



SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO EN CELAYA

POSGRADO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

**“Análisis de un sistema de medición con características
multivariantes”**

TESIS

Que presenta:

Ing. Giovanni Santiago Jiménez Zárraga

Para obtener el grado de

MAESTRÍA EN

INGENIERÍA INDUSTRIAL

Director de tesis: M.C. Manuel Darío Hernández Ripalda

Codirector de tesis: Dr. Armando Javier Ríos Lira

Celaya, Guanajuato

Septiembre, 2019

Índice

1	Resumen	VI
2	Abstract	VII
3	Introducción	1
3.1	Descripción del problema	1
3.2	Objetivos	2
3.2.1	Objetivo general	2
3.2.2	Objetivos específicos	2
3.3	Hipótesis	3
3.4	Justificación	3
4	Marco teórico	4
4.1	Sistemas de medición.....	4
4.1.1	Calidad de los datos de medición	4
4.1.2	Exactitud y precisión	5
4.1.3	Relación precisión a tolerancia.....	6
4.1.4	Estudio Gage R & R	7
4.1.5	Relación señal-a-ruido	7
4.1.6	Matriz de varianza-covarianza.....	8
4.1.7	Eigen valores	8
4.2	Variación del sistema de medición	9
4.2.1	Sesgo.....	9
4.2.2	Estabilidad	9
4.2.3	Linealidad	10
4.2.4	Repetibilidad.....	10
4.2.5	Reproducibilidad	10
4.3	Distribuciones multivariantes	11
4.3.1	La distribución normal multivariada	11

4.4	Análisis factorial	¡Error! Marcador no definido.
4.4.1	Objetivo	¡Error! Marcador no definido.
4.5	Análisis de la varianza (ANOVA)	11
4.6	Análisis de varianza multivariable (MANOVA)	14
4.6.1	Criterios de sistemas de medición multivariantes para MANOVA	16
4.7	Análisis de componentes principales	18
4.8	Análisis de componentes principales aumentado	19
4.9	Estado del arte.....	21
5	Método	26
5.1	Etapa 1 Plantear el problema a investigar.....	26
5.2	Etapa 2 Elaborar el instrumento de medición	28
5.3	Etapa 3 Aplicación del instrumento de medición	29
5.3.1	Cálculos para ANOVA.....	29
5.3.2	Cálculos para MANOVA	30
5.3.3	Cálculos para PCA	31
5.3.4	Cálculos para WPCA.....	34
5.4	Etapa 4 Análisis de resultados	¡Error! Marcador no definido.
5.5	Etapa 5 Divulgación de resultados.....	36
6	Conclusiones	38
	Referencias	40

Índice de tablas

Tabla 2-1 Criterios de sistemas de medición multivariantes para MANOVA. Adaptado de (Majeske, 2008)	17
Tabla 2-2 Estado del arte. Fuente: elaboración propia	21
Tabla 3-1 Datos para estudio de gage. (Majeske, 2008)	27
Tabla 3-2 Índices de aceptación para en estudios de gage. (AIAG, 2010)	28
Tabla 3-3 Componentes de variación e índices de aceptación individuales para método ANOVA	29
Tabla 3-4 Matriz de varianza-covarianza para la parte (Σ_P)	30
Tabla 3-5 Matriz de varianza-covarianza para el error de gage (Σ_G)	30
Tabla 3-6 Matriz de varianza-covarianza para las mediciones (Σ_M)	31
Tabla 3-7 Eigen valores para las matrices de varianza-covarianza (Σ)	31
Tabla 3-8 Componentes principales generados para el estudio gage	32
Tabla 3-9 Datos para las nuevas variables	32
Tabla 3-10 Componentes de variación e índices de aceptación para cada componente principal	33
Tabla 3-11 Matriz estandarizada para WPCA	34
Tabla 3-12 Valores y límites para el WPC	34
Tabla 3-13 Datos para la nueva variable	35
Tabla 3-14 Componentes de variación e índices de aceptación para cada componente principal	36
Tabla 3-15 Resultados de los índices multivariados para los distintos métodos empleados comparados contra los índices de aceptación de la tabla 2.1; (x) señala criterio no aprobado	38

Índice de figuras

Figura 2-1 Exactitud y precisión. Fuente: (Medida, 2018).	6
Figura 2-2 Desarrollo del análisis factorial. Adaptado de Análisis factorial. (Fernandez, 2011)	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2-3 Diagrama de flujo para llevar a cabo el método WPCA. Adaptado de (Peruchi R. B., 2013).	21
Figura 3-1 Desarrollo del método. Fuente propia	26

Resumen

En todo proceso de producción las decisiones críticas sobre la calidad del producto dependen de la capacidad de los sistemas de medición, al evaluar un sistema de medición se determina si este es capaz de usarse en la característica de calidad a monitorear. Un estudio de repetibilidad y reproducibilidad es comúnmente utilizado para analizar los sistemas de medición, normalmente se utiliza con una sola característica de calidad, pero en algunos procesos es necesario considerar varias características de calidad simultáneamente.

Esta investigación presenta el análisis de un estudio de repetibilidad y reproducibilidad multivariante utilizando cuatro métodos para medir la capacidad de los sistemas de medición los cuales son el análisis de la varianza (ANOVA), análisis de la varianza multivariable (MANOVA), análisis de componentes principales (PCA) y análisis de componentes principales aumentado (WPCA). Los métodos mencionados se evalúan en base a tres índices de aceptación para sistemas de medición que son: el porcentaje de repetibilidad y reproducibilidad multivariado ($\% R\&R_M$), relación señal a ruido multivariado (SNR_M) y relación precisión a tolerancia multivariado (PTR_M). Después del análisis se determina que el método MANOVA es el mejor para aprobar un sistema de medición con características multivariantes.

Abstract

In any production process critical decisions about the quality of the product depend on the capacity of the measurement systems. When evaluating a measurement system it is determined if it is capable of being used in the quality part to be monitored. A repeatability and reproducibility study is commonly used to analyze measurement systems. Normally it is used with only one quality characteristic but in some processes several quality characteristics are analyzed.

This research presents the analysis of a multivariate reproducibility and reproducibility study using four methods to measure the capacity of the measurement systems which are the variance analysis (ANOVA), multivariate variance analysis (MANOVA), principal component analysis (PCA) and weighted principal component analysis (WPCA). The mentioned methods are evaluated based on three acceptance rates for measurement systems that are the percentage of multivariate repeatability and reproducibility (% R&R_M), multivariate signal-to-noise ratio (SNR_M) and precision-to-multivariate tolerance ratio (PTR_M). After the analysis, it is determined that the MANOVA method is the best method to approve a measurement system with multivariate characteristics.

1 Introducción

1.1 Descripción del problema

A partir del siglo XX varias técnicas para el control estadístico del proceso han sido desarrolladas en la industria, tales como gráficos de control, estudios de capacidad de proceso, entre otros. Las empresas de manufactura utilizan estos métodos para determinar si el proceso o producto está calificado y cuenta con la calidad deseada. Muchos fabricantes hoy en día se basan en la capacidad de proceso para evaluar la capacidad del proveedor de entregar productos de calidad. (Wu, 2009).

Para hacer inferencias sobre productos y procesos de calidad, los fabricantes utilizan algunos métodos cuantitativos, dichos métodos incorporan datos en el proceso para toma de decisiones. Antes de obtener datos, el fabricante debe garantizar la validación del dispositivo de medición. (Majeske, 2008). La variación en el proceso de medición se debe a dos fuentes principales: el proceso de manufactura y el sistema de medición en la manufactura, un sistema de medición es utilizado para realizar una medición exacta de alguna parte. (Wu, 2009).

Para identificar componentes de variación en la precisión y evaluación de instrumentos de medición, los investigadores proponen realizar un análisis del sistema de medición (MSA). Los objetivos del MSA son: identificar las causas de variación en el sistema de medición, determinar la variabilidad observada causada por el instrumento de medición y determinar la capacidad del instrumento de medición. (Burdick, 2003).

El MSA es un conjunto de técnicas estadísticas para cuantificar la incertidumbre de los sistemas de medición que sirven de apoyo para las decisiones críticas del proceso y la calidad del producto. (Scagliarini, 2013). El propósito del MSA es separar la variación entre los dispositivos que se miden del error en el sistema de medición. Aquí, el error del sistema de medición puede ser la combinación del sesgo del medidor, la repetibilidad, la reproducibilidad, la estabilidad y la linealidad. (Wang & Yang, 2007).

Un estudio de repetibilidad y reproducibilidad (gage r&r) es comúnmente utilizado para evaluar la variación en un sistema de medición, la reproducibilidad es variación que existe cuando varios operadores miden la misma pieza con el mismo instrumento de medición, mientras que la repetibilidad es la variación que existe cuando un solo operador mide la misma pieza varias veces. (Wang, 2013).

Dos métodos comúnmente utilizados en el análisis de medición son: (1) el análisis de varianza (ANOVA), enfoque seguido por la estimación apropiada de los componentes de la variación, (2) un gráfico de medias y rangos ($\bar{X} - R$) que estima las desviaciones estándar de los componentes de la variabilidad del indicador. (Peruchi R. B., 2013). Estos métodos son comúnmente aplicados a casos univariados. Sin embargo, se suele utilizar más de una característica a discriminar entre diferentes unidades. (Burdick, 2003).

Wang y Li utilizaron el método de remuestreo para obtener los intervalos de confianza para la variabilidad del instrumento de medición dado que el gráfico de control $\bar{X} - R$ se utiliza para obtener estimaciones puntuales. (Wang & Li, 2003)

La exactitud del intervalo de confianza para el diámetro circular con tolerancias circulares usando el método de remuestreo fue evaluado por (Wang & Chern, 2012). Estos intervalos de confianza fueron utilizados como criterios de comparación para evaluar el rendimiento de métodos de estudio de gage r & r multivariantes. MANOVA y el análisis de componentes principales PCA son los métodos multivariados más frecuentemente utilizados en sistemas complejos. (Wang, 2013).

El método de componentes principales aumentado WPCA, para el análisis de estudio de gage r & r multivariado presentado por (Peruchi R. B., 2013) es una alternativa al MANOVA y PCA, siendo una extensión de este último.

