



# EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Sistemas de bombeo alimentados por sistemas de  
potencia fotovoltaicos

presentada por

Ing. Alejandro Pineda Uribe

como requisito para la obtención del grado de  
Maestría en Ciencias en Ingeniería  
Electrónica

Director de tesis

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez

Codirector de tesis

Dr. Manuel Adam Medina

Cuernavaca, Morelos, México. Junio del 2024.

# Tecnológico Nacional de México



Cuernavaca, Mor.,

**08/agosto/2024**

No. de Oficio:

**DIE/110/2024**

Asunto:

**Aceptación de documentos de tesis**

**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA**  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO  
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. ALEJANDRO PINEDA URIBE**, con número de control **M22CE022** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **"SISTEMAS DE BOMBEO ALIMENTADOS POR SISTEMAS DE POTENCIA FOTOVOLTAICOS"**, y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramirez  
Doctor en Ingeniería  
Cédula profesional 3431842

CODIRECTOR DE TESIS

Dr. Manuel Adam Medina  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 5992003

REVISOR 1

Dr. Jarniel Garcia Morales  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 11106825

REVISOR 2

Dra. Ma. Guadalupe López López  
Doctora en Ciencias en Ingeniería Química  
Cédula profesional 7980045

C.p. M.T.I. Maria Elena Gómez Torres. Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Estudiante  
JGM/kmq





Cuernavaca, Mor.,  
No. De Oficio:  
Asunto:

09/agosto/2024  
SAC/229/2024  
Autorización de  
impresión de tesis

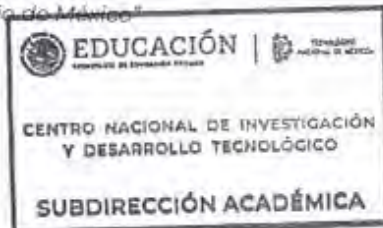
**ALEJANDRO PINEDA URIBE  
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
P R E S E N T E**

Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“SISTEMAS DE BOMBEO ALIMENTADOS POR SISTEMAS DE POTENCIA FOTOVOLTAICOS”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

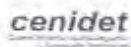
Excelencia en Educación Tecnológica®  
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”



**CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO**

C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica  
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/IMZ



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	2
1.2.1. Configuraciones de los sistemas de bombeo FV . . . . .	2
1.2.2. Celdas FV y convertidor CD/CD (boost) . . . . .	3
1.2.3. Convertidor CD/CA (Inversor) . . . . .	3
1.2.4. Motores . . . . .	4
1.2.5. Sistema de bombeo . . . . .	4
1.2.6. Aspectos relevantes de la revisión del estado del arte . . . . .	8
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	8
1.4. Hipótesis . . . . .	9
1.5. Objetivos . . . . .	9
1.5.1. Objetivo General . . . . .	9
1.5.2. Objetivos Particulares . . . . .	9
1.6. Justificación . . . . .	9
1.7. Metodología . . . . .	10
1.7.1. Descripción del sistema de bombeo . . . . .	10
1.8. Aportación . . . . .	11
1.9. Contenido del documento de tesis . . . . .	12
<b>2. Marco teórico</b>	<b>13</b>
2.1. Sistemas de bombeo fotovoltaicos . . . . .	13
2.1.1. Descripción de los sistemas de bombeo alimentados por sistemas fotovoltaicos	13
2.1.2. Clasificación de los sistemas de bombeo alimentados por celdas fotovoltaicas	13
2.1.3. Principio de funcionamiento del sistema de bombeo alimentado por sistema FV propuesto. . . . .	15
2.2. Modelado y caracterización de los paneles fotovoltaicos . . . . .	15
2.2.1. Punto de máxima potencia . . . . .	17
2.3. Convertidores electrónicos de potencia . . . . .	19
2.3.1. Descripción de los convertidores CD/CD . . . . .	19
2.3.2. Clasificación de los convertidores CD/CD . . . . .	20
2.3.3. Principio de funcionamiento de los convertidores CD-CD . . . . .	20
2.3.4. Descripción de los Convertidores CD/CA . . . . .	24
2.3.5. Clasificación de los inversores . . . . .	24

2.3.6.	Principio de funcionamiento de los inversores . . . . .	24
2.3.7.	Modulación por ancho de pulso PWM . . . . .	25
2.4.	Motores . . . . .	27
2.4.1.	Clasificación de los motores . . . . .	27
2.4.2.	Construcción física del motor de inducción . . . . .	28
2.4.3.	Principio de funcionamiento del motor de inducción . . . . .	29
2.4.4.	Circuito equivalente del motor de inducción . . . . .	30
2.5.	Bombas . . . . .	33
2.5.1.	Descripción de las bombas y el sistema de tuberías . . . . .	33
2.5.2.	Clasificación de las bombas . . . . .	34
2.5.3.	Curvas características de la bomba centrífuga . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>Modelado y control del sistema de bombeo fotovoltaico</b>	<b>39</b>
3.1.	Modelado matemático del convertidor boost con las celdas FV. . . . .	39
3.1.1.	Método tradicional . . . . .	40
3.1.2.	Método Euler-Lagrange . . . . .	44
3.2.	Modelado matemático del inversor trifásico tradicional . . . . .	47
3.3.	Modelado matemático del motor de inducción . . . . .	50
3.3.1.	Método tradicional . . . . .	51
3.3.2.	Método Euler-Lagrange . . . . .	53
3.3.3.	Transformación al marco de referencia qd0 . . . . .	55
3.4.	Modelado matemático de la bomba centrífuga . . . . .	59
3.4.1.	Curvas características de la bomba centrífuga . . . . .	59
3.5.	Caso de estudio e integración de los modelos . . . . .	64
3.5.1.	Dimensionamiento y consideraciones de diseño . . . . .	65
<b>4.</b>	<b>Resultados</b>	<b>70</b>
4.1.	Simulación del Generador FV con el convertidor boost . . . . .	70
4.2.	Simulación del Inversor trifásico . . . . .	73
4.3.	Simulación del Motor de inducción trifásico . . . . .	76
4.4.	Simulación de la Bomba centrífuga . . . . .	83
4.5.	Simulación del modelo completo y caso de estudio . . . . .	86
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>A.</b>	<b>Relación de impedancias</b>	<b>100</b>
<b>B.</b>	<b>Fichas técnicas.</b>	<b>103</b>
B.1.	Fichas técnicas de los paneles FV . . . . .	103
B.2.	Ficha técnica de la bomba centrífuga. . . . .	104
<b>C.</b>	<b>Horas Solares Pico</b>	<b>106</b>
<b>D.</b>	<b>Equilibrio de potencias</b>	<b>107</b>
<b>E.</b>	<b>Calculo de los parámetros del convertidor elevador</b>	<b>109</b>

# Índice de figuras

1.1. Clasificación de los sistemas de bombeo fotovoltaicos. . . . .	2
1.2. Secciones de modelado. . . . .	11
1.3. Metodología de trabajo. . . . .	11
2.1. Sistema de bombeo interconectado a la red. . . . .	14
2.2. Tipos de sistemas de bombeo aislados. . . . .	14
2.3. Principio de funcionamiento del sistema de bombeo alimentado por paneles FV aislado. . . . .	15
2.4. Tipos de modelos de los módulos FV. . . . .	15
2.5. Curvas características ante cambios en la irradiancia y la temperatura. . . . .	17
2.6. Algoritmo P&O para el seguimiento del punto de máxima potencia. . . . .	18
2.7. Funcionamiento del algoritmo PO en los sistemas fotovoltaicos. . . . .	19
2.8. Clasificación de los convertidores electrónicos de potencia por conversión de energía. . . . .	19
2.9. Clasificación de los convertidores CD-CD . . . . .	20
2.10. Circuito equivalente del convertidor flyback. . . . .	21
2.11. Circuito equivalente del convertidor forward. . . . .	21
2.12. Circuito equivalente del convertidor Buck. . . . .	22
2.13. Circuito equivalente del convertidor Boost. . . . .	23
2.14. Circuito equivalente del convertidor Boost. . . . .	23
2.15. Clasificación de los inversores. . . . .	24
2.16. Circuito equivalente del inversor monofásico con esquema de voltajes PWM. . . . .	25
2.17. Circuito equivalente del inversor trifásico con esquema de voltajes PWM. . . . .	25
2.18. Modulación por ancho de pulso con señal de referencia triangular y portadora senoidal. . . . .	26
2.19. Representación del espacio vectorial. . . . .	26
2.20. Clasificación de los motores. . . . .	28
2.21. Construcción física del motor de inducción tipo jaula de ardilla: a) estator, y b) rotor. . . . .	28
2.22. Desarrollo del par inducido en el motor de inducción: a) Campo magnético giratorio del estator, b) Voltaje y corriente inducido máximo, y c) Interacción de los campos magnéticos del estator y el rotor. . . . .	30
2.23. Circuito equivalente de un motor de inducción tipo jaula de ardilla con el estator y rotor conectados por un transformador ideal. . . . .	31
2.24. Circuito equivalente del motor de inducción referido al estator. . . . .	31
2.25. Partes de un sistema de bombeo. . . . .	33
2.26. Clasificación de las bombas según su principio de funcionamiento. . . . .	34
2.27. Esquema de la curva característica de la bomba centrífuga ante una velocidad nominal. . . . .	35

2.28. Esquema de la curva característica de la bomba <b>potencia hidráulica contra caudal</b> ante velocidad nominal. . . . .	35
2.29. Curva característica de la bomba <b>eficiencia contra caudal</b> ante una velocidad nominal. . . . .	36
2.30. Curvas características de la bomba ante variaciones de velocidad. . . . .	37
2.31. Esquema de los puntos de operación de una bomba. . . . .	37
3.1. Circuito equivalente del convertidor boost con fuente fotovoltaica. . . . .	39
3.2. Circuito equivalente del convertidor boost en caso de encendido y apagado. . . . .	40
3.3. Procedimiento sistemático para modelado por Euler-Lagrange. . . . .	45
3.4. Esquema en simulink del control MPPT P&O. . . . .	47
3.5. Circuito equivalente del inversor trifásico conectado a un motor de inducción. . . . .	48
3.6. Esquema de PWM en Simulink. . . . .	50
3.7. Circuito equivalente estator y rotor. . . . .	50
3.8. Curva característica de la bomba caudal vs altura. . . . .	62
3.9. Curva característica de la bomba caudal vs potencia. . . . .	62
3.10. Curva característica de la bomba caudal vs eficiencia. . . . .	63
3.11. Esquema del sistema de bombeo completo con los parámetros de diseño. . . . .	64
3.12. Esquema de control V/F [Martinez (2023)]. . . . .	68
3.13. Circuito equivalente del sistema completo. . . . .	69
4.1. Cambios en la irradiancia y el ciclo de trabajo. . . . .	71
4.2. Comparación de los modelos. . . . .	71
4.3. a) Comparación de los voltajes FV $v_{c1}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	72
4.4. a) Comparación de las corrientes $i_L$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	72
4.5. a) Comparación de los voltajes del bus $v_{c2}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	73
4.6. Esquema de la comparativa del modelo matemático y el modelo a bloques. . . . .	73
4.7. Esquema en simulink del PWM en lazo abierto. . . . .	74
4.8. Comparación de los voltajes línea-línea entre el modelo matemático y el modelo a bloques. . . . .	74
4.9. Resultados del FFT. . . . .	75
4.10. Diagrama de la comparativa entre los modelos. . . . .	76
4.11. a) Comparación de las corrientes $i_{as}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	77
4.12. a) Comparación de las corrientes $i_{bs}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	78
4.13. a) Comparación de las corrientes $i_{cs}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	78
4.14. a) Comparación de las corrientes $i_{ar}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	79
4.15. a) Comparación de las corrientes $i_{br}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	79
4.16. a) Comparación de las corrientes $i_{cr}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	79
4.17. a) Comparación de la velocidad mecánica $\omega_{rm}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	80
4.18. a) Comparación del par electromagnético $\tau_e$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	80
4.19. a) Comparación de las corrientes $i_{qs}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	81
4.20. a) Comparación de las corrientes $i_{ds}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	81
4.21. a) Comparación de las corrientes $i_{qr}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	81
4.22. a) Comparación de las corrientes $i_{dr}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ . . . . .	82

4.23. a) Comparación de la velocidad mecánica $\omega_{rm}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	82
4.24. a) Comparación del par electromagnético $\tau_e$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	83
4.25. Variaciones en a) velocidad mecánica de la bomba y b) par mecánico.	83
4.26. Modelo matemático de la bomba centrífuga en simulink.	84
4.27. a) Caudal bombeado, b) Potencia hidráulica, c) Potencia mecánica.	84
4.28. Puntos de operación de los caudales para una altura de 8m.	85
4.29. Potencias mecánicas correspondientes a las velocidades de 1725, 1600 y 1400 RPM.	85
4.30. Cambios de las señales de entrada de los modelos.	86
4.31. Diagrama de la comparativa entre los modelos matemáticos y el modelo de bloques.	87
4.32. a) Comparación de los voltajes FV $v_{c1}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	88
4.33. a) Comparación de los voltajes del bus $v_{c2}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	89
4.34. a) Comparación de las corrientes $i_{qs}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	89
4.35. a) Comparación de las corrientes $i_{ds}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	89
4.36. a) Comparación de las corrientes $i_{qr}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	90
4.37. a) Comparación de las corrientes $i_{dr}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	90
4.38. a) Comparación de la velocidad mecánica $\omega_{rm}$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	91
4.39. a) Comparación del par electromagnético $\tau_e$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	91
4.40. a) Comparación del caudal bombeado $Q_b$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	92
4.41. a) Comparación de la potencia hidráulica $P_h$ de los modelos, b) Error $e_t$ , c) Error $e_{EL}$ .	92
B.1. Ficha Técnica Módulo ISF-255.	103
B.2. Ficha Técnica Bomba Centrífuga EVANS	104
B.3. Curva de rendimiento de la bomba proporcionada por el fabricante.	105



# Índice de tablas

3.1. Tabla de relaciones de los elementos del sistema FV/boost. . . . .	40
3.2. Corriente y voltaje en la rama 1 en base a las funciones de conmutación. . . . .	48
3.3. Corriente y voltaje en la rama 2 en base a las funciones de conmutación. . . . .	48
3.4. Corriente y voltaje en la rama 3 en base a las funciones de conmutación. . . . .	48
3.5. Valores de la bomba ante diferentes velocidades. . . . .	61
3.6. Ganancias del controlador proporcional-integral [Martinez (2023)] . . . . .	68
4.1. Datos de simulación. . . . .	72
4.2. Datos del motor de inducción [Hernández et al. (2019)]. . . . .	77
4.3. Parámetros de la bomba centrífuga. . . . .	84
4.4. Parámetros de las celdas fotovoltaicas. . . . .	87
4.5. Parámetros de diseño adicionales. . . . .	87
4.6. Parámetros del motor de inducción trifásico [Krause et al. (2013)]. . . . .	88
C.1. Valores de HSP mensual. . . . .	106

## Acrónimos

CD	Corriente directa.
CA	Corriente alterna.
V/F	Voltaje-Frecuencia.
MPPT	Punto de máxima potencia por sus siglas en inglés <i>Maximum Power Point Tracking.</i>
FV	Fotovoltaico.
MI	Motor de inducción.
P&O	Perturbar y observar.
MPP	Punto de máxima potencia por sus siglas en inglés <i>Maximum Power Point.</i>
PWM	Modulación de ancho de pulso por sus siglas en inglés <i>Pulse Width Modulation.</i>
FFT	Transformada de Fourier rápida por sus siglas en inglés <i>Fast Fourier Transformation.</i>
THD	Distorsión armónica total por sus siglas en inglés <i>Total Harmonic Distortion.</i>
HSP	Horas solares pico.
V-I	Curva de voltaje contra corriente de las celdas FV.
MCC	Modo de conducción continua.

## Nomenclaturas

$H$	Altura de bombeo.
$Q_b$	Caudal de bombeo.
$Q_{b1}$	Caudal de bombeo nominal.
$Q_{b2}$	Caudal de bombeo a una nueva velocidad.
$N_{1,2}$	Velocidad mecánica de la bomba 1 y velocidad mecánica de la bomba 2.
$H_{b1,b2}$	Altura de bombeo nominal y altura de bombeo a una nueva velocidad.
$P_{b1,b2}$	Potencia nominal de la bomba y potencia a una nueva velocidad.
$h_f$	Pérdidas en el sistema de tuberías.
$v$	Velocidad del fluido.
$h_s$	altura del sistema hidráulico.
$v_{1,2}$	Velocidad en el sistema de tuberías de succión y descarga.
$P_{1,2}$	Presión en el sistema de tuberías de succión y descarga.
$\rho$	Es la densidad del fluido.
$g$	Gravedad.
$z_{1,2}$	Son las alturas de succión y de descarga.
$l$	Longitud de la tubería.
$D$	Diámetro de la tubería.
$k_h, \varepsilon$	Coeficientes del sistema hidráulico.
$R_e$	Número de Reynolds.
$A$	Área de la tubería.
$P_h$	Potencia hidráulica de bombeo.
$T_L$	Par externo aplicado al motor.
$H_{1,2}$	Altura del sistema de tuberías de succión y descarga.
$P_{atm}$	Presión atmosférica.
$R_h$	Es la resistencia hidráulica.
$K_{b-v}$	Ganancias de la bomba y de la válvula.
$T_{b-v}$	Constantes de tiempo de la bomba y la válvula.
$h_{t1-t2}$	Niveles de los tanques 1 y 2.
$k_{PWM}$	Ganancias del PWM.
$K_{bv}$	Ganancia de la válvula.
$i$	Corriente de salida del modelo de las celdas FV.
$N_{p,s}$	Número de módulos FV en serie y en paralelo.
$i_{pv}$	Corriente de las celdas FV.
$i_D$	Corriente en el diodo.
$T$	Temperatura de las celdas FV.
$G$	Irradiancia solar.
$p_{pv,n}$	Corriente nominal de las celdas FV.
$T_n$	Temperatura nominal de las celdas FV.
$G_n$	Irradiancia nominal.
$i_{sc,n}$	Corriente en corto circuito.
$v_{oc,n}$	Voltaje en circuito abierto.
$k_{i,v}$	coeficientes de temperatura de corriente y voltaje de las celdas FV.
$i_{01,02}$	Son las corrientes de saturación inversa de los diodos del modelo de las celdas.
$k$	Constante de Boltzmann.
$A_{1,2}$	Coeficientes de idealidad de los diodos.
$P_{pv}$	Potencia de las celdas FV.
$v_{pv}$	Voltaje de las celdas FV.

## Nomenclaturas

$\Delta P$	Cambio en el valor de la potencia actual y el anterior de los paneles FV.
$\Delta v$	Cambio en el valor del voltaje actual y el anterior de los paneles FV.
$L_m$	Inductancia de magnetización.
$a$	Relación del número de vueltas del devanado primario y el secundario de un transformador.
$v_o$	Voltaje de salida.
$i_o$	Corriente de salida.
$d$	Ciclo de trabajo.
$v_g$	Voltaje del generador.
$n_{sinc}$	Velocidad de sincronismo del MI.
$f_s$	Frecuencia de las corrientes del estator.
$n_p$	Número de pares de polos.
$e_{ind}$	Voltaje inducido en los devanados del rotor.
$\tau_{ind}$	Par inducido.
$B_r$	Campo magnético en el rotor.
$B_s$	Campo magnético en el estator.
$n_{des}$	Velocidad de deslizamiento del motor.
$\omega_{des}$	Velocidad de deslizamiento del motor en radianes sobre segundo.
$E_{s,r}$	Voltaje inducido en el estator y el rotor.
$X_{ls}$	Reactancia de dispersión del estator.
$L_{ls}$	Inductancia de dispersión del estator.
$r_s$	Resistencia del estator.
$r_r$	Resistencia del rotor.
$X_{lr}$	Reactancia de dispersión del rotor.
$L_{lr}$	Inductancia de dispersión del rotor.
$s$	Deslizamiento del motor.
$\omega_{sinc}$	Velocidad de sincronismo del motor en radianes sobre segundo.
$E_r$	Voltaje inducido en el motor.
$E_{r0}$	Voltaje inducido cuando el rotor del motor esta en estado bloqueado.
$I_r$	Corrientes del rotor.
$r'_r$	Resistencia del rotor referida al estator.
$\gamma$	Peso específico del fluido.
$h_L$	Pérdidas de energía.
$q_1, q_2, q_3$	Cargas eléctricas en las mallas del convertidor boost.
$R_L$	Pérdidas en el inductor del convertidor boost.
$v_{c1}$	Voltaje de las celdas FV.
$C_1$	Capacitor de los paneles FV.
$L$	Inductor del convertidor boost.
$C_2$	Bus de CD.
$v_{c2}$	Voltaje en el bus de CD.
$R_{CD}$	Carga adicional.

## Nomenclaturas

$v_{RL}$	Voltaje en la resistencia $R_L$ del convertidor boost.
$V_L$	Voltaje en el inductor del convertidor boost.
$i_{c1}$	Corriente en el capacitor $C_1$ de los paneles FV.
$i_{RL}$	Corriente en la resistencia $R_L$ del convertidor boost.
$i_L$	Corriente en el inductor del convertidor boost.
$i_{c2}$	Corriente en el bus de CD.
$v_L$	Voltaje en el inductor del convertidor boost.
$\lambda_L$	Enlaces de flujo magnético del inductor del convertidor boost.
$q_{c1}$	Carga eléctrica en el capacitor de los paneles FV.
$q_{c2}$	Carga eléctrica en el bus de CD.
$Q_{1-6}$	Interruptores del inversor trifásico.
$i_{abc,s}$	Corrientes en coordenadas abc del estator.
$q_{abc,s}$	Cargas eléctricas en coordenadas abc del estator.
$v_{CD}$	Voltaje de CD.
$i_{CD}$	Corriente de CD.
$q_{CD}$	Carga eléctrica de CD.
$S_{1-6}$	Señales de conmutación del inversor.
$v_{2,4,6}$	Voltajes en las ramas del inversor.
$i_{Q_{1,3,5}}$	corrientes que circulan en los interruptores del inversor.
$q_{Q_{1,3,5}}$	Cargas eléctricas que circulan en los interruptores del inversor.
$v_{abs}$	Voltaje línea-línea entre la fase a y b del estator.
$v_{bcs}$	Voltaje línea-línea entre la fase b y c del estator.
$v_{cas}$	Voltaje línea-línea entre la fase c y a del estator.
$v_{\{2,4,6\}-g}$	Voltaje de línea a tierra.
$v_{n-g}$	Voltaje neutro a tierra.
$\lambda'_{abc,r}$	Enlaces de flujo magnético abc del rotor referidos al estator.
$\lambda_{abc,s}$	Enlaces de flujo magnético abc del estator.
$i'_{abc,r}$	Corrientes abc del rotor referidas al estator.
$v_{abc,s}$	Voltajes abc del estator.
$L_s$	Inductancias del estator.
$L'_r$	Inductancias del rotor referidas al estator.
$L_{sr}$	Inductancia de magnetización.
$\theta_r$	Ángulo electromagnético.
$L$	Matriz de inductancias.
$\theta_{rm}$	Ángulo mecánico.
$\omega_r$	Velocidad angular electromagnética.
$\omega_{rm}$	Velocidad angular mecánica.
$J$	Coefficiente de inercia del MI.
$\tau_e$	Par electromagnético.
$B$	Coefficiente de fricción del MI.
$q_m$	Coordenada generalizada mecánica.
$q_e$	Coordenada generalizada eléctrica.
$K_{s,r}$	Matrices de transformación a qd0 para el estator y el rotor.
$\theta$	Ángulo de transformación a qd0 para el estator.
$\beta$	Ángulo de transformación a qd0 para el rotor.
$f_{abc}$	Función de coordenadas abc.
$f_{qd0}$	Función de coordenadas qd0.
$\omega$	Velocidad angular de transformación a qd0 para el estator.

## Nomenclaturas

$\omega_{1,2}$	Velocidad del motor nominal y velocidad nueva del motor.
$\tau_{L1,L2}$	Par nominal y par ante una nueva velocidad.
$P_{m1,m2}$	Potencia mecánica nominal y potencia mecánica ante una nueva velocidad.
$\mu_b$	Eficiencia de la bomba centrífuga.
$i_{mi}$	Corriente de CD demandada por el inversor y el motor.
$K_p$	Ganancia proporcional del control vF.
$K_i$	Ganancia integral del control VF.
$P_{in}$	Potencia de entrada en el convertidor elevador.
$P_o$	Potencia de salida del convertidor.
$v_{mp}$	Punto de máximo voltaje de las celdas FV.
$z_{FV}$	Impedancia de los paneles FV.
$z_o$	Resistencia en la salida del convertidor.
$P_{mp}$	Punto de máxima potencia de los paneles FV.
$P_{motor}$	Potencia del motor.
$P_{RCD}$	Potencia en la carga adicional del convertidor.
$\mu_{motor}$	Eficiencia del motor.
$\Delta i_L$	Valor del 1 % de la corriente en el inductor del convertidor.
$f_s$	Frecuencia del convertidor boost.
$\Delta v_o$	Valor del 1 % del voltaje de salida del convertidor boost.
$\Delta v_{mp}$	Valor del 1 % del voltaje máximo de las celdas FV.
$L_h$	Inductancia hidráulica.
$v_{rms}$	Voltaje cuadrático medio.
$v_{max}$	Voltaje máximo la onda senoidal.

## Agradecimientos

A mi padre, Alejandro Pineda Ocampo, quien siempre me ha apoyado en todo momento durante las diferentes etapas de mi vida, enseñándome a esforzarme cada día, a no rendirme ante las dificultades que se presenten y a ser siempre positivo.

A mi madre Alejandra Uribe Pastrana y a mi hermano, Eduardo Pineda Uribe, por acompañarme y apoyarme en los momentos complicados.

A mi novia, Dulce Alejandra Serrano Cruz, por apoyarme en todo momento, aconsejarme y enseñarme a ser constante en lo que hago.

A mi director de tesis, el Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez, por compartir conmigo sus conocimientos y experiencia, así como guiarme durante la etapa de la maestría.

A mi director de tesis, el Dr. Manuel Adam Medina, por compartir conmigo su experiencia y brindarme su apoyo.

A mi comité revisor, el Dr. Jarniel García Morales, por dedicarme su tiempo y ofrecerme observaciones y sugerencias para mejorar este trabajo, y a la Dra. Ma. Guadalupe López López, por sus recomendaciones para una mejor realización del presente trabajo y por brindarme una visión más clara.

A los amigos que conocí dentro del CENIDET, por compartir conmigo sus experiencias como alumnos, por ayudarme a resolver problemas técnicos o recomendarme algunas fuentes bibliográficas, y también por hacer amena mi estancia durante la maestría, compartiendo momentos extracurriculares como el básquetbol y el ajedrez.

Al TECNM/CENIDET, por brindarme sus instalaciones, un espacio de trabajo y la oportunidad de estudiar la maestría.

Al CONAHCYT, por el apoyo económico durante mi estancia en la maestría.

## Resumen

En esta tesis se presenta el modelado matemático de un sistema de bombeo alimentado por un sistema de potencia fotovoltaico, con el propósito de analizar y comprender su funcionamiento y la interacción entre los distintos subsistemas que lo componen. En el presente trabajo se proponen dos metodologías de modelado matemático: 1) Metodología tradicional, que utilizan las leyes físicas que gobiernan a los subsistemas. 2) Metodología Euler-Lagrange, que utiliza funciones de energía.

El caso de estudio es un sistema de bombeo fotovoltaico aislado que no considera el uso de fuentes de almacenamiento y se aplica para el suministro de agua de un hogar en una comunidad rural. Es importante mencionar que al no considerar una fuente de almacenamiento la potencia requerida por el motores limitada y va a variar en función de la irradiancia solar, la cual es variable. Por lo anterior es necesario aprovechar la máxima energía posible obtenida de las celdas fotovoltaicas aplicando un seguimiento del punto de máxima potencia y alargando el tiempo de funcionamiento del sistema de bombeo por día. De igual manera, para satisfacer la demanda hidráulica y reducir el consumo eléctrico del motor se utiliza una estrategia de control V/F para regular la velocidad del motor y al ir variando esta velocidad en función de la potencia eléctrica disponible, reducir la demanda de potencia generada por la bomba.

El sistema propuesto se compone por una fuente fotovoltaica, un convertidor CD/CD, un convertidor CD/CA (inversor), un motor de inducción trifásico y una bomba centrífuga, los cuales se modelan por separado para fines de modelado tradicional para analizar su interacción física entre estos. Mientras que el enfoque energético Euler-Lagrange utiliza una función de energía general conocida como lagrangiano que describe la interacción energética entre estos, lo que permite obtener el comportamiento dinámico de todo el sistema simplificando el desarrollo matemático.

Cabe mencionar que actualmente en la literatura existen modelos matemáticos de sistemas de bombeo alimentados por sistemas fotovoltaicos mediante la metodología tradicional, las cuales se obtienen por separado y se analiza su interacción física, sin embargo, no hay algún modelo completo utilizando el enfoque energético Euler-Lagrange que considere la interacción energética de todos los subsistemas en conjunto. Por lo tanto, se realiza el modelado matemático tanto por la metodología tradicional como el enfoque energético Euler-Lagrange y se valida mediante simulaciones dentro del entorno Matlab/Simulink.



## Abstract

This thesis presents the mathematical modeling of a pumping system powered by a photovoltaic power system, in order to analyze and understand the operation of the system and the interaction between the various subsystems that comprise it. The present work proposes 2 modeling methodologies: 1) The conventional method, which employs the use of the physical laws that govern the system. 2) Using the Euler-Lagrange methodology, which uses energy and coenergy functions.

The case study is a pumping system for the supply of water to a household in a rural community.

The proposed system consists of a photovoltaic source, a boost DC/DC converter, a DC/AC converter (inverter), a three-phase induction motor and a centrifugal pump, which for conventional modeling purposes must be set individually in order to characterize their physical interaction with each other while the Euler-Lagrange energy model describes the energy interaction between the different subsystems by means of a general coenergy function known as colagrangian, allowing to obtain the dynamics of the whole system simplifying the mathematical development, applying a maximum power point tracking control (MPPT) for the photovoltaic cells and a V/F control for the induction motor.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

La tecnología fotovoltaica (FV) es un campo muy estudiado actualmente, debido al crecimiento en las aplicaciones a las que esta tecnología se ha implementado, usando los sistemas electrónicos de potencia. Esta combinación proporciona las siguientes ventajas: en el aspecto ambiental reemplaza a las fuentes de energía no renovables ayudando a mitigar los gases de efecto invernadero que provienen de las fuentes de energía convencionales. En el aspecto social provee una alternativa para producir la energía eléctrica para las comunidades rurales a las cuales no llega la red pública y las comunidades urbanas que dependen de recursos no renovables para generarla. De igual manera, en el punto de vista económico la reducción de la demanda a la red pública reduce los costos de operación, debido a que la producción de energía por medio de recursos fósiles es muy costosa [Creutzig et al. (2017); Kabir et al. (2018)].

Una configuración muy utilizada en los sistemas electrónicos de potencia tanto a nivel residencial, comercial e industrial es la utilización de un motor junto con un inversor con la finalidad de generar acciones de control para diferentes procesos como lo son: sistemas de bombeo de agua, sistemas de aire acondicionado, vehículos eléctricos, entre otros. Por lo anterior el motor más utilizado es el motor de inducción (MI) tipo jaula de ardilla, debido a su amplia disponibilidad en el mercado, su robustez y fiabilidad y sus bajos costos de mantenimiento [Marfoli et al. (2021); Paramo-Balsa et al. (2022)].

Por otra parte, los sistemas de bombeo de agua son muy utilizados y demandan mucha energía eléctrica, principalmente en aplicaciones industriales donde la demanda de agua bombeada es mayor. De igual manera, en las regiones rurales donde no llega el suministro de la red eléctrica se opta por tomar una fuente de energía eléctrica mediante diesel o fuentes renovables como la tecnología fotovoltaica con el objetivo de poder bombear agua [Mahjoubi et al. (2010)].

Por lo anterior, la integración de la tecnología FV a los sistemas de bombeo propone una aportación para el ámbito ambiental, económico y social aprovechando las ventajas de la energía FV.

La Figura 1.1 muestra las dos configuraciones posibles de un sistema de bombeo con un siste-

ma fotovoltaico [[Acosta Calderon \(2020\)](#); [Abella and Romero \(2009\)](#)].

- **Interconectado a la red:** Es un sistema interconectado a la red eléctrica para compensar la falta de potencia de la fuente fotovoltaica y satisfacer la demanda requerida por la carga.
- **Aislado:** Donde la fuente principal son únicamente las celdas fotovoltaicas, buscando obtener el equilibrio de potencias entre la potencia fotovoltaica y la demandada por la carga.

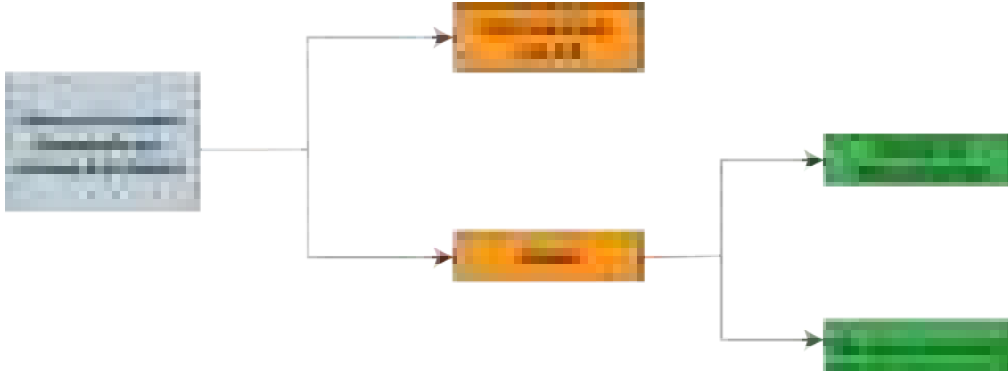


Figura 1.1: Clasificación de los sistemas de bombeo fotovoltaicos.

Por lo anterior, muchos investigadores han abordado a los sistemas de bombeo fotovoltaicos desde distintas configuraciones. En [Muralidhar and Rajasekar \(2021\)](#) se presenta un estudio comparativo de varios autores acerca de las configuraciones, características y el rendimiento que tienen los diferentes sistemas de bombeo alimentados por paneles solares, mostrando una aplicación viable en comunidades rurales como en industriales.

## 1.2. Estado del arte

### 1.2.1. Configuraciones de los sistemas de bombeo FV

El análisis del estado del arte se enfoca en la comparación de diversas configuraciones y estrategias de control utilizadas en sistemas de bombeo alimentados por energía solar fotovoltaica. Los trabajos revisados abordan dos tipos de estructuras, las de etapa simple que utilizan un inversor sin necesidad de un convertidor CD/CD. Y las de etapa múltiple que emplean un convertidor CD/CD y un inversor. La estructura más general es la de etapa múltiple que incluye generador fotovoltaicos, convertidor CD/CD, inversor, motor de inducción y bomba centrífuga, debido a que se dividen las tareas de control en cada convertidor, simplificando la complejidad del sistema. Entre las estrategias de control, se destacan el seguimiento del punto de máxima potencia (MPPT, por sus siglas en inglés) basado en lógica difusa y el uso de convertidores CD/CD (SEPIC) en combinación con inversores, a pesar de esto, se observa una preferencia por el convertidor boost tradicional debido a su diseño simplificado y su adaptabilidad para operar bajo diversas condiciones de irradiancia, así como, el MPPT P&O debido a su fácil implementación. Además, se respalda que los sistemas

de etapa simple tienden a ofrecer un rendimiento más eficiente en comparación con los sistemas de etapa múltiple, que pueden resultar en una mayor complejidad debido a la combinación de estrategias de control en un solo convertidor. Entre los estudios revisados se encuentran los de [Othomani et al. \(2017\)](#) que se centra en el modelado de un sistema de bombeo fotovoltaico, así como los trabajos de [Elgharbi et al. \(2019\)](#); [Muralidhar and Rajasekar \(2021\)](#); [Angadi et al. \(2021\)](#), que ofrecen perspectivas y comparativas adicionales en la temática.

