



**EDUCACIÓN**

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

# Tecnológico Nacional de México

Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico

## Tesis de Maestría

Diseño de un controlador para un péndulo H2AT  
basado en diferentes esquemas de observación

presentada por

**Ing. Ezequiel Dominguez Lagunas**

como requisito para la obtención del grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería  
Electrónica**

Directora de tesis

**Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo**

Cuernavaca, Morelos, México. Agosto de 2024.



Cuernavaca, Mor.,

No. de Oficio:

Asunto:

09/agosto/2024

DIE/112/2024

Aceptación de documentos de tesis

**DR. CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA**  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO  
PRESENTE

Por este conducto, los integrantes de Comité Tutorial del **C. EZEQUIEL DOMINGUEZ LAGUNAS**, con número de control **M22CE058** de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica, le informamos que hemos revisado el trabajo de tesis profesional titulado **“Diseño de un Controlador para un péndulo H2AT basado en diferentes esquemas de observación”**, y hemos encontrado que se han realizado todas las correcciones y observaciones que se le indicaron, por lo que hemos acordado aceptar el documento de tesis y le solicitamos la autorización de impresión definitiva.

DIRECTOR DE TESIS

Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo  
Doctora en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 9968714

REVISOR 1

Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez  
Doctor en Ciencias en Ingeniería Electrónica  
Cédula profesional 7534115

REVISOR 2

Dr. Juan Reyes Reyes  
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático  
Cédula profesional 4214833

C.p. M.T.I. María Elena Gómez Torres. Jefa del Departamento de Servicios Escolares  
Estudiante  
JGM/kmq





Cuernavaca, Mor.,  
No. De Oficio:  
Asunto:

12/agosto/2024  
SAC/235/2024  
Autorización de  
impresión de tesis

**EZEQUIEL DOMINGUEZ LAGUNAS  
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
P R E S E N T E**

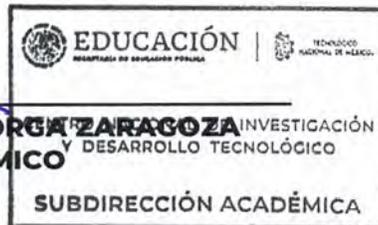
Por este conducto, tengo el agrado de comunicarle que el Comité Tutorial asignado a su trabajo de tesis titulado **“Diseño de un Controlador para un péndulo H2AT basado en diferentes esquemas de observación”**, ha informado a esta Subdirección Académica, que están de acuerdo con el trabajo presentado. Por lo anterior, se le autoriza a que proceda con la impresión definitiva de su trabajo de tesis.

Esperando que el logro del mismo sea acorde con sus aspiraciones profesionales, reciba un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®  
“Conocimiento y tecnología al servicio de México”*

**CARLOS MANUEL ASTORGA ZARAGOZA**  
SUBDIRECTOR ACADÉMICO



C. c. p. Departamento de Ingeniería Electrónica  
Departamento de Servicios Escolares

CMAZ/lmz



# Dedicatoria

“Llevo a cabo esta dedicatoria a Dios, mis padres, amigos, asesores y gente que me apoyaron cuando les necesite; por ello, muchas gracias a todos”.

# Agradecimientos

Antes que nada agradezco a Dios por haberme dado la sabiduría y paciencia para llevar a cabo este proyecto, así también por haberme brindado la calidad de padres que tengo, amigos y gente que me apoyo cuando más les necesite.

De igual forma quiero agradecer a mis padres Leticia Lagunas Arteaga y José Guadalupe Domínguez Brito por haberme permitido en primera lo que es el estudio, desde la educación básica hasta hoy en día que será el grado de maestro en ciencias, muchas gracias por todo el sacrificio que han hecho y siempre estaré eternamente agradecido por todo lo que me han dado, por ello no me queda más que decir, gracias.

Del mismo modo, le agradezco a mi asesora de tesis, la Dra. Gloria Lilia Osorio Gordillo, por su gran paciencia al momento de explicar las dudas que surgieran más de una ocasión, su amistad y sobre todo su disponibilidad para atender cualquier duda que surgiera y sobre todo gracias por cada consejo y compromiso que tuvo debido a que me ayudo a superarme y superar mis límites día a día.

A mi hermano Emmanuel Domínguez Lagunas y a mis amigos que me acompañaron a lo largo de esta gran travesía: Alexis Villegas, Mauricio Islas, Melchor, René, Berny, Aaron, Angel Guadarrama, Yusef, Elker, Victor Salinas, Mr. Arturo, Enrique, Ana, Alejandra, Juan, Isay, Isai, Ismael, Oscar, Erick, Arturo, Jorge, Dryden, Elias, Inri, Rossel, Alejandro y demás amigos que me hicieron cada día mejor con algún consejo o carcajada. Por ello les agradezco mucho todo lo aportado este tiempo y su amistad brindada.

A mis revisores: Dr. Ricardo Fabricio Escobar Jiménez y el Dr. Juan Reyes Reyes por sus co-

mentarios y observaciones que ayudaron a consolidar este trabajo de tesis.

A cada uno de mis profesores que ayudaron a mi preparación académica, Dr. Adam Medina, Dr. Carlos Astorga, Dr. José Gómez, Dr. Juan Reyes, Dr. Ricardo Fabricio, Dr. Gerardo Guerrero y Dr. Rodolfo Vargas.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico brindado durante este periodo para así poder culminar con mis estudios. Así también al CENIDET por permitirme ser parte de ellos y hacer uso del plantel.

# Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el diseño de un esquema de control con el objetivo de estabilizar la posición vertical de un péndulo H2AT (Head, 2 Arms and Trunk). Este sistema representa la dinámica inestable de una persona con lesión en la médula espinal del tipo completo el cual es una variación del péndulo invertido. Dicha representación no lineal del sistema se lleva a una representación Takagi-Sugeno (T-S) mediante el uso del enfoque de sector no lineal.

El esquema de control propuesto consta de dos etapas, la primera etapa aborda el diseño de un controlador por retroalimentación de estados mediante el uso de un observador proporcional integral (PI), con el propósito de regular la posición vertical del péndulo H2AT. Posteriormente se diseñó un observador funcional dinámico generalizado (GDOF). Dicho observador se encuentra enfocado en estimar una ley de control para sistemas Takagi-Sugeno con el fin de regular al sistema, con la definición de una ganancia deseada. Esto con el propósito de regular la posición vertical del péndulo H2AT.

Del mismo modo, se diseña un observador funcional dinámico generalizado para sistemas con entradas desconocidas (UIO), para estimar una entrada desconocida, dicha entrada desconocida representa la ley de control que regula la posición vertical del caso de estudio.

El análisis de estabilidad de los observadores se lleva a cabo utilizando el enfoque de estabilidad de Lyapunov mediante el uso de desigualdades matriciales lineales (LMI), además se utiliza el lema de eliminación con el fin de obtener una solución factible que permita mantener la estructura del observador funcional dinámico generalizado.

# Abstract

In this thesis paper presents the design of a control scheme aimed at stabilizing the vertical position of an H2AT pendulum (Head, 2 Arms and Trunk). This system represents the unstable dynamics of a person with complete spinal cord injury, which is a variation of the inverted pendulum. The nonlinear representation of this system is transformed into a Takagi-Sugeno (T-S) representation using the nonlinear sector approach.

The proposed control scheme consists of two stages. In the first stage, was design of a state feedback controller using a proportional-integral (PI) observer to regulate the vertical position of the H2AT pendulum. Subsequently, a generalized dynamic output feedback observer (GDOF) was designed. This observer is focused on estimating a control law for Takagi-Sugeno systems, aiming to regulate the system with a predefined gain. This is for the purpose of regulating the vertical position of the H2AT pendulum.

In the same way a generalized dynamic output feedback observer for systems with unknown inputs (UIO) was designed. However, in this case, the estimated unknown input represents the control law that drives the vertical position of the study.

The stability analysis of the observers is carried out using the Lyapunov stability approach, employing linear matrix inequalities (LMI). Additionally, the elimination lemma is utilized to obtain a feasible solution that preserves the structure of the generalized dynamic output feedback observer.

# Índice general

Índice general	VI
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XI
Nomenclatura	XIII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.2.1 Objetivo general . . . . .	3
1.2.2 Objetivos particulares . . . . .	3
1.3 Estudio del estado del arte . . . . .	3
1.3.1 Péndulo H2AT . . . . .	3
1.3.2 Sistemas Takagi-Sugeno . . . . .	4
1.3.3 Observador proporcional integral . . . . .	4
1.3.4 Observador funcional . . . . .	5
1.3.5 Observador funcional UIFO . . . . .	6
1.4 Alcances . . . . .	6
1.5 Originalidad . . . . .	7
1.6 Estructura del documento . . . . .	7
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>9</b>
2.1 Clasificación de péndulo . . . . .	9
2.1.1 Péndulo simple . . . . .	9

2.1.2	Péndulo invertido . . . . .	12
2.2	Lesión en la médula espinal . . . . .	14
2.2.1	Formulación Euler-Lagrange . . . . .	16
2.3	Teoría de sistemas Takagi-Sugeno . . . . .	17
2.3.1	Enfoque del sector no lineal . . . . .	19
2.3.2	Enfoque por linealización . . . . .	21
2.3.3	Observabilidad en los sistemas Takagi-Sugeno . . . . .	22
2.4	Observadores . . . . .	23
2.5	Observador funcional . . . . .	24
2.5.1	Regiones LMI . . . . .	26
2.6	Conclusiones del capítulo . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Representación T-S del péndulo H2AT</b>	<b>29</b>
3.1	Descripción del caso de estudio . . . . .	29
3.1.1	Formulación Euler-Lagrange . . . . .	31
3.2	Modelo no lineal del péndulo H2AT . . . . .	35
3.2.1	Simulación del sistema no lineal . . . . .	36
3.3	Representación Takagi-Sugeno del péndulo H2AT . . . . .	38
3.3.1	Simulación del sistema no lineal y del sistema Takagi-Sugeno . . . . .	41
3.4	Conclusiones del capítulo . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Control basado en el observador proporcional integral para sistemas Takagi-Sugeno del péndulo H2AT</b>	<b>44</b>
4.1	Objetivo de diseño . . . . .	44
4.2	Observador Proporcional integral . . . . .	44
4.2.1	Parametrización de las matrices del observador proporcional integral . . . . .	47
4.2.2	Análisis de estabilidad del observador . . . . .	48
4.2.3	Validación del observador proporcional integral . . . . .	49
4.2.4	Simulación del observador proporcional integral . . . . .	50
4.3	Diseño del controlador . . . . .	53
4.3.1	Objetivo del diseño del controlador . . . . .	53
4.3.2	Controlador por retroalimentación de estados . . . . .	53

4.3.3	Validación del controlador basado en el observador PI . . . . .	54
4.3.4	Simulación del controlador basado en el observador proporcional integral . . .	55
4.4	Conclusiones del capítulo . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Diseño del observador funcional para sistemas Takagi-Sugeno del péndulo H2AT</b>	<b>59</b>
5.1	Observador funcional (Estimación de una ley de control) . . . . .	60
5.1.1	Parametrización del observador funcional . . . . .	61
5.1.2	Análisis de estabilidad del observador funcional . . . . .	64
5.1.3	Validación del observador funcional . . . . .	65
5.1.4	Simulación del observador funcional . . . . .	66
5.2	Observador funcional (estimación de entrada desconocida) . . . . .	71
5.2.1	Validación del observador funcional de entradas desconocidas . . . . .	75
5.2.2	Simulación del observador funcional de entradas desconocidas . . . . .	75
5.2.3	Región LMI vertical aplicada al caso de estudio . . . . .	83
5.2.4	Región LMI circular aplicada al caso de estudio . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Conclusiones generales</b>	<b>100</b>
6.1	Trabajos futuros . . . . .	102
	<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Elección de actuador para el péndulo H2AT</b>	<b>108</b>

# Lista de figuras

2.1	Diagrama de un péndulo simple. . . . .	9
2.2	Péndulo invertido. . . . .	12
2.3	Diagrama cuerpo libre del péndulo invertido. . . . .	13
2.4	Diagrama general de un observador. . . . .	24
2.5	Enfoques del observador funcional. . . . .	25
2.6	Región LMI vertical $\mathcal{D}_1$ . . . . .	27
2.7	Región LMI circular $\mathcal{D}_2$ . . . . .	28
3.1	Diagrama del péndulo H2AT. . . . .	29
3.2	Restricciones del péndulo H2AT. . . . .	31
3.3	Respuesta de la posición y velocidad no lineal . . . . .	37
3.4	Respuesta de la posición y velocidad angular no lineal . . . . .	38
3.5	Respuesta de la posición y velocidad NL y T-S . . . . .	41
3.6	Respuesta de la posición y velocidad angular NL y T-S . . . . .	42
3.7	Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno . . . . .	42
4.1	Diagrama del observador PI. . . . .	49
4.2	Estimación de la posición y velocidad NL y T-S . . . . .	52
4.3	Estimación de la posición y velocidad angular NL y T-S . . . . .	52
4.4	Diagrama del controlador. . . . .	55
4.5	Señal de perturbación a la entrada . . . . .	56
4.6	Respuesta de la posición y velocidad . . . . .	56
4.7	Respuesta de la posición y velocidad angular . . . . .	57
4.8	Respuesta de la ley del control . . . . .	57
5.1	Primer enfoque del observador funcional. . . . .	59

5.2	Diagrama del primer enfoque observador funcional. . . . .	66
5.3	Señal de perturbación . . . . .	69
5.4	Incertidumbre en la masa 1. . . . .	69
5.5	Respuesta de la ley de control. . . . .	70
5.6	Respuesta de los estados de posición y velocidad. . . . .	70
5.7	Respuesta de los estados de posición y velocidad angular. . . . .	71
5.8	Segundo enfoque del observador funcional. . . . .	72
5.9	Diagrama del primer enfoque observador funcional. . . . .	75
5.10	Polos de la dinámica del error de estimación. . . . .	80
5.11	Incertidumbre en la masa 1. . . . .	81
5.12	Respuesta de la ley de control. . . . .	82
5.13	Comparación de la ley de control con región circular. . . . .	82
5.14	Polos de la dinámica de error de estimación con región LMI vertical. . . . .	88
5.15	Incertidumbre en la masa 1. . . . .	89
5.16	Respuesta de la ley de control con región LMI vertical. . . . .	90
5.17	Comparación de la ley de control con región LMI vertical. . . . .	90
5.18	Polos de la dinámica de error de estimación con región LMI circular. . . . .	97
5.19	Incertidumbre en la masa 1. . . . .	98
5.20	Respuesta de la ley de control con región LMI circular. . . . .	98
5.21	Comparación de la ley de control con LMI región circular. . . . .	99

# Lista de tablas

Tabla 2.1	Clasificación de lesiones. . . . .	15
Tabla 2.2	Escala ASIA . . . . .	15
Tabla 3.1	Parámetros del sistema. . . . .	31
Tabla 3.2	Restricciones del sistema. . . . .	31
Tabla 3.3	Valores máximos y mínimos. . . . .	39

# Notación y acrónimos

## Conjuntos

$\mathbb{R}$	Conjunto de todos los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vectores reales de dimensión $n$ ,
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjunto de vectores reales de dimensión $n \times n$ .
$\ a\ $	La norma Euclidiana de $a$ .

## Notación referente a vectores y matrices

$A > 0$	Matriz real $A$ simétrica positiva definida.
$A < 0$	Matriz real $A$ simétrica negativa definida.
$A^{-1}$	Inversa de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , $\det(A) \neq 0$ .
$A^T$	Transpuesta de la matriz $A$ .
$\det(A)$	Determinante de la matriz $A$ .
$\text{rank}(A)$	Rango de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .
$I$	Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
$0$	Matriz con elementos cero de dimensiones apropiadas.

## Sistema biomecánico

H2AT

$x_1(t)$

$x_2(t)$

$x_3(t)$

$x_4(t)$

$m_1$

$m_2$

$l_0$

$l_c$

$g$

$J$

$F(t)$

## Descripción

Head 2 Arms and Trunk.

Posición lineal.

Velocidad lineal.

Posición angular.

Velocidad angular.

Masa del segmento superior.

Masa del tronco.

Longitud del tronco.

Longitud del centro de masa.

Gravedad.

Inercia.

Fuerza controlada.

## Acrónimos

LMI	Desigualdad Matricial Lineal.
PI	Proporcional-Integral.
GDL	Grados de libertad.
T-S	Takagi-Sugeno.
GDO	Observador Dinámico Generalizado.
GDFO	Observador Funcional Dinámico. Generalizado.
UIFO	Observador Funcional de Entradas Desconocidas.
LTI	Lineal Invariante en el Tiempo.
ASIA	American Spinal Injury Association.

# Capítulo 1

## Introducción

Las lesiones debido a accidentes o caídas pueden propiciar una lesión en la médula espinal, esta clase de lesiones posee una clasificación dependiendo el grado y tipo de lesión, una lesión del tipo completo produce alteraciones tales como (Nayduch, 2011):

- Parálisis flácida de todos los músculos voluntarios.
- Desaparición de todos los reflejos modulares.
- Pérdida de la percepción dolorosa y la sensibilidad al roce ligero.
- Pérdida de la capacidad de sudoración.
- Disfunciones intestinal y vesical.

Por ello, es que han surgido distintas metodologías para atacar este problema, desde la rama de la medicina hasta la ingeniería. En la literatura se encuentran distintos trabajos abordando este problema, Cholewicki et al. (1999) desarrolló un modelo de presión intra-abdominal para generar estabilidad a la médula espinal, este modelo consiste en un péndulo invertido con resortes lineales que representan al abdomen y grupos de músculos espinales; este sistema fue simulado con pistones neumáticos. Otro trabajo que se encuentra en la literatura es el de Blandeau et al. (2016), el cual nos introduce un modelo para poder estabilizar la posición vertical para una persona con lesión completa en la médula espinal, dicho modelo es la variación de un péndulo invertido el cual lleva por nombre péndulo H2AT (Head 2 Arms and Trunk). Un modelo no lineal singular es obtenido por el desarrollo de ecuaciones Lagrangianas las cuales son escritas como un modelo del tipo

Takagi-Sugeno(T-S).

Del mismo modo, los observadores para sistemas de control son de gran importancia debido a que en frecuentemente no se cuenta con todas las variables de estado disponible para su medición, por ello, es que se requiere la estimación de las variables no disponibles. Sin embargo, el observador funcional posee dos enfoques, el cual es la estimación de estados o la estimación de una función lineal de los estados que representa la ley de control.

El trabajo de tesis se enfoca en el diseño de un observador funcional con estructura generalizada para la estimación de una ley de control y la estimación de una entrada desconocida para sistemas Takagi-Sugeno aplicado a un péndulo H2AT, el cual representa la dinámica de una persona con lesión en la médula espinal.

## 1.1. Planteamiento del problema

Hoy en día a nuestro alrededor existen una gama distinta de sistemas que se rigen por una dinámica no lineal, ya sean sistemas físicos, químicos, biológicos, etc. Una de las estrategias exploradas para tratar sistemas no lineales es el enfoque multi-modelos basado en la interpolación de modelos locales lineales. Esto debido a que los sistemas lineales están compuestos por ecuaciones diferenciales lineales y con ello es posible utilizar herramientas matemáticas y de control lineal.

Por otro lado, la lesión de la médula espinal es una condición que afecta a miles de personas en todo el país, limitando su movilidad y calidad de vida. La dinámica inestable de una persona con una lesión del tipo completo en la médula espinal puede ser representada mediante un péndulo H2AT. Por ello, el diseño de un sistema de control para este sistema debe ser capaz de englobar las consideraciones físicas que posee el cuerpo humano con el fin de regular el sistema bajo dichas circunstancias.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

Diseñar un control basado en un observador funcional dinámico generalizado utilizando el enfoque Takagi-Sugeno para estabilizar la posición vertical de un péndulo H2AT.

### 1.2.2. Objetivos particulares

- Establecer el modelo Takagi-Sugeno del caso de estudio utilizando el enfoque del sector no lineal.
- Diseñar control basado en un observador PI para estabilizar el péndulo H2AT.
- Diseñar un observador funcional dinámico generalizado para estimar una ley de control que estabilice el péndulo H2AT.
- Diseñar un observador funcional dinámico generalizado para estimar una entrada desconocida, la cual representa una ley de control que estabilice el péndulo H2AT.

## 1.3. Estudio del estado del arte

En esta sección se detalla el estado del arte relacionado al tema de tesis, un campo que se ha desarrollado en los últimos años. El objetivo principal es el ofrecer los distintos trabajos y avances de la literatura existente.

### 1.3.1. Péndulo H2AT

Una lesión en la médula espinal del tipo completa produce alteraciones tales como (Nayduch, 2011): Parálisis flácida de todos los músculos voluntarios, desaparición de todos los reflejos modulares, pérdida de la percepción dolorosa, de la sensibilidad al roce ligero y de la capacidad de sudoración.

Por ello, es que han surgido distintas metodologías para atacar este problema, desde la rama de la medicina hasta la ingeniería. En Cholewicki et al. (1999) se desarrolló una presión intra-abdominal para generar estabilidad a la médula espinal, este modelo consiste en un péndulo invertido con resortes lineales que representan al abdomen y grupos de músculos espinales. Otro trabajo que

se encuentra en la literatura es el de Blandeau et al. (2016) el cual nos introduce un modelo para poder estabilizar la posición vertical para una persona con lesión completa en la médula espinal, dicho modelo es la variación de un péndulo invertido el cual lleva por nombre péndulo H2AT.

Algunos trabajos que han utilizado este tipo de sistema son: En Pan et al. (2021) se desarrolló el diseño de un observador para la detección de fallas para el mismo sistema en el dominio de la frecuencia. De igual forma, en Blandeau et al. (2017) se llevó a cabo un observador de entradas desconocidas para estimar los estados y la ley de control, consideran el péndulo H2AT modelado en tiempo discreto para abordar el problema.

### **1.3.2. Sistemas Takagi-Sugeno**

Uno de los primeros artículos que se abordó para los sistemas T-S es el de Mátyás and Lendek (2021), en este trabajo se llevó a cabo el diseño de un observador con retardo para sistemas difusos Takagi-Sugeno, donde el tiempo de retardo y la derivada de este son conocidos. El caso de estudio para Chiu et al. (2021) es el péndulo invertido omnidireccional, el cual es controlado en base a un esquema difuso dual T-S. Este sistema cuenta con dos subsistemas, mecánico y eléctrico. Por último, en Nagy and Lendek (2019) se hace mención sobre el diseño de un controlador, para ello utilizan el modelo difuso Takagi-Sugeno para representar las no linealidades del sistema.

A su vez, las técnicas de sistemas Takagi-Sugeno también ha sido implementadas en sistemas como el péndulo H2AT, algunos trabajos que abordan ambos temas son: En Guerra et al. (2018) se desarrolló la estimación de estados no medibles para sistemas continuos no lineales, además se llevó a cabo la observación de sistemas con variables premisas no medibles, garantizando el nivel de atenuación ante perturbaciones. Por otro lado, en Blandeau et al. (2018) se abordó un sistema de control para personas con lesión en la médula espinal, el cual permite utilizar la forma no lineal singular y el modelado Takagi-Sugeno. Esto con el fin de estimar mediante un observador de entradas desconocidas (UIO) la fuerza que regula la posición del sistema.

### **1.3.3. Observador proporcional integral**

Algunos trabajos que han abordado el observador proporcional integral se muestran a continuación: en Zhao et al. (2021) se llevó a cabo el desarrollo de un observador proporcional integral (PIO) para

la estimación de estados utilizando el enfoque  $H_\infty$  con una red neuronal recurrente (RNN). En Wu et al. (2020) se desarrolló una configuración de un sistema de control lineal, el cual permite tener un rendimiento capaz de rechazar perturbaciones, validado en un ejemplo numérico. Por último, en Jiménez-Gómez and Osorio-Gordillo (2022) se utilizó un observador proporcional integral de orden completo con el objetivo de estimar los estados no medibles del sistema, aplicando este observador a un robot rehabilitador de rodilla.

En Youssfi et al. (2019) se desarrolló un control tolerante a fallas para un vehículo lateral utilizando la aproximación por modelo Takagi-Sugeno, se abordó una falla en el actuador. Del mismo modo, en You et al. (2020) se llevó a cabo el diseño de un observador proporcional integral para la estimación de fallas en el sensor y actuador, utilizando el enfoque de  $H_\infty$  esto aplicado a un ejemplo numérico. Por último, en Xinyan and Shiya (2019) se diseñó un observador proporcional integral para la estimación robusta con intervalos de retardos, y fallas. Considerando fallas en el sensor, en el actuador y perturbaciones externas.

### 1.3.4. Observador funcional

El observador funcional es una herramienta importante en el campo del control automático. El primer trabajo de Xie et al. (2020) se llevó a cabo el diseño de un control basado en el observador funcional para sistemas T-S con variables premisas no medibles y ruido externo. Por otro lado en Zhao et al. (2020) se presentó la estimación de estados y entradas desconocidas de sistemas difusos T-S. Utilizaron un vector aumentado conteniendo el vector de estados y la entrada desconocida y utilizando el enfoque  $H_\infty$  para la detección de fallas aplicado a un circuito de diodo y la detección de fallas para un reactor de tanques continuamente agitados.

En Khadhraoui and Messaoud (2020) se desarrolló el diseño de un observador funcional para sistemas singulares que cuenta con un retardo, este retardo se encuentra en el vector de estados y en la entrada, la efectividad del observador se demuestra mediante un ejemplo numérico. De igual manera en Naami et al. (2019) se presentó el diseño de un observador funcional para sistemas difusos T-S con un tiempo de retardo constante y uno variante en el tiempo.

Por último, en Flores-Martínez et al. (2019) se presentó un algoritmo para el diseño de un observador funcional dinámico generalizado para sistemas T-S, el ejemplo muestra la efectividad de lo

desarrollado es un sistema de glucosa-insulina. Mientras que en Guadarrama-Estrada and Osorio-Gordillo (2019) se llevó a cabo el diseño de una estrategia de control utilizando un observador funcional discreto, el cual estima las variables de estados no medibles del sistema. El desarrollo propuesto es evaluado en un brazo robótico de 2 GDL (Grados De Libertad).

### 1.3.5. Observador funcional UIFO

En Naami et al. (2022) se desarrolló un observador funcional de entrada desconocida (UIFO) de orden mínimo para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI), utilizando la ecuación clásica de Sylvester para obtener un observador de entrada desconocida de orden mínimo y estable, el cual fue aplicado en un ejemplo numérico. Por otro lado, en Tunga et al. (2023) se diseñó un observador funcional de entradas desconocidas para sistemas singulares lineales invariantes en el tiempo, esto fue aplicado a un circuito eléctrico con el fin de estimar el voltaje de entrada, el cual es desconocido.

Del mismo modo, en Jiancheng Zhang and Wang (2022) se llevó a cabo el diseño de un observador funcional de entradas desconocidas para sistemas lineales descriptor, esto fue aplicado a un circuito electrónico. En Mabrouki and Abbassi (2020) se diseñó un observador funcional de entradas desconocidas para sistemas con retardo en presencia de perturbaciones. Se consideró un par de retardos, uno constante y otro variable, ambos conocidos; la ganancia del observador es obtenida implementando la técnica de  $H_\infty$ , esto se verifica en un ejemplo numérico. Por último, en Hamzaoui et al. (2020) se diseñó un observador funcional con entradas desconocidas para sistemas discretos, con el fin de estimar una función de los estados y la entrada desconocida, un ejemplo numérico es utilizado para validar lo obtenido.

## 1.4. Alcances

- La obtención del diseño de un observador funcional dinámico generalizado para sistemas Takagi-Sugeno con el objetivo de estimar una ley de control que regule la posición vertical del péndulo H2AT.
- La realización del diseño de un observador funcional dinámico generalizado para sistemas Takagi-Sugeno con el propósito de estimar de un vector extendido una entrada desconocida que regule la posición vertical del péndulo H2AT.

- Evaluar el desempeño de los observadores funcionales dinámico generalizado mediante una simulación en base al programa Matlab versión 2018b.

## 1.5. Originalidad

En el trabajo de tesis presentado se desarrolló un observador funcional dinámico generalizado aplicado a sistemas Takagi-Sugeno para la estimación de una ley de control, evaluando dicha ley de control ante una perturbación en la entrada y una incertidumbre paramétrica.

Del mismo modo, se desarrolló un observador funcional dinámico generalizado que estima una entrada desconocida de un vector aumentado del vector de estados para sistemas Takagi-Sugeno, con el propósito de que la entrada desconocida regule la posición vertical de acuerdo a la estimación obtenida por el observador funcional.

## 1.6. Estructura del documento

El trabajo de investigación se encuentra dividido en 6 capítulos:

El Capítulo 1 se establece el objetivo general y sus objetivos específicos para el tema de tesis, del mismo modo se muestran los antecedentes, la justificación y originalidad que se desarrollan en la teoría de control y el estado del arte referente al tema de tesis.

En el Capítulo 2 se muestran los conceptos y definiciones importantes relacionados al caso de estudio que es el péndulo H2AT y lesiones en la médula espinal. Además, se aborda la teoría del modelado de sistemas Takagi-Sugeno, explicando sus dos enfoques que son la linealización y el sector no lineal, así como las propiedades de los sistemas Takagi-Sugeno. A su vez se detalla la teoría de observadores y sus clasificaciones. Posteriormente se explica la teoría del observador funcional dinámico generalizado abordando los dos enfoques que posee esta clase de observador.

En el Capítulo 3, se muestra el desarrollo del modelo no lineal con el objetivo de identificar las no linealidades del sistema. Una vez mostrado el comportamiento del sistema no lineal e identificado sus no linealidades de este, se presenta el desarrollo del modelado de sistemas Takagi-Sugeno uti-

lizando el enfoque del sector no lineal, evaluando así el modelo T-S respecto al modelo no lineal del caso de estudio.

En el Capítulo 4 se desarrolló un control basado en el observador proporcional integral para sistemas Takagi-Sugeno esto aplicado al péndulo H2AT para verificar la estabilidad del sistema se contempla una perturbación a la entrada del sistema.

En el Capítulo 5 se presenta el diseño de observador funcional para sistemas Takagi-Sugeno, esto aplicado al péndulo H2AT. El diseño del observador se utilizan los dos enfoques de éste, por que se presenta la estimación de una ley de control que regule el sistema y la estimación de una entrada desconocida del vector de estados extendido.

Por último, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales y particulares del trabajo de tesis, así como los trabajos futuros que se pueden llevar a cabo a partir de este trabajo de investigación.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Clasificación de péndulo

#### 2.1.1. Péndulo simple

El péndulo es un cuerpo suspendido desde un punto fijo con el propósito de que éste pueda oscilar de acuerdo a la influencia de la gravedad. Esta clase de sistemas es uno de los más básicos y útiles en la física debido a que introducen conceptos de dinámica, energía y movimiento simple armónico. En la Figura 2.1 se muestra el diagrama de un péndulo simple.

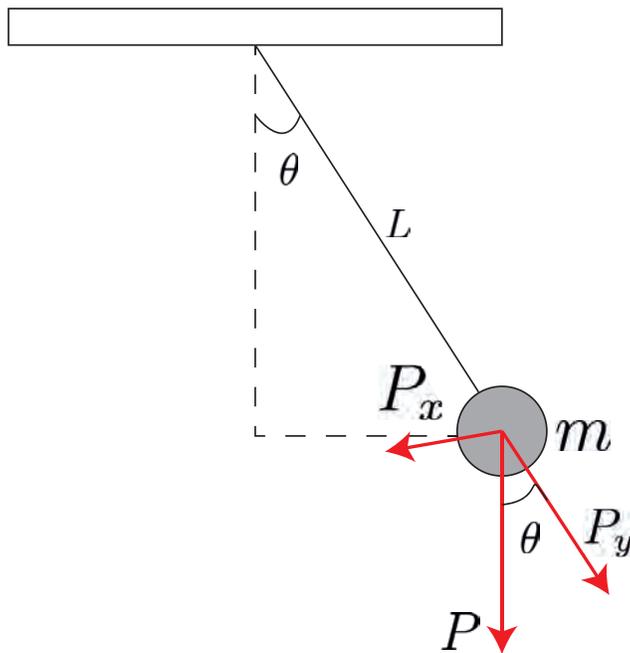


Fig. 2.1. Diagrama de un péndulo simple.