En esta tesis se realiza un estudio de gage r & r con características multivariantes mediante los métodos descritos, ANOVA, MANOVA, PCA y WPCA utilizando índices de aceptación de sistemas de medición multivariado, los cuales son: $\%R\&R_M$, SNR_M y PTR_M . Se muestra un ejemplo para comparar los cuatro métodos bajo estos índices y que sirva como referencia para estudios futuros.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Analizar un sistema de medición con características multivariantes para seleccionar el método más apropiado según la situación enfrentada.

1.2.2 Objetivos específicos

- a) Investigar las distintas características multivariantes en sistemas de medición.
- b) Estudiar métodos de análisis de los MSA multivariantes.

- c) Desarrollar un método de evaluación de los MSA.
- d) Validar la precisión del método obtenido.

1.3 Hipótesis

Si se genera un método de análisis para los distintos MSA, entonces se podrá elegir el método más preciso de acuerdo a la situación enfrentada.

1.4 Justificación

La presente investigación se enfocará en estudiar las distintas alternativas del análisis de los sistemas de medición con características multivariantes, debido a que existen varias técnicas de medición tales como el ANOVA, MANOVA, análisis factorial, análisis de componentes principales, análisis de correlación canónica, entre otros., pero no se sabe que técnica es la adecuada para evaluar un sistema de medición con varias características de calidad.

Así, el presente trabajo permitirá desarrollar un método para el análisis de los sistemas de medición con características multivariantes mediante la comparación de los métodos en base a criterios de aceptación para sistemas de medición para poder definir el método apropiado de acuerdo a la situación enfrentada.

2 Marco teórico

2.1 Sistemas de medición

Como lo menciona el AIAG (2010), se denomina sistema a la combinación de dos o más elementos, subconjuntos y partes necesarias para realizar una o varias funciones. En los sistemas de medida, esta función es la asignación objetiva y empírica de un número de propiedades o cualidad de un objeto o evento, de tal forma que la describa. Es decir, el resultado de la medida debe ser: independiente del observador (objetiva), basada en la experimentación (empírica), y de tal forma que exista una correspondencia entre las relaciones numéricas y las relaciones entre las propiedades descritas.

Los objetivos de la medida pueden ser: la vigilancia o seguimiento de procesos, como es el caso de la medida de la temperatura ambiente, de los contadores de gas y de agua, de la monitorización clínica, etc.; el control de un proceso, como en el caso de un termostato o el control de nivel de un depósito; y también puede ser una necesidad de la ingeniería experimental, como puede ser el estudio de la distribución de temperatura en el interior de una pieza irregular, o las fuerzas sobre un conductor simulado de un vehículo cuando este choca contra un objeto.

2.1.1 Calidad de los datos de medición

AIAG (2010), menciona que la calidad de los datos de medición está definida por las propiedades estadísticas de mediciones múltiples obtenidas de un sistema de medición que opera bajo condiciones estables. Por ejemplo, supongamos que un sistema de medición, operando bajo condiciones estables, se usa para obtener varias medidas de una cierta característica. Si las medidas están todas "cerca" del valor maestro para la característica, entonces la calidad de los datos se dice que es "alta".

Del mismo modo, si algunas o todas las mediciones están "muy lejos" del valor maestro, entonces la calidad de los datos se dice que es "baja". Las propiedades estadísticas más comúnmente utilizadas para caracterizar la calidad de los datos son el sesgo y la varianza del sistema de medición. La propiedad llamado sesgo se refiere a la ubicación de los datos relativos a una referencia (maestro) valor, y la propiedad llamada varianza se refiere a la difusión de los datos.

Gran parte de la variación en un conjunto de mediciones puede deberse a la interacción entre el sistema de medición y su entorno. Por ejemplo, un sistema de medición utilizado para medir el volumen de líquido en un tanque puede ser sensible a la temperatura ambiente del entorno en el que se utiliza. En ese caso, la variación en los datos puede deberse a cambios en el volumen o a cambios en la temperatura ambiente. Eso hace que la interpretación de los datos más difícil y el sistema de medición, por lo tanto, menos deseable.

AIAG (2010), menciona que, si la interacción genera demasiada variación, entonces la calidad de los datos puede ser tan bajo que los datos no son útiles. Por ejemplo, una medida sistema con una gran cantidad de variación puede no ser apropiado para su uso en analizar un proceso de fabricación porque el sistema de medición la variación puede enmascarar la variación en el proceso de fabricación.

Mucho del trabajo de gestión de un sistema de medición está dirigido al monitoreo y control de la variación. Entre otras cosas, esto significa que el énfasis se pondrá en aprender cómo el sistema de medición interactúa con su entorno para que solo se generen datos de calidad aceptable.

2.1.2 Exactitud y precisión

El Vocabulario Internacional de Metrología VIM (2008), define la exactitud de medida como la proximidad existente entre un valor medido y un valor verdadero de un mensurando. Así pues, una medición es más exacta cuanto más pequeño es el error de medida. Se suele decir también que una medida es más exacta cuando ofrece una incertidumbre de medida más pequeña, aunque no siempre es así como se ha mencionado anteriormente.

El VIM, define el concepto precisión de medida como la proximidad existente entre las indicaciones o los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto, o de objetos similares, bajo condiciones específicas.

Estas condiciones se denominan principalmente condiciones de repetibilidad, o de reproducibilidad, por tanto, frecuentemente, el término precisión denota simplemente repetibilidad, es decir, está asociado a la dispersión de las mediciones reiteradas, la cual es habitual expresarla numéricamente mediante medidas de dispersión tales como la desviación típica, la varianza o el coeficiente de variación bajo las condiciones especificadas.

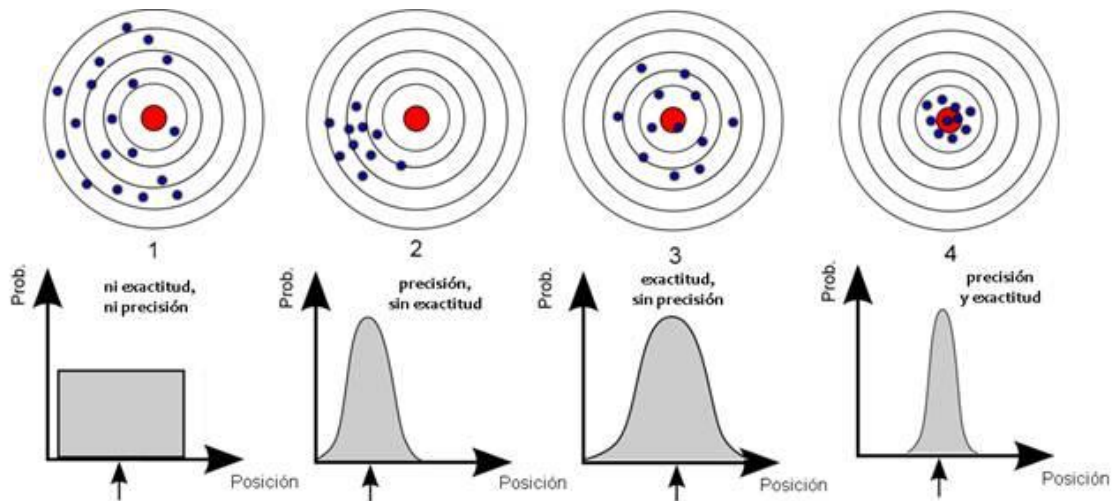


Figura 2-1 Exactitud y precisión. Fuente: (Medida, 2018).

2.1.3 Relación precisión a tolerancia

AIAG (2010), menciona que la relación precisión a tolerancia es una medida utilizada para evaluar un sistema de medición ya que es la relación entre la variación de medición como una dispersión de 5.15 desviaciones estándar del instrumento de medición (σ_G) y la banda de tolerancia. El valor mínimo que acepta el cálculo es 0.01

El valor máximo que acepta el cálculo está limitado por la variación observada. Para explicar esto, la variación observada comprende 2 fuentes de variación, la variación subyacente (valor verdadero) y la variación de medición. Estas variaciones se "agregan" juntas para crear la variación observada del proceso.

Por lo tanto, la variación de la medición no puede ser mayor que la variación del proceso observado (de lo contrario, el proceso subyacente debería tener una variación negativa, lo cual es imposible). Esta es la razón por la cual, cuando se cambia el valor de capacidad de proceso observado, la relación precisión a la tolerancia se puede ajustar para compensar. La fórmula general es como sigue:

$$PTR = \frac{K\sigma_G}{LSE-LIE} \quad (1)$$

Donde:

σ_G = desviación estandar del instrumento de medición

K = constante para el estudio de variación con la tolerancia (5.15, 6)

LSE = límite superior de especificación

LIE= límite inferior de especificación

2.1.4 Estudio Gage R & R

Minitab Inc. (2017), menciona que un método de análisis del sistema de medición (MSA) que evalúa la precisión de su sistema de medición y estima la repetibilidad y reproducibilidad del sistema de medición combinado es un estudio de R & R de Gage que ayuda a responder si la variabilidad del sistema de medición es pequeña comparada con la variabilidad del proceso, cuánta variabilidad en el sistema de medición es causada por las diferencias entre operadores y si su sistema de medición es capaz de discriminar entre diferentes partes y está dado por:

$$\% \text{ R\&R} = \left(\frac{\sigma_G}{\sigma_M} \right) * 100\% \quad (2)$$

Donde:

σ_G = desviación estándar del instrumento de medición

σ_M = desviación estándar de la medición

Aunque la cantidad de inspectores, partes y pruebas cambiará para su aplicación particular, se sigue un procedimiento general:

- Recoger una muestra de 15 piezas que representan todo el rango de tu proceso.
- Elija aleatoriamente 3 inspectores de los operadores habituales de este proceso (deben estar capacitados y familiarizados con el proceso porque está tratando de estimar el proceso real, no el mejor ni el peor de los casos).
- Lo mejor es aleatorizar el orden de las mediciones, pero a veces esto no siempre es posible. Una alternativa podría ser aleatorizar el orden de los operadores y luego hacer que cada uno mida los 15 tornillos en orden aleatorio. Registre los datos en una hoja de trabajo de Minitab.
- Repite el paso 3 para la segunda prueba.

