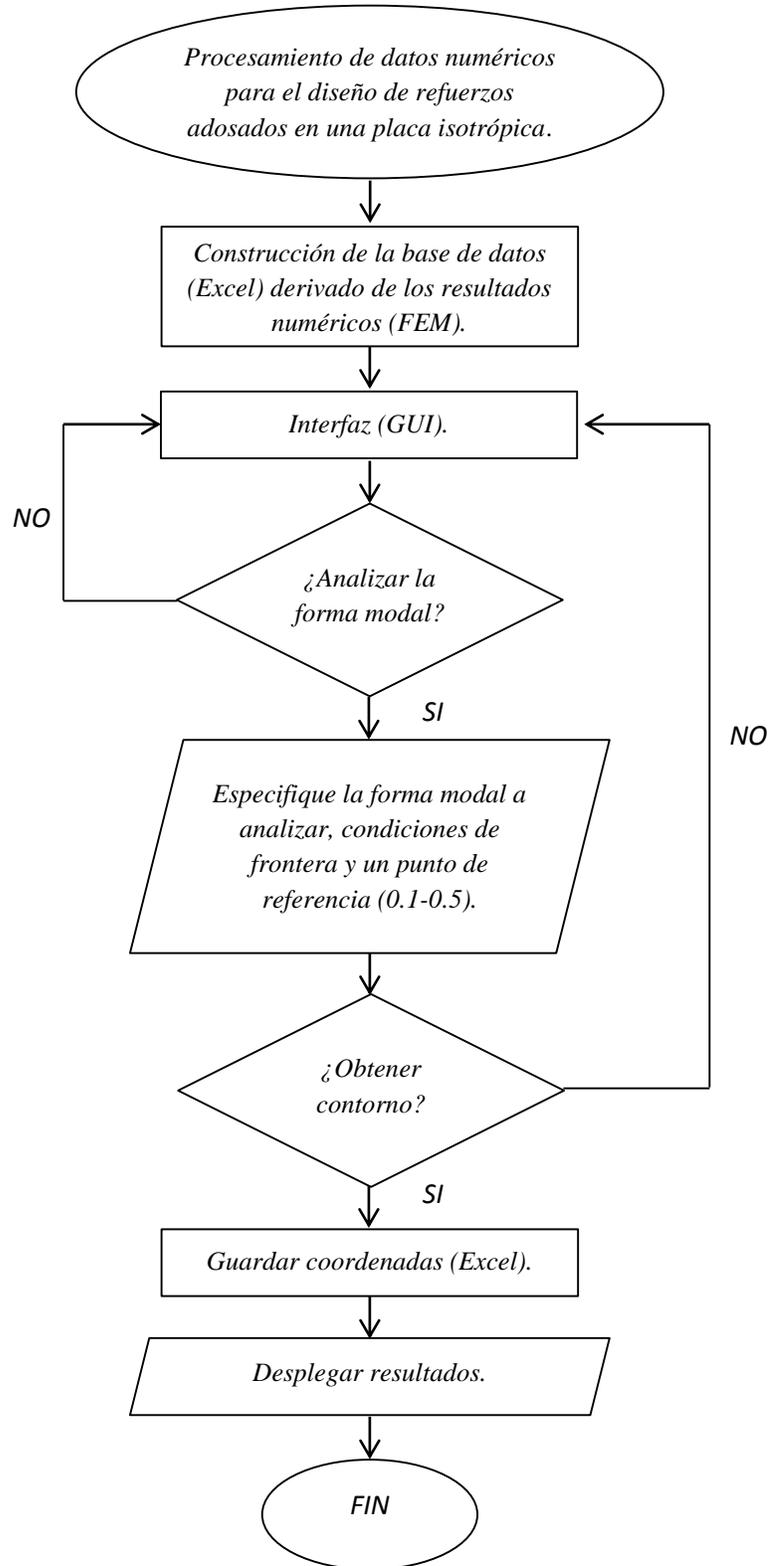


Figura 3-4. Diagrama de flujo para el procesamiento de datos obtenidos mediante el modelo numérico.

3.5. Configuración de los refuerzos para adosamiento.

La configuración de cada parche y su ubicación se basa en las formas modales obtenidas a partir de la simulación numérica de la placa lisa de acero A-36. Con la ayuda del algoritmo descrito en la sección 3.4 es posible obtener las coordenadas que delimitan los contornos de cada parche. Sin embargo, debido a que las coordenadas dadas son una sucesión de puntos en el plano (figura 3-5), es necesario definir una curva que pase por dichos puntos para suavizar los extremos de cada refuerzo. En la figura 3-5 se muestran las coordenadas dadas por el algoritmo para las primeras cuatro formas modales para una placa en cantiléver. La marca en X representa la zona que ha excedido el valor de referencia.

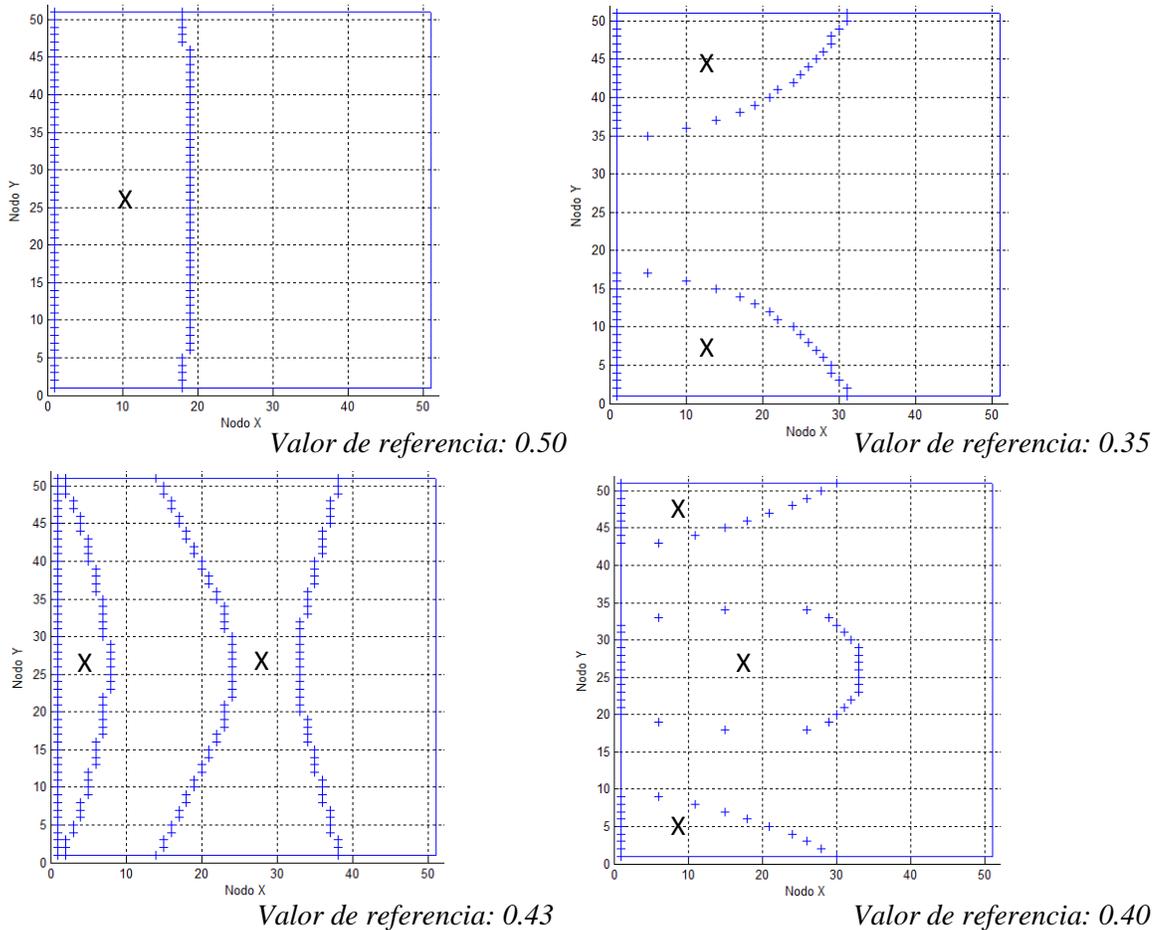


Figura 3-5. Conjunto de puntos para las primeras cuatro formas modales de la placa de acero.

En la tabla 3-3 se muestran las configuraciones de los parches ya refinados adosadas a la placa cuadrangular de acero en cantiléver. Cabe señalar que para el presente estudio se propone utilizar dos tipos de diseño. En primer lugar, se encuentran los parches diseñados a partir de los nodos que superan el valor de referencia establecidos en el algoritmo. Estos nodos forman parte de la malla asignada al modelo numérico de la placa. En el segundo segmento de diseño se encuentran aquellos refuerzos que no han excedido el punto de referencia preestablecidos. La marca con X muestra la influencia del refuerzo en cada diseño.

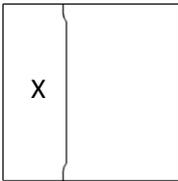
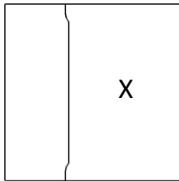
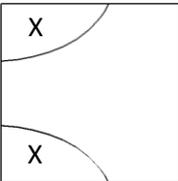
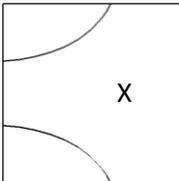
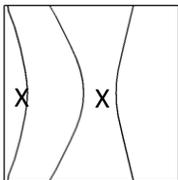
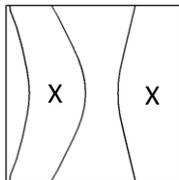
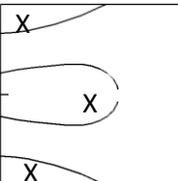
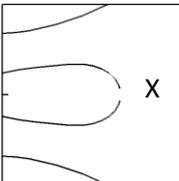
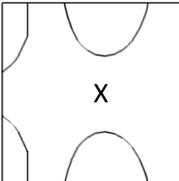
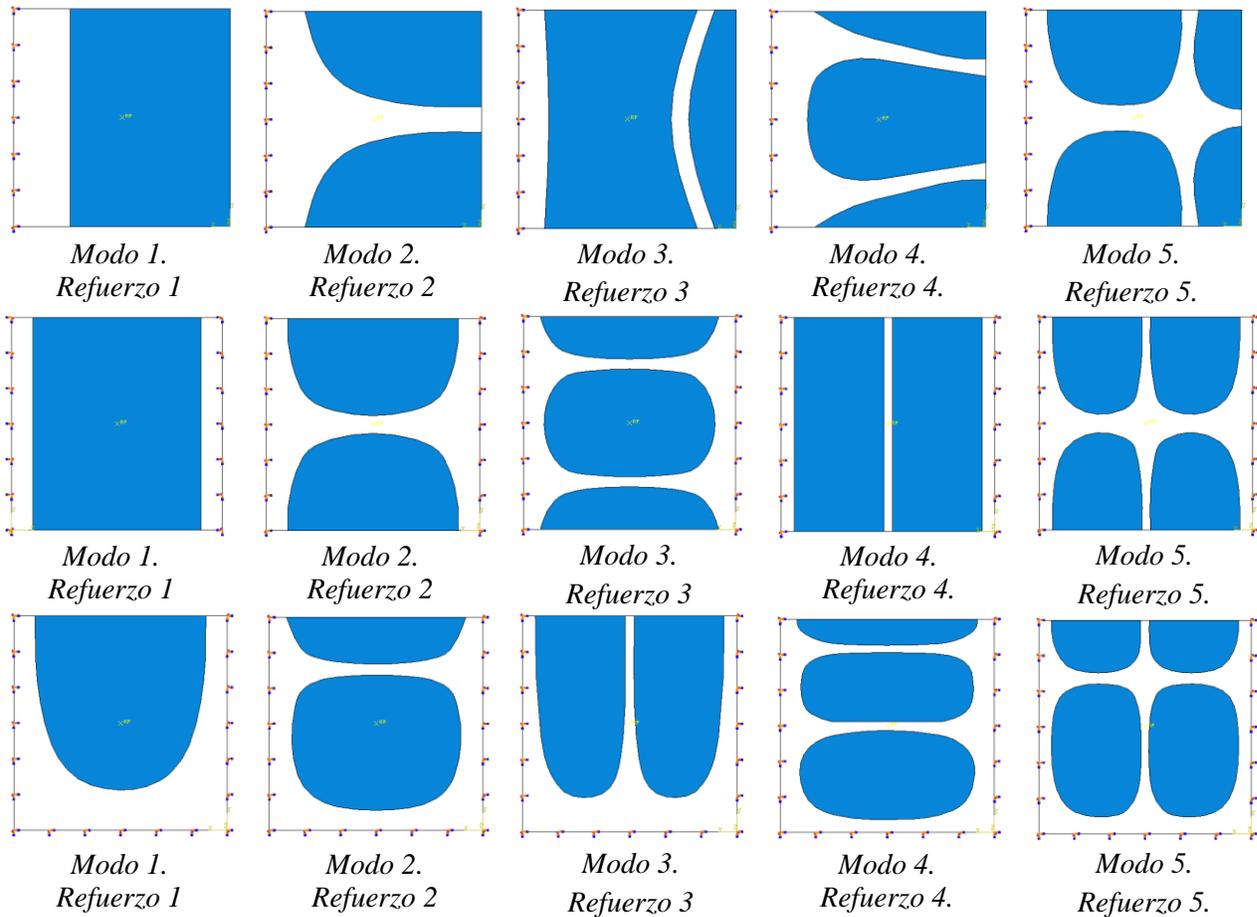
<i>Refuerzo.</i>	<i>Primer Conjunto de Diseño (PCD).</i>	<i>Segundo Conjunto de Diseño (SCD).</i>
<i>Refuerzo 1</i>		
<i>Refuerzo 2</i>		
<i>Refuerzo 3</i>		
<i>Refuerzo 4</i>		
<i>Refuerzo 5</i>		

Tabla 3-3. Refuerzos con contornos refinados para una placa lisa en cantiléver.

3.6. Modelado numérico del conjunto placa-refuerzo (acero-aluminio).

Dada la calibración de los modelos numéricos y analíticos de placas isotrópicas y compuestas, se procedió a unir los refuerzos basados en los conjuntos de diseño de la tabla 3-3. Se propone como material de refuerzo aluminio 1050. Las condiciones de frontera a analizar son: fijo en uno, dos, tres y cuatro lados de los extremos de la placa cuadrangular. La condición de adosamiento empleado será del tipo *tie* con elementos *shell* para la placa y los refuerzos. La condición *tie* implica que la influencia de unión entre la placa de acero y el refuerzo son nulas. El espesor de cada refuerzo es de 1mm. Los valores de referencia para la obtención de las coordenadas de los refuerzos serán de 0.1 hasta 0.5 siendo este último el valor límite en el cual las áreas de influencia de los parches son pequeñas. En la figura 3-6 se presentan los modelos numéricos del primer conjunto de diseño placa-refuerzo para un valor de referencia de 0.1 para las cinco condiciones de frontera estudiadas. La zona azul representa el parche adosado.



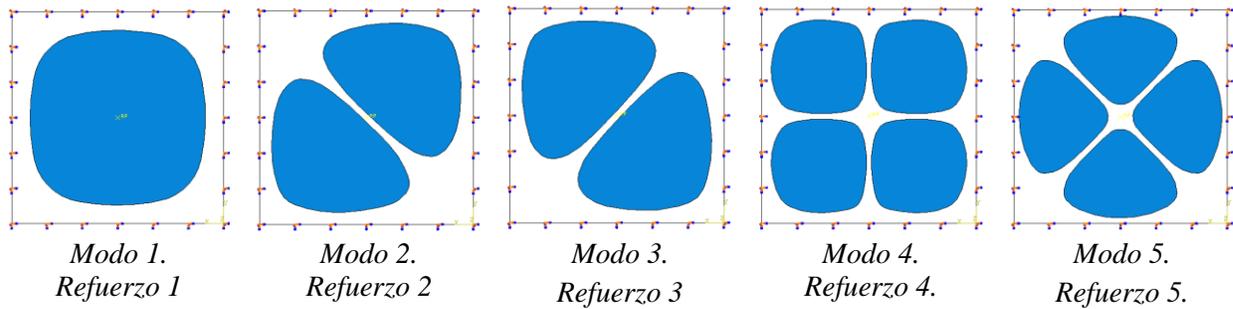
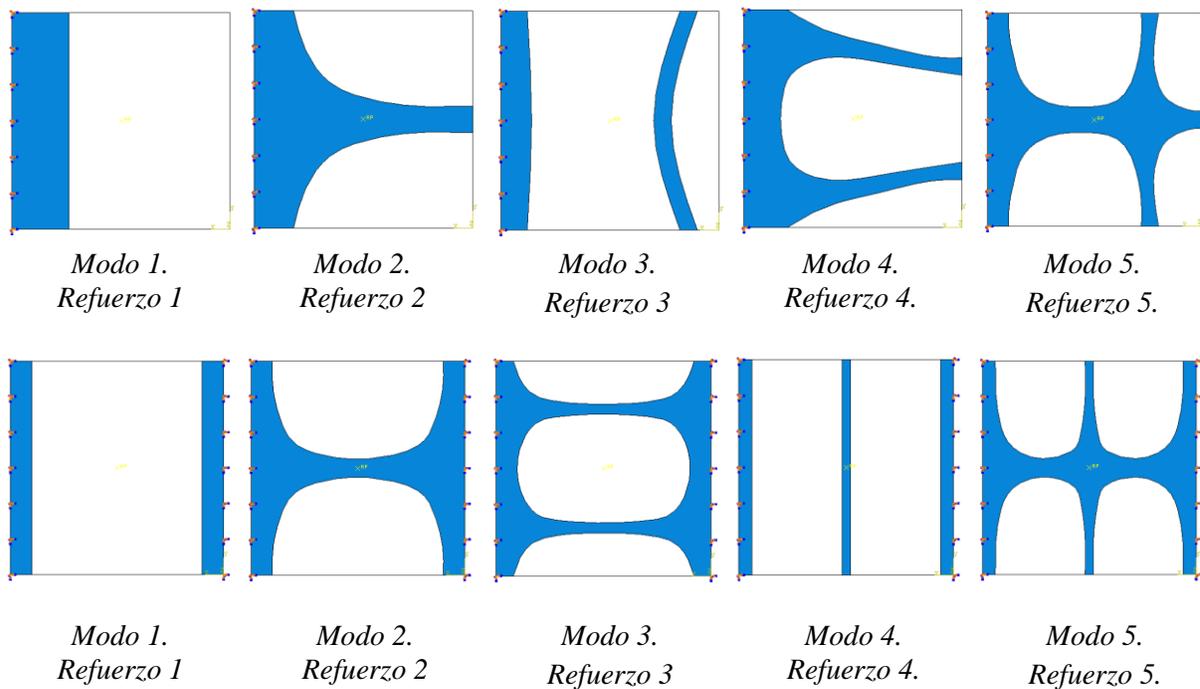


Figura 3-6. Configuración de los parches del primer conjunto de diseño de refuerzos para un valor de referencia de 0.1. Condiciones de frontera: fijo en uno, dos, tres y cuatro lados.

En la figura 3-7 se muestra el Segundo Conjunto de Diseño para un valor de referencia de 0.1. Para este caso la zona de influencia de los parches se ha invertido.