Para llevar a cabo el análisis del movimiento del péndulo, se considera que las fuerzas actúan sobre la masa ( $m$ ), estas fuerzas que interactúan son la tensión del hilo y el peso ( $mg$ ) (Tipler and Mosca, 2006). En este caso  $x$  es la dirección del movimiento y esta es tangente con el círculo sobre el cual transcurre la trayectoria del péndulo.

El peso del péndulo se descompone en dos vectores, que es la dirección tangencial y la dirección normal del péndulo:

$$P_x = mgsin(\theta) \quad (2.1)$$

$$P_y = mgcos(\theta) \quad (2.2)$$

El componente  $x$  del peso apunta en dirección opuesta al sentido positivo del ángulo  $\theta$ . Por lo que, considerando la segunda ley de Newton correspondiente al eje  $x$  puede escribirse como:

$$F = -mgsin(\theta) \quad (2.3)$$

Considerando las ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado que la aceleración tangencial,  $a$  se reescribe a partir de la aceleración angular como:

$$a = \ddot{\theta}L \quad (2.4)$$

Sustituyendo estas expresiones se obtiene la ecuación diferencial:

$$m\ddot{\theta}L = -mgsin(\theta) \quad (2.5)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}sin(\theta) = 0 \quad (2.6)$$

Para valores muy pequeños del ángulo  $\theta$ , la siguiente aproximación es válida:

$$sin(\theta) \simeq \theta \quad (2.7)$$

al contemplar esta consideración en la ecuación (2.6) simplifica la ecuación diferencial a:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (2.8)$$

La solución de la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple es:

$$\theta(t) = \theta_0cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi) \quad (2.9)$$

siendo:

$\theta_0$  es el ángulo máximo inicial.

$\phi$  es la fase inicial.

Analizando el desplazamiento del arco, se observa que la fuerza neta sobre la masa es tangente al arco y está es equivalente a  $-mgsin(\theta)$ . Para corroborar que si se tiene un oscilador armónico simple se debe considerar que los ángulos pequeños de  $\theta$  sean  $sin(\theta) \approx \theta$ . Por lo que a ángulos pequeños se considera que la fuerza es:

$$F \simeq -mg\theta \quad (2.10)$$

El periodo  $T$  de un péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.11)$$

donde  $L$  es la longitud del péndulo, mientras  $g$  denota la aceleración debido a la gravedad.

A partir del péndulo simple han surgido variantes, como es el péndulo invertido, dicho sistema es muy utilizado para aplicar teoría de modelado y control automático. En la sección 2.1.2 se aborda de este sistema.

Por otro lado, la energía en el péndulo simple tiene dos enfoques principales que son: la energía cinética y la energía potencial.

La energía cinética del péndulo simple está compuesta por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.12)$$

donde:  $v$  es la velocidad de la masa  $m$ .

La energía potencial del péndulo simple es:

$$U = mgh \quad (2.13)$$

donde:  $h$  es la altura de masa  $m$  respecto a la posición de equilibrio.

### 2.1.2. Péndulo invertido

El péndulo invertido es una variante del péndulo simple, este sistema es utilizado principalmente para aplicación de un sistema de control debido a la inestabilidad de este sistema.

El objetivo del sistema de control es el equilibrar al péndulo en unos de sus puntos de equilibrio (Ogata, 2010). Asumiendo que que la barra del péndulo tiene una masa despreciable en comparación con la masa ( $m$ ) ubicada en el extremo del brazo. Bajo esta suposición, la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa ( $m$ ) es:

$$F = mgsin(\theta) \quad (2.14)$$

$$F \simeq mg\theta \quad (2.15)$$

donde  $F$  es el componente gravitacional de la fuerza perpendicular del brazo, mientras que  $m$  es la masa al final del brazo.

En este caso la fuerza es positiva, así que la gravedad genera que el péndulo invertido sufra una caída. Este tipo de péndulo es por lo general montado a un carro manejado por un actuador, tal como se muestra en la Figura 2.2.

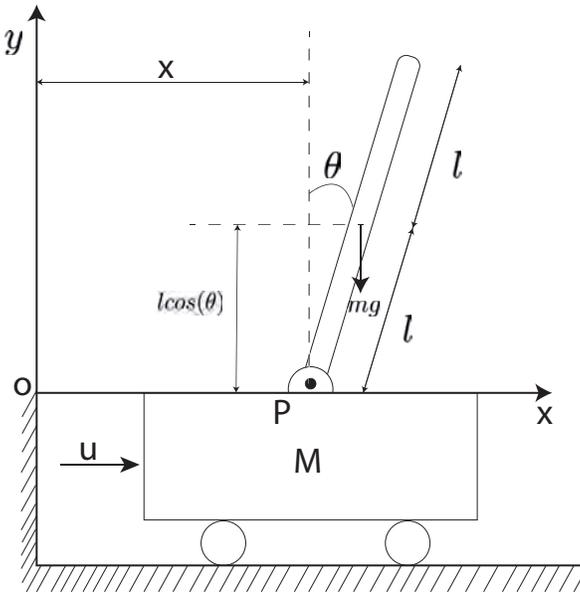


Fig. 2.2. Péndulo invertido.

Por otro lado, el diagrama de cuerpo libre donde interactúan las distintas fuerzas del péndulo invertido se muestra en la Figura 2.3.

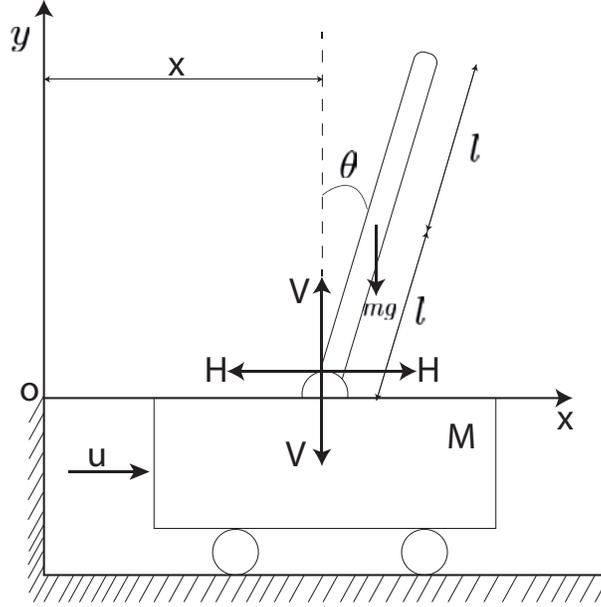


Fig. 2.3. Diagrama cuerpo libre del péndulo invertido.

En este caso, el movimiento rotacional de la barra del péndulo alrededor de su centro de gravedad se define como:

$$I\ddot{\theta} = Vl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta) \quad (2.16)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la barra alrededor de su centro de gravedad.

Por otro lado, el movimiento horizontal del centro de gravedad de la barra del péndulo se obtienen como:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin(\theta)) = H \quad (2.17)$$

Del mismo modo, el movimiento vertical del control de gravedad de la barra del péndulo se muestra como:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos(\theta)) = V - mg \quad (2.18)$$

Mientras que el movimiento horizontal se describe como:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = u - H \quad (2.19)$$

Debido a que se busca mantener la posición vertical del péndulo invertido se realizan un par de suposiciones, la primera de estas es que  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  son pequeños, de tal forma que  $\sin(\theta) \approx 0$ ,  $\cos(\theta) = 1$  y  $\theta\dot{\theta} = 0$ . Por lo que las ecuaciones (2.16)-(2.18) se linealizan como:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad (2.20)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (2.21)$$

$$mg - V = 0 \quad (2.22)$$

A partir de estas ecuaciones (2.19)-(2.21) se obtiene:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (2.23)$$

Mientras que considerando las ecuaciones (2.20)-(2.22) se obtiene:

$$I\ddot{\theta} = mgl\theta - Hl \quad (2.24)$$

$$I\ddot{\theta} = mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \quad (2.25)$$

Reescribiendo como:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (2.26)$$

Las ecuaciones que representan la dinámica del péndulo invertido se muestran de (2.23)-(2.26).

Una de las variantes del péndulo invertido es el péndulo H2AT, el cual representa la dinámica de una persona con lesión en la médula espinal, este tipo de lesiones y en específico el péndulo H2AT se mostrará más a detalle en las siguientes secciones.

## 2.2. Lesión en la médula espinal

Al final de la década 60 surgió la necesidad de establecer una nomenclatura del examen neurológico de pacientes con lesión medular espinal (SCI) (Kirshblum et al., 2011). Se define a la lesión modular como el resultado de una agresión de la médula espinal que produce una alteración de forma temporal o permanente (Tornero Dacasa and Sotorres González, 2015). Con esta definición se distingue principalmente si se trata de una lesión completa o incompleta.

---

La lesión medular completa corresponde a la pérdida total de las funciones sensitivas y motoras a partir del nivel de la lesión. Mientras que la lesión medular incompleta es aquella en la que se conservan parcialmente las funciones sensitivas o motoras.

Las lesiones en la médula espinal se clasifican de la siguiente manera:

Tabla 2.1. Clasificación de lesiones.

Niveles	Tipos
Cervical	Completa
Torácica	Incompleta
Sacro	

**Tipos.** Actualmente es de gran ayuda el uso de la escala de la ASIA (American Spinal Injury Association), la cual nos permite clasificar las lesiones en 5 categorías.

Tabla 2.2. Escala ASIA

Tipo	Descripción
A	Lesión completa. Parálisis sensitivo motora completa por debajo de la lesión
B	Parálisis motora completa. Parálisis sensitiva incompleta
C	Parálisis motora incompleta con fuerza muscular < 3
D	Parálisis motora incompleta con fuerza muscular 3
E	Sin alteraciones sensitivo-motoras

Del mismo modo, se puede clasificar la lesión acorde al nivel de ésta.

**Niveles.**

- Cervical
  - Lesión cervical alta (C1-C4)
  - Lesión cervical baja (C5-C8)
- Torácica
  - Nivel torácico alto (T1-T6)
  - Nivel torácico bajo (T6-T12)

- Lumbar.
- Sacro.

### 2.2.1. Formulación Euler-Lagrange

La derivación de la dinámica de un modelo manipulador juega un rol importante para la simulación de movimiento, análisis de estructuras manipuladoras y diseño de algoritmos de control. La simulación del movimiento del manipulador permite estrategias de control para ser verificadas sin la necesidad de utilizar un sistema físicamente disponible. Un método para llegar a obtener el modelo dinámico de un robot es mediante el uso de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange Craig (2005).

El modelo dinámico de un manipulador da una descripción de la relación entre la unión del actuador y el movimiento de la estructura. Con la formulación de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento pueden ser derivadas en una forma sistemática del sistema de coordenadas de referencias. El lagrangiano de un sistema mecánico puede ser definido como una función de las coordenadas generalizadas  $q(t)$  y sus derivadas con respecto al tiempo  $\dot{q}(t)$ :

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{T}(q(t), \dot{q}(t)) - \mathcal{U}(q(t)) \quad (2.27)$$

donde  $\mathcal{T}(q(t), \dot{q}(t))$  y  $\mathcal{U}(q(t))$  denotan la energía cinética y potencial del sistema, respectivamente, ambas dependiendo explícitamente del tiempo. Las ecuaciones del lagrangiano son expresadas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i(t)} = 0 \quad \forall_i = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

El lagrangiano  $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$  de un robot de  $n$  grados de libertad se define como la diferencia que existe entre la energía cinética  $K(q(t), \dot{q}(t))$  y la energía potencial  $U(q(t))$ , para llevar a cabo el modelado dinámico de un sistema se deben llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Se debe obtener la energía cinética total del sistema:

$$K(q(t), \dot{q}(t)) = K_1(q(t), \dot{q}(t)) + K_2(q(t), \dot{q}(t)) + \dots + K_i(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.29)$$

2. Se debe obtener la energía potencial total del sistema:

$$U(q(t)) = U_1(q(t)) + U_2(q(t)) + \dots + U_i(q(t)) \quad (2.30)$$

3. Se obtiene el lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)) \quad (2.31)$$

4. Se desarrolla la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i(t)} = 0 \quad \forall_i = 1, 2, \dots, n \quad (2.32)$$

donde las  $n$  ecuaciones dinámicas obtenidas representan el modelo dinámico del sistema.

## 2.3. Teoría de sistemas Takagi-Sugeno

Una de las estrategias para poder trabajar sistemas no lineales ya sean sistemas físicos, químicos, biomecánicos o de cualquier otra índole es el utilizar herramientas de modelado de sistemas Takagi-Sugeno, las cuales se describen a continuación.

Los sistemas Takagi-Sugeno son modelos matemáticos que poseen la propiedad de representar o aproximar sistemas no lineales en un compacto espacio de estados. Un ejemplo de un sistema no lineal es el péndulo H2AT.

El modelo difuso T-S fue propuesto por Takagi y Sugeno en el año 1985. La propiedad más importante del modelado Takagi-Sugeno es el poder expresar la dinámica local de cada regla difusa por cada modelo perteneciente a este, el cual se encuentra validado en una región localmente acotada. Es por ello, que el modelo difuso global se obtiene mediante una interpolación de modelos locales lineales. La regla antecedente particiona un conjunto de las variables de los modelos en conjuntos difusos. De tal forma, que cada regla es una expresión matemática, la regla  $i$ -ésima es descrita como:

$$\delta_1 \text{ es } \Delta_1^i \text{ y } \dots, \text{ y } \delta_\rho \text{ es } \Delta_\rho^i \text{ entonces } y = F_i(\delta(t)) \quad (2.33)$$

donde el vector  $\delta(t)$  contiene  $\rho$  componentes,  $\delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, \rho$ , y se utiliza como un vector de las variables pasadas; estas variables también se denominan variables de programación, ya que los valores determinan el grado en que las reglas están presentes. Los conjuntos  $\Delta_j^i, j = 1, 2, \dots, \rho, i = 1, \dots, m$ , donde  $m$  es el número de reglas los cuales son llamados conjuntos difusos.

El valor de una variable de programación  $\delta_j(t)$  pertenece a un conjunto difuso  $\Delta_j^i$  con un valor positivo dado por la función de pertenencia  $\mu_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . El valor positivo de una regla completa es determinado en función de las variables de premisa individuales, utilizando un operador de conjunción como el mínimo.

$$\varphi_i(\delta(t)) = \min_j(\mu_{ij}(\delta_j)) \quad (2.34)$$

o el producto algebraico

$$\varphi_i(\delta(t)) = \prod_{j=1}^{\rho} \mu_{ij}(\delta_j) \quad (2.35)$$

El siguiente paso sería, normalizar el valor de verdad obtenido mediante:

$$\mu_i(\delta) = \frac{\varphi_i(\delta(t))}{\sum_{j=1}^m \varphi_j(\delta(t))} \quad (2.36)$$

Asumiendo que  $\sum_{i=1}^m \varphi_i(\delta(t)) \neq 0$ , es decir, que para cualquier combinación permitida de variables de programación al menos una regla tiene un valor de verdad mayor que cero.

Concluyendo, el modelado de sistemas Takagi-Sugeno es un modelo lineal interpolado en espacio de estados, el cual posee una regla base en SI-ENTONCES; cuya dinámica cambia en función de las no linealidades que rigen al modelo (Lendek et al., 2011).

Se representa como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.37)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.38)$$

donde:  $m$  es el número de modelos locales lineales,  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C$  son matrices constantes conocidas de dimensiones apropiadas y  $\delta(t)$  es el vector de variables premisas,  $\mu_i(\delta(t))$  son las funciones de pertenencia normalizadas. Dichas funciones de pertenencia deben de cumplir con las siguientes restricciones:

$$1 \geq \mu_i(\delta(t)) \geq 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) = 1 \quad (2.39)$$

Existen 2 enfoques para T-S, los cuales son los siguientes:

- Linealización.

- Sector No Lineal.

Debido a que el enfoque de sector No Lineal representa de manera más exacta la dinámica de los sistemas no lineales, se describirá más a fondo a continuación.

### 2.3.1. Enfoque del sector no lineal

El enfoque del sector no lineal es uno de los métodos más usados para construir modelos T-S, ya que representa fielmente la dinámica del sistema no lineal en un compacto espacio de estados (Flores-Hernández et al., 2018).

Este método ha sido desarrollado originalmente para sistemas no lineales de la forma:

$$\dot{x}(t) = f^m(x(t), u(t))x + g^m(x(t), u(t))u \quad (2.40)$$

$$y(t) = h^m(x(t), u(t))x \quad (2.41)$$

donde  $f^m$ ,  $g^m$ ,  $h^m$  son funciones no lineales suaves,  $x(t)$  es el vector de estados,  $u(t)$  es un vector de entrada,  $y(t)$  es el vector de salida.

Para llevar a cabo este enfoque se siguen los siguientes pasos:

1. Se reescribe el sistema en espacio de estados de la forma:

$$\dot{x}(t) = A(x, u)x(t) + B(x, u)u(t)$$

donde algunos elementos de las matrices  $A(x, u)$  y  $B(x, u)$  pueden depender de estados o entradas del sistema.

2. Identificar los términos no constantes del sistema.

$$\eta l_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.42)$$

Estos términos no constantes se encuentran en las matrices  $A(x, u)$  y  $B(x, u)$  del sistema.

3. Definir el escenario de prueba.

Para definir el escenario de prueba, se debe de fijar un rango de variación de la entrada y con respecto a ese rango se determinan los límites superiores e inferiores de las variables de programación, las cuales son:

$$\delta_j \in [\overline{\eta l_j}, \underline{\eta l_j}] \quad (2.43)$$

4. Definir las funciones de ponderación del sistema.

Por cada variable de programación ( $\delta_j$ ) existen 2 funciones de ponderación  $\eta_0^j, \eta_1^j$  las cuales son:

$$\eta_0^j(\delta_j) = \frac{\overline{\eta}^j - \delta_j}{\overline{\eta}^j - \underline{\eta}^j} \quad (2.44)$$

$$\eta_1^j(\delta_j) = 1 - \eta_0^j(\delta_j) \quad (2.45)$$

5. Definir las reglas difusas.

Cada regla difusa es definida por modelos locales como:

$$\mu_i(\delta(t)) = \prod_{j=1}^{\rho} \mu_{ij}(\delta_j), \quad (2.46)$$

donde  $\mu_{ij}(\delta_j)$  es, ya sea  $\eta_0^j(\delta_j)$  o  $\eta_1^j(\delta_j)$ , esto dependiendo de cual sea la función de ponderación utilizada en la regla difusa. Gracias a esto, la construcción de las funciones de ponderación, el resultado de las funciones de pertenencia son normalizadas, es decir,  $\mu_i(\delta(t)) \geq 0$  y

$$\sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) = 1$$

6. Determinar los modelos locales.

Utilizando los valores máximos y mínimos de variación de  $z_j$  ya que con ellas se definen las combinaciones posibles, encontrando así los modelos locales lineales.

La ecuación que define el número de modelos locales lineales es:

$$m = 2^{\rho} \quad (2.47)$$

La ecuación en espacio de estados en TS es:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B u(t) \quad (2.48)$$

Generando así el modelo TS completo se encuentra dado por la interpolación de modelos locales:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i x(t)) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad (2.49)$$

### 2.3.2. Enfoque por linealización

El enfoque por linealización de los sistemas Takagi-Sugeno consiste en una expansión de series de Taylor en diferentes puntos representativos, los cuales podrían ser o no puntos de equilibrio.

Considerando el siguiente sistema dinámico no lineal:

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (2.50)$$

$$y(t) = h(x) \quad (2.51)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  es el vector de variables de estado,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  es el vector de variables medidas,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  es el vector de entrada,  $f$  y  $h$  son funciones suaves no lineales.

El objetivo es obtener una aproximación del sistema no lineal de la ecuación (2.51) como un conjunto de  $m$  reglas difusas de la siguiente forma:

Regla del  $i$ -ésimo modelo:

Si  $\delta_1$  es  $\Delta_1^i \dots \Delta_k$  es  $\Delta_k^i$  entonces:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + a_i \quad (2.52)$$

$$y(t) = C_i x(t) + c_i \quad (2.53)$$

o de manera equivalentemente a un modelo Takagi-Sugeno de la forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta) (A_i x(t) + B_i u(t) + a_i) \quad (2.54)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta) (C_i x(t) + c_i) \quad (2.55)$$

donde  $A_i, B_i, C_i, a_i$  y  $c_i$  son las matrices y sesgos de los modelos locales lineales,  $\delta$  es el vector de programación que determina cuáles de las reglas están activas en cierto momento,  $\mu_i(\delta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  son las funciones de pertenencia normalizadas.

El primer paso a desarrollar es decidir cuales variables describen las no linealidades, es decir, qué variables serán las variables de programación. Por lo que  $\delta$  es una selección de entradas, estados y salidas. Lo siguiente a considerar es el número de puntos de linealización  $\delta_{0,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  que

son elegidos, junto con una partición del espacio en el que se define las variables, y las funciones de pertenencia correspondientes  $\mu_i(\delta_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Al incrementar el número de puntos de aproximación, la exactitud en la aproximación de los modelos difusos aumenta. No obstante, al incrementar el número de los puntos de linealización, los costos computacionales aumentan. Por último, las matrices obtenidas son:

$$A_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\delta_{0,i,0}} \quad B_i = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\delta_{0,i,0}} \quad C_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\delta_{0,i,0}} \quad (2.56)$$

donde  $|_{\delta_{0,i,0}}$  indica la evaluación de las derivadas parciales en el valor correspondiente de  $\delta_{0,i}$  para las variables de estado y de entrada, que son las variables programadas y 0 corresponde a las variables que no están en  $\delta$ . Generalmente la linealización no está en los puntos de equilibrio, los términos afines deben ser agregados de la siguiente manera:

$$a_i = f(x, u)|_{\delta_{0,i,0}} - (A_i x)|_{\delta_{0,i,0}} - (B_i u)|_{\delta_{0,i,0}} \quad (2.57)$$

$$c_i = h(x)|_{\delta_{0,i,0}} - (C_i x)|_{\delta_{0,i,0}} \quad (2.58)$$

Para obtener el sistema Takagi-Sugeno de la forma (2.54) y (2.55), las funciones de pertenencia de cada regla se calculan con (2.35) y se normalizan con (2.36). Con el miembro normalizado, el modelo difuso Takagi-Sugeno se expresa como (2.54) y (2.55).

### 2.3.3. Observabilidad en los sistemas Takagi-Sugeno

La observabilidad en los sistemas Takagi-Sugeno se refiere a la capacidad de reconstruir el vector de estados a partir de las entradas y salidas del sistema que se encuentran disponibles. Dado que los sistemas Takagi-Sugeno son no lineales, parecería que los criterios de observabilidad para sistemas no lineales podrían aplicarse fácilmente. No obstante, los observadores se diseñan de manera que cada regla posee una ganancia local específica, lo que implica que es necesario asegurar la observabilidad de los modelos locales individuales en lugar de considerar la observabilidad del sistema no lineal en su totalidad (Zaidi et al., 2013).

Para el diseño se supone implícitamente que los modelos locales, es decir, los pares  $(A_i, C_i)$ ,  $\forall i =$

$1, 2, \dots, m$ , son observables. La matriz de observabilidad para el sistema (2.49).

$$\text{rango} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ \vdots \\ CA_i^{n_x-1} \end{bmatrix} \right) = n_x, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.59)$$

donde  $n_x$  es la dimensión del vector de estados del sistema.

## 2.4. Observadores

Un observador estima las variables de estado basándose en las mediciones de las variables de salida y de entrada, por ello es que los observadores pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad (Ogata, 2010).

Sea el sistema definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.60)$$

El modelo matemático del observador mostrado en la ecuación (2.61) incluye un término adicional que contiene el error de estimación para compensar las imprecisiones en las matrices  $A$  y  $B$  y la falta del error inicial. Por otro lado, el error inicial es la diferencia entre el estado inicial y el estado estimado inicial.

De esta forma, se define el modelo matemático del observador como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_e(y - C\hat{x}(t)) \quad (2.61)$$

donde:

$\hat{x}(t)$  es el estado estimado.

$C\hat{x}(t)$  es la salida estimada.

$K_e$  es la matriz de ganancia del observador.

En la Figura 2.4 se puede observar de manera general el diagrama de un observador.

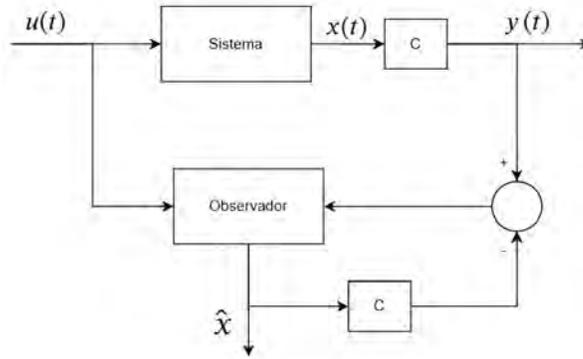


Fig. 2.4. Diagrama general de un observador.

### Clasificación de observadores

- Orden completo: Son aquellos que estiman todas las variables del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa.
- Orden reducido: Es aquel donde el observador estima menos de  $n$  variables de estado, donde  $n$  es la dimensión del vector de estado.
- Orden mínimo: Por último, es el observador de estado de orden reducido es el orden mínimo posible, es decir, si  $n$  es la dimensión del vector de estado y  $m$  es la dimensión de salidas, entonces  $n - m$  variables observables.

## 2.5. Observador funcional

Los observadores son algoritmos matemáticos que nos ayudan a estimar variables del vector de estados del sistema (Hernández and Gaviño, 2010). Los observadores funcionales poseen dos enfoques, el primero de ellos es el estimar una ley de control que estabilice el sistema, mientras que el segundo enfoque aborda la estimación de un conjunto específico del vector de variables de estado (Hieu and Tyrone, 2012), esto se puede ver reflejado en la Figura 2.5.

Considerando un sistema bajo la representación Takagi-Sugeno como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Lx(t)\end{aligned}$$

donde  $x(t)$  es el vector de  $n$  estados,  $u(t)$  es el vector de  $l$  entradas del sistema,  $y(t)$  representa el vector de las  $p$  variables de salida medidas.  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$  son matrices conocidas,  $\delta(t) \in \mathbb{R}^\rho$  es el vector de variables premisas,  $\mu_i(\delta)$  son las funciones  $i$ -ésimas de ponderación y  $m$  es el número de modelos locales lineales, el cual es determinado por  $m = 2^\rho$ , siendo  $\rho$  el número de no linealidades en el sistema.

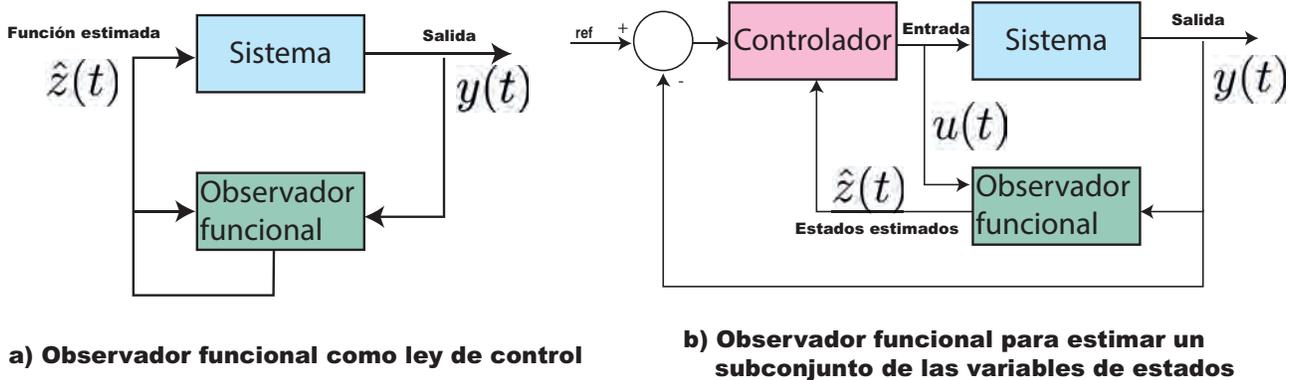


Fig. 2.5. Enfoques del observador funcional.

Por otro lado, la observabilidad en un observador funcional es evaluar si las funciones lineales de los estados se pueden conocer mediante las salidas y entradas del sistema (Trinh and Fernando, 2012).

**Lema 1:** Existe un observador funcional lineal con polos arbitrarios de tal forma que  $\hat{z}(t)$  converge asintóticamente a  $z(t)$  si las siguientes dos condiciones son cumplidas:

1. La matriz  $L$  debe cumplir lo siguiente:

$$\text{rango} \left( \begin{bmatrix} LA_i \\ CA_i \\ C \\ L_i \end{bmatrix} \right) = \text{rango} \left( \begin{bmatrix} CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} \right), \quad \forall i = 1, \dots, m$$

2. La matriz  $L$  debe cumplirse para todo  $s \in \mathbb{C}$

$$\text{rango} \left( \begin{bmatrix} sL - LA_i \\ CA_i \\ C \end{bmatrix} \right) = \text{rango} \left( \begin{bmatrix} CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} \right)$$

### 2.5.1. Regiones LMI

El objetivo de la aplicación de una región LMI es definir una región más detallada en el semiplano complejo izquierdo para la obtención de los eigenvalores del sistema.

De acuerdo con Reza et al. (2018), un subconjunto  $\mathcal{D}$  del plano complejo es llamada región LMI si existe un par de matrices tal que  $\delta = \delta^T$  y  $\beta$  es dimensiones adecuadas, con el fin de que:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_{\mathcal{D}}(z) < 0\} \quad (2.62)$$

donde la función  $f_{\mathcal{D}}(z) = \delta + z\beta + z^*\beta^T$  es llamada función característica de  $\mathcal{D}$ .

