Instituto Tecnológico de Chihuahua II

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

APLICACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE BASES EN UN ESPACIO VECTORIAL

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

PRESENTA

KARINA PIÑON TORRES

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Alberto Camacho Ríos

CODIRECTOR DE TESIS

M. E. Verónica Valenzuela

CHIHUAHUA, CHIH., 07 de Junio del 2024

Dictamen

Chihuahua, Chihuahua, 14 de mayo 2024

M.C. MARIA ELENA MARTINEZ CASTELLANOS

COORDINADORA DE POSGRADO E INVESTIGACION.

PRESENTE

Por medio de este conducto el comité tutorial revisor de la tesis para obtención de grado de Maestro en Sistemas Computacionales, que lleva el nombre de:

"APLICACIÓN PARA EL APRENDIZAJE DE BASES EN UN ESPACIO VECTORIAL", que presenta la C. KARINA PIÑON TORRES, hace de su conocimiento que después de ser revisado ha dictaminado la APROBACIÓN de la misma.

Sin otro particular de momento queda de usted.

Atentamente

La Comisión de Revisión de Tesis.

DR. ALBERTO CAMACHO RIOS

Director de tesis

Verónica Valenzuela Glez

M.E.C.P.. VERONICA VALENZUELA GONZALEZ

Co –Director

Leonardo Nevárez Chávez

M.C LEONARDO NEVAREZ CHÁVEZ

Revisor

DR. ARTURO MARTINEZ AYALA

Revisor

Índices

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN 10
1.1 Introducción 10
1.1.1 Planteamiento del problema 10
1.2 Alcances y limitaciones 10
1.2.1 Alcances: 10
1.3 Limitaciones: 11
1.4 Justificación 11
1.4 Objetivo general: 16
1.5.1 Objetivos específicos: 16
CAPÍTULO II. ESTADO DEL ARTE 17
2.1.1 Algebra lineal básico: 17
2.1.2 Calculadora de bases vectoriales: 19
2.1.3 Calculadora Maple: 21
2.1.4 Calculadora para matrices: 22
2.1.5 Espacios vectoriales: 23
2.1.6 Linear algebra: 25
2.1.7 Matcalc: 28
2.1.8 Mathematica: 32
2.1.8 Symbolab: 35
2.2 Resultados de la evaluación de las aplicaciones 37
2.3 Otras Investigaciones 38
CAPÍTULO III. MARCO TEORICO 41
3.1 Definiciones 41
3.1.1 Del Álgebra Lineal 41
3.2 Lenguajes de programación 42
CAPÍTULO IV. DESARROLLO 53
4.1 Metodología 54
4.1.1 Fase conceptual 54
4.1.2 Análisis y Diseño inicial 57
4.1.3 Plan de Iteraciones 58

4.1.4 Diseño computacional 58
CAPÍTULO V. RESULTADOS 83
5.1 Primer prueba 84
CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES 98
CAPÍTULO VII. BIBLIOGRAFÍA 99
ANEXO 1: Constancia de la Red de Centros de Investigación en Matemáticas Educativa A.C. 101

Índice de figuras

Figura 1.1 Resultados sistema operativo 12
Figura 1.2 Resultados aplicaciones 13
Figura 1.3 Resultados tipo de aplicación 14
Figura 1.4 Resultados desarrollo de aplicación 14
Figura 1.5 Resultados características 15
Figura 2.6 Interfaz Álgebra Lineal Básico 19
Figura 2.7 Interfaz Calculadora de bases vectoriales 20
Figura 2.8 Interfaz Calculadora maple 22
Figura 2.9 Interfaz Calculadora para matrices 23
Figura 2.10 Interfaz Espacios vectoriales 25
Figura 2.11 Interfaz Linear algebra 29
Figura 2.12 Interfaz Matcalc 32
Figura 2.13 Costo Mathematica 33
Figura 2.14 Interfaz Mathematica 35
Figura 2.15 Interfaz Symbolab 36
Figura 3.16 Código instalación Sympy 44
Figura 3.17 Metodología ISE 45
Figura 4.18 Prototipo pantalla principal 58
Figura 4.19 Prototipo del tema Determinar Base 59
Figura 4.20 Prototipo del tema Cambio de Base 60
Figura 4.21 Prototipo de tema Base Ortonormal 61
Figura 4.22 Parte del código del tema Determinar Base 63
Figura 4.23 Parte del código del tema Cambio de Base 65
Figura 4.24 Parte del código del tema Base ortonormal 66
Figura 4.25 Código corriendo en función matriz 67
Figura 4.26 Código corriendo en interpretación de resultados 68
Figura 4.27 Interfaz principal 69
Figura 4.28 Interfaz de usuario Determinar base 70
Figura 4.29 Pantalla de muestra el procedimiento del tema Determinar base 71
Figura 4.30 Interfaz gráfica del tema Cambio de base 72
Figura 4.31 Pantalla que muestra el procedimiento del tema Cambio de base 73
Figura 4.32 Interfaz del tema Ortonormalización 74
Figura 4.33 Pantalla que muestra el procedimiento del tema Ortonormalización 75
Figura 4.34 Organización del proyecto en la carpeta Java 76
Figura 4.35 Codificación de clases Datos Python Java 77
Figura 4.36 Importar Chaquopy 77
Figura 4.37 Código Python Determinar base acoplado con Java 79
Figura 4.38 Código Python Cambio de base acoplado con Java 81
Figura 4.39 Código Python Ortonormalización acoplado con Java 83
Figura 5.40 Ordenamiento de columnas con código Python 85
Figura 5.41 Ordenamiento de columnas en Java 86
Figura 5.42 Ordenamiento de columnas para interfaz gráfica 87
Figura 5.43 Muestra si es base o no 87

Figura 5.44 Botones de alejar o acercar 89
Figura 5.45 Botón limpiar 90
Figura 5.46 Se agrega logotipo a la aplicación 90
Figura 5.47 Interfaz de la Aplicación para el aprendizaje de Bases en un Espacio Vectorial 92
Figura 5.48 Interfaz Determinar base 94
Figura 5.49 Interfaz Cambio de base 96
Figura 5.50 Base ortonormal 98

Índice de tablas

Tabla 1.1: Características funcionales de las aplicaciones 37

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis madres Carmen Acevedo Porras (+) y Maria del Carmen Torres Acevedo por siempre impulsandome con sus consejos y buenos principios.

AGRADECIMIENTOS

A Dios en primer lugar por permitirme cumplir uno de mis sueños que fue obtener el posgrado.

Al CONACYT por la beca recibida, que me ayudó a terminar la maestría en Sistemas Computacionales.

A mis profesores M. E. Verónica Valenzuela González, al Dr. Alberto Camacho Ríos y al M.C. Leonardo Nevarez Chávez por creer en mí, tenerme paciencia y apoyarme incondicionalmente en el proceso de formación profesional.

A mi esposo Jorge Luis Baca Corona que siempre estuvo a mi lado apoyándome y alentándome a terminar la maestría.

A mi madre Maria del Carmen Torres, que siempre ha estado a mi lado, apoyandome y sosteniendo mi mano.

A mi segunda madre Carmen Acevedo (+), mi abuela que también ayudó en mi crianza junto a mis hermanos, me enseñó a no rendirme y terminar los proyectos que se empiezan.

A mis hermanos Esmeralda Piñon y Raúl Dominguez que también han creído en mi.

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

1.1.1 Planteamiento del problema

En los cursos de Álgebra Lineal, cuando se ve el tema de espacios vectoriales, los alumnos se apoyan en aplicaciones que se descargan en dispositivos móviles y es posible utilizarlos desde la Web.
En el mercado no existen aplicaciones que aborden los temas Base, Cambio de Base y Base Ortonormal. Las aplicaciones que existen proporcionan operaciones aisladas dentro del proceso de dichos temas.

Además, algunas aplicaciones tienen un costo para utilizarlas, descargarlas y visualizar el procedimiento. En otros casos se requiere Internet para su uso.

A partir de lo anterior en esta tesis nos pronunciamos por desarrollar una Aplicación del tipo app que ayude en la resolución de ejercicios de Álgebra Lineal, cuyos temas se ubican en la unidad de espacios vectoriales del curso, los cuales son: Base, Cambio de Base y Base Ortonormal.

1.2 Alcances y limitaciones

1.2.1 Alcances:

- La aplicación es capaz de resolver ejercicios de la asignatura de Álgebra Lineal, de los temas de espacios vectoriales: Base, Cambio de Base y Base Ortonormal.
- Proporciona una herramienta con interfaz de fácil uso.
- Muestra las soluciones de los ejercicios de la misma manera que los resuelven manualmente los alumnos en el salón de clase.
- Funciona sin necesidad de Internet.
- Está disponible para dispositivos móviles para sistema operativo Android.
- Su distribución es de forma gratuita.
- No contiene publicidad.

- La entrada de las matrices está considerada para números enteros, decimales, fracciones y raíces.

1.3 Limitaciones:

- No es adecuada para matrices mayores a R^4.
- No disponible para IOS.

1.4 Justificación

Procuramos que la Aplicación sea una herramienta de uso intuitivo, la cual resuelva ejercicios relacionados con los temas de Base, Cambio de Base y Base Ortonormal. Como mencionamos anteriormente esta deberá ser gratuita sin requerir de Internet una vez descargada.

En los planes de estudio dedicados a las carreras de ingeniería del Tecnológico Nacional de México (TecNM), principalmente en el curso de Álgebra Lineal se propone el uso de las Tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC). En este sentido existen aplicaciones móviles y de escritorio que resuelven algunos de los temas antes mencionados incluyendo parte del procedimiento que utilizan, por ejemplo: Maple, Matlab, Mathematica, Mathcad, Geogebra, Symbolab, entre otras. No obstante, se cuenta con los siguientes inconvenientes:

1 En algunos casos se desconoce como utilizar la aplicación, es necesario recurrir a los tutoriales adjuntos para utilizarla, tanto profesores como alumnos.
2 En el curso de Álgebra Lineal los tiempos didácticos no permiten ver completos los temas de Base, Cambio de Base y Base Ortonormal, así como aprender a utilizar las aplicaciones citadas anteriormente.
3 Para descargar o utilizar el software, en ocasiones no se cuenta con acceso a Internet en el dispositivo móvil, o bien en el aula no se tiene con la infraestructura tecnológica necesaria para utilizar este tipo de herramientas.
4 Algunas de las tecnologías tienen costo para descargarlas, hacer uso de ellas o reconocer el procedimiento a seguir para llegar a los resultados.

Un ejemplo donde se pide emplear una aplicación para la resolución de los temas antes mencionados, es citado en el libro de Álgebra Lineal de Grossman (2012). En este último se sugiere el uso del software conocido como Matlab.

Por otro lado, realizamos una encuesta por medio de Google Forms a 31 alumnos del TecNM de las carreras de ingeniería, a los cuales se les preguntó por el sistema operativo de su dispositivo móvil. Las respuestas se muestran en la Figura 1.1. Como se aprecia, la mayoría de los estudiantes manifestaron utilizar en sus dispositivos móviles el sistema operativo Android.

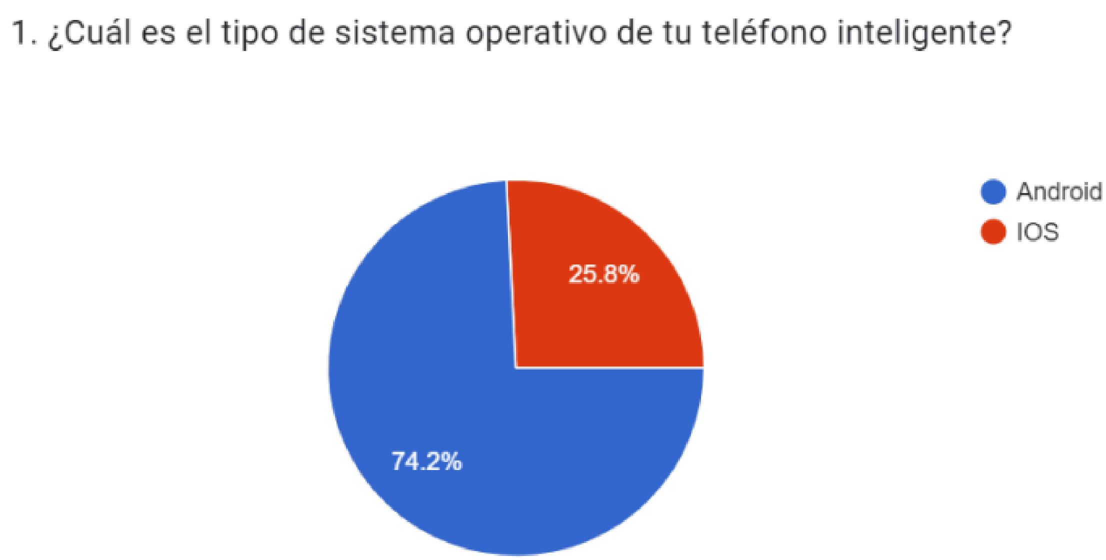


Figura 1.1 Resultados sistema operativo

Además, se preguntó por la aplicación que utilizan para resolver problemas de Álgebra Lineal. Entre otras mencionaron Matway, Photomath y Symbolab, Figura 1.2. Se observa que la aplicación más utilizada por los estudiantes es Symbolab:

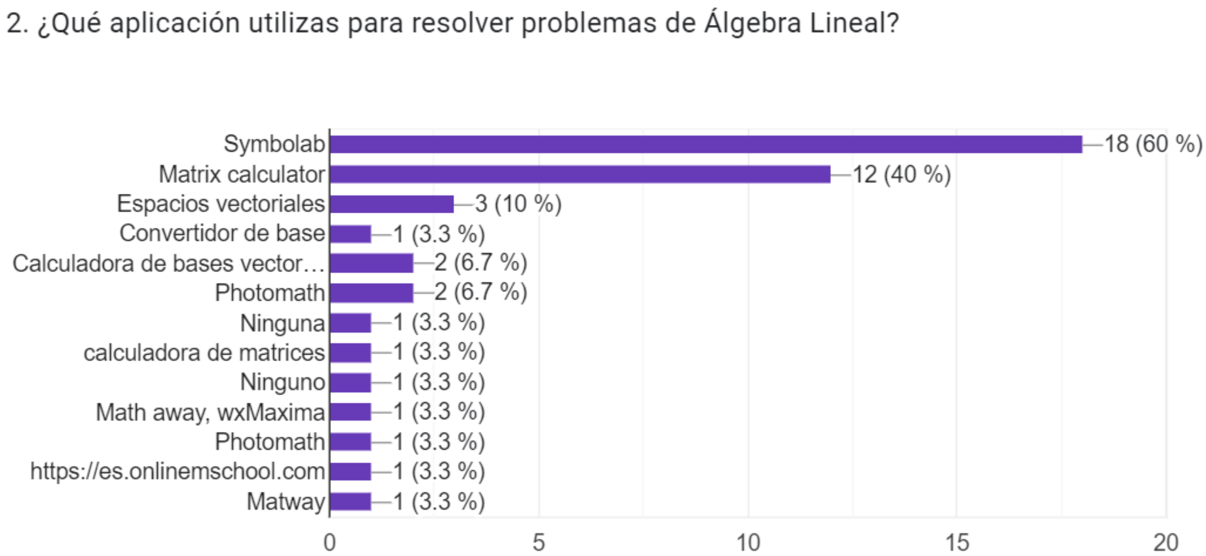


Figura 1.2 Resultados aplicaciones

Otra de las preguntas de la encuesta fue la relacionada con las aplicaciones si son utilizadas en dispositivos móviles o en computadora. En la Figura 1.3 se observa que las aplicaciones son más utilizadas en el teléfono móvil, 67.7% de respuestas contra un 61.3% de su uso en las computadoras.

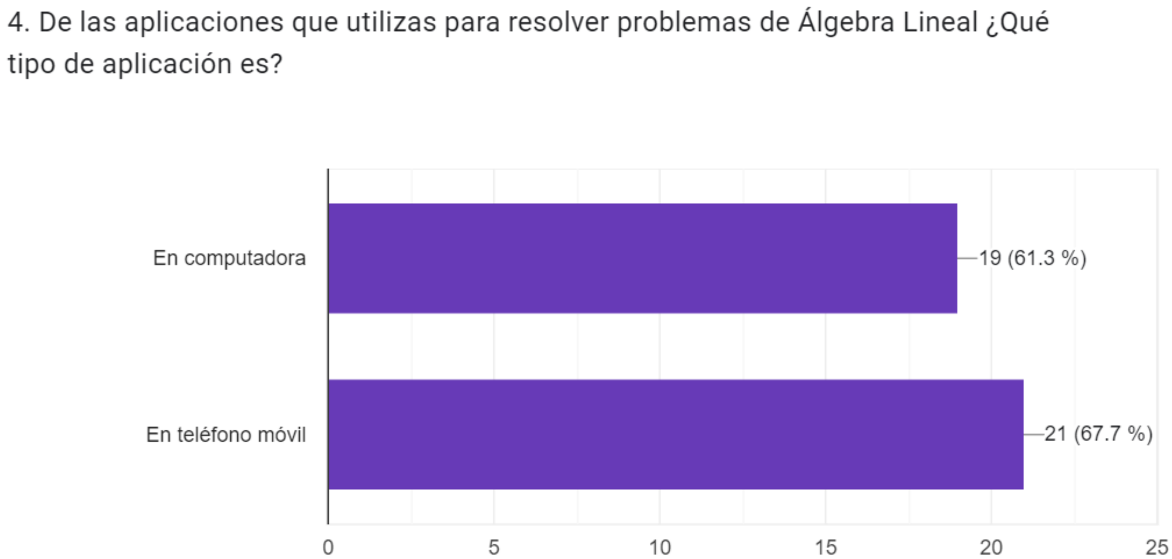


Figura 1.3 Resultados tipo de aplicación

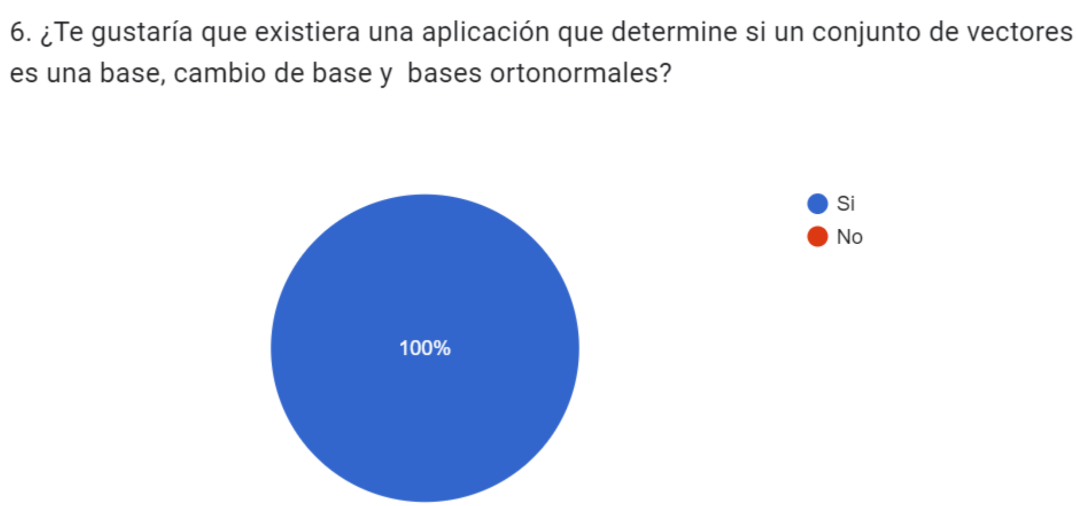


Figura 1.4 Resultados desarrollo de aplicación

Finalmente, otra de las preguntas que se hicieron fue: ¿Qué características recomiendas para la aplicación a desarrollar? La respuesta de mayor porcentaje fue que la aplicación mostrara el procedimiento, con un 87.1%, seguido de que fuera gratis, con un 80.6%, en tercer lugar se comenta que no requiera de Internet para su uso, 77.4%, así como, finalmente, que sea intuitiva y fácil de usar 3.2%, Figura 1.5.

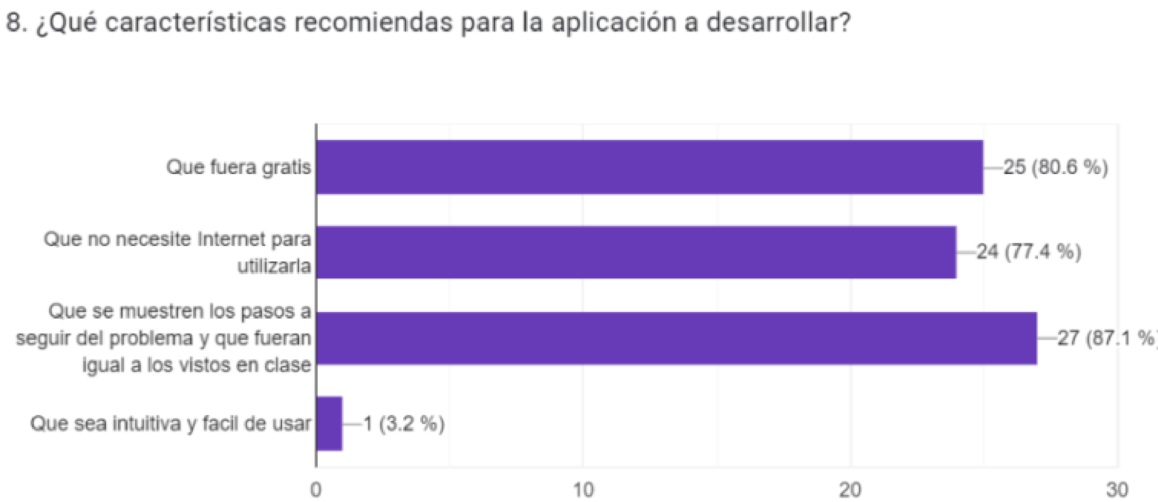


Figura 1.5 Resultados características

1.4 Objetivo general:

Desarrollar una aplicación móvil que resuelva ejercicios de Álgebra Lineal de los temas sugeridos en el programa de estudio, Base, Cambio de Base y Base Ortonormal, orientada a los estudiantes de las carreras de ingeniería del TecNM.