### 1.2.2. Celdas FV y convertidor CD/CD (boost)

Para analizar la interacción entre las celdas fotovoltaicas y el convertidor CD/CD y facilitar el control MPPT, se realizó una revisión de los trabajos relacionados. En cuanto al modelado de las celdas FV, se ha observado una preferencia por el modelo de 5 parámetros en trabajos como [Abella and Romero \(2009\)](#); [Ishaque et al. \(2011\)](#); [Ibrahim and Anani \(2017\)](#); [Batzelis and Papathanassiou \(2015\)](#), a pesar de que se menciona que el modelo de doble diodo es más preciso, ya que proporciona una curva V-I más precisa al considerar el fenómeno de recombinación. Sin embargo, este enfoque, aunque es más preciso, resulta matemáticamente complejo y requiere un mayor tiempo de cálculo, como se señala en [Ortiz et al. \(2020\)](#). Por otro lado, en lo que respecta al convertidor CD/CD boost, es la elección más común en la literatura. Esto motivó una búsqueda sobre su modelado y su interacción con los paneles FV.

Uno de los trabajos revisados, [Martínez \(2020\)](#), abordó el modelado de diversas topologías de convertidores CD/CD utilizando la metodología de Euler-Lagrange con una fuente convencional. Además, se encontraron otros estudios, mencionados en [Rafika et al. \(2018\)](#); [Lescas \(2017\)](#); [Farhat et al. \(2016\)](#); [Ouachani et al. \(2013\)](#), donde se desarrollaron modelos matemáticos para el convertidor boost, tomando en cuenta su interacción con las celdas FV y aplicando técnicas de MPPT. Sin embargo, estos modelos se basan en el enfoque tradicional de Kirchhoff, que se apoya en la suma de voltajes y corrientes. Esto plantea la necesidad de definir un modelo que describa la interacción de este subsistema mediante el enfoque energético de Euler-Lagrange.

### 1.2.3. Convertidor CD/CA (Inversor)

En la búsqueda de trabajos relacionados con el modelado de inversores, se ha encontrado el enfoque propuesto por [Beristáin and Pérez \(2022\)](#), quien presenta un modelo matemático para un inversor trifásico bidireccional utilizando las señales de conmutación. Así mismo, [Martinez et al. \(2023\)](#) emplea una metodología de modelado similar para un sistema fotovoltaico interconectado a la red, utilizando un inversor tanto para la interconexión con la red eléctrica como para controlar un motor de inducción.

Estos modelos se desarrollan a través de un enfoque tradicional que se basa en variables fundamentales, como corrientes y voltajes. Además, otras investigaciones, como las presentadas en [Lee \(2004\)](#); [Wang et al. \(2008\)](#), aplican el enfoque de Euler-Lagrange al modelado de convertidores CA/CD trifásicos, mostrando una metodología que se puede aplicar al modelado de los convertidores CD/CA, lo que permite obtener la dinámica de las corrientes en cada fase y el comportamiento del voltaje en el bus de CD, considerando las señales de conmutación de los interruptores. En resumen, estos enfoques de modelado han demostrado ser efectivos en la descripción de los inversores.

### 1.2.4. Motores

En el análisis de literatura, se ha identificado una serie de investigaciones que abordan el modelado y comportamiento de sistemas de bombeo alimentados por celdas fotovoltaicas (FV), considerando diferentes tipos de motores y sistemas de conversión. Por ejemplo, [Farhat et al. \(2016\)](#) se enfoca en un motor de imanes permanentes de corriente alterna (CA), destacando su eficiencia, particularmente en aplicaciones de sistemas de bombeo. Por otro lado, [Valenzuela \(2020\)](#) se centra en un sistema de bombeo con un motor de CD, desarrollando su modelo matemático y aplicando un algoritmo de control P&O para el seguimiento del punto de máxima potencia (MPPT). Por otro lado, [Hamrouni et al. \(2009\)](#) modela un sistema de bombeo fotovoltaico de corriente alterna, utilizando un convertidor CD/CD buck y un motor de inducción trifásico, mientras que [Malla et al. \(2011\)](#) considera un convertidor CD/CD boost en un sistema de bombeo con dos motores de inducción trifásicos como carga del inversor. Por último, [Periasamy et al. \(2015\)](#) explora dos estructuras de sistemas de bombeo: una de etapa múltiple, que integra celdas FV, un convertidor CD/CD, un inversor trifásico y un motor de inducción junto con la bomba centrífuga; y una estructura de etapa simple, que emplea celdas FV, un inversor trifásico y un motor de inducción para la bomba. Estas investigaciones ofrecen un panorama diverso de topologías y soluciones para sistemas de bombeo fotovoltaico, teniendo en cuenta la elección del motor y la configuración del sistema de conversión.

Todos estos trabajos mencionados obtienen su modelo matemático utilizando la metodología tradicional, no obstante en [Hernández et al. \(2019\)](#) se desarrolla el modelo matemático del motor de inducción trifásico utilizando el enfoque energético de Euler-Lagrange con una fuente trifásica convencional sin utilizar ninguna estrategia de control.

### 1.2.5. Sistema de bombeo

En esta revisión se buscaron sistemas de bombeo alimentados por celdas fotovoltaicas que emplean diferentes tipos de motores junto con sistemas CD/CD o CD/CA. Se identificó que la bomba centrífuga es el tipo más comúnmente utilizado en la literatura, lo que motivó el desarrollo de un modelo completo que considera la interacción de las celdas FV con componentes como el convertidor boost, inversor trifásico, motor de inducción y la bomba centrífuga, siguiendo una metodología similar a la investigación de [Muralidhar and Rajasekar \(2021\)](#). Además, se encontró que [Agnello \(2021\)](#) aborda un modelo matemático estático mostrado en el conjunto de Ecs.(1.1)-(1.3) para sistemas de bombeo convencionales en aplicaciones de separación de hidrocarburos, calculando coeficientes para las curvas características de las bombas y empleando las leyes de afinidad.

$$H = a_0Q_b^4 + a_1Q_b^3 + a_2Q_b^2 + a_3Q_b + a_4 \quad (1.1)$$

$$\frac{Q_{b1}}{Q_{b2}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (1.2)$$

$$\frac{H_{b1}}{H_{b2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \quad (1.3)$$

Donde:

$H$  es la altura de bombeo obtenida por polinomios de aproximación,  $Q_{b1,b2}$  son el caudal de bombeo en la velocidad 1 y la velocidad 2 de rotación,  $N_{1,2}$  son las velocidades de rotación 1 y 2,  $H_{b1,b2}$  son las alturas 1 y 2 correspondientes a las velocidades de rotación.

En [Errouha et al. \(2020\)](#) se enfoca en un control óptimo para motores de inducción en sistemas de bombeo FV, utilizando control MPPT basado en lógica difusa y modelos matemáticos para inversores, motores y para el modelo de la bomba, aplica un modelo estático basado en leyes de afinidad, mostrado en el conjunto de ecuaciones (1.4)-(1.6).

$$Q_{b2} = Q_{b1} \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \quad (1.4)$$

$$H_{b2} = H_{b1} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \quad (1.5)$$

$$P_{b2} = P_{b1} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^3 \quad (1.6)$$

Por otro lado, [Hamad et al. \(2016\)](#) desarrolla un modelo para sistemas de bombeo de CA, involucrando componentes como fuente de CA, rectificador, inversor trifásico, motor de inducción y bomba centrífuga, manteniendo el enfoque en las leyes de afinidad para modelar la bomba expresado en (1.7)-(1.9).

$$\frac{Q_{b1}}{Q_{b2}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (1.7)$$

$$\frac{H_{b1}}{H_{b2}} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (1.8)$$

$$\frac{P_{b1}}{P_{b2}} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^3 \quad (1.9)$$

[Sepúlveda \(2022\)](#) investiga el punto de operación de la bomba en sistemas de bombeo FV, incorporando leyes de afinidad previamente mostrado en (1.10) y considerando alturas del sistema de bombeo mediante la ecuación de Bernoulli mostrado en (1.11). Posteriormente calcula las pérdidas de energía  $h_f$  en la expresión (1.12), calculando valores de velocidad del fluido en (1.13), el número de Reynolds (1.14) y la viscosidad del fluido en (1.15), para poder obtener una altura que considera las pérdidas en la Ec. (1.16). De igual manera, mediante una aproximación polinomial desarrolla la curva característica de la bomba mostrado en la Ec. (1.17), con los valores de altura y caudal, obtiene la potencia hidráulica en (1.18).

$$Q_{b2} = Q_{b1} \left( \frac{N_2}{N_1} \right), H_{b2} = H_{b1} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \quad (1.10)$$

$$h_s - h_f = \left( \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \right) - \left( \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 \right) \quad (1.11)$$

$$h_f = \frac{v^2}{2g} \left( f_r \frac{l}{D} + \Sigma k_h \right) \quad (1.12)$$

$$v = \frac{Q_b}{A} \quad (1.13)$$

$$R_e = \frac{vD}{\nu} \quad (1.14)$$

$$f_r = fcn \left( R_e, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (1.15)$$

$$h_s(Q) = \frac{Q_b^2}{2gA^2} \left( f_r \frac{l}{D} + \Sigma k + \Delta z_{1-2} \right) \quad (1.16)$$

$$h_b = a_0 Q_b^3 + a_1 Q_b^2 + a_2 Q_b + a_3 \quad (1.17)$$

$$P_h = \rho g H Q_b \quad (1.18)$$

Donde:

$P_{1,2}$  son las presiones del lado de succión y de descarga en el sistema de tuberías,  $z_{1,2}$  son las alturas de succión y de descarga,  $f_r$  es el coeficiente de viscosidad del fluido,  $k, \varepsilon$  son coeficientes del sistema,  $R_e$  es el número de Reynolds,  $l, D$  y  $v$  son la longitud de la tubería, el diametro de la tubería y la velocidad del fluido.

[García et al. \(2013\)](#) aborda el modelado de sistemas de bombeo convencionales con motores de inducción monofásicos, centrándose en el diseño de modelos para los motores y obteniendo mediante un modelo estático el par de la bomba y la altura de bombeo para la parte de la bomba centrífuga mostrados en las Ecs. (1.19)-(1.20).

$$T_L = a_{t2} Q_b^2 + a_{t1} Q_b \omega_{rm} + a_{t0} \omega_m^2 \quad (1.19)$$

$$H = -a_{h2} Q_b^2 - a_{h1} Q_b \omega_{rm} + a_{h0} \omega_m^2 \quad (1.20)$$

Donde:

$T_L$  es el par de la bomba,  $H$  es la altura de bombeo y  $\omega_{rm,m}$  son las velocidades angulares eléctrica y mecánica del motor.

Finalmente, [LUKASIK \(2018\)](#) presenta un modelo dinámico de sistemas de bombeo convencionales con fuente de CA, con enfoque en motores de inducción trifásicos y bombas centrífugas, utilizando la formulación Euler-Lagrange para representar la relación implícita entre los componentes del sistema con el sistema de tuberías el cual se presenta en la Ec. (1.21).

$$\frac{d}{dt}(Q_b) = \frac{1}{L_h} (\rho g (H_2 - H_1) + P_{atm} - R_h Q_b^2) \quad (1.21)$$

El término  $\rho g (H_1 - H_2) + P_{atm}$  representa la presión hidrostática del sistema de bombeo en términos de las alturas de succión y descarga  $H_{1,2}$ ,  $P_{atm}$  es la presión atmosférica y  $R_h Q_b^2$  representa las pérdidas de energía en el sistema, donde  $R_h$  es la resistencia hidráulica.

También, [Goppelt et al. \(2018\)](#) obtiene un modelo dinámico del caudal expresado en (1.22) y de la presión en la Ec. (1.23) de una bomba centrífuga utilizando una analogía electro hidráulica donde considera una inductancia hidráulica  $L_h$ , una capacitancia hidráulica  $C_h$  y una resistencia hidráulica  $R_h$  considerando una altura estática expresada en (1.24).

$$\frac{d}{dt}(Q_b) = \frac{1}{L_h} (K_o \omega^2 - p - R_1 \omega Q_b - R_2 Q_b^2) \quad (1.22)$$

$$\frac{d}{dt}(p) = \frac{1}{C_h} (Q_b - Q_A) \quad (1.23)$$

$$H = a_f Q_b + h_\pi Q_b^2 + H_{estatica} \quad (1.24)$$

Donde  $Q_b, p, H$  son las variables hidráulicas de caudal, presión y altura,  $k_o$  es el factor de ganancia del sistema,  $R_{1,2}$  son las resistencias del sistema,  $Q_A$  es el caudal del sistema de tuberías y  $a_f$  y  $h_\pi$  son constantes del sistema de tuberías.

Otro trabajo que maneja un modelo dinámico de la bomba es el de [Korsell and Ydén \(2021\)](#), donde para fines de control obtiene el modelo del caudal de la bomba  $Q_b$  expresado en (1.25), así como el modelo dinámico del caudal que circula por la válvula  $Q_v$  mostrado en (1.26).

$$\frac{d}{dt}(Q_b) = \frac{K_p u_b - Q_b}{T_b} \quad (1.25)$$

$$\frac{d}{dt}(Q_v) = \frac{K_v u_v - Q_v}{T_v} \quad (1.26)$$

Donde  $K_b$  y  $K_v$  son las ganancias de la bomba y de la válvula,  $T_b$  y  $T_v$  son las constantes de tiempo para la bomba y la válvula.

Por último, en el trabajo de [Yeşil and Şahin \(2022\)](#) se obtiene las dinámicas de las alturas  $h_{t1}$  y  $h_{t2}$  para controlar el caudal de una bomba centrífuga con un tanque de agua tal como se describe en la Ec.(1.27) y (1.28). El valor de las alturas, repercute en los valores del caudal como se visualiza en las Ecs. (1.29)-(1.32).



$$\frac{d}{dt}(h_{t1}) = \frac{Q_1 - Q_2}{A_1} \quad (1.27)$$

$$\frac{d}{dt}(h_{t2}) = \frac{Q_2 - Q_3 - K_{bv}Q_4}{A_2} \quad (1.28)$$

$$Q_1 = k_{PWM}W_{max} \quad (1.29)$$

$$Q_2 = s_2a_2\sqrt{2g(h_{t1} - h_{t2})} \quad (1.30)$$

$$Q_3 = s_3a_3\sqrt{2gh_2} \quad (1.31)$$

$$Q_4 = K_{bv}s_4a_4\sqrt{2gh_{t2}} \quad (1.32)$$

Para este caso  $Q_{1-4}$  son los caudales presentes en el sistema.  $h_{t1-t2}$  son las alturas de los 2 tanques del sistema  $k_{PWM}$  y  $K_{bv}$  son ganancias del PWM y de la válvula.

### 1.2.6. Aspectos relevantes de la revisión del estado del arte

Dentro de los aspectos más relevantes de la revisión del estado del arte son:

- En este trabajo de tesis se trabaja con un sistema de etapa múltiple conformado por el sistema FV, el convertidor elevador, el inversor trifásico, el motor de inducción trifásico y la bomba centrífuga, ya que es el más utilizado en la literatura y simplifica las tareas de control al dividir las tareas para el MPPT y la velocidad del motor. De igual manera, se pretende aplicar la estrategia de control P&O para el MPPT ya que es el más utilizado por los autores debido a su fácil implementación y una estrategia de control V/F para el control del motor.
- Hasta el momento no se ha encontrado en la literatura un modelo por Euler-Lagrange que represente al convertidor elevador junto con los paneles FV, por lo tanto en el presente trabajo se considera un modelo por Euler-Lagrange que considere ambos subsistemas en conjunto.
- Para el modelado del inversor se diseña un modelo por funciones de conmutación desde el enfoque energético Euler-Lagrange tomando ambas ideas de la revisión bibliográfica de este subsistema.
- Se han encontrado modelos por separado del motor de inducción, el convertidor elevador y la bomba centrífuga utilizando el enfoque Euler-Lagrange, demostrando que al utilizar esta metodología se simplifica el desarrollo matemático.
- De la revisión bibliográfica presentada, se presentan modelos matemáticos integrados de un sistema de bombeo FV utilizando la metodología tradicional, sin embargo, no se ha encontrado algún trabajo que presente un modelo completo utilizando el enfoque energético Euler-Lagrange que describa a un sistema de bombeo FV.

## 1.3. Planteamiento del problema

La creciente demanda de energía eléctrica y el interés en fuentes renovables han impulsado la investigación en sistemas sostenibles. La energía fotovoltaica destaca como fuente prometedora,

permitiendo implementarse en los sistemas eléctricos convencionales, tal es el caso del sistema de bombeo. Para lograr una mayor comprensión del sistema, es esencial modelar, simular y analizar cada componente del sistema de bombeo, así como su integración en un sistema completo.

Este sistema requiere dos acciones de control: 1) un control del seguimiento del punto de máxima potencia para aprovechar la máxima energía posible obtenida de las celdas FV ya que no cuenta con un sistema de almacenamiento, por lo cual, el tiempo de funcionamiento del sistema se ve limitado. 2) un control de velocidad para arranque suave del motor y ajustar la velocidad requerida por la bomba. Por ello es necesario el diseño de un modelo matemático que integre los diferentes subsistemas, esta integración conlleva a varios desafíos, 1) El enfoque de modelado que se requiere analizar: leyes físicas, enfoque energético y no linealidades. 2) Características propias del sistema que incluye la variabilidad de la irradiancia solar, la eficiencia de los convertidores y la sincronización de los elementos del sistema. Como se ha visto en la literatura existen modelos completos empleando leyes físicas y diferentes estrategias de control. En este trabajo se propone modelar matemáticamente utilizando dos enfoques: el primero es un enfoque tradicional en donde se utilizan las leyes físicas. El segundo es el enfoque energético de Euler-Lagrange.

## 1.4. Hipótesis

Es posible obtener el modelo matemático mediante enfoque energético que represente el comportamiento de un sistema de bombeo alimentado por un sistema de potencia fotovoltaico.

## 1.5. Objetivos

### 1.5.1. Objetivo General

Modelar, simular y analizar un sistema de potencia fotovoltaico aplicado a un sistema de bombeo ante diferentes condiciones de operación.

### 1.5.2. Objetivos Particulares

- Modelar, simular y analizar el funcionamiento de las celdas fotovoltaicas.
- Modelar, simular y analizar el funcionamiento del convertidor CD/CD elevador (Boost).
- Modelar, simular y analizar el funcionamiento del convertidor CD/CA trifásico.
- Modelar, simular y analizar el funcionamiento del motor de inducción trifásico.
- Modelar, simular y analizar el funcionamiento del sistema de bombeo.
- Modelar, simular y analizar el funcionamiento del sistema de bombeo alimentado por el sistema de potencia fotovoltaico.

## 1.6. Justificación

Debido a la creciente demanda de fuentes de energía sostenible y la imperante necesidad de reducir los costos asociados con la energía eléctrica, los sistemas de energía solar fotovoltaica han emergido

como una solución altamente solicitada en la actualidad. Esta tendencia se ve respaldada por la constante disminución de los precios de las celdas FV, lo que hace que los sistemas de bombeo alimentados por energía solar sean cada vez más adecuados para su implementación, cobrando una importancia significativa al abordar la problemática de la falta de suministro de energía y agua que enfrentan numerosas comunidades rurales. La aplicación de sistemas de bombeo fotovoltaicos se presenta como una solución, ya sea para satisfacer las necesidades de suministro de agua en los hogares o para respaldar los sistemas de riego agrícola [Franco et al. (2020); Mahjoubi et al. (2010); Chy et al. (2015); Villegas et al. (2018)].

Este trabajo de investigación se centra en el modelado matemático de un sistema de bombeo alimentado por energía solar, empleando dos enfoques de modelado diferentes, a pesar de que ambos modelos muestran la misma dinámica, la diferencia es que el primero describe a los subsistemas por separado y así buscar la relación física entre las distintas leyes que se rigen, mientras que el segundo enfoque muestra una metodología en donde no es necesario dividir en diferentes subsistemas, ya que implícitamente mediante una función de energía se puede obtener la dinámica del sistema completo, además de que sus propiedades estructurales facilitan el análisis de estabilidad y el diseño de controladores. Estos modelos se presentan con el objetivo de analizar su viabilidad, eficiencia y potencial para brindar soluciones a desafíos cruciales en comunidades rurales, donde el acceso a energía y agua es fundamental para el bienestar y el desarrollo sostenible.

## 1.7. Metodología

### 1.7.1. Descripción del sistema de bombeo

Los sistemas de bombeo son un conjunto de subsistemas que interactúan en conjunto con la finalidad de mover un líquido, generalmente desde un punto más abajo hasta una ubicación más alta. Estos sistemas son esenciales en cualquier sector como la industria, la agricultura, entre otros. La estructura general de un sistema de bombeo se conforma por una fuente de alimentación eléctrica, un motor, una bomba, un punto de succión y un punto de descarga y un sistema de tuberías. En este trabajo de tesis, se plantea abordar el sistema de bombeo desde la fuente de alimentación, la cual es una fuente fotovoltaica hasta la parte de la bomba, debido a que es el elemento principal que genera el par necesario para transportar el fluido.

La metodología utilizada en el desarrollo de este trabajo se llevó a cabo de la siguiente manera: Se realizó una búsqueda del estado del arte acerca de las topologías utilizadas en los sistemas de bombeo fotovoltaicos con el objetivo de identificar los elementos que conforman al sistema. Posteriormente se obtuvieron los modelos generales de cada subsistema por separado para validar su funcionamiento con escenarios de simulación particulares para cada uno, los cuales se clasificaron en el siguiente secciones: 1) Las celdas fotovoltaicas con el convertidor CD/CD elevador, 2) el convertidor CD/CA trifásico 3) el motor de inducción trifásico, 4) bomba centrífuga, como se visualiza en la Fig. 1.2.

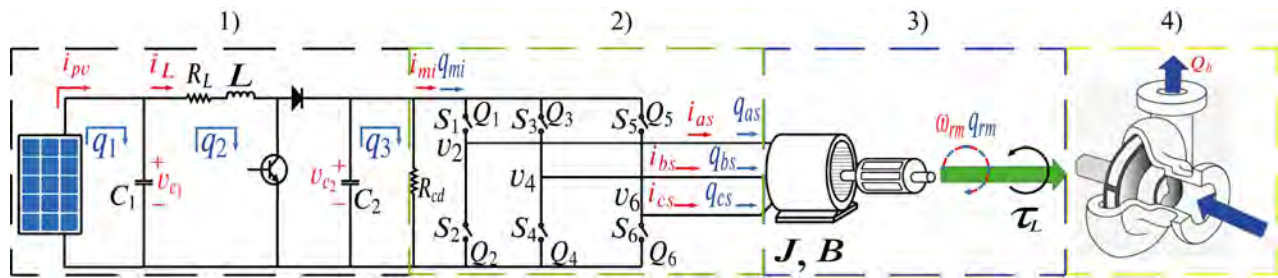


Figura 1.2: Secciones de modelado.

Posteriormente se integraron los modelos obtenidos y se hizo un dimensionamiento para la obtención de los parámetros correspondientes al caso de estudio tal como se visualiza en la metodología de la figura 1.3.



Figura 1.3: Metodología de trabajo.

## 1.8. Aportación

El presente trabajo busca la obtención de dos modelos completos que describan adecuadamente el comportamiento de un sistema de bombeo alimentado por celdas FV, uno mediante la metodología tradicional que involucra a las leyes físicas y otro utilizando el enfoque energético Euler-Lagrange, así como la implementación de estrategias de control para las variables involucradas de los modelos.

- **Aportación 1:** Obtener el modelo matemático tradicional y Euler-Lagrange de las celdas fotovoltaicas con el convertidor boost.
- **Aportación 2:** Obtener el modelo matemático tradicional y Euler-Lagrange del convertidor CD/CA.
- **Aportación 3:** Obtener el modelo matemático tradicional y Euler-Lagrange del motor de inducción trifásico.
- **Aportación 4:** Obtener el modelo de la bomba centrífuga.
- **Aportación 5:** Integrar los modelos matemáticos que describan el sistema completo.

## 1.9. Contenido del documento de tesis

Lo siguiente del contenido de la tesis se organiza de la siguiente manera: El segundo capítulo presenta el principio de funcionamiento de los diferentes subsistemas de un sistema de bombeo alimentado por paneles solares, así como su correspondiente marco teórico.

En el tercer capítulo se muestra el desarrollo de las dos metodologías de modelado (Euler-Lagrange y Leyes físicas) para los diferentes subsistemas y las acciones de control utilizadas en este trabajo.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos de cada escenario de simulación.

Finalmente, en el quinto capítulo se muestran las conclusiones obtenidas de este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Sistemas de bombeo fotovoltaicos

#### 2.1.1. Descripción de los sistemas de bombeo alimentados por sistemas fotovoltaicos

El sistema de bombeo alimentado por energía solar fotovoltaica es un sistema que consta de varios subsistemas interconectados que aprovechan la energía solar para proporcionar un suministro de agua. Se puede hacer uso de un sistema de acondicionamiento de potencia (Convertidores electrónicos CD/CD y CD/CA) que ayudan a operar al motor de la bomba ya sea de CD o CA y sacar el mayor aprovechamiento de la tecnología FV. mediante controladores MPPT. De igual manera, se puede optar por el uso de sistemas de almacenamiento que proporcionan energía al sistema en caso de que la energía proporcionada por los paneles solares no sea la suficiente.

#### 2.1.2. Clasificación de los sistemas de bombeo alimentados por celdas fotovoltaicas

Existen varias configuraciones dentro de un sistema de bombeo fotovoltaico, las cuales se determinan tomando en cuenta los siguientes requerimientos necesarios del sistema [[Abella and Romero \(2009\)](#); [Chilundo et al. \(2018\)](#)]:

- **Requerimientos hidráulicos:**

- Profundidad del nivel de succión del agua.
- Altura geométrica o de descarga del agua por la bomba.
- Altura dinámica en donde se presentan las pérdidas por fricción en el sistema de tuberías y accesorios.
- Caudal requerido.
- Sistema de almacenamiento de agua.

- **La energía suministrada por la fuente fotovoltaica:**

- Irradiancia solar
- Condiciones climatológicas

Con base a los requerimientos anteriores, se definen las siguientes configuraciones para los sistemas de bombeo [Abella and Romero (2009); Franco et al. (2020)]:

- **Sistema de bombeo interconectado a la red**

Es aquel sistema el cual la fuente fotovoltaica va interconectado a la red eléctrica para compensar la falta de energía cuando la fuente fotovoltaica no puede proveer la suficiente.

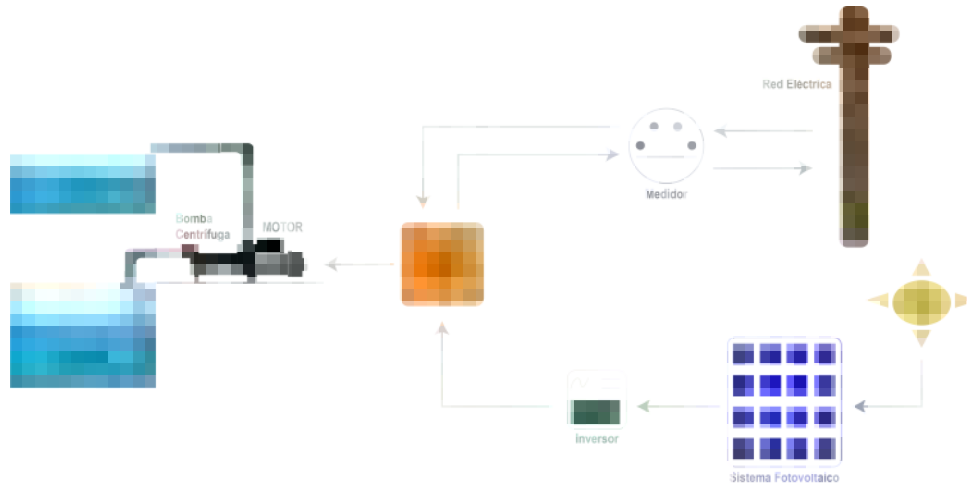


Figura 2.1: Sistema de bombeo interconectado a la red.

- **Sistema de bombeo aislado**

Es aquel sistema que no cuenta con el suministro de la red eléctrica como en comunidades rurales y la fuente fotovoltaica por si sola tiene que proveer la energía demandada por el sistema. Por lo anterior, existen varios tipos de configuraciones en un sistema aislado.

Sistema de bombeo con motores CD.  
 Sistema de bombeo con motores CA.  
 Sistema de bombeo con baterías.

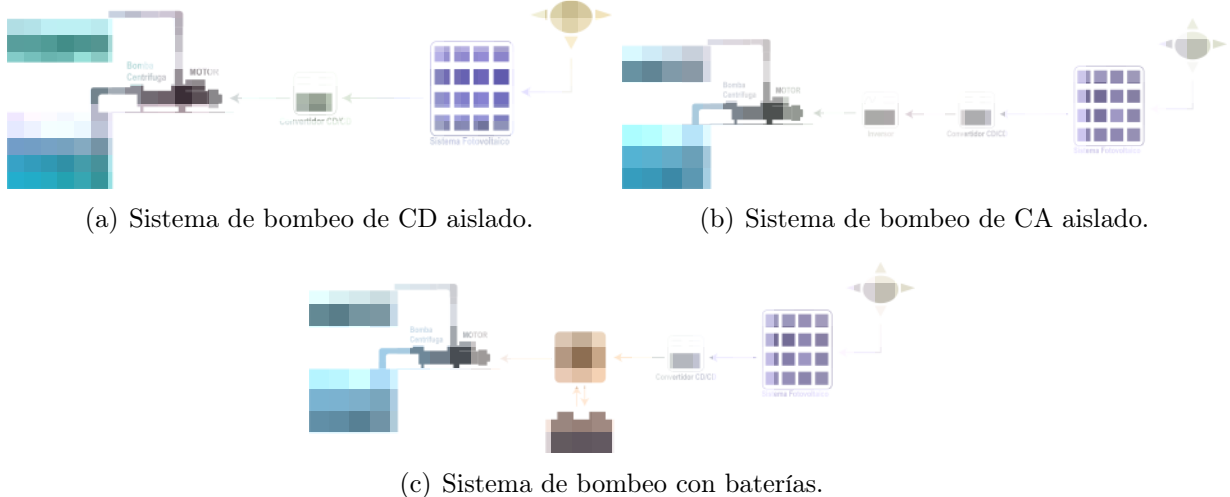


Figura 2.2: Tipos de sistemas de bombeo aislados.

En el presente trabajo se utilizará un sistema de bombeo aislado con un motor de CA.

### 2.1.3. Principio de funcionamiento del sistema de bombeo alimentado por sistema FV propuesto.

Para este trabajo se pretende utilizar un sistema de bombeo fotovoltaico aislado sin sistema de almacenamiento y utilizando un motor de CA. El principio de funcionamiento de este sistema consiste en la transportación de un líquido de un punto a otro mediante la alimentación eléctrica de un motor de CA por medio de paneles FV. Este proceso consta de la obtención de energía eléctrica por captación de energía solar, esta energía obtenida por los paneles FV se regula mediante un convertidor CD/CD, y posteriormente se transforma la energía de CD a CA por medio de un inversor, el cual activa el motor para mover a la bomba centrífuga y bombear el agua tal como se visualiza en la Fig. 2.3.

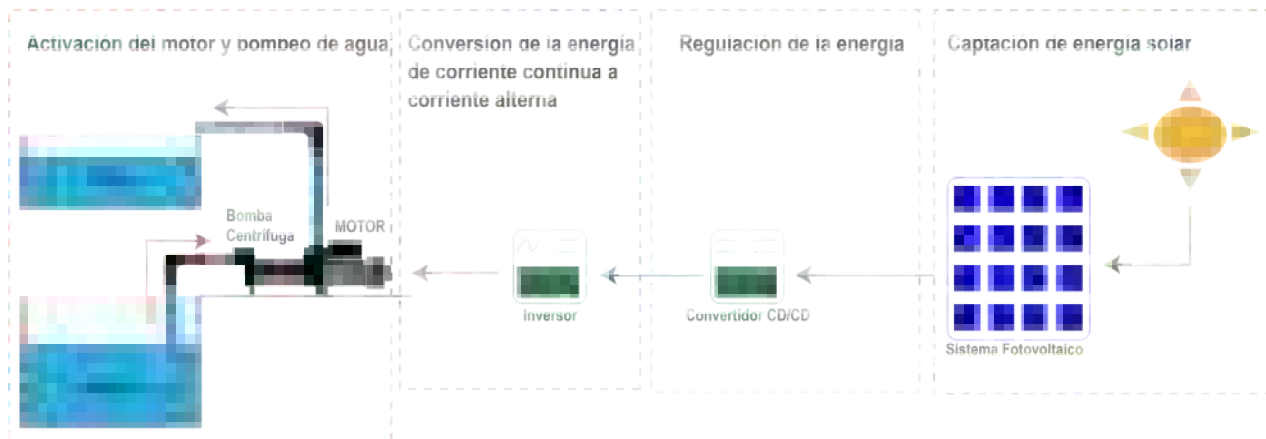


Figura 2.3: Principio de funcionamiento del sistema de bombeo alimentado por paneles FV aislado.

## 2.2. Modelado y caracterización de los paneles fotovoltaicos

Para analizar el comportamiento de las celdas, se estudian comúnmente 3 arreglos: El modelo de 5 parámetros, el modelo simplificado de un diodo y el modelo de doble diodo, los cuales sus circuitos equivalentes se muestran en la Fig. 2.4. Cada modelo se caracteriza mediante sus ecuaciones correspondientes (2.1)-(2.3).

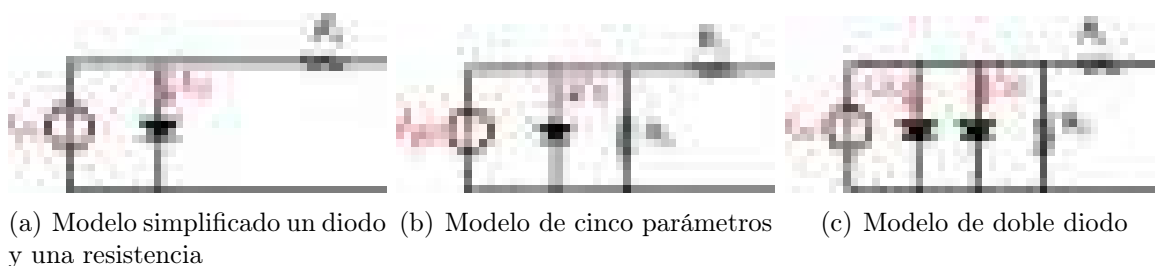


Figura 2.4: Tipos de modelos de los módulos FV.