Se establece que una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es  $\mathcal{D}$  estable, es decir, tiene todos los eigenvalores en la región  $\mathcal{D}$  si y siempre exista una matriz  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que:

$$\delta \otimes P + \beta \otimes (AP) + \beta^T \otimes (AP)^T < 0, \quad P > 0 \quad (2.63)$$

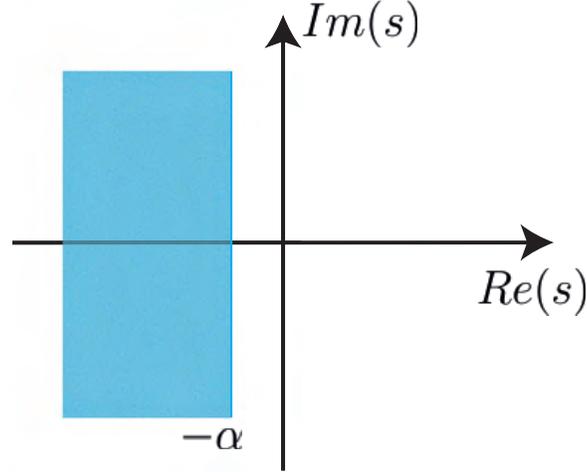
#### Región LMI vertical

Una región LMI vertical toma todo el semiplano complejo izquierdo de un valor fijo  $\alpha$ , tal como se muestra en la Figura 2.6

$$\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < -\alpha \quad f_{\mathcal{D}}(z) = \delta + z + z^* < 0\} \quad (2.64)$$

dicha región LMI implica que  $\delta = 2$  y  $\beta = 1$ , entonces la ecuación (2.63) es:

$$2\alpha \otimes P + 1 \otimes (AP) + 1 \otimes (AP)^T = 2\alpha P + AP + PA^T < 0 \quad (2.65)$$


 Fig. 2.6. Región LMI vertical  $\mathcal{D}_1$ 

### Región LMI circular

Una región circular de radio  $R$  y centrado en  $(-q, 0)$ , tal como se muestra en la Figura 2.7, esta representada como:

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + q| < R \iff F_{\mathcal{D}_2}(z) = \begin{bmatrix} -R & z + q \\ \bar{z} + q & -R \end{bmatrix} < 0 \right\} \quad (2.66)$$

La LMI que garantiza la estabilidad se construye con:

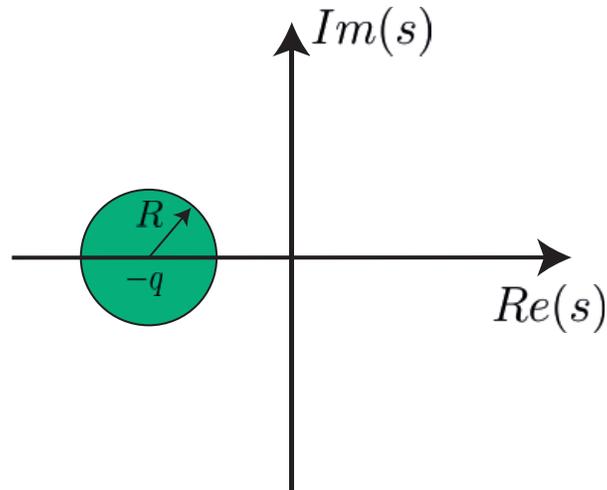
$$\delta = \begin{bmatrix} -R & q \\ q & -R \end{bmatrix} \quad y \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Por lo que se expresa como:

$$\begin{bmatrix} -R & q \\ q & -R \end{bmatrix} \otimes X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (AX) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes (XA^T) \quad (2.68)$$

Obteniendo así:

$$\begin{bmatrix} -RX & AX + qX \\ XA^T + qX & -RX \end{bmatrix} < 0 \quad , \quad X > 0 \quad (2.69)$$

Fig. 2.7. Región LMI circular  $\mathcal{D}_2$ 

## 2.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se mostró la clasificación y tipos de péndulos que existen y el análisis del sistema físico de estos mismos. Del mismo modo, se presentó información acerca de las lesiones en la médula espinal que existen, así como su clasificación de acuerdo a la escala ASIA. A su vez se presentó la formulación del modelado de sistemas Euler-Lagrange, así como los distintos métodos que existen para la formulación de sistemas Takagi-Sugeno para un sistema no lineal. Además se proporcionó una explicación acerca de los observadores, su clasificación y objetivos. Por último, se menciona la teoría de los observadores funcionales, su clasificación de acuerdo al enfoque que se busca obtener y lemas a cumplir para la utilización de esta clase de observadores.

# Capítulo 3

## Representación T-S del péndulo H2AT

### 3.1. Descripción del caso de estudio

El péndulo H2AT (Head 2 Arms and Trunk) es una variación del péndulo doble invertido en el plano sagital (Srihi et al., 2022), esto para considerar el desplazamiento de la cabeza y partes superiores del cuerpo humano. Se encuentra formado por dos segmentos articulados, el primero de estos (marcado con el número 1) representa el tronco el cual se encuentra enlazado a un soporte marcado con el número 2 y una articulación giratoria que representa la articulación lumbrásaca (representada por el ángulo  $\theta$ ). El segundo soporte (marcado con el número 2) se encuentra enlazado al primer segmento y a una articulación, el desplazamiento de este segmento esta representado por la variable  $x$ .

En la Figura 3.1 se muestra el péndulo H2AT.

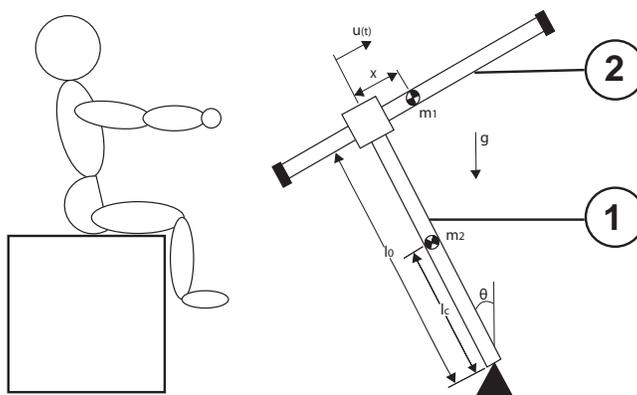


Fig. 3.1. Diagrama del péndulo H2AT.

El estudio establece un sujeto con lesión en la médula espinal del tipo completa por encima del nivel abdominal, debido a esto no existe torsión muscular alrededor del eje rotacional. Las ecuaciones que describen la dinámica del péndulo H2AT se muestran a continuación (Pan et al., 2021):

$$0 = m_1\ddot{x}(t) - m_1l_0\ddot{\theta}(t) - m_1x(t)\dot{\theta}^2(t) + m_1g\sin(\theta(t)) - u(t) \quad (3.1)$$

$$0 = -m_1l_0\ddot{x}(t) + J(x(t))\ddot{\theta}(t) + 2m_1x(t)\dot{x}(t)\dot{\theta}(t) - (m_1l_0 + m_2l_c)g\sin(\theta(t)) + m_1gx(t)\cos(\theta(t)) \quad (3.2)$$

donde  $u(t)$  es la señal de entrada del sistema, es decir, es la fuerza controlada ( $N$ ) que regulará la posición vertical del péndulo H2AT, el cual representa la dinámica de una persona con lesión en la médula espinal del tipo completo, en el Anexo A se muestra algunas de las características del actuador. Del mismo modo se tiene a  $J(x(t)) = m_1(l_0^2 + x^2) + m_2l_c^2$ . Por otro lado, los parámetros del sistema son:  $m_1$  y  $m_2$  que representan los centros de masa del segmento superior (cabeza y brazos) y del segmento del tronco respectivamente,  $l_0$  y  $l_c$  representan las longitudes del tronco y la longitud del centro de masa del tronco,  $x(t)$  es la distancia que existe en la flexión completa del cuello con ambos brazos estirados y finalmente  $\theta(t)$  es una articulación giratoria (articulación lumbrasaca).

El modelo del caso de estudio es el péndulo H2AT, el cual es una variante del péndulo invertido. Se encuentra constituido por dos segmentos rígidos, el primero de ellos representa el tronco o torso del cuerpo humano, mientras que el segundo segmento representa a la cabeza y brazos. Este sistema representa la dinámica de inestabilidad una persona con lesión completa en la médula espinal (Srihi et al., 2021).

Los parámetros resultantes de este modelo se pueden observar la Tabla 3.1, los cuales representan a una persona de sexo masculino de  $80kg$ , dichos parámetros se obtuvieron de Blandeau et al. (2018).

Tabla 3.1. Parámetros del sistema.

Parámetros	Valores	Unidades	Definición
$m_1$	16.1	kg	Masa segmento superior
$m_2$	26.64	kg	Masa del tronco
$l_0$	0.477	m	Longitud del tronco
$l_c$	0.2766	m	Longitud del centro de masa
$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>	Gravedad
$J$	5.79	Kgm <sup>2</sup>	Inercia

Debido a que el péndulo H2AT representa a un sistema físico-humano, este posee restricciones físicas para representar de manera real el movimiento humano, dichas restricciones físicas se pueden observar en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Restricciones del sistema.

Parámetros	Valores	Unidades	Definición
$x_{max}$	0.105	m	Flexión completa del cuello con ambos brazos estirados
$x_{min}$	-0.075	m	Extensión de cuello y brazos
$\theta$	[-0.174,0.35]	rad	Ángulo de movimiento

Mientras que en la Figura 3.2 se observa físicamente que representa cuando  $x(t)$  y  $\theta(t)$  poseen valores positivos o negativos.

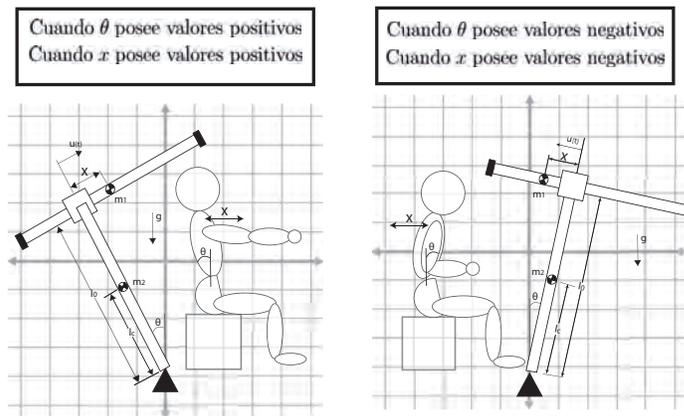


Fig. 3.2. Restricciones del péndulo H2AT.

### 3.1.1. Formulación Euler-Lagrange

Para llevar a cabo el modelado dinámico, el péndulo H2AT mediante el uso de Euler-Lagrange se desarrolló lo siguiente:

1. Se debe obtener la energía cinética total del sistema:

$$K(q(t), \dot{q}(t)) = K_1(q(t), \dot{q}(t)) + K_2(q(t), \dot{q}(t)) + \dots + K_i(q(t), \dot{q}(t))$$

2. Se debe de obtener la energía potencial total del sistema:

$$U(q(t)) = U_1(q(t)) + U_2(q(t)) + \dots + U_i(q(t))$$

3. Se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t))$$

4. Se desarrolla la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} = \tau(t) - v(\dot{q}(t), \tau(t))$$

donde:

$q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de coordenadas generalizadas.

$\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares.

$\tau(t) = [\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de pares aplicados.

$v(\dot{q}(t), \tau(t)) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares de fricción del sistema.

## Modelado dinámico de robots manipuladores

Se deben de obtener las ecuaciones de la energía cinética y potencial para cada eslabón del péndulo H2AT.

- La ecuación de la energía cinética para cada eslabón:

$$K_i(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.3)$$

- La energía potencial para cada eslabón:

$$U_i(q(t)) = mgh \quad (3.4)$$

**Eslabón 1:** La energía cinética y potencial del eslabón 1 son:

---

- Energía cinética:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1(l_0^2\dot{\theta}(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + x^2\dot{\theta}(t)^2 - 2l_0\dot{x}(t)\dot{\theta}(t)) \quad (3.5)$$

- Energía potencial:

$$U_1 = m_1(l_0\cos(\theta(t)) + x(t)\sin(\theta(t))) \quad (3.6)$$

**Eslabón 2:** La energía cinética y potencial del eslabón 2 son:

- Energía cinética:

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2l_c\dot{\theta}(t)^2 \quad (3.7)$$

- Energía potencial:

$$U_2 = m_2gl_c\cos(\theta(t)) \quad (3.8)$$

Realizado lo anterior planteamos la energía cinética total del sistema son:

$$K = K_1 + K_2 \quad (3.9)$$

$$K = \frac{1}{2}m_1(l_0^2\dot{\theta}^2(t) + \dot{x}(t)^2 + x^2\dot{\theta}(t)^2 - 2l_0\dot{x}(t)\dot{\theta}(t)) + \frac{1}{2}m_2l_c\dot{\theta}(t)^2 \quad (3.10)$$

Del mismo modo, la energía potencial total del sistema son:

$$U = U_1 + U_2 \quad (3.11)$$

$$U = m_1(l_0\cos(\theta(t)) + x(t)\sin(\theta(t))) + m_2gl_c\cos(\theta(t)) \quad (3.12)$$

Obtenido lo anterior, se plantea el Lagrangiano del sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) &= K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)) \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1(l_0^2\dot{\theta}(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + x^2\dot{\theta}(t)^2 - 2l_0\dot{x}(t)\dot{\theta}(t)) + \frac{1}{2}m_2l_c\dot{\theta}(t)^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$- m_1(l_0\cos(\theta(t)) + x(t)\sin(\theta(t))) - m_2gl_c\cos(\theta(t))$$

donde las coordenadas generalizadas son:

$$q_1(t) = \theta(t) \quad (3.14)$$

$$q_2(t) = x(t) \quad (3.15)$$

Desarrollando la ecuación del Lagrangiano para cada coordenada generalizada, obtenemos lo siguiente:

### Primer eslabón

La ecuación general para obtener el Lagrangiano del sistema es:

$$\frac{d}{dt(t)} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(t)} = F(t) \quad (3.16)$$

Posteriormente se desarrolla la ecuación de movimiento del Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}(t)} = m_1 \dot{x} - m_1 l_0 \dot{\theta}(t) \quad (3.17)$$

$$\implies \frac{d}{dt(t)} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}(t)} \right) = m_1 \ddot{x}(t) - m_1 l_0 \ddot{\theta}(t) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(t)} = m_1 x \dot{\theta}(t)^2 - m_1 g \sin(\theta(t)) \quad (3.19)$$

Reorganizando obtenemos:

$$m_1 \dot{x}(t) - m_1 l_0 \dot{\theta}(t) - m_1 x(t) \dot{\theta}(t)^2 + m_1 g \sin(\theta(t)) = F(t) \quad (3.20)$$

$$m_1 \dot{x}(t) - m_1 l_0 \dot{\theta}(t) - m_1 x(t) \dot{\theta}(t)^2 + m_1 g \sin(\theta(t)) - F(t) = 0 \quad (3.21)$$

### Segundo eslabón

Del mismo modo, para el eslabón 2 se plantea la ecuación general para obtener el Lagrangiano del sistema es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta(t)} = 0 \quad (3.22)$$

Posteriormente se desarrolla la ecuación de movimiento del Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}(t)} = m_1 l_0^2 \dot{\theta}(t) + m_1 x(t)^2 \dot{\theta}(t) - m_1 l_0 \dot{x}(t) + m_2 l_c \dot{\theta}(t) \quad (3.23)$$

$$\implies \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}(t)} \right) = m_1 l_0^2 \ddot{\theta}(t) + m_1 x(t)^2 \ddot{\theta}(t) + 2m_1 x(t) \dot{x}(t) \dot{\theta}(t) - m_1 l_0 \ddot{x}(t) + m_2 l_c \ddot{\theta}(t) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta(t)} = m_1 g l_0 \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) - m_1 g x(t) \cos(\theta(t)) + m_2 g l_c \sin(\theta(t)) \quad (3.25)$$

Reorganizando obtenemos:

$$0 = -m_1 l_0 \ddot{x}(t) + J(x(t)) \ddot{\theta}(t) + 2m_1 x(t) \dot{x}(t) \dot{\theta}(t) - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g \sin(\theta) + m_1 g x(t) \cos(\theta) \quad (3.26)$$

donde:

$$J(x) = m_1 (l_0^2 + x^2(t)) + m_2 l_c^2$$

$F(t)$  es la fuerza controlada.

$m_1$  es la masa del segmento superior.

$m_2$  es la masa del tronco.

$l_0$  es la longitud del tronco.

$l_c$  es la longitud del centro de masa del tronco.

$x(t)$  representa a la flexión completa del cuello con ambos brazos estirados.

$\theta(t)$  representa una articulación giratoria (articulación Lumbosacra)

### 3.2. Modelo no lineal del péndulo H2AT

Para llevar a cabo la representación matricial del sistema no lineal del caso de estudio en variables de estado, las ecuaciones (3.1) y (3.2). Se obtiene el modelo no lineal para el péndulo H2AT:

$$\begin{aligned} E(x(t))\dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde  $x(t)$  es el vector de estados del sistema que está formado por  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T = [x(t) \ \dot{x}(t) \ \theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$ . Mientras que el vector de salida dado por  $y(t)$ . Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $E$  se definen como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & -m_1 l_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_1 l_0 & 0 & J(x_1(t)) \end{bmatrix}}_E \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-m_1 g \sin(x_3)}{x_3} & m_1 x_1 x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m_1 g \cos(x_3) & -2m_1 x_1 x_4 & \frac{(m_1 l_0 + m_2 l_c) g \sin(x_3)}{x_3} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t) \quad (3.28)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Una vez llevado a representación en espacio de estados se realiza el despeje de la matriz  $E$ , ubicada en la ecuación (3.28). Considerando que la matriz  $E$  es de rango completo, se puede reescribir el sistema (3.28) y (3.29) de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = (E(x(t)))^{-1}A(x(t))x(t) + (E(x(t)))^{-1}B(x(t))u(t) \quad (3.30)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.31)$$

donde :

$$(E(x(t)))^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = \frac{-m_1 g l_0 \cos(x_3(t))}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1}, \quad a_{22} = \frac{-2m_1 l_0 x_1(t) x_4(t)}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1}, \quad a_{23} = \frac{l_0 g \sin(x_3(t))(m_1 l_0 + m_2 l_c)}{x_3(t)} - \frac{J(x_1(t)) g \sin(x_3(t))}{x_3(t)} \quad a_{24} = \frac{J(x_1(t)) x_1(t) x_4(t)}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1}, \quad a_{41} = \frac{-m_1 g \cos(x_3(t))}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1}, \quad a_{42} = \frac{-2m_1 x_1(t) x_4(t)}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1}, \quad a_{43} = \frac{l_c m_2 g \frac{\sin(x_3(t))}{x_3(t)}}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1}, \quad a_{44} = \frac{l_0 m_1 x_1(t) x_4(t)}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1}$$

$$(E(x(t)))^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J(x_1(t))}{m_1(J(x_1(t)) - l_0^2 m_1)} \\ 0 \\ \frac{l_0}{J(x_1(t)) - l_0^2 m_1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

De acuerdo con Blandeau et al. (2018) se considera que la variable  $x_1(t)$  esta restringida entre los valores  $[-0.075, 0.105]m$ , por lo que el término  $J(x_1(t)) = m_1(l_0^2 + x_1(t)^2) + m_2 l_c^2$  opera entre los valores  $[5.71, 5.88]$ , entonces el promedio de  $J(x_1(t)) = 5.79 kgm^2$  y es considerada como el momento de inercia del sujeto.

En Blandeau et al. (2018) menciona que las restricciones físicas en  $x_3(t) \rightarrow [-0.174, 0.35]rad$ , entonces  $|\frac{\sin(x_3(t))}{x_3(t)} - \cos(x_3(t))| < 4\%$  y el término  $\frac{\sin(x_3(t))}{x_3(t)}$  es remplazado por  $\cos(x_3(t))$ .

Teniendo en cuenta las suposiciones anteriores, el modelo (3.30) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-m_1 g l_0 \cos(x_3(t))}{J - l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 l_0 x_1(t) x_4(t)}{J - l_0^2 m_1} & l_0 g \cos(x_3(t))(m_1 l_0 + m_2 l_c) - J g \cos(x_3(t)) & \frac{J x_1(t) x_4(t)}{J - l_0^2 m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_1 g \cos(x_3(t))}{J - l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 x_1(t) x_4(t)}{J - l_0^2 m_1} & \frac{l_c m_2 g \cos(x_3(t))}{J - l_0^2 m_1} & \frac{l_0 m_1 x_1(t) x_4(t)}{J - l_0^2 m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J}{m_1(J - l_0^2 m_1)} \\ 0 \\ \frac{l_0}{J - l_0^2 m_1} \end{bmatrix} u(t) \quad (3.32)$$

### 3.2.1. Simulación del sistema no lineal

*Objetivo de la simulación:* El objetivo de la simulación es el observar el comportamiento en lazo abierto del péndulo H2AT en su representación no lineal del sistema ante una entrada  $u(t)$  constante de  $30N$ . Para llevar a cabo la simulación se utilizan los parámetros de la Tabla 3.1. El paso de integración utilizado en la configuración de Matlab R2018b es  $T_e = 0.001$ , las condiciones iniciales

fueron  $x(0) = [0, 0, 0.005, 0]^T$ .

En la Figuras 3.3 y 3.4 se muestra el comportamiento de las variables de estado del sistema no lineal, se observa la dinámica de la posición  $x_1$ , la velocidad  $x_2$ , la posición angular  $x_3$  y la velocidad angular  $x_4$  ante una entrada  $u(t) = 30N$ .

El péndulo H2AT es un sistema inestable con eigenvalores positivos, por lo cual la respuesta se muestra saturada debido a las restricciones físicas que se muestran en la Tabla 3.2 y no se muestran respuestas indeterminadas del sistema por la naturaleza inestable del mismo.

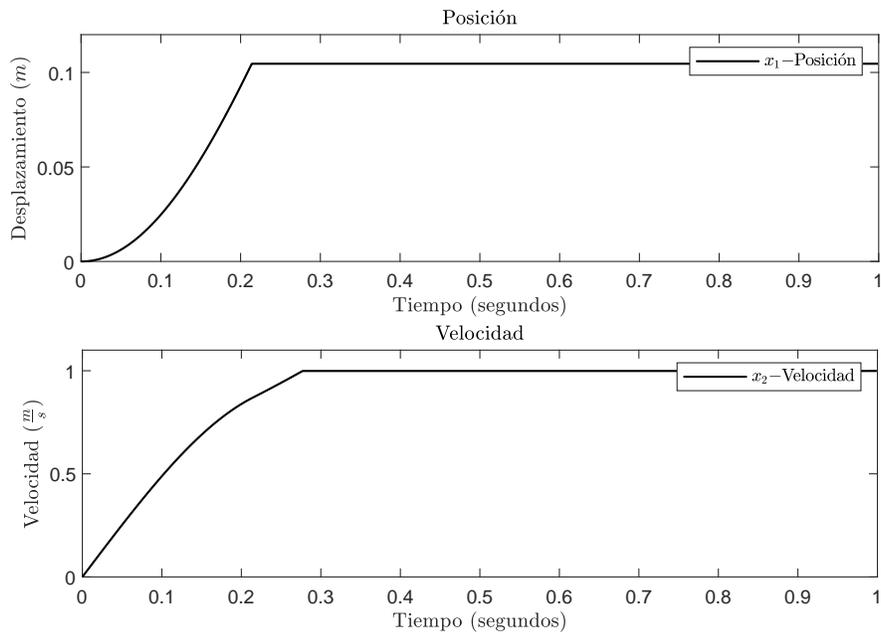


Fig. 3.3. Respuesta de la posición y velocidad no lineal

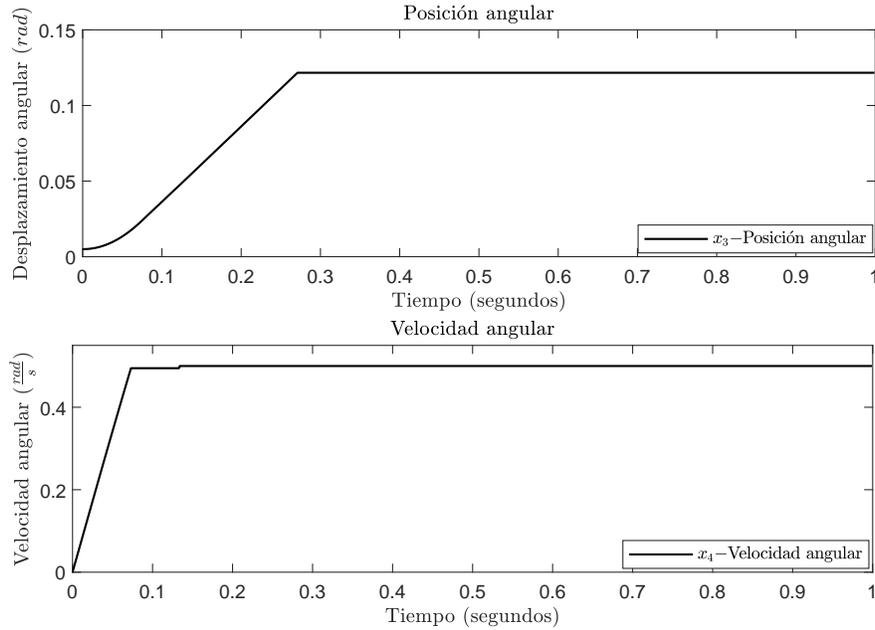


Fig. 3.4. Respuesta de la posición y velocidad angular no lineal

### 3.3. Representación Takagi-Sugeno del péndulo H2AT

Un sistema T-S en su forma continua es representado de la forma general como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i x(t)) + B u(t) \quad (3.33)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (3.34)$$

donde  $x(t)$  es el vector de estados,  $u(t)$  es el vector de entradas,  $y(t)$  es el vector de salidas. Las matrices  $A_i$ ,  $B$  y  $C$  son matrices conocidas y de dimensiones apropiadas.

Tomando en cuenta las consideraciones de la Tabla 3.2, las no linealidades del modelo se encuentra en los términos de:

$$\delta_1(t) = \cos(x_3(t)) \quad (3.35)$$

$$\delta_2(t) = x_1(t)x_4(t) \quad (3.36)$$

El par de matrices  $A_i, C$  es observable.  $m$  es el número de modelos locales lineales.  $\delta(t) = [\delta_1(t), \delta_2(t) \dots \delta_k(t)]$  es el vector de  $k = 1, \dots, m$  no linealidades, los cuales se encuentran acotados dentro de los intervalos  $[\overline{\delta(t)}, \underline{\delta(t)}]$  de la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Valores máximos y mínimos.

$\delta_k(t)$	$\overline{\delta_k}$	$\underline{\delta_k}$
$\delta_1(t)$	1	0.9926
$\delta_2(t)$	0.0526	-0.0526

donde  $[\overline{\delta_k}, \underline{\delta_k}]$  son los valores máximos y mínimos de la no linealidad. La matriz  $A_i$  depende de las no linealidades del sistema generando así que las matrices locales se obtienen contemplando los valores máximos y mínimos de  $\delta_k(t)$ .

Posteriormente, se definen las funciones de ponderación para cada no linealidad Lendek et al. (2011), las cuales son:

$$\begin{aligned} \eta_0^1(\delta_1) &= \frac{\overline{\delta_1} - \delta_1}{\overline{\delta_1} - \underline{\delta_1}}, & \eta_1^1(\delta_1) &= 1 - \eta_0^1 \\ \eta_0^2(\delta_2) &= \frac{\overline{\delta_2} - \delta_2}{\overline{\delta_2} - \underline{\delta_2}}, & \eta_1^2(\delta_2) &= 1 - \eta_0^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

A partir de las funciones de ponderación construimos  $2^\rho = 4$  reglas difusas, donde  $\rho$  representa el número de locales lineales.

$$\begin{aligned} \mu_1(\delta(t)) &= \eta_0^1 \eta_0^2, & \mu_2(\delta(t)) &= \eta_0^1 \eta_1^2 \\ \mu_3(\delta(t)) &= \eta_1^1 \eta_0^2, & \mu_4(\delta(t)) &= \eta_1^1 \eta_1^2 \end{aligned}$$

De modo que la representación del sistema Takagi-Sugeno contemplando la matriz  $A_i$ , se obtiene a partir de la sustitución de los valores máximos y mínimos de cada parámetro variable que corresponde a cada término con el fin de construir los modelos locales lineales.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\delta(t))(A_i x(t)) + Bu(t) \quad (3.38)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.39)$$

donde las matrices  $A_i$  representan las 4 matrices locales que se muestran a continuación:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-m_1 g l_0 \delta_1(t)}{J - I_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 l_0 \delta_2(t)}{J - I_0^2 m_1} & l_0 g \delta_1(t)(m_1 l_0 + m_2 l_c) - J g \delta_1(t) & \frac{J \delta_2(t)}{J - I_0^2 m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_1 g \delta_1(t)}{J - I_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 x(t) \theta(t)}{J - I_0^2 m_1} & \frac{l_c m_2 g \delta_1(t)}{J - I_0^2 m_1} & \frac{l_0 m_1 x(t) \theta(t)}{J - I_0^2 m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -35.1613 & 0.3799 & 6.3586 & -0.1432 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -73.7133 & 0.7964 & 33.7443 & -0.1899 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\text{Polos del modelo local 1: } \begin{bmatrix} -4.9703 + 0.0000i \\ 0.0000 + 5.1035i \\ 0.0000 - 5.1035i \\ 4.9703 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-m_1 g l_0 \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 l_0 \delta_2(t)}{J-l_0^2 m_1} & l_0 g \delta_1(t)(m_1 l_0 + m_2 l_c) - J g \delta_1(t) & \frac{J \delta_2(t)}{J-l_0^2 m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_1 g \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 x(t)\theta(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{l_c m_2 g \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{l_0 m_1 x(t)\theta(t)}{J-l_0^2 m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -35.1613 & -0.3799 & 6.3586 & 0.1432 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -73.7133 & -0.7964 & 33.7443 & 0.1899 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\text{Polos del modelo local 2: } \begin{bmatrix} -4.9703 + 0.0000i \\ 0.0000 + 5.1035i \\ 0.0000 - 5.1035i \\ 4.9703 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-m_1 g l_0 \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 l_0 \delta_2(t)}{J-l_0^2 m_1} & l_0 g \delta_1(t)(m_1 l_0 + m_2 l_c) - J g \delta_1(t) & \frac{J \delta_2(t)}{J-l_0^2 m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_1 g \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 x(t)\theta(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{l_c m_2 g \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{l_0 m_1 x(t)\theta(t)}{J-l_0^2 m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -35.4234 & 0.3799 & 6.4060 & -0.1432 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -74.2629 & 0.7964 & 33.9959 & -0.1899 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\text{Polos del modelo local 3: } \begin{bmatrix} -4.9785 + 0.0000i \\ -0.0845 + 5.1047i \\ -0.0845 - 5.1047i \\ 4.9585 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-m_1 g l_0 \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 l_0 \delta_2(t)}{J-l_0^2 m_1} & l_0 g \delta_1(t)(m_1 l_0 + m_2 l_c) - J g \delta_1(t) & \frac{J \delta_2(t)}{J-l_0^2 m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_1 g \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{-2m_1 x(t)\theta(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{l_c m_2 g \delta_1(t)}{J-l_0^2 m_1} & \frac{l_0 m_1 x(t)\theta(t)}{J-l_0^2 m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -35.4234 & -0.3799 & 6.4060 & 0.1432 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -73.2629 & -0.7964 & 33.9959 & 0.1899 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\text{Polos del modelo local 4: } \begin{bmatrix} -4.9785 + 0.0000i \\ -0.0845 + 5.1047i \\ -0.0845 - 5.1047i \\ 4.9585 + 0.0000i \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, los polos de los modelos locales lineales del modelo por Takagi-Sugeno del péndulo H2AT son inestables.

En la siguiente sección se muestra la comparativa del sistema no lineal respecto al sistema Takagi-Sugeno.

### 3.3.1. Simulación del sistema no lineal y del sistema Takagi-Sugeno

*Objetivo de la simulación:* El objetivo de la simulación es el observar el comportamiento del péndulo H2AT en su representación no lineal y el sistema Takagi-Sugeno ante una entrada  $u(t)$  constante de  $30N$ . Para llevar a cabo la simulación se utilizan los parámetros de la Tabla 3.1. El paso de integración utilizado en la configuración de Matlab R2018b es  $T_e = 0.001s$ , las condiciones iniciales fueron  $x(0) = [0, 0, 0.005, 0]^T$ .

En las Figuras 3.5 y 3.6 se muestra el comportamiento de las variables de estado del sistema no lineal y del sistema Takagi-Sugeno, es decir se observa la dinámica que experimenta la posición  $x_1(t)$ , la velocidad  $x_2(t)$ , la posición angular  $x_3(t)$  y la velocidad angular  $x_4(t)$ . Se puede observar que el sistema Takagi-Sugeno sigue fielmente al sistema no lineal considerando los parámetros establecidos de las no linealidades. La respuesta se ve saturada debido a las restricciones físicas que se muestran en la Tabla 3.2.