2.1.5 Relación señal-a-ruido

AIAG (2010), define a la relación señal-a-ruido como el número de distintas categorías que pueden ser realmente distinguidas por el sistema de medición. Un valor de 5 o mayor es recomendado y un valor de menos de 2 indica que el sistema de medición no está monitoreando el proceso y está dado por la fórmula:

$$\text{SNR} = \left(\frac{\sigma_P}{\sigma_G}\right) * \sqrt{2} \quad (3)$$

Donde:

σ^2_P = varianza de la parte

σ^2_M = varianza del sistema de medición

2.1.6 Matriz de varianza-covarianza

Minitab Inc. (2017), menciona que una matriz de varianzas-covarianzas es una matriz cuadrada que contiene las varianzas y covarianzas asociadas con diferentes variables. Los elementos de la diagonal de la matriz contienen las varianzas de las variables, mientras que los elementos que se encuentran fuera de la diagonal contienen las covarianzas entre todos los pares posibles de variables.

Muchas aplicaciones estadísticas calculan la matriz de varianzas-covarianzas para los estimadores de los parámetros en un modelo estadístico. Suele utilizarse para calcular los errores estándar de los estimadores o las funciones de los estimadores.

$$\hat{\Sigma}_P = \begin{bmatrix} \sigma_{P1}^2 & \sigma_{P12}^2 & \cdots & \sigma_{P1k}^2 \\ \sigma_{P12}^2 & \sigma_{P2}^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Pk1}^2 & \cdots & \cdots & \sigma_{Pk}^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.1.7 Eigen valores

Burgos (1980), menciona que los vectores propios, auto vectores o eigen vectores de un operador lineal son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre valor propio, auto valor, valor característico o eigen valor. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, auto espacio, eigen espacio o sub espacio fundamental asociado al valor propio λ es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

Se calculan mediante la fórmula:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (5)$$

Donde:

A = matriz cuadrada

I = matriz identidad

det = determinante

λ = el valor que satisfaga la igualdad de la formula

2.2 Variación del sistema de medición

Al igual que cualquier otro proceso, un sistema de medición está sujeto a la variación de causa común y especial. Para controlar la variación del sistema de medición, primero debe identificar las fuentes de la variación, luego debe eliminar o reducir las diversas causas. Toda variación asociada con un proceso de medición. Las posibles fuentes de variación incluyen instrumentos de medición, estándares, procedimientos, software, componentes ambientales, entre otros. (Minitab Inc., 2017).

2.2.1 Sesgo

AIAG (2010), define que el sesgo es la diferencia entre el valor verdadero (valor de referencia) y el promedio observado de mediciones en la misma característica en el mismo parte. El sesgo es la medida del error sistemático del sistema de medición, es decir la contribución al error total compuesto por los efectos combinados de todas las fuentes de variación, conocidas o desconocidas, cuyas contribuciones al error total tienden a compensar de manera consistente y predecible todos los resultados de aplicaciones repetidas del mismo proceso de medición en el momento de las mediciones.

El sesgo a menudo se denomina "precisión". Porque la "precisión" tiene varios significados en la literatura, su uso como alternativa para "sesgo" no se recomienda y el procedimiento de medición empleado en el proceso de calibración debe ser lo más idéntico posible a la operación normal del proceso de medición.

2.2.2 Estabilidad

Minitab Inc. (2017), define que la estabilidad es el cambio en el sesgo a lo largo del tiempo. La estabilidad de la medición representa la variación total en las mediciones obtenidas en la misma parte medida a lo largo del tiempo, también conocida como deriva. Es importante evaluar la estabilidad de forma continua. Si bien las calibraciones y los estudios de patrones proporcionan cierta información sobre los cambios en el

sistema de medición, ninguno proporciona información sobre lo que está sucediendo con el proceso de medición a lo largo del tiempo.

La estabilidad de un proceso de medición se puede monitorear usando una tabla de control midiendo una parte maestra o de control en el mismo sistema a lo largo del tiempo. A medida que se toman medidas, los puntos dentro de los límites indican que el proceso no ha cambiado, mientras que un punto fuera de los límites indica que algo ha cambiado. El conocimiento del equipo y las condiciones de medición ayudan a identificar causas especiales cuando el sistema es inestable.

2.2.3 Linealidad

AIAG (2010), define a la linealidad como la diferencia de sesgo a lo largo de la operación esperada de medición y se puede considerar como cambio de sesgo con respecto al tamaño.

2.2.4 Repetibilidad

Como lo menciona AIAG (2010), la repetibilidad es la variación en las mediciones obtenidas con un instrumento de medida cuando es usado varias veces por un evaluador mientras está midiendo la característica idéntica en la misma parte. Esta es la inherente variación o capacidad del equipo en sí. La repetibilidad es comúnmente denominada variación del equipo, aunque esto es engañoso. De hecho, la repetibilidad es la variación de la causa común de los sucesivos ensayos bajo condiciones definidas de medición.

El mejor término para la repetibilidad es una variación dentro del sistema cuando las condiciones de medición son fijas y definidas con la parte fija, instrumento, estándar, método, operador, medio ambiente y suposiciones. Además de la variación dentro del equipo, la repetibilidad incluirá todo dentro de la variación desde cualquier condición en el modelo de error

2.2.5 Reproducibilidad

AIAG (2010), menciona que la reproducibilidad se conoce tradicionalmente como la variabilidad "entre evaluadores" y se define generalmente como la variación en el promedio de las mediciones realizadas por diferentes evaluadores utilizando la misma medición instrumento cuando se mide la característica idéntica en la misma parte.

Esto es a menudo cierto para instrumentos manuales influenciados por la habilidad del operador. Sin embargo, no es cierto para procesos de medición (es decir, automatizados

sistemas) donde el operador no es una fuente importante de variación. Para esto razón, reproducibilidad se conoce como la variación promedio entre sistemas o entre condiciones de medición.

2.3 Distribuciones multivariantes

2.3.1 La distribución normal multivariada

Johnson (2014), dice que una generalización de la densidad normal familiar en forma de campana para varias dimensiones juega un papel fundamental en el análisis multivariado. De hecho, la mayoría de las técnicas encontradas en la literatura se basan en la suposición de que los datos se generaron a partir de una distribución normal multivariada. Si bien los datos reales nunca son exactamente multivariantes, la densidad normal suele ser una aproximación útil a la distribución "verdadera" de la población.

Una ventaja de la distribución normal multivariable proviene del hecho de que es matemáticamente tratable y se pueden obtener resultados "agradables". Este no suele ser el caso para otras distribuciones generadoras de datos. Por supuesto, el atractivo matemático puede ser de poca utilidad para el profesional.

Resulta, sin embargo, que las distribuciones normales son útiles en la práctica por dos razones: primero, la distribución normal sirve como modelo de población de buena fe en algunos casos; segundo, las distribuciones muestrales de muchos estadísticos multivariantes son aproximadamente normales, independientemente de la forma de la población principal, debido a un efecto de límite central.

En resumen, muchos problemas del mundo real caen naturalmente dentro del marco de la teoría normal. La importancia de la distribución normal descansa en su doble función como modelo de población para ciertos fenómenos naturales y distribución aproximada del muestreo para muchas estadísticas.

2.4 Análisis de la varianza (ANOVA)

El ANOVA es un conjunto de técnicas estadísticas de gran utilidad, es útil cuando hay más de dos grupos que necesitan ser comparados, cuando hay mediciones repetidas en más de dos ocasiones, cuando los sujetos pueden variar en una o más características que afectan el resultado y se necesita ajustar su efecto o cuando se desea analizar simultáneamente el efecto de dos o más tratamientos diferentes.

La forma más simple es el llamado ANOVA de una vía o factor, cuando existe una sola variable independiente para clasificar a los sujetos y dos o más niveles (que definen los grupos) de ella.

Las otras formas de ANOVA (de 2 o más factores o de medidas repetidas) son extensiones basadas en el mismo raciocinio. El lector debe tener una comprensión del raciocinio global y la manera de presentar los resultados del ANOVA para que este resulte inteligible. El uso de las formas más elaboradas requiere de la asistencia de un estadístico profesional. (Dagnino, 2014).

Mientras que Minitab Inc. (2017), define que el nombre "análisis de varianza" se basa en la manera en que el procedimiento usa variaciones para determinar si los medios son diferentes. El procedimiento funciona comparando la varianza entre los medios del grupo contra la varianza dentro de los grupos como un método para determinar si los grupos son todos partes de una población más grande o poblaciones separadas con características diferentes.

El ANOVA con factores aleatorios, se utiliza porque se toman las observaciones como muestras de poblaciones mayores, ANOVA de efectos aleatorios comprueba la hipótesis de que las varianzas de dos o más poblaciones son iguales y evalúa la importancia de uno o más factores al comparar la variabilidad de la variable de respuesta en los diferentes niveles de factores. La hipótesis nula establece que todas las varianzas de población (varianzas de nivel de factor) son iguales, mientras que la hipótesis alternativa establece que al menos una es diferente.

Para ejecutar un ANOVA, debe tener una variable de respuesta continua y al menos un factor de categoría con dos o más niveles. Los ANOVA requieren datos de poblaciones normalmente distribuidas con variaciones aproximadamente iguales entre niveles de factores.

Cuando se aplica un estudio de gage de un factor mediante un ANOVA de una vía, las varianzas estimadas están dadas por:

La varianza estimada de la parte

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{MS_P - MS_E}{or} \quad (6)$$

Donde:

MS_P = suma de cuadrados de la parte

MS_E = suma de cuadrados del error

o = número de operadores

r = número de replicas

La varianza estimada del instrumento de medición

$$\hat{\sigma}_G^2 = MS_E \quad (7)$$

La varianza estimada de la medición

$$\hat{\sigma}_M^2 = \sigma_P^2 + \sigma_G^2 \quad (8)$$

Cuando se aplica un estudio de gage de dos factores mediante un ANOVA de dos vías con efectos principales, las varianzas estimadas están dadas por:

La varianza estimada de la parte es:

$$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{MS_P - MS_E}{or} \quad (9)$$

La varianza estimada del operador es:

$$\hat{\sigma}_O^2 = \frac{MS_O - MS_E}{nr} \quad (10)$$

Donde:

n = número de partes

La varianza estimada del error es:

$$\hat{\sigma}_E^2 = MS_E \quad (11)$$

La varianza estimada del instrumento de medición

$$\hat{\sigma}_G^2 = \sigma_O^2 + \sigma_E^2 \quad (12)$$

La varianza estimada de la medición es:

$$\hat{\sigma}_M^2 = \sigma_P^2 + \sigma_G^2 \quad (13)$$

Cuando se aplica un estudio de gage de tres factores mediante un ANOVA de dos vías con interacción, las varianzas estimadas están dadas por:

La varianza estimada de la parte

$$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{MS_P - MS_{PO}}{or} \quad (14)$$

Donde:

MS_{OP} = suma de cuadrados del error de la interacción entre operador y la parte

La varianza estimada del operador es:

$$\hat{\sigma}_O^2 = \frac{MS_O - MS_{PO}}{nr} \quad (15)$$

La varianza estimada de la interacción:

$$\hat{\sigma}_{OP}^2 = \frac{MS_{PO} - MS_E}{r} \quad (16)$$

La varianza estimada del error es:

$$\hat{\sigma}_E^2 = MS_E \quad (17)$$

La varianza estimada del instrumento de medición es:

$$\hat{\sigma}_G^2 = \sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_E^2 \quad (18)$$

La varianza estimada de la medición es:

$$\hat{\sigma}_M^2 = \sigma_P^2 + \sigma_G^2 \quad (19)$$

2.5 Análisis de varianza multivariable (MANOVA)

De acuerdo al autor Stevens (2002), el análisis de varianza multivariable (MANOVA) es un procedimiento para comparar medias de muestra multivariantes. El procedimiento multivariable, se usa cuando hay dos o más variables dependientes y suele ir seguido de pruebas de significación que involucran variables dependientes individuales por separado. Ayuda a responder:

¿Los cambios en la (s) variable (s) independiente (s) tienen efectos significativos sobre las variables dependientes?, ¿Cuáles son las relaciones entre las variables dependientes?, ¿Cuáles son las relaciones entre las variables independientes?