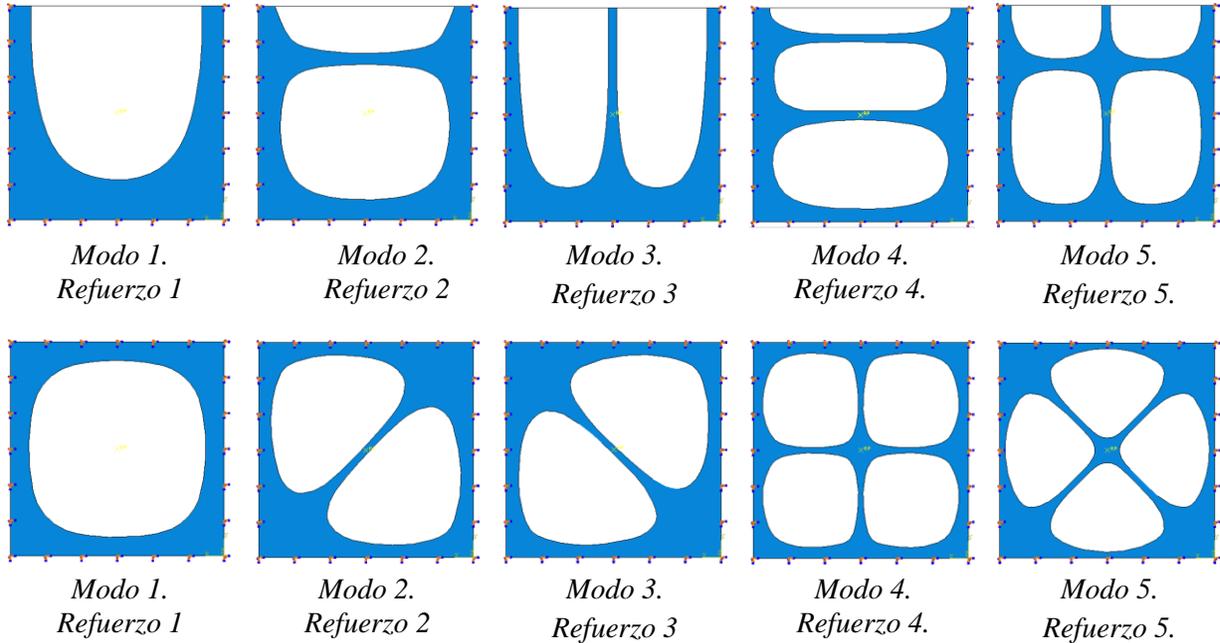


Figura 3-7. Segundo conjunto de diseño para un valor de referencia de 0.1. Condiciones de frontera: fijo en uno, dos, tres y cuatro de sus lados.

Dadas las configuraciones de los refuerzos y su ubicación, el modelado numérico se efectuó para valores de referencia de 0.1 a 0.5. Cada valor de referencia alteró de manera significativa el área de influencia del parche. Esto es debido a que conforme el valor de referencia se incrementa el área de influencia del primer conjunto de diseño (figura 3-6) disminuye, mientras que para el segundo conjunto de diseño es lo contrario (figura 3-7).

En las tablas de anexo se muestran los valores obtenidos de cada modelo numérico diseñado. Cada conjunto de tablas muestra los valores de frecuencia de los primeros 5 modos de vibración para una condición y valor de referencia diferente. En la última columna de cada tabla se despliegan los valores de frecuencia para una placa cuadrangular de acero sin refuerzos adosado. Por otra parte, es importante destacar un sexto tipo de refuerzo cuya cobertura es total en la superficie de la placa cuadrangular (refuerzo de aluminio). Finalmente, en la última fila de cada tabla, se muestra los valores máximos (MAX.) y mínimos (MIN.) de frecuencias para los seis tipos de refuerzos diseñados.

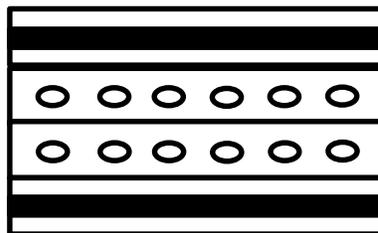
3.7. Implementación de refuerzos compuestos en placas adosadas.

Como es bien sabido, la rigidez de las placas compuestas depende principalmente de la orientación de las fibras que constituyen el refuerzo y de la resina en la que están embebidas. Para la implementación de los refuerzos compuestos se analizaron dos configuraciones de parches con materiales compuestos. Estos son: parches fabricados a partir de una placa compuesta homogénea y refuerzos diseñados mediante placas laminadas compuestas. Ambas presentan características únicas. Por ejemplo, los refuerzos cuya consistencia es homogénea presentan tres rigideces diferentes en sus tres ejes principales. Esto provoca que la rigidez del refuerzo este en función únicamente de las propiedades ortogonales del material. Por otra parte, los refuerzos diseñados mediante placas laminadas dependen principalmente de la orientación de la fibra de cada pliego que compone el sistema. Así, la rigidez de cada placa en cada eje correspondiente se conjunta, dando como consecuencia una mejor rigidez en función del número de pliegos.

Utilizando las mismas propiedades de los modelos ingresados en Abaqus como tamaño de malla, tipo de elementos y uniones, etc., se analizaron los diseños mostrados en el apartado 3.6 (*refuerzos de aluminio*) para comparar la influencia de este material en las frecuencias naturales de la placa de acero.

El espesor de cada refuerzo se mantuvo en todo momento, siendo de 1mm para la placa de acero y el refuerzo compuesto. Otra característica que conviene resaltar es la configuración optada para el refuerzo laminado. En la figura 3-8 se muestra la configuración del laminado y su nomenclatura tradicional

Sección transversal del refuerzo laminado.



*Boro-Epoxi
AS4D/9310.*

*Designación
[0 90 90 0]*

Figura 3-8. Sección transversal del refuerzo laminado compuesto.

Capítulo 4: Resultados.

La metodología descrita en el capítulo 4 muestra una sucesión de pasos a seguir para el cumplimiento de los objetivos de la investigación. En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de cada uno de estos procesos. En la sección 4.1 se detallan los resultados de la calibración de los modelos en elemento finito mediante el análisis de una placa isotrópica lisa. En las secciones 4.2 y 4.3 se observa los comportamientos dinámicos vibratorios de una placa compuesta homogénea y laminados. Cada resultado derivado de los modelos numéricos es comparado con los datos analíticos obtenidos mediante los modelos de Warburton (1954), Eschler (1950), Hearmon (1959), Reddy (1983) y Harrys (2002).

En la sección 4.4 se muestra los gráficos que comparan los valores de frecuencia en un sistema placa-refuerzo (acero-aluminio) contra el tipo de configuración del parche asociada. Estos gráficos se obtuvieron a partir de las tablas presentadas en el apéndice D de este documento. Cada frecuencia y refuerzo fueron seleccionadas en base al grado de influencia sobre la placa isotrópica.

4.1. Frecuencias naturales numéricas y analíticas para el modelo isotrópico.

La metodología presentada en el capítulo 3, apartado 3.1, se indica el procedimiento para la verificación de los modelos numéricos (Abaqus) con el fin de establecer el tipo de malla para las pruebas. Los resultados obtenidos de la simulación numérica mediante el método de elementos finitos (FEM) están plasmados en la tabla 4-1 con las cuatro condiciones de frontera previamente establecidas:

<i>Modo de vibración.</i>	<i>Fijo en cuatro de sus lados</i>	<i>Fijo en tres de sus lados.</i>	<i>Fijo en dos de sus lados</i>	<i>Fijo en un lado.</i>
<i>Modo 1</i>	34.597Hz	23.107Hz	21.375Hz	3.346Hz
<i>Modo 2</i>	70.673Hz	38.634Hz	25.610Hz	8.339Hz
<i>Modo 3</i>	70.673Hz	61.100Hz	42.235Hz	20.659Hz
<i>Modo 4</i>	104.18Hz	74.001Hz	59.096Hz	26.294Hz
<i>Modo 5</i>	127.08Hz	77.846Hz	65.077Hz	30.192Hz

Tabla 4-1. Frecuencias naturales de una placa con cuatro condiciones de frontera distintas.

Para corroborar los resultados obtenidos mediante el método numérico por elementos finitos se emplearon dos teorías diferentes: la teoría de Eschler (1950) y Harrys (2002). En la tabla 4-2 se muestran los resultados de frecuencias basadas en las teorías anteriormente citadas y el método numérico por elementos finitos.

Los porcentajes de error relativo son pequeños en la mayoría de los casos. Para todas las condiciones de frontera estudiadas, los errores relativos no superan el 1%. Esto indica que la malla seleccionada 10x10 mm es adecuada para el modelado de la placa isotrópica. Algunas condiciones de frontera e inclusive modos de vibración no están disponibles mediante las teorías de Harrys (2002). Sin embargo, Eschler (1950) describe a la perfección los cinco primeros modos de vibración y todas las condiciones de encastre posibles.

En la tabla 4-3 se presentan las formas modales obtenidas de la simulación numérica. Debido a que la teoría de Eschler (1950) y Warburton (1954) requieren el número de líneas nodales para el cálculo de frecuencias naturales (*figura 4-1*), se comprueba de forma inmediata los modos de vibración presentadas en la tabla 4-3.

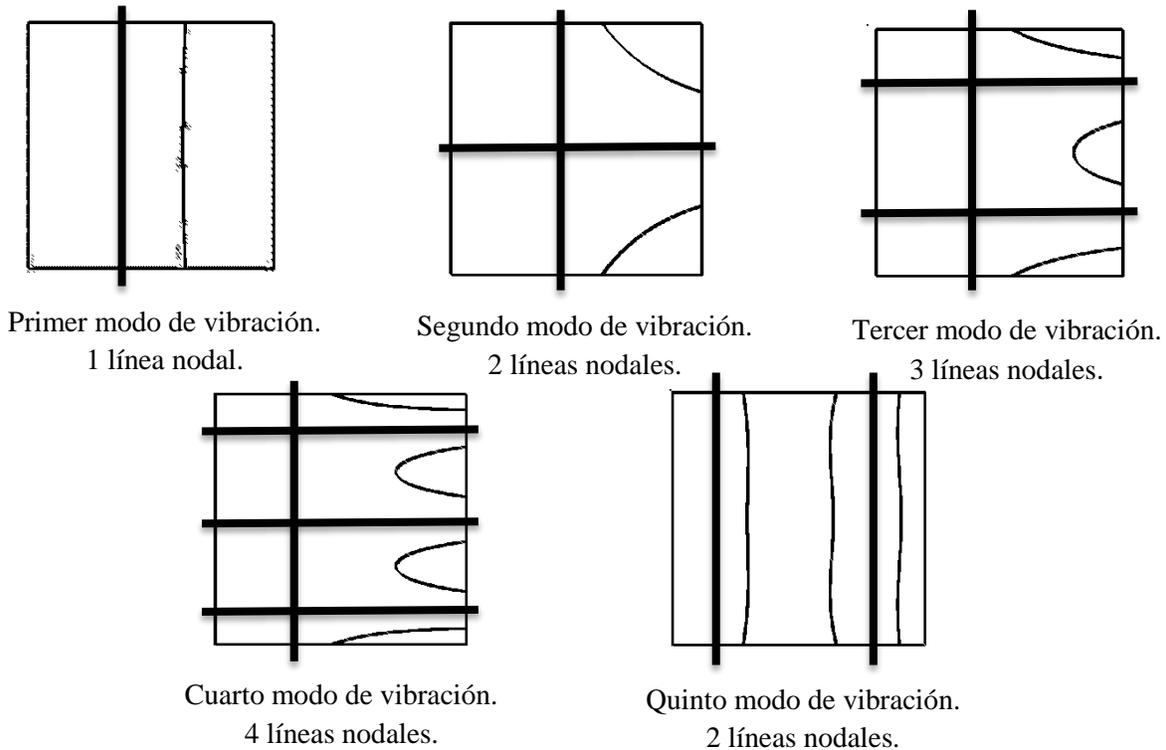


Figura 4-1. Formas modales y líneas nodales de una placa en cantiléver (primeras cinco formas modales).

Modos de vibración.	Fijo en cuatro de sus lados (Hz).		Fijo en tres de sus lados (Hz).		Fijo en dos de sus lados (Hz).		Fijo en un lado (Hz).					
	FEM	(1)	(2)	FEM	(1)	(2)	FEM	(1)	(2)			
Modo 1	34.597	34.609	34.704	23.107	-	23.382	21.375	-	21.499	3.346	3.361	3.378
Modo 2	70.673	70.582	-	38.634	-	39.159	25.610	-	25.768	8.339	8.219	9.358
Modo 3	70.673	70.582	-	61.100	-	59.838	42.235	-	42.777	20.659	20.632	21.158
Modo 4	104.18	104.13	104.50	74.001	-	74.467	59.096	-	59.245	26.294	26.423	27.979
Modo 5	127.08	126.59	-	77.846	-	79.282	65.077	-	65.294	30.192	29.983	31.284
Modos de vibración.	Fijo en cuatro de sus lados (%).		Fijo en tres de sus lados (%).		Fijo en dos de sus lados (%).		Fijo en un lado (%).					
	FEM	(1)	(2)	FEM	(1)	(2)	FEM	(1)	(2)			
Modo 1	-	0.034	0.309	-	-	1.190	-	-	0.580	-	0.448	0.956
Modo 2	-	-0.129	-	-	-	1.359	-	-	0.617	-	-1.439	12.219
Modo 3	-	-0.129	-	-	-	-2.065	-	-	1.283	-	-0.131	2.415
Modo 4	-	-0.052	0.31	-	-	0.629	-	-	0.252	-	0.491	6.408
Modo 5	-	-0.387	-	-	-	1.845	-	-	0.334	-	-0.692	3.617

Tabla 4-2. Frecuencias naturales obtenidas por el método de elemento finito y porcentajes de error, (1) [Harrys 2002] y (2)

[Eschler 1950]. Unidades en Hz.

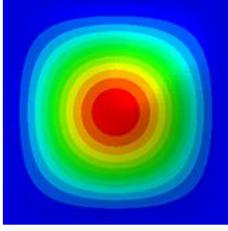
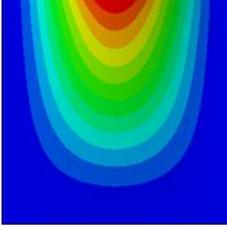
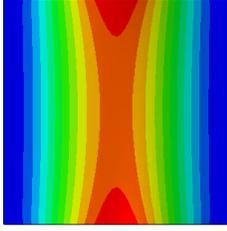
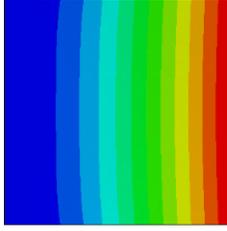
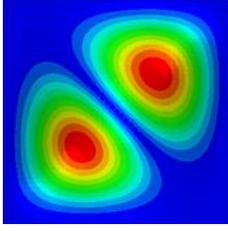
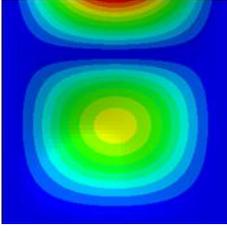
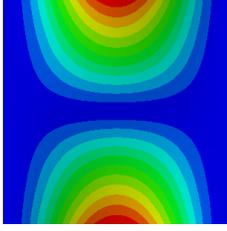
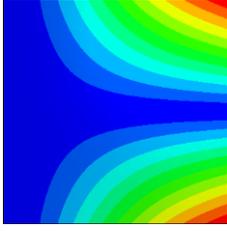
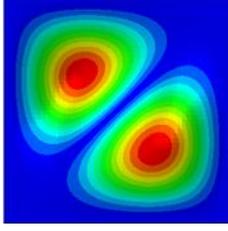
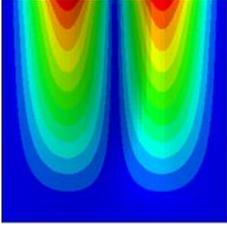
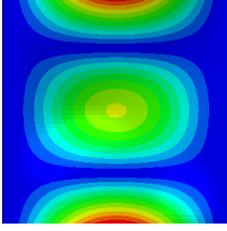
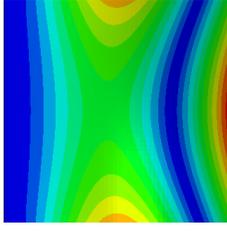
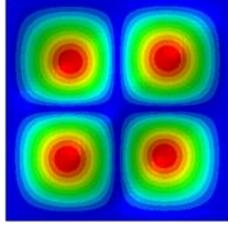
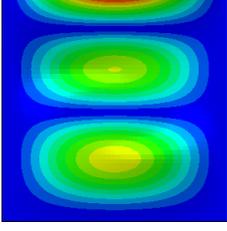
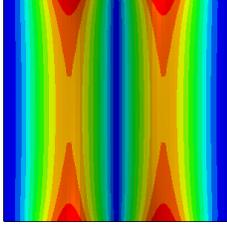
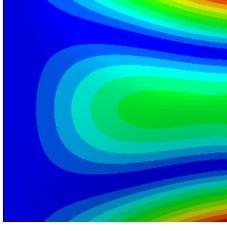
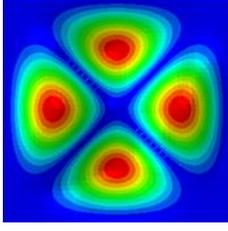
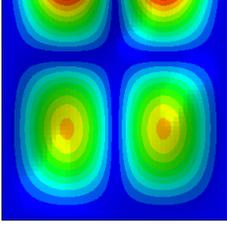
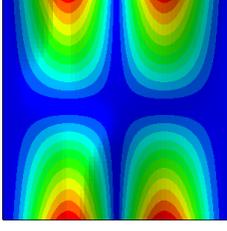
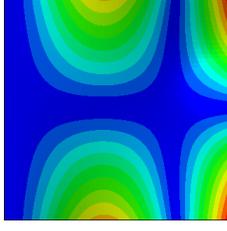
<i>Modo de vibración.</i>	<i>Fijo en cuatro de sus lados.</i>	<i>Fijo en tres de sus lados.</i>	<i>Fijo en dos de sus lados.</i>	<i>Fijo en un lado.</i>
<i>Modo 1</i>				
<i>Modo 2</i>				
<i>Modo 3</i>				
<i>Modo 4</i>				
<i>Modo 5</i>				

Tabla 4-3. Formas modales de una placa isotrópica de acero A-36.

4.2. Frecuencias naturales numéricas y analíticas para el modelo compuesto ortotrópico.

Los modelos numéricos y analíticos de una placa isotrópica presentan menores dificultades a la hora de ser solucionados en comparación con los materiales compuestos. Esto se debe a que, en un material compuesto, dependiendo del grado de anisotropía que se presente, tiene un número definido de rigideces. Cada una de ellas contribuye de manera significativa en las frecuencias naturales de la placa compuesta.

En la tabla 4-4 se muestran los resultados obtenidos mediante el Método de Elementos Finitos. Cada valor de frecuencia es comparado con respecto a los resultados analíticos obtenidos mediante la metodología de Hearmon (1959). La primera condición de frontera, fijo en un solo lado, presenta frecuencias naturales para el primer, segundo y quinto modo de vibración. Sin embargo, para el tercero y cuarto modo, el error relativo excede el 3 y 4 por ciento de su valor con respecto al modelo por elementos finitos. Esta variación no afecta considerablemente el análisis, por lo que se establece que la malla utilizada sigue siendo adecuada. Cabe señalar que el signo negativo que se muestra en cada porcentaje de error relativo, indica que el valor de frecuencias analíticas excede los resultados numéricos.

La segunda condición de frontera presentada, fijo en dos de sus lados, muestra aproximaciones muy cercanas. Todos los modos de vibración no exceden el 1% de error relativo siendo adecuada la malla del modelo numérico. Para la condición fija en tres de sus lados, los porcentajes de error para los modos 1, 3, 4 y 5 se encuentran por debajo del 1%. Finalmente, los resultados obtenidos de la condición de frontera fija en todos sus lados se encuentran en valores aceptables de error.

En la tabla 4-5 se muestra los modos de vibración de cada condición de frontera para una placa ortotrópica homogénea. Como se puede observar, las líneas nodales en comparación a una placa isotrópica lisa, se modifican en los ejes principales x y y . Esto se ejemplifica en el modo 5 de vibración, en donde las líneas nodales cambian de orientación y de número para placas isotrópicas y ortotrópicas.

Modos de vibración.	Fijo en cuatro de sus lados (Hz).		Fijo en tres de sus lados (Hz).		Fijo en dos de sus lados (Hz).		Fijo en un lado (Hz).	
	FEM	(3)	FEM	(3)	FEM	(3)	FEM	(3)
Modo 1	40.431	40.505	38.856	38.982	38.621	38.673	6.064	6.077
Modo 2	48.608	48.679	41.416	41.914	39.287	39.397	7.499	7.633
Modo 3	67.007	66.946	50.035	50.176	42.389	42.612	14.060	14.527
Modo 4	96.309	95.832	68.451	68.475	51.391	51.629	29.066	29.737
Modo 5	108.01	107.997	97.560	97.211	69.843	69.971	38.031	38.059

Modos de vibración.	Fijo en cuatro de sus lados (%).		Fijo en tres de sus lados (%).		Fijo en dos de sus lados (%).		Fijo en un lado (%).	
	FEM	(3)	FEM	(3)	FEM	(3)	FEM	(3)
Modo 1	-	-0.183	-	-0.324	-	-0.135	-	-0.214
Modo 2	-	-0.146	-	-1.202	-	-0.279	-	-1.787
Modo 3	-	0.091	-	-0.282	-	-0.526	-	-3.321
Modo 4	-	0.495	-	-0.0351	-	-0.463	-	-2.309
Modo 5	-	0.012	-	0.358	-	-0.183	-	-0.074

Tabla 4- 4. Frecuencias naturales para una placa ortotrópica obtenidas por el método de elemento finito y (3) [Hearmon 1959].