Modelo matemático simplificado de un diodo y una resistencia.

$$\begin{aligned}
 i &= N_p (i_{pv} - i_D) \\
 i_{pv} &= (i_{pv,n} + Ki(T - T_n)) \frac{G}{G_n} \\
 i_D &= i_{01} \left( e^{\frac{q \left( \frac{V}{N_s} + \frac{iR_s}{N_p} \right)}{AKT}} - 1 \right) \\
 i_{01} &= \frac{i_{sc,n} + K_i (T - T_n)}{e \frac{q (V_{oc,n} + K_v (T - T_n))}{N_s AKT} - 1}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Modelo matemático de 5 parámetros.

$$\begin{aligned}
 i &= N_p \left( i_{pv} - i_D - \frac{1}{R_p} \left( \frac{V}{N_s} + \frac{iR_s}{N_p} \right) \right) \\
 i_{pv} &= (i_{pv,n} + Ki(T - T_n)) \frac{G}{G_n} \\
 i_D &= i_{01} \left( e^{\frac{q \left( \frac{V}{N_s} + \frac{iR_s}{N_p} \right)}{AKT}} - 1 \right) \\
 i_{01} &= \frac{i_{sc,n} + K_i (T - T_n)}{e \frac{q (V_{oc,n} + K_v (T - T_n))}{N_s AKT} - 1}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Modelo matemático de doble diodo.

$$\begin{aligned}
 i &= N_p \left( i_{pv} - i_{D1} - i_{D2} - \frac{1}{R_p} \left( \frac{V}{N_s} + \frac{iR_s}{N_p} \right) \right) \\
 i_{pv} &= (i_{pv,n} + Ki(T - T_n)) \frac{G}{G_n} \\
 i_{D1} &= i_{01} \left( e^{\frac{q \left( \frac{V}{N_s} + \frac{iR_s}{N_p} \right)}{A_1 KT}} - 1 \right) \\
 i_{D2} &= i_{02} \left( e^{\frac{q \left( \frac{V}{N_s} + \frac{iR_s}{N_p} \right)}{A_2 KT}} - 1 \right) \\
 i_{01} &= \frac{i_{sc,n} + K_i (T - T_n)}{e \frac{q (V_{oc,n} + K_v (T - T_n))}{N_s A_1 KT} - 1} \\
 i_{02} &= \frac{i_{sc,n} + K_i (T - T_n)}{e \frac{q (V_{oc,n} + K_v (T - T_n))}{N_s A_2 KT} - 1}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Donde  $i$  es la corriente de salida,  $N_p$  y  $N_s$  son el número de celdas en paralelo y en serie,  $I_{pv}$  es la fotocorriente,  $T$  es la temperatura y  $G$  se refiere a la irradiancia.

$i_{pv,n}$ ,  $T_n$ ,  $G_n$ ,  $i_{sc,n}$  y  $v_{oc,n}$  son valores nominales,  $k_i$  y  $k_v$  son coeficientes de temperatura de la corriente y el voltaje,  $i_{01}$  e  $i_{02}$  son las corrientes de saturación inversa de los diodos,  $q$  es la carga del electrón,  $k$  es la constante de Boltzmann con un valor de  $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ .  $A_1$  y  $A_2$  son los coeficientes de idealidad de los diodos.

Los paneles fotovoltaicos cuentan con dos curvas características, una que representa la relación entre la corriente y el voltaje y la otra que muestra la relación entre la potencia y voltaje. Estas curvas son fundamentales para visualizar el punto de máxima potencia, es importante señalar que estas curvas se ven afectadas ante cambios en la temperatura y la irradiancia, como se muestra en las Fig. 2.5.

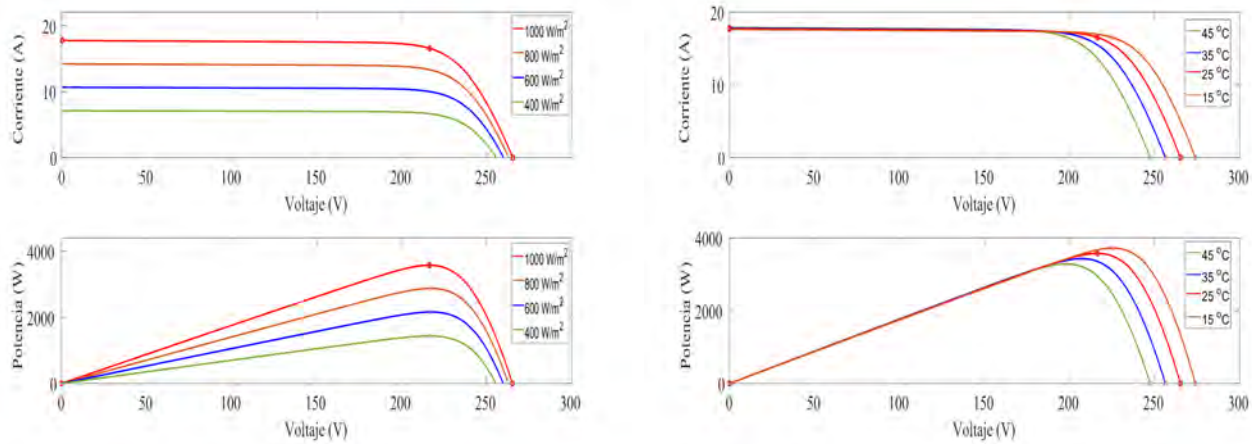


Figura 2.5: Curvas características ante cambios en la irradiancia y la temperatura.

### 2.2.1. Punto de máxima potencia

El punto de máxima potencia (MPP, por sus siglas en inglés) se refiere al punto de operación en donde la potencia eléctrica de las celdas fotovoltaicas es maximizada, de tal forma que se aprovecha la mayor cantidad de energía producida por el arreglo fotovoltaico.

El término de seguimiento del punto de máxima potencia (MPPT, por sus siglas en inglés), es el control automático que se encarga de ajustar el MPP mediante algoritmos aplicados en la parte del acondicionamiento de potencia [Chy et al. (2015)], los cuales se encargan de ajustar el ciclo de trabajo adecuado para el MPP de las celdas fotovoltaicas.

Por lo anterior, existen varios algoritmos MPPT basados en diferentes estrategias (Inteligencia artificial, Perturbación, Conductancia, entre otros). En el presente trabajo, el algoritmo MPPT utilizado es el Perturbar y Observar (P&O) visualizado en la Fig. 2.6, debido a su fácil implementación.

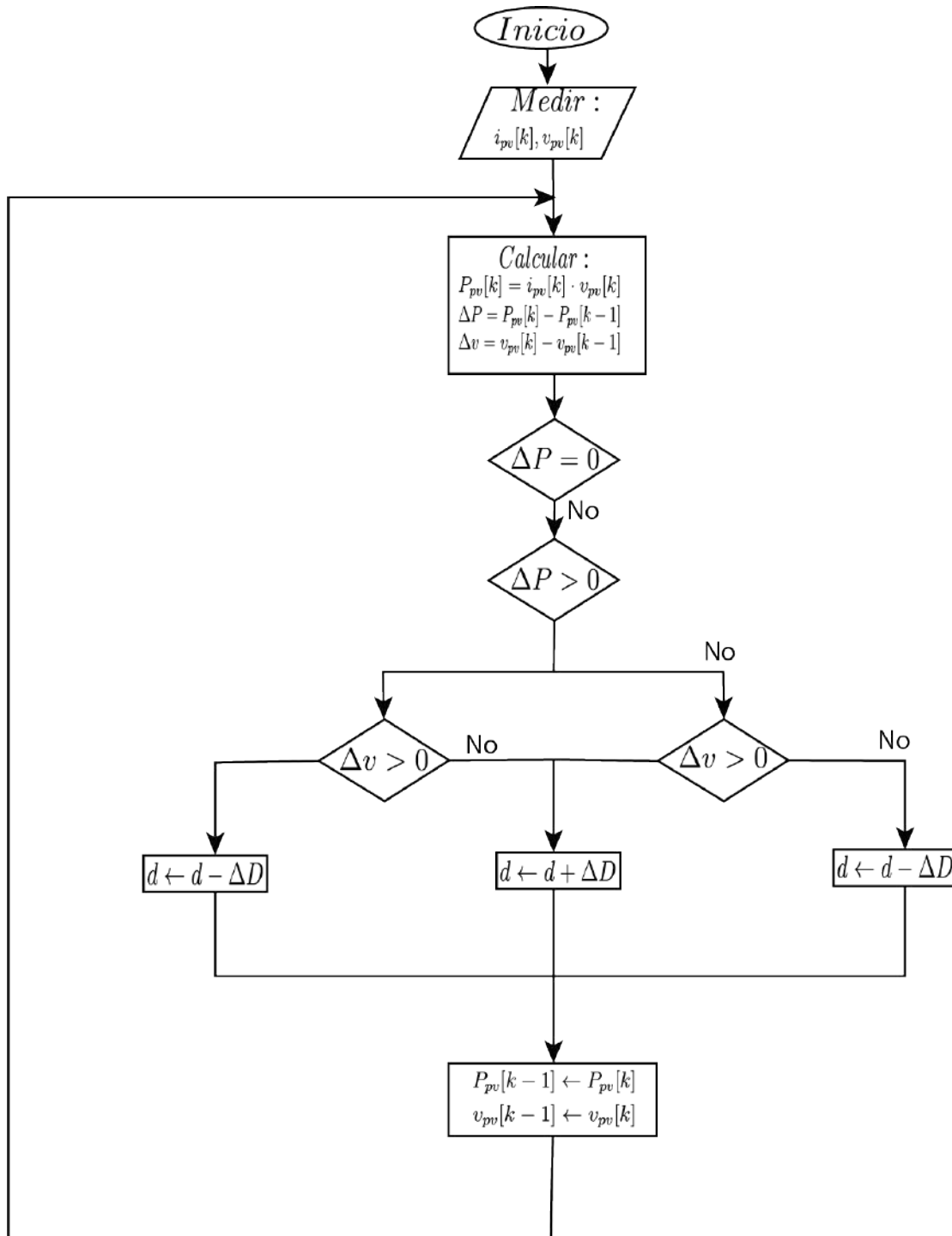


Figura 2.6: Algoritmo P&O para el seguimiento del punto de máxima potencia.

El principio de funcionamiento de este algoritmo consiste en comparaciones de voltaje  $\Delta v$  y de potencia  $\Delta P$  entre el valor en el instante  $k$  y el valor anterior, buscando la región de operación del MPP, tal como se visualiza en la Fig. 2.7.

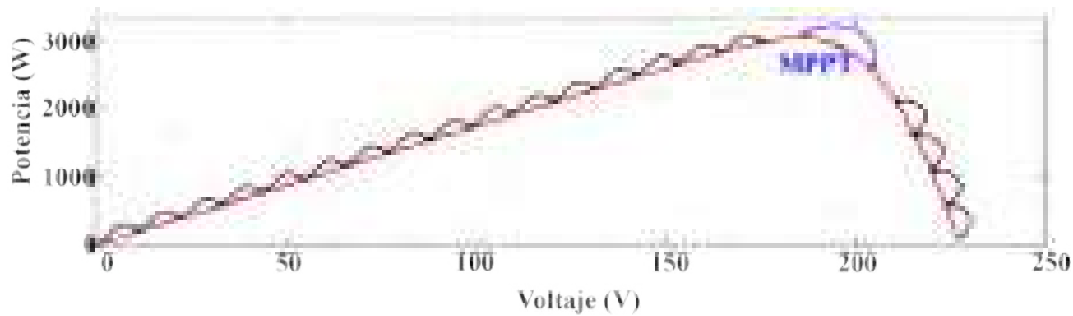


Figura 2.7: Funcionamiento del algoritmo PO en los sistemas fotovoltaicos.

## 2.3. Convertidores electrónicos de potencia

Los convertidores electrónicos son sistemas de acondicionamiento de potencia que ajustan el voltaje y la corriente de salida con respecto al de entrada en función de las necesidades específicas demandadas por la carga. Se clasifican en distintas categorías, como: CD/CD, CD/CA, CA/CD y CA/CA, como se muestran a continuación en la Fig. 2.8., según se detalla en [Trzynadlowski (2016); Hart and Barrado (2001)].

En este trabajo, se usaron convertidores CD/CD y CD/CA con el propósito de implementar un control del seguimiento del punto de máxima potencia (MPPT, por sus siglas en inglés) para las celdas fotovoltaicas, ajustando el ciclo de trabajo del convertidor CD/CD. Además, se requiere un control de velocidad que ajuste el voltaje de salida del convertidor CD/CA mediante modulación de ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés).

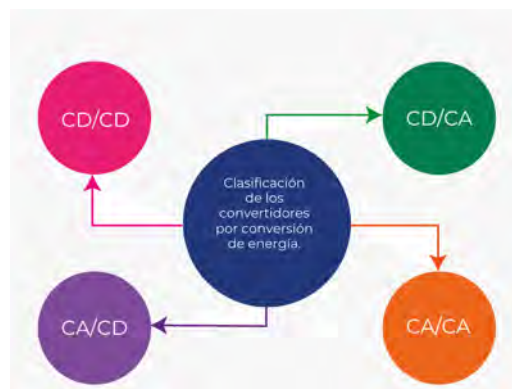


Figura 2.8: Clasificación de los convertidores electrónicos de potencia por conversión de energía.

### 2.3.1. Descripción de los convertidores CD/CD

Estos convertidores desempeñan una función de transformar un voltaje de entrada continuo a otro voltaje de salida distinto pero de igual manera de naturaleza continua. En el caso de aplicación con paneles FV, se utilizan para determinar el punto de máxima potencia mediante el ajuste del ciclo de trabajo, en caso de que la aplicación lo requiera [González et al. (2019); Gónzalez (2008); Abella and Romero (2009)].

### 2.3.2. Clasificación de los convertidores CD/CD

Los convertidores CD-CD se clasifican en aislados y no aislados. Los convertidores aislados proporcionan un aislamiento eléctrico entre la fuente de alimentación y la carga, mientras que los no aislados se conectan de manera directa. Algunas topologías comúnmente utilizadas de los convertidores aislados son los convertidores **flyback** y **forward** y dentro de las topologías de los convertidores no aislados están los convertidores **elevador**, **reductor** y **reductor-elevador** [Pantaleo (2007)], tal como se visualiza en la Fig. 2.9.

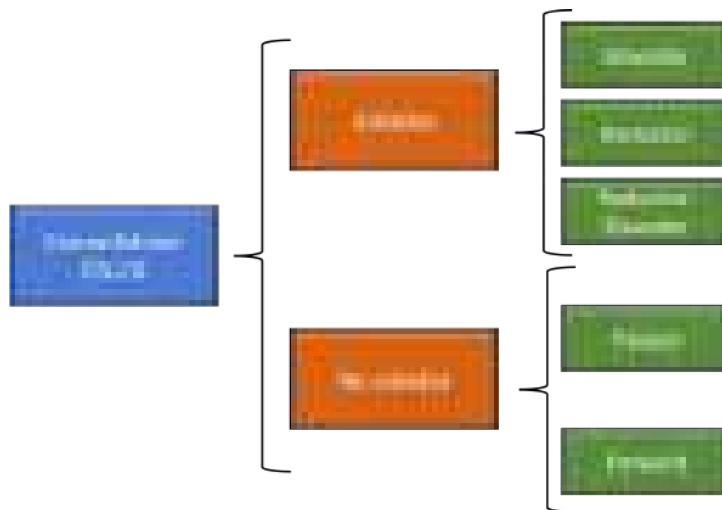


Figura 2.9: Clasificación de los convertidores CD-CD

Para el presente trabajo, se utiliza un convertidor CD-CD elevador el cual permite elevar el voltaje de CD cuando el voltaje de los paneles FV es bajo debido a los cambios de irradiancia.

### 2.3.3. Principio de funcionamiento de los convertidores CD-CD

#### Topologías básicas de los convertidores CD-CD aislados

- **Convertidores flyback**

El convertidor **Flyback** utiliza un transformador para almacenar la energía y posteriormente liberarla. Su circuito equivalente se describe por la Fig. 2.10, donde la energía proporcionada por  $v_g$  es almacenada en la inductancia  $L_m$  cuando el interruptor  $d$  se encuentra cerrado y libera la energía a la carga cuando el interruptor se encuentra abierto [Giménez Pérez (2016); Pantaleo (2007)].

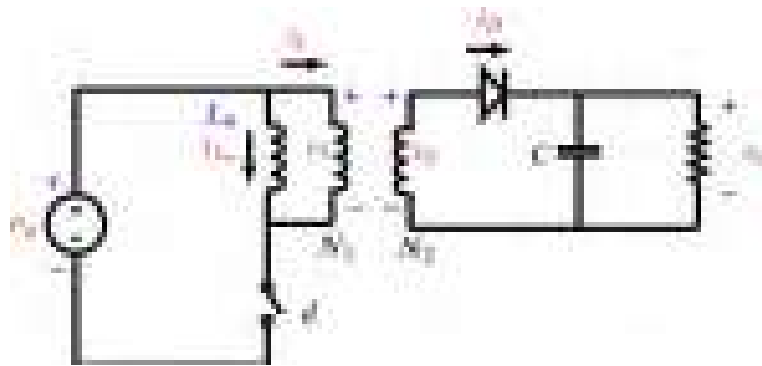


Figura 2.10: Circuito equivalente del convertidor flyback.

La ecuación característica que describe al convertidor flyback en modo de conducción continua (MCC) tal como lo menciona en [Giménez Pérez (2016); Pantaleo (2007); Hart and Barrado (2001)] y se visualiza en la expresión (2.4).

$$v_o = v_g \left( \frac{d}{1-d} \right) a \quad (2.4)$$

Donde  $v_o$  es el voltaje de salida y  $a$  es la relación del número de vueltas del devanado primario y el secundario del transformador.

#### ■ Convertidores forward

Otra topología de los convertidores aislados son los convertidores **Forward**, estos convertidores necesitan de un tercer embobinado para descargar la energía hacia la carga, tal como se visualiza en su circuito equivalente de la Fig. 2.11.

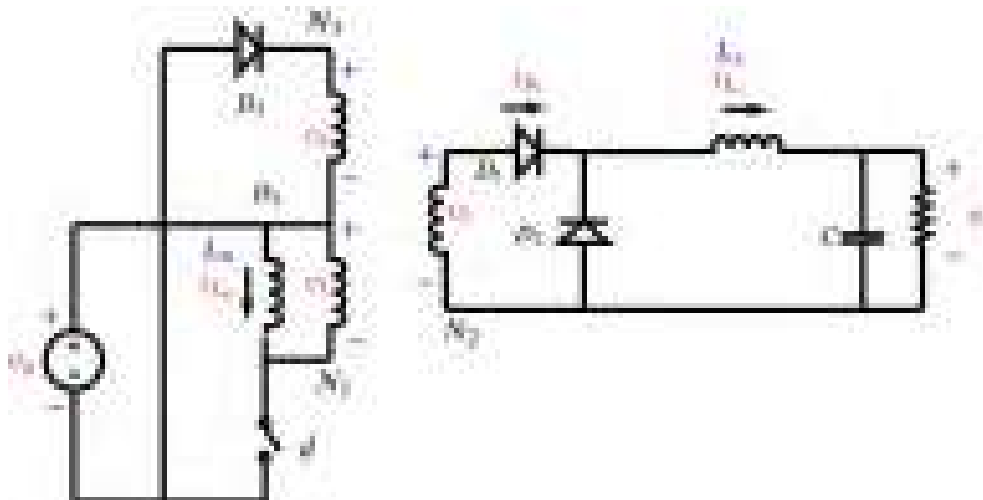


Figura 2.11: Circuito equivalente del convertidor forward.

Cuando el interruptor está cerrado los devanados 1 y 2 transfieren la energía de la fuente del generador  $v_g$  a la carga; El devanado 3 se utiliza para regular la corriente del transformador

entre cada periodo de conmutación. La ecuación que caracteriza a este convertidor se muestra en la Ec. (2.5) obtenida de [Pantaleo (2007); Hart and Barrado (2001)].

$$v_o = v_g da \quad (2.5)$$

### Topologías básicas de los convertidores CD-CD no aislados

Las topologías básicas de los convertidores CD-CD no aislados son [Durango et al. (2017); Arteaga (2019); Abella and Romero (2009)]:

- **Convertidor CD/CD reductor (Buck)**

El convertidor Buck reduce la salida de voltaje con respecto al voltaje de entrada, el cual su circuito equivalente se describe por la Fig. 2.12, donde  $v_g$  es el voltaje del generador,  $d$  es el ciclo de trabajo del convertidor,  $i_D$  es la corriente del diodo,  $i_L$  es la corriente del inductor,  $C$  es el bus de CD y  $v_o$  e  $i_o$  es el voltaje y la corriente de la carga.

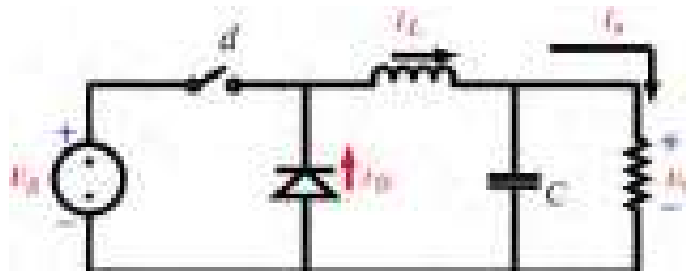


Figura 2.12: Circuito equivalente del convertidor Buck.

La Fig. 2.12 describe el circuito equivalente del convertidor Buck. Cuando el interruptor esta cerrado, entonces la corriente circula en dirección a la carga y cuando el interruptor se abre, el diodo se polariza inversamente, permitiendo la circulación de la corriente solamente en la malla del inductor y de la carga.

La ecuación característica del convertidor Buck está dada por la Ec. (2.6).

$$v_o = v_g d \quad (2.6)$$

- **Convertidor CD/CD elevador (Boost)**

El convertidor Boost aumenta la tensión de salida con respecto a la tensión de entrada, el cual el circuito equivalente se visualiza en la Fig. 2.13, donde  $v_g$  es el voltaje del generador,  $i_L$  es la corriente del inductor,  $d$  es el ciclo de trabajo,  $i_D$  es la corriente del diodo,  $C$  es el bus de CD y  $v_o$  e  $i_o$  es el voltaje y la corriente de salida.

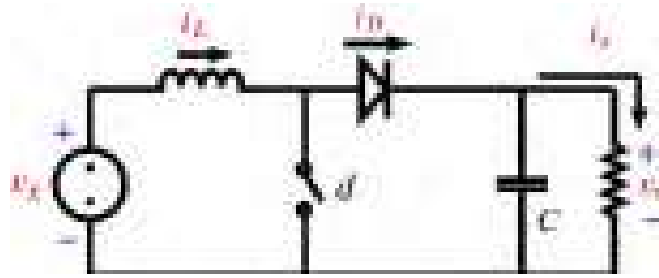


Figura 2.13: Circuito equivalente del convertidor Boost.

En la Fig. 2.13 describe el circuito equivalente del convertidor Boost. Cuando el interruptor está cerrado, entonces el diodo se polariza inversamente dejando la circulación únicamente en la malla del generador, mientras que cuando el interruptor está abierto la corriente circula en dirección a la carga.

La ecuación característica del convertidor boost está dada por la Ec. (2.7).

$$v_o = \frac{v_g}{1 - d} \quad (2.7)$$

#### ■ Convertidor CD/CD Reductor-Elevador (Buck-Boost)

El convertidor Buck-Boost se utiliza para controlar la tensión de salida, en donde su principio de funcionamiento se basa en la conmutación de un interruptor y la acción de un inductor, cuando la tensión de salida es mayor que la deseada el convertidor trabaja como convertidor reductor y cuando la tensión de salida es menor, el convertidor trabaja como convertidor elevador. Su circuito equivalente se visualiza en la Fig. 2.14, donde nuevamente  $v_g$  es el voltaje de entrada,  $d$  es el ciclo de trabajo del interruptor,  $i_L$  es la corriente del inductor,  $i_D$  es la corriente del diodo,  $C$  es el bus de CD y  $v_o$  e  $i_o$  son el voltaje y la corriente de salida.

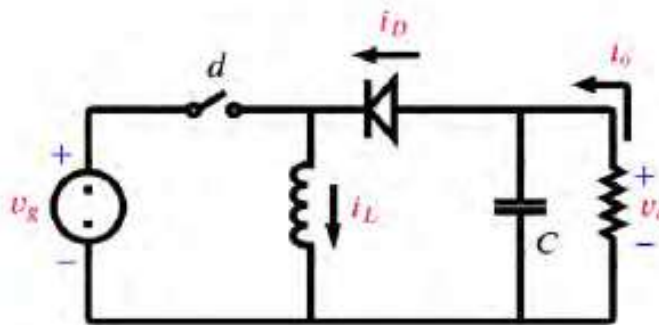


Figura 2.14: Circuito equivalente del convertidor Boost.

La ecuación característica del convertidor buck-boost esta dada por la expresión (2.8).

$$\frac{v_g d}{1 - d} \quad (2.8)$$



### 2.3.4. Descripción de los Convertidores CD/CA

Los convertidores electrónicos de CD/CA, también conocidos como inversores, son sistemas de acondicionamiento de potencia en donde se convierte una energía eléctrica de corriente directa (CD) en energía de corriente alterna (CA) mediante señales de conmutación en los interruptores del inversor [Abella and Romero (2009)]. Los inversores son comúnmente utilizados en diversos sistemas industriales por ejemplo: **Activación de motores de CA, transporte, sistemas de respaldo de energía, entre otros.**

### 2.3.5. Clasificación de los inversores

En la literatura se reportan dos clasificaciones para los inversores: el inversor monofásico en donde las salidas de voltaje monofásicas regulares son: 120 V, 220 V y 115 V. Mientras que el inversor trifásico tiene salidas de 220 V, 380 V y 400 V y la elección depende de la demanda de la carga y la frecuencia requerida [Lescas (2017); Trujillo et al. (2012); Hart and Barrado (2001)].

Estas clasificaciones se observan en la Fig. 2.15 con sus respectivos niveles de voltaje y frecuencia.

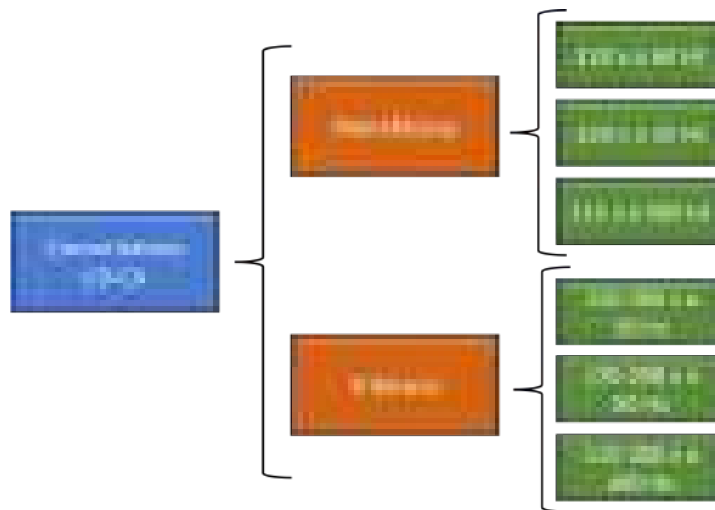


Figura 2.15: Clasificación de los inversores.

En el contexto de este trabajo, se optó por utilizar un convertidor trifásico debido a la potencia requerida y el tipo de motor seleccionado, como se detalla en el capítulo correspondiente al caso de estudio.

### 2.3.6. Principio de funcionamiento de los inversores

El principio de funcionamiento de los inversores es variar la frecuencia de la señal de salida en CA con respecto a la señal de entrada, aplicando una técnica de control denominada modulación por ancho de pulsos (PWM, por sus siglas en inglés) [Lescas (2017)]. Esta modulación es la que cierra y abre los interruptores del inversor para así generar una señal cuadrada de los voltajes tal y como se visualiza en las Figs. 2.16 y 2.17

- **Inversor monofásico de puente completo**

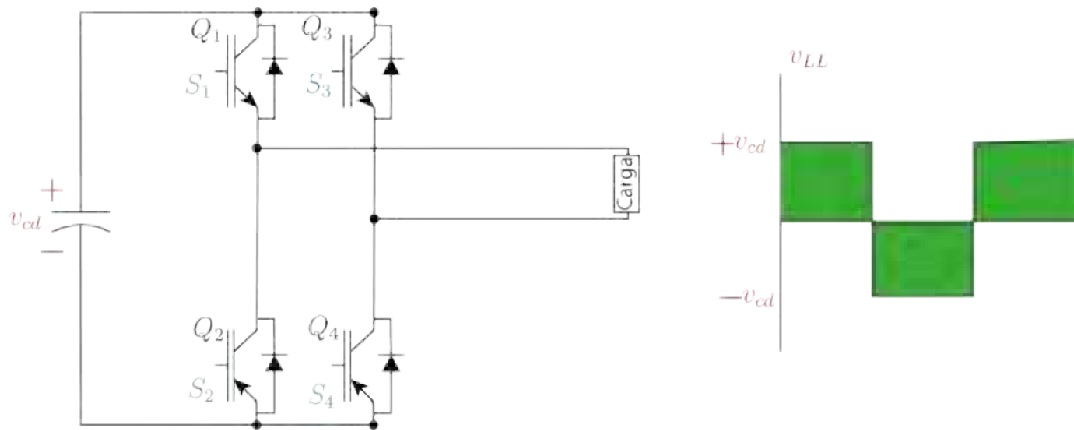


Figura 2.16: Circuito equivalente del inversor monofásico con esquema de voltajes PWM.

#### ■ Inversor trifásico de puente completo

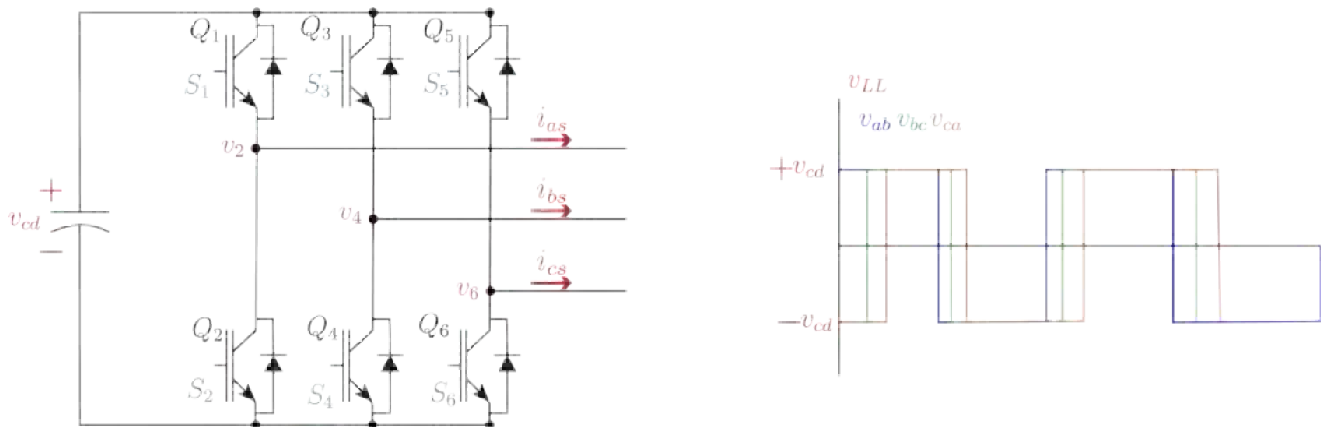


Figura 2.17: Circuito equivalente del inversor trifásico con esquema de voltajes PWM.

### 2.3.7. Modulación por ancho de pulso PWM

Existen varios tipos de PWM, sin embargo, dos enfoques más comunes son [Medina (2018)]:

#### ■ Modulación PWM basada en portadora.

Las señales de conmutación de los interruptores provienen de la comparación entre una señal sinusoidal de referencia y otra señal portadora triangular, las cuales con base a esa comparación va definiendo el ancho de los pulsos y controlan las salidas del inversor como se muestra en la Fig. 2.18. La frecuencia de la señal portadora debe ser un múltiplo de tres impar, esto con la finalidad de reducir los armónicos [Hart and Barrado (2001); Rashid (2015); Medina (2018)].

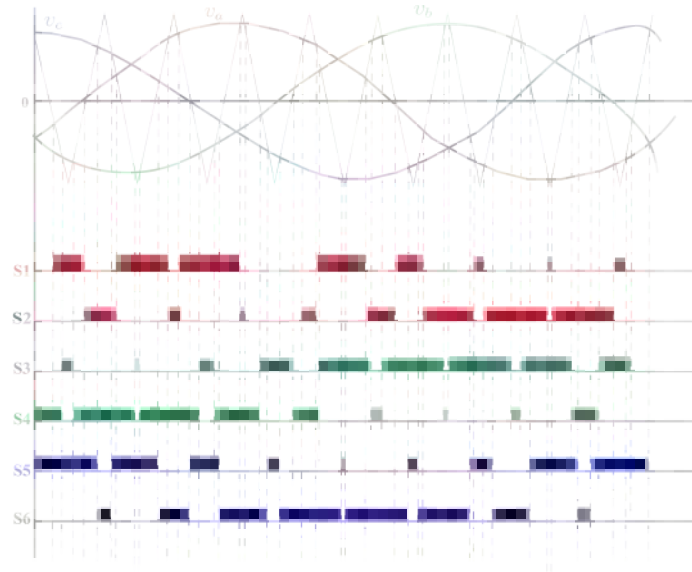


Figura 2.18: Modulación por ancho de pulso con señal de referencia triangular y portadora senoidal.

- **Modulación PWM basada en vectores espaciales.**

Esta estrategia se fundamenta en la manipulación de los vectores tridimensionales de tensión con el propósito de regular tanto la velocidad como el par del motor, logrando una aproximación al vector de tensión de referencia mediante la combinación eficiente de los vectores generados por el inversor.

Este tipo de control, se utiliza principalmente en motores debido a que considera la posición relativa de las bobinas del motor en función del flujo magnético generado por el estator, donde mediante una representación geométrica de los estados de voltaje posibles denominado como campo vectorial de la Fig. 2.19, los diferentes estados se representan como vectores y el controlador selecciona el vector apropiado para producir la tensión de salida necesaria.

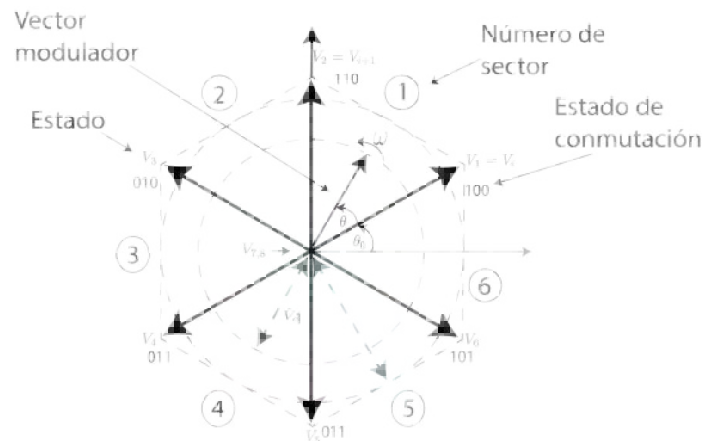


Figura 2.19: Representación del espacio vectorial.

Donde cada sector representa un estado de conmutación diferente para el inversor trifásico.  $v_{1-6}$  son los vectores activos del inversor, mientras que,  $v_{7-8}$  son los vectores nulos.  $\theta$  y  $\omega$  son el ángulo de referencia y la velocidad angular de referencia. Por último  $\hat{v}_c$  es el vector de referencia de tensión en el plano  $\alpha - \beta$ .

Para este trabajo se utiliza un PWM basada en portadora, debido a que es comúnmente utilizado y es más sencillo de implementar, de tal forma que el objetivo es generar los pulsos adecuados para el inversor.

## 2.4. Motores

Los motores son máquinas que transforman la energía eléctrica en energía mecánica. Se conforma por dos partes principales: una parte fija denominado estator, y otra parte giratoria conocida como rotor [Krause et al. (2013); Abella and Romero (2009)]. Ambas partes cuentan con embobinados que generan un campo magnético entre los devanados del estator y el rotor, que resulta en el accionamiento mecánico para transmitir potencia a la bomba [Páramo (2010); Abella and Romero (2009)].

### 2.4.1. Clasificación de los motores

Los motores se clasifican en tres tipos de acuerdo con [Hassan et al. (2019)] los cuales se muestran en la Fig. 2.20.

Los motores de CD se emplean para bajas y medianas potencias desde 50 a 1500 W. y las ventajas que conllevan es que tienen un alto rendimiento y se aplica directamente un control mediante un convertidor CD/CD sin necesidad de implementar un inversor (CD/CA).

Mientras que los motores de CA, son utilizados para medianas y altas potencias y requieren de un convertidor CD/CA y son controlados por un PWM.

Existen algunos motores especiales que también se utilizan en los sistemas de bombeo como el motor de imanes permanentes de CD, utilizados en sistemas de baja potencia.