1.5.1 Objetivos específicos:

- Desarrollar una aplicación móvil compatible con el sistema operativo Android.
- Determinar si un conjunto de vectores forman una Base en R^2, R^3, R^4.
- Realizar el Cambio de Base de un vector dado.
- Resolver una Base Ortonormal, dado un conjunto de vectores.
- Mostrar los pasos a seguir para llegar a la solución de los ejercicios.
- Utilizar dicha aplicación sin conexión a Internet.
- Desarrollar una aplicación que no cuente con anuncios publicitarios y sea gratuita.

CAPÍTULO II. ESTADO DEL ARTE

2.1 Evaluación de aplicaciones

Se revisaron nueve aplicaciones desde sus características funcionales, así como su contexto comercial y didáctica, considerando, además, si requieren Internet, si contienen anuncios, entre otros.

Una aplicación comercial se define como la que muestra el resultado de los ejercicios capturados y en caso de arrojar procedimiento lo muestra muy distinto a los que resuelven manualmente los alumnos en clase, además, de que tiene costo para su uso o descarga.

Por otro lado, la aplicación didáctica es aquella que se enfoca en ayudar a los alumnos a su aprendizaje, donde no nada más se muestra el resultado sino el procedimiento como se resuelven los ejercicios en clase, así como, es gratuito el uso y descarga de la app.

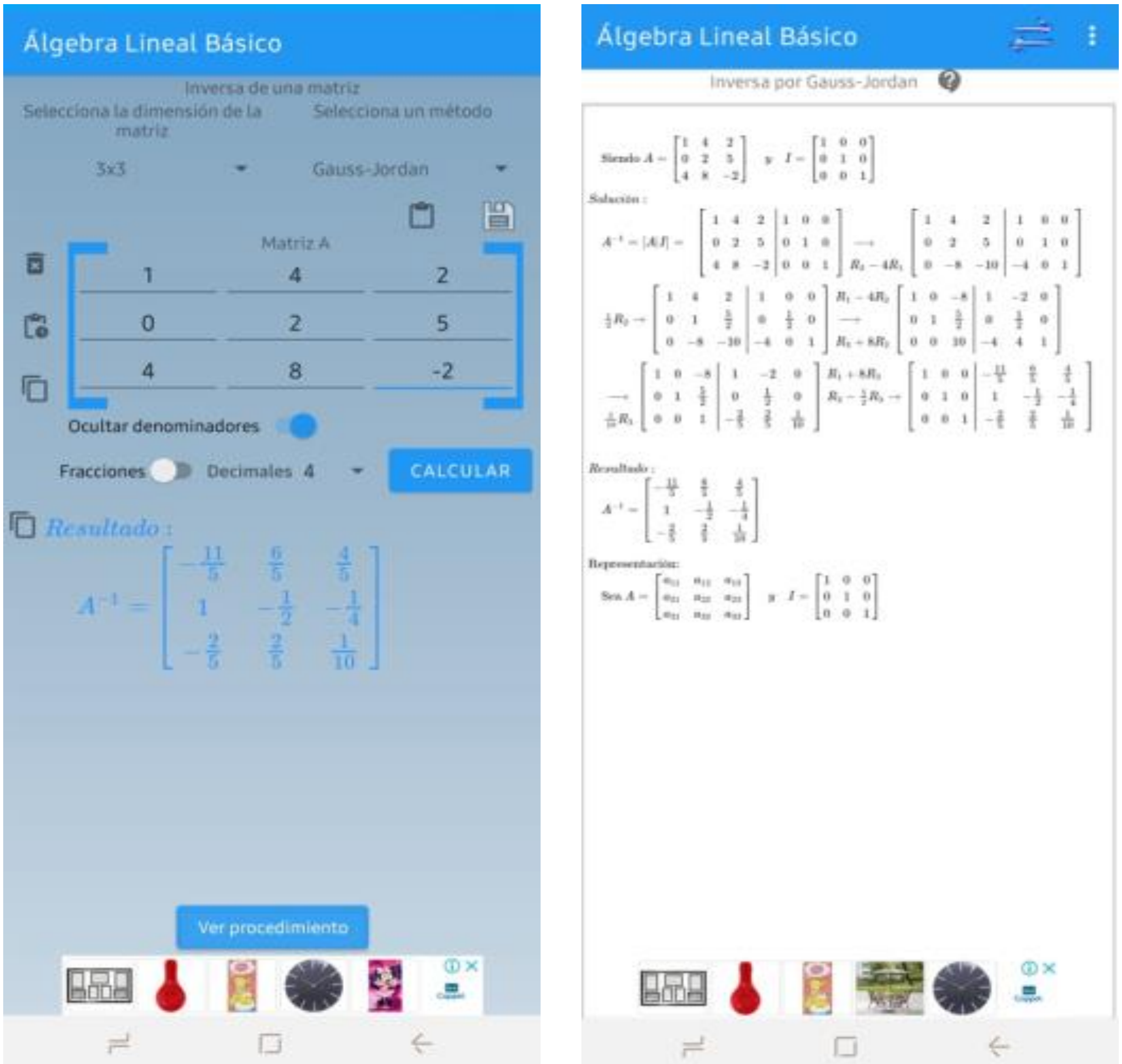
A continuación, se describen las características y alcances de cada una de las aplicaciones revisadas:

2.1.1 Algebra lineal básico:

Aplicación móvil compatible con sistema Android, esta soluciona ejercicios básicos de Álgebra Lineal como: suma, resta, multiplicación, método de Cramer, Gauss-Jordan, entre otros. Contiene anuncios, muestra los pasos a seguir para llegar al resultado de cada operación realizada, los resultados se muestran en fracciones y números enteros. La aplicación es gratuita al descargarla y utilizarla, es necesario estar conectado a internet, por lo tanto esta aplicación se define como app didáctica.

Con relación a los temas de espacios vectoriales, particularmente durante la “construcción de una Base Ortonormal”, la aplicación no realiza este proceso. Obtiene la matriz inversa con la ayuda del proceso de Gauss-Jodan y por la adjunta, siendo el proceso de la inversa de los pasos a ejecutar en el tema antes mencionado.

Para “determinar si un conjunto de vectores es una base en R^n”, la aplicación no resuelve los ejercicios relacionados con este tema, sino que calcula el determinante de una matriz por medio de la eliminación Gaussiana, por cofactores y Sarrus, Figura 2.6, (Algebra lineal básico, 2022).



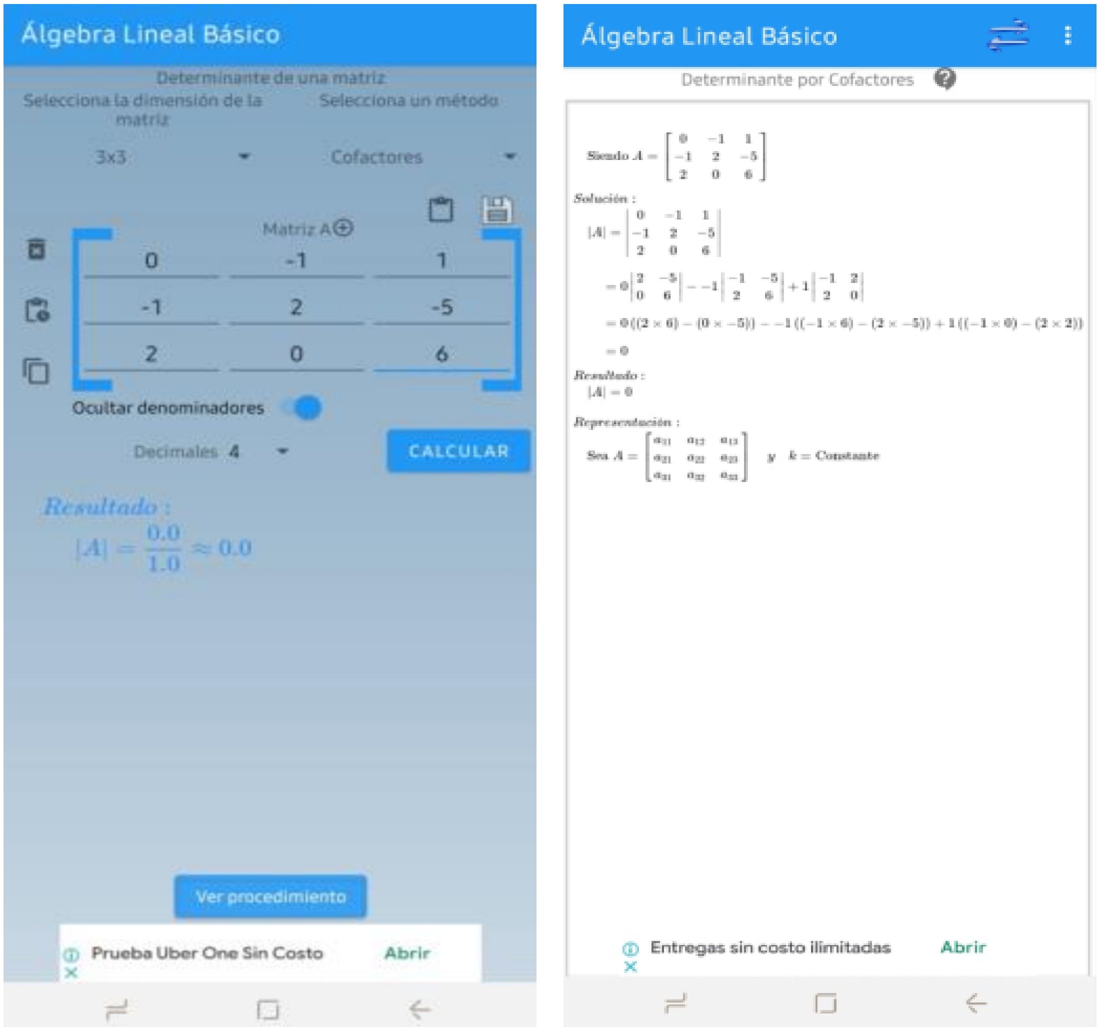


Figura 2.6 Interfaz Álgebra Lineal Básico

2.1.2 Calculadora de bases vectoriales:

Es una aplicación móvil compatible con sistema Android, determina si un conjunto de vectores son una base de R^n, específicamente permite:

- Comprobar si dos vectores forman una base de R^2.
- Comprobar si tres vectores forman una base de R^3.
- Comprobar si cuatro vectores forman una base de R^4.
- Escribir números racionales como fracciones.
- Ver una descripción matemática detallada de los pasos que llevaron a ese resultado.

Admite el idioma inglés y español, así como fracciones, decimales y números enteros, requiere Internet para su uso y descarga, muestra procedimiento a seguir para observar cómo se llegó al resultado, no tiene costo para su uso y no contiene anuncios, se define como app didáctica.

Sobre el tema, "determinar si un conjunto de vectores es una base en R^n", realiza dicha operación, no obstante, la interpretación es diferente a la que se ve en clase, Figura 2.7 (Calculadora de bases vectoriales, 2021).

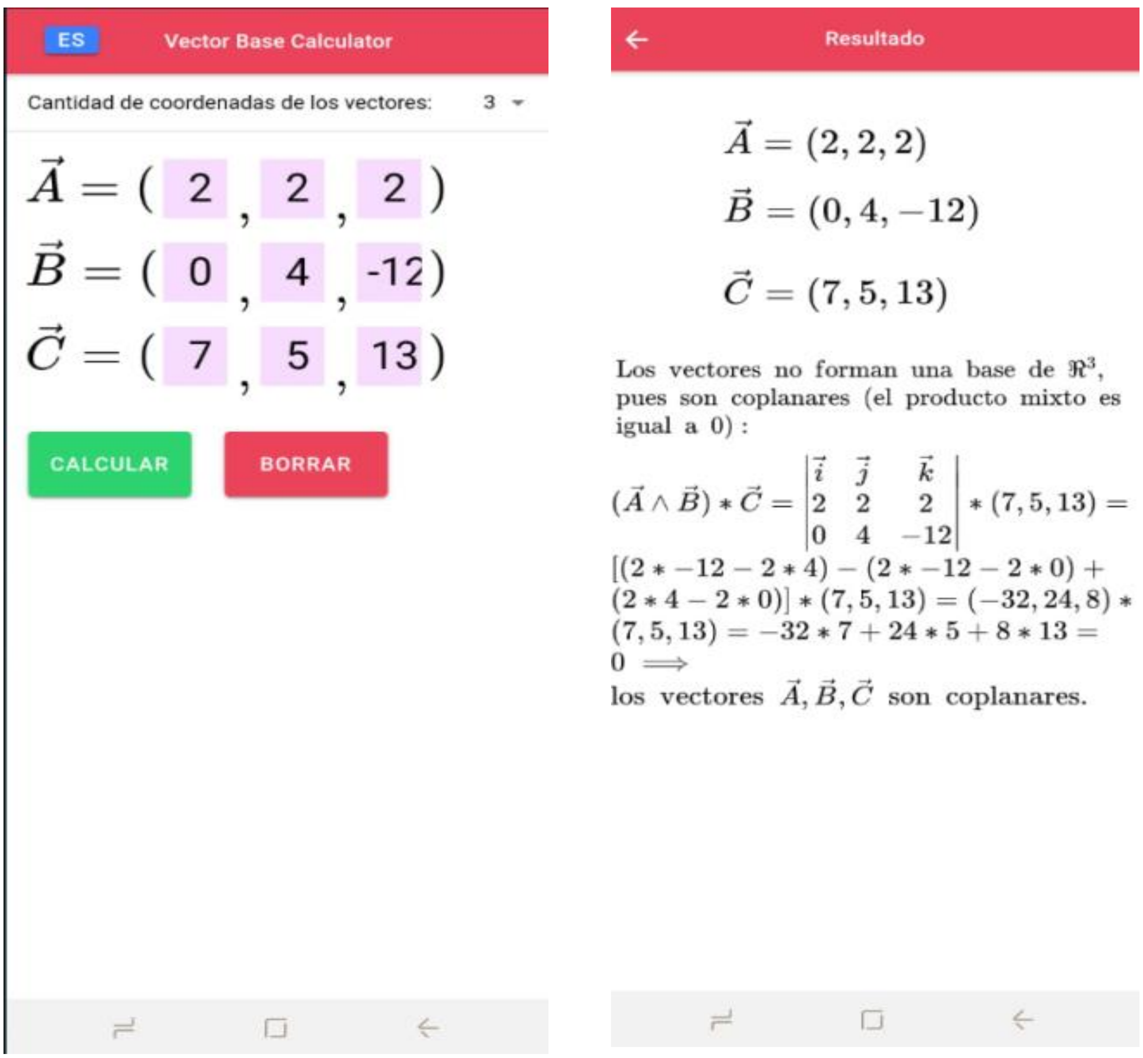


Figura 2.7 Interfaz Calculadora de bases vectoriales

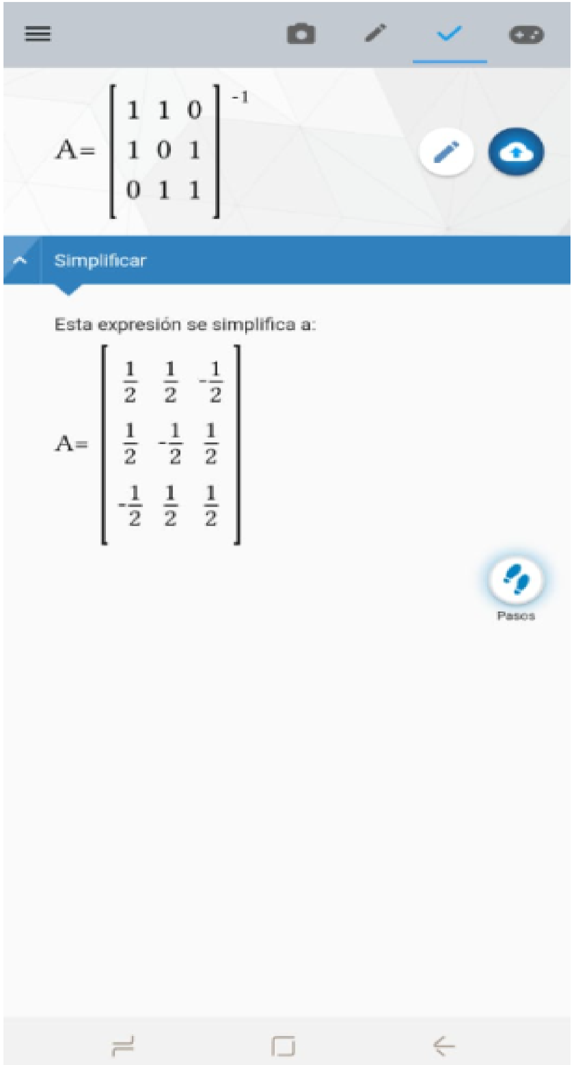
2.1.3 Calculadora Maple:

Aplicación móvil compatible con sistema Android y IOS, desarrollada por Maple, Calculadora Maple (s.f). Contiene un motor matemático potente, todo en uno, resuelve problemas matemáticos, genera visualizaciones en 2D y 3D y proporciona soluciones paso a paso para diversos problemas matemáticos de educación secundaria y estudios universitarios. Es una calculadora gráfica, científica, de álgebra, de cálculo y de integrales, a la vez.

Permite introducir, resolver y visualizar fácilmente problemas matemáticos de álgebra, precálculo, cálculo, Álgebra Lineal y ecuaciones diferenciales, es posible introducir problemas con la cámara y obtener los pasos.

Requiere internet para su descarga y uso. Admite los siguientes idiomas: inglés, español, francés, alemán, ruso, danés, sueco, japonés y chino simplificado. Cuenta con versión gratuita de siete días, para lo cual es necesario registrarse con usuario y contraseña. Cuenta, además con su propio teclado para introducir las operaciones, no contiene anuncios publicitarios y tiene un costo de 89.00 pesos por mes, se define como app comercial.

Sobre el tema de construcción de una Base Ortonormal, obtiene la inversa de una matriz con la ayuda del proceso de Gauss-Jordan. Esta operación no muestra los pasos a seguir para llegar al resultado, Figura 2.8:



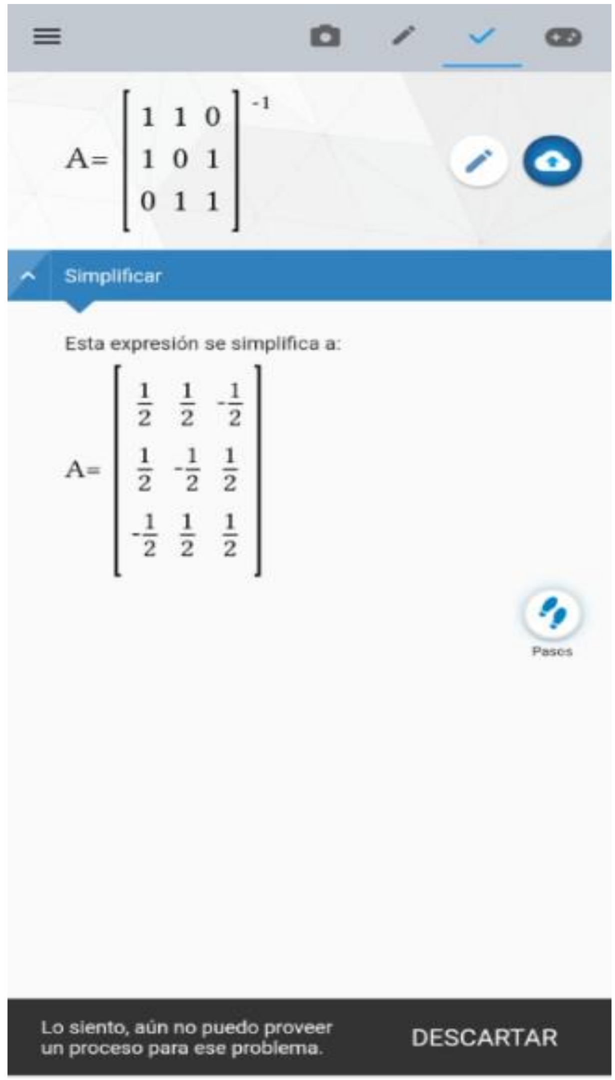


Figura 2.8 Interfaz Calculadora maple

2.1.4 Calculadora para matrices:

Es un software disponible en la Web, realiza las operaciones básicas de matrices, como: suma, resta, multiplicación, determinante, matriz traspuesta, matriz inversa, eliminación de Gauss-Jordan, entre otros.

Precisa de internet para su uso y descarga, no tiene costo para realizar las operaciones, no contiene anuncios publicitarios y muestra los pasos a seguir para llegar al resultado, se define como app didáctica.

Sobre el tema de la construcción de una “Base Ortonormal” obtiene la inversa de una matriz con la ayuda del proceso de eliminación de Gauss-Jordan, por el método de Montante y usando la matriz adjunta, que es parte del proceso de Gram-Schmidt.