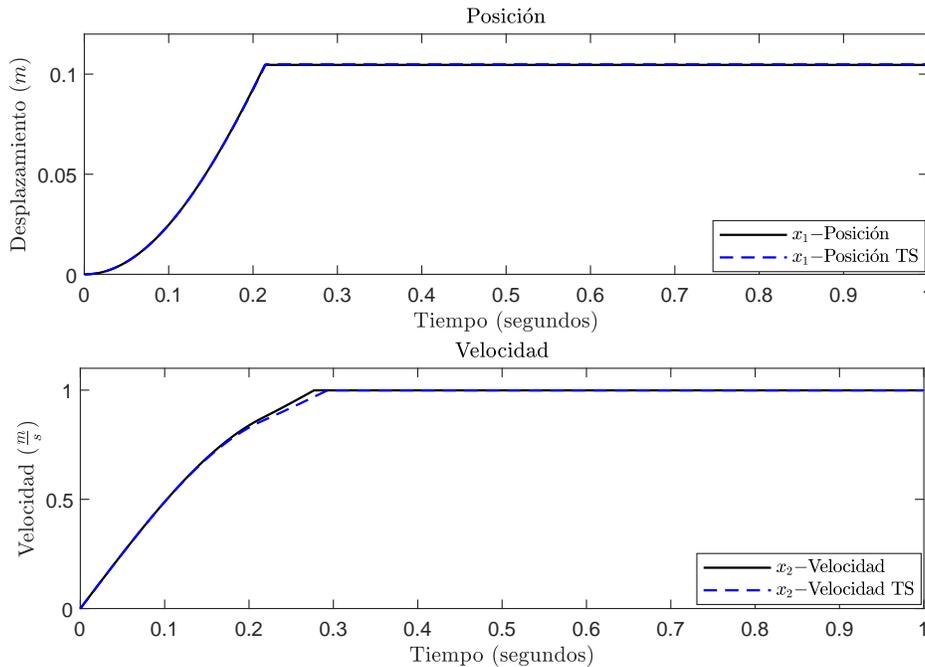


Fig. 3.5. Respuesta de la posición y velocidad NL y T-S

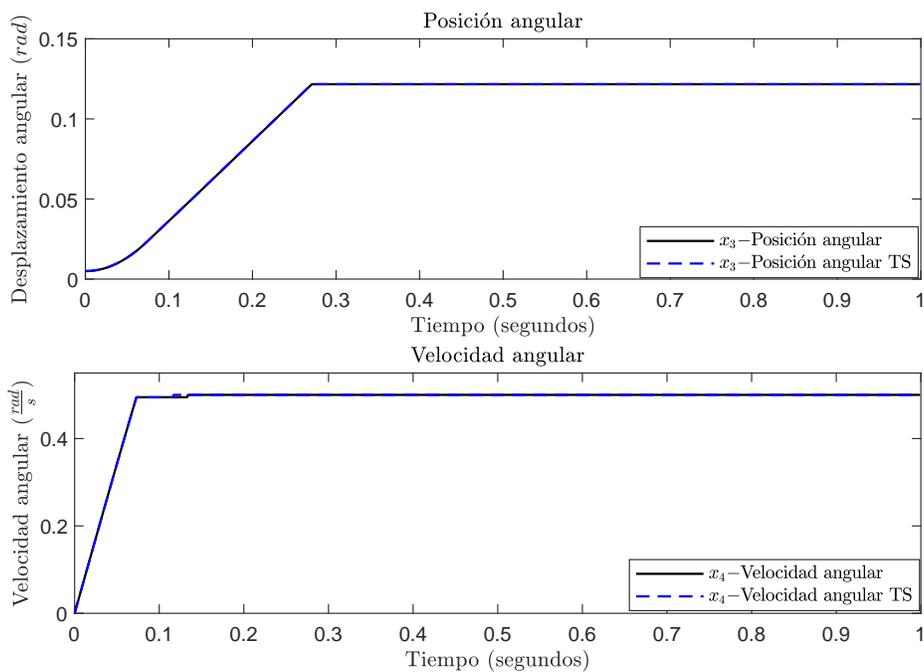


Fig. 3.6. Respuesta de la posición y velocidad angular NL y T-S

En la Figura 3.7 se muestran las funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno ante una entrada constante de  $30N$ . El comportamiento de las funciones de pertenencia se debe a la entrada constante del sistema.

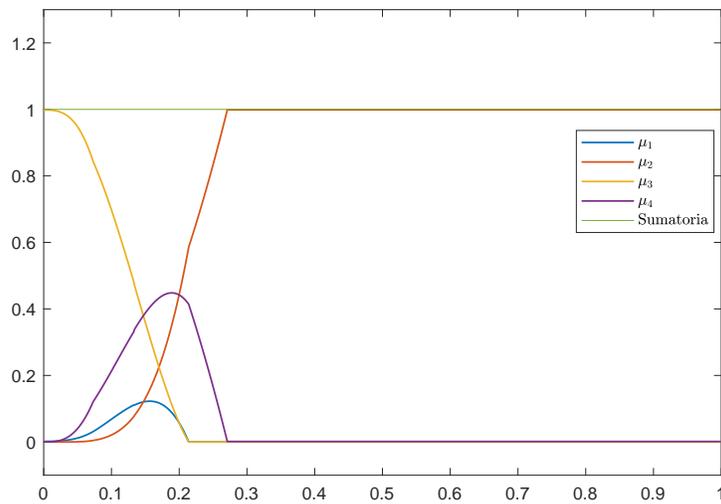


Fig. 3.7. Funciones de pertenencia del sistema Takagi-Sugeno

### 3.4. Conclusiones del capítulo

A lo largo de este capítulo se presentó el caso de estudio para el tema de tesis, el cual es un péndulo H2AT que representa la dinámica de una persona con lesión en la médula espinal. Dicho péndulo representa un sistema biomecánico que posee restricciones físicas con el propósito de acercarse a un sentido físico. Además considerando dichas restricciones propicio la reducción de no linealidades que posee el sistema al momento de aplicar el modelado Takagi-Sugeno.

Dicho modelado se llevó a cabo en lazo abierto colocando una entrada constante de  $30N$  para observar la dinámica de las variables de estado ante dicha entrada, considerando que las variables de estado se encuentran saturadas por las restricciones físicas anteriormente mencionadas. La comparación entre el sistema no lineal y el sistema Takagi-Sugeno utilizando el enfoque de sector no lineal muestra que el sistema T-S sigue fielmente la dinámica del sistema no lineal contemplado.

# Capítulo 4

## Control basado en el observador proporcional integral para sistemas Takagi-Sugeno del péndulo H2AT

### 4.1. Objetivo de diseño

Como se ha mencionado, el péndulo H2AT es un sistema inestable, este sistema posee 4 variables de estado, las cuales son la posición lineal  $x_1(t)$ , velocidad lineal  $x_2(t)$ , la posición angular  $x_3(t)$  y la velocidad angular  $x_4(t)$ . Sin embargo, a la salida solo se tiene disponible la posición lineal  $x_1(t)$  y la posición angular  $x_3(t)$ , es por ello que con ayuda del observador proporcional integral se estimarán las 4 variables de estado con el fin de aplicar un controlador por retro-alimentación de estados utilizando las estimaciones del observador proporcional integral.

### 4.2. Observador Proporcional integral

Considerando el sistema Takagi-Sugeno

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $x(t)$  es el vector de  $n$  estados,  $u(t)$  es el vector de  $l$  entradas del sistema,  $y(t)$  representa el vector de las  $p$  variables de salida medidas, las matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$  y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  son matrices conocidas,  $\delta(t) \in \mathbb{R}^\rho$  es el vector de variables premisas y  $\rho$  es el número de no linealidades del sistema.

Se asume que este sistema cumple con la propiedad de observabilidad:

$$\text{rango} \left[ C \quad CA_i \quad \dots \quad CA_i^{n-1} \right]^T = n, \forall i = 1, \dots, 4 \quad (4.2)$$

De igual forma se asume que el sistema (4.1) es estabilizable si:

$$\text{rango} \left[ \lambda I - A_i \quad B \right] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}^+, \forall i = 1, \dots, 4 \quad (4.3)$$

donde  $I$  es una matriz identidad y  $\lambda$  es un escalar complejo.

Para este sistema Takagi-Sugeno se diseñó un PIO debido a que en el vector de salida del sistema no se cuenta con todas las variables de estado disponibles, por lo que con ayuda del observador se estimarán todas las variables de estado del sistema. Las ecuaciones que describen al PIO se muestran a continuación:

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)) + Ju(t) \quad (4.4)$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - C \hat{x}(t) \quad (4.5)$$

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Qy(t) \quad (4.6)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector auxiliar de estado del observador proporcional integral,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y  $\hat{x}(t)$  que son los estados estimados de  $x(t)$  obtenidos por la ecuación algebraica (4.6) la cual es el vector de estimación del observador.  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $J$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas a determinar.

El error de estimación se define como:

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (4.7)$$

$$e(t) = \zeta(t) - \underbrace{[I_n - QC]}_T x(t) \quad (4.8)$$

donde  $[I_n - QC]$  se define como una matriz  $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  para definir el vector de error. De esta manera, la dinámica de error de estimación se puede expresar como:

$$\dot{e}(t) = \dot{\zeta}(t) - T \dot{x}(t) \quad (4.9)$$

Sustituyendo la ecuación (4.4) y el sistema (4.1) se obtiene:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) [N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t) + Ju(t) - T(A_i x(t) + Bu(t))] \quad (4.10)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) [N_i [e(t) + Tx(t)] + H_i v(t) + F_i y(t) + Ju(t) - TA_i x(t) - TBu(t)] \quad (4.11)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) [N_i e(t) + \underbrace{[N_i T + F_i C - TA_i]}_{N_i T + F_i C - TA_i = 0} x(t) + H_i v(t) + \underbrace{[J - TB]}_{J = TB} u(t)] \quad (4.12)$$

De tal forma, la dinámica de error de estimación es expresada como:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) [N_i e(t) + H_i v(t)] \quad (4.13)$$

Del mismo modo, la ecuación (4.5) puede ser reescrita como:

$$\dot{v}(t) = y(t) - C\hat{x}(t) \quad (4.14)$$

$$\dot{v}(t) = Cx(t) - C\hat{x}(t) \quad (4.15)$$

$$\dot{v}(t) = C[x(t) - \hat{x}(t)] \quad (4.16)$$

Utilizando la ecuación (4.6) y la ecuación (4.8) se obtiene:

$$\hat{x}(t) = \zeta(t) + Qy(t) \quad (4.17)$$

$$\hat{x}(t) = e(t) + \underbrace{[T + QC]}_{T + QC = I_n} x(t) \quad (4.18)$$

de donde  $\hat{x}(t) - x(t) = e(t)$ , por lo que la ecuación (4.16) puede expresarse como:

$$\dot{v}(t) = -Ce(t) \quad (4.19)$$

Suponiendo que las siguientes condiciones se cumplen

$$N_i T + F_i C - TA_i = 0 \quad (4.20)$$

$$J = TB \quad (4.21)$$

$$T + QC = I_n \quad (4.22)$$

La dinámica de error de estimación formada por las ecuaciones (4.13) y (4.19) se reescribe como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}_{\hat{\varphi}(t)} = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\varphi(t)} \quad (4.23)$$

si y solo si la matriz  $\mathbb{A}_i$  es estable, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , por lo que  $\hat{x}(t) = x(t)$  en un tiempo finito. Concluyendo así que la problemática a resolver es el determinar las matrices  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $J$  y  $Q$  cumpliéndose las condiciones de Sylvester mostradas en la ecuaciones (4.20)-(4.22)

### 4.2.1. Parametrización de las matrices del observador proporcional integral

En esta sección se expone la parametrización de las matrices del observador proporcional integral, empleando las condiciones algebraicas (4.20)-(4.22). A continuación se muestra el desarrollo de la condición (4.22).

$$\begin{bmatrix} T & Q \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}}_{\Sigma} = I_n \quad (4.24)$$

La solución particular de la ecuación (4.24) para obtener  $T$  y  $Q$  es:

$$T = \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{T_1}; \quad Q = \underbrace{\Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{Q_1} \quad (4.25)$$

Partiendo de la condición (4.20) y considerando los valores de  $T$  y  $Q$  obtenidas en (4.25).

$$N_i T + F_i C - T A_i = 0 \quad (4.26)$$

$$N_i [I_n - Q C] + F_i C - T A_i = 0 \quad (4.27)$$

$$N_i - N_i Q C + F_i C - T A_i = 0 \quad (4.28)$$

$$N_i + [F_i - N_i Q] C - T A_i = 0 \quad (4.29)$$

de donde se obtiene:

$$N_i = \underbrace{[N_i Q - F_i] C}_{K_i} + T A_i \quad (4.30)$$

$$N_i = K_i C + T A_i \quad (4.31)$$

Por lo que, la dinámica de error de estimación puede ser reescrita sustituyendo los valores de  $N_i$  en la ecuación (4.23):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\varphi}(t)} = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) \underbrace{\begin{bmatrix} T A_i + K_i C & H_i \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\varphi(t)} \quad (4.32)$$

Agrupando las variables conocidas y desconocidas se obtiene la siguiente ecuación donde  $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ :

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) \left( \underbrace{\begin{bmatrix} TA_i & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_{1i}} + \underbrace{\Omega \begin{bmatrix} K_i H_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{Y}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_2} \right) \varphi(t) \quad (4.33)$$

#### 4.2.2. Análisis de estabilidad del observador

En esta sección se aborda el análisis de estabilidad basado en el método de Lyapunov. Para lograrlo, se propone resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI) con el fin de obtener la matriz  $\mathbb{Y}_i$ .

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\varphi(t)) = \varphi(t)^T \mathbf{X} \varphi(t) > 0 \quad (4.34)$$

donde  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$  y  $X_1 = X_1^T$  con  $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$  y  $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$ .

Derivando la ecuación (4.34) se tiene:

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \dot{\varphi}(t)^T \mathbf{X} \varphi(t) + \varphi(t)^T \mathbf{X} \dot{\varphi}(t) < 0 \quad (4.35)$$

sustituyendo el valor de (4.33) se obtiene:

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \varphi(t)^T \left[ (\mathbb{A}_{1i}^T + \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T) \mathbf{X} + \mathbf{X} (\mathbb{A}_{1i} + \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \right] \varphi(t) < 0 \quad (4.36)$$

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \varphi(t)^T \left[ \mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i} + \mathbf{X} \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 \right] \varphi(t) < 0 \quad (4.37)$$

En este caso la desigualdad  $\dot{V}(\varphi(t)) < 0$  es válida siempre que  $\varphi(t) \neq 0$ , siempre y cuando la siguiente desigualdad se cumpla

$$\mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i} + \mathbf{X} \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (4.38)$$

Las matrices desconocidas de la ecuación (4.38) son  $\mathbf{X}$  y  $\mathbb{Y}_i$ , donde se puede observar que existe una bilinealidad. Por lo que se hace un arreglo, el cual consiste en agrupar  $\mathbb{R}_i = \mathbf{X} \mathbb{Y}_i$ :

$$\mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} + \mathbb{A}_2^T \mathbb{R}_i^T + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i} + \mathbb{R}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (4.39)$$

Expresado en forma matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} A_i^T T^T & C^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \mathbb{R}_i^T + \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i T & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R}_i \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (4.40)$$

Para la obtención de las matrices desconocidas se tiene que :

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}^{-1}\mathbb{R}_i \quad (4.41)$$

Se despeja  $\mathbf{Y}_i$  para obtener las matrices  $K_i$  y  $H_i$ , de tal forma se obtiene:

$$\begin{bmatrix} K_i & H_i \end{bmatrix} = \Omega^+ \mathbf{X}^{-1} \mathbb{R}_i \quad (4.42)$$

donde:

$$K_i = \Omega^+ \mathbf{X}^{-1} \mathbb{R}_i \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$H_i = \Omega^+ \mathbf{X}^{-1} \mathbb{R}_i \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

La desigualdad (4.40) es programada en Matlab 2018b utilizando la herramienta Yalmip versión R20190425.

### 4.2.3. Validación del observador proporcional integral

A continuación se muestra la validación del observador proporcional integral para sistemas Takagi-Sugeno aplicado al caso de estudio.

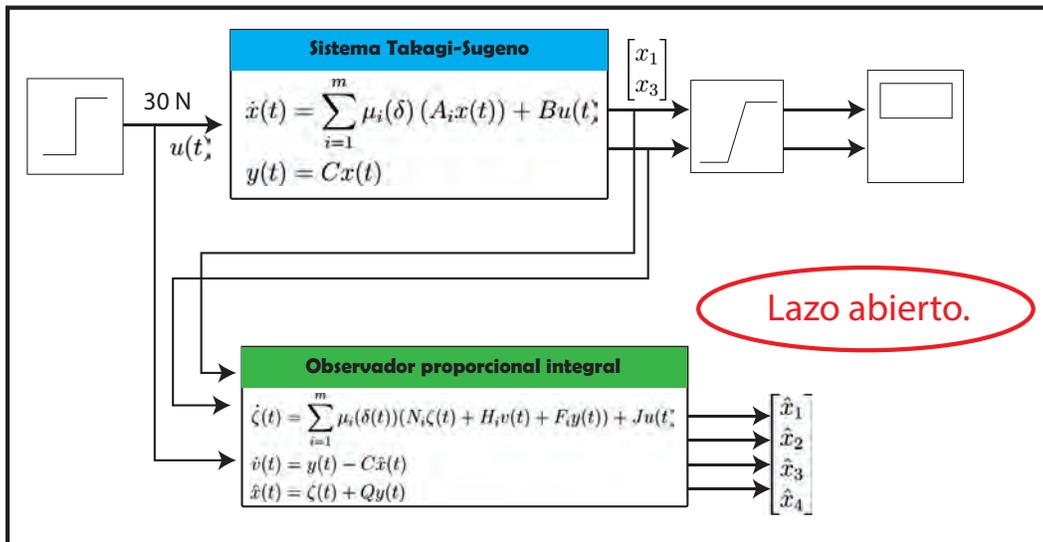


Fig. 4.1. Diagrama del observador PI.

En la Figura 4.1 se muestra el esquema de simulación donde se valorará el funcionamiento de este observador en lazo abierto con una entrada constante de  $30N$ , esto debido a la capacidad de par máximo que algunos actuadores pueden generar, cabe recalcar que los estados se encuentran saturados debido a las restricciones físicas que se establecieron en la sección anterior y la naturaleza inestable del sistema. Los estados disponibles del sistema son  $x_1(t)$  y  $x_3(t)$ , lo que se busca estimar las cuatro variables del sistema.

#### 4.2.4. Simulación del observador proporcional integral

*Objetivo de la simulación:* El objetivo de simulación es verificar que la estimación de las 4 variables de estado del modelo del péndulo H2AT ante una entrada  $u(t)$  constante de  $30N$ . Para llevar a cabo la simulación se utilizan los parámetros de la Tabla 3.1. El paso de integración utilizado en la configuración de Matlab R2018b es  $T_e = 0.001s$ , las condiciones iniciales fueron  $x(0) = [0, 0, 0.005, 0]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [0, 0, 0.005, 0]^T$  con una entrada constante de  $30N$ .

Las ganancias obtenidas se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{bmatrix} 135.8998 & 0.2258 \\ 2.2123 \times 10^4 & 29.2137 \\ -0.5894 & 136.2143 \\ -171.6419 & 2.2260 \times 10^4 \end{bmatrix}, & F_2 &= \begin{bmatrix} 135.8998 & 0.2248 \\ 2.2123 \times 10^4 & 29.0640 \\ -0.5885 & 136.2143 \\ -171.4921 & 2.2260 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} 136.1213 & 0.6906 \\ 2.2167 \times 10^4 & 122.1748 \\ -0.6728 & 136.1033 \\ -188.3321 & 2.2237 \times 10^4 \end{bmatrix}, & F_4 &= \begin{bmatrix} 136.1213 & 0.6907 \\ 2.2167 \times 10^4 & 122.1968 \\ -0.6729 & 136.1033 \\ -188.3541 & 2.2237 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 H_1 &= \begin{bmatrix} 0.6274 & 9.1885 \times 10^{-5} \\ 102.3045 & -0.0144 \\ 8.4576 \times 10^{-5} & 0.6815 \\ -0.0132 & 111.1925 \end{bmatrix}, & H_2 &= \begin{bmatrix} 0.8458 & 6.7259 \times 10^{-5} \\ 137.9246 & -0.0105 \\ 1.1402 \times 10^{-4} & 0.4989 \\ -0.0178 & 81.3913 \end{bmatrix} \\
 H_3 &= \begin{bmatrix} 1.1727 & 1.0507 \times 10^{-4} \\ 191.2334 & -0.0164 \\ 1.5809 \times 10^{-4} & 0.7793 \\ -0.0247 & 127.1418 \end{bmatrix}, & H_4 &= \begin{bmatrix} 1.3405 & 1.6309 \times 10^{-4} \\ 218.5938 & -0.0255 \\ 1.8071 \times 10^{-4} & 1.2097 \\ -0.0282 & 197.3636 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} -271.7995 & -0.4515 \\ -4.4279 \times 10^4 & -52.4122 \\ 1.1789 & -272.4287 \\ 273.5509 & -4.4487 \times 10^4 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} -271.7995 & -0.4497 \\ -4.4279 \times 10^4 & -52.1127 \\ 1.1770 & -272.4287 \\ 273.2514 & -4.4487 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} -272.2426 & -1.3812 \\ -4.4367 \times 10^4 & -238.3344 \\ 1.3456 & -272.2067 \\ 306.9313 & -4.4443 \times 10^4 \end{bmatrix}, & K_4 &= \begin{bmatrix} -272.2426 & -1.3814 \\ -4.4367 \times 10^4 & -238.3784 \\ 1.3458 & -272.2067 \\ 306.9754 & -4.4443 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 N_1 &= \begin{bmatrix} -271.7995 & 0.5 & -0.4515 & 0 \\ -4.4312 \times 10^4 & 0.0390 & -46.3969 & -0.0147 \\ 1.1789 & 0 & -272.4287 & 0.5 \\ 203.8181 & 0.0818 & -4.4455 \times 10^4 & -0.0195 \end{bmatrix} \\
 N_2 &= \begin{bmatrix} -271.7995 & 0.5 & -0.4497 & 0 \\ -4.4312 \times 10^4 & 0.0390 & -46.0975 & -0.0147 \\ 1.1770 & 0 & -272.4287 & 0.5 \\ 203.5185 & 0.0818 & -4.4455 \times 10^4 & -0.0195 \end{bmatrix} \\
 N_3 &= \begin{bmatrix} -272.2429 & 0.5 & -1.3812 & 0 \\ -4.4401 \times 10^4 & -0.0614 & -232.3191 & 0.0231 \\ 1.3456 & 0 & -272.2067 & 0.5 \\ 237.1985 & -0.1287 & -4.4411 \times 10^4 & -0.0307 \end{bmatrix} \\
 N_4 &= \begin{bmatrix} -272.2426 & 0.5 & -1.3814 & 0 \\ -4.4401 \times 10^4 & -0.0614 & -232.3632 & 0.0231 \\ 1.3458 & 0 & -272.2067 & 0.5 \\ 237.2426 & -0.1287 & -4.4411 \times 10^4 & -0.0307 \end{bmatrix} \\
 J &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1691 \\ 0 \\ 0.2243 \end{bmatrix}, & Q &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & T &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 871.0560 & -4.3559 & -0.6218 & 0.0025 & 0 & 0 \\ -4.3559 & 0.0267 & 0.0025 & -8.4575 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ -0.6218 & 0.0025 & 871.8118 & -4.3580 & 0 & 0 \\ 0.0025 & -8.4575 \times 10^6 & -4.3580 & 0.0267 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 355.0789 & -6.7761 \times 10^{-28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.7761 \times 10^{-28} & 355.0789 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La respuesta del sistema se muestra saturada debido a las restricciones físicas que se muestran en la Tabla 3.2.

En la Figura 4.2 se muestra el comportamiento de las variables de estado del sistema T-S, es decir,

se observa la dinámica que experimenta la posición lineal  $x_1(t)$  y la velocidad lineal  $x_2(t)$ .

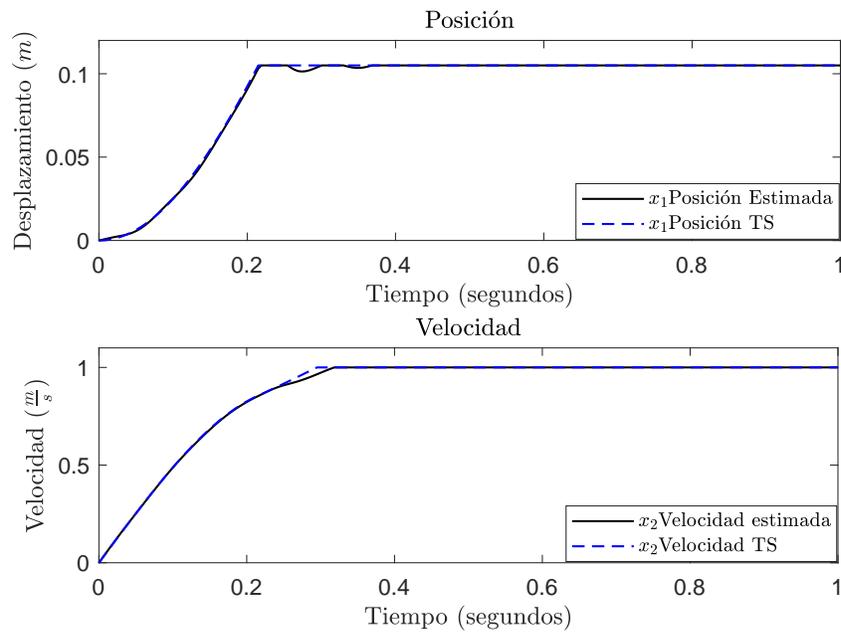


Fig. 4.2. Estimación de la posición y velocidad NL y T-S

En la Figura 4.3 se muestra la posición angular  $x_3(t)$  y la velocidad angular  $x_4(t)$

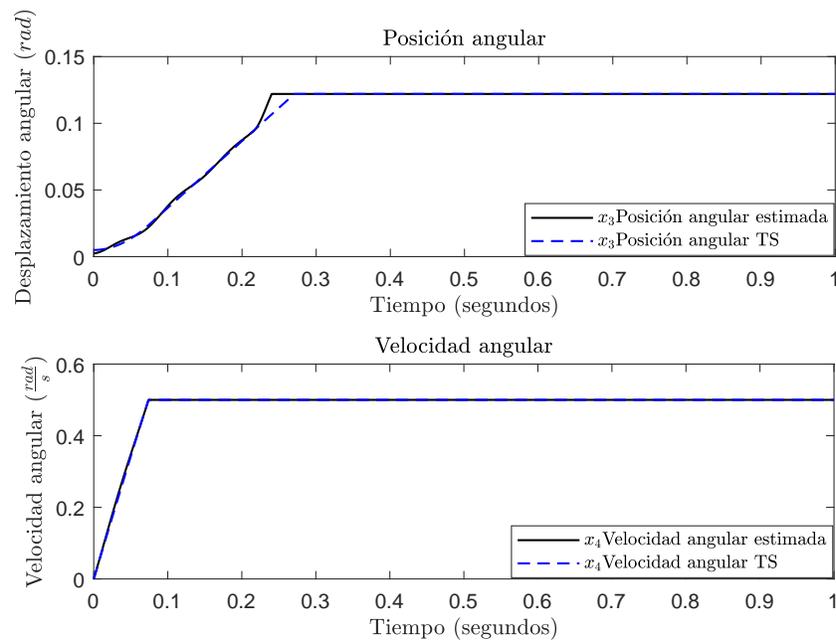


Fig. 4.3. Estimación de la posición y velocidad angular NL y T-S

Se puede observar que existe una ligera diferencia en el transitorio de la señal, sin embargo, la señal en estado estable del sistema Takagi-Sugeno y la estimación del observador proporcional integral convergen considerando los parámetros establecidos de las no linealidades.

## 4.3. Diseño del controlador

### 4.3.1. Objetivo del diseño del controlador

De momento, se ha abordado el caso de estudio del péndulo H2AT en lazo abierto el sistema, debido a esto se desarrollará un controlador por retro-alimentación de estados para cerrar el lazo del sistema. Esto con el objetivo de regular la posición vertical del péndulo H2AT.

El objetivo de control es el de regulación del sistema, es decir, regular la posición vertical del péndulo H2AT, generando así que las cuatro variables del sistema se estabilicen en el valor de cero para lograr la regulación del sistema; esto mediante el diseño de un controlador por retro-alimentación de estados utilizando la estimación del vector de estados con ayuda del observador proporcional integral con el propósito de regular al sistema.

### 4.3.2. Controlador por retroalimentación de estados

En esta sección se lleva a cabo el diseño de un controlador por retro-alimentación de estados. El sistema Takagi-Sugeno que describe la dinámica del péndulo H2AT es:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i x(t)) + B u(t) \quad (4.45)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (4.46)$$

La ecuación de la ley de control posee la siguiente forma:

$$u(t) = -K x(t) \quad (4.47)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^n$  es una matriz de ganancia. Utilizando el esquema de control propuesto se tiene como objetivo la regulación del sistema, en la cual podemos utilizar una entrada  $u(t)$ , esto se describe en la ecuación (4.47).

La dinámica en lazo cerrado del sistema es:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i x(t)) - BKx(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.48}$$

Al agrupar la ecuación (4.48) se obtiene la expresión en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t))(A_i - BK)x(t)\tag{4.49}$$

### Análisis de estabilidad del controlador

Para el controlador se considera la siguiente función de Lyapunov para realizar el análisis de estabilidad:

$$V(x(t)) = x(t)^T S x(t) > 0\tag{4.50}$$

donde  $S > 0$ . La derivada de  $V(x(t))$  a lo largo de la solución de (4.49) es:

$$\dot{V}(\varphi(t)) = x(t)^T S \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T S x(t) < 0\tag{4.51}$$

sustituyendo valores se obtiene que:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T [S(A_i - BK) + (A_i^T - B^T K^T)S] x(t) < 0\tag{4.52}$$

En este caso, la desigualdad  $\dot{V}(t) < 0$  es válida siempre que  $x(t) \neq 0$ , siempre que la siguiente LMI se cumpla:

$$A_i S - BK^T S + S A_i^T - S K^T B^T < 0\tag{4.53}$$

Finalmente, en la ecuación (4.53) se obtiene la desigualdad matricial lineal a resolver para el controlador.

La ecuación (4.53) es programada en Matlab 2018b utilizando la herramienta Yalmip versión R20190425.

### 4.3.3. Validación del controlador basado en el observador PI

A continuación se muestra la validación del controlador basado en el observador PI para sistemas Takagi-Sugeno aplicado al caso de estudio del péndulo H2AT.

En la Figura 4.4 se muestra el esquema de simulación donde se valora la ley de control ante una perturbación en la entrada.

---

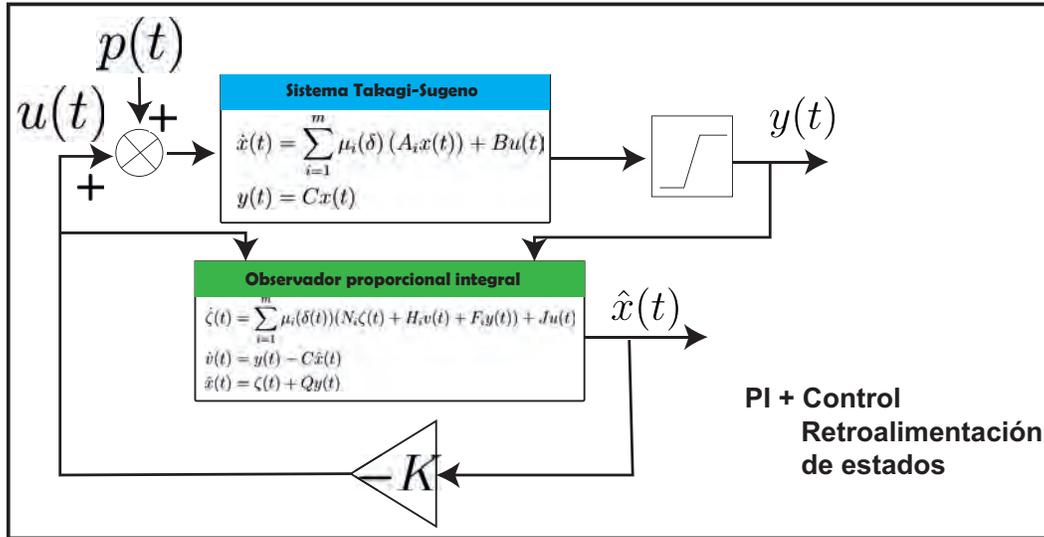


Fig. 4.4. Diagrama del controlador.