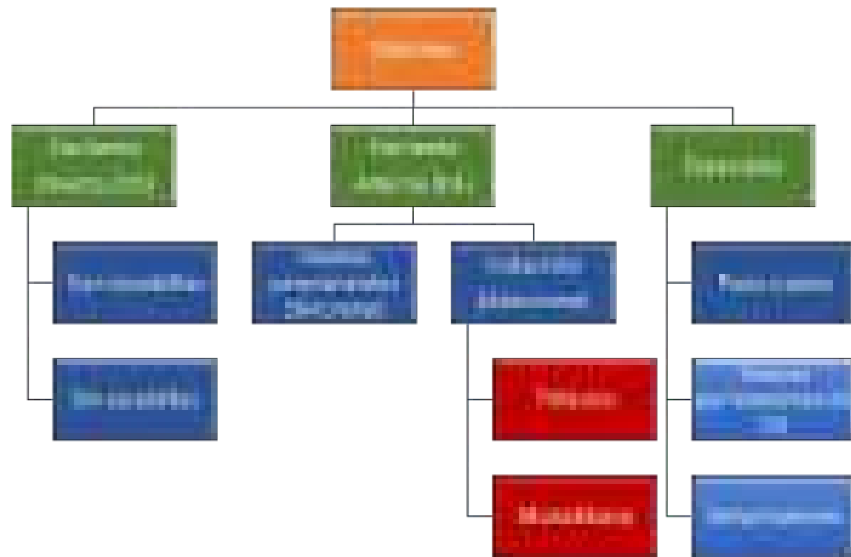


Figura 2.20: Clasificación de los motores.

Para este trabajo se utilizará un motor de inducción trifásico (MI), debido a que es el más utilizado y cuenta con una construcción sencilla y robustez [Muralidhar and Rajasekar (2021); Marfoli et al. (2021); Paramo-Balsa et al. (2022)].

### 2.4.2. Construcción física del motor de inducción

Como ya se mencionó anteriormente, los motores se conforman por un estator y un rotor. Para el caso del presente trabajo, se optó por un motor de inducción trifásico tipo jaula de ardilla, donde el estator es una estructura metálica formado por una carcasa, un núcleo y los devanados para las tres fases, que están desplazados a 120 entre sí y son alimentados por una red eléctrica trifásica [Páramo (2010)] tal como se visualiza en la imagen 2.21(a).

El rotor es la parte electromecánica y esta formado por unas ranuras rellenas por varias laminas delgadas apiladas, en estas ranuras se colocan barras conductoras de aluminio u otro material conductor en donde se encuentran los devanados y se unen mediante unos anillos de cortocircuito dando la forma de una jaula de ardilla, tal como se visualiza en la Fig. 2.21(b).



Figura 2.21: Construcción física del motor de inducción tipo jaula de ardilla: a) estator, y b) rotor.

### 2.4.3. Principio de funcionamiento del motor de inducción

El principio de funcionamiento del motor de inducción analiza primero en la parte del estator. Las bobinas del estator están desfasadas a 120 grados entre sí. Según el teorema de Ferraris aplicado a los motores, cuando circula un sistema de corrientes trifásicas balanceadas sobre estos devanados, se produce un campo magnético  $B_s$  que gira en sentido contrario de las manecillas del reloj. Este campo magnético produce una tensión en el rotor de acuerdo con la ley de Faraday. La velocidad de rotación de este campo magnético gira a una velocidad denominada como velocidad de sincronismo  $n_{sinc}$  y se calcula mediante la expresión (2.9) en revoluciones por minuto (RPM),  $f_s$  es la frecuencia de las corrientes del estator y  $n_p$  es el número de pares de polos [Pardo and Tobón (2004); Páramo (2010); Martínez (2023)].

$$n_{sinc} = \frac{60f_s}{n_p} \quad (2.9)$$

El voltaje inducido en los devanados del rotor  $e_{ind}$  esta dado por la ecuación (2.10).

$$e_{ind} = (v \times B) l \quad (2.10)$$

Donde:

- $v$  Velocidad de la barra en relación con el campo magnético.
- $B$  Vector de densidad del flujo magnético.
- $l$  Longitud de la barra en el campo magnético.

El voltaje inducido en el rotor produce un flujo de corriente en este mismo y genera un campo magnético en el rotor  $B_r$ . La interacción entre los campos magnéticos del estator  $B_s$  y del rotor  $B_r$  causan que la parte del rotor comience a girar. Esta interacción también induce un par  $\tau_{ind}$  en sentido contrario de las manecillas del reloj en la máquina [Chapman (2012)], el cual es calculado por la expresión (2.11) y se visualiza en la Fig. 2.22.

$$\tau_{ind} = k B_r \times B_s \quad (2.11)$$

Este par proporciona la fuerza necesaria para que el motor gire, sin embargo, debido a que este par va en sentido contrario de las manecillas, el rotor acelera. Existe un limite para la velocidad del motor. Si el motor gira a la velocidad de sincronismo, entonces las barras del rotor estarán fijas con respecto al campo magnético del estator y no se induce ningún voltaje en el rotor, por lo tanto,  $e_{ind} = 0$ , entonces no habría corriente en el rotor y no se genera un campo magnético [Martínez (2023)]. Sin el campo magnético en el rotor, el par inducido  $\tau_{ind}$  sería cero reduciendo la velocidad del rotor debido a las pérdidas por fricción [Chapman (2012)]. Por lo anterior, el rotor gira más despacio debido a la diferencia entre la velocidad de sincronismo  $n_{sinc}$  y la velocidad del rotor  $n_{rm}$  a esta diferencia se le conoce como velocidad de deslizamiento  $n_{des}$ . Esta velocidad  $n_{des}$  se calcula mediante la expresión (2.12) y se puede expresar en  $\frac{rad}{s}$  representándose en la ecuación (2.13).

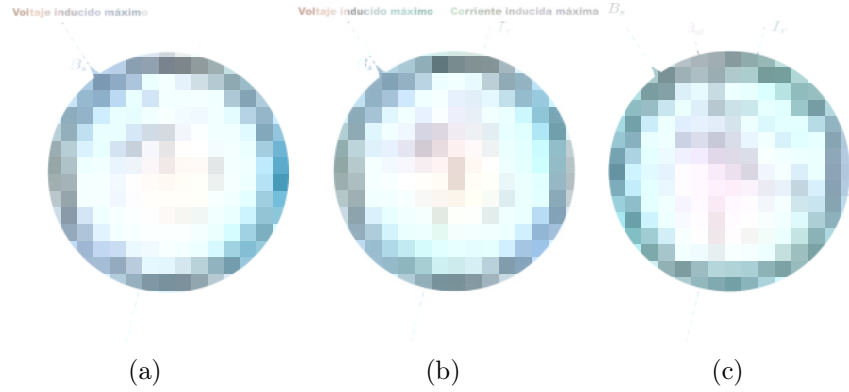


Figura 2.22: Desarrollo del par inducido en el motor de inducción: a) Campo magnético giratorio del estator, b) Voltaje y corriente inducido máximo, y c) Interacción de los campos magnéticos del estator y el rotor.

$$n_{des} = n_{sinc} - n_{rm} \quad (2.12)$$

$$\omega_{des} = \omega_{sinc} - \omega_{rm} \quad (2.13)$$

Además, también se puede calcular mediante la expresión (2.14) otro término utilizado para describir el movimiento relativo denominado como deslizamiento  $s$ , el cual es igual a la velocidad relativa expresada en porcentaje.

$$s = \frac{n_{sinc} - n_{rm}}{n_{sinc}} (x100 \%) \quad (2.14)$$

#### 2.4.4. Circuito equivalente del motor de inducción

La Fig. 2.23 muestra el circuito equivalente del motor de inducción de una sola fase, en este trabajo de tesis se plantea utilizar un motor de inducción trifásico balanceado, por lo que con el circuito equivalente del motor de inducción de una fase es suficiente.

El circuito equivalente del motor de inducción es similar al de un transformador tal como se visualiza en la Fig. 2.23 debido a la inducción de voltaje  $E_s$  desde el devanado primario (Estator) al del rotor mediante un transformador ideal rotativo donde  $E_r$  es el voltaje inducido mediante una relación de vueltas  $a$  el cual es difícil de calcular con un rotor tipo jaula de ardilla porque no es sencillo identificar los devanados en el rotor. La generación del campo magnético que genera la inducción de voltaje se produce con la reactancia de magnetización  $X_M$  con las pérdidas por efectos de histéresis  $r_c$ .

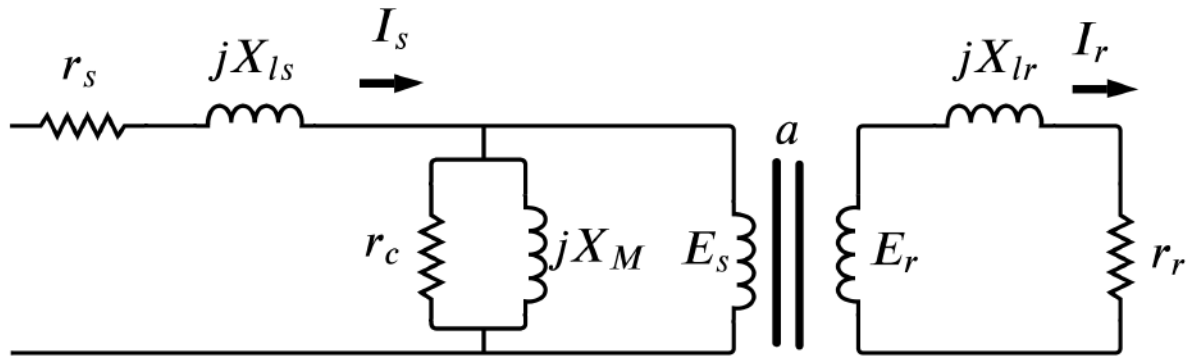


Figura 2.23: Circuito equivalente de un motor de inducción tipo jaula de ardilla con el estator y rotor conectados por un transformador ideal.

El devanado del estator se conforma por una resistencia  $r_s$  y una reactancia de dispersión  $X_{ls}$  que están conectados en serie y se calcula por la ecuación (2.15) donde  $\omega_{sinc}$  es la velocidad síncrona y  $L_{ls}$  es la inductancia de dispersión correspondiente al estator [Martinez (2023)].

$$X_{ls} = \omega_{sinc} L_{ls} \quad (2.15)$$

El voltaje inducido  $E_r$  produce un flujo de corriente en el devanado del rotor, y el devanado del rotor se conforma por una resistencia  $r_r$  y una reactancia de dispersión  $X_{lr}$  dada por la ecuación (2.16), donde de en términos similares en la parte del rotor,  $\omega_{des}$  obtenido en la ecuación (2.17) es la velocidad de desplazamiento y  $L_{lr}$  es la inductancia de dispersión correspondiente al rotor.

$$X_{lr} = \omega_{des} L_{lr} \quad (2.16)$$

$$\omega_{des} = s \omega_{sinc} \quad (2.17)$$

Debido a que es muy difícil determinar directamente los valores de la reactancia de dispersión  $X_{lr}$ , la resistencia del rotor  $r_r$  y la relación de vueltas del transformador  $a$ , es necesario referir el devanado secundario (rotor) al devanado primario (estator), simplificando las ecuaciones y análisis del motor, obteniendo el circuito equivalente de la Fig. 2.24.

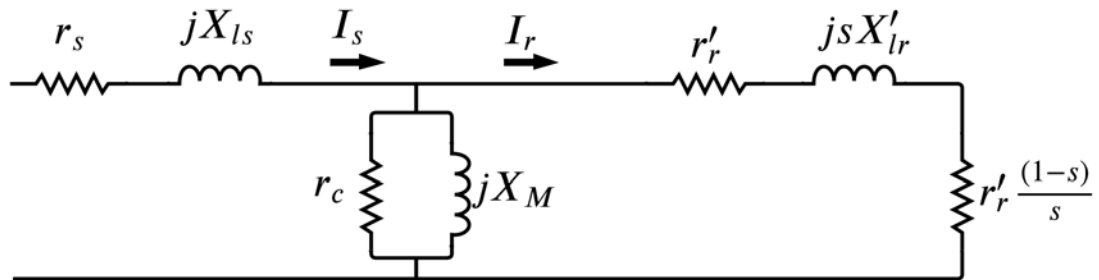


Figura 2.24: Circuito equivalente del motor de inducción referido al estator.



Cuando la velocidad de sincronismo y la velocidad del rotor son iguales, ocurre un efecto denominado como rotor bloqueado, por lo anterior, se conoce que el voltaje inducido  $E_r$  es una fracción del voltaje inducido cuando el rotor está bloqueado  $E_{r0}$ , proporcional al deslizamiento, de tal manera que se muestra la ecuación (2.18).

$$E_r = s E_{r0} \quad (2.18)$$

De una manera similar ocurre con la reactancia de dispersión  $X_{lr}$  del rotor varía según la velocidad del rotor y la frecuencia de la fuente de alimentación. Cuando la velocidad del rotor va la velocidad de sincronismo, la reactancia de dispersión  $X_{lr}$  se calcula por la Ec. (2.19) en relación con el deslizamiento  $s$  y se sustituye como la reactancia a la velocidad de sincronismo  $X_{lr,sincr}$  el cual se expresa en la ecuación (2.20) [Martinez (2023); Chapman (2012)].

$$X_{lr} = s \omega_{sinc} L_{lr} \quad (2.19)$$

$$X_{lr} = s X_{lr,sincr} \quad (2.20)$$

Aplicando la de voltajes de Kirchhoff en la Ec. (2.18) se obtiene:

$$E_r = I_r (r_r + jsX_{lr,sincr}) \quad (2.21)$$

Se sustituye la Ec. (2.21) en (2.18) y se despeja el voltaje del rotor en estado bloqueado dando la Ec. (2.22).

$$E_{r0} = \frac{I_r (r_r + jsX_{lr})}{s} \quad (2.22)$$

Despejando la corriente  $I_r$ .

$$I_r = \frac{E_{r0}}{\frac{r_r}{s} + jX_{lr0}} \quad (2.23)$$

Utilizando la relación de vueltas del transformador, se pueden referir la corriente, voltaje e impedancia del devanado del rotor (secundario) al devanado del estator (primario) mediante las expresiones (2.24)-(2.26) donde el superíndice prima muestra los valores referidos.

$$V_p = aV_s = V'_s \quad (2.24)$$

$$I_p = \frac{I_s}{a} = I'_s \quad (2.25)$$

$$Z_p = a^2 Z_s = Z'_s \quad (2.26)$$

Por último, es necesario separar la resistencia referida del rotor en dos partes, una parte representa la resistencia eléctrica  $r'_r$  y la otra parte representa la potencia electromecánica ( $\frac{1-s}{s}$ ) ya que considera el deslizamiento como en la Ec. (2.27) [Martinez (2023)].

$$\frac{r'_r}{s} = r'_r + \left( \frac{1-s}{s} \right) r'_r \quad (2.27)$$

## 2.5. Bombas

### 2.5.1. Descripción de las bombas y el sistema de tuberías

El desplazamiento de líquidos, gases o fluidos generalmente conllevan a un sistema de flujo largo y que involucra conducciones rectas, variedad en el diámetro de la tubería, pérdidas por fricción debido a accesorios como codos, uniones y válvulas, etc. Las bombas se utilizan para impulsar los líquidos a través de estos sistemas de flujo, transformando la energía mecánica en energía hidráulica [Agnello (2021)].

Un sistema de bombeo convencional se conforma por dos partes: 1) El lado de aspiración y 2) El lado de succión tal como se visualiza en la Fig. 2.25. Para transportar el líquido de un punto a otro es necesario considerar un balance de energía entre la carga de aspiración y la carga de succión [Martin et al. (2011)]. Este balance de energía se calcula utilizando la ecuación general de la energía (Ecuación de Bernoulli) mostrada en la expresión (2.28) [Mott (2006)].

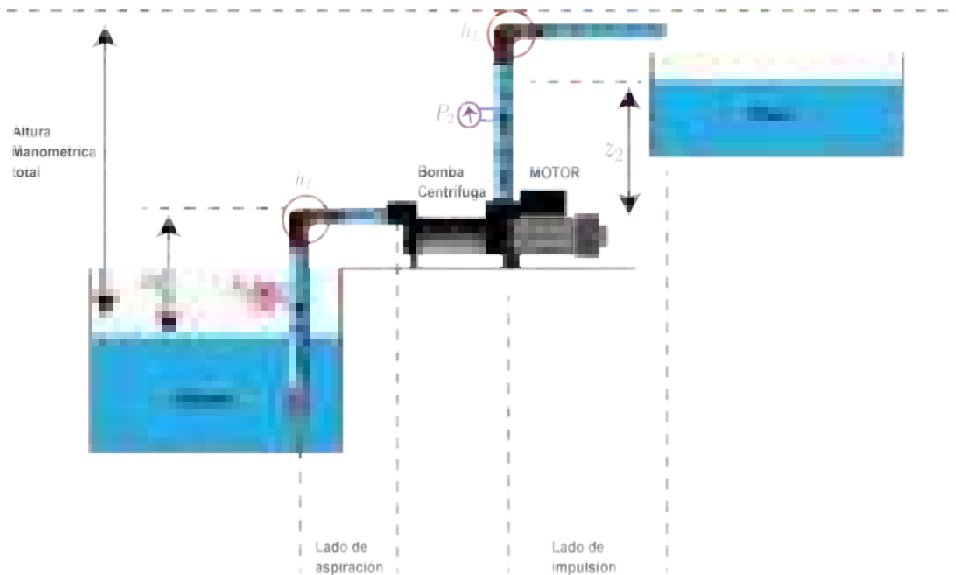


Figura 2.25: Partes de un sistema de bombeo.

$$H = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + (z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_L \quad (2.28)$$

Esta ecuación menciona que se debe elevar la presión del fluido desde la carga de succión  $P_1$  hasta la que tendría en la carga de aspiración  $P_2$ , debe subir el fluido al nivel de la parte de succión  $z_1$  hasta la parte de descarga  $z_2$ , tiene que incrementar la velocidad del punto de succión  $v_1$  a la velocidad del punto de descarga  $v_2$  y considerar pérdidas de energía  $h_L$ . de igual manera es importante considerar el peso específico del fluido  $\gamma$  y la aceleración debido a la gravedad.

Si no se consideran las pérdidas de energía y no se considera la energía del sistema de tuberías, la altura  $h_o$  permanecerá constante [Crane (2009)].

## 2.5.2. Clasificación de las bombas

La clasificación de las bombas se divide en dos categorías: bombas de desplazamiento positivo y bombas rotodinámicas [Mott (2006); Abella and Romero (2009); Blanco et al. (1994)]. Estas a su vez, abarcan varios tipos de bombas que se describen en la Fig. 2.26.

Las bombas de desplazamiento positivo, producen un flujo de fluido de manera volumétrica a través de un espacio estrecho, moviendo una cantidad específica de fluido debido a la presión.

Las bombas rotodinámicas operan mediante la conversión de la energía cinética del fluido en energía de presión gracias a su diseño mecánico, lo que se traduce en un incremento del caudal que pueden proporcionar [Abella and Romero (2009); Blanco et al. (1994)].

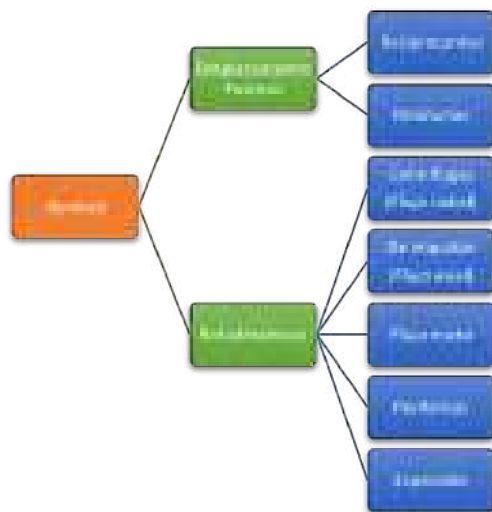


Figura 2.26: Clasificación de las bombas según su principio de funcionamiento.

En este trabajo, se optó por el uso de la bomba centrífuga debido a que es la más utilizada en la literatura, la cual se caracteriza por curvas que describen la relación entre sus principales variables: altura de bombeo  $H_b$ , caudal bombeado  $Q_b$ , potencia hidráulica  $P_h$  y eficiencia de la bomba  $\mu_b$ . Estas relaciones, junto con sus ecuaciones características, se describen en la siguiente sección.

## 2.5.3. Curvas características de la bomba centrífuga

Las bombas centrífugas tienen una curva que caracteriza su principio de funcionamiento con base a sus dos variables generalizadas, es decir, poseen una curva que describe la relación del caudal bombeado ( $Q_b$ ) con la altura bombeada ( $H_b$ ) en función de una velocidad mecánica ( $\omega_1$ ), tal como se puede visualizar en la Fig. 2.27.

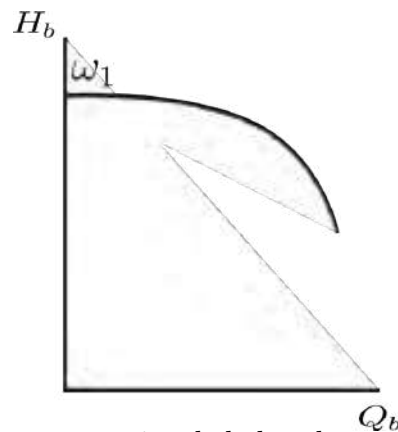


Figura 2.27: Esquema de la curva característica de la bomba centrífuga ante una velocidad nominal.

Cabe mencionar que la curva mostrada previamente, se presenta ante un valor nominal en la velocidad ( $\omega_1$ ) y normalmente es dada por el fabricante de la bomba.

Se puede observar que, a mayor caudal, es menor la altura que se puede bombear, por lo que es necesario definir el punto de operación que se requiere, estableciendo una altura constante.

La curva característica mostrada previamente, se puede obtener mediante una aproximación polinomial mostrado en la Ec. (2.29).

$$H = a_4 Q_b^4 + a_3 Q_b^3 + a_2 Q_b^2 + a_1 Q_b + a_0 \quad (2.29)$$

En donde mediante aproximaciones visualizadas en la curva, se obtienen varios puntos de alturas y caudales y con ellos estimar los valores ( $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ ) que son coeficientes de aproximación.

De igual manera que la altura, hay otras dos variables que se analizan en los sistemas de bombeo que son dependientes del caudal de la bomba la eficiencia de la bomba ( $\mu_b$ ) y la potencia hidráulica ( $P_b$ ), las cuales sus curvas características se muestran a continuación en las Figs. 2.28-2.29.

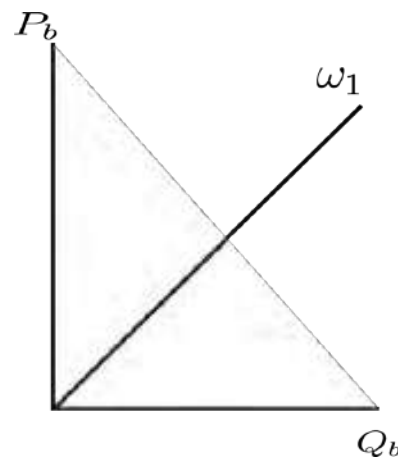


Figura 2.28: Esquema de la curva característica de la bomba **potencia hidráulica contra caudal** ante velocidad nominal.

Una forma de validar matemáticamente la curva característica es mediante la expresión (2.30), la cual se conoce que la potencia hidráulica se obtiene en función del caudal y la altura, obtenidas en la curva característica principal, así mismo como la densidad del líquido a bombear ( $\rho$ ) y la gravedad ( $g$ ).

En este trabajo se consideró una densidad de  $1000 \frac{kg}{m^3}$  y la gravedad de  $9.81 \frac{m}{s^2}$ .

$$P_h = \rho g Q_b H \quad (2.30)$$

De igual manera, para validar la eficiencia de la bomba dada por la curva característica de la Fig. 2.29. Se utiliza la expresión (2.31), en donde se conoce que la eficiencia de la bomba es la división entre la potencia hidráulica de la bomba y la potencia mecánica del motor, esto proporciona información de que tanto la bomba convierte la potencia mecánica en potencia hidráulica.

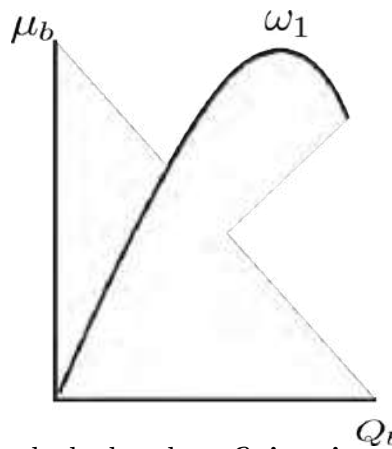


Figura 2.29: Curva característica de la bomba **eficiencia contra caudal** ante una velocidad nominal.

$$\mu_b = \frac{P_h}{P_m} \quad (2.31)$$

### Curvas características ante variaciones en la velocidad

Las curvas características de la bomba pueden variar desde dos puntos de estudios diferentes, uno en donde el **disco de la bomba cambie de tamaño** y otro en donde la **velocidad del motor** va variando, dependiendo del estudio que se quiera realizar, se opta por agregar variaciones de tamaño de disco o variaciones en la velocidad. Además, la variación de velocidad se utiliza como un método alternativo de regulación de caudal, la ventaja de esto conlleva a un ahorro de energía y ayuda a operar en distintos puntos de operación de la bomba [Ahonen (2011); Mott (2006); Blanco et al. (1994)].

En este trabajo se optó por variar la velocidad, atendiendo a los bajos niveles de potencia que se puedan producir debido a las celdas FV., es por ello que es necesario conocer el comportamiento de la bomba centrífuga ante diferentes velocidades, lo que genera varias curvas características en función de la velocidad, como se visualiza en la Fig. 2.30, donde se muestra la relación entre el caudal con la altura generada, la potencia absorbida y eficiencia. Por lo anterior cuando la bomba centrífuga trabaja por debajo de una determinada velocidad, la bomba no podría suministrar la altura de bombeo [Abella and Romero (2009)].

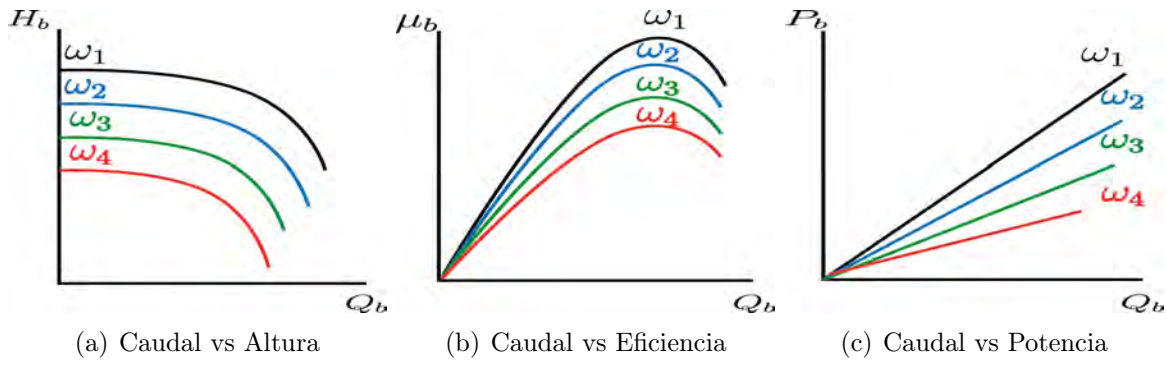


Figura 2.30: Curvas características de la bomba ante variaciones de velocidad.

La curva característica de la bomba se puede obtener mediante el polinomio expresado en (2.32), cabe mencionar que cuando la velocidad del motor cambia, la curva característica de la bomba cambia y una forma para poder obtener los valores de caudal, altura, potencia y eficiencia, es utilizando las leyes de afinidad las cuales estiman los valores mencionados en relación con la variación de velocidad del motor expresadas en (2.33)-(2.35).

$$H = a_0 Q_b^3 + a_1 Q_b^2 + a_2 Q_b + a_3 \quad (2.32)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Q_{b2}}{Q_{b1}} \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{H_{b2}}{H_{b1}} = \frac{\tau_{L2}}{\tau_{L1}} \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 = \frac{P_{b2}}{P_{b1}} \quad (2.35)$$

Debido a que se busca mantener una altura de bombeo constante, estas curvas proporcionan una visión más clara a que velocidades puede operar el motor para mantener una altura constante, sin embargo, eso implicaría que el caudal cambiará para mantener la misma altura.

Para una descripción más clara, se utiliza la figura 2.31, en donde se visualizan los puntos de operación de la bomba para asegurar una altura constante.

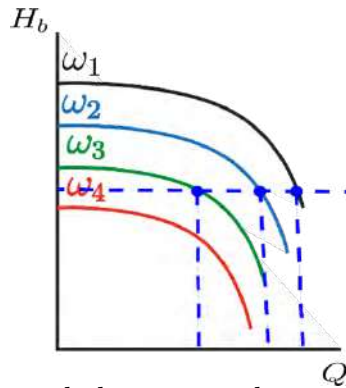


Figura 2.31: Esquema de los puntos de operación de una bomba.

Nótese que en la Figura 2.31, el motor puede operar en tres velocidades diferentes ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) y para mantener una altura constante, se varía el caudal de bombeo el cual es correspondiente al punto de operación señalado.

# Capítulo 3

## Modelado y control del sistema de bombeo fotovoltaico

En esta sección se presentan dos formas de modelado de una fuente fotovoltaica conectada al convertidor tipo boost utilizando la metodología E-L y también una metodología tradicional con el propósito de analizar y simular el comportamiento dinámico del convertidor boost y su interacción con la fuente fotovoltaica.

### 3.1. Modelado matemático del convertidor boost con las celdas FV.

Partiendo de la Fig. 3.1, se visualiza en rojo las variables calculadas por el modelo tradicional y en azul las variables calculadas por el modelo Euler-Lagrange.

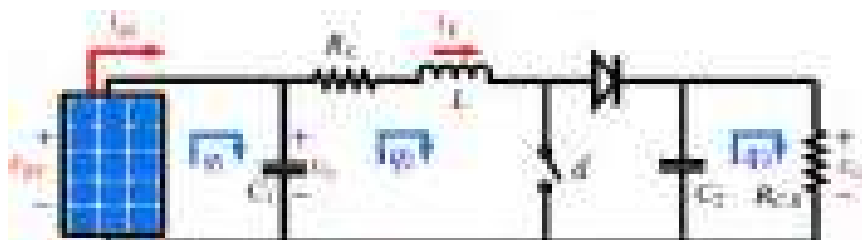
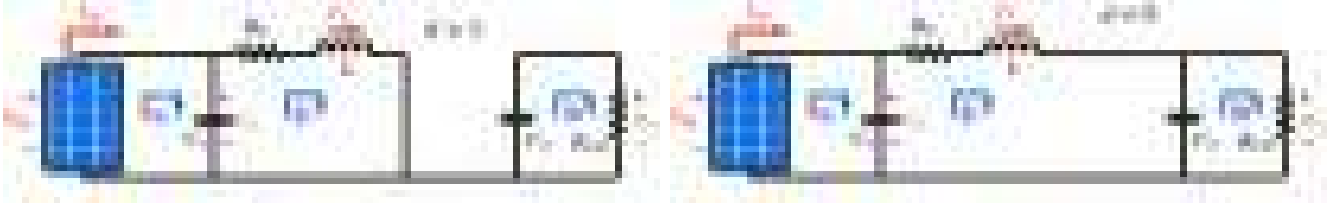


Figura 3.1: Circuito equivalente del convertidor boost con fuente fotovoltaica.

Donde las celdas fotovoltaicas se toman como una fuente de corriente variable representado como  $i_{pv}$ ,  $C_1$  es el capacitor de los paneles fotovoltaicos,  $R_L$  representa pérdidas en el inductor el cual también está representado como  $L$ ,  $C_2$  representa el bus de CD y  $R_{CD}$  representa la carga. Para obtener el desarrollo de los modelos es necesario obtener el modelo promediado de cada metodología, para el caso de encendido y apagado del interruptor mostrado en las Figs. 3.2(a) y 3.2(b).





(a) Circuito equivalente del convertidor boost con  $d=1$ . (b) Circuito equivalente del convertidor boost con  $d=0$ .

Figura 3.2: Circuito equivalente del convertidor boost en caso de encendido y apagado.

### 3.1.1. Método tradicional

Utilizando la suma de voltajes y corrientes de Kirchhoff, la relación dinámica de los elementos almacenadores y la relación constitutiva, expresados en la tabla 3.1, se obtienen un conjunto de ecuaciones para desarrollar el modelo tradicional.

Tabla 3.1: Tabla de relaciones de los elementos del sistema FV/boost.

