

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Subdirección Académica

Departamento de Ingeniería Electrónica

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

**Detección de Fallas en Sensores para Helicópteros no Tripulados
Utilizando el Enfoque Takagi-Sugeno**

presentada por
Ing. Adriana Méndez Gallegos

como requisito para la obtención del grado de
Maestra en Ciencias en Ingeniería Electrónica

Director de tesis
Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza

Codirectora de tesis
Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Cuernavaca, Mor., 16 de noviembre de 2016.

OFICIO No. DIE/229/2016

Asunto: Aceptación de documento de tesis

DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial de la **C. Adriana Méndez Gallegos** con número de control **M14CE027** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“DETECCIÓN DE FALLAS EN SENSORES PARA HELICOPTEROS NO TRIPULADOS UTILIZANDO EL ENFOQUE TAKAGI-SUGENO”** y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza
Doctor en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 5505019

CODIRECTOR DE TESIS

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 9968714

REVISOR 1

Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica
Cédula profesional 7534115

REVISOR 2

Dr. José Francisco Gómez Aguilar
Doctor en Física
Cédula profesional 9124781

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Estudiante
Expediente

CMAZ/lrr

cenidet[®]
Centro Nacional de Investigación
y Desarrollo Tecnológico

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira. C.P. 62490 Cuernavaca, Mor.
Tels. (01)777 362-77-70 Ext. 4106, e-mail: direccion@cenidet.edu.mx
www.cenidet.edu.mx



Cuernavaca, Mor., 16 de noviembre de 2016

OFICIO No. SAC/327/2016

Asunto: Autorización de impresión de tesis

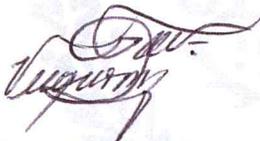
**ING. ADRIANA MÉNDEZ GALLEGOS
CANDIDATA AL GRADO DE MAESTRA EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“DETECCIÓN DE FALLAS EN SENSORES PARA HELICÓPTEROS NO TRIPULADOS UTILIZANDO EL ENFOQUE TAKAGI-SUGENO”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“CONOCIMIENTO Y TECNOLOGIA AL SERVICIO DE MEXICO”



**DR. GERARDO VICENTE GUERRERO RAMÍREZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**



SEP TecNM
CENTRO NACIONAL
DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO
TECNOLÓGICO
SUBDIRECCIÓN
ACADÉMICA

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres.- Jefa del Departamento de Servicios Escolares.
Expediente

GVGR/mcr

Dedicatoria

A mis padres, Gustavo Méndez Velázquez y Guillermina Gallegos Pérez por el amor incondicional que siempre me han brindado, ser ejemplo de superación y lucha diaria para cumplir los sueños personales.

A mi hermano David Gustavo Méndez Gallegos por su apoyo y cariño, siempre motivándome a ser una persona mejor cada día.

A Manuel Jáuregui Buenrostro por su amor, apoyo, paciencia y estar siempre para mí.



Agradecimientos

A mis padres por su apoyo, amor, paciencia, confianza y fé incondicional en este sueño.

A mi hermano por creer en mí, brindarme palabras de aliento y hacerme sonreír siempre.

A Manuel, por su amor, consejos, risas y fé. Te amo.

A mi asesor, el Dr. Carlos Manuel Astorga Zaragoza por su confianza, guía, paciencia y conocimiento otorgado para realizar esta tesis. Siempre le estaré agradecida.

A la Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo por brindarme su paciencia, conocimiento, confianza y estar al pendiente de mí. Siempre le estaré agradecida.

Al Dr. Carlos Daniel García Beltrán por los comentarios, observaciones y enseñanzas. Muchas gracias.

A mis revisores, el Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez y el Dr. José Francisco Gómez Aguilar, por sus comentarios, observaciones, paciencia, disponibilidad y valiosos consejos para realizar esta tesis. ¡Muchas gracias por todo!

A mí amigo Ricardo Schacht por su amistad, consejos, apoyo y risas en esta etapa de mi vida.

A mí amigo Gerardo Ortíz por su apoyo y comentarios para desarrollar esta tesis.

A mis compañeros de generación, Montserrat, Joaquín, Didier, Susana, Emmanuel, Julio, Carlos, Chuy, Heda y Alberto por compartir buenos y malos momentos durante nuestros días de estudio.

A mis amigos y compañeros de otras generaciones por mencionar, Mari, Hugito, Carbot, Alán, Citlaly, Turi, Jashiel, Paulina, Paty, Cinda por sus palabras de ánimo para llegar hasta el final y cumplir esta meta.

A mis profesores, el Dr. Juan Reyes Reyes, Dr. Gerardo Vicente Guerrero, Dr. Enrique Quintero Mármol Márquez, Dr. Luis Gerado Vela Valdés y el Dr. Manuel Adam Medina por

brindarme su conocimiento.

A Lorena Ruiz por su paciencia y consejos en los tramites.

Al Cenidet y a todos los departamentos que lo conforman. Por brindarme los medios para mi formación académica y hacer amena mi estadia. Gracias a la Lic. Anita por su paciencia y comentarios en mis tramites.

Al CONACYT por el apoyo económico otorgado para alcanzar este gran logro.

Resumen

En esta investigación se aborda la problemática de la detección y el aislamiento de fallas en sensores para un sistema de vuelo estacionario no lineal de múltiple entrada-múltiple salida con doble rotor (TRMS, por sus siglas en inglés Twin Rotor MIMO System). A través de un esquema de observadores dedicados (DOS, por sus siglas en inglés Dedicated Observer Scheme) desde un enfoque Takagi-Sugeno.

Se obtiene la representación Takagi-Sugeno a partir del modelo no lineal del sistema bajo estudio por medio del enfoque de sector no lineal. Este enfoque tiene la característica de representar fielmente el comportamiento no lineal del sistema. Esta condición probada mediante diferentes índices de desempeño tales como IAE (por sus siglas en inglés Integral Absolute Error), ISE (por sus siglas en inglés Integral mean Square Error), ITAE (por sus siglas en inglés Integral of the Time weighted Absolute Error).

Se diseña el esquema de detección y aislamiento de fallas a partir de un banco de observadores dedicados para detectar y aislar fallas en sensores. Cada observador utiliza todas las entradas y solo una salida del sistema. Cada observador es sensible solo a una falla a la vez por cada sensor. Las ganancias de cada observador son calculadas a partir del criterio de estabilidad de Lyapunov por medio de desigualdades lineales matriciales, de tal manera que el error de estimación converge asintóticamente a cero.

El sistema Takagi-Sugeno y el esquema de detección y aislamiento de fallas en sensores son implementados a nivel simulación (utilizando el software MatLab[®], versión 2015a). El esquema de detección y aislamiento de fallas es evaluado ante fallas abruptas e incipientes en los sensores de velocidad angular de cabeceo y guiñada y en los sensores de momento del rotor principal y de cola.

Abstract

This research addresses the fault detection and isolation method on sensors for a Twin Rotor MIMO System (TRMS) through a Dedicated observer scheme (DOS) based on the Takagi-Sugeno approach.

The Takagi-Sugeno model is obtained through nonlinear sector approach taking into account the nonlinear model for the TRMS. This approach has the characteristic of representing the nonlinear behavior system. This condition is proved through different performance indices such as Integral Absolute Error (IAE), Integral mean Square Error (ISE), Integral Time weighted Absolute Error (ITAE).

Consequently, the fault detection and fault isolation scheme is designed to conform a dedicated observer bank to detect and isolate sensor faults. Each observer drives all the inputs and just one output of the system. Therefore, each Observer is only sensitive to one sensor fault. The gains of each observer are obtained by the stability analysis. To ensure the estimation error convergence the solution of linear matrix inequalities is required.

The Takagi-Sugeno system and the fault detection and isolation scheme are implemented in a simulation level. The fault detection and isolation scheme is verified under the abrupt and incipient faults on the Angular velocity sensors (pitch and yaw) and the moment sensor to measure the main rotor and the tail.

Índice general

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	4
1.2. Objetivos	6
1.2.1. Objetivo general	6
1.2.2. Objetivos específicos	6
1.3. Motivación	6
1.4. Estado del arte	7
1.5. Alcance	12
1.6. Aportaciones	13
1.7. Originalidad	13
1.8. Metodología	14
1.9. Organización del documento	15
2. Marco Teórico	17
2.1. Sistemas difusos Takagi-Sugeno	17
2.1.1. Dinámica de los sistemas difusos Takagi-Sugeno	18
2.2. Modelado de los sistemas Takagi-Sugeno	20
2.2.1. Modelo de sistemas Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal	20
2.2.2. Modelo de sistemas Takagi-Sugeno por el enfoque de linealización . .	24
2.3. Estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno	25
2.4. Índices de desempeño.	27
2.5. Conclusiones	27
3. Modelado Takagi-Sugeno del TRMS	29
3.1. Descripción del TRMS	29
3.2. Modelado no lineal del TRMS	30
3.2.1. Simulación del modelo no lineal del TRMS	34
3.3. Modelado Takagi-Sugeno del TRMS	36
3.3.1. Obtención del modelado Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal del TRMS	36

3.3.2. Comparación del modelo no lineal con el modelo Takagi-Sugeno	46
3.3.2.1. Simulación 1.	46
3.3.2.2. Simulación 2.	48
3.4. Conclusiones	51
4. Esquema de detección de fallas	53
4.1. Teoría del método de detección de fallas.	53
4.2. Diseño de observadores Takagi-Sugeno del TRMS.	55
4.2.1. Análisis de estabilidad del observador.	57
4.2.2. Criterio de observabilidad para sistemas multimodelos.	59
4.2.3. Cálculo de las ganancias del observador Takagi-Sugeno	61
4.2.4. Banco de observadores.	69
4.3. Validación del observador propuesto	72
4.4. Conclusiones	90
5. Evaluación del esquema de detección de fallas en sensores.	91
5.1. Características de la simulación.	91
5.2. Caso de falla. Sensor de velocidad angular de cabeceo.	92
5.3. Caso de falla. Sensor de velocidad angular de guiñada.	97
5.4. Caso de falla. Sensor de Momento del rotor principal.	100
5.5. Caso de falla. Sensor de momento del rotor de cola.	103
5.6. Caso de falla. Sensor de de ángulo de cabeceo y ángulo de guiñada.	107
5.7. Conclusiones	108
6. Conclusiones y trabajos futuros	111
6.1. Conclusiones	111
6.2. Trabajos futuros	111
7. Anexo	113
Bibliografía	121

Índice de figuras

1.1. Aeronave de ala fija (Valavanis <i>et al.</i> 2014).	2
1.2. Aeronave de ala rotatoria (Valavanis <i>et al.</i> 2014).	3
1.3. Aeronave dirigible (Valavanis <i>et al.</i> 2014).	3
1.4. Aeronave de ala batiente (Valavanis <i>et al.</i> 2014).	3
1.5. Esquema general en Postlethwaite.	9
1.6. Esquema general en Montes.	10
1.7. Esquema general en Pratap.	10
1.8. Esquema general en Montes.	11
1.9. Esquema general en Rotondo.	12
1.10. Esquema de general.	14
2.1. Clasificación de las diferentes técnicas para obtener un modelo Takagi-Sugeno.	20
2.2. Esquema del convertidor Boost.	22
3.1. Partes del Twin Rotor MIMO System.	30
3.2. Descripción de movimiento del TRMS.	31
3.3. Entradas utilizadas para el modelo no lineal.	35
3.4. Dinámica del modelo no lineal.	35
3.5. Obtención de los máximos y mínimos de z_j	40
3.6. Dinámica del modelo Takagi-sugeno mediante el enfoque del sector no lineal contra el modelo no lineal.	46
3.7. Funciones de pertenencia respecto al tiempo.	47
3.8. Error del modelo no lineal con el modelo Takagi-Sugeno de la simulación 1.	47
3.9. Entrada constante.	49
3.10. Dinámica del modelo Takagi-sugeno mediante el enfoque del sector no lineal contra el modelo no lineal.	50
3.11. Funciones de pertenencia respecto al tiempo.	50
3.12. Error del modelo no lineal con el modelo Takagi-Sugeno de la simulación 2.	51
4.1. Generador de residuo con observador.	55
4.2. Conceptos de generación de residuos.	55
4.3. Diagrama esquemático del observador de estado.	56
4.4. Esquema de observadores dedicados para fallas en sensores.	69
4.5. Esquema de observadores generalizados para fallas en sensores.	70

4.6. Esquema de detección de fallas.	70
4.7. Detección de falla en el sensor y_2	71
4.8. Detección de falla en el sensor y_4	71
4.9. Detección de falla en el sensor y_5	71
4.10. Detección de falla en el sensor y_6	72
4.11. Entradas utilizadas para el TRMS.	73
4.12. Estimación del observador 1 en x_1, x_2 y en x_3	73
4.13. Estimación del observador 1 en x_4, x_5 y en x_6	74
4.14. Estimación del observador 2 en x_1, x_2 y en x_3	76
4.15. Estimación del observador 2 en x_4, x_5 y en x_6	76
4.16. Estimación del observador 3 en x_1, x_2 y en x_3	78
4.17. Estimación del observador 3 en x_4, x_5 y en x_6	78
4.18. Estimación del observador 4 en x_1, x_2 y en x_3	80
4.19. Estimación del observador 4 en x_4, x_5 y en x_6	80
4.20. Entrada constante.	82
4.21. Estimación del observador 1 en x_1, x_2 y en x_3 de la simulación 2.	82
4.22. Estimación del observador 1 en x_4, x_5 y en x_6 de la simulación 2.	83
4.23. Estimación del observador 2 en x_1, x_2 y en x_3 de la simulación 2.	85
4.24. Estimación del observador 2 en x_4, x_5 y en x_6 de la simulación 2.	85
4.25. Estimación del observador 3 en x_1, x_2 y en x_3 de la simulación 2.	87
4.26. Estimación del observador 3 en x_4, x_5 y en x_6 de la simulación 2.	87
4.27. Estimación del observador 4 en x_1, x_2 y en x_3 de la simulación 2.	89
4.28. Estimación del observador 4 en x_4, x_5 y en x_6 de la simulación 2.	89
5.1. Entradas utilizadas para el TRMS.	93
5.2. Ruido	93
5.3. Falla abrupta.	94
5.4. Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_2	94
5.5. Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_2	95
5.6. Falla incipiente.	96
5.7. Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_2	96
5.8. Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_4	98
5.9. Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_4	99
5.10. Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_4	100
5.11. Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_5	101
5.12. Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_5	102
5.13. Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_5	103
5.14. Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_6	104
5.15. Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_6	105
5.16. Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_6	106
5.17. Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_1	107
5.18. Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_3	108

Índice de Tablas

3.1. Variables de estado del TRMS.	34
3.2. Cambio de variables de estado en el modelo del TRMS.	34
3.3. Parámetros de simulación para el modelo no lineal del TRMS (Pratap <i>et al.</i> 2010).	36
3.4. Combinación de las 32 reglas del sistema.	42
3.5. Formulación para cada modelo Takagi-Sugeno.	43
3.6. Valores de los índices de desempeño de la simulación 1.	48
3.7. Valores de los índices de desempeño de la simulación 2.	51
4.1. Ganancias del observador 1.	63
4.2. Ganancias del observador 2.	64
4.3. Ganancias del observador 3.	66
4.4. Ganancias del observador 4.	68
4.5. Valores de los índices de desempeño del observador 1.	75
4.6. Valores de los índices de desempeño del observador 2.	77
4.7. Valores de los índices de desempeño del observador 3.	79
4.8. Valores de los índices de desempeño del observador 4.	81
4.9. Valores de los índices de desempeño del observador 1 en simulación 2.	84
4.10. Valores de los índices de desempeño del observador 2 en simulación 2.	86
4.11. Valores de los índices de desempeño del observador 3 en simulación 2.	88
4.12. Valores de los índices de desempeño del observador 4 en simulación 2.	90
5.1. Firmas de falla	92
5.2. Umbrales para residuos	92
5.3. Firma de falla en el sensor de velocidad angular de cabeceo.	94
5.4. Firma de falla en el sensor de velocidad angular de guiñada.	98
5.5. Firma de falla en el sensor de momento del rotor principal.	101
5.6. Firma de falla en el sensor de momento del rotor de cola.	105

Capítulo 1

Introducción

Las aeronaves tripuladas aparecieron a finales de 1700, y tomó otro siglo para que máquinas más pesadas lograran cruzar los cielos. Las aeronaves no tripuladas surgen poco después de la invención del avión, que aparece en la época de la primera guerra mundial en 1916. Sin embargo, la idea de construir “máquinas voladoras” fue concebida por primera vez hace cerca de 2500 años, en la antigua Grecia y China. Personajes importantes como Pitágoras, Arquímedes y otros estudiaron el uso de mecanismos autónomos para una variedad de aplicaciones.

El primer UAV (por sus siglas en inglés *Unmanned Aerial Vehicle*) moderno fue fabricado por los americanos Elmer Sperry y Peter Cooper Hewitt en 1916. Desarrollaron un giroscopio para estabilizar la nave, con el fin de fabricar un piloto automático. Esto se conoce como el principio de “control de posición”, que llegó a ser usado para la dirección automática de una aeronave. Numerosas máquinas voladoras fueron diseñadas entre los años 1860 y 1909, centrándose inicialmente en el despegue vertical y aterrizaje debido a las limitaciones de los motores a vapor que estaban en uso en esa época. A medida que la relación peso-potencia de los motores mejoró, las primeras máquinas voladoras fueron transformadas a los diseños de helicópteros y aviones que están en uso hoy en día (Valavanis *et al.* 2014).

El objetivo principal de desarrollo de las aeronaves ha sido siempre el transporte rápido y seguro de personas y de carga. Sin embargo, las fuerzas armadas realizaron un análisis de los beneficios potenciales de las aplicaciones en UAVs y del esfuerzo para adaptarse a este tipo de máquinas sin un piloto a bordo. Tales sistemas se iniciaron como los sistemas de suministro, lo que ahora se conoce como misiles o bombas inteligentes. Los UAVs se han definido como aquellos sistemas que están diseñados para ser recuperados después de cada misión, y aunque pueden llevar cargamento no es un componente integral de la estructura de la aeronave.

En los próximos años será común ver en los cielos aviones no tripulados, ya que los expertos predicen un incremento en la aplicación de este tipo de vehículos. No todos los vehículos aéreos no tripulados serán operados por las dependencias de gobierno y de la policía sino también brinda la oportunidad de estar en manos de particulares. Estas embarcaciones de sigilo se están convirtiendo cada vez más populares, no solo con fines militares, sino

también para toda actividad, desde la investigación de la vida silvestre, la investigación atmosférica, apoyo en desastres naturales, fotografía deportiva, entre otras actividades. Los UAVs se están convirtiendo en los ojos y los oídos de los científicos. El gran avance tecnológico sin duda tendrá un impacto importante en la sociedad (Torre *et al.* 2016).

Un UAV es una aeronave que está equipada en algunos casos con unidades de procesamiento de datos, sensores, control automático y sistemas de comunicación capaz de realizar misiones de vuelo autónomas.

Los principales componentes que incluye un UAV son los siguientes (Valavanis *et al.* 2014):

- Sensores de navegación y microprocesadores: Los sensores representan uno de los elementos individuales más costosos y son necesarios para el logro de navegación y los microprocesadores permiten volar misiones enteras de forma autónoma con poca o ninguna intervención humana.
- Los sistemas de comunicación (enlace de datos): Los principales problemas de las tecnologías de comunicación son la flexibilidad, la adaptabilidad, la seguridad y la capacidad de controlar el ancho de banda, la frecuencia, y la información (datos).
- Estación terrestre de comando, control, comunicaciones y cómputo (como C4): Hay varios aspectos clave de la infraestructura C4 como el estar fuera de borda, las interfaces hombre-máquina, múltiples aeronaves, la identificación de objetivos, reducción de los equipos de tierra, control de voz, etc.
- Inteligencia en aeronave (guía, navegación y control): La inteligencia puede estar directamente relacionada en la toma de decisiones en la presencia de una misión complicada. Aún hay mucho que hacer para madurar estas tecnologías para demostrar su utilidad y fiabilidad.

A continuación se clasifican los vehículos aéreos no tripulados en función de sus características (configuración aerodinámica, tamaño, etc.). Normalmente se dividen en las siguientes cuatro categorías (Valavanis *et al.* 2014):

- De ala fija: se refieren a los aviones no tripulados que requieren una pista de despegue o lanzamiento de catapulta. Estos por lo general tienen una larga resistencia y pueden volar a velocidades altas, como se muestra en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Aeronave de ala fija (Valavanis *et al.* 2014).

- De ala rotatoria: también conocidos como helicópteros con despegue y aterrizaje de manera vertical, con alta maniobrabilidad. Este tipo de UAV puede tener diferentes configuraciones, con rotor principal y de cola (helicóptero convencional), rotores coaxiales, rotores en tándem, multi-rotores, etc, como se muestra en la Figura 1.2.



Figura 1.2: Aeronave de ala rotatoria (Valavanis *et al.* 2014).

- Dirigibles no rígidos: como globos y dirigibles, que son más ligeros que el aire y tienen una larga resistencia, vuela a bajas velocidades, y por lo general son de un gran tamaño, como se muestra en la Figura 1.3.



Figura 1.3: Aeronave dirigible (Valavanis *et al.* 2014).

- De ala batiente: son los que tienen pequeñas alas flexibles inspirados por aves e insectos voladores, como se muestra en la Figura 1.4.



Figura 1.4: Aeronave de ala batiente (Valavanis *et al.* 2014).

Las técnicas de supervisión en los dispositivos del UAV se usan para mantener un control del rendimiento en las actividades que se le programen a la aeronave. Debido a que es una necesidad latente el asegurar las condiciones adecuadas dentro del sistema. Cualquier elemento fallado ya sea un actuador o sensor puede causar bajo rendimiento, paro o accidentes

fatales, es por ello que la rápida detección y aislamiento de una falla ayudan a evitar eventos anormales en los procesos y mejorar su rendimiento.

Una etapa esencial para garantizar el funcionamiento seguro de un sistema, es la puesta en marcha de funciones de supervisión. La supervisión se define como el conjunto de acciones puestas en marcha con el fin de detectar, de localizar y de diagnosticar todo fenómeno anormal. La supervisión permite implementar un proceso de tratamiento de fallas, sin actuar realmente ni sobre el proceso ni sobre el control del mismo. Estas acciones de supervisión se elaboran a partir de técnicas llamadas “detección y localización de fallas” (FDI por las siglas en inglés de *Fault Detection and Isolation*). La detección corresponde a la puesta en evidencia de todo fenómeno anormal que afecta el comportamiento del sistema monitoreado, mientras que la localización permite de ubicar y de identificar la fuente de este fenómeno anormal (el componente defectuoso) (Venkatasubramanian et al. 1988).

En la literatura existen diferentes trabajos que abordan la situación de localizar un hecho anómalo dentro del sistema representado por modelos lineales. Pero en la actualidad las técnicas de lógica difusa, se han aplicado en esquemas de control y diseño de observadores, debido a la ventaja que brinda en la representación de modelos no lineales.

En esta investigación, se tiene como caso de estudio un TRMS (por sus siglas en inglés Twin Rotor Multiple-input Multiple-output System) el cual es un banco de pruebas modelo 33-949S fabricado por la compañía Feedback Instruments LTd con fines académicos. Este sistema asemeja la dinámica de un helicóptero de 6 grados de libertad, con la diferencia de que el TRMS cuenta con sólo 2 grados de libertad: los ángulos de Euler pitch (cabeceo) y yaw (guiñada). Para este trabajo de tesis el comportamiento dinámico del helicóptero se representó por medio del enfoque Takagi-Sugeno, partiendo de un modelo no lineal. Utilizando el modelo Takagi-Sugeno del TRMS se aplicó un esquema de detección de fallas basado en el esquema DOS (por sus siglas en inglés *Dedicated Observer Scheme*).

1.1. Planteamiento del problema

En el ámbito académico y el mercado mundial se ha mostrado un incremento notable en el estudio y aplicaciones de vehículos aéreos no tripulados, debido a que tienen una alta maniobrabilidad y capacidad de suspensión en el aire.

Este tipo de vehículos son adecuados para realizar tareas como son: seguimiento de objetivos ágiles, inspección y vigilancia de actividades que requieren mantener una posición fija y obtención de vistas detalladas.

Además, las capacidades de despegue y aterrizaje de los helicópteros en el eje vertical dentro de espacios pequeños son muy convenientes en muchas aplicaciones.

Los UAVs incorporan un sistema de inteligencia gracias a la programación de su electrónica, lo que les permite volar autónomamente y son dinámicamente rápidos. En cuanto a las aplicaciones más específicas de UAVs se pueden utilizar en ambientes de alta toxicidad

química y radiológica, en los que sea necesario tomar muestras con alto peligro en vidas humanas y realizar tareas de control de ambiente. Pueden cooperar en misiones de control del narcotráfico y contra el terrorismo.

En el ámbito de la observación de la tierra, estos tienen múltiples aplicaciones y posibilidades en el mercado civil: internet (distribución de señal gratuita de internet), cartografía (realizar fotos, mapas y modelos de elevación del terreno de alta resolución), agricultura (gestión de cultivos), servicios forestales (seguimiento de las áreas boscosas, control de incendios), geología, hidrología, medio ambiente (estado de la atmosfera, control de obras y evaluación de su impacto, seguimiento de la planificación urbanística, gestión del patrimonio, seguridad y control fronterizo) son algunas de las numerosas actividades que se realizan con estos vehículos.

Normalmente para fines académicos y científicos su función prioritaria es la de portar sensores que permiten la captura de información en una área específica mientras que el vehículo aéreo no tripulado cubre dicha área, la información obtenida es transmitida a una estación de control en tierra, la cual se encarga de analizar la información y controlar la nave. En México, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), informó en un comunicado que algunas secretarías y organismos gubernamentales de nuestro país cuentan con vehículos aéreos no tripulados para llevar a cabo parte de sus tareas. Entre los organismos se encuentran la Secretaría de la Defensa Nacional (SEDENA), Secretaría de Marina (SEMAR), Secretaría de Seguridad Pública (SSP), Centro de Investigación y Seguridad Nacional (CISEN), Servicio Geológico Mexicano (SGM) y el sistema de información Agroalimentaria y Pesquera (SIAP).

El creciente uso de estos dispositivos de vuelo trae consigo altos índices de seguridad y monitoreo durante las misiones, para evitar desastres como:

- El 29 de enero de 2012 se estrelló un UAV tipo Eitan durante un vuelo de prueba en el centro de Israel donde no se reportaron heridos.
- El 27 de septiembre de 2004 el UAV ANKA (Phoenix), desarrollado por los ingenieros turcos, perdió el control y se estrelló durante un vuelo de prueba.
- El 30 enero de 2014 Estados Unidos estrelló uno de sus aviones a causa de la pérdida del control generado por una falla mecánica cuando vigilaban la frontera con México, entre otros.

Un UAV se compone de sensores suministradores de datos confiables para el análisis y toma de decisiones en cualquier escenario, es decir sistemas que determinan tanto su rumbo como su trayectoria, y equipos que permiten recolectar información para ser transmitida a los centros de control. Por lo tanto, la presencia de una falla en cualquier parte del helicóptero (actuadores, sensores, parámetros del sistema, etc.) puede ocasionar daño al equipo o en todo caso la pérdida total del mismo.

El problema que aborda este tema de tesis es aplicar un adecuado método de detección de fallas en los sensores del TRMS por medio del enfoque Takagi-Sugeno, con la finalidad de que el sistema no interrumpa su operación o trabaje en modo degradado.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Proponer un esquema de detección de fallas para los sensores de velocidad angular de cabeceo (pitch), velocidad angular de guiñada (yaw), momento del rotor principal y momento del rotor de cola de un helicóptero no tripulado utilizando el enfoque Takagi-Sugeno.

1.2.2. Objetivos específicos

- Elegir el modelo matemático no lineal que describa la dinámica del helicóptero.
- Formular un modelo Takagi-Sugeno del helicóptero en base al modelo no lineal, el cual será útil para la aplicación del esquema de detección fallas.
- Diseñar un esquema de detección y aislamiento de fallas en ciertos sensores basado en un esquema de observadores dedicados.
- Proponer alternativas de solución para los sensores en los que el banco de observadores no logra aislar fallas.

1.3. Motivación

La detección de fallas es el esquema que brinda la determinación de la presencia de fallas en el sistema así como el instante de su aparición. El detectar fallas en un vehículo aéreo no tripulado es importante debido a que pueden ocasionar que el sistema funcione de manera degradada, ocasionar accidentes durante una actividad o misión del vehículo o en todo caso pérdida total. El desarrollo de un esquema de detección y aislamiento de fallas se realiza en el dominio de los sistemas lineales.

Por otro lado, los sistemas físicos presentan en su gran mayoría un comportamiento no lineal. La teoría de detección de fallas afronta el inconveniente y complejidad de trabajar modelos no lineales a través de la linealización de dichos sistemas en torno a un punto de operación, donde se espera que trabaje el sistema. Esta simplificación ha permitido desarrollar toda una serie de teorías y procedimientos de diseño que permiten dar solución a diversas problemáticas. Sin embargo, muchas veces esta aproximación no resulta satisfactoria. Entre las distintas técnicas de análisis de los modelos no lineales, se destaca la representación basado en modelos difusos mejor conocidos como Takagi-Sugeno.

Dichos modelos se basan en el concepto de una interpolación de un conjunto de modelos lineales.

La lógica difusa es una excelente herramienta para aproximar funciones no lineales. En especial, el modelo Takagi-Sugeno, aproxima una función no lineal, como una mezcla difusa de modelos lineales.

La asociación de estas dos técnicas, el modelado por el enfoque Takagi-Sugeno y el desarrollo de un esquema de detección de fallas en los componentes del vehículo aéreo no tripulado basado en observadores difusos abren camino a la localización y aislamiento de fallas.

1.4. Estado del arte

Sistemas Takagi Sugeno

La representación de los sistemas no lineales que muestran Takagi y Sugeno *et al.* (1985) establece una alternativa en la aplicación de control, observación y diagnóstico de los sistemas no lineales. Se propone una herramienta matemática para describir un sistema Takagi-Sugeno de una forma más simple, pero que puede representar relaciones altamente no lineales.

Para desarrollar el modelado Takagi-Sugeno es necesario entender el comportamiento del sistema y construir modelos matemáticos útiles, que representen un sistema no lineal. Un desarrollo del trabajo acerca del modelado de sistemas Takagi-Sugeno, la presenta Lin *et al.* (2007) donde se trabaja con la determinación de los modelos Takagi-Sugeno con retardo en los estados. Por medio de LMIs (por sus siglas en inglés *Linear Matrix Inequalities*) se determina la estabilidad, el diseño del control H_∞ basado en el diseño de observadores, diseño de filtros así como el enfoque descriptivo para el diseño de sistemas de control Takagi-Sugeno.

En Yong-Yan *et al.* (2001) se presenta un modelo Takagi-Sugeno y las condiciones de estabilidad se derivan usando el enfoque funcional de Lyapunov. Un enfoque de estabilización para sistemas no lineales a través de la retroalimentación del estado. También se propone un controlador basado en observador. Las ganancias del observador se obtienen a través de la solución numérica de un conjunto de LMIs.

La literatura se extiende con la determinación de los modelos Takagi-Sugeno, uno de ellos es presentado por Othake *et al.* (2009), que utiliza técnicas de identificación y a partir de las mediciones realizadas a un sistema real se obtiene un modelo Takagi-Sugeno.

La segunda técnica empleada para la determinación de un modelo Takagi-Sugeno, se detalla en Lendek *et al.* (2010) por el enfoque analítico del sector no lineal.

Los sistemas Takagi-Sugeno son modelos que se basan en reglas difusas, donde las no linealidades se denominan variables programadas. De acuerdo a la estructura que presentan los modelos Takagi-Sugeno también existe el caso de las variables programadas no medibles, que son tomadas en cuenta para la detección y diagnóstico de fallas, al realizar la representación

de los sistemas no lineales a los sistemas Takagi-Sugeno (Ichalal *et al.* 2009).

Conocer las variables involucradas en el sistema y las que posiblemente intervendrán, son prioridades para la toma de decisiones, controlar y observar. En Lendek *et al.* (2010) presenta el modelado Takagi-Sugeno que describe la evolución de las variables de estado en todo tiempo de los sistemas dinámicos. Así como, el diseño de observadores no lineales para la estimación de los estados de los modelos Takagi-Sugeno.

La literatura de los sistemas difusos es variada y abundante en los distintos campos de investigación, ya que se estudia los fundamentos para obtener un modelo Takagi-Sugeno y las diferentes aplicaciones.

Existen numerosas aplicaciones donde se realiza el desarrollo de modelos Takagi-Sugeno como en Menezes *et al.* (2010) donde el modelado de sistemas Takagi-Sugeno también es posible aplicarlo a sistemas multidisciplinarios. Se presenta la metodología para el análisis y validación de un modelado Takagi-Sugeno para robots manipuladores. Se lleva a cabo el modelado del robot el cual es linealizado mediante series de Taylor y posteriormente es representado como un sistema LPV con la ayuda de las reglas difusas, para la activación de cada regla. También se emplea una ley de control para la estabilización del sistema.

En Flores (2014) se muestra un ejemplo de aplicación en el control de temperatura al interior de un reactor de tipo tanque continuamente agitado, para el cual se desarrolla un modelo Takagi-Sugeno utilizando el enfoque del sector no lineal y una ley de control por retroalimentación de estados Takagi-Sugeno.

También en Ortiz *et al.* (2015) se presenta la transformación matemática de un modelo no lineal a un conjunto de modelos Takagi-Sugeno de manera sencilla, así como un observador Takagi-Sugeno que estima las variables programadas y los estados no medidos de un cuadricóptero. Se presenta la aplicación del observador Takagi-Sugeno y de los controladores Takagi-Sugeno a un cuadricóptero.

A partir del estudio del estado del arte previamente mencionado se concluye que los modelos Takagi-Sugeno tienen la ventaja que permiten representar fielmente a los sistemas no lineales en una región acotada. La estructura simple de los sistemas Takagi-Sugeno los hace ser fácilmente explotables desde el enfoque matemático.

Caso de estudio

En Postlethwaite *et al.* (1999) se presentó un proyecto que muestra el diseño, simulación de vuelo y evaluación de un controlador LPV (por sus siglas en inglés *Linear Parameter varying*) de ganancia programada.

Este trabajo se llevó a cabo en conjunto con la Universidad de Leicester y el grupo de ingeniería avanzada de helicópteros Westland GKN. Se desarrolló un modelo LPV del helicóptero Lynx MK7 para posteriormente diseñar el controlador de ganancia programada basado en la metodología del desempeño cuadrático H_∞ de los sistemas LPV, para lograr robustez y

buen manejo del sistema a través de una amplia región de operación.