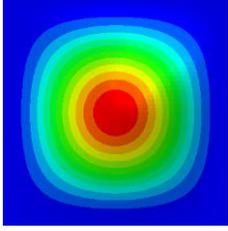
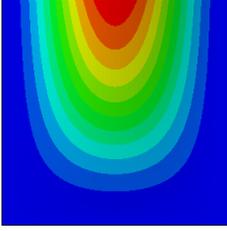
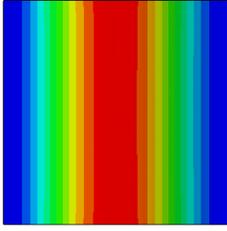
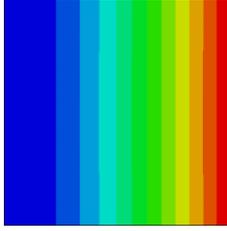
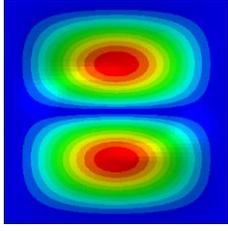
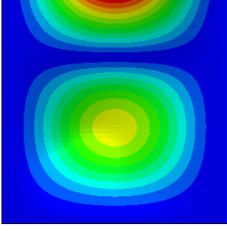
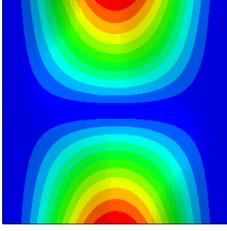
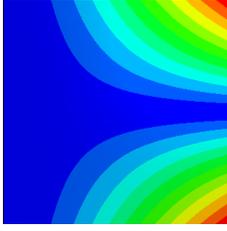
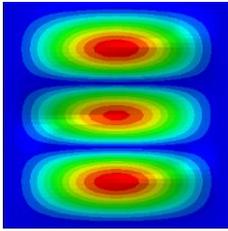
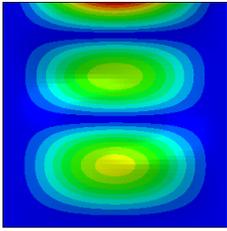
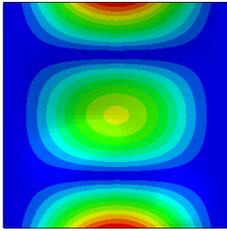
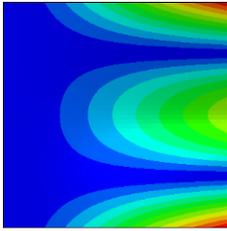
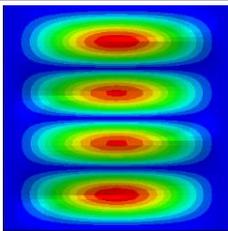
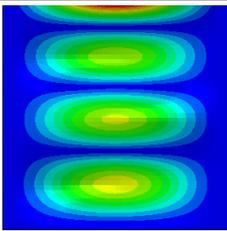
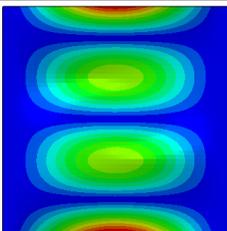
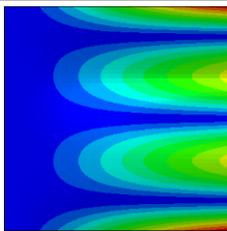
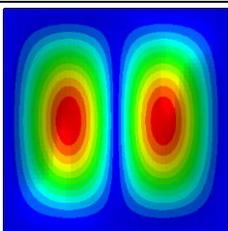
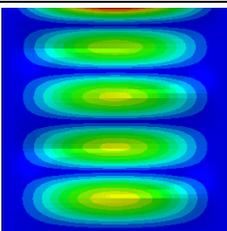
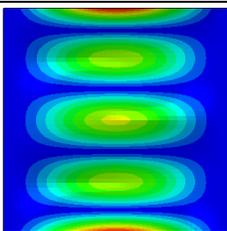
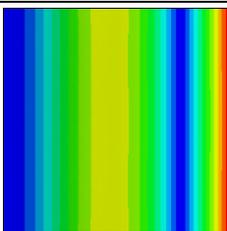
<i>Modo de vibración.</i>	<i>Fijo en cuatro de sus lados.</i>	<i>Fijo en tres de sus lados.</i>	<i>Fijo en dos de sus lados.</i>	<i>Fijo en un lado.</i>
<i>Modo 1</i>				
<i>Modo 2</i>				
<i>Modo 3</i>				
<i>Modo 4</i>				
<i>Modo 5</i>				

Tabla 4-5. Formas modales para una placa ortotrópica AS4D/9310.

4.3. Frecuencias naturales numéricas y analíticas para el modelo compuesto laminado.

El análisis de frecuencias para una placa compuesta laminada se basa en los modelos establecidos por Reddy (1983), Mindlin (1945) y Reissner (1951) para condiciones de frontera simplemente apoyadas (apéndice C). Como se verá a continuación los porcentajes de error de las simulaciones numéricas en comparación con los cálculos analíticos son muy pequeñas, por lo que el mallado también satisface la convergencia de resultados. En la tabla 4-6 se muestra los resultados de dicha comparación, así como su porcentaje de error con respecto al modelo FEM. En la figura 4-2 se muestran las formas modales derivadas de la simulación numérica de la placa.

<i>Modo de vibración.</i>	ω_{FEM} (Hertz)	ω_{HSDT} (Hertz)	ω_{FSDT} (Hertz)	<i>Error HSDT con respecto a FEM (%)</i>	<i>Error FSDT con respecto a FEM (%)</i>
1	187.24	187.21	187.50	0.016	-0.139
2	352.76	352.58	353.20	0.051	-0.125
3	641.80	641.02	645.15	0.122	-0.523
4	685.17	683.81	686.12	0.199	-0.139
5	734.33	733.87	738.26	0.063	-0.535

Tabla 4-6. Comparación de frecuencias naturales obtenidas a partir de FEM, [Reddy, 1983], [Mindlin, 1945] y [Reissner, 1951].

Como puede observarse en la tabla 4-6 las teorías del alto orden (HSDT) propuestas por Reddy (1983) tienen porcentajes de error relativo mucho menor en comparación a la primera teoría de placas establecidas por Mindlin (1945) y Reissner (1951). Sin embargo, ambas teorías no exceden el 1% de error, con lo cual se determina que los modelos numéricos para placas compuestas laminadas son adecuados para el estudio de placas reforzadas.

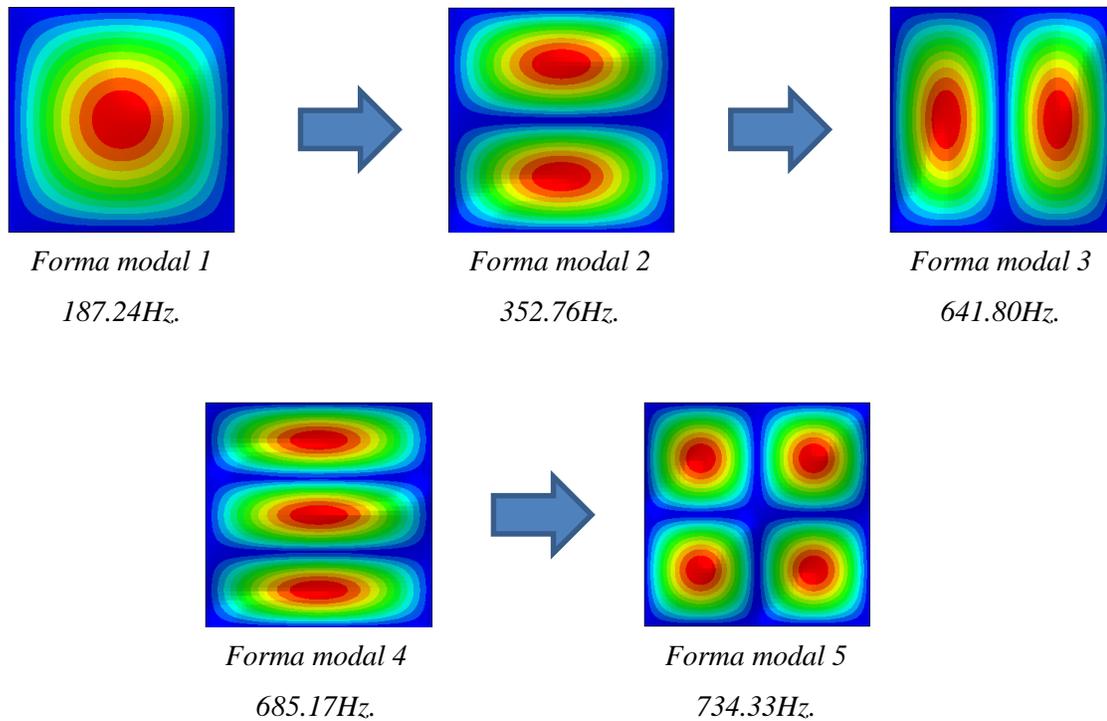


Figura 4-2. Formas modales de una placa compuesta AS4D/9310 simétrica [0 90 90 0].

4.4. Resultados numéricos para placas reforzadas con parches de aluminio 1050.

Mediante la verificación de los modelos numéricos para placas isotrópicas y compuestas, se determinó que el tipo de malla utilizada es la más adecuada para la obtención de las frecuencias naturales y formas modales de placas reforzadas. Los puntos de referencia utilizados abarcan desde 0.1 hasta 0.5 de los desplazamientos normalizados de la placa. En las tablas presentadas en los anexos D se muestran los resultados numéricos obtenidos para el primer y segundo conjunto de diseño.

En las figuras 4-3 a 4-10 se muestran los gráficos de las configuraciones de aluminio que mayores efectos tuvieron en las frecuencias naturales del sistema (refuerzos que incrementaron las frecuencias naturales significativamente). De esta forma se localizaron las configuraciones de máxima y mínima influencia en la dinámica vibratoria de la placa de acero.

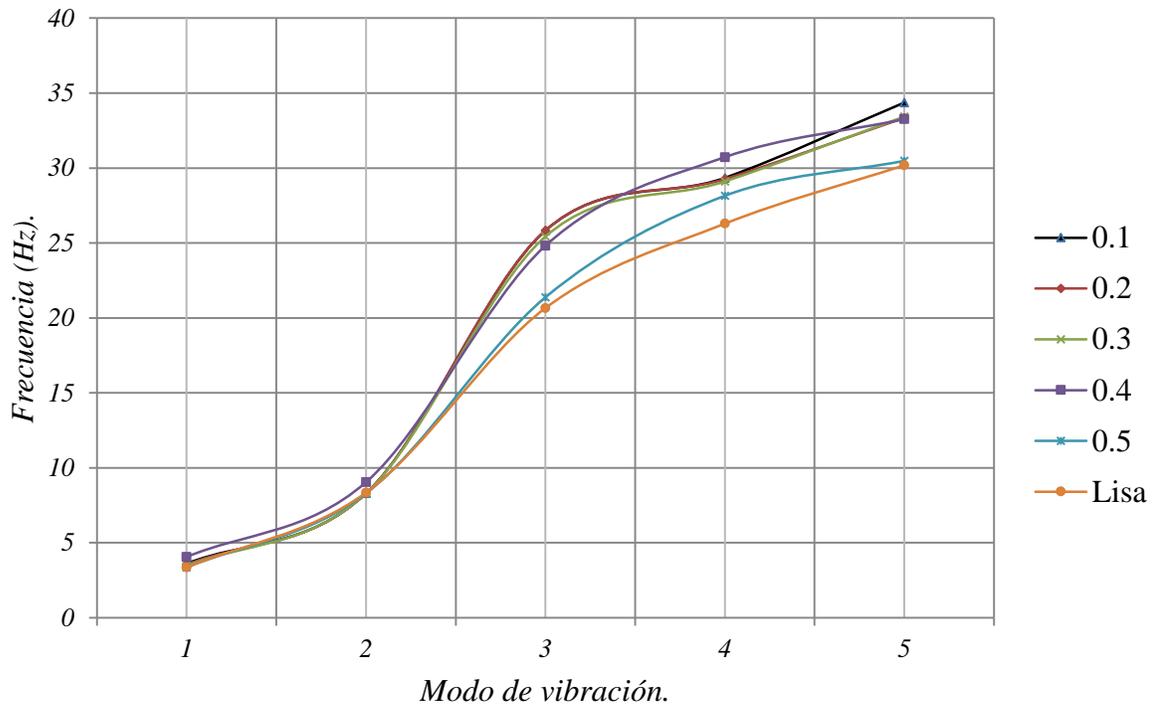


Figura 4-3. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en un extremo (PCD).

En el gráfico de la figura 4-3 se muestra las curvas de tendencia de las frecuencias naturales para el primer conjunto de diseño (PCD) contra sus modos de vibración. La curva lisa muestra las frecuencias naturales para una placa sin refuerzos. Esta curva marca la tendencia general de las placas con refuerzos de aluminio en los valores de referencia de 0.2, 0.4 y 0.5. En las curvas de 0.1 y 0.3 hay un cambio abrupto de frecuencias en el cuarto modo de vibración

Para el primer modo de vibración el porcentaje máximo de influencia sobre la placa de acero (lisa) fue de 21%. Para el segundo modo de vibración, el porcentaje fue de 8%. El tercer modo de vibración obtuvo un 25% de influencia con respecto a la placa lisa. El cuarto modo, 16% de diferencia. Finalmente, el quinto modo de vibración mostro un 14% de variación.

Hay que señalar que estos porcentajes solo se aplican para el primer conjunto de diseño (valores que exceden el punto de referencia preestablecidos) mostrados en el capítulo 3.

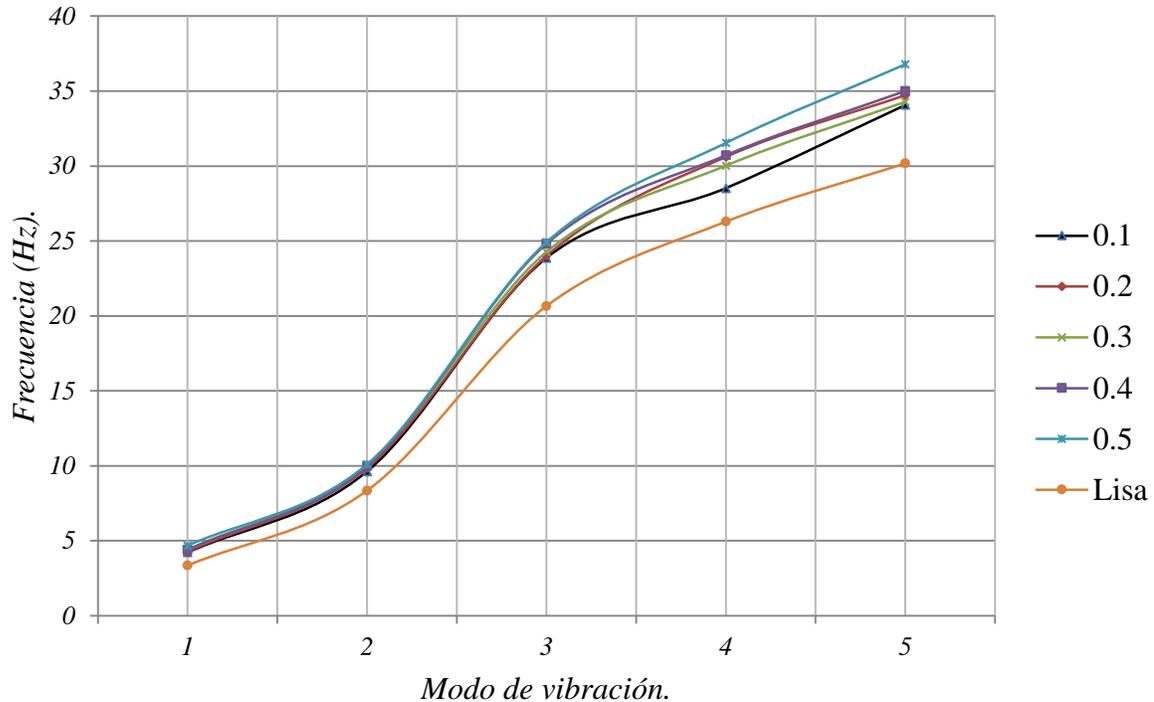


Figura 4-4. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en un extremo (SCD).

El segundo conjunto de diseño exhibe las tendencias mostradas en el gráfico 4-4. A diferencia del gráfico 4-3, las curvas tienden a incrementar su pendiente conforme el modo de vibración se eleva. La mayoría de las curvas siguen la tendencia de la curva lisa a excepción de los valores de 0.1.

Los porcentajes máximos de influencia para este conjunto de diseño son:

1. Primer modo de vibración: 39% de influencia.
2. Segundo modo de vibración: 21% de influencia.
3. Tercer modo de vibración: 20% de influencia.
4. Cuarto modo de vibración: 19% de influencia.
5. Quinto modo de vibración: 22% de influencia.

Como se observa, casi todos los modos de vibración experimentaron incrementos en los porcentajes de variación con respecto al primer conjunto de diseño. Sin embargo, el tercer modo disminuyó su porcentaje en un 5%.

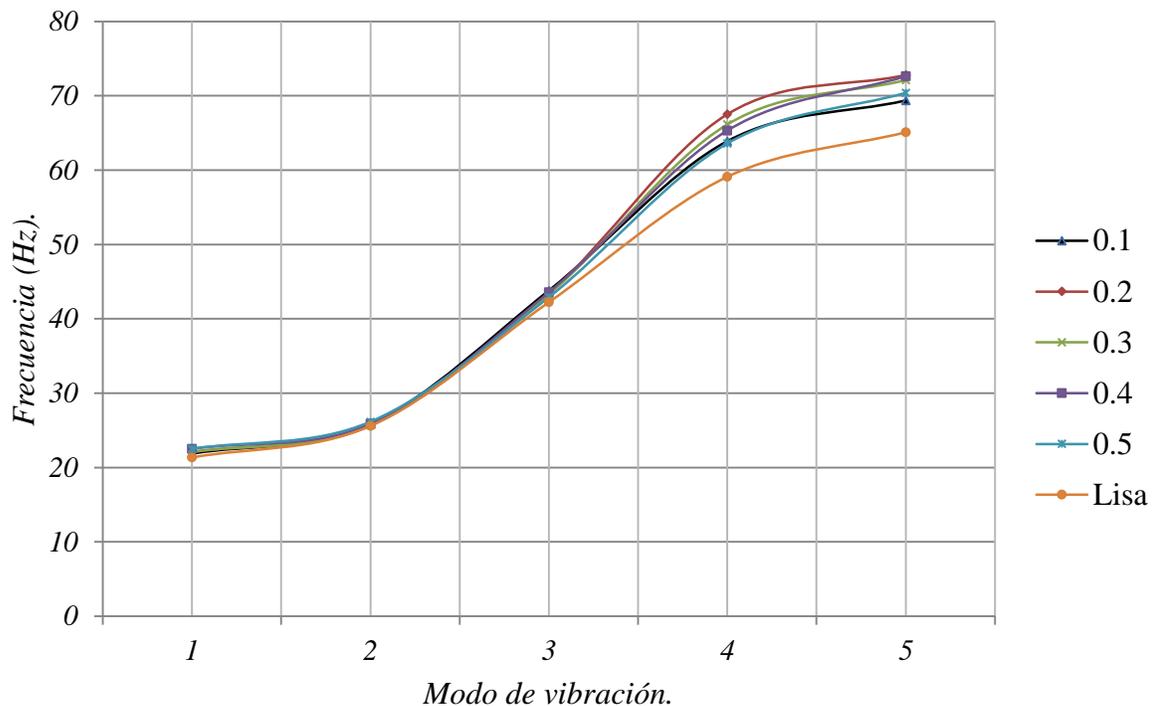


Figura 4-5. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fija en dos lados (PCD).

El gráfico 4-5 muestra la tendencia de frecuencias para el primer conjunto de diseño con condiciones de fronteras fijas en dos lados del sistema. Como se puede apreciar en el gráfico, las tendencias son las mismas para los modos 1, 2 y 3, pero para modos 4 y 5 las curvas tienden a desfasarse. A pesar de este hecho, las curvas siguen respetando la tendencia de la curva lisa en estas regiones.