Suma de voltajes de kirchhoff	$v_{c1} = v_{RL} + v_L$ $v_{c2} = v_{RCD}$
Suma de corrientes de kirchhoff	$i_{pv} = i_{c1} + i_{RL}$ $i_{RL} = i_L$ $i_{c2} = -i_R$
Relación dinámica	$i_{c1} = \dot{q}_{c1}$ $i_{c2} = \dot{q}_{c2}$ $v_L = \dot{\lambda}_L$
Relación constitutiva	$q_{c1} = C_1 v_{c1}$ $q_{c2} = C_2 v_{c2}$ $v_{RL} = i_{RL} R_L$ $v_R = i_R R_{cd}$ $\lambda_L = L i_L$

**Para el caso  $d=1$ .**

Partiendo del circuito equivalente 3.2(a) se busca obtener las ecuaciones dinámicas en términos de  $v_{c1}, i_L, v_{c2}, i_{pv}$ , utilizando la suma de corrientes de Kirchhoff se tiene la siguiente expresión:

$$i_L = i_{RL} \quad (3.1)$$

De acuerdo con la tabla 3.1 se sustituye  $i_{RL}$  de la expresión (3.1) en (3.2) obteniendo la Ec. (3.3).

$$i_{RL} = i_{pv} - i_{c1} \quad (3.2)$$

$$i_L = i_{pv} - i_{c1} \quad (3.3)$$

Utilizando la relación dinámica de la tabla 3.1 se sustituye la Ec. (3.4) en (3.3) quedando la Ec. (3.5).

$$i_{c_1} = \dot{q}_{c_1} \quad (3.4)$$

$$i_L = i_{pv} - \dot{q}_{c_1} \quad (3.5)$$

Empleando la relación constitutiva de la ecuación (3.6) en (3.5) y despejando  $\dot{v}_{c_1}$  se obtiene la ecuación (3.7) que describe la dinámica del voltaje de las celdas FV.

$$\dot{q}_{c_1} = C_1 \dot{v}_{c_1} \quad (3.6)$$

$$\dot{v}_{c_1} = \frac{i_{pv} - i_L}{C_1} \quad (3.7)$$

Para el desarrollo de la segunda ecuación se parte de la suma de voltajes de Kirchhoff de la Ec. (3.8) y despejando  $v_L$  tal como se ve en la Ec. (3.9).

$$v_{c_1} = v_{RL} + v_L \quad (3.8)$$

$$v_L = v_{c_1} - v_{RL} \quad (3.9)$$

Utilizando la relación constitutiva se sustituye  $v_L$  en términos de los enlaces de flujo magnético  $\lambda_L$  como se muestra en la Ec. (3.10).

$$\dot{\lambda}_L = v_{c_1} - v_{RL} \quad (3.10)$$

Para la Ec. (3.10) se sustituye  $v_{RL}$  con la relación constitutiva de la Ec. (3.11) para obtener la Ec. (3.12).

$$v_{RL} = i_{RL} R_L \quad (3.11)$$

$$\dot{\lambda}_L = v_{c_1} - (i_{RL} R_L) \quad (3.12)$$

Mediante la relación constitutiva de la ecuación (3.13), nuevamente se sustituye  $\lambda_L$  para dejarlo en términos de las corrientes en el inductor, quedando como en la Ec.(3.14) y despejando la corriente se obtiene la ecuación dinámica (3.15) final que describe a  $i_L$ .

$$\dot{\lambda} = L \dot{i}_L \quad (3.13)$$

$$L \dot{i}_L = v_{c_1} - (i_L R_L) \quad (3.14)$$

$$\dot{i}_L = \frac{v_{c_1} - i_L R_L}{L} \quad (3.15)$$

Para finalizar, se desarrolla la ecuación dinámica que describe el voltaje en la salida del convertidor, por el cual se comienza por la sumatoria de voltajes de Kirchhoff de la Ec. (3.16).

$$v_{c_2} = v_{RCD} \quad (3.16)$$

Utilizando la relación constitutiva de la Ec. (3.17), se sustituye  $v_R$ , obteniendo la Ec. (3.18).

$$v_R = i_R R_{CD} \quad (3.17)$$

$$v_{c_2} = i_R R_{CD} \quad (3.18)$$

Se conoce que la corriente en la resistencia  $i_R$  tiene una polaridad inversa a la de la corriente en el capacitor  $i_{c_2}$ , lo que demuestra un flujo de sentido contrario en la malla 3 del circuito equivalente 3.2(a). Por esta razón, se sustituye la corriente  $i_R$  por  $i_{c_2}$  tal como se muestra en la Ec. (3.19).

$$v_{c_2} = -i_{c_2} R_{CD} \quad (3.19)$$

Utilizando la relación dinámica mostrado en la expresión (3.20), se sustituye  $i_{c_2}$  quedando la Ec. (3.21).

$$i_{c_2} = \dot{q}_{c_2} \quad (3.20)$$

$$v_{c_2} = \dot{q}_{c_2} R_{CD} \quad (3.21)$$

Finalmente utilizando la relación constitutiva de la expresión (3.22), se sustituye  $q_{c_2}$  dejando en términos de  $v_{c_2}$ , despejando  $\dot{v}_{c_2}$  y obteniendo la ecuación (3.23) que representa la dinámica del voltaje en la salida del convertidor.

$$\dot{q}_{c_2} = C_2 \dot{v}_{c_2} \quad (3.22)$$

$$\dot{v}_{c_2} = -\frac{v_{c_2}}{R_{CD} C_2} \quad (3.23)$$

#### Para el caso $d=0$ .

Partiendo del circuito equivalente 3.2(b) nuevamente se busca obtener las ecuaciones dinámicas en términos de  $v_{c_1}$ ,  $i_L$ ,  $v_{c_2}$ ,  $i_{pv}$ , utilizando la suma de corrientes de Kirchhoff se tiene la siguiente expresión:

$$i_{pv} = i_{c_1} + i_{RL} \quad (3.24)$$

Empleando la relación dinámica (3.25), se sustituye  $i_{c_1}$  para obtener la Ec. (3.26).

$$i_{c_1} = \dot{q}_{c_1} \quad (3.25)$$

$$i_{pv} = \dot{q}_{c_1} + i_L \quad (3.26)$$

Nuevamente se reemplaza  $\dot{q}_{c_1}$  con la relación constitutiva mostrada en (3.27) para obtener la Ec. (3.28), despejando la dinámica del voltaje de las celdas FV,  $\dot{v}_{c_1}$  se obtiene la Ec. (3.29).

$$\dot{q}_{c_1} = C_1 \dot{v}_{c_1} \quad (3.27)$$

$$i_{pv} = C_1 \dot{v}_{c_1} + i_L \quad (3.28)$$

$$\dot{v}_{c_1} = \frac{i_{pv} - i_L}{C_1} \quad (3.29)$$

Para calcular la corriente en el inductor  $i_L$  se parte de la suma de voltajes de Kirchhoff mostrado por la expresión (3.30).

$$v_{c_1} = v_{RL} + v_L + v_{c_2} \quad (3.30)$$

Utilizando relación constitutiva en (3.31) y la relación dinámica en (3.32), se sustituyen  $v_{RL}$  y  $v_L$  y se obtiene la Ec. (3.33).

$$v_{RL} = i_{RL} R_L \quad (3.31)$$

$$v_L = \dot{\lambda}_L \quad (3.32)$$

$$v_{c_1} = i_{RL} R_L + \dot{\lambda}_L + v_{c_2} \quad (3.33)$$

Para la parte correspondiente al voltaje del inductor expresado por los enlaces de flujo magnético  $\lambda_L$  se sustituye utilizando la relación constitutiva (3.34), dejando el voltaje en términos de la corriente  $i_L$ , obteniendo la Ec. (3.35) y despejando la dinámica de la corriente  $\dot{i}_L$  se llega a la ecuación final (3.36).

$$\dot{\lambda} = L \dot{i}_L \quad (3.34)$$

$$v_{c_1} = i_L R_L + L \dot{i}_L + v_{c_2} \quad (3.35)$$

$$\dot{i}_L = \frac{v_{c_1} - i_L R_L - v_{c_2}}{L} \quad (3.36)$$

Para calcular el voltaje de salida del convertidor, se parte desde la sumatoria de voltajes de Kirchhoff donde se obtiene la expresión (3.37).

$$v_{c_2} = v_{RCD} \quad (3.37)$$

Aplicando la ley de ohm en  $v_R$  y sustituyendo (3.38) en (3.37) para dejar en términos de las corrientes como se visualiza en la Ec. (3.39) y (3.40).

$$v_R = i_R R_{CD} \quad (3.38)$$

$$v_{c_2} = i_R R_{CD} \quad (3.39)$$

$$v_{c_2} = (i_L - i_{c_2}) R_{CD} \quad (3.40)$$

Posteriormente se sustituye la corriente  $i_{c_2}$  en términos de la carga eléctrica  $q_{c_2}$  de la relación dinámica (3.41), para obtener la Ec. (3.42).

$$i_{c_2} = \dot{q}_{c_2} \quad (3.41)$$

$$v_{c_2} = i_L R_{CD} - \dot{q}_{c_2} R_{CD} \quad (3.42)$$

Es conveniente dejar la ecuación con la carga eléctrica  $q_{c_2}$  debido a la relación constitutiva (3.43) para obtener el término de  $\dot{v}_{c_2}$  que se busca, tal como se visualiza en el siguiente desarrollo matemático de la Ec.(3.44)-(3.45).

$$\dot{q}_{c_2} = C_2 \dot{v}_{c_2} \quad (3.43)$$

$$v_{c_2} = i_L R_{CD} - C_2 \dot{v}_{c_2} R_{CD} \quad (3.44)$$

$$\dot{v}_{c_2} = \frac{i_L}{C_2} - \frac{v_{c_2}}{R_{CD} C_2} \quad (3.45)$$

### Modelo promediado

Para analizar el comportamiento dinámico del convertidor boost, se emplea un modelo promediado que considera el ciclo de trabajo  $d$  como el promedio ponderado de los casos  $d=1$  y  $d=0$ . Donde mediante manipulaciones algebraicas se obtiene el modelo promediado tradicional del convertidor boost en conjunto con los paneles FV, expresados en las Ec. (3.46)-(3.48).

$$\dot{v}_{c_1} = -\frac{i_L}{C_1} + \frac{i_{pv}}{C_1} \quad (3.46)$$

$$i_L = \frac{v_{c_1}}{L} - \frac{R_L i_L}{L} - \frac{(1-d)v_{c_2}}{L} \quad (3.47)$$

$$\dot{v}_{c_2} = \frac{(1-d)i_L}{C_2} - \frac{v_{c_2}}{R_{CD} C_2} \quad (3.48)$$

En este modelo se puede verificar que cuando  $d=1$  y  $d=0$  se recuperan las ecuaciones dinámicas correspondientes a cada caso.

### 3.1.2. Método Euler-Lagrange

Para el desarrollo del modelo energético, se utiliza el procedimiento sistemático mostrado en la Fig. 3.3, en donde se plantea un análisis por mallas para cada caso. Por lo tanto, continuando con el procedimiento, las coordenadas generalizadas para la obtención del modelo Euler-Lagrange son  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ , que representan las cargas eléctricas en las mallas de cada circuito equivalente visualizado en la Fig. 3.1.

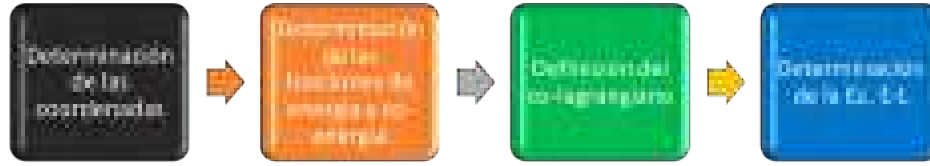


Figura 3.3: Procedimiento sistemático para modelado por Euler-Lagrange.

### Para el caso $d=1$

Se calculan las funciones de energía  $U_{T_1}, T_{T_1}^*, G_{T_1}$  en las ecuaciones (3.49)-(3.51), partiendo del circuito equivalente 3.2(a) para el caso cuando el ciclo de trabajo  $d=1$ .

$$U_{T_1} = \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_1} + \frac{q_3^2}{2C_2} \quad (3.49)$$

$$T_{T_1}^* = \frac{L\dot{q}_2^2}{2} \quad (3.50)$$

$$G_{T_1} = \frac{R_L\dot{q}_2^2}{2} + \frac{R_{CD}\dot{q}_3^2}{2} \quad (3.51)$$

Una vez definidas las funciones de energía para el caso donde  $d=1$ , se calcula la función de co-energía conocida como co-lagrangiano expresado en la Ec. (3.52) y al sustituir las funciones se obtiene la Ec. (3.53).

$$L_{T_1}^* = T_{T_1}^* - U_{T_1} \quad (3.52)$$

$$\frac{L\dot{q}_2^2}{2} - \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_1} - \frac{q_3^2}{2C_2} \quad (3.53)$$

Ya teniendo el lagrangiano, se desarrolla la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas  $q_1, q_2, q_3$  mostrado en (3.54).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q} \right) + \frac{\partial G_T}{\partial \dot{q}} = v \quad (3.54)$$

De esta forma se obtienen las ecuaciones para cada una de las coordenadas generalizadas, expresadas a continuación en (3.55)-(3.57). Cabe mencionar que la Ec. (3.55) correspondiente a la coordenada 1 se presenta una restricción.

$$\dot{q}_1 = i_{pv} \quad (3.55)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{(q_1 - q_2)}{LC_1} \quad (3.56)$$

$$\dot{q}_3 = -\frac{q_3}{R_{CD}C_2} \quad (3.57)$$

### Para el caso $d=0$

Nuevamente se obtienen las funciones de energía  $U_{T_2}, T_{T_2}^*, G_{T_2}$  para el caso  $d=0$  las cuales se visualizan en las Ecs. (3.58)-(3.60).

$$U_{T_2} = \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_1} + \frac{(q_2 - q_3)^2}{2C_2} \quad (3.58)$$

$$T_{T_2}^* = \frac{L\dot{q}_2^2}{2} \quad (3.59)$$

$$G_{T_2} = \frac{R_L\dot{q}_2^2}{2} + \frac{R_{CD}\dot{q}_3^2}{2} \quad (3.60)$$

Se define nuevamente el co-lagrangiano, obteniendo la expresión (3.61).

$$\frac{L\dot{q}_2^2}{2} - \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_1} - \frac{(q_2 - q_3)^2}{2C_2} \quad (3.61)$$

Se desarrolla la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas  $q_1, q_2, q_3$  obteniendo el conjunto de Ecs. (3.62)-(3.64). Nuevamente la Ec. (3.62) es una restricción del sistema.

$$\dot{q}_1 = i_{pv} \quad (3.62)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{(q_1 - q_2)}{LC_1} - \frac{(q_2 - q_3)}{LC_2} - \frac{R_L\dot{q}_2}{L} \quad (3.63)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{(q_2 - q_3)}{R_{CD}C_2} \quad (3.64)$$

### Modelo promediado

Ya teniendo las funciones de energía de cada caso  $U_T, T_T^*, G_T$ , se obtienen las funciones de energía promediada descritas por las Ecs. (3.65)-(3.67) para obtener posteriormente el modelo promediado.

$$U_T = \frac{(q_1 - q_2)}{2C_1} + \frac{((1-d)q_2 - q_3)^2}{2C_2} \quad (3.65)$$

$$T_T^* = \frac{L\dot{q}_2^2}{2} \quad (3.66)$$

$$G_T = \frac{R_L\dot{q}_2^2}{2} + \frac{R_{CD}\dot{q}_3^2}{2} \quad (3.67)$$

Con estas funciones se define el co-lagrangiano visualizado en (3.68).

$$L_T^* = \frac{L\dot{q}_2^2}{2} - \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_1} - \frac{((1-d)q_2 - q_3)^2}{2C_2} \quad (3.68)$$

Con esta función de co-energía, se desarrolla la ecuación de Euler-Lagrange previamente mostrada y se obtiene el modelo promediado por Euler-Lagrange mostrado en las Ecs. (3.69)-(3.71) que describe la dinámica del convertidor boost con las celdas FV.

$$\dot{q}_1 = i_{pv} \quad (3.69)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{(q_1 - q_2)}{LC_1} - \frac{((1-d)q_2 - q_3)(1-d)}{LC_2} - \frac{R_L \dot{q}_2}{L} \quad (3.70)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{(1-d)q_2 - q_3}{R_{CD}C_2} \quad (3.71)$$

Cuando este modelo presentado toma valores en el ciclo de trabajo  $d=1$  y  $d=0$ , se obtienen las repuestas de los modelos obtenidos para estos casos presentados previamente.

Además, con el objetivo de aprovechar la mayor cantidad de energía generada por los paneles FV, se implemento un algoritmo de control del seguimiento del punto de máxima potencia P&O explicado anteriormente, el cual ajusta el ciclo de trabajo del convertidor aumentando el valor del voltaje dependiendo del punto de operación en donde se encuentre, este algoritmo se configuro y se programo en el entorno de simulink, tal como se visualiza en la Fig. 3.4.

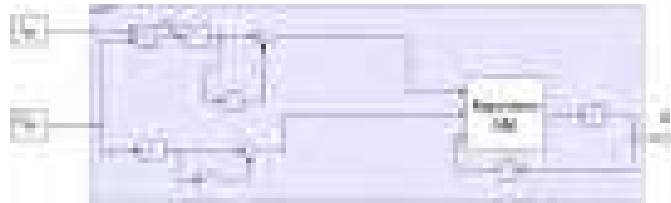


Figura 3.4: Esquema en simulink del control MPPT P&O.

## 3.2. Modelado matemático del inversor trifásico tradicional

Partiendo del circuito equivalente de la Fig. 3.5 y las funciones de conmutación se obtiene el voltaje cada fase empleando la metodología tradicional y la perspectiva Euler-Lagrange, como se muestra a continuación.



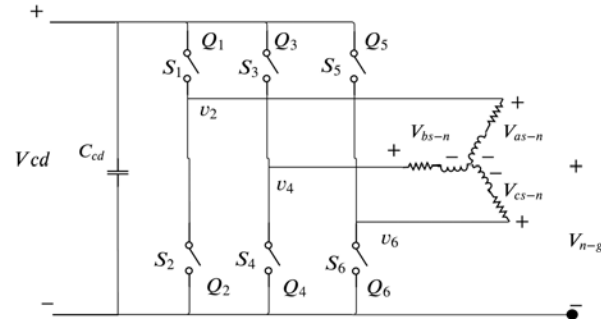


Figura 3.5: Circuito equivalente del inversor trifásico conectado a un motor de inducción.

Utilizando las funciones de conmutación expresadas en las tablas 3.2, 3.3 y 3.4, se obtienen las ecuaciones expresadas en (3.72) donde se puede visualizar las corrientes y voltajes en los interruptores, así como las cargas eléctricas abordadas por el modelo energético.

Tabla 3.2: Corriente y voltaje en la rama 1 en base a las funciones de conmutación.

$S_1$	$S_2$	$i_{Q_1}$	$v_2$	$q_{Q_1}$
0	1	0	0	0
1	0	$i_{as}$	$v_{CD}$	$q_{as}$

Tabla 3.3: Corriente y voltaje en la rama 2 en base a las funciones de conmutación.

$S_3$	$S_4$	$i_{Q_3}$	$v_4$	$q_{Q_3}$
0	1	0	0	0
1	0	$i_{bs}$	$v_{CD}$	$q_{bs}$

Tabla 3.4: Corriente y voltaje en la rama 3 en base a las funciones de conmutación.

$S_5$	$S_6$	$i_{Q_5}$	$v_6$	$q_{Q_5}$
0	1	0	0	0
1	0	$i_{cs}$	$v_{CD}$	$q_{cs}$

$$\begin{aligned}
 i_{Q_1} &= S_1 i_{as} & q_{Q_1} &= S_1 q_{as} & v_2 &= S_1 v_{CD} \\
 i_{Q_3} &= S_3 i_{bs} & q_{Q_3} &= S_3 q_{bs} & v_4 &= S_3 v_{CD} \\
 i_{Q_5} &= S_5 i_{cs} & q_{Q_5} &= S_5 q_{cs} & v_6 &= S_5 v_{CD}
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Al sumar todas las corrientes y cargas que circulan a través de los interruptores, obtenemos la corriente y la carga eléctrica de CD del inversor como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 i_{CD} &= S_1 i_{as} + S_3 i_{bs} + S_5 i_{cs} \\
 q_{CD} &= S_1 q_{as} + S_3 q_{bs} + S_5 q_{cs}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Para cada voltaje línea-línea se representa matemáticamente como el conjunto de ecuaciones (3.74)-(3.76), sustituyendo  $v_2, v_4$  y  $v_6$  por los valores de voltaje en función de la conmutación de los interruptores obtenidas en (3.72) de tal manera que se obtenga las Ec. (3.77)-(3.79).

$$v_{abs} = v_2 - v_4 \quad (3.74)$$

$$v_{bcs} = v_4 - v_6 \quad (3.75)$$

$$v_{cas} = v_6 - v_2 \quad (3.76)$$

$$v_{abs} = S_1 v_{CD} - S_3 v_{CD} \quad (3.77)$$

$$v_{bcs} = S_3 v_{CD} - S_5 v_{CD} \quad (3.78)$$

$$v_{cas} = S_5 v_{CD} - S_1 v_{CD} \quad (3.79)$$

Retomando la Fig. 3.5, la expresión matemática para los voltajes línea-tierra, se representan por el conjunto de ecuaciones (3.80)-(3.82).

$$v_{2-g} = v_{as-n} + v_{n-g} \quad (3.80)$$

$$v_{4-g} = v_{bs-n} + v_{n-g} \quad (3.81)$$

$$v_{6-g} = v_{cs-n} + v_{n-g} \quad (3.82)$$

Sumando los tres voltajes línea-tierra mostrados en las ecuaciones anteriores y despejando el término  $v_{n-g}$  que representa el voltaje neutro-tierra, se obtiene la Ec. (3.83), de tal forma que se sustituye posteriormente el valor de  $v_{n-g}$  en las ecuaciones (3.80)-(3.82), resultando las ecuaciones (3.84)-(3.86).

$$v_{n-g} = \frac{1}{3}(v_{2-g} + v_{4-g} + v_{6-g}) \quad (3.83)$$

$$v_2 = v_{as} + \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_4 + \frac{1}{3}v_6 \quad (3.84)$$

$$v_4 = v_{bs} + \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_4 + \frac{1}{3}v_6 \quad (3.85)$$

$$v_6 = v_{cs} + \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_4 + \frac{1}{3}v_6 \quad (3.86)$$

Finalmente, el modelo matemático de los voltajes de cada fase representado en (3.87) se obtiene despejando los términos  $v_{as}$ ,  $v_{bs}$  y  $v_{cs}$  de las ecuaciones anteriores y sustituyendo los valores de  $v_2$ ,  $v_4$  y  $v_6$  obtenidos en (3.72).

$$\begin{aligned} v_{as} &= \frac{v_{CD}}{3}(2S_1 - S_3 - S_5) \\ v_{bs} &= \frac{v_{CD}}{3}(-S_1 + 2S_3 - S_5) \\ v_{cs} &= \frac{v_{CD}}{3}(-S_1 - S_3 + 2S_5) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Para simular las señales de conmutación, se generó un PWM senoidal en lazo abierto, el cual se visualiza en la Fig. 3.6 para generar los pulsos y validar el modelo matemático.

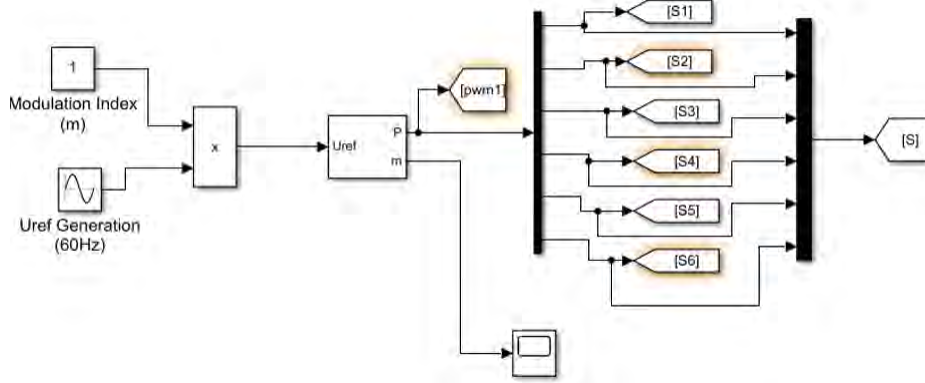


Figura 3.6: Esquema de PWM en Simulink.

### 3.3. Modelado matemático del motor de inducción

El circuito equivalente, para el desarrollo del modelo se muestra en la Fig. 3.7, donde se considera un motor de inducción tipo jaula de ardilla simétrico balanceado y  $r_s$  y  $r_r'$  son las resistencias de los devanados del estator y rotor referidas al estator y se expresan por una matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r_r' & 0 & 0 \\ 0 & r_r' & 0 \\ 0 & 0 & r_r' \end{bmatrix}.$$

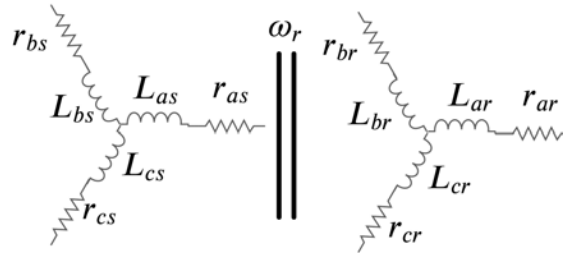


Figura 3.7: Circuito equivalente estator y rotor.

Con base a lo anterior, se desarrollan las ecuaciones de voltajes en cada devanado del rotor y estator, mostradas a continuación:

$$\begin{aligned} v_{as} &= \frac{d(\lambda_{as})}{dt} + r_s i_{as} \\ v_{bs} &= \frac{d(\lambda_{bs})}{dt} + r_s i_{bs} \\ v_{cs} &= \frac{d(\lambda_{cs})}{dt} + r_s i_{cs} \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(\lambda'_{ar})}{dt} + r_r' i'_{ar} \\ 0 &= \frac{d(\lambda'_{br})}{dt} + r_r' i'_{br} \\ 0 &= \frac{d(\lambda'_{cr})}{dt} + r_r' i'_{cr} \end{aligned} \quad (3.89)$$

De las expresiones anteriores, se conoce que los enlaces de flujo magnético expresados como  $\lambda$ , desde el punto de vista eléctrico  $\lambda = Li$  y por lo anterior se calculan los enlaces de flujo para

cada devanado formando la matriz de inductancias representada en (3.90), cabe mencionar que para simplificar el desarrollo las ecuaciones se arreglaron de manera matricial, dividido entre las ecuaciones del estator y las ecuaciones del rotor.

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L'_{sr} \\ (L'_{sr})^T & L'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i'_r \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} (L_{ls} + L_{ms}) & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & (L_{ls} + L_{ms}) & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & (L_{ls} + L_{ms}) \end{bmatrix} = L_s$$

$$\begin{bmatrix} L_{sr}\cos(\theta_r) & L_{sr}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) & L_{sr}\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) \\ L_{sr}\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) & L_{sr}\cos(\theta_r) & L_{sr}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) \\ L_{sr}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) & L_{sr}\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) & L_{sr}\cos(\theta_r) \end{bmatrix} = L'_{sr}$$

$$\begin{bmatrix} (L'_{lr} + L_{mr}) & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & (L'_{lr} + L_{mr}) & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & (L'_{lr} + L_{mr}) \end{bmatrix} = L'_r$$

Ya definida la matriz de inductancias, las cuales tienen una dependencia de un ángulo eléctrico  $\theta_r$  que representa la separación entre los ejes magnéticos del rotor y estator, se puede realizar el modelo matemático tradicional y el de Euler-Lagrange, explicados a continuación.

### 3.3.1. Método tradicional

Para la realización del modelado tradicional, al trabajar con un sistema que tiene dos naturalezas distintas es necesario dividirlo y aplicar las leyes físicas que aborda cada uno. El motor tiene una parte eléctrica y otra parte mecánica, por lo cual el modelado tradicional se divide en estos dos tipos, mostrados adelante.

#### Parte eléctrica

Continuando con el desarrollo de las ecuaciones (3.88) y (3.89), el término  $Li$  contiene dos variables que dependen del tiempo, debido a la dependencia del ángulo eléctrico que tiene la matriz de inductancias  $L$  y por otro lado las corrientes en los devanados del motor  $i$ , es por esto, que se aplica la regla de la derivada del producto mostrado en (3.91) y de esta manera desarrollar completamente las ecuaciones anteriores.

$$\frac{d(Li)}{dt} = L\frac{d(i)}{dt} + \frac{\partial(L)}{\partial\theta_r}\dot{\theta}_r i \quad (3.91)$$

Donde  $\frac{\partial(L)}{\partial\theta_r}$  es la matriz mostrada en (3.92).

$$\frac{d}{dt}(L(\theta_r)) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \Delta L'_{sr} \\ \Delta (L'_{sr})^T & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} n_p \theta_{rm} \dot{\theta}_r \quad (3.92)$$

$$\Delta L'_{sr} = \frac{\partial(L'_{sr})}{\partial\theta_r}$$

$$\Delta L'_{sr} = \begin{bmatrix} -L_{sr}\sin(\theta_r) & -L_{sr}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr}\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) \\ -L_{sr}\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr}\sin(\theta_r) & -L_{sr}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) \\ -L_{sr}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr}\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr}\sin(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Las variables que se buscan calcular en la parte eléctrica, son las corrientes que pasan a través de los devanados del estator y rotor, por esta razón se despejan las corrientes de la Ec. (3.91) para obtener la expresión (3.94).

$$\frac{d(i)}{dt} = L^{-1} \left[ v - \frac{\partial(L)}{\partial(\theta_r)} n_p \dot{\theta}_{rm} + ri \right] \quad (3.94)$$

El término  $n_p \dot{\theta}_{rm}$  es debido a la conversión del ángulo de la parte mecánica a un ángulo eléctrico el cual se muestra en la Ec. (3.95).

$$\theta_r = n_p \theta_{rm} \quad (3.95)$$

$$\omega_r = \frac{d}{dt} \theta_r \quad (3.96)$$

$$\omega_{rm} = \frac{d}{dt} \theta_{rm} \quad (3.97)$$

Despejando de la ecuación (3.94) se obtiene el modelo matemático final para la parte eléctrica (3.98).

$$\begin{bmatrix} \frac{d(i_s)}{dt} \\ \frac{d(i_r)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L'_{sr} \\ (L'_{sr})^T & L'_r \end{bmatrix}^{-1} \left[ \begin{bmatrix} v_s \\ v_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \Delta L'_{sr} \\ \Delta (L'_{sr})^T & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} n_p \dot{\theta}_{rm} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_s & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} \right] \quad (3.98)$$

### Parte mecánica

La ecuación que caracteriza a la parte mecánica del motor está dada por la Ec. (3.99).

$$J \frac{d(\omega_{rm})}{dt} + B\omega_{rm} = \tau_e - \tau_L \quad (3.99)$$

Donde  $\tau_e$  representa el par electromagnético generado por el motor y  $\tau_L$  es el par de la carga acoplada a la flecha del motor,  $\beta$  es el coeficiente de fricción,  $J$  es la inercia y también  $\omega_{rm}$  representa la velocidad mecánica de la flecha del motor, el cual se puede representar como  $\frac{d(\theta_{rm})}{dt}$ .

Una vez definida la ecuación característica de la parte mecánica, se despeja para así obtener la ecuación dinámica del motor de inducción representada en (3.100).

$$\frac{d(\omega_{rm})}{dt} = \frac{\tau_e}{J} - \frac{\tau_L}{J} - \frac{B\omega_{rm}}{J} \quad (3.100)$$

$$\tau_e = n_p (i_{abcs})^T \left( \frac{d}{d\theta_r} L_{sr} \right) (i_{abcr}) \quad (3.101)$$

### 3.3.2. Método Euler-Lagrange

En esta sección, de igual manera se aborda primero la parte eléctrica del modelado E-L y posteriormente se aborda la parte mecánica, esto con la finalidad de llevar un orden y un desarrollo más claro del modelo.

Al ser un sistema que se conforma por diferentes naturalezas, las coordenadas se dividen tanto en coordenadas eléctricas, que representan las cargas eléctricas en los ejes magnéticos  $q_e$  y la coordenada mecánica, que representa el ángulo mecánico  $q_m$ , se obtienen las funciones de energía (3.102), (3.103), (3.104) y (3.105) para la parte eléctrica como la parte mecánica y se obtienen las funciones de energía totales (3.106) y (3.107).

$$q_e = [q_{as} \ q_{bs} \ q_{cs} \ q_{ar} \ q_{br} \ q_{cr}]^T \quad q_m = \theta_{rm}$$

$$T_e^* = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T L(q_m) \dot{q}_e \quad (3.102)$$

$$T_m^* = \frac{1}{2} J \dot{q}_m^2 \quad (3.103)$$

$$G_e = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T r \dot{q}_e \quad (3.104)$$

$$G_m = \frac{1}{2} B \dot{q}_m^2 \quad (3.105)$$

$$T_T^* = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T L(q_m) \dot{q}_e + \frac{1}{2} J \dot{q}_m^2 \quad (3.106)$$

$$G_T = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T r \dot{q}_e + \frac{1}{2} B \dot{q}_m^2 \quad (3.107)$$

A continuación, se enlistan los elementos de las funciones de energía:

$q_e$  Coordenadas eléctricas.

$L(q_m)$  Matriz de inductancias.

$R$  Matriz de resistencias del estator y del rotor.

$J$  Momento de inercia.

$q_m$  Coordenada mecánica.

$B$  Coeficiente de fricción.

En este modelo se obtiene de manera implícita la dinámica del motor tanto como la parte eléctrica, como la parte mecánica, partiendo de las funciones de energía (3.106) y (3.107) se define el Lagrangiano mostrado en (3.108).

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T L(q_m) \dot{q}_e + \frac{1}{2} J \dot{q}_m^2 \quad (3.108)$$

Continuando con el procedimiento sistemático, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para la parte eléctrica y la parte mecánica.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_e} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_e} \right) + \frac{\partial G_{total}}{\partial \dot{q}_e} = v \quad (3.109)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_m} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_m} \right) + \frac{\partial G_{total}}{\partial \dot{q}_m} = -\tau_L \quad (3.110)$$

Donde,  $q_e$  son las coordenadas generalizadas de la parte eléctrica, las cuales corresponden a  $q_e = [q_{as}, q_{bs}, q_{cs}, q_{ar}, q_{br}, q_{cr}]^T$  y  $q_m$  es la coordenada generalizada para la parte mecánica el cual se representa como  $q_m = \theta_m$  que es el ángulo mecánico del motor. Con los elementos que ya se conocen, es posible solucionar las ecuaciones E-L (3.109) y (3.110) explicándose a continuación.

### Parte eléctrica

Una vez definidas las funciones de energía y el Lagrangiano, es posible solucionar la ecuación de E-L mostrada en (3.109), desarrollando y sustituyendo los valores a continuación:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_e} = L(q_m) \dot{q}_e \quad (3.111)$$

Debido a que  $L(q_m)$  y  $\dot{q}_e$  son términos que dependen del tiempo se aplica la regla de la derivada de un producto, obteniendo la expresión (3.112).

$$\frac{d}{dt} (L(q_m) \dot{q}_e) = L(q_m) \ddot{q}_e + \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_e \quad (3.112)$$

Recordando que según la expresión (3.95)  $\theta_r = n_p \theta_{rm}$  podemos afirmar que  $\Delta L'_{sr}$  se puede expresar como:

$$\theta_r = n_p \theta_{rm} \quad (3.113)$$

$$\theta_r = n_p q_m \quad (3.114)$$

Por esta razón la derivada de la matriz de inductancias se representa como en la expresión (3.115).

$$\frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} = \Delta L'_{sr} = \frac{\partial (L_{sr})}{\partial \theta_r} \quad (3.115)$$

Desarrollando la derivada se obtiene la expresión (3.118).

$$\Delta L'_{sr} = \begin{bmatrix} -L_{sr} \sin(\theta_r) & -L_{sr} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr} \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) \\ -L_{sr} \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr} \sin(\theta_r) & -L_{sr} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) \\ -L_{sr} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr} \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \theta_r\right) & -L_{sr} \sin(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$\frac{d}{dt} (L(q_m)) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \Delta L'_{sr} \\ \Delta (L'_{sr})^T & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \dot{\theta}_r \quad (3.117)$$

$$\frac{d}{dt} (L(q_m)) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \Delta L'_{sr} \\ \Delta (L'_{sr})^T & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} n_p \dot{q}_m \quad (3.118)$$

Donde  $n_p$  es el número de pares de polos.

La función de disipación eléctrica para la ecuación de Euler-Lagrange, se expresa en (3.119).

$$\frac{\partial G_{total}}{\partial \dot{q}_e} = r \dot{q}_e \quad (3.119)$$

$r$  es una matriz que representa las resistencias parásitas en el estator y el rotor referidas al estator.

$$r = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r'_r \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Ya resolviendo la ecuación de E-L y simplificando el modelo eléctrico en términos del estator y del rotor referido al estator, el modelo dinámico que se obtuvo se muestra en la Ec. (3.121):

$$L(q_m) \ddot{q}_e + \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} n_p \dot{q}_m \dot{q}_e + R \dot{q}_e = v \quad (3.121)$$

Sustituyendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{sr}^T & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{es} \\ \ddot{q}'_{er} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \Delta L_{sr} \\ \Delta L_{sr}^T & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} n_p \dot{q}_m \begin{bmatrix} \dot{q}_{es} \\ \dot{q}'_{er} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_s & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es} \\ \dot{q}'_{er} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ v'_r \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

### Parte mecánica

Así mismo con la función de energía (3.108) y de disipación (3.107), se calcula la parte mecánica explicada en el desarrollo de Ecs. (3.123)-(3.125):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_m} \right) = J \ddot{q}_m \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_m} = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \left( \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \right) \dot{q}_e \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial G_{total}}{\partial \dot{q}_m} = B \dot{q}_m \quad (3.125)$$

De las expresiones (3.123), (3.124) y (3.125) se sustituyen en la ecuación E-L obteniendo la (3.126)-(3.127):

$$J \ddot{q}_m - \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \left( \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \right) \dot{q}_e + B \dot{q}_m = -\tau_L \quad (3.126)$$

$$J \ddot{q}_m - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es} & \dot{q}'_{er} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \Delta L_{sr} \\ \Delta L_{sr}^T & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es} \\ \dot{q}'_{er} \end{bmatrix} + B \dot{q}_m = \tau_L \quad (3.127)$$

### 3.3.3. Transformación al marco de referencia qd0

Los modelos obtenidos del motor de inducción se encuentran dentro del marco de referencia abc, no obstante, para enfoques de control normalmente se emplea el marco de referencia qd0.



Utilizando las matrices de transformación en (3.128), como se puede observar cada matriz posee un ángulo diferente porque en este caso se considera la parte en movimiento del rotor el cual está representado como  $\beta$  y para el ángulo de transformación del estator se utiliza el ángulo  $\theta$ . Con estos datos, se realiza el desarrollo mostrado a continuación para finalmente llegar a los dos modelos en coordenadas qd0.