El modelado de sistemas LPV surge de la evolución de la técnica de ganancias programadas, esta técnica consiste en obtener modelos LTI (por sus siglas en inglés *Linear Time Invariant*) partiendo del modelo no lineal del sistema. El número de modelos depende de cuantos puntos de operación se definan, los modelos que se obtienen se interpolan dependiendo del punto de operación en el que se encuentre el sistema. De manera general las ganancias del controlador se obtienen a través de la formulación y resolución de LMIs. La motivación esta investigación es el presentar una guía de pasos para diseñar un controlador de ganancia programada en una aplicación y demostrar el potencial del método para el diseño de controladores de ganancia programada LPV.

El objetivo del controlador es modificar las entradas del sistema de tal manera que las posiciones angulares de cabeceo y alabeo del helicóptero sean las indicadas.

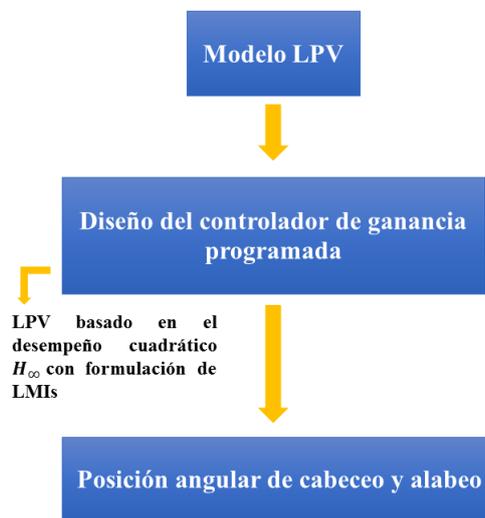


Figura 1.5: Esquema general en Postlethwaite.

En Montes *et al.* (2010) se presentó un modelo LPV politópico de un helicóptero y el diseño de un FTC (por sus siglas en inglés *Fault Tolerant Control*) utilizando un actuador virtual en sistemas no lineales representados utilizando el enfoque de sistemas LPV.

La idea principal del FTC es de compensar las fallas en los componentes del sistema de control permitiendo mantener la estabilidad y un grado aceptable de desempeño no solo cuando el sistema se encuentra libre de fallas, sino también cuando se encuentra ante componentes con funcionamiento defectuoso.

La falla del sistema junto con el actuador virtual permite que el controlador compense los efectos de la falla antes que se presente alguna avería. Su motivación es mostrar una metodología en el diseño de actuador virtual utilizando técnicas de LPV politópicas y LMIs.

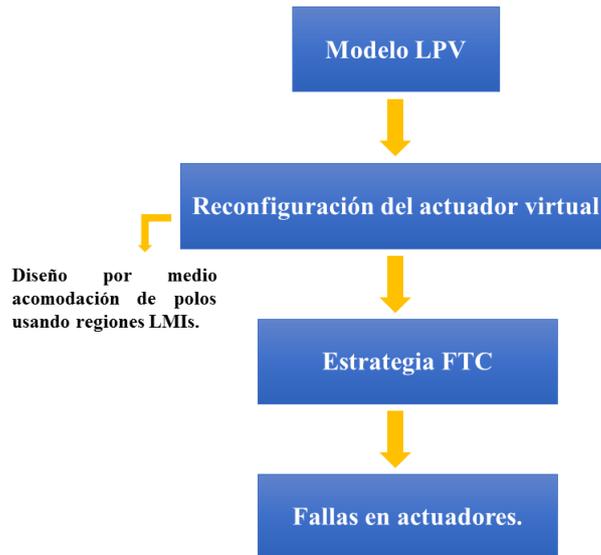


Figura 1.6: Esquema general en Montes.

En Pratap *et al.* (2010) Se desarrolló un modelo matemático simplificado de un TRMS que cuenta con 6 ecuaciones de estado, también se propone un observador por modos deslizantes de alta ganancia para estimar los estados del sistema utilizando el observador de Walcott y Zak. El observador que se presentó no necesita conocer con exactitud las no linealidades del sistema. Un observador por modos deslizantes, se realimenta del error de estimación y brinda una solución ante los problemas de señales desconocidas. Las condiciones de estabilidad global y asintótica se obtienen utilizando el método de Lyapunov. Las no linealidades desconocidas son estimadas y el error de estimación tiende asintóticamente a cero. En los resultados se mostró únicamente la convergencia del observador en las salidas del sistema siendo los ángulos de cabeceo y guiñada.

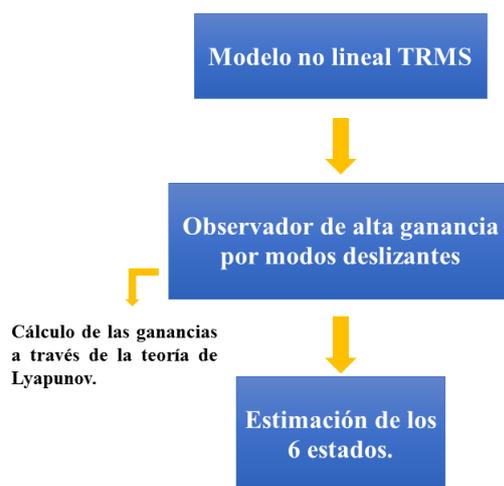


Figura 1.7: Esquema general en Pratap.

En Rotondo *et al.* (2012) se realizó una estrategia de control tolerante a fallas donde se usa un actuador virtual para sistemas no lineales representados como sistemas lineales de parámetros variables. La idea principal de este método FTC es adaptar la planta con falla al controlador nominal en lugar de adaptar el controlador a la planta con falla. Es decir, la planta con falla junto con el bloque del actuador virtual permite al controlador ver la misma planta antes de la presencia de falla. Este actuador virtual está diseñado utilizando técnicas politópicas LPV y LMIs.

En Montes *et al.* (2012) se desarrolló una estrategia de control tolerante a fallas para un sistema LPV usado en el caso de fallas de actuadores, por medio de un observador con entradas desconocidas utilizando las técnicas LPV. La identificación de las fallas está basada en el uso de un observador de entradas desconocidas. El FTC se implementó como un controlador de retroalimentación de estado y fue diseñado utilizando técnicas con el enfoque LMI.

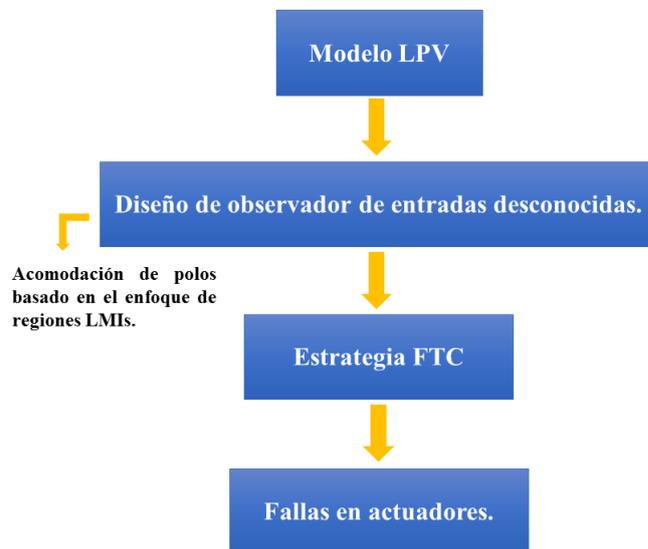


Figura 1.8: Esquema general en Montes.

En Rotondo *et al.* (2013) se planteó un modelo Cuasi-LPV y un controlador para un TRMS desarrollado por Feedback Instruments Ltd. El sistema se asemeja en el comportamiento simplificado de un helicóptero convencional pero con menos grados de libertad. Se muestra como un problema de ingeniería debido a su alta no linealidad e inaccesibilidad en algunas mediciones de los estados.

Los sistemas no lineales de interés práctico pueden ser representados como sistemas cuasi-LPV donde el término “cuasi” se añade debido a que los parámetros variables no dependen sólo de señales externas sino también en los estados del sistema. Se presentó un modelo cuasi-LPV del TRMS donde el vector de parámetros variables depende de los estados del sistema. Los parámetros desconocidos del TRMS fueron identificados por medio de mínimos cuadrados no lineales, usando datos experimentales. El modelo mostró buen desempeño

cuando se comparó con datos experimentales.

Posteriormente, usando el método de reasignación de polos aplicado a regiones LMIs del modelo LPV y un observador, se diseñó un controlador por retroalimentación de estados basado en observador. La eficacia y desempeño del enfoque propuesto fue demostrada tanto en simulación como en pruebas experimentales. El objetivo del controlador es modificar las entradas del sistema de tal manera que las posiciones angulares de cabeceo y alabeo del helicóptero sean las indicadas.

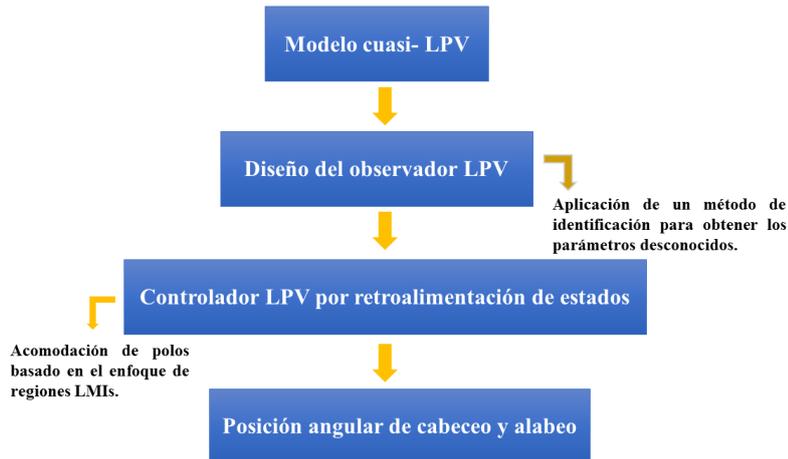


Figura 1.9: Esquema general en Rotondo.

En Rosa *et al.* (2013) se planteó una estrategia de control tolerante a fallas donde se usa un actuador virtual para sistemas lineales de parámetros variables. La idea principal de este método CTF es reconfigurar el lazo de control de tal manera que el controlador nominal todavía pueda ser utilizado sin necesidad de ser resintonizado. En este caso la estrategia a utilizar es un CTF activo que reacciona activamente ante fallas de componentes en el lazo de control reconfigurando las acciones de control, con el objetivo de garantizar la estabilidad y un funcionamiento aceptable del sistema completo.

En Rotondo *et al.* (2014) se desarrolló una estrategia de control tolerante a fallas, utilizando actuadores y sensores virtuales para sistemas lineales de parámetros variables. La idea principal de este método CTF, desarrollado inicialmente para sistemas LTI, es de configurar el lazo de control de tal manera que el controlador nominal todavía puede ser utilizado sin necesidad de ser resintonizado. La planta con la falla del actuador / sensor se modifica añadiendo el bloque de sensor / actuador virtual que enmascara la falla.

1.5. Alcance

En este trabajo de investigación se analizó el modelo matemático no lineal de un TRMS (por sus siglas en inglés *Twin Rotor MIMO System*) que asemeja el comportamiento de un helicóptero pero limitado a 2 grados de libertad que corresponden a los ángulos de cabeceo

y guiñada.

Partiendo del modelo no lineal se transformó a un sistema lineal, a través de la metodología del modelado Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal, donde se seleccionan las no linealidades del modelo matemático una vez que se representa en espacio de estados. Las variables programadas tienen 2 límites un máximo y un mínimo que se obtienen al variar y evaluar las no linealidades a nivel programación.

Al obtener el modelo Takagi-sugeno se procedió al desarrollo del esquema de detección de fallas sólo en sensores por medio de un esquema basado en observadores tipo DOS de Luenberger. El esquema de detección de fallas para sensores presentado en este trabajo solo podrá detectar y aislar fallas en los sensores de velocidad angular de cabeceo, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal y momento del rotor de cola.

La detección de fallas en sensores del TRMS sólo se estudia en simulación.

1.6. Aportaciones

En este trabajo de tesis se desarrolla un modelo Takagi Sugeno que describe de manera fiel la dinámica no lineal del TRMS.

Se implementó el observador Luenberger para sistemas difusos reportado en Lendek *et al.* (2010). Considerando el caso cuando las variables programadas depende de las variables medibles, se calculó por cada submodelo local una ganancia para el observador que se obtienen a través de la formulación y resolución de LMIs cumpliendo el teorema de Wang *et al.* (1996).

Se diseñó un esquema de detección y localización de fallas tipo DOS en sensores a través de un banco de observadores Takagi-Sugeno. El banco propuesto consta de 4 observadores Takagi-Sugeno los cuales fueron utilizados en el esquema de detección y aislamiento de fallas.

En la evaluación de residuos es posible realizar la detección y aislamiento de fallas en los sensores de velocidad angular de cabeceo $\dot{\theta}$, velocidad angular de guiñada $\dot{\psi}$, momento del rotor principal τ_1 y momento del rotor de cola τ_2 de un TRSM.

1.7. Originalidad

La principal contribución de este trabajo es demostrar a través de simulaciones numéricas que tanto, la representación Takagi-Sugeno partiendo de un modelo no lineal del TRMS y el observador propuesto diseñado en este marco son factibles de ser implementados en un esquema de detección de fallas en sensores.

1.8. Metodología

La metodología llevada a cabo para realizar este trabajo se describe a continuación.

Para el desarrollo del modelo Takagi-Sugeno del TRMS, se necesita un modelo no lineal correspondiente del sistema. Se construye el modelo acuerdo a Othake *et al.* (2001), donde se obtiene una representación difusa de un sistema no lineal, en un conjunto compacto de espacio de estado. En el caso de estudio del TRMS se considera que los términos denominados como variables programadas son 5, por lo que las reglas obtenidas son 32 en consecuencia se tienen 32 submodelos locales que conforman al sistema Takagi-Sugeno del TRMS.

El observador elegido para aplicar al sistema es el que presenta Lendek *et al.* (2010), donde propone un observador Luenberger para sistemas difusos considerando el caso cuando las variables programadas dependen de los estados medibles del sistema, calculando para cada submodelo local una ganancia del observador.

El esquema utilizado para la detección de fallas en sensores es el tipo DOS, se caracteriza por que cada observador utiliza todas las entradas y una sola salida, el número de observadores está determinado por el número de salidas.

El esquema de detección de fallas tipo DOS cumple su función en detectar e aislar las fallas en los sensores de velocidad angular de cabeceo $\dot{\theta}$, velocidad angular de guiñada $\dot{\psi}$, momento del rotor principal τ_1 y momento del rotor de cola τ_2 de un TRSM. En la Figura 1.10 se presenta el desarrollo que se llevó cabo para realizar este trabajo.

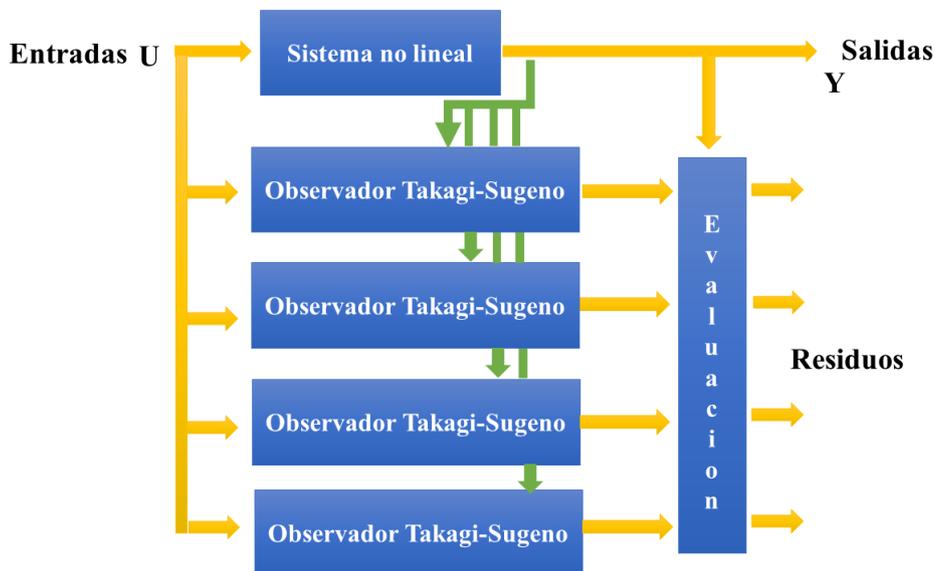


Figura 1.10: Esquema de general.

1.9. Organización del documento

El presente trabajo de investigación contiene seis capítulos que se escriben a continuación:

En el Capítulo 2 corresponde a una introducción a la teoría del enfoque LPV tipo Takagi-Sugeno donde se muestra de manera general.

En el Capítulo 3 se presenta el modelado no lineal del TRMS, así como el procedimiento para la obtención del modelo Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal. Una comparación a nivel simulación del modelo no lineal con el modelo Takagi-Sugeno del TRMS se presenta con el objetivo de visualizar ambas respuestas y evaluarlas con índices de desempeño como son: IAE (por sus siglas en inglés *Integral Absolute Error*), ISE (por sus siglas en inglés *Integral mean Square Error*), ITAE (por sus siglas en inglés *Integral of the Time weighted Absolute Error*).

En el Capítulo 4 se muestra el diseño de los observadores Takagi-Sugeno para el desarrollo del esquema de detección y aislamiento de fallas en los sensores de velocidad angular de cabeceo $\dot{\theta}$ y de guiñada $\dot{\psi}$, en los sensores de momento del rotor principal τ_1 y del rotor de cola τ_2 . Las ganancias de cada observador son calculadas a partir del criterio de estabilidad de Lyapunov por medio de desigualdades lineales matriciales, las LMI obtenidas son resueltas con el Toolbox Yamilp para MatLab[®].

En el Capítulo 5 se evalúan los observadores Takagi-Sugeno obtenidos dentro del esquema de detección y aislamiento de fallas realizando una serie de pruebas en los sensores de velocidad angular de cabeceo $\dot{\theta}$ y de guiñada $\dot{\psi}$ y en los sensores de momento del rotor principal τ_1 y del rotor de cola τ_2 .

Finalmente en el Capítulo 6 se muestran las conclusiones generales y los trabajos futuros posibles a abordar.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se presenta la teoría general de los sistemas Takagi-Sugeno. Los conceptos base para este tipo de sistemas y los métodos para obtener una representación Takagi-Sugeno a partir de un modelo no lineal son igualmente abordados. Se muestran algunas aplicaciones utilizando el enfoque Takagi-Sugeno.

Este capítulo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

La sección 2.1 muestra la introducción de los sistemas Takagi-Sugeno.

La sección 2.2 Trata los dos métodos existentes para la obtención de una representación Takagi-Sugeno a partir de un modelo no lineal, algunas aplicaciones son mostradas para ejemplificar cada enfoque.

La sección 2.3 presenta la demostración de estabilidad basada en la teoría de Lyapunov para los sistemas Takagi-Sugeno.

2.1. Sistemas difusos Takagi-Sugeno

El enfoque multi-modelos aparece en los años noventa, principalmente en el dominio de control basado en lógica difusa. Esto ha permitido realizar el control de sistemas no lineales descritos por modelos interpolados que determinan el campo de funcionamiento de los modelos locales como los sistemas Takagi-Sugeno (Takagi y Sugeno *et al.* 1985). La ventaja de los sistemas Takagi-Sugeno es que son modelos matemáticos de una forma especial, con la propiedad de aproximar una gran cantidad de sistemas no lineales (Lendek *et al.* 2011). Los modelos Takagi-Sugeno consisten en una serie de reglas del tipo si-entonces (if-then). Cada regla es una expresión simple funcional del modelo en conjuntos difusos, donde la i -ésima regla se describe como:

Si (antecedente) z_1 es Z_1^i y ...y z_p es Z_p^i entonces (consecuente) $y = F_i(z)$.

Antecedente: Serie de condiciones que se deben cumplir.

Consecuente: Consecuencia del cumplimiento de las condiciones del antecedente.

Donde el vector z contiene p componentes, z_j , $j = 1, 2, \dots, p$, y representa el vector de las variables programadas, las cuales determinan el momento adecuado para que cada regla se active. Mientras que los conjuntos Z_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$, $i = 1, 2, \dots, m$, donde m es el número de reglas y son llamados conjuntos difusos.

Todo conjunto difuso es caracterizado por una función de pertenencia $\omega_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ que asigna a cada objeto un grado de pertenencia entre el rango de 0 y 1. El valor para cada regla se determina a través de las variables de pertenencia individuales utilizando el producto algebraico

$$\varphi_i(z) = \prod_{j=1}^p \omega_{ij}(z_j), \quad (2.1)$$

y la normalización se realiza a través de:

$$\omega_i(z) = \frac{\varphi_i(z)}{\sum_{j=1}^m \varphi_j(z)}. \quad (2.2)$$

Por lo que $\sum_{j=1}^m \varphi_j(z) \neq 0$, esto quiere decir que cualquier combinación posible su valor debe ser mayor a cero. Entonces la expresión $\omega_i(z)$ se conoce como la función de pertenencia normalizada. La salida de la i -ésima regla es el valor dado por el vector consecuente de la función F_i , y usualmente depende de las variables programadas; y es la salida del modelo, calculado como la combinación ponderada de la salida de las reglas.

Usando $\omega_i(z)$ la salida del modelo es expresada en función de z como:

$$y = \prod_{i=1}^m \omega_i(z) F_i(z). \quad (2.3)$$

2.1.1. Dinámica de los sistemas difusos Takagi-Sugeno

La dinámica de los sistemas Takagi-Sugeno está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \theta), \\ y &= h(x, \zeta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde f y h son funciones no lineales suaves, con f se representa el modelo en espacio de estado y con h representa la salida del modelo, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salida, θ y ζ representan variables exógenas que actúan sobre el sistema. Un sistema difuso Takagi-Sugeno que representa o aproxima un sistema no lineal está conformado por m reglas de la siguiente forma:

Si z_1 es Z_1^i y ...y z_p es Z_p^i entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_i(x, u, \theta), \\ y &= h_i(x, \zeta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $z_j, j = 1, 2, \dots, p$, representa las variables programadas, f_i y h_i son las consecuencias de la i -ésima regla. Las variables programadas pueden estar en función de los estados, entrada, salida y variables exógenas del sistema; cualquier elección que se haga con respecto a la variación de las variables programadas, debe cumplir con el intervalo $[0,1]$ en las funciones de pertenencia. Entonces, los valores de las reglas son calculados utilizando (2.1) y normalizando con (2.2). Utilizando (2.5), las reglas son combinadas en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i(z) f_i(x, u, \theta)}{\sum_{i=1}^m \varphi_i(z)} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) f_i(x, u, \theta), \\ y &= \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i(z) h_i(x, \zeta)}{\sum_{i=1}^m \varphi_i(z)} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) h_i(x, \zeta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las funciones consecuentes f_i y h_i usualmente son menos complejas que las funciones no lineales originales f y h , y en general son elegidas como funciones constantes, lineales o afines. El valor de la función de pertenencia normalizada correspondiente es distinto de 0 cero y serán llamados "modelos locales".

Las reglas de un sistema difuso Takagi-Sugeno con modelos locales tiene la siguiente forma:

Modelo de regla i : Si z_1 es Z_1^i y ... y z_p es Z_p^i entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x + B_i u, \\ y &= C_i x. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La salidas finales para el sistema Takagi-Sugeno son calculadas como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (A_i x + B_i u), \\ y &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z) C_i x. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las funciones de pertenencia $\omega_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, m$ son normalizadas, es decir, $\omega_i(z) \geq 0$ y $\sum_{i=1}^m \omega_i(z) = 1$. Debido a esto, el modelo dinámico Takagi-Sugeno es una combinación de modelos lineales locales. Esta propiedad facilita el análisis de estabilidad de sistemas difusos.

2.2. Modelado de los sistemas Takagi-Sugeno

En la literatura se presentan dos técnicas para el desarrollo de los modelos difusos Takagi-Sugeno de las cuales se desglosan otras metodologías:

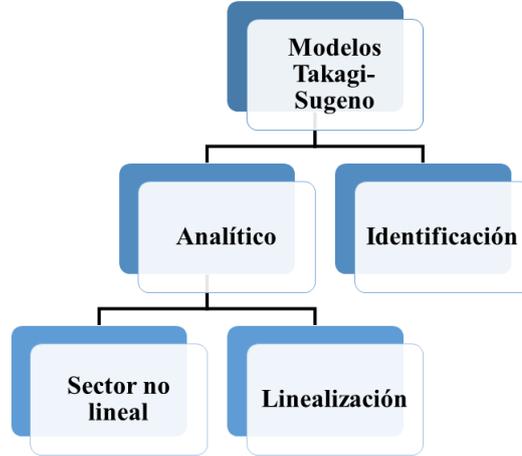


Figura 2.1: Clasificación de las diferentes técnicas para obtener un modelo Takagi-Sugeno.

En la Figura 2.1 se muestran las dos técnicas base para la obtención de los modelos Takagi-Sugeno: el método por identificación y el método analítico:

El modelado por identificación: Es cuando el modelo se obtiene a partir de la medición o adquisición de datos de las entradas y salidas del sistema real, utilizando técnicas para la construcción de sistemas discretos (Gasso *et al.* 2000).

El modelado analítico: El desarrollo de un modelo Takagi-Sugeno puede ser bajo dos enfoques. El enfoque del sector no lineal (Othake *et al.* 2001) método que obtiene una representación fiel del sistema no lineal; se basa en una región de operación. El segundo enfoque es por linealización que se basa en obtener sub modelos lineales, que se determinan en cada punto de operación.

2.2.1. Modelo de sistemas Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal

El enfoque de sector no lineal propuesto en Othake *et al.* (2001) es de los más usados para la construcción de modelos Takagi-Sugeno para el diseño del control difuso, ya que puede obtener una representación exacta de un sistema no lineal en un conjunto compacto del espacio de estado. El método se ha desarrollado para sistemas no lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x). \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde f , g y h son funciones no lineales, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entradas y $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector medible. Las variables programadas son elegidas como $z_j(\cdot) \in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j]$, $j = 1, 2, \dots, p$ donde z_j son los términos no lineales del sistema los cuales contienen un máximo y un mínimo y que pueden depender de los estados, entradas u otras variables exógenas. Entonces, para cada función z_j se tendrán dos funciones de ponderación que son construidas como:

$$\eta_0^j(\cdot) = \frac{\overline{nl}_j - z_j(\cdot)}{\overline{nl}_j - \underline{nl}_j} \quad \eta_1^j(\cdot) = 1 - \eta_0^j(\cdot) \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (2.10)$$

Se considera que ambas funciones son normalizadas como $\eta_0^j(\cdot) \geq 0$, $\eta_1^j(\cdot) \geq 0$ y $\eta_0^j(\cdot) + \eta_1^j(\cdot) = 1$ para cualquier valor de z_j . Donde z_j puede ser expresado como la suma de ambos extremos $z_j = \underline{nl}_j \eta_0^j(z_j) + \overline{nl}_j \eta_1^j(z_j)$. Estos conjuntos difusos correspondientes a ambas funciones de ponderación son definidas como Z_0^j y Z_1^j .

Las reglas son construidas considerando todos los términos z_j , $j = 1, 2, \dots, p$, es decir, cada una de las reglas tienen la forma:

Si z_1 es Z_1^i y ...y z_p es Z_p^i entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x + B_i u, \\ y &= C_i x. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Consecuentemente, el sistema consiste de $m = 2^p$ reglas. La función de pertenencia de la i -ésima regla se calcula como el producto de las funciones de ponderación que corresponden a los conjuntos difusos en la regla, es decir,

$$\omega_i(z) = \prod_{j=1}^p \omega_{ij}(z_j). \quad (2.12)$$

Donde $\omega_{ij}(z_j)$ es cualquiera de los dos $\eta_0^j(z_j)$ o $\eta_1^j(z_j)$, dependiendo que función de ponderación es usada en la regla.

A continuación se presentan dos ejemplos ilustrativos del método:

Ejemplo 1. Modelo no lineal de un convertidor Boost

Como primer ejemplo se presenta el modelo no lineal de un convertidor Boost (Martínez 2014).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

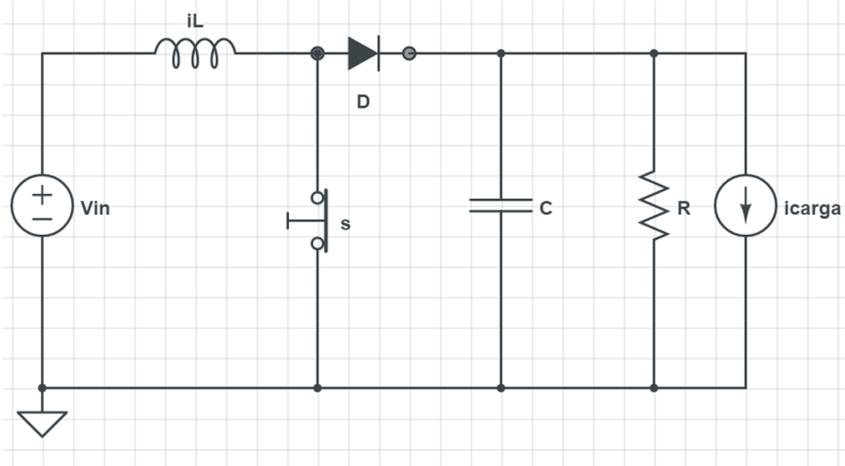


Figura 2.2: Esquema del convertidor Boost.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{V_c}{L} \\ -\frac{i_L}{C} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Donde V_c es el voltaje de salida, L es la inductancia, C la capacitancia del capacitor, R es la resistencia, D' es el ciclo de trabajo, i_L corriente del inductor, los estados son i_L y V_c , los parámetros del convertidor son elegidos por ser medibles en todo tiempo y varían en un rango de valores conocidos. Siendo los parámetros variables: la corriente del inductor $z_1 = i_L$ y el voltaje del capacitor $z_2 = V_c$.

Se obtienen las funciones de ponderación para cada regla donde intervienen las variables programadas que presentan la forma (2.10):

$$\begin{aligned} \eta_0^1(z_1) &= \frac{\overline{nl_j} - z_1}{nl_j - \underline{nl_j}}, \\ \eta_1^1(z_1) &= 1 - \eta_0^1(z_1), \\ \eta_0^2(z_2) &= \frac{\overline{nl_j} - z_2}{nl_j - \underline{nl_j}}, \\ \eta_1^2(z_2) &= 1 - \eta_0^2(z_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Estas funciones son normalizadas, es decir, que cada función de ponderación en todo tiempo debe ser mayor o igual a cero. Debido a que tenemos 2 variables programadas tendremos 4 reglas, que en consecuencia nos permite saber cuantos submodelos locales se tendrán. El producto de las funciones de ponderación dependen de la combinación o del uso en cada regla, es decir, pueden ser $\eta_0^j(z_j)$ o $\eta_1^j(z_j)$.

Para el cálculo de las funciones de ponderación de acuerdo con Lendek *et al.* (2011) se considera que cada variable programada contiene dos vértices, es decir, $z_j = [min, max]$. Este conjunto se obtiene al evaluar el sistema no lineal con el fin de conocer su región de operación compacta, en este sistema se tiene $V_c \in [nl_1, \overline{nl_1}]$ y $i_L \in [nl_2, \overline{nl_2}]$ que se sustituye en (2.15). Posteriormente se realiza el cálculo del producto de las funciones de ponderación, dependiendo de la combinación de las cuatro reglas que tiene el sistema:

$$\begin{aligned} w_1 &= \eta_0^1 * \eta_0^2, \\ w_2 &= \eta_0^1 * \eta_1^2, \\ w_3 &= \eta_1^1 * \eta_0^2, \\ w_4 &= \eta_1^1 * \eta_1^2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

a continuación se procede a calcular los modelos locales con todas las combinaciones posibles:

Para el modelo de la regla 1 se tiene la combinación $w_1 = \eta_0^1 * \eta_0^2$ por lo tanto:

Si z_1 es Z_0^1 y ...y z_2 es Z_0^2 entonces

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{\overline{nl_j}}{L} \\ -\frac{\overline{nl_j}}{C} \end{pmatrix} u, \tag{2.17}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x,$$

realizando el mismo procedimiento con las demás reglas para finalizar con la forma (2.8).

Ejemplo 2. Modelo no lineal propuesto.

Como segundo ejemplo se presenta el siguiente sistema no lineal dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1 x_2 + (2 + x_1)u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

El sistema (2.18) puede escribirse de la forma:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 + x_1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \tag{2.19}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

la no linealidad o variable programada es $z_1 = x_1$. Para la variable z_1 se calculan dos funciones de ponderación donde x_1 contiene un $[min, max]$, es decir, $x_1 \in [\underline{nl}_1, \overline{nl}_1]$:

$$\begin{aligned}\eta_0^1(z_1) &= \frac{\overline{nl}_j - z_1}{\overline{nl}_j - \underline{nl}_j}, \\ \eta_1^1(z_1) &= 1 - \eta_0^1(z_1).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Estas funciones son normalizadas. Debido a que tenemos 1 variable programada tendremos 2 reglas, que en consecuencia nos permite saber cuántos modelos locales se tendrán. A continuación se procede a calcular los modelos locales:

Si z_1 es Z_0^1 entonces

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & nl_j \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 + nl_j \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,\end{aligned}\tag{2.21}$$

realizando el mismo procedimiento con las demás reglas para finalizar con la forma (2.8).

2.2.2. Modelo de sistemas Takagi-Sugeno por el enfoque de linealización

Un método para obtener una aproximación difusa Takagi-Sugeno de un modelo no lineal es la linealización local (Johansen *et al.* 2000). Esta linealización es una expansión de la serie de Taylor en diferentes puntos representativos, que pueden o no estar en equilibrio (Lendek *et al.* 2010). Se considera un sistema dinámico no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x).\end{aligned}\tag{2.22}$$

donde $f \in \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R}$ son funciones no lineales, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salidas.

El objetivo es obtener una aproximación del sistema no lineal como un conjunto de reglas m de la forma:

Modelo de la regla i :

Si z_1 es Z_1^i y ...y z_p es Z_p^i entonces

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i x + B_i u, \\ y &= C_i x,\end{aligned}\tag{2.23}$$

o equivalente a un modelo Takagi-Sugeno de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i x + B_i u), \\ y &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)C_i x,\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde A_i , B_i , C_i son matrices de los modelos lineales locales, z es el vector de variables programadas que determina cual de las reglas esta activa en un momento dado, y $\omega_i(z)$, $= 1, 2, \dots, m$ son las funciones de pertenencia normalizadas.