Mientras que Minitab Inc., (2010) lo define como una prueba que analiza simultáneamente la relación entre varias variables de respuesta y un conjunto común de predictores. Al igual que ANOVA, MANOVA requiere variables de respuesta continua y predictores categóricos. MANOVA tiene varias ventajas importantes sobre la

ejecución de ANOVA múltiples, ya que estos tienen solo una variable de respuesta a la vez y tienen otras tres ventajas:

Aumento de potencia: puede aprovechar la estructura de covarianza de datos entre las variables de respuesta para probar simultáneamente la igualdad de medias. Si las variables de respuesta están correlacionadas, esta información adicional puede ayudar a detectar diferencias demasiado pequeñas para detectarlas mediante ANOVA individuales.

Detecta patrones de respuesta multivariados: los factores pueden influir en la relación entre las respuestas en lugar de afectar una sola respuesta. Los ANOVA no detectarán estos patrones multivariados como se ilustra a continuación.

Controla la tasa de error familiar: la probabilidad de rechazar incorrectamente la hipótesis nula aumenta con cada ANOVA sucesivo. Ejecutar un MANOVA para probar todas las variables de respuesta simultáneamente mantiene la tasa de error familiar igual a su nivel alfa.

Para llevar a cabo el método MANOVA en un estudio de $r \times r$ multivariante, debe verificarse que los datos sigan una distribución normal multivariada, se puede verificar la normalidad mediante la prueba estadística Mardia. Para poder aplicar MANOVA se deben extraer los eigen valores de la matriz de varianza-covarianza de las partes, la cual estará denotada por:

$$\hat{\Sigma}_P = \begin{bmatrix} \sigma_{P1}^2 & \sigma_{P12}^2 & \cdots & \sigma_{P1k}^2 \\ \sigma_{P12}^2 & \sigma_{P2}^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Pk1}^2 & \cdots & \cdots & \sigma_{Pk}^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Se obtendrá un eigen valor por cada característica a medir, dichos valores serán obtenidos mediante la ecuación (5).

Para obtener la matriz de la variación total quedará denotada por:

$$\hat{\Sigma}_T = \hat{\Sigma}_P + \hat{\Sigma}_G \quad (21)$$

Donde $\Sigma_P + \Sigma_G$ son las matrices de la parte y del instrumento de medición respectivamente, para calcular la matriz se aplicará la siguiente ecuación:

$$\hat{\Sigma}_G = \hat{\Sigma}_{repetibilidad} + \hat{\Sigma}_{reproducibilidad} \quad (22)$$

Donde ambas serán obtenidas mediante:

$$\hat{\Sigma}_{repetibilidad} = \hat{\Sigma}_E \quad (23)$$

$$\hat{\Sigma}_{reproducibilidad} = \hat{\Sigma}_O + \hat{\Sigma}_{PO} \quad (24)$$

Para obtener las matrices estimadas de la parte, operador, interacción parte-operador y error utilizando cuadrados medios se utilizan las siguientes fórmulas para cada matriz:

$$\hat{\Sigma}_P = \frac{MSP - MSPO}{or} \quad (25)$$

$$\hat{\Sigma}_O = \frac{MSO - MSPO}{pr} \quad (26)$$

$$\hat{\Sigma}_E = MSE \quad (27)$$

$$\hat{\Sigma}_M = \hat{\Sigma}_P + \hat{\Sigma}_E \quad (28)$$

Del mismo modo que el ANOVA, si la interacción no es significativa, los grados de libertad y la suma de cuadrados de la interacción se le agregaran al error. Para estimar los índices % R&R_M, PTR_M y SNR_M serán calculados mediante los criterios de aceptación de sistemas de medición para MANOVA propuestos por (Majeske, 2008), los cuales se muestran en la tabla 2.2.

2.5.1 Criterios de sistemas de medición multivariantes para MANOVA

Majeske (2008), definió los criterios de aceptación para sistemas de medición multivariantes en base a tres métricas de calidad que son la relación señal a ruido, % de repetibilidad y reproducibilidad y relación precisión a tolerancia.

Tabla 2-1 Criterios de sistemas de medición multivariantes para MANOVA. Adaptado de (Majeske, 2008)

Criterio	Tipo de medición, tolerancia y producto	Errores de instrumento de medición dependientes	Errores de instrumento de medición independientes
% R&R _M	Valores de medición son independientes	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sqrt{\lambda_{Gi}}}{\sigma_{Mi}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_{Gi}}{\sigma_{Mi}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$
	Valores de medición son dependientes	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sqrt{\lambda_{Gi}}}{\sqrt{\lambda_{Mi}}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_{Gi}}{\sqrt{\lambda_{Mi}}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$
PTR _M	La tolerancia es un hiper cubo	$\left[\frac{\left(\prod_{i=1}^k \sqrt{\chi_{\alpha,k}^2 \lambda_{Gi}} \right) (\pi^{k/2})}{\left(\prod_{i=1}^k TOL_i \right) (\Gamma) \left(1 + \frac{k}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{k}}$	$\left[\frac{\left(\prod_{i=1}^k \sqrt{\chi_{\alpha,k}^2 \sigma_{Gi}} \right) (\pi^{k/2})}{\left(\prod_{i=1}^k TOL_i \right) (\Gamma) \left(1 + \frac{k}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{k}}$
	La tolerancia es un hiper elipsoide	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{2 \sqrt{\chi_{\alpha,k}^2 \lambda_{Gi}}}{TOL_i} \right]^{\frac{1}{k}}$	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{2 \sqrt{\chi_{\alpha,k}^2 \sigma_{Gi}}}{TOL_i} \right]^{\frac{1}{k}}$
SNR _M	Las características del producto son independientes	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_{Pi}}{\sqrt{\lambda_{Gi}}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sigma_{Pi}}{\sigma_{Gi}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$
	Las características del producto son dependientes	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sqrt{\lambda_{Pi}}}{\sqrt{\lambda_{Gi}}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$	$\prod_{i=1}^k \left[\frac{\sqrt{\lambda_{Pi}}}{\sigma_{Gi}} \right]^{\frac{1}{k}} \times 100$

Donde:

\prod = operador producto

λ_p = eigen valor de la parte

λ_G = eigen valor del instrumento de medición

λ_T = eigen valor de la medición

Tol = tolerancia para la parte medida

σ_p = desviación de la parte

σ_G = desviación estándar del instrumento de medición

σ_T = desviación estándar de la medición

$\chi^2_{0.05}$ = valor de ji cuadrada de alfa 0.05 con m grados de libertad

m = número de puntos a medir

2.6 Análisis de componentes principales (PCA)

Hand (2014) menciona que es una técnica exploratoria, los componentes principales pueden ser muy útiles, al igual que otros métodos de búsqueda de proyección. La presunción que subyace a los componentes principales es que la varianza está asociada con el interés, que puede o no sostenerse. Sin embargo, siempre que se encuentre en un estado de exploración, si uno encuentra que los principales componentes principales no son particularmente interesantes o interpretables, entonces uno puede ir en una dirección diferente.

El objetivo del análisis de componentes principales es explicar la cantidad máxima de varianza con el menor número de componentes principales. El análisis de componentes principales se usa comúnmente en ciencias sociales, investigación de mercado y otras industrias que usan grandes conjuntos de datos.

Pero tenga cuidado de no pasar a la idea de que los componentes con baja varianza pueden ignorarse. Bien podría ser que sean los más importantes, más correlacionados con una variable de interés separada. El uso de componentes principales como primer paso en un proceso, donde uno toma los primeros componentes principales para usar en otro procedimiento, como el agrupamiento o la clasificación, puede funcionar o no. En particular, tiene poco sentido utilizar componentes principales para reducir las variables antes de usarlas en un proceso lineal, como la regresión, las correlaciones canónicas o la discriminación lineal de Fisher.

Incluso los componentes principales no son únicos, debe elegir si desea o no tener en cuenta las covariables o los factores categóricos antes de encontrar la matriz de covarianza de la muestra. También debe decidir cómo escalar las variables, dejarlas en sus unidades originales o escalar para que todas las variables tengan la misma varianza de muestra o escala de alguna otra manera. La escala afectará a los componentes principales, a diferencia de un análisis de factores o una regresión lineal.

Para llevar a cabo el método PCA se debe considerar X como un vector horizontal de tamaño 1 x j, donde j son las características de calidad (CTQs) de la matriz de datos de tamaño j x k, donde j son los CTQs a medir en alguna parte y k es el tamaño de la muestra de la parte medida, del mismo modo la matriz de varianza-covarianza es una matriz cuadrada de tamaño j x j donde se calculan los eigen valores (λ) y eigen vectores (u). Para aplicar PCA véase (Jackson, 1980). Los valores de las nuevas variables quedan denotados por:

$$PC_i = u_i^T * X \quad (29)$$

Donde i tomara valores desde 1 hasta los componentes principales calculados. A diferencia de ANOVA Y MANOVA donde los límites de especificación quedaban como fueran especificados, para cada nuevo PC los límites de especificación recalculados serán obtenidos mediante:

$$U^{-1} * LIE < PC_i < U^{-1} * LSE \quad (30)$$

Donde U es la matriz que contiene todos los eigen vectores, LIE y LSE son los vectores que contienen los límites inferiores y superiores de especificación para cada característica de calidad. Para conocer la proporción de contribución de cada PC mediante el uso de los eigen valores se obtendrá mediante la relación del valor del eigen valor asociado al PC, queda denotado por:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \quad (31)$$

Donde k será el número de eigen valores. Para determinar el número de PC apropiados se considera la suma de aquellos tengan un valor mayor al 80%, ya que se obtendrán k PC, pero solo los que den dicho porcentaje son los más importantes.