Matriz de transformación aplicada al estator:

Matriz de transformación aplicada al rotor:

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \cos \left( \theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \sin \theta & \sin \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \sin \left( \theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \beta & \cos \left( \beta - \frac{2}{3}\pi \right) & \cos \left( \beta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \sin \beta & \sin \left( \beta - \frac{2}{3}\pi \right) & \sin \left( \beta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\theta$   $\beta = \theta - \theta_r$

(3.128)

Para realizar la transformación qd0, se utilizan las matrices de transformación en (3.128), esto debido a que cada matriz es correspondiente al estator y al rotor, por lo cual aplicando la función mostrada en (3.129), se realiza la transformación en las variables eléctricas de los modelos, como se aborda en las siguientes secciones [Krause et al. (2013)].

$$f_{abc} = K^{-1} f_{qd0} \quad (3.129)$$

### Transformación qd0 en el modelo tradicional

#### Elementos resistivos del motor.

En primer lugar se toma la parte resistiva del modelo tradicional, el cual se muestra a continuación:

$$v_{abc,R} = R i_{abc} \quad (3.130)$$

Donde:

$$R = \begin{bmatrix} r_s & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

$$i_{abc} = \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i'_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

Aplicando las matrices de transformación.

$$K^{-1} v_{qd0,R} = R (K^{-1} i_{qd0}) \quad (3.133)$$

$$v_{qd0,R} = K R (K^{-1} i_{qd0}) \quad (3.134)$$

Donde K es una matriz que conlleva dentro las dos matrices de transformación  $K_s$  y  $K_r$ .

$$K = \begin{bmatrix} K_s & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & K_r \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Si los elementos no cero de la matriz diagonal son iguales (tal es este caso) entonces:

$$KR(K^{-1}) = R \quad (3.136)$$

Sustituyendo:

$$v_{qd0,R} = Ri_{qd0} \quad (3.137)$$

### Elementos inductivos del motor.

Utilizando una metodología similar que en la parte resistiva partiendo de la equivalencia del voltaje en el inductor:

$$v_{abc,L} = \frac{d}{dt}(\lambda_{abc}) \quad (3.138)$$

Se aplica la transformación:

$$K^{-1}v_{qd0,L} = \frac{d}{dt}(K^{-1}\lambda_{qd0}) \quad (3.139)$$

$$v_{qd0,L} = K \frac{d}{dt}(K^{-1}\lambda_{qd0}) \quad (3.140)$$

Se aplica la regla de la cadena, debido a que se están derivando dos variables que dependen del tiempo, a lo que se llega:

$$v_{qd0,L} = K \frac{d}{dt}(K^{-1})\lambda_{qd0} + KK^{-1} \frac{d}{dt}(\lambda_{qd0}) \quad (3.141)$$

En donde se sabe que [Krause et al. (2013); Martinez (2023)]:

$$K \frac{d}{dt}(K^{-1}) = \left[ \begin{array}{cc} \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & (\omega - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (3.142)$$

Para simplificar el modelo se renombran las siguientes matrices:

$$\omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = k_{11} \text{ y } (\omega - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = k_{22}$$

Donde:

$$\frac{d}{dt}(\beta) = \frac{d}{dt}(\theta - \theta_r) = \omega - \omega_r \quad (3.143)$$

De la expresión (3.141) se sustituye el término  $\lambda$  por su equivalencia desde el punto de vista eléctrico  $Li$ , aplicando nuevamente la transformación en el orden siguiente:

$$\lambda_{abc} = Li_{abc} \quad (3.144)$$

$$K^{-1}\lambda_{qd0} = K^{-1}(Li_{qd0}) \quad (3.145)$$

$$\lambda_{qd0} = K L K^{-1}(i_{qd0}) \quad (3.146)$$

Se tiene que la representación de la matriz  $KLK^{-1}$  en su arreglo matricial, se expresa como:

$$\begin{bmatrix} K_s L_s (K_s^{-1}) & K_s L'_{sr} (K_r^{-1}) \\ K_r (L'_{sr})^T (K_s^{-1}) & K_r L'_r (K_r^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

Donde:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{L}_s (\mathbf{K}_s^{-1}) = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} = L_{11} \quad (3.148)$$

$$\mathbf{K}_r \mathbf{L}_r (\mathbf{K}_r^{-1}) = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_{lr} + L_M & 0 \\ 0 & 0 & L_{lr} \end{bmatrix} = L_{22} \quad (3.149)$$

$$\mathbf{K}_r \mathbf{L}_{sr} (\mathbf{K}_r^{-1}) = \mathbf{K}_r \mathbf{L}_{sr} (\mathbf{K}_r^{-1}) = \begin{bmatrix} L_M & 0 & 0 \\ 0 & L_M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L_{12} = L_{21} \quad (3.150)$$

$$L_M = \frac{3}{2} L_{ms} \quad (3.151)$$

Sustituyendo lo que ya se tiene, para dejar el modelo en términos de las corrientes, se obtiene el modelo tradicional en coordenadas qd0, expresado a continuación:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (i_{qd0s}) \\ \frac{d}{dt} (i'_{qd0r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{qd0s} \\ v'_{qd0r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_s & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & r'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qd0s} \\ i'_{qd0r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qd0s} \\ i'_{qd0r} \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

### Transformación qd0 en el modelo Euler-Lagrange

Utilizando un procedimiento similar al modelo tradicional, se utilizan las matrices de transformación (3.128) para las variables eléctricas:

$$\frac{d}{dt} (L(q_m) \dot{q}_e) + R \dot{q}_e = v_{abc} \quad (3.153)$$

Aplicando la transformación a las partes eléctricas del modelo se obtiene la expresión (3.154), donde el súper índice  $r$  son las variables transformadas en el marco qd0.

$$\frac{d}{dt} (L(q_m) k^{-1} \dot{q}_e^r) + R K^{-1} \dot{q}_e^r = K^{-1} v^r \quad (3.154)$$

$$L(q_m) k^{-1} \ddot{q}_e^r + \frac{d}{dt} (L(q_m) k^{-1}) \dot{q}_e^r + R K^{-1} \dot{q}_e^r = K^{-1} v^r \quad (3.155)$$

Resolviendo la derivada involucrada en la ecuación y aplicando la regla de la cadena se obtiene lo siguiente:

$$L(q_m) k^{-1} \ddot{q}_e^r + \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m K^{-1} \dot{q}_e^r + L(q_m) \frac{d}{dt} (K^{-1}) \dot{q}_e^r + R K^{-1} \dot{q}_e^r = K^{-1} v^r \quad (3.156)$$

Despejando los voltajes en qd0:

$$KL(q_m) k^{-1} \ddot{q}_e^r + \frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m K^{-1} \dot{q}_e^r + L(q_m) \frac{d}{dt} (K^{-1}) \dot{q}_e^r + K R K^{-1} \dot{q}_e^r = v^r \quad (3.157)$$

Sustituyendo  $KL(q_m)k^{-1}$  y  $KRK^{-1}$ , los cuales ya se obtuvieron en (3.147) y (3.136) y desarrollando las parte matemática faltante se obtiene el siguiente modelo de Euler-Lagrange final:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_s L_s K_s^{-1} & K_s L_{sr} K_r^{-1} \\ K_r L_{sr}^T K_s^{-1} & K_r L_r K_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{es}^r \\ \ddot{q}_{er}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & K_s \frac{d}{dq_m} (L_{sr}) K_r^{-1} \\ K_r \frac{d}{dq_m} (L_{sr}^T) K_s^{-1} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es}^r \\ \dot{q}_{er}^r \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_s L_s \frac{d}{d\theta} (K_s^{-1}) \dot{\theta} & K_s L_{sr} \frac{d}{d\beta} (K_r^{-1}) \dot{\beta} \\ K_r L_{sr}^T \frac{d}{d\theta} (K_s^{-1}) \dot{\theta} & K_r L_r \frac{d}{d\beta} (K_r^{-1}) \dot{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es}^r \\ \dot{q}_{er}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s R_s K_s^{-1} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & K_r R_r K_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es}^r \\ \dot{q}_{er}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s^r \\ v_r^r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.158)$$

Para simplificar el modelo final obtenido, se sabe que:

$$\frac{\partial L(q_m)}{\partial q_m} \dot{q}_m K^{-1} \dot{q}_e^r + L(q_m) \frac{d}{dt} (K^{-1}) \dot{q}_e^r = \begin{bmatrix} K_{11} & 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es}^r \\ \dot{q}_{er}^r \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Por lo anterior, sustituyendo se obtiene el modelo final simplificado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{es}^r \\ \ddot{q}_{er}^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_s^r \\ v_r^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_s & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & r_r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es}^r \\ \dot{q}_{er}^r \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} K_{11} & 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{es}^r \\ \dot{q}_{er}^r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.160)$$

## 3.4. Modelado matemático de la bomba centrífuga

### 3.4.1. Curvas características de la bomba centrífuga

Como primer paso para un buen desarrollo de modelado de la bomba, es necesario determinar las curvas características de la bomba. Estas curvas características van a cambiar en relación con la velocidad, es por ello que es necesario determinar los valores de Caudal, Altura y Potencia que se dan ante diferentes velocidades, ya que, estos datos sirven para determinar un polinomio y determinar las curvas características.

Las leyes de afinidad rigen el funcionamiento de las bombas centrífugas. Estas leyes proporcionan una visión profunda del comportamiento de la bomba en función a la velocidad del motor, permitiendo predecir como las variables comúnmente analizadas en bombas, como el caudal ( $Q_b$ ), la altura de bombeo ( $H$ ) y la potencia mecánica ( $P_m$ ), responden a cambios en la velocidad del motor. Este enfoque es esencial para comprender y mejorar el rendimiento de las bombas centrífugas en diversas condiciones operativas.

Con base a lo anterior, debido a que normalmente los fabricantes de bombas solo otorgan una curva característica mediante los valores nominales, es necesario estimar los valores ante las otras velocidades y por ello, utilizando las leyes de afinidad de (3.161)-(3.163), se estiman los valores para producir el polinomio de las otras curvas características.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Q_{b2}}{Q_{b1}} \quad (3.161)$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{H_{b2}}{H_{b1}} = \frac{\tau_{L2}}{\tau_{L1}} \quad (3.162)$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 = \frac{P_{m2}}{P_{m1}} \quad (3.163)$$

En este caso la bomba centrífuga utilizada es una bomba de 3HP marca EVANS y sus valores nominales son los siguientes:

- Voltaje: 220 v
- Velocidad: 1750 RPM
- Potencia: 3HP
- Altura máxima: 14.9 m
- Caudal óptimo:  $0.003 \frac{m^3}{s}$

Partiendo de estos valores nominales y la curva característica proporcionada por el fabricante, se obtiene la tabla 3.5, donde se visualiza los valores de caudal y altura, potencia y eficiencia obtenidos por las leyes de afinidad.

Tabla 3.5: Valores de la bomba ante diferentes velocidades.

Datos para $\omega = 1725$						
$Q_b \left( \frac{m^3}{s} \right)$	H(m)	$\omega$ (RPM)	$P_h$ (W)	$P_m$ (W)	$\mu_b$	$\tau_L$ (Nm)
0.003	14.9	1725	438.507	859.8176	0.51	0.498445
0.006	13	1725	765.18	1457.486	0.525	0.844919
0.009	12	1725	1059.48	1926.327	0.55	1.116711
0.012	10	1725	1177.2	2180	0.54	1.263768
0.015	7.8	1725	1147.8	2186.229	0.525	1.267379
0.018	6.33	1725	1117.7514	2235.503	0.5	1.295944
Datos para $w = 1600$						
$Q_b \left( \frac{m^3}{s} \right)$	H(m)	$\omega$ (RPM)	$P_h$ (W)	$P_m$ (W)	$\mu_b$	$\tau_L$ (Nm)
0.002783	12.81882	1600	349.9203	686.1183	0.51	0.428824
0.005565	11.1842	1600	610.5992	1163.046	0.525	0.726904
0.008348	10.32	1600	845.44	1537.173	0.55	0.960733
0.01113	8.60	1600	939.38	1739.599	0.54	1.087249
0.013913	6.71	1600	915.8989	1744.569	0.525	1.090356
0.016696	5.445848	1600	891.9446	1783.889	0.5	1.114931
Datos para $w = 1400$						
$Q_b \left( \frac{m^3}{s} \right)$	H(m)	$\omega$ (RPM)	$P_h$ (W)	$P_m$ (W)	$\mu_b$	$\tau_L$ (Nm)
0.002435	9.814409	1400	234.4193	459.6457	0.51	0.328318
0.00487	8.562907	1400	409.05	779.1501	0.525	0.556536
0.007304	7.90	1400	566	1029.786	0.55	0.735561
0.009739	6.586852	1400	629.3135	1165.395	0.54	0.832425
0.012174	5.137744	1400	613.5807	1168.725	0.525	0.834804
0.014609	4.169477	1400	597.5332	1195.066	0.5	0.853619
Datos para $w = 1200$						
$Q_b \left( \frac{m^3}{s} \right)$	H(m)	$\omega$ (RPM)	$P_h$ (W)	$P_m$ (W)	$\mu_b$	$\tau_L$ (Nm)
0.002087	7.210586	1200	147.6226	289.4562	0.51	0.241213
0.004174	6.291115	1200	257.59	490.6601	0.525	0.408883
0.006261	5.807183	1200	356.6722	648.4948	0.55	0.540412
0.008348	4.839319	1200	396.3024	733.8933	0.54	0.611578
0.010435	3.774669	1200	386.3948	735.9902	0.525	0.613325
0.012522	3.063289	1200	376.2891	752.5782	0.5	0.6271
Datos para $w = 1000$						
$Q_b \left( \frac{m^3}{s} \right)$	H(m)	$\omega$ (RPM)	$P_h$ (W)	$P_m$ (W)	$\mu_b$	$\tau_L$ (Nm)
0.001739	5.007351	1000	85.42977	167.5094	0.51	0.167509
0.003478	4.36883	1000	149.0721	283.9468	0.525	0.283947
0.005217	4.032766	1000	206.4075	375.2864	0.55	0.37528
0.006957	3.360639	1000	229.3417	424.7068	0.54	0.424707
0.008696	2.621298	1000	223.6081	425.9202	0.525	0.42592
0.010435	2.127284	1000	217.7599	435.5198	0.5	0.43552

Una vez obtenidos los valores ante diferentes velocidades, utilizando el software Matlab, se calcula el polinomio expresado en (3.164) utilizando los datos de cada velocidad para obtener las curvas características que se muestran en las Figs. 3.8-3.10 las cuales tienen un error que oscila entre -0.1 y 0.1 con respecto a la curva real.

$$H = a_4Q_b^4 + a_3Q_b^3 + a_2Q_b^2 + a_1Q_b + a_0 \quad (3.164)$$

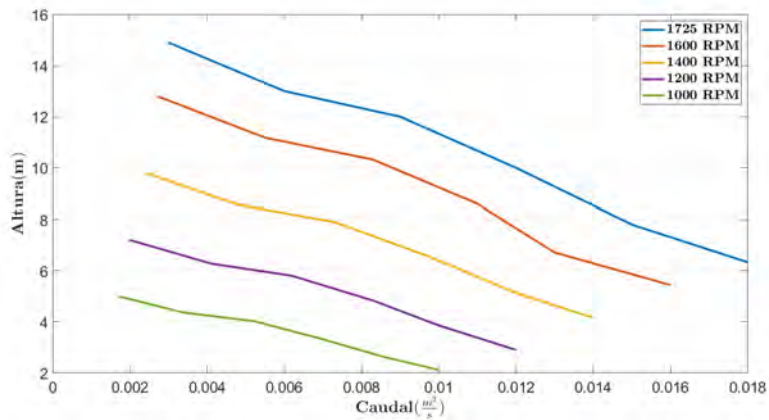


Figura 3.8: Curva característica de la bomba caudal vs altura.

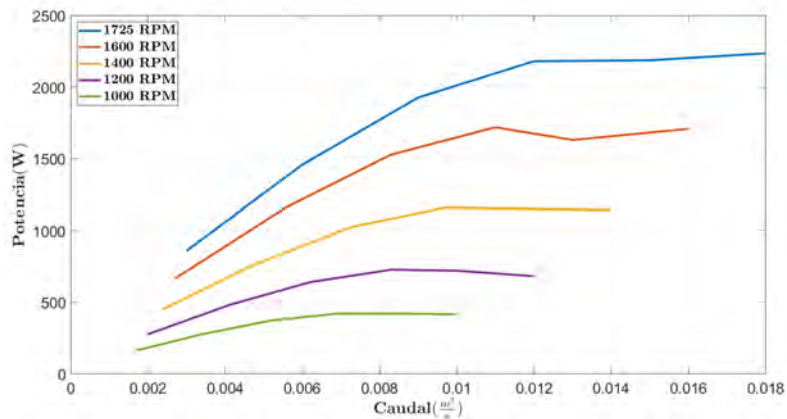


Figura 3.9: Curva característica de la bomba caudal vs potencia.

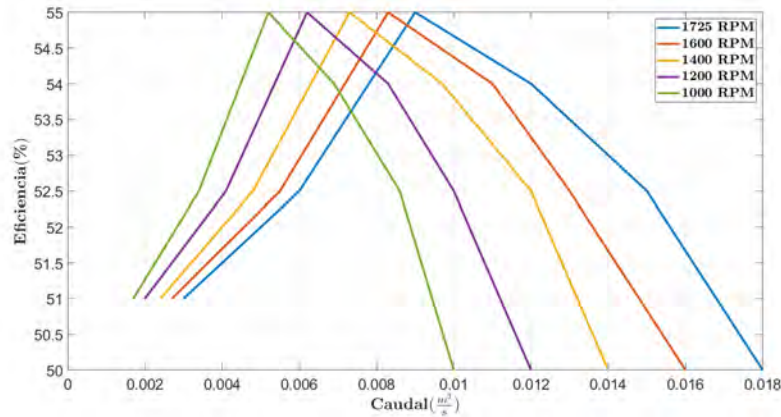


Figura 3.10: Curva característica de la bomba caudal vs eficiencia.

### Parametrización

Para fines de parametrización del bloque de bomba centrífuga proporcionado por Matlab/Simulink, es necesario calcular el polinomio, en este caso como resultado, el valor de cada coeficiente es el siguiente:

- $a_4=727880658.4362$
- $a_3=-30039437.5857$
- $a_2=415038.5802$
- $a_1=-2750.5908$
- $a_0=20.16$

### Punto de operación de la bomba

Una vez que la bomba ha sido parametrizada y se han obtenido las curvas características, se definen los puntos de operación de la bomba. Estos puntos son determinados en función de los requerimientos hidráulicos específicos. En este escenario particular, se busca mantener una altura constante de 8 m. Para lograr esta altura constante frente a variaciones en la velocidad del motor, es necesario ajustar el caudal definiendo así un nuevo punto de operación en cada cambio.

Para calcular el caudal requerido ante cambios en la velocidad y mantener una altura constante se comienza con el cálculo de la potencia mecánica requerida la cual está dada por la siguiente expresión:

$$P_m = \tau_L \omega_{rm} \quad (3.165)$$

Donde  $P_m$  es la potencia mecánica del motor en  $W$ ,  $\tau_L$  es el par externo aplicado en  $Nm$  y  $\omega_{rm}$  es la velocidad angular dada en  $\frac{rad}{s}$ .



Cabe mencionar que el par externo aplicado  $\tau_L$ , se calcula por la ley de afinidad de la ecuación (3.162).

Assumiendo una eficiencia de la bomba  $\mu_b$  constante del 52%, se utiliza la ecuación (3.166) para calcular la potencia hidráulica de la bomba  $P_h$ .

$$P_h = P_m \mu_b \quad (3.166)$$

Ya conociendo el valor de la potencia hidráulica producida, utilizando la ecuación (3.167), la cual de igual manera sirve para determinar la potencia hidráulica, se hace un despeje de tal manera que se obtenga el caudal requerido tal como se visualiza en la ecuación (3.168) donde los valores de  $\rho$ ,  $g$  y  $H$  son constantes.

$$P_h = \rho g H Q_b \quad (3.167)$$

$$Q_b = \frac{P_h}{\rho g H} \quad (3.168)$$

De esta forma se encuentran los caudales correspondientes a cada velocidad para obtener una altura de 8 m.

### 3.5. Caso de estudio e integración de los modelos

Una vez teniendo los modelos generales es necesario realizar un dimensionamiento para determinar la potencia requerida por el motor dependiendo de la potencia demandada por la bomba, el voltaje de CD mínimo requerido por el inversor, así como el dimensionamiento para determinar el número de módulos fotovoltaicos a emplear en el sistema.

Por último, ya obtenidas las consideraciones de diseño se ajustan los parámetros necesarios al modelo y se integran para formar un modelo matemático completo del sistema el cual se visualiza en la Fig.3.11.

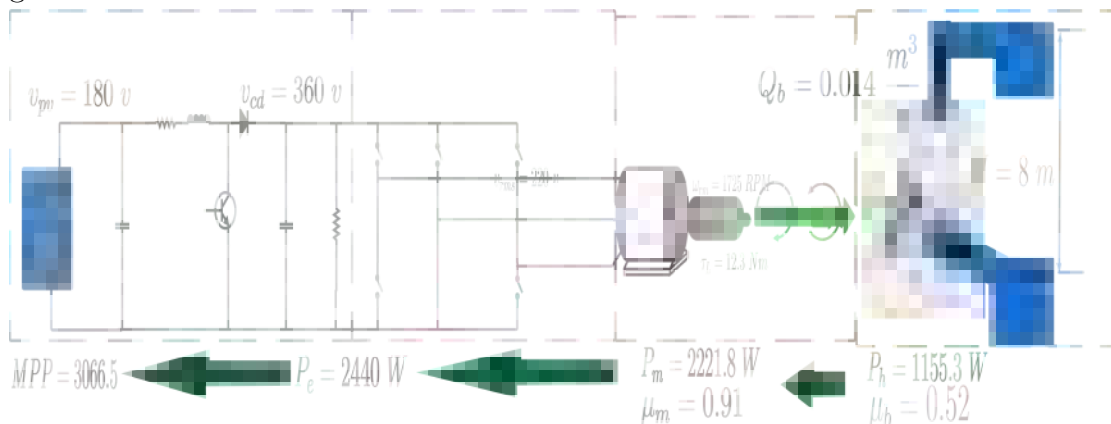


Figura 3.11: Esquema del sistema de bombeo completo con los parámetros de diseño.

### 3.5.1. Dimensionamiento y consideraciones de diseño

La forma sistemática que se siguió para el desarrollo del dimensionamiento fue la siguiente:

- Determinación de las necesidades hidráulicas (Potencia hidráulica, Caudal y Altura)
- Determinación de la potencia requerida por el motor
- Determinación del voltaje requerido en el bus de CD
- Determinación del número de paneles fotovoltaicos

#### Determinación de las necesidades hidráulicas

En el presente caso de estudio, se analiza un sistema de bombeo que enfrenta el reto de mantener una altura constante de 8 m. Dado que la potencia disponible para el motor varía en función de la irradiancia solar, se producen cambios en la velocidad del motor. Debido a ello, es esencial redefinir el punto de operación de la bomba a un nuevo caudal para mantener la misma altura. Esto se debe a que la bomba rinde mejor a ciertas velocidades en específico, ya que no todas las velocidades producen la altura deseada. Los valores de caudal se calculan utilizando las leyes de afinidad descritas anteriormente.

El valor del caudal se obtiene de la curva característica de altura contra caudal proporcionada por el fabricante, donde para una altura de 8 m, el valor de caudal en condiciones nominales es  $Q_b = 0.014 \frac{m^3}{s}$ . Para este trabajo se utilizó una bomba de la marca EVANS, el cual su ficha técnica se describe en el anexo [B.2](#).

Dado que ya se conoce la altura y el caudal, es necesario calcular la potencia hidráulica utilizando la Ec. (3.167) previamente mencionada, donde sustituyendo numéricamente se obtiene la expresión (3.169) dando una potencia hidráulica de 1155.3W.

$$P_h = \left(1000 \frac{kg}{m^3}\right) (8m) \left(9.81 \frac{m}{s^2}\right) \left(0.014 \frac{m^3}{s}\right) = 1155.3W \quad (3.169)$$

Bajo las consideraciones de  $\rho = 1000 \frac{m^3}{s}$ ,  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ ,  $Q_b = 0.014 \frac{m^3}{s}$  y  $H = 8m$  se calcula la potencia hidráulica requerida.

#### Determinación de la potencia requerida por el motor

Conociendo las necesidades hidráulicas, se determina la potencia mecánica necesaria para satisfacer a la bomba mediante utilizando la Ec. (3.170), en este caso se planea trabajar la bomba a una eficiencia del 52% constantes. Esta eficiencia es la correspondiente a la del caudal de  $0.014 \frac{m^3}{s}$  de la curva característica nominal de eficiencia contra caudal proporcionada por el fabricante.

$$P_m = \frac{P_h}{\mu_b} \quad (3.170)$$

$$P_m = \frac{1155.3W}{0.52} = 2221.8W \quad (3.171)$$

$$P_m = \frac{2221.8W}{746} = 2.97HP \quad (3.172)$$

- $P_m$ =Potencia mecánica (W)

- $\mu_b$ =Eficiencia de la bomba (%)

Una vez calculada la potencia mecánica se transforma a caballos de fuerza (HP, por sus siglas en inglés), en donde se seleccionó un motor de 3HP debido a la potencia requerida y las capacidades estándar de los motores comerciales, siendo el motor de 3 HP el más adecuado. En este trabajo el motor de 3 HP utilizado se obtuvo de [Krause et al. (2013)].

### Determinación del voltaje requerido en el bus de CD

Es necesario conocer el voltaje requerido en el bus de CD para poder obtener un dimensionamiento del sistema FV adecuado, además, para saber cual es el voltaje mínimo requerido que genere un voltaje línea-línea adecuado por parte del inversor. Para este caso el motor utilizado requiere un voltaje línea a línea de 220V. El voltaje de CD en la entrada del inversor se determina de la siguiente manera:

$$V_{CD} = \frac{V_{LL}\sqrt{2} * 2}{\sqrt{3}} \quad (3.173)$$

$$V_{CD} = \frac{220\sqrt{2} * 2}{\sqrt{3}} = 359.25V \quad (3.174)$$

- $V_{CD}$ = Voltaje en el bus de CD.
- $V_{LL}$ = Voltaje de línea a línea CA.

### Determinación del número de paneles FV

Para determinar la cantidad de paneles FV se calcula el consumo de energía requerido por el motor, el cual se expresa a continuación:

$$C_e = P_{motor} * t \quad (3.175)$$

$$C_e = (2237.1W)(4hrs) = 8948.4Whr \quad (3.176)$$

- $C_e$ = Consumo de energía.
- $P_{motor}$ =Potencia del motor.
- $t$ =Horas de funcionamiento de la bomba.

Con el propósito de aprovechar la energía solar generada durante el día, es necesario que el tiempo de funcionamiento de la bomba (t), sea igual o menor a las horas solares pico. Cuando se ajusta al mismo período (como es el caso), se logra consumir la totalidad de la energía generada durante las horas de mayor radiación solar, y al reducir el tiempo de operación, se disminuye la cantidad de energía extraída de los paneles fotovoltaicos.

El módulo FV seleccionado para este trabajo es el módulo ISF-255, cuyos datos se muestran en la ficha técnica de la Fig. B.1. del anexo B.1. Teniendo el consumo de energía, se utiliza la Ec. (3.177) para calcular el número de módulos (mod) FV en relación con los datos del panel y el consumo. Cabe mencionar que para el dimensionamiento es necesario considerar los efectos que tiene la irradiancia en los paneles, por lo cual es necesario hacer un dimensionamiento para el peor escenario, tomando el valor de horas solares pico (HSP) mensual más bajo. Es importante tener en cuenta las pérdidas causadas por sombreado, acumulación de suciedad y degradación de los

paneles y determinar la capacidad de energía real, cada uno de estos tiene un valor de porcentaje, para este trabajo se utilizaron porcentajes tomados de [Villegas et al. (2018)]. Este factor se conoce como coeficiente de rendimiento (PR) y representa la eficiencia del sistema.

Las horas solares pico mostrados en la tabla C.1 mostrado en el anexo C, son de la localidad de Cuernavaca Morelos y se obtuvieron de la pagina de la NASA POWER.

$$N_{mod} = \frac{C_e}{P_{mp} * HSP * PR} \quad (3.177)$$

$$N_{mod} = \frac{8948.4Whr}{(255W)(4.38hrs)(0.7)} = 11.44 \rightarrow 12 \quad (3.178)$$

- $N_{md}$ = Número total de módulos fotovoltaicos.
- $P_{mp}$ = Punto de máxima potencia del módulo FV.
- $HSP$ = Horas solares pico.
- $PR$ = Factor de rendimiento del módulo.

Para calcular el número de módulos en serie y en paralelo se utilizan las expresiones (3.179) y (3.180).

$$N_s = \frac{v_{CD}}{v_{mp}} \quad (3.179)$$

$$N_p = \frac{N_{mod}}{N_s} \quad (3.180)$$

- $N_s$ = Número de módulos en serie.
- $N_p$ = Número de módulos en paralelo.
- $v_{CD}$ = Voltaje requerido en el bus de CD.
- $v_{mp}$ = Punto de máximo voltaje del módulo.

Debido a que se considera que el convertidor este operando al 50% el número de módulos en serie se redefine como la expresión (3.181), esto con la finalidad de que el ciclo de trabajo del convertidor no opere en los limites de 1 y 0, obteniendo el arreglo fotovoltaico en serie y paralelo como las Ecs. (3.182) y (3.183).

$$N_s = \frac{v_{CD}}{2v_{mp}} \quad (3.181)$$

$$N_s = \frac{180v}{30.9v} = 5.82 \rightarrow 6 \quad (3.182)$$

$$N_p = \frac{12 \text{ mod}}{6 \text{ mod}} = 2 \quad (3.183)$$

Finalizando con el dimensionamiento del sistema completo para el presente caso de estudio.

### Integración de los modelos

En esta sección, se integraron todos los modelos obtenidos anteriormente considerando la bomba centrífuga para validar el modelado mediante simulación. La Figura 3.13 muestra el circuito equivalente del sistema completo.

Además, se implemento un control v/f para la regulación de la velocidad mostrado en la Fig. 3.12 con unas ganancias mostradas en la tabla 3.6, esto con el objetivo de regular el caudal de la bomba por variación de velocidad, sin necesidad de una válvula.

Las variables de interés para el modelado tradicional incluyen la corriente de las celdas  $i_{pv}$ , el voltaje de las celdas  $v_{c1}$ , el voltaje en el bus de cd  $v_{c2}$ , la corriente demandada por el inversor  $i_{mi}$ , las corrientes en abc del estator  $i_{abcs}$ , la velocidad mecánica  $w_{rm}$  y el caudal bombeado  $Q_b$ .

En el modelo E-L, las variables son la carga eléctrica en la malla 1 de las celdas con el convertidor boost  $q_1$ , la carga eléctrica en la malla 2  $q_2$ , la carga eléctrica de la malla 3  $q_3$ , la carga eléctrica demandada por el inversor  $q_{mi}$ , las cargas eléctricas en abc del estator  $q_{abcs}$ , el ángulo mecánico del motor  $q_{rm}$  y el caudal bombeado  $Q_b$ .

### Esquema de control

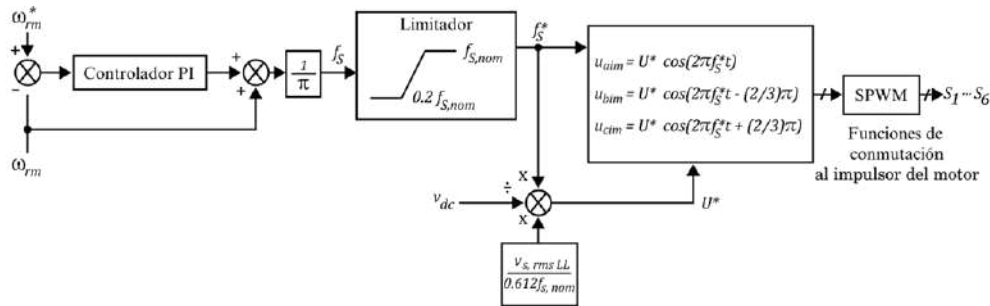


Figura 3.12: Esquema de control V/F [Martinez (2023)].

Tabla 3.6: Ganancias del controlador proporcional-integral [Martinez (2023)]

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Ganancia proporcional	$K_p$	50
Ganancia integral	$K_i$	60



Figura 3.13: Circuito equivalente del sistema completo.

Para el cálculo de la resistencia  $R_{CD}$ , se planteó el uso de una resistencia variable ya que se considera el equilibrio de potencias del convertidor con la interacción de las corrientes demandadas por el inversor  $i_{mi}$ , descrito en el anexo D.

Los parámetros de los elementos que conforman al convertidor elevador, se calcularon con base a la metodología utilizada en [Singh and Singh (2015); Singh et al. (2013)], el desarrollo matemático se describe en el anexo E, donde se obtuvieron los valores para el capacitor de entrada del convertidor  $C_1$ , el inductor del convertidor  $i_L$  y el bus de CD  $C_2$ .

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de cada escenario de simulación específico con el objetivo de validar cada modelo y posteriormente integrar los modelos y adaptarlos al caso de estudio.

### 4.1. Simulación del Generador FV con el convertidor boost

#### Primer escenario de simulación

En este escenario de simulación, se utilizó una irradiancia variable escalonada para ver como se comporta el convertidor elevador ante diferentes niveles de potencia producidos por los paneles FV. con un control MPPT descrito en el capítulo anterior. El MPPT ajusta el ciclo de trabajo  $d$  en función de un ajuste de impedancias entre las celdas FV y la impedancia de salida  $R_{cd}$  descrito en el anexo A. Esta variación del ciclo de trabajo y la irradiancia se muestra en la Fig. 4.1 durante un tiempo de simulación de 4 segundos. Se espera mantener el voltaje máximo de las celdas FV. el cual toma un valor de  $185 - 186 V$  y se espera que al momento de que la irradiancia llegue a un valor de  $1000 \frac{W}{m^2}$  el voltaje de salida del convertidor tome un valor de  $360 V$ .

Las variaciones de los valores de entrada se producen en el siguiente orden:

- En  $t=0$  la irradiancia es de  $400 \frac{W}{m^2}$ , lo que produce un MPPT de  $1231.24W$ , un voltaje máximo de  $185.5v$  y una corriente máxima de  $6.63A$ . Bajo estas condiciones se determina una impedancia por parte de las celdas de  $27.98\Omega$  dando un ciclo de trabajo de  $0.18$ .
- En  $t=1$  la irradiancia es de  $600 \frac{W}{m^2}$ , lo que produce un MPPT de  $1853.33W$ , un voltaje máximo de  $186.22v$  y una corriente máxima de  $9.95A$ . Bajo estas condiciones se determina una impedancia por parte de las celdas de  $18.71\Omega$  dando un ciclo de trabajo de  $0.33$ .
- En  $t=2$  la irradiancia es de  $800 \frac{W}{m^2}$ , lo que produce un MPPT de  $2465.88W$ , un voltaje máximo de  $186v$  y una corriente máxima de  $13.27A$ . Bajo estas condiciones se determina una impedancia por parte de las celdas de  $14\Omega$  dando un ciclo de trabajo de  $0.42$ .
- En  $t=3$  la irradiancia es de  $1000 \frac{W}{m^2}$ , lo que produce un MPPT de  $3066.52W$ , un voltaje máximo de  $185.54v$  y una corriente máxima de  $16.54A$ . Bajo estas condiciones se determina una impedancia por parte de las celdas de  $11.2\Omega$  dando un ciclo de trabajo de  $0.48$ .