Sobre el tema “determinar si un conjunto de vectores es una Base en R^n”, obtiene el determinante por medio de la regla del triángulo, regla de Sarrus, método de Montante y método de eliminación de Gauss, que es parte de dicho proceso, Figura 2.9 (Matrix Calc, 2021).

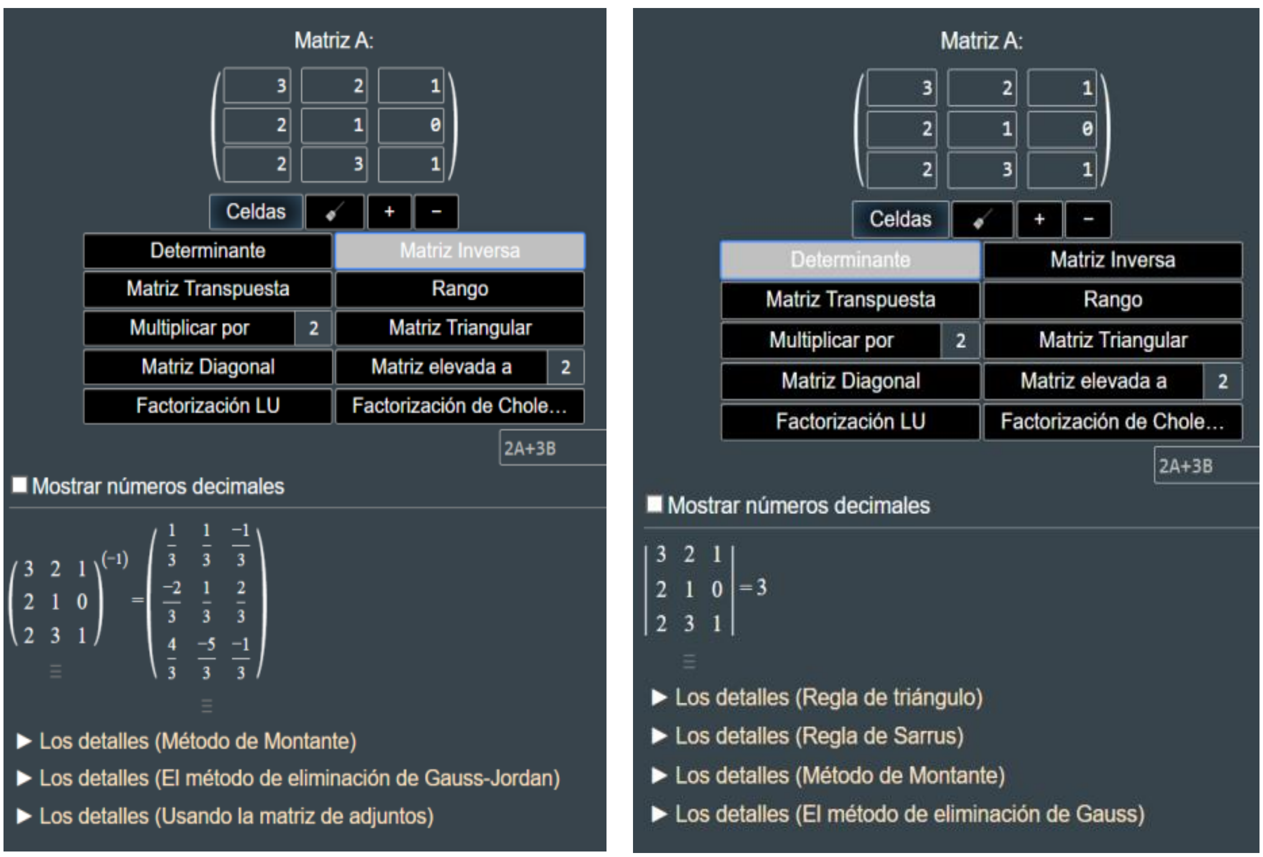


Figura 2.9 Interfaz Calculadora para matrices

2.1.5 Espacios vectoriales:

Aplicación móvil compatible con sistema Android, incluye independencia lineal, combinación lineal, conjunto generador. Resuelve ejercicios para el nivel de licenciatura, en los temas antes mencionados. Funciona para matrices de tres dimensiones o menos, muestra la resolución mediante el método de Gauss Jordan. Una vez descargada no requiere internet para su funcionamiento, no tiene costo para descargarla y utilizarla, no contiene anuncios, muestra los pasos a seguir para llegar al resultado y cuenta con su propio teclado para introducir los componentes, se define como app didáctica.

Sobre el tema "determinar si un conjunto de vectores es una base en R^n", obtiene si los vectores son linealmente dependientes, independientes y si corresponde a un conjunto generador por separado, Figura 2.10 (Espacios Vectoriales, 2022).

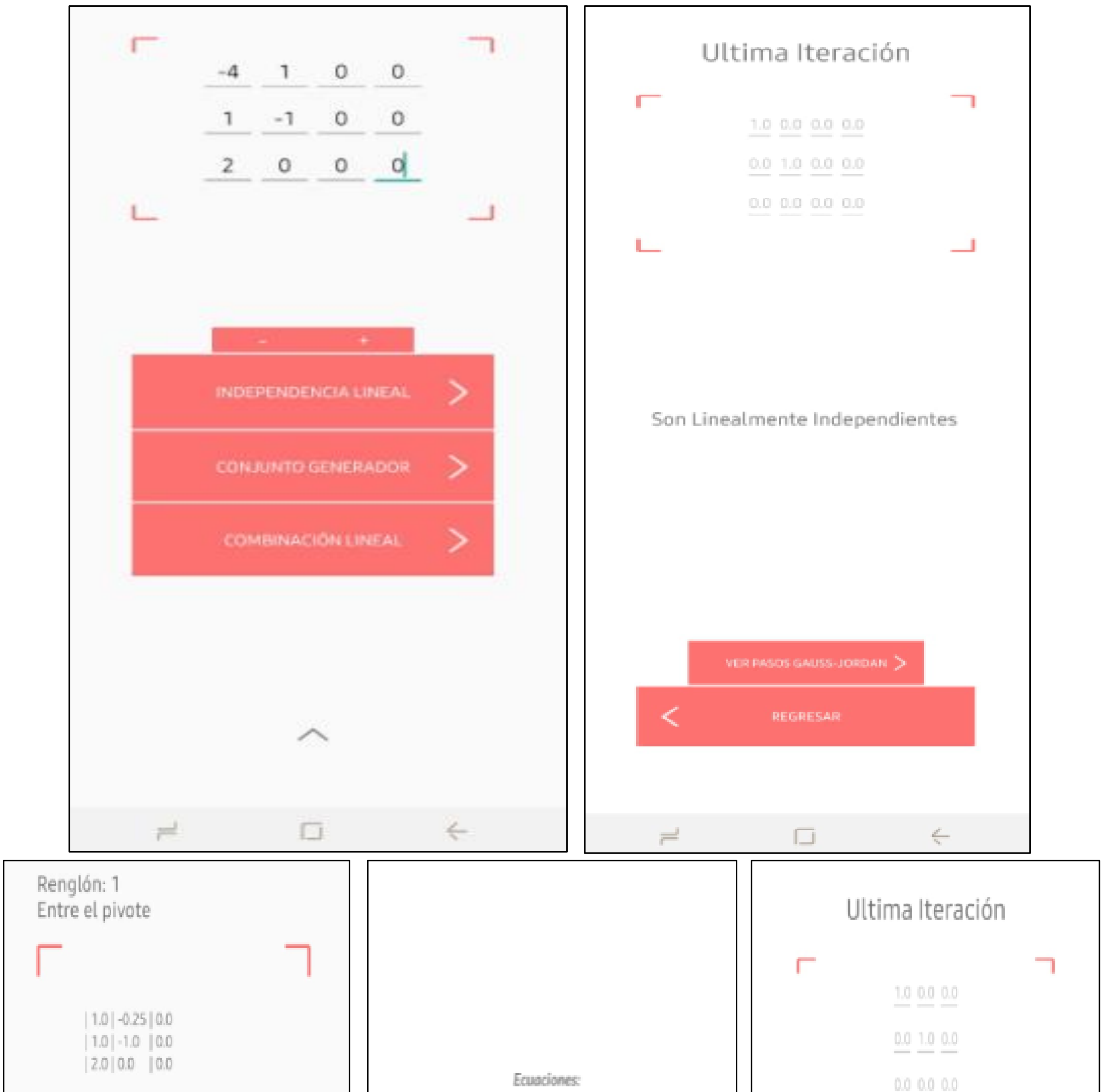


Figura 2.10 Interfaz Espacios vectoriales

2.1.6 Linear algebra:

Aplicación móvil compatible con sistema Android, es un desarrollo que ayuda a resolver algunos problemas matemáticos. Para ello, se debe ingresar la expresión y hacer clic en el botón Calcular para obtener el resultado. Es posible encontrar algunos teoremas fundamentales del Álgebra Lineal. Es fácil de usarla y descargarla. Cuenta con una interfaz de usuario muy fácil de usar. Todas las fórmulas que se muestran son fáciles de entender y ofrece una rápida introducción a los métodos de Álgebra Lineal. Genera valores aleatorios para las matrices y calcular el resultado. En cuanto a las matrices realiza las siguientes operaciones:

- Suma.
- Resta.
- Multiplicación.
- Transposición.
- Determinante.
- Rastro.

En otras operaciones, se consignan:

Ecuación lineal

- Método jordano gauss-jordan.
- Eliminación gaussiana.

Espacio vectorial

- Suma de vector.
- Resta de vectores.
- Producto escalar.
- Proyección.
- Producto vectorial.
- Un ángulo entre el vector.
- Vectores ortogonales.

Geometría

- Cono.
- Cilindro.

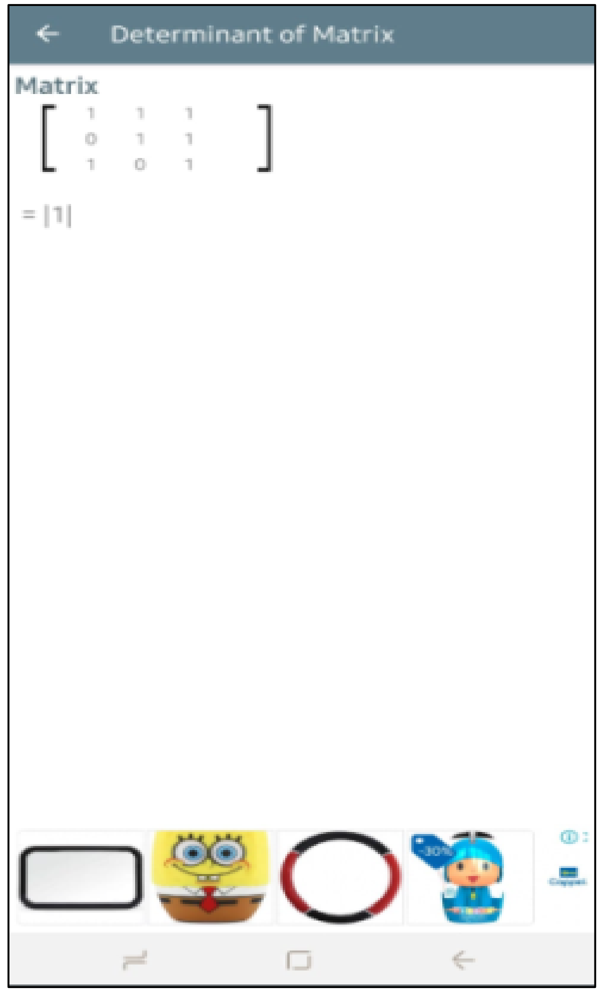
- Triángulo isósceles.
- Triángulo equilátero.
- Cuadrado.
- Esfera.
- Rectángulo.
- Rombo.
- Paralelogramo.
- Trapezoide.

La aplicación no muestra los pasos a seguir para llegar al resultado de la operación, es gratuita al descargarla y utilizarla, requiere internet para descargarla y realizar las operaciones, contiene anuncios publicitarios y cuenta con su propio teclado para introducir los componentes, se define como una app comercial.

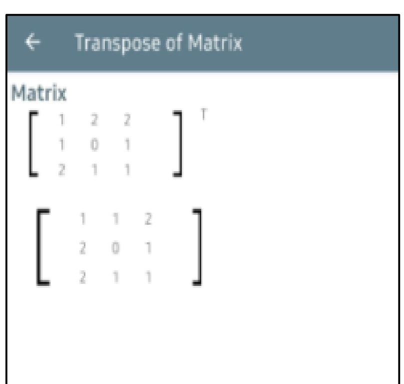
Sobre el tema “construcción de una Base Ortonormal” la aplicación determina si los vectores son ortogonales y obtiene la traspuesta de una matriz.

En cuanto a “determinar si un conjunto de vectores son una base en R^n”, obtiene el determinante de una matriz, Figura 2.11 (Linear Álgebra, 2019).


Determinant of Matrix
PROBLEM
THEORY
Enter Size of Matrix
3
X
RANDOM
Enter First Matrix
1 1 1
0 1 1
1 0 1
CALCULATE
CLEAR


Determinant of Matrix
Matrix
1 1 1
0 1 1
1 0 1
= |1|


Transpose of Matrix
PROBLEM
THEORY
Enter Size of Matrix
3
X
RANDOM
Enter First Matrix
1 2 2
1 0 1


Transpose of Matrix
Matrix
1 2 2
1 0 1
2 1 1
T
1 1 2
2 0 1
2 1 1


Orthogonal Vectors
PROBLEM
THEORY
Dimension
3
RANDOM
Vector a
V =
1 2 1
Vector b

Figura 2.11 Interfaz Linear algebra

2.1.7 Matcalc:

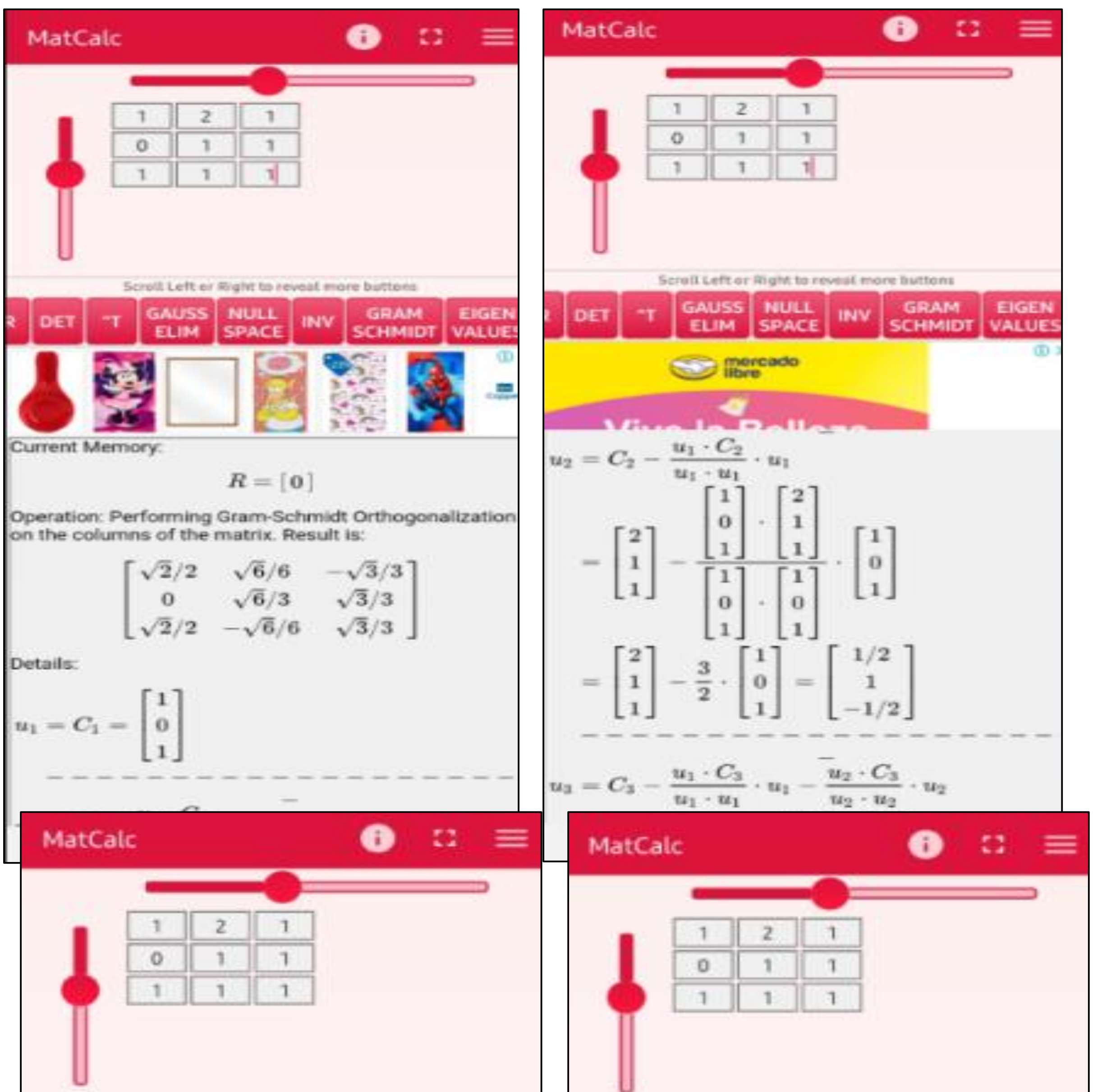
Aplicación para dispositivos móviles compatible con sistema Android, realiza operaciones con matrices (suma, multiplicación, determinante, eliminación de gauss). Utiliza fracciones con cálculos precisos, además del resultado, proporciona detalles de las operaciones realizadas.

Es una calculadora matricial simple, cuenta con una entrada de matriz fácil y realiza cálculos algebraicos precisos y analíticos.

Se requiere internet para su descarga y uso, contiene anuncios publicitarios, solicita pago para actualizar la última versión (21.00 pesos) y muestra los pasos a seguir para llegar al resultado de la operación, se define como app comercial y didáctica.

Sobre el tema “construcción de una Base Ortonormal”, realiza esta operación y muestra los pasos a seguir para llegar al resultado.

En cuanto al tema “determinar si un conjunto de vectores es una Base en R^n”, obtiene el determinante de una matriz, Figura 2.12 (Matcalc, 2022).



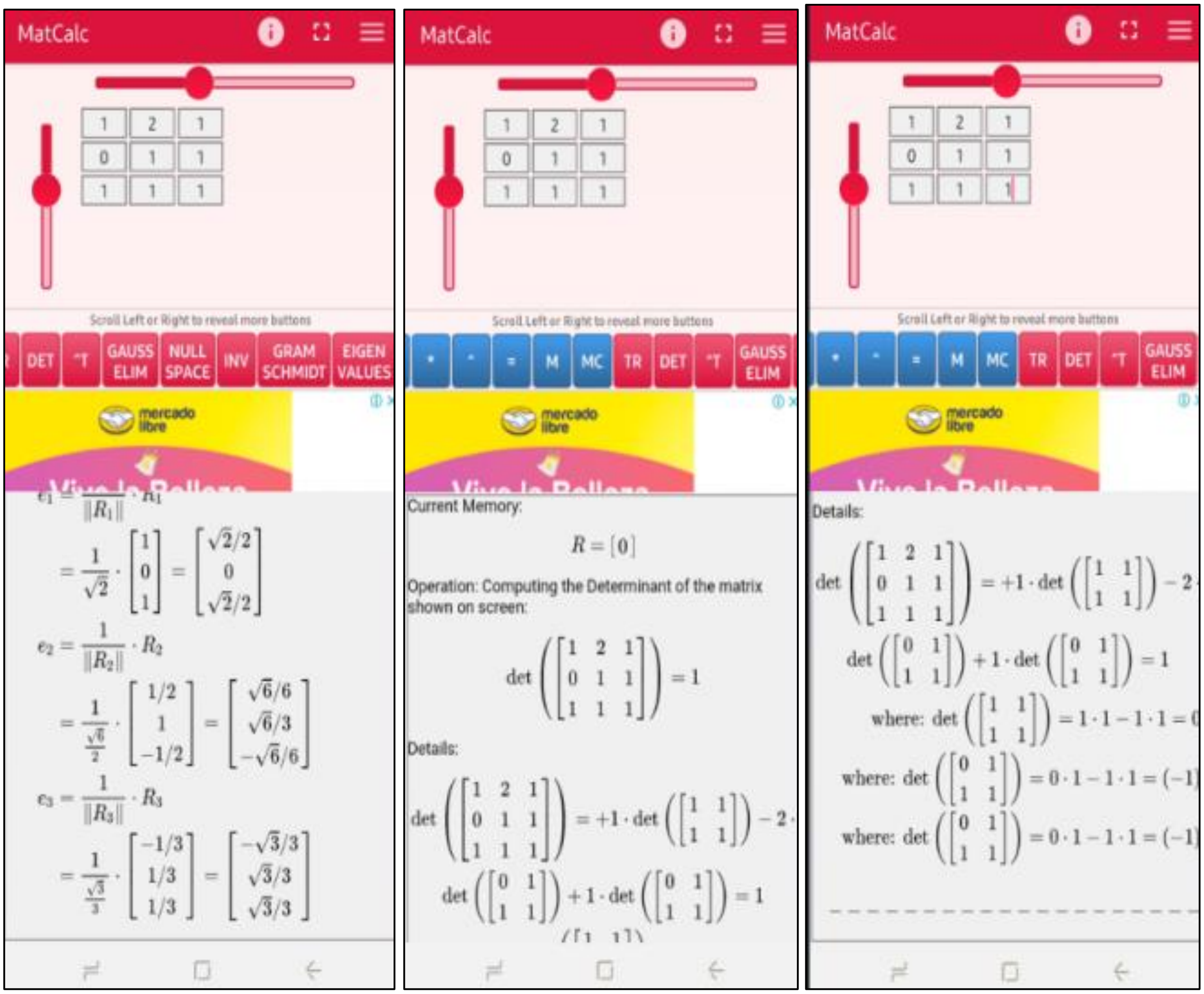


Figura 2.12 Interfaz Matcalc

2.1.8 Mathematica:

Aplicación móvil compatible con sistema Android, disponible para escritorio, es un programa utilizado en áreas científicas, de ingeniería, matemáticas y áreas computacionales. Fue concebido por Stephen Wolfram, quien continúa siendo el líder del grupo de matemáticos y programadores que desarrollan el producto en Wolfram Research, compañía ubicada en Champaign, Illinois. Comúnmente considerado como un sistema de álgebra computacional, Mathematica es también un lenguaje de programación de propósito general.