2.7 Análisis de componentes principales aumentado

El análisis de componentes principales aumentado es una extensión del análisis de componentes principales ya que parten de los componentes principales obtenidos de manera tradicional. Peruchi propuso el método debido a la necesidad de interpretar todos los componentes generados en el PCA (Peruchi R. B., 2013), ya que este solo

analiza los componentes principales que expliquen la mayor parte de la variación, pero de manera individual cada componente.

Cuando la correlación entre las respuestas no es alta, es necesario analizar más componentes principales ya que uno solo no puede explicar toda la información. De esta manera se obtiene el método de componentes principales aumentado WPCA a partir de los PC_i obtenidos con el PCA, los transforma para obtener un único componente principal que explique toda la variación del sistema. La figura 1 muestra el procedimiento para el WPCA.

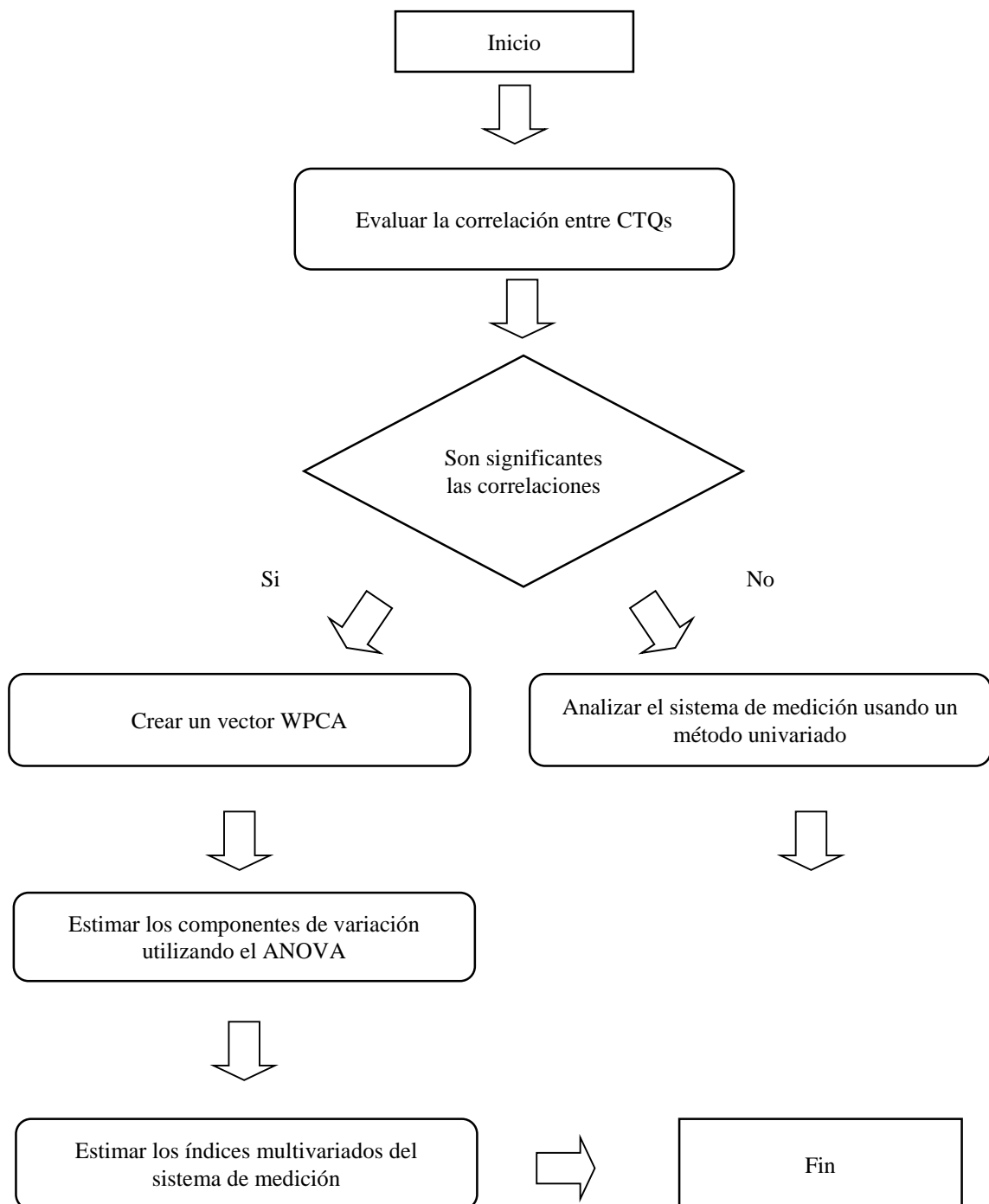


Figura 2-2 Diagrama de flujo para llevar a cabo el método WPCA. Adaptado de (Peruchi R. B., 2013).

Para obtener la correlación entre las características críticas de calidad a medir se utiliza:

$$Correlación_{CTQ_j, CTQ_k} = \frac{Covarianza_{CTQ_j, CTQ_k}}{\sqrt{Varianza_{CTQ_j} \cdot Varianza_{CTQ_k}}} \quad (32)$$

Donde i y j tomarán valores desde 1 hasta n características críticas de calidad, también se debe obtener la matriz estandarizada de CTQs (W) y el vector de eigen valores que serán denotados respectivamente por:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{CTQ_{11} - \overline{CTQ}_1}{\sqrt{S_{11}}} & \frac{CTQ_{21} - \overline{CTQ}_1}{\sqrt{S_{11}}} & \dots & \frac{CTQ_{j1} - \overline{CTQ}_1}{\sqrt{S_{11}}} \\ \frac{CTQ_{12} - \overline{CTQ}_2}{\sqrt{S_{22}}} & \frac{CTQ_{22} - \overline{CTQ}_2}{\sqrt{S_{22}}} & & \frac{CTQ_{j2} - \overline{CTQ}_2}{\sqrt{S_{22}}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{CTQ_{1k} - \overline{CTQ}_k}{\sqrt{S_{kk}}} & \frac{CTQ_{2k} - \overline{CTQ}_k}{\sqrt{S_{kk}}} & \dots & \frac{CTQ_{jk} - \overline{CTQ}_k}{\sqrt{S_{kk}}} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \quad (33)$$

Para obtener el componente principal aumentado primero se deben extraer los eigen vectores (Y) denotados por la ecuación (29), los eigen valores (Z) de la ecuación (17) y la matriz estandarizada de CTQs (W) expresada en la ecuación (36), dichos valores deben quedar denotados en forma matricial para poder realizar las operaciones, así el WPCA será calculado mediante:

$$WPC = W^T Y Z \quad (34)$$

Donde: WPC: componente principal aumentado, W^T matriz inversa estandarizada de CTQs, Y: eigen vectores, Z: eigen valores

2.8 Estado del arte

Tabla 2-2 Estado del arte. Fuente: elaboración propia.

Año	Revista/medio	Título	Autor	Resumen
(2016)	Tecnología Acta Scientiarum	Comparaciones de métodos GR & R multivariantes	R.S. Peruchi	En este artículo se comparó el rendimiento de GR & R multivariantes, estudios basados en PCA (análisis de componentes

		usando el intervalo de confianza bootstrap		principales) y Manova para estimar el índice de calibre multivariante, medios geométricos y aritméticos implementando estrategias de ponderación. Se usó un intervalo de confianza Bootstrap basado en BC (corregido por sesgo y acelerado) para determinar la adecuación del índice de calibre multivariable. Los análisis de resultados han demostrado que los enfoques ponderados proporcionan las mejores estimaciones del índice de calibre en estudios de GR & R multivariados.
2015	Sistemas Expertos con Aplicaciones	Determinando la asignación óptima de parámetros para el análisis del sistema de medición multivariante	Jeh-Nan Pan, Chung-I Li, Szu-Chen Ou	En este trabajo, una relación revisada de precisión a tolerancia (P / T) para MSA multivariante con calidad correlacionada características se propone la asignación óptima de varios parámetros como el número de características de calidad, tamaño de muestra de partes, número de operadores y/o mediciones repetidas no se han considerado en el estudio GRR multivariante. También se encontró que dos parámetros (número de partes p y a el número total de mediciones n) afecta significativamente la duración esperada del intervalo de confianza de $P = TR$. Puede servir como una útil guía para profesionales de la calidad cuando se realiza un análisis de sistema de medición multivariante en industrias.
2014	Ingeniería de calidad y confiabilidad internacional	Un enfoque de región modificada para Análisis de Capacidades del Sistema de Medición multivariado	Liangxing Shi, Qiumeng He, Jingyuan Liub, Zhen Hea	La investigación existente se ha extendido de casos univariados a multivariados. Dos enfoques, el multivariado el análisis de varianza (MANOVA) y los componentes principales ponderados (WPC), fueron defendidos en la literatura. En este documento, proponemos una región modificada basada en un método para calcular la relación de precisión a la tolerancia, el porcentaje de repetibilidad y reproducibilidad y la relación señal a ruido. El método propuesto demuestra ser eficaz en comparación con otros métodos.
2014	Ingeniería de Calidad y Confiabilidad	Un enfoque de región modificado para	L. Shi, Q. He,	En este documento, se propone una región modificada basada en método para calcular la relación