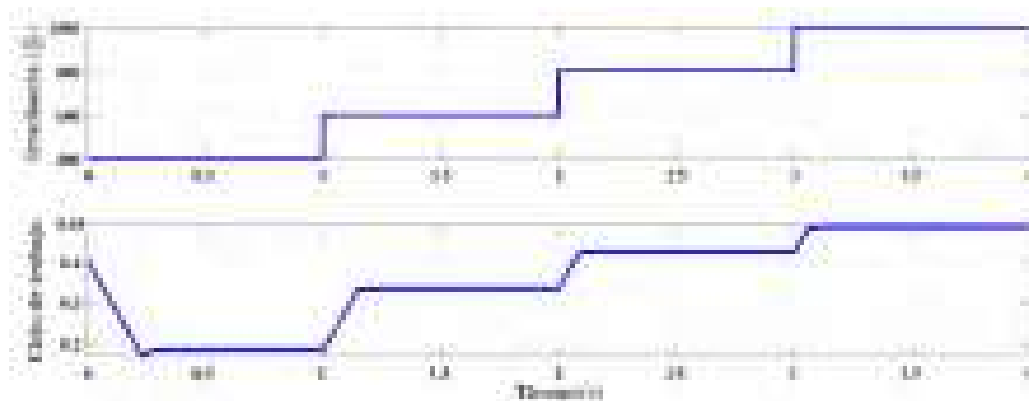


Figura 4.1: Cambios en la irradiancia y el ciclo de trabajo.

### Simulación y resultados

Para validar el comportamiento de los dos modelos matemáticos obtenidos, se programaron en el entorno Matlab/Simulink y se comparó con un modelo a bloques del Simulink el cual se tomó como referencia para los modelos matemáticos, mostrando la comparativa en la Fig. 4.2.

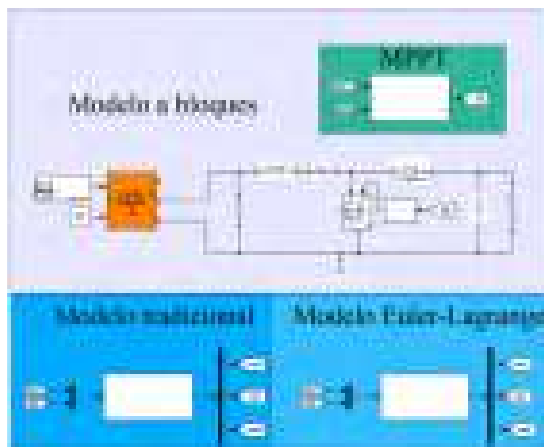


Figura 4.2: Comparación de los modelos.

Utilizando los parámetros de simulación mostrados en la tabla 4.1, se obtiene como resultado las Figs. 4.3, 4.4 y 4.5 que representan la dinámica del voltaje FV ( $v_{C_1}$ ), la corriente en el inductor ( $i_L$ ) y el voltaje en el bus de cd ( $v_{C_2}$ ). Los incisos b y c de cada figura representan: b) Las señales de error de las respuestas del modelo de bloques de Simulink vs el modelo matemático tradicional, c) Las señales de error entre las repuestas del modelo de bloques de Simulink vs el modelo Euler-Lagrange.



Tabla 4.1: Datos de simulación.

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Módulos en paralelo	$N_p$	2
Módulos en serie	$N_s$	6
Voltaje en circuito abierto	$V_{oc}$	37.9 V
Corriente en corto circuito	$I_{sc}$	8.86 A
Punto de máximo voltaje	$V_{mp}$	30.9 V
Punto de máxima corriente	$I_{mp}$	8.27 A
Capacitor de entrada	$C_1$	$200 \times 10^{-6}$ F
Inductor	$L$	$3 \times 10^{-3}$ H
Resistencia parásita del inductor	$R_L$	$0.001\Omega$
Capacitor del bus de CD	$C_2$	$200 \times 10^{-6}$ F
Carga	$R$	$42.26\Omega$

Como se puede apreciar en las Figs. 4.3 - 4.5, se muestra la comparativa de los modelos matemáticos con respecto a un modelo de bloques, incisos a). Además, se muestran el error entre el modelo tradicional con respecto al modelo de bloques ( $e_t$ ), incisos b). Finalmente en los incisos c) se visualiza el error entre el modelo E-L con respecto al modelo de bloques ( $e_{EL}$ ), representando adecuadamente la interacción entre las celdas fotovoltaicas con el convertidor, además, se corrobora que el convertidor elevador está funcionando de la manera correcta debido a que los voltajes producidos en el bus de cd son los correspondientes al cambio del ciclo de trabajo mostrado previamente en el escenario de simulación.

Figura 4.3: a) Comparación de los voltajes FV  $v_{c1}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .Figura 4.4: a) Comparación de las corrientes  $i_L$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.5: a) Comparación de los voltajes del bus  $v_{c2}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

## 4.2. Simulación del Inversor trifásico

### Segundo escenario de simulación

En este escenario de simulación, se utilizó un PWM en lazo abierto descrito en el capítulo anterior, con un voltaje de CD constante de  $360\text{ v}$ . Debido a la gran cantidad de pulsos generados en intervalos pequeños de tiempo se simuló durante  $0.5$  segundos para poder visualizar los voltajes línea-línea de las fases del inversor.

### Simulación y resultados

Para validar el modelo del inversor, se programó utilizando el entorno de Matlab/Simulink y se comparó con un modelo a bloques el cual se visualiza en la Fig. 4.6. con un voltaje de entrada de  $360v_{cd}$ , esperando un voltaje línea-línea de salida de  $360v_{LL}$ . El PWM utilizado en este trabajo se visualiza en la Fig. 4.7.



Figura 4.6: Esquema de la comparativa del modelo matemático y el modelo a bloques.

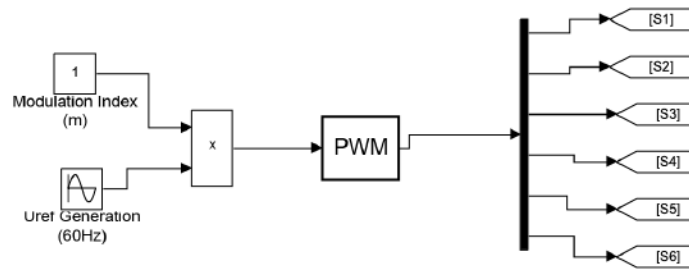


Figura 4.7: Esquema en simulink del PWM en lazo abierto.

La Fig. 4.8, representa la comparación de los voltajes línea-línea del inversor del modelo Simulink, comparado con los voltajes línea-línea del modelo. Con los resultados obtenidos de esta simulación, se corrobora que el modelo en función de las señales de conmutación describe adecuadamente el comportamiento del inversor al compararse con el modelo de bloques, generando un voltaje línea-línea de la misma magnitud que el voltaje de CD, con un valor de  $360V$ .

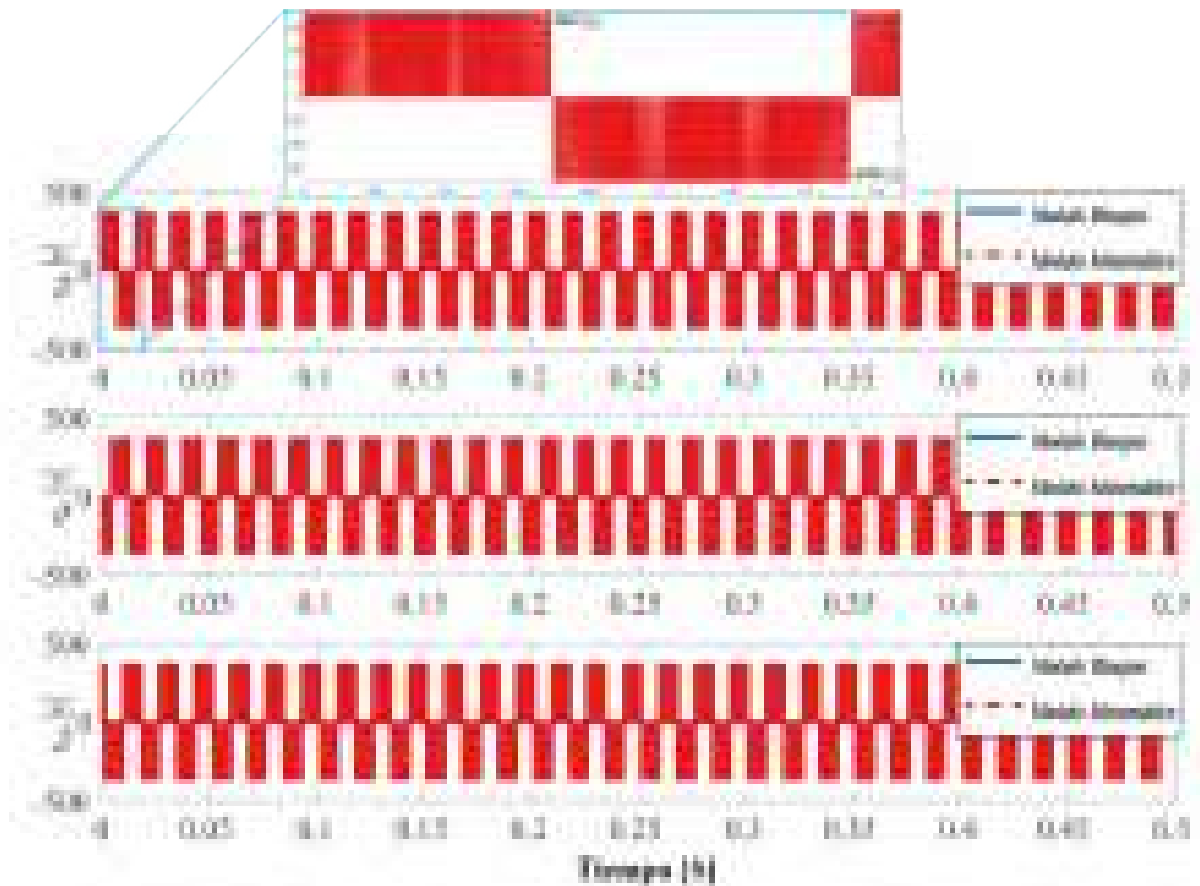


Figura 4.8: Comparación de los voltajes línea-línea entre el modelo matemático y el modelo a bloques.

También se aplicó un análisis por transformada de Fourier rápida utilizando la herramienta de Simulink llamada FFT (Por sus siglas en inglés) siguiendo la metodología aplicada en [Vargas

et al. (2019)] con el objetivo de validar que el sistema este operando a 60 Hz y además verificar si el valor rms del armónico fundamental sea el requerido de  $220v_{rms}$ .



Figura 4.9: Resultados del FFT.

La Fig. 4.9 muestra el análisis del voltaje línea a línea a un ciclo con una frecuencia fundamental de 60 Hz el cual se visualiza en el inciso a) y una distorsión armónica total (THD, por sus siglas en inglés) de 0.23% con un armónico fundamental de  $311.8v$  como se observa en el inciso b), lo que corrobora que el sistema esta operando a la frecuencia correcta según el inciso c) y como se considera un sistema trifásico balanceado se considera el mismo THD para las otras dos fases del sistema.

Para validar el voltaje rms visualizado en la Fig. anterior, se utilizo la Ec. (4.1) donde el valor del armónico fundamental es el valor máximo del voltaje  $v_{max}$ , al susituir numéricamente se valida que con los  $311.8v_{max}$  se produce un valor rms de  $220v_{rms}$ , por lo cual es el esperado.

$$v_{rms} = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}} \quad (4.1)$$

$$v_{rms} = \frac{311.8v}{\sqrt{2}} = 220v_{rms} \quad (4.2)$$

### 4.3. Simulación del Motor de inducción trifásico

En este tercer escenario de simulación se utilizó un motor de inducción tipo jaula de ardilla de 200W tomado de [Hernández et al. (2019)] con el objetivo de validar el modelo matemático del motor de inducción en coordenadas abc y qd0, como entradas al sistema se tienen valores nominales del par de carga externo  $\tau_L = 1.25Nm$  y voltaje línea-línea del estator  $v_{LLs} = 220v$  desde  $T=0$ .

#### Simulación y resultados

Para validar el comportamiento dinámico de los modelos matemáticos, se comparan los modelos con un modelo a bloques realizado en Simulink, el cual aborda una fuente de CA trifásica y el motor de inducción, tal como se visualiza en la Fig. 4.10 utilizando los parámetros de la tabla 4.2. El tiempo de simulación es de 4 segundos.

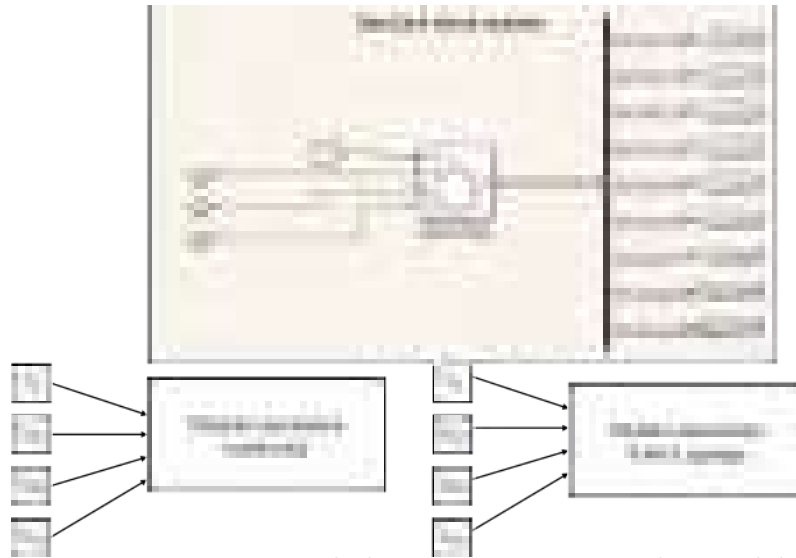


Figura 4.10: Diagrama de la comparativa entre los modelos.

Tabla 4.2: Datos del motor de inducción [Hernández et al. (2019)].

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Potencia nominal	$P_{nom}$	200 W
Voltaje rms nominal línea a línea	$V_{rmsLL}$	220 V
Corriente rms nominal	$i_{rms}$	0.95 A
Número de pares de polos	$n_p$	2
Velocidad nominal	$\omega_{rm,nom}$	1625rpm
Frecuencia nominal	$f_{s,nom}$	60 Hz
Resistencia del estator	$r_s$	11.995 $\Omega$
Resistencia del rotor referida al estator	$r'_r$	15.25 $\Omega$
Reactancia del estator	$X_{ls}$	12.19 $\Omega$
Reactancia del rotor referida al estator	$X'_{lr}$	12.19 $\Omega$
Reactancia de magnetización	$X_M$	209.74 $\Omega$
Momento de inercia	$J$	$4.6423 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Coefficiente de fricción viscosa	B	0
Par aplicado	$\tau_L$	1.25 N · m

Las gráficas de las figuras 4.11-4.13, muestran la comparativa de las corrientes en el estator y el error entre los modelos matemáticos con respecto al modelo de bloques, de lo cual, se observa que los modelos matemáticos describen adecuadamente al sistema, además, las oscilaciones de las corrientes disminuyen en cuanto llega al estado estacionario y su amplitud es igual al de la fuente.

Figura 4.11: a) Comparación de las corrientes  $i_{as}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.12: a) Comparación de las corrientes  $i_{bs}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.13: a) Comparación de las corrientes  $i_{cs}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

Para validar las magnitudes de las corrientes obtenidas en el estator, se utiliza la expresión (4.3) la cual calcula el valor vrms de la corriente, para ello es necesario conocer el valor de la corriente máxima obtenida, en este caso es  $1.29A$ , al sustituir numéricamente se obtiene la Ec. (4.4).

$$i_{rms} = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

$$\frac{1.29 A}{\sqrt{2}} = 0.91 A \quad (4.4)$$

Se valida que el resultado obtenido es aproximado al valor de corriente rms de la tabla 4.2.

Las figuras 4.14-4.16 muestran en los incisos a) la comparación de los comportamientos de los tres modelos de las corrientes del rotor referidas al estator, en los incisos b) muestra las discrepancias de los resultados del modelo a bloques contra los resultados del modelo tradicional y en los incisos c) nuevamente muestran las discrepancias entre el modelo de bloques contra el modelo Euler-Lagrange. Los modelos se comportan bien y el error entre los modelos matemáticos y el error del modelo de bloques es muy pequeño, cuando se alcanza el estado estacionario del sistema la magnitud de las oscilaciones disminuyen tomando valores de 0.99 y -0.99 A.



Figura 4.14: a) Comparación de las corrientes  $i_{ar}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.15: a) Comparación de las corrientes  $i_{br}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.16: a) Comparación de las corrientes  $i_{cr}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

En la gráfica de la Fig. 4.17, se visualiza la comparación del comportamiento de la velocidad mecánica del motor obtenida por los modelos. Las señales de error entre los modelos matemáticos y el de bloques, notándose que los modelos se siguen adecuadamente a la velocidad del modelo de bloques, tomando un valor de 1702 RPM, el cual es el esperado debido a que el motor opera en condiciones nominales. Finalmente, la Fig. 4.18 representa el par electromagnético generado por el motor y el error de los modelos, comparando el comportamiento de los modelos matemáticos con respecto al modelo de bloques, además se alcanza a apreciar que ante condiciones nominales el motor genera el par suficiente para satisfacer el par externo de  $1.25Nm$ , describiendo el funcionamiento correcto



del MI y mostrando un error muy pequeño entre los modelos matemáticos y el de bloques.

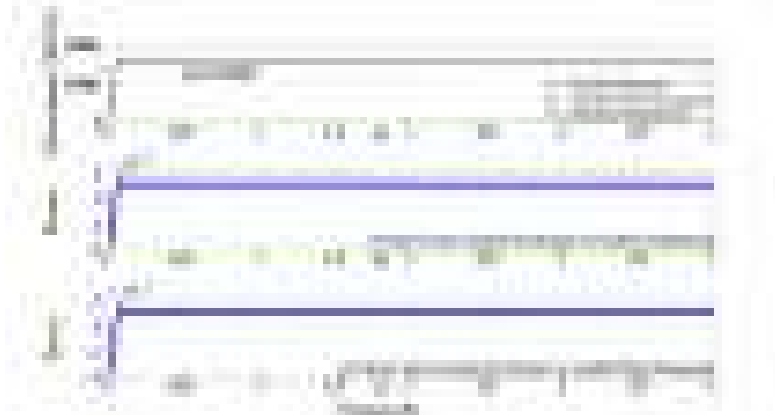


Figura 4.17: a) Comparación de la velocidad mecánica  $\omega_{rm}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.18: a) Comparación del par electromagnético  $\tau_e$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

### Transformación al marco de referencia qd0

En esta parte se mantiene el mismo escenario de simulación para simular y analizar el comportamiento dinámico de los modelos matemáticos transformados en coordenadas qd0.

### Simulación y resultados

Las Figuras 4.19 y 4.20 muestran la dinámica de las corrientes en coordenadas qd0 del estator. En el inciso a), se compara la dinámica entre los dos modelos matemáticos y el modelo de bloques, revelando un comportamiento similar. Las Figuras b) y c) ilustran las señales de error  $e_t$  y  $e_{EL}$ . Es relevante resaltar que las corrientes se vuelven constantes e invariantes en el tiempo.



Figura 4.19: a) Comparación de las corrientes  $i_{qs}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.20: a) Comparación de las corrientes  $i_{ds}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

Las Figuras 4.21 y 4.22 muestran el comportamiento dinámico de las corrientes en coordenadas qd0 del rotor. En el inciso a), se compara los resultados de los modelos matemáticos con el modelo a bloques. En los incisos b) y c) se ilustra la señal de error de los modelos matemáticos con respecto al de bloques. Se observa que al eliminar la dependencia del ángulo  $\theta_r$ , se logra un comportamiento constante cuando se alcanza la parte estacionaria, lo que simplifica las futuras tareas de control.



Figura 4.21: a) Comparación de las corrientes  $i_{qr}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.22: a) Comparación de las corrientes  $i_{dr}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

La Fig. 4.23 representa la dinámica de la velocidad mecánica del motor de los tres modelos en el inciso a), mientras que en el inciso b) y c) nuevamente son las señales de error de los modelos matemáticos con respecto al modelo de bloques, oscilando con picos desde -0.01 hasta 0.02 lo cual es relativamente pequeño y llegando rápidamente a cero ya cuando la señal de la velocidad se encuentra en la parte estacionaria, por lo cual los modelos describen adecuadamente todas las variables calculadas en el marco de referencia qd0.

La última variable por analizar, es el del par electromagnético, el cual se presenta en la Fig. 4.24, donde la dinámica de los modelos se presenta en el inciso a) y los errores entre estos se visualizan en los incisos b) y c), en este caso el par está llegando al valor de 1.25, debido a que al motor se le está aplicando un par de carga externo de ese valor, por lo cual el par generado por el motor debe ser diferente de cero, comprobándose además del correcto funcionamiento de los modelos matemáticos, que el motor es capaz de generar los  $1.25Nm$  de par de carga que se le están aplicando.



Figura 4.23: a) Comparación de la velocidad mecánica  $\omega_{rm}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.24: a) Comparación del par electromagnético  $\tau_e$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

## 4.4. Simulación de la Bomba centrífuga

### Escenario de simulación

En el cuarto escenario de simulación, se simula la bomba centrífuga y se introducen variaciones en la velocidad mecánica como se muestra en la Fig. 4.25, lo que produce cambios en el par mecánico ya que depende de la velocidad. Estas variaciones en las señales de entrada se producen de la siguiente manera:

- En  $t=1$  la velocidad mecánica toma la velocidad nominal que es de  $1725RPM$  con un par externo nominal de  $12.31Nm$ .
- En  $t=2$  la velocidad disminuye a  $1600RPM$  y produce un par de  $10.6Nm$ .
- Por último, en  $t=3$  la velocidad baja hasta  $1400RPM$  produciendo un par de  $8.11Nm$ .

Además de estas variaciones en la parte mecánica de la bomba, se considera una altura constante  $H = 8 m$  y una eficiencia constante  $\mu_b = 50\%$  que es la nominal según la curva característica mostrada en previamente en la Fig. 3.10.



Figura 4.25: Variaciones en a) velocidad mecánica de la bomba y b) par mecánico.

## Resultados y simulación

Para validar el modelo matemático de la bomba centrífuga, se programó el modelo en el entorno de MATLAB/SIMULINK como se visualiza en la Fig. 4.26 y se comparó con las curvas características mencionadas en el capítulo anterior, las cuales fueron programadas y estimadas en Matlab.

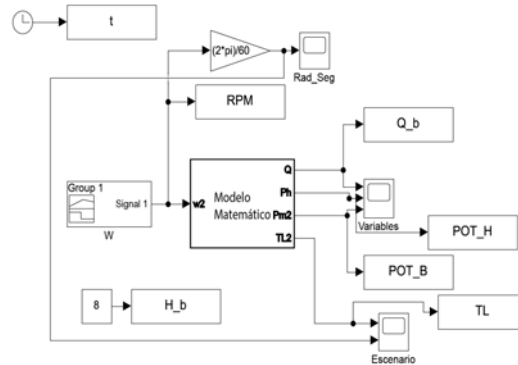


Figura 4.26: Modelo matemático de la bomba centrífuga en simulink.

Los parámetros de simulación utilizados para la bomba se visualizan en la tabla 4.3.

Tabla 4.3: Parámetros de la bomba centrífuga.

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Primer coeficiente de aproximación	$a_4$	727880658.4362
Segundo coeficiente de aproximación	$a_3$	-30039437.5857
Tercer coeficiente de aproximación	$a_2$	415038.5802
Cuarto coeficiente de aproximación	$a_1$	-2750.5908
Caudal nominal	$Q_n$	$0.018 \frac{m^3}{s}$
Velocidad de referencia	$\omega_{rm,ref}$	1725RPM
Densidad del agua	$\rho$	$1000 \frac{kg}{m^3}$

La Fig. 4.27 muestra las tres variables principales en un sistema de bombeo (caudal, potencia hidráulica y potencia mecánica), ante variaciones en la velocidad. Para mantener una altura constante, es necesario conocer el caudal correspondiente a cada velocidad, dando como resultado:  $0.014 \frac{m^3}{s}$  para  $1725RPM$ ,  $0.011 \frac{m^3}{s}$  para  $1600RPM$  y  $0.007 \frac{m^3}{s}$  para  $1400RPM$ . Estos valores de caudal mantienen una altura constante disminuyendo la potencia requerida como se aprecia en el inciso b) y el inciso c) de la Fig. 4.27.



Figura 4.27: a) Caudal bombeado, b) Potencia hidráulica, c) Potencia mecánica.

En la Fig. 4.28 se visualiza el resultado arrojado por el sistema de bombeo comparándolo con las curvas características, donde el caudal calculado coincide con las curvas correspondientes. También se observa que entre mayor sea la velocidad, la altura que puede producir el sistema también incrementa.

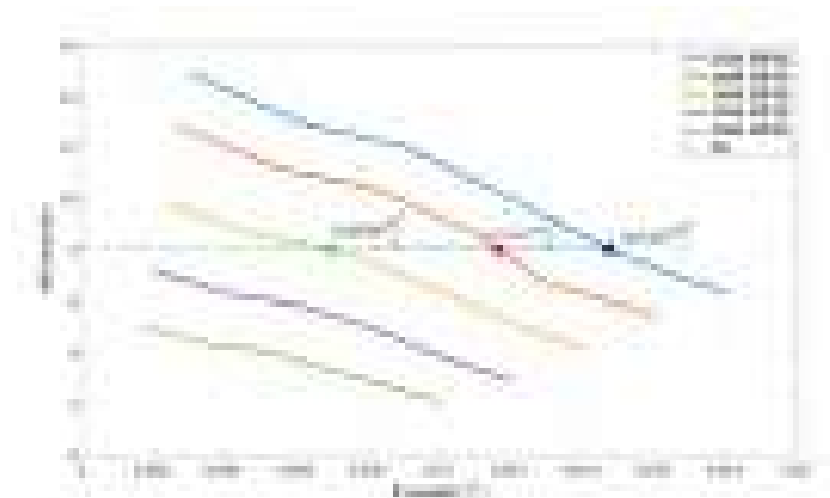


Figura 4.28: Puntos de operación de los caudales para una altura de 8m.

De igual manera en la Fig. 4.29, se visualiza que a mayor velocidad, la potencia mecánica demandada por el sistema de bombeo aumenta, en el caso del punto de operación de la bomba para una altura de 8 metros, se visualiza que la precisión de los datos de las curvas características con respecto a los obtenidos del sistema se separan un poco con un error de hasta  $74W$  debido a la aproximación del polinomio de las curvas, demostrando un comportamiento correcto del sistema.

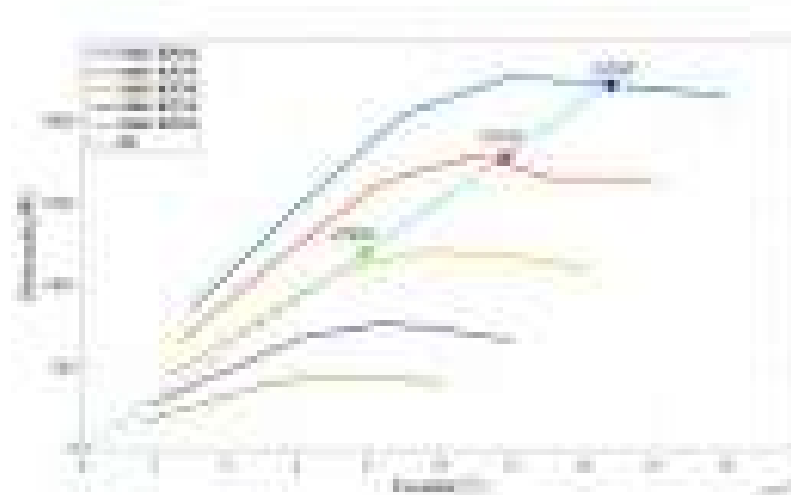


Figura 4.29: Potencias mecánicas correspondientes a las velocidades de 1725, 1600 y 1400 RPM.

Es esencial considerar que no todas las velocidades pueden producir la altura de 8 m, por lo que para fines de diseño es necesario considerar ambas gráficas presentadas en esta sección para definir bien los puntos de operación de la bomba centrífuga.

## 4.5. Simulación del modelo completo y caso de estudio

### Escenario de simulación

Se considera un arreglo de 12 paneles, 6 en serie y 2 en paralelo ante variaciones en las entradas del modelo mostrados en la Fig. 4.30, que se presentan de la siguiente manera:

- En  $t=0$  la irradiancia mantiene un valor ideal de  $1000 \frac{W}{m^2}$ , con un ciclo de trabajo de 0.48 y la velocidad de referencia del controlador es de  $0 \frac{rad}{s}$ , al igual que el par mecánico y la carga adicional  $R_{CD} = 42.26$ .
- En  $t=7$  la irradiancia sigue manteniendo su valor de  $1000 \frac{W}{m^2}$ , el ciclo de trabajo vuelve a mantener un valor de 0.48, la velocidad llega al valor deseado de  $180.64 \frac{rad}{s}$ , el par mecánico toma un valor de  $12.3 Nm$  y la carga adicional  $R_{CD} = 207$ .
- En  $t=10$  la irradiancia baja a  $800 \frac{W}{m^2}$ , el ciclo de trabajo baja a 0.22, la velocidad angular baja a  $170.48 \frac{rad}{s}$  y el par mecánico  $10.9 Nm$  y la carga adicional  $R_{CD} = 207$ .
- Finalmente, en  $t=14$  la irradiancia baja a  $700 \frac{W}{m^2}$ , el ciclo de trabajo sube a 0.54, la velocidad de referencia baja a  $150 \frac{rad}{s}$  y el par mecánico a  $8.5$  y la carga adicional  $R_{CD} = 207$ .



Figura 4.30: Cambios de las señales de entrada de los modelos.

### Resultados y simulación

La comparativa de los modelos matemáticos se presenta en la Fig. 4.31, programando en código los modelos matemáticos y comparándose con un modelo a bloques de Simulink y los controles del MPPT y v/f.

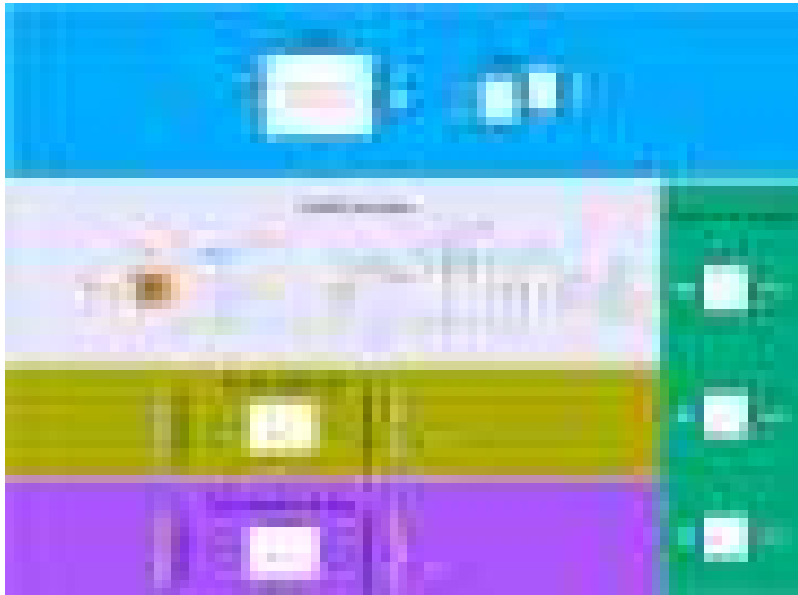


Figura 4.31: Diagrama de la comparativa entre los modelos matemáticos y el modelo de bloques.

Los parámetros de simulación se muestran en las tablas 4.3,4.4,4.5 y 4.6.

Tabla 4.4: Parámetros de las celdas fotovoltaicas.

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Punto de máximo voltaje	$V_{mp}$	30.9 V
Punto de máxima corriente	$I_{mp}$	8.27 A
Punto de máxima potencia	$P_{mp}$	255.54 W
Voltaje en circuito abierto	$V_{oc}$	37.9 V
Corriente de corto circuito	$I_{sc}$	8.86 A

Tabla 4.5: Parámetros de diseño adicionales.

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Capacitor de entrada	$C_1$	$1.086 \times 10^{-4}$ F
Inductor	$L$	0.0136H
Resistencia parásita del inductor	$R_L$	0.001Omega
Capacitor del bus de CD	$C_2$	$1.21 \times 10^{-3}$ F
Frecuencia de conmutación de los convertidores	$f$	60kHz



Tabla 4.6: Parámetros del motor de inducción trifásico [Krause et al. (2013)].

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Potencia nominal	$P_{nom}$	2237.1 W
Voltaje rms nominal línea a línea	$V_{rmsLL}$	220 V
Número de pares de polos	$n_p$	2
Velocidad nominal	$\omega_{rm,nom}$	1710rpm
Frecuencia nominal	$f_{s,nom}$	60 Hz
Resistencia del estator	$r_s$	0.435 $\Omega$
Resistencia del rotor referida al estator	$r'_r$	0.816 $\Omega$
Reactancia del estator	$X_{ls}$	0.754 $\Omega$
Reactancia del rotor referida al estator	$X'_{lr}$	0.754 $\Omega$
Reactancia de magnetización	$X_M$	26.13 $\Omega$
Momento de inercia	$J$	0.089 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Coefficiente de fricción viscosa	$B$	0
Par aplicado máximo	$\tau_L$	11.9 N · m

En las figuras 4.32 y 4.33 se muestra el comportamiento dinámico del voltaje de las celdas FV y el voltaje producido en el bus de CD, las cuales muestran el correcto funcionamiento del MPPT manteniendo un voltaje aproximado de 185 v. De igual manera el cambio del valor de la carga adicional  $R_{cd}$  funciona para regular el voltaje de cd a 360 v, el cual produce una elevación en el voltaje en  $t=7$  subiéndolo nuevamente a 360 el cual es el mínimo requerido por el motor.

En las figuras 4.34 y 4.35 se muestra la comparativa de las corrientes en coordenadas qd0 del estator, en donde el sistema al llegar a la parte estacionaria mantiene un valor de corriente constante, las oscilaciones producidas se deben a la diferencia de velocidades angulares entre la parte eléctrica y la parte mecánica del modelo.

Figura 4.32: a) Comparación de los voltajes FV  $v_{c1}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.33: a) Comparación de los voltajes del bus  $v_{c2}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

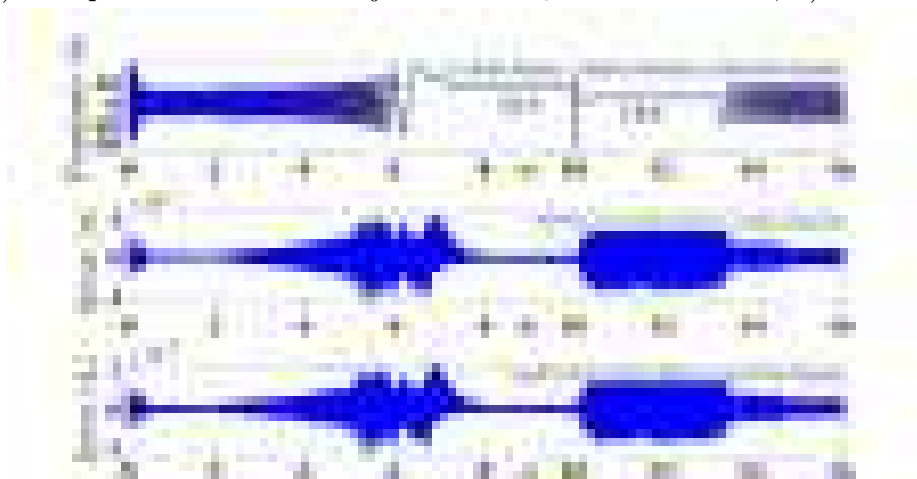


Figura 4.34: a) Comparación de las corrientes  $i_{qs}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.35: a) Comparación de las corrientes  $i_{ds}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

En las figuras 4.36 y 4.37 se muestran las corrientes en coordenadas qd0 del rotor, el cual muestra un comportamiento similar a las corrientes del estator llegando a un valor constante e invariante en el tiempo. Cuando la irradiancia cambia en  $t=10$  se produce un pico en la corriente y nuevamente llega a un valor constante.

En la figura 4.38 se visualiza la dinámica de la velocidad mecánica del motor en la cual se generan tres cambios de velocidad debido a los cambios de irradiancia de  $1000 \frac{W}{m^2}$  en  $t=0$ ,  $800 \frac{W}{m^2}$  en  $t=10$  y  $700 \frac{W}{m^2}$  en  $t=14.5$ . Se demuestra que el comportamiento de la velocidad es el esperado, ya que coincide con la velocidad de referencia del control  $v/f$ .