El primer paso es decidir que variables describen las no linealidades, es decir, las variables de programación, que pueden ser una selección de entradas, estados y mediciones. Como segundo paso es decidir el número de puntos de linealización $z_{(0,i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$ que tienen que ser elegidos, junto con una partición del espacio en el que se definen las variables, y las funciones de pertenencia correspondientes $\omega_{ij}(z_j)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Al aumentar el número de puntos de aproximación, la exactitud en la aproximación de los modelos difusos aumenta. Sin embargo, al aumentar el número de los puntos de linealización, los costos computacionales también aumentan. Finalmente las matrices son obtenidas como:

$$A_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z_{0,i},0}, B_i = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{z_{0,i},0}, C_i = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{z_{0,i},0},\tag{2.25}$$

donde $|_{z_{0,i},0}$ indica la evaluación de las derivadas parciales en el valor correspondiente de $z_{0,i}$ para las variables de estado y de la entrada, que son las variables programadas y 0 corresponde a las variables que no están en z . Para cuando se trabaja con la linealización, dado que es un sistema que no trabaja en los puntos de equilibrio, es necesario agregar los términos afines al sistema Takagi-Sugeno:

$$\begin{aligned}a_i &= f(x, u)|_{z_{0,i},0} - (A_i x)|_{z_{0,i},0} - (B_i u)|_{z_{0,i},0}, \\ c_i &= h(x)|_{z_{0,i},0} - (C_i x)|_{z_{0,i},0}.\end{aligned}$$

2.3. Estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno

En el desarrollo del análisis de estabilidad, diseño de observadores y controladores de sistemas difusos Takagi-Sugeno, se utilizan las restricciones de desigualdades lineales matriciales y el método directo de Lyapunov para derivar la estabilidad.

Los problemas en forma de LMIs utilizan una función cuadrática de Lyapunov.

Se dice que un sistema es cuadráticamente estable si la estabilidad del sistema en cuestión puede deducirse mediante el método de Lyapunov, utilizando la función cuadrática:

$$V(x) = x^T P x, \quad (2.26)$$

con $P = P^T > 0$.

Cuando un sistema es cuadráticamente estable quiere decir que el sistema es estable. Siendo así las condiciones de estabilidad obtenidas utilizando la función de Lyapunov condiciones suficientes para garantizar estabilidad. El problema de LMIs es posible resolverlo mediante el toolbox de Yalmip para MatLab[®].

Considere el sistema no forzado Takagi Sugeno:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) A_i x, \quad (2.27)$$

es cuadráticamente estable si la derivada de la función de Lyapunov decrece y tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ en todas las trayectorias de x .

Teorema Tanaka y Wang (2001). El modelo no forzado es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz $P = P^T > 0$ tal que la siguiente LMI es factible

$$A_i^T P + P A_i < 0, i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.28)$$

esto es, una sola matriz P tiene que existir para todos los subsistemas. La derivada de la función de Lyapunov en todas las trayectorias del modelo es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < 0, \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \omega_i(z) A_i x \right)^T P x + x^T P \left(\sum_{i=1}^m \omega_i(z) A_i x \right), \\ &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z) x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Es necesario que exista estabilidad global en el sistema. Si solo se comprueba estabilidad local, es decir estabilidad en cada submodelo, esto no asegura que el sistema globalmente sea estable.

2.4. Índices de desempeño.

Un índice de desempeño es una medida cuantitativa del desempeño del sistema y es elegido según el énfasis dado a las especificaciones más importantes del mismo.

Un índice de desempeño apropiado es la integral del cuadrado del error, ISE, el cual se define como:

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt, \quad (2.30)$$

donde el límite superior T es un tiempo finito elegido arbitrariamente de tal manera que la integral se acerque a un valor en estado estable. Este criterio penaliza grandes errores y discrimina entre respuestas excesivamente sobreamortiguadas y excesivamente subamortiguadas, el mínimo valor de la integral ocurre para un valor crítico de amortiguamiento.

Otro índice de desempeño es la integral del valor absoluto de la magnitud del error, IAE, el cual se define como:

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt. \quad (2.31)$$

Este índice es particularmente útil para estudios con simulación, es una función más sensible al error que el índice ISE, debido a esta característica, el IAE tiende a dar tiempos largos de establecimiento y sobrepicos más altos.

Para reducir la contribución del gran error inicial sobre el valor de la integral de desempeño, así como los errores que pueden ocurrir después en la respuesta, se propone el índice de desempeño denominado integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error, ITAE, el cual se define como:

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt. \quad (2.32)$$

2.5. Conclusiones

En este capítulo se describió de manera general las características que presentan los sistemas Takagi-Sugeno para aproximar un sistema no lineal.

La metodología para desarrollar un modelo Takagi-Sugeno se presentó a través de dos técnicas utilizadas en la literatura para la obtención de un modelo Takagi-Sugeno. El primer método hace mención a la identificación del sistema y el segundo al método analítico. En el método analítico se presentó la obtención de un modelo Takagi-Sugeno por el sector no lineal y por linealización.

Una de las ventajas de la técnica basada en el sector no lineal es que representa al sistema no lineal debido dentro de una región de operación dado que las no linealidades son

consideradas como parámetros variantes, facilitando el planteamiento del modelo en forma Takagi-Sugeno.

También se describió algunas propiedades para la solución de LMIs que se usan para el análisis de estabilidad de los sistemas Takagi-Sugeno.

Los índices de desempeño son utilizados con el fin de evaluar el desempeño que presenta la respuesta del modelo Takagi-Sugeno al instante de ser comparada con la dinámica del modelo no lineal.

Capítulo 3

Modelado Takagi-Sugeno del TRMS

Este capítulo tiene la finalidad de presentar el desarrollo de un modelo Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal a partir de un modelo matemático no lineal del TRMS.

El capítulo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

En la sección 3.1 se realiza una breve descripción del sistema TRMS así como sus consideraciones.

La sección 3.2 describe el desarrollo para obtener el modelo no lineal del TRMS.

La sección 3.3 explica el desarrollo para obtener la representación de un modelo Takagi-Sugeno, mediante el enfoque del sector no lineal de los sistemas Takagi-Sugeno. Posteriormente se muestra los resultados en simulación para su análisis.

En la sección 3.4 se realizan las conclusiones del capítulo.

3.1. Descripción del TRMS

El Twin Rotor MIMO System, TRMS, es un sistema de laboratorio desarrollado por la empresa Feedback Instruments Ltd (Pratap et. al 2010). Es posible decir que su comportamiento es similar al de un helicóptero. Una de las mayores similitudes es la ubicación de los rotores, existiendo un rotor principal y uno de cola.

El sistema está compuesto por una viga pivotada en su base de manera que ésta puede moverse libremente en el plano vertical y horizontal. Estos movimientos se consiguen por las fuerzas aerodinámicas generadas por ambos rotores ubicados en cada uno de los extremos de la viga, a 90 grados uno respecto del otro. El sistema está equipado con un contrapeso unido a la viga principal el cual permite controlar el momento angular en estado estacionario. Además la viga principal está bloqueada de tal manera que el movimiento de alabeo está impedido.

El rotor principal se encarga de generar el empuje vertical el cual permite el movimiento de cabeceo (rotación en el plano vertical alrededor del eje Y).

El rotor de cola genera el empuje horizontal dotando al sistema del movimiento de guiñada (rotación en el plano horizontal respecto al eje Z).

Este banco de pruebas simula las hélices de un helicóptero por lo tanto en un helicóptero la fuerza aerodinámica es controlada por los cambios en el ángulo de los rotores. La fuerza aerodinámica se controla variando la velocidad de los motores, por lo tanto las entradas de control son las tensiones de alimentación de los motores de corriente continua. Un cambio en la tensión es un cambio de la velocidad de rotación de la hélice, lo que resulta en un cambio de posición de la viga. Cada uno de los rotores influye en sus ángulos de posición. En la Figura 3.1 se observa las partes que conforman al TRMS.

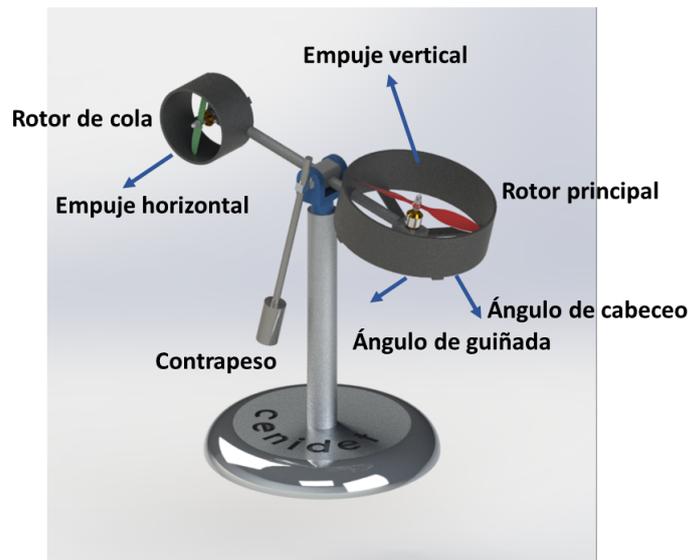


Figura 3.1: Partes del Twin Rotor MIMO System.

Un brazo de contrapeso en su extremo se fija a la viga principal por medio del pivote. El estado de la viga es descrito por cuatro variables de proceso: ángulos horizontales y verticales medidos por los sensores instalados en la posición del pivote, y dos correspondientes a velocidades angulares. Las dos últimas variables de estado son variables angulares de los rotores, medidos por tacogeneradores acoplados a los motores de corriente continua.

3.2. Modelado no lineal del TRMS

El TRMS está construido de tal manera que el ángulo de ataque de las palas es fijo. Así las fuerzas aerodinámicas son controladas por la variación de la velocidad de los rotores.

De manera que las entradas de control serán los voltajes suministrados a ambos rotores (principal y de cola). Un cambio en el voltaje suministrado a los motores resulta en un cambio de la velocidad de rotación del rotor, y esto es reflejado en un cambio en la fuerza aerodinámica, lo que a su vez genera un cambio de posición de la viga.

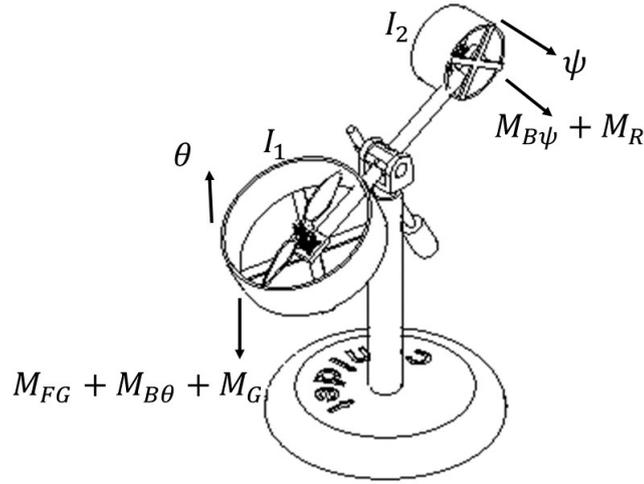


Figura 3.2: Descripción de movimiento del TRMS.

La ecuación que describe el movimiento rotacional vertical alrededor del eje X se da como (Pratap *et al.* 2010):

$$I_1 \ddot{\theta} = M_1 - M_{FG} - M_{B\theta} - M_G. \quad (3.1)$$

Donde intervienen los siguientes momentos:

- Características no lineales del motor principal (M_1)

$$M_1 = a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1. \quad (3.2)$$

- Momento gravitacional (M_{FG})

$$M_{FG} = M_g \sin \theta. \quad (3.3)$$

- Momento de las fuerzas de fricción ($M_{B\theta}$)

$$M_{B\theta} = B_{1\theta} \dot{\theta} - \frac{0.0326}{2} \sin 2\theta \dot{\psi}^2. \quad (3.4)$$

- Momento de giro (M_G)

$$M_G = k_{gy} M_1 \dot{\psi} \cos \theta. \quad (3.5)$$

Las características del motor son aproximadas por una función de transferencia de primer orden en el dominio de Laplace:

$$\tau_1 = \frac{k_1}{T_{11}s + T_{10}}u_1. \quad (3.6)$$

De la función de transferencia anterior se aplica la inversa de Laplace para obtener la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tau_1(T_{11}s + T_{10})\} = \mathcal{L}^{-1}\{k_1u_1\}, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tau_1T_{11}s + \tau_1T_{10}\} = \mathcal{L}^{-1}\{k_1u_1\}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt}\tau_1T_{11} + \tau_1T_{10} = k_1u_1, \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt}\tau_1T_{11} = k_1u_1 - \tau_1T_{10}, \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt}\tau_1 = -\frac{T_{10}}{T_{11}}\tau_1 + \frac{k_1}{T_{11}}u_1. \quad (3.11)$$

La ecuación que describe el movimiento rotacional vertical alrededor del eje Y se presenta de manera similar a la ecuación (3.1):

$$I_2\ddot{\psi} = M_2 - M_{B\psi} - M_R. \quad (3.12)$$

Donde interviene los siguientes momentos:

- Características no lineales del motor de cola (M_2)

$$M_2 = a_2\tau_2^2 + b_2\tau_2. \quad (3.13)$$

- Momento de las fuerzas de fricción ($M_{B\psi}$)

$$M_{B\psi} = B_{1\psi}\dot{\psi}. \quad (3.14)$$

- Momento de reacción (M_R)

$$M_R = \frac{k_c(T_0s + 1)}{(T_p s + 1)}M_1. \quad (3.15)$$

Se realiza la inversa de Laplace de la ecuación (3.15) y se obtiene:

$$M_R = \frac{k_c T_0}{T_p}M_1. \quad (3.16)$$

Las características del motor son aproximadas por una función de transferencia de primer orden en el dominio de Laplace:

$$\tau_2 = \frac{k_2}{T_{21}s + T_{20}}u_2. \quad (3.17)$$

De la función de transferencia anterior se aplica la inversa de Laplace para obtener la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tau_2(T_{21}s + T_{20})\} = \mathcal{L}^{-1}\{k_2u_2\}, \quad (3.18)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tau_2T_{21}s + \tau_2T_{20}\} = \mathcal{L}^{-1}\{k_2u_2\}, \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt}\tau_2T_{21} + \tau_2T_{20} = k_2u_2, \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt}\tau_2T_{21} = k_2u_2 - \tau_2T_{20}, \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt}\tau_2 = -\frac{T_{20}}{T_{21}}\tau_2 + \frac{k_2}{T_{21}}u_2. \quad (3.22)$$

A continuación se sustituyen las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) en (3.1) se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{a_1\tau_1^2 + b_1\tau_1 - M_g\sin\theta - B_{1\theta}\dot{\theta} + \frac{0.0326}{2}\sin 2\theta\dot{\psi}^2 - k_{gy}M_1\dot{\psi}\cos\theta}{I_1}. \quad (3.23)$$

De la misma manera se procede a sustituir las ecuaciones (3.13),(3.14) y (3.16) en (3.12)

$$\ddot{\psi} = \frac{a_2\tau_2^2 + b_2\tau_2 - B_{1\psi}\dot{\psi} - \frac{k_cT_0}{T_p}(a_1\tau_1^2 + b_1\tau_1)}{I_2}. \quad (3.24)$$

La dinámica completa del sistema es representada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta &= \dot{\theta}, \\ \frac{d}{dt}\dot{\theta} &= \frac{a_1}{I_1}\tau_1^2 + \frac{b_1}{I_1}\tau_1 - \frac{M_g}{I_1}\sin\theta + \frac{0.0326}{2I_1}\sin(2\theta)\dot{\psi}^2 - \frac{B_{1\theta}}{I_1}\dot{\theta} - \frac{k_{gy}}{I_1}a_1\cos(\theta)\dot{\psi}\tau_1^2 \\ &\dots - \frac{k_{gy}}{I_1}b_1\cos(\theta)\dot{\psi}\tau_1, \\ \frac{d}{dt}\psi &= \dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt}\dot{\psi} &= \frac{a_2}{I_2}\tau_2^2 + \frac{b_2}{I_2}\tau_2 - \frac{B_{1\psi}}{I_2}\dot{\psi} - \frac{1.75}{I_2}k_c a_1\tau_1^2 - \frac{1.75}{I_2}k_c b_1\tau_1, \\ \frac{d}{dt}\tau_1 &= -\frac{T_{10}}{T_{11}}\tau_1 + \frac{k_1}{T_{11}}u_1, \\ \frac{d}{dt}\tau_2 &= -\frac{T_{20}}{T_{21}}\tau_2 + \frac{k_2}{T_{21}}u_2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde la notación, los términos y las unidades para cada una de las variables se muestra en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Variables de estado del TRMS.

Variable	Término	Unidades
θ	Ángulo de cabeceo	rad
ψ	Ángulo de guiñada	rad
$\dot{\theta}$	Velocidad angular de cabeceo	rad/s
$\dot{\psi}$	Velocidad angular de guiñada	rad/s
τ_1	Momento del rotor principal	Nm
τ_2	Momento del rotor de cola	Nm

En la Tabla 3.2 se realiza un cambio de variable para identificar más fácilmente los estados.

Tabla 3.2: Cambio de variables de estado en el modelo del TRMS.

θ	x_1	Ángulo de cabeceo
$\dot{\theta}$	x_2	Velocidad angular de cabeceo
ψ	x_3	Ángulo de guiñada
$\dot{\psi}$	x_4	Velocidad angular de guiñada
τ_1	x_5	Momento del rotor principal
τ_2	x_6	Momento del rotor de cola

3.2.1. Simulación del modelo no lineal del TRMS

El objetivo de esta simulación es observar la respuesta en el tiempo del modelo no lineal del TRMS para analizar su comportamiento.

La simulación del modelo no lineal del TRMS se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$.

El sistema es operado con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 3.3. En la Figura 3.4 se muestra la respuesta en el tiempo de la dinámica del modelo no lineal del TRMS. Los parámetros utilizados para la simulación del modelo no lineal aparecen en la Tabla 3.3:

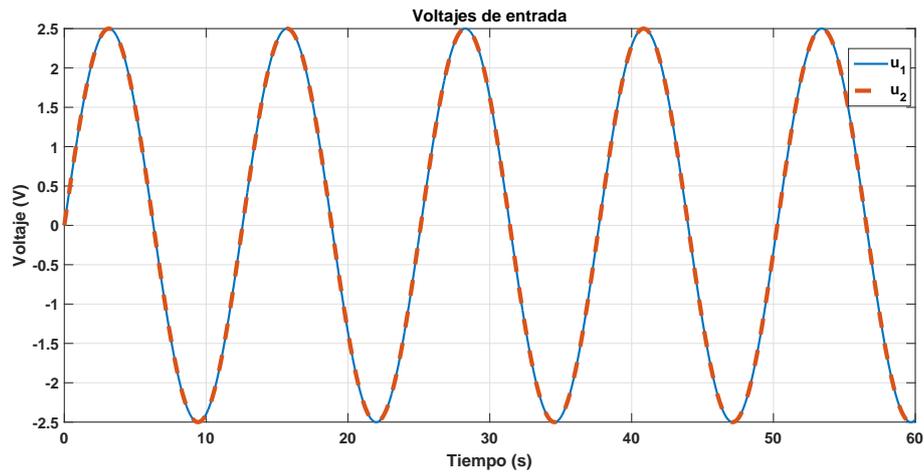


Figura 3.3: Entradas utilizadas para el modelo no lineal.

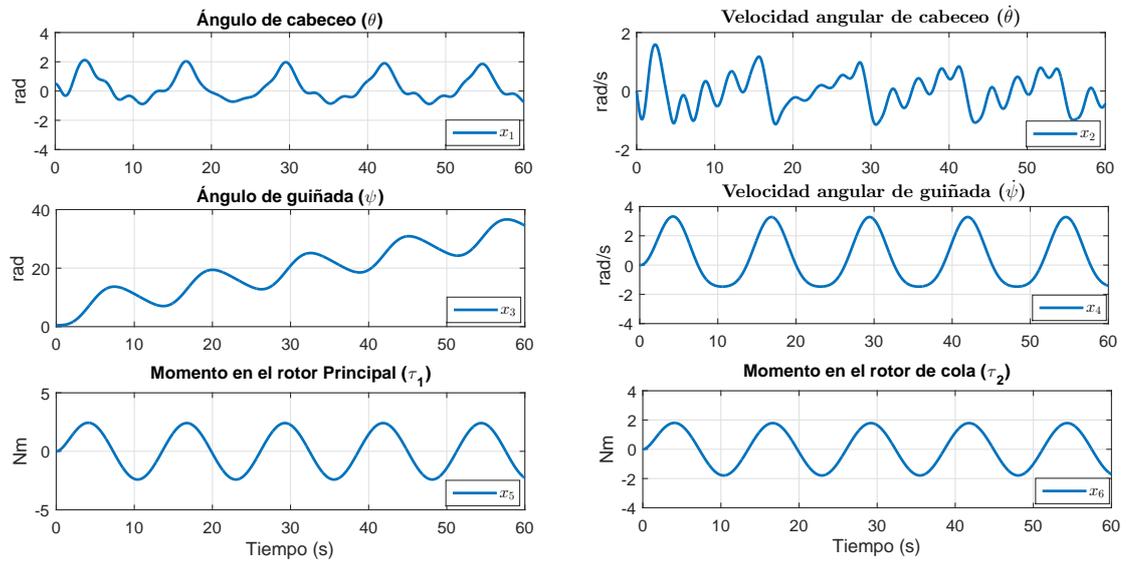


Figura 3.4: Dinámica del modelo no lineal.

Tabla 3.3: Parámetros de simulación para el modelo no lineal del TRMS (Pratap *et al.* 2010).

Parámetro	Valor
I_1 =Momento de inercia del rotor vertical	$6.8 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$
I_2 =Momento de inercia del rotor horizontal	$2 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$
a_1 =Parámetro característico estático	0.0135
b_1 =Parámetro característico estático	0.0924
a_2 =Parámetro característico estático	0.02
b_2 =Parámetro característico estático	0.09
M_g =Momento de gravedad	0.32 Nm
$B_{1\theta}$ =Parámetro en la función de momento de fricción	$6 \times 10^{-3} \text{Nm s/rad}$
$B_{1\psi}$ =Parámetro en la función de momento de fricción	$1 \times 10^{-1} \text{Nm s/rad}$
k_{gy} =Parámetro en momento de giroscopio	0.05 s/rad
k_1 =Ganancia del motor 1	1.1
k_2 =Ganancia del motor 2	0.8
T_{11} =Parámetro del motor 1	1.1
T_{10} =Parámetro del motor 1	1
T_{21} =Parámetro del motor 2	1
T_{20} =Parámetro del motor 2	1
k_c =Ganancia	-0.2

3.3. Modelado Takagi-Sugeno del TRMS

3.3.1. Obtención del modelado Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal del TRMS

La metodología para obtener el modelo Takagi-Sugeno por el enfoque del sector no lineal de un sistema, es la siguiente:

1. Definir el modelo no lineal que represente la dinámica del sistema.
2. Transformación del modelo no lineal a una representación en espacio de estados.
3. Verificar los elementos no constantes en las matrices del sistema, es decir los elementos no lineales conocidas como variables programadas.
4. Determinar el número de reglas y combinaciones de las funciones de ponderación, que constituyen los límites mínimos y máximos de las variables programadas.
5. Establecer los valores mínimos y máximos para cada variable programada.
6. Cálculo de las funciones de pertenencia.
7. Formulación de los submodelos.

8. Evaluar en el rango de operación en que será válido el modelo Takagi-Sugeno.

Para obtener la representación Takagi-Sugeno del TRMS, se llevó a cabo siguiendo la metodología mencionada anteriormente.

1.- Definir el modelo no lineal que represente la dinámica del sistema.

El modelo desarrollado en (3.25) se considera como el modelo no lineal que representa la dinámica del TRMS, además los modelos no lineales que se representan a determinado sistema, no es único.

2.- Transformación del modelo no lineal a una representación en espacio de estados.

El modelo no lineal se reescribe en espacio de estados para identificar las no linealidades del sistema.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}x_1 &= x_2, \\
 \frac{d}{dt}x_2 &= \frac{a_1}{I_1}x_5^2 + \frac{b_1}{I_1}x_5 - \frac{M_g}{I_1}\sin x_1 + \frac{0.0326}{2I_1}\sin(2x_1)x_4^2 - \frac{B_{1\theta}}{I_1}x_2 - \frac{k_{gy}}{I_1}a_1\cos(x_1)x_4x_5^2 \\
 &\dots - \frac{k_{gy}}{I_1}b_1\cos(x_1)x_4x_5, \\
 \frac{d}{dt}x_3 &= x_4, \\
 \frac{d}{dt}x_4 &= \frac{a_2}{I_2}x_6^2 + \frac{b_2}{I_2}x_6 - \frac{B_{1\psi}}{I_2}x_4 - \frac{1.75}{I_2}k_c a_1 x_5^2 - \frac{1.75}{I_2}k_c b_1 x_5, \\
 \frac{d}{dt}x_5 &= -\frac{T_{10}}{T_{11}}x_5 + \frac{k_1}{T_{11}}u_1, \\
 \frac{d}{dt}x_6 &= -\frac{T_{20}}{T_{21}}x_6 + \frac{k_2}{T_{21}}u_2.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

El sistema dinámico no lineal se refiere a la forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= (Ax + G) + Bu, \\
 y &= Cx,
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde el sistema dinámico no lineal del TRMS (3.27) se transforma en:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{1\theta}}{I_1} & 0 & z_2 & z_1 + \frac{b_1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{1\psi}}{I_2} & z_4 - \frac{1.75}{I_2}k_c b_1 & z_3 + \frac{b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ z_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_1}{T_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{T_{21}} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

3.- Verificar los elementos no constantes en las matrices del sistema, es decir los elementos no lineales conocidas como variables programadas.

El siguiente paso es la elección de las variables programadas, las cuáles pueden ser representadas por los términos no lineales en A , B , G se forma como un vector de perturbación causado por la aceleración debido a la gravedad y C , las no linealidades se localizan en A y G , representadas como z_j .

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{a_1}{I_1}x_5 - \frac{k_{gy}}{I_1}a_1\cos(x_1)x_4x_5 - \frac{k_{gy}}{I_1}b_1\cos(x_1)x_4, \\ z_2 &= \frac{0.0326}{2I_1}\sin(2x_1)x_4, \\ z_3 &= \frac{a_2}{I_2}x_6, \\ z_4 &= -\frac{1.75}{I_2}k_c a_1 x_5, \\ z_5 &= -\frac{M_g}{I_1}\sin x_1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

4.- Determinar del número de reglas y combinación de las funciones de ponderación, que constituyen los límites mínimos y máximos de las variables programadas.

Se construyen las funciones de ponderación para cada regla, donde intervienen las variables programadas, que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \eta_0^1(z_1) &= \frac{\overline{nl_j} - z_1}{\overline{nl_j} - \underline{nl_j}}, \\ \eta_1^1(z_1) &= 1 - \eta_0^1(z_1), \\ \eta_0^2(z_2) &= \frac{\overline{nl_j} - z_2}{\overline{nl_j} - \underline{nl_j}}, \\ \eta_1^2(z_2) &= 1 - \eta_0^2(z_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_0^3(z_3) &= \frac{\overline{nl_j} - z_3}{\overline{nl_j} - \underline{nl_j}}, \\
 \eta_1^3(z_3) &= 1 - \eta_0^3(z_3), \\
 \eta_0^4(z_4) &= \frac{\overline{nl_j} - z_4}{\overline{nl_j} - \underline{nl_j}}, \\
 \eta_1^4(z_4) &= 1 - \eta_0^4(z_4), \\
 \eta_0^5(z_5) &= \frac{\overline{nl_j} - z_5}{\overline{nl_j} - \underline{nl_j}}, \\
 \eta_1^5(z_5) &= 1 - \eta_0^5(z_5).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Estas funciones son normalizadas, es decir, que cada función de ponderación en todo tiempo debe de ser mayor o igual a cero $\eta_0^1 \geq 0$, $\eta_1^1 \geq 0$, y la suma de ellos en todo tiempo debe ser igual a uno: $\eta_0^1 + \eta_1^1 = 1$, y $\eta_0^2 \geq 0$, $\eta_1^2 \geq 0$, $\eta_0^2 + \eta_1^2 = 1$, $\eta_0^3 \geq 0$, $\eta_1^3 \geq 0$, $\eta_0^3 + \eta_1^3 = 1$, $\eta_0^4 \geq 0$, $\eta_1^4 \geq 0$, $\eta_0^4 + \eta_1^4 = 1$, $\eta_0^5 \geq 0$, $\eta_1^5 \geq 0$, $\eta_0^5 + \eta_1^5 = 1$.

Las reglas del sistema Takagi-Sugeno se forman tal que todos los términos z_1 , z_2 , z_3 , z_4 y z_5 son tomados en cuenta, donde N es el número de z_j que tiene el modelo no lineal del sistema, en este caso se cuenta con 5 variables programadas es decir z_5 , la determinación se realiza como:

$$m = 2^N = 2^5 = 32. \tag{3.31}$$

Entonces se tendrán 32 reglas. El número de reglas sirve para saber cuántos modelos locales se tendrán.

El producto de las funciones de ponderación da como resultado la función de pertenencia de cada regla, que se expresa de la siguiente manera:

$$\omega_i(z) = \prod_{j=1}^p \omega_{ij}(z_j). \tag{3.32}$$

donde $i = 1, 2, 3, 4, 5 \dots 32$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. El producto de las funciones de ponderación dependen de la combinación o del uso de cada una de las reglas, es decir, puede ser $\eta_0^j(z_j)$ o $\eta_1^j(z_j)$.

5.- Establecer los valores mínimos y máximos para cada variable programada.

La variables programadas z_1, z_2, z_3, z_4 , y z_5 se consideran con dos límites $[\underline{nl_j}, \overline{nl_j}] =$

$[min, max]$, tal conjunto compacto se obtiene al evaluar el sistema no lineal.

$$\begin{aligned}
 z_1 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j], \\
 z_2 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j], \\
 z_3 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j], \\
 z_4 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j], \\
 z_5 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j].
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

Para obtener el conjunto compacto del modelo Takagi-Sugeno se evalúa el modelo del TRMS (3.26) con una entrada tipo seno como se muestra en la Figura 3.3 con el fin de obtener el comportamiento del sistema en toda su región de funcionamiento que es de -2.5V a 2.5V de acuerdo a la especificación de los motores, se obtienen los valores límites mostrados en la Figura 3.5 y se elige un mínimo y un máximo de cada una de las respuestas z_j :

$$\begin{aligned}
 z_1 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j] = [(-0.7), (0.8)], \\
 z_2 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j] = [(-0.8), (0.8)], \\
 z_3 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j] = [(-1.9), (1.9)], \\
 z_4 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j] = [(-0.7), (0.7)], \\
 z_5 &\in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j] = [(-1), (1)],
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

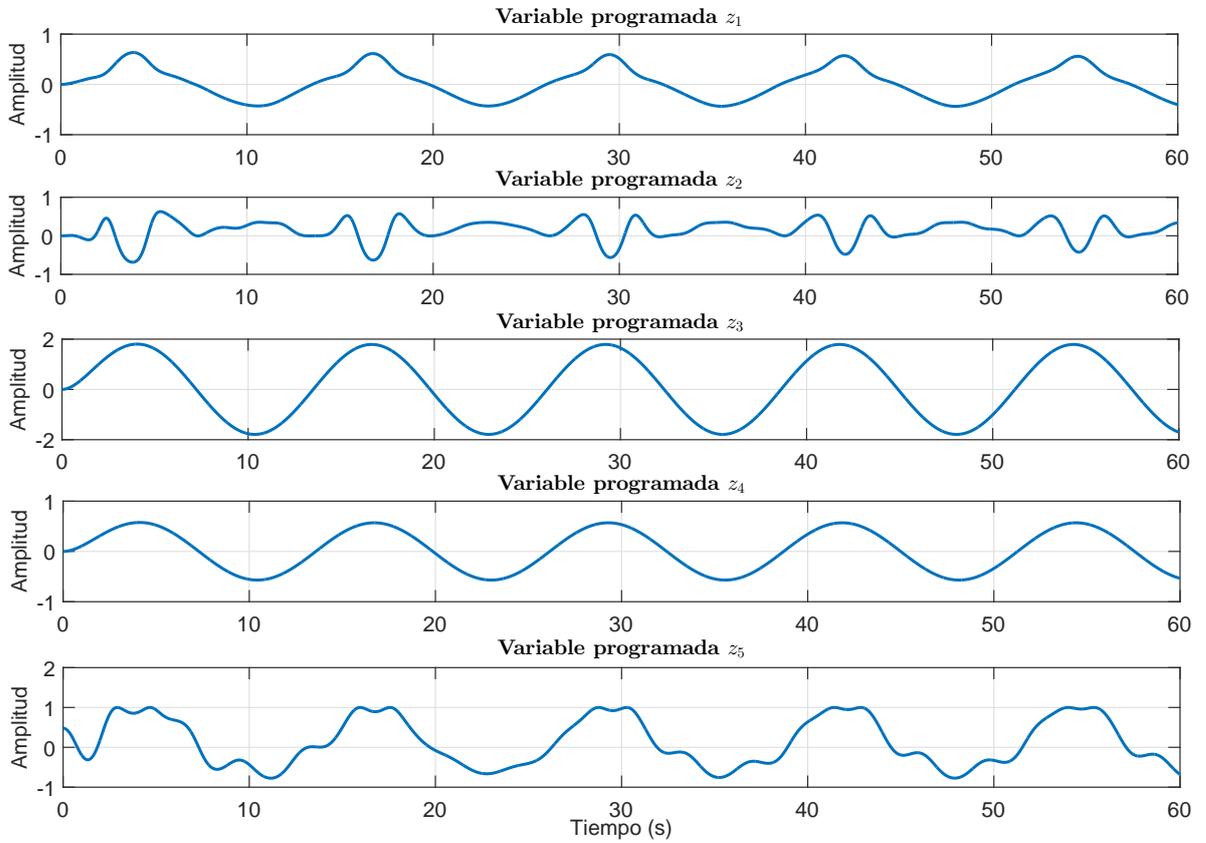


Figura 3.5: Obtención de los máximos y mínimos de z_j .

Los límites que se obtienen de la evaluación del sistema no lineal, son útiles para el cálculo de las funciones de ponderación:

- Con $z_1 \in [-0.7, 0.8]$. El cálculo de la primera función de ponderación se obtiene sustituyendo el valor mínimo y máximo de z_1 en (3.30) como:

$$\eta_0^1(z_1) = \frac{0.8 - z_1}{0.8 - (-0.7)}. \quad (3.35)$$

donde η_0^1 estará variando conforme al tiempo ya que depende de la variable programada (z_1).