Los porcentajes de variación máxima se enlistan a continuación:

1. Primer modo de vibración: 5% de influencia.
2. Segundo modo de vibración: 2% de influencia.
3. Tercer modo de vibración: 4% de influencia.
4. Cuarto modo de vibración: 14% de influencia.
5. Quinto modo de vibración: 12% de influencia.

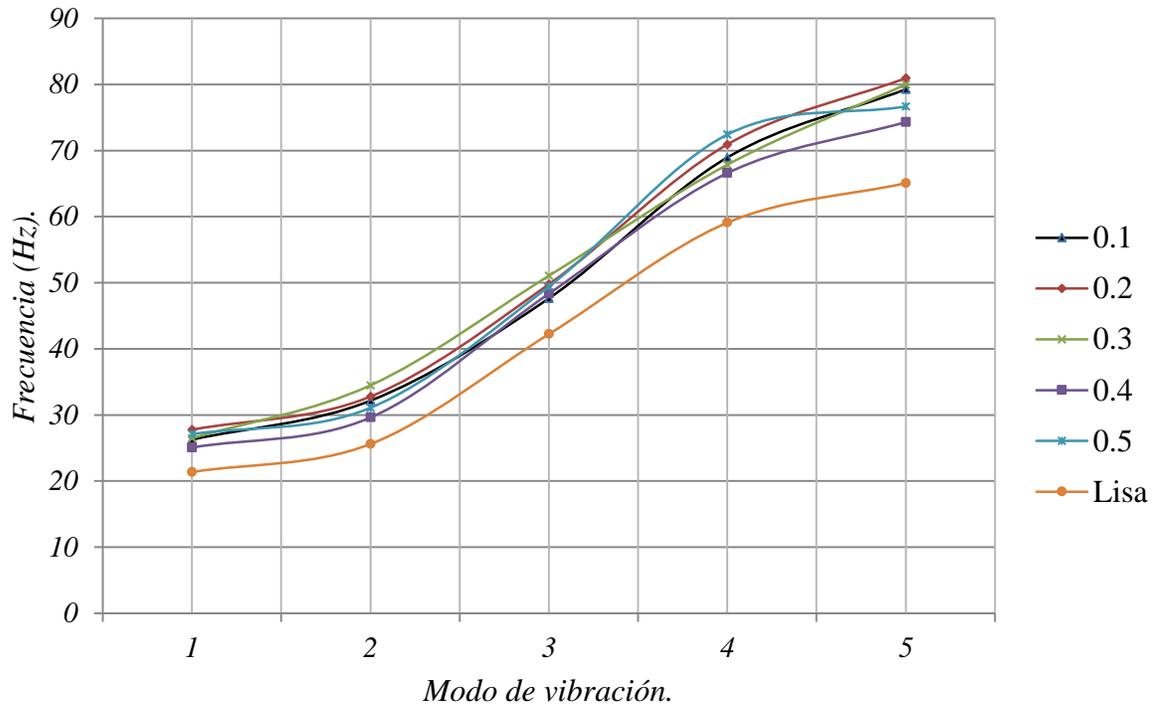


Figura 4-6. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fija en dos lados (SCD).

El segundo conjunto de diseño es evaluado para condiciones de frontera fijas en dos lados. El gráfico 4-6 muestra las tendencias y la influencia del valor de referencia. La forma de la curva lisa se mantiene, sin embargo, existe un desfase debido a los refuerzos.

Los porcentajes de influencias máximas se muestran a continuación:

1. Primer modo de vibración: 30% de influencia.
2. Segundo modo de vibración: 35% de influencia.
3. Tercer modo de vibración: 21% de influencia.
4. Cuarto modo de vibración: 23% de influencia.
5. Quinto modo de vibración: 24% de influencia.

Esto indica que el segundo conjunto de diseño tiene mayor influencia que el primero. Las curvas de los valores de referencia se separan de la curva lisa en todos los modos de vibración, a diferencia del gráfico 4-5.

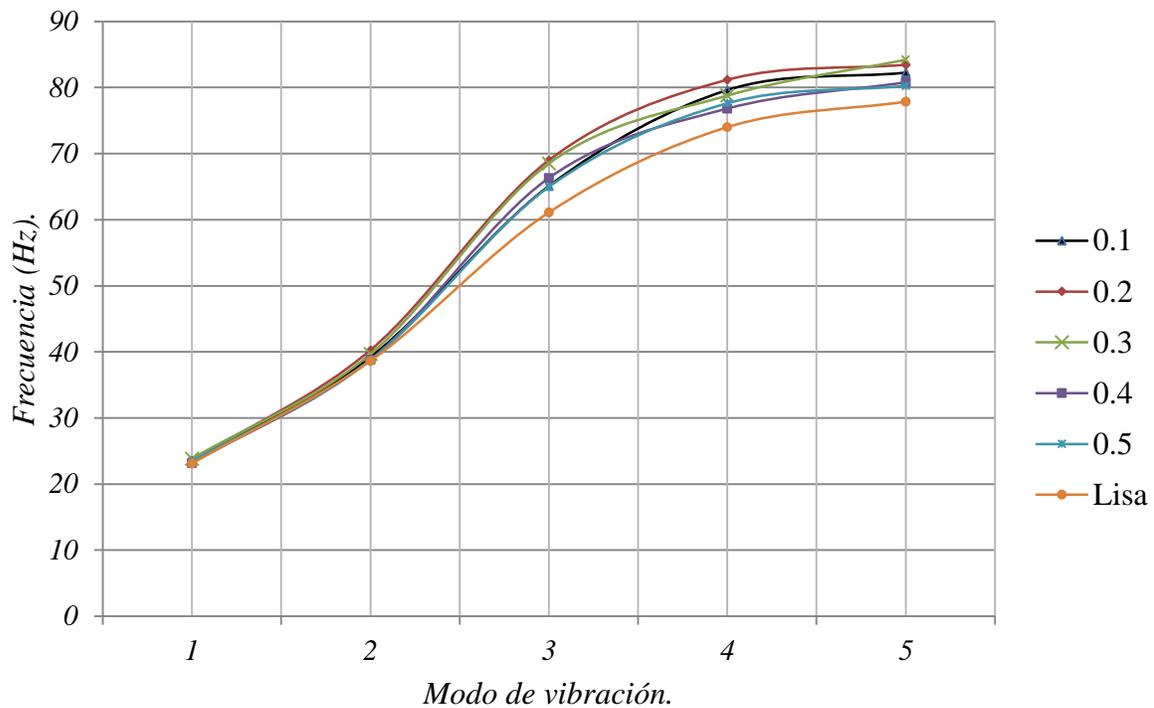


Figura 4-7. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en tres lados (PCD).

La grafica 4-7 muestra la tendencia de las frecuencias para una placa con refuerzos de aluminio, con condiciones de frontera fijo en tres de sus lados para el primer conjunto de diseño. Los puntos en los modos de vibración 1 y 2 no exhiben cambios porcentuales significativos. En los modos 3, 4 y 5, las tendencias se desfasan, dando lugar a incrementos en las frecuencias naturales.

Los porcentajes de variación máxima se enumeran a continuación:

1. Primer modo de vibración: 3% de influencia.
2. Segundo modo de vibración: 4% de influencia.
3. Tercer modo de vibración: 13% de influencia.
4. Cuarto modo de vibración: 10% de influencia.
5. Quinto modo de vibración: 8% de influencia.

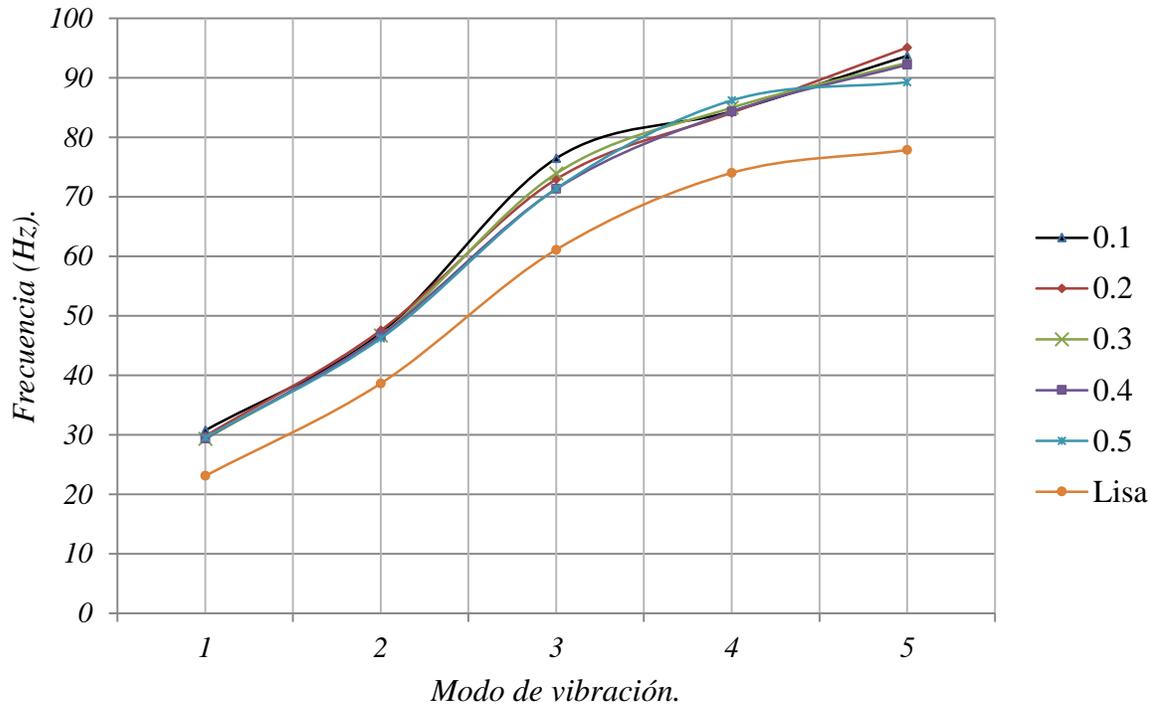


Figura 4-8. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en tres lados (SCD).

Al igual que el caso del gráfico 4-6, en la figura 4-8 se muestra un desfase con respecto a la curva Lisa de referencia. Las frecuencias naturales tienden a incrementarse conforme los modos de vibración lo hacen. Esto no pasa para la curva cuyo valor de referencia es de 0.5 en donde su valor va decayendo.

Los porcentajes de variación máximas para esta gráfica son:

1. Primer modo de vibración: 33% de influencia.
2. Segundo modo de vibración: 23% de influencia.
3. Tercer modo de vibración: 25% de influencia.
4. Cuarto modo de vibración: 17% de influencia.
5. Quinto modo de vibración: 22% de influencia.

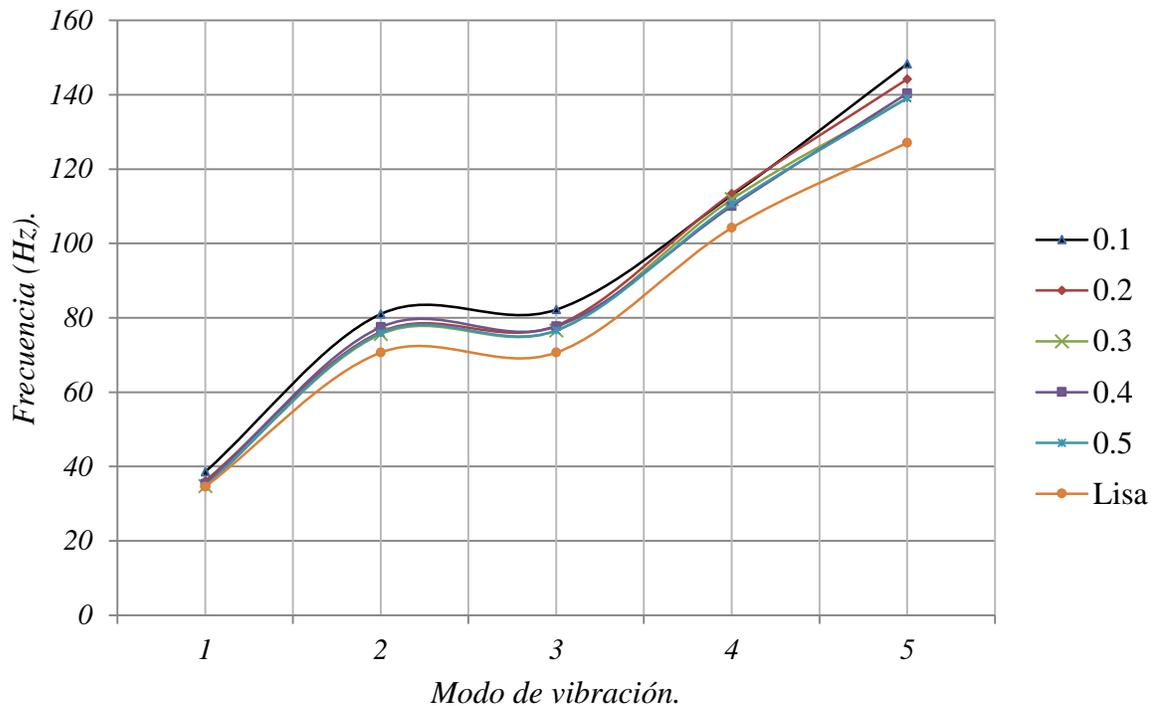


Figura 4-9. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en todos sus lados (PCD).

El gráfico 4-9 muestra los valores de frecuencia para el primer conjunto de diseño con condiciones de frontera fijas en todos sus lados. A diferencia de los casos 4-5 y 4-7 los modos 2, 3, 4 y 5 se separan de la curva lisa. Por otro lado, la frecuencia de la primera forma modal, se conserva próxima a la curva lisa. Las líneas de los valores de referencia siguen el patrón de la curva lisa.

A continuación, se enlistan los porcentajes de variación:

1. Primer modo de vibración: 11% de influencia.
2. Segundo modo de vibración: 15% de influencia.
3. Tercer modo de vibración: 16% de influencia.
4. Cuarto modo de vibración: 9% de influencia.
5. Quinto modo de vibración: 17% de influencia.

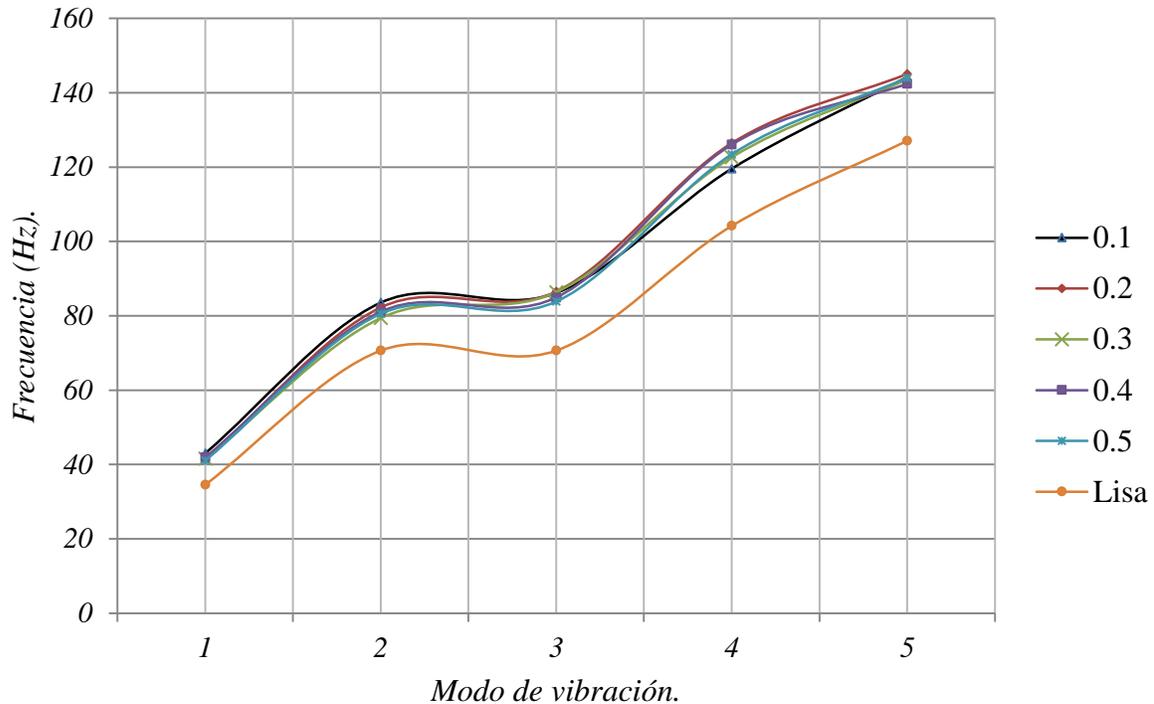


Figura 4-10. Gráfica que muestra los valores máximos de influencia sobre las frecuencias de la placa de acero fijo en todos sus lados (SCD).

Finalmente, la gráfica 4-10 muestra los resultados de frecuencia para el segundo conjunto de diseño con condiciones de frontera fijas en todos sus lados. El desfase entre las curvas de los valores de referencia y la curva lisa es evidente. Todas las curvas siguen conservando el mismo patrón que la curva lisa.

Los porcentajes de variación son:

1. Primer modo de vibración: 24% de influencia.
2. Segundo modo de vibración: 18% de influencia.
3. Tercer modo de vibración: 22% de influencia.
4. Cuarto modo de vibración: 21% de influencia.
5. Quinto modo de vibración: 13% de influencia.

Dados los resultados numéricos tabulados en las tablas del anexo y de los gráficos 4-3 a 4-10, es posible analizar la influencia de cada refuerzo de aluminio. De este análisis, se derivan las configuraciones que modifican de manera significativa las vibraciones libres de la

placa. En la figura 4-11 se muestra un gráfico que contiene tres curvas de interés. La primera de ellas es la curva lisa de la condición de frontera estudiada. Al igual que los anteriores gráficos, la curva se grafica con respecto a sus modos de vibración y sus frecuencias naturales. La segunda curva se relaciona con las configuraciones que tuvieron el menor efecto sobre la curva lisa (MIN.). La tercera curva se relaciona a las configuraciones que influyeron en gran medida sobre las frecuencias de la placa lisa (MAX.).

Una característica importante del gráfico 4-11 es la configuración cuyo valor de referencia es uno. Esta configuración significa que el refuerzo adosado cubre una de las caras de la placa de acero al 100%. La mayor incidencia para la curva de frecuencias mínimas está dada por el primer conjunto de diseño (PCD) mientras que en el caso de los valores máximos se dan por el segundo conjunto de diseño (SCD).

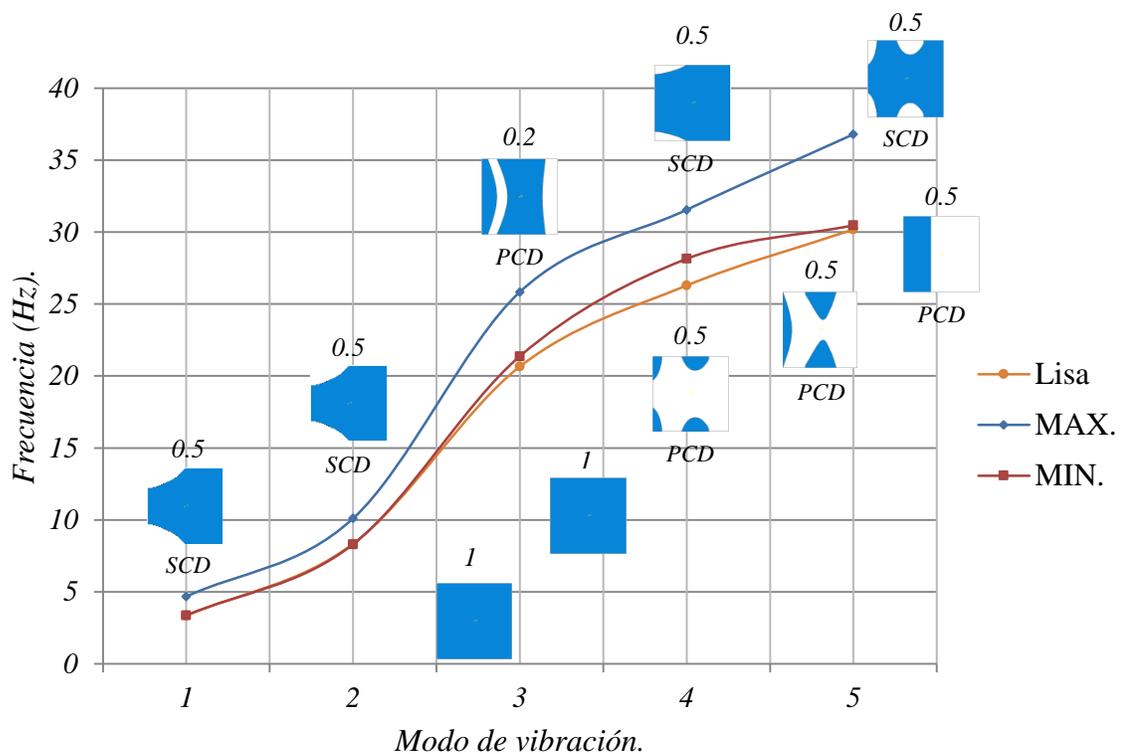


Figura 4-11. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con un lado fijo.