	Internacional	el análisis de capacidades del sistema de medición multivariado	J. Liu, Z. He.	de precisión a la tolerancia, el porcentaje de repetibilidad y reproducibilidad y la relación señal / ruido proporción. Este método también incorpora la estructura de varianza-covarianza de los errores de medición cuando se trata de contornos de tolerancias de densidad constante, variación total y variación del proceso. El rendimiento de la región modificada basada en El método se evalúa en base a un conjunto de datos de la literatura y un conjunto de simulaciones relevantes. El método propuesto demuestra ser eficaz en comparación con otros métodos
2013	19ª Conferencia Internacional de Ingeniería Industrial y Gestión de la Ingeniería Springer, Berlín, Heidelberg	Análisis del sistema de medición multivariante basado en el método de búsqueda de proyección.	Xiaofang Wu Liangxing Shi Zhen He	En este trabajo, la búsqueda de proyección se usa para analizar el sistema de medición multivariante. La mejor dirección de proyección se obtiene optimizando la dirección de proyección con Algoritmo Genético, se analiza la relación entre datos multivariados y su proyección. Luego, tres índices comunes de capacidad del sistema de medición se extienden al sistema de medición multivariable con la proyección de los datos en bruto para evaluar la capacidad del sistema de medición multivariante.
2013	19ª Conferencia internacional sobre confiabilidad y calidad en el diseño Honolulu, Hawaii, U.S.A.	Enfoque ponderado en la estimación de índices de evaluación para sistemas de medición con características correlacionadas	R.S. Peruchi, A.P. Paiva, P.P. Balestrassi, R. Sawhney, G. Rajpal, V. Marella.	La principal contribución de esta investigación es la propuesta de cuatro nuevos índices para el análisis multivariado de un sistema de medición. Para demostrar su eficacia, el estudio genera datos simulados con diferentes estructuras de correlación para sistemas de medición clasificados como aceptables, marginales e inaceptables. Los índices propuestos se comparan con índices univariados y multivariados en la literatura. Se observó que, en comparación con los otros índices, el enfoque ponderado más eficiente para evaluar un sistema de medición multivariante era el porcentaje de explicación de los eigen valores extraídos de la matriz del sistema de medición.
2013	Instituto de Ingeniería de la	Un nuevo método de R &	R.S. Peruchi, P.P. Balestrassi,	La principal contribución de esta investigación es la propuesta de

	Producción y Administración, Universidad Federal de Itajuba (UNIFEI), Itajuba' 37500.903, MG, Brasil	R multivariante para características correlacionadas	A.P. Paiva, J.R. Ferreira, M.S. Carmelosi	un método para convertir un análisis multivariante del sistema de medición, una herramienta que considera componentes principales ponderados (WPC). El estudio genera una simulación de datos eliminados de las estructuras de correlación, los sistemas de medición clasifican como método aceptable, marginal e inaceptable. El método propuesto se compara con el sistema de evaluación de variables múltiples y multivariadas.
2013	Departamento de ciencias estadísticas Universidad de Bologna, Italia	Multivariate process capability using principal component analysis in the presence of measurement errors.	Michelle Scagliarini	Este trabajo propone un enfoque que, usando los datos que están rutinariamente disponibles de la actividad habitual del instrumento, ofrece la posibilidad de evaluar la medición del sistema multivariante sin la necesidad de realizar un estudio de ancho de vía multivariado. Por lo tanto, el uso sinérgico del enfoque propuesto y el tradicional R & R multivariante los estudios pueden ser una estrategia útil para mejorar la calidad general de los sistemas de medición multivariante y es efectivo para reducir los costos del análisis de sistemas de medición multivariante realizado con cierta frecuencia.
2013	ASTM Internacional Diario de pruebas y evaluación	Una evaluación de la repetibilidad del indicador y Reproducibilidad con múltiples características	F. Wang.	Para determinar el método preferido para un análisis de GRR, el análisis de varianza multivariante (MANOVA) y el análisis de componentes principales (PCA) se aplican a datos tomados de dos casos. Tres medidas de rendimiento [precisión a la relación de tolerancia (PTRM), el porcentaje de repetibilidad y reproducibilidad (% RRM) y relación señal-a ruido (SNRM)] se utilizan para evaluar la adecuación del proceso de medición. Los resultados muestran que el método MANOVA es adecuado para un estudio GRR con múltiples características.
2008	Revista de calidad tecnológica	Criterios de aprobación para sistemas de medición multivariados	Karl D. Majeske	En la fabricación automotriz, los sistemas de medición toman datos para muchas características de calidad, aún los fabricantes evalúan cada respuesta de forma

				<p>independiente. Para respaldar el uso de estos datos como una respuesta multivariada, este documento desarrolla extensiones multivariadas de precisión de los criterios de aprobación de los medidores como son relación precisión a tolerancia, porcentaje de R & R, y relación señal / ruido. Este documento contiene un método MANOVA que usa cuadrados promedios esperados para estimar las matrices de varianza-covarianza para un factor, estudios de dos factores y de tres factores. El documento demuestra cómo adaptarse al modelo MANOVA y estimar los criterios multivariados usando datos del estudio de indicadores del panel del cuerpo del automóvil.</p>
--	--	--	--	---

3 Método

En esta tesis el método usado es un estudio de gage r & r con características multivariantes mediante los métodos descritos, ANOVA, MANOVA, PCA y WPCA utilizando índices de aceptación de sistemas de medición multivariado, los cuales son: $\%R\&R_M$, SNR_M y PTR_M . Se muestra un ejemplo para comparar los cuatro métodos bajo estos índices y que sirva como referencia para estudios futuros.

Se muestra a continuación un procedimiento general del método empleado.

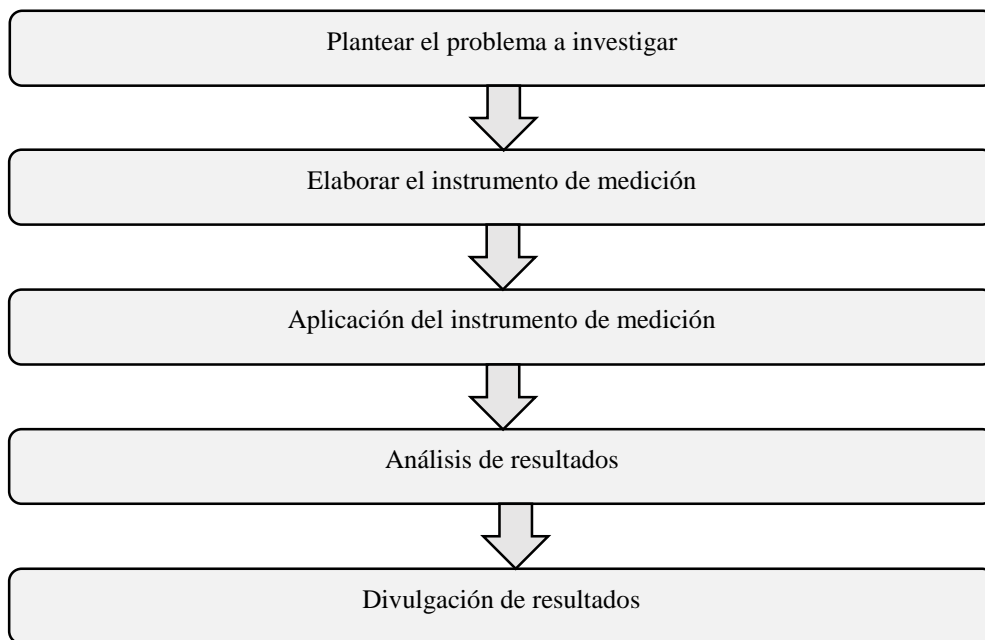


Figura 3-1 Desarrollo del método. Fuente propia

3.1 Etapa 1 Plantear el problema a investigar

En esta primera etapa se identificó el tema a investigar con el fin de estructurar un marco teórico que permita fundamentar la investigación planteada. Para eso, fue necesario recurrir a fuentes bibliográficas y digitales para indagar, consultar, recopilar, agrupar y organizar adecuadamente la información que se utilizará dentro del marco teórico.

En esta etapa también se consideraron algunas reflexiones, análisis y consideraciones obtenidas de la propia experiencia del investigador. Asimismo, se seleccionó una metodología de investigación que se consideró válida para aplicarla a diferentes investigaciones que poseen características similares a las que se quiere investigar.

Se realizó un estudio de gage multivariante partiendo de los datos utilizados por (Majeske, 2008), para lo cual hubo cuatro características de calidad en un panel automotriz donde se utilizaron 5 partes (p), 2 operadores (o) y 3 réplicas (r). Los límites para cada característica de calidad son iguales y van de -0.5 a 0.5. Los datos para el estudio gage se muestran en la tabla 3-1.

Tabla 3-1 Datos para estudio de gage. (Majeske, 2008).

Parte	Operador	X1	X2	X3	X4
1	1	-0.86	-0.40	0.44	-1.29
1	1	-0.81	-0.30	0.25	-1.10
1	1	-0.78	-0.32	0.24	-1.09
1	2	-0.78	-0.23	0.16	-1.01
1	2	-0.77	-0.33	0.21	-1.14
1	2	-0.81	-0.33	0.21	-1.16
2	1	-0.92	-0.73	-0.17	-0.01
2	1	-0.96	-0.75	-0.22	-0.03
2	1	-0.95	-0.74	-0.19	-0.07
2	2	-0.99	-0.80	-0.17	-0.08
2	2	-0.95	-0.82	-0.17	-0.10
2	2	-0.96	-0.77	-0.18	-0.08
3	1	-0.70	0.35	-0.83	1.38
3	1	-0.79	0.14	-0.69	1.19
3	1	-0.73	0.23	-0.76	1.30
3	2	-0.76	0.09	-0.63	1.09
3	2	-0.78	0.01	-0.59	1.03
3	2	-0.79	-0.03	-0.58	0.99
4	1	-0.66	-0.98	-0.04	-1.12
4	1	-0.63	-1.02	0.03	-1.19

4	1	-0.62	-1.02	0.02	-1.21
4	2	-0.69	-1.07	0.09	-1.24
4	2	-0.64	-1.07	0.10	-1.26
4	2	-0.71	-1.13	0.10	-1.32
5	1	-0.99	-1.01	0.49	-0.82
5	1	-0.96	-1.00	0.52	-0.86
5	1	-0.98	-0.97	0.52	-0.81
5	2	-0.96	-1.01	0.55	-0.81
5	2	-0.01	-1.01	0.52	-0.79
5	2	-0.97	-1.04	0.55	-0.85

3.2 Etapa 2 Elaborar el instrumento de medición

Una vez revisada, analizada e interpretada la información que se seleccionó para la investigación, se comenzó a elaborar el instrumento de medición que para este tema de investigación será la comparación de sistemas de medición multivariantes.

Para la elaboración de dicho método se tuvo que revisar varias investigaciones relacionadas con los sistemas de medición multivariantes, las cuales en mayoría eran artículos recientes y revistas de divulgación científica, las cuales conjuntamente permitieron el desarrollo del método de medición el cual es la comparación de métodos de medición por medio de la precisión.