Figura 4.36: a) Comparación de las corrientes  $i_{qr}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

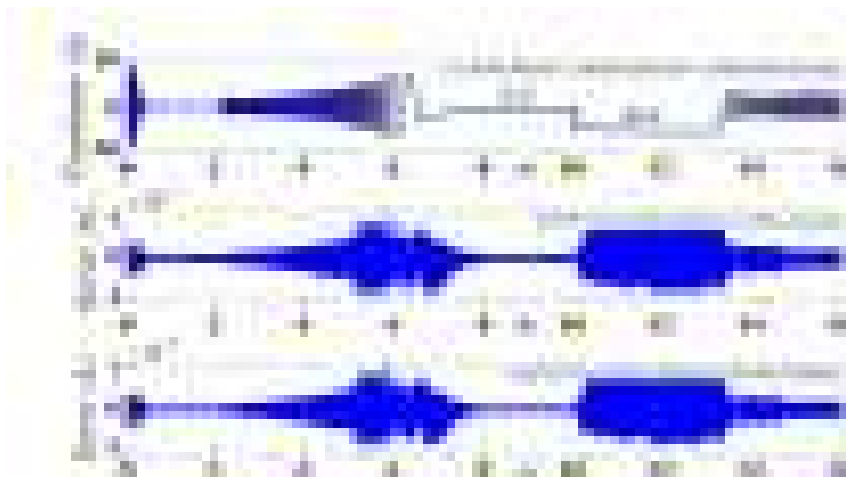


Figura 4.37: a) Comparación de las corrientes  $i_{dr}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.38: a) Comparación de la velocidad mecánica  $\omega_{rm}$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

En la figura 4.39 se representa el comportamiento del par electromagnético generado por el motor, el cual se demuestra que el par es el esperado ya que coincide con el par externo aplicado al motor de inducción, además, se visualiza que ante cambios bruscos de irradiancia el par electromagnético produce un pico bastante grande, sin embargo, después llega a su valor requerido.

En la figura 4.40 se muestra la dinámica del caudal bombeado, dando diferentes resultados ante diferentes velocidades manteniendo una eficiencia constante del 52 % y una altura requerida de 8 m.

Finalmente en la figura 4.41 se muestra la variación de la potencia hidráulica producida por la bomba y se valida que variando la velocidad la potencia demandada por el sistema es menor tal como se visualiza en los valores de potencia de  $t=7$ ,  $t=10$  y  $t=14.5$  se observa una gran disminución de potencia debido a que se considera una eficiencia de la bomba del 52 %.



Figura 4.39: a) Comparación del par electromagnético  $\tau_e$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.40: a) Comparación del caudal bombeado  $Q_b$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .



Figura 4.41: a) Comparación de la potencia hidráulica  $P_h$  de los modelos, b) Error  $e_t$ , c) Error  $e_{EL}$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

Se llevaron a cabo dos técnicas de modelado matemático, una por método tradicional utilizando las leyes físicas y otra por enfoque energético Euler-Lagrange para un sistema compuesto por una bomba centrífuga, un motor de inducción trifásico tipo jaula de ardilla, un inversor, un convertidor CD/CD boost y un sistema FV. Estos modelos se validaron por separado bajo simulación, comparándolos contra un modelo a bloques de Simulink.

Los modelos de las celdas FV junto con el convertidor boost demuestran una descripción y funcionamiento correcto del subsistema, al utilizar un MPPT y se demostró que el voltaje de las celdas se mantiene en su nivel máximo correspondiente a cada nivel de irradiancia, lo que permite un mayor aprovechamiento de la energía producida por los paneles, además las señales de error entre los modelos matemáticos con el modelo a bloques toman valores cercanos a cero. Ante menor irradiancia, el voltaje de las celdas va a ser menor, por lo anterior, el convertidor boost permite que las celdas FV trabajen incluso con valores de irradiancia menores a 1000 debido a la elevación que este produce.

El modelo matemático del inversor funciona de manera correcta, creando un voltaje cuadrado que oscila entre  $-360v$  y  $360v$  el cual es el voltaje de CD que alimenta al inversor trifásico y un  $v_{rms}$  de  $220v$ . De la misma manera el modelo describe adecuadamente al inversor, validando la precisión del modelo matemático.

Los modelos matemáticos del motor de inducción tanto en coordenadas abc, como en coordenadas qd0 generan el par de carga necesario para satisfacer la carga mecánica ante valores nominales del motor, además de que la amplitud de las corrientes calculadas mediante los modelos son iguales a las corrientes de la fuente de CA, validando el correcto funcionamiento de este subsistema y una adecuada descripción por parte de los modelos matemáticos. De igual forma las corrientes generadas por los modelos en qd0 se comportan conforme a lo esperado, quitando la dependencia de la forma de onda senoidal y dejando valores de corrientes constantes.

Se diseñó un control voltaje/frecuencia, el cual regula la velocidad de manera adecuada, provocando un arranque suave al sistema y permitiendo un menor consumo de potencia por parte de la bomba al variar la velocidad.

Se validó una descripción correcta del modelo matemático de la bomba centrífuga, validándose en una comparativa entre las curvas características obtenidas mediante aproximaciones polinomiales y leyes de afinidad y el modelo matemático, dando como resultado un mismo caudal para una altura de 8 m. Se observó que a mayor velocidad es mayor el caudal y la potencia hidráulica, mientras que la eficiencia se mantiene constante en 52 %.

La integración de los modelos matemáticos obtenidos en el presente trabajo muestra una correcta descripción del sistema de bombeo alimentado por sistema FV, produciendo unas señales de error muy pequeñas y obteniendo las respuestas esperadas de las variables controladas.

Se demostró que al variar la velocidad con el variador de frecuencia (VFD, por sus siglas en inglés) permite al sistema trabajar hasta con una irradiancia de  $700 \frac{W}{m^2}$ , debido a que la potencia consumida por el sistema de bombeo es menor, lo que conlleva a un aprovechamiento mayor de la tecnología FV en este tipo de sistemas de electrónica de potencia.

Por lo anterior sería interesante analizar los modelos obtenidos con un sistema de almacenamiento y con el sistema de tuberías integrado.

Se sometió un artículo en el Congreso Nacional de Control Automático (CNCA 2023), en el cual se abordó la integración de los modelos obtenidos limitados hasta la etapa del modelo del motor de inducción, el cual fue aceptado y presentado.

# Bibliografía

- Abella, M. A. and Romero, F. (2009). Sistemas de bombeo fotovoltaico. Master's thesis, CIEMAT.
- Acosta Calderon, J. A. (2020). Estudio para la integración de energía fotovoltaica en sistemas de riego en cultivos cítricos para la reducción de consumo energético en girón. Master's thesis, UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BUCARAMANGA.
- Agnello, A. (2021). Evaluación por simulación de controlador aplicado a proceso de separación e impulsión de hidrocarburos líquidos. Master's thesis, Universidad Tecnológica Nacional.
- Ahonen, T. (2011). *MONITORING OF CENTRIFUGAL PUMP OPERATION BY FREQUENCY CONVERTER*. PhD thesis, Lappeenranta University of Technology.
- Angadi, S., Yaragatti, U. R., Suresh, Y., and Raju, A. B. (2021). Comprehensive review on solar, wind and hybrid wind-pv water pumping systems-an electrical engineering perspective. *CPSS Transactions on Power Electronics and Applications*, 6(1):1–19.
- Arteaga, J. (2019). Implementación de la técnica perturbar y observar para el seguimiento del punto de máxima potencia ante sombreado parcial. Master's thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Batzelis, E. and Papathanassiou, S. A. (2015). A method for the analytical extraction of the single-diode pv model parameters. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 7(2):504–512.
- Beristáin, J. A. and Pérez, J. (2022). Convertidor bidireccional cd-ca trifásico con aislamiento en alta frecuencia: modelado utilizando funciones de conmutación. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 19(2):199–209.
- Blanco, E., Velarde, S., and Fernández, J. (1994). *Sistemas de Bombeo*. UNIVERSIDAD DE OVIEDO E. T. S. INGENIEROS INDUSTRIALES DEPARTAMENTO DE ENERGÍA.
- Chapman, S. (2012). *Máquinas Eléctricas*. Mc Graw Hill.
- Chilundo, R. J., Mahanjane, U. S., and Neves, D. (2018). Design and performance of photovoltaic water pumping systems: Comprehensive review towards a renewable strategy for mozambique. *Journal of Power and Energy Engineering*, 06(07):32–63.
- Chy, D., Khaliluzzaman, M., and Islam, M. (2015). Comparative experimental analysis with and without proposed algorithm for mppt using a dc-dc converter for pv array. *Asian Journal of Engineering and Technology*, 3:80–90.



- Crane (2009). *Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías*. McGraw-Hill Interamericana.
- Creutzig, F., Agoston, P., Goldschmidt, J. C., Luderer, G., Nemet, G., and Pietzcker, R. C. (2017). The underestimated potential of solar energy to mitigate climate change. *Nature Energy*, 2(9).
- Durango, J., Ordoñez, J., and L.F., M. (2017). Diseño y construcción de un convertidor dc/dc tipo boost con pwm ajustable. *Scientia Et Technica*.
- Elgharbi, A., Mezghani, D., and Mami, A. (2019). Intelligent control of a photovoltaic pumping system. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 9(5):4689–4694.
- Errouha, M., Derouich, A., Motahhir, S., and Zamzoum, O. (2020). Optimal control of induction motor for photovoltaic water pumping system. *Technology and Economics of Smart Grids and Sustainable Energy*, 5(1).
- Farhat, M., Barambones, O., Fleh, A., and Sbita, L. (2016). Variable structure MPP controller for photovoltaic pumping system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 39(9):1283–1292.
- Franco, M. I. A. et al. (2020). Estado del arte de sistemas de abastecimiento de agua potable en zonas rurales dispersas:¿ hacia dónde va el desarrollo tecnológico? Master's thesis, Uniandes.
- García, J., Bermudez, R., and Barbosa, J. (2013). Modeling and simulation of a centrifugal pump with single phase motor in simulink. *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzad*.
- Giménez Pérez, A. (2016). *DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN CONVERTIDORFLYBACK PARA UN SISTEMA FOTOVOLTAICO*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia.
- González, M. A., Cárdenas, V. M., and Álvarez, R. (2019). Inversores inteligentes en sistemas de energía solar fotovoltaica. *Universitarios Potosinos*, 16(238):24–29.
- Goppelt, F., Hieninger, T., and Schmidt-Vollus, R. (2018). Modeling centrifugal pump systems from a system-theoretical point of view. *2018 18th International Conference on Mechatronics-Mechatronika (ME)*.
- González, E. (2008). Sistema fotovoltaico con mínimo almacenamiento deenergía en el enlace de cd. Master's thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.
- Hamad, S., Ali, A., and Basarab, G. (2016). Dynamic modeling of pump drive system utilizing simulink/matlab program. *International Research Journal of Engineering and Technology*.
- Hamrouni, N., Jraid, M., and Adnene, C. (2009). Theoretical and experimental analysis of the behaviour of a photovoltaic pumping system. *Solar Energy*.
- Hart, D. and Barrado, A. (2001). *Electrónica de potencia*. Prentice Hall Madrid, España.
- Hassan, A., Sadiku, M., and Abood, S. (2019). *Fundamentals of electric machines: a primer with MATLAB: A primer with MATLAB*. CRC Press.

- Hernández, I. V., Guerrero, G., García, C., Adam, M., Torres del carmen, F., and Ortíz, E. (2019). Modelado del motor de inducción en la formulación euler-lagrange considerando las pérdidas del núcleo. *AMCA*.
- Ibrahim, H. and Anani, N. (2017). Variations of pv module parameters with irradiance and temperature. *Energy Procedia*, 134:276–285.
- Ishaque, K., Salam, Z., and Taheri, H. (2011). Accurate matlab simulink pv system simulator based on a two-diode model. *Journal of power electronics*, 11(2):179–187.
- Kabir, E., Kumar, P., Kumar, S., Adelodun, A. A., and Kim, K.-H. (2018). Solar energy: Potential and future prospects. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 82:894–900.
- Korsell, L. and Ydén, T. (2021). *Control Design for an Energy-Sharing Module of Next-Generation Thermal Energy System ectogrid*. PhD thesis, Lund University, Department of automatic control.
- Krause, P., Wasynezuk, O., Sudhoff, S., and Pekarek, S. (2013). *Analysis of electric machinery and drive systems*. John Wiley Sons.
- Lee, T.-S. (2004). Lagrangian modeling and passivity-based control of three-phase AC/DC voltage-source converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 51(4):892–902.
- Lescas, R. (2017). Control de velocidad de un motor de inducción trifásico alimentado vía paneles fotovoltaicos. Master's thesis, Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- ŁUKASIK, Z. (2018). The mathematical model of the drive system with asynchronous motor and vertical pump. *PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY*, 1(1):135–140.
- Mahjoubi, A., Mechlouch, R., and Brahim, A. (2010). Economic viability of photovoltaic water pumping systems in the desert of tunisia.
- Malla, S., Bhende, C., and Mishra, S. (2011). Photovoltaic based water pumping system. *International Conference on Energy, Automation and Signal*.
- Marfoli, A., Nardo, M. D., Degano, M., Gerada, C., and Chen, W. (2021). Rotor design optimization of squirrel cage induction motor - part i: Problem statement. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 36(2):1271–1279.
- Martin, I., Salcedo, R., and Font, R. (2011). Mecánica de fluidos: Tema 2: Impulsión de fluidos.
- Martinez, A. (2023). *Sistema de Aire Acondicionado Alimentado por Energía Solar Fotovoltaica y la Red Eléctrica*. PhD thesis, CENIDET.
- Martinez, A., Guerrero, G. V., Calleja, J., Guerrero, E., Adam, M., Aguilar, C., and Aguayo, J. (2023). Modeling and control of an air conditioner powered by pv energy and the grid using a dc microgrid. *Processes*, 11(5):1547.
- Martínez (2020). Modelado y control de convertidores de potencia. Master's thesis, Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital.

- Medina, J. (2018). *Diseño en Matlab de un convertidor P.W.M.* PhD thesis, UNIVERSIDAD DE VALLADOLID.
- Mott, R. (2006). *Mecánica de fluidos*. Pearson Education.
- Muralidhar, K. and Rajasekar, N. (2021). A review of various components of solar water-pumping system: Configuration, characteristics, and performance. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 31(9).
- Ortiz, G. N., Algarín, C. R., Pérez, J. T., Castro, A. O., and Lengua, A. M. (2020). Evaluación del desempeño de los modelos de un diodo y dos diodos para módulos fotovoltaicos. *Revista ESPACIOS. ISSN*, 798:1015.
- Othomani, H., Sassi, F., Mezghani, D., and Mami, A. (2017). Fuzzy optimization of a photovoltaic pumping system: Implementation and measurements. *International Journal of Renewable Energy Research*, 7.
- Ouachani, I., Rabhi, A., Tidhaf, B., Zouggar, S., and Elhajjaji, A. (2013). Optimization and control for a photovoltaic pumping system. In *2013 International Conference on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA)*. IEEE.
- Pantaleo, M. (2007). Conceptos sobre fuentes conmutadas. Technical report, Facultad de Ingeniería, Área Departamental Electrotecnia, Universidad Nacional de La Plata.
- Paramo-Balsa, P., Roldan-Fernandez, J. M., Gonzalez-Longatt, F., and Burgos-Payan, M. (2022). Measurement of the speed of induction motors based on vibration with a smartphone. *Applied Sciences*, 12(7):3371.
- Pardo, M. and Tobón, G. (2004). Potencia reactiva en los motores de inducción. *Energía y computación*.
- Periasamy, P., Jain, N., and I.P, S. (2015). A review on development of photovoltaic water pumping system. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*.
- Páramo, B. (2010). *Modelado y simulación del motor de inducción incluyendo la saturación*. PhD thesis, Universidad de Sevilla.
- Rafika, E. I., Abbou, A., Mohcine, M., and Salimi, M. (2018). A comparative study of mppt controllers for photovoltaic pumping system. pages 1–6. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Rashid, M. (2015). *Electrónica de potencia*. Pearson Educación.
- Sepúlveda, N. (2022). *Caracterización y modelado de un sistema de bombeo solar*. PhD thesis, Universidad de los andes.
- Singh, B., Verma, A., , and Shahani, D. (2013). Grid interfaced solar photovoltaic power generating system with power quality improvement at ac mains. In *2012 IEEE Third International Conference on Sustainable Energy Technologies (ICSET)*, pages 177–182. IEEE.

- Singh, S. and Singh, B. (2015). Solar pv water pumping system with dc-link voltage regulation. *International Journal of Power Electronics*.
- Trujillo, C., Velazco de la fuente, D., Figueres, E., Garcerá, G., and Guacaneme, J. (2012). Diseño, modelado e implementación de inversor conectado a la red eléctrica a partir de fuentes renovables. *Tecnura*.
- Trzynadlowski, A. M. (2016). *Introduction to modern power electronics*. John Wiley Sons.
- Valenzuela, B. (2020). *Determinación del punto de máxima potencia en sistemas de bombeo solar fotovoltaico utilizando el algoritmo perturbación observación PO*. PhD thesis, Universidad Politécnica Salesina sede Quito.
- Vargas, W. M. R., Layedra, N. D. P. B., Nogales, J. M. M., and Gusnay, J. C. (2019). Análisis de armónicos de un motor trifásico mediante transformadas integrales para analizar fallas de funcionamiento. *Ciencia Digital*.
- Villegas, M. L. et al. (2018). Instalación de sistema de bombeo fotovoltaico para riego en terreno cultivable.
- Wang, J., Xia, P., and Zhang, J. (2008). Control strategy of three-phase AC/DC voltage-source converters based on storage function. In *2008 Workshop on Power Electronics and Intelligent Transportation System*. IEEE.
- Yeşil, B. and Şahin, S. (2022). Feedback linearization based flow rate control for centrifugal pump in coupled-tank water meter testing system. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*.

# Apéndice A

## Relación de impedancias

Partiendo del principio de la conservación de la potencia en el convertidor  $P_{in}=P_o$ , donde  $P_{in}$  es el punto de máxima potencia de los paneles FV. (MPP) y  $P_o$  es la potencia de salida en el convertidor elevador, se emplea la ley de ohm y se obtiene este principio de conservación en términos de las impedancias como la expresión (A.1).

$$\frac{v_{mp}^2}{z_{FV}} = \frac{v_o^2}{z_o} \quad (\text{A.1})$$

Donde:

- $v_{mp}$  Es el voltaje máximo de las celdas FV.
- $v_o$  Es el voltaje en la salida del convertidor.
- $z_{FV}$  Representa una impedancia implícita producida por los paneles FV.
- $z_o$  Es la resistencia de salida en el convertidor.

Despejando y dejando términos de voltajes de un lado y términos de impedancias por otro lado se obtiene:

$$\frac{v_{mp}^2}{v_o^2} = \frac{z_{FV}}{z_o} \quad (\text{A.2})$$

Retomando la ecuación característica del convertidor elevador (A.3) donde  $v_{in}$  es el voltaje de las celdas  $v_{mp}$  y despejando el término (1-d) se puede notar una relación de impedancias con el ciclo de trabajo al sustituir el término de voltajes de la Ec. (A.2) en (A.4) mostrado en la expresión (A.5).

$$v_o = \frac{v_{in}}{1-d} \quad (\text{A.3})$$

$$(1-d) = \frac{v_{in}}{v_o} = \frac{v_{mp}}{v_o} \quad (\text{A.4})$$

$$(1-d)^2 = \frac{z_{FV}}{z_o} \quad (\text{A.5})$$

Finalmente al despejar la Ec. (A.5) se obtiene el ciclo de trabajo en función de las impedancias visualizado en la Ec. (A.6).

$$d = 1 - \sqrt{\frac{z_{FV}}{z_o}} \quad (\text{A.6})$$

Cabe mencionar que la impedancia de las celdas FV.  $z_{FV}$  depende de la máxima potencia disponible de las celdas y se puede calcular utilizando la Ec. (A.7). Esta potencia varia en función de la irradiancia solar, por lo que al cambiar el valor de  $z_{FV}$  debido a la irradiancia, cambia el valor del ciclo de trabajo del convertidor.

$$z_{FV} = \frac{v_{mp}}{i_{mp}} \quad (\text{A.7})$$

Donde  $i_{mp}$  y  $v_{mp}$  son los valores máximos de corriente y voltaje de las celdas.

### Cálculo del ciclo de trabajo para diferentes valores de irradiancia

En este apartado, se calculan algunos valores de la impedancia de los paneles, así como el ciclo de trabajo obtenido utilizando los valores de la tabla 2.22(c) del escenario de simulación del convertidor elevador con el arreglo FV..

- Cuando la irradiancia es de  $400 \frac{W}{m^2}$ , un voltaje máximo de  $185.5v$  y una corriente máxima de  $6.63A$ .

$$z_{FV} = \frac{v_{mp}}{i_{mp}} = \frac{185.5}{6.63} = 27.98\Omega \quad (\text{A.8})$$

$$d = 1 - \sqrt{\frac{z_{FV}}{z_o}} = 1 - \sqrt{\frac{27.98}{42.26}} = 0.18 \quad (\text{A.9})$$

- Cuando la irradiancia es de  $600 \frac{W}{m^2}$  el voltaje máximo es de  $186.22v$  y la corriente máxima de  $9.95A$ .

$$z_{FV} = \frac{v_{mp}}{i_{mp}} = \frac{186.22}{9.95} = 18.71\Omega \quad (\text{A.10})$$

$$d = 1 - \sqrt{\frac{z_{FV}}{z_o}} = 1 - \sqrt{\frac{18.71}{42.26}} = 0.33 \quad (\text{A.11})$$

- Cuando la irradiancia es de  $800 \frac{W}{m^2}$ , El voltaje máximo es de  $186v$  y la corriente máxima de  $13.27A$ .

$$z_{FV} = \frac{v_{mp}}{i_{mp}} = \frac{186}{13.27} = 14.01\Omega \quad (\text{A.12})$$

$$d = 1 - \sqrt{\frac{z_{FV}}{z_o}} = 1 - \sqrt{\frac{14.01}{42.26}} = 0.42 \quad (\text{A.13})$$

- Finalmente, cuando la irradiancia alcanza los  $1000 \frac{W}{m^2}$ , el voltaje máximo producido es de  $185.54v$  y la corriente máxima de  $16.54A$ .

$$z_{FV} = \frac{v_{mp}}{i_{mp}} = \frac{185.54}{16.54} = 11.2\Omega \quad (\text{A.14})$$

$$d = 1 - \sqrt{\frac{z_{FV}}{z_o}} = 1 - \sqrt{\frac{11.2}{42.26}} = 0.48 \quad (\text{A.15})$$

# Apéndice B

## Fichas técnicas.

### B.1. Fichas técnicas de los paneles FV

<b>ELECTRICAL CHARACTERISTICS</b>				
Performance at STC: Irradiance, 1.000 W/m <sup>2</sup> ; cell temperature, 25° C; AM, 1.5				
	<b>ISF - 245</b>	<b>ISF - 250</b>	<b>ISF - 255</b>	<b>ISF - 260</b>
Rated Power (P <sub>max</sub> )	245 W	250 W	255 W	260 W
Open Circuit Voltage (V <sub>oc</sub> )	37,6 V	37,8 V	37,9 V	38,1 V
Short-circuit Current (I <sub>sc</sub> )	8,63 A	8,75 A	8,86 A	8,98 A
Maximum power point Voltage (V <sub>max</sub> )	30,5 V	30,6 V	30,9 V	31,1 V
Maximum power point Current (I <sub>max</sub> )	8,04 A	8,17 A	8,27 A	8,36 A
Efficiency	14,8 %	15,1 %	15,4 %	15,7 %
Power tolerance (% P <sub>max</sub> )	0/+3 %	0/+3 %	0/+3 %	0/+3 %
Performance at Irradiance 800 W/m <sup>2</sup> , NOCT, ambient temperature 20° C, AM 1.5; wind speed 1 m/s				
	<b>ISF - 245</b>	<b>ISF - 250</b>	<b>ISF - 255</b>	<b>ISF - 260</b>
Maximum Power (P <sub>max</sub> )	178 W	181 W	185 W	190 W
Open Circuit Voltage (V <sub>oc</sub> )	34,8 V	35,0 V	35,1 V	35,2 V
Short-circuit Current (I <sub>sc</sub> )	6,96 A	7,06 A	7,15 A	7,25 A
Maximum power point Voltage (V <sub>max</sub> )	27,4 V	27,5 V	27,7 V	28,1 V
Maximum power point Current (I <sub>max</sub> )	6,49 A	6,59 A	6,67 A	6,75 A
Efficiency reduction from 1.000 W/m <sup>2</sup> to 200 W/m <sup>2</sup> according to standard IEC 60904-1				5% (+/-3%)

Figura B.1: Ficha Técnica Módulo ISF-255.



## B.2. Ficha técnica de la bomba centrífuga.

MOTOR	
Tipo de Motor	Eléctrico
Marca del motor	Siemens/WEG
Potencia del Motor	3.00 HP
RPM del Motor	1750 RPM
Encendido	Eléctrico
Voltaje	220 / 440 V
Fases del motor	Trifásico
Corriente	7.8 / 3.91 A

BOMBA	
Tipo de Bomba	Centrífuga
Flujo Optimo	660.00 LPM
Altura Optima	12.00 m
Numero de etapas	1 etapas
Diametro de succion	3.00 pulg
Diametro de descarga	3.00 pulg
Tipo de impulsor	Cerrado
Material del cuerpo	Hierro Gris
Material del impulsor	Hierro Gris
Material del sello mecanico	Cerámica, carbón, acero inoxidable y/o buna
Temperatura Maxima del Agua	40 C

INFORMACION ADICIONAL	
Dimensiones de empaque	79.00 X 49.00 X 52.00 cm
Garantia	1 año
Peso	85.00 kg

Figura B.2: Ficha Técnica Bomba Centrífuga EVANS

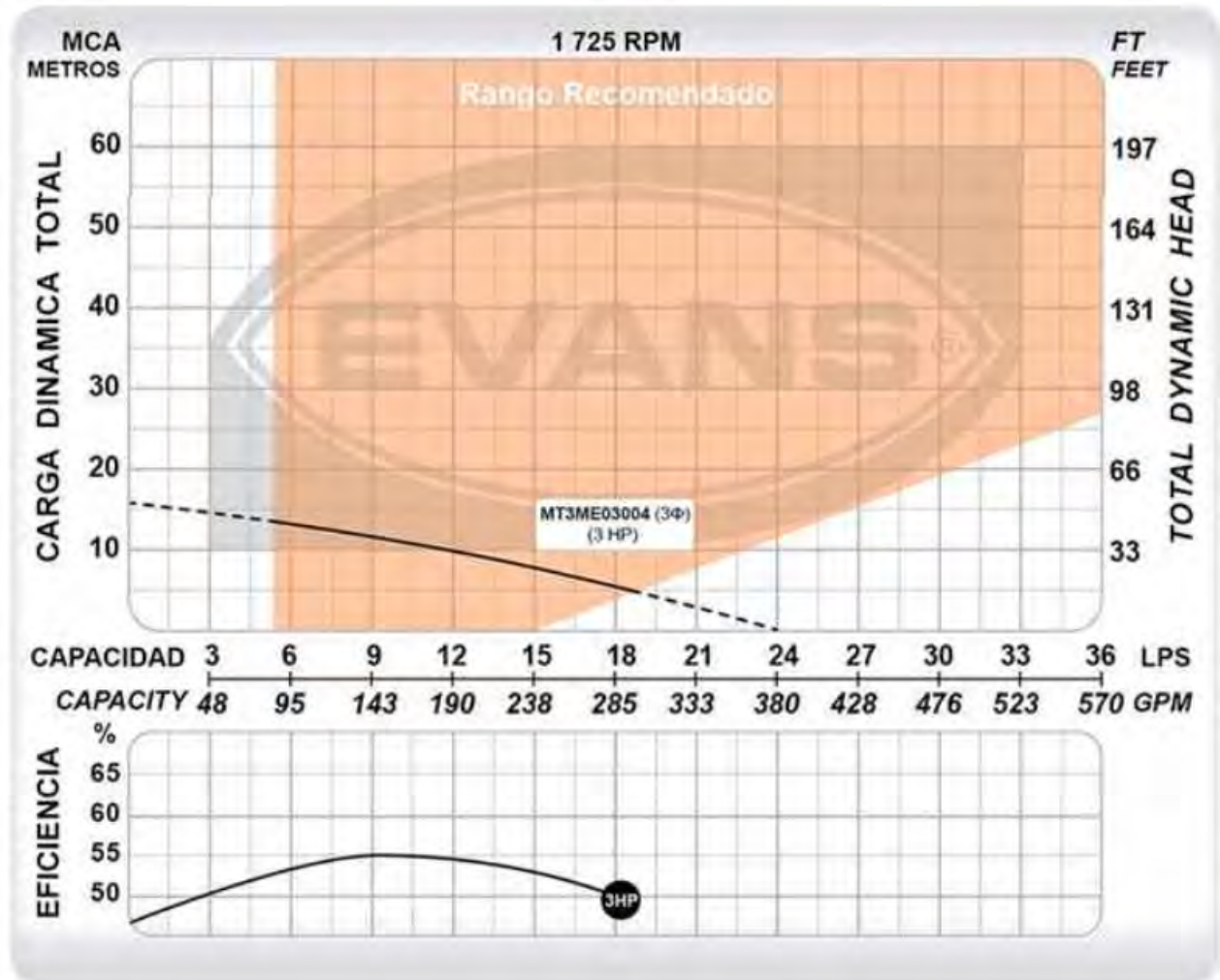


Figura B.3: Curva de rendimiento de la bomba proporcionada por el fabricante.

# Apéndice C

## Horas Solares Pico

Tabla C.1: Valores de HSP mensual.

Mes	HSP
Enero	4.56
Febrero	5.24
Marzo	5.56
Abril	5.94
Mayo	5.54
Junio	4.99
Julio	4.63
Agosto	4.47
Septiembre	4.68
Octubre	4.49
Noviembre	4.62
Diciembre	4.38

# Apéndice D

## Equilibrio de potencias

Una vez determinado el voltaje necesario en el bus de CD, es necesario calcular la resistencia de CD  $r_{cd}$  para obtener el voltaje requerido y generar un equilibrio entre la potencia de los paneles FV y la potencia de la resistencia de CD con la potencia del motor. La expresión que describe al equilibrio de potencias se muestra a continuación:

$$P_{mp} = P_{motor} + P_{RCD} \quad (D.1)$$

Donde:

- $P_{mp}$  Es el punto de máxima potencia de los paneles.
- $P_{motor}$  Es la potencia eléctrica del motor.
- $P_{RCD}$  Es la potencia en la carga adicional.

Los valores que ya se conocen es la potencia de las celdas FV. ( $P_{mp}$ ) y la potencia demandada por el motor ( $P_{motor}$ ). La potencia de las celdas es el punto de máxima potencia debido al MPPT, el cual tiene un valor de  $3066.51W$  y se conoce que la potencia mecánica del motor es de  $2237.1W$  obtener la potencia eléctrica se utiliza la Ec. (D.2).

$$P_{motor} = \frac{P_m}{\mu_{motor}} \quad (D.2)$$

La eficiencia a la que opera el motor es del 95 % por lo que al sustituir numéricamente se obtiene:

$$P_{motor} = \frac{2237.1W}{0.95} = 2440W \quad (D.3)$$

Sustituyendo por los valores conocidos y despejando la potencia en la resistencia de CD, se obtiene lo siguiente:

$$3066.51 = 2440W + P_{RCD} \quad (D.4)$$

$$3066.51W - 2440W = P_{RCD} \quad (D.5)$$

$$P_{RCD} = 626.08W \quad (D.6)$$

Ya conociendo la potencia necesaria en la resistencia, con el objetivo de lograr un equilibrio de potencias y mantener el voltaje de 360 V en el bus de CD, se utiliza la expresión (D.7), despejando  $R_{CD}$  y se reemplazando los valores conocidos se obtiene el resultado de la Ec. (D.9).

$$P_{R_{CD}} = \frac{v_{CD}^2}{R_{CD}} \quad (\text{D.7})$$

$$R_{CD} = \frac{v_{CD}^2}{P_{R_{CD}}} \quad (\text{D.8})$$

$$R_{CD} = \frac{(360v)^2}{626.08W} = 207\Omega \quad (\text{D.9})$$

Este es el valor de  $R_{CD}$  cuando el motor opera en su velocidad nominal. Con este valor se calcula el valor del ciclo de trabajo retomando la Ec. (A.6), obteniendo el resultado de la expresión (2.22(c)).

$$d = 1 - \sqrt{\frac{11.2}{207}} = 0.7 \quad (\text{D.10})$$

# Apéndice E

## Calculo de los parámetros del convertidor elevador

Con la finalidad de mejorar la salida de la señal en el convertidor se calcularon los parámetros de los capacitores  $C_{1,2}$  y del inductor  $L$ , donde se considera un rizo en la señal del 1% y un ciclo de trabajo de  $d = 0.73$  que viene con la relación de equilibrio de potencias entre las celdas FV y la carga  $R_{CD}$  con la potencia demandada por el motor.

Para calcular el valor del inductor se utiliza la Ec. (E.1), donde  $v_{in}$  es el voltaje de las celdas,  $d$  es el ciclo de trabajo,  $\Delta i_L$  es el valor de la corriente al porcentaje de rizado que se desea y  $f_s$  es la frecuencia a la que opera el convertidor.

$$L = \frac{v_{in}d}{\Delta i_L f_s} \quad (\text{E.1})$$

Se calcula  $\Delta i_L$  que es la corriente al 1%:

$$\Delta i_L = (0.01) (16.54 \text{ A}) = 0.1654 \text{ A} \quad (\text{E.2})$$

La frecuencia a la que opera el convertidor es de  $60 \text{ kHz}$ , el voltaje de las celdas es el voltaje máximo y la corriente  $i_L$  es la corriente máxima de las celdas, conociendo todo esto se sustituyen valores numéricos y se obtiene el valor del inductor:

$$L = \frac{(185.4 \text{ v}) (0.73)}{(0.1654 \text{ A}) (60,000 \text{ Hz})} = 0.0136 \text{ H} \quad (\text{E.3})$$

Para calcular el valor del bus de CD, se utiliza la expresión (E.4), donde  $v_o$  es el voltaje de salida del convertidor y  $\Delta v_o$  es el voltaje con un rizo del 1%.

$$C_2 = \frac{dv_o}{\Delta v_o f_s} \quad (\text{E.4})$$

Se calcula el voltaje con un rizo del 1 %:

$$(0.01) (360 \text{ v}) = 3.6 \text{ v} \quad (\text{E.5})$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene el valor del bus de CD:

$$C_2 = \frac{(0.73) (360 \text{ v})}{(3.6 \text{ v}) (60,000 \text{ Hz})} = 1.21 \times 10^{-3} \text{ F} \quad (\text{E.6})$$

Por último, para calcular el capacitor de las celdas FV se utiliza la Ec. (E.7), donde  $v_{mp}$  es el voltaje máximo de las celdas FV.,  $\Delta v_{mp}$  es el voltaje a un rizo del 1 %, la  $R$  es la impedancia de las celdas y  $f_s$  es la frecuencia del convertidor.

$$C_1 = \frac{dv_{mp}}{\Delta v_{mp} z_{FV} f_s} \quad (\text{E.7})$$

Se calcula el voltaje a un rizo de 1 %:

$$(0.01) (185.4 \text{ v}) = 1.854 \text{ v} \quad (\text{E.8})$$

Sustituyendo por sus valores, se obtiene:

$$C_1 = \frac{(0.73) (185.4 \text{ v})}{(1.854 \text{ v}) (11.2\Omega) (60,000 \text{ Hz})} = 1.086 \times 10^{-4} \text{ F} \quad (\text{E.9})$$