En la gráfica 4-11 se observa que, para la curva mínima, las frecuencias naturales no son alteradas en gran medida con respecto a la curva lisa de la placa. Existe un pequeño porcentaje de variación en el cuarto modo de vibración del 7% de influencia. La mayor incidencia de configuraciones está dada por el primer conjunto de diseño a excepción del primer y segundo modo en donde predomina el refuerzo que cubre completamente la superficie. Para la curva máxima de influencia, el porcentaje promedio de influencia fue del 25%.

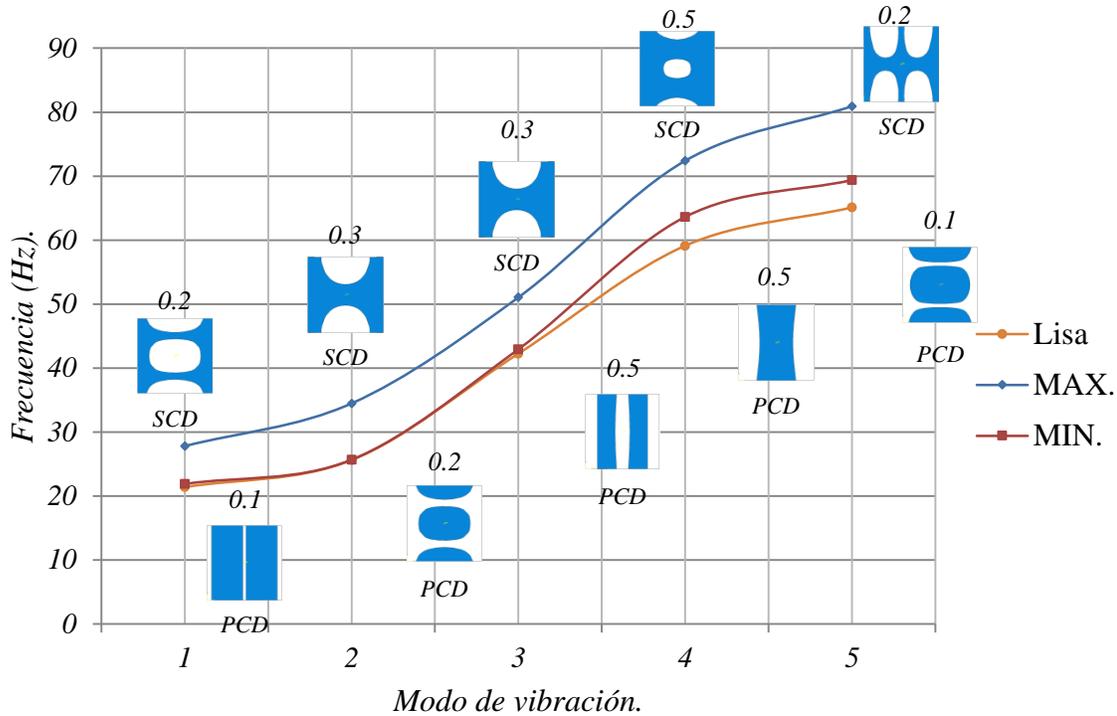


Figura 4-12. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con dos lados fijos.

La gráfica 4-12 muestra las configuraciones cuyo porcentaje de influencia fueron máximas y mínimas para la condición de frontera fija en dos extremos. La curva de tendencia mínima, tiene valores muy próximos a la curva lisa de referencia. En los modos de vibración 1, 2 y 3 no existe un porcentaje de variación apreciable. Sin embargo, en los modos 4 y 5 existe una variación del 7% y 6% respectivamente. En el caso de la curva de influencia máxima, el porcentaje de variación promedio para los cinco modos de vibración fueron del 27%. Las configuraciones que mayores incidencias tuvieron en la curva son los del segundo conjunto de diseño.

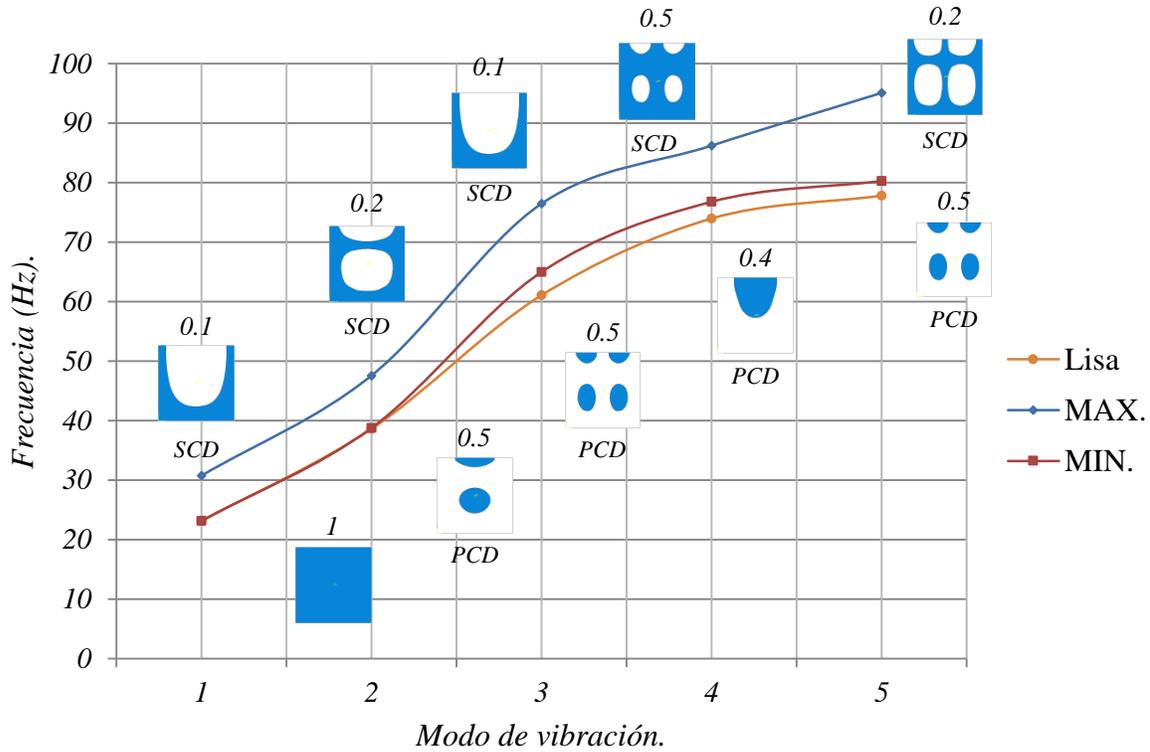


Figura 4-13. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con tres lados fijos.

En la figura 4-13 se presentan los resultados obtenidos para una placa con condiciones de empotramiento en tres de sus lados. Al igual que los casos anteriores, la curva que representa las frecuencias mínimas, está muy próxima a los valores de frecuencia de la curva lisa de referencia. A partir del segundo modo de vibración, la curva experimenta cambios en sus frecuencias. Para los modos 3, 4 y 5 los porcentajes de variación son de 6%, 4% y 3% de variación porcentual. El número de incidencias para la curva mínima está dado por el primer conjunto de diseño. Por otro lado, la curva máxima presenta un porcentaje de desfase promedio del 20% de su frecuencia con respecto a la línea de referencia lisa.

Finalmente, en la figura 4-14 se muestra la variación de frecuencias de una placa reforzada con condiciones de empotramiento en todos sus lados. Las curvas de tendencias han cambiado su comportamiento con respecto a las otras condiciones de frontera establecida. En los modos de vibración 2 y 3 se encuentra una familia de formas modales. Existen una mínima diferencia para las curvas máximas y mínimas en los modos 2 y 4. Este comportamiento es de

esperarse debido a pequeñas deformidades en la malla del modelo. Sin embargo, esta mínima diferencia no afecta el proceso de análisis. El desfase de la curva mínima ocurre en el segundo modo de vibración donde el porcentaje de variación es de 7%, 8%, 5% y 9% respectivamente. Las configuraciones de más incidencia fueron los del primer conjunto de diseño a excepción del primer modo de vibración. La curva máxima de influencia presenta un porcentaje de variación promedio de 17%.

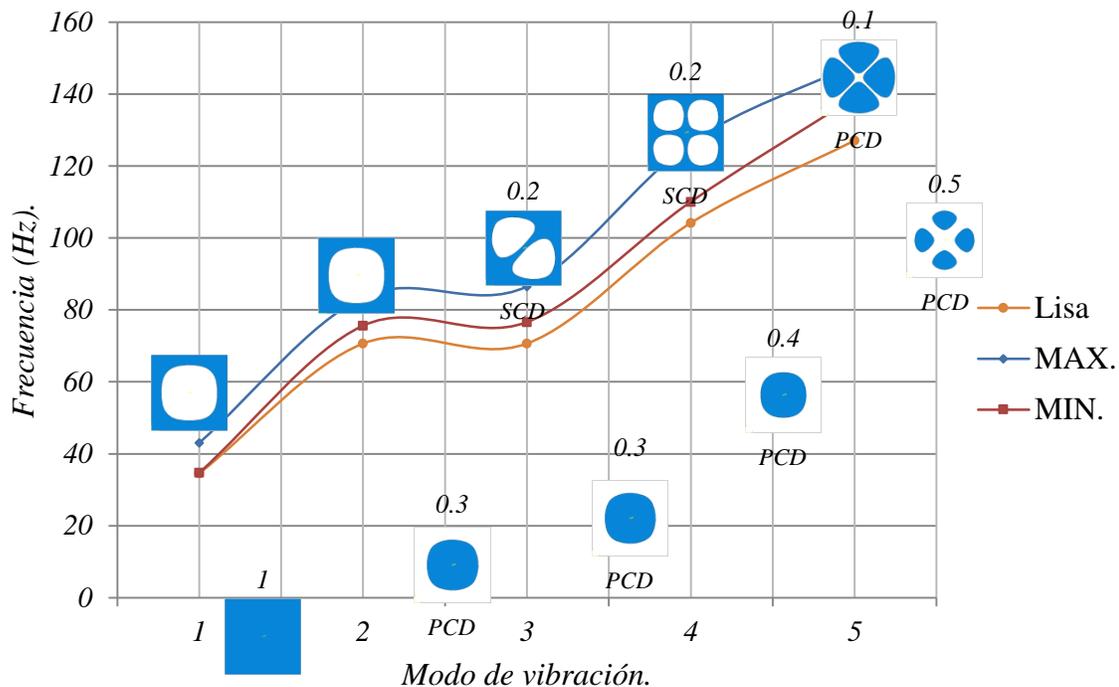


Figura 4-14. Refuerzos que influyen significativamente en las frecuencias naturales de una placa con cuatro lados fijos.

4.5. Resultados numéricos para placas reforzadas con parches compuestos AS4D/9310.

Las configuraciones obtenidas de los gráficos 4-3 a 4-10 son implementadas ahora en un material compuesto homogéneo AS4D/9310. En la tabla 4-7 se muestra los resultados numéricos obtenidos del sistema placa refuerzo (compuesto) con las configuraciones MAX. y MIN de los refuerzos de aluminio.

Fijo en un lado (Hz).					
	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 4</i>	<i>Modo 5</i>
<i>MAX.</i>	4.287	9.001	23.349	27.208	32.602
<i>MIN.</i>	3.920	8.333	21.128	26.370	29.808
<i>LISA</i>	3.346	8.340	20.659	26.294	30.192
Fijo en dos lados (Hz).					
<i>MAX.</i>	25.826	29.957	44.993	70.532	73.133
<i>MIN.</i>	22.921	25.940	41.244	64.110	70.114
<i>LISA</i>	21.375	25.610	42.235	59.096	65.077
Fijo en tres lados (Hz).					
<i>MAX.</i>	27.155	42.337	69.239	74.228	85.456
<i>MIN.</i>	26.305	37.987	64.347	72.534	80.063
<i>LISA</i>	23.107	38.634	61.100	74.001	77.846
Fijo en cuatro lados (Hz).					
<i>MAX.</i>	38.113	74.246	78.437	111.810	124.910
<i>MIN.</i>	35.604	68.586	74.976	104.840	124.970
<i>LISA</i>	34.597	70.673	70.673	104.180	127.080

Tabla 4-7. Resultados numéricos de los refuerzos compuestos homogéneos adosados.

Las figuras 4-15 a 4-18 muestran las tendencias de cada curva. La gráfica 4-15 compara los valores de frecuencia de una placa reforzada con condiciones de fronteras fijas en un lado. Como puede observarse, las curvas de frecuencia se encuentran más próximas en comparación a los gráficos 4-3 a 4-10. Para este caso de estudio, la curva mínima de variación no varía con respecto a la curva lisa de referencia. El porcentaje promedio de variación de esta curva no excede el 1%. Para el caso de la curva de influencia máxima, los valores de frecuencia se desfasan en un 12% en relación a la curva lisa.

En comparación a los resultados de las placas reforzadas con aluminio 1050, existe una diferencia de 13% en el desfase de la curva máxima. Para la curva mínima, la variación de frecuencias es mínimo.

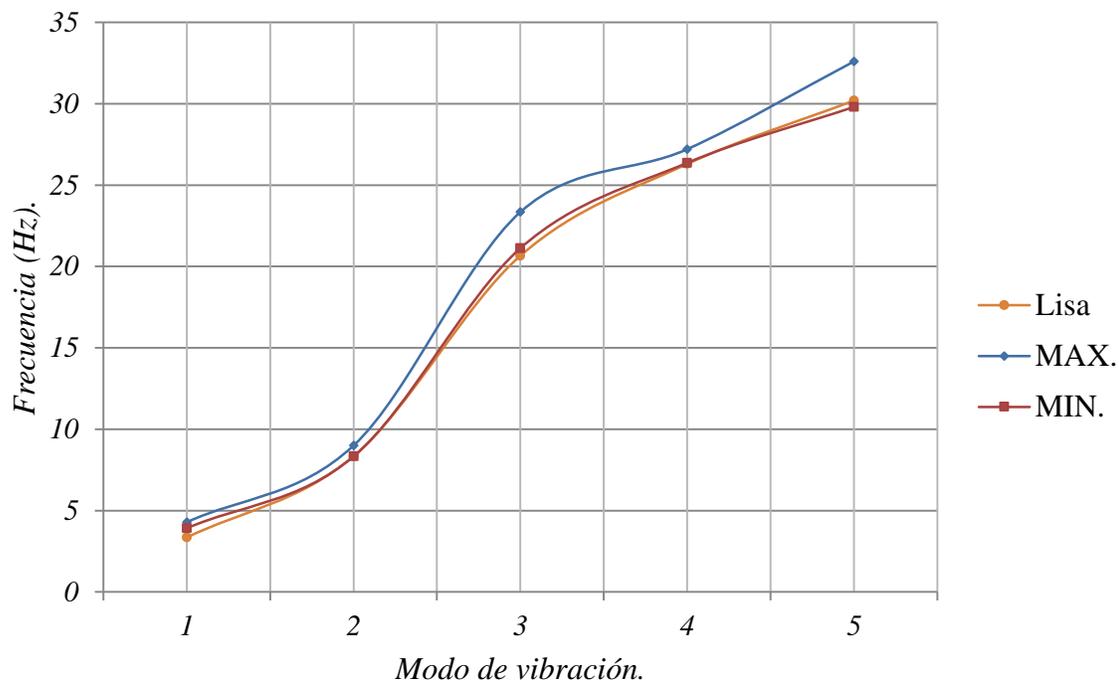


Figura 4-15. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en un extremo.

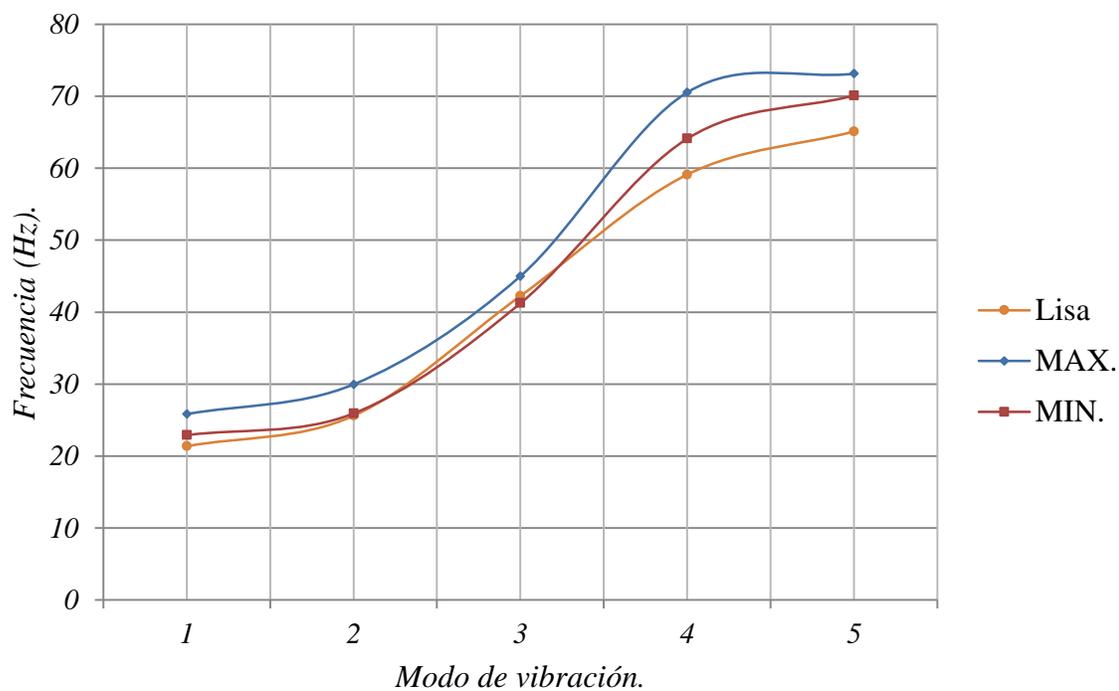


Figura 4-16. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en dos de sus extremos.

En la figura 4-16 se presenta la gráfica de frecuencias con condiciones de frontera fijo en dos lados. Al igual que el primer caso, las curvas tienden a cerrarse en comparación a los refuerzos de aluminio. Los valores de frecuencia se conservan en la curva mínima para los modos de vibración 1, 2 y 3. Para los modos 4 y 5, el porcentaje es de 9% y 8% respectivamente. El porcentaje de influencia promedio para la curva máxima es de 15%, lo que representa una diferencia de 12% (con respecto a los refuerzos de aluminio).