Por tres décadas Mathematica ha definido la computación técnica y proporcionado el principal entorno de computación para millones de innovadores, educadores, estudiantes y otros, se define como app comercial. Tiene costo para utilizarla, Figura 2.13

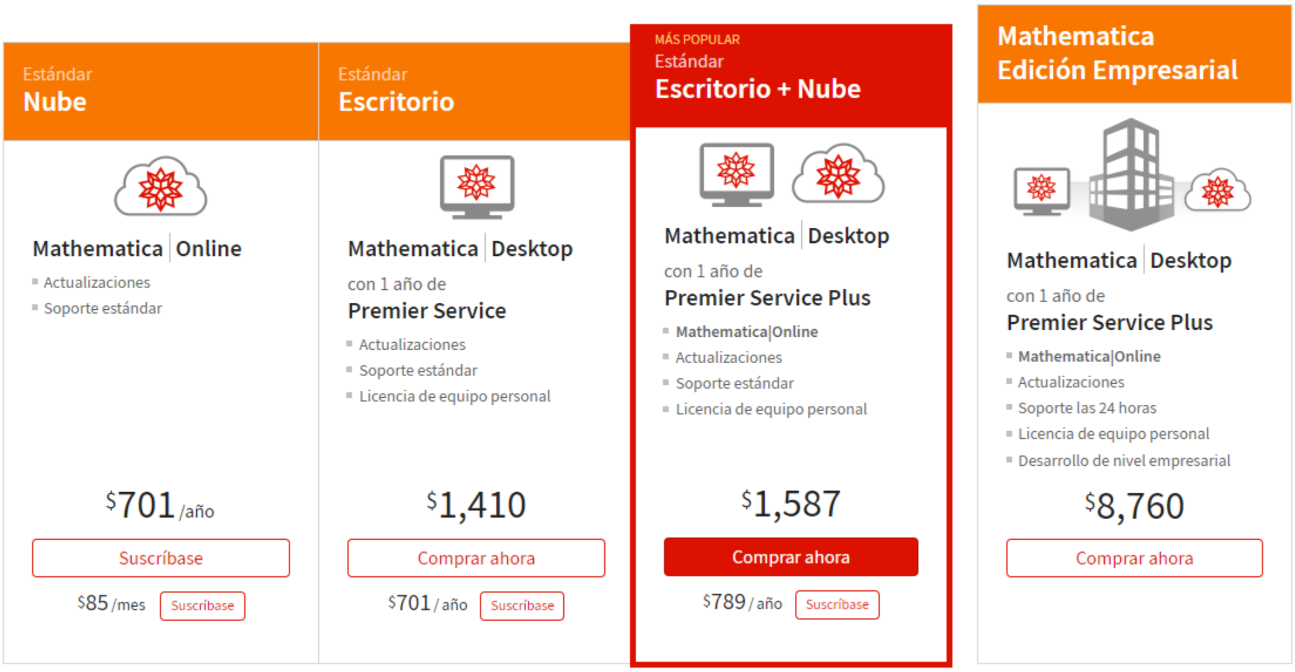


Figura 2.13 Costo Mathematica

Se cuenta con una versión gratuita de quince días. Se restringen algunas funciones para realizar operaciones y no muestra los pasos del procedimiento para llegar al resultado. Se requiere internet para realizar las operaciones y usar la aplicación. Está disponible en el idioma inglés, Figura 2.14 (Wolfram, 2022).

Sobre el tema “Cambio de Base”, obtiene la inversa de una matriz que es una de las operaciones que se realiza en dicho tema.

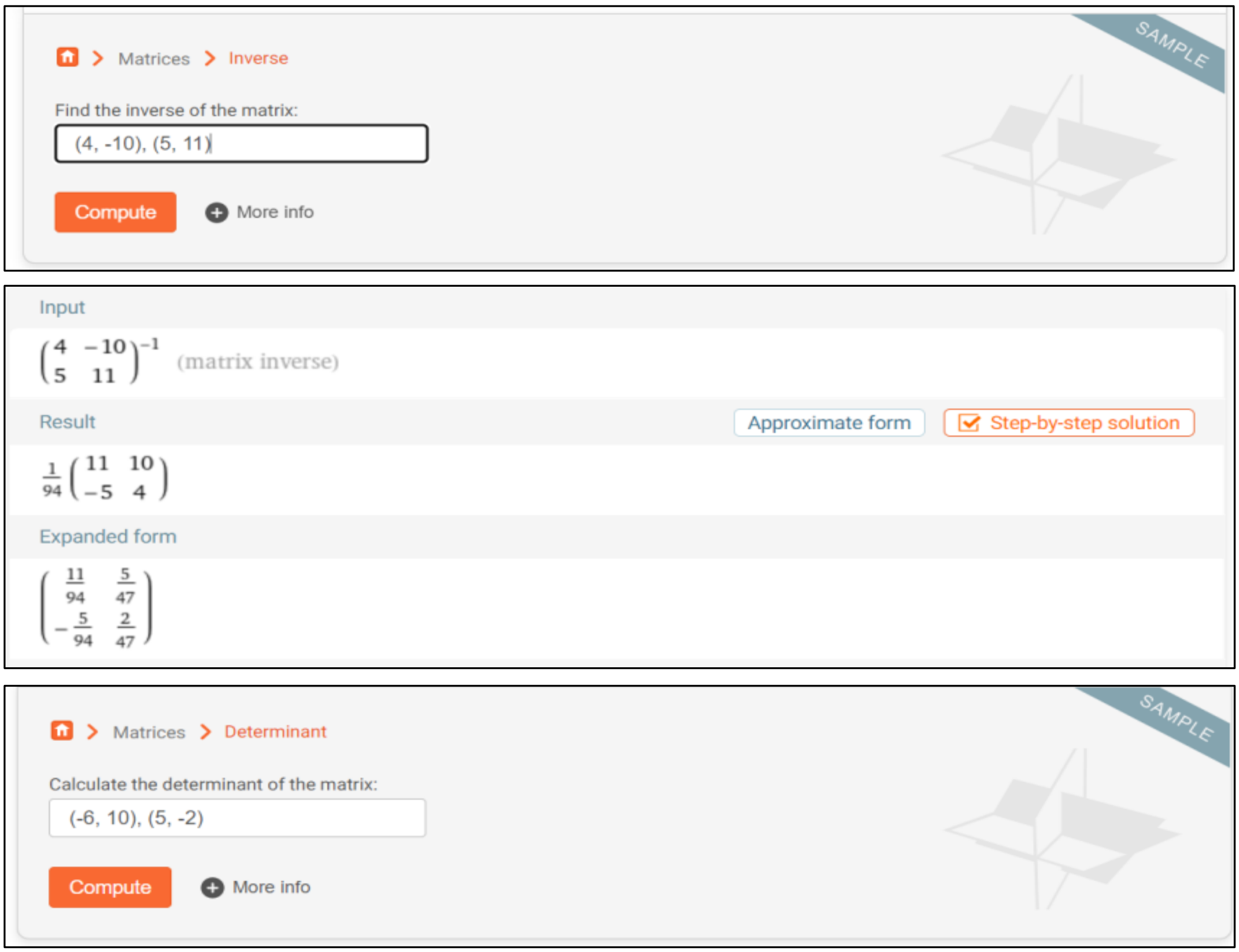


Figura 2.14 Interfaz Mathematica

2.1.8 Symbolab:

Aplicación móvil disponible para sistema Android, disponible para escritorio, consta con más de cien calculadoras, entre otras:

- Calculadora de ecuaciones.
- Calculadora de integrales (antiderivadas).
- Calculadora de derivadas.
- Calculadora de limites.
- Calculadora de desigualdades.
- Calculadora de trigonometría.
- Calculadora de matrices.
- Calculadora de funciones.
- Calculadora de series.
- Calculadora de sistemas EDO.

Requiere internet para su uso y en su defecto descargarla. Contiene anuncios publicitarios, no tiene costo para realizar operaciones, en algunos casos es necesario realizar un pago para ver el procedimiento a seguir para llegar al resultado, se define como app comercial.

Sobre el tema “construcción de una Base Ortonormal”, realiza dicha operación. Tiene costo para ver los pasos a seguir y llegar al resultado, Figura 2.15 (Symbolab, 2022)

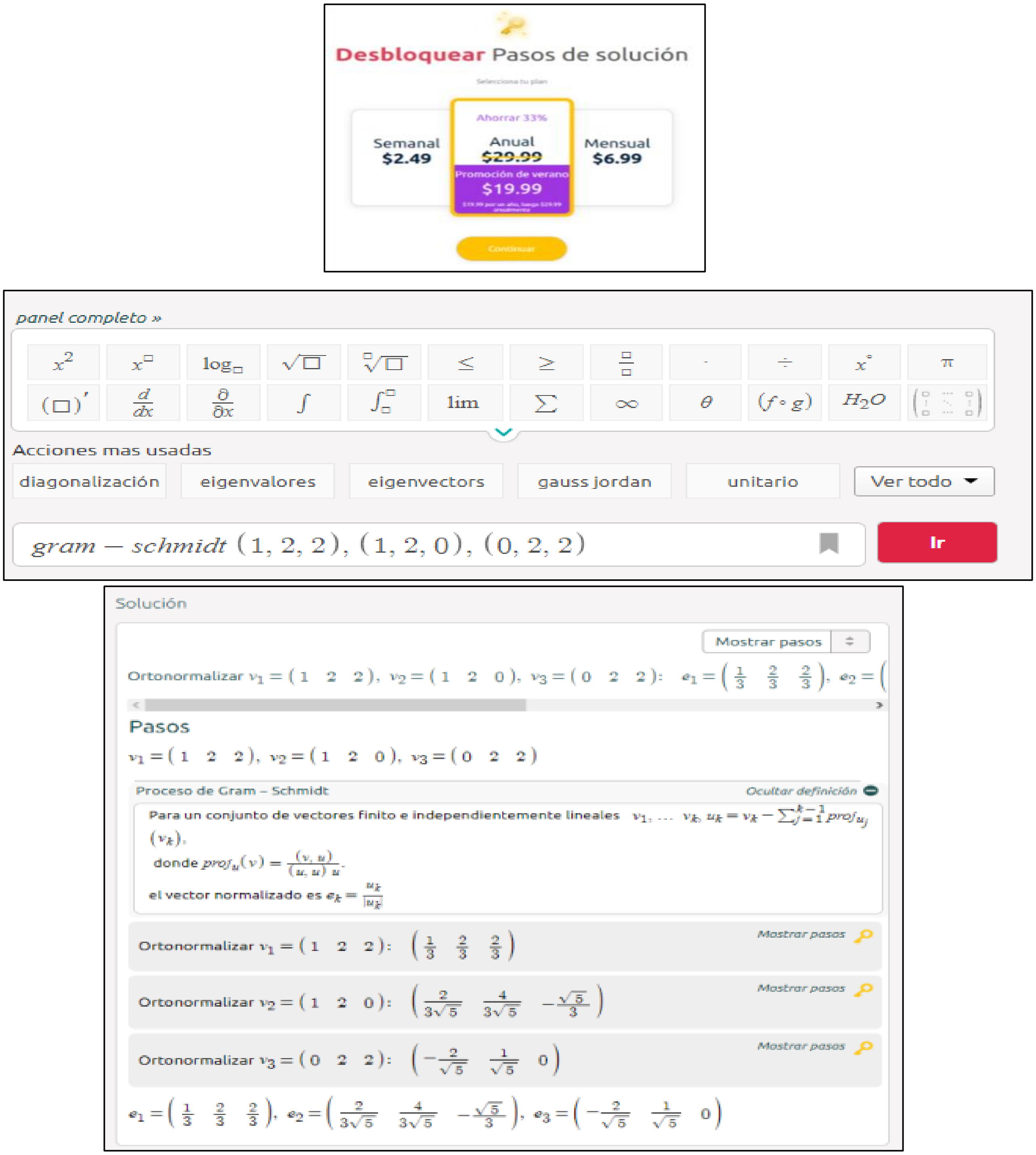


Figura 2.15 Interfaz Symbolab

2.2 Resultados de la evaluación de las aplicaciones

Al término del análisis de cada una de las aplicaciones anteriores se concluye que la mayoría requieren Internet para poder descargarlas y utilizarlas, Symbolab si incluye las operaciones de Base Ortonormal, muestra el resultado y solicita el pago para visualizarlo. El resto de las aplicaciones comprenden una parte de las operaciones sobre determinar una Base y Cambio de Base. Otras contienen anuncios y no muestran los pasos a seguir para llegar al resultado. En la tabla 1.1 se muestra las características funcionales de cada una de las aplicaciones analizadas.

Nombre	Está disponible en web	Está disponible para dispositivos móviles	Determina si un conjunto de vectores es una base en R^n	Realiza cambio de base	Construcción de una base ortonormal	Tipo de app
Algebra lineal básico		X			X	Didáctica
Calculadora de Bases Vectoriales MatBase Apps		X	X			Didáctica
Calculadora Maple	X	X			X	Comercial
Matrix calculator Calculadora de matrices	X				X	Didáctica
Espacios vectoriales		X	X			Didáctica
Linear Algebra		X			X	Comercial
Matcalc		X			X	Ambas
Mathematica	X	X		X		Comercial
Symbolab	X	X			X	Comercial

Tabla 1.1: Características funcionales de las aplicaciones

2.3 Otras Investigaciones

En seguida se muestran algunas investigaciones en las que se utilizan TIC para la enseñanza del Álgebra Lineal. Estrada (2019) expresa el agrado de los alumnos por la aplicación MAXIMA (programa de cálculo en el contexto de estudio del Álgebra Lineal). Dicha aplicación se utilizó en problemas básicos en relaciones de semejanza entre matrices y relaciones de congruencia entre matrices simétricas, que ofrece al alumno los aprendizajes de los temas de la asignatura Álgebra Lineal I y II. La actividad para la resolución de problemas involucrados en los temas anteriores se enfocó en un grupo de estudiantes dirigidos por un maestro, después de esa experiencia se propuso a los estudiantes, sin ayuda del profesor realizar problemas semejantes utilizando la aplicación.
Las actividades dieron como resultado un aprendizaje satisfactorio entre los alumnos. Se sugiere que antes de utilizar MAXIMA se tengan conocimientos de los temas a resolver en dicha aplicación con la finalidad de obtener mayor aprendizaje.

En el TecNM en el área de posgrado de la maestría en Sistemas Computacionales, se impulsa a los estudiantes a desarrollar en sus proyectos aplicaciones que beneficien a las materias ciencias básicas impartidas en las carreras de ingeniería. Es el caso de: García (2020) quien elaboró una aplicación móvil que resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias, así como Duarte (2020) quien desarrolló una aplicación móvil que resuelve y gráfica series de Fourier.

Por su parte, Chávez (2022) desarrolló la aplicación móvil para el aprendizaje de espacios vectoriales, la cual determina la independencia lineal de dos vectores en R^2, tres vectores en R^2, tres vectores en R^3 y dos vectores en R^3, así como el conjunto generador que determina si es o no para dos vectores en R^2, tres vectores en R^3 y dos vectores en R^3, incluyendo la combinación lineal que resuelve dos vectores en R^2, tres vectores en R^2, tres vectores en R^3 y dos vectores en R^3.

Medel et al. (2020) comentan que el Álgebra Lineal cuenta con software que ayudan a la enseñanza-aprendizaje (PEA) de las carreras universitarias donde se lleva esta materia. Desafortunadamente, en los software que estos investigadores analizaron no se encontró uno que cumpliera con todas las expectativas, ya que solo muestran el resultado y no el procedimiento.

Otro hallazgo fue que los alumnos presentaron deficiencias en algunos temas de la asignatura de Álgebra Lineal específicamente:

- Realizar problemas con matrices (suma, resta, multiplicación y multiplicación de un escalar por una matriz).
- Solucionar ecuaciones lineales usando matriz ampliada y el procedimiento de eliminación de Gauss.
- Encontrar la matriz escalonada.
- Obtener el determinante a través de métodos precisos y métodos numéricos.
- Calcular la matriz traspuesta de una matriz.
- Obteniendo la matriz inversa.

Derivado de las cuestiones anteriores se plantean un sistema informático con la finalidad de mejorar la enseñanza del Álgebra Lineal llamado Sofmatrix. Es un sistema intuitivo, apto para solucionar dichas operaciones, observar el procedimiento, así como realizar valoraciones (estas últimas son configurables).

Según Padilla et al., (2022) es importante que los docentes conozcan las aplicaciones informáticas existentes para apoyar el aprendizaje de las matemáticas, en particular de las asignaturas: Cálculo I (diferencial), Cálculo II (integral), Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos. Dentro de dicha investigación se propone utilizar el modelo TPACK (Conocimiento del Contenido Tecnológico Pedagógico) con el que se alcanza la comprensión de la enseñanza a través de la tecnología.

Chávez (2021) comenta que en los planes de estudio de la materia de Álgebra Lineal del TecNM se sugiere el uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC), con la finalidad de desarrollar competencias tecnológicas y facilitar los procesos de enseñanza-aprendizaje junto con el docente.

Con esta la autora desarrolló una aplicación móvil que resuelve ejercicios de combinación lineal, independencia lineal y conjunto generador. La aplicación es gratuita, una vez descargada no requiere Internet, libre de anuncios publicitarios, entre otros.

Delgado et al. (2021) proponen usar juegos didácticos en el Álgebra Lineal para los alumnos de primer año de Ingeniería en Ciencias Informáticas de la Universidad de Ciencias Informáticas UCI utilizando las herramientas de SMProg abarcando todos los temas de la materia antes mencionada. SMProg se enfoca en el aprendizaje, motivación y resolución de problemas de una forma práctica, organizada y se realiza en el menor tiempo posible. Cuenta con tres etapas: aseguramiento del entorno educativo, utilización del juego didáctico propuesto y valoración y retroalimentación de los resultados.

Pérez et al. (2021) utilizaron el programa Scilab para resolver operaciones con matrices, en el que se pueden observar las instrucciones que llevan a su resolución. Los autores concluyen que este último es un programa de apoyo para la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de la Habana, José Antonio Echeverría, específicamente en las materias de Circuitos Eléctricos, considerando que el alumno tiene mayor comprensión en los temas y es independiente para resolverlos individualmente.

CAPÍTULO III. MARCO TEORICO

Con la Aplicación para el Aprendizaje de Bases en un Espacio Vectorial (AABEV), se busca que los resultados obtenidos de dichos temas sean los más parecidos a los que alumnos resuelven en clase. De esta manera es posible que los estudiantes identifiquen los pasos algorítmicos que se realizan para la resolución de los ejercicios antes mencionados. El usuario se puede apoyar en la aplicación para comparar los resultados respecto a los que desarrolla en su cuaderno.

La aplicación permite que los alumnos y los profesores resuelvan dudas que surjan sobre los procedimientos o bien cuando el estudiante este realizando tareas fuera del horario de clase.

Se pretende que la app AABEV sea intuitiva, que no contenga publicidad, que sea gratis, una vez descargada en el dispositivo móvil que permita utilizarla sin conexión a Internet y finalmente que muestre los pasos para obtener el resultado.

3.1 Definiciones

3.1.1 Del Álgebra Lineal

De acuerdo con Grossman y Flores (2012) se muestran las siguientes definiciones:

Base: un conjunto finito de vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots \dots \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ es una base para un espacio vectorial *V* si:

i) $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots \dots \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots \dots \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ genera a *V*.

Matriz de transición: la matriz *A* de *n x n* cuyas columnas están dadas por u_j se denomina matriz de transición de la base B_1 a la base B_2. Esto es:

$$(u_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (u_1)_{B_2} & (u_2)_{B_2} & (u_3)_{B_2} & \dots & (u_n)_{B_2} \end{array} \end{array}$$

Larson (2013) muestran las siguientes definiciones:

Ortogonal: es un conjunto S de vectores en un espacio V con producto interno, todo par de vectores en S son ortogonales.
Ortonormal: si cada vector en el conjunto S es unitario, entonces S es ortonormal.
Proceso de ortonormalización de Gram-Schmit: es una serie de pasos que ayudan a obtener los vectores ortonormales.