Para evaluar los métodos se optó por definir métricas de aceptación de sistemas de medición multivariantes de referencia las cuales son la relación señal a ruido, porcentaje de repetibilidad y reproducibilidad y la relación precisión a tolerancia, han sido usados por autores como (Majeske, 2008), (Peruchi R. B., 2016), (Wang, 2013) en la práctica y se muestran en la tabla 3-2.

Tabla 3-2 Índices de aceptación para en estudios de gage. (AIAG, 2010).

Índice	Puntuación	Evaluación
% R&R	%R&R<0.1	El instrumento de medición es capaz
	0.1<%R&R<0.3	El instrumento de medición es capaz pero

		debe mejorar
	$\%R\&R>0.3$	El instrumento de medición no es capaz
P/T	$P/T<0.1$	El instrumento de medición es capaz
	$0.1<P/T<0.3$	El instrumento de medición es capaz pero debe mejorar
	$P/T>0.3$	El instrumento de medición no es capaz
SNR	$SNR\geq 5$	El instrumento de medición es capaz
	$SNR<5$	El instrumento de medición no es capaz

3.3 Etapa 3 Aplicación del instrumento de medición

Una vez obtenido el método de comparación mediante los índices de evaluación se procedió a la aplicación del mismo a los métodos de medición de estudio: ANOVA, MANOVA, análisis de componentes principales y análisis de componentes principales aumentado.

3.3.1 Cálculos para ANOVA

Se consideró el cálculo con ANOVA para propósitos de comparación dado que existen correlaciones entre algunas de las mediciones de las características. Al realizar el análisis la interacción entre operador y parte resultó insignificante para las cuatro características de calidad.

Se realizó un estudio de gage cruzado en cada característica de calidad y para estimar los componentes de variación individuales se utilizaron las ecuaciones (7), (8) y (9), para los índices de aceptación individuales del MSA se utilizaron las ecuaciones (1), (2) y (3), los resultados se muestran en la tabla 3-3.

Tabla 3-3 Componentes de variación e índices de aceptación individuales para método ANOVA.

	X1	X2	X3	X4
TOL	1	1	1	1
$\hat{\sigma}_G$	0.0306	0.0871	0.0799	0.1025
$\hat{\sigma}_P$	0.1346	0.5001	0.4546	0.9919
$\hat{\sigma}_M$	0.1380	0.5076	0.4616	0.9972

PTR	0.1578	0.4484	0.4115	0.5280
%R&R	0.2220	0.1715	0.1731	0.1028
SNR	6.2115	8.1220	8.0467	13.6809

Para obtener los índices de aceptación multivariado mediante el método ANOVA se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$\% R \& R_M = \left(\prod_{i=1}^k \% R \& R_i \right)^{1/k} \quad (33)$$

$$PTR_M = \left(\prod_{i=1}^k PTR_i \right)^{1/k} \quad (34)$$

$$SNR_M = \left(\prod_{i=1}^k SNR_i \right)^{1/k} \quad (35)$$

Los resultados para los índices multivariados para el método ANOVA se muestran en la tabla 3-15.

3.3.2 Cálculos para MANOVA

Para medir el MSA mediante el MANOVA se estimaron las matrices de varianza-covarianza de la parte, error de instrumento de medición y medición mediante las ecuaciones (25), (27) y (28), las cuales se muestran en las tablas 3-4, 3-5 y 3-6 respectivamente.

Tabla 3-4 Matriz de varianza-covarianza para la parte (Σ_P)

	X1	X2	X3	X4
X1	0.018102	0.015923	-0.021763	-0.007703
X2	0.015923	0.251289	-0.157152	0.354313
X3	-0.021763	-0.157152	0.208491	-0.392334
X4	-0.007703	0.354313	-0.392334	0.986013

Tabla 3-5 Matriz de varianza-covarianza para el error de instrumento de medición (Σ_G)

	X1	X2	X3	X4

X1	0.000940	0.001680	-0.001410	0.001890
X2	0.001680	0.006320	-0.004750	0.007020
X3	-0.001410	-0.004750	0.004860	-0.005810
X4	0.001890	0.007020	-0.005810	0.008520

Tabla 3-6 Matriz de varianza-covarianza para las mediciones (Σ_M)

	X1	X2	X3	X4
X1	0.001880	0.003360	-0.002820	0.003780
X2	0.003360	0.012640	-0.009500	0.014040
X3	-0.002820	-0.009500	0.009720	-0.011620
X4	0.003780	0.014040	-0.011620	0.017040

A partir de las matrices varianza-covarianza calculadas se obtuvieron los eigen valores para cada matriz utilizando la ecuación (5), los cuales se muestran en la tabla 3-7.

Tabla 3-7 Eigen valores para las matrices de varianza-covarianza (Σ)

Parte	0.004098	0.054379	0.111849	1.294289
Gage	0.000245	0.000501	0.000809	0.019078
Medición	0.004567	0.055567	0.113920	1.311191

Para estimar el % R&R_M se consideró valores de medición dependientes y errores de instrumento de medición dependientes, debido a que cada característica de calidad tiene límites de especificación, se tomó la tolerancia como un hiper cubo y se tomaron errores de instrumento de medición dependientes para PTR_M y del mismo modo para el SNR_M se consideró características de calidad dependientes y errores de instrumento de medición dependientes. Así, los índices multivariados para evaluar el MSA mediante el MANOVA se obtuvieron con las ecuaciones de la tabla 2-1 y los resultados se muestran en la tabla 3-15.

3.3.3 Cálculos para PCA

Para evaluar el MSA mediante el PCA se utilizó el software (Minitab Inc., 2018) para facilitar los cálculos, los eigen vectores obtenidos a partir de la matriz de varianza-covarianza en el software se muestran en la tabla 3-8.

Tabla 3-8 Componentes principales generados para el estudio gage

Variable	PC1	PC2	PC3	PC4
X1	0.008	0.204	0.440	0.874
X2	0.352	0.897	-0.255	-0.084
X3	-0.365	-0.051	-0.824	0.430
X4	0.862	-0.390	0.345	0.209
EIGENVALOR	1.0863	0.0943	0.0462	0.0039
VARIABILIDAD	0.883	0.077	0.038	0.003

Dado que los dos primeros componentes explican el 96% de variabilidad solo se tomaron en cuenta los dos ya que un valor arriba del 80% que contribuyan la suma de los PCi importantes se considera aceptable, posteriormente esos dos PCi se multiplicaron por los valores de medición originales para obtener los datos de las nuevas variables, los cuales se muestran en la tabla 3-9.

Tabla 3-9 Datos para las nuevas variables

Parte	Operador	PC1	PC2
1.00	1.00	-1.42026	-0.05358
1.00	1.00	-1.15153	-0.01809
1.00	1.00	-1.14606	-0.0333
1.00	2.00	-1.01622	0.02031
1.00	2.00	-1.18165	-0.0192
1.00	2.00	-1.19921	-0.01956
2.00	1.00	-0.21089	-0.82992
2.00	1.00	-0.21724	-0.84567
2.00	1.00	-0.25907	-0.82059
2.00	2.00	-0.29643	-0.87969
2.00	2.00	-0.32039	-0.88167
2.00	2.00	-0.28198	-0.84615
3.00	1.00	1.61011	-0.32472
3.00	1.00	1.32059	-0.46449
3.00	1.00	1.47312	-0.41085
3.00	2.00	1.19513	-0.46728
3.00	2.00	1.10049	-0.52176
3.00	2.00	1.0482	-0.54459

4.00	1.00	-1.30108	-0.57486
4.00	1.00	-1.40081	-0.58089
4.00	1.00	-1.41432	-0.57054
4.00	2.00	-1.48389	-0.62154
4.00	2.00	-1.50438	-0.60405
4.00	2.00	-1.57778	-0.64875
5.00	1.00	-1.24913	-0.81312
5.00	1.00	-1.2908	-0.78396
5.00	1.00	-1.2373	-0.78063
5.00	2.00	-1.26217	-0.81396
5.00	2.00	-1.23438	-0.83043
5.00	2.00	-1.30729	-0.82731

Para obtener los nuevos límites de especificación para los PC 1 y 2 se utilizó la fórmula (30), los cuales son $-0.4285 < PC1 < 0.4285$ y $-0.33 < PC2 < 0.33$. Se realizó un estudio de gage cruzado para cada PCi, posteriormente se utilizaron las ecuaciones (7), (8) y (9) para obtener los componentes de variación y para obtener los índices de evaluación para cada PCi se utilizaron las siguientes ecuaciones y los resultados se muestran en la tabla 3-10:

$$\% R \& R_{PCi} = \frac{\sigma_{gagePCi}}{\sigma_{totalPCi}} \quad (36)$$

$$PTR_{PCi} = \frac{5.15 \sigma_{gagePCi}}{LSE - LIE} \quad (37)$$

$$SNR_{PCi} = \frac{\sigma_{PartePCi}}{\sigma_{gagePCi}} \quad (38)$$

Tabla 3-10 Componentes de variación e índices de aceptación para cada componente principal.

Factor	σ gage	σ parte	σ total	%R&R	PTR	SNR
PC1	0.145258	1.135473	1.280731	0.126891	0.872906	7.816922
PC2	0.048897	0.334002	0.382899	0.144855	0.381551	7.816922

Para estimar los índices multivariados mediante el método de PCA se utilizaron las siguientes ecuaciones y los resultados se muestran en la tabla 3-15:

$$\% R \& R_M = \left(\prod_{i=1}^k \% R \& R_{PCi} \right)^{1/k} \quad (32)$$

$$PTR_M = \left(\prod_{i=1}^k PTR_{PCi} \right)^{1/k} \quad (33)$$

$$SNR_M = \left(\prod_{i=1}^k SNR_{PCi} \right)^{1/k} \quad (34)$$

3.3.4 Cálculos para WPCA

Para llevar a cabo el WPCA el procedimiento inicial es muy parecido al PCA ya que se calculó la matriz de eigen vectores (PCi) y eigen valores que se muestran en la tabla 3-8, posteriormente se calculó la matriz estandarizada entre CTQs denotada dentro de la ecuación (33) y mostrada en la tabla 3-11. Para obtener el valor del WPC (componente principal aumentado) y los límites del WPC se emplearon las ecuaciones (33) y (30), ambos se muestran en la tabla 3-12.