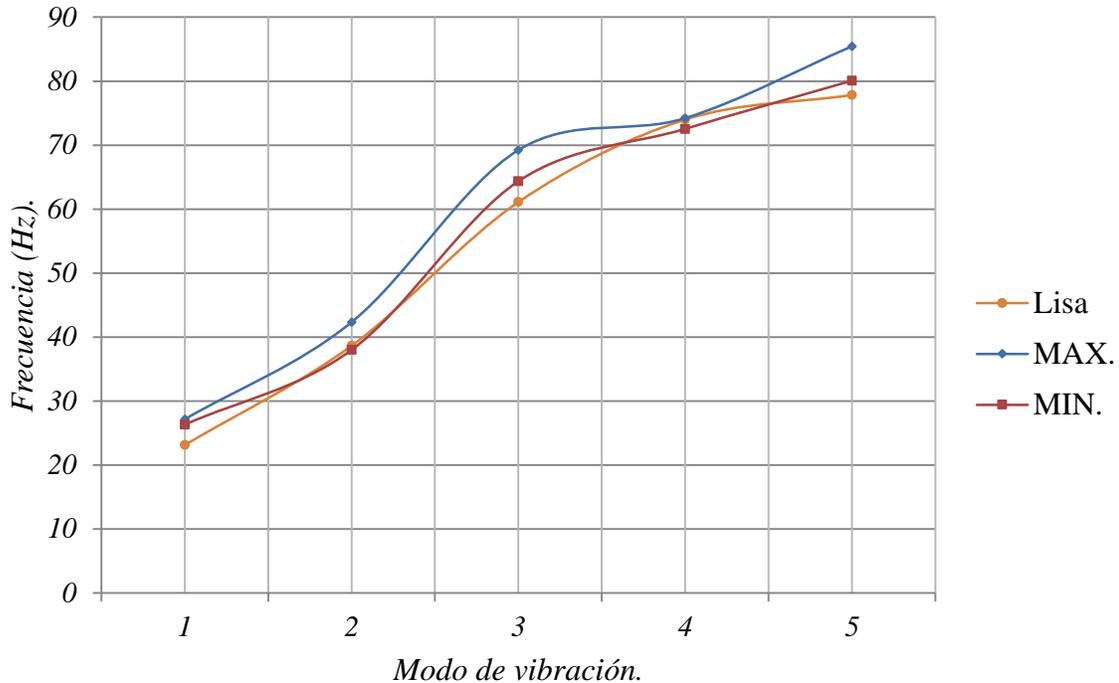


Figura 4-17. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en tres de sus extremos.

En la gráfica 4-17 se muestra las tendencias para condiciones de encastre en tres de los extremos de la placa. La curva de frecuencias mínimas presenta cambios pequeños (del orden menor al 1%). Por otro lado, La curva máxima de influencia tiene un porcentaje promedio de variación de 10%. La diferencia porcentual, en comparación a la curva máxima de los refuerzos de aluminio, es de 10%.

Para el caso en el que la condición de encastre sea en todos los lados de la placa, el gráfico 4-18 indica las variaciones de frecuencia en relación a una placa lisa.

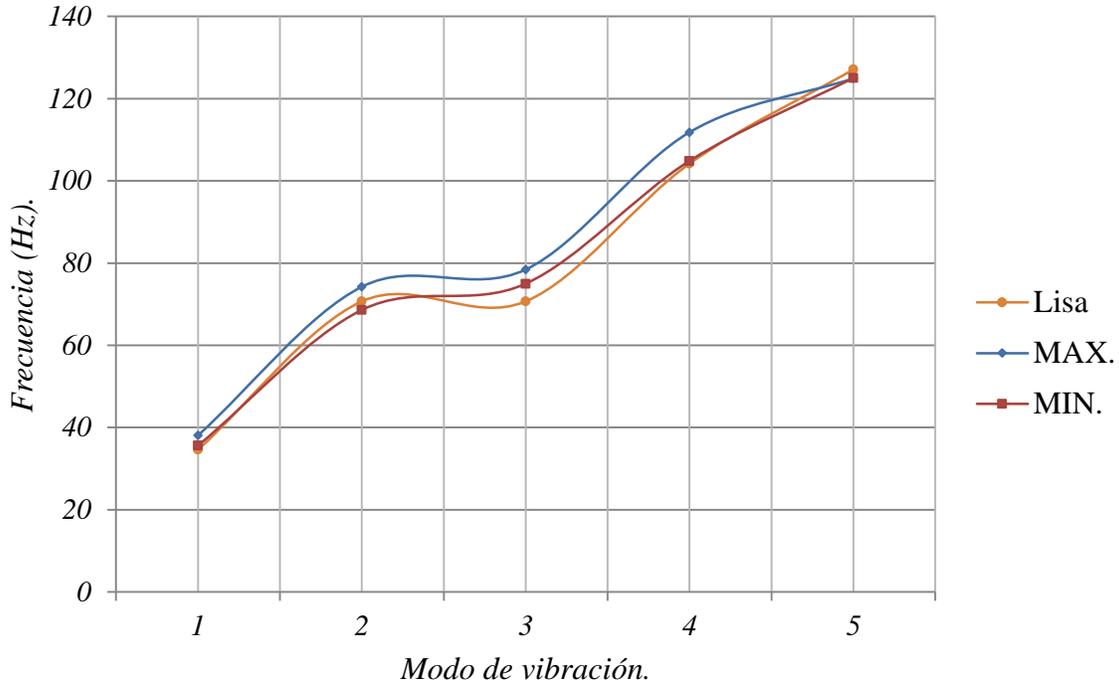


Figura 4-18. Refuerzos ortotrópicos homogéneos para condiciones de frontera fijo en cuatro de sus extremos.

El grado de proximidad entre curvas es mucho mayor que los anteriores casos. De la misma manera, la curva mínima se encuentra muy próxima a la curva lisa. El valor promedio de influencia de la curva máxima es del 6%. Esto da como resultado una diferencia de 11% con respecto a los refuerzos de aluminio.

4.6. Resultados numéricos para placas reforzadas con parches compuestos laminados AS4D/9310.

Las configuraciones obtenidas en la sección 4.4. Fueron implementadas para refuerzos laminados compuesto. Los resultados numéricos de este análisis, se presentan en la tabla 4-8 en donde se encuentra los valores máximos y mínimos de influencia para los cinco primeros modos de vibración. En las figuras 4-19 a 4-22 se muestra los valores graficados de la tabla 4-8.

Fijo en un extremo (Hz).					
	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 4</i>	<i>Modo 5</i>
<i>MAX.</i>	4.144	8.894	22.943	27.365	32.222
<i>MIN.</i>	3.830	8.279	21.003	26.498	29.797
<i>LISA</i>	3.346	8.340	20.659	26.294	30.192
Fijo en dos lados (Hz).					
<i>MAX.</i>	25.185	29.308	44.815	68.652	72.000
<i>MIN.</i>	22.591	25.688	41.386	63.233	68.918
<i>LISA</i>	21.375	25.610	42.235	59.096	65.077
Fijo en tres lados (Hz).					
<i>MAX.</i>	26.646	42.007	68.076	75.184	84.549
<i>MIN.</i>	22.355	37.972	63.662	73.136	79.308
<i>LISA</i>	23.107	38.634	61.100	74.001	77.846
Fijo en cuatro lados (Hz).					
<i>MAX.</i>	37.966	74.581	77.641	111.440	126.960
<i>MIN.</i>	35.606	69.365	73.908	104.650	125.690
<i>LISA</i>	34.597	70.673	70.673	104.180	127.080

Tabla 4-8. Resultados numéricos de los refuerzos compuestos laminados.

En el gráfico 4-19 se comparan los valores de frecuencia para una placa reforzada con materiales compuestos laminados y con condiciones de frontera fijo en uno de sus extremos. Una diferencia que salta a simple vista, es que el grado de variación en las curvas máximas disminuyó considerablemente con respecto a los refuerzos ortotrópicos homogéneos. El porcentaje promedio de variación para la curva máxima es del 11%. La diferencia porcentual con respecto a los refuerzos de aluminio es de 14%. La variación máxima con respecto los refuerzos ortotrópicos es de 1%. Para la curva mínima, los porcentajes de variación no exceden el 1%.

Para el gráfico 4-20 las condiciones de frontera de la placa son fijas en dos lados. Para el caso de la curva mínima, el desfase con respecto a la curva lisa ocurre a partir del tercer modo de vibración. Este desfase es de 7% y 6% en relación a la curva lisa. Para la curva máxima de variación, el porcentaje promedio es del 13%. Por lo tanto, existe una diferencia de desfase en relación a los refuerzos aluminios de 14%. La diferencia de desfase con respecto a la curva máxima de los refuerzos compuestos es de 2%.

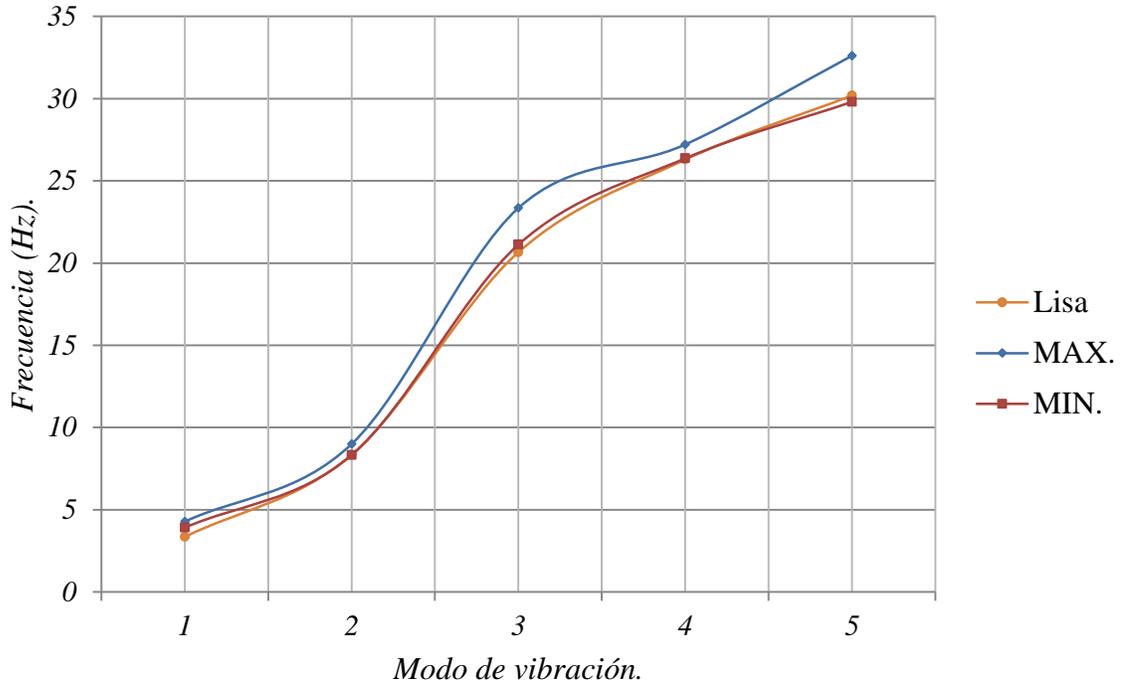


Figura 4-19. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en uno de sus extremos.

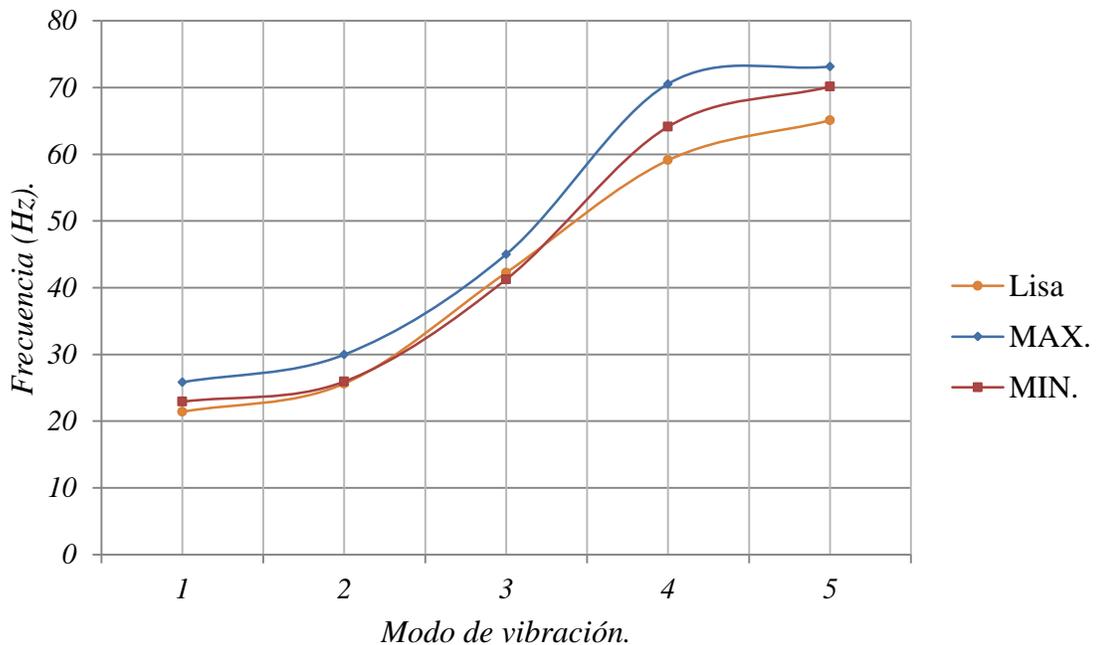


Figura 4-20. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en dos de sus extremos.

La figura 4-21 muestra los resultados para una placa reforzada con materiales compuestos laminados y con condiciones de frontera empotradas en tres de sus extremos. Al igual que los casos anteriores, la curva de mínima influencia se aproxima a las frecuencias de la curva lisa. El porcentaje de variación no excede el 1% para los modos de vibración 2, 4 y 5. Para el modo de vibración 1 y 3, el porcentaje de variación es del 3% y 4%.

Para la curva de variación máxima, el porcentaje promedio es de 9%. La diferencia porcentual con respecto a la curva máxima de los refuerzos de aluminio es de 12% mientras que, en relación a los refuerzos ortotrópicos, el valor es de 1%.

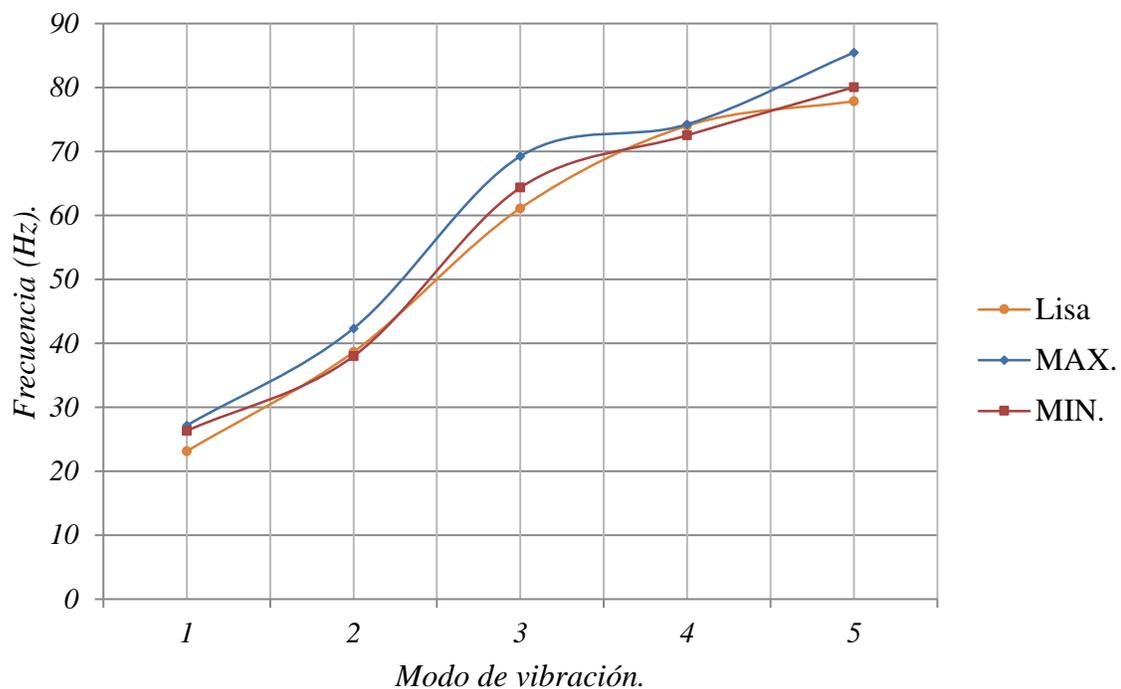


Figura 4-21. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en tres de sus extremos.

Finalmente, para el gráfico de la figura 4-21, se ilustran los resultados de una placa reforzada con un material compuesto laminado bajo condiciones de empotramiento en sus cuatro lados. La curva mínima se aproxima a la curva de referencia de la placa sin refuerzos. Al igual que los casos anteriores, el porcentaje de variación no excede del 1% para todos los modos de vibración.

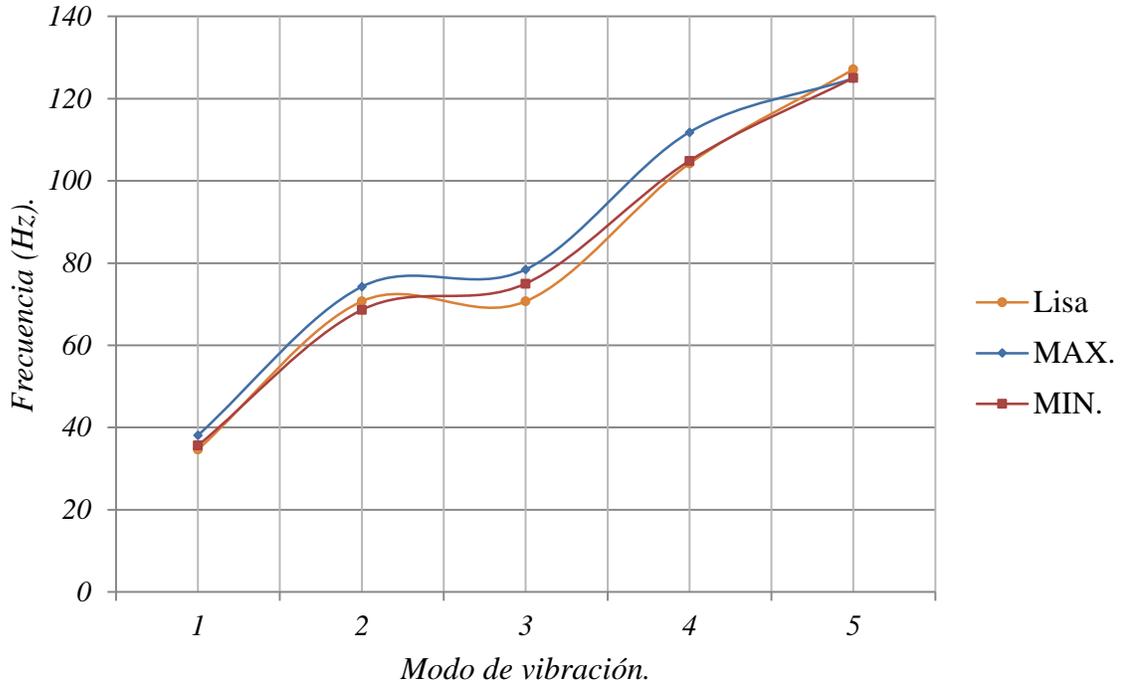


Figura 4-22. Refuerzos ortotrópicos laminados para condiciones de frontera fijo en todos sus lados.

La curva máxima de variación tiene un porcentaje promedio de 6% con respecto a la curva lisa. La diferencia porcentual en relación a los refuerzos de aluminio bajo las mismas condiciones de frontera es de 11%. Para los refuerzos ortotrópicos, esta diferencia es nula. Por lo tanto, el refuerzo compuesto y laminado para el caso de la figura 4-22 afecta de igual manera el comportamiento dinámico vibratorio de la placa.

4.7. Formas modales de placas reforzadas.

Las formas modales de la placa de acero reforzado con parches de material compuesto se presentan a continuación. En la tabla 4-9 se muestran las primeras cinco formas modales del sistema con las configuraciones obtenidas en los apartados 4.4, 4.5 y 4.6, para una placa reforzada empotrada en uno de sus extremos. Las configuraciones tomadas pertenecen a las curvas que mayor influencia tuvieron en las frecuencias naturales del sistema (ver figura 4-15 a 4-18). Tal y como se aprecia, las formas modales conservan ciertas características con respecto a las dadas por la placa sin refuerzos.

Formas modales para una placa reforzada con parches compuestos homogéneos (empotrada en uno de sus lados).					
Tipo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Placa reforzada.					
Placa sin refuerzos.					

Tabla 4-9. Formas modales para una placa reforzada empotrada en uno de sus extremos.

El modo de vibración 1 y 2 no presentan cambios aparentes en sus formas modales. Existe una ligera inclinación en la franja de colores de la primera forma modal, sin embargo, las características del comportamiento no se ven alteradas drásticamente. Para las formas modales 3 y 4, los cambios son más apreciables. Se nota una reducción del campo de desplazamientos en las franjas centrales de las formas modales. Finalmente, el modo 5 de vibración permanece sin cambios considerables en sus formas de vibración.