3.2 Lenguajes de programación

Python: es un lenguaje de programación de alto nivel más empleado para el desarrollo de software. Se utiliza en diversas plataformas y sistemas operativos, en los que destacan los más comunes, como son: Windows, Mac OS X y Linux.
Además, Python también funciona en dispositivos móviles, incluso, Nokia desarrolló un intérprete de dicho lenguaje para su sistema operativo llamado Symbian.
Puede ser usado en distintos sectores independientemente de la actividad empresarial. Sus principales características lo convierten en un lenguaje muy provechoso:

- Es potente.
- Es flexible.
- Contiene una sintaxis clara y concisa.
- No requiere emplear tiempo a su compilación porque es interpretado.
- Cualquier persona puede cooperar a su desarrollo y divulgación.
- No es necesaria licencia, es gratuito.

(Fernández, 2013)

Android: es un sistema operativo que cuenta con una plataforma abierta dirigida a los dispositivos móviles comprado por Google y Open Handset Allience, para impulsar el desarrollo de aplicaciones en las cuales ningún otro sistema operativo incorpora dichas herramientas.
Está conformado por:

- Sistema operativo, todas las funciones se desarrollan.
- Middleware que posibilita la conexión entre redes.
- Las aplicaciones o API´s que conforman todos los programas que el dispositivo móvil puede desempeñar.

Posee varias características realmente provechosas como:

- Plataforma libre que se basa en el sistema operativo Linux, el cual permite desarrollar o modificar aplicaciones que ya existen con el lenguaje Java.
- Es multitasking, puesto que permite contar con una o más aplicaciones compilando simultáneamente.
- Es compatible con casi todos los hardware existentes en el mercado (tabletas, dispositivos móviles de marcas como: Motorola, Samsung, ZTE, Huawei, Ericsson, entre otros) permitiendo al usuario seleccionar el hardware que cubra sus necesidades.
- Cuenta con un portal llamado Android Market en el cual el usuario tiene acceso a aplicaciones para utilizarlas.
- Es posible realizar actualizaciones del sistema siempre y cuando el dispositivo las soporte.
- Contiene diferentes herramientas tecnológicas como: redes sociales, mensajería instantánea, correo electrónico, modificación y lectura de procesadores de texto, hojas de cálculo, presentaciones, entre otros.
- Con este, es posible adquirir información por medio de documentos Web o libros.
- Tiene el respaldo y la tecnología que le facilita Google.

(Malave y Beauperthuy, 2011)

Android Studio: es un entorno de desarrollo que fue presentando en el año 2013 en Google I/O, desarrollado por Google, se utiliza para desarrollo de aplicaciones Android.

Está basado en IntelliJ donde cambia la compilación, el uso de librerías o paquetes externos comparando con Eclipse.

Se requiere cuatro partes fundamentales para desarrollar en Android Studio:

- Java: es el lenguaje de programación en Android.
- Entorno de desarrollo: se usa para desarrollar aplicaciones.
- Android: cuenta con librerías.

(Luján, 2019)

Chaoquopy: proporciona las herramientas que se requieren para incluir componentes de Python en una aplicación de Android, incluyendo:

- Integración completa con el sistema de compilación Gradle estándar con Android Studio.
- API simples para llamar al código Python desde Java/Kotlin y viceversa.
- Una amplia gama de paquetes de Python de terceros, incluidos SciPy, OpenCV, TensorFlow y muchos más (Delgado, 2022).

SymPy: es una librería de Python, gratuita gracias a su licencia BSD. El código fuente está disponible para el público en línea por medio de github. El módulo Sympy Gamma permite resolver problemas matemáticos: aritméticos, algebraicos, trigonométricos, matemáticas discretas y cálculo (Rodríguez, Rodríguez y Bautista, 2021).

Para instalar Sympy se captura el código siguiente Figura 3.16:

```
pip install sympy
```

Figura 3.16 Código instalación Sympy

Metodología de Ingeniería de Software Educativo (ISE)

Según Abud (2009) esta metodología se divide en dos etapas. La primera incluye los requisitos, análisis y diseño preliminar, mientras que en la segunda si inicia con el desarrollo de la aplicación como se puede ver en la Figura 3.17, tiene seis etapas:

- Fase conceptual, en la cual se determinan los requisitos de la aplicación.
- Análisis y diseño inicial, en esta se plantea la arquitectura de la aplicación.
- Plan de iteraciones, en ella se distribuye el sistema en partes pragmáticas que aprueban principalmente la administración del desarrollo.
- Diseño computacional, en el cual se realiza un diseño computacional a detalle.
- Desarrollo, en esta etapa se ejecuta la arquitectura en forma incremental (iteración por iteración).
- Despliegue, en esta la versión final se presenta al usuario.

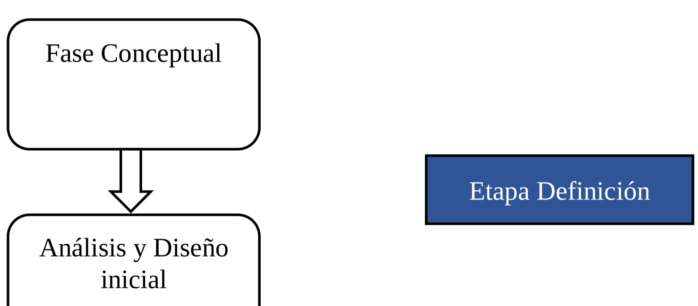


Figura 3.17 Metodología ISE

Lucidchat

Es un programa que ayuda a realizar diagramas (ejemplo: diagramas de flujo, mapas mentales, diseños UML, prototipos de software, entre otros), donde permite a los usuarios poder gestionar al mismo tiempo la diagramación según sus necesidades con solo tener Internet, ya que no es necesario descargar ningún software, se trabaja en web. Cuenta con versión gratuita, solo es necesario registrarse con un usuario y contraseña para poder acceder, si se requieren más funciones se realiza el pago del plan que sea el adecuado.

Fidelidad

Según Camacho (2019), el constructo “fidelidad” se considera como una norma con la cual es posible verificar y revisar las perturbaciones epistémicas resultado de asociar conocimiento matemático a los desarrollos de aplicaciones del tipo app. El interés con ese objeto es minimizar dichas perturbaciones, de modo que las expresiones del conocimiento matemático enseñado en el aula sean las mismas que deben aparecer en la interfaz de las aplicaciones.

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999), habla del conocimiento de las matemáticas, en el cual participan personas e instituciones. En este marco teórico las técnicas matemáticas utilizadas en el aula corresponden a elementos tecnológicos contenidos en Organizaciones Matemáticas (OM).

Una organización matemática también es reconocida como Praxeología. La cual es relacionada con ejercicios de la matemática como que pueden ser actividades, problemas, tareas, entre otros.

Las Praxeologías se representan por medio de los siguientes símbolos:

$\boldsymbol{[T, \tau, \theta, \Theta]}$**,** donde:

$\boldsymbol{T}$ Son las tareas, proyecto o actividad que los alumnos resuelven

$\boldsymbol{\tau}$ Es la técnica, que ayuda a resolver una tarea

$\boldsymbol{\theta}$ La tecnología, que proporciona diferentes técnicas una vez descritas y explicadas

$\boldsymbol{\Theta}$ Es la teoría, que sustenta la OM.

Así, en la expresión $\boldsymbol{[T, \tau, \theta, \Theta]}$ se encuentran dos bloques: uno práctico – técnico y otro tecnológico – teórico.

- $\boldsymbol{[T, \tau,]}$**:** Bloque práctico – técnico. Este bloque se identifica con el saber – hacer.
- $\boldsymbol{[\theta, \Theta]}$**:** Bloque tecnológico – teórico. Este bloque se identifica con el saber.

Con respecto a las Praxeologías, Chevallard (1999), señala: “lo deseable es que en las instituciones las actividades humanas deberían estar regidas por Praxeologías bien adaptadas que permitiesen realizar todas las tareas deseadas de una manera eficaz, segura e inteligible”. El autor comenta que ese mundo ideal no existe y que las instituciones aplican la “dinámica Praxeológica”, porque las Praxeologías envejecen; sus componentes teóricos, tecnológicos, técnicos se desactualizan cuando surgen nuevas técnicas y tecnologías.

Una Praxeología sufre modificaciones, puede que en un futuro haya nuevas tareas y técnicas, incluidas por terceras personas que pertenezcan a una empresa, podría ser por un maestro o por nuevas necesidades que se vallan presentando en los salones de clase, en programas de estudio, entre otros (Morales, 2013).

A continuación, se muestra esquematizado en una organización matemática el ejemplo de un ejercicio relacionado con el tema de Base, obtenido de Grossman y Flores (2012).
Determine si s es una base para el espacio vectorial dado:

τ: $s = \begin{Bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{Bmatrix}$ para $\mathbb{R}^2$

Paso 1:

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (3 \cdot 4) - (-2 \cdot 4) = 12 + 8 = 20$ Linealmente independiente.

Paso 2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \vdots & x \\ -2 & 4 \vdots & y \end{bmatrix} R_1 \rightarrow \frac{1}{3} R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 \vdots & 1/3_x \\ 0 & 20/3 \vdots & {}^{2}\!/_{3_x}/y \end{bmatrix} R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \vdots 1/5_x - & 1/5_y \\ 0 & 1 \vdots 1/10_x + & 3/20_y \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow \frac{-4}{3} R_1 + R_2 \\ R_2 \rightarrow \frac{3}{20} R_2 \end{matrix}$$ Si es un conjunto generador

$$a_1 = \frac{1}{5_x} - \frac{1}{5_y}$$

$$a_2 = \frac{1}{10_x} + \frac{3}{20_y}$$

Por lo tanto, es una base de $\mathbb{R}^2$

Organización matemática [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$]

T: Proceso de Bases

Según Grossman y Flores (2012), un conjunto finito de vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ es una base para un espacio vectorial V si:

τ: i) $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ genera a V.

$\boldsymbol{\theta}$: **Teorema:**

Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ es una base para V y si V € V, entonces existe un conjunto único de escalares C_1, C_2,……Cn tales que $V = C_1\overrightarrow{v_1} + C_2\overrightarrow{v_2} + \ldots.. Cn\overrightarrow{v_n}\}$

$\boldsymbol{\theta}_1$**: Demostración:**

Existe cuando menos un conjunto de dichos escalares porque $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ genera a V. Suponga entonces que V se puede escribir de dos maneras como una combinación lineal de los vectores de la base.

Es decir:

$$V = C_1\overrightarrow{v_1} + C_2\overrightarrow{v_2} + \ldots\ldots.. + Cn\overrightarrow{v_n} = d_1\overrightarrow{v_1} + d_2\overrightarrow{v_2} + \ldots..dn\overrightarrow{v_n}$$

Entonces restando se obtiene la ecuación:

$$(C_1 - d_1)\,\overrightarrow{v_1} + (C_2 - d_2)\,\overrightarrow{v_2} + \ldots.. + (Cn - dn)\,\overrightarrow{v_n} = 0$$

Θ: **Algebra Lineal**

A continuación, se muestra un ejemplo de un ejercicio resuelto de Cambio de Base obtenido de Grossman y Flores (2012), esquematizado a través de una organización matemática.

Determine el vector $\mathbf{X}_{B1}$:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} x_c$$

$$B^{-1}{}_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 4 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \to 1/4\,R_1 \\ R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to 4R_1 + R_3 \end{array}$$

$$B^{-1}{}_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \to -3/2\,R_2 + R_1 \\ R_2 \to -1/8\,R_2 \end{array}$$

$$B^{-1}{}_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1/8 & 5/32 & 3/16 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/16 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \to -1/8\,R_3 + R_1 \\ R_2 \to -1/4R_3 + R_2 \\ R_3 \to 1/10R_3 \end{array}$$

$$B^{-1}{}_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 23/160 & 3/16 & -1/80 \\ 0 & 1 & 0 & 3/80 & -1/8 & -1/40 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 0 & 1/10 \end{array}\right]$$

$$B^{-1}{}_1 = \begin{bmatrix} 23/160 & 3/16 & -1/80 \\ 3/80 & -1/8 & -1/40 \\ 1/10 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 221/160 \\ -119/80 \\ 11/5 \end{bmatrix}$$

Organización matemática [$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Theta}$]

T: Proceso de Cambio de Base

θ: Teorema:

Sea B_1 y B_2 bases para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces para todo X € V

$$X_{B2} = A_{XB1}$$

θ_1: Demostración:

Se usa la representación de X dada:

$$X = b_1U_1 + b_2U_2 + \ldots\ldots + bnUn$$

Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

Sea C la matriz de transición de B_2 a B_1. Entonces se tiene:

$$X_{B1} = C_{XB2}$$

Pero $X_{B2} = A_{XB1}$ y sustituyendo esto en el anterior se obtiene:

$$X_{B1} = CA_{XB1}$$

Θ: **Algebra Lineal**

A continuación, se muestra un ejemplo de un ejercicio resuelto de Ortonormalización de Gram-Schmidt obtenido de Grossman y Flores (2012).

$$\tau: \{\langle\overrightarrow{v_1}|\overrightarrow{v_2}\rangle\} = \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{Bmatrix}$$

Paso 1:

$|\overrightarrow{v_1}| = \sqrt{0^2 + \quad 1^2} = 1$

$U_1 = \frac{0}{1} 1 = \frac{0}{1}$

Paso 2:

$\overrightarrow{v'_2} = \overrightarrow{v_2} - (\overrightarrow{v_2} \cdot \; U_1) U_1$

$\overrightarrow{v'_2} = \frac{2}{5} - (\frac{2}{5} \cdot \frac{0}{1}) \frac{0}{1}$

$\overrightarrow{v'_2} = \frac{2}{5} - 5\frac{0}{1} = \frac{2}{5} - \frac{0}{5} = \frac{2}{0}$

Paso 3:

$|\overrightarrow{v_2}| = \sqrt{2^2 + \quad 0^2} = 2$

$U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \frac{1}{0}$

Base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ $(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} , \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix})$

Organización matemática [$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Theta}$]

T: Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

El conjunto de vectores ($\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots\ldots\ldots, \overrightarrow{v_n}$) es un conjunto ortonormal en V si:

τ: ($\overrightarrow{v_i}$ $\overrightarrow{v_j}$) = o para i ≠ j

$\boldsymbol{\theta}$: Teorema:

Sea *H* un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^2$. Entonces *H* tiene una base ortonormal.

$\boldsymbol{\theta}_1$: Demostración:

Paso 1: Elección del primer vector unitario

$$U_1 = \frac{\overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_1}|}$$

Paso 2: Elección de un segundo vector ortogonal a U_1

$$\overrightarrow{v'_2} = \overrightarrow{v_2} - (\overrightarrow{v_2} \cdot U_1)U_1$$

Paso 3: Elección de un segundo vector unitario

$$U_2 = \frac{\overrightarrow{v'_2}}{\overrightarrow{v_2}}$$

Paso 4: Continuación del proceso.

$$\overrightarrow{v'_{k+1}} = \overrightarrow{v_{k+1}} - (\overrightarrow{v_{k+1}} \cdot U_1) - (\overrightarrow{v_{k+1}} \cdot U_2) - \cdots - (\overrightarrow{v_{k+1}} \cdot U_k)U_k$$

$$\overrightarrow{v'_3} = \overrightarrow{v_3} - \left(\overrightarrow{v_3} \cdot \vec{U}_1\right)\vec{U}_1 - (\overrightarrow{v_3} \cdot \vec{U}_2)\,\vec{U}_2$$

Paso 5:

$$U_3 = \frac{\overrightarrow{v_3}}{\overrightarrow{v_3}}$$

Θ: **Algebra Lineal**

CAPÍTULO IV. DESARROLLO

4.1 Metodología

Para desarrollar la Aplicación AABEV utilizamos la metodología de Ingeniería de Software Educativo (ISE). Decidimos este método ya que apoya en el desarrollo de aplicaciones móviles, la cual contempla dos etapas que favorecen un proceso confiable y práctico (Abud, 2009).

4.1.1 Fase conceptual

La aplicación AABEV está orientada a los estudiantes de las carreras de Ingeniería. Es destinada a resolver problemas de la materia Álgebra Lineal, particularmente de los temas de Base, Cambio de base y Base Ortonormal. Se pretende que dicha aplicación cubra las necesidades de profesores y alumnos, y sirva de apoyo en el desarrollo del plan de estudios que pertenece al TecNM.

En el primer tema, Base, (determinar si un conjunto de vectores son o no una base), es necesario resolver si los vectores son linealmente independientes y si generan al espacio vectorial V. Si no se cumple con estas dos condiciones se determina que no es una base. En seguida se muestra un ejemplo tomado de Grossman y Flores (2012): determine si S es una base para el espacio vectorial dado:

S = $\left\{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right\}$ para $\mathbb{R}^2$

Se debe verificar que los vectores sean linealmente independientes obteniendo el determinante de la matriz dada. Si el determinante es igual a cero entonces son linealmente dependientes de lo contrario serian independientes y se cumpliría con la primera regla, es decir:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (3 \cdot 4) - (-2 \cdot 4) = 12 + 8 = 20$$

Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

Una vez verificada la primera regla se revisa si los vectores generan al espacio vectorial R^2 realizando el proceso de Gauss, de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & x \\ -2 & 4 & y \end{bmatrix} R_1 \rightarrow \frac{1}{3} R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 1/3_x \\ 0 & 20/3 & 2/3_{x+y} \end{bmatrix} R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5_x - 1/5_y \\ 0 & 1 & 1/10_x + 3/20_y \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \rightarrow -4/3\, R_2 + R_1 \\ R_2 \rightarrow 3/20\, R_2 \end{matrix}$$

$a_1 = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y$

$a_2 = \frac{1}{10}x + \frac{3}{20}y$

Al encontrar que el sistema tiene una única solución, se determina si efectivamente es un conjunto generador de R2 . En el caso mostrado este corresponde a un conjunto generador.

Si es una base por ser linealmente independiente y conjunto generador.

En el tema de Cambio de Base, se proporcionan dos bases y se solicita que un vector quede en términos de una de estas. Se verifica si el vector está en forma canónica, si no lo estuviera se multiplica el vector por la matriz de la base a la que pertenece. Si el vector está en forma canónica el procedimiento es multiplicarlo por la matriz de transición (inversa) de la base solicitada.

En seguida se muestra un ejemplo tomado de Grossman y Flores (2012): Determine la matriz de transición de la base canónica a la base D.

D = $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ E = $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$ Escriba $\vec{x}_{E} = \begin{bmatrix}5\\-1\\3\end{bmatrix}$ en términos de la base D.

Hacer canónico el vector $\vec{x}_{E}$ multiplicándolo por la base E.

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix}\vec{x}_{C}$$

Se realiza el cambio de base, obteniendo la matriz de transición que es la matriz inversa de la base D, una vez obtenida se multiplica por el vector canónico:

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] R_2 \to -1R_1 + R_2$$

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] R_2 \to -1R_2$$

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right] \begin{matrix}R_1 \to -1R_2 + R_1\\R_3 \to -1R_2 + R_3\end{matrix}$$

$$D^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2\\0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2\\0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2\end{array}\right] \begin{matrix}R_1 \to -1R_3 + R_1\\R_2 \to 1R_3 + R_2\\R_3 \to 1/2\, R_3\end{matrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\1/2 & -1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}\overrightarrow{x_c}$$

Finalmente, en el tema de Base Ortonormal, se parte de un conjunto de vectores que son una base de un espacio vectorial y se pide que se determine una base ortonormal, para esto último se utiliza el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt el cual corresponde a un conjunto de pasos que ayudan a obtener los vectores unitarios que formarán dicha base. En seguida se muestra un ejemplo obtenido de Grossman y Flores (2012)

Aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a los siguientes vectores:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Paso 1:

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$U_1 = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\frac{1}{5} = \begin{matrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{matrix}$$

Paso 2:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot U_1)\, U_1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{5}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{9}{25}\\\frac{12}{25}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{16}{25}\\-\frac{12}{25}\end{bmatrix}$$

Paso 3:

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{(\frac{16}{25})^2 + (-\frac{12}{25})^2} = \frac{4}{5}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix}\frac{16}{25}\\-\frac{12}{25}\end{bmatrix}\frac{5}{4} = \begin{bmatrix}\frac{16}{5}\\-\frac{48}{25}\end{bmatrix}$$

Base ortonormal en $\mathbb{R}^2 \left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\frac{16}{5}\\-\frac{48}{25}\end{bmatrix}\right\}$

4.1.2 Análisis y Diseño inicial

Se pretende que la aplicación AABEV sea gratuita, no requiera Internet una vez descargada y muestre el procedimiento lo más parecido a los vistos en clase.

Tendrá una interfaz intuitiva y fácil de usar, incluidas pequeñas instrucciones para explicarle al alumno su funcionamiento.

4.1.3 Plan de Iteraciones

Se desarrollará en primer lugar el tema Base Ortonormal, seguido de Cambio de Base, para finalizar con el tema de Determinar una Base. Se utilizará el lenguaje Python para la codificación, al concluirla se realizarán las pruebas correspondientes para verificar que los resultados sean los esperados, mostrar que el procedimiento sea el correcto y cubra las necesidades de profesores y alumnos.

4.1.4 Diseño computacional

Se realizaron los bosquejos para la aplicación AABEV en el programa Lucidchart, con el objetivo que sea intuitiva para el usuario.