#### 4.3.4. Simulación del controlador basado en el observador proporcional integral

*Objetivo de la simulación:* El objetivo de la simulación es demostrar que la ley de control obtenida a partir de los estados estimados mediante el uso del observador proporcional integral regule el comportamiento del caso de estudio el cual es el péndulo H2AT. Para llevar a cabo la simulación se utilizan los parámetros de la Tabla 3.1. El paso de integración utilizado en la configuración de Matlab R2018b es  $T_e = 0.001s$ , las condiciones iniciales fueron  $x(0) = [0, 0, 0.005, 0]^T$ ,  $x_{TS}(0) = [0, 0, 0.005, 0]^T$  y  $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ .

Las ganancias obtenidas del controlador se muestran a continuación:

$$K = [2.7863 \times 10^4 \quad 6.3511 \times 10^3 \quad -2.4611 \times 10^4 \quad 4.997 \times 10^3]$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.9857 & 0.4503 & -1.7741 & -0.3528 \\ 0.4503 & 0.1028 & -0.4028 & -0.0805 \\ -1.7741 & -0.4028 & 1.5866 & 0.3156 \\ -0.3528 & -0.0805 & 0.3156 & 0.0631 \end{bmatrix}$$

Para la simulación, se considera una perturbación externa en la entrada la cual altera el péndulo H2AT, con una magnitud de  $-2N$  y  $-4N$ . Tal como se muestra en la Figura 4.5.

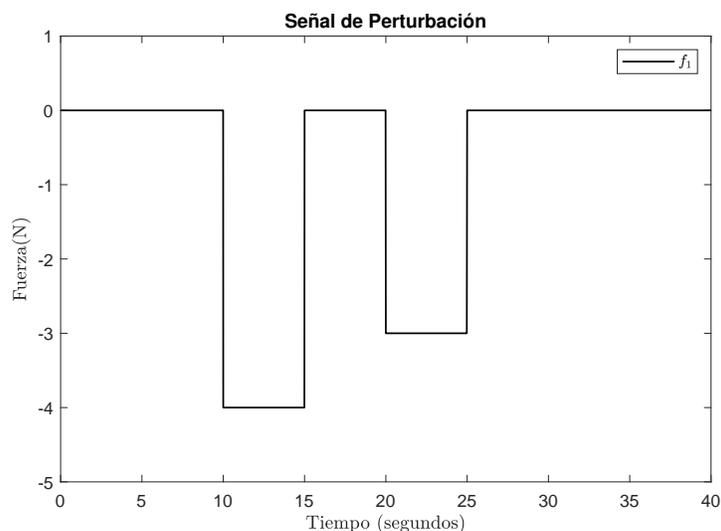


Fig. 4.5. Señal de perturbación a la entrada

En la Figura 4.6 se observa el comportamiento de la posición  $x_1(t)$  y la velocidad  $x_2(t)$  considerando el control por retro-alimentación con el fin de regular el sistema, se observa una variación de desplazamiento ( $m$ ) y velocidad ( $\frac{m}{s}$ ) debido a que existe una perturbación tal como se muestra en la Figura 4.5.

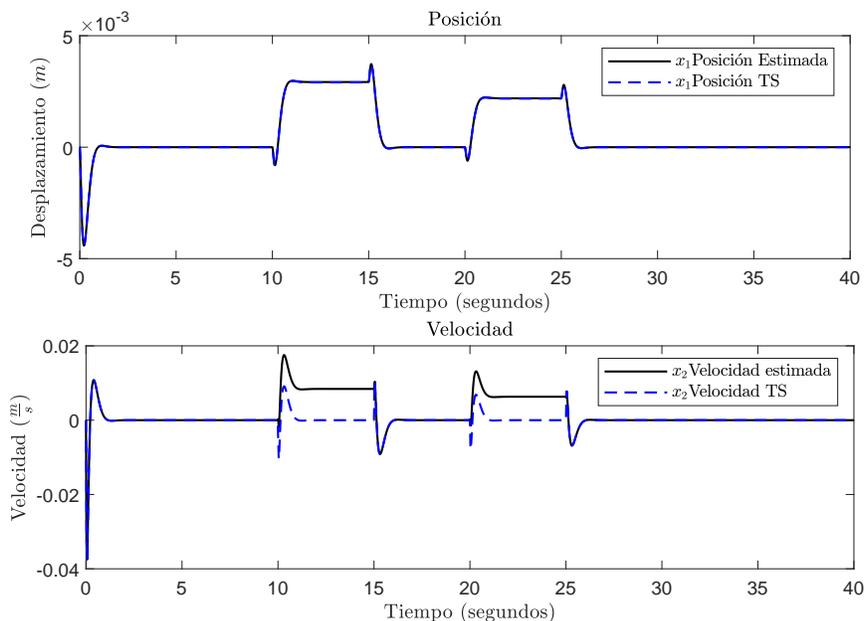


Fig. 4.6. Respuesta de la posición y velocidad

En la Figura 4.7 se muestra el comportamiento de la posición angular  $x_3(t)$  y la velocidad angular  $x_4(t)$  considerando el control por retro-alimentación con el fin de regular el sistema, se observa

una variación de desplazamiento angular ( $rad$ ) y velocidad angular ( $\frac{rad}{s}$ ) debido a que existe una perturbación mostrada en la Figura 4.5.

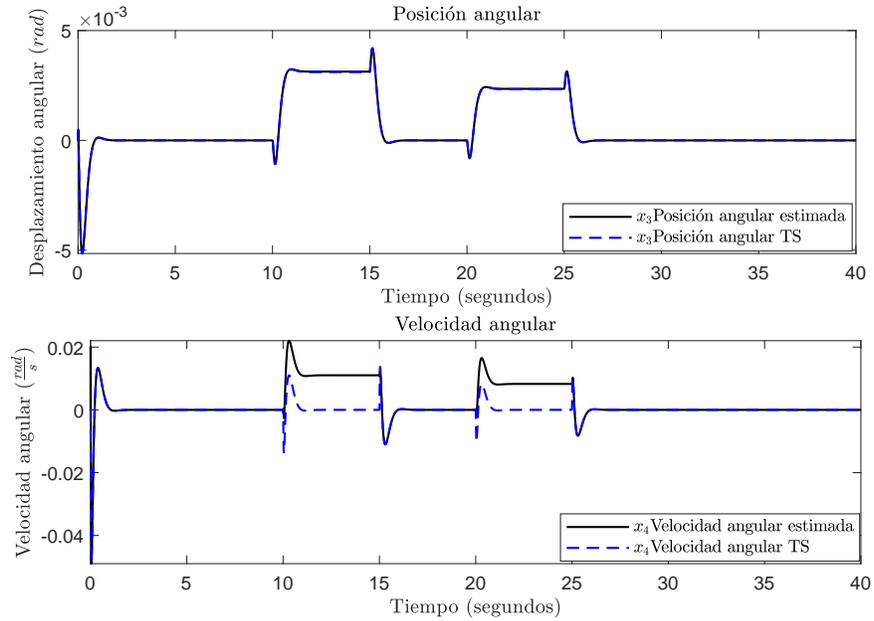


Fig. 4.7. Respuesta de la posición y velocidad angular

En la Figura 4.8 se puede observar la gráfica de la ley del control del sistema ante una perturbación. Esta ley de control regula el comportamiento del péndulo H2AT.

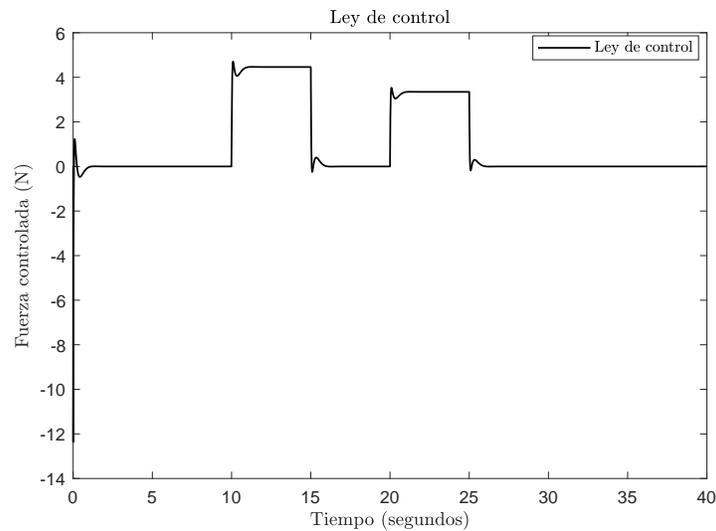


Fig. 4.8. Respuesta de la ley del control

Se nota una variación en la ley de control, esto debido a la perturbación que se genera en la Figura 4.5 la cual perturbe la señal de control, sin embargo, la señal de control regula nuevamente al sistema.

Una vez que se concluyó las simulaciones del controlador basado en el observador proporcional integral se concluye que la ley de control regula a las cuatro variables de estados aún cuando se contempló una perturbación en la entrada del sistema.

## 4.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el diseño de un controlador basado en el observador PI para sistemas Takagi-Sugeno, aplicado al péndulo H2AT que representa la dinámica de una persona con lesión en la médula, esto con el objetivo de regular el sistema, es decir, regular el comportamiento en un punto de equilibrio de manera vertical.

En la primera parte se desarrolló un observador proporcional integral con el fin de estimar las variables no medibles del sistema que en este caso son la velocidad lineal  $x_2(t)$  y la velocidad angular  $x_4(t)$ . Para el diseño se mostró la parametrización, análisis de estabilidad y validación del observador proporcional integral. La comprobación del análisis de estabilidad se llevó a cabo utilizando la solución de las LMIs. Por otra parte, la validación se realizó en lazo abierto con una entrada constante de  $30N$  con el propósito de verificar el resultado obtenido.

Para el diseño del controlador por retro-alimentación de estados se muestra el análisis de estabilidad del controlador, donde el objetivo de control es la regulación. Para verificar la ley de control, en simulación se añade una perturbación a la entrada y ver como afecta a la ley de control y a los estados del sistema. se comprobó la estabilidad del controlador mediante el uso de LMIs por medio de una función candidata de Lyapunov.

# Capítulo 5

## Diseño del observador funcional para sistemas Takagi-Sugeno del péndulo H2AT

En este capítulo se presenta el diseño de un observador funcional dinámico generalizado bajo la representación de sistemas Takagi-Sugeno. Este tipo de observador posee dos enfoques, uno de ellos es la estimación de una ley de control en términos de los estados para regular el sistema. En esta primera parte se lleva a cabo la estimación de una ley de control para lograr estabilizar el péndulo H2AT.

En la Figura 5.1 se muestra este primer enfoque.

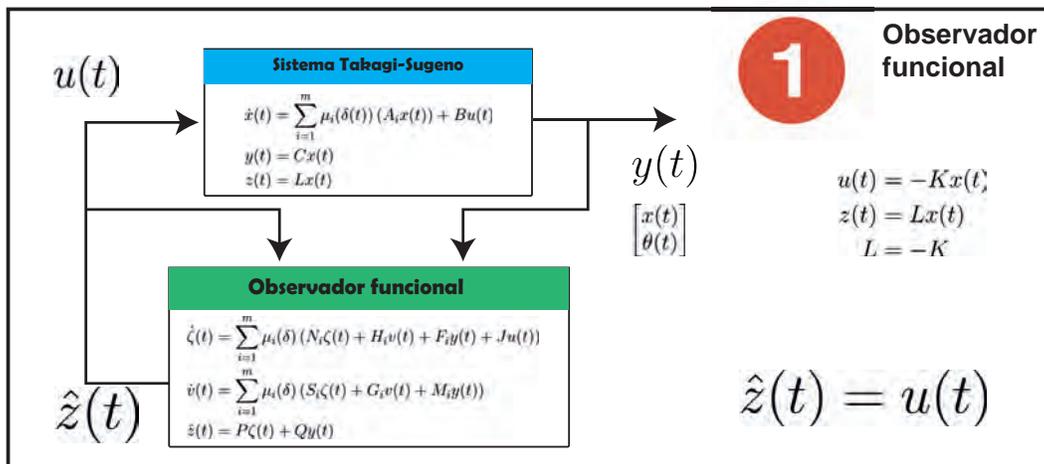


Fig. 5.1. Primer enfoque del observador funcional.

## 5.1. Observador funcional (Estimación de una ley de control)

Considere un sistema no lineal bajo la representación Takagi-Sugeno como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) (A_i x(t)) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) \\ z(t) &= L x(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $x(t)$  es el vector de  $n$  estados,  $u(t)$  es el vector de  $l$  entradas del sistema,  $y(t)$  representa el vector de las  $p$  variables de salida medidas.  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$  son matrices conocidas,  $\delta(t) \in \mathbb{R}^\rho$  es el vector de variables premisas,  $\mu_i(\delta)$  son las funciones  $i$ -ésimas de ponderación y  $m$  es el número de modelos locales lineales, el cual es determinado por  $m = 2^\rho$ , siendo  $\rho$  el número de no linealidades en el sistema.

Para llevar a cabo el desarrollo del observador funcional dinámico generalizado es necesario verificar la propiedad de observabilidad funcional, la cual es:

$$\text{rango} \left( \begin{bmatrix} LA_i \\ CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} \right) = \text{rango} \left( \begin{bmatrix} CA_i \\ C \\ L \end{bmatrix} \right), \forall_i = 1, \dots, m\tag{5.2}$$

Considerando el observador funcional dinámico generalizado :

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t) + J u(t))\tag{5.3}$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) (S_i \zeta(t) + G_i v(t) + M_i y(t))\tag{5.4}$$

$$\hat{z}(t) = P \zeta(t) + Q y(t)\tag{5.5}$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector de estado del observador proporcional integral,  $v(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y  $\hat{z}(t)$  es la función de estimación del observador.  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$ ,  $S_i$ ,  $G_i$ ,  $M_i$ ,  $P$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas a determinar.

Siendo  $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  una matriz para obtener:

$$\varepsilon(t) = \zeta(t) - Tx(t) \quad (5.6)$$

Desarrollando la ecuación de la dinámica del error (5.6) se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\zeta}(t) - T\dot{x}(t) \quad (5.7)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) [N_i \varepsilon(t) + N_i T + F_i C - TA_i x(t) + H_i v(t) + J - TBu(t)] \quad (5.8)$$

Sustituyendo la ecuación del error de estimación (5.6) en las ecuaciones (5.4) y (5.5), se reescribe como:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) [S_i \varepsilon(t) + S_i T + M_i C x(t) + G_i v(t)] \quad (5.9)$$

$$\hat{z}(t) = P\varepsilon(t) + PT + QCx(t) \quad (5.10)$$

suponiendo que las siguientes condiciones se cumplen

$$N_i T + F_i C - TA_i = 0 \quad (5.11)$$

$$J = TB \quad (5.12)$$

$$S_i T + M_i C = 0 \quad (5.13)$$

$$PT + QC = L \quad (5.14)$$

por lo que, la dinámica de error de estimación formada por las ecuaciones (5.8) y (5.9) se reescribe como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & G_i \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}_i} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Del mismo modo, utilizando la condición d), la ecuación (5.10) es expresada como:

$$\hat{z}(t) - z(t) = e_z(t) = Pe(t) \quad (5.16)$$

donde en este caso, las matrices  $\mathbb{A}_i$  son estables si y solo si  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = 0$ ,  $\forall_i = 1, \dots, m$

### 5.1.1. Parametrización del observador funcional

En esta sección se expone la parametrización de las matrices del observador funcional. Considere una matriz cualquiera de rango fila completo  $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que  $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  es una matriz de rango

columna completo, además se considera una matriz  $\Omega = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}$ .

Las ecuaciones (5.13)-(5.14) pueden ser descritas como:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

la ecuación (5.17) debe cumplir lo siguiente para tener una solución:

$$\text{rango} \left( \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} \right) = \text{rango} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} T \\ C \\ L \end{bmatrix}}_{\Omega} \right) = n \quad (5.18)$$

Al cumplirse esta condición, existen dos matrices de dimensiones  $T \in \mathbb{R}^{q_0}$  y  $K \in \mathbb{R}^{q_0}$  tal que:

$$T + KC = E \quad (5.19)$$

la cual se reescribe como:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix}}_{\Omega} = E \quad (5.20)$$

Resolviendo la ecuación (5.20) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} T & K \end{bmatrix} = E\Omega^+ \quad (5.21)$$

la cual se descompone obteniendo:

$$T = E\Omega^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad K = E\Omega^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Considerando a la matriz  $T$  de la ecuación (5.19) en la ecuación (5.11) se puede reescribir como:

$$N_i E + K_i C = T A_i \quad (5.23)$$

donde  $K_i = F_i - N_i K$ , la ecuación (5.23) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} N_i & K_i \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}}_{\Sigma} = T A_i \quad (5.24)$$

La solución general de la ecuación (5.24) esta dada por:

$$\begin{bmatrix} N_i & K_i \end{bmatrix} = T A_i \Sigma^+ - Z_i (I_{n+p} - \Sigma \Sigma^+) \quad (5.25)$$

donde  $Z_i$  es una matriz de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios.

La ecuación (5.25) puede ser reescrita como:

$$N_i = \underbrace{TA_i\Sigma^+ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{N_{1i}} - \underbrace{Z_i [I_{n+p} - \Sigma\Sigma^+]}_{N_2} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$K_i = \underbrace{TA_i\Sigma^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}}_{K_{1i}} - \underbrace{Z_i [I_{n+p} - \Sigma\Sigma^+]}_{K_2} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Del mismo modo, utilizando la ecuación (5.19) en la ecuación (5.17) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

reescribiendo la ecuación (5.19) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & -K \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \Sigma \quad (5.29)$$

Sustituyendo la ecuación (5.29) en (5.28) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & -K \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

aplicando la solución general

$$\begin{bmatrix} S_i & M_i \\ P & Q \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \Sigma^+ - \begin{bmatrix} W_{1i} \\ W_{2i} \end{bmatrix} [I_{n+p} - \Sigma\Sigma^+] \right) \begin{bmatrix} I_n & K \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

donde  $W_{1i}$  y  $W_{2i}$  son matrices de dimensiones apropiadas con elementos arbitrarios. Encontrando así las matrices  $S_i$ ,  $M_i$ ,  $P$  y  $Q$

$$S_i = -W_{1i} [I_{n+p} - \Sigma\Sigma^+] \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$M_i = -W_{1i} [I_{n+p} - \Sigma\Sigma^+] \begin{bmatrix} K \\ I_p \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$P = L\Sigma^+ \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} - W_{2i}[I - \Sigma\Sigma^+] \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$Q = L\Sigma^+ \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} - W_{2i}[I - \Sigma\Sigma^+] \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Se asume que  $W_{2i} = 0$  por simplicidad. Al usar la ecuación (5.26) y (5.32) la dinámica de error del observador (5.15) se reescribe como:

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) (\mathbb{A}_{1i} - \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2) \varphi(t) \quad (5.36)$$

donde  $\mathbb{A}_{1i} = \begin{bmatrix} N_{1i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{Y}_i = \begin{bmatrix} Z_i & H_i \\ W_{1i} & G_i \end{bmatrix}$  y  $\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}$ .

El siguiente paso es encontrar la matriz  $\mathbb{Y}_i$  que asegure la estabilidad del observador (5.36).

En la siguiente sección, se aborda el análisis de estabilidad basado en el método de Lyapunov. Para lograrlo, se propone resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI) con el fin de obtener la matriz  $\mathbb{Y}_i$ .

### 5.1.2. Análisis de estabilidad del observador funcional

En esta sección se lleva a cabo el análisis de estabilidad de la dinámica del error de estimación de la Ecuación (5.36). Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\varphi(t)) = \varphi(t)^T \mathbf{X} \varphi(t) > 0 \quad (5.37)$$

donde  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} > 0$  y  $X_1 = X_1^T$  con  $X_1 \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0}$  y  $X_2 \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1}$ .

Derivando la ecuación (5.37) se tiene:

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \dot{\varphi}(t)^T \mathbf{X} \varphi(t) + \varphi(t)^T \mathbf{X} \dot{\varphi}(t) < 0 \quad (5.38)$$

sustituyendo el valor de (5.36) se obtiene:

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \varphi(t)^T \left[ \mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} - \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i} - \mathbf{X} \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 \right] \varphi(t) < 0 \quad (5.39)$$

En este caso la desigualdad  $\dot{V}(\varphi(t)) < 0$  es válida siempre que  $\varphi(t) \neq 0$ , siempre y cuando la siguiente desigualdad se cumpla

$$\mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} - \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i} - \mathbf{X} \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 < 0 \quad (5.40)$$

Las matrices desconocidas de la ecuación (5.40) son  $\mathbf{X}$  y  $\mathbb{Y}_i$ , por lo cual la ecuación (5.40) puede ser reescrita como:

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_i + (\mathcal{B}\mathcal{X}_i)^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (5.41)$$

donde  $\mathcal{B} = -\mathbb{A}_2^T$ ,  $\mathcal{X}_i = \mathbb{Y}_i^T \mathbf{X}$ ,  $\mathcal{D}_i = \mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i}$ . Posteriormente, utilizando el lema de eliminación (Skelton et al., 2017), la desigualdad (5.41) es equivalente a:

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0, \quad \mathcal{B} \mathcal{B}^T > 0 \quad (5.42)$$

Finalmente en la ecuación (5.42) se obtiene la desigualdad matricial lineal a resolver. Donde las matrices  $\mathbb{Y}_i$  son parametrizadas de la siguiente manera:

$$\mathbb{Y}_i = \mathbf{X}^{-1} \left( -\sigma \mathcal{B}^T + \sqrt{\sigma} \mathcal{L} \Gamma_i^{1/2} \right)^T \quad (5.43)$$

donde  $\mathcal{L}$  es cualquier matriz tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$  y  $\sigma > 0$  es cualquier escalar tal que:

$$\Gamma_i = \sigma \mathcal{B} \mathcal{B}^T - \mathcal{D}_i > 0 \quad (5.44)$$

Finalmente se muestra una secuencia de pasos a seguir para desarrollar el diseño de un observador funcional:

1. Elegir una matriz  $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que la matriz  $\Sigma$  sea de rango completo.
2. Calcular las matrices  $N_{1i}$ ,  $N_2$ ,  $T$ ,  $K$ ,  $P$  y  $Q$ .
3. Resolver las LMIs de la ecuación (5.42).
4. Mediante la ecuación (5.43) obtener las matrices  $\mathbb{Y}_i$ .
5. Calcular las demás matrices del observador funcional dinámico generalizado utilizando (5.27) y (5.26) para obtener  $N_i$  y  $K_i$  para calcular  $S_i$ ,  $M_i$ ,  $P$  y  $Q$ , donde la ecuación (5.31) tomando la matriz  $W_{2i} = 0$

### 5.1.3. Validación del observador funcional

A continuación se muestra la validación del controlador basado en el observador funcional dinámico generalizado para sistemas Takagi-Sugeno aplicado al caso de estudio del péndulo H2AT. En la Figura 5.9 se muestra el esquema de simulación donde se valora la ley de control ante una perturbación en la entrada.

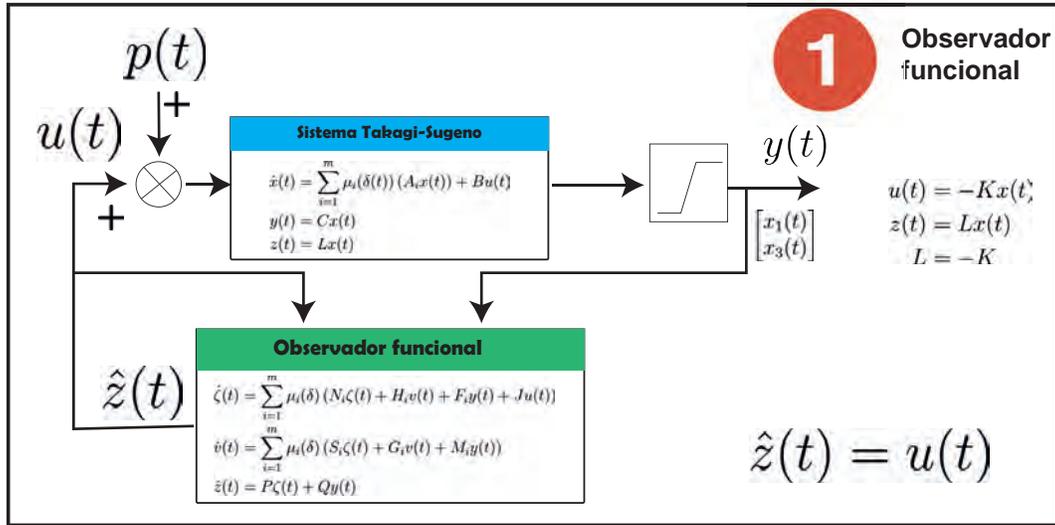


Fig. 5.2. Diagrama del primer enfoque observador funcional.

#### 5.1.4. Simulación del observador funcional

*Objetivo de simulación:* En esta sección se muestra la estimación de una ley de control que regule el sistema, es decir, regular la posición vertical del péndulo H2AT, generando así que las cuatro variables del sistema se establezcan en el valor de cero para lograr la regulación del sistema. Los parámetros para la validación del observador funcional se utilizó un paso de integración de  $T_e = 0.001s$ .

Para obtener las matrices del observador funcional se considera el sistema Takagi-Sugeno de la sección anterior, donde sienten entonces:

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2.7863 \times 10^4 & 6.3511 \times 10^3 & -2.4611 \times 10^4 & 4.997 \times 10^3 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Siguiendo el algoritmo de la sección 5.1.2, tenemos que:

1. Se define la matriz  $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , tal que la matriz  $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  sea de rango columna completo.

2. Se obtienen las matrices:

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \begin{bmatrix} -1.7657 & 0.7869 & -4.9619 & 1.7024 \\ -0.0844 & 0.09944 & -2.0692 & 0.5572 \\ 0.2583 & -1.5284 \times 10^{-15} & -0.0565 & 0.2416 \\ -1.5257 & 0.2869 & -4.9436 & 1.9623 \end{bmatrix} \\
 N_{12} &= \begin{bmatrix} -1.9274 & -1.0008 & -4.7388 & 1.9586 \\ -0.0195 & -0.5201 & -1.9956 & 0.6619 \\ 0.2583 & -1.5284 \times 10^{-15} & -0.0566 & 0.2417 \\ -1.3873 & -1.5008 & -4.7205 & 2.2186 \end{bmatrix} \\
 N_{13} &= \begin{bmatrix} -2.1751 & 0.7870 & -6.0891 & 2.1118 \\ -0.1617 & 0.0944 & -2.5341 & 0.6345 \\ 0.2583 & -1.5284 \times 10^{-15} & -0.0566 & 0.2417 \\ -1.9351 & 0.2870 & -6.0708 & 2.3718 \end{bmatrix} \\
 N_{14} &= \begin{bmatrix} -2.0367 & -1.0008 & -5.8660 & 2.3680 \\ -0.0968 & 0.5201 & -2.4605 & 0.7792 \\ 0.2583 & -1.5284 \times 10^{-15} & -0.0566 & 0.2417 \\ -1.7967 & -1.5008 & -5.8477 & 2.9279 \end{bmatrix} \\
 N_2 &= \begin{bmatrix} 0.4800 & 0 & 0.0366 & -0.4800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0366 & 0 & 0.8503 & -0.0366 \\ -0.4800 & 0 & -0.0366 & 0.4800 \\ -0.0110 & 0 & -0.2551 & 0.0110 \\ 0.1330 & 0 & -0.2441 & -0.1330 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0.1500 & 0.3000 & 0 & 0.3000 \\ 0.1500 & 0.3000 & 0.1500 & 0 \\ 0.1500 & 0 & 0.1500 & 0 \\ 0.1500 & 0.3000 & 0.1500 & 0.3000 \end{bmatrix} \\
 & \quad \quad \quad K = \begin{bmatrix} 0.1500 & 0 \\ 0.1500 & 0.1500 \\ 0.1500 & 0.1500 \\ 0.1500 & 0.1500 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$P = [-0.3646 \quad 3.7837 \quad -0.2681 \quad -1.3021] \times 10^4, \quad Q = [2.5090 \quad -2.7931] \times 10^4$$

3. Resolviendo la LMI se obtiene:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2.4100 & -1.3728 & 0.2523 & -1.2936 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3728 & 2.6536 & -2.3715 & 0.3679 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2523 & -2.3715 & 7.2732 & -0.5786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2936 & 0.3679 & -0.5786 & 1.1294 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4480 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4480 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4480 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4480 \end{bmatrix}$$


---

4. Considerando la matriz  $\mathcal{L} = ones_{12 \times 14} \times 10^{-3}$  y el escalar  $\sigma = 200$  para resolver las LMIs de la ecuación (5.44) se obtuvieron las siguientes matrices del observador:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{bmatrix} -6.5846 & 36.5184 \\ 8.0752 & 19.6434 \\ 10.2379 & 11.4820 \\ -4.7071 & 52.1389 \end{bmatrix} & F_2 &= \begin{bmatrix} -6.4073 & 36.7156 \\ 8.1328 & 19.7102 \\ 10.2384 & 11.4822 \\ -4.5295 & 52.3363 \end{bmatrix} \\
 F_3 &= \begin{bmatrix} -13.2401 & 39.1399 \\ 5.9410 & 20.1002 \\ 10.2379 & 11.4820 \\ -11.3626 & 54.7604 \end{bmatrix} & F_4 &= \begin{bmatrix} -13.0628 & 39.3372 \\ 5.9986 & 20.1670 \\ 10.2384 & 11.4822 \\ -11.1850 & 54.9578 \end{bmatrix} \\
 G_1 = G_2 = G_3 = G_4 &= \begin{bmatrix} -81.6183 & 0.0817 & 0.0817 & 0.0817 \\ 0.0817 & -81.6183 & 0.0817 & 0.0817 \\ 0.0817 & 0.0817 & -81.6183 & 0.0817 \\ 0.0817 & 0.0817 & 0.0817 & -81.6183 \end{bmatrix} \\
 H_1 &= \begin{bmatrix} 0.2321 & 0.2321 & 0.2321 & 0.2321 \\ 0.1701 & 0.1701 & 0.1701 & 0.1701 \\ 0.0927 & 0.0927 & 0.0927 & 0.0927 \\ 0.2608 & 0.2608 & 0.2608 & 0.2608 \end{bmatrix} & H_2 &= \begin{bmatrix} 0.2659 & 0.2659 & 0.2659 & 0.2659 \\ 0.1917 & 0.1917 & 0.1917 & 0.1917 \\ 0.1015 & 0.1015 & 0.1015 & 0.1015 \\ 0.2996 & 0.2996 & 0.2996 & 0.2996 \end{bmatrix} \\
 H_3 &= \begin{bmatrix} 0.2335 & 0.2335 & 0.2335 & 0.2335 \\ 0.1708 & 0.1708 & 0.1708 & 0.1708 \\ 0.0929 & 0.0929 & 0.0929 & 0.0929 \\ 0.2624 & 0.2624 & 0.2624 & 0.2624 \end{bmatrix} & H_4 &= \begin{bmatrix} 0.2675 & 0.2675 & 0.2675 & 0.2675 \\ 0.1926 & 0.1926 & 0.1926 & 0.1926 \\ 0.1017 & 0.1017 & 0.1017 & 0.1017 \\ 0.3015 & 0.3015 & 0.3015 & 0.3015 \end{bmatrix} \\
 J &= \begin{bmatrix} 0.1180 \\ 0.0507 \\ 0 \\ 0.1180 \end{bmatrix} & M_1 = M_2 = M_3 = M_{24} &= \begin{bmatrix} 0.0043 & 0.0024 \\ 0.0043 & 0.0024 \\ 0.0043 & 0.0024 \\ 0.0043 & 0.0024 \end{bmatrix} \\
 S_1 = S_2 = S_3 = S_4 &= \begin{bmatrix} -0.0130 & 0 & -0.0287 & 0.0130 \\ -0.0130 & 0 & -0.0287 & 0.0130 \\ -0.0130 & 0 & -0.0287 & 0.0130 \\ -0.0130 & 0 & -0.0287 & 0.0130 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El desarrollo de la simulación se llevo a cabo en Matlab R2018b, las condiciones del sistema fueron:  $x(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0]^T$ ,  $x_{TS}(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0]^T$ ,  $v(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\zeta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{z}(0) = 0$ .