Formas modales para una placa reforzada con parches compuestos homogéneos (empotrada en dos de sus lados).					
Tipo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Placa reforzada.					
Placa sin refuerzos.					

Tabla 4-10. Formas modales para una placa reforzada empotrada en dos de sus extremos.

En la tabla 4-10 se presentan las formas modales para una placa reforzada con empotramientos en dos de sus extremos. Los cambios más aparentes se muestran en los modos

1 y 4 de vibración. La franja central del modo 1 presenta una reducción en sus desplazamientos, mientras que para el modo 2, las reducciones son mayores en los dos pliegos ondulados de la forma modal. Para los modos de vibración 2, 3 y 5 los refuerzos no tuvieron influencia aparente en los modos de vibración.

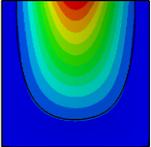
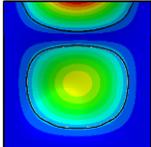
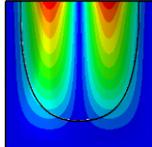
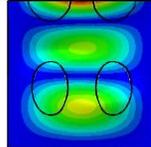
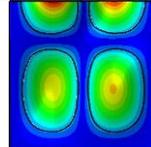
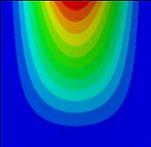
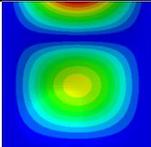
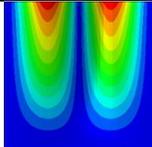
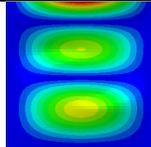
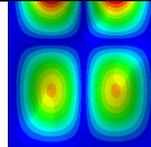
Formas modales para una placa reforzada con parches compuestos homogéneos (empotrada en tres de sus lados).					
Tipo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Placa reforzada.					
Placa sin refuerzos.					

Tabla 4-11. Formas modales para una placa reforzada empotrada en tres de sus extremos.

En la tabla 4-11 se muestran las formas modales de una placa reforzada en tres de sus lados. Como se observa en las figuras, los cambios en la forma modal son nulas en todos los modos de vibración.

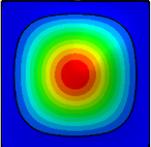
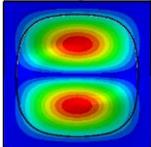
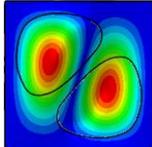
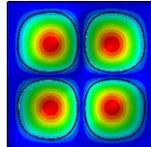
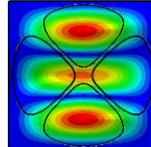
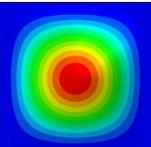
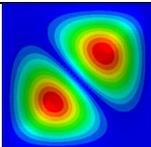
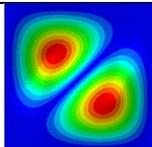
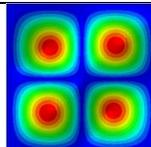
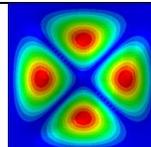
Formas modales para una placa reforzada con parches compuestos homogéneos (empotrada en cuatro de sus lados).					
Tipo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Placa reforzada.					
Placa sin refuerzos.					

Tabla 4-12. Formas modales para una placa reforzada empotrada en cuatro de sus extremos.

Finalmente, en la tabla 4-12 se presentan las formas modales de una placa reforzada fija en todos sus lados. En este caso, los cambios de modos de vibración son más evidentes. Para el modo de vibración 2 de la placa reforzada, los desplazamientos mayores se encuentran horizontalmente, mientras que, para la placa lisa, los desplazamientos se encuentran a 45° con respecto a la horizontal. Para el modo de vibración 3 de la placa reforzada, el campo de desplazamientos cambia de dirección a 90° con respecto a la horizontal.

En el modo 5, la distribución presentada en la placa sin refuerzos cambia de manera significativa. La dirección de las franjas de desplazamientos se presenta horizontalmente a diferencia de los modos de vibración de la placa sin refuerzos.

Capítulo 5: Conclusiones y Recomendaciones.

En la sección 4.1, 4.2 y 4.3 se calibro el modelo numérico para placas isotrópicas (acero A-36), ortotrópicas y laminados. Los resultados de esta calibración permitieron la obtención del tipo de malla para el análisis de las placas reforzadas. La malla obtenida es de 10x10 mm y presenta ventajas en cuanto procesamiento y tiempo de solución de los modelos numéricos. Los errores relativos obtenidos no exceden el 1%.

El análisis numérico del sistema placa-refuerzo de aluminio, se llevó a cabo en un intervalo de referencia de 0.1-0.5 del valor de desplazamiento. Las condiciones de frontera estudiadas fueron: fijo en uno, dos, tres y cuatro lados de la placa. Con esto se aseguró analizar todas las posibles condiciones de empotramiento de la placa, siendo estas las más comunes en el ámbito industrial. El resultado de la integración del refuerzo se muestra en las tablas del anexo D para los conjuntos de diseños propuestos: PCD (*primer conjunto de diseño*) y SCD (*segundo conjunto de diseño*). Ambos conjuntos se diferencian en el área de influencia sobre la placa de acero. En las figuras 4-3 a 4-10 se representan las tendencias de los valores de frecuencia de cada conjunto de diseño, valor de referencia y condición de empotramiento. Como se observa en cada gráfico, la restricción de los extremos de la placa influye enormemente en la influencia de los refuerzos en ambos conjuntos de diseño.

El segundo conjunto de diseño demostró tener mayor impacto en las frecuencias naturales del sistema, lo que conlleva a pensar que los refuerzos que modifican de forma significativa la dinámica de la placa se encuentran en este grupo.

En las figuras 4-11 y 4-14 se muestran los refuerzos cuyas influencias fueron mayores y menores en la placa de acero. Se confirma que la mayor cantidad de refuerzos se encuentran en el segundo conjunto de diseño (SCD) al igual que la gran mayoría de casos estudiados anteriormente. Conforme se añaden un mayor número de restricciones en la placa, la influencia de los refuerzos se incrementa inclusive en los refuerzos del segundo conjunto de diseño.

Finalmente, en los apartados 4.5. y 4.6. se muestran los resultados numéricos obtenidos mediante la implementación de refuerzos compuestos homogéneos y laminados. Las configuraciones obtenidas en los refuerzos de aluminio se aplicaron a los materiales compuestos. Como puede observarse en las figuras 4-19 a 4-22 la implementación de los refuerzos compuestos homogéneos y laminados no influyen significativamente. Esto se debe a

los cambios de rigidez y de densidad con respecto a los refuerzos de aluminio estudiados previamente.

De las conclusiones obtenidas de este documento se derivan las siguientes recomendaciones:

- 1.- El grado de influencia de los refuerzos depende de la rigidez y la masa del sistema. Por lo tanto, si se desea incrementar las frecuencias naturales del sistema placa-refuerzo es necesario incrementar el espesor de cada parche.
- 2.- Los materiales compuestos presentados (AS4D/9310) no tienen gran influencia sobre la dinámica vibratoria del sistema debido a sus características físicas y mecánicas. Sin embargo, con el incremento del espesor de cada refuerzo es posible obtener una considerable modificación de frecuencias.
- 3.- Estudiar la influencia de la unión en el sistema placa-refuerzo sobre las frecuencias naturales. En esta investigación se consideraron nulos los efectos de la unión para simplificar el análisis, sin embargo, no se descarta la posibilidad de que dicho medio altere la dinámica de la placa.
- 4.- Realizar pruebas experimentales para los refuerzos presentados en las figuras 4-11 a 4-14 de los apartados 4.4.
- 5.- Estudiar el efecto de una diversidad de materiales como refuerzos sobre la placa.

Referencias bibliográficas.

Bambill D. V., Felix D. H., Rossit C. A., *Natural frequencies of thin, rectangular plates with holes or orthotropic “patches” carrying an elastically mounted mass.* International Journal of Solids and Structures. Elsevier. Argentina, 2005.

Barbero, Ever J. *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus.* CRC Press, Taylor & Francis Group. Segunda edición. Estados Unidos, 2013.

Barbero, Ever J. *Introduction to Composite Materials Desing.* CRC Press, Taylor and Francis Group: Second Edition. Estados Unidos, 2011.

Bernoulli, J. *Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers,* Nova Acta Acad Petropolit, vol. 5. 1789.

Biancolini M. E., Brutti C. y Reccia L. *Approximate Solution for Free Vibration of Thin Orthotropic Rectangular Plates.* Elsevier, Journal of Sound and Vibration. Italia, Roma, 2005.

Dickinson S. M. *The Buckling and Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Isotropic and Orthotropic Plates Using Rayleigh’s Method.* Elsevier, Journal of Sound and Vibration. Ontario, Canada, 1978.

Duggan M. B., Ochoa O. O., *Natural frequency behavior of damaged composite materials.* *Journal of sound and vibration.* Academic press limited. Texas, 1992.

Euler, L., *De motu vibratorio tympanorum,* Novi Commentari Acad Petropolit. 1766.

Ferreira A. J. M., Roque C. M. C., *Free vibration analysis of symmetric laminates composite plates by FSDT and radial basis functions.* Computer methods in applied mechanics and engineering. Elsevier. Portugal, 2004.

Ferreira A. J. M., Roque C. M. C., *Natural frequencies of FSDT cross-ply composite Shells by multiquadrics.* Composite structures. Elsevier. Portugal, 2005.

Gibson Ronald F. *Principle of composite material mechanics.* Mc. Graw Hill, Inc. Estados Unidos, 1994.

Harris Cyril M. y Piersol Allan G. *Shock and Vibration Handbook*. McGraw-Hill. Nueva York, Estados Unidos, 2002.

Jones, Robert M. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis. Segunda edición. 1999.

Kant T. y Swaminathan K. *Analytical Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-Order Refined Theory*. Elsevier. Composite Structures. Bombay, India, 2001.

Keissler Seth S., Mark Spearing S., Damaged detection in composite materials using frequency response methods. Composites: Part B: Engineering. Elsevier. Londres, 2002.

Khdeir A. A., Reddy J. N., *Free vibrations of laminated composite plates using second-order shear deformation theory*. Computers and structures. Pergamon. Arabia, 1998.

Kirchhoff, G.R., *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe*, J Fuer die Reine und Angewandte Mathematik. 1850.

Laura P. A. A. y Ercoli L. *Transverse Vibrations of an Isotropic Simply Supported Rectangular Plate with an Orthotropic Inclusion*. Elsevier, Journal of Sound and Vibration. Bahia Blanca. Argentina, 1991.

Leissa Arthur W. *Vibration of plates*. NASA, Office of Technology Utilization. Ohio, Estados Unidos, 1970.

Leung A. Y. T., *Integration of beam functions*. Computers and structures. Pergamon. Gran Bretaña, 1987.

Lord Kelvin y Tait, P.G., Treatise., *On Natural Philosophy, vol. 1*. Clarendon Press, Oxford, 1883.

Mindlin R. D., *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates*. J Appl Mech 1951.

Nettles A. T., *Basic Mechanics of Laminated Composite Plates*. NASA, Marshall Space Flight Center. Alabama, Estados Unidos, 1994.

Ngo-Cong D., Mai-Duy N., Karunasena W., *Free vibration analysis of laminates composite plates based on FSDT using one-dimensional IRBFN method.* Computers and structures. Elsevier. Australia, 2010.

Pardoen Gerard C., *Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Laminates.* Journal of Composite Materials. Pennsylvania, Estados Unidos, 2014.

Peng L. X., Liew K. M., *Buckling and free vibration analyses of stiffened plates using the FSDT mesh-free method.* *Journal of sound and vibration.* Elsevier. Hong Kong, 2005.

Reddy J, N., *A simple higher-order theory for laminated composite plates.* ASME: Journal of applied mechanics. ASME, 1984.

Reddy J. N., Chao W. C., *A comparison of closed-form and finite-element solutions of thick laminated anisotropic rectangular plates.* Nuclear Engineering and design. North-Holland Publishing Company. 1980.

Reddy J. N., Khdeir A. A., *Buckling and vibration of laminates composite plates using various plates theories.* AIAA Journal Vol. 27. 1988.

Reddy, J. N. y Phan N. D., *Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory.* Elsevier, Journal of Sound and Vibration. Blacksburg, Virginia 1983.

Reissner, E., *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,* J Appl Mech Trans ASME. 1945.

Shenoi R. A. y Meunier M., *Free Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. Nueva York, Estados Unidos, 1999.

Shu Xiaoping, Sun Liangxin, *An improved simple higher-order theory for laminated composited plates.* *Computers and structures.* Pergamon. Republica china, 1992.

Sobczyk K., *Free Vibrations of Elastic Plate With Random Properties.* Journal of Sound and Vibrations. Inglaterra, 1974.

Thompson William T., *Theory of vibration with aplicaciones*. Prentice Hall. Segunda edición, 1982.

Warbourton, G. B., *The Vibration of Rectangular Plates*. Proceedings of the institution of mechanical engineers. Estado de Iowa, Estados Unidos, 1954.

Wood A. D., F. D. Zaman, *Free Vibrations of Randomly Inhomogeneous*. Journal of Sound and Vibrations. Inglaterra, 1977.

Xing Y. F. y Liu B., New *Exact Solutions for Free Vibrations of Thin Orthotropic Rectangular Plates*. Elsevier, Composite structures. Beijing, China, 2009.

Apéndice.

Apéndice A: Matriz de rigidez para laminados HSDT (cross-ply).

$$C_{11} = \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}$$

$$C_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66})$$

$$C_{13} = -(4/3h^2)\alpha^3 E_{11} - (4/3h^2)\alpha\beta^2 [E_{12} + 2E_{66}]$$

$$C_{14} = \alpha^2 B_{11} - \alpha^2(4/3h^2)E_{11} + \beta^2 [B_{66} - (4/3h^2)E_{66}]$$

$$C_{15} = \alpha\beta[(B_{12} + B_{66}) - (4/3h^2)(E_{12} + E_{66})]$$

$$C_{22} = \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66}$$

$$C_{23} = -\beta^3(4/3h^2)E_{22} - (4/3h^2)\alpha^2\beta[E_{12} + 2E_{66}]$$

$$C_{24} = \alpha\beta[(B_{12} + B_{66}) - (4/3h^2)(E_{12} + E_{66})]$$

$$C_{25} = \beta^2 B_{22} - \beta^2(4/3h^2)E_{22} + \alpha^2 [B_{66} - (4/3h^2)E_{66}]$$

$$C_{33} = \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44} - (8/h^2)(\alpha^2 D_{55} + \beta^2 D_{44}) + (4/h^2)^2(\alpha^2 F_{55} + \beta^2 F_{44})$$

$$+ (4/3h^2)^2 [\alpha^4 H_{11} + 2(H_{12} + 2H_{66})\alpha^2\beta^2 + \beta^4 H_{22}]$$

$$C_{34} = \alpha A_{55} - (8/h^2)\alpha D_{55} + (4/h^2)^2 \alpha F_{55} - (4/3h^2) [\alpha^3 F_{11} + (F_{12} + 2F_{66})\alpha\beta^2]$$

$$+ (4/3h^2)^2 [\alpha^3 H_{11} + (H_{12} + 2H_{66})\alpha\beta^2]$$

$$C_{35} = \beta A_{44} - (8/h^2)\beta D_{44} + (4/h^2)^2 \beta F_{44} - (4/3h^2) [\alpha^2\beta(F_{12} + 2F_{66}) + \beta^3 F_{22}]$$

$$+ (4/3h^2)^2 [(H_{12} + 2H_{66})\alpha^2\beta + \beta^3 H_{22}]$$

$$C_{44} = A_{55} + \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} - (8/h^2)D_{55} + (4/h^2)^2 F_{55}$$

$$- (8/3h^2) [\alpha^2 F_{11} + \beta^2 F_{66}] + (4/3h^2)^2 [\alpha^2 H_{11} + \beta^2 H_{66}]$$

$$C_{45} = \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) - (8/3h^2)(F_{12} + F_{16})\alpha\beta + (4/3h^2)^2 \alpha\beta(H_{12} + H_{66})$$

$$C_{55} = A_{44} + \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} - (8/h^2)D_{44} + (4/h^2)^2 F_{44}$$

$$(8/3h^2) [\alpha^2 F_{66} + \beta^2 F_{22}] + (4/3h^2)^2 [\alpha^2 H_{66} + \beta^2 H_{22}]$$

Matriz de masa para laminados HSDT (cross-ply).

$$G_{11} = I_1$$

$$G_{25} = I_2 - (4/3h^2)I_4$$

$$G_{12} = 0$$

$$G_{33} = I_1 + (4/3h^2)^2(\alpha^2 + \beta^2)I_7$$

$$G_{13} = -(4/3h^2)\alpha I_4$$

$$G_{34} = -(4/3h^2)\alpha I_5 + (4/3h^2)^2 \alpha I_7$$

$$G_{14} = I_2 - (4/3h^2)I_4$$

$$G_{35} = -(4/3h^2)\beta I_5 + (4/3h^2)^2 \beta I_7$$

$$G_{15} = 0$$

$$G_{44} = I_3 - (8/3h^2)I_5 + (4/3h^2)^2 I_7$$

$$\begin{aligned}G_{22} &= I_1 & G_{45} &= 0 \\G_{23} &= -(4/3h^2)\beta I_4 & G_{55} &= I_3 - (8/3h^2)I_5 + (4/3h^2)^2 I_7 \\G_{24} &= 0\end{aligned}$$

Matriz de rigidez para laminados FSDT (cross-ply).

$$\begin{aligned}C_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66} \\C_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\C_{13} &= 0 \\C_{14} &= \alpha^2 B_{11} + \beta^2 B_{66} \\C_{15} &= \alpha\beta(B_{12} + B_{66}) \\C_{22} &= \beta^2 A_{22} + \alpha^2 A_{66} \\C_{23} &= 0 \\C_{24} &= C_{15} \\C_{25} &= \beta^2 B_{22} + \alpha^2 B_{66} \\C_{33} &= \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44} \\C_{34} &= \alpha A_{55} \\C_{35} &= \beta A_{44} \\C_{44} &= A_{55} + \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} \\C_{45} &= \alpha\beta(D_{12} + D_{66}) \\C_{55} &= A_{44} + \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22}\end{aligned}$$

Matriz de masa para laminados FSDT (cross-ply).

$$\begin{aligned}G_{11} &= I_1 \\G_{12} &= 0 \\G_{13} &= 0 \\G_{14} &= I_2 \\G_{15} &= 0 \\G_{22} &= I_1 \\G_{23} &= 0 \\G_{24} &= 0 \\G_{25} &= I_2\end{aligned}$$

$$G_{33} = I_1$$

$$G_{35} = 0$$

$$G_{44} = I_3$$

$$G_{45} = 0$$

$$G_{55} = I_3$$

Apéndice B: Forma de la interfaz gráfica.



Interfaz gráfica del algoritmo para la obtención de contornos de refuerzo para la modificación de las frecuencias naturales de una placa de acero.