La segunda función de ponderación se calcula con la resta de la unidad y el valor de η_0^1 :

$$\eta_1^1(z_1) = 1 - \frac{0.8 - z_1}{0.8 - (-0.7)}. \quad (3.36)$$

- Con $z_2 \in [-0.8, 0.8]$. El cálculo de la primera función de ponderación se obtiene sustituyendo el valor mínimo y máximo de z_2 en (3.30) como:

$$\eta_0^2(z_2) = \frac{0.8 - z_2}{0.8 - (-0.8)}. \quad (3.37)$$

La segunda función de ponderación se calcula con la resta de la unidad y el valor de η_0^2 :

$$\eta_1^2(z_2) = 1 - \frac{0.8 - z_2}{0.8 - (-0.8)}. \quad (3.38)$$

- Con $z_3 \in [-1.9, 1.9]$. El cálculo de la primera función de ponderación se obtiene sustituyendo el valor mínimo y máximo de z_3 en (3.30) como:

$$\eta_0^3(z_3) = \frac{1.9 - z_3}{1.9 - (-1.9)}.$$

La segunda función de ponderación se calcula con la resta de la unidad y el valor de η_0^3 :

$$\eta_1^3(z_3) = 1 - \frac{1.9 - z_3}{1.9 - (-1.9)}. \quad (3.39)$$

- Con $z_4 \in [-0.7, 0.7]$. El cálculo de la primera función de ponderación se obtiene sustituyendo el valor mínimo y máximo de z_4 en (3.30) como:

$$\eta_0^4(z_4) = \frac{0.7 - z_4}{0.7 - (-0.7)}. \quad (3.40)$$

La segunda función de ponderación se calcula con la resta de la unidad y el valor de η_0^4 :

$$\eta_1^4(z_4) = 1 - \frac{0.7 - z_4}{0.7 - (-0.7)}. \quad (3.41)$$

- Con $z_5 \in [-1, 1]$. El cálculo de la primera función de ponderación se obtiene sustituyendo el valor mínimo y máximo de z_5 en (3.30) como:

$$\eta_0^5(z_5) = \frac{1 - z_5}{1 - (-1)}. \quad (3.42)$$

La segunda función de ponderación se calcula con la resta de la unidad y el valor de η_0^5 :

$$\eta_1^5(z_5) = 1 - \frac{1 - z_5}{1 - (-1)}. \quad (3.43)$$

6.- Cálculo de las funciones de pertenencia.

Para calcular las funciones de pertenencia se realiza el producto de las funciones de ponderación como en (3.32) respecto a la combinación de las 32 reglas que tiene el sistema. En la Tabla 3.4 se presenta el resultado de las combinaciones que se obtienen para calcular las funciones de pertenencia.

Tabla 3.4: Combinación de las 32 reglas del sistema.

$w_1 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$	$w_{17} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$
$w_2 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$	$w_{18} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$
$w_3 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_0^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$	$w_{19} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_0^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$
$w_4 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$	$w_{20} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_0^3 * \eta_1^4 * \eta_1^5$
$w_5 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$	$w_{21} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$
$w_6 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$	$w_{22} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$
$w_7 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$	$w_{23} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$
$w_8 = \eta_0^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_1^5$	$w_{24} = \eta_1^1 * \eta_0^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_1^5$
$w_9 = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$	$w_{25} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$
$w_{10} = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$	$w_{26} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$
$w_{11} = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$	$w_{27} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$
$w_{12} = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_1^4 * \eta_1^5$	$w_{28} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_0^3 * \eta_1^4 * \eta_1^5$
$w_{13} = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$	$w_{29} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_0^5$
$w_{14} = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$	$w_{30} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_0^4 * \eta_1^5$
$w_{15} = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$	$w_{31} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_0^5$
$w_{16} = \eta_0^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_1^5$	$w_{32} = \eta_1^1 * \eta_1^2 * \eta_1^3 * \eta_1^4 * \eta_1^5$

7.- Formulación de los submodelos.

A continuación se muestra la formulación para cada submodelo del sistema Takagi-Sugeno con las combinaciones posibles con los límites superior e inferior de cada z_j .

Tabla 3.5: Formulación para cada modelo Takagi-Sugeno.

Modelos	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
m_1	$\underline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_2	$\underline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_3	$\underline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_4	$\underline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_5	$\underline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_6	$\underline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_7	$\underline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_8	$\underline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_9	$\underline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{10}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{11}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{12}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{13}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{14}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{15}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{16}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{17}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{18}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{19}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{20}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{21}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{22}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{23}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{24}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{25}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{26}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{27}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{28}	$\overline{nl_1}$	$\underline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\overline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{29}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{30}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\underline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$
m_{31}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\underline{nl_5}$
m_{32}	$\overline{nl_1}$	$\overline{nl_2}$	$\overline{nl_3}$	$\underline{nl_4}$	$\overline{nl_5}$

Obtención del modelo 1.

Para obtener el modelo 1 se toman los límites inferiores correspondientes a cada variable programada z_j como se muestra en la Tabla 3.5 y se sustituye en (3.28).

$$\begin{aligned}
 A_1 = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{1\theta}}{I_1} & 0 & \frac{nl_2}{I_1} & \frac{nl_1}{I_1} + \frac{b_1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{1\psi}}{I_2} & \frac{nl_4}{I_2} - \frac{1.75}{I_2} k_c b_1 & \frac{nl_3}{I_2} + \frac{b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{nl_5}{I_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 B = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_1}{T_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{T_{21}} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Obtención del modelo 2.

Para obtener el modelo 2 se toma la combinación de los límites superior e inferior correspondiente a cada variable programada z_j como se muestra en la Tabla 3.5 y se sustituye en (3.28). Las matrices B y C son constantes, las cuales son las mismas para todos los modelos.

$$\begin{aligned}
 A_2 = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{1\theta}}{I_1} & 0 & \frac{nl_2}{I_1} & \frac{nl_1}{I_1} + \frac{b_1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{1\psi}}{I_2} & \frac{nl_4}{I_2} - \frac{1.75}{I_2} k_c b_1 & \frac{nl_3}{I_2} + \frac{b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{nl_5}{I_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Obtención del modelo 3.

Para obtener el modelo 3 se toma la combinación de los límites superior e inferior correspondiente a cada variable programada z_j como se muestra en la Tabla 3.5 y se sustituye en (3.28). Las matrices B y C son constantes, las cuales son las mismas para todos los modelos.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{1\theta}}{I_1} & 0 & \frac{nl_2}{I_1} & \frac{nl_1 + b_1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{1\psi}}{I_2} & \overline{nl_4} - \frac{1.75}{I_2} k_c b_1 & \frac{nl_3 + b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{nl_5}{I_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtención del modelo 4.

Para obtener el modelo 4 se toma la combinación de los límites superior e inferior correspondiente a cada variable programada z_j como se muestra en la Tabla 3.5 y se sustituye en (3.28). Las matrices B y C son constantes, las cuales son las mismas para todos los modelos.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{1\theta}}{I_1} & 0 & \frac{nl_2}{I_1} & \frac{nl_1 + b_1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{1\psi}}{I_2} & \overline{nl_4} - \frac{1.75}{I_2} k_c b_1 & \frac{nl_3 + b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{nl_5}{I_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtención del modelo 5.

Para obtene el modelo 5 se toma la combinación de los límites superior e inferior correspondiente a cada variable programada z_j como se muestra en la Tabla 3.5 y se sustituye en (3.28). Las matrices B y C son constantes, las cuales son las mismas para todos los modelos.

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{1\theta}}{I_1} & 0 & \frac{nl_2}{I_1} & \frac{nl_1 + b_1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{1\psi}}{I_2} & \overline{nl_4} - \frac{1.75}{I_2} k_c b_1 & \frac{nl_3 + b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{pmatrix}, G_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{nl_5}{I_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8.- Evaluar en el rango de operación en el que sera válido el modelo Takagi-Sugeno.

El sistema Takagi-Sugeno esta conformado por 32 modelos locales que representan al

TRMS es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^{32} \omega_i(z)(A_i x + G_i) + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.2. Comparación del modelo no lineal con el modelo Takagi-Sugeno

3.3.2.1. Simulación 1.

El objetivo de esta simulación es visualizar la respuesta en el tiempo del modelo Takagi-Sugeno y compararla con la respuesta dinámica del modelo no lineal del TRMS, para determinar si el modelo Takagi-Sugeno representa una aproximación fiel al sistema no lineal.

La simulación del modelo no lineal del TRMS comparado con el modelo Takagi-Sugeno, se llevó a cabo con las siguientes condiciones: se usó un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del modelo no lineal son $x_{1NL}(0)=0.5$, $x_{2NL}(0)=0$, $x_{3NL}(0)=0.5$, $x_{4NL}(0)=0$, $x_{5NL}(0)=0$, $x_{6NL}(0)=0$. Las condiciones iniciales del modelo Takagi-Sugeno son: $x_{1TS}(0)=0.5$, $x_{2TS}(0)=0$, $x_{3TS}(0)=0.5$, $x_{4TS}(0)=0$, $x_{5TS}(0)=0$, $x_{6TS}(0)=0$. El sistema es operado con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 3.3.

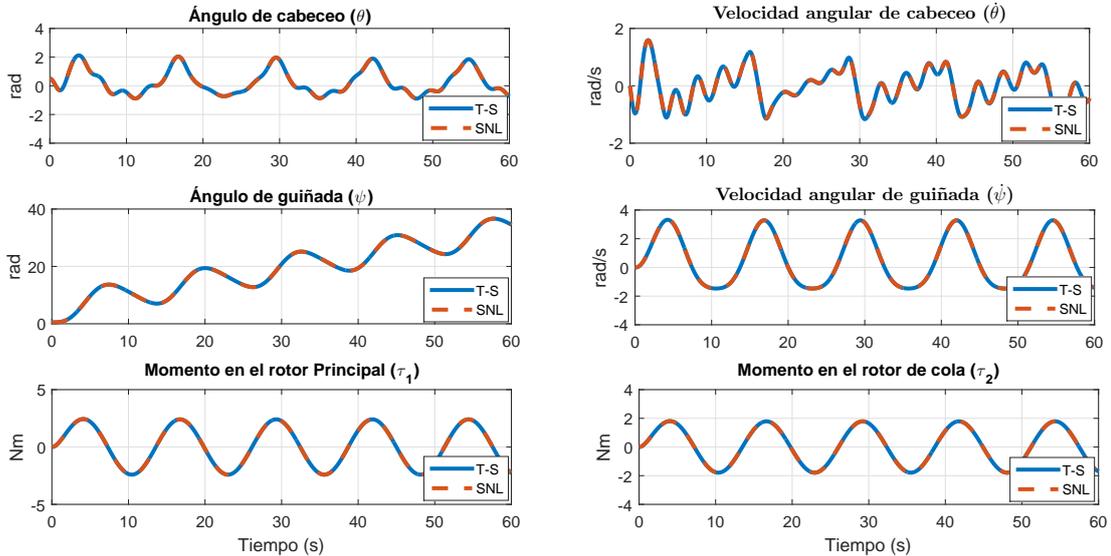


Figura 3.6: Dinámica del modelo Takagi-sugeno mediante el enfoque del sector no lineal contra el modelo no lineal.

En la Figura 3.6 se observa la dinámica del modelo obtenido por medio del enfoque del sector no lineal Takagi-Sugeno que es representada con la línea de color azul y el comportamiento del modelo no lineal del TRMS es representado con la línea de color rojo. Notesé

que la representación del modelo Takagi-Sugeno describe fielmente al modelo no lineal del sistema.

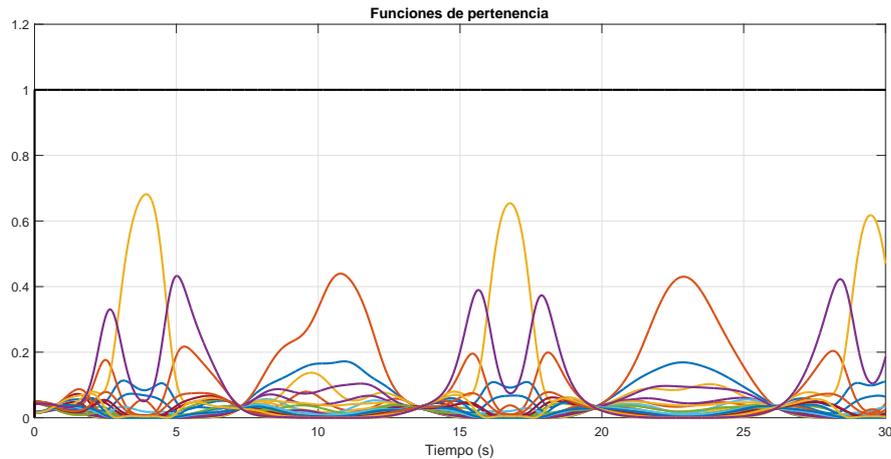


Figura 3.7: Funciones de pertenencia respecto al tiempo.

Las funciones de pertenencia del modelo Takagi-Sugeno se representa en la Figura 3.7, la suma de las 32 funciones de pertenencia se muestra con la línea de color negro. La suma de las funciones de pertenencia cumple con la condición de que cada función debe de ser mayor o igual a 0 pero menor que 1 y la suma de todas ellas debe ser igual a 1.

En la Figura 3.8 se presentan las mediciones del error entre los estados del modelo Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal.

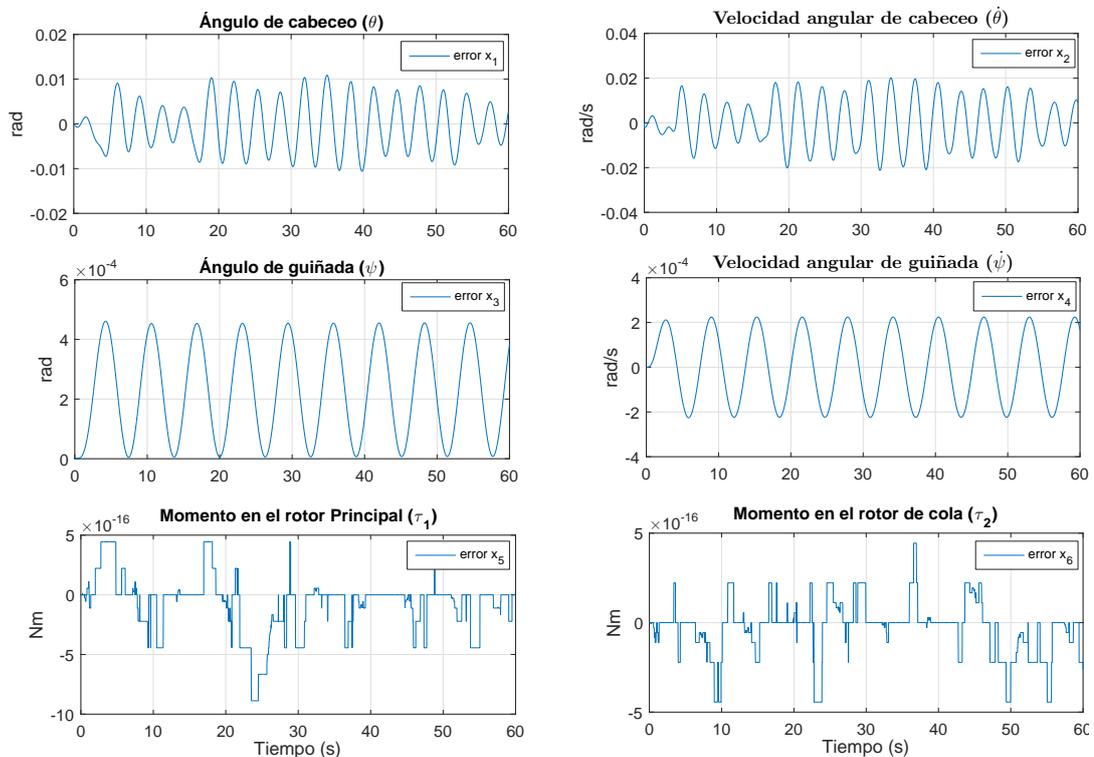


Figura 3.8: Error del modelo no lineal con el modelo Takagi-Sugeno de la simulación 1.

Se realizó la evaluación del modelo Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del modelo Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 3.6. Las ecuaciones de los índices de desempeño utilizadas son las siguientes:

La integral del cuadrado del error, ISE, el cual se define como:

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt. \quad (3.46)$$

La integral del valor absoluto de la magnitud del error, IAE, el cual se define como:

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt. \quad (3.47)$$

Integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error, ITAE, el cual se define como:

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt. \quad (3.48)$$

Tabla 3.6: Valores de los índices de desempeño de la simulación 1.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	0.4236	2.287×10^{-03}	20.58
x_2	0.8141	8.434×10^{-03}	39.91
x_3	0.02777	9.456×10^{-06}	1.692
x_4	0.01702	2.992×10^{-06}	1.032
x_5	1.933×10^{-14}	7.741×10^{-30}	1.176×10^{-12}
x_6	1.17×10^{-14}	3.03×10^{-30}	7.53×10^{-13}

Es posible concluir que los resultados obtenidos en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-03} y 10^{-30} . Por lo tanto la respuesta del modelo Takagi-Sugeno es capaz de representar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error significativamente pequeño.

3.3.2.2. Simulación 2.

El objetivo de esta simulación es visualizar la respuesta en el tiempo del modelo Takagi-Sugeno y compararla con la respuesta dinámica del modelo no lineal del TRMS con una entrada tipo escalón con un valor de amplitud 1 manteniéndose constante hasta $t = 30s$

y con condiciones iniciales $u_1(0) = u_2(0) = 1V$ como se muestra en la Figura 3.9, para determinar si el modelo Takagi-Sugeno representa una aproximación fiel al sistema no lineal.

La simulación del modelo no lineal del TRMS comparado con el modelo Takagi-Sugeno, se llevó a cabo con las siguientes condiciones: se usó un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del modelo no lineal son $x_{1NL}(0)=0.5$, $x_{2NL}(0)=0$, $x_{3NL}(0)=0.5$, $x_{4NL}(0)=0$, $x_{5NL}(0)=0$, $x_{6NL}(0)=0$. Las condiciones iniciales del modelo Takagi-Sugeno son: $x_{1TS}(0)=0.5$, $x_{2TS}(0)=0$, $x_{3TS}(0)=0.5$, $x_{4TS}(0)=0$, $x_{5TS}(0)=0$, $x_{6TS}(0)=0$.

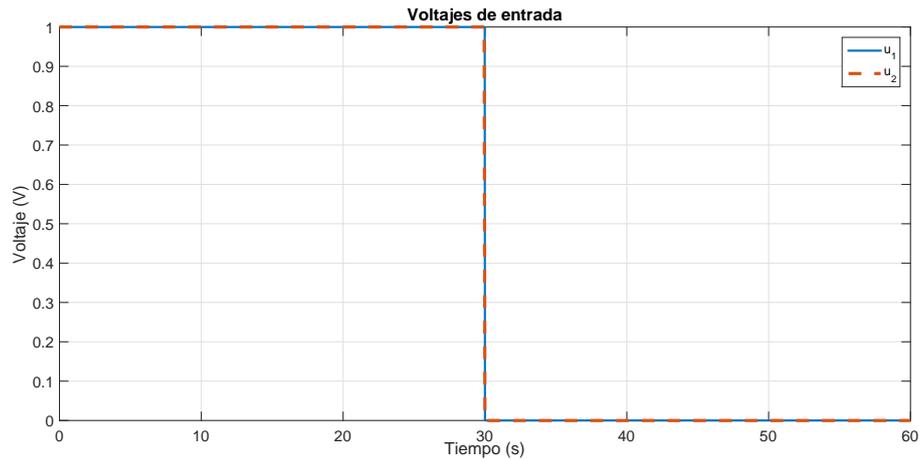


Figura 3.9: Entrada constante.

En la Figura 3.10 se observa la dinámica del modelo obtenido por medio del enfoque del sector no lineal Takagi-Sugeno que es representada con la línea de color azul y el comportamiento del modelo no lineal del TRMS es representado con la línea de color rojo. Notesé que la representación del modelo Takagi-Sugeno describe fielmente al modelo no lineal del sistema.

Las funciones de pertenencia del modelo Takagi-Sugeno se representa en la Figura 3.11, la suma de las 32 funciones de pertenencia se muestra con la línea de color negro. La suma de las funciones de pertenencia cumple con la condición de que cada función debe de ser mayor o igual a 0 pero menor que 1 y la suma de todas ellas debe ser igual a 1.

En la Figura 3.12 se presentan las mediciones del error entre los estados del modelo Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal.

Se realizó la evaluación del modelo Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del modelo Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 3.7.

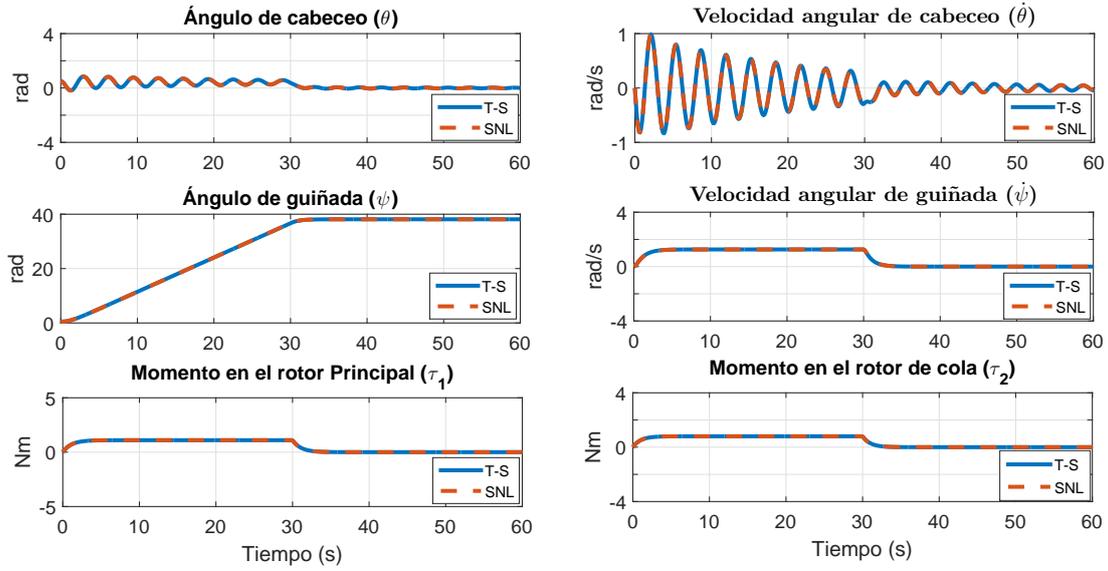


Figura 3.10: Dinámica del modelo Takagi-sugeno mediante el enfoque del sector no lineal contra el modelo no lineal.

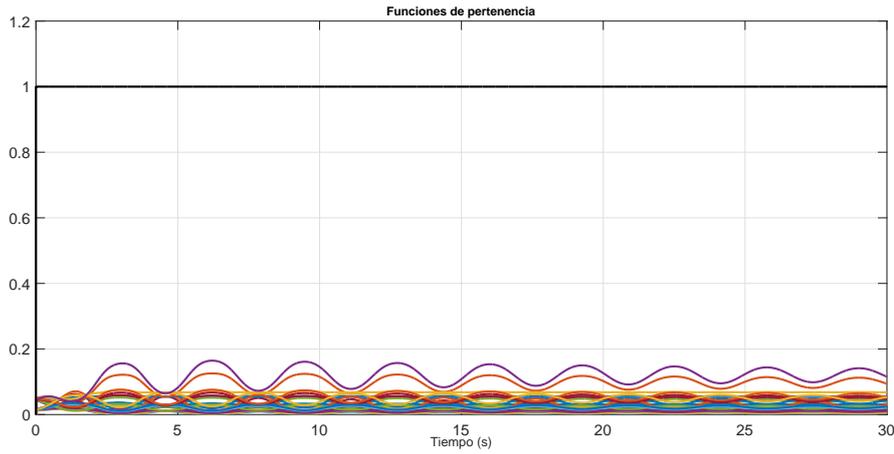


Figura 3.11: Funciones de pertenencia respecto al tiempo.

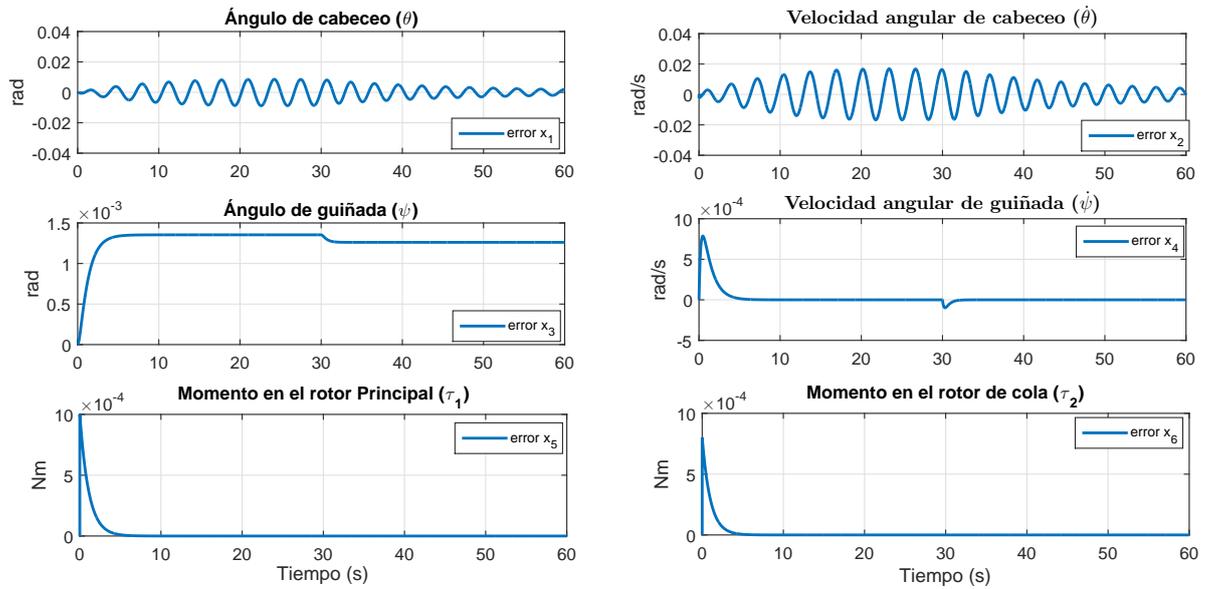


Figura 3.12: Error del modelo no lineal con el modelo Takagi-Sugeno de la simulación 2.

Tabla 3.7: Valores de los índices de desempeño de la simulación 2.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	1.091×10^{-03}	0.2102	5.616
x_2	4.439×10^{-03}	0.4899	11.53
x_3	1.948×10^{-04}	0.1524	9.121
x_4	6.843×10^{-07}	0.001446	0.004654
x_5	5.501×10^{-07}	0.0011	0.00121
x_6	3.201×10^{-07}	0.008	0.0008

Se concluye que el modelo Takagi-Sugeno en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-03} y 10^{-07} con respecto al modelo no lineal. Por lo tanto la respuesta del modelo Takagi-Sugeno es capaz de representar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error pequeño.

3.4. Conclusiones

En este capítulo se describieron las características físicas de un TRMS.

Con la información del caso de estudio se plantea el modelo matemático que representa la dinámica del TRMS, conformado por ecuaciones diferenciales que describen el movimiento

en el eje X y en el eje Y que conforman los ángulos de cabeceo y guiñada respectivamente.

Se muestra el procedimiento para llevar a cabo el modelado Takagi-Sugeno del TRMS por el enfoque del sector no lineal. Como resultado se obtienen 32 submodelos que representan al sistema.

Se simula la respuesta en el tiempo del modelo no lineal del TRMS comparando la respuesta en el tiempo del modelo Takagi-Sugeno del TRMS, con las mismas condiciones para ambos modelos. Así como el cálculo de los índices de desempeño de cada una de las simulaciones.

Capítulo 4

Esquema de detección de fallas

En este capítulo se presenta el diseño de observadores Takagi-Sugeno que conforman el esquema de detección de fallas en sensores propuesto.

En la sección 4.1 se mencionan conceptos que describen la metodología relacionada a la detección de fallas. También se presenta una clasificación de los métodos de detección de fallas basados en modelos que se encuentran en la literatura particularmente, los que utilizan bancos de observadores .

En la sección 4.2 se plantea la teoría del diseño del banco de observadores Takagi-Sugeno. También se desarrolla un análisis de estabilidad basado en Lyapunov y un análisis de observabilidad para cada uno de los observadores que conforman al banco.

En la sección 4.3 se presentan los resultados de la implementación en simulación de los observadores que integran el esquema de detección de fallas en sensores.

En la sección 4.4 se realizan las conclusiones del capítulo.

4.1. Teoría del método de detección de fallas.

Antes de profundizar en el tema de detectar las fallas es necesario introducir algunas definiciones importantes en este campo.

Falla: se define como todo cambio en el comportamiento de alguno de los componentes del sistema de manera que éste ya no puede satisfacer la función para la cual ha sido diseñado. Las fallas que se presentan en el sistema pueden conducir a la disminución del rendimiento, mal funcionamiento o averías. Las consecuencia de una avería es más grave tal como parada parcial o completa del sistema. (Isermann *et al.* 2005)

En base en su gravedad, una falla se puede clasificar en dos tipos:

1.- Falla abrupta: Implica una pérdida completa en las señales de medición. Para efectos de simulación de fallas abruptas por lo general se modelan con un cambio de tipo escalón en

las entradas, los parámetros del sistema.

2.- Falla incipiente: por lo general se refiere a cambios de los parámetros del sistema o de la derivada de los datos de medición causados por problemas de sensores. Las fallas incipientes pueden indicar un posible mal funcionamiento. Para efectos de simulación de fallas incipientes por lo general se modelan con un cambio tipo rampa.

En base a la influencia de una falla sobre el modelo del sistema, la falla se puede clasificar en 2 tipos (Isermann *et al.* 1996):

1.- Fallas aditivas: Infiere sobre la o las variables de salida del sistema mediante una simple adición de la falla.

2.- Fallas multiplicativas: Tiene un impacto más complejo en un sistema, son cambios de los parámetros de la planta. Tales fallas describen el deterioro del equipo en el sistema.

Detección de fallas: es determinar la presencia de fallas en el sistema así como el instante de su aparición.

Aislamiento de fallas: Determinación del tipo, localización e instante de detección de una falla. Se realiza después de la etapa de detección.

Redundancia

- Redundancia física: El enfoque tradicional de diagnóstico de fallas, hablando en su contexto amplio, se basa en métodos de redundancia física o de hardware, los cuales emplean múltiples sensores, actuadores, componentes de medición y control de una variable en particular. El mayor problema de este método es el costo de mantenimiento y del equipo adicional, así como el espacio requerido para dichos instrumentos. Este método se utiliza cuando existe una variable crítica en un proceso y es necesario tener una medición correcta de la misma y si un sensor falla se pueda estar comparando con la medición de otros (Puig *et al.* 2004).
- Redundancia analítica: Este esquema se basa en la diferencia generada por la comparación de valores medidos; esta diferencia se llama señal residual o síntoma. La mayor ventaja de un enfoque basado en modelos es que no se requiere hardware adicional para realizar la detección de fallas y puede implementarse vía software, en un proceso controlado por computadora. El no contar con un modelo matemático que represente el funcionamiento físico del sistema, no poder reconstruir la señal que se desea estimar y los costos computacionales que se puedan generar, pueden considerarse como limitaciones para su aplicación (Puig *et al.* 2004).

Generación de residuos

Consiste en obtener señales que contienen información únicamente de las fallas. En la Figura 4.1 se puede apreciar que la diferencia entre la salida del sistema y la salida del observador es candidata a ser un residuo, dado que en condiciones nominales de operación esta diferencia debe ser cero. En el caso de que exista un mal comportamiento en el sistema,

el residuo cambiara su valor. La evaluación de residuos se realiza con el objetivo de detectar y aislar la falla, el cual se analiza con respecto a un umbral (Verde *et al.* 2013).

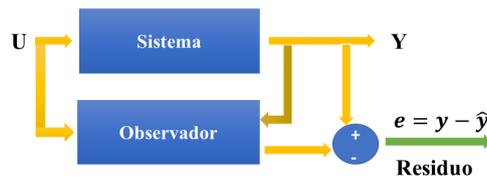


Figura 4.1: Generador de residuo con observador.

- Residuo: Señal que contiene información de la falla basada en la desviación entre las mediciones del sistema real y las estimaciones obtenidas por el observador.
- Síntoma: Indicador de falla que se activa cuando ocurre cualquier desviación de un residuo diferente de cero.
- Umbral: Valor del residuo a partir del cual se considera la existencia de una falla.

En la Figura 4.2 se presentan los conceptos residuos, síntoma y umbral de una señal de manera gráfica.

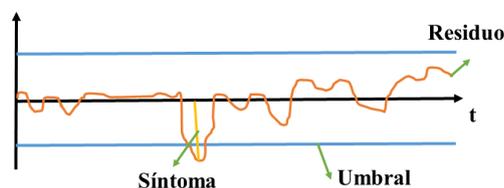


Figura 4.2: Conceptos de generación de residuos.

4.2. Diseño de observadores Takagi-Sugeno del TRMS.

En la práctica, no todas las variables del sistema se encuentran disponibles para la medición en forma directa. En este caso, es necesario estimar las variables de estado que no puedan medirse directamente. Esa estimación suele llamarse observación. En un sistema práctico es necesario observar o estimar las variables de estado no medibles a partir de las variables de salida y las de control.

En el momento de definir que es un observador de estado, nos encontramos con múltiples definiciones.

Según Ogata (2010):

Un observador de estados estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y control.

Para Pouliezios *et al.* (2002) los observadores son:

Sistemas dinámicos cuyo propósito es reconstruir el estado x de un modelo en espacio de estados basándose en las entradas medidas u y en las salidas y .

Recientemente se destaca la definición:

Un observador de estados es un filtro que recibe como entradas las señales de entrada, u , y de salida, y , de un sistema y genera una estimación sobre el estado x .

En este punto el concepto de observabilidad juega un papel importante. Como se analizará más adelante, se pueden diseñar observadores de estado si y sólo si, se satisface la condición de observabilidad. Cuando la estimación de los estados está disponible, estas estimaciones son utilizadas para el diseño de controladores, la detección de fallas, etc.

A continuación se muestra un esquema de un observador de estados. El observador tiene y y u como entradas, y \hat{x} como salida.



Figura 4.3: Diagrama esquemático del observador de estado.

Considere la representación Takagi-Sugeno del TRMS como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i x + G_i) + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$, m es el número de submodelos, x son los estados, u es el vector de entradas, y es el vector de salidas, ω las variables de pertenencia, A_i y G_i son un conjunto de i matrices, B y C son matrices constantes.

Se considera en primer lugar el caso cuando el vector de variables programadas sólo depende de las variables medibles. En este caso, el vector propio de variables programadas puede ser utilizado en el observador, y el cual se escribe como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i \hat{x} + G_i + L_i(y - \hat{y})) + Bu, \\ \hat{y} &= C\hat{x},\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde \hat{x} son los estados estimados, u es el vector de entradas, y es el vector de salidas.

4.2.1. Análisis de estabilidad del observador.

La dinámica del error de estimación para el observador 4.2 para el sistema 4.1 se puede derivar como se muestra en Lendek *et al.* (2010).