Se desarolló el siguiente prototipo para la interfaz principal Figura 4.18:

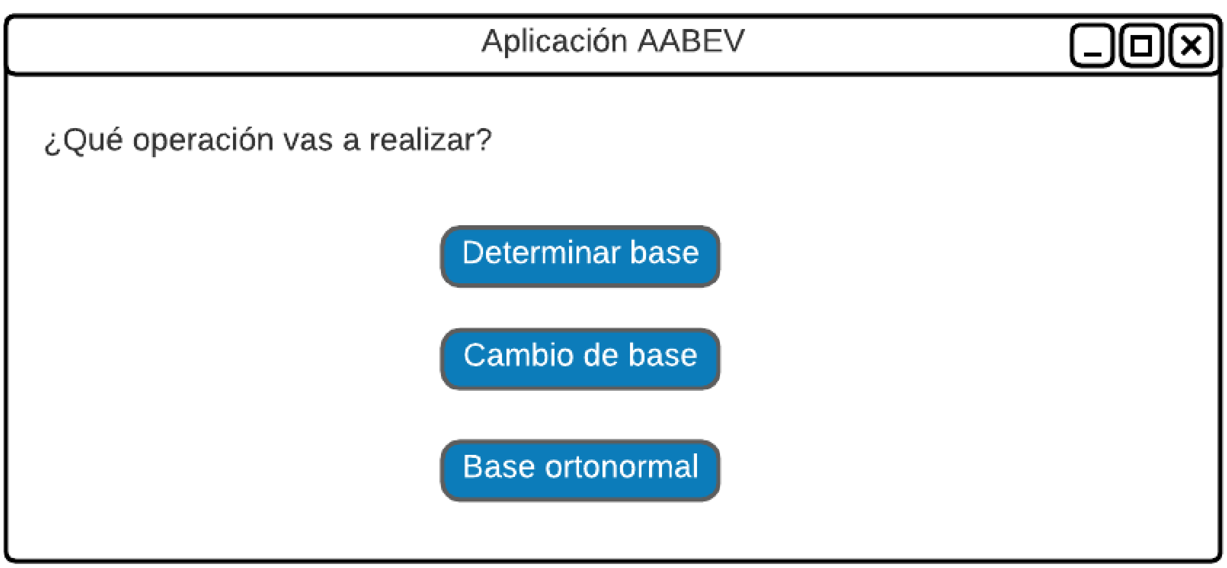


Figura 4.18 Prototipo pantalla principal

El siguiente prototipo pertenece al tema de Determinar Base, Figura 4.19:

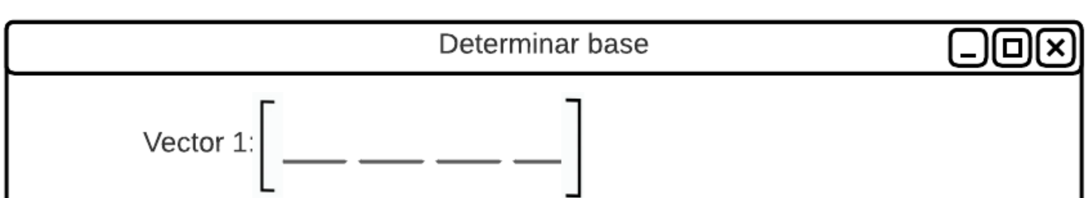


Figura 4.19 Prototipo del tema Determinar Base

Además, se diseñó el prototipo para el tema de Cambio de Base, Figura 4.20:

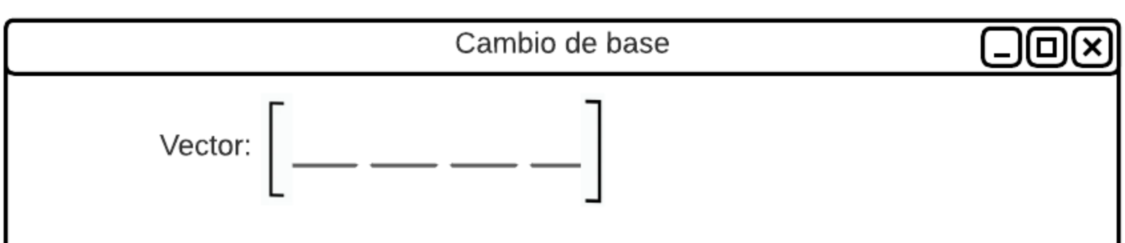


Figura 4.20 Prototipo del tema Cambio de Base

También, se realizó el prototipo para el tema de Base Ortonormal, Figura 4.21:

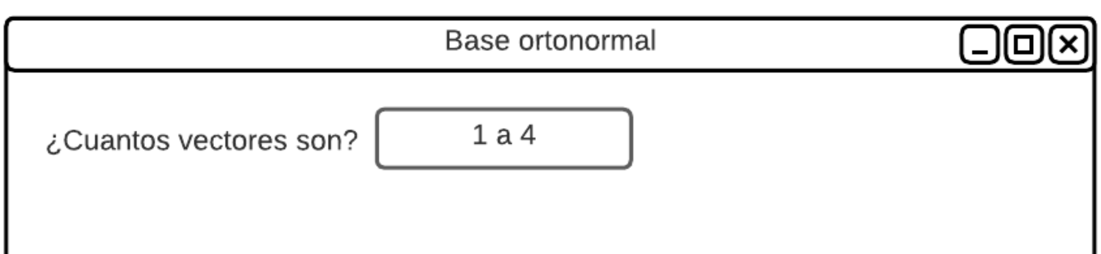


Figura 4.21 Prototipo de tema Base Ortonormal

Como mencionamos el código de programación fue desarrollado en el lenguaje Python, este último contiene la librería Sympy la cual apoya en la realización de operaciones con matrices y fracciones, las cuales se utilizan en los ejercicios que resuelve la aplicación. En seguida se muestra los códigos de programación desarrollados para cada uno de los temas comentados anteriormente.

Determina una Base Figura 4.22:

```
def Generador(Matriz):
  Matriz = Matrix(Matriz)
  mtr = Matriz.copy()
  Shape = mtr.shape
  abc = [chr(i) for i in range(ord('a'), ord('z') + 1)]
  Res = Matrix(abc[-Shape[0]:])
  try:
    mtr.inv()
  except:
    print("La matriz no tiene inversa")
    return None
  for j in range(Shape[0]):
    if mtr[j, j] == 0:
      print(j)
      for i in range(Shape[0]):
        if mtr[i, j] != 0:
          print("Se cambia la fila", j + 1, "por la fila", i + 1)
          Res.row_swap(j, i)
          mtr.row_swap(j, i)
          pprint(mtr)
          pprint(Res)
    Res[j, :] = Res[j, :] * 1 / mtr[j, j]
    mtr[j, :] = mtr[j, :] * 1 / mtr[j, j]
    if mtr[j, j] != 1:
      print("Convertir el elemento", j + 1, ",", j + 1, "en 1")
      Res[j, :] = Res[j, :] * 1 / mtr[j, j]
      mtr[j, :] = mtr[j, :] * 1 / mtr[j, j]
      pprint(mtr)
      pprint(Res)
    else:
      print("El elemento", j + 1, ",", j + 1, "ya es 1")
    for i in range(j + 1, Shape[0]):
      if mtr[i, j] != 0:
        print("Convertir el elemento", i + 1, ",", j + 1, "en 0")
        Res[i, :] = Res[i, :] - (Res[j, :] * mtr[i, j])
        mtr[i, :] = mtr[i, :] - (mtr[j, :] * mtr[i, j])
        pprint(Res)
      else:
        print("El elemento", i + 1, ",", j + 1, "ya es 0")
  for j in range(Shape[0] - 1, -1, -1):
    for i in range(j - 1, -1, -1):
      if mtr[i, j] != 0:
        print("Convertir el elemento", i + 1, ",", j + 1, "en 0")
        Res[i, :] = Res[i, :] - (Res[j, :] * mtr[i, j])
```

Figura 4.22 Parte del código del tema Determinar Base

Código para el tema de Cambio de Base Figura 4.23:

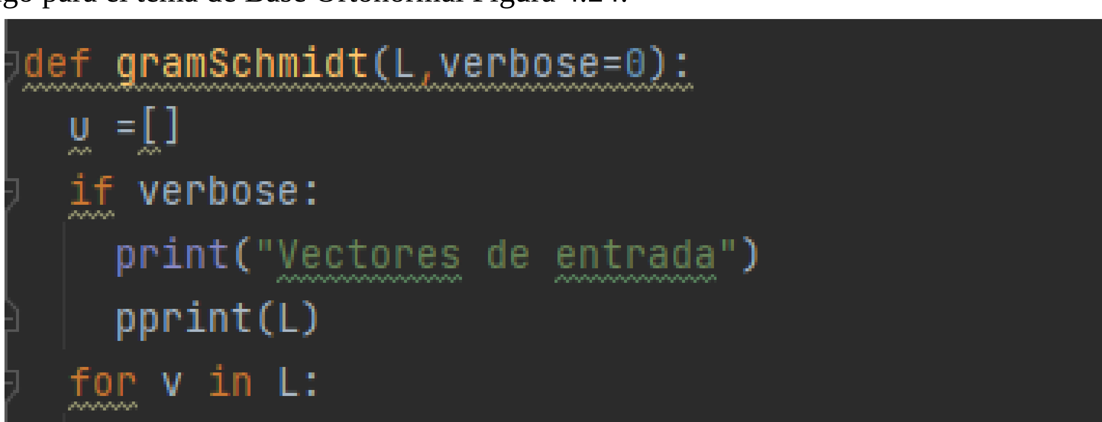
```
def inversa(v):
    A = v.copy()
    Shape = A.shape
    Res = eye(Shape[0])
    try:
        A.inv()
    except:
```

Desarrollo

```python
                print("Convertir el elemento", i+1,",", j+1, "en 0")
                Res[i, :] = Res[i, :] - (Res[j, :] * A[i, j])
                A[i, :] = A[i, :] - (A[j, :] * A[i, j])
                pprint(A)
                pprint(Res)
            else:
                print("El elemento", i+1,",", j+1, "ya es 0")
    return Res
```

Figura 4.23 Parte del código del tema Cambio de Base

Código para el tema de Base Ortonormal Figura 4.24:



```
def gramSchmidt(L,verbose=0):
  u =[]
  if verbose:
    print("Vectores de entrada")
    pprint(L)
  for v in L:
```

Figura 4.24 Parte del código del tema Base ortonormal

4.1.5 Pruebas de código de los temas Determinar Base, Cambio de Case y Base Ortonormal:

Se realizaron pruebas con estudiantes quienes utilizaron la aplicación en consola y resolvieron problemas que precisaron de los tres códigos de los temas mencionados anteriormente con la finalidad de detectar posibles errores, se observaron los siguientes resultados. En el tema Determinar Base se detectó que al capturar los vectores la aplicación los ordenaba por renglón en lugar de por columna. Para corregir esta afectación, en el código se incluye la traspuesta con la finalidad de que los vectores capturados se muestren de forma vertical. En seguida se muestra el código ya corregido Figura 4.25:

```
def matriz():
    global matr
    dimstr = int(input("¿Cuantos vectores son?\n"))
    matr = []
    for i in range(dimstr):
        matrizstr = input(f"Ingrese el vector {i + 1} separados por comas\n")
        matr.append(matrizstr.split(","))
    return Matrix(matr).T, dimstr
```

Figura 4.25 Código corriendo en función matriz

Continuando con el mismo tema, se detectó que la interpretación de los resultados se mostraba incorrectamente. En el código se leía únicamente una matriz de tamaño 3 por 3, fue cambiado por el tamaño de matriz que el usuario desee capturar (nm), en el código que se muestra en la Figura 4.26 se sombreó en color azul la variable “a” que guarda la matriz que se captura en la interfaz.

```
    else:
        conjunto = False
        print("El conjunto de vectores no pertenecen a un conjunto generador")
    return mtr, Res, a, conjunto
```

Figura 4.26 Código corriendo en interpretación de resultados

4.1.6 Desarrollo

Se realizaron las interfaces de usuario de los temas Determinar base, Cambio de base y Ortonormalización en Android Studio, cuando se accede desde el teléfono móvil, se muestra tres botones que permiten resolver los ejercicios de los temas mencionados anteriormente, la interfaz principal se muestra de la siguiente manera Figura 4.27:

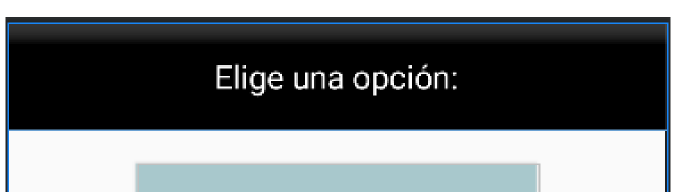


Figura 4.27 Interfaz principal

La interfaz gráfica del tema Determinar base, cuenta con instrucciones de llenado para los campos, en primer lugar se debe contestar cuantos vectores son los que se van a capturar en pantalla, como segundo lugar se contesta que dimensión tienen los vectores y se da clic en el botón “Empezar”, la aplicación habilita el número de campos según el número de vectores y dimensión capturados, se deben ingresar los vectores de forma horizontal, vienen identificados como V1, V2, V3 y V4, una vez capturados los vectores se da clic en el botón

“Resultado”, la aplicación muestra el resultado correspondiente, también se cuenta con el botón “Limpiar” donde la aplicación vacía los campos capturados quedando disponibles para nueva captura, si se desea ver el procedimiento se da clic en el botón “Procedimiento”, la interfaz de Determinar base quedó de la siguiente manera Figura 4.28:

Figura 4.28 Interfaz de usuario Determinar base

Una vez que el usuario desea visualizar el procedimiento, la aplicación lo dirige a otra interfaz gráfica elaborada para ello, se muestra en pantalla el procedimiento, contando con los botones de “Alejar” y “Acercar” para administrar el tamaño de letra en dicha pantalla, quedando de la manera siguiente Figura 4.29:

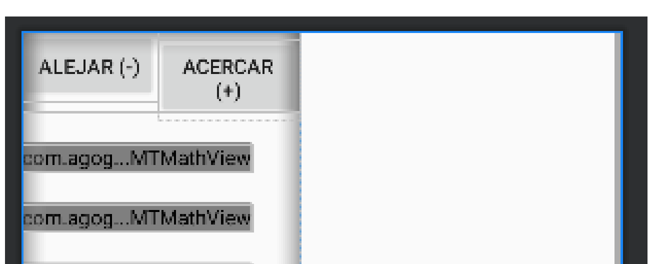


Figura 4.29 Pantalla de muestra el procedimiento del tema Determinar base

En el segundo botón de la interfaz principal, la aplicación dirige al tema cambio de base, donde se debe capturar el vector, después contestar en que base está el vector que se va a capturar si en B1, B2 o está en base canónica, se da clic en el botón “Empezar”, la aplicación habilita los campos en la B1 y B2 de acuerdo con la dimensión del vector capturado. Una vez capturados los datos solicitados se da clic en el botón “Resultado”, la aplicación muestra el resultado correspondiente, si se desea visualizar el procedimiento se da clic en el botón “Procedimiento”, las funciones anteriores se muestran en la Figura 4.30:

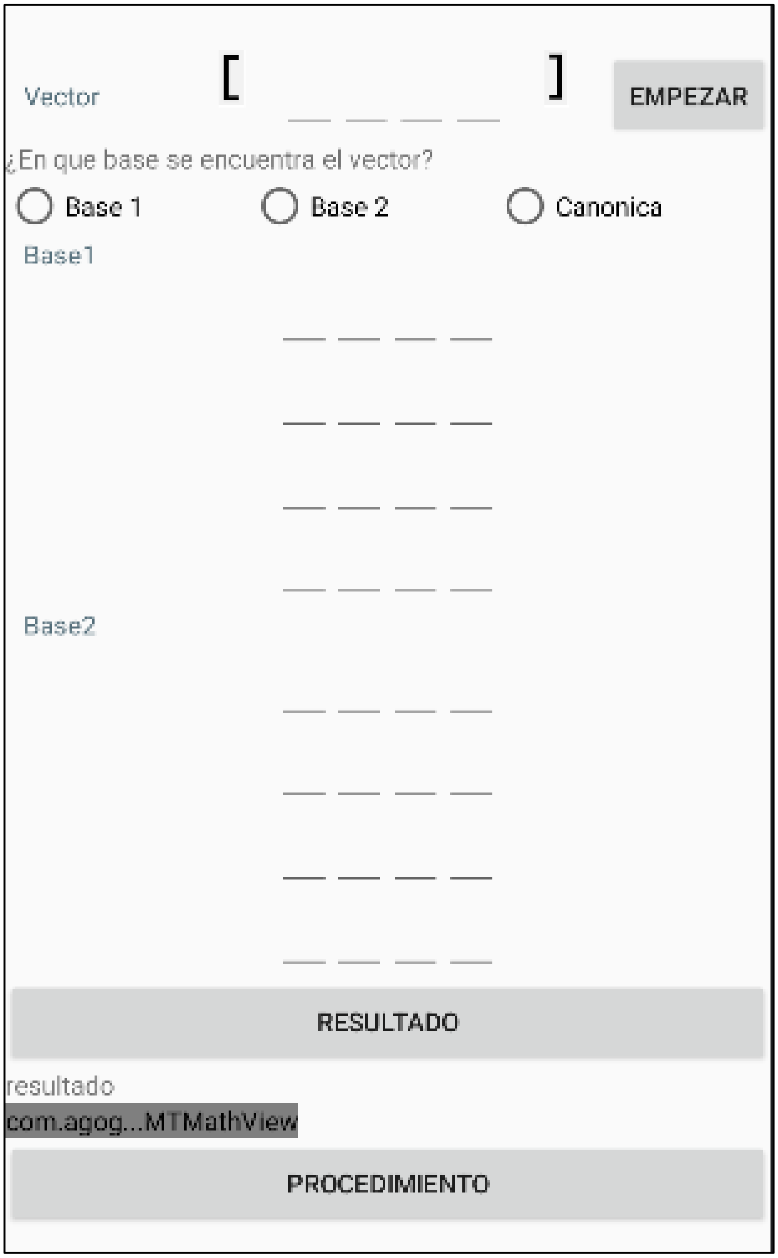


Figura 4.30 Interfaz gráfica del tema Cambio de base

Cuando el usuario desea ver el procedimiento, la aplicación lo dirige a otra interfaz gráfica elaborada para ello, se muestra en pantalla el procedimiento, contando con los botones de “Alejar” y “Acercar” para administrar el tamaño de letra en dicha pantalla, quedando de la manera siguiente Figura 4.31:

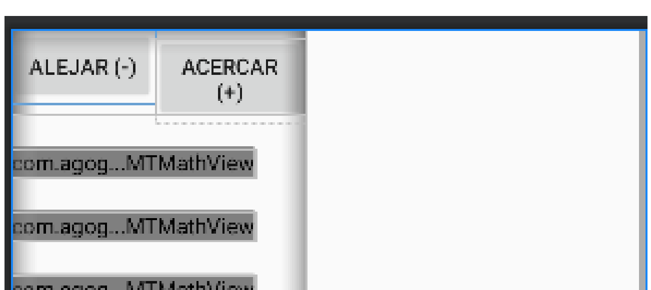


Figura 4.31 Pantalla que muestra el procedimiento del tema Cambio de base

En el tercer y último botón de la interfaz principal dirige al tercer tema que es Ortonormalización, al igual que el tema Determinar base cuenta con las instrucciones de llenado de los campos, se contesta la pregunta del número de vectores, después se contesta el número de dimensión de los vectores a capturar y se da clic en el botón “Empezar”, se habilitan los campos de acuerdo al número y dimensión de los vectores, los vectores se identifican como V1, V2, V3 y V4, se capturan de forma horizontal, se da clic en el botón

“Resultado” se muestra el resultado correspondiente, se tiene el botón “Limpiar” donde se vacían los campos capturados quedando disponibles para una nueva captura, también se tienen los botones “Acercar” y “Alejar” para gestionar el tamaño de letra que se muestra en pantalla, si se desea visualizar el procedimiento se da clic en el botón “Procedimiento”, la interfaz de Ortonormalización quedó de la siguiente manera Figura 4.32:

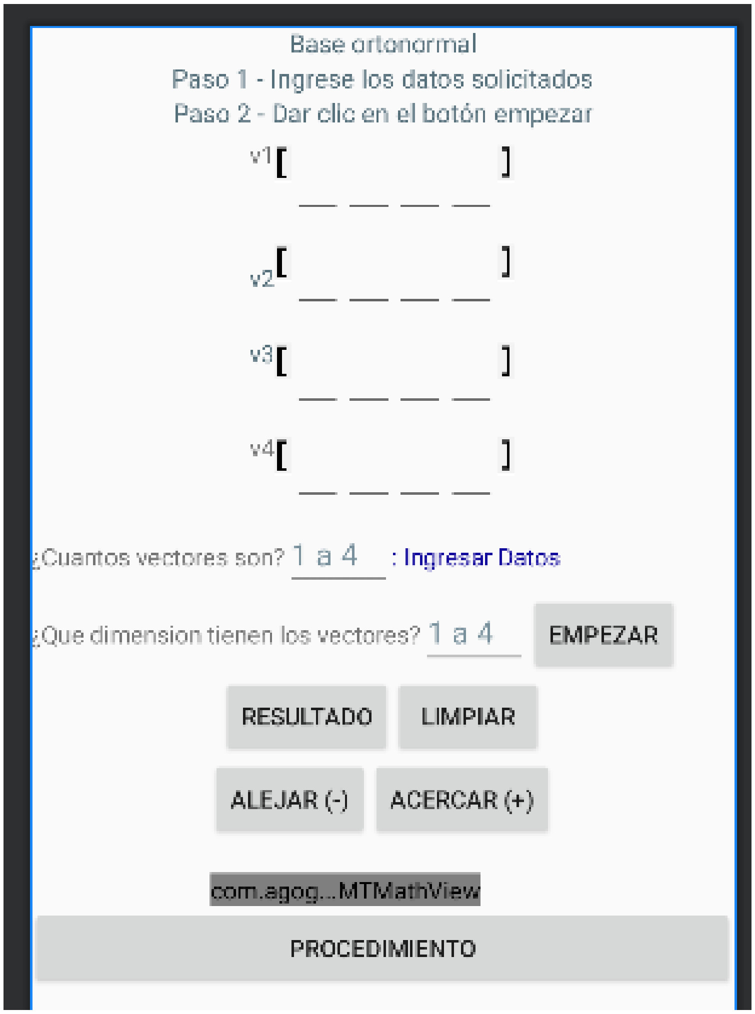


Figura 4.32 Interfaz del tema Ortonormalización

Una vez que el usuario desea visualizar el procedimiento, la aplicación lo dirige a otra interfaz gráfica elabora para ello, se muestra en pantalla el procedimiento, contando con los botones de “Alejar” y “Acercar” para administrar el tamaño de letra en dicha pantalla, quedando de la manera siguiente Figura 4.33:

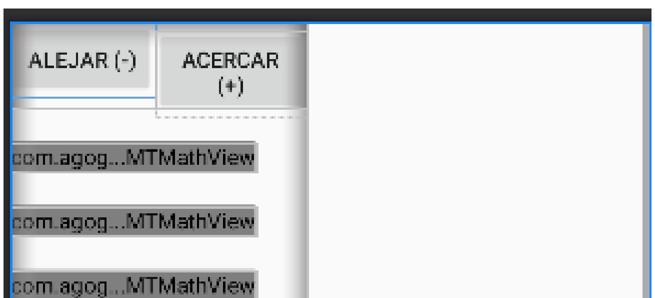


Figura 4.33 Pantalla que muestra el procedimiento del tema Ortonormalización

Una vez terminadas las interfaces gráficas en Android Studio se realizó la codificación de cada uno de los temas (Determinar base, Cambio de base y Ortonormalización), donde se utilizó el lenguaje Java para la conexión del Android con Python, este último fue el lenguaje principal para la codificación de los temas que resuelve la aplicación.