Apéndice C. Matriz de rigidez placas compuestas laminadas

Dadas las propiedades del material compuesto AS4D/9310, la matriz de rigidez está dada por:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 134.561 & 2.332 & 0 \\ 2.332 & 7.746 & 0 \\ 0 & 0 & 4.306 \end{bmatrix} \text{ Gpa} \quad (\text{B.1})$$

Sin embargo, debido a que existe una orientación en cada pliego de la placa laminada (0° y 90°) es necesario modificar la matriz $[Q]$. Para ello se requiere emplear las ecuaciones (2.23) a (2.28). Estas modificaciones derivan en dos matrices de 0° y 90° respectivamente.

a 0° :

$$[Q]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 134.561 & 2.332 & 0 \\ 2.332 & 7.746 & 0 \\ 0 & 0 & 4.306 \end{bmatrix} \text{ Gpa} \quad (\text{B.2})$$

a 90° :

$$[Q]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 7.746 & 2.332 & 0 \\ 2.332 & 134.561 & 0 \\ 0 & 0 & 4.306 \end{bmatrix} \text{ Gpa} \quad (\text{B.3})$$

Como se observa en las matrices B.2 y B.3 los componentes c_{11} y c_{22} intercambian posiciones de 0° a 90° . Esto facilita los cálculos en el caso de las placas tipo *cross-ply* ya que obteniendo la matriz de rigidez general e intercambiando los componentes c_{11} y c_{22} es posible obtener las rigideces en cada pliego. Las matrices de cortante se obtienen mediante las ecuaciones (2.29) y (2.30). Esto es:

a 0° :

$$[Q_c]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 2.760 & 0 \\ 0 & 4.306 \end{bmatrix} \text{ Gpa} \quad (\text{B.4})$$

a 90°:

$$[Q_c]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 4.306 & 0 \\ 0 & 2.760 \end{bmatrix} \text{ Gpa} \quad (\text{B.5})$$

Dada las matrices de rigidez correspondiente a cada pliego y orientación de fibra es posible obtener las relaciones constitutivas basadas en las teorías FSDT y HSDT. Para ello es necesario emplear las integrales definidas en las ecuaciones (2.61) y (2.62) dadas en la sección 2.9. Mediante estas relaciones se calculan las matrices constitutivas de la placa A , B , D , E , F y H para el primer modo de vibración.

$$[A] = \begin{bmatrix} 7.115 & 0.233 & 0 \\ & 7.115 & 0 \\ \text{sim.} & & 0.431 \end{bmatrix} 1 \times 10^8 \text{ Pa}\cdot\text{m} \quad (\text{B.6})$$

$$[B] = [0] \text{ Pa}\cdot\text{m}^2 \quad (\text{B.7})$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 9,892.4 & 194.3 & 0 \\ & 1,966.5 & 0 \\ \text{sim.} & & 358.8 \end{bmatrix} \text{ Pa}\cdot\text{m}^3 \quad (\text{B.8})$$

$$[E] = [0] \text{ Pa}\cdot\text{m}^4 \quad (\text{B.9})$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0.1632 & 0.0029 & 0 \\ & 0.0146 & 0 \\ \text{sim.} & & 0.0054 \end{bmatrix} \text{ Pa}\cdot\text{m}^5 \quad (\text{B.10})$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 0.2981 & 0.0052 & 0 \\ & 0.0195 & 0 \\ \text{sim.} & & 0.0096 \end{bmatrix} 1 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{m}^6 \quad (\text{B.11})$$

Las ecuaciones (B.7) y (B.9) son características de los laminados tipo *cross-ply*. Esto se debe a la simetría que existe entre pliegos y a la convención de signos para el posicionamiento de cada pliego en el espesor de la placa. Dada las propiedades constitutivas de la placa propuesta

para el estudio, lo siguiente es el cálculo de las matrices de rigidez y de masa de la placa. Basados en las teorías de Reddy (1983), en el *apéndice A* se presentan dichos coeficientes cuya integración conlleva a estas matrices fundamentales. Para el caso de la teoría del alto orden por deformación cortante para placas se tiene:

$$C = \begin{bmatrix} 2.9790 & 0.2620 & 0 & 0 & 0 \\ & 2.9790 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.1489 & 0.0103 & 0.0133 \\ & & & 0.0017 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 0.0021 \end{bmatrix} 1 \times 10^{10} \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\text{B.12})$$

En cuanto la matriz de masa está dada en la ecuación (B.13):

$$M = \begin{bmatrix} 15.20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 15.20 & 0 & 0 & 0 \\ & & 15.20 & -0.0001 & -0.0001 \\ & & & 0.0001 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 0.0001 \end{bmatrix} \text{ Kg/m}^2 \quad (\text{B.13})$$

En el caso de la primera teoría por deformación cortante los términos relacionados con las matrices E , F y H son nulas. Este hecho genera una nueva matriz de rigidez y masa basadas en la teoría FSDT. Estas matrices se muestran en las ecuaciones (B.14) y (B.15) para la rigidez y la masa respectivamente.

$$C = \begin{bmatrix} 2.9790 & 0.0921 & 0 & 0 & 0 \\ & 2.9790 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0.2790 & 0.0222 & 0.0222 \\ & & & 0.0036 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 0.0035 \end{bmatrix} 1 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\text{B.14})$$

$$M = \begin{bmatrix} 15.20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 15.20 & 0 & 0 & 0 \\ & & 15.20 & 0 & 0 \\ & & & 0.0001 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 0.0001 \end{bmatrix} \text{ Kg/m}^2 \quad (\text{B.15})$$

Para ambos casos, el problema de los eigenvalores queda como lo muestra la ecuación (2.68). Sin embargo, para obtener una resolución adecuada es necesario modificar dicha ecuación. Esto es:

$$([C]^{-1}[C] - \lambda[C]^{-1}[M])\{\Delta\} = [C]^{-1}[0] \quad (B.16)$$

$$([I] - \lambda[Z])\{\Delta\} = [0] \quad (B.17)$$

En donde el valor de la matriz Z representa el producto de la inversa de la rigidez y su correspondiente masa. Los resultados de dicho producto son:

$$[Z]_{HSDT} = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0002 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2530 & 0.2033 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 1.6275 & 0.0002 & 0.2601 \end{bmatrix} 1 \times 10^{12} \quad (B.19)$$

$$[Z]_{FSDT} = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7525 & 0.2821 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 1.7525 & 0.0002 & 0.2796 \end{bmatrix} 1 \times 10^{12} \quad (B.20)$$

Obteniendo los eigenvalores correspondientes se obtuvieron los siguientes resultados para el primer modo de vibración para una placa compuesta laminada:

$$\omega_{HSDT} = 187.21Hz \quad (B.21)$$

$$\omega_{FSDT} = 187.50Hz \quad (B.22)$$

Apéndice D. Tabla de resultados para placas reforzadas.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	3.108	7.925	22.430	28.726	30.998	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	3.250	7.811	24.285	28.114	31.995	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.613	8.251	25.828	29.342	32.733	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.291	8.018	24.623	29.106	34.362	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.395	8.053	21.268	27.456	29.588	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	3.613	8.295	25.828	29.342	34.362	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	21.475	25.353	43.362	62.472	67.776	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	21.203	24.769	42.342	63.084	66.862	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	21.452	25.298	42.343	63.884	69.363	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	21.856	25.840	43.795	62.773	67.999	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	21.776	25.523	43.577	63.743	67.517	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	21.856	25.840	43.795	63.884	69.363	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	22.363	39.175	62.453	79.498	82.261	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	22.960	38.336	65.111	76.999	79.598	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	23.205	39.234	64.365	79.630	81.749	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	23.073	38.637	64.405	77.566	80.268	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	23.568	39.020	64.672	77.885	79.362	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	23.568	39.234	65.111	79.630	82.261	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	34.308	74.327	74.406	111.610	140.830	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	35.952	75.594	76.189	109.630	140.380	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	36.336	76.970	78.148	112.090	146.740	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	36.103	75.044	76.318	108.010	139.140	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	38.600	81.019	82.203	112.950	148.300	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	38.600	81.019	82.203	112.950	148.300	

Tabla D-1. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el primer conjunto de diseño (PCD). Valor de referencia de 0.1.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	4.042	9.085	22.467	26.965	31.966	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	4.214	9.614	23.484	28.064	33.990	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.523	8.523	22.079	26.675	31.678	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.913	8.903	22.624	27.753	31.673	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.774	9.126	23.865	28.516	34.059	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	4.214	9.614	23.865	28.516	34.059	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	24.653	28.757	44.939	65.992	71.808	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	25.762	32.151	46.391	67.635	79.257	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	26.267	30.385	47.629	68.937	74.397	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	23.672	27.686	44.059	64.463	70.522	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	25.082	29.792	45.786	67.437	76.483	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	26.267	32.151	47.629	68.937	79.257	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	30.733	45.526	76.470	81.943	89.025	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	28.820	47.107	72.573	84.368	93.701	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	27.642	43.631	71.403	81.297	87.700	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	27.751	44.138	70.703	82.952	87.737	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	26.659	43.545	69.688	81.867	90.113	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	30.733	47.107	76.470	84.368	93.701	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.1	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	43.071	83.565	86.155	119.560	144.170	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	40.366	77.877	83.724	114.490	143.110	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	40.606	78.655	84.038	115.720	143.980	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	39.333	78.946	80.242	119.150	140.670	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	38.601	78.473	79.149	113.130	138.160	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	43.071	83.565	86.155	119.560	144.170	

Tabla D-2. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el segundo conjunto de diseño (SCD). Valor de referencia de 0.1.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	2.981	7.805	22.155	28.469	30.863	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	3.137	7.660	24.020	26.820	32.221	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.550	8.225	25.832	29.267	33.351	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.134	7.943	22.277	26.824	31.205	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.505	8.005	22.202	27.079	30.503	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	3.550	8.295	25.832	29.267	33.351	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	21.408	25.118	43.044	63.713	68.485	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	21.851	25.345	42.040	67.522	72.801	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	22.080	25.644	43.022	67.234	72.620	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	21.091	25.270	43.384	62.358	67.420	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	21.328	25.005	42.801	63.689	66.606	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	22.080	25.644	43.384	67.522	72.801	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	22.453	39.446	63.393	78.093	81.729	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	23.556	40.276	69.002	81.168	83.442	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	22.026	38.833	59.811	77.951	79.890	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	23.164	38.408	67.201	77.907	81.975	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	23.164	38.878	65.668	77.408	79.795	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	23.556	40.276	69.002	81.168	83.442	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	34.437	75.945	77.348	113.360	143.460	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	35.221	75.966	76.912	111.370	144.200	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	35.081	75.574	76.943	111.430	140.910	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	35.521	75.117	77.874	110.050	139.200	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	36.064	76.192	77.333	109.640	141.200	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	36.064	76.192	77.874	113.360	144.200	

Tabla D-3. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el primer conjunto de diseño (PCD). Valor de referencia de 0.2.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	4.265	9.258	22.226	27.207	31.634	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	4.244	9.853	23.485	30.607	33.725	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.585	8.598	22.486	27.193	32.220	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.931	8.897	23.304	28.474	32.363	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.813	9.262	24.002	29.480	34.724	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	4.265	9.853	24.002	30.607	34.724	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	24.686	29.059	45.071	64.432	71.022	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	26.327	32.794	48.708	68.738	78.213	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	27.789	32.242	49.783	70.919	77.428	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	24.336	28.181	44.478	65.561	71.741	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	25.473	32.085	47.209	69.491	80.942	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	27.789	32.794	49.783	70.919	80.942	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	29.785	44.079	72.300	80.948	89.085	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	28.663	47.563	71.325	82.240	93.619	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	27.527	42.796	71.181	80.203	87.957	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	28.765	44.517	71.659	82.667	87.936	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	28.529	46.346	72.959	84.130	95.090	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	29.785	47.563	72.959	84.130	95.090	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.2	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	41.409	78.556	81.342	112.970	135.300	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	40.298	76.556	84.833	115.360	140.430	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	40.859	77.095	86.520	116.010	145.040	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	40.748	82.253	83.220	126.440	143.430	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	40.176	80.718	81.425	112.650	138.810	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	41.409	82.253	86.520	126.440	145.040	

Tabla D-4. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el segundo conjunto de diseño (SCD). Valor de referencia de 0.2.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	2.942	7.732	21.677	28.210	30.794	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	3.113	7.609	23.216	25.797	31.658	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.466	8.251	25.424	29.105	33.426	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.140	7.975	22.769	26.386	31.630	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.439	7.956	22.143	26.388	30.740	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	3.466	8.295	25.424	29.105	33.426	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	21.471	25.050	42.766	63.762	68.522	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	21.523	24.768	40.924	62.084	66.974	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	22.102	25.707	42.463	66.160	72.124	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	20.928	25.221	43.304	62.492	67.387	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	21.030	24.777	42.325	62.893	66.608	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	22.102	25.707	43.304	66.160	72.124	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	23.139	39.663	65.729	78.789	80.607	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	23.827	39.523	68.517	78.242	84.219	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	22.081	38.931	61.134	77.138	80.271	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	23.239	38.415	65.810	77.802	81.613	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	23.008	38.669	65.518	77.294	80.277	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	23.827	39.663	68.517	78.789	84.219	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	34.221	75.600	76.589	111.890	138.510	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	34.436	73.923	75.429	108.510	136.780	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	34.538	74.582	75.274	108.450	139.160	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	34.413	72.602	72.817	105.580	133.530	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	34.599	72.893	73.413	106.230	133.570	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	34.733	75.600	76.589	111.890	139.160	

Tabla D-5. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el primer conjunto de diseño (PCD). Valor de referencia de 0.3.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	4.373	9.344	22.421	27.527	31.607	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	4.398	10.058	23.838	29.271	34.275	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.568	8.548	22.480	27.579	32.256	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.915	8.946	24.264	29.397	32.840	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.676	8.955	23.159	30.020	33.492	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	4.398	10.058	24.264	30.020	34.275	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	23.328	27.694	44.378	61.148	67.441	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	25.137	34.465	51.050	65.828	80.005	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	26.448	28.432	49.364	67.861	70.471	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	24.864	28.540	44.739	65.886	72.177	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	23.966	28.874	46.194	64.649	72.812	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	26.448	34.465	51.050	67.861	80.005	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	27.898	43.354	67.462	84.222	84.762	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	28.130	46.695	70.053	84.980	90.586	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	29.299	43.315	73.925	81.848	89.536	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	27.508	43.986	69.577	83.339	86.672	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	28.681	44.934	71.392	83.995	92.532	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	29.299	46.695	73.925	84.980	92.532	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.3	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	41.600	79.132	79.176	112.630	135.920	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	40.823	77.407	86.375	117.690	143.620	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	39.624	76.444	82.295	114.830	139.580	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	40.357	79.426	82.828	122.660	139.670	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	40.420	79.175	83.949	113.800	138.210	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	41.600	79.426	86.375	122.660	143.620	

Tabla D-6. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el segundo conjunto de diseño (SCD). Valor de referencia de 0.3.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	2.935	7.700	21.187	27.983	30.673	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	3.111	7.578	21.272	24.872	29.869	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.338	8.235	22.958	28.279	31.210	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.162	7.932	21.367	25.604	30.467	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	4.049	9.034	24.807	30.715	33.251	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	4.049	9.034	24.807	30.715	33.251	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	21.599	25.042	42.491	63.086	68.192	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	22.526	25.900	40.957	65.326	72.621	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	22.203	25.612	43.579	63.699	69.749	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	20.846	25.122	43.068	63.534	67.915	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	21.219	24.988	41.985	65.046	69.975	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	22.526	25.900	43.579	65.326	72.621	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	22.566	38.099	62.187	76.795	78.293	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	23.099	38.080	64.864	74.304	80.765	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	22.107	38.797	61.823	76.594	79.241	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	23.112	37.974	64.893	75.872	80.704	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	22.996	38.223	66.293	75.284	79.808	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	23.150	38.797	66.293	76.795	80.765	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	35.353	77.498	77.659	110.020	140.330	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	34.105	72.637	75.197	107.490	135.760	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	34.225	74.038	74.514	109.340	136.230	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	34.606	74.376	74.682	108.400	135.570	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	33.881	70.203	70.438	104.230	126.060	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	35.353	77.498	77.659	110.020	140.330	

Tabla D-7. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el primer conjunto de diseño (PCD). Valor de referencia de 0.4.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	4.398	9.366	22.908	27.847	31.837	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	4.339	9.981	24.225	30.183	35.001	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.559	8.538	22.394	27.902	32.160	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	4.049	9.034	24.807	30.715	33.251	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.697	8.934	23.331	30.302	33.425	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	4.398	9.981	24.807	30.715	35.001	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	25.086	29.529	45.912	63.898	70.164	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	23.791	29.169	48.365	64.342	70.255	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	24.696	28.335	47.442	66.604	71.762	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	24.653	28.499	44.921	65.729	72.193	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	24.269	29.623	46.790	65.656	74.331	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	25.086	29.623	48.365	66.604	74.331	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	29.341	44.651	70.577	82.997	86.962	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	26.320	46.705	68.345	82.996	91.973	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	28.022	43.366	71.330	84.138	90.008	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	28.131	43.526	70.611	83.119	85.790	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	26.181	45.228	67.969	84.363	92.220	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	29.341	46.705	71.330	84.363	92.220	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.4	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	40.910	78.204	78.325	112.370	136.970	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	40.434	77.411	83.824	116.790	142.370	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	39.678	76.790	82.461	115.620	139.830	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	41.902	81.093	84.923	126.020	140.180	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	37.199	75.411	75.487	107.220	130.140	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	41.902	81.093	84.923	126.020	142.370	

Tabla D-8. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el segundo conjunto de diseño (SCD). Valor de referencia de 0.4.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	2.949	7.702	20.737	27.744	30.470	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	3.152	7.642	21.104	24.689	29.797	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.249	8.184	20.632	28.138	29.742	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.259	7.927	20.819	24.910	29.757	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.350	8.010	21.367	25.768	30.442	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	3.354	8.295	21.367	28.138	30.470	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	22.152	25.250	42.421	63.604	68.606	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	22.520	25.900	40.770	62.979	70.339	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	22.357	26.168	42.093	62.909	70.407	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	20.692	25.068	42.919	63.152	67.487	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	21.128	24.893	41.658	63.142	68.440	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	22.520	26.168	42.919	63.604	70.407	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	23.155	38.031	62.796	76.992	78.271	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	23.433	38.755	63.868	74.280	79.992	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	22.246	36.735	62.605	76.367	78.041	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	23.298	38.286	63.596	77.635	79.959	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	22.922	38.280	64.981	74.610	80.279	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	23.433	38.755	64.981	77.635	80.279	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	34.526	74.243	74.540	108.210	133.280	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	34.713	75.935	76.485	110.040	136.730	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	34.630	74.974	76.613	109.190	137.070	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	34.637	74.815	76.304	110.550	134.050	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	34.766	74.487	74.691	106.750	139.080	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	34.766	75.935	76.613	110.550	139.080	

Tabla D-9. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el primer conjunto de diseño (PCD). Valor de referencia de 0.5.

<i>Fijo en uno de sus extremos.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	4.377	9.340	23.581	28.204	32.293	3.346
<i>Refuerzo 2</i>	4.667	10.094	24.910	30.882	36.788	8.340
<i>Refuerzo 3</i>	3.752	8.711	23.952	27.246	32.522	20.659
<i>Refuerzo 4</i>	3.971	9.044	24.425	31.541	33.415	26.294
<i>Refuerzo 5</i>	3.791	8.997	23.387	31.047	33.829	30.192
<i>Refuerzo 6</i>	3.354	8.295	20.654	26.327	30.110	x
Max.	4.667	10.094	24.910	31.541	36.788	
<i>Fijo de dos lados, libre en dos lados.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	24.423	29.266	45.922	62.849	69.502	21.375
<i>Refuerzo 2</i>	24.150	29.513	48.089	65.775	72.013	25.610
<i>Refuerzo 3</i>	27.090	31.081	49.425	72.417	76.370	42.235
<i>Refuerzo 4</i>	24.817	28.584	45.071	65.522	72.048	59.096
<i>Refuerzo 5</i>	25.316	30.516	47.335	69.023	76.663	65.077
<i>Refuerzo 6</i>	21.434	25.607	42.241	59.268	65.162	x
Max.	27.090	31.081	49.425	72.417	76.663	
<i>Fijo en tres lados, libre en un lado.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	29.496	46.202	71.385	83.348	88.447	23.107
<i>Refuerzo 2</i>	26.296	43.988	68.668	84.900	86.976	38.634
<i>Refuerzo 3</i>	26.979	42.709	68.940	81.360	87.417	61.100
<i>Refuerzo 4</i>	26.138	44.393	69.256	84.209	86.039	74.001
<i>Refuerzo 5</i>	26.940	44.258	69.717	86.221	89.279	77.846
<i>Refuerzo 6</i>	23.150	38.698	61.260	74.213	78.017	x
Max.	29.496	46.202	71.385	86.221	89.279	
<i>Fijo de todos sus lados.</i>						
V.R.=0.5	1	2	3	4	5	LISA
<i>Refuerzo 1</i>	40.887	78.451	79.186	113.070	140.810	34.597
<i>Refuerzo 2</i>	39.982	77.556	82.577	116.270	143.020	70.673
<i>Refuerzo 3</i>	40.430	77.146	82.648	115.260	143.980	70.673
<i>Refuerzo 4</i>	41.079	79.714	82.287	123.410	141.340	104.180
<i>Refuerzo 5</i>	40.901	80.557	83.833	114.440	138.790	127.080
<i>Refuerzo 6</i>	34.733	70.951	70.951	104.590	127.580	x
Max.	41.079	80.557	83.833	123.410	143.980	

Tabla D-10. Frecuencias naturales obtenidas numéricamente para el segundo conjunto de diseño (SCD). Valor de referencia de 0.5.