Definiendo la dinámica del error de estimación como:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}}, \\ \dot{e} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i x + G_i) + Bu - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i \hat{x} + G_i + L_i(y - \hat{y})) - Bu, \\ \dot{e} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i x) + \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(G_i) - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i \hat{x}) - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(G_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(L_i(y - \hat{y})), \\ \dot{e} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i x) - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i \hat{x}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(L_i(Cx - C\hat{x})), \\ \dot{e} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i x) - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i \hat{x}) - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(L_i(Cx - C\hat{x})), \\ \dot{e} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i)(x - \hat{x}) - \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(L_i C)(x - \hat{x}), \\ \dot{e} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i - L_i C)(x - \hat{x}), \end{aligned}$$

considerando que:

$$e = x - \hat{x},$$

entonces la dinámica del error de estimación esta dado por:

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z)((A_i - L_i C)e),$$

Utilizando el criterio de Lyapunov, donde a partir de la función candidata de Lyapunov $V = e^T P e$ tal que $P = P^T > 0$, su dinámica como:

$$\dot{V} = e^T P \dot{e} + \dot{e}^T P e,$$

$$\dot{V} = e^T P \left(\sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i - L_i C)e \right) + \left(\sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i - L_i C)e \right)^T P e,$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(e^T P(A_i - L_i C)e + ((A_i - L_i C)e)^T P e),$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(e^T (PA_i - PL_i C)e - e^T (A_i^T P - L_i^T C^T P)e),$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(e^T (PA_i - PL_i C - A_i P + L_i^T C^T P)e),$$

$$P = P^T > 0,$$

$$P > 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i(z)M_i = \sum_{i=1}^m \omega_i(z)PL_i,$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i(z)M_i^T = \sum_{i=1}^m \omega_i(z)L_i^T P,$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i(z)(e^T (PA_i - M_i C - A_i P + M_i^T C^T)e),$$

Restricciones LMI

Las desigualdades lineales matriciales son restricciones empleadas al momento de analizar la estabilidad y diseño de controladores al igual que en observadores para sistemas Takagi-Sugeno.

Las restricciones LMI son escritas de la siguiente forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i(z)x_i F_i < 0, \quad (4.3)$$

donde x es el vector variable y $F_i = F_i^T$, $i=0, \dots, r$ son matrices simétricas constantes conocidas.

En 1890, Lyapunov mostró que el sistema $\dot{x} = Ax$ es estable si y sólo si existe una matriz simétrica positiva definida P que cumpla con la desigualdad matricial:

$$A^T P + P A < 0, \quad (4.4)$$

El criterio de estabilidad de Lyapunov es aplicado a problemas prácticos en la ingeniería de control, específicamente a sistemas con no linealidades en actuadores en 1940.

4.2.2. Criterio de observabilidad para sistemas multimodelos.

La observabilidad es una característica estructural complementaria de una representación de estado de un sistema, o del sistema en sí mismo, que nos indica la capacidad de lograr estimar los valores históricos de un estado partiendo del conocimiento de las variables de salida y entrada del sistema.

Una definición de observabilidad es cuando un estado x_i es observable en t_0 siempre que sea posible determinar $x_i(t_0)$ conociendo $y(t)$. Si esta propiedad se cumple para todo t entonces el sistema es completamente observable.

La noción de observabilidad es crucial para los sistemas donde es imposible medir la totalidad del vector de estados y en consecuencia se requiere de la estimación de este a partir de las variables de salida.

La determinación de la observabilidad de un sistema depende de las matrices A y C del sistema. Donde A y C es observable si y solo si la matriz de observabilidad O tiene rango n o si el determinante de la matriz es diferente de cero:

$$\text{rango}(O) = \text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^{n-1} \end{pmatrix} = n, \quad (4.5)$$

Pruebas de observabilidad.

A continuación se presenta el análisis de observabilidad para cada una de las salidas del sistema y que serán utilizadas para integrar el banco de observadores tipo DOS que se utilizará para la detección de fallas en los sensores del TRMS.

1.- Observabilidad respecto a las salidas de ángulo de cabeceo θ (y_1), velocidad angular de cabeceo $\dot{\theta}$ (y_2) y ángulo de guiñada ψ (y_3).

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez que se obtienen los valores para formar la matriz de observabilidad se calcula el rango con $A_i, i = 1...32$.

$$\text{rango}(O) = \begin{pmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^2 \\ CA_i^3 \\ CA_i^4 \\ CA_i^5 \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{pmatrix} = \text{rank} = 6. \quad (4.6)$$

2.- Observabilidad respecto a las salidas de ángulo de cabeceo $\theta (y_1)$, ángulo de guiñada $\psi (y_3)$ y velocidad angular de guiñada $\dot{\psi} (y_4)$.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez que se obtienen los valores para formar la matriz de observabilidad se calcula el rango con $A_i, i = 1...32$.

$$\text{rango}(O) = \begin{pmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^2 \\ CA_i^3 \\ CA_i^4 \\ CA_i^5 \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{pmatrix} = \text{rank} = 6. \quad (4.7)$$

3.- Observabilidad respecto a las salidas de ángulo de cabeceo $\theta (y_1)$, ángulo de guiñada $\psi (y_3)$ y momento del rotor principal $\tau_1 (y_5)$.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una vez que se obtienen los valores para formar la matriz de observabilidad se calcula el rango con $A_i, i = 1...32$.

$$\text{rango}(O) = \begin{pmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^2 \\ CA_i^3 \\ CA_i^4 \\ CA_i^5 \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{pmatrix} = \text{rank} = 6. \quad (4.8)$$

4.- Observabilidad respecto a las salidas de ángulo de cabeceo θ (y_1), ángulo de guiñada ψ (y_3) y momento del rotor de cola τ_1 (y_6).

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una vez que se obtienen los valores para formar la matriz de observabilidad se calcula el rango con A_i , $i = 1...32$.

$$\text{rango}(O) = \begin{pmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^2 \\ CA_i^3 \\ CA_i^4 \\ CA_i^5 \\ \vdots \\ CA_i^{n-1} \end{pmatrix} = \text{rank} = 6. \quad (4.9)$$

4.2.3. Cálculo de las ganancias del observador Takagi-Sugeno

Se considera en primer lugar el caso cuando el vector de variables programadas sólo depende de las variables medibles. El observador se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z)(A_i \hat{x} + G_i + L_i(y - \hat{y})) + Bu, \\ \hat{y} &= C\hat{x}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para el sistema 4.1, a continuación se presentan un teorema que contiene condiciones suficientes de estabilidad:

Teorema de Wang *et al.* (1965). La dinámica del error es asintóticamente estable, si existe una matriz simétrica definida positiva $P = P^T > 0$, y $L_i, i = 1, 2, \dots, m$ tales que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P(A_i - L_i C)) &< 0, \\ \mathcal{H}(P(A_i - L_i C + A_j - L_j C)) &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

para $i = 1, 2, \dots, m, j = i + 1, i + 2, \dots, m$, donde \mathcal{H} denota la simetría de una matriz $\mathcal{H}(X) = X + X^T$. Usando el cambio de variable $M_i = PL_i, i = 1, 2, \dots, m$. Entonces, el diseño del observador en 4.11 se reduce a la solución de la LMI (4.12) hallando $P = P^T > 0$, y $M_i, i = 1, 2, \dots, m$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(PA_i - M_i C) &< 0, \\ \mathcal{H}(PA_i + PA_j - M_i C - M_j C) &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Diseño del observador 1 con respecto a la salidas y_1, y_2 y y_3 .

Se diseña el primer observador Takagi-Sugeno del banco de observadores alimentado por todas las señales de entrada y por las salidas de ángulo de cabeceo θ (y_1), velocidad angular de cabeceo $\dot{\theta}$ (y_2) y ángulo de guiñada ψ (y_3). El observador 1 está compuesto por 32 submodelos los cuales necesitan una ganancia para la convergencia. Las ganancias son encontradas resolviendo las LMIs planteadas en el teorema de Wang.

Una vez que se obtienen los valores de las matrices P y M_i , se obtienen el valor de las 32 ganancias mostradas en la Tabla 4.1, una para cada uno de los 32 submodelos del primer observador.

Tabla 4.1: Ganancias del observador 1.

$L_{1,2} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0086 & 0.0866 \\ 0.0000 & -0.1482 & 1.4970 \\ -0.0000 & 0.0007 & 0.0051 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$	$L_{3,4} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0086 & 0.0866 \\ 0.0000 & -0.1482 & 1.4966 \\ -0.0000 & 0.0007 & 0.0042 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$
$L_{5,6} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0086 & 0.0864 \\ 0.0000 & -0.1482 & 1.4939 \\ -0.0000 & 0.0007 & 0.0051 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$	$L_{7,8} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0086 & 0.0863 \\ 0.0000 & -0.1482 & 1.4935 \\ -0.0000 & 0.0007 & 0.0042 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$
$L_{9,10} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0086 & 0.0866 \\ 0.0000 & 0.1493 & 1.4971 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0051 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$	$L_{11,12} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0086 & 0.0866 \\ 0.0000 & 0.1493 & 1.4967 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0042 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$
$L_{13,14} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0086 & 0.0864 \\ 0.0000 & 0.1493 & 1.4940 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0051 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$	$L_{15,16} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0086 & 0.0863 \\ 0.0000 & 0.1493 & 1.4936 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0042 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$
$L_{17,18} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0085 & 0.0866 \\ 0.0000 & -0.1471 & 1.4970 \\ -0.0000 & 0.0034 & 0.0051 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$	$L_{19,20} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0085 & 0.0866 \\ 0.0000 & -0.1471 & 1.4966 \\ -0.0000 & 0.0034 & 0.0042 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$
$L_{21,22} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0085 & 0.0864 \\ 0.0000 & -0.1471 & 1.4939 \\ -0.0000 & 0.0034 & 0.0051 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$	$L_{23,24} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0085 & 0.0863 \\ 0.0000 & -0.1471 & 1.4935 \\ -0.0000 & 0.0034 & 0.0042 \\ -0.0000 & -0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$

$L_{25,26} = 1e^3$ $\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0087 & 0.0866 \\ 0.0000 & 0.1503 & 1.4971 \\ -0.0000 & 0.0046 & 0.0051 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$	$L_{27,28} = 1e^3$ $\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0087 & 0.0866 \\ 0.0000 & 0.1503 & 1.4967 \\ -0.0000 & 0.0046 & 0.0042 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0167 \end{pmatrix}$
$L_{29,20} = 1e^3$ $\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0087 & 0.0864 \\ 0.0000 & 0.1503 & 1.4940 \\ -0.0000 & 0.0046 & 0.0051 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$	$L_{31,32} = 1e^3$ $\begin{pmatrix} 0.0005 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0087 & 0.0863 \\ 0.0000 & 0.1503 & 1.4936 \\ -0.0000 & 0.0046 & 0.0042 \\ -0.0000 & 0.0018 & 0.0139 \end{pmatrix}$

Diseño del observador 2 con respecto a la salidas y_1 , y_3 y y_4 .

Se diseña el segundo observador Takagi-Sugeno del banco de observadores alimentado por todas las señales de entrada y por las salidas de ángulo de cabeceo θ (y_1), ángulo de guiñada ψ (y_3) y velocidad angular de guiñada $\dot{\psi}$ (y_4). El observador 2 esta compuesto por 32 submodelos los cuales necesitan una ganancia para la convergencia. Las ganancias son encontradas resolviendo las LMIs planteadas en el teorema de Wang.

Una vez que se obtienen los valores de las matrices P y M_i , se obtienen el valor de las 32 ganancias mostradas en la Tabla 4.2, una para cada uno de los 32 submodelos del segundo observador.

Tabla 4.2: Ganancias del observador 2.

$L_{1,2} =$ $\begin{pmatrix} 155.4662 & 0.0376 & 3.4067 \\ 446.8094 & 0.1514 & 15.7362 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 47.0507 & 1.2043 & 180.3211 \\ 151.6618 & 0.4760 & 71.9777 \\ 0.4338 & 0.9666 & 151.0837 \end{pmatrix}$	$L_{3,4} =$ $\begin{pmatrix} 158.4879 & 0.0376 & 12.2596 \\ 455.7288 & 0.1514 & 41.8099 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 52.0837 & 1.2043 & 193.1234 \\ 156.3310 & 0.4760 & 84.9102 \\ 3.9361 & 0.9666 & 159.6566 \end{pmatrix}$
$L_{5,6} =$ $\begin{pmatrix} 153.9317 & 0.0376 & -0.5111 \\ 443.0050 & 0.1514 & 6.5654 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 67.8736 & 1.2043 & 250.9515 \\ 158.2524 & 0.4760 & 95.4900 \\ 18.6077 & 0.9666 & 212.3854 \end{pmatrix}$	$L_{7,8} =$ $\begin{pmatrix} 156.9258 & 0.0376 & 8.2797 \\ 451.8252 & 0.1514 & 32.4518 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 72.2847 & 1.2043 & 263.5495 \\ 162.6583 & 0.4760 & 108.2830 \\ 21.5850 & 0.9666 & 220.8004 \end{pmatrix}$

$L_{9,10} = \begin{pmatrix} 152.1072 & 0.0376 & 37.7675 \\ 433.2994 & 0.1514 & 115.1034 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -60.4389 & 1.2043 & 183.6801 \\ 109.1760 & 0.4760 & 102.7250 \\ -85.8405 & 0.9666 & 145.5926 \end{pmatrix}$	$L_{11,12} = \begin{pmatrix} 155.1289 & 0.0376 & 46.6204 \\ 442.2188 & 0.1514 & 141.1770 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -55.4059 & 1.2043 & 196.4824 \\ 113.8452 & 0.4760 & 115.6575 \\ -82.3382 & 0.9666 & 154.1654 \end{pmatrix}$
$L_{13,14} = \begin{pmatrix} 150.5727 & 0.0376 & 33.8496 \\ 429.4950 & 0.1514 & 105.9326 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -39.6160 & 1.2043 & 254.3105 \\ 115.7665 & 0.4760 & 126.2373 \\ -67.6666 & 0.9666 & 206.8943 \end{pmatrix}$	$L_{15,16} = \begin{pmatrix} 153.5668 & 0.0376 & 42.6404 \\ 438.3152 & 0.1514 & 131.8190 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -35.2049 & 1.2043 & 266.9085 \\ 120.1724 & 0.4760 & 139.0303 \\ -64.6893 & 0.9666 & 215.3092 \end{pmatrix}$
$L_{17,18} = \begin{pmatrix} 123.2819 & 0.0376 & 1.8070 \\ 352.1636 & 0.1514 & 11.0560 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 4.5583 & 1.2043 & 178.7411 \\ 106.3095 & 0.4760 & 69.9602 \\ -27.3242 & 0.9666 & 150.1462 \end{pmatrix}$	$L_{19,20} = \begin{pmatrix} 126.6485 & 0.0376 & 10.9290 \\ 362.1210 & 0.1514 & 37.9121 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 10.8778 & 1.2043 & 191.7023 \\ 111.7765 & 0.4760 & 83.1837 \\ -22.8105 & 0.9666 & 158.7880 \end{pmatrix}$
$L_{21,22} = \begin{pmatrix} 121.7117 & 0.0376 & -1.8836 \\ 348.2858 & 0.1514 & 2.5481 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 26.3699 & 1.2043 & 249.5518 \\ 113.2478 & 0.4760 & 93.7396 \\ -8.2932 & 0.9666 & 211.5449 \end{pmatrix}$	$L_{23,24} = \begin{pmatrix} 125.0073 & 0.0376 & 7.0886 \\ 358.0140 & 0.1514 & 28.9613 \\ 0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ 31.9262 & 1.2043 & 262.2325 \\ 118.3589 & 0.4760 & 106.7202 \\ -4.4134 & 0.9666 & 219.9853 \end{pmatrix}$
$L_{25,26} = \begin{pmatrix} 119.9229 & 0.0376 & 36.1677 \\ 338.6536 & 0.1514 & 110.4231 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -102.9313 & 1.2043 & 182.1001 \\ 63.8237 & 0.4760 & 100.7075 \\ -113.5985 & 0.9666 & 144.6551 \end{pmatrix}$	$L_{27,28} = \begin{pmatrix} 123.2895 & 0.0376 & 45.2898 \\ 348.6110 & 0.1514 & 137.2792 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -96.6118 & 1.2043 & 195.0613 \\ 69.2907 & 0.4760 & 113.9310 \\ -109.0848 & 0.9666 & 153.2969 \end{pmatrix}$
$L_{29,30} = \begin{pmatrix} 118.3527 & 0.0376 & 32.4772 \\ 334.7758 & 0.1514 & 101.9152 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -81.1197 & 1.2043 & 252.9108 \\ 70.7619 & 0.4760 & 124.4869 \\ -94.5675 & 0.9666 & 206.0537 \end{pmatrix}$	$L_{31,32} = \begin{pmatrix} 121.6483 & 0.0376 & 41.4494 \\ 344.5040 & 0.1514 & 128.3284 \\ -0.0000 & 108.1203 & 0.0000 \\ -75.5633 & 1.2043 & 265.5915 \\ 75.8730 & 0.4760 & 137.4675 \\ -90.6877 & 0.9666 & 214.4941 \end{pmatrix}$

Diseño del observador 3 con respecto a la salidas y_1 , y_3 y y_5 .

Se diseña el primer observador Takagi-Sugeno del banco de observadores alimentado por todas las ñales de entrada y por las salidas de ángulo de cabeceo θ (y_1), ángulo de guiñada ψ (y_3) y momento del rotor principal τ_1 (y_5). El observador 3 esta compuesto por 32 submodelos los cuales necesitan una ganancia para la convergencia. Las ganancias son encontradas resolviendo las LMIs planteadas en el teorema de Wang.

Una vez que se obtienen los valores de las matrices P y M_i , se obtienen el valor de las 32 ganancias mostradas en la Tabla 4.3, una para cada uno de los 32 submodelos del tercer observador.

Tabla 4.3: Ganancias del observador 3.

$L_{1,2} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ 0.0917 & 0.0009 & 1.7611 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$	$L_{3,4} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ 0.0917 & 0.0023 & 1.7611 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$
$L_{5,6} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ 0.0917 & 0.0009 & 1.7567 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$	$L_{7,8} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ 0.0917 & 0.0023 & 1.7567 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$
$L_{9,10} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ -0.0917 & 0.0009 & 1.7611 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$	$L_{11,12} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ -0.0917 & 0.0023 & 1.7611 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$
$L_{13,14} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ -0.0917 & 0.0009 & 1.7567 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$	$L_{15,16} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0004 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0046 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ -0.0917 & 0.0023 & 1.7567 \\ -0.0003 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$

$L_{17,18} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ 0.0917 & 0.0009 & 1.7611 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$	$L_{19,20} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ 0.0917 & 0.0023 & 1.7611 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$
$L_{21,22} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ 0.0917 & 0.0009 & 1.7567 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$	$L_{23,24} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ 0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ 0.0917 & 0.0023 & 1.7567 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ 0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$
$L_{25,26} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ -0.0917 & 0.0009 & 1.7611 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$	$L_{27,28} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1114 \\ -0.0917 & 0.0023 & 1.7611 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0225 \end{pmatrix}$
$L_{29,30} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ -0.0917 & 0.0009 & 1.7567 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$	$L_{31,32} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0710 & 0.0013 & -0.0000 \\ 0.8252 & 0.0151 & 0.0000 \\ -0.0058 & 0.0000 & 0.1111 \\ -0.0917 & 0.0023 & 1.7567 \\ -0.0011 & -0.0004 & -0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0197 \end{pmatrix}$

Diseño del observador 4 con respecto a la salidas y_1 , y_3 y y_6 .

Se diseña el primer observador Takagi-Sugeno del banco de observadores alimentado por todas las señales de entrada y por las salidas de ángulo de cabeceo θ (y_1), ángulo de guiñada ψ (y_3) y momento del rotor de cola τ_2 (y_6). El observador 4 esta compuesto por 32 submodelos los cuales necesitan una ganancia para la convergencia. Las ganancias son encontradas resolviendo las LMIs planteadas en el teorema de Wang.

Una vez que se obtienen los valores de las matrices P y M_i , se obtienen el valor de las 32 ganancias mostradas en la Tabla 4.4, una para cada uno de los 32 submodelos del cuarto observador.

Tabla 4.4: Ganancias del observador 4.

$L_{1,2} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1412 & 0.0025 & -0.0000 \\ 0.0019 & 0.0170 & 0.0006 \\ 0.0181 & 0.1528 & 0.0056 \\ 0.0070 & 0.0016 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{3,4} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1412 & 0.0021 & -0.0000 \\ 0.0019 & 0.0170 & 0.0006 \\ 0.0181 & 0.1527 & 0.0056 \\ 0.0070 & 0.0010 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$
$L_{5,6} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1412 & 0.0025 & -0.0000 \\ 0.0019 & 0.0170 & 0.0015 \\ 0.0181 & 0.1528 & 0.0139 \\ 0.0070 & 0.0016 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{7,8} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1412 & 0.0021 & -0.0000 \\ 0.0019 & 0.0170 & 0.0015 \\ 0.0181 & 0.1527 & 0.0139 \\ 0.0070 & 0.0010 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$
$L_{9,10} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1411 & 0.0025 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0006 \\ -0.0160 & 0.1528 & 0.0056 \\ 0.0065 & 0.0016 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{11,12} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1411 & 0.0021 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0006 \\ -0.0160 & 0.1526 & 0.0056 \\ 0.0065 & 0.0010 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$
$L_{13,14} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1411 & 0.0025 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0015 \\ -0.0160 & 0.1528 & 0.0139 \\ 0.0065 & 0.0016 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{15,16} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0829 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1411 & 0.0021 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0015 \\ -0.0160 & 0.1526 & 0.0139 \\ 0.0065 & 0.0010 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$
$L_{17,18} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1404 & 0.0025 & -0.0000 \\ 0.0018 & 0.0170 & 0.0006 \\ 0.0177 & 0.1528 & 0.0056 \\ 0.0056 & 0.0016 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{19,20} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1404 & 0.0021 & -0.0000 \\ 0.0018 & 0.0170 & 0.0006 \\ 0.0177 & 0.1527 & 0.0056 \\ 0.0056 & 0.0010 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$
$L_{21,22} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1404 & 0.0025 & -0.0000 \\ 0.0018 & 0.0170 & 0.0015 \\ 0.0177 & 0.1528 & 0.0139 \\ 0.0056 & 0.0016 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{23,24} = 1e^3$	$\begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1404 & 0.0021 & -0.0000 \\ 0.0018 & 0.0170 & 0.0015 \\ 0.0177 & 0.1527 & 0.0139 \\ 0.0056 & 0.0010 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$

$L_{25,26} = 1e^3 \begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1403 & 0.0025 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0006 \\ -0.0164 & 0.1528 & 0.0056 \\ 0.0052 & 0.0016 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{27,28} = 1e^3 \begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1403 & 0.0021 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0006 \\ -0.0164 & 0.1526 & 0.0056 \\ 0.0052 & 0.0010 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0006 & -0.0005 \end{pmatrix}$
$L_{29,30} = 1e^3 \begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0002 & -0.0000 \\ 1.1403 & 0.0025 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0015 \\ -0.0164 & 0.1528 & 0.0139 \\ 0.0052 & 0.0016 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$	$L_{31,32} = 1e^3 \begin{pmatrix} 0.0828 & 0.0001 & -0.0000 \\ 1.1403 & 0.0021 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0170 & 0.0015 \\ -0.0164 & 0.1528 & 0.0139 \\ 0.0052 & 0.0010 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0016 & -0.0005 \end{pmatrix}$

4.2.4. Banco de observadores.

En la metodología de detección de fallas, se encuentran dos configuraciones particulares de los tipos de bancos de observadores (Verde 2013).

1.- El tipo DOS (por sus siglas en inglés *Dedicated Observer Scheme*), el cual es un banco de observadores dedicados, se diseñan q observadores, de manera tal que el observador i utiliza todas las entradas y sólo una salida y_i como se ve en la Figura 4.4. El observador es sensible sólo a las fallas del i -ésimo sensor.

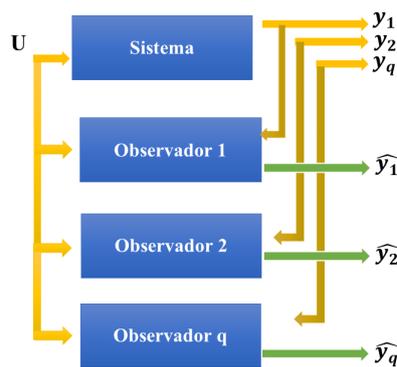


Figura 4.4: Esquema de observadores dedicados para fallas en sensores.

2.- El tipo GOS (por sus siglas en inglés *Generalized Observer Scheme*), el cual es un banco de observadores generalizado para las fallas en sensor que se diseña de manera tal que el observador utiliza todas las salidas menos una, lo que lo hace sensible a todas las fallas de sensor menos una como se ve en la Figura 4.5.

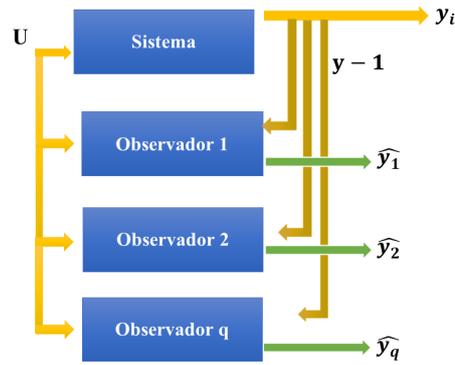


Figura 4.5: Esquema de observadores generalizados para fallas en sensores.

En este caso de estudio se utilizó el enfoque DOS. Para que sea posible detectar fallas en los sensores del sistema se hace la consideración de tener acceso a todos los estados para así cumplir el criterio de observabilidad que es explicado en la sección 4.2.1.1. En la Figura 4.6 se presenta el esquema utilizado para la detección de fallas en los sensores de velocidad angular de cabeceo $\dot{\theta}$, velocidad angular de guiñada $\dot{\psi}$, momento del rotor principal τ_1 y momento del rotor de cola τ_2 .

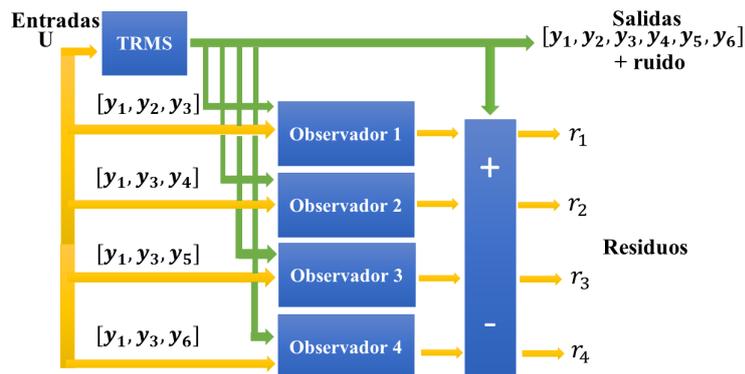


Figura 4.6: Esquema de detección de fallas.

A continuación se presentan los casos de fallas en cada uno de los observadores:

- Falla en el sensor y_2 (velocidad angular de cabeceo): el primer observador detectará la falla y los tres restantes permanecerán libres de falla tal como se observa en la Figura 4.7.
- Falla en el sensor y_4 (velocidad angular de guiñada): el segundo observador detectará la falla y los tres restantes permanecerán libres de falla tal como se observa en la Figura 4.8.
- Falla en el sensor y_5 (momento del rotor principal): el tercer observador detectará la falla y los tres restantes permanecerán libres de falla tal como se observa en la Figura 4.9.

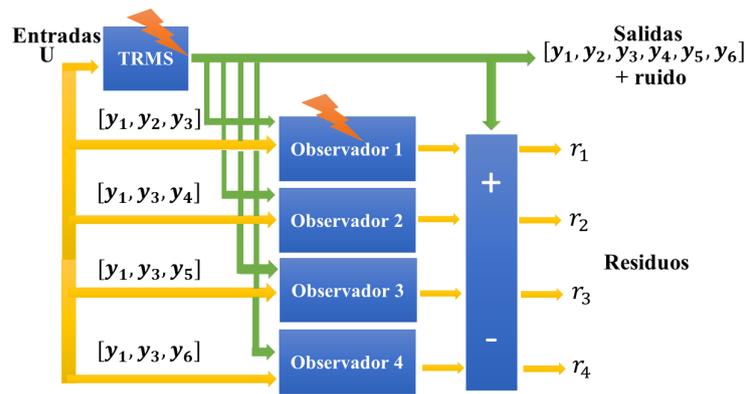


Figura 4.7: Detección de falla en el sensor y_2 .

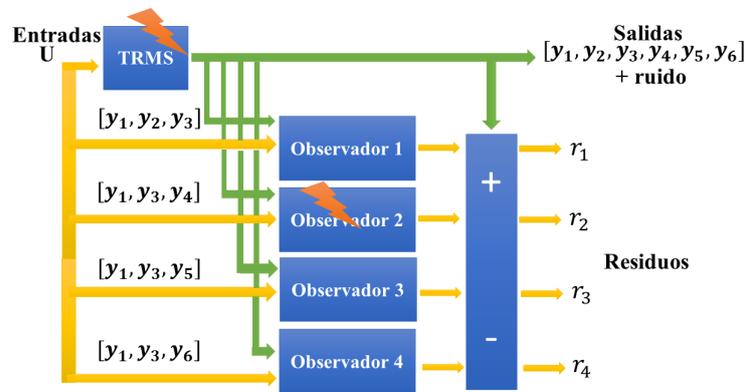


Figura 4.8: Detección de falla en el sensor y_4 .

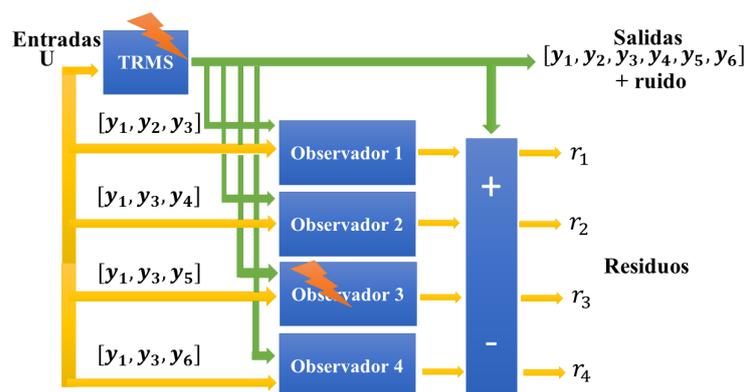


Figura 4.9: Detección de falla en el sensor y_5 .

- Falla en el sensor y_6 (momento del rotor de cola): el cuarto observador detectará la falla y los tres restantes permanecerán libres de falla tal como se observa en la Figura 4.10.

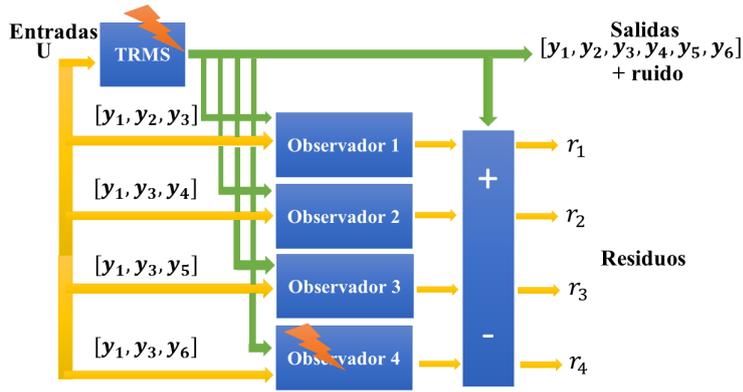


Figura 4.10: Detección de falla en el sensor y_6 .

4.3. Validación del observador propuesto

Simulación 1. Validación de los observadores Takagi-Sugeno.

El objetivo de la siguiente simulación es visualizar el desempeño de los 4 observadores Takagi-Sugeno respecto a la estimación de los estados del sistema en base a mediciones de las señales de salida:

Prueba del observador 1.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 1 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son: $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las condiciones del observador 1 son $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0.5$, $\hat{x}_3(0) = 0$, $\hat{x}_4(0) = 0.5$, $\hat{x}_5(0) = 0.5$, $\hat{x}_6(0) = 0.5$. El sistema es operado con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 4.11.

En las figuras 4.12 y 4.13 es posible observar la convergencia del observador respecto a los 6 estados del modelo no lineal con sus respectivas señales de error de estimación representado en color azul. Al analizar los resultados obtenidos en estas gráficas es posible determinar que el observador Takagi-Sugeno converge en un tiempo no mayor a los 10 s.

$$\begin{aligned}
 e_1 &= x_1 - \hat{x}_1, & e_2 &= x_2 - \hat{x}_2, \\
 e_4 &= x_3 - \hat{x}_3, & e_3 &= x_4 - \hat{x}_4, \\
 e_5 &= x_5 - \hat{x}_5, & e_6 &= x_6 - \hat{x}_6.
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

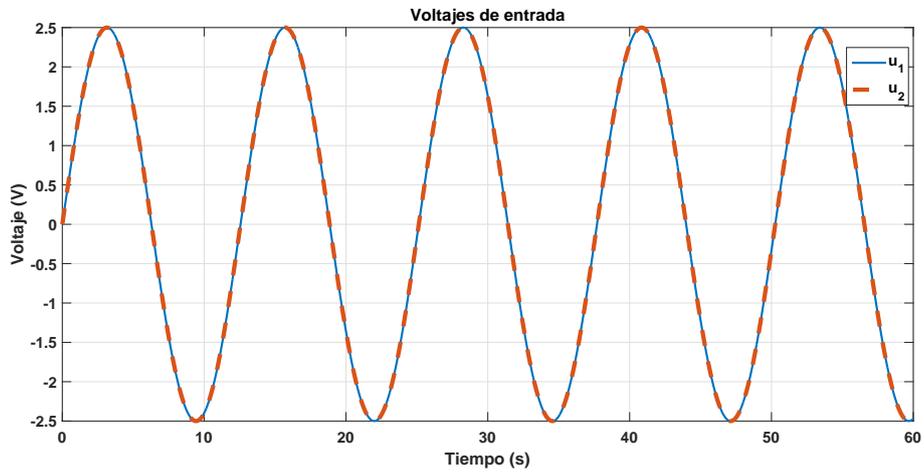


Figura 4.11: Entradas utilizadas para el TRMS.