En simulación se considera que existe una perturbación externa en la entrada que altera la posición del péndulo H2AT, esto con el fin de validar la ley de control estimada por el observador funcional.

Dicha perturbación se muestra en la Figura 5.3.

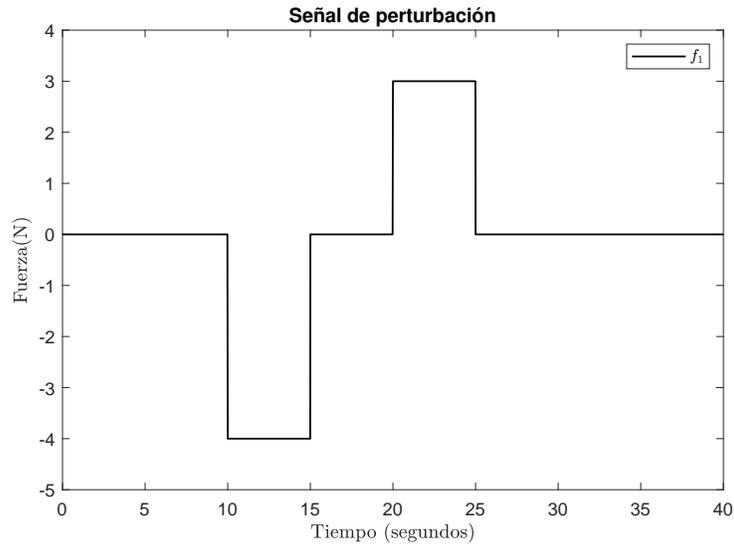


Fig. 5.3. Señal de perturbación

A su vez se considera una incertidumbre paramétrica en la masa 1, con el propósito de un desgaste a través del tiempo. Esto se puede observar en la Figura 5.19.

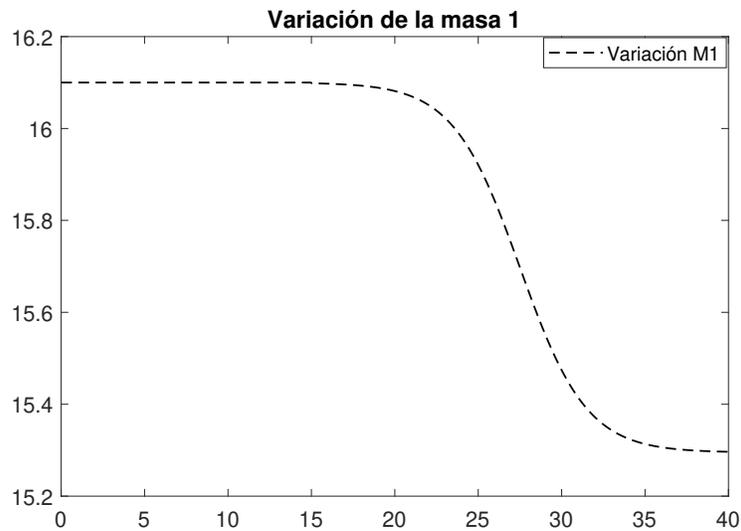


Fig. 5.4. Incertidumbre en la masa 1.

En la Figura 5.12 se puede observar la gráfica de la ley del control del sistema ante una perturbación y una incertidumbre paramétrica. Esta ley de control regula el comportamiento del péndulo H2AT.

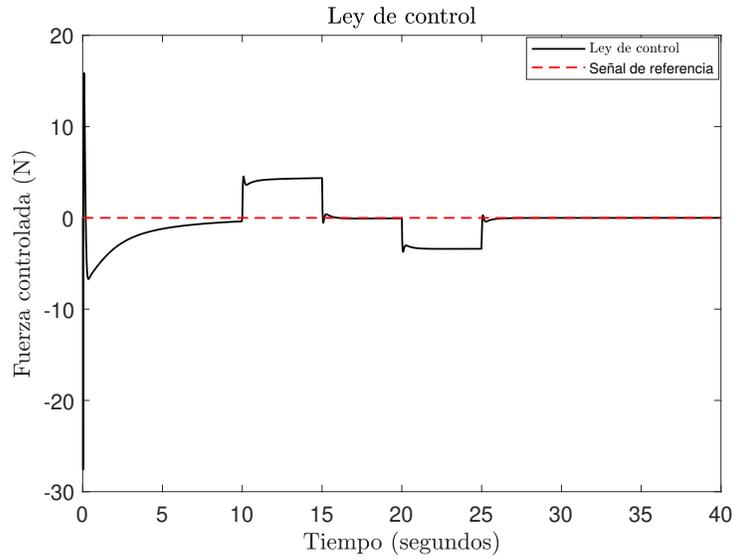


Fig. 5.5. Respuesta de la ley de control.

En la Figura 5.6 se observa el comportamiento de la posición lineal  $x_1(t)$  y la velocidad lineal  $x_2(t)$  considerando una incertidumbre de desgaste en la masa 1 la cual esta representada en la Figura 5.19 y una perturbación en la entrada la cual el comportamiento se puede observar en la Figura 5.3. A pesar de esto, los estados  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  convergen a lo establecido.

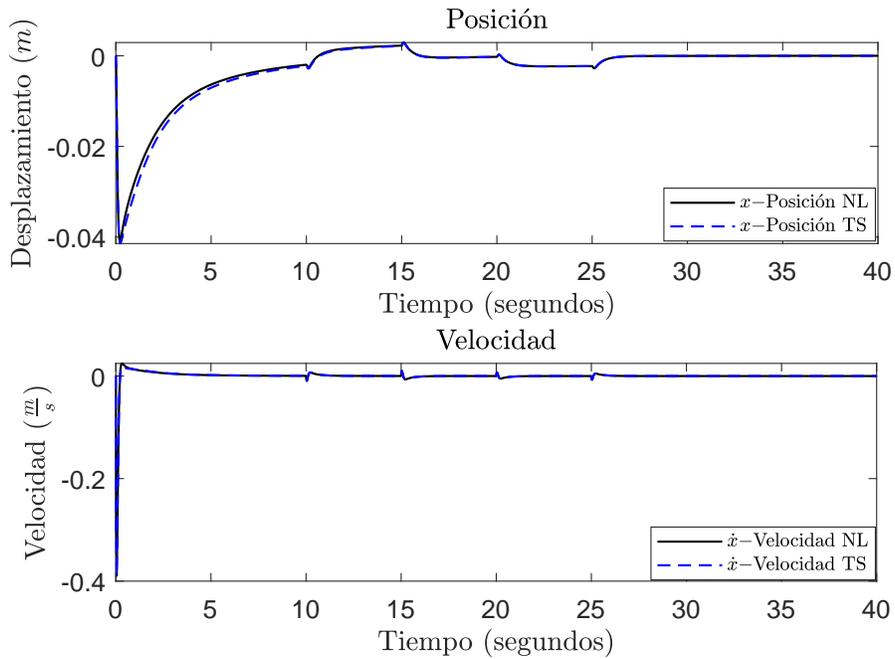


Fig. 5.6. Respuesta de los estados de posición y velocidad.

En la Figura 5.7 se muestra la posición angular  $x_3(t)$  y la velocidad angular  $x_4(t)$  considerando una incertidumbre de desgaste en la masa 1 la cual esta representada en la Figura 5.19 y una perturbación en la entrada la cual el comportamiento se puede observar en la Figura 5.3. A pesar de esto, los estados  $x_3(t)$  y  $x_4(t)$  convergen a lo establecido debido la ley de control que se obtuvo por el observador funcional.

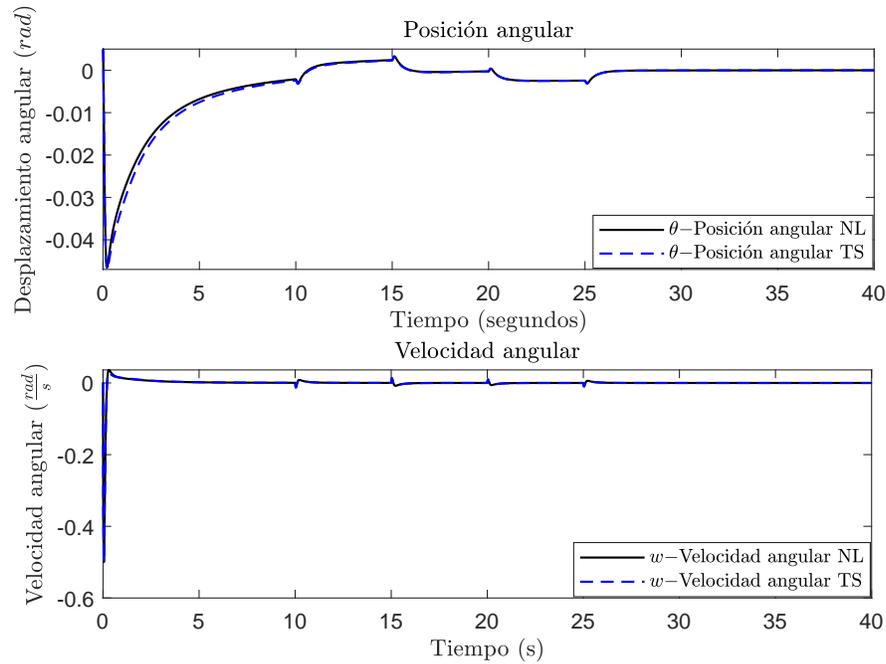


Fig. 5.7. Respuesta de los estados de posición y velocidad angular.

## 5.2. Observador funcional (estimación de entrada desconocida)

Para el diseño de este observador se utiliza el segundo enfoque del observador funcional dinámico generalizado el cual es el estimar una entrada desconocida, dicha entrada desconocida representa a la ley de control de un sistema ya regulado. Esto se puede observar en la Figura 5.8.

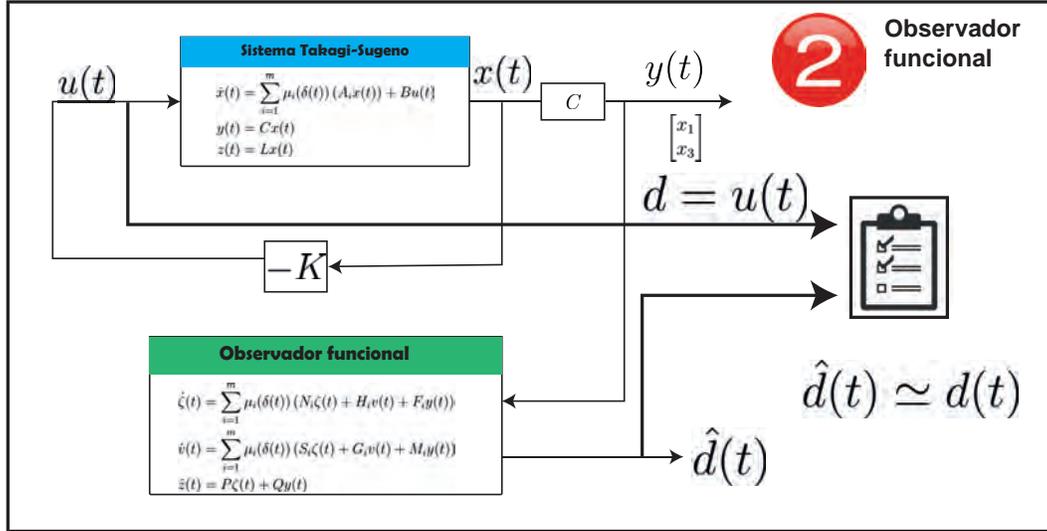


Fig. 5.8. Segundo enfoque del observador funcional.

La ecuación del sistema TS es la siguiente:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 (A_i x(t)) + B \underbrace{u(t)}_{d(t)} \quad (5.46)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (5.47)$$

Con el fin de recuperar la dinámica de esta entrada desconocida, se considera un comportamiento de segundo orden, tal que las siguientes consideraciones se cumplen  $d(t) = u(t)$  y  $\dot{d}(t) = 0$ , por lo que obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \ddot{d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

El sistema aumentado implementado con el integrador queda de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{d}(t) \\ \ddot{d}(t) \end{bmatrix}}_{\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_i & \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}}_{A_i} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix}}_{\beta(t)} \quad (5.49)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix}}_{\beta(t)} \quad (5.50)$$

$$\hat{z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix}}_{\beta(t)} \quad (5.51)$$

por lo que se tiene el siguiente sistema aumentado:

$$\dot{\beta}(t) = \mathbb{A}_i \beta(t) \quad (5.52)$$

$$y(t) = \mathbb{C} \beta(t) \quad (5.53)$$

$$\hat{z}(t) = \mathbb{L} \beta(t) \quad (5.54)$$

donde  $\beta(t)$  es el vector de  $n$  estados,  $y(t)$  representa el vector de las  $p$  variables de salida medidas.  $\mathbb{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $\mathbb{L} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  son matrices conocidas.

Para llevar a cabo el desarrollo del observador funcional dinámico generalizado es necesario verificar la propiedad de observabilidad funcional, la cual es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \mathbb{L} \mathbb{A}_i \\ \mathbb{C} \mathbb{A}_i \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{L} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} \mathbb{C} \mathbb{A}_i \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{L} \end{bmatrix}, \forall_i = 1, \dots, m \quad (5.55)$$

Se considera un observador funcional para la estimación de estados y la ley de control con estructura tipo dinámico generalizado para sistemas Takagi-Sugeno.

$$\dot{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) (N_i \zeta(t) + H_i v(t) + F_i y(t)) \quad (5.56)$$

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) (S_i \zeta(t) + G_i v(t) + M_i y(t)) \quad (5.57)$$

$$\hat{z}(t) = P \zeta(t) + Q y(t) \quad (5.58)$$

donde  $\zeta(t) \in \mathbb{R}^{q_0}$  representa el vector auxiliar de estado del observador proporcional integral,  $\dot{v}(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  es un vector auxiliar y la ecuación algebraica (5.58) la cual es el vector de estimación del observador.  $N_i$ ,  $H_i$ ,  $F_i$  y  $Q$  son matrices desconocidas de dimensiones apropiadas a determinar.

Siendo  $T \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  una matriz para obtener:

$$\varepsilon(t) = \zeta(t) - T\beta(t) \quad (5.59)$$

Desarrollando la ecuación de la dinámica del error (5.59) se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\zeta}(t) - T\dot{\beta}(t) \quad (5.60)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) N_i \varepsilon(t) + N_i T + F_i \mathbb{C} - T \mathbb{A}_i \beta(t) + H_i v(t) \quad (5.61)$$

Sustituyendo la ecuación del error de estimación (5.59) en las ecuaciones (5.57) y (5.58) se obtiene:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) S_i \varepsilon(t) + S_i T + M_i \mathbb{C} \beta(t) + G_i v(t) \quad (5.62)$$

$$\hat{z}(t) = P\varepsilon(t) + PT + Q\mathbb{C}\beta(t) \quad (5.63)$$

Suponiendo que las siguientes condiciones se cumplen

$$N_i T + F_i \mathbb{C} - T \mathbb{A}_i = 0 \quad (5.64)$$

$$S_i T + M_i \mathbb{C} = 0 \quad (5.65)$$

$$PT + Q\mathbb{C} = \mathbb{L} \quad (5.66)$$

Por lo que, la dinámica de error de estimación formada por las ecuaciones (5.61) y (5.62) se reescribe como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \mu_i(\delta(t)) \underbrace{\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ S_i & G_i \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_i} \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Utilizando la condición d), la ecuación (5.63) es expresada como:

$$\hat{z}(t) - z(t) = e_z(t) = Pe(t) \quad (5.68)$$

donde en este caso, las matrices  $\mathcal{A}_i$  son estables si y solo si  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = 0$ ,  $\forall_i = 1, \dots, m$ .

A partir de este punto se lleva a cabo el mismo desarrollo de la parametrización del observador funcional dinámico generalizado realizado en la sección (5.1) y el mismo análisis de estabilidad de Lyapunov mostrado en la sección (5.1.2). Sin embargo, lo que se busca con este sistema aumentado es el estimar una entrada desconocida, dicha entrada desconocida regula la posición vertical a cero. El resultado obtenido de este desarrollo se muestra en la sección (5.1.4).

### 5.2.1. Validación del observador funcional de entradas desconocidas

A continuación se muestra la validación del controlador basado en el observador funcional dinámico generalizado de entradas desconocidas para sistemas Takagi-Sugeno aplicado al caso de estudio del péndulo H2AT. En la Figura 5.9 se muestra el esquema de simulación donde se valora la ley de control ante una perturbación en la entrada.

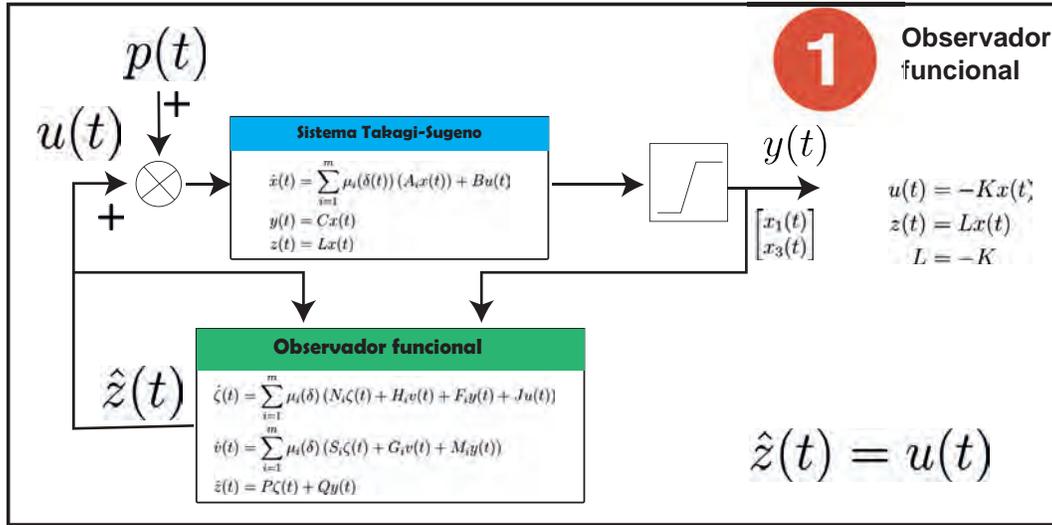


Fig. 5.9. Diagrama del primer enfoque observador funcional.

### 5.2.2. Simulación del observador funcional de entradas desconocidas

*Objetivo de simulación:* En esta sección se muestra la estimación de una ley de control que regule el péndulo H2AT. Los parámetros para la validación del observador funcional se utilizó un paso de integración de  $T_e = 0.001s$ .

Para obtener las matrices del observador funcional se considera el sistema Takagi-Sugeno de la sección anterior, donde siento entonces:

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Siguiendo el algoritmo de la sección 5.1, tenemos que:

1. Se define la matriz  $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , tal que la matriz  $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  sea de rango columna

completo.

2. Se obtienen las matrices:

$$N_{11} = \begin{bmatrix} -16.4065 & 12.5117 & 4.5052 & -0.1051 & 3.9999 & -4.0067 \\ -16.6732 & 12.2117 & 4.0719 & 0.3949 & 4.0665 & -4.0734 \\ -17.0065 & 12.2117 & 3.4052 & 1.3949 & 4.3999 & -4.4067 \\ -16.8065 & 12.3117 & 3.6052 & 1.3949 & 4.0999 & -4.6067 \\ -9.4880 & 7.1991 & 2.5673 & 0.2251 & 2.0637 & -2.5681 \\ -9.8213 & 7.1991 & 1.9006 & 1.2251 & 2.3970 & -2.9015 \end{bmatrix}$$

$$N_{12} = \begin{bmatrix} -16.5623 & 12.4744 & 4.3900 & -0.2270 & 4.3148 & -3.7696 \\ -16.8290 & 12.1744 & 3.9566 & 0.2730 & 4.3815 & -3.8363 \\ -17.1623 & 12.1744 & 3.2900 & 1.2730 & 4.7148 & -4.1696 \\ -16.9623 & 12.2744 & 3.4900 & 1.2730 & 4.4148 & -4.3696 \\ -9.5952 & 7.1687 & 2.4832 & 0.1557 & 2.2709 & -2.4146 \\ -9.9285 & 7.1687 & 1.8165 & 1.1557 & 2.6042 & -2.7479 \end{bmatrix}$$

$$N_{13} = \begin{bmatrix} -20.2384 & 15.3857 & 5.4632 & -0.1051 & 4.9578 & -4.9647 \\ -20.5050 & 15.0857 & 5.0298 & 0.3949 & 5.0245 & -5.0313 \\ -20.8384 & 15.0857 & 4.3632 & 1.3949 & 5.3578 & -5.3647 \\ -20.6384 & 15.1857 & 4.5632 & 1.3949 & 5.0578 & -5.5647 \\ -11.7150 & 8.8694 & 3.1240 & 0.2251 & 2.6204 & -3.1249 \\ -12.0483 & 8.8694 & 2.4574 & 1.2251 & 2.9538 & -3.4582 \end{bmatrix}$$

$$N_{14} = \begin{bmatrix} -20.3942 & 15.3484 & 5.3479 & -0.2270 & 5.2728 & -4.7276 \\ -20.6609 & 15.0484 & 4.9146 & 0.2730 & 5.3395 & -4.7943 \\ -20.9942 & 15.0484 & 4.2479 & 1.2730 & 5.6728 & -5.1276 \\ -20.7942 & 15.1484 & 4.4479 & 1.2730 & 5.3728 & -5.3276 \\ -11.8222 & 8.8389 & 3.0400 & 0.1557 & 2.8276 & -2.9714 \\ -12.1556 & 8.8389 & 2.3733 & 1.1557 & 3.1610 & -3.3047 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0.2667 & -0.2000 & -0.0667 & 0 & -0.0667 & 0.0667 \\ -0.2000 & 0.4000 & -0.2000 & 0 & -0.2000 & 0.2000 \\ -0.0667 & -0.2000 & 0.2667 & 0 & 0.2667 & -0.2667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0667 & -0.2000 & 0.2667 & 0 & 0.2667 & -0.2667 \\ 0.0667 & 0.2000 & -0.2667 & 0 & -0.2667 & 0.2667 \\ -0.2667 & 0.2000 & 0.0667 & 0 & 0.0667 & -0.0667 \\ -0.2667 & 0.2000 & 0.0667 & 0 & 0.0667 & -0.0667 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -0.4667 & -0.4000 & -0.1333 & 1.0000 & -0.1333 & 0.1333 \\ -0.3333 & 0 & -0.6667 & 1.0000 & 0.3333 & -0.3333 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2667 & 0.2333 \\ -0.3333 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5000 & 0 \\ 0.5000 & 0 \\ 0.5000 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Resolviendo la LMI se obtiene:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

donde:

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 18.2171 & -8.2717 & 0.2217 & 2.6057 & -19.2596 & -2.8501 \\ -8.2717 & 17.3281 & -18.4248 & 22.6671 & -16.7435 & -5.5448 \\ 0.2217 & -18.4248 & 43.0596 & -51.1009 & 34.2881 & 11.4056 \\ 2.6057 & 22.6671 & -51.1009 & 73.4261 & -55.6186 & -26.8065 \\ -19.2596 & -16.7435 & 34.2881 & -55.6186 & 74.5677 & 24.0996 \\ -2.8501 & -5.5448 & 11.4056 & -26.8065 & 24.0996 & 16.8187 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = P_{21} = 0_{6 \times 6}$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 34.0339 & 0.3337 & -0.4386 & 0.6026 & -0.0447 & 0.3773 \\ 0.3337 & 36.6756 & -1.0576 & -0.9231 & -0.0514 & 0.6116 \\ -0.4386 & -1.0576 & 33.8952 & -0.7327 & -0.3471 & -0.8788 \\ 0.6026 & -0.9231 & -0.7327 & 33.3979 & -0.0476 & 1.0035 \\ -0.0447 & -0.0514 & -0.3471 & -0.0476 & 33.1398 & 0.0804 \\ 0.3773 & 0.6116 & -0.8788 & 1.0035 & 0.0804 & 33.1721 \end{bmatrix}$$

4. Considerando la matriz  $\mathcal{L} = ones_{12 \times 14}$  y el escalar  $\sigma = 200$  para resolver las LMIs de la ecuación (5.44) se obtuvieron las siguientes matrices del observador:

$$F_1 = \begin{bmatrix} -26.2920 & 107.6208 \\ -35.0505 & 99.1123 \\ 169.5701 & 304.2329 \\ 189.9792 & 324.3920 \\ -22.0651 & 74.4270 \\ 182.5555 & 279.5476 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} -26.4753 & 107.6526 \\ -35.2287 & 99.1491 \\ 169.2552 & 304.1330 \\ 189.6511 & 324.2789 \\ -22.1858 & 74.4520 \\ 182.2982 & 279.4359 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -47.1377 & 117.9034 \\ -55.8948 & 109.3963 \\ 148.6886 & 314.4796 \\ 169.0941 & 334.6351 \\ -36.3616 & 82.5834 \\ 168.2217 & 287.6667 \end{bmatrix} \quad F_4 = \begin{bmatrix} -47.3227 & 117.9335 \\ -56.0745 & 109.4316 \\ 148.3667 & 314.3728 \\ 168.7584 & 334.5145 \\ -36.4833 & 82.6073 \\ 167.9579 & 287.5485 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.2853 & 0.2853 & 0.2853 & 0.2853 & 0.2853 & 0.2853 \\ 0.2519 & 0.2519 & 0.2519 & 0.2519 & 0.2519 & 0.2519 \\ 1.1877 & 1.1877 & 1.1877 & 1.1877 & 1.1877 & 1.1877 \\ 1.2778 & 1.2778 & 1.2778 & 1.2778 & 1.2778 & 1.2778 \\ 0.1785 & 0.1785 & 0.1785 & 0.1785 & 0.1785 & 0.1785 \\ 1.1144 & 1.1144 & 1.1144 & 1.1144 & 1.1144 & 1.1144 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \begin{bmatrix} 0.4582 & 0.4582 & 0.4582 & 0.4582 & 0.4582 & 0.4582 \\ 0.4059 & 0.4059 & 0.4059 & 0.4059 & 0.4059 & 0.4059 \\ 1.8543 & 1.8543 & 1.8543 & 1.8543 & 1.8543 & 1.8543 \\ 1.9939 & 1.9939 & 1.9939 & 1.9939 & 1.9939 & 1.9939 \\ 0.2858 & 0.2858 & 0.2858 & 0.2858 & 0.2858 & 0.2858 \\ 1.7342 & 1.7342 & 1.7342 & 1.7342 & 1.7342 & 1.7342 \end{bmatrix} \\
 H_3 &= \begin{bmatrix} 0.3329 & 0.3329 & 0.3329 & 0.3329 & 0.3329 & 0.3329 \\ 0.2942 & 0.2942 & 0.2942 & 0.2942 & 0.2942 & 0.2942 \\ 1.3698 & 1.3698 & 1.3698 & 1.3698 & 1.3698 & 1.3698 \\ 1.4734 & 1.4734 & 1.4734 & 1.4734 & 1.4734 & 1.4734 \\ 0.2080 & 0.2080 & 0.2080 & 0.2080 & 0.2080 & 0.2080 \\ 1.2836 & 1.2836 & 1.2836 & 1.2836 & 1.2836 & 1.2836 \end{bmatrix} \\
 H_4 &= \begin{bmatrix} 0.5122 & 0.5122 & 0.5122 & 0.5122 & 0.5122 & 0.5122 \\ 0.4539 & 0.4539 & 0.4539 & 0.4539 & 0.4539 & 0.4539 \\ 2.0626 & 2.0626 & 2.0626 & 2.0626 & 2.0626 & 2.0626 \\ 2.2177 & 2.2177 & 2.2177 & 2.2177 & 2.2177 & 2.2177 \\ 0.3193 & 0.3193 & 0.3193 & 0.3193 & 0.3193 & 0.3193 \\ 1.9280 & 1.9280 & 1.9280 & 1.9280 & 1.9280 & 1.9280 \end{bmatrix} \\
 M_1 = M_2 = M_3 = M_4 &= \begin{bmatrix} -2.6870 & -2.6870 \\ -2.6870 & -2.6870 \\ -2.6870 & -2.6870 \\ -2.6870 & -2.6870 \\ -2.6870 & -2.6870 \\ -2.6870 & -2.6870 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \\
 S_1 = S_2 = S_3 = S_4 &= \begin{bmatrix} 5.3741 & 0 & -4.0306 & -1.3435 & 0 & -1.3435 & 1.3435 \\ 5.3741 & 0 & -4.0306 & -1.3435 & 0 & -1.3435 & 1.3435 \\ 5.3741 & 0 & -4.0306 & -1.3435 & 0 & -1.3435 & 1.3435 \\ 5.3741 & 0 & -4.0306 & -1.3435 & 0 & -1.3435 & 1.3435 \\ 5.3741 & 0 & -4.0306 & -1.3435 & 0 & -1.3435 & 1.3435 \\ 5.3741 & 0 & -4.0306 & -1.3435 & 0 & -1.3435 & 1.3435 \end{bmatrix} \times 10^{-8}
 \end{aligned}$$

Los polos de la dinámica del error de estimación del sistema Takagi-Sugeno de la ecuación (5.36) se muestran en la Figura 5.10.

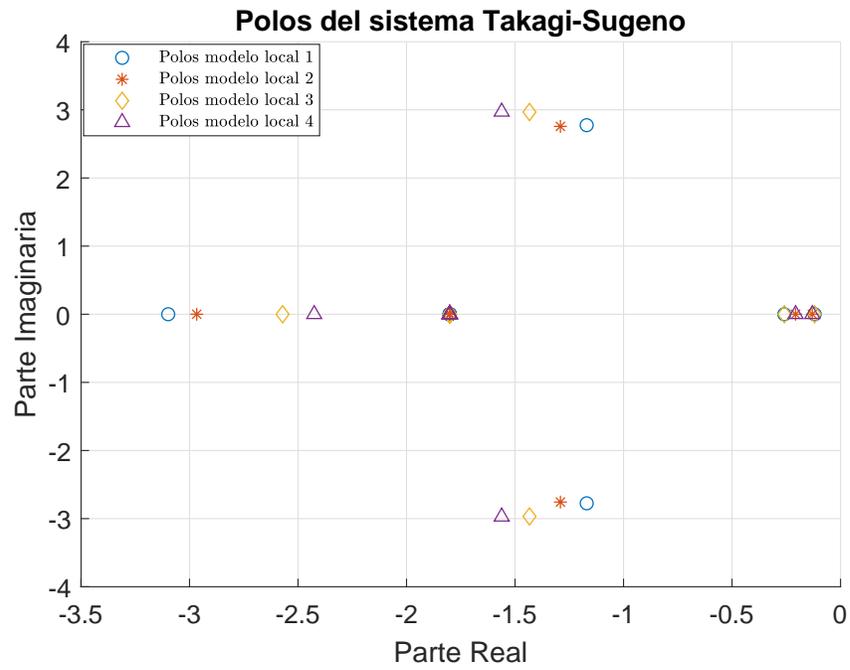


Fig. 5.10. Polos de la dinámica del error de estimación.

$$\begin{aligned}
 eig(\mathbb{A}_{11} - \mathbb{Y}_1 \mathbb{A}_2) = & \begin{bmatrix} -1.1698 + 2.7751i \\ -1.1698 - 2.7751i \\ -3.0982 \\ -0.2593 \\ -0.1194 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \end{bmatrix} ; \quad eig(\mathbb{A}_{12} - \mathbb{Y}_2 \mathbb{A}_2) = \begin{bmatrix} -1.2908 + 2.7570i \\ -1.2908 - 2.7570i \\ -2.9668 \\ -0.2074 \\ -0.1300 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{eig}(\mathbb{A}_{13} - \mathbb{Y}_3\mathbb{A}_2) = \begin{bmatrix} -1.4333 + 2.9680i \\ -1.4333 - 2.9680i \\ -2.5712 \\ -0.2590 \\ -0.1197 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \end{bmatrix} ; \text{eig}(\mathbb{A}_{14} - \mathbb{Y}_4\mathbb{A}_2) = \begin{bmatrix} -1.5615 + 2.9715i \\ -1.5615 - 2.9715i \\ -2.4255 \\ -0.2072 \\ -0.1302 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \\ -1.8009 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar en la Figura 5.10 los polos del sistema Takagi-Sugeno para los 4 modelos locales lineales se encuentran en el semiplano izquierdo garantizando la estabilidad del sistema. Sin embargo, los polos se encuentran ubicados de manera arbitraria.