La estructura del proyecto está organizada en nueve Activities, que se muestra a continuación Figura 4.34:

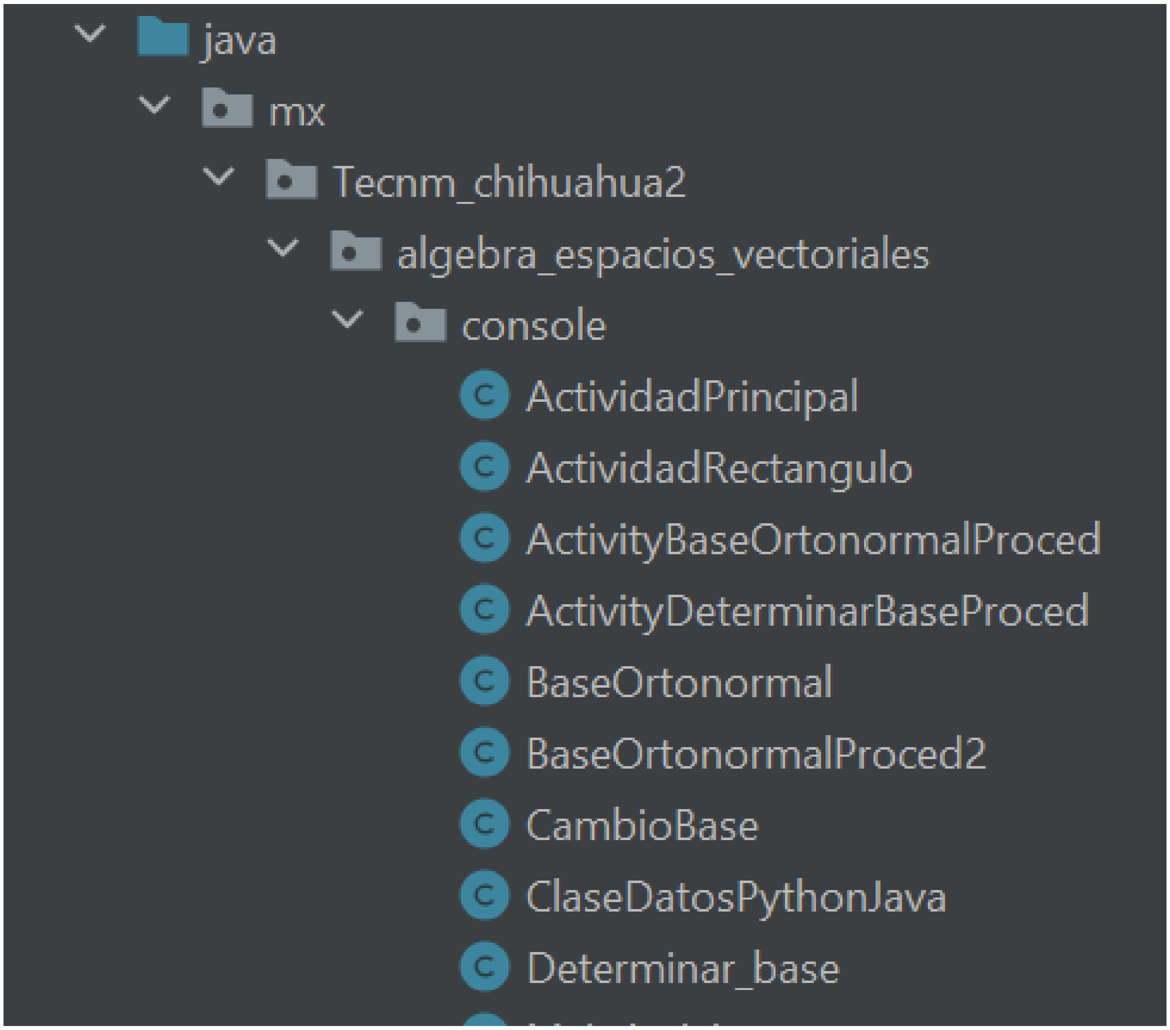


Figura 4.34 Organización del proyecto en la carpeta Java

Cada Activity contiene instrucciones para poder ejecutarse en la aplicación, se encuentra la Activity de la interfaz principal, la del tema Determinar base con su respectivo procedimiento, cambio de base con su respectivo procedimiento, Ortonomarlización con su respectivo procedimiento y finalmente Clases Datos Python Java que ayuda a la conexión de Android con Python como se muestra una parte del código en la Figura 4.35:

```
package mx.Tecnm_chihuahua2.algebra_espacios_vectoriales.consol

public class ClaseDatosPythonJava {

/* variables para metodo de ortonormalización*/
    11 usages
    public static int componentes;
    56 usages
    public static int tamano_vector;
```

Figura 4.35 Codificación de clases Datos Python Java

En el menú MainActivity se encuentra la librería Chaquopy, dicha librería se encarga de la conexión del código de Python con el código de Java Figura 4.36:

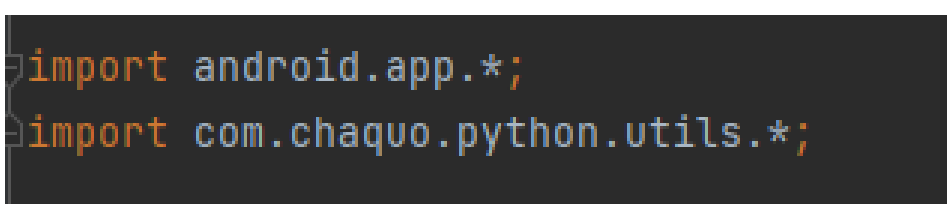


Figura 4.36 Importar Chaquopy

Desarrollo

Para el primer tema Determinar base se acomoda al Android Studio, donde cuenta con sus funciones para leer los vectores capturados, realizar el procedimiento para poder resolver los ejercicios presentados, Figura 4.37:

```
def func_gauss(Matri,P_aumentada,metodo,arr_ceros):
    Mat_temp = Matrix(Matri)
    mtr_temp = Mat_temp.copy()
    Shape = mtr_temp.shape
    a_array = arr_ceros
    a_array_2 = a_array.copy()
    numero_linea = 0

    limite_menor = fun_max_tam_o_vec(Shape)
    mtx_no_cuad = limite_menor[1]
    # obtener ultmas letras dependiendo la diimension dela Matrix
    filas = Shape[0]
    if ((limite_menor[1] == True) or(limite_menor[2] == True) ):
        filas = limite_menor[0]
    columnas = Shape[1]
    conjunto = False
    print('filas: ', Shape[0], ',columnas: ', Shape[1])
    print("____________________________________________________________ ")
    mtr = Mat_temp
    Res = P_aumentada

    # Evaluar uno solo por medio de numero de vectores
    print("Permutacion de filas")
    for j in range(filas):
        # reinicio de valores de verificacion
        filas_2_arr = a_array_2.shape
        for ran in range(filas_2_arr[0]):
            a_array_2[ran] = 0
        validos_punto = 0

        if mtr[j, j] == 0:
            print("Posición: ", j + 1, ":", j + 1, " Es igual a cero requiere cambio")
            for i in range(Shape[0]):
                print(" Buscando lineas con el valor 1 en  fila: ", i)
                pprint(a_array[i])
                if mtr[i, j] != 0 and a_array[i] != 1:
                    print("Se puede cambiar la fila", j + 1, "por la fila", i + 1)
                    # Se incrementa en 1 cuando aplica para cambio
```

```
def llamada_generador(Matric):
    Mat_temp = Matrix(Matric)
    Shape = Mat_temp.shape
    filas = Shape[0]
    print("matrix entrada")
    pprint(Mat_temp)
    B =[]
    B = matrix_aumentada('letras',filas,B)
    C =[]
    C = matrix_aumentada('ceros',filas,C)
    print("______________________-______   llamada Generador _______-________________________")
    gener = func_gauss(Matric,B,"GEN",C)
    print("__________________________-______   Parámetro 0   _______-____________________________")
    pprint(gener[0])


def lineal_dependiente():
    Datos.v_independiente=""
```

Figura 4.37 Código Python Determinar base acoplado con Java

Segundo tema Cambio de base se muestra el código acoplado con Java, donde se visualizan las funciones propias del tema y la validación del vector y bases capturados, Figura 4.38:

```python
def leerBase(dim):
    A = []
    for i in range(dim):
        v1str = input(f"Ingrese el vector {i + 1} separados por comas\n")
        A.append(v1str.split(","))
    return Matrix(A).T


def cambioDeBase(v,B1,B2):
    vp = B1 * v
    if v and B1 != eye(B1.shape[0]):
        print("Se multiplicó el vector por su base para hacerlo canonico")
        pprint(vp)
        dato_1 = "Se multiplicó el vector por su base para hacerlo canonico"
        Datos.dinamicSetvalue(dato_1, array_to_LaTeX(vp));
```

Desarrollo

```
            return B1,B2
        elif baseStr == "B1":
            flag = False
            print("Favor de ingresar Base1")
            B1 = Matrix(leerMatriz()).T
            print("Favor de ingresar Base2")
            B2 = Matrix(leerMatriz_2()).T
            return B1,B2
        elif baseStr == "B2":
            flag = False
            print("Favor de ingresar Base1")
            B1 = Matrix(leerMatriz()).T
            print("Favor de ingresar Base2")
            B2 = Matrix(leerMatriz_2()).T
            return B2,B1

def inversa(v):
    A = v.copy()
    Shape = A.shape
```

Figura 4.38 Código Python Cambio de base acoplado con Java

Como tercer tema Ortonormalización se visualiza el código acoplado con Java, donde se visualizan sus funciones que ayudan a resolver los ejercicios capturados en la app, Figura 4.39:

```
def normalizacion(v,verbose=0):
  if verbose:
    print("Normalizamos el vector")
    print("u = 1/|v| * v")
    pprint(v)
  Datos.dinamicSetvalue(" Normalizamos el vector \n u = 1/|v| * v", array_to_LaTeX(v));
  count=0
  for i in v:
    count = i**2 + count
  raiz = 1/sqrt(count) * v
  if verbose:
    print("Obtenemos")
    pprint(raiz)
    #formula1
  C = []
  C.append(Matrix(raiz))
```

Desarrollo

```
            print("Respecto a u")
            pprint(u_temp)
        Datos.dinamicSetvalue(" Resultado de producto punto",array_to_LaTeX(pc));
        Datos.dinamicSetvalue(" Ortogonalizamos v",array_to_LaTeX(vp));
        Datos.dinamicSetvalue(" Respecto a u",array_to_LaTeX(u_temp));
        if verbose:
            pprint("Obtenemos")
            pprint(vp)
        Datos.dinamicSetvalue(" Obtenemos",array_to_LaTeX(vp));
    u_temp = normalizacion(vp,verbose)
    u.append(u_temp)
descripcion = f"Base ortonormal en R{Datos.tamano_vector}"
#print(descripcion)
#Resultado ortonormalizacion
Datos.latexMatriz =  array_to_LaTeX(u)
pprint(u)
Datos.dinamicSetvalue(descripcion , array_to_LaTeX(u));
return u
```

Figura 4.39 Código Python Ortonormalización acoplado con Java

CAPÍTULO V. RESULTADOS

La aplicación AABEV fue colgada en la PlayStore en primera instancia como pruebas donde se tenía una lista de verificadores específicos. En la segunda versión publicada en dicha tienda se pone a disposición para el público en general, donde se corrigen las observaciones comentadas en la versión prueba.

La liga para descargar la aplicación es la siguiente:

https://play.google.com/store/apps/details?id=mx.Tecnm_chihuahua2.algebra_espacios_vectoriales.console

Una vez descargada no se necesita Internet para utilizarla, no contiene anuncios y es gratuita tanto la descarga como la función.

En todas las interfaces se tienen dos opciones de aumentar o disminuir el zoom de pantalla según las necesidades del usuario, así como se tiene un botón de limpiar para una nueva captura de datos.

Esta aplicación se desarrolló con la finalidad de que sea útil para los alumnos y profesores del Tec2, les ayude a aprender de forma más práctica y rápida en la materia de Algebra Lineal.

5.1 Primer prueba

Se libera la versión de prueba de la aplicación donde fue revisada por los profesores con los conocimientos de dicha aplicación AABEV.

Se encuentran las siguientes observaciones:

1. El tema de Cambio de base y Base no está ordenando correctamente los vectores para formar la matriz para poder realizar el procedimiento correspondiente, Figura 5.40

```
-
- def leerBase(dim):
-     A = []
-     for i in range(dim):
-         v1str = input(f"Ingrese el vector {i + 1} separados por comas\n")
-         A.append(v1str.split(","))
-     return Matrix(A).T
-
-
```

Figura 5.40 Ordenamiento de columnas con código Python

```
        setContentView(R.layout.activity_cambio_de_base);
+       try {
+           mathView_formula1 = findViewById(R.id.mathviewFormula1);
+           mathView_formula1.setFontSize(40);
+           mathView_formula1.setScrollContainer(true);
+
+
+           editText_v_dato1 = findViewById(R.id.editText_v_dato1);
+           editText_v_dato2 = findViewById(R.id.editText_v_dato2);
+           editText_v_dato3 = findViewById(R.id.editText_v_dato3);
+           editText_v_dato4 = findViewById(R.id.editText_v_dato4);
+           /*base 1*/
+           editText_b1_dato1 = findViewById(R.id.editText_b1_dato1);
+           editText_b1_dato2 = findViewById(R.id.editText_b1_dato2);
+           editText_b1_dato3 = findViewById(R.id.editText_b1_dato3);
+           editText_b1_dato4 = findViewById(R.id.editText_b1_dato4);
+           editText_b2_dato1 = findViewById(R.id.editText_b2_dato1);
+           editText_b2_dato2 = findViewById(R.id.editText_b2_dato2);
+           editText_b2_dato3 = findViewById(R.id.editText_b2_dato3);
+           editText_b2_dato4 = findViewById(R.id.editText_b2_dato4);
+           editText_b3_dato1 = findViewById(R.id.editText_b3_dato1);
+           editText_b3_dato2 = findViewById(R.id.editText_b3_dato2);
+           editText_b3_dato3 = findViewById(R.id.editText_b3_dato3);
+           editText_b3_dato4 = findViewById(R.id.editText_b3_dato4);
```

Figura 5.41 Ordenamiento de columnas en Java

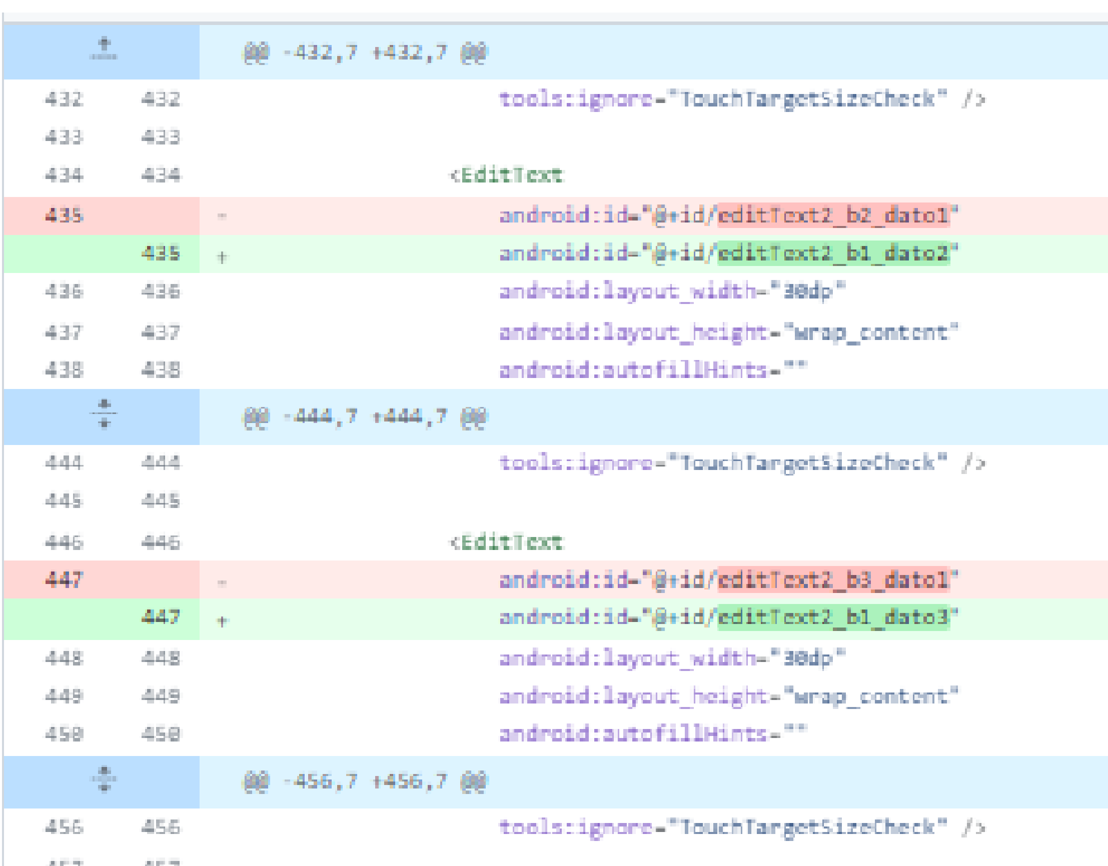


Figura 5.42 Ordenamiento de columnas para interfaz gráfica

2. Se señala en el tema de Base Ortonormal y Cambio de base que si no es una base los vectores capturados no debe de poder realizarse el procedimiento, es decir, no debe mostrar el resultado solo informar que no es base, Figura 5.43.