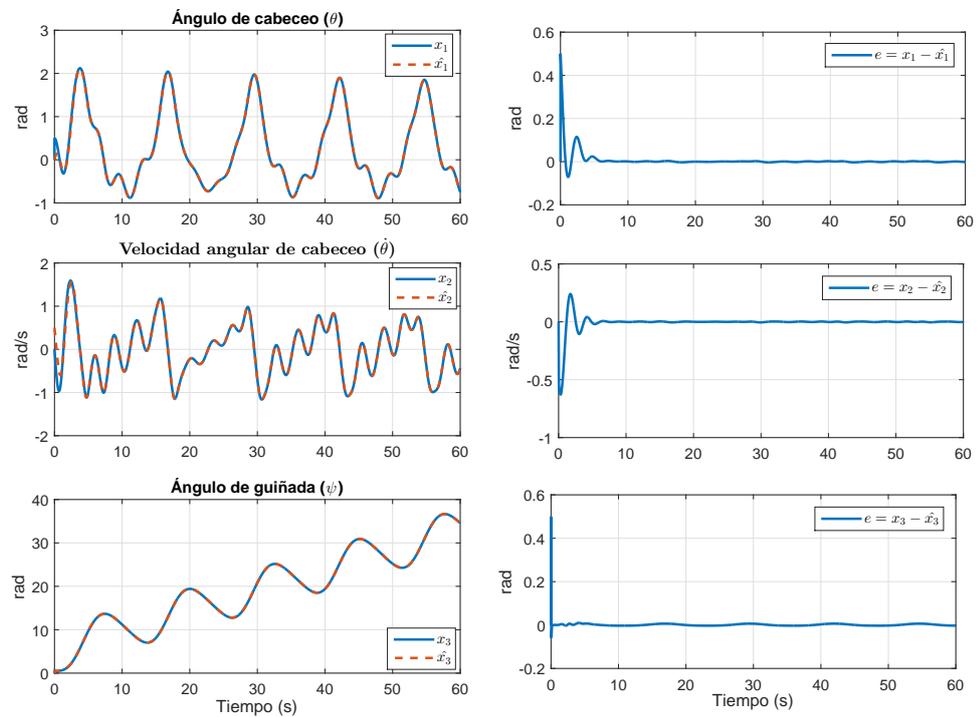


Figura 4.12: Estimación del observador 1 en x_1 , x_2 y en x_3 .

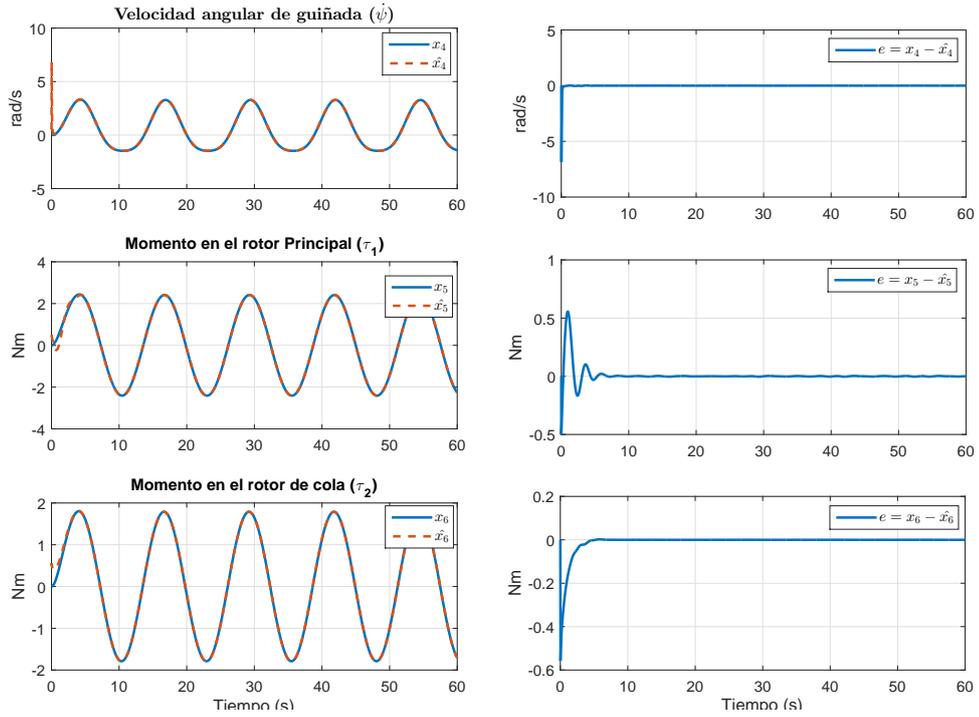


Figura 4.13: Estimación del observador 1 en x_4 , x_5 y en x_6 .

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la tabla 4.5. Las ecuaciones de los índices de desempeño utilizadas son las siguientes:

La integral del cuadrado del error, ISE, el cual se define como:

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt. \quad (4.14)$$

La integral del valor absoluto de la magnitud del error, IAE, el cual se define como:

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt. \quad (4.15)$$

Integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error, ITAE, el cual se define como:

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt. \quad (4.16)$$

Tabla 4.5: Valores de los índices de desempeño del observador 1.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	0.06936	0.5416	10.66
x_2	0.3047	1.032	12.94
x_3	7.418×10^{-03}	0.6396	20.87
x_4	0.02811	0.8608	10.10
x_5	0.2882	1.053	12.22
x_6	0.1316	0.5902	5.632

Es posible concluir que los resultados obtenidos en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-03} . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error significativamente pequeño.

Prueba del observador 2.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 2 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las condiciones del observador 2 son $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0.5$, $\hat{x}_3(0) = 0$, $\hat{x}_4(0) = 0.5$, $\hat{x}_5(0) = 0.5$, $\hat{x}_6(0) = 0.5$. El sistema es operado con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 4.11.

En las figuras 4.14 y 4.15 es posible observar la convergencia del observador respecto a los 6 estados del modelo no lineal con sus respectivas señales de error de estimación representado en color azul. Al analizar los resultados obtenidos en estas gráficas es posible determinar que el observador Takagi-Sugeno converge en un tiempo no mayor a los 10 s.

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \hat{x}_1, & e_2 &= x_2 - \hat{x}_2, \\ e_3 &= x_3 - \hat{x}_3, & e_4 &= x_4 - \hat{x}_4, \\ e_5 &= x_5 - \hat{x}_5, & e_6 &= x_6 - \hat{x}_6. \end{aligned} \tag{4.17}$$

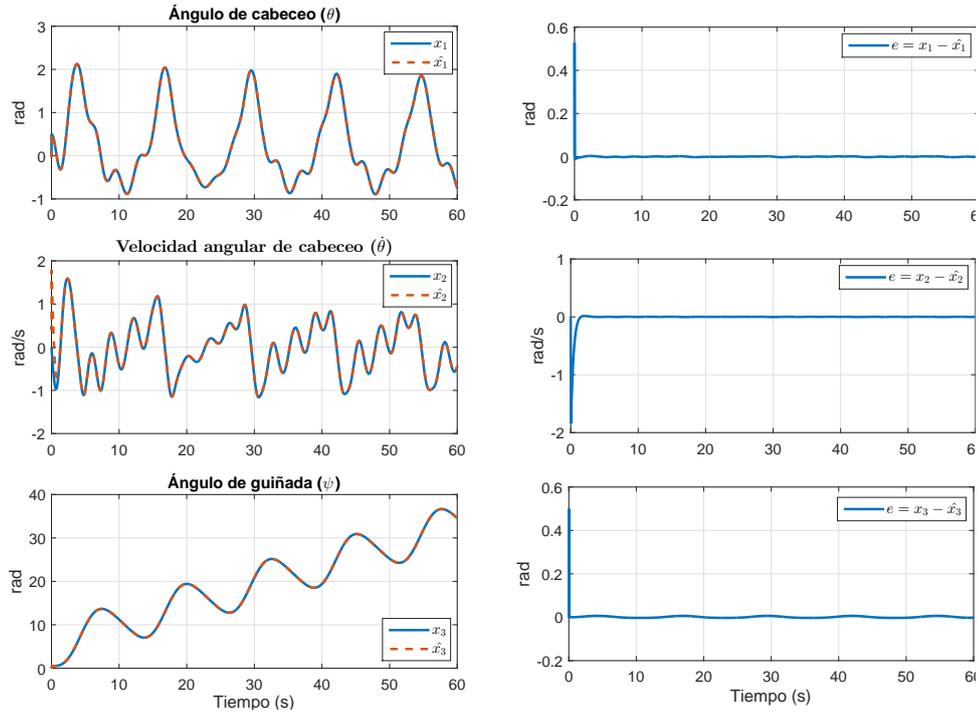


Figura 4.14: Estimación del observador 2 en x_1 , x_2 y en x_3 .

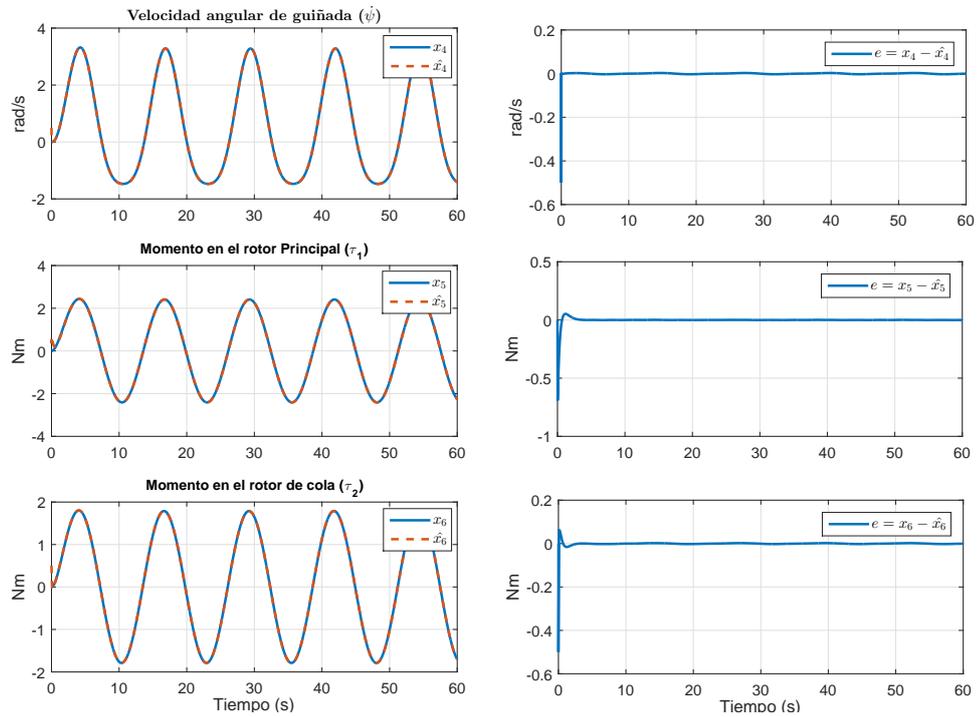


Figura 4.15: Estimación del observador 2 en x_4 , x_5 y en x_6 .

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la tabla 4.6.

Tabla 4.6: Valores de los índices de desempeño del observador 2.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	2.099×10^{-03}	0.1226	6.548
x_2	0.7211	0.8398	7.222
x_3	3.535×10^{-03}	0.3747	22.3
x_4	1.051×10^{-03}	0.1849	11.01
x_5	0.07172	0.281	3.033
x_6	2.396×10^{-03}	0.1841	8.655

Se concluye que el modelo Takagi-Sugeno en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-03} con respecto al modelo no lineal . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error pequeño.

Prueba del observador 3.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 3 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las condiciones del observador 3 son $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0.5$, $\hat{x}_3(0) = 0$, $\hat{x}_4(0) = 0.5$, $\hat{x}_5(0) = 0.5$, $\hat{x}_6(0) = 0.5$. El sistema es operado con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 4.11.

En las figuras 4.16 y 4.17 es posible observar la convergencia del observador respecto a los 6 estados del modelo no lineal con sus respectivas señales de error de estimación representado en color azul. Al analizar los resultados obtenidos en estas gráficas es posible determinar que el observador Takagi-Sugeno converge en un tiempo no mayor a los 10 s.

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \hat{x}_1, & e_2 &= x_2 - \hat{x}_2, \\ e_3 &= x_3 - \hat{x}_3, & e_4 &= x_4 - \hat{x}_4, \\ e_5 &= x_5 - \hat{x}_5, & e_6 &= x_6 - \hat{x}_6. \end{aligned} \tag{4.18}$$

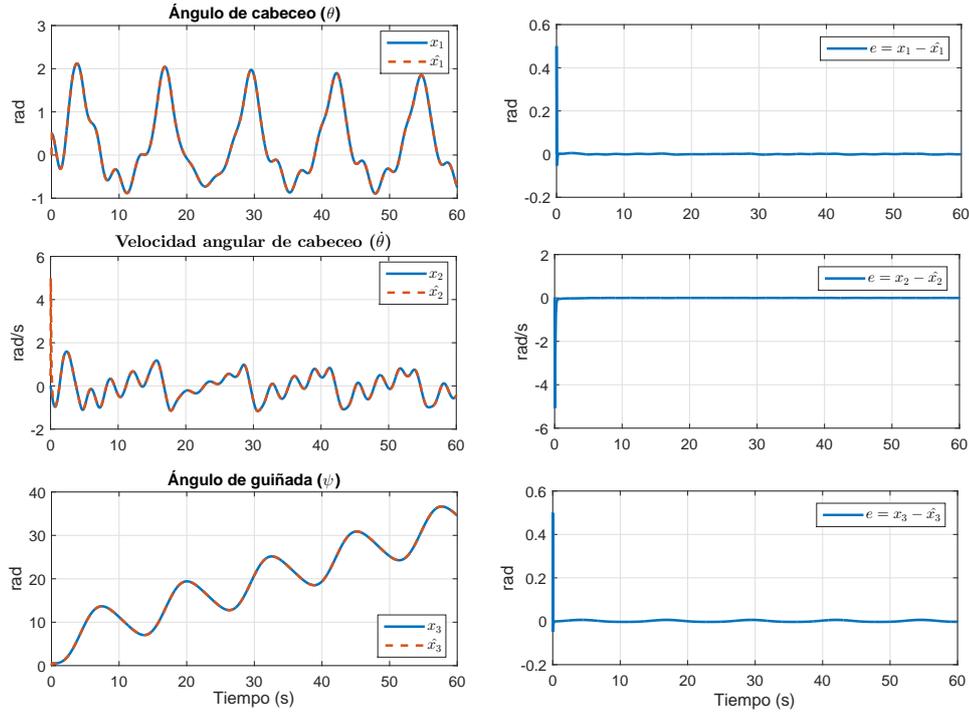


Figura 4.16: Estimación del observador 3 en x_1 , x_2 y en x_3 .

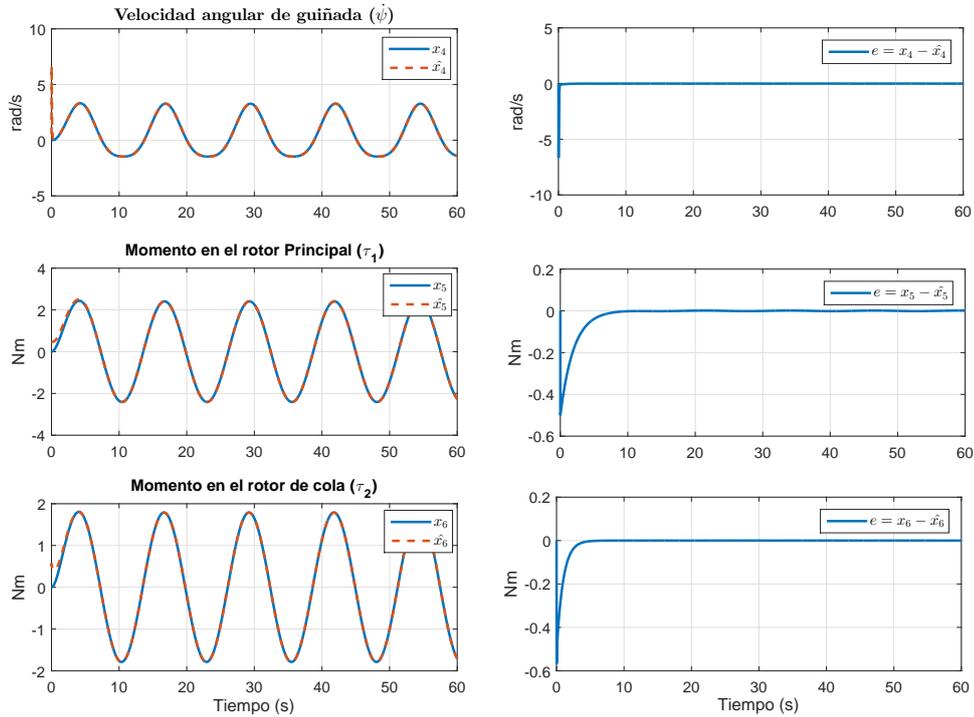


Figura 4.17: Estimación del observador 3 en x_4 , x_5 y en x_6 .

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7: Valores de los índices de desempeño del observador 3.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	2.791×10^{-03}	0.1298	6.669
x_2	0.1739	0.7773	7.222
x_3	3.506×10^{-03}	0.3761	20.31
x_4	0.1745	0.6637	9.436
x_5	0.2461	0.1068	7.887
x_6	0.1312	0.5013	0.7645

Se concluye que el modelo Takagi-Sugeno en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-03} con respecto al modelo no lineal . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error pequeño.

Prueba del observador 4.

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 4 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las condiciones del observador 4 son $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0.5$, $\hat{x}_3(0) = 0$, $\hat{x}_4(0) = 0.5$, $\hat{x}_5(0) = 0.5$, $\hat{x}_6(0) = 0.5$. El sistema es operado con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 4.11.

En las figuras 4.18 y 4.19 muestran la rápida convergencia del observador respecto a los 6 estados del sistema con sus respectivas señales de error de estimación en color azul al lado derecho.

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - \hat{x}_1, & e_2 &= x_2 - \hat{x}_2, \\ e_3 &= x_3 - \hat{x}_3, & e_4 &= x_4 - \hat{x}_4, \\ e_5 &= x_5 - \hat{x}_5, & e_6 &= x_6 - \hat{x}_6. \end{aligned} \tag{4.19}$$

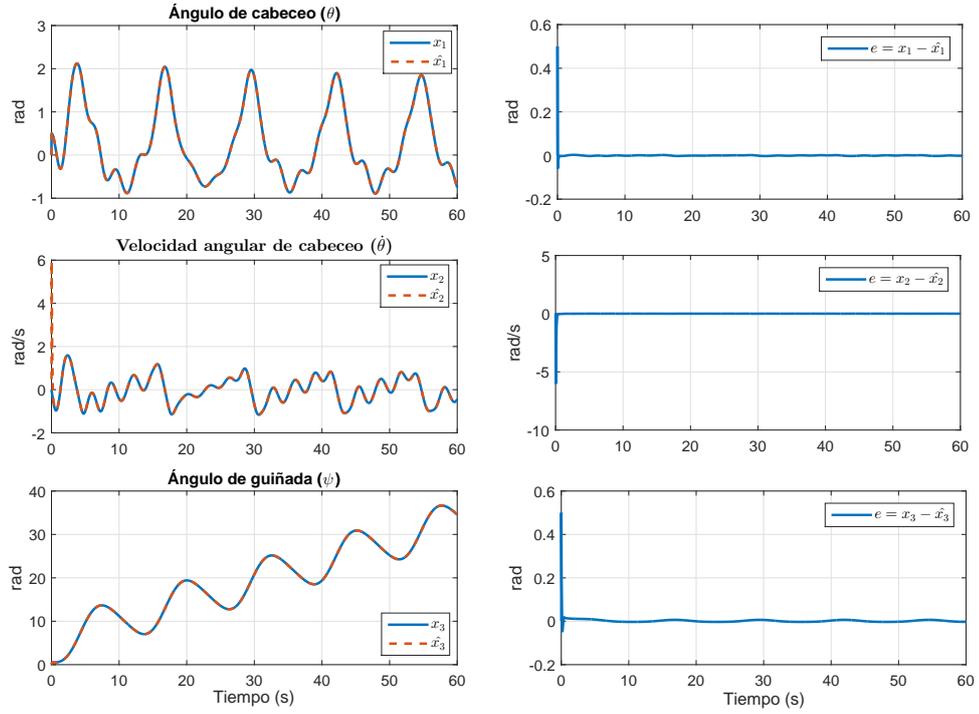


Figura 4.18: Estimación del observador 4 en x_1 , x_2 y en x_3 .

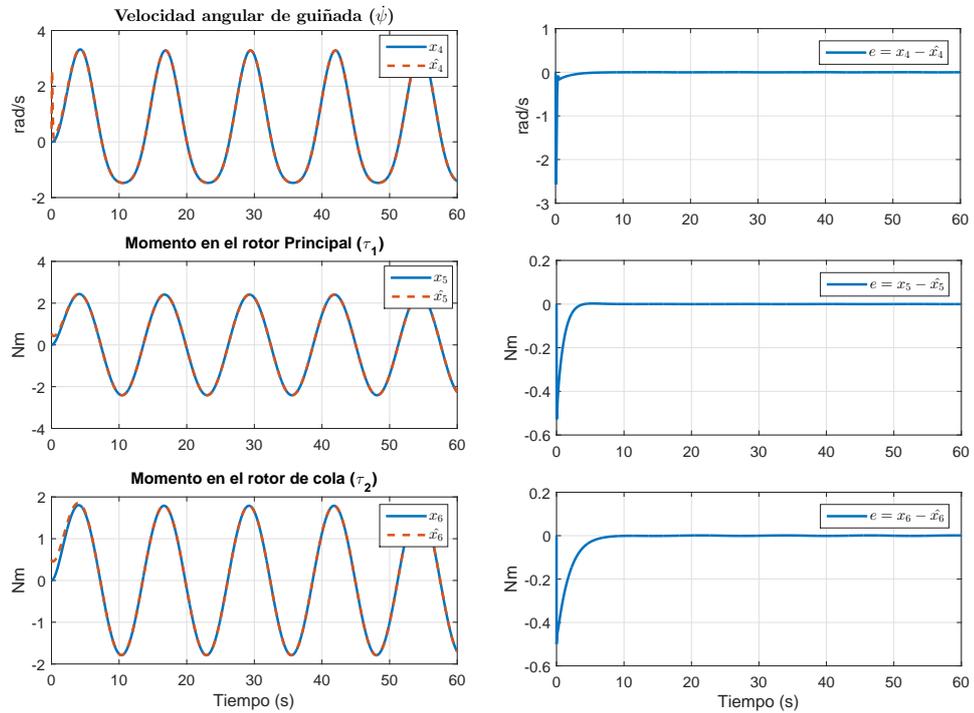


Figura 4.19: Estimación del observador 4 en x_4 , x_5 y en x_6 .

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8: Valores de los índices de desempeño del observador 4.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	2.545×10^{-03}	0.1246	6.52
x_2	2.053×10^{-03}	0.6979	6.87
x_3	9.166×10^{-03}	0.4328	22.47
x_4	7.857×10^{-03}	0.8256	6.813
x_5	0.01293	0.4962	1.387
x_6	0.02218	0.9648	6.627

Se concluye que el modelo Takagi-Sugeno en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-03} con respecto al modelo no lineal . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error pequeño.

Debido a la convergencia que presentaron los observadores diseñados es posible concluir que se pueden utilizar para formar un banco de observadores del TRMS para la detección de fallas en sensores.

Simulación 2. Validación de los observadores Takagi-Sugeno con entrada tipo escalón.

El objetivo de la siguiente simulación es visualizar el desempeño de los 4 observadores Takagi-Sugeno respecto a la estimación de los estados del sistema en base a mediciones de las señales de salida cambiando las condiciones iniciales de los observadores que se presentaron en la simulación 1:

Prueba del observador 1.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 1 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son: $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las nuevas condiciones del observador 1 son $\hat{x}_1(0) = 1$, $\hat{x}_2(0) = 0.8$, $\hat{x}_3(0) = 0.8$, $\hat{x}_4(0) = 1$, $\hat{x}_5(0) = 0.6$, $\hat{x}_6(0) = 1$. El sistema es operado con una entrada tipo escalón con un valor de amplitud 1 manteniéndose constante

4.3. VALIDACIÓN DEL OBSERVADOR PROPUESTO

hasta $t = 30s$ presentada en la Figura 4.20.

En las figuras 4.21 y 4.22 es posible observar la convergencia del observador respecto a los 6 estados del modelo no lineal con sus respectivas señales de error de estimación representado en color azul. Al analizar los resultados obtenidos en estas gráficas es posible determinar que el observador Takagi-Sugeno converge en un tiempo no mayor a los 10 s.

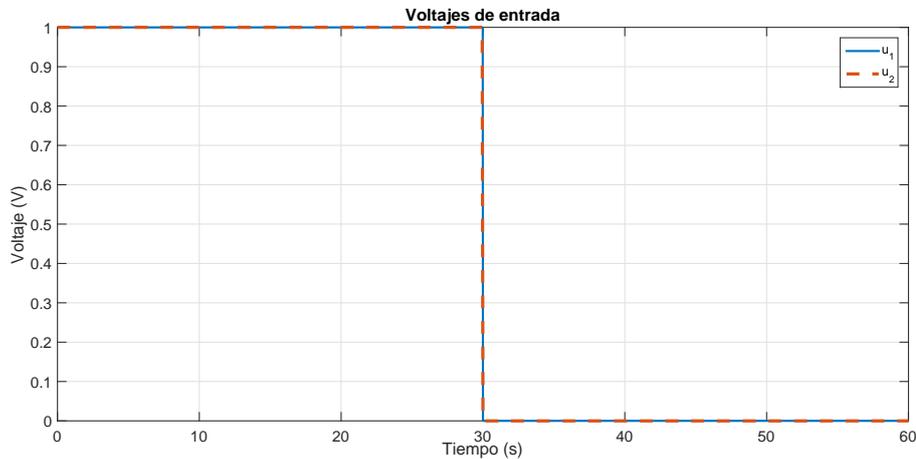


Figura 4.20: Entrada constante.

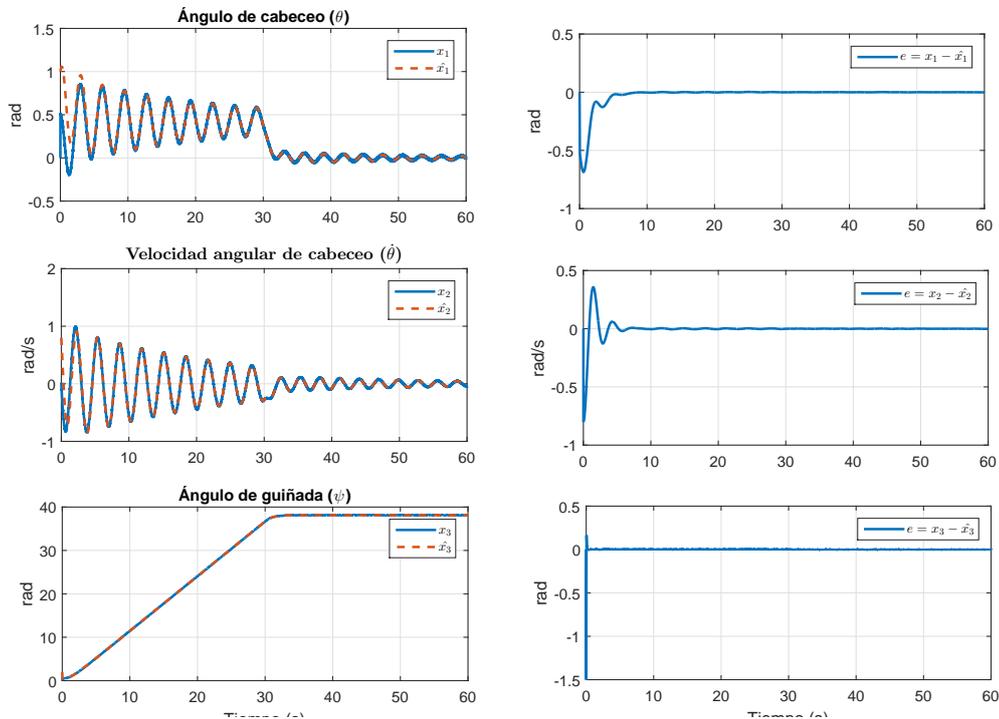


Figura 4.21: Estimación del observador 1 en x_1 , x_2 y en x_3 de la simulación 2.

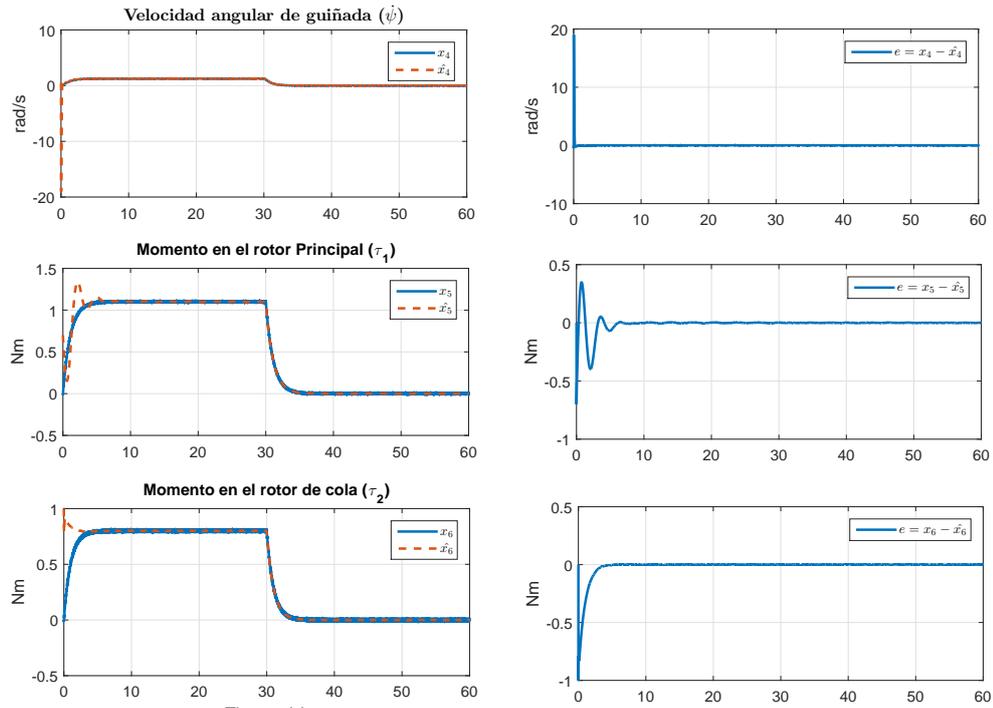


Figura 4.22: Estimación del observador 1 en x_4 , x_5 y en x_6 de la simulación 2.

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 4.9. Las ecuaciones de los índices de desempeño utilizadas son las siguientes:

La integral del cuadrado del error, ISE, el cual se define como:

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt. \quad (4.20)$$

La integral del valor absoluto de la magnitud del error, IAE, el cual se define como:

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt. \quad (4.21)$$

Integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error, ITAE, el cual se define como:

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)| dt. \quad (4.22)$$

Tabla 4.9: Valores de los índices de desempeño del observador 1 en simulación 2.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	0.5623	1.379	7.511
x_2	3.566×10^{-02}	0.052	4.989
x_3	1.129×10^{-02}	0.3138	16.25
x_4	0.01445	0.5377	14.31
x_5	0.2449	0.9755	5.441
x_6	0.4133	0.921	3.369

Es posible concluir que los resultados obtenidos en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-02} . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error significativamente pequeño.

Prueba del observador 2.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 2 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las nuevas condiciones del observador 2 son $\hat{x}_1(0) = 1$, $\hat{x}_2(0) = 0.8$, $\hat{x}_3(0) = 0.8$, $\hat{x}_4(0) = 1$, $\hat{x}_5(0) = 0.6$, $\hat{x}_6(0) = 1$. El sistema es operado con una entrada tipo escalón con un valor de amplitud 1 manteniéndose constante hasta $t = 30s$ presentada en la Figura 4.20.

En las figuras 4.23 y 4.24 es posible observar la convergencia del observador respecto a los 6 estados del modelo no lineal con sus respectivas señales de error de estimación representado en color azul. Al analizar los resultados obtenidos en estas gráficas es posible determinar que el observador Takagi-Sugeno converge en un tiempo no mayor a los 10 s.

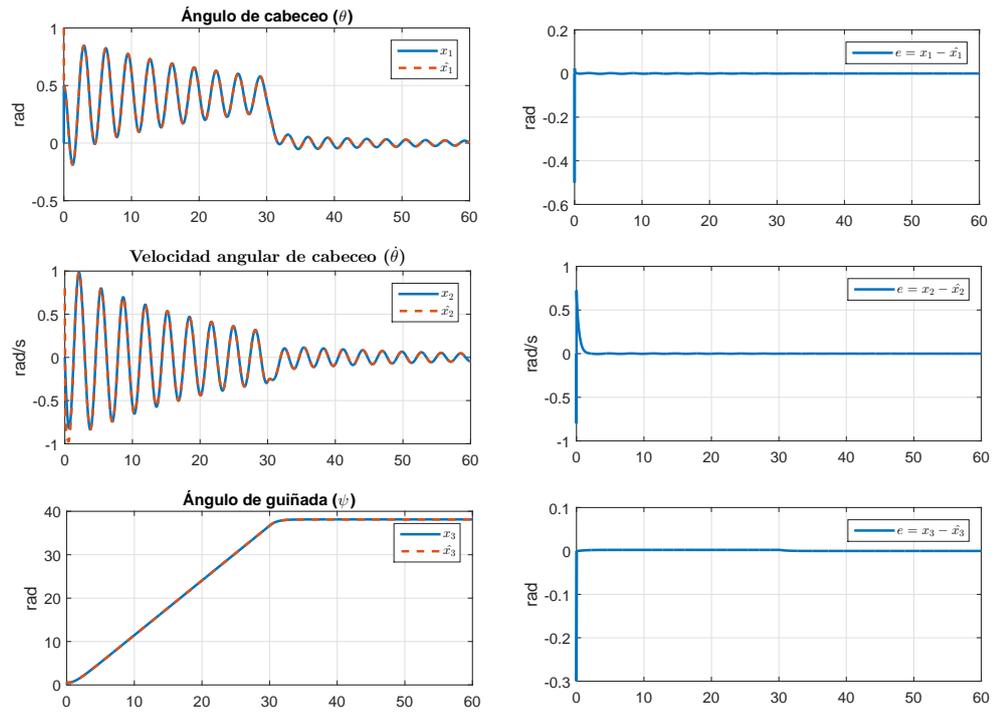


Figura 4.23: Estimación del observador 2 en x_1 , x_2 y en x_3 de la simulación 2.