El desarrollo de la simulación se llevo a cabo en Matlab R2018b, las condiciones del sistema fueron:  $x(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $x_{TS}(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $v(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\zeta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{z}(0) = [0 \ 0]^T$ . A su vez se considera una incertidumbre paramétrica en la masa 1, con el propósito de un desgaste a través del tiempo. Esto se puede observar en la Figura 5.11.

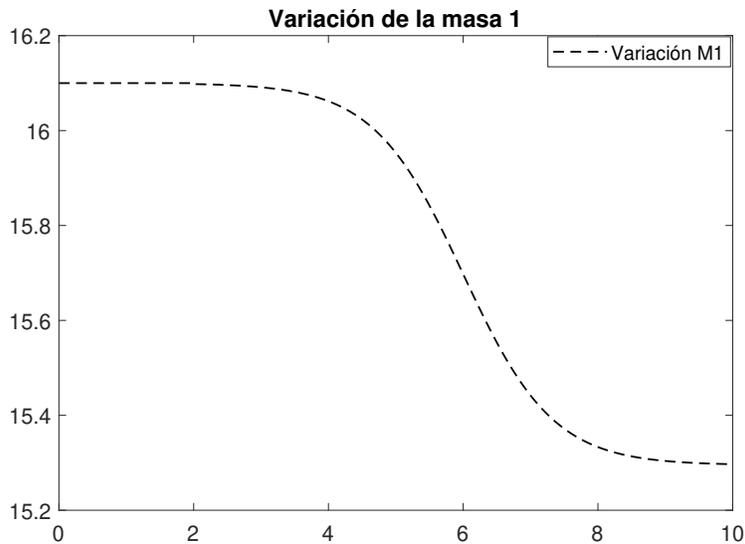


Fig. 5.11. Incertidumbre en la masa 1.

En la Figura 5.12 se puede observar la gráfica de la ley del control del sistema ante una incertidumbre paramétrica. Esta ley de control regula el comportamiento del péndulo H2AT, esto con el propósito de regular a la señal de referencia marcada de interlineado de color rojo.

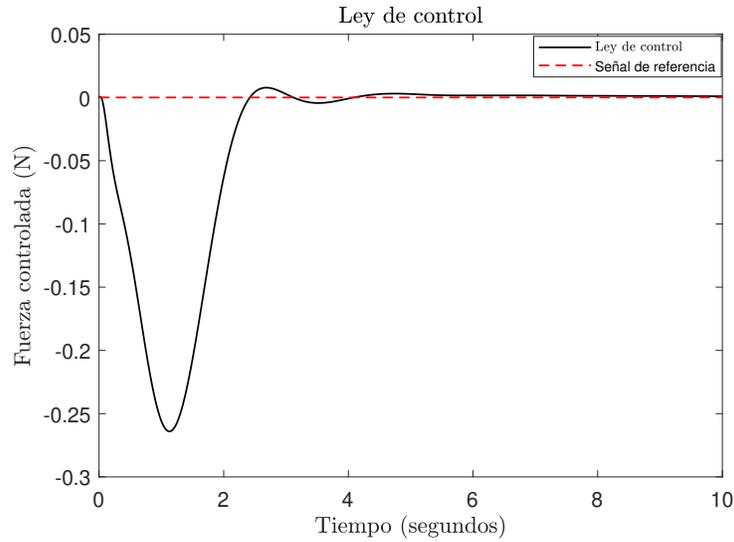


Fig. 5.12. Respuesta de la ley de control.

En la Figura 5.13 se muestra la comparación de las señales de control, una obtenida en el diseño del controlador basado en el observador PI de la sección 4.3 y la señal estima por el observador funcional de entradas desconocidas tal como se ve en la sección 5.2. Además, se muestra un zoom respecto al eje de la fuerza controlada ( $N$ ) en un rango de  $-0.5N$  a  $0.1N$

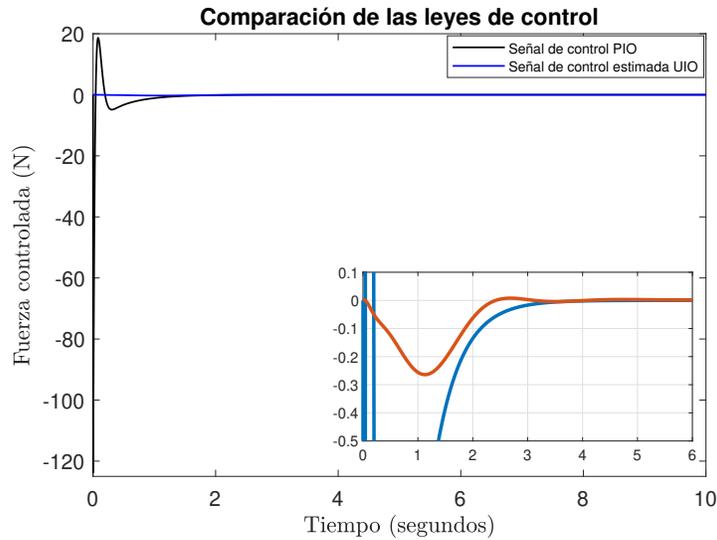


Fig. 5.13. Comparación de la ley de control con región circular.

### 5.2.3. Región LMI vertical aplicada al caso de estudio

Utilizando la ecuación (5.40) la cual es de la desigualdad obtenida en el análisis de estabilidad del observador funcional, se le aplica una región vertical  $\mathcal{D}_1$  para restringir los eigenvalores del sistema, tal como se mostró en la sección 2.5.1. La región vertical aplicada al caso de estudio queda como:

$$\mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} - \mathbb{A}_2^T \mathbb{Y}_i^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i} - \mathbf{X} \mathbb{Y}_i \mathbb{A}_2 + 2\alpha \mathbf{X} < 0 \quad (5.70)$$

En este caso, las matrices desconocidas de la ecuación (5.70) son  $\mathbf{X}$  y  $\mathbb{Y}_i$ , por lo cual la ecuación (5.40) puede ser reescrita como:

$$\mathcal{B} \mathcal{X}_i + (\mathcal{B} \mathcal{X}_i)^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (5.71)$$

donde  $\mathcal{B} = -\mathbb{A}_2^T$ ,  $\mathcal{X}_i = \mathbb{Y}_i^T \mathbf{X}$ ,  $\mathcal{D}_i = \mathbb{A}_{1i}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbb{A}_{1i} + 2\alpha \mathbf{X}$ . Posteriormente, utilizando el lema de eliminación Skelton et al. (2017), la desigualdad (5.71) es equivalente a:

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0, \quad \mathcal{B} \mathcal{B}^T > 0 \quad (5.72)$$

Del mismo modo, en la ecuación (5.72) se obtiene la desigualdad matricial lineal a resolver. Donde las matrices  $\mathbb{Y}_i$  son parametrizadas de la siguiente manera:

$$\mathbb{Y}_i = \mathbf{X}^{-1} \left( -\sigma \mathcal{B}^T + \sqrt{\sigma} \mathcal{L} \Gamma_i^{1/2} \right)^T \quad (5.73)$$

donde  $\mathcal{L}$  es cualquier matriz tal que  $\|\mathcal{L}\| < 1$  y  $\sigma > 0$  es cualquier escalar tal que:

$$\Gamma_i = \sigma \mathcal{B} \mathcal{B}^T - \mathcal{D}_i > 0 \quad (5.74)$$

Finalmente, se muestra una secuencia de pasos a seguir para desarrollar el diseño de un observador funcional:

#### Simulación del observador funcional con región vertical LMI

*Objetivo de simulación:* En esta sección se muestra la estimación de una ley de control que regule el péndulo H2AT. Los parámetros para la validación del observador funcional se utilizó un paso de integración de  $T_e = 0.001s$  y una región vertical con valor de  $\alpha = 1.5$ .

Para obtener las matrices del observador funcional se considera el sistema Takagi-Sugeno de la sección anterior, donde sienten entonces:

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Siguiendo el algoritmo de la sección 5.1, tenemos que:

1. Se define la matriz  $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , tal que la matriz  $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  sea de rango columna completo.

2. Se obtienen las matrices:

$$N_{11} = \begin{bmatrix} 3.1562 & 0.0000 & -0.1186 & 0.0000 & -3.0376 & -0.0000 \\ 5.1056 & -0.0001 & -0.2498 & 0.0001 & -4.8558 & 0.0000 \\ 3.1627 & 0.0000 & -0.1215 & 0.0000 & -3.0412 & -0.0001 \\ 5.0141 & -0.0001 & -0.2711 & 0.0001 & -4.7430 & 0.0001 \\ 3.1664 & 0.0001 & -0.1185 & -0.0000 & -3.0478 & -0.0001 \\ 3.0724 & 0.0001 & -0.1110 & -0.0000 & -2.9614 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$N_{12} = \begin{bmatrix} 3.1562 & 0.0001 & -0.1186 & -0.0000 & -3.0376 & 0.0000 \\ 5.1056 & -0.0001 & -0.2498 & 0.0001 & -4.8558 & 0.0001 \\ 3.1627 & 0.0001 & -0.1215 & -0.0000 & -3.0412 & -0.0000 \\ 5.0141 & -0.0001 & -0.2711 & 0.0001 & -4.7430 & 0.0001 \\ 3.1664 & 0.0001 & -0.1185 & -0.0001 & -3.0478 & -0.0000 \\ 3.0724 & 0.0001 & -0.1110 & -0.0001 & -2.9614 & -0.0000 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$N_{13} = \begin{bmatrix} 3.1569 & 0.0000 & -0.1194 & 0.0000 & -3.0376 & -0.0000 \\ 5.1061 & -0.0001 & -0.2504 & 0.0001 & -4.8557 & 0.0000 \\ 3.1635 & 0.0000 & -0.1223 & 0.0000 & -3.0411 & -0.0001 \\ 5.0141 & -0.0001 & -0.2711 & 0.0001 & -4.7430 & 0.0001 \\ 3.1671 & 0.0001 & -0.1193 & -0.0000 & -3.0478 & -0.0001 \\ 3.0729 & 0.0001 & -0.1116 & -0.0000 & -2.9613 & -0.0001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$N_{14} = \begin{bmatrix} 3.1569 & 0.0001 & -0.1194 & -0.0000 & -3.0376 & 0.0000 \\ 5.1061 & -0.0001 & -0.2504 & 0.0001 & -4.8557 & 0.0001 \\ 3.1635 & 0.0001 & -0.1223 & -0.0000 & -3.0412 & -0.0000 \\ 5.0141 & -0.0001 & -0.2711 & 0.0001 & -4.7430 & 0.0001 \\ 3.1671 & 0.0001 & -0.1193 & -0.0001 & -3.0478 & -0.0000 \\ 3.0729 & 0.0001 & -0.1116 & -0.0001 & -2.9613 & -0.0000 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0.3750 & 0 & -0.2500 & 0 & -0.1250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & 0.5000 & 0 & -0.2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1250 & 0 & -0.2500 & 0 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3750 & 0 & -0.2500 & 0 & -0.1250 & 0 \\ 0.1250 & 0 & 0.2500 & 0 & -0.3750 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0 & 0.5000 & 0 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0.5000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0 & 0.5000 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.500 & 0 \\ 0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.500 \\ 0.500 & 0.500 \\ 0.500 & 0.500 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -0.1250 & 1.0000 & -0.2500 & 0 & 0.3750 & -1.0000 \\ 0.6250 & -1.0000 & 0.2500 & 1.0000 & -0.8750 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.0625 & 0.3125 \\ -0.1875 & -0.5625 \end{bmatrix}$$

3. Resolviendo la LMI se obtiene:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

donde:

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.9707 & -0.0946 & -1.2196 & 0.0977 & 0.3904 & -0.1465 \\ -0.0946 & 0.0140 & 0.1594 & -0.0144 & -0.0805 & 0.0162 \\ -1.2196 & 0.1594 & 1.9492 & -0.1646 & -0.9107 & 0.1888 \\ 0.0977 & -0.0144 & -0.1646 & 0.0148 & 0.0824 & -0.0161 \\ 0.3904 & -0.0805 & -0.9107 & 0.0824 & 0.5925 & \\ -0.1465 & 0.0162 & 0.1888 & -0.0161 & -0.0747 & 0.0325 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = P_{21} = 0_{6 \times 6}$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 1.5068 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5068 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5068 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5068 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5068 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5068 \end{bmatrix}$$

4. Considerando el valor de  $\sigma = 200$  para  $\gamma$  y una matriz  $\mathcal{L} = 0_{12 \times 14}$  resolver las LMIs de la ecuación (5.74) se obtuvieron las siguientes matrices del observador:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1.5683 & 1.5224 \\ 2.5461 & 2.4309 \\ 1.5716 & 1.5242 \\ 2.5070 & 2.3715 \\ 1.5734 & 1.5276 \\ 1.5296 & 1.4838 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1.5683 & 1.5224 \\ 2.5461 & 2.4308 \\ 1.5716 & 1.5242 \\ 2.5070 & 2.3715 \\ 1.5734 & 1.5276 \\ 1.5296 & 1.4838 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1.5664 & 1.5232 \\ 2.5448 & 2.4315 \\ 1.5697 & 1.5251 \\ 2.5070 & 2.3715 \\ 1.5715 & 1.5284 \\ 1.5283 & 1.4845 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad F_4 = \begin{bmatrix} 1.5664 & 1.5232 \\ 2.5448 & 2.4315 \\ 1.5697 & 1.5251 \\ 2.5070 & 2.3715 \\ 1.5715 & 1.5284 \\ 1.5283 & 1.4845 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = \begin{bmatrix} -3.4038 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.4038 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.4038 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4038 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.4038 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.4038 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.1155 & -0.2510 & -0.2225 & -0.0642 & -0.2409 & -0.0872 \\ 0.1831 & -0.4027 & -0.3598 & -0.1010 & -0.3787 & -0.1410 \\ 0.1158 & -0.2513 & -0.2229 & -0.0644 & -0.2413 & -0.0874 \\ 0.1807 & -0.3933 & -0.3527 & -0.1011 & -0.3718 & -0.1377 \\ 0.1159 & -0.2518 & -0.2232 & -0.0642 & -0.2416 & -0.0875 \\ 0.1128 & -0.2447 & -0.2168 & -0.0624 & -0.2352 & -0.0847 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \begin{bmatrix} 0.1165 & -0.3226 & -0.1562 & -0.1079 & -0.2702 & -0.3016 \\ 0.1846 & -0.5171 & -0.2540 & -0.1710 & -0.4254 & -0.4834 \\ 0.1168 & -0.3231 & -0.1565 & -0.1083 & -0.2706 & -0.3021 \\ 0.1821 & -0.5055 & -0.2490 & -0.1699 & -0.4177 & -0.4736 \\ 0.1168 & -0.3237 & -0.1567 & -0.1081 & -0.2709 & -0.3025 \\ 0.1137 & -0.3146 & -0.1521 & -0.1051 & -0.2637 & -0.2937 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \\
 H_3 &= \begin{bmatrix} 0.1092 & -0.2507 & -0.2145 & -0.1041 & -0.2578 & -0.1431 \\ 0.1729 & -0.4026 & -0.3466 & -0.1651 & -0.4058 & -0.2315 \\ 0.1094 & -0.2510 & -0.2148 & -0.1044 & -0.2582 & -0.1433 \\ 0.1707 & -0.3933 & -0.3397 & -0.1640 & -0.3984 & -0.2267 \\ 0.1095 & -0.2515 & -0.2151 & -0.1043 & -0.2585 & -0.1435 \\ 0.1066 & -0.2443 & -0.2090 & -0.1014 & -0.2516 & -0.1391 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \\
 H_4 &= \begin{bmatrix} 0.1027 & -0.3171 & -0.1472 & -0.1305 & -0.2807 & -0.3343 \\ 0.1625 & -0.5087 & -0.2393 & -0.2074 & -0.4423 & -0.5369 \\ 0.1029 & -0.3175 & -0.1474 & -0.1309 & -0.2811 & -0.3349 \\ 0.1604 & -0.4973 & -0.2344 & -0.2056 & -0.4342 & -0.5264 \\ 0.1029 & -0.3181 & -0.1476 & -0.1308 & -0.2815 & -0.3353 \\ 0.1002 & -0.3091 & -0.1434 & -0.1271 & -0.2739 & -0.3255 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \\
 M_1 = M_2 = M_3 = M_{24} &= \begin{bmatrix} 0.0096 & 0.0356 \\ -0.0161 & -0.0146 \\ 0.0037 & -0.0056 \\ -0.0064 & 0.0018 \\ 0.0059 & -0.0007 \\ 0.2007 & 0.0610 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \\
 S_1 = S_2 = S_3 = S_4 &= \begin{bmatrix} 0.0193 & -0.0000 & 0.0519 & 0.0000 & -0.0712 & -0.0000 \\ -0.0322 & 0.0000 & 0.0030 & -0.0000 & 0.0293 & -0.0000 \\ 0.0074 & -0.0000 & -0.0185 & -0.0000 & 0.0112 & -0.0000 \\ -0.0128 & -0.0000 & 0.0163 & 0.0000 & -0.0035 & 0.0000 \\ 0.0118 & -0.0000 & -0.0132 & 0.0000 & 0.0014 & -0.0000 \\ 0.4014 & -0.0000 & -0.2794 & 0.0000 & -0.1220 & 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^{-7}
 \end{aligned}$$

Los polos de la dinámica del error de estimación del sistema Takagi-Sugeno de la ecuación (5.36) con región vertical se muestran en la Figura 5.14.

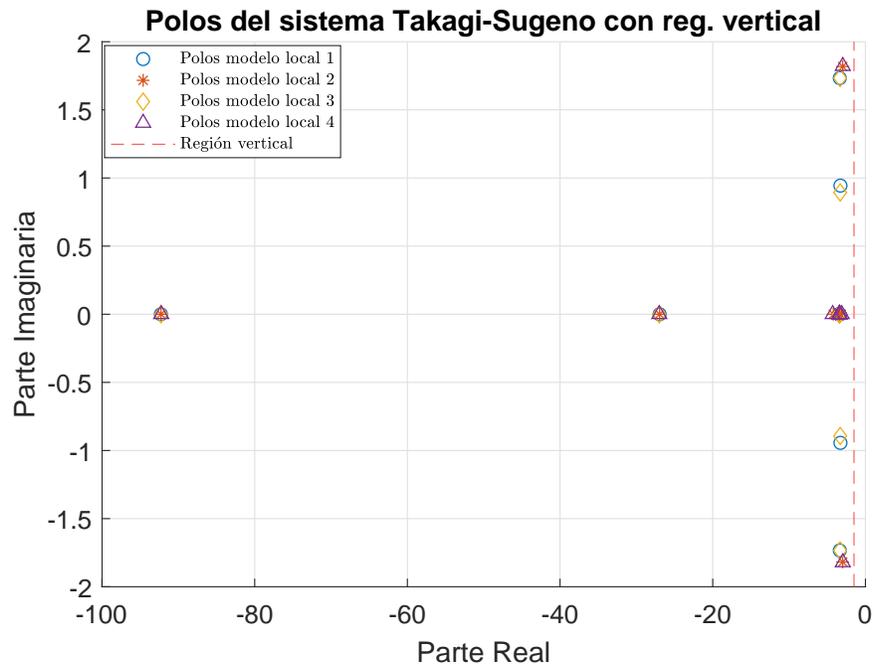


Fig. 5.14. Polos de la dinámica de estimación con región LMI vertical.

$$\begin{aligned}
 eig(\mathbb{A}_{11} - \mathbb{Y}_1 \mathbb{A}_2) &= \begin{bmatrix} -92.2881 \\ -26.9604 \\ -3.3570 + 1.7332i \\ -3.3570 - 1.7332i \\ -3.2756 + 0.9439i \\ -3.2756 - 0.9439i \\ -3.4037 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \\ -3.4038 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \end{bmatrix} & eig(\mathbb{A}_{12} - \mathbb{Y}_2 \mathbb{A}_2) &= \begin{bmatrix} -92.2723 \\ -26.9651 \\ -2.9768 + 1.8180i \\ -2.9768 - 1.8180i \\ -4.2091 \\ -3.1831 \\ -3.4037 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \\ -3.4038 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{eig}(\mathbb{A}_{13} - \mathbb{Y}_3\mathbb{A}_2) = & \begin{bmatrix} -92.2663 \\ -26.9993 \\ -3.3216 + 1.7336i \\ -3.3216 - 1.7336i \\ -3.3025 + 0.8937i \\ -3.3025 - 0.8937i \\ -3.4037 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \\ -3.4038 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \end{bmatrix} & \text{eig}(\mathbb{A}_{14} - \mathbb{Y}_4\mathbb{A}_2) = & \begin{bmatrix} -92.2504 \\ -27.0042 \\ -2.9648 + 1.8210i \\ -2.9648 - 1.8210i \\ -4.2902 \\ -3.1090 \\ -3.4037 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \\ -3.4038 \\ -3.4039 \\ -3.4038 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Como se puede observar en la Figura 5.14 los polos del sistema Takagi-Sugeno para los 4 modelos locales lineales se encuentran en el semiplano izquierdo garantizando la estabilidad del sistema esto contemplando la región LMI del tipo vertical, lo que se busco la re-colocación de polos para una estimación más rápida de la entrada desconocida.

El desarrollo de la simulación se llevo a cabo en Matlab R2018b, las condiciones del sistema fueron:  $x(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $x_{TS}(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\dot{v}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\dot{\zeta}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{z}(0) = [0 \ 0]^T$ . A su vez se considera una incertidumbre paramétrica en la masa 1, con el propósito de un desgaste a través del tiempo. Esto se puede observar en la Figura 5.19.

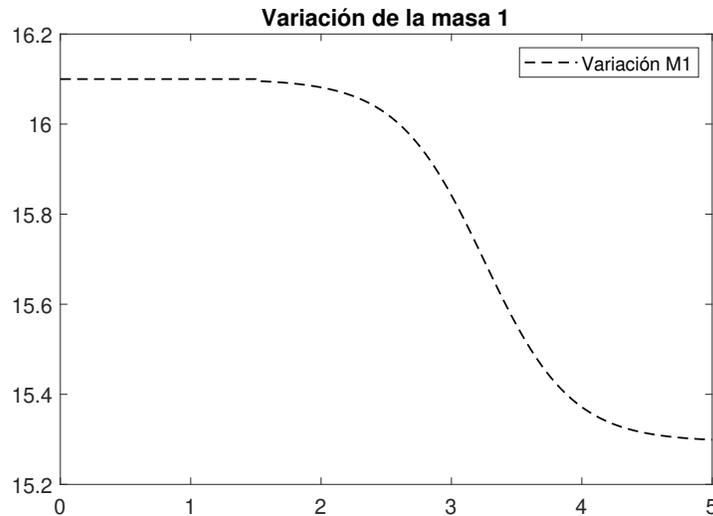


Fig. 5.15. Incertidumbre en la masa 1.

En la Figura 5.16 se puede observar la gráfica de la ley del control del sistema ante una incertidumbre paramétrica. Esta ley de control regula el comportamiento del péndulo H2AT, con el objetivo de regular a la señal de referencia.

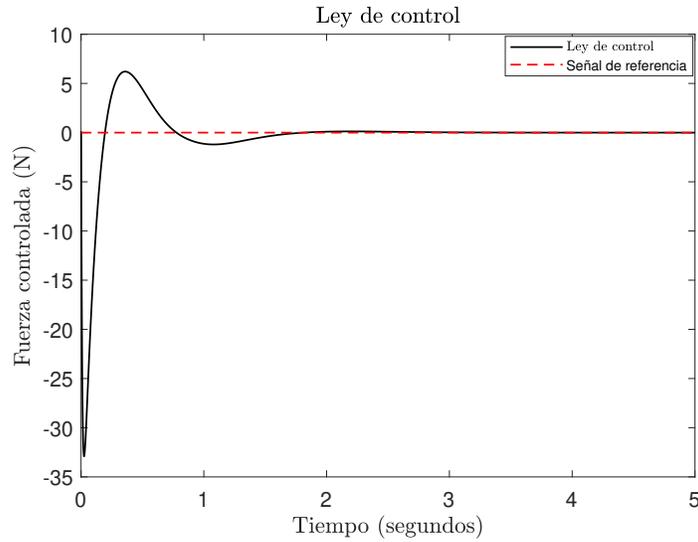


Fig. 5.16. Respuesta de la ley de control con región LMI vertical.

En la Figura 5.17 se muestra la comparación de las señales de control, obtenida en el diseño del controlador basado en el observador PI de la sección 4.3 y la señal estimada por el observador funcional de entradas desconocidas aplicando una región vertical de la sección 5.2.3. Además, se muestra un zoom respecto al eje de la fuerza controlada ( $N$ ) en un rango de  $-5N$  a  $6N$ .

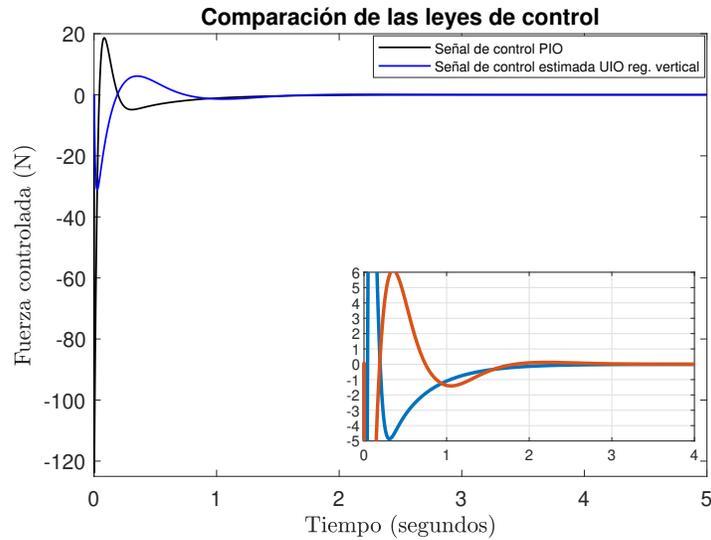


Fig. 5.17. Comparación de la ley de control con región LMI vertical.

### 5.2.4. Región LMI circular aplicada al caso de estudio

Utilizando la ecuación (5.40) la cual es de la desigualdad obtenida en el análisis de estabilidad del observador funcional, se le aplica una región vertical  $\mathcal{D}_1$  para restringir los eigenvalores del sistema, tal como se mostró en la sección 2.5.1. La región circular aplicada al caso de estudio, queda como:

$$\begin{bmatrix} -R\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbb{A}_{1i} + q\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbb{Y}_i\mathbb{A}_2 \\ \mathbb{A}_{1i}^T\mathbf{X} + q\mathbf{X} - \mathbb{A}_2^T\mathbb{Y}_i^T\mathbf{X} & -R\mathbf{X} \end{bmatrix} < 0, \quad \mathbf{X} > 0 \quad (5.76)$$

En este caso, las matrices desconocidas de la ecuación (5.40) son  $\mathbf{X}$  y  $\mathbb{Y}_i$ , por lo cual la ecuación (5.40) puede ser reescrita como:

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_i\mathcal{C} + (\mathcal{B}\mathcal{X}_i\mathcal{C})^T + \mathcal{D}_i < 0 \quad (5.77)$$

donde:  $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{X}_i = \mathbf{X}\mathbb{Y}_i$ ,  $\mathcal{D}_i = \begin{bmatrix} -R\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbb{A}_{1i} + q\mathbf{X} \\ \mathbb{A}_{1i}^T\mathbf{X} + q\mathbf{X} & -R\mathbf{X} \end{bmatrix}$

Posteriormente, utilizando el lema de eliminación Skelton et al. (2017), la desigualdad (5.77) es equivalente a:

$$\mathcal{B}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{B}^{\perp T} < 0, \quad \mathcal{B}\mathcal{B}^T > 0 \quad (5.78)$$

$$\mathcal{C}^\perp \mathcal{D}_i \mathcal{C}^{\perp T} < 0, \quad \mathcal{C}\mathcal{C}^T > 0 \quad (5.79)$$

Las ecuaciones (5.78) y (5.79) se deben de cumplir para la aplicación del lema de eliminación. Tomando en cuenta estas consideraciones, se tiene que  $\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_r$  y  $\mathcal{B}_l, \mathcal{B}_r$  son factores de rango completo de  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  respectivamente con el objetivo que se cumpla lo siguiente:  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l, \mathcal{B}_r$  y  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_l, \mathcal{C}_r$ .

Finalmente, en la ecuación (5.72) se obtiene la desigualdad matricial lineal a resolver. Donde las matrices  $\mathcal{X}_i$  son parametrizadas de la siguiente manera:

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{B}_r^+ \mathcal{K}_i \mathcal{C}_l^+ + \mathcal{Z} - \mathcal{B}_r^+ \mathcal{B}_r \mathcal{Z} \mathcal{C}_l \mathcal{C}_l^+ \quad (5.80)$$

donde las matrices  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{L}$  son matrices con elementos arbitrarios y de dimensiones apropiadas que satisfagan  $\|\mathcal{L}\| < 1$  y  $\mathcal{R} > 0$ . Las matrices  $\mathcal{K}_i$ ,  $\mathcal{S}_i$  y  $\mathcal{V}_i$  se definen como:

$$\mathcal{K}_i = -\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} + \mathcal{S}_i^{\frac{1}{2}} \mathcal{L} (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.81)$$

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T [\mathcal{V}_i - \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T (\mathcal{C}_r \mathcal{V}_i \mathcal{C}_r^T)^{-1} \mathcal{C}_r \mathcal{V}_i] \mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \quad (5.82)$$

$$\mathcal{V}_i = (\mathcal{B}_l \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_l^T - \mathcal{D}_i)^{-1} > 0 \quad (5.83)$$

Finalmente, se muestra una secuencia de pasos a seguir para desarrollar el diseño de un observador funcional:

### Simulación del observador funcional con regiones LMI

*Objetivo de simulación:* En esta sección se muestra la estimación de una ley de control que regule el péndulo H2AT. Los parámetros para la validación del observador funcional se utilizó un paso de integración de  $T_e = 0.001s$  un radio de  $R = 0.5$  y  $q = 1$ .

1. Elegir una matriz  $E \in \mathbb{R}^{q_0 \times n}$  tal que la matriz  $\Sigma$  sea de rango completo.
2. Calcular las matrices  $N_{1i}$ ,  $N_2$ ,  $T$ ,  $K$ ,  $P$  y  $Q$ .
3. Resolver las LMIs de las ecuaciones (5.78) y (5.79).
4. Mediante la ecuación (5.80) obtener las matrices  $Y_i$ .
5. Calcular las demás matrices del observador funcional dinámico generalizado utilizando (5.26) y (5.27) para obtener  $N_i$  y  $K_i$  para calcular  $S_i$ ,  $M_i$ ,  $P$  y  $Q$ , donde la ecuación (5.31) tomando la matriz  $W_{2i} = 0$

Para obtener las matrices del observador funcional se considera el sistema Takagi-Sugeno de la sección anterior, donde sienta entonces:

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

Siguiendo el algoritmo de la sección 5.1, tenemos que:

1. Se define la matriz  $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , tal que la matriz  $\Sigma = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$  sea de rango columna completo.