Tabla 3-11 Matriz estandarizada para WPCA

	X1	X2	X3	X4
X1	6.7110872	1.3344163	-0.028543	0.4524695
X2	6.7016483	1.7647448	-0.301924	0.7876067
X3	6.4315301	1.0116627	0.4384502	0.0938062
X4	6.5483057	1.9508063	-0.76681	1.3652676

Tabla 3-12 Valores y límites para el WPC

	WPC	LIE	LSE
X1	6.5805798	-4.677666	4.6776665
X2	2.216497		
X3	-1.033396		

X4	1.5916523
----	-----------

Los valores del WPC se multiplicaron por las variables originales para obtener los datos de la nueva variable, los cuales se muestran en la tabla 3-13.

Tabla 3-13 Datos para la nueva variable

Parte	Operador	WPC
1.00	1.00	-9.05382317
1.00	1.00	-8.00438528
1.00	1.00	-7.82504734
1.00	2.00	-7.41555873
1.00	2.00	-7.82998724
1.00	2.00	-8.12504348
2.00	1.00	-7.51241542
2.00	1.00	-7.80013179
2.00	1.00	-7.806829
2.00	2.00	-8.23962646
2.00	2.00	-8.05256625
2.00	2.00	-7.96538019
3.00	1.00	-0.77643297
3.00	1.00	-2.28123892
3.00	1.00	-1.43949992
3.00	2.00	-2.41581537
3.00	2.00	-2.86158171
3.00	2.00	-3.09004744
4.00	1.00	-8.25666445
4.00	1.00	-8.33166033
4.00	1.00	-8.28735362
4.00	2.00	-8.97890635
4.00	2.00	-8.69204437
4.00	2.00	-9.38117391
5.00	1.00	-10.564955
5.00	1.00	-10.4400406
5.00	1.00	-10.4255746

5.00	2.00	-10.4136248
5.00	2.00	-10.6798189
5.00	2.00	-10.6095916

Se realizó un estudio de gage cruzado para los valores del WPC, posteriormente se utilizaron las ecuaciones (7), (8) y (9) para obtener los componentes de variación y para obtener los índices de aceptación se utilizaron las siguientes ecuaciones cuyos resultados se muestran en la tabla 3-14:

$$\% R \& R_M = \frac{\sigma_{gageWPC}}{\sigma_{totalWPC}} \quad (38)$$

$$PTR_M = \frac{5.15 \sigma_{gageWPC}}{LSE - LIE} \quad (39)$$

$$SNR_M = \frac{\sigma_{ParteWPC}}{\sigma_{gageWPC}} \quad (40)$$

Tabla 3-14 Componentes de variación e índices de aceptación para cada componente principal.

Factor	σ gage	σ parte	σ total	%R&R _M	PTR _M	SNR _M
WPC	0.596824932	3.12808248	3.184509381	0.187415034	0.328545057	5.241206105

Dado que en el método WPCA solo se genera un componente principal aumentado, los cálculos que se realicen para evaluar el índice de dicho componente será el multivariado ya que no hay necesidad de realizar un promedio geométrico.

3.4 Etapa 3 Análisis de resultados

Después de ser obtenidos los valores de los índices multivariantes para cada método individualmente mediante sus respectivas formulas, se prosiguió a realizar la comparativa entre los distintos métodos analizados, basándose como referencia en los criterios de aceptación y rechazo previamente mencionados.

3.5 Etapa 5 Divulgación de resultados

Una vez desarrolladas todas las etapas anteriores se procedió a la divulgación de los resultados, de esta forma se pretende que la información generada llegue a las personas que tengan interés en el tema o sirva de labor formativa en temas a fin e investigación

de los mismos y así, que el ideal que el investigador visualiza se convierta en una realidad tangible. Para la divulgación de resultados se realizó un artículo el cual seguirá protocolo de revisión para publicación iniciando en febrero del 2019.

4 Resultados y Conclusiones

4.1 Resultados

Para la presente investigación se estudiaron distintas características multivariantes, también llamadas indicios, las cuales fueron: % R&R_M, SNR_M y PTR_M. Así como métodos de evaluación de sistemas de medición multivariantes tales como ANOVA, MANOVA, PCA y WPCA.

Como método de evaluación entre los distintos métodos multivariantes se optó por utilizar como referencia los valores de aprobación para los distintos índices multivariantes propuestos por (AIAG, 2010) y para validar la precisión del método utilizado se realizó un estudio de gage multivariante con los métodos mencionados.

Una vez obtenidos los resultados de las pruebas de precisión de los métodos de medición multivariantes se relacionó la información con los objetivos planteados en la investigación y se pudo obtener respuestas a las incógnitas realizadas al principio del estudio, en general esta etapa se estudiaron los resultados obtenidos.

Los resultados de los tres índices multivariados para los cuatro métodos aplicados en el estudio de gage se muestran en la tabla 3.11, donde se determina que para el método ANOVA se aceptó el sistema de medición en base a los criterios % R&R_M y SNR_M, pero se rechaza para PTR_M, en el caso de MANOVA el sistema de medición se acepta bajo los tres índices de evaluación, para el PCA se acepta el sistema de medición para los índices % R&R_M y SNR_M, pero se rechaza para PTR_M y para el método WPCA se acepta el sistema de medición para % R&R_M y SNR_M pero se rechaza para PTR_M.

Tabla 4-1 Resultados de los índices multivariados para los distintos métodos empleados comparados contra los índices de aceptación de la tabla 2.1; (x) señala criterio no aprobado

	ANOVA	MANOVA	Componentes principales	Componentes principales aumentados
PTR _M	0.352 x	0.187	0.577 x	0.328 x
% R&R _M	0.147	0.123	0.135	0.187
SNR _M	9.9	11.3	7.307	5.24

4.2 Conclusiones

Seguido del estudio de resultados se procedió a la elaboración de conclusiones, las cuales podrían servir de punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema tratado en esta investigación.

Debido que en algún proceso de fabricación puede haber casos donde halla varias características simultaneas de calidad a monitorear, un estudio de gage multivariante puede ser llevado a cabo para evaluar el sistema de medición. En la presente investigación se evaluó cuatro métodos multivariantes: ANOVA, MANOVA, PCA y WPCA. Los índices PTR_M , $\% R\&R_M$ y SNR_M fueron utilizados para evaluar el sistema de medición, para este estudio el método MANOVA resulto ser el más apropiado dado que fue el único que aprobó los tres índices de evaluación multivariante. A pesar de que el método ANOVA se utiliza comúnmente para casos univariados, en este ejercicio se utilizó dado que había correlaciones entre algunas características de calidad.

El método WPCA tiene buenas estimaciones para MSA, después del MANOVA podría ser una opción para medir la capacidad del MSA, pero se debe considerar que para poder llevarlo a cabo debe haber una correlación fuerte entre los CTQs que en este ejemplo no hubo, se puede tomar la correlación de Pearson como referencia siendo una correlación fuerte aquella que sea menor que 0.05, de no ser así es mejor evaluar con el PCA. Para futuras investigaciones en estudios de gage multivariantes se debe considerar la asignación optima de operadores, partes y replicas para estudios de gage multivariantes, que es la propuesta por (Pan, 2015).

Referencias

- AIAG. (2010). *Measurement System Analysis. Reference Manual* (4a ed.). Troy, Michigan.
- Burdick, R. B. (2003). A review of methods for measurement systems capability analysis. *Journal of Quality Technology* , 342-354.
- Burgos, J. d. (1980). *Calculo infinitesimal de varias variables. Escuela tecnica superior de ingenieros.*
- Cuadras, C. M. (2007). *Nuevos metodos de analisis multivariante.* CMC Editions.
- Dagnino, J. (2014). Analisis de varianza. *Revista chilena de estadistica*, 306-310.
- Fernandez, S. d. (2011). Analisis factorial. Madrid, España.
- Hand, D. J. (2014). *Multivariate analysis of variance and repeated measures: a practical approach behavioural scientists (Vol. 5).* CRC Press.
- IPQ L. (2008). *Vocabulario internacional de metrologia.* Guia ISO/IEC.
- Jackson, J. (1980). Principal Component and Factor Analysis. *Journal of quality technology*, 201-213.
- Johnson, R. A. (2014). *Applied multivariate statistical analysis.* New Jersey: Prentice-Hall.
- Majeske, K. D. (2008). Approval criteria for multivariate measurement systems. *Journal of quality technology*, 140-153.
- Medida, e. (2018, 03 01). *Revista española de metrologia.* Retrieved from <http://www.e-medida.es/documentos/Numero-1/exactitud-no-es-lo-mismo-que-precision.htm>
- Minitab Inc. (2017, Mayo). Minitab statistical software. State college, PA, EE.UU. Retrieved from <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/>
- Minitab Inc. (2018, Mayo). Minitab statistical software. State college, PA, EE.UU. Retrieved from <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/>
- Pan, J. N. (2015). Determining the optimal allocation of parameters for multivariate measurement system analysis. *Expert Systems with Applications.*, 7036-7045.

- Peruchi, R. B. (2013). A new multivariate gage R&R method for correlated characteristics. *International Journal of Production Economics*, 301-315.
- Peruchi, R. B. (2016). Comparisons of multivariate GR&R methods using bootstrap confidence interval. *Acta Scientiarum*, 38(4).
- Scagliarini, M. (2011). Multivariate process capability using principal component analysis in the presence of measurement errors. *AStA. Advances in statistical Analysis*, 113-128.
- Scagliarini, M. (2013). *Improving multivariate measurement systems assesment*. Recuperado el 30 de octubre de 2017, de Conference Archive Politecnico de Milano: <http://www2.mate.polimi.it/ocs/viewpaper.php?id=378&cf=33>
- Stevens, J. P. (2002). *Applied multivariate statistics for the social sciences*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Wang. (2013). An Assessment of Gauge Repeatability and reproducibility with multiple characteristics. *Journal of testing and evaluation*, 651-658.
- Wang, F., & Chern, H. (2012). Confidence intervals for two-dimensional data with circular tolerances in a gauge R&R study. *Quality & Quantity*, 55-69.
- Wang, F., & Li, E. Y. (2003). Confidence intervals in repeatability and reproducibility using bootstrap method. *Total Quality Management*, 341-354.
- Wang, F., & Yang, C. (2007). Applyng principal component analysis to a GR&R study. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 182-189.
- Wu, C. P. (2009). An overview of theory and practice on process capability indexes for quality assurance. *International Journal of Production Economics.*, 338-359.