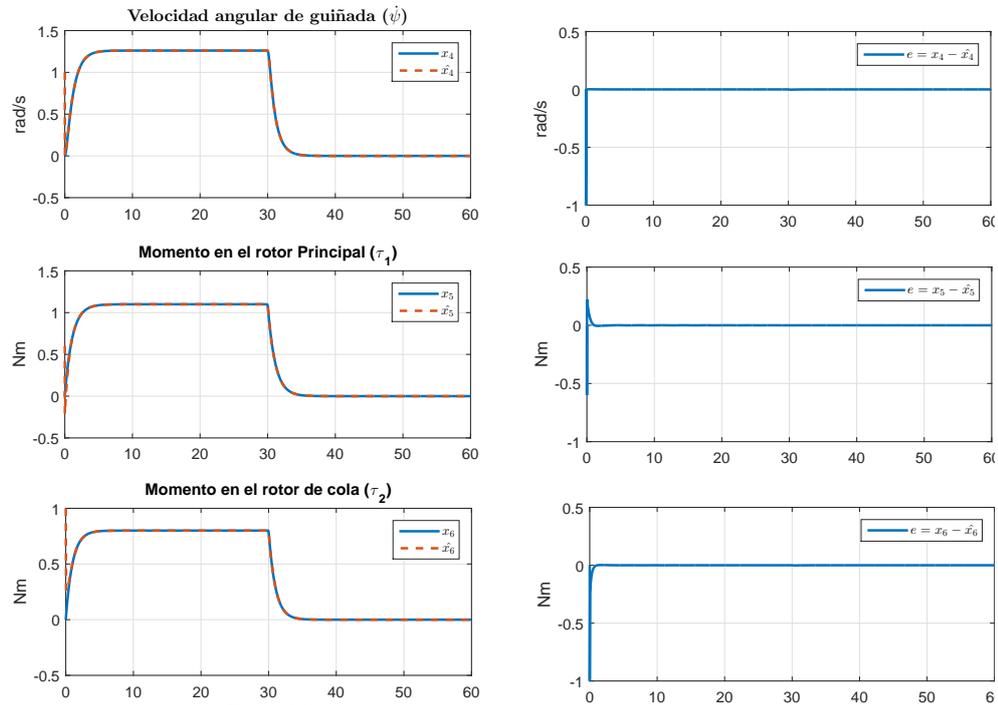


Figura 4.24: Estimación del observador 2 en x_4 , x_5 y en x_6 de la simulación 2.

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 4.10.

Tabla 4.10: Valores de los índices de desempeño del observador 2 en simulación 2.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	5.442×10^{-04}	0.02864	0.5199
x_2	9.241×10^{-03}	0.308	1.023
x_3	3.894×10^{-04}	0.07641	1.22
x_4	2.768×10^{-03}	9.104×10^{-03}	0.081
x_5	9.96×10^{-03}	0.09296	0.2705
x_6	1.247×10^{-03}	0.07593	0.1523

Se concluye que el modelo Takagi-Sugeno en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-04} con respecto al modelo no lineal . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error pequeño.

Prueba del observador 3.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 3 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las condiciones del observador 3 son $\hat{x}_1(0) = 1$, $\hat{x}_2(0) = 0.8$, $\hat{x}_3(0) = 0.8$, $\hat{x}_4(0) = 1$, $\hat{x}_5(0) = 0.6$, $\hat{x}_6(0) = 1$. El sistema es operado con una entrada tipo escalón con un valor de amplitud 1 manteniéndose constante hasta $t = 30s$ presentada en la Figura 4.20.

En las figuras 4.25 y 4.26 es posible observar la convergencia del observador respecto a los 6 estados del modelo no lineal con sus respectivas señales de error de estimación representado en color azul. Al analizar los resultados obtenidos en estas gráficas es posible determinar que el observador Takagi-Sugeno converge en un tiempo no mayor a los 10 s.

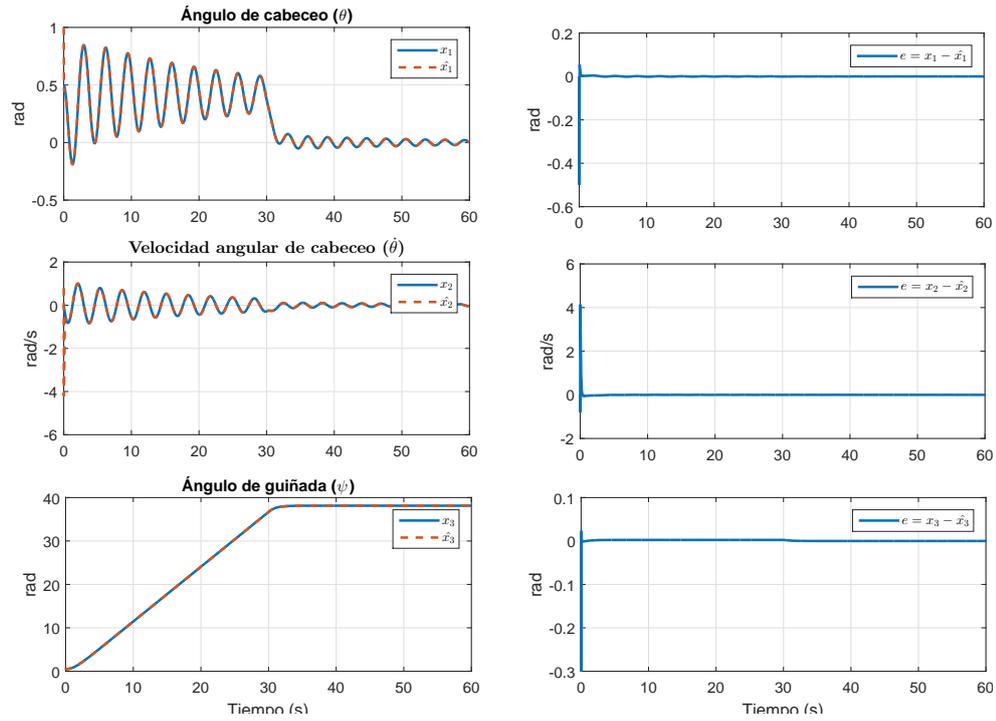


Figura 4.25: Estimación del observador 3 en x_1 , x_2 y en x_3 de la simulación 2.

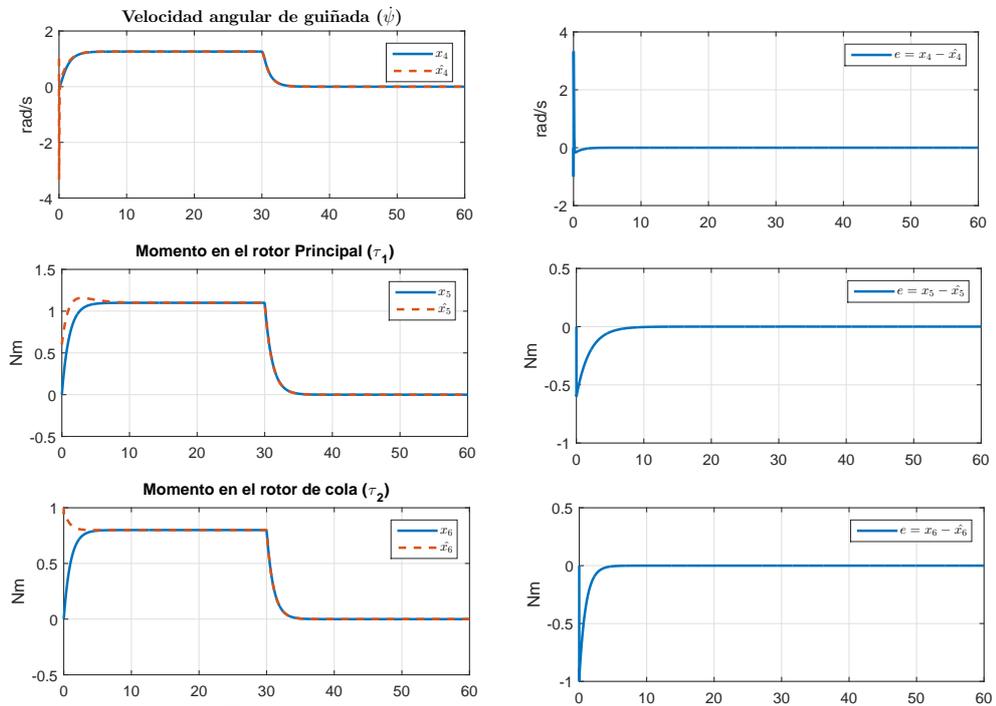


Figura 4.26: Estimación del observador 3 en x_4 , x_5 y en x_6 de la simulación 2.

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11: Valores de los índices de desempeño del observador 3 en simulación 2.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	1.399×10^{-03}	0.04235	0.5285
x_2	0.01128	0.5761	1.27
x_3	3.972×10^{-04}	0.07658	1.219
x_4	0.0357	0.3518	2.942
x_5	0.03547	0.1181	2.357
x_6	4.579×10^{-03}	0.6363	0.9012

Se concluye que el modelo Takagi-Sugeno en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-04} con respecto al modelo no lineal . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error pequeño.

Prueba del observador 4.

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La simulación del observador 3 se lleva a cabo con las siguientes condiciones: un paso de integración de $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0.5$, $x_4(0) = 0$, $x_5(0) = 0$, $x_6(0) = 0$ y las condiciones del observador 4 son $\hat{x}_1(0) = 1$, $\hat{x}_2(0) = 0.8$, $\hat{x}_3(0) = 0.8$, $\hat{x}_4(0) = 1$, $\hat{x}_5(0) = 0.6$, $\hat{x}_6(0) = 1$. El sistema es operado con una entrada tipo escalón con un valor de amplitud 1 manteniéndose constante hasta $t = 30s$ presentada en la Figura 4.20.

En las figuras 4.27 y 4.28 es posible observar la convergencia del observador respecto a los 6 estados del modelo no lineal con sus respectivas señales de error de estimación representado en color azul. Al analizar los resultados obtenidos en estas gráficas es posible determinar que el observador Takagi-Sugeno converge en un tiempo no mayor a los 10 s.

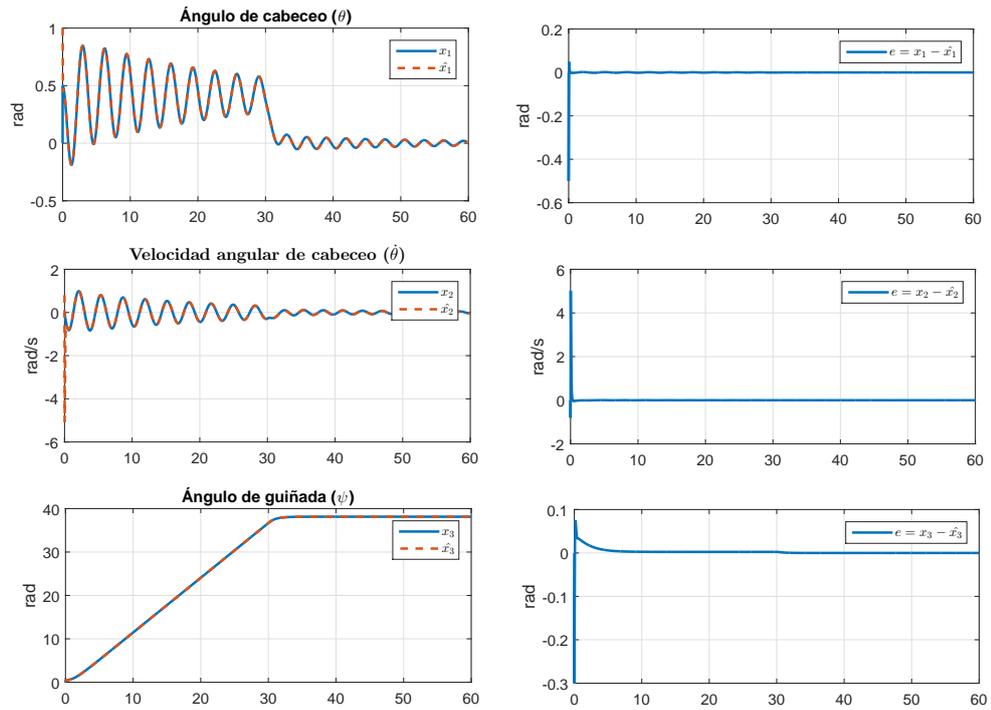


Figura 4.27: Estimación del observador 4 en x_1 , x_2 y en x_3 de la simulación 2.

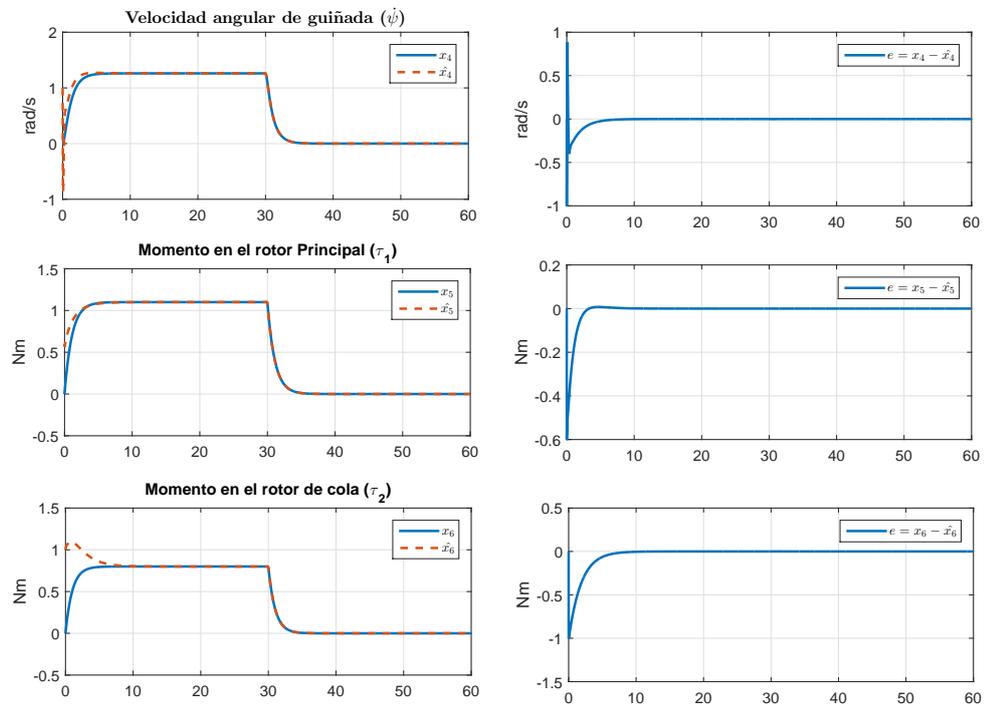


Figura 4.28: Estimación del observador 4 en x_4 , x_5 y en x_6 de la simulación 2.

Se realizó la evaluación del observador Takagi-Sugeno a partir de las mediciones del error entre los estados del observador Takagi-Sugeno y los estados del modelo no lineal, cuyos resultados se presentan en la Tabla 4.12.

Tabla 4.12: Valores de los índices de desempeño del observador 4 en simulación 2.

Estados	IAE	ISE	ITAE
x_1	1.108×10^{-03}	0.03432	0.5184
x_2	0.038	0.5073	1.081
x_3	4.437×10^{-03}	0.1737	1.392
x_4	0.0205	0.7778	1.378
x_5	0.01522	0.5194	0.5534
x_6	0.09385	0.1842	3.371

Se concluye que el modelo Takagi-Sugeno en la evaluación de los índices de desempeño que presentan las mediciones del error se encuentran entre el orden de 10^{-03} con respecto al modelo no lineal . Por lo tanto la respuesta del observador Takagi-Sugeno es capaz de estimar la dinámica en el tiempo del modelo no lineal del TRMS ya sea el ángulo de cabeceo, la velocidad angular de cabeceo, ángulo de guiñada, velocidad angular de guiñada, momento del rotor principal, momento del rotor de cola con un error pequeño.

4.4. Conclusiones

En las aplicaciones prácticas, el estado de un sistema a menudo no es fácilmente disponible. Para sistemas lineales, un observador lineal proporciona una respuesta favorable si el sistema es observable. Para diseñar un observador Takagi-Sugeno es necesario contar con un modelo Takagi-Sugeno para un sistema no lineal.

Se obtuvo el diseño de 4 observadores Takagi-Sugeno considerando medibles todas las salidas del sistema para que cada uno de los observadores cumpla con la propiedad de la observabilidad y así obtener las 32 ganancias para cada uno de ellos a través de la resolución de las LMIs establecidas en el teorema de Wang.

Cada uno de los observadores que se desarrollaron cumplen satisfactoriamente la convergencia con el estado real en un corto tiempo, dando pie a la correcta aplicación del esquema de detección de fallas para sensores.

Capítulo 5

Evaluación del esquema de detección de fallas en sensores.

En este capítulo se realizan una serie de pruebas con el banco de observadores Takagi-Sugeno para la detección y aislamiento de fallas en los sensores del TRMS.

En la sección 5.1 se muestran las especificaciones para llevar a cabo las pruebas del esquema de detección de fallas.

En la sección 5.2 se observan los resultados generados por el banco de observadores Takagi-Sugeno al realizar pruebas con fallas abruptas e incipientes en el sensor de velocidad angular de cabeceo.

En la sección 5.3 se presentan los resultados generados por el banco de observadores Takagi-Sugeno al realizar pruebas con fallas abruptas e incipientes en el sensor de velocidad angular de guiñada.

En la sección 5.4 se obtienen los resultados generados por el banco de observadores Takagi-Sugeno al realizar pruebas con fallas abruptas e incipientes en el sensor de momento del rotor principal.

En la sección 5.5 se presentan los resultados generados por el banco de observadores Takagi-Sugeno al realizar pruebas con fallas abruptas e incipientes en el sensor de momento del rotor de cola.

5.1. Características de la simulación.

Las mediciones de los sensores se comparan con valores calculados analíticamente. La diferencias resultantes entre estas comparaciones se denominan residuos, lo cuales indican si existe un cambio anormal en el sistema. A partir de los síntomas generados por la comparación de cada una de las señales de residuo en relación a los umbrales definidos, es posible generar una firma de fallas para el aislamiento del dispositivo fallado. En la Tabla 5.1 se presentan las firmas de fallas para la localización de fallas en sensores:

Tabla 5.1: Firmas de falla

Sensor	R1	R2	R3	R4
$y_1(\theta)$	0	0	0	0
$y_2(\dot{\theta})$	1	0	0	0
$y_3(\psi)$	0	0	0	0
$y_4(\dot{\psi})$	0	1	0	0
$y_5(\tau_1)$	0	0	1	0
$y_6(\tau_2)$	0	0	0	1

Es posible observar que las firmas de fallas en relación a los sensores y_2 , y_4 , y_5 y y_6 son diferentes en consecuencia es posible detectar y aislar las fallas en dichos sensores. Las fallas agregadas en las pruebas son no simultáneas.

Los umbrales mostrados en la Tabla 5.2 son de gran importancia en la detección y aislamiento de fallas, ya que son señales que indican la presencia de una falla y generan un síntoma mediante el cual se puede aislar el dispositivo fallado. En ocasiones se pueden generar falsas alarmas en los procesos causados por disturbios en el mismo. Debido a esto se definen umbrales que permitan detectar la falla y evitar las falsas alarmas. Para la selección de umbrales se hicieron pruebas del funcionamiento del TRMS con pequeños cambios en las salidas del sistema y un funcionamiento libre de falla. A cada uno de los residuos generados por el sistema de detección y localización de fallas, a los cuales se les asignaron umbrales máximos y mínimos. El ruido de medición en la Figura 5.2 afecta a las señales de los residuos y esto provoca que los umbrales sean más grandes.

Tabla 5.2: Umbrales para residuos

Residuo	Máximo	Mínimo
R_1	0.03	-0.03
R_2	0.06	-0.06
R_3	0.05	-0.05
R_4	0.04	-0.04

5.2. Caso de falla. Sensor de velocidad angular de cabeceo.

El objetivo de las 3 simulaciones es visualizar el comportamiento de los observadores Takagi-Sugeno en presencia de 3 casos de falla en el sensor y_2 ($\dot{\theta}$) y comprobar que se cumpla el esquema de la Figura 4.7.

Prueba 1. Falla abrupta

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando

un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. Se produce una falla abrupta del 10% que se generó en $t \geq 30s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor. El sistema es operado con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5\sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1

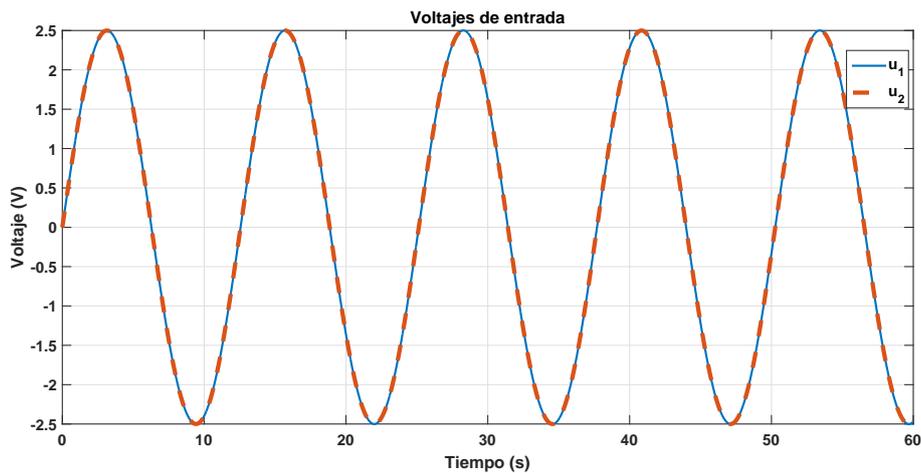


Figura 5.1: Entradas utilizadas para el TRMS.

De acuerdo al esquema 4.6, el ruido que se presenta en la Figura 5.2 fue añadido en cada uno de los sensores.

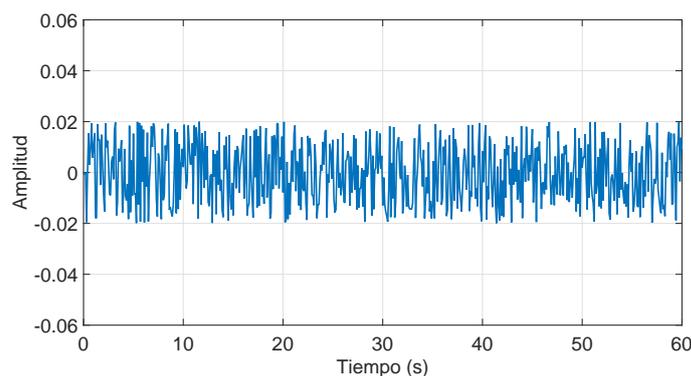


Figura 5.2: Ruido

En la Figura 5.4 es posible observar que en la gráfica de R_1 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 30s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color rojo. En las gráficas de R_2 , R_3 y R_4 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

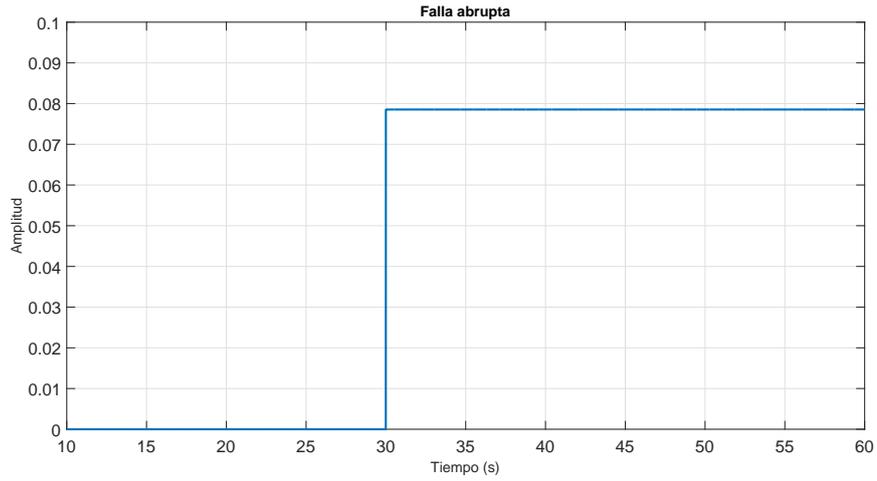


Figura 5.3: Falla abrupta.

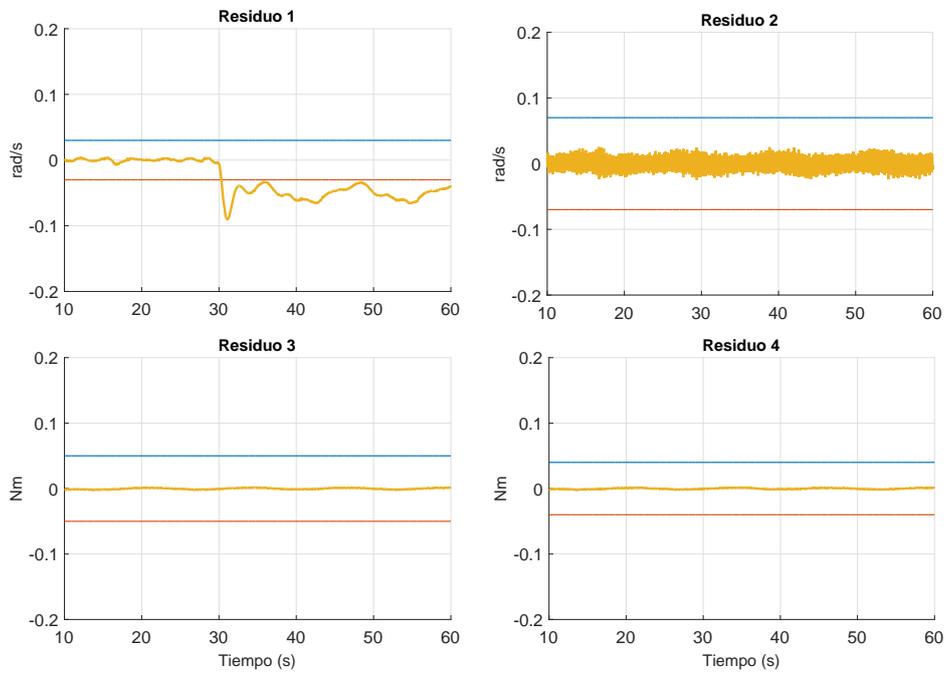


Figura 5.4: Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_2 .

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.4 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de velocidad angular de cabeceo y se logra generar la firma de falla para su aislamiento.

Tabla 5.3: Firma de falla en el sensor de velocidad angular de cabeceo.

Sensor	R1	R2	R3	R4
$y_2(\dot{\theta})$	1	0	0	0

Prueba 2. Falla abrupta

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. Se produce una falla abrupta del 20 % que se generó en $t \geq 45s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5\sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1

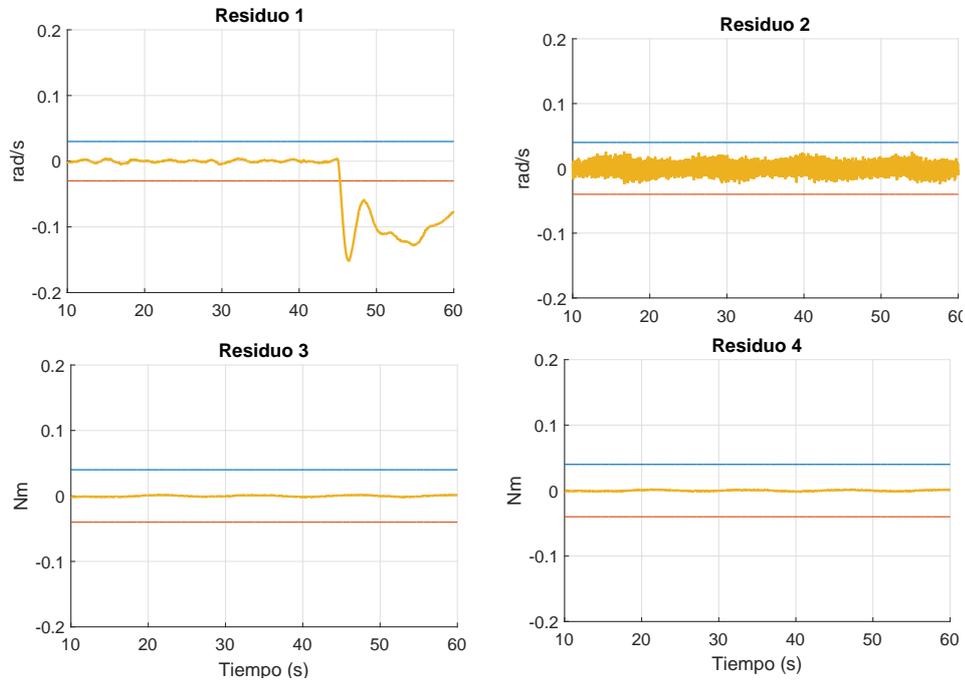


Figura 5.5: Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_2 .

En la Figura 5.4 es posible observar que en la gráfica de R_1 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 45s$ se genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color rojo.

En las gráficas de R_2 , R_3 y R_4 se aprecia que los residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.4 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de velocidad angular de cabeceo y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.3.

Prueba 3. Falla incipiente

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. Se produce una falla incipiente que se generó en $t \geq 25s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física se puede desarrollar lentamente como por ejemplo un sobrecalentamiento del componente.

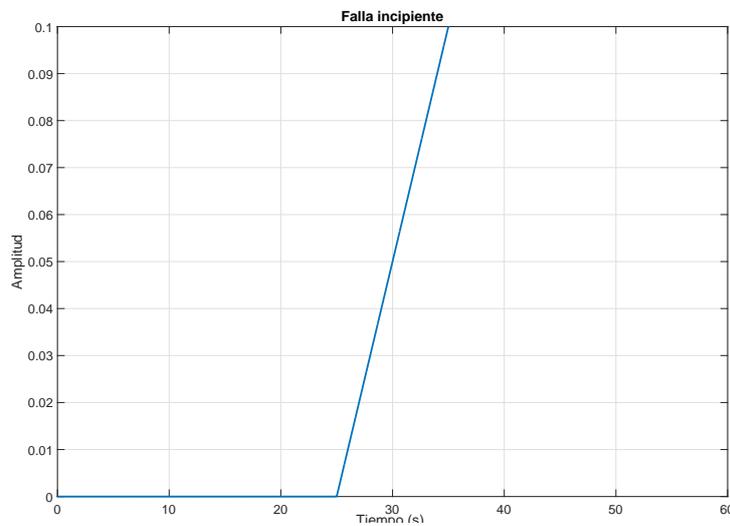


Figura 5.6: Falla incipiente.

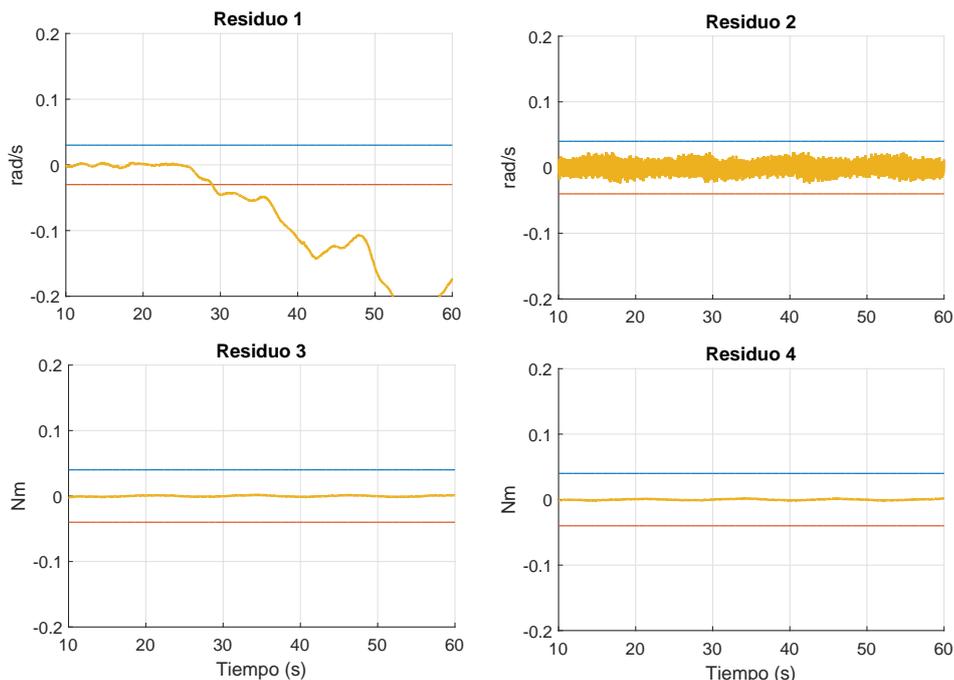


Figura 5.7: Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_2 .

En la Figura 5.7 es posible observar que en la gráfica de R_1 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 25s$ se genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color rojo. En las gráficas de R_2 , R_3 y R_4 se aprecia que las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.7 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de velocidad angular de cabeceo y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.3.

5.3. Caso de falla. Sensor de velocidad angular de guiñada.

El objetivo de las 3 simulaciones es visualizar el comportamiento de los observadores Takagi-Sugeno en presencia de 3 casos de falla en el sensor y_4 ($\dot{\psi}$) y comprobar que se cumpla el esquema de la Figura 4.8.

Prueba 1. Falla abrupta.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5\sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1

Se produce una falla abrupta del 10% que se generó en $t \geq 30s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor.

En la Figura 5.8 es posible observar que en la gráfica de R_2 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 30s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color rojo. En las gráficas de R_1 , R_3 y R_4 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.8 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de velocidad angular de guiñada y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.4.

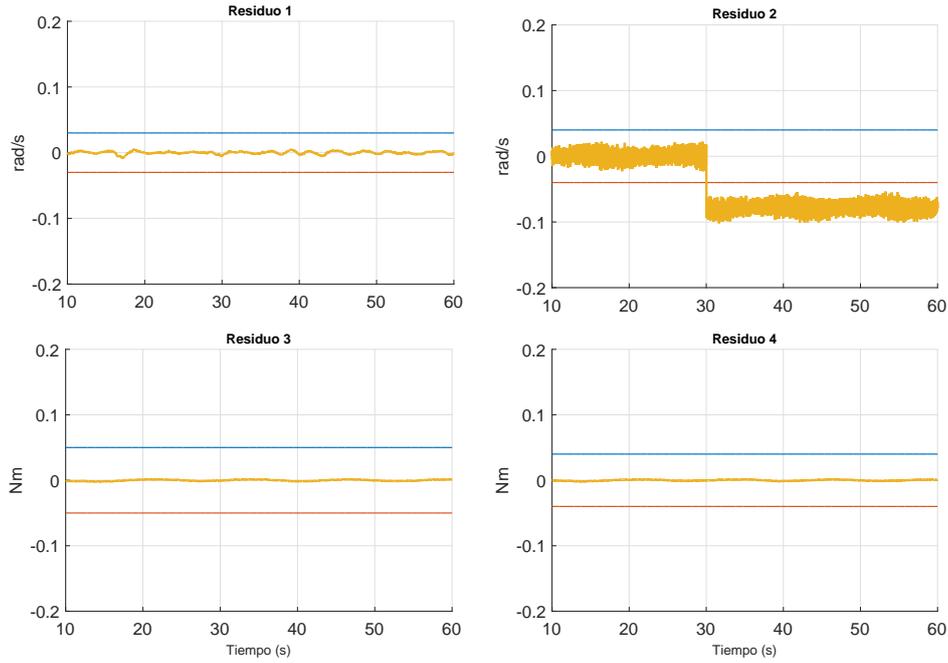


Figura 5.8: Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_4 .