2. Se obtienen las matrices:

$$N_{11} = \begin{bmatrix} -3.7882 & -3.3969 & 3.3965 & 3.7891 & 3.3970 & -3.3970 \\ -1.5657 & -1.4043 & 1.4039 & 1.5661 & 1.4039 & -1.4039 \\ -3.0627 & -2.7476 & 2.7462 & 3.0641 & 2.7472 & -2.7472 \\ -3.5990 & -3.2289 & 3.2280 & 3.6004 & 3.2285 & -3.2290 \\ -1.3838 & -1.2391 & 1.2399 & 1.3835 & 1.2394 & -1.2394 \\ -2.6925 & -2.4154 & 2.4147 & 2.6937 & 2.4152 & -2.4157 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_{12} = \begin{bmatrix} -3.7732 & -3.3848 & 3.3841 & 3.7740 & 3.3850 & -3.3844 \\ -1.5595 & -1.3994 & 1.3987 & 1.5598 & 1.3991 & -1.3986 \\ -3.0506 & -2.7378 & 2.7361 & 3.0518 & 2.7375 & -2.7370 \\ -3.5848 & -3.2174 & 3.2162 & 3.5860 & 3.2171 & -3.2170 \\ -1.3783 & -1.2348 & 1.2353 & 1.3779 & 1.2351 & -1.2348 \\ -2.6818 & -2.4068 & 2.4058 & 2.6830 & 2.4066 & -2.4068 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_{13} = \begin{bmatrix} -3.8028 & -3.3880 & 3.3877 & 3.8037 & 3.3882 & -3.3882 \\ -1.5718 & -1.4006 & 1.4003 & 1.5722 & 1.4002 & -1.4003 \\ -3.0745 & -2.7404 & 2.7390 & 3.0759 & 2.7400 & -2.7400 \\ -3.6129 & -3.2205 & 3.2196 & 3.6143 & 3.2201 & -3.2206 \\ -1.3891 & -1.2359 & 1.2367 & 1.3888 & 1.2362 & -1.2362 \\ -2.7029 & -2.4091 & 2.4084 & 2.7041 & 2.4089 & -2.4094 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_{14} = \begin{bmatrix} -3.7791 & -3.3684 & 3.3677 & 3.7799 & 3.3687 & -3.3681 \\ -1.5620 & -1.3926 & 1.3919 & 1.5623 & 1.3924 & -1.3918 \\ -3.0553 & -2.7246 & 2.7229 & 3.0566 & 2.7243 & -2.7238 \\ -3.5903 & -3.2018 & 3.2006 & 3.5916 & 3.2016 & -3.2015 \\ -1.3804 & -1.2288 & 1.2294 & 1.3801 & 1.2292 & -1.2288 \\ -2.6860 & -2.3952 & 2.3942 & 2.6872 & 2.3950 & -2.3952 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0.3571 & 0.0714 & -0.0714 & -0.3571 & -0.0714 & 0.0714 \\ 0.0714 & 0.2143 & -0.2143 & -0.0714 & -0.2143 & 0.2143 \\ -0.0714 & -0.2143 & 0.2143 & 0.0714 & 0.2143 & -0.2143 \\ -0.3571 & -0.0714 & 0.0714 & 0.3571 & 0.0714 & -0.0714 \\ -0.0714 & -0.2143 & 0.2143 & 0.0714 & 0.2143 & -0.2143 \\ 0.0714 & 0.2143 & -0.2143 & -0.0714 & -0.2143 & 0.2143 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.2857 & 0.1429 & -0.1429 & 0.2857 & -0.1429 & 0.1429 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 10 & 0.5 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0.5 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 10 & 0 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 & 10 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.4286 & -0.7143 & -0.2857 & 0.5714 & -0.2857 & 0.2857 \\ 0.2857 & -0.1429 & -0.8571 & 0.7143 & 0.1429 & -0.1429 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0714 \\ -0.5 & -0.2143 \end{bmatrix}$$

3. Resolviendo la LMI se obtiene:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

donde:

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 1.7383 & -0.6146 & -0.0817 & -0.6238 & -0.3449 & -0.9836 \\ -0.6146 & 1.1767 & -0.2128 & 0.1922 & -0.2922 & 0.3156 \\ -0.0817 & -0.2128 & 0.8236 & -0.3217 & 0.0832 & -0.3109 \\ -0.6238 & 0.1922 & -0.3217 & 0.8675 & 0.1223 & -0.0907 \\ -0.3449 & -0.2922 & 0.0832 & 0.1223 & 0.4921 & 0.1442 \\ -0.9836 & 0.3156 & -0.3109 & -0.0907 & 0.1442 & 1.6011 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = P_{21} = 0_{6 \times 6}$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 1.2162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2162 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2162 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2162 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2162 \end{bmatrix}$$

4. Considerando el valor de  $\sigma = 200$  para y una matriz  $\mathcal{L} = 0_{12 \times 14}$  resolver las LMIs de las ecuaciones (5.78)-(5.79) se obtuvieron las siguientes matrices del observador:

$$F_1 = \begin{bmatrix} -98.3500 & 231.6428 \\ -98.1000 & 116.9784 \\ -98.6000 & 193.8024 \\ -98.3500 & 221.2978 \\ -66.1474 & 102.5324 \\ -66.6474 & 169.0114 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -98.5651 & 230.1719 \\ -98.3151 & 116.2736 \\ -98.8151 & 192.5812 \\ -98.5651 & 219.8916 \\ -66.2930 & 101.9244 \\ -66.7930 & 167.9518 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -121.0989 & 251.7563 \\ -120.8489 & 130.2073 \\ -121.3489 & 211.6715 \\ -121.0989 & 240.8296 \\ -81.5495 & 113.8667 \\ -82.0495 & 184.4043 \end{bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} -121.3140 & 249.6616 \\ -121.0640 & 129.2445 \\ -121.5640 & 209.9458 \\ -121.3140 & 238.8306 \\ -81.6951 & 113.0308 \\ -82.1951 & 182.9012 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = \begin{bmatrix} -1.0081 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 \\ -0.0082 & -1.0081 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 \\ -0.0082 & -0.0082 & -1.0081 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 \\ -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -1.0081 & -0.0082 & -0.0082 \\ -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -1.0081 & -0.0082 \\ -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -0.0082 & -1.0081 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 \\ -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 \\ -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 \\ -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 \\ -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 \\ -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -6.1879 & -6.1879 & -6.1879 & -6.1879 & -6.1879 & -6.1879 \\ -2.5574 & -2.5574 & -2.5574 & -2.5574 & -2.5574 & -2.5574 \\ -5.0044 & -5.0044 & -5.0044 & -5.0044 & -5.0044 & -5.0044 \\ -5.8812 & -5.8812 & -5.8812 & -5.8812 & -5.8812 & -5.8812 \\ -2.2590 & -2.2590 & -2.2590 & -2.2590 & -2.2590 & -2.2590 \\ -4.3992 & -4.3992 & -4.3992 & -4.3992 & -4.3992 & -4.3992 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 & -6.2112 \\ -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 & -2.5671 \\ -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 & -5.0233 \\ -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 & -5.9034 \\ -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 & -2.2675 \\ -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 & -4.4158 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} -6.1740 & -6.1740 & -6.1740 & -6.1740 & -6.1740 & -6.1740 \\ -2.5517 & -2.5517 & -2.5517 & -2.5517 & -2.5517 & -2.5517 \\ -4.9931 & -4.9931 & -4.9931 & -4.9931 & -4.9931 & -4.9931 \\ -5.8680 & -5.8680 & -5.8680 & -5.8680 & -5.8680 & -5.8680 \\ -2.2539 & -2.2539 & -2.2539 & -2.2539 & -2.2539 & -2.2539 \\ -4.3893 & -4.3893 & -4.3893 & -4.3893 & -4.3893 & -4.3893 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.2431 \\ 0.0000 & 0.2431 \\ 0.0000 & 0.2431 \\ -0.0000 & 0.2431 \\ 0.0000 & 0.2431 \\ -0.0000 & 0.2431 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.2423 \\ 0.0000 & 0.2423 \\ 0.0000 & 0.2423 \\ -0.0000 & 0.2423 \\ 0.0000 & 0.2423 \\ -0.0000 & 0.2423 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.2586 \\ 0.0000 & 0.2586 \\ 0.0000 & 0.2586 \\ -0.0000 & 0.2586 \\ 0.0000 & 0.2586 \\ -0.0000 & 0.2586 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.2576 \\ 0.0000 & 0.2576 \\ 0.0000 & 0.2576 \\ -0.0000 & 0.2576 \\ 0.0000 & 0.2576 \\ -0.0000 & 0.2576 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \begin{bmatrix} -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \end{bmatrix} \\
 S_2 &= \begin{bmatrix} 0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \end{bmatrix} \\
 S_3 &= \begin{bmatrix} -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \end{bmatrix} \\
 S_4 &= \begin{bmatrix} -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \\ -0.0050 & -0.0045 & 0.0045 & 0.0050 & 0.0045 & -0.0045 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Los polos de la dinámica del error de estimación del sistema Takagi-Sugeno de la ecuación (5.36) se muestran en la Figura 5.18.

$$\begin{aligned}
 eig(\mathbb{A}_{11} - \mathbb{Y}_1 \mathbb{A}_2) &= \begin{bmatrix} -1.3580 \\ -0.7229 + 0.3821i \\ -0.7229 - 0.3821i \\ -0.4308 + 0.1392i \\ -0.4308 - 0.1392i \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} & eig(\mathbb{A}_{12} - \mathbb{Y}_2 \mathbb{A}_2) &= \begin{bmatrix} -0.4481 + 0.1890i \\ -0.4481 - 0.1890i \\ -0.4298 + 0.0000i \\ -1.2031 + 0.0876i \\ -1.2031 - 0.0876i \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{eig}(\mathbb{A}_{13} - \mathbb{Y}_3\mathbb{A}_2) = & \begin{bmatrix} -1.3582 \\ -0.7229 + 0.3821i \\ -0.7229 - 0.3821i \\ -0.4308 + 0.1392i \\ -0.4308 - 0.1392i \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} & \text{eig}(\mathbb{A}_{14} - \mathbb{Y}_4\mathbb{A}_2) = & \begin{bmatrix} -0.4481 + 0.1890i \\ -0.4481 - 0.1890i \\ -0.4297 \\ -1.2006 + 0.0901i \\ -1.2006 - 0.0901i \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

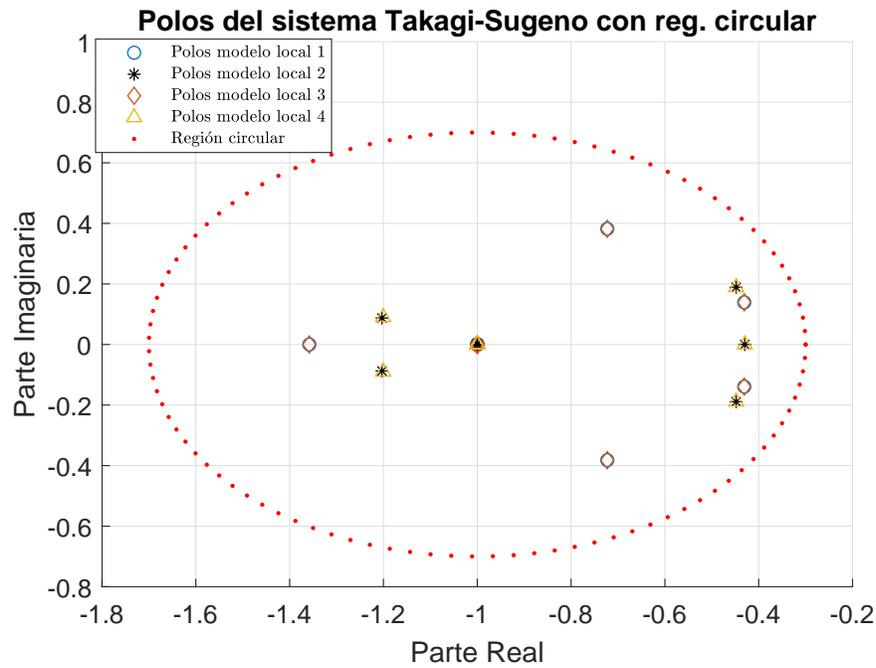


Fig. 5.18. Polos de la dinámica de error de estimación con región LMI circular.

Como se puede observar en la Figura 5.18 los polos del sistema Takagi-Sugeno para los 4 modelos locales lineales se encuentran en el semiplano izquierdo garantizando la estabilidad del sistema esto contemplando la región LMI del tipo circular, con el propósito de la re-colocación de polos del sistema para una estimación más rápida y sin sobre tiros de la entrada desconocida.

El desarrollo de la simulación se llevo a cabo en Matlab R2018b, las condiciones del sistema fueron:  $x(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $x_{TS}(0) = [0 \ 0 \ 0.005 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\dot{v}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\dot{\zeta}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\hat{z}(0) = [0 \ 0]^T$ . A su vez se considera una incertidumbre paramétrica en la masa 1, con el propósito de un desgaste a través del tiempo. Esto se puede observar en la Figura 5.19.

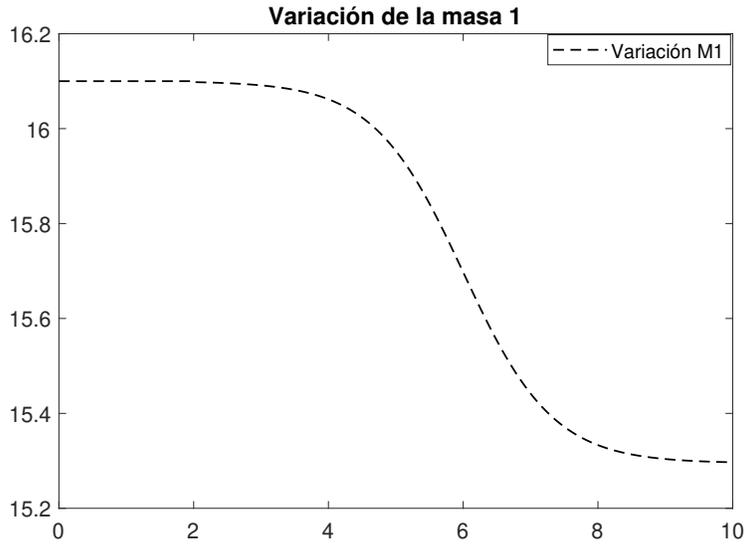


Fig. 5.19. Incertidumbre en la masa 1.

En la Figura 5.20 se puede observar la gráfica de la ley del control del sistema ante una perturbación y una incertidumbre paramétrica. Esta ley de control regula el comportamiento del péndulo H2AT, con el objetivo de regular a la señal de referencia.

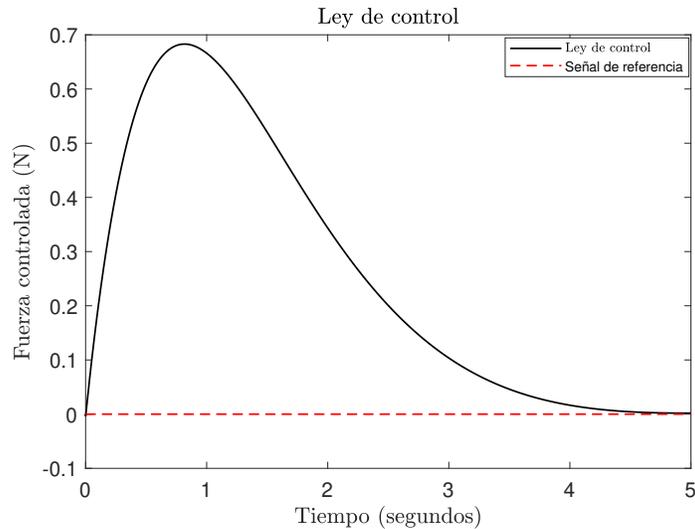


Fig. 5.20. Respuesta de la ley de control con región LMI circular.

Por otro lado, en la Figura 5.21 se muestra la comparación de las señales de control, una obtenida en el diseño del controlador basado en el observador PI de la sección 4.3 y la señal estima por el observador funcional de entradas desconocidas aplicándole a este una región circular de la sección 5.2.4. Además se muestra un zoom respecto al eje de la fuerza controlada ( $N$ ) en un rango de  $-5N$  a  $3N$  y en un tiempo de  $0s$  a  $4s$ .

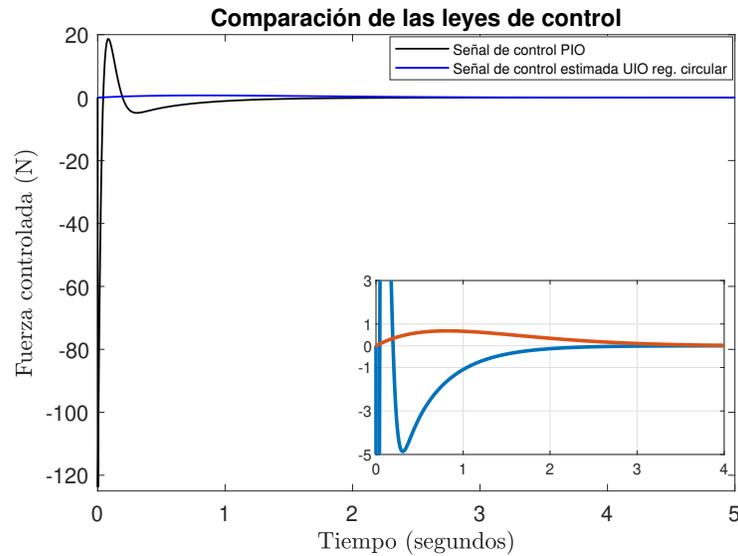


Fig. 5.21. Comparación de la ley de control con LMI región circular.

# Capítulo 6

## Conclusiones generales

Llevando a cabo la búsqueda de revisión bibliográfica sobre sistemas biomecánicos que aborden las lesiones en la médula espinal es una problemática a resolver debido a que afecta a la vida cotidiana de una persona tras sufrir algún accidente o caída que pueda provocar una lesión en la médula espinal. Esta clase de lesiones se califican según el origen y la gravedad de la lesión, la escala ASIA clasifica la lesión su gravedad.

Para este trabajo de tesis se trabajó con el modelado de la dinámica de una persona con lesión del tipo completa en la médula espinal, dicha representación la aborda lo que es el péndulo H2AT, el cual es el caso de estudio para este tema de tesis. Este sistema se encuentra compuesta por dos ecuaciones diferenciales, en las cuales contempla cuatro variables de estado del sistema, las cuales son la posición lineal, velocidad lineal, posición angular y la velocidad angular. en esta parte se describió a fondo como funciona el modelo y algunas restricciones físicas propias del sistema.

Debido a que el caso de estudio es un sistema no lineal, se llevó a cabo la representación del modelado por sistemas Takagi-Sugeno debido a que se puede abordar los modelos lineales de una forma más simple, para posteriormente aplicar teoría clásica de control. Para este trabajo de investigación se presentó lo que fue el modelado del péndulo H2AT el cual representa la dinámica de una persona con lesión en la médula espinal esto mediante el enfoque del sector no lineal para sistemas Takagi-Sugeno. En esta parte contemplando las restricciones físicas que tiene el caso de estudio se llevo a cabo una reducción de las no linealidades del sistema generando así una reducción en los modelos locales lineales del sistema. Comparando finalmente la representación del sistema

no lineal respecto al modelado por sistemas Takagi-Sugeno en lazo abierto del sistema y verificar que el sistema Takagi-Sugeno represente fielmente la dinámica del sistema no lineal dentro de los límites con los que se constituyó la representación Takagi-Sugeno.

Una vez que se tiene el modelo no lineal en representación de sistemas Takagi-Sugeno se diseñó un observador para estimar las variables no medibles del caso de estudio, que en este caso son la velocidad lineal y la velocidad angular. Para dicha estimación se llevó a cabo el diseño de un observador proporcional integral, el cual estimará las 4 variables de estado del sistema. Una vez desarrollado el observador se utilizó lo que es un control por retroalimentación de estados, este con el fin de regular el sistema. El desarrollo de este control basado en el observador proporcional integral obtuvo una publicación en el CNCA 2023 (Congreso Nacional de Control Automático).

En el trabajo de tesis se presentó lo que fue el diseño de un observador funcional dinámico generalizado (GDFO) para sistemas Takagi-Sugeno. Para ello se contemplan las consideraciones suficientes y necesarias para que el observador sea utilizado. La condición de estabilidad del observador estuvo establecida mediante desigualdades matriciales lineales. Además se implementó el lema de eliminación para asegurar que el solucionador encuentre una solución para las LMIs con el objetivo de obtener la representación de la estructura generalizada del observador. El diseño de este observador funcional dinámico generalizado fue con el enfoque de estimar una ley de control que proporcione la regulación del sistema. Del mismo modo, se llevó a cabo el diseño de un observador funcional dinámico generalizado para sistemas Takagi-Sugeno. Ahora bajo el enfoque de estimar una entrada desconocida, dicha entrada desconocida representa una ley de control que regula a cero. A su vez se consideró el uso de regiones LMI (vertical y circular) para asegurar la estabilidad del sistema bajo la región establecida.

Finalmente, se concluye que se cumplieron los objetivos establecidos para el tema de tesis, se mostró distintos esquemas de control que puedan regular al péndulo H2AT contemplando las restricciones físicas del modelo.

## 6.1. Trabajos futuros

Tomando en cuenta este trabajo de investigación se pueden derivar distintos trabajos, algunos de ellos se mencionan a continuación:

1. Aplicar un retardo al sistema (entrada, salida o estados) con el fin de abordar teoría de control que aborden esta clase de retardos.
2. Utilizar un observador funcional dinámico generalizado para la estimación de una entrada desconocida que contemple un retardo en el sistema.
3. Abordar al péndulo H2AT con un grado de libertad extra que represente de manera más natural la dinámica de una persona con lesión en la médula espinal.

# Bibliografía

- Blandeau, M., Estrada-Manzo, V., Guerra, T., Pudlo, P., and Gabrielli, F. (2018). Fuzzy unknown input observer for understanding sitting control of persons living with spinal cord injury. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67:381–389.
- Blandeau, M., Estrada-Manzo, V., Guerra, T. M., Pudlo, P., and Gabrielli, F. (2016). Unknown input observer for understanding sitting control of persons with spine cord injury. *IFAC-PapersOnLine*, 49(5):175–181. 4th IFAC Conference on Intelligent Control and Automation SciencesICONS 2016.
- Blandeau, M., Guerra, T., Estrada-Manzo, V., Pudlo, P., and Gabrielli, F. (2017). Unknown input observer based on discrete-time nonlinear descriptor model for understanding sitting control. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):820–825. 20th IFAC World Congress.
- Chiu, C.-H., Hung, Y.-T., and Peng, Y.-F. (2021). Design of a decoupling fuzzy control scheme for omnidirectional inverted pendulum real-world control. *IEEE Access*, 9:26083–26092.
- Cholewicki, J., Juluru, K., and McGill, S. M. (1999). Intra-abdominal pressure mechanism for stabilizing the lumbar spine. *Journal of Biomechanics*, 32(1):13–17.
- Craig, J. J. (2005). *Introduction to robotics*. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, 3rd ed edition.
- Flores-Hernández, A., Reyes-Reyes, J., Astorga-Zaragoza, C., Osorio-Gordillo, G., and García-Beltrán, C. (2018). Temperature control of an alcoholic fermentation process through the Takagi-Sugeno modeling. *Chemical Engineering Research and Design*, 140:320–330.
- Flores-Martínez, M., Osorio-Gordillo, G., Vargas-Méndez, R., and Reyes-Reyes, J. (2019). Fuzzy

- functional observer for the control of the glucose-insulin system. *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 37(4):5085–5096.
- Guadarrama-Estrada and Osorio-Gordillo (2019). Functional generalized dynamic observer for discrete Takagi-Sugeno systems. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.
- Guerra, T. M., Márquez, R., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2018).  $H_\infty$  LMI-Based observer design for nonlinear systems via Takagi-Sugeno models with unmeasured premise variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3):1498–1509.
- Hamzaoui, F., Khadhraoui, M., and Messaoud, H. (2020). A new functional observer design of delayed singular systems in discret-time and frequency domains. In *2020 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, pages 1–8.
- Hernández, R. and Gaviño, R. (2010). *Introducción A Los Sistemas De Control: Conceptos, aplicaciones y simulación con MATLAB*. Pearson Educación.
- Hieu, T. and Tyrone, F. (2012). *Functional Observers for Dynamical Systems*, volume 420. Springer Science & Business Media.
- Jiancheng Zhang, Zhenhua Wang, M. C. and Wang, Y. (2022). On prescribed-time functional observers of linear descriptor systems with unknown input. *International Journal of Control*, 95(11):3137–3147.
- Jiménez-Gómez and Osorio-Gordillo (2022). Proporcional integral observer design for Takagi-Sugeno system applied to a knee rehabilitator. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.
- Khadhraoui, M. and Messaoud, H. (2020). Design of a functional observer for non-linear singular delayed systems. In *2020 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, pages 1–7.
- Kirshblum, S., Burns, S., Biering-Sørensen, F., Donovan, W., Graves, D., Jha, A., Johansen, M., Jones, L., Krassioukov, A., Mulcahey, M., Schmidt-Read, M., and Waring, W. (2011). International standards for neurological classifications of spinal cord injury (revised edition). *The journal of spinal cord medicine*, 34:535–46.

- Lendek, Z., Guerra, T., Babuška, R., and Schutter, B. D. (2011). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Number 1 ed.
- Mabrouki, L. and Abbassi, B. (2020). Design of functional  $H_\infty$  observer for linear time delay systems with unknown input and bounded disturbance. In *2020 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, pages 1–7.
- Mátyás, A. and Lendek, Z. (2021). Observer design for time-delay T-S fuzzy systems with nonlinear consequents. *IFAC-PapersOnLine*, 54(4):62–67.
- Naami, G., Ouahi, M., Rabhi, A., and Tuan, V. L. B. (2019). Existence and design of functional observers for Takagi-Sugeno systems with time delay. In *2019 International Conference on Wireless Technologies, Embedded and Intelligent Systems (WITS)*, pages 1–6.
- Naami, G., Ouahi, M., Udris, D., Rabhi, A., and Tadeo, F. (2022). Design of a functional observer for fuzzy delayed systems with unknown input. In *2022 IEEE Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*, pages 1–6.
- Nagy, Z. and Lendek, Z. (2019). Observer-based controller design for Takagi-Sugeno fuzzy systems with local nonlinearities. In *2019 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–6.
- Nayduch, D. A. (2011). Los fundamentos: identificación y tratamiento de la lesión medular aguda. *Nursing (Ed. española)*, 29(1):8–15.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. Number 5 ed. Pearson Education.
- Pan, J., Li, R., Wang, S., and Zhang, W. (2021). Fuzzy fault detection observer design for head-two-arms-trunk system. In *2021 IEEE 16th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, pages 261–266.
- Reza, M., Manzo, V., and Borbón, R. (2018). *Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales*. Pearson Educación.
- Skelton, R., Iwasaki, T., and Grigoriadis, K. (2017). *A unified algebraic approach to linear control design*. Routledge.

- Srihi, H., Guerra, T.-M., Nguyen, A.-T., Pudlo, P., and Dequidt, A. (2021). Cascade descriptor observers: Application to understanding sitting control of persons living with spinal cord injury.
- Srihi, H., Guerra, T.-M., Pudlo, P., Nguyen, A.-T., and Blandeau, M. (2022). Recovering control parameters in seated position for people with medullar injury. *Modelling, Measurement and Control C*, 83:21–27.
- Tipler, P. A. and Mosca, G. (2006). *Física para la ciencia y la tecnología*. Ed. Reverté, S.A., Barcelona [u.a.], 5. ed. edition.
- Tornero Dacasa, E. and Sotorres González, G. (2015). Clasificación, pronóstico y tratamiento de las lesiones medulares. SECOT.
- Trinh, H. and Fernando, T. (2012). *Functional Observers for Dynamical Systems*. Springer Berlin Heidelberg.
- Tunga, P. K., Jaiswal, J., and Tomar, N. K. (2023). Functional observers for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE Access*, 11:19680–19689.
- Wu, M., Gao, F., Yu, P., She, J., and Cao, W. (2020). Improve disturbance-rejection performance for an equivalent-input-disturbance-based control system by incorporating a proportional-integral observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(2):1254–1260.
- Xie, W.-B., Wang, T.-Z., Lam, H. K., and Wang, X. (2020). Functional observer–controller method for unmeasured premise variables Takagi-Sugeno systems with external disturbance. *International Journal of Systems Science*, 51(16):3436–3450.
- Xinyan, Z. and Shiya, C. (2019). Robust fault estimation based on proportional integral observer for Takagi-Sugeno fuzzy systems. In *2019 Chinese Automation Congress (CAC)*, pages 834–838.
- You, F., Wang, C., Cheng, S., and Zhang, X. (2020). Robust fault estimation based on proportional integral observer for Takagi-Sugeno fuzzy systems with actuator and sensor faults. In *2020 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, pages 654–658.
- Youssfi, N., Oudghiri, M., and El Bachtiri, R. (2019). Actuator fault estimation and fault tolerant control for vehicle lateral dynamics. *AIP Conference Proceedings*, 2074(1):020027.

- Zaidi, I., Tadeo, F., and Chaabane, M. (2013). Positive observer design for continuous-time takagi-sugeno systems. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5030–5035.
- Zhao, D., Lam, H. K., Li, Y., Ding, S. X., and Liu, S. (2020). A novel approach to state and unknown input estimation for Takagi–Sugeno fuzzy models with applications to fault detection. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 67(6):2053–2063.
- Zhao, D., Wang, Z., Wei, G., and Liu, X. (2021). Nonfragile h state estimation for recurrent neural networks with time-varying delays: On proportional–integral observer design. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 32(8):3553–3565.

# Anexo A

## Elección de actuador para el péndulo H2AT

Para la elección del actuador, se tendrá en cuenta los parámetros del sistema y las unidades de éste. Se conoce que  $u(t)$  es la señal de entrada del sistema, dicha entrada es la fuerza controlada ( $N$ ). Considerando que la fuerza controlada esta expresada en Newtons y contemplando un motor de corriente continua (CD) puede ser una buena opción. Para la elección del motor de CD, es importante considerar los siguientes factores: el par o torque del motor, la velocidad y fuerza que puede generar el motor de corriente continua.

Para calcular el par necesario es necesario considerar lo siguiente:

- La fuerza máxima ( $F$ ) a considerar será de  $30N$ .
- Longitud de brazo ( $r$ ) a considerar es de:  $0.2766m$

El torque o par ( $\tau$ ) se estima como:

$$\tau = F * r \tag{A.1}$$

$$\tau = (30N)(0.2766m) \tag{A.2}$$

$$\tau = 8.298Nm \tag{A.3}$$

Por lo cual se necesita un motor capaz de generar al menos de  $8.298Nm$  de par.

Algunos motores sugeridos son los siguientes:

- Maxon Motor EC-i 40.
  - Par máximo:  $38.3Nm$
  - Voltaje:  $24V$
  - Velocidad sin carga:  $5480rpm$
  - Corriente sin carga:  $355mA$
  - Controlador recomendado: EPOS2
  
- Pololu 37D Metal Gearmotor.
  - Par máximo:  $10Nm$
  - Voltaje:  $12V$
  - Velocidad sin carga:  $75rpm$
  - Corriente sin carga:  $300mA$
  - Controlador recomendado: Simple Motor Controller 18v15
  
- Faulhaber 4490 DC Motor.
  - Par máximo:  $15.8Nm$
  - Voltaje:  $24V$
  - Velocidad sin carga:  $3800rpm$
  - Corriente sin carga:  $270mA$
  - Controlador recomendado: MC 5005