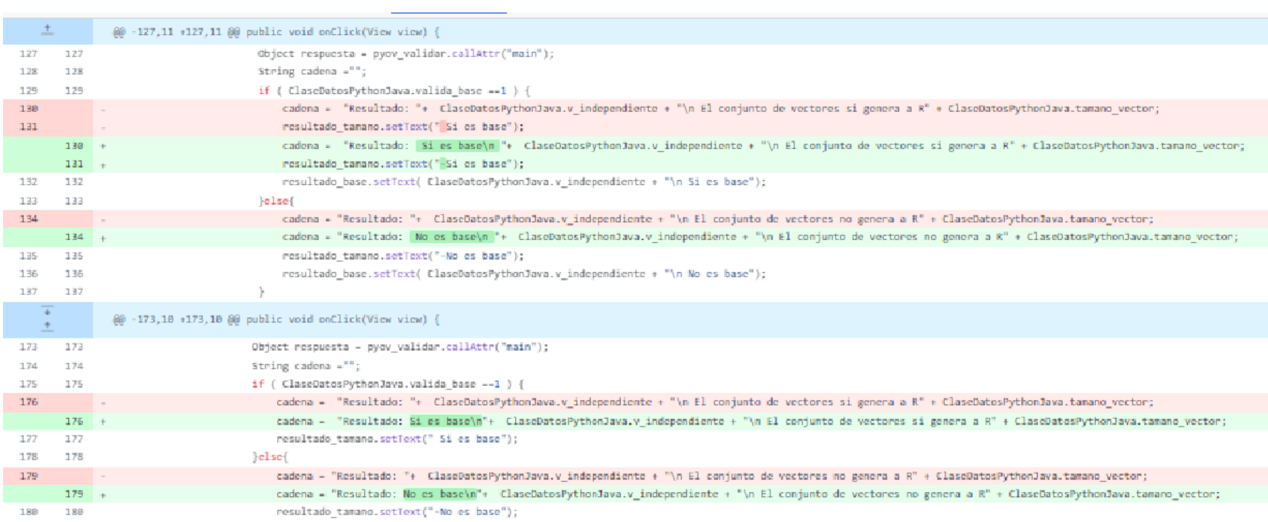


Figura 5.43 Muestra si es base o no

3. Las letras y números se mostraban pequeños en los tres temas por lo tanto se solicita poder aumentar o disminuir su tamaño según el usuario lo requiera, Figura 4.44

```
+
+        button_menos.setOnClickListener(new View.OnClickListener() {
+            @Override
+            public void onClick(View view) {
+
+                if ( ClaseDatosPythonJava.tamano_letra > 30 ){
+                    ClaseDatosPythonJava.tamano_letra=ClaseDatosPythonJava.tamano_letra-2;
+                    mathView_formula1.setFontSize(ClaseDatosPythonJava.tamano_letra);
+                }
+            }
+        });
+
+
+        /*clic al boton de aumento de tamaño de letra*/
+        button_mas.setOnClickListener(new View.OnClickListener() {
+            @Override
+            public void onClick(View view) {
+
+                if ( ClaseDatosPythonJava.tamano_letra < 50){
+                    ClaseDatosPythonJava.tamano_letra=ClaseDatosPythonJava.tamano_letra+2;
+                    mathView_formula1.setFontSize(ClaseDatosPythonJava.tamano_letra);
+                }
+            }
+        });
+
```

Figura 5.44 Botones de alejar o acercar

4. Se solicita en los tres temas agregar un botón llamado limpiar en donde se pueda limpiar los campos capturados para poder capturarlos de nuevo, Figura 4.45

```
+
+     public  void f_limpiar_pantalla(View  view){
+         inicio_pantalla();
+         inicio_pantalla_no_canonico();
+         ClaseDatosPythonJava.v_where_base = "Canonica";
+         ClaseDatosPythonJava.vaciar_etiquetas();
+         ClaseDatosPythonJava.tamano_vector=0;
+         ClaseDatosPythonJava.componentes=0;
+         rad_canonica.setChecked(true);
+         editText_v_dato1.setText("");
+         editText_v_dato2.setText("");
+         editText_v_dato3.setText("");
+         editText_v_dato4.setText("");
+
+ }
```

Figura 5.45 Botón limpiar

5. Se agregan unas pequeñas instrucciones en los tres temas para poder encaminar al usuario y pueda utilizar la aplicación.
6. Se selecciona un logotipo para la aplicación, Figura 5.46

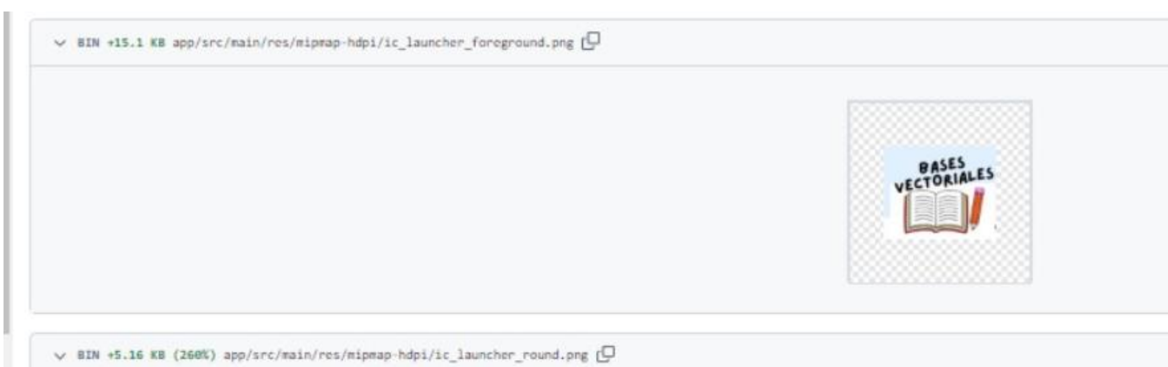


Figura 5.46 Se agrega logotipo a la aplicación

Se realiza los ejercicios en la aplicación AABEV que se obtuvieron de Grossman y Flores (2012) y se muestran en el CAPÍTULO IV. DESARROLLO, en el tema 4.1.1 Fase conceptual:

Al ingresar por primera vez se muestra el nombre de la aplicación "Aplicación para bases vectoriales", en su interfaz de usuario se tiene tres botones con las opciones de Determinar base, Cambio de base y Base Ortonormal, como se muestra en la Figura 5.47:

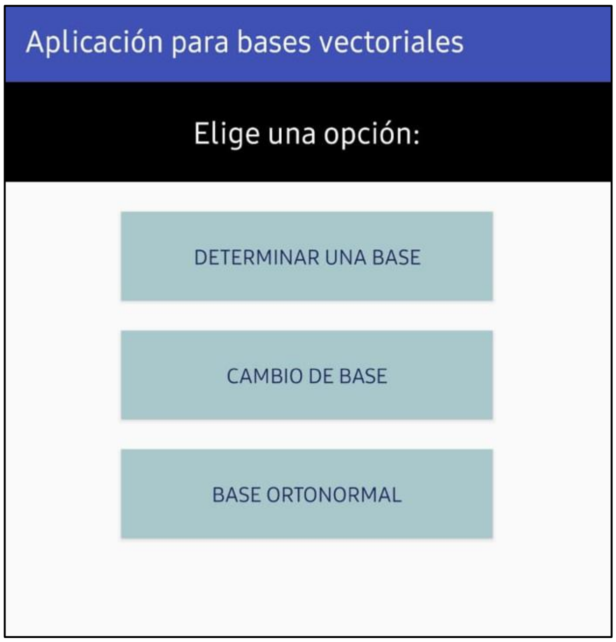
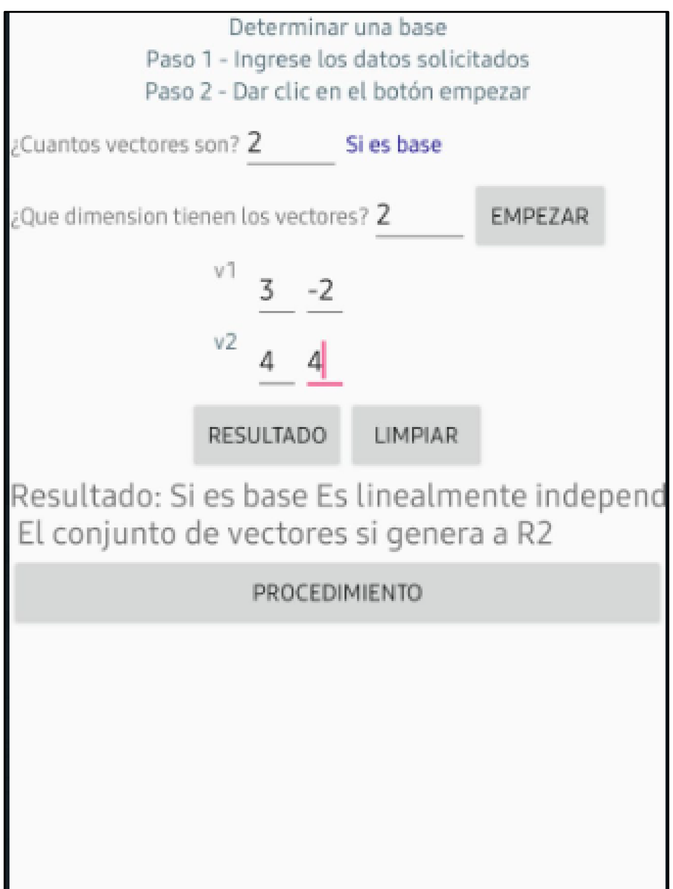


Figura 5.47 Interfaz de la Aplicación para el aprendizaje de Bases en un Espacio Vectorial

Al seleccionar el primer tema “Determinar base” se solicita capturar el número de vectores y el tamaño de los mismos, se da clic en el botón “Empezar”, se habilitan los campos para capturar los vectores, se da clic en el botón “Resultado” se muestra si los vectores son linealmente independientes o no y si generan $\mathbb{R}^n$, para ver el procedimiento se da clic en el botón “Procedimiento”, como se muestra en la Figura 5.48:




ALEJAR (-) ACERCAR (+)

1 - Matrix : $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2 - Iniciar Determinante

3 - El elemento 1, 1 ya es 1

4 - Convertir el elemento 2 , 1 en 0

5 - El elemento 2, 2 ya es 1

6 - Convertir el elemento 1 , 2 en 0

7 - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8 - $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

9 - Resultados (Soluciones):

10 - $a_1 = 0$

11 - $a_2 = 0$

12 - Matrix resultado: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

13 - Es linealmente independiente

14 - Iniciar Generador

15 - Matrix : $\begin{bmatrix} 3 & 4 & W \\ -2 & 4 & X \end{bmatrix}$

16 - El elemento 1, 1 ya es 1

17 - Convertir el elemento 2 , 1 en 0

18 - El elemento 2, 2 ya es 1

19 - Convertir el elemento 1 , 2 en 0

20 - $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

21 - $\begin{bmatrix} \frac{Y}{5}-\frac{Z}{5} \\ \frac{Y}{10}+\frac{3Z}{20} \end{bmatrix}$

22 - Resultados (Soluciones):

23 - $a_1 = \frac{Y}{5}-\frac{Z}{5}$

24 -

Figura 5.48 Interfaz Determinar base

En el tema de Cambio de base, se captura el vector y se da clic en el botón “Empezar”, se selecciona si es canónico, si se encuentra en la base uno o se encuentra en la base 2, si el vector es canónico solamente se habilitarán los campos para capturar una base, si el vector se encuentra en la base uno o en la base dos se habilitarán los campos para capturar las dos bases, una vez capturados los datos correspondientes se da clic en el botón “Resultado”, se realiza el cambio de base, para ver el procedimiento se da clic en el botón “Procedimiento”, como se muestra en la Figura 5.49:


ALEJAR (-)
ACERCAR (+)
1 - Matrix 1
2 - Matrix 2
3 - Se multiplicó el vector por su base para hacerlo canonic
4 - El elemento1,1 ya es 1
5 - Convertir el elemento 2,1 ya en 0
6 - El elemento3,1 ya es 0
7 - Convertir el elemento2 2 en 1
8 - Convertir el elemento 3,2 ya en 0
9 - Convertir el elemento3 3 en 1
10 - Convertir el elemento 2,3 en 0
11 - El elemento1,3 ya es 0
12 - Convertir el elemento 1,2 en 0
13 - Inversa :
14 - Se multiplicó el vector canonico con la matriz de trans
15 - Resultado
16 - -
Resultado Matrix 1 : Es linealmente independiente
El conjunto de vectores si genera a R3
Resultado Matrix 2 : Si es base
Es linealmente independiente
El conjunto de vectores si genera a R3

Figura 5.49 Interfaz Cambio de base

En el tercer y último tema Base Ortonormal, se capturan el número y tamaño de los vectores, se da clic en el botón “Empezar”, la aplicación muestra si los vectores capturados son una base, si no lo son no se calculo la base ortonormal, una vez capturado el número y tamaño de los vectores se da clic en el botón “Empezar”, se habilitan los campos para la captura de los vectores, se da clic en el botón “Resultado” se realiza el cálculo de la base ortonormal y se da clic en el botón “Procedimiento” para verificar como se calculó la base ortonormal, como se muestra en la Figura 5.50:

Resultados

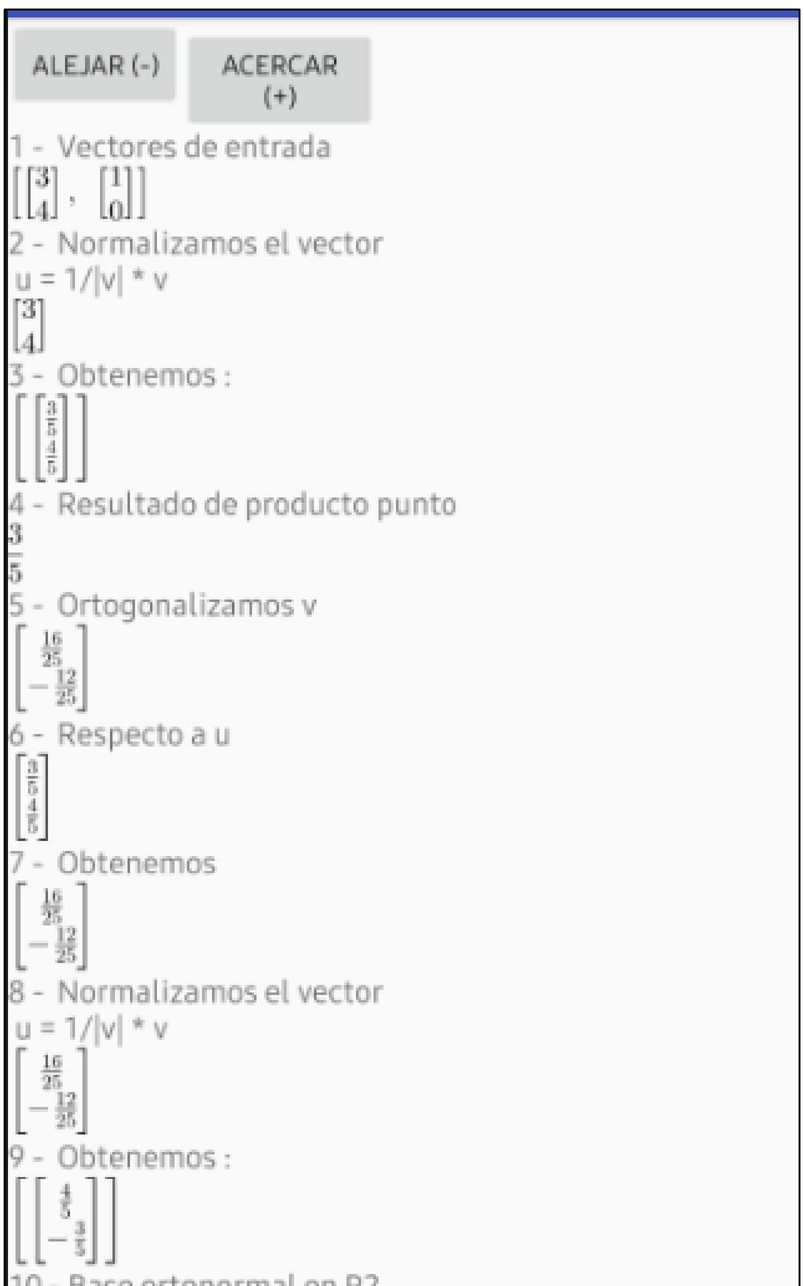

ALEJAR (-)
ACERCAR (+)
1 - Vectores de entrada
$\left[\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right]$
2 - Normalizamos el vector
u = 1/|v| * v
$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$
3 - Obtenemos :
$\left[\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\right]$
4 - Resultado de producto punto
$\frac{3}{5}$
5 - Ortogonalizamos v
$\begin{bmatrix}\frac{16}{25}\\-\frac{12}{25}\end{bmatrix}$
6 - Respecto a u
$\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$
7 - Obtenemos
$\begin{bmatrix}\frac{16}{25}\\-\frac{12}{25}\end{bmatrix}$
8 - Normalizamos el vector
u = 1/|v| * v
$\begin{bmatrix}\frac{16}{25}\\-\frac{12}{25}\end{bmatrix}$
9 - Obtenemos :
$\left[\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}\right]$

Figura 5.50 Base ortonormal

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES

El desarrollo de esta aplicación resuelve los temas de Determinar base, Cambio de base y Base Ortonormal, se instaló en diferentes dispositivos móviles con sistema operativo Android, en la primera versión se tuvieron observaciones las cuales fueron solventadas, también ayuda al alumno a comparar el procedimiento de su cuaderno con el de la aplicación ya que se diseñó para que fuera muy parecido.

Se realizó la ponencia “Aplicación móvil para el aprendizaje de bases de un espacio vectorial” en la XXV Escuela de invierno en Matemáticas Educativa, de forma virtual del 6 al 9 de diciembre del 2022, donde se obtuvo la constancia que se muestra en el Anexo 1: Constancia de la Red de Centros de Investigación en Matemáticas Educativa A.C.

Se espera que la aplicación para el aprendizaje en un espacio vectorial en un futuro siga apoyando a un mejor aprendizaje de los alumnos y/o profesor en la materia de Álgebra Lineal.

En el tema de determinar base la aplicación muestra los resultados correctos, queda pendiente realizar ajustes para poder mostrar el procedimiento correctamente. Para determinar si el conjunto de vectores es un conjunto generador del espacio R^n la aplicación arroja las letras en orden alfábetico en lugar de acomodarlas como x,y,z y w en el conjunto de vectores que son dos vectores en dos dimensiones y cuatro vectores en cuatro dimensiones.

CAPÍTULO VII. BIBLIOGRAFÍA

Antonieta Abud Figuera(2009), MeISE: Metodología de Ingeniería de Software Educativo. Academia Journals.com. Recuperado de: https://goo.su/UUsbTC

Calculadora Maple (s.f). Maple Calculator. Recuperado de: https://www.maplesoft.com/products/Maplecalculator/

Calculadora de Matrices (s.f). Matrix Calculator (2021). Recuperado de: https://matrixcalc.org/es/

Calculador de Vectores (s.f). Wims. Recuperado de: https://wims.univ-cotedazur.fr/wims/es_tool~linear~vector.es.html

Castillo, J. D. L. (2019). Desarrollo de aplicaciones Android con Android Studio: Conoce android studio. José Dimas Luján Castillo. Recuperado de: https://goo.su/3lhVs

Chávez Molina, C. C., Caldera Franco, M. I., y Valenzuela González, V. (2021). Desarrollo una aplicación para espacios vectoriales en álgebra lineal. RECIE. Revista Electrónica Científica de Investigación Educativa

Chávez Molina (2022). Aplicación para espacios vectoriales en álgebra lineal.

Delgado Pimentel, S., Miret Barroso, E., y Martín García, A. (2021). Juegos didácticos en el proceso enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal en la Universidad de las Ciencias Informáticas. UCIENCIA IV Conferencia Científica Internacional, Universidad de las Ciencias Informáticas. Recuperado de: https://repositorio.uci.cu/bitstream/123456789/9610/1/UCIENCIA_2021_paper_62.pdf

Estrada, B., (2020). Experiencias docentes en álgebra lineal con MAXIMA: Ponte en el lugar del profesor. Revista UNED. Recuperado de: https://revistas.uned.es/index.php/pIM/article/view/24141/19137

Fernández Montoro., (2013) Python 3 al descubierto. Recuperado de: https://goo.su/5wdoot

Geogebra (s.f.). Aplicaciones matemáticas. Recuperado de: https://www.geogebra.org/

Grossman, S. y Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill, México, D.F.

Hernán Morales Paredes(2013), La teoría antropológica de la didáctica de Chevallard como sustento teórico para analizar el saber didáctico y matemático en la formación de profesores en la universidad católica de concepción.

Jesús Antonio Moreno Márquez(2022). Aplicación para la resolución de operaciones que involucra transformada de LAPLACE.

Malave Polanco, K. y Beauperthuy Taibo, J. L.(2011). Revista Cientifica Electronica Ciencias Gerenciales/Scientific e-journal of Management Science. Android Google´s Operating System for mobile devices. Recuperado de: file:///C:/Users/kpinon/Downloads/Dialnet-AndroidElSistemaOperativoDeGoogleParaDispositivosM-7165367.pdf

Medel Viltres, Y., Castro Dieguez, F. E., Ortiz Díaz, A. A., y Mustelier Hecheverría, A. (2020). Softmatrix: Software para el trabajo con matrices. Cuadernos de desarrollo aplicados a las TIC. ISSN: 2254 – 6529.

Padilla Escorcia, I. A., Conde Carmona, R. J., y Tovar Ortega, T. (2022). Recursos Tecnológicos utilizados por profesores universitarios de carreras de Ingeniería, en tiempos de virtualidad en Barranquilla (Colombia). Tecnura vol. 26 no.72

Pérez Martínez, M., Ramos Guadarrama, J., García del Sol, D., y Díaz Alfonso, E. (2021). Utilización del software libre Scilab en las asignaturas de Circuitos Eléctricos de la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnólogica de la Habana José Antonio Echeverría. CIPEL Centro de Investigaciones y Pruebas Electroenergéticas Universidad Tecnológica de la Habana. Recuperado de: https://goo.su/AR2I

Pulido-Rodríguez, G., López-Bautista, R., & Gutiérrez-Rodríguez, I. (2021). Python, Stack and Moodle: Programming and production of thousands of math exam exercises with specific step-by-step feedback. In ICERI2021 Proceedings (pp. 3454-3462). IATED.Symbolab (s.f.). Symbolab. Recuperado de: https://es.symbolab.com/

Wolfram (s.f.). Wolfram Mathematica. Recuperado de: https://www.wolfram.com/mathematica/

ANEXO 1: Constancia de la Red de Centros de Investigación en Matemáticas Educativa A.C.

Red Cimates

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

EIME XXV

ESCUELA DE INVIERNO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

CONSTANCIA

La Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Otorga la presente a:

KARINA PIÑON TORRES

Por su asistencia a la **XXV Escuela de Invierno en Matemática Educativa,** que se ha celebrado en el TecNM/Instituto Tecnológico de Chihuahua II , en modalidad virtual, del 6 al 9 de diciembre del 2022, que tuvo una duración total de 30 horas.

Dra. Bertha Ivonne Sánchez Luján
Presidenta de la Red

M. en C. Susana Josefina Escárcega Castellanos
Directora
TecNM/ Instituto Tecnológico de Chihuahua II

Chihuahua, Chihuahua a 9 de diciembre de 2022