Tabla 5.4: Firma de falla en el sensor de velocidad angular de guiñada.

Sensor	R1	R2	R3	R4
$y_4(\dot{\psi})$	0	1	0	0

Prueba 2. Falla abrupta.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1

Se produce una falla abrupta del 20% que se generó en $t \geq 45s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor.

En la Figura 5.9 es posible observar que en la gráfica de R_2 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 45s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color rojo. En las gráficas de R_1 , R_3 y R_4 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

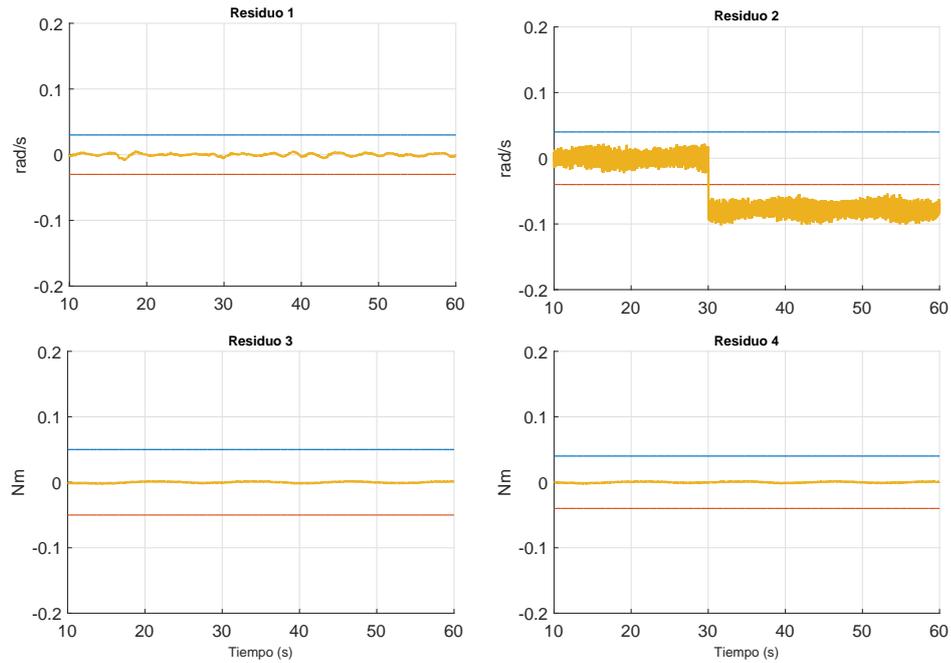


Figura 5.9: Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_4 .

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.9 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de velocidad angular de guiñada y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.4.

Prueba 3. Falla incipiente.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1. Se produce una falla incipiente que se generó en $t \geq 25s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física se puede desarrollar lentamente como por ejemplo un sobrecalentamiento del componente.

En la Figura 5.10 es posible observar que en la gráfica de R_2 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 25s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color rojo. En las gráficas de R_1 , R_3 y R_4 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales

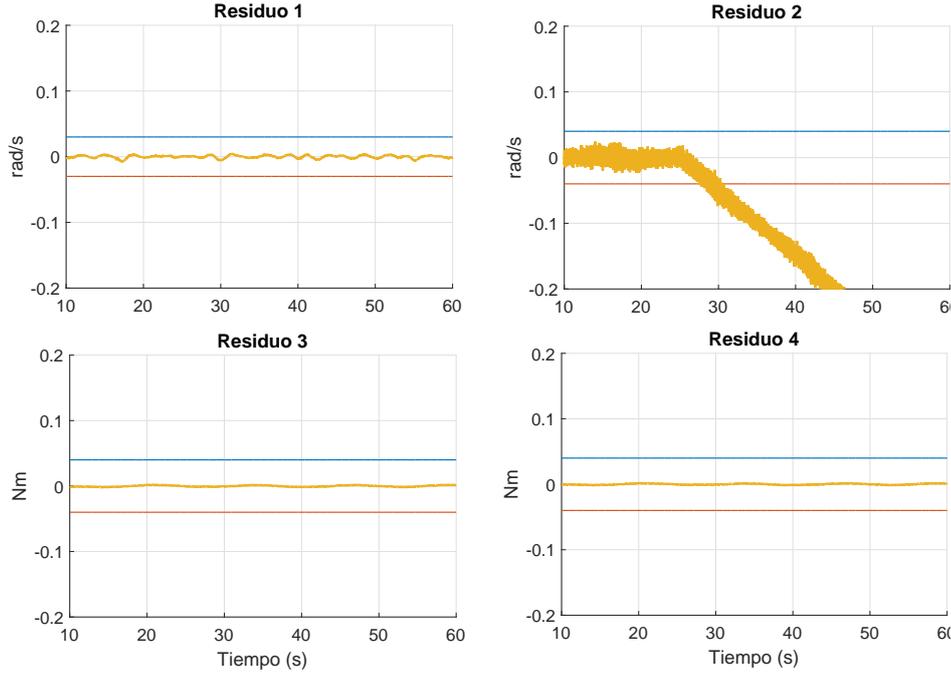


Figura 5.10: Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_4 .

de los residuos de la Figura 5.10 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de velocidad angular de guiñada y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.4.

5.4. Caso de falla. Sensor de Momento del rotor principal.

El objetivo de las 3 simulaciones es visualizar el comportamiento de los observadores Takagi-Sugeno en presencia de 3 casos de falla en el sensor y_5 (τ_1) y comprobar que se cumpla el esquema de la Figura 4.9.

Prueba 1. Falla abrupta.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. Se produce una falla abrupta del 10% que se generó en $t \geq 30s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5\sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1.

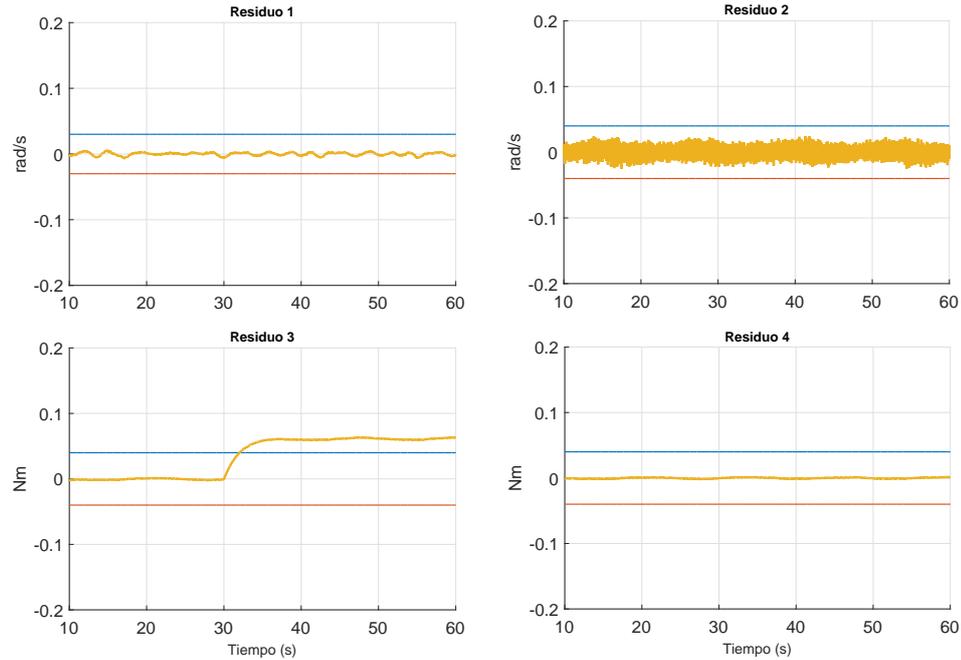


Figura 5.11: Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_5 .

En la Figura 5.11 es posible observar que en la gráfica de R_3 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 30s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color azul. En las gráficas de R_1 , R_2 y R_4 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.11 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de momento del rotor principal y se logra generar la firma de falla para su aislamiento.

Tabla 5.5: Firma de falla en el sensor de momento del rotor principal.

Sensor	R1	R2	R3	R4
$y_5(\tau_1)$	0	0	1	0

Prueba 2. Falla abrupta.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5\sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1.

Se produce una falla abrupta del 20% que se generó en $t \geq 45s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor.

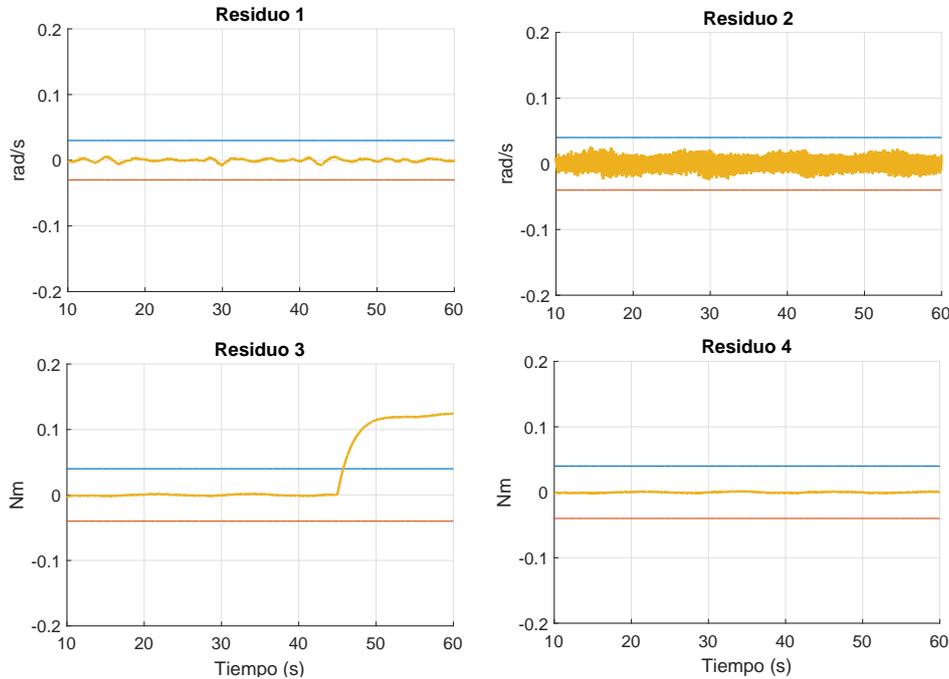


Figura 5.12: Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_5 .

En la Figura 5.12 es posible observar que en la gráfica de R_3 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 45s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color azul. En las gráficas de R_1 , R_2 y R_4 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.12 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de momento del rotor principal y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.5.

Prueba 3. Falla incipiente

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1.

Se produce una falla incipiente que se generó en $t \geq 25s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física se puede desarrollar lentamente como por ejemplo un sobrecalentamiento del componente.

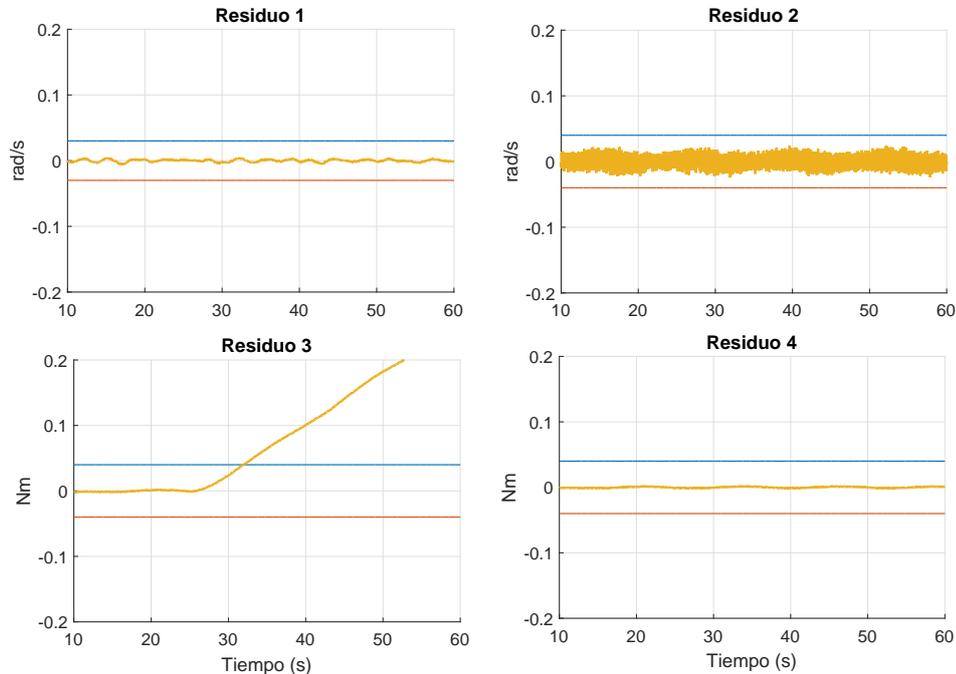


Figura 5.13: Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_5 .

En la Figura 5.13 es posible observar que en la gráfica de R_3 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 25s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color azul. En las gráficas de R_1 , R_2 y R_4 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.13 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de momento del rotor principal y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.5.

5.5. Caso de falla. Sensor de momento del rotor de cola.

El objetivo de las 3 simulaciones es visualizar el comportamiento de los observadores Takagi-Sugeno en presencia de 3 casos de falla en el sensor y_6 (τ_2) y comprobar que se cumpla el esquema de la Figura 4.10.

Prueba 1. Falla abrupta.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5\sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1.

Se produce una falla abrupta del 10% que se generó en $t \geq 30s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor.

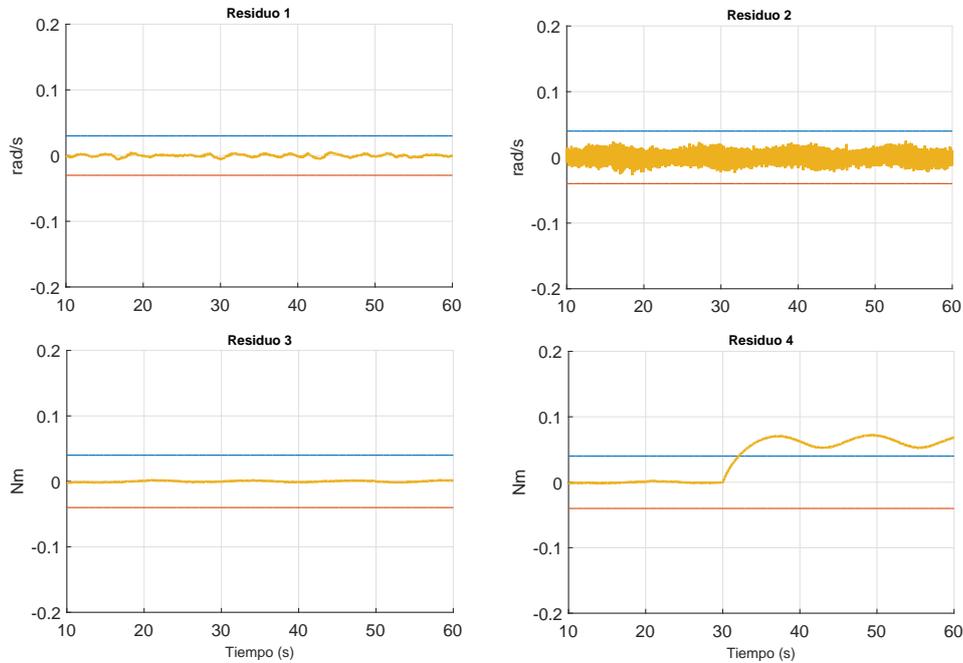


Figura 5.14: Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_6 .

En la Figura 5.14 es posible observar que en la gráfica de R_4 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 30s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color azul. En las gráficas de R_1 , R_2 y R_3 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.14 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de momento del rotor de cola y se logra generar la firma de falla para su aislamiento.

Tabla 5.6: Firma de falla en el sensor de momento del rotor de cola.

Sensor	R1	R2	R3	R4
$y_6(\tau_2)$	0	0	0	1

Prueba 2. Falla abrupta.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1.

Se produce una falla abrupta del 20% que se generó en $t \geq 45s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor.

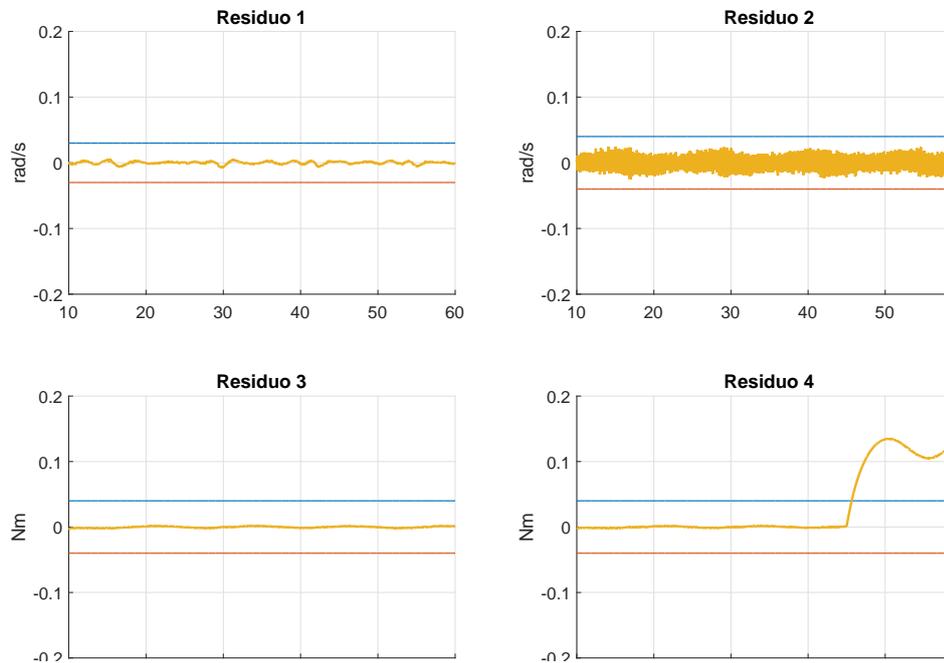


Figura 5.15: Simulación 2. Presencia de falla en el sensor y_6 .

En la Figura 5.15 es posible observar que en la gráfica de R_4 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 45s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color azul. En las gráficas de R_1 , R_2 y R_3 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.15 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de momento del rotor de cola y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.6.

Prueba 3. Falla incipiente.

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5 \sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1.

Se produce una falla incipiente que se generó en $t \geq 25s$ y se mantiene hasta el final de la simulación, de manera física se puede desarrollar lentamente como por ejemplo un sobrecalentamiento del componente.

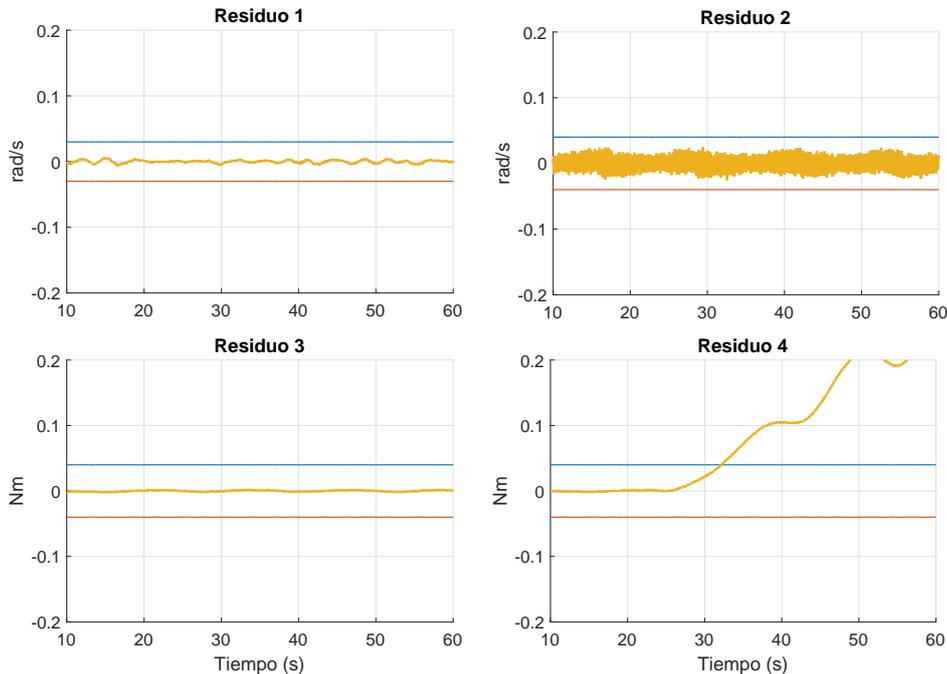


Figura 5.16: Simulación 3. Presencia de falla en el sensor y_6 .

En la Figura 5.16 es posible observar que en la gráfica de R_4 como se indicó en las condiciones de la prueba en el $t = 25s$ genera un síntoma, en consecuencia a que la señal del residuo sobrepasa el umbral inferior que está representado con el color azul. En las gráficas de R_1 , R_2 y R_3 las señales de sus residuos no sobrepasan ninguno de los dos umbrales y se mantienen en torno a cero.

Es posible concluir que mediante los síntomas generados por la comparación de las señales de los residuos de la Figura 5.16 con sus respectivos umbrales, fue posible detectar el momento en que aparece la falla en el sensor de momento del rotor de cola y se logra generar la firma de falla para su aislamiento que corresponde a la Tabla 5.6.

5.6. Caso de falla. Sensor de de ángulo de cabeceo y ángulo de guiñada.

El objetivo de la simulación es visualizar el comportamiento de los observadores Takagi-Sugeno en presencia de falla en el sensor y_1 (θ) y posteriormente en el sensor y_3 (ψ)

La simulación de esta prueba se llevó a cabo con las siguientes condiciones: utilizando un paso fijo de integración $t_s = 1 \times 10^{-3}$, el método de integración utilizado para la solución de las ecuaciones es el método de Euler, las condiciones iniciales del sistema son $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0.5$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=0$, $x_6(0)=0$ y del observador son $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0.5$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0.5$, $x_5(0)=0.5$, $x_6(0)=0.5$. Se produce una falla abrupta del 20% que se generó en $t \geq 45s$, de manera física puede representar la pérdida del sensor o daño en algún componente que conforma al sensor. El sistema es operado con el ruido que se presentó en la Figura 5.2 y con las entradas de rotor principal y rotor de cola como $u_1 = u_2 = 2.5\sin(0.5t)$ presentadas en la Figura 5.1

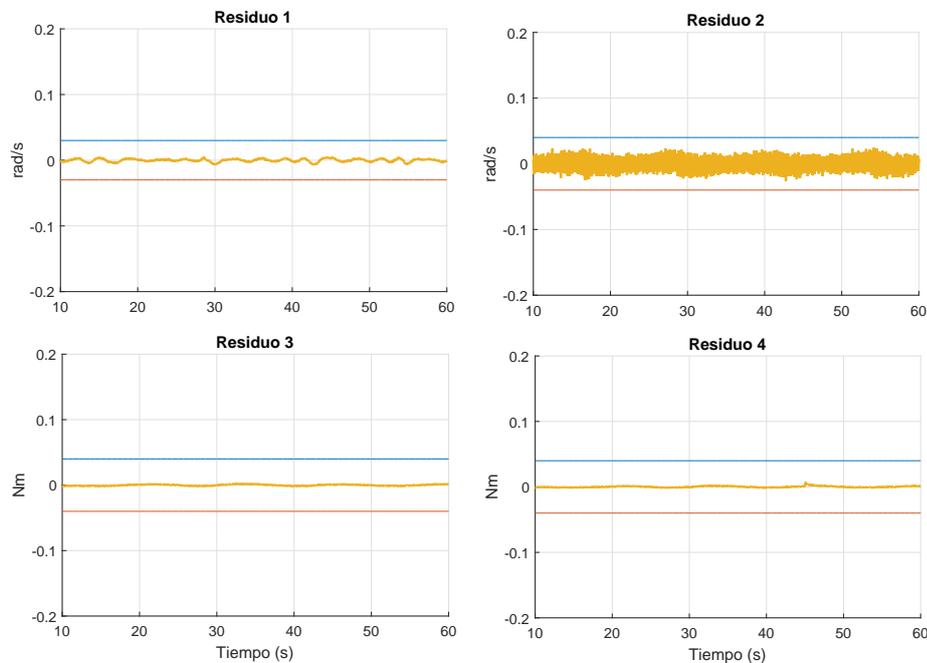


Figura 5.17: Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_1 .

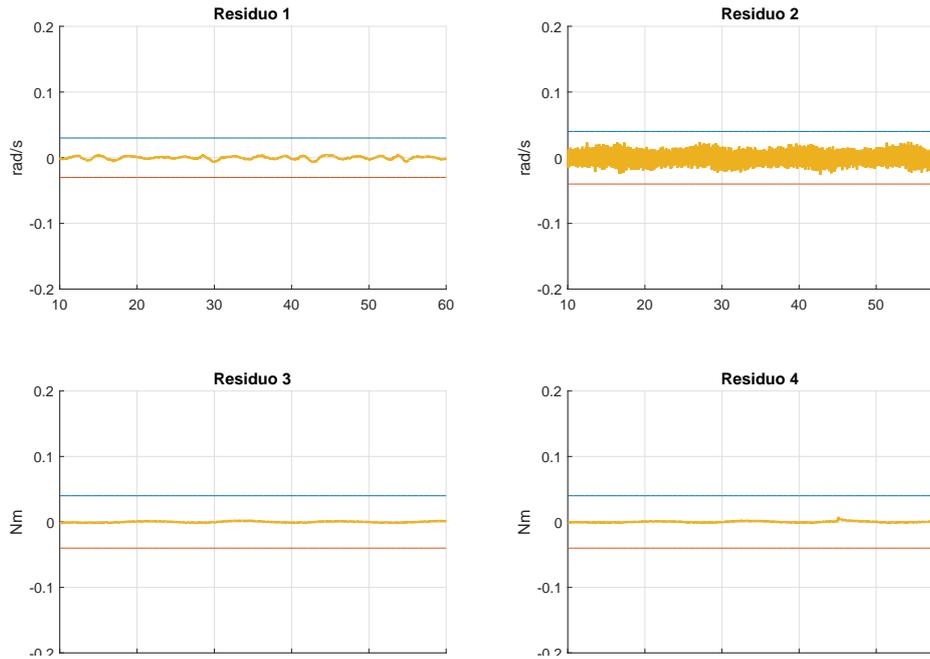


Figura 5.18: Simulación 1. Presencia de falla en el sensor y_3 .

En la Figura 5.17 y 5.18 es posible observar que los residuos se mantienen en cero, ya que si fallan, la falla se propaga hacia todos los observadores, siendo imposible detectar la falla solamente en estos dos sensores.

5.7. Conclusiones

El esquema de detección de fallas logra localizar y aislar las fallas en los sensores de y_2 , y_4 , y_5 y y_6 .

Debido a que la firma de fallas en los sensores de ángulo de cabeceo θ (y_1) y ángulo de guiñada ψ (y_3) son iguales no es posible saber cuándo de los dos sensores está fallado. Además que estos sensores no pueden fallar, ya que si fallan, la falla se propaga en todo el banco de observadores. Se sugiere alguna de las siguientes soluciones:

a) El uso de redundancia física, es decir, en el uso de elementos repetidos en el sistema. Estos elementos nos permiten, por medio de comparaciones del funcionamiento, tomar decisiones sobre la presencia de fallas y sobre posibles acciones correctivas. Los métodos basados en redundancia física son muy confiables y permiten una rápida corrección de posibles fallas. Sin embargo, debe tenerse claro que la utilización de elementos repetidos en un sistema no puede ser llevada a la práctica siempre. Bajo condiciones, como por ejemplo, el costo, el tamaño o el peso de los dispositivos, el uso de este tipo de redundancia está limitado.

b) Incluir en el sistema una unidad de medición inercial o IMU (del inglés inertial measurement unit), es un dispositivo electrónico que mide e informa acerca de la velocidad,

orientación y fuerzas gravitacionales de un aparato, usando una combinación de acelerómetros y giróscopos. Las unidades de medición inercial son normalmente usadas para maniobrar aviones, incluyendo vehículos aéreos no tripulados, entre muchos otros usos, y además naves espaciales, incluyendo transbordadores, satélites y aterrizadores. Incorpora al menos un acelerómetro y un giroscopio orientados axialmente. De esta forma proporciona los datos de aceleración lineal y velocidad angular sobre el eje en el que se encuentran ubicados.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

6.1. Conclusiones

La representación Takagi-Sugeno obtenida a partir del modelo no lineal del TRMS fue capaz de representar fielmente la dinámica del sistema. Esto se demostró a partir del cálculo de índices de desempeño. El modelo Takagi-Sugeno permitió el diseño de un observador lineal de orden completo el cual estima las salidas del sistema.

Por otro lado a través de observadores Takagi-Sugeno se desarrolló un esquema de detección de fallas en sensores basado en un banco de observadores, el cual fue probado a nivel simulación y los resultados demostraron la capacidad del sistema en detectar y aislar fallas abruptas e incipientes en sensores. El esquema utilizado para la detección de fallas fue mediante un banco de observadores Takagi-Sugeno tipo DOS.

En la tabla de firma de fallas se observó que tanto fallas en los sensores y_1 y y_3 no es posible detectar falla, lo que hizo imposible determinar que sensor está fallando sin embargo se propuso una técnica de detección y aislamiento no basada en el modelo agregando una redundancia física al sistema o bien adquirir una IMU (módulo de navegación inercial), el cuál es un dispositivo que incorpora al menos un acelerómetro y un giroscopio.

Principales resultados

- a) Representación del modelo no lineal por medio del enfoque Takagi-Sugeno por el sector no lineal.
- b) Diseño de observadores tipo Takagi-Sugeno.
- c) Esquema de detección de fallas que permite detectar fallas en ciertos sensores del sistema.

6.2. Trabajos futuros

- Implementar una posible solución para lograr aislar las fallas en los sensores y_1 y y_3 .

- Implementar en la planta real el esquema de detección de fallas en sensores de este trabajo de tesis.
- Diseñar un esquema de detección y aislamiento de fallas en actuadores.
- Diseño de un Control Tolerante a Fallas tanto en sensores como en actuadores, utilizando la misma técnica del esquema DOS.

Capítulo 7

Anexo

Modelos locales del Takagi-Sugeno

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 0.6588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{16} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{17} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{18} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{18} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{19} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{19} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{25} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{25} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{26} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{26} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{27} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{27} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{28} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 2.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{28} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{29} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{29} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{30} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0.9170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0882 & 0 & -0.8 & 2.1588 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2.3170 & 6.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9091 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.7059 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

- A. Alzate and J. E. Bravo. Aproximación difusa de funciones reales. *Scientia Et Technica*, 1(24), 2004.
- K. J. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive control*. Courier Corporation, 2013.
- M. Bernal, T. M. Guerra, and A. Kruszewski. A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of takagi–sugeno models. *Fuzzy sets and systems*, 160(19):2776–2795, 2009.
- S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM, 1994.
- C. Briat. *Commande et observation robustes des Systemes LPV Retardés*. PhD thesis, PhD Thesis, 2008. Institut National Polytechnique, Grenoble, France, 2008.
- Y.-Y. Cao and P. M. Frank. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear takagi–sugeno fuzzy models. *Fuzzy sets and systems*, 124(2):213–229, 2001.
- S. M. De Oca and V. Puig. Fault-tolerant control using a virtual actuator using lpv techniques: application to a two-degree of freedom helicopter. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(15):416–421, 2010.
- D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. Fault diagnosis for takagi-sugeno nonlinear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(8):504–509, 2009.
- R. Isermann. Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods—an introduction. *Control engineering practice*, 5(5):639–652, 1997.
- R. Isermann. Model-based fault-detection and diagnosis—status and applications. *Annual Reviews in control*, 29(1):71–85, 2005.
- R. Isermann. *Fault-diagnosis systems: an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media, 2006.
- Z. Lendek, T. M. Guerra, R. Babuska, and B. De Schutter. *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer, 2011.
- C. Lin, G. Wang, T. H. Lee, and Y. He. *LMI approach to analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay*, volume 351. Springer, 2007.
- K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- H. Ohtake, K. Tanaka, and H. O. Wang. Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4):333–341, 2003.
- G. Ortiz-Torres, J. Reyes-Reyes, C. Garcia-Beltrán, M. A. Medina, and C. Astorga-Zaragoza. Estabilización robusta y estimación de estados de un quadrotor mediante una representación takagi-sugeno.
- I. Postlethwaite, I. K. Konstantopoulos, X.-D. Sun, D. J. Walker, and A. G. Alford. Design, flight simulation, and handling qualities evaluation of an lpv gain-scheduled helicopter flight control system. In *Control Conference (ECC), 1999 European*, pages 1178–1183. IEEE, 1999.
- B. Pratap and S. Purwar. Sliding mode state observer for 2-dof twin rotor mimo system. In *Power, Control and Embedded Systems (ICPCES), 2010 International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2010.
- V. Puig, J. Quevedo, and T. Escobet. Control tolerante a fallos: Fundamentos y diagnóstico de fallos. *Departamento de ingeniería y sistemas, UPC Barcelona España*, 2004.
- P. Rosa and C. Silvestre. Fault detection and isolation of lpv systems using set-valued observers: An application to a fixed-wing aircraft. *Control Engineering Practice*, 21(3):242–252, 2013.
- D. Rotondo, F. Nejjari, and V. Puig. Fault estimation and virtual actuator ftc approach for lpv systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(20):824–829, 2012.
- D. Rotondo, F. Nejjari, and V. Puig. Quasi-lpv modeling, identification and control of a twin rotor mimo system. *Control Engineering Practice*, 21(6):829–846, 2013.

- D. Rotondo, F. Nejjari, and V. Puig. A virtual actuator and sensor approach for fault tolerant control of lpv systems. *Journal of Process Control*, 24(3):203–222, 2014.
- R. J. M. Santos, G. L. de Oliveira Serra, and C. C. T. Ferreira. Formulation, analysis and validation of takagi-sugeno fuzzy modeling for robotic manipulators. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 4(10):1131–1136, 2010.
- T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control. *IEEE Trans Syst Man Cybern*, 15:116–132, 1985.
- G. O. Torres, F.-R. Lopez-Estrada, J. R. Reyes, C. Garcia-Beltran, and D. Theilliol. An actuator fault detection and isolation method design for planar vertical take-off and landing unmanned aerial vehicle modelled as a qlpv system. In *4th IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Sciences, ICONS 2016*, 2016.
- M. Twin Rotor. System control experiments 33-949s, feedback instruments ltd. *East Sussex, UK*, 2006.
- C. Verde, S. Gentil, and R. Morales-Menéndez. *Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos*. Trillas, 2013.
- L. Xiaodong and Z. Qingling. New approaches controller designs based on fuzzy observers for ts fuzzy systems via lmi. *Automatica*, 39(9):1571–1582